

ÍNDIX

1.	Introducción	1
1.1.	Antecedentes	1
1.2.	Objeto	1
1.3.	Alcance	1
2.	El Pandeo.....	2
2.1	Carga critica de Euler	4
3.	Método de resolución	7
4.	Método de elementos finitos.....	9
4.1.	Concepto general.....	9
4.2.	Sistemas discretos y sistemas continuos	10
4.3.	Hipótesis de discretización	11
4.4.	Función de Interpolación o de Forma.....	12
4.5.	Criterio de convergencia	14
4.6.	Funciones de Forma de una columna.....	16
4.6.1.	Funciones de forma de barra	16
4.6.2.	Funciones de forma de viga	18
5.	Matriz de rigidez elástica	21
5.1.	Matriz de rigidez elástica de barra	25
5.2.	Matriz de rigidez elástica del elemento viga	27
6.	Matriz de rigidez geométrica	30
7.	Los Casos Estudiados.....	33
7.1.	Elementos de sección constante con fuerza aplicada variable	39
7.2.	Elementos con carga puntual intermedia.....	41
7.3.	Análisis con carga puntual descentrada intermedia	44
8.	Resumen de Presupuesto	47
9.	Conclusiones.....	48
10.	Bibliografía.....	49
11.	ANEXOS.....	50
11.1.	Anexo-A.....	50

11.2. Anexo-B.....	55
11.3. Anexo C.....	57

1. Introducción

1.1. Antecedentes

En este trabajo se hará un estudio relacionado con el pandeo de columnas. El pandeo es un fenómeno muy importante en los elementos estructurales sometidos a compresión sobre todo cuando aumenta su esbeltez. Uno de los parámetros más importantes en el estudio del pandeo, es sin duda la carga crítica, porque a partir de un cierto valor de la carga la estructura entra en una situación de inestabilidad. Por este motivo es esencial saber el valor de carga crítica, el cual puede variar según diferentes condiciones de contorno, disposición de carga y geometría de la estructura. Pero el valor de la carga crítica depende de la longitud del pandeo que es otro de los parámetros determinantes en el fenómeno del pandeo. La longitud del pandeo es la longitud de la columna multiplicado por un coeficiente de esbeltez β .

1.2. Objeto

En este trabajo se implementará un procedimiento para determinar el valor de coeficiente de esbeltez (β) para diferentes casos y posteriormente se hará un estudio comparativo entre los resultados obtenidos y los disponibles en la bibliografía y normativas.

1.3. Alcance

Como se ha dicho anteriormente, para calcular el coeficiente beta primero se debe determinar el valor de la carga crítica de pandeo. Hay varias maneras para calcular la carga de pandeo, basándose este trabajo en la determinación de la matriz de rigidez. Con este método se halla la matriz de rigidez del elemento teniendo en cuenta la no linealidad geométrica (suma de la matriz elástica y la matriz geométrica) y posteriormente se hallan los autovalores o valores propios. Por lo tanto la herramienta principal es la matriz de rigidez que calcularemos por el método de elementos finitos.

El proceso de ensamblaje de la matriz y posterior determinación de los autovalores puede ser dificultoso, sobre todo cuando aumenta su tamaño a causa del incremento del número de subelementos. Debido a ello se hace prácticamente imposible calcular la matriz sin una herramienta informática, y para resolver este problema se ha elaborado un código específico de Matlab apropiado para los cálculos matriciales a realizar.

2. El Pandeo

Para la realización de este trabajo se hace imprescindible una revisión y extensión de los conceptos relacionados con el fenómeno del pandeo de barras. Según su definición el pandeo es un fenómeno de inestabilidad elástica que puede darse en elementos comprimidos, y que se manifiesta por la aparición de desplazamientos importantes transversales a la dirección principal de compresión, como podemos ver en la Figura 1.

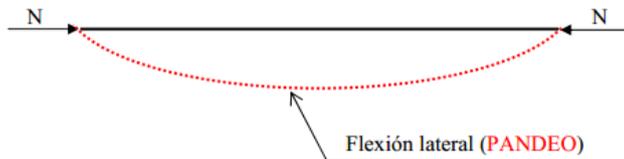


Figura-1: Pandeo de una viga sometida a compresión simple

Los elementos estructurales que resisten esfuerzos de tracción, cortante o torsión fallan cuando la tensión en el elemento alcanza una cierta limitación de resistencia del material. Por lo tanto, una vez que se conoce el límite de resistencia de material, es una cuestión relativamente simple para determinar la carga que lleva la capacidad del elemento. Pero, el pandeo no tiene lugar como resultado de alcanzar el límite de resistencia de material. El esfuerzo en el pandeo se produce depende de una variedad de factores que van desde las dimensiones del elemento a las condiciones de contorno hasta las propiedades del material del elemento. La determinación de la tensión de pandeo es una tarea que puede resultar compleja.

Si el pandeo no tiene lugar porque en el material se alcanza un cierto límite de resistencia, entonces uno se puede preguntar, ¿un elemento bajo compresión puede esquivar el pandeo? Salvadori And Héller explica con claridad al fenómeno de pandeo que no es una pregunta tan fácil de explicar, citando lo siguiente (Salvadori y Héller, 1963): *“Una esbelta columna se acorta cuando se comprime por un peso aplicado a su parte superior, y, al hacerlo así, disminuye la posición del peso. La tendencia de todos los pesos para bajar su posición es una ley básica de la naturaleza. Hay otra ley fundamental de la naturaleza que, siempre que haya una posibilidad de elegir entre diferentes caminos, un fenómeno físico seguirá el camino más fácil. Frente a la opción de doblar hacia fuera o acortamiento, la columna le resulta más fácil acortar para cargas relativamente pequeñas y se doble hacia fuera para relativamente grandes cargas. En otras palabras, cuando la carga alcanza su valor de pandeo de la columna le resulta más fácil reducir la carga de la flexión que acortando.”*

En caso de pandeo veremos que no hay una relación lineal entre las cargas y los efectos que producen (desplazamientos, deformaciones y tensiones) siendo un comportamiento claramente no lineal, dificultando con ello la modelización del fenómeno.

Si realizamos un ensayo sencillo en el que sometemos una columna a una carga de compresión P aplicada en el baricentro de la sección y medimos el desplazamiento horizontal del punto medio de la columna, podremos ver que:

- Inicialmente el punto medio de la columna sufre acortamiento axial y no se desplaza horizontalmente. Sin embargo, a partir de un cierto valor de ésta, cualquier perturbación transversal producirá un desplazamiento significativo en esta dirección, produciéndose una situación de inestabilidad o pandeo. En esta situación la relación carga-desplazamiento no es lineal. Pero el comportamiento elástico (objeto de este estudio) al retirar la carga la columna vuelve a su posición inicial. Por el contrario, para cargas superiores a la carga que ocasiona el pandeo la columna queda fuera de servicio.
- Al producirse el pandeo se transforma la energía de deformación de membrana en energía de deformación a flexión sin variación de las fuerzas exteriores. Se denominan esfuerzos de membrana o esfuerzos axiales a los esfuerzos que actúan en dirección tangente al plano medio de un elemento.

Normalmente en elementos esbeltos la rigidez axial es varios órdenes de magnitud superior a la rigidez a flexión, por lo que pequeñas deformaciones de axial acumulan una gran energía, si esta energía se transforma en deformaciones de flexión se producen grandes desplazamientos laterales y grandes rotaciones. En otras palabras podemos decir que el pandeo se produce cuando la magnitud de las fuerzas axial de una estructura es tan alta que anula la rigidez a flexión de la estructura.

Como hemos dicho en la introducción para calcular las matrices de rigidez elástica y geométrica utilizaremos el método de elementos finitos que explicaremos en próximos capítulos.

2.1 Carga crítica de Euler

La carga crítica de Euler es la carga a partir de la cual la el equilibrio no es estable y la estructura pierde el equilibrio.

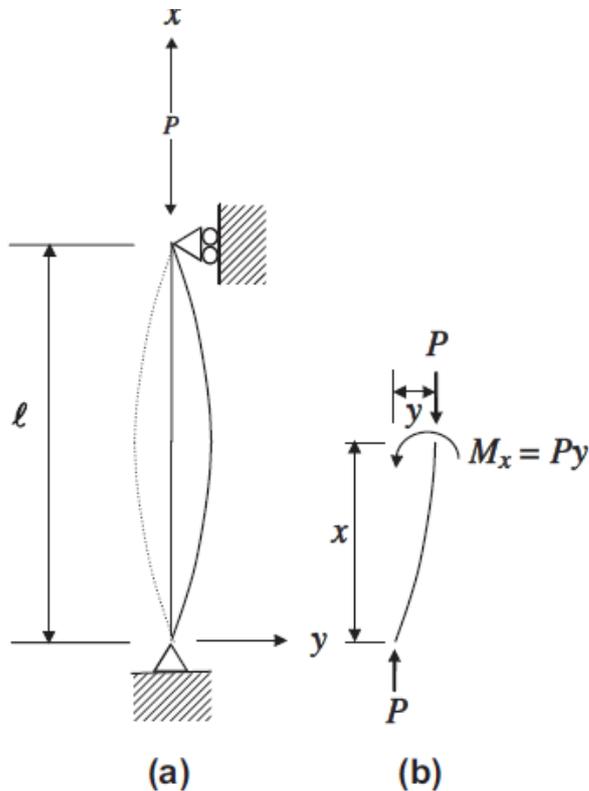


Figura 2: Columna bi-articulada

El elemento cargado axialmente se muestra en la Figura 2(a) se supone que es prismática (área de sección transversal constante) y está hecha de material homogéneo. Además, de esto también hacemos siguientes suposiciones:

Los extremos de la pieza o elemento están articulados de tal manera que el extremo inferior está unido a una articulación inmóvil, y el extremo superior está soportado de una manera tal que puede girar libremente y moverse verticalmente, pero no horizontalmente.

La pieza es perfectamente recta, y la carga "P", considera positivo cuando causa la compresión y además es concéntrico.

El material sigue la ley de Hooke.

Las deformaciones del elemento son pequeñas, así que el término $(y')^2$ es insignificante en comparación a la unidad en la expresión para la curvatura:

$$y''/[1 + (y')^2]^{3/2} \quad (2.1.1)$$

Por lo tanto, la curvatura puede ser aproximada por (y'') .

$$-\frac{M}{EI} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \approx y'' \quad (2.1.2)$$

Desde el cuerpo libre, la parte (b) en la Figura 2, sacamos la siguiente expresión:

$$-M(x) = -Py \quad (2.1.3)$$

$$EIy'' + Py = 0 \quad (2.1.4)$$

La Ecuación (2.1.4) es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. Sus condiciones de contorno son siguientes:

$$y = 0$$

cuando

$$x = 0, x = l$$

Sabemos que:

$$k^2 = P/EI \quad (2.1.5)$$

Substituyendo la expresión de (2.1.5) en la Ecuación (2.1.4):

$$y'' + k^2y = 0. \quad (2.1.6)$$

Suponemos:

$$y = \alpha e^{mx} \quad (2.1.7)$$

Las derivadas de y:

$$y' = \alpha m e^{mx} \quad (2.1.8)$$

$$y'' = \alpha m^2 e^{mx} \quad (2.1.9)$$

Los valores de y' i y'' substituimos en la Ecuación (2.1.6):

$$(m^2 + k^2)\alpha e^{mx} = 0 \quad (2.1.10)$$

$$m = \pm ki$$

Substituyendo valores de 'm' en Ecuación (2.1.7) obtenemos siguiente expresión.

$$y = C_1 \alpha e^{kix} + C_2 \alpha e^{-kix} = A \cos kx + B \sin kx \quad (2.1.11)$$

A y B son constantes integrales, y pueden ser determinados por las condiciones de contorno.

cunado

$$y = 0, x = 0$$

$$A = 0$$

y cunado

$$y = 0, x = l$$

$$B \sin kl = 0$$

Para B diferente de Zero.

$$\sin kl = 0 \rightarrow kl = n\pi$$

Substituyendo el valor de k en Ecuación obtenemos la carga de Euler.

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (2.1.12)$$

3. Método de resolución

El método que usaremos es el método matricial de cálculo de autovalores. El análisis de pandeo de autovalores predice la carga crítica de pandeo de una estructura ideal lineal y elástica (es decir el punto de bifurcación en la curva carga-desplazamiento de la estructura) y en nuestro caso no hace falta estudiar más allá del punto de bifurcación. La Figura 3 muestra el punto de bifurcación en un diagrama carga-desplazamiento.

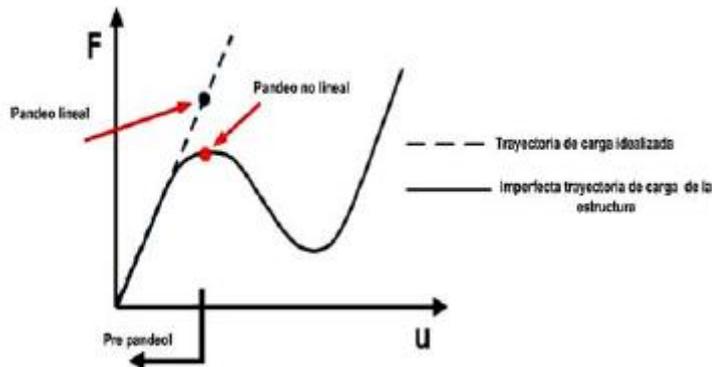


Figura 3: Punto de bifurcación

Sin embargo, cabe indicar que las imperfecciones y otras no linealidades hacen que la mayoría de las estructuras que podemos encontrar en la vida real no alcancen esta carga crítica clásica de pandeo, sino que la carga real de pandeo será menor de la prevista por el análisis elástico.

El método matricial o método autovalores usa la expresión de Ecuación 3.1 para determinar la carga crítica:

$$|K + \lambda K_G| = 0 \quad (3.1)$$

A continuación explicaremos como se deriva la Ecuación 3.1.

Se carga la estructura hasta un nivel arbitrario de referencia de cargas exteriores, F_{ref} . Se hace un análisis estático lineal para calcular los esfuerzos de membrana en los elementos

$$K \cdot D_{ref} = F_{ref} \quad (3.2)$$

De la Ecuación (3.2) calculamos los desplazamientos D_{ref} y después las tensiones y esfuerzos correspondientes al nivel de carga F_{ref} .

En el siguiente paso se calcula la matriz de rigidez geométrica K_G para ese nivel de carga y después se suma a la matriz de rigidez elástica para completar la matriz de rigidez global.

$$K = K + K_G \quad (3.3)$$

Al ser un análisis lineal, se supone que al multiplicar las cargas por λ también se multiplican las tensiones por el mismo factor, pero sin cambiar la distribución de tensiones.

Las fuerzas y desplazamientos para el nuevo valor de carga son:

$$(K + K_G)D_\lambda = \lambda F_{ref} \quad (3.4)$$

Si se aplica una perturbación sobre la carga δF , se produce un movimiento δD . El pandeo (bifurcación del equilibrio) sucede cuando es posible un $\delta D = 0$ con $\delta F=0$:

$$(K + K_G)(D_\lambda + \delta D) = \lambda F_{ref} \quad (3.5)$$

Restando las Ecuaciones 3.4 y 3.5 se obtiene la expresión de la Ecuación 3.1:

$$|K + \lambda K_G| = 0$$

En un modelo de elementos finitos de n grados de libertad, las ecuaciones anteriores permiten obtener un polinomio de orden n ésimo en λ (los autovalores). Los autovectores $\{\Delta u\}_n$ en este caso, representan la deformación adicional impuesta sobre el sistema durante el pandeo. La carga crítica elástica está dada para el valor más bajo de λ calculado.

4. Método de elementos finitos

4.1. Concepto general

En este apartado se hace una revisión del método de los elementos finitos (MEF), en el que se basa el presente trabajo. Las matrices de rigidez que usaremos las determinaremos por el método de los elementos finitos y además para facilitar los cálculos discretizaremos el elemento continuo con infinitos grados de libertad en varios subelementos con unos grados de libertad finitos.

El método de los elementos finitos (MEF) ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles ya que permite resolver casos que hasta hace relativamente poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. La idea general del método de los elementos finitos es la división de un elemento o cuerpo continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo con infinitos grados de libertad, definido por un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no.

Para la modelización de un sistema podemos distinguir tres partes:

- Dominio: Espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- Condiciones de contorno: Variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema: cargas, desplazamientos y etc.
- Incógnitas: Variables del sistema que queremos conocer después de que las condiciones de contorno han actuado sobre el sistema: desplazamientos, fuerzas, tensiones, etc.

Lo que hacemos en el método de los elementos finitos, para solucionar el problema, es la discretización (discretización es un concepto fundamental en el MEF que más adelante explicaremos en detalle) del dominio en subdominios denominados elementos. El dominio se divide mediante puntos o líneas (en el caso bidimensional), de forma que el dominio total que queremos estudiar se aproxime mediante el conjunto de elementos en que se subdivide.

Como hemos dicho antes, los elementos definen por un número discreto de puntos, llamados nodos, que los conectan entre sí. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. A estas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Los grados de libertad de un nodo son las variables que nos determinan el estado o posición del nodo.

Aplicando las condiciones de contorno, el sistema evoluciona hasta un estado final. En este estado final podemos conocer valores de diferentes parámetros (tensiones, deformaciones, etc.). Para saber valores de los parámetros en el interior del elemento existen fórmulas que relacionan el comportamiento en el interior del elemento con el valor que tomen los nodos. Este paso se realiza por medio de unas funciones llamadas de interpolación o funciones de forma, ya que 'interpolan' el valor de la variable nodal dentro del elemento. Más adelante explicaremos el concepto de interpolación y calcularemos las funciones de forma que hacen falta para nuestro caso.

4.2. Sistemas discretos y sistemas continuos

Al efectuar una clasificación de las estructuras suelen dividirse en discretas y continuas. Las primeras son aquéllas que están formadas por un ensamblaje de elementos claramente diferenciados unos de otros y unidos en una serie de puntos concretos, de tal manera que el sistema total tiene forma de malla. La característica fundamental de las estructuras discretas es que su deformación puede definirse de manera exacta mediante un número finito de parámetros, como por ejemplo las deformaciones de los puntos de unión de unos elementos y otros. De esta manera el equilibrio de toda la estructura puede representarse mediante las ecuaciones de equilibrio en las direcciones de dichas deformaciones.

Como contrapartida, en los sistemas continuos no es posible separar, a priori, el sistema en un número finito de elementos estructurales discretos. Si se toma una parte cualquiera del sistema, el número de puntos de unión entre dicha parte y el resto de la estructura es infinito, y es por lo tanto imposible utilizar el mismo método que en los sistemas discretos, pues los puntos de unión entre los distintos elementos, que allí aparecían de manera natural, no existen ahora.

Las estructuras continuas son muy frecuentes en ingeniería, como por ejemplo: bastidores de máquinas, carrocerías de vehículos, losas y placas en edificios, vasijas de reactores, elementos de máquinas (bielas, poleas, carcasas...), y para su análisis es necesario disponer de un método que tenga en cuenta su naturaleza continua.

Hasta la irrupción del Método de los Elementos Finitos (MEF), los sistemas continuos se abordaban analíticamente, pero por esa vía sólo es posible obtener solución para sistemas con geometría sencilla, y/o con ciertas condiciones de contorno.

4.3. Hipótesis de discretización

En una estructura discreta, su deformación viene definida por un número finito de parámetros (deformaciones y/o giros), que juntos conforman el vector de deformaciones Δ , y la estructura tiene tantas formas de deformarse como términos tenga dicho vector. Un medio continuo tiene infinitas formas posibles de deformarse, independientes unas de otras, ya que cada punto puede desplazarse manteniendo fijos cualquier número finito de los puntos restantes, por grande que sea este último.

Por lo tanto la configuración deformada de la estructura no puede venir dada por un vector finito Δ como el anterior, sino que es una función vectorial u , que indica cuáles son las deformaciones de cualquier punto, y que tiene tres componentes escalares:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

Esta función es la solución de la Ecuación diferencial que gobierna el problema, y si éste está bien planteado, cumplirá las condiciones de contorno impuestas, pero en principio no puede asegurarse que esta función u tenga una expresión analítica manejable, ni siquiera que pueda calcularse. Por lo tanto la función u no podrá conocerse en general.

Para resolver este problema, el Método de los Elementos Finitos recurre a la de discretización que se basa en lo siguiente:

El continuo se divide por medio de líneas o superficies imaginarias en una serie de regiones contiguas y disjuntas entre sí, de formas geométricas sencillas y normalizadas, llamadas elementos finitos.

Los elementos finitos se unen entre sí en un número finito de puntos, llamados nodos. Los desplazamientos de los nodos son las incógnitas básicas del problema, y éstos determinan la configuración deformada de la estructura. Sólo estos desplazamientos nodales se consideran independientes.

El desplazamiento de un punto cualquiera, viene determinado por los desplazamientos de los nodos del elemento al que pertenece el punto. Para ello se definen para cada elemento, unas funciones de interpolación que permiten calcular el valor de cualquier desplazamiento interior por interpolación de los desplazamientos nodales. Estas funciones de interpolación serán de tal naturaleza que se garantice la compatibilidad de deformaciones necesaria en los contornos de unión entre los elementos.

Las funciones de interpolación y los desplazamientos nodales definen el estado de deformaciones unitarias en el interior del elemento. Éstas, mediante las ecuaciones constitutivas del material definen el estado de tensiones en el elemento y por supuesto en sus bordes.

Para cada elemento, existe un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, que equilibran a las tensiones existentes en el contorno del elemento, y a las fuerzas exteriores sobre él actuantes.

La función solución del problema u es aproximada de forma independiente en cada elemento. Para una estructura discretizada en varios elementos, pueden utilizarse funciones de interpolación distintas para cada uno de ellos, a juicio del analista, aunque deben cumplirse ciertas condiciones de compatibilidad en las fronteras entre los elementos.

La función solución es aproximada dentro de cada elemento, apoyándose en un número finito (y pequeño) de parámetros, que son los valores de dicha función en los nodos que configuran el elemento y a veces sus derivadas.

Esta hipótesis de discretización es la columna básica del MEF, por lo que se suele decir de éste, que es un método discretizante, de parámetros distribuidos. La aproximación aquí indicada se conoce como la formulación en desplazamiento.

4.4. Función de Interpolación o de Forma

Discretizado el continuo, la idea es tomar un conjunto de funciones (funciones de interpolación o de forma) que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro del elemento en función de los desplazamientos en los nodos del mismo.

Consideremos un elemento finito cualquiera, definido por un número de nodos n . Para facilitar la exposición se supondrá un problema de elasticidad plana aunque el nuestro caso no es de elasticidad plana. Un punto cualquiera del elemento tiene un desplazamiento definido por un vector u , que en este caso tiene dos componentes:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.4.1)$$

Los nodos del elemento tienen una serie de grados de libertad, que corresponden a los valores que adopta en ellos el campo de desplazamientos, y que forman el vector denominado “ δ ”. Para el caso plano este vector es:

$$\delta^e = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n]^T \quad (4.4.2)$$

Para entender el concepto de función de forma vamos a coger un ejemplo en que se supone que las deformaciones de los nodos se emplean sólo los desplazamientos y no los giros, lo cual es suficiente para elasticidad plana, como se verá más adelante. Para el nuestro caso (elementos vigas) se emplean además los giros.

El campo de deformaciones en el interior del elemento se aproxima haciendo uso de la hipótesis de interpolación de deformaciones:

$$u = \sum N_i U_i \quad v = \sum N_i V_i \quad (4.4.3)$$

Donde “Ni” son las funciones de interpolación del elemento, que son en general funciones de las coordenadas “x”, “y”. Nótese que se emplean las mismas funciones para interpolar los desplazamientos “u” y “v”, y que ambos desplazamientos se interpolan por separado, el campo “u” mediante las “Ui” y el campo “v” mediante las “Vi”. Es decir que la misma “Ni” define la influencia del desplazamiento del nodo i en el desplazamiento total del punto “P”, para las dos direcciones “x” e “y”. La interpolación de deformaciones puede ponerse en la forma matricial general.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e \quad (4.4.4)$$

La matriz de funciones de interpolación “N” tiene tantas filas como desplazamientos tenga el punto “P” y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nodos del elemento.

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{array} \right] \quad (4.4.5)$$

Las funciones de interpolación son habitualmente polinomios, que deben poderse definir empleando las deformaciones nodales del elemento. Por lo tanto se podrán usar polinomios con tantos términos como grados de libertad tenga el elemento. Sin embargo, el aspecto de esta matriz puede ser distinto para otros elementos, como las vigas o las placas a flexión.

Las funciones de interpolación están definidas únicamente para el elemento, y son nulas en el exterior de dicho elemento.

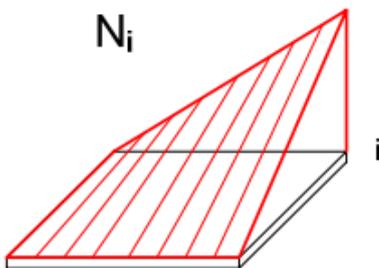


Figura 4: Función de forma

Estas funciones tienen que cumplir determinadas condiciones y aunque éstas se verán en detalle más adelante, con la expresión anterior se puede deducir que la función de

interpolación N_i debe valer 1 en el nudo i y 0 en los restantes nodos como se ve en la Figura 4. Esta condición resulta evidente si se tiene en cuenta que los términos del vector δ son grados de libertad y por lo tanto son independientes, y deben poder adoptar cualquier valor.

4.5. Criterio de convergencia

Antes de estudiar los criterios de convergencia debemos conocer el concepto de convergencia. En el ámbito de MEF un análisis es convergente cuando a aumentar el número de nodos y de los elementos el resultado obtenido tiende a la solución exacta.

Las funciones de forma elegidas para representar el estado de deformación de un medio continuo deben satisfacer una serie de condiciones, a fin de que la solución obtenida por el MEF, converja hacia la solución real.

Las funciones de interpolación deben ser tales que cuando los desplazamientos de los nodos del elemento correspondan a un movimiento de sólido rígido, no aparezcan tensiones en el elemento. Es a decir, la función de forma deben ser capaces de representar los desplazamientos como sólido rígido, sin producir las tensiones en el elemento.

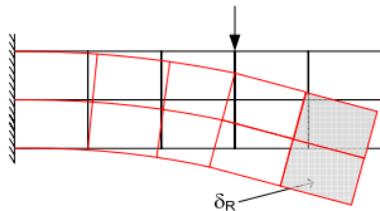


Figura 5: Deformación de sólido rígido

En la Figura 5 podemos observar que los elementos del extremo se desplazan como un sólido rígido, al no existir tensiones más allá de la fuerza aplicada.

El segundo criterio de hecho es un caso particular del criterio 1, ya que un movimiento como sólido rígido (con tensión nula) es un caso particular de un estado de tensión constante. En muchas ocasiones ambos criterios se formulan como un sólo criterio.

En este criterio las funciones de forma deben ser tales que cuando los desplazamientos de los nodos correspondan a un estado de tensión constante, este estado tensional se alcance en realidad en el elemento. Claramente, a medida que los elementos se hacen más pequeños, el estado de tensiones que hay en ellos se acerca al estado uniforme de tensiones. Este criterio lo que exige es que los elementos sean capaces de representar dicho estado de tensión constante.

Las funciones de interpolación deben ser tales que las deformaciones unitarias que se produzcan en las uniones entre elementos deben ser finitas. Esto es lo mismo que decir que debe existir continuidad de desplazamientos en la unión entre elementos aunque

puede haber discontinuidad en las deformaciones unitarias (y por lo tanto en las tensiones, que son proporcionales a ellas).

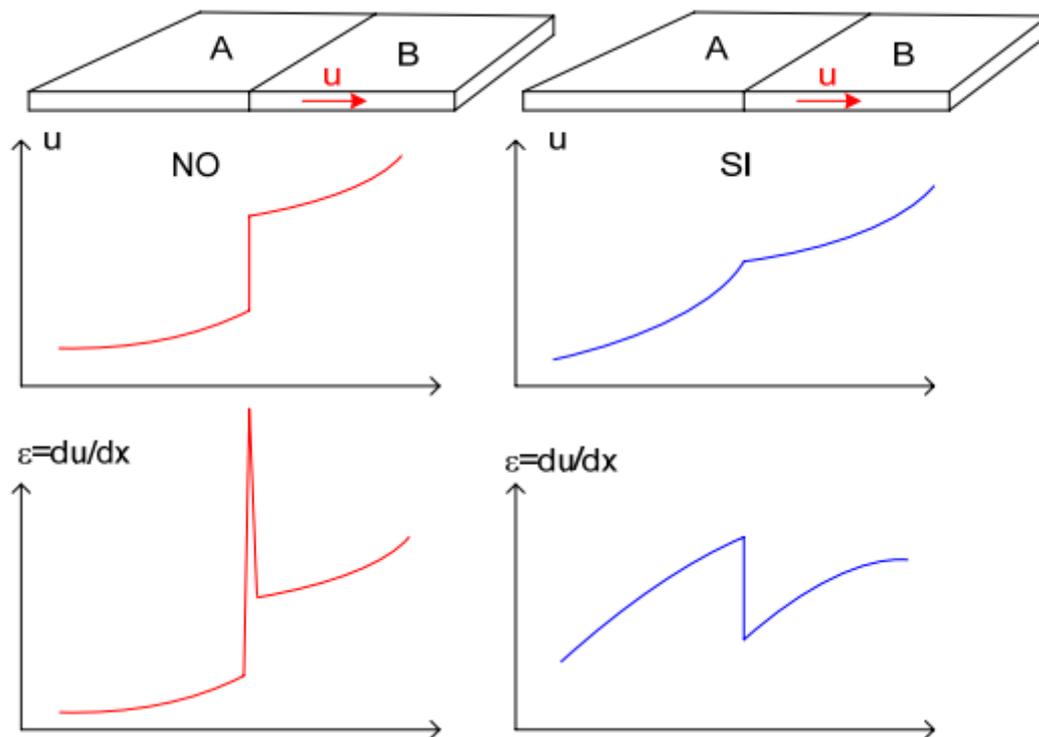


Figura 6: Criterio 3 de convergencia en una dimensión

Con esta Figura 6 podemos entender mejor el tercer criterio de convergencia. Las gráficas de izquierda son las que no cumplen el tercer criterio, en cambio las de derecha sí que cumplen.

La Figura 6 ilustra las posibles situaciones, para un caso unidimensional donde la única incógnita es el desplazamiento u en la dirección x . En la situación de la izquierda existe una discontinuidad en el desplazamiento u , que da lugar a una deformación unitaria infinita: esta situación no está permitida por el criterio 3. En la situación mostrada a la derecha la deformación es continua, aunque la deformación unitaria no lo es: esta situación está permitida por el criterio 3.

El criterio 3 exige que las deformaciones unitarias sean finitas en el contorno entre los elementos. Como estas deformaciones unitarias son las derivadas n -simas de las deformaciones, lo que se exige es que haya continuidad de las deformaciones y sus derivadas hasta orden $n-1$ en el contorno del elemento. Esto es equivalente a imponer la compatibilidad de desplazamientos en el contorno.

En caso de vigas y placas, ($n=2$) es necesario emplear como mínimo polinomios de grado 2, con continuidad $C1$ entre ellos, es decir que hay que garantizar la continuidad de la flecha y el giro entre los elementos. En la práctica, para la flexión de vigas planas se usan

4 parámetros para ajustar la solución (flecha y giro en cada extremo) por lo que el tipo de funciones empleadas son polinomios de grado 3.

Como resumen de los tres criterios, para problemas de elasticidad ($n=1$) es necesario emplear polinomios completos de orden 1, con continuidad C_0 entre ellos para garantizar la convergencia. Es suficiente con usar funciones del tipo lineal, que aproximan la solución mediante una línea quebrada, aunque se produzcan discontinuidades en las tensiones entre los elementos.

4.6. Funciones de Forma de una columna

Las columnas sometidas a cargas axiales a diferencia de elementos de viga convencionales que tienen dos grados de libertad en cada nodo (un desplazamiento lateral y una rotación), tienen un grado adicional de libertad en cada nodo.

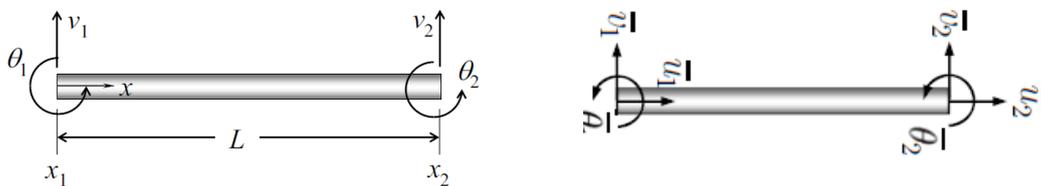


Figura 7: Elemento viga simple y con carga axial

La Figura de izquierda es de una viga que no tiene carga axial y tiene solo dos grados de libertad. En cambio la figura de derecha es de una columna que tiene una carga axial y tres grados de libertad.

De hecho es una suma de elemento viga y de elemento barra. Por lo tanto, podemos resolver el caso columna aplicando el principio de superposición.

De esta manera las funciones de forma de elemento pórtico serán suma de funciones de forma de elemento barra y de elemento viga.

4.6.1. Funciones de forma de barra

En el caso del elemento barra el dominio continuo que se analiza se extiende según una única dimensión "x", teniendo el material un área variable con dicha coordenada $A(x)$.

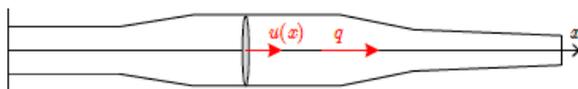


Figura 8: Elemento unidimensional

El campo de deformaciones es una función $u(x)$ de una sola variable, que define la deformación axial de un punto cualquiera del dominio. Por lo tanto, la deformación unitaria tiene sólo la componente axial du/dx .

El elemento más sencillo que puede existir será de dos nodos, con desplazamientos U_1 y U_2 . La interpolación del desplazamiento dentro del elemento es:

$$u = N_1 U_1 + N_2 U_2 \quad (4.6.1.1)$$

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \delta^e \quad (4.6.1.2)$$

Con dos parámetros nodales, se puede interpolar una línea recta:

$$u = ax + b \quad (4.6.1.3)$$

De esta Ecuación podemos sacar una por cada desplazamiento nodal. Después con estas dos ecuaciones podemos determinar valor de a y b .

Particularizando en los nudos 1 y 2 se obtiene:

$$U_1 = ax_1 + b \quad (4.6.1.4)$$

$$U_2 = ax_2 + b \quad (4.6.1.5)$$

De estas expresiones se obtienen a y b ,

$$a = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad b = \frac{x_2 U_1 - x_1 U_2}{L} \quad (4.6.1.6)$$

Una vez determinado los valores de a y b sustituimos en la expresión inicial y nos queda siguiente expresión:

$$u = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} U_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} U_2 \quad (4.6.1.7)$$

Como hemos dicho antes:

$$u = N_1 U_1 + N_2 U_2 \quad (4.6.1.8)$$

Las funciones de formas son siguientes:

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4.6.1.9)$$

Con estas funciones de forma podemos determinar la matriz de rigidez elástica.

4.6.2. Funciones de forma de viga

Antes de empezar a hablar de deformaciones de viga debemos saber que existen dos teorías sobre las deformaciones de vigas.

La teoría de Euler.

La teoría de Timoshenko.

La teoría de Euler o teoría clásica de flexión de vigas se supone que las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformarse mantienen rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado deformado. Con esta hipótesis y suponiendo pequeñas deformaciones, se cumple que el giro que sufre una sección recta de la viga es igual a la pendiente de la curva deformada elástica. En términos energéticos esta hipótesis corresponde a despreciar la energía de esfuerzo cortante.

Teoría de Timoshenko se supone que las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformar se mantienen rectas en el estado deformado, pero no perpendiculares a la fibra neutra. Con esta hipótesis el giro de la sección recta no es igual a la pendiente de la deformada elástica, y la diferencia entre ellas corresponde a la distorsión debida al esfuerzo cortante. Pero de todas las maneras nosotros seguiremos con la teoría clásica.

Funciones de forma:

Se emplean cuatro grados de libertad en el elemento: la deformación y el giro en cada nudo extremo, los podemos ver en la Figura 9. De esta forma se garantiza la compatibilidad de la lateral v y su derivada primera (el giro) en los extremos de la viga. Los vectores de grados de libertad y de fuerzas nodales son:

$$\delta^e = [V_1 \quad \theta_1 \quad V_2 \quad \theta_2]^T \quad \mathbf{P}^e = [P_{1Y} \quad M_1 \quad P_{2Y} \quad M_2]^T \quad (4.6.2.1)$$

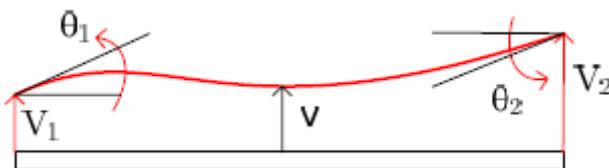


Figura 9: Elemento viga plana a flexión

Con cuatro grados de libertad, se puede emplear una ley cúbica de interpolación de deformaciones:

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.6.2.2)$$

Con cuatro grados de libertades tenderemos cuatro condiciones de contorno, dos de desplazamientos laterales y dos de giros (los giros son primera derivadas de desplazamientos) aplicando condiciones de contorno en la Ecuación de interpolación tendremos cuatro ecuaciones y agrupando las cuatro ecuaciones obtenidas en forma matricial se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (4.6.2.3)$$

De este sistema se pueden calcular los cuatro coeficientes a_i en función de los grados de libertad. Sustituyéndolos en la Ecuación y reagrupando los términos de los diferentes grados de libertad se obtiene la ley de interpolación de la deformación lateral:

$$v = N_1 V_1 + N_2 \theta_1 + N_3 V_2 + N_4 \theta_2 = \mathbf{N} \delta^e \quad (4.6.2.4)$$

Las cuatro funciones de interpolación son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) & N_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) & N_4 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned}$$

Siendo ξ una coordenada local normalizada que vale -1 en el nudo inicial de la viga, y +1 en el nudo final, con lo que la interpolación de coordenadas es lineal:

$$x = x_1 \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) + x_2 \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) \quad (4.6.2.5)$$

En MEF el uso coordenada ξ local al elemento resulta muy útil, de tal forma que ésta siempre varíe de -1 en el nudo inicial a +1 en el nudo final. En este sistema de coordenadas local, el elemento siempre es de longitud 2.

Como hemos definido las funciones de interpolación en la coordenada local ξ . Para calcular la matriz \mathbf{B} es necesario que las derivadas de las funciones de interpolación sean respecto x , y por lo tanto se hace necesario establecer algún tipo de relación entre la coordenada ξ y la x a fin de poder completar la derivación.

Con la formulación isoparamétrica, esta relación se introduce mediante las mismas funciones de interpolación " N " usadas para interpolar la deformación, estableciendo la relación:

$$x = \sum N_i x_i = \mathbf{N} \mathbf{x}^e \quad (4.6.2.6)$$

El vector \mathbf{X}^e contiene las coordenadas de todos los nodos del elemento.

5. Matriz de rigidez elástica

En ingeniería, la rigidez es la capacidad de un elemento estructural para soportar esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones.

Los coeficientes de rigidez son magnitudes físicas que cuantifican la rigidez de un elemento resistente bajo diversas configuraciones de carga. Normalmente las rigideces se calculan como la razón entre una fuerza aplicada y el desplazamiento obtenido por la aplicación de esa fuerza. Estos coeficientes dependen de tres cosas.

- La sección transversal, cuando más gruesa sea la sección más fuerza será necesaria para deformarla.
- El material del que está fabricado el elemento, por lo tanto el módulo de Young.
- La longitud del elemento.

La expresión general de rigidez es:

$$K_i = \alpha_i \frac{ES_i}{L^{\beta_i}} \quad (5.1)$$

Hay varias componentes de rigidez (axial, flexional y etc.), todas estas rigideces intervienen en una matriz de rigidez elemental que representa el comportamiento elástico dentro de una estructura.

Existen varios métodos para calcular la matriz de la rigidez, uno de estos es el MEF, y para calcular la matriz de rigidez por MEF, los instrumentos principales son las funciones de forma.

Después de calcular las funciones de formas (que hemos explicado en capítulos anteriores), el siguiente paso será de determinación de matriz B. Esta matriz B relaciona las deformaciones de los nodos del elemento δ_e con las deformaciones unitarias en un punto interior cualquiera del elemento. Por lo tanto B representa el campo de deformaciones unitarias que se supone existe en el interior del elemento finito, como consecuencia de la hipótesis de interpolación de deformaciones efectuada.

Esta expresión representa de siguiente manera:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} \quad (5.2)$$

Y que viene de:

$$\epsilon = \partial \mathbf{u} = \partial \mathbf{N} \delta^e \quad (5.3)$$

$$\epsilon = \mathbf{B}\delta^e \quad (5.4)$$

Por lo tanto, las deformaciones unitarias son matriz B por el vector de deformaciones de nodos.

La matriz B de un elemento tridimensional será de siguiente manera:

$$\mathbf{B}_i = \partial \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Una vez que han quedado establecidas las expresiones que relacionan los desplazamientos y las deformaciones unitarias, en función de los desplazamientos de los nodos, se está ya en condiciones de calcular las ecuaciones de equilibrio de un elemento finito. Si se considera un elemento finito cualquiera, las fuerzas que actúan sobre él, en el caso más general, son las siguientes:

Fuerzas exteriores de volumen aplicadas en el interior del elemento \mathbf{q}_v (Figura 10), que son en general variables dentro del elemento, y tienen tantas componentes como desplazamientos haya en cada punto.

Fuerzas exteriores de superficie aplicadas en el contorno libre del elemento \mathbf{q}_s (Figura 10), que son en general variables a lo largo del contorno, y tienen tantas componentes como desplazamientos tenga cada punto del contorno. Al contorno sobre el que actúan las fuerzas de superficie se le denomina s .

Fuerzas interiores \mathbf{q}_c (Figura 10), aplicadas en la superficie del contorno de unión del elemento con los elementos vecinos, que son desconocidas. A dicho contorno de unión se le denomina c .

Fuerzas exteriores puntuales aplicadas sobre los nodos del elemento P_N (Figura 10).

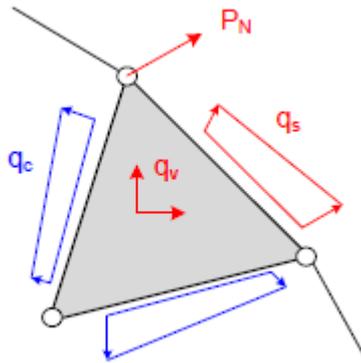


Figura 10: Fuerzas actuantes sobre un elemento finito

El trabajo virtual que producen estas fuerzas es:

$$\delta W^e = \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \delta^e{}^T \mathbf{P}_N^e \quad (5.6)$$

Donde $\delta \mathbf{u}$ es una variación virtual del campo de deformaciones u y $\delta \delta^e$ es la variación correspondiente a los grados de libertad de los nodos. Durante estas variaciones, las fuerzas exteriores se mantienen constantes. Aplicando el principio de los trabajos virtuales se obtiene que para que haya equilibrio, el trabajo virtual de las fuerzas debe ser igual a la variación de la energía elástica U acumulada en el elemento, para cualquier $\delta \mathbf{u}$:

$$\delta W^e = \int_v \delta \epsilon^T \boldsymbol{\sigma} dv \equiv \delta U^e \quad (5.7)$$

Sustituyendo en la Ecuación 5.6 tenemos siguiente expresión:

$$\int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_c \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \delta^e{}^T \mathbf{P}_N^e = \int_v \delta \epsilon^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (5.8)$$

Des de hipótesis de interpolación sabemos que la variación del campo de deformación es:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \delta^e \quad (5.10)$$

Y la variación de las deformaciones unitarias se relaciona con la variación de las deformaciones nodales a través de la matriz \mathbf{B} :

$$\delta \epsilon = \mathbf{B} \delta \delta^e \quad (5.11)$$

Sustituyendo las variaciones $\delta \mathbf{u}$ y $\delta \delta^e$ en la expresión (2.18) se obtiene la Ecuación de equilibrio aproximada mediante la hipótesis de interpolación de deformaciones:

$$\delta \delta^T \left[\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{q}_e ds + \mathbf{P}_N^e \right] = \delta \delta^T \left[\int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \right] \quad (5.12)$$

$$\int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds + \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{q}_e ds + \mathbf{P}_N^e = \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (5.13)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (5.14)$$

D la matriz elástica, que para un material elástico lineal es constante y depende de sólo dos parámetros: el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson.

Ahora que sabemos todos los conceptos que hacen falta, podemos calcular la matriz de rigidez de la columna sometido a carga axial, como habíamos dicho antes que para resolver el caso de una columna con carga axial aplicaremos principio de superposición. El elemento viga y barra junta forman el caso viga con carga axial.

Por lo tanto, calcularemos la matriz de rigidez del elemento barra y del elemento viga. Empezamos con elemento barra.

5.1. Matriz de rigidez elástica de barra

En apartado de funciones de interpolaciones hemos determinados las funciones de forma de elemento barra y viga, y sabemos que para el elemento barra funciones de forma son siguientes:

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5.1.1)$$

También sabemos que para determinar la matriz de rigidez, primero debemos calcular la matriz B y que se la derivada parcial de la matriz de formas.

El orden de las derivadas existentes en la energía potencial Π del sistema, siempre es la mitad del orden de la Ecuación diferencial que gobierna el problema m ($n=m/2$). La energía se expresa en términos de ε . La Ecuación de gobierno de una barra es de segundo orden.

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + q A = 0 \quad (5.1.2)$$

Por lo tanto, la Ecuación de energía potencial será de primer orden. Según el tercer criterio de convergencia las funciones de interpolación deben ser de orden n como mínimo. El mismo orden que la Ecuación de deformación.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \partial N \delta^e \quad (5.1.3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

L es la longitud del elemento que es $x_2 - x_1$

Sabemos que:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (5.1.5)$$

En este caso el matriz D es muy sencillo:

$$\mathbf{D} = [E] \quad (5.1.6)$$

Por lo tanto, nos queda siguiente expresión:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{L}{1} \\ \frac{L}{1} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} A dx \quad (5.1.7)$$

Diferencial de volumen es igual a A por diferencial de x , porque hemos explicado en apartados anteriores que en el problema unidimensional (elemento barra es un caso unidimensional) el dominio se extiende según una única dimensión x , teniendo el material un área variable con dicha coordenada $A(x)$

Suponiendo “ E ” y “ A ” constantes se obtiene la matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L^2} \int \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.8)$$

5.2. Matriz de rigidez elástica del elemento viga

El procedimiento para calcular la matriz de rigidez del elemento viga será la misma, solo cambiarán diferentes ecuaciones que intervienen. La Ecuación de gobierno será de cuarto orden y la de energía potencial será de segundo.

La Ecuación de gobierno:

$$-D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q = 0 \quad (5.2.1)$$

La Ecuación de energía potencial:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_p}{\partial x} = -\frac{d^2 v}{dx^2} y \quad (5.2.2)$$

En este caso tendremos cuatro funciones de forma que serán polinomios de grado 3. En caso de elemento barra eran dos porque el elemento tenía dos grado de libertad y ahora tenemos cuatro grados de libertad.

Las funciones de forma son siguiente:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) & N_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) & N_4 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2 v}{dx^2} y = -y \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} V_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} V_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{B} = -y \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (5.2.4)$$

Las derivadas de las funciones de interpolación son:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{2}{L} \quad (5.2.5)$$

$$\frac{d^2 N_i}{dx^2} = \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \frac{d\xi}{dx} \frac{2}{L} = \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \frac{4}{L^2} \quad (5.2.6)$$

La matriz **B** puede ponerse como:

$$\mathbf{B} = -y \left[\frac{d^2 N_1}{d\xi^2} \quad \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} \quad \frac{d^2 N_3}{d\xi^2} \quad \frac{d^2 N_4}{d\xi^2} \right] \frac{4}{L^2} = -y \mathbf{B}_s \quad (5.2.7)$$

En esta expresión se han separado los términos que dependen sólo de la coordenada longitudinal ξ , para lo que se ha introducido la matriz:

$$\mathbf{B}_s = \left[\frac{6\xi}{L^2} \quad \frac{3\xi - 1}{L} \quad \frac{-6\xi}{L^2} \quad \frac{3\xi + 1}{L} \right] \quad (5.2.8)$$

Sabemos que:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} b dx dy \quad (5.2.9)$$

Siendo $b(y)$ la anchura de la viga. Al estar el material en un estado unidimensional de tensiones, la matriz elástica es el módulo de elasticidad E . Sustituyendo el valor de **B** se obtiene:

$$\mathbf{K} = \iint E \mathbf{B}^T \mathbf{B} b dx dy = \int E \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s \left(\int by^2 dy \right) dx \quad (5.2.10)$$

En la Ecuación anterior se identifica el momento de inercia de la sección I . Suponiendo que el producto EI es constante e introduciendo el cambio de Coordenadas x/ξ se obtiene:

$$\mathbf{K} = EI \int \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s dx = EI \int \mathbf{B}_s^T \mathbf{B}_s \left(\frac{L}{2} \right) d\xi \quad (5.2.11)$$

Cada uno de los términos de la matriz de rigidez tiene la expresión:

$$K_{ij} = EI \int_{-1}^{+1} \left(\frac{4}{L^2} \right)^2 \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \frac{d^2 N_j}{d\xi^2} \left(\frac{L}{2} \right) d\xi \quad (5.2.12)$$

La matriz de rigidez es queda de siguiente manera:

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix}$$

Aplicando el principio de superposición se suman la matriz de rigidez elástica de barra y viga se obtiene la matriz de rigidez elástica de una columna con carga axial:

$$\left[\bar{\mathbf{K}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

6. Matriz de rigidez geométrica

Como hemos mencionado antes en caso de elemento pórtico no podemos descuidar el efecto de esfuerzo axial como podemos hacer en caso de viga, también hemos explicado que podemos resolver este problema solo añadiendo el efecto de rigidez axial en la matriz de rigidez flexional.

En el análisis elástico lineal, las deflexiones se supone que son pequeñas en relación al tamaño del miembro, es decir, hay una diferencia relativamente pequeña entre la forma no deformada y deformada de la estructura. Las ecuaciones de equilibrio estático de la estructura se basan en la geometría no deformada y las deformaciones son funciones lineales de los desplazamientos, resultando en ecuaciones de equilibrio lineales. Sin embargo, cuando los desplazamientos y rotaciones de la estructura de llegan a ser grandes, es necesario incluir los efectos de la rigidez geométrica con el fin de obtener resultados que sean físicamente representativos.

La rigidez geométrica es una función de la fuerza interna en el elemento y el cambio en la ubicación de sus nodos. Para que una estructura permanezca en equilibrio estático, ya que sufre deformaciones finitas, las fuerzas que se desarrollan en los elementos deben equilibrar externamente las fuerzas aplicadas. Estas fuerzas internas causadas por el cambio en la geometría dan como resultado una variación de la rigidez, conocida como "rigidez de tensión" o "rigidez geométrica".

Para resolver estructuras de esta naturaleza, es más exacto referirse las ecuaciones de equilibrio estático a la configuración deformada. Las deformaciones son entonces las funciones no lineales de los desplazamientos, lo que resulta en las ecuaciones de equilibrio no lineales. Este tipo de problema es llamado geoméricamente no lineal

Para calcular la matriz de rigidez geométrica partiremos desde método de energía potencial.

La energía total del uno elemento pórtico es siguiente:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} P \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (6.1)$$

La primera integral de la Ecuación se obtiene la matriz de rigidez para un elemento de barra asociado con los grados de libertad cinemáticos U_1 i U_2 . Con el segundo integral se obtiene la matriz de rigidez para un elemento de viga. La tercera integral resume el trabajo realizado por la carga P externo cuando elementos diferenciales dx y esta integral conduce a la derivación de la elemento de la matriz de rigidez geométrica KG.

Como hemos explicado antes:

$$v = \sum N_i V_i \quad (6.2)$$

En caso de viga la Ecuación diferencial es de segundo orden, pero en tercer integrante tenemos la primera derivada. Por lo tanto derivaremos las funciones de forma respecto x para reducir a primera derivada.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d[N]}{dx} \quad (6.3)$$

Las cuatro función de forma de elemento viga en coordenadas x son:

$$[N] = \left[1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3} \quad x - \frac{2x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \quad \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3} \quad -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \right] \quad (6.4)$$

Aplicamos primera derivada:

$$[G] = \left[-\frac{6x}{\ell^2} + \frac{6x^2}{\ell^3} \quad 1 - \frac{4x}{\ell} + \frac{3x^2}{\ell^2} \quad \frac{6x}{\ell^2} - \frac{6x^2}{\ell^3} \quad -\frac{2x}{\ell} + \frac{3x^2}{\ell^2} \right] \quad (6.5)$$

La Ecuación se queda de siguiente manera:

$$\frac{1}{2}[\Delta][K_G]\{\Delta\} = \frac{1}{2}[\Delta] \left[P \int_0^\ell \{G\}[G]dx \right] \{\Delta\} \quad (6.6)$$

$$[\Delta] = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (6.7)$$

Con esta Ecuación podemos determinar la matriz de rigidez geométrica.

$$K_G = \frac{P}{30\ell} \begin{bmatrix} 36 & 3\ell & -36 & 3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ -36 & -3\ell & 36 & -3\ell \\ 3\ell & -\ell^2 & -3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

Como que el efecto de rigidez geométrica es de elemento viga. Los componentes de matriz de rigidez geométrica sumaran con los componentes de elemento viga en el matriz de rigidez elástica. Y la matriz global será la suma de dos matrices.

Como hemos dicho en la introducción el objetivo de este trabajo es determinar el coeficiente de esbeltez β de diferentes casos.

7. Los Casos Estudiados

Se plantean tres casos a estudiar: el primer caso es de un columna de sección constante sometido a carga variable con diferentes condiciones de contorno, en segundo lugar tenemos un caso de un elemento con carga puntual intermedia y por último el mismo caso de carga puntual intermedia con carga no centrada en la sección del columna.

Los resultados del primer y segundo caso los compararemos con los valores que nos propone la Norma Básica de Edificación ("NBE-EA"). La "NBE-EA" tiene una fórmula específica para cada caso que hemos mencionado antes con que calcula el coeficiente de esbeltez. De esta manera podremos determinar hasta qué punto podemos usar válidos estas fórmulas. También haremos un análisis gráfico de los resultados del segundo y tercer caso para ver hasta qué punto afecta la carga no concentrada al coeficiente de esbeltez.

En la introducción habíamos mencionado que por causa de las dimensiones de las matrices no es fácil resolver estos casos sin una herramienta informática, por este motivo hemos elaborado un código Matlab que haremos servir para hacer todos los cálculos intermedios. El código Matlab se adjunta en el Anexo 1. Este código es capaz de calcular las matrices de rigidez elástica y geométrica de cualquiera estructura que se base en elementos pórtico.

A continuación explicaremos con ejemplo sencillo todo el procedimiento de calcular el coeficiente de esbeltez por el método matricial para que se pueda entender con facilidad. El código Matlab lo que lleva básicamente es la traducción de todo este procedimiento a lenguaje informático.

Tenemos una columna (empotrada un extremo y con movimiento vertical permitido en el otro) sometida a una carga puntual que se muestra en la Figura 11.

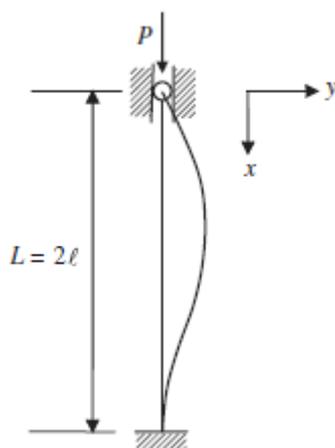


Figura 11: Elemento empotrado-apoyada

Como hemos dicho antes que el caso de una columna resolveremos aplicando el principio de superposición (El elemento viga más el element barra).

El primer paso es de discretización según lo cual un cuerpo continuo se divide en una serie de regiones contiguas y disjuntas entre sí, llamadas elementos finitos. Los elementos finitos se unen entre sí en un número finito de puntos, llamados nodos. Sólo los desplazamientos nodales se consideran independientes y el desplazamiento de un punto cualquiera, viene determinado por los desplazamientos de los nodos del elemento al que pertenece el punto.

Por lo tanto, en este caso hemos discretizado el cuerpo continuo en dos elementos y en tres nodos cada uno con tres grados de libertades. En la Figura 12 podemos ver la discretización del elemento en dos elementos finitos.

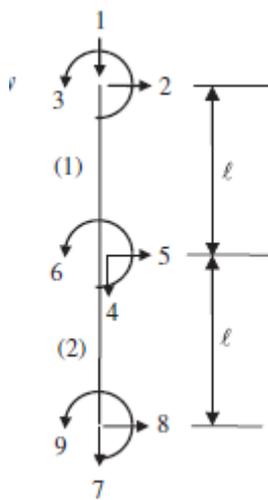


Figura 12: Elemento discretizado

Como tenemos dos elementos, habrá dos matrices de rigidez que deberán ensamblarse para obtener la matriz global. En los capítulos anteriores hemos explicado con detalle que como calcularemos matriz de rigidez elástica y geométrica.

Matrices de rigidez elástica:

$$K_E^{(1)} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 1 & \phi & & & & \\ 2 & 0 & 12 & & & \\ 3 & 0 & 6\ell & 4\ell^2 & & \\ 4 & -\phi & 0 & 0 & \phi & \\ 5 & 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 \\ 6 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

$$K_E^{(2)} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \begin{bmatrix} \phi & & & & & \\ 0 & 12 & & & & \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & & & \\ -\phi & 0 & 0 & \phi & & \\ 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 & \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\phi = A\ell^2/I.$$

Matriz de rigidez ensamblada:

$$K_E = \frac{EI}{\ell^3} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\ -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -6\ell & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2\ell^2 & 0 & 8\ell^2 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

La matriz final de rigidez elástica es de dimensión (5x5), en teoría tenía que ser de (9x9) porque tenemos tres nodos y cada nudo tiene tres grados de libertades. Pero como que los movimientos de nudo de 3 totalmente y de nudo 1 parcialmente están restringidos, podemos simplificar las filas y columnas que corresponden a estos nodos. De misma manera también podremos simplificar la matriz global de rigidez geométrica.

Matriz de rigidez geométrica:

$$K_G^{(1)} = -\frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 2 & 0 & 6/5 & & & \\ 3 & 0 & \ell/10 & 2\ell^2/15 & & \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 5 & 0 & -6/5 & -\ell/10 & 0 & 6/5 \\ 6 & 0 & \ell/10 & -\ell^2/30 & 0 & -\ell/10 & 2\ell^2/15 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$K_G^{(2)} = -\frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} 4 & 0 & & & & \\ 5 & 0 & 6/5 & & & \\ 6 & 0 & \ell/10 & 2\ell^2/15 & & \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 8 & 0 & -6/5 & -\ell/10 & 0 & 6/5 \\ 9 & 0 & \ell/10 & -\ell^2/30 & 0 & -\ell/10 & 2\ell^2/15 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Matriz de rigidez geométrica ensamblada:

$$K_G = -\frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2\ell^2/15 & -\ell/10 & -\ell^2/30 \\ 5 & 0 & 0 & -\ell/10 & 12/5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -\ell^2/30 & 0 & 4\ell^2/15 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Una vez determinadas las dos matrices ya podemos hacer ensamblaje, pero antes haremos unos ajustes para facilitar los cálculos. Consideraremos $P = 1$ y multiplicaremos la matriz de rigidez geométrica por λ que será la carga crítica de pandeo.

Matriz global de rigidez:

$$\begin{vmatrix} \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\ -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\ell^2 - \frac{2}{15} \frac{\lambda\ell^2}{EI} & -6\ell + \frac{1}{10} \frac{\lambda\ell^3}{EI} & 2\ell^2 + \frac{1}{30} \frac{\lambda\ell^4}{EI} \\ 0 & 0 & -6\ell + \frac{1}{10} \frac{\lambda\ell^3}{EI} & 24 - \frac{12}{5} \frac{\lambda\ell^2}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 2\ell^2 + \frac{1}{30} \frac{\lambda\ell^4}{EI} & 0 & 8\ell^2 - \frac{4}{15} \frac{\lambda\ell^4}{EI} \end{vmatrix} \quad (7.7)$$

El siguiente paso es de calcular el determinante de matriz global.

$$|K_E + \lambda K_G^*| = 0. \quad (7.8)$$

Consideraremos que:

$$\mu = \lambda\ell^2/EI.$$

$$\begin{vmatrix} \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\ -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(2 - \frac{\mu}{15}\right) & -6 + \frac{\mu}{10} & 2 + \frac{\mu}{30} \\ 0 & 0 & -6 + \frac{\mu}{10} & 12\left(2 - \frac{\mu}{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \frac{\mu}{30} & 0 & 4\left(2 - \frac{\mu}{15}\right) \end{vmatrix} = 0$$

El determinante de esta matriz nos lleva hasta la siguiente Ecuación polinómica:

$$3\mu^3 - 220\mu^2 + 3,840\mu - 14,400 = 0 \quad (7.10)$$

Ahora calcularemos raíces de esta Ecuación polinómica y quedaremos con la raíz más pequeña. Las raíces de esta Ecuación son siguientes:

$$\mu = 5.1772$$

$$\mu = 18.775$$

$$\mu = 49.381$$

El valor más pequeño es de 5.1772. Por lo tanto, quedamos con este valor.

Sabemos que:

$$\mu = \frac{\lambda l^2}{EI} \quad (7.11)$$

Por lo tanto:

$$5.1772 = \frac{\lambda l^2}{EI} \quad (7.12)$$

$$\lambda = \frac{5.1772EI}{l^2} \quad (7.13)$$

Ya sabemos el valor de la carga crítica, lo que haremos ahora será igualar este valor de la carga con la de la carga crítica de Euler.

Carga crítica de Euler:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2} \quad (7.14)$$

$$L_{eq} = \beta L$$

L es la longitud total del cuerpo continuo.

$$\frac{\pi^2 EI}{\beta^2 L^2} = \frac{5.1772EI}{l^2} \quad (7.15)$$

$$l = 0.5L$$

$$\frac{\pi^2 EI}{\beta^2 L^2} = \frac{5.1772EI}{0.25L^2} \quad (7.16)$$

De aquí podemos sacar el valor de β :

$$\beta = 0.699$$

El valor exacto de β para este caso es de 0,7 y el error es muy pequeño, del orden del 0,1%. Para resto de casos no haremos paso por paso sino que solo mostraremos resultados en una tabla.

7.1. Elementos de sección constante con fuerza aplicada variable

Aquí tenemos el primer caso de elementos de sección constante con fuerza aplicada variable. La Norma Básica de Edificación “NBE-EA” utiliza una fórmula concreta que esta mencionada en la Tabla 1 para determinar el valor del coeficiente β para diferentes condiciones de contorno de elementos de sección constante con esfuerzo aplicada variable. La tabla tiene la formula y los valores de β para diferentes casos en función de la relación N'/N .

Coeficiente		$\beta = \sqrt{1 + \frac{CN'}{N}} \quad \text{según el caso}$			
C	0.880	0.510	1.650	0.930	2.180
K	1.880	3.090	5.420	7.720	0.800
$\frac{N'}{N}$					
0.0	0.729	0.569	0.429	0.359	1.122
0.1	0.761	0.582	0.462	0.376	1.238
0.2	0.792	0.596	0.495	0.392	1.346
0.3	0.818	0.610	0.524	0.407	1.440
0.4	0.846	0.623	0.553	0.421	1.532
0.5	0.875	0.636	0.579	0.434	1.620
0.6	0.901	0.648	0.605	0.449	1.704
0.7	0.927	0.663	0.629	0.462	1.784
0.8	0.950	0.675	0.654	0.474	1.856
0.9	0.975	0.687	0.676	0.488	1.928
1.0	1.000	0.700	0.700	0.500	2.000

Tabla 1: El valor de β en función de N'/N y condiciones de contorno

Los parámetros “C” y “K” son dos constantes que cogen diferentes valores según las condiciones de contorno. “N” es la carga máxima a un extremo del elemento y “N'” es

la carga mínima a otro extremo del elemento. La variación de la carga de un extremo a otro es lineal. Debemos tener en la cuenta que la carga aplicada solo afecte a matriz de rigidez geométrica y por lo tanto, la matriz de rigidez elástica de todos los subelementos será igual.

Lo que haremos nosotros será calcular el coeficiente β para todos los casos mencionados en la tabla superior por el método matricial y comparar los resultados. Esta comparación se hará mediante error relativo. El Anexo B adjuntado contiene una serie de tablas, una para cada contorno.

Estas tablas tienen valores de la carga crítica y del coeficiente de esbeltez de primera (de tres nodos) y segunda (de cinco nodos) discretización. Aunque el error relativo de primera discretización (de dos elementos finitos) es bastante pequeña que podemos ver en las tablas de Anexo 2, hemos hecho una segunda (de cuatro elementos finitos) para mejorar los resultados. Y hemos conseguido que el error sea menor que de primera discretización, además tenía que ser así, según el criterio de convergencia a medida que aumentamos el número de elementos finitos la solución extiende a valor exacto.

En La Tabla 2 calculando el error relativo hemos hecho una comparación de los resultados que hemos obtenido nosotros con los que nos facilita la Norma Básica de Edificación.

Empotrada Apoyada	Bi Empotrada	Empotrada Libre	Bi Articulada	Apoyada Empotrada
0	2,785	6,417	1,097	3,164
1,082	1,595	5,735	0,263	2,749
2,020	0,510	5,052	0,252	2,181
2,099	0	3,819	0,366	1,639
1,989	0,237	3,067	0,354	1,284
1,554	0	2,407	0,228	0,943
1,322	0,445	1,659	0,443	0,771
0,953	0,432	1,401	0,431	0,301
0,765	0,210	0,700	0,105	0,148
0,295	0,614	0,259	0,205	0
0,114	0,016	0,002	0,040	0,011

Tabla 2: El error relativo en % entre β de "NBE-EA" y β calculada por MEF

Vemos que el error en todos los casos es relativamente muy pequeño, viendo los resultados obtenidos mediante método matricial podemos decir que la fórmula mencionada en la Norma Básica de Edificación es bastante precisa para determinar el coeficiente de esbeltez.

7.2. Elementos con carga puntual intermedia

En este caso los valores de coeficiente beta están en función de la relación $\frac{l_1}{l}$ que define la posición de la carga en caso anterior era en función de N'/N . Para cada posición hay un valor de β .

La "NBE-EA" calcula la β mediante estas dos fórmulas.

$$\beta = \sqrt{\sum_1^n \alpha_i \beta_i^2} \tag{7.2.1}$$

$$\alpha_i = \frac{P_i}{\sum_1^n P_i} \tag{7.2.2}$$

Aquí "P_i" es la carga puntual y β_i es el coeficiente correspondiente a "P_i" como si actuase aisladamente. La siguiente tabla es de "NBE-EA" que contiene valor de beta en función de las condiciones de contorno y de las posiciones de la carga.

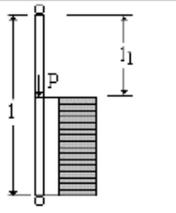
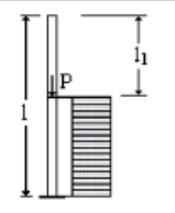
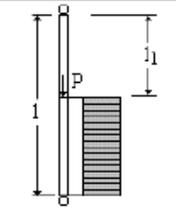
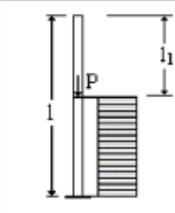
l_1/l								
	Pieza biarticulada		Pieza libre y empotrada		Pieza empotrada y apoyada		Pieza biempotrada	
	β	β^5	β	β^5	β	β^5	β	β^5
0.0	1.000	1.000	2.000	4.000	0.699	0.4896	0.500	0.2500
0.1	0.898	0.806	1.800	3.240	0.605	0.3662	0.494	0.2446
0.2	0.805	0.649	1.600	2.560	0.533	0.2850	0.471	0.2219
0.3	0.741	0.549	1.400	1.960	0.481	0.2319	0.430	0.1851
0.4	0.711	0.506	1.200	1.440	0.458	0.2101	0.387	0.1502
0.5	0.707	0.500	1.000	1.000	0.456	0.2085	0.364	0.1326
0.6	0.703	0.494	0.800	0.640	0.440	0.1942	0.362	0.1311
0.7	0.671	0.451	0.600	0.360	0.392	0.1543	0.340	0.1159
0.8	0.592	0.351	0.400	0.160	0.306	0.0938	0.279	0.0781
0.9	0.440	0.194	0.200	0.040	0.173	0.0310	0.168	0.0285
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.0000

Tabla 3 : β en función del punto de aplicación de carga y condiciones de contorno.

Con el método matricial cuando calculamos el coeficiente de esbeltez de los elementos con carga puntual aplicada a intermedio la que hacemos es anular la matriz de rigidez geométrica de todos los subelementos que están sobre la posición de la carga, en este caso tenemos once nodos y por lo tanto, diez subelementos. Y como el caso anterior la sección es constante y homogénea la matriz de rigidez elástica de todos los subelementos es idéntico.

A continuación hay dos tablas, la Tabla 4 contiene valores de β de diferentes casos según las condiciones de contorno y en la Tabla 5 una vez más, para comparar los resultados hemos calculado el error relativo entre β de "NBE-EA" y β determinadas por método matricial (MEF).

l1/l	Empotrada – Libre		Empotrada - Apoyada		Bi- Empotrada		Bi -Articulada	
	Beta NBE-EA	Beta	Beta NBE-EA	Beta	Beta NBE-EA	Beta	Beta NBE-EA	Beta
0	2	1,998	0,699	0,696	0,5	0,497	1	0,9997
0,1	1,8	1,799	0,605	0,603	0,494	0,493	0,898	0,912
0,2	1,6	1,599	0,533	0,531	0,471	0,469	0,805	0,834
0,3	1,4	1,399	0,481	0,479	0,43	0,427	0,741	0,755
0,4	1,2	1,199	0,458	0,458	0,387	0,385	0,711	0,738
0,5	1	1	0,456	0,456	0,364	0,363	0,707	0,731
0,6	0,8	0,799	0,44	0,439	0,362	0,361	0,703	0,726
0,7	0,6	0,599	0,392	0,392	0,34	0,34	0,671	0,71
0,8	0,4	0,399	0,306	0,305	0,279	0,279	0,592	0,653
0,9	0,2	0,199	0,173	0,175	0,168	0,167	0,44	0,486
1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4: Los valores de β calculados por MEF y de los "NAE-EA"

l1/l	Emp.-Libre	Emp.-Apo.	Biempotrado	Biarticulado
1	0,060	0,429	0,600	0,020
0,9	0,011	0,330	0,202	1,559
0,8	0,006	0,375	0,424	3,602
0,7	0,007	0,415	0,697	1,889
0,6	0,016	0	0,516	3,797
0,5	0	0	0,274	3,394
0,4	0,012	0,227	0,276	3,271
0,3	0,016	0	0	5,812
0,2	0,050	0,326	0	10,304
0,1	0,100	1,156	0,595	10,454
0	0	0	0	0

Tabla 5: El error relativo en % entre β de "NBE-EA" y β calculada por MEF

En general una vez más el error relativo no es muy grande, solo en caso de elemento biarticulado cuando el punto de aplicación es muy pequeño llega hasta 10%.

Además de esto hemos encontrado un error en el catálogo de "NBE-EA" los valores β^5 de tabla 3 que hemos cogido des de "NBE-EA" no corresponden a β^5 sino que corresponden a β^2 . Y creemos que ha sido un error de impresión.

7.3. Análisis con carga puntual descentrada intermedia

Además de comparar los resultados que hemos obtenido de elementos con carga puntual intermedia con los que nos dice la “NBE-EA”, se ha realizado un análisis suponiendo que la carga no está aplicada en el centro de la sección de la columna como es en la realidad que las columnas tienen un apoyo donde descansan las vigas. Se analizan dos distancias diferentes, en primer lugar consideraremos que la distancia entre el centro de la sección y de la carga es de 5% de la longitud total de la columna (L) y en segundo lugar la distancia es de 20% de la longitud total.

Para ver la diferencia hemos hecho siguientes gráficos:

- El color azul es de carga centrada.
- El color amarillo es de carga descentrada (5% de L).
- El color gris es de carga descentrada (20% de L).

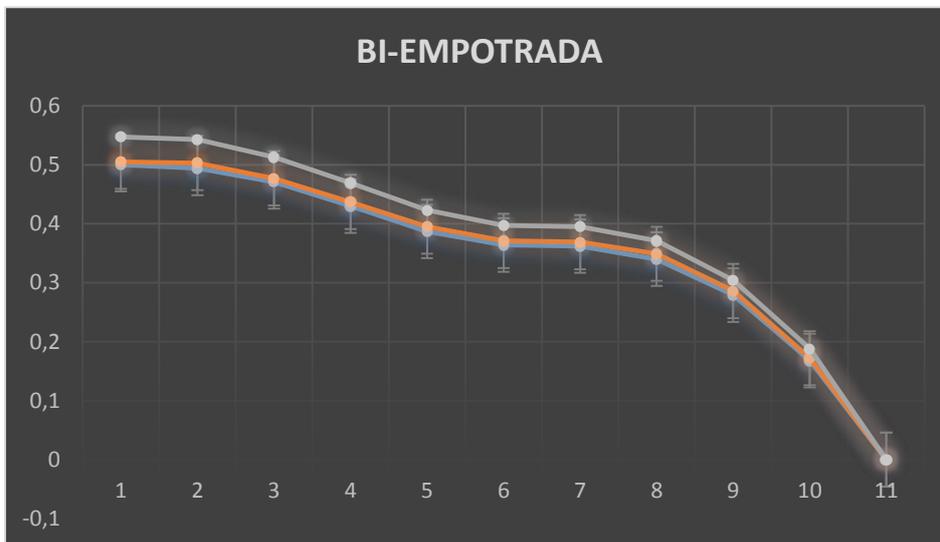


Figura 1: Curvas de variación del β del elemento bi-empotrado.

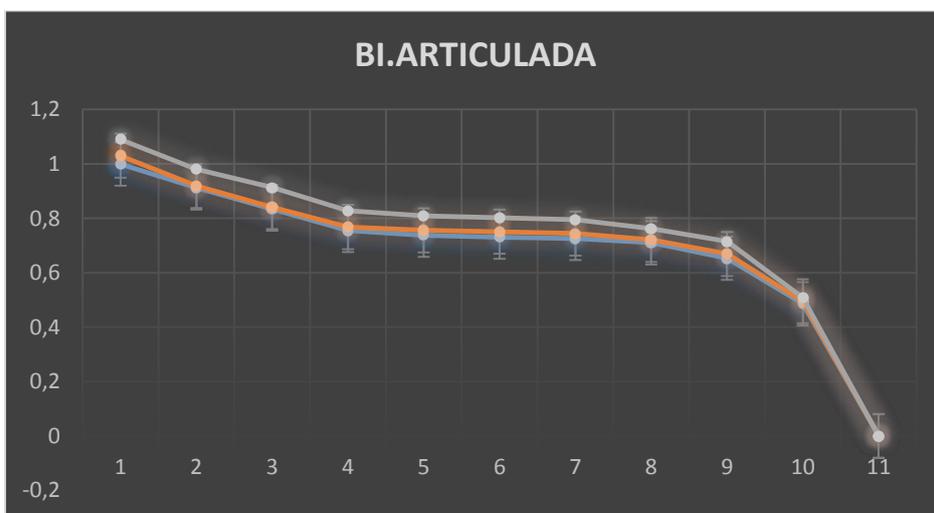


Figura 2: Curvas de variación del β del elemento bi-articulado.

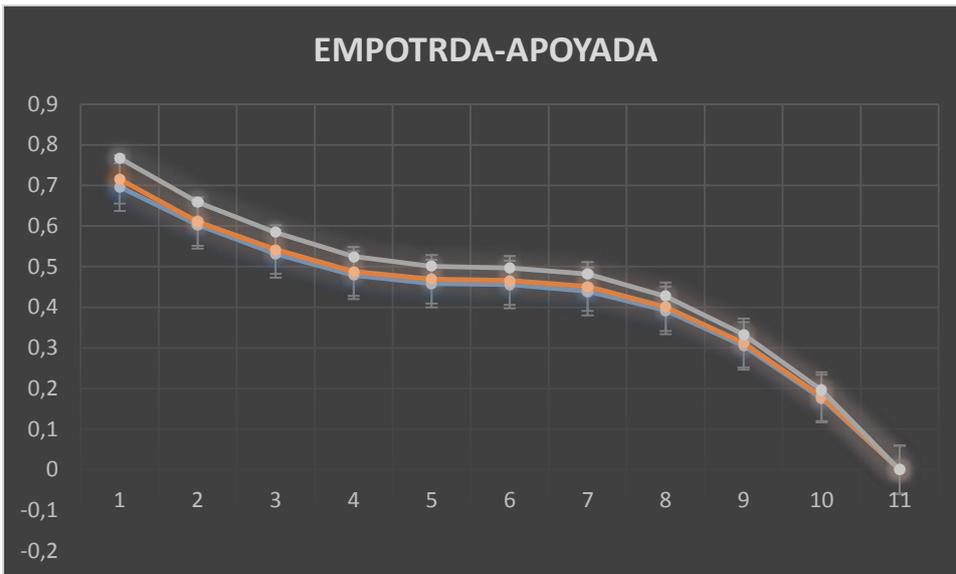


Figura 3: Curvas de variación del β del elemento empotrado-apoyado.

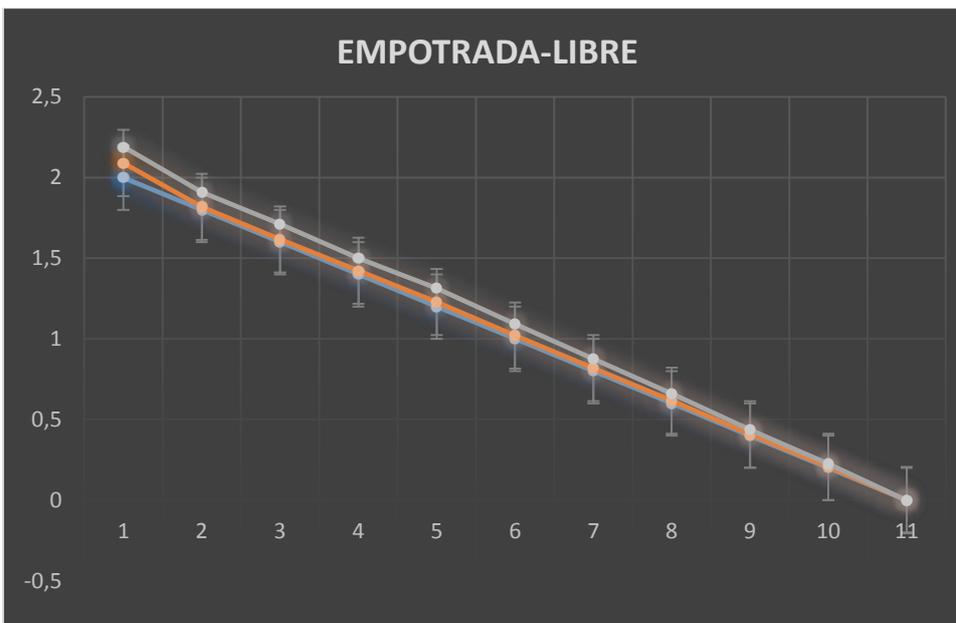


Figura 4: Curvas de variación del β del elemento empotrado-libre.

Basándonos en estos gráficos podemos decir que a medida que aumenta la distancia entre el centro de la sección y del punto de aplicación de carga el coeficiente de esbeltez también aumenta y no hemos encontrado ni tan solo un único caso en que el coeficiente de carga descentrada sea menor que de la carga centrada, aunque este aumento no es muy grande en primer caso, porque la distancia entre el centro de la sección de la columna y del punto de aplicación de la carga es muy pequeño, pero en segundo caso se ve con más claridad que a medida que aumenta la distancia el valor del coeficiente de esbeltez también aumenta.

Es lógico que sea así porque cuando la carga no es centrada además de la carga hay un momento y el parecer el momento esto favorece el pandeo. Por lo tanto, el coeficiente de carga no concentrada debe ser mayor que el de la concentrada.

8. Resumen de Presupuesto

Resumen de presupuesto

Capítulo	Importe
Estudio i implementación de las matrices y el código Matlab	3795 €
Elaboración de código Matlab	5600€
Realización de cálculos	1650€
Avaluación de resultados	1155 €
Presupuesto De Ejecución Material (PEM)	12200€

Presupuesto general

Presupuesto De Ejecución De Material (PEM)	12200€
13 % de gastos generales	1586€
8 % de beneficio Industrial	976€
Presupuesto De Ejecución Para Contrato Sin IVA	14762€

El presupuesto de ejecución es de **catorce mil siete cientos sesenta dos** euros

9. Conclusiones

Al finalizar el trabajo podemos decir que hemos alcanzado todos los objetivos que habíamos marcado a iniciar el trabajo, y los resultados obtenidos de los tres casos son bastante satisfactorios.

Hablando de los dos primeros casos, elementos de sección constante sometidos a carga variable y elementos con carga puntual aplicada en la zona intermedia no esperábamos que los valores fueran tan semejantes con los de Normativa Básica de Edificación, en mayoría de situaciones el error es de menos de 1%. Esto demuestra que las formulas utilizada por "NBE-EA" son bastantes precisas.

Al hacer análisis gráfico entre carga puntual descentrada aplicada en la zona intermedia de los elementos se ha visto a medida que aumenta la distancia entre centro de la sección y del punto de aplicación de carga el coeficiente de esbeltez también aumenta y no hemos encontrado ni tan solo un único caso en que el coeficiente de carga no concentrada sea menor que de la carga centrada. Y nos parece lógico que sea así porque cuando la carga no es centrada además de la carga hay un momento y el parecer el momento esto favorece el pandeo. Por lo tanto, el coeficiente de carga descentrada debe ser mayor que el de la centrada.

Por ultimo me gustaría hacer mención de la elaboración del código de Matlab sin este código no se hubiera logrado nuestro objetivo porque no había manera de calcular las matrices de hasta (30x30) y sus determinantes. El código elaborado es capaz de calcular la matriz de rigidez elástica y geométrica de cualquier estructura que se base en elementos pórticos. Para el estudio elaborado no hubiera sido posible el cálculo manual de las matrices de hasta (30x30) y sus valores propios. Viendo estas utilidades de herramientas informáticas nos hace entender su importancia tecnológica en el avance de cualquier ámbito.

10. Bibliografía

Libros:

CHAI H. YOO (*Auburn University*) **SUNG C. LEE** (*Dongguk University*); *Stability of Structures*; Suite 400 Burlington, MA 01803, USA; 2011.

A.J.M. Ferreira; *MATLAB Codes For Finite Element Analysis*; SAMIA 157, G.M.L. Gladwell; 2009.

Juan Tomás Celigüeta Lizarza; *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*; UNICOPIA C.B.M. Lardizábal, 13 20018 San Sebastián – Guipúzcoa; 2004.

Salvadori, M., & Heller, R. (1963). *Structure in Architecture*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Artículos:

C. Fabr  Sentile, M. Sánchez Noa; Análisis de pérdida de estabilidad no lineal de elementos estructurales sometidos a compresión; Municipio Cerro. Ciudad Habana. Cuba; 2006.

Nazzals S.Armouti, M.S.Abdel Jabar; Effect of axial stiffness on stability of frames; Beale, R.G. (ED.) Oxford Brooks University, 2007.

Charles E. Augarde; Generation of shape functions for straight beam elements; University of Oxford, Parks Road, Oxford, U.K.; 1998.

Sonia Lebofsky; Numerically Generated Tangent Stiffness Matrices for Geometrically Non-Linear Structures; University of Washington; 2013

Material obtenido de la red:

Norma Básica de la Edificación “NBE-EA-95”

(https://www5.uva.es/guia_docente/uploads/2012/455/42617/1/Documento56.pdf, 17/08/2014).

Análisis est tico no lineal

(ftp://milo.udc.es/Doctorado/Estructuras2/analisis_no_lineal/T2_1_NLG1.pdf, 02/08/2014).

Finite element analysis of beams and frames;

(<http://www2.mae.ufl.edu/nkim/eml5526/Lect05.pdf>, 27/07/2014)

Pandeo elástico de barras

(<http://www.aero.ing.unlp.edu.ar/catedras/archivos/Pandeo%20elastico%20de%20Barras.pdf>, 06/07/2014).

Métodos numéricos usados por ANSYS 8.0.

(<http://es.scribd.com/doc/81053219/7-CAPITULO-6>, 11/08/2014)

Material informático:

MATLAB (2013), programa de cálculo.

11. ANEXOS

11.1. Anexo-A

Código MATLAB elaborado

El código tiene dos funciones (functions), la primera calcula la matriz de rigidez elástica y la segunda la matriz de rigidez geométrica y además suma las dos y calcula determinante.

Los mecanismos de determinar y simplificar la matriz en dos casos son bastante semejantes, por esta razón los códigos de las dos funciones parecen mucho.

En los dos funciones los datos de entradas son igual, hay tres variables de entradas.

- El vector "BC" de las condiciones de contorno. La longitud del vector se determina multiplicando grados de libertad (en nuestro caso tenemos tres grados libertad) por número de nodos. Este vector es de ceros y unos, cero representa a movimiento restringido y uno el contrario.
- El segundo vector es "nodecoordinates", en este vector determinamos las coordenadas de cada nodo.
- Y último es el vector "elementNodes", aquí explicamos que como están interconectados los nodos para forma la estructura final.

```
%.....
function stiffness=formStiffnessGrid(GDof, ...
    numberElements,elementNodes,xx,yy,E,I,G,J)

% función para calcular la matriz de rigidez elástica
syms E
syms G
syms I
syms J
syms L
..
BC=[0;0;0;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];%(x,teta,y) este vector es de las
%condiciones de contorno

nodeCoordinates=[0 0; 0 0.5; 0 1; 0 1.5; 0 2];
xx=nodeCoordinates(:,1) ;
yy=nodeCoordinates(:,2);
elementNodes=[1 2; 2 3; 3 4; 4 5]

numberNodes=length(nodeCoordinates)
numberNodes=size(nodeCoordinates,1);
numberElements= size(elementNodes,1);

% GDof: numero total de los grados de libertad
GDof=3*numberNodes;

stiffness=vpa(zeros(GDof));
%f=1
%i=1
```

En este parte del código sirve para calcular la matriz de cada subelementos y sumar los todos.

```

for e=1:numberElements;
    indice=elementNodes(e,:);
    elementDof=[...
        (indice(1)-1)*3+1 (indice(1)-1)*3+2 (indice(1)-1)*3+3 ...
        (indice(2)-1)*3+1 (indice(2)-1)*3+2 (indice(2)-1)*3+3]
    xa=xx(indice(2))-xx(indice(1))
    ya=yy(indice(2))-yy(indice(1))
    U=sqrt(xa*xa+ya*ya)
    C=xa/U
    S=ya/U
    %I = f*I
    %J =J/f
    a1 = 12*E*I/(L*L*L);
    a2 = 6*E*I/(L*L);
    a3 = G*J/L;
    a4 = 4*E*I/L;
    a5 = 2*E*I/L;
    % matriz en eje locals
    k = [a1 0 a2 -a1 0 a2 ; 0 a3 0 0 -a3 0
        a2 0 a4 -a2 0 a5 ; -a1 0 -a2 a1 0 -a2
        0 -a3 0 0 a3 0; a2 0 a5 -a2 0 a4]

    % matriz de transformación
    a=[1 0 0; 0 C S;0 -S C]
    R=[a zeros(3);zeros(3) a]
    stiffness(elementDof,elementDof)=...
        stiffness(elementDof,elementDof)+R'*k*R
    % if i < 5
        % f = f-0.5
    % else
        % f = 1
    % end
    % i = 1+i
end

```

El último trozo sirve para simplificar la matriz.

```

D = zeros(3*numberNodes,1)
D = BC
D(3,1)
%Stiffness = stiffness*D
p = GDof
n =1
i=0

MA =zeros(i,1)
for e= 1:1:p;
    D(n)

    if D(n) == 0;
        b = n
    end
end

```



```

elementDof=[...
    (indice(1)-1)*3+1 (indice(1)-1)*3+2 (indice(1)-1)*3+3 ...
    (indice(2)-1)*3+1 (indice(2)-1)*3+2 (indice(2)-1)*3+3] ;
xa=xx(indice(2))-xx(indice(1));
ya=yy(indice(2))-yy(indice(1));
U=sqrt(xa*xa+ya*ya);
C=xa/U;
S=ya/U;

b1 = P*6/(5*L);
b2 = P/10;
b3 = P*2*L/15;
b4 = P*L/30;
b5 = 0;

k = [-b1 0 -b2 b1 0 -b2;
     b5 b5 b5 b5 b5 b5; -b2 0 -b3 b2 0 b4;
     b1 0 b2 -b1 0 b2; b5 b5 b5 b5 b5 b5;-b2 0 b4 b2 0 -b3]
b=[1 0 0; 0 C S;0 -S C];
R=[b zeros(3);zeros(3) b];
KG(elementDof,elementDof)=...
    KG(elementDof,elementDof)+R'*k*R
f = f+1
end
D = zeros(3*numberNodes,1)
D = BC
p = GDof
n =1
i=0

MA =zeros(i,1)
for e= 1:1:p;
    D(n)

    if D(n) == 0;
        t = n
        i = i+1
        Mres(i) = t %moviments restringits
        n = n+1
    else
        n = n+1
    end
end

end

KG(:,Mres) = []
KG(Mres,:) = []
syms Q x
KG = x*KG;

stiffness=formStiffnessGrid(GDof, ...
    numberElements,elementNodes,xx,yy,E,I,G,J);

Kglobal=KG+stiffness
Dl =det(Kglobal)

```

D2 = subs (D1, E, 1)
D3 = subs (D2, I, 1)
D4 = subs (D3, L, 1)
D5 = subs (D4, G, 1)
D6 = subs (D5, J, 1)

11.2. Anexo-B

Coeficientes β de elementos de sección constante sometidos a carga variable:

Las siguientes tablas tienen dos valores de β , uno del elemento de 3 nodos y el otro del elemento de 5 nodos, y el error relativo (respecto valor que nos propone la "NBE") en % para cada valor de β .

		3 nodos / 2 elementos			5 nodos / 4 elementos		
N'/N	Beta "NBE"	λ	Beta	Error En %	λ	Beta	Error En %
0	0,729	4,7690	0,719	1,371742112	1,1343	0,737	1,09739369
0,1	0,761	4,3931	0,749	1,576872536	1,0595	0,763	0,262812089
0,2	0,792	4,0646	0,779	1,641414141	0,9878	0,79	0,252525253
0,3	0,818	3,7766	0,808	1,222493888	1	0,815	0,366748166
0,4	0,846	3,5229	0,836	1,182033097	0,866441	0,843	0,354609929
0,5	0,875	3,2984	0,864	1,257142857	0,809377	0,873	0,228571429
0,6	0,901	3,0989	0,892	0,998890122	0,766646	0,897	0,443951165
0,7	0,927	2,9206	0,919	0,862998921	0,723883	0,923	0,431499461
0,8	0,95	2,7607	0,945	0,526315789	0,684931	0,949	0,105263158
0,9	0,975	2,6165	0,971	0,410256410	0,651559	0,973	0,205128205
1	1	2,48596	0,999	0,374000000	0,617344	0,9996	0,040000000

Tabla 6: Los valores de β y el error relativo del elemento biarticulado

		3 nodos / 2 elements			5 nodos / 4 elements		
N'/N	Beta "NBE"	λ	Beta	Error En %	λ	Beta	Error En %
0	0,429	12,000	0,453	5,594405594	3,34586	0,429	0
0,1	0,462	10,710	0,479	3,67965368	2,95558	0,457	1,082251082
0,2	0,495	9,6379	0,505	2,02020202	2,61956	0,485	2,02020202
0,3	0,524	8,7402	0,531	1,335877863	2,3357	0,513	2,099236641
0,4	0,553	7,9817	0,555	0,361663653	2,0976	0,542	1,98915009
0,5	0,579	7,3352	0,579	0	1,89773	0,57	1,554404145
0,6	0,605	6,7793	0,603	0,330578512	1,7291	0,597	1,32231405
0,7	0,629	6,2972	0,625	0,635930048	1,58579	0,623	0,953895072
0,8	0,654	5,8761	0,648	0,917431193	1,46298	0,649	0,764525994
0,9	0,676	5,5055	0,67	0,887573964	1,35689	0,674	0,295857988
1	0,700	5,1772	0,6992	0,114285714	1,26451	0,6992	0,114285714

Tabla 7: Los valores de β y el error relativo del elemento empotrado-apoyado

		3 nodos / 2 elements			5 nodos / 4 elements		
N'/N	Beta "NBE"	λ	Beta	Error en %	λ	Beta	Error en %
0	0,569	8,3489	0,543	4,569420035	1,78490	0,587	3,163444640
0,1	0,582	7,9037	0,5587	4,003436426	1,72083	0,598	2,749140893
0,2	0,596	7,4932	0,574	3,691275168	1,65965	0,609	2,181208054
0,3	0,610	7,1151	0,588	3,606557377	1,60128	0,62	1,639344262
0,4	0,623	6,7671	0,603	3,210272873	1,54567	0,631	1,284109149
0,5	0,636	6,4466	0,618	2,830188679	1,49273	0,642	0,943396226
0,6	0,648	6,15113	0,633	2,314814815	1,44235	0,653	0,771604938
0,7	0,663	5,8785	0,647	2,413273002	1,39445	0,665	0,301659125
0,8	0,675	5,6266	0,662	1,925925926	1,34892	0,676	0,148148148
0,9	0,687	5,3934	0,676	1,601164483	1,30564	0,687	0
1	0,700	5,1772	0,6992	0,114285714	1,26451	0,699	0,011428571

Tabla 8: Los valores de β y error relativo del elemento apoyado-empotrado

		3 nodos / 2 elements			5 nodos / 4 elements		
N'/N	Beta "NBE"	λ	Beta	Error en %	λ	Beta	Error en %
0	0,359	19,4192	0,356	0,835654596	4,51686	0,369	2,78551532
0,1	0,376	17,8200	0,372	1,063829787	4,22406	0,382	1,595744681
0,2	0,392	16,4429	0,387	1,275510204	3,95646	0,394	0,510204082
0,3	0,407	15,2483	0,402	1,228501229	3,70846	0,407	0
0,4	0,421	14,2049	0,416	1,187648456	3,48153	0,42	0,237529691
0,5	0,434	13,2874	0,43	0,921658986	3,27455	0,434	0
0,6	0,449	12,4757	0,444	1,113585746	3,0861	0,447	0,445434298
0,7	0,462	11,7533	0,458	0,865800866	2,91457	0,46	0,432900433
0,8	0,474	11,1066	0,471	0,632911392	2,75839	0,473	0,210970464
0,9	0,488	10,5224	0,484	0,819672131	2,61599	0,485	0,614754098
1	0,500	10,0000	0,496	0,800000000	2,486	0,49992	0,016000000

Tabla 9: Los valores de β y el error relativo del elemento Biempotrado:

		3 nodos / 2 elementos			5 nodos / 4 elementos		
N'/N	Beta "NBE"	λ	Beta	Error en %	λ	Beta	Error en %
0	1,122	2,48596	0,9996	10,90909091	0,557477	1,05	6,417112299
0,1	1,238	2,02590	1,103	10,90468498	0,452928	1,167	5,735056543
0,2	1,346	1,66510	1,217	9,583952452	0,377376	1,278	5,052005944
0,3	1,440	1,39409	1,33	7,638888889	0,32167	1,385	3,819444444
0,4	1,532	1,19055	1,439	6,070496084	0,279471	1,485	3,067885117
0,5	1,620	1,03500	1,544	4,691358025	0,246642	1,581	2,407407407
0,6	1,704	0,91348	1,643	3,579812207	0,220488	0,943	44,65962441
0,7	1,784	0,81646	1,738	2,578475336	0,199219	1,759	1,401345291
0,8	1,856	0,73750	1,829	1,454741379	0,181614	1,843	0,700431034
0,9	1,928	0,67212	1,916	0,622406639	0,166817	1,923	0,259336100
1	2,000	0,61717	1,9994	0,030000000	0,154218	1,99996	0,002000000

Tabla 10: los valores de β y el error relativo del elemento empotrado-libre

11.3. Anexo C

Presupuesto

En este documento explicaremos en detalle el presupuesto necesario para realización del nuestro trabajo.

Precio unitario

Concepto	Precio Unitario
Ingeniero	33 €/h
Técnico informático	21€/h
Matlab	2000 €

Presupuestos parciales

Estudio e implementación de la matriz de la rigidez total:

Mano de obra	Precio unitario	Horas	Total
Ingeniero	33 €/h	115 h	3795 €

Elaboración del código Matlab:

Mano de obra	Precio unitario	Horas	Total
Técnico informático	24 €/h	150 h	3600 €
Material			
Matlab			2000€
Precio total			5600€

Realización de cálculos:

Mano de obra	Precio unitario	Horas	Total
Ingeniero	33 €/h	50 h	1650 €

Avaluación de resultados:

Mano de obra	Precio unitario	Horas	Total
Ingeniero	33 €/h	35 h	1155 €

Resumen de presupuesto

Capítol	Importe
Estudio i implementación de las matrices y el código Matlab	3795 €
Elaboración de código Matlab	5600€
Realización de cálculos	1650€
Avaluación de resultados	1155 €
Presupuesto De Ejecución Material (PEM)	12200€

Presupuesto general

Presupuesto De Ejecución De Material (PEM)	12200€
13 % de gastos generales	1586€
8 % de beneficio Industrial	976€
Presupuesto De Ejecución Para Contrato Sin IVA	14762€

El presupuesto de ejecución es de **catorce mil siete cientos sesenta dos** euros