



**EPS**

Escola Politècnica  
Superior

## Projecte/Treball Fi de Carrera

**Estudi:** Enginyeria Industrial. Pla 2002

**Títol:** Modelització de la contribució del formigó traccionat entre fissures en estructures reforçades amb armadures de materials compostos amb matriu polimèrica (FRP).

**Document:** MEMÒRIA I ANNEXOS

**Alumne:** Gerard Vancells i Xuclà

**Director/Tutor:** Lluís Torres

**Departament:** Eng. Mecànica i de la Construcció Industrial

**Àrea:** Enginyeria de la construcció

**Convocatòria (mes/any):** 07/2008



## ÍNDEX

<b>1. Introducció .....</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Antecedents .....</b>	<b>3</b>
<b>1.2. Objecte.....</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Especificacions i abast .....</b>	<b>4</b>
<b>2. Materials de reforç FRP.....</b>	<b>5</b>
<b>2.1. Introducció .....</b>	<b>5</b>
<b>2.2. Constituents dels FRP .....</b>	<b>6</b>
2.2.1. Resines de la matriu .....	7
2.2.2. Fibres.....	9
<b>2.3 Propietats dels materials FRP .....</b>	<b>11</b>
2.3.1 Propietats físiques .....	11
2.3.3 Efectes de l'alta temperatura i el foc.....	15
2.3.4 Comportament a llarg termini.....	16
<b>2.4 Durabilitat .....</b>	<b>18</b>
<b>2.5 Requeriment dels materials .....</b>	<b>19</b>
2.5.1 Resistència i mòdul elàstic.....	20
2.5.2 Superfície de les barres.....	21
2.5.3 Mides de barra .....	21
2.5.4 Identificació de les barres .....	22
2.5.5 Barres rectes .....	23
2.5.6 Doblat de barres .....	23
<b>2.6 Consideracions per al disseny .....</b>	<b>23</b>
2.6.1 Propietats dels materials.....	24
2.6.2 Resistència a tracció de les barres de FRP doblades .....	25
<b>2.7 Disseny a flexió.....</b>	<b>26</b>
2.7.1 Consideracions generals .....	26
2.7.2 Resistència a flexió.....	27
2.7.4 Resistència nominal a flexió .....	28
2.7.5 Factor de reducció de la resistència a flexió.....	30
2.7.6 Àrea mínima de reforç .....	31
2.7.7 Reforç a la zona de compressió .....	32
<b>2.8 Consideracions en servei .....</b>	<b>32</b>
2.8.1 Fissuració .....	32

2.8.2 Fletxa .....	34
2.8.3 Inèrcia efectiva.....	34
<b>3. Modelització de la contribució del formigó traccionat entre fissures .....</b>	<b>36</b>
<b>3.1 Introducció .....</b>	<b>36</b>
<b>3.2 Models de referència .....</b>	<b>41</b>
<b>3.3 Model constitutiu adoptat.....</b>	<b>46</b>
<b>3.4 Determinació dels coeficients <math>\alpha_1</math> i <math>\alpha_2</math> .....</b>	<b>48</b>
3.4.1 Coeficient $\alpha_1$ .....	48
3.4.2 Coeficient $\alpha_2$ .....	49
<b>3.5 Influència de <math>\alpha_1</math> i <math>\alpha_2</math> en els gràfics moment – curvatura .....</b>	<b>49</b>
<b>3.6 <i>Tension-stiffening</i> del model adoptat.....</b>	<b>50</b>
<b>3.7 <i>Tension-stiffening</i> del model de referència segons Eurocodi-2 .....</b>	<b>54</b>
3.7.1 Corbes d'exemple moment – curvatura adimensionals.....	55
<b>4. Generació dels valors <math>\alpha_2</math>.....</b>	<b>60</b>
<b>4.1 Equacions per determinar la <math>\alpha_2</math> amb reforços de GFRP.....</b>	<b>67</b>
4.1.1 $\alpha_2$ per formigons de 25 MPa 35 MPa.....	69
4.1.2 $\alpha_2$ per formigons de 35 MPa 60 MPa.....	71
4.1.3 $\alpha_2$ segons Newhook et al. (2002).....	72
4.1.4 $\alpha_2$ per a formigons de 25 MPa a 60 MPa incloent $f_{ct}$ .....	73
<b>4.2 Desviacions de l'expressió respecte els valors reals .....</b>	<b>73</b>
4.2.1 Diferències absolutes .....	73
4.2.2 Diferències percentuals .....	73
4.2.3 Error que es produeix per formigons de 25 a 35 MPa.....	74
4.2.4 Error que es produeix per formigons de 35 a 60 MPa .....	74
4.2.5 Error que es produeix per al mètode proposat a Newhook et al. (2002) .....	75
4.2.6 Error que es produeix per formigons de 25 MPa a 60 MPa incloent $f_{ct}$ . .....	76
4.2.7 Valoració global dels errors d'aproximació. ....	76
<b>5. Resum. Estudi de costos.....</b>	<b>79</b>
<b>6. Conclusions .....</b>	<b>80</b>
<b>7. Relació de documents.....</b>	<b>83</b>
<b>8. Bibliografia .....</b>	<b>84</b>
<b>9. Glossari .....</b>	<b>87</b>
<b>10. Notació.....</b>	<b>88</b>

# 1. Introducció

## 1.1 Antecedents

Els reforços amb barres de materials compostos FRP “Fiber Reinforced Polymer” han aparegut com a alternativa a l’acer pel reforç d’estructures de formigó quan les condicions ambientals poden provocar corrosió de l’acer. És per això, que el desenvolupament dels FRP pot atribuir-se a la major utilització de materials compòsits després de la segona guerra mundial, i és per aquest motiu, que la indústria aeroespacial ha reconegut els avantatges de la alta resistència i baixa densitat que ofereixen aquests materials, provocant que durant la guerra freda la indústria de defensa incrementés l’ús de compòsits. De totes maneres no va ser fins a finals del 1970 que els FRP van ser considerats positivament per al reforç d’estructures, ja que presentaven avantatges sobre les capes d’epoxy que fins aquell moment s’aplicaven a les barres d’acer. A mitjans del 1990 el Japó tenia la majoria d’aplicacions amb FRP, amb més de 100 projectes. De tota manera, Xina ha esdevingut recentment el més gran consumidor de materials compòsits per a reforç de noves construccions, en aplicacions que van des de ponts fins a túnels subterranis.

L’ús dels FRP a Europa s’inicia a Alemanya amb la construcció d’un pont d’autopista el 1986 amb barres pretesades (Meier 1992). Des de la construcció d’aquest pont s’han desenvolupat molts programes de recerca i d’ús de reforços de FRP a Europa. El projecte europeu BRITE/EURAM “*Fibre Composite Elements and Techniques as Nonmetallic Reinforcement*” va portar a extensos testos i anàlisis de material FRP des del 1991 fins el 1996 (Taerwe 1997).

Els enginyers canadencs van desenvolupar disposicions per als reforços de FRP al “Canadian Highway Bridge Design Code” i van construir nombrosos projectes de demostració, com el del Headingley Bridge a Manitoba, que incloïa reforços amb fibra de carbó (CFRP) i amb fibra de vidre (GFRP) (Rizkalla 1997). A més, el Kent County Road No.10 Bridge utilitza CFRP com a reforç (Tadros et al. 1998).

Als EEUU el primer projecte apareix el 1983 finançat pel U.S Department of Transportation (USDOT) i va ser al “Transfer of Composite Technology to Design and Construction of Bridges” (Plechnik and Ahmad 1988). Els problemes ocasionats per la deterioració dels ponts degut a les sals data d’abans del 1970 i els efectes sobre els ponts d’una certa edat s’han fet palesos en els últims anys. (Boyle and Karbhari 1994). Per altre banda, l’increment de la corrosió en les barres d’acer recobertes amb una capa d’epoxy van fer augmentar d’interès en mètodes alternatius per evitar-la. Així, doncs, els reforços de

FRP van començar a considerar-se com a una solució general per a solucionar aquests problemes de corrosió a ponts i altres estructures (Benmokrane et al. 1996).

## 1.2. Objecte

El present treball pretén modelitzar el comportament del formigó traccionat entre fissures (*Tension-Stiffening*) en estructures reforçades amb FRP, ja sigui GFRP (*Glass Fiber Reinforced Polymer*), AFRP (*Aramid Fiber Reinforced Polymer*) o CFRP (*Carbon Fiber Reinforced Polymer*), adoptant lleis constitutives referides al formigó traccionat entre fissures basades en diagrames (moment-curvatura). Amb l'ajut d'aquests diagrames, que relacionen les deformacions seccionals amb els esforços, podrem esbrinar la influència d'aquest fenomen, conegut com a *Tension – Stiffening*.

Per a l'anàlisi, tindrem en compte les propostes dels codis i normatives, com les de l'*American Concrete Institute* (ACI), i els compararem amb les solucions i mètodes de càlcul proposats per altres autors. S'estudiarà una llei constitutiva adoptada, que modifica el comportament del formigó traccionat per tenir en compte el fenomen del *Tension-Stiffening* i es determinaran els paràmetres que la defineixen, implementant un mètode de càlcul per escollir els valors que més s'ajustin a la llei en cada cas. Aconseguint, així, modelitzar el comportament de les estructures i conseqüentment el del formigó traccionat.

## 1.3. Especificacions i abast

Determinació dels paràmetres que defineixen la llei adoptada per al formigó traccionat considerant el fenomen de la contribució del formigó entre fissures. Mitjançant Matlab 7.0 es procedirà a la simulació del comportament seccionals segons diferents formulacions (American Concrete Institute, Eurocode-2 i altres autors) que es prendran com a models de referència i es procedirà a l'ajustament per mínims quadrats dels coeficients de la llei adoptada per tal d'adaptar-se als models de referència. Caldrà, però, determinar en primer lloc les curvatures adimensionals dels elements sotmesos a flexió simple per cada tipus de reforç i resistència del formigó. A partir d'aquests diagrames podrem determinar el moments i les curvatures a les que es troba sotmesa qualsevol secció. Posteriorment procedirà a estudiar la influència dels coeficients sobre diferents casos per poder establir el rang de validesa de la formulació i es determinarà una expressió general, amb l'ajuda de software com ara el Minitab Release 14, per escollir aquests valors. Mitjançant un estudi de sensibilitat és comprovarà la rigidesa del mètode per determinar la sensibilitat dels resultats.

## 2. Materials de reforç FRP

### 2.1. Introducció

Les estructures convencionals estan reforçades amb barres d'acer que poden ser pretesades o no. Aquest acer està inicialment protegit contra la corrosió per la alcalinitat del formigó, però en estructures sotmeses a condicions ambientals agressives, com ara, estructures marines, ponts i garatges exposats a sals, humitat, temperatura o clorurs, l'alcalinitat del formigó es veu reduïda i té com a conseqüència la corrosió dels reforços d'acer. La corrosió de l'acer causa en última instància la deterioració del formigó i pèrdua de les seves capacitats mecàniques. Per corregir aquests problemes els professionals van començar a utilitzar alternatives per protegir les barres d'acer, com per exemple capes d'epoxy, tot i que no van aconseguir eliminar completament la corrosió de l'acer.

Recentment, els materials compòsits fets amb materials de matriu polimèrica reforçats amb fibres o *Fiber Reinforced Polymers* (FRP), han sorgit com a alternativa per a la producció de barres de reforç en estructures de formigó.

Aquest tipus de barres ofereixen alguns avantatges sobre els reforços d'acer degut a que les barres de FRP són resistentes a la corrosió i algunes no són conductores. Aquesta última propietat permet utilitzar-les en situacions on l'acer interfereix amb camps magnètics. S'ha de tenir en compte però, les diferències en el comportament físic i mecànic d'aquestes barres respecte les d'acer, i per això necessitaran d'una especial atenció. Per tant, caldrà un canvi en la filosofia tradicional del disseny estructures amb reforços de FRP. Aquest tipus de materials són anisotròpics i es caracteritzen per tenir alta resistència només en la direcció de les fibres de reforç, a més, no presenten fluència, per tant, són completament elàstics abans de la ruptura. Així, doncs, s'haurà de preveure aquesta falta de ductilitat en estructures de formigó reforçades amb barres de FRP. També caldrà tenir en compte el seu baix mòdul elàstic, que provocarà deformacions considerables un cop l'element entri en càrrega.

Països com Japó (JSCE 1997), Canadà (Canadian Standards Association 2000 i 2002) i EEUU (ACI 440.1R-06) han establert manuals de disseny específics per a l'ús de reforços de FRP en estructures de formigó.

A tall d'exemple podem detallar a la Taula 1 els principals avantatges e inconvenients de la utilització de reforços de FRP.

**Taula 1.** Avantatges e inconvenients de la utilització de barres de FRP com a reforç d'estructures.

<b>Avantatges dels reforços de FRP</b>	<b>Inconvenients del reforços de FRP</b>
- Gran resistència a la tracció en el sentit longitudinal (varia amb la direcció de la carrega i de les fibres)	- Absència de plasticitat
- Gran resistència a la corrosió (no depèn de tenir capa protectora)	- Baixa resistència transversal
- No presenten magnetisme	- Baix mòdul elàstic (varia segons les fibres de reforç)
- Alta resistència a la fatiga (varia segons el tipus de reforç)	- Es pot malmetre la resina polimèrica i les fibres sota llums ultraviolades
- Baixa densitat (entre 1/5 i 1/4 de l'acer) és a dir, entre 1,25 i 2,1 gr/cm <sup>3</sup>	- Baixa durabilitat de les fibres de vidre en ambients humits
- Baixa conductivitat tèrmica i elèctrica	- Baixa durabilitat d'algunes fibres de vidre i aramida en ambient alcalins
	- Gran coeficient d'expansió tèrmica en el sentit perpendicular de les fibres.
	- Baixa resistència al foc depenent de la matriu i del recobriment del formigó

## 2.2. Constituents dels FRP

Els FRP són material compòsits formats per una matriu de resina i reforçats amb fibres. Com es pot veure a la Figura 1, les fibres són molt més resistents que la matriu, per això caldrà utilitzar més d'un 10% de fracció volumètrica de fibres. De totes maneres per un compost FRP que utilitzi la mateixa matriu i les mateixes fibres, les seves propietats poden variar significativament depenen de la densitat de fibres, el sistema de fabricació, les condicions ambientals.

Haurem de tenir, doncs, especial cura en el procés de control de qualitat quan fabriquem aquest tipus de reforços. Les barres de FRP són materials ortotròpics, és a dir, les propietats longitudinals i transversals són diferents. A causa d'aquest fet les propietats longitudinals són governades per la fibra mentre que les propietats transversals són governades per la resina.



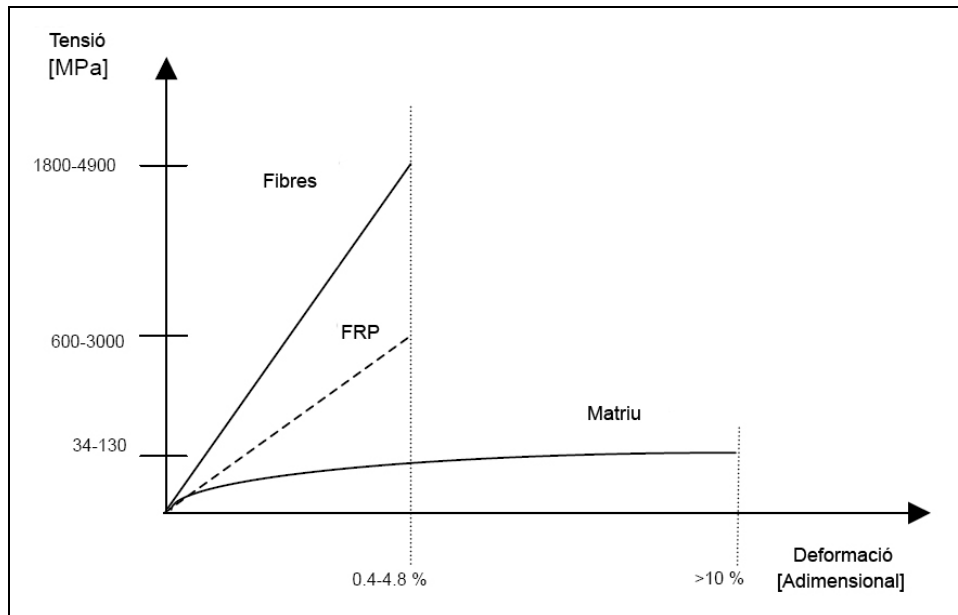


Figura 1. Diagrama Tensió-Deformació dels FRP i els seus constituents. (ISIS 2003)

### 2.2.1. Resines de la matriu

Una qüestió molt important a l'hora de fabricar un material compost és l'elecció de la resina, ja que les propietats físiques i tèrmiques de la resina afectaran significativament a les propietats mecàniques del compost, de la mateixa manera que el procés de fabricació. Per tal de poder explotar el màxim les capacitats resistives de les fibres, la resina ha de poder suportar deformacions superiors a la de les fibres. La matriu no sols té la missió de cobrir les fibres i protegir-les de l'abradió, sinó que també ha de ser capaç de transmetre esforços entre les fibres. Per a la fabricació de FRP els dos tipus de resines més utilitzades són les termoplàstiques i les termostables.

Les resines termostables s'utilitzen més sovint que les termoplàstiques degut ha que tenen menor pes molecular i una menor viscositat que els atorga una fabricació menys costosa. La seva estructura lligada tridimensionalment no els permet ser modificades aplicant-hi calor ni pressió. Les fibres termostables més utilitzades són els polièsters, els vinilèsters i els epoxis. Aquests materials tenen una bona estabilitat tèrmica i química, a més, no pateixen ruptures brusques ni relaxació de tensions. Per contra tenen poca deformació abans de la ruptura i baixa resistència a l'impacta. Dos dels majors desavantatges són la curta vida i el llarg temps de fabricació.

Algunes de les principals propietats de les resines termostables s'exposen a la Taula 2.

**Taula 2.** Principals propietats mecàniques de les resines termostables. (ISIS 2003)

Resina	Resistència a la tracció [MPa]	Mòdul elàstic [GPa]	Encongiment a la cura [%]
Epoxy	55 a 130	2,75 a 4,1	1 a 5
Polyester	34,5 a 103,5	2,1 a 3,45	5 a 12
Vinylester	73 a 81	3 a 3,35	5,4 a 10,3

Encara que les resines termostables no es pugin modificar un cop assoleixen la temperatura ambiental després de la fabricació aplicant-hi calor i pressió si que patiran una degradació de les seves propietats mecàniques. A continuació es detallen les principals resines termostables utilitzades a la fabricació de FRP.

## a) TERMOSTABLES

### a.1) Resines de polièster

Són les més utilitzades en la fabricació de barres de FRP. Es tracta de polièsters insaturats produïts per la policondensació de derivats de l'hidroxil i posteriorment dissolt en un reactiu com ara l'estirè. Com a exemple citarem l'ortopolièster i el iso polièster. Els tres principals tipus de resines de *polièster* tenim.

*Ortopolyester*: No té propietats estructurals.

*Isopolyester*: Aquests disposen d'una resistència tèrmica superior, i millora química respecte l'anterior resina.

*Vinylester*: És la resina més utilitzada. Proporciona una millora de les propietats mecàniques i químiques. El vinylèster és ben conegut per la seva duresa, flexibilitat i millora del comportament ambients agressius incloent pH alts alcalins.

### a.2) Resines epoxy

Aquestes resines tenen un cost més elevat que les de polièster, i el seu ús es restringeix a aplicacions avançades. Presenten una bona resistència a productes químics i dissolvents, i tenen una bona adherència amb les fibres, cosa que afavoreix la transmissió d'esforços entre la matriu i les fibres. Per contra tenim el preu i els controls que hem de fer alhora de garantir un bon procés de curat.

## b) TERMOPLÀSTIQUES

Pel que fa a les resines termoplàstiques aquestes estan formades amb molècules en estructura lineal. Aquest tipus de matrius es podran torna a conformar tantes vegades com calgui amb l'aplicació de calor i temperatura, ja que assoleixen forma sòlida un cop es refreden. Tenen millors propietats que les termostables, ja que resisteixen bé els impactes, tenen alta resistència i deformació a la ruptura, però degut a la seva alta viscositat encareixen molt els costos de fabricació al dificultar-se la combinació amb les fibres, fet pel qual no s'utilitzen massa.

### 2.2.2. Fibres

Les fibres utilitzades per a la fabricació de FRP han de tenir alta resistència i rigidesa pensant en la durabilitat, i preferiblement un cost baix. El rendiment d'aquestes fibres depèn de la seva longitud, la qualitat de la fibra, la orientació, el grau d'adherència amb la matriu, la forma de la secció transversal i la composició química. La fibres més utilitzades per a la fabricació de FRP són les fibres de carboni, la fibra de vidre i l'aramida. Les principals propietats mecàniques i químiques d'aquestes fibres es poden veure a les Taules 3 i 4.

**Taula 3.** Propietats mecàniques de les diferents fibres per a FRP. (ISIS 2003)

Tipus de fibra		Resistència la tracció [MPa]	Mòdul elàstic [GPa]	Allargament [%]	Coef. Dilatació [ $\times 10^{-6}$ ]	Poisson
<b>CARBONI</b>						
PAN	alta resistència	3500	200 a 240	1,3 a 1,8	Long. -1,2 a -0,1	-0,2
	alt mòdul	2500 a 4000	350 a 650	0,4 a 0,8	Trans. 7 a 12	
PITCH	normal	780 a 1000	38 a 40	2,1 a 2,5	Long -1,6 a -1,9	N/A
	alt mòdul	3000 a 3500	400 a 800	0,4 a 1,5		
<b>ARAMIDA</b>						
Kevlar 29		3620	82,7	4,4	N/A	0,35
Kevlar 49		2800	130	2,3	Long. -2	
					Trans. 59	
Kevlar 129		4210	110	N/A	N/A	
Kevlar 149		3450	172 a 179	1,9	N/A	
Twaron		2800	130	2,3	Long. -2	
					Trans. 59	
Technora		3500	74	4,6	N/A	
<b>GLASS</b>						
E-Glass		3500 a 3600	74 a 75	4,8	5	0,2
S-Glass		4900	87	5,6	2,9	0,22
Alkali resistan Glass		1800 a 3500	70 a 76	2 a 3	N/A	N/A

**Taula 4.** Resistència química de les fibres per a FRP. (ISIS 2003)

Tipus de fibra		Resistència al àcids	Resistència alcalina	Resistència a Dissolvents orgànics
<b>CARBON</b>				
PAN	Alta resistència	Bona	Excel·lent	Excel·lent
	Alt mòdul	Excel·lent	Excel·lent	Excel·lent
PITCH	Alta resistència	Excel·lent	Excel·lent	Excel·lent
	Alt mòdul	Excel·lent	Excel·lent	Excel·lent
<b>ARAMIDA</b>				
Kevlar 49		Pobre	Bona	Excel·lent
Technora		Bona	Bona	Bona
<b>VIDRE</b>				
E-Glass		Pobre	Favorable	Excel·lent
S-Glass		Bona	Pobre	N/A
Alkali resistant glass		Bona	Bona	N/A
<b>ALTRES</b>				
EC-Poliethile		Excel·lent	Excel·lent	Excel·lent
Polyvinyl Alcohol		Bona	Bona	Bona
Steel Fibre		Pobre	Excel·lent al sodi Pobre a la salmorra	Excel·lent

### 2.2.2.1 Fibres de carboni

Les dos principals fibres de carboni existents són la PITCH (producte de la destil·lació del petroli) i el PAN (Poliacrilonitril). Hi ha dos tipus de fibres de carboni, les d'alt mòdul i les d'alta resistència. La diferència entre elles és resultat de la microestructura de les fibres. La formació de les fibres de carboni requereix un procés per sobre dels 1.000 °C . A aquesta temperatura la majoria de fibres sintètiques s'han fos o evaporat. Tot i així les fibres de carboni resisteixen la temperatura de carbonització sense modificar l'estructura molecular sobretot gràcies al component acrílic del que estan compostes.

Les PITCH s'utilitzen com a productes de baix mòdul, mentre que les PAN com a fibres de carboni d'alt mòdul al carbonitzar per sobre dels 800 °C. El mòdul elàstic de la fibra incrementa amb la temperatura del tractament ( entre 1.000 ° C i 3.000 °C).

Normalment estan tractades amb epoxy per tal de prevenir l'abradió, millorar la manipulació i proporcionar una interfase compatible amb la matriu de resina epoxy.

### 2.2.2.2 Fibres de vidre

Aquest tipus de fibres són les més utilitzades en les aplicacions de formigó estructural degut a al baix cost i a les bones propietats mecàniques que presenten. A causa de la seva

baixa densitat també s'han utilitzat per aplicacions on el pes és un requeriment important. Les fibres de vidre disponibles comercialment es detallen a continuació:

### **E-Glass**

Forma part de la família dels vidres (calci-alúmina-silice) i s'utilitza per aplicacions elèctriques. ECR – Glass és una modificació del E-Glass el qual millora la resistència a la corrosió per àcids .

### **S-Glass**

És una patent formulada mitjançant magnesi aluminosilicat que proporciona una alta resistència i un bon comportament a altes temperatura. S-Glass i S-2 Glass tenen la mateixa composició però amb diferents tractaments superficials.

### **C-Glass**

És utilitzat en ambients corrosius gràcies a la seva estabilitat química.

#### **2.2.2.3 Fibres d'Aramida**

L'Aramida és la fibra orgànica més comú. Les fibres orgàniques presenten un ús limitat en aplicacions estructurals degut al seu al cost, la temperatura i els factors de servei. Aquestes fibres estan produïdes comercialment per (Kevlar) i (Twaron). Les aramides disposen d'una gran estabilitat tèrmica. Es poden utilitzar dins del rang de temperatures compreses entre -200°C i 200°C. En cas d'estar sotmeses per un període gran a temperatures superiors les fibres es poden oxidar.

Aquestes fibres pertanyen a la classe de polímers líquids cristal·lins. La composició aromàtica de la seva estructura contribueix a disposar d'una estabilitat tèrmica elevada, mentre que la seva configuració cristal·lina proporciona una alta resistència i alt mòdul elàstic.

## **2.3 Propietats dels materials FRP**

### **2.3.1 Propietats físiques**

#### **2.3.1.1 Coeficient de dilatació**

El coeficient de dilatació tèrmica varia segons la direcció longitudinal o transversal, tal i com s'observa a la Taula 5, també depèn del tipus de fibres, la resina i la densitat

volumètrica de fibres que formen el compòsit. El coeficient longitudinal respon principalment a les fibres,

mentre que el transversal depèn de la resines (Bank 1993). Cal dir que els coeficients de dilatació negatius indiquen que el material es contrau amb l'augment de la temperatura i s'expandeix quan disminueix.

**Taula 5.** Coeficients de dilatació típics per a FRP i acer. (ISIS 2003)

Direcció	Unitats ( $\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )			
	Acer	GFRP	CFRP	AFRP
Longitudinal	11,7	6 a 10	-9 a 0	-6 a -3
Transversal	11,7	21 a 23	74 a 104	60 a 80

### 2.3.1.2 Densitat

Les barres de FRP tenen una densitat que va de 1,25 a 2,1  $\text{g}/\text{cm}^3$  com es veu a la Taula 6. Això les afavoreix ja que tenen un menor cost de transport i manipulació alhora de portar-les fins a l'emplaçament de l'obra i al desplaçar-les interiorment.

**Taula 6.** Densitats típiques per a FRP. (ACI 440.1R-06)

Unitats ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )			
Acer	GFRP	CFRP	AFRP
7,9	1,25 a 2,1	1,5 a 1,6	1,25 a 1,4

Com es pot comprovar, els materials FRP tenen densitats molt més baixes que la de l'acer, de l'ordre d'un sisè a una quarta part. Aquesta propietat els dona als FRP una altre avantatge sobre l'acer, ja que es reduiran els costos de transport, inclosos els de manipulació i repartiment en planta de les armadures un cop estiguin a l'obra.

## 2.3.2 Propietats mecàniques

### 2.3.2.1 Comportament a tracció

Quan entren en càrrega, els materials FRP no mostren comportament plàstic abans de la ruptura, ja que són completament elàstics. Per tant, el comportament a tracció de les barres de FRP està definit per una relació esforç-deformació lineal fins al límit elàstic, moment en el qual es produeix la ruptura sobtada.

Les principals propietats mecàniques és poden veure a la Taula 7.

**Taula 7.** Propietats mecàniques típiques dels FRP i l'acer. (ACI 440.1R-06)

	<b>Acer</b>	<b>GFRP</b>	<b>CFRP</b>	<b>AFRP</b>
Resistència a la tracció [MPa]	483 a 690	483 a 1600	600 a 3690	1720 a 2540
Mòdul elàstic [GPa]	200	35 a 51	120 a 580	41 a 125
Deformació plàstica [%]	0,14 a 0,25	N/A	N/A	N/A
Allargament a la ruptura [%]	6 a 12	1,2 a 3,1	0,5 a 1,7	1,9 a 4,4

La tensió a tracció i la rigidesa d'una barra de FRP depèn de molts factors. Com que les fibres són el principal element resistent, la relació entre el volum de fibres respecte el volum total afecta significativament la resistència a tracció d'una barra de FRP. Podem tenir, doncs, grans variacions de resistència i rigidesa inclús en barres amb el mateix diàmetre, aparença i constituents. El procés de fabricació així com el control de qualitat poden afectar, també, les propietats mecàniques de la barra (Wu 1990). A diferència del que passa amb l'acer la resistència unitària a la tracció d'una barra de FRP pot variar amb el diàmetre.

En estudis portats a terme sobre barres de diferents fabricants, s'ha determinat que es produeix una reducció entorn al 40% de la resistència a la tracció proporcional a l'increment del diàmetre, al passar de 9,5 a 22,2 mm. Aquest fet és degut a la transmissió de les tensions tallants entre el centre de la barra i les capes externes de la mateixa que provoca un augment de la tensió a les parts més superficials. Així s'ha determinat que dues barres del mateix material i diàmetres 28,7 mm i 9,5 mm disposen d'unes resistències a tracció de 480 MPa i 890 MPa respectivament (Ehsani 1993).

Determinar la resistència de les barres de FRP mitjançant testos és complicat perquè les concentracions de tensió que es produeixen al voltant dels punts d'ancoratge poden provocar la falla prematura. Per comprovar adequadament la resistències d'aquestes barres cal seguir el manual de disseny ACI 440.1R-06. Les propietats de resistència a la tracció d'una barra de FRP determinada es sol obtenir del fabricant, que normalment proporciona una distribució gaussiana que representa una població d'elements (Kocaoz et al. 2005).

Com a inconvenient cal citar que les barres de FRP no es poden doblar un cop han estat fabricades, una excepció serien les barres amb resines termoplàstiques que poden ser reestructurades mitjançant l'aplicació de calor i pressió. De tota manera les barres FRP es poden fabricar en corba, tot i que patiran una reducció de entre el 40 i el 50 % de la resistència a la tracció comparant-les amb les mateixes barres completament rectes. Aquest efecte es degut a la curvatura de les fibres i a la concentració de tensions (Nanni et al. 1998).

### *2.3.2.2 Comportament a compressió*

Tot i que no es recomanable utilitzar barres de FRP per resistir tensions a compressió tot seguit s'exposen les principals característiques del seu comportament en aquests casos.

A diferència del que passaria amb l'acer, les barres de FRP han demostrat que la tensió de compressió que poden suportar és inferior a la de tracció (Wu 1990), ja que inclouen diferents modes de falla, com pot ser, la tensió transversal, el possible vinclament de les fibres i a tallant. De totes maneres, la forma amb que fallarà depèn del tipus de fibra, de la fracció volumètrica i del tipus de resina. S'ha demostrat experimentalment que les barres de FRP tenen un 55, 78 i 22% menys de resistència a la compressió que a tracció, depèn de si es tracta de GFRP, CFRP o AFRP respectivament (Mallick 1988 i Wu 1990). En general podem afirmar, però, que les barres amb major resistència a la tracció tindran, també, major resistència a la compressió, a excepció del cas de les AFRP, on les fibres han mostrat un comportament no lineal a compressió a nivells relativament baixos de tensió.

Pel que fa al mòdul elàstic a compressió és aproximadament el 80% per al GFRP, el 85% per al CFRP i el 100% per l'AFRP del mòdul elàstic d'aquests materials a tracció. (Mallick 1988, Ehsani 1993). En general podem dir que no s'han establert mètodes per determinar les resistències a compressió i caracteritzar-ne el comportament. Així, doncs, caldrà considerar els valors que ens doni el fabricant, així com, el mètode com s'han obtingut aquest valors.

### *2.3.2.3 Comportament a tallant*

Les barres de FRP són relativament dèbils a tallant ja que les capes de resina llisquen envers les capes de fibra, ja que no tenim reforços entre capes, i per tant la resistència vindrà determinada per la capacitat que tingui la resina. Es pot obtenir una millora de la



resistència a tallant introduint fibres en la direcció transversal o bé trenant les capes en el moment de la fabricació.

En aquest cas, tampoc s'han establert assajos normalitzats per determinar-ne la resistència. Per això caldrà guiar-se per els valors facilitats per al fabricant i la forma com s'han obtingut.

#### *2.3.2.4 Comportament d'adherència entre barres FRP i formigó*

L'adherència de les barres de FRP depèn del disseny, del procés de fabricació, les propietats mecàniques i les condicions ambientals, ja que la superfície de la barra pot trobar-se de distintes formes, ja sigui, recoberta de sorra, trenada, acanalada o en espiral. (Nanni et al. 1997).

Quan l'ancoratge es realitza en formigó les forces d'adherència es poden transmetre mitjançant:

- La resistència d'adhesió entre les interfícies, coneguda com (Chemical Bond)
- La fricció entre les interfícies.
- Interferències mecàniques degudes a les irregularitats de la interfície.

A les barres de FRP s'ha comprovat que la força d'adherència es transfereix a través de la resina cap a les fibres, per tant pot ocórrer que la resina falli a tallant. Quan una barra adherida es sotmet a un increment de tensió, l'adherència entre la barra i el formigó que l'envolta s'espatlla, i les deformacions a la superfície causen forces de contacte inclinades. La tensió a la superfície de la barra considerada en la direcció de la barra causa el que anomenem tensió d'adherència entre la barra i el formigó.

Les propietats adhesives de les barres de FRP s'han investigat extensivament en nombrosos programes de recerca des de Faza i GangaRao el 1990 fins a Wambeke i Shield el 2006.

### **2.3.3 Efectes de l'alta temperatura i el foc**

L'ús de barres de FRP com a reforç no està recomanat en estructures on la resistència al foc sigui indispensable per mantenir la integritat de la estructura. Tot i que la barra es troba envoltada per formigó i no es pot encendre a causa de la falta d'oxigen, els polímers s'afebleixen per la calor. La temperatura on un polímer s'afebleix és coneguda com la temperatura de transició vítria  $T_g$ . Per sobre de  $T_g$  el mòdul elàstic del polímer es redueix

dràsticament degut als canvis que pateix la seva estructura molecular. El valor de la temperatura  $T_g$  depèn del tipus de resina però sol estar entorn el 60 i 120 °C (Bootle et al. 2001).

En un material compòsit, on les fibres mostren millor comportament envers la temperatura que la resina, poden continuar suportant càrregues en la direcció longitudinal. De totes maneres, la resistència global del material s'haurà reduït ja que l'adherència entre la resina i les fibres haurà baixat i no serà capaç de transmetre les forces que suporten aquestes últimes. Les proves han demostrat que a partir de 250°C la resistència a tracció es redueix més d'un 20 %. Alguns investigadors recomanen que els materials usats tinguin la  $T_g$  com a mínim 30° C per sobre la màxima temperatura en condicions de treball.

Per als reforços de FRP les propietats a la superfície del polímer són vitals per mantenir l'adherència entre el formigó i la barra. A temperatures properes a  $T_g$  les propietats mecàniques del polímer es veuen reduïdes i el polímer no és capaç de transmetre els esforços del formigó cap a les fibres. Diferents estudis han comprovat com barres de FRP amb temperatures  $T_g$  de 60 °C a 124 °C patien una reducció de l'adherència de entre el 20 i el 40% a 100 °C i del 80 al 90 % a 200 °C.

Aquest comportament de les barres FRP comporta un augment en l'amplada de les fissures i de les deformacions. De totes maneres es pot evitar la falla de les estructures si s'evita que les altes temperatures arribin al les zones on s'acaben les barres FRP, permeten que es mantinguin els ancoratges. El falla de l'estructura tindrà lloc sempre i quan es perdin els ancoratges o les fibres superin la temperatura líndar. En aquest últim cas les fibres són capaces de suportar temperatures de 980 °C les de vidre, 175 °C les d'aramida i 1600 °C les de carboni. S'ha de tenir en compte que el comportament de les estructures reforçades amb FRP exposades a foc o a altes temperatures no està encara prou desenvolupat i es requereix major recerca en aquesta àrea.

### **2.3.4 Comportament a llarg termini**

#### **Fluència**

Les barres de FRP sotmeses a càrregues constants al llarg del temps poden fallar sobtadament després d'un temps, anomenat, temps de resistència (endurance time). Aquest fet es degut a que presenten menor resistència per a càrregues a llarg termini que a curt termini. Aquest fet no es dona en les barres d'acer, a no ser que estiguin sotmeses a altes temperatures, com seria en cas d'incendi. Aquest fet es coneix amb el nom de ruptura

de fluència (creep rupture) o fatiga estàtica. El temps de resistència es pot veure reduït irreversiblement sota condicions ambientals adverses, com serien les temperatures altes, l'exposició a llum ultraviolada, l'alta alcalinitat o als cicles de humitat i assecat.

En general podem afirmar que les fibres menys susceptibles a aquest efecte són les de carboni, les d'aramida moderadament susceptibles i les de vidre molt susceptibles. El percentatge de resistència respecte la resistència inicial després de 50 anys usant una extrapolació lineal a partir dels resultats obtinguts amb 100 hores és d'un 79% per CFRP i 66% per AFRP.

Si es vol fer una caracterització experimental de la ruptura per fluència el dissenyador s'haurà de referir al mètode proposat per el comitè JSCE al manual "Test Method on Tensile Creep-Rupture of Fiber Reinforced Materials, JSCE-E533-1995". De totes maneres les característiques de fluència es poden determinar amb els mètodes descrits a la ACI 440.1R-06.3R.

## **Fatiga**

En els últims 30 anys s'han obtingut nombroses dades sobre el comportament a fatiga dels FRP, així com estimacions de la seva evolució al llarg del temps, la majoria d'ells però en materials susceptibles de ser utilitzats en aplicacions aeroespacials.

Pel que fa als material compòsits de FRP destinats a l'aplicació en infraestructures, els CFRP són generalment els menys afectats per les falles per fatiga. En una gràfica de tensió (amplitud dels cicles) envers el logaritme dels cicles a falla (corba S-N), la variació del pendent decreixent dels CFRP és de l'ordre del 5 al 8% de la tensió de ruptura inicial per dècada de vida logarítmica. Al cap d'un milió de cicles, la resistència a fatiga és aproximadament el 50 al 70% de la resistència estàtica inicial. Algunes investigacions de 10 milions de cicles indiquen una davallada continua del 5 al 8% per dècada.

Les fibres E-glass i les S-glass, generalment tampoc són propenses a la ruptura per fatiga. Encara que si que pateixen ruptures retardades a causa de la corrosió produïda per la humitat ambiental en testos de laboratori. Quant aquestes fibres es recobreixen en una matriu per forma el material compòsit, i es sotmeten a carregues cícliques, s'han experimentat reduccions de la resistència entorn al 10% per dècada respecte la resistència inicial. Aquest efectes es deu a les interaccions entre fibres i no depèn de la fatiga mecànica que patien les fibres en solitari. Per tant, no es pot definir un límit clar en els límits de fatiga, ja que les condicions ambientals juguen un rol important en el comportament a

fatiga de les fibres de vidre, perquè són molt susceptibles a la humitat, l'alcalinitat ambiental i a les solucions àcides.

En general es creu que la influència de la humitat en el comportament a fatiga en els materials FRP unidireccionals va en detriment de la resistència si la interfície entre la fibra i la matriu es degrada, de tota manera els resultats no són definitius perquè es depèn molt del tipus de fibra i de matriu que utilitzem, els mètode com fem els assajos i les condicions ambientals durant la fatiga .

S'ha observat que la resistència a fatiga de les barres de CFRP envoltades de formigó, disminueix quan la temperatura ambiental augmenta de 20 a 40°. En aquesta investigació es va trobar que el temps de resistència límit depèn tan de la tensió principal, com la diferència entre la tensió màxima i mínima del cicle. Grans tensions o ràtios petits (tensió mínima dividida per la màxima) causen un reducció del temps d'enduriment.

L'efecte de la fatiga a l'adherència de la barres de GFRP envoltades de formigó s'han investigat en detall utilitzant mètodes d'adherència especialitzats. S'han fet servir diferents materials GFRP, condicions ambientals i mètodes, i els resultats indiquen que la resistència a l'adherència tan pot augmentar, disminuir o mantenir-se igual seguint els mateixos cicles de carrega. Es per això que el comportament de l'adherència a fatiga no ha estat suficientment investigat encara. En última instància el disseny a fatiga dependrà del procés de fabricació, les condicions ambientals i del tipus de càrrega a fatiga aplicada.

## **2.4 Durabilitat**

Les barres de FRP són susceptibles de variar la seva resistència a tracció i la rigidesa segons l'entorn, abans, durant i després de la fabricació. Aquestes condicions ambientals inclouen aigua, la llum ultraviolada, temperatures elevades, solucions alcalines o àcides i solucions salines. La resistència i la rigidesa poden augmentar, disminuir o mantenir-se igual depenen dels materials i les condicions ambientals on es trobin. Tot i que les propietats més importants seran la tensió i l'adherència quan haguem de dissenyar estructures.

És sabut que les solucions aquoses amb grans valors de pH de entre 11,5 a 13, degraden la resistència i la rigidesa de les barres de GFRP, encara que, els resultats concrets varien significativament a causa dels diferents mètodes utilitzats, incloent la composició química de la solució utilitzada, la temperatura i la presència de càrrega. Les temperatures altes i temps d'exposició llargs augmenten aquest problema.

El factor més important per la protecció de la fibra de vidre (i en general de les fibres) és el grau en que la resina protegeix a la fibra del ió hidroxil. Els investigadors pensen que les resines de vinil ester tenen una resistència superior a la humitat comparat amb altres tipus de resines utilitzades habitualment. El tipus de fibra de vidre també sembla ser un factor important a la resistència alcalina de les barres de GFRP, on les reduccions de resistència van del 0 al 75% dels valors inicials. En canvi la rigidesa disminueix entre el 0 i el 20%.

L'exposició de les barres de FRP als rajos ultraviolats, i a la humitat abans de la seva col·locació en formigó pot afectar la seva resistència a la tracció a causa de la degradació dels polímers que les constitueixen, incloent aquí, les fibres d'aramida i totes les resines. Per tant es recomana fortament que les barres es protegeixin de la llum del sol i la humitat abans de ser col·locades, ja que s'han observat reduccions de entre el 0 i el 20% en CFRP, del 0 al 30% en AFRP i del 0 al 40% en GFRP.

S'ha demostrat que l'adició de varis tipus de salts en solucions on s'han submergit barres de FRP no necessàriament tenien un efecte negatiu sobre la residència i la rigidesa quan es comparaven els resultats amb immersions en solucions sense sals. De totes maneres, un estudi va comprovar reduccions de entre el 0 i el 20% de reducció respecte la resistència inicial en barres de GFRP subjectes en solucions salines en cambres on es produïen cicles de gelat i desgelat.

Estudis sobre la durabilitat de l'adherència entre el formigó i les barres de FRP, s'han preocupat principalment de la humitat i l'alcalinitat trobades en el formigó que les envolta.

Les resines dominen els mecanismes de transmissió d'esforços per adherència, mentre que les fibres dominen els mecanismes de resistència i rigidesa, es per això que les condicions que poden malmetre les resines afectaran, també, a la adherència entre formiga i resina i les interfícies amb les fibres.

## **2.5 Requeriment dels materials**

Les barres de FRP estan fabricades amb fibres contínues d'aramida, carboni, vidre o qualsevol combinació d'aquestes, són anisotròpiques i les seves propietats mecàniques varien d'un fabricant a l'altre. Els factors com la fracció volumètrica, el tipus de fibra i resina, l'orientació de les fibres, els efectes dimensionals, el control de qualitat i el procés de fabricació, tenen una gran influència sobre les propietats físiques i mecàniques de les barres de FRP.

Les barres es designen amb diferents graus segons les seves característiques com el mòdul elàstic i la resistència a tracció. La designació de les barres sol correspondre's a la resistència a tracció.

### 2.5.1 Resistència i mòdul elàstic

Els reforços de FRP estan disponibles en diferents graus de resistència a la tracció i mòduls elàstics segons marca la guia ACI 440.1R-06. Els graus de resistència a la tracció van augmentant en 69 MPa (10000 Psi) des del més baix a 414 MPa (60000 Psi). Es mostra la Taula 8, a tall d'exemple.

**Taula 8.** Designació de les barres de FRP. (ACI 440.1R-06)

Designació de la barra	Resistència a la tracció	
	[MPa]	[Psi]
Grau F60	414	$60,000 \leq f_{fu}^* \leq 70,000$
Grau F70	483	$70,000 \leq f_{fu}^* \leq 80,000$
Grau F290	1999	$290,000 \leq f_{fu}^* \leq 300,000$

Per al disseny, l'enginyer haurà d'escollir qualsevol grau de resistència entre F60 i F290, sense necessitat d'especificar un fabricant concret. De la mateixa manera, s'haurà d'establir un mòdul elàstic, mínim, de manera similar que fem amb el grau de resistència. Els graus segons els mòdul elàstic estan a la Taula 9. Per totes aquestes barres la deformació a la ruptura no pot ser menor a 0,005mm/mm.

**Taula 9.** Mínim mòdul elàstic segons la fibra de reforç de les barres. (ACI 440.1R-06)

Fibra que forma la barra	Graus segons el mòdul elàstic	
	CODI	Mòdul elàstic [GPa]
Barres GFRP	E5.7	39,3
Barres AFRP	E10.0	68,9
Barres CFRP	E16.0	110,3

Per establir els graus segons el mòdul elàstic el procediment és similar que per a la resistència a tracció. El valor mínim s'estableix depenen del tipus de fibra que tinguem.

### 2.5.2 Superfície de les barres

Les barres de FRP es produeixen a través d'una gran quantitat de processos de fabricació, i cada procés de fabricació obté diferents condicions superficials. Les característiques superficials de les barres són molt importants alhora de determinar les condicions amb que tindrà lloc l'adherència amb el formigó. A la Figura 2 es poden veure 3 tipus de superfícies estandarditzades, (a) nervades, (b) cobertes amb una capa de sorra i (c) en espiral i cobertes de sorra.



**Figura 2.** Tipus de superfícies de les barres. (ISIS 2003)

S'ha de tenir en compte que actualment no hi ha cap classificació estandarditzada sobre patrons de superfície, és per això que es requereix de major investigació en aquest camp, per a obtenir una graduació en funció de l'adherència tal com es fa per a resistència a tracció i per al mòdul elàstic.

### 2.5.3 Mides de barra

Les mides de barra estan designats per l'ACI 440.1R-06 com a un nombre corresponen al valor nominal aproximat del diàmetre, expressat en octaus de polzada, similar al ASTM que s'utilitza per designar barres d'acer. Hi ha 10 mides estàndard, com es pot veure a la Taula 10. Les barres que no tinguin una secció circular, ja siguin rectangulars o foradades, hauran de proporcionar un diàmetre nominal equivalent. Aquest diàmetre nominal equivalent a les barres a de correspondre a un diàmetre circular sòlid.

**Taula 10.** Designació de les barres segons la mida, en S.I i americà. (ACI 440.1R-06)

Designació de la mida de barra		Diàmetre nominal		Area	
Standard	Conversió mètrica	[in]	[mm]	[in <sup>2</sup> ]	[mm <sup>2</sup> ]
No.2	No.6	0.250	6,4	0.05	31,6
No.3	No.10	0.375	9,5	0.11	71
No.4	No.13	0.500	12,7	0.20	129
No.5	No.16	0.625	15,9	0.31	199
No.6	No.19	0.750	19,1	0.44	284
No.7	No.22	0.875	22,2	0.60	387
No.8	No.25	1.000	25,4	0.79	510
No.9	No.29	1.128	28,7	1.00	645
No.10	No.32	1.270	32,3	1.27	819
No.11	No.36	1.410	35,8	1.56	1006

#### 2.5.4 Identificació de les barres

Amb la varietat de graus, mides i tipus de barres de FRP disponibles es fa necessari l'adopció de mitjans per identificar-les. Cada productor de barres hauria d'etiquetar els contenidors o els packs amb la següent informació.

- Un símbol per identificar el producte.
- Una lletra per identificar el tipus de fibra. (C=Carboni, A=Aramida, G=Vidre i H=Hybrid) seguit del nombre corresponent a la mida tal com indica la ASTM.
- Una marca per designar el grau de resistència.
- Una marca per designar el mòdul elàstic.
- En cas de tenir una barra de secció no circular, el diàmetre interior i exterior.
- S'hauria d'afegir la categoria de l'adherència quan la classificació estigues feta.

Un exemple per a la nomenclatura simbòlica podria ser:

**XXX - G#4 - F100 - E6.0**

On:

**XXX** = és el símbol del fabricant

**G#4** = barra FRP de Vidre No.4 (diàmetre nominal de 12 mm)



**F100** = grau de resistència, com a mínim 100 ksi.

**E6.0** = grau del mòdul elàstic, com a mínim 6000000 psi (41GPa)

En cas de tenir barres de forma diferent s'hauria d'afegir un símbol extra, referint-se a la dimensió màxima de la barra.

Ex:

XXX - G#4 - F100 - E6.0 - 0.63

On:

0,63 = dimensió màxima de la barra (diàmetre exterior) 5/8 in. (16 mm)

### **2.5.5 Barres rectes**

Les barres rectes es poden tallar a la longitud especificada tant a fabrica com obra sense patir cap disminució de la seva resistència.

### **2.5.6 Doblat de barres**

El doblat de barres de FRP fetes amb termostables s'ha de portar a terme abans que la resina curi completament. Un cop la resina a curat, doblar o alterar les barres es impossible degut a la inflexibilitat i a la naturalesa rígida dels termostables. Aplicant calor l'únic que aconseguirem és la descomposició de la resina i, conseqüentment, provocar una pèrdua de resistència de l'element.

La resistència de les barres doblegades varia substancialment per al mateix tipus de fibra, depèn del tipus de tècnica com s'ha dut a terme el doblat i del tipus de resina utilitzada. Per tant, la resistència del tram doblat vindrà donat per els testos de resistència que es facin sobre les barres. Les barres que encara no hagin curat totalment es poden doblar d'acord amb les especificacions del fabricant. Sempre i quan, els angles que s'aconsegueixin no puguin malmetre les fibres.

## **2.6 Consideracions per al disseny**

El disseny d'una biga de formigó reforçada amb FRP està basat en la tensió que requereix i posteriorment es comprova la resistència a la fatiga, i els criteris de servei, com són l'amplada de fissura i la fletxa. En la majoria dels casos el disseny vindrà determinat per

la fatiga, l'amplada de fissura i la fletxa, i no tant per la seva resistència. Especialment en les bigues de formigó reforçades amb AFRP i GFRP.

### 2.6.1 Propietats dels materials

Les propietats dels materials proporcionats pels fabricants, com la resistència a la tracció, han de considerar-se com les propietats inicials, tenint en compte que no inclouen l'efecte de l'exposició a llarg termini a les condicions medi ambientals. Ja que l'exposició ha diferents tipus d'ambients poden reduir la resistència a tracció, i a fatiga de les barres de FRP. És així, que les propietats dels materials utilitzades en les equacions de disseny s'ha de reduir basant-se en el tipus i nivell d'exposició ambiental.

La resistència a tracció es determinarà com:

$$f_{fu} = C_E \cdot f_{fu}^* \quad (2.1)$$

On:

$f_{fu}$  = La resistència a tracció del FRP tenint en compte les reduccions ambientals en servei en (MPa).

$C_E$  = Factor de reducció ambiental tal com es mostra a la Taula 11 per varis tipus de fibres i nivells d'exposició. (Ad)

$f_{fu}^*$  = Resistència a la tracció garantida d'una barra de FRP definida com la resistència a tracció principal d'una mostra assajada de barres menys 3 vegades la desviació estàndard.

$$f_{fu}^* = f_{u,ave} - 3 \cdot \sigma \quad \text{en (MPa)} \quad (2.2)$$

La deformació de disseny bé donada per:

$$\varepsilon_{fu} = C_E \cdot \varepsilon_{fu}^* \quad (2.3)$$

On:

$\varepsilon_{fu}$  = deformació disseny a la ruptura d'un reforç de FRP. (Ad)

$\varepsilon_{fu}^*$  = deformació garantida de ruptura d'un reforç de FRP definit com la deformació principal a la falla d'una mostra assajada de barres menys tres vegades la desviació estàndard. (Ad)

$$\varepsilon_{fu}^* = \varepsilon_{u,ave} - 3\sigma \quad (2.4)$$

**Taula 11.** Factors de reducció ambiental segons les fibres i nivell d'exposició. (ACI 440.1R-06)

Condicions d'exposició	Tipus de fibra	Factor de reducció ambiental CE
Formigó no exposat a terra i aigua	carboni	1.0
	vidre	0.8
	aramida	0.9
Formigó exposat a terra i aigua	carboni	0.9
	vidre	0.7
	aramida	0.8

El mòdul elàstic de disseny serà el mateix que el valor que aporti el fabricant i sigui el mòdul principal obtingut d'una mostra assajada de barres. ( $E_f = E_{f,ave}$ ). Els factors de reducció ambiental són conservatius, depenen de la durabilitat de cada tipus de fibra i estan basats en el consens dels membres del comitè de la ACI 440.1R-06. Els efectes de la temperatura també estan inclosos en els valors  $C_E$ . De totes maneres, no s'han d'utilitzar en ambients on la temperatura sigui superior a la de transició vítria ( $T_g$ ) de la resina utilitzada per a la seva fabricació

### 2.6.2 Resistència a tracció de les barres de FRP doblades

La resistència de disseny a les barres de FRP doblades es pot determinar com:

$$f_{fb} = \left( 0.05 \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0.3 \right) f_{fu} \leq f_{fu} \quad (2.5)$$

on:

$f_{fb}$  = Resistència a la tracció de disseny de la barra de FRP al doblec en (MPa).

$r_b$  = Radi del doblec (mm).

$d_b$  = Diàmetre de la barra de reforç en (mm).

$f_{fu}$  = Resistència a la tracció d'una barra de FRP, considerant les reduccions ambientals en servei en (MPa).

La fórmula anterior pretén determinar la reducció de resistència a la tracció que es produeix en un doblec d'una barra de FRP.

## **2.7 Disseny a flexió**

El disseny d'estructures de formigó reforçades amb FRP és similar al disseny d'estructures reforçades amb acer. Les dades experimentals de les estructures reforçades amb FRP mostren que la capacitat a flexió es pot calcular mitjançant suposicions similars a com es faria per a reforços d'acer. (Faza i GangaRao 1993; Nanni 1993; GangaRao i Vijai 1997). El disseny amb reforços de FRP ha de tenir en compte la relació esforç-deformació uniaxial dels materials FRP.

### **2.7.1 Consideracions generals**

Les seccions de formigó reforçades amb acer normalment estan reforçades de manera que es pugui assegurar que l'acer patirà deformació plàstica abans de la ruptura del formigó, és a dir, la quantia de reforç utilitzada és menor que la quantia balancejada. La plasticitat de l'acer proporciona ductilitat i un advertiment en cas de falla de l'estructura.

El comportament fràgil dels reforços de FRP necessiten reconsiderar aquesta aproximació. Si es produeix la ruptura del reforç de FRP, l'estructura falla sobtadament. De totes maneres els FRP experimenten una elongació considerable abans de la ruptura, cosa que provoca grans esquerdes i flexions de l'estructura. En qualsevol cas l'estructura no experimenta ductilitat tal com s'observa de forma habitual en les estructures subreforçades amb acer.

La fallada a causa de la ruptura del formigó és habitualment més desitjable per estructures amb FRP. A través de l'experiència s'ha demostrat que una biga a flexió mostra un cert comportament plàstic abans de la falla.

En conclusió es pot afirmar que ambdós modes de falla (per trencament del reforç de FRP i per ruptura del formigó) són acceptables per governar el disseny d'estructures de FRP sotmeses a flexió, sempre i quan es compleixin els criteris de resistència i servei. Per compensar la falta de ductilitat, l'estructura ha de tenir una reserva extra de resistència. El marge de seguretat proposat contra la falla es superior als usats tradicionalment en estructures reforçades amb acer.

L'ús de formigons d'alta resistència permet aprofitar millor les propietats d'alta resistència que de les barres de FRP i pot augmentar la rigidesa de la secció fissurada, però la fragilitat del formigó d'alta resistència comparada amb el d'una resistència normal pot reduir en general la deformació de l'estructura.

### 2.7.2 Resistència a flexió

El disseny de la resistència a tracció fa referència a la capacitat nominal de resistència de l'estructura multiplicat per un factor reductor  $\Phi$ .

$$\Phi M_n \geq M_u \quad (2.6)$$

on:

$M_u$  = és el moment que provoquen les carregues amb els corresponents factors de majoració.

La capacitat nominal a flexió d'una estructura de formigó reforçada amb FRP es pot determinar a partir de la deformació, l'equilibri intern de forces o mitjançant el control del mode de falla.

### 2.7.3 Modes de ruptura

La capacitat a flexió d'una estructura reforçada amb FRP bé determinat per si la falla es governada per la ruptura del formigó o pel FRP. El tipus de falla que es produirà es pot determinar comparant la quantia de reforç de FRP amb la quantia balancejada, que és el ràtio on la ruptura del formigó i de les barres de FRP es produeix a la vegada. Com que el FRP no flueix, el ràtio balancejat es calcula utilitzant la resistència a tracció. El ràtio de reforç es calcula mitjançant l'equació 2.7 i el ràtio balancejat amb l'equació 2.8.

$$\rho_f = \frac{A_f}{b \cdot d} \quad (2.7)$$

$$\rho_{fb} = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f'_c}{f_{fu}} \cdot \frac{E_f \cdot \epsilon_{cu}}{E_f \cdot \epsilon_{cu} + f_{fu}} \quad (2.8)$$

Si el ràtio de reforç és inferior al balancejat ( $\rho_f < \rho_{fb}$ ) llavors la falla es produirà per ruptura del reforç de FRP. Per contra, si ( $\rho_f > \rho_{fb}$ ) la falla vindrà provocada per la ruptura del formigó. A la Taula 12 podem trobar valors típics de ràtios balancejats segons el tipus de barra que tinguem.

**Taula 12.** Valors típics de ràtios balancejats dependent del tipus de barra de reforç. (ACI 440.1R-06)

Tipus de barra	$f_y$ o $f_{fu}$ (MPa)	mòdul elàstic (GPa)	$\rho_f$ o $\rho_{fb}$
Acer	400	200	0,0335
GFRP	550	40	0,0078
AFRP	1200	80	0,0035
CFRP	2000	150	0,0020

Com podem comprovar a la Taula 12 els ràtios de reforç balancejats del FRP són inferiors als ràtios de l'acer.

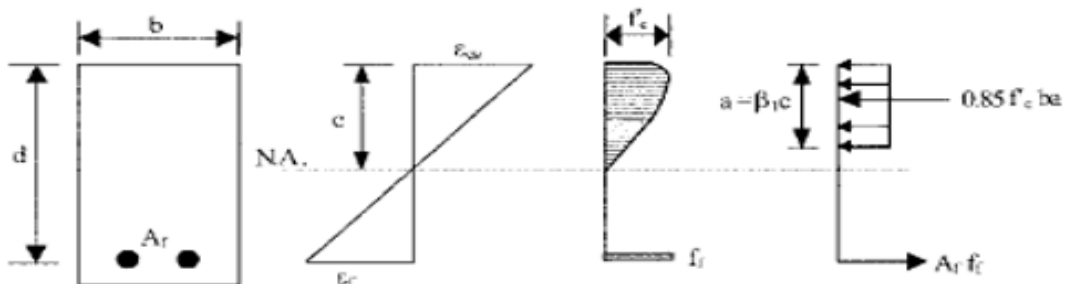
### 2.7.4 Resistència nominal a flexió

Quan  $\rho_f > \rho_{fb}$ , el mode de falla s'inicia per la ruptura del formigó i la distribució de la tensió es pot aproximar com a un quadrat. Podem determinar el moment nominal com:

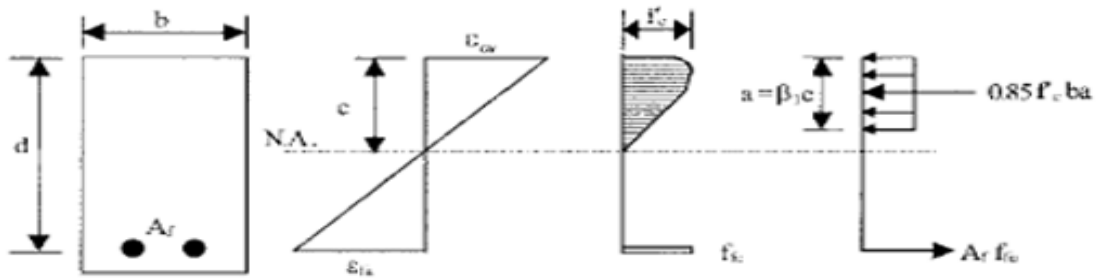
$$M_n = A_f \cdot f_f \cdot \left( d - \frac{A_f \cdot f_f}{1.7 \cdot f'_c \cdot b} \right) \quad (2.9)$$

on:

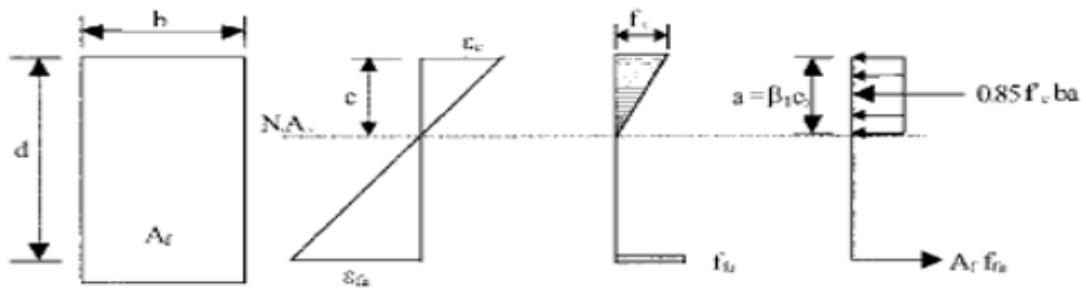
$$f_f = \left( \sqrt{\frac{(E_f \cdot \varepsilon_{cu})^2}{4} + \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f'_c}{\rho_f} \cdot E_f \cdot \varepsilon_{cu}} - 0.5 \cdot E_f \cdot \varepsilon_{cu} \right) \leq f_{fu} \quad (2.10)$$



**Figura 3.** Falla provocada per la ruptura del formigó a la zona comprimida. (ACI 440.1R-06)



**Figura 4.** Falla balancejada, amb ruptura del FRP i el formigó a la vegada. (ACI 440.1R-06)



**Figura 5.** Falla provocada per la ruptura del FRP. (ACI 440.1R-06)

La resistència nominal a flexió es pot determinar amb l'equació 2.10. El FRP és comporta linealment en el mode de falla per ruptura del formigó, per tant, la tensió a la que es troba el reforç de FRP es pot determinar mitjançant l'equació 2.11. Més endavant veurem com determinats estudis Newhook et al. (2002) consideren que en servei l'ampla de fissura i la fletxa venen limitats per la curvatura de la biga i que per a curvatures superiors al  $2000 \cdot 10^{-6}$  l'estructura ja no complirà els criteris de servei i per a aquesta curvatura  $f_f$  es pot limitar a 80, 160 i 300 MPa per als reforços de GFRP, AFRP i CFRP respectivament.

Alternativament, la resistència nominal a flexió de la secció es pot determinar en termes de ràtio de reforç de FRP com es dona a l'equació 2.12.

$$M_n = \rho_f \cdot f_f \cdot \left( 1 - 0.59 \cdot \frac{\rho_f \cdot f_f}{f_c'} \right) \cdot b \cdot d^2 \quad (2.11)$$

Quan  $\rho_f < \rho_{fb}$  la falla de l'estructura s'inicia per la ruptura de les barres de FRP. En aquest cas no es pot aplicar un diagrama de tensions quadrat, ja que, la deformació màxima del formigó (0.003) no s'arriba a aconseguir. En aquest cas s'ha d'utilitzar un diagrama

equivalent per aproximar la distribució de la tensió en el formigó per la deformació aconseguida.

L'anàlisi incorpora dos factors desconeguts, com són la deformació del formigó quan falla  $\varepsilon_c$  i la profunditat de la línia neutra. A més els factors  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  també són desconeguts. El factor  $\alpha_1$  és el ràtio entre el promig de la tensió del formigó i la resistència màxima. El factor  $\beta_1$  és el ràtio de la profunditat del rectangle de tensions i la profunditat de la línia neutra.

La resistència nominal deguda a la flexió es pot determinar com:

$$M_n = A_f \cdot f_{fu} \cdot \left( d - \frac{\beta_1 \cdot c}{2} \right) \quad (2.12)$$

Per una secció determinada el producte  $\beta_1 c$  varia depenent de les propietats del material de FRP i el ràtio de reforç. El valor màxim d'aquest producte és igual a  $\beta_1 c_b$  i s'hi arriba quan s'assoleix la deformació màxima del formigó (0.003).

Una manera simplificada i conservadora de calcular la resistència nominal a flexió de l'estructura és com es fa a l'equació 2.13 i 2.14.

$$M_n = A_f \cdot f_{fu} \cdot \left( d - \frac{\beta_1 \cdot c_b}{2} \right) \quad (2.13)$$

$$c_b = \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{fu}} \right) \cdot d \quad (2.14)$$

### 2.7.5 Factor de reducció de la resistència a flexió

Com que els reforços de FRP no mostren comportament dúctil abans de la ruptura, hem de adoptar un factor reductor bastant conservatiu per mantenir una major reserva de resistència a l'estructura. Les recomanacions japoneses per als dissenys d'estructures de formigó reforçades amb FRP utilitzen un factor reductor de 0,77 (JSCE 1997) altres autors recomanen 0,75 (Benmokrane et al. 1996) basant-se en conceptes probabilístics.

Si ens basem en la ACI 318-05 el factor  $\Phi$  per controlar la falla a compressió es 0,65. Un anàlisi seccional de les curvatures a la falla mostren que les curvatures de bigues



reforçades amb FRP varien entre 0,0138/d i 0,0176/d a falla controlada per tensió, si la falla es controla per compressió la curvatura varia entre 0,0089/d i 0,012/d.

La ACI considera una falla controlada per tensió quan la curvatura es superior a 0,008/d corresponen a una deformació en l'acer de 0,005). Això indica que degut al baix mòdul elàstic del reforç, les bigues reforçades amb FRP tindran una flexió última major que les reforçades amb acer, i que, les bigues reforçades amb FRP que trenquen per ruptura de les barres, tindran flexions últimes majors que les que fallin per ruptura del formigó.

Encara que pugem preveure el mode de fallada de l'element basant-nos en els càlculs, això pot ser que no passi. Per exemple, si la resistència del formigó és superior a l'especificada, l'estructura pot fallar per la ruptura de les barres de FRP. És per aquesta raó i per establir una transició entre els dos valors de  $\Phi$ , que una secció controlada per ruptura del formigó té una quantia  $\rho_f \geq 1,4 \rho_{fb}$  i una secció controlada per ruptura del FRP es defineix per  $\rho_f < \rho_{fb}$ .

El factor de reducció de resistència  $\Phi$  es pot determinar com:

$$\Phi = \begin{cases} 0.55 & \text{per } \rho_f \leq \rho_{fb} \\ 0.3 + 0,25 \frac{\rho_f}{\rho_{fb}} & \text{per } \rho_{fb} < \rho_f < 1,4\rho_{fb} \\ 0.65 & \text{per } \rho_f \geq 1.4\rho_{fb} \end{cases}$$

### 2.7.6 Àrea mínima de reforç

Si una estructura està dissenyada per falla per trencament del reforç de FRP  $\rho_f < \rho_{fb}$  s'ha de preveure una mínima quantitat de reforç perquè la falla es produeixi per sobre el moment de fissuració  $M_{cr}$  del formigó. Això vol dir que  $\Phi M_n \geq M_{cr}$ .

L'àrea mínima de reforç per a reforços de FRP s'obté multiplicant per 1,64 l'equació existent per a reforços d'acer. Resultant l'equació 2.15.

$$A_{f,\min} = \frac{4.9 \cdot \sqrt{f'_c}}{f_{fu}} \cdot b_w \cdot d \geq \frac{330}{f_{fu}} \cdot b_w \cdot d \quad (2.15)$$

Si la ruptura de l'estructura no ve determinada pel trencament del FRP  $\rho_f > \rho_{fb}$ , la quantitat mínima de reforç per tenir la falla per sobre el moment de fissuració ja estarà superada, i per tant només caldrà comprovar l'equació 2.15 en cas que  $\rho_f < \rho_{fb}$ .

### 2.7.7 Reforç a la zona de compressió

Els reforços de FRP tenen una resistència a compressió significativament menor que a tracció i pateixen de grans variacions. Es per aquest motiu, que haurem d'ignorar la resistència a compressió de les barres i per això, no es recomana la utilització d'aquest tipus de reforços en columnes o en la zona a compressió en elements a flexió.

Tot i això, en alguns casos no es pot evitar col·locar-les en zones a compressió, com serien els punts de suport en bigues contínues. En aquests casos s'ha de preveure un confinament per a les barres degut al seu relativament alt coeficient d'expansió si les comprimim.

## 2.8 Consideracions en servei

Els reforços de FRP tenen una rigidesa relativament petita després de la fissuració. En conseqüència les flexions en condicions de servei són les que ens determinaran el disseny. En general si dissenyem les seccions de formigó amb FRP perquè fallin per la ruptura del formigó podrem satisfer els criteris de falla per flexió i per ampla de fissura. Aquest dos són els principals paràmetres que haurem de tenir en compte a l'hora de dissenyar les seccions i es per això que són les que ens limitaran més el disseny.

**Fissuració:** Si tenim una amplada de fissura indesitjable, ja sigui per raons estètiques o per prevenir l'entrada d'aigua dins la secció que en podria provocar deteriorament del formigó.

**La fletxa:** Les flexions han d'estar dins els límits tolerables imposats per l'ús que tingui l'estructura.

Les previsions en servei fetes per l'acer tindran modificacions quan utilitzem reforços de FRP a causa de la seva diferència en les propietats, com la menor rigidesa, l'adherència i la resistència a la corrosió. En general la substitució dels armats d'acer pels de FRP provocarà majors fissuracions i fletxes. (Gao et al. 1998).

### 2.8.1 Fissuració

Les barres de FRP són resistents a la corrosió, és per aquest motiu que l'amplada màxima de fissura es pot augmentar, ja que la corrosió dels reforços és la principal raó per limitar l'amplada de les fissures. Tot i que altres limitacions poden ser purament estètiques.

La Japan Society of Civil Engineers (1997) només consideren l'aspecte estètic per limitar la fissura i permeten una amplada màxima de 0,5 mm. La Canadian Standards Association (2002) permet amplades de fissura de 0,5 mm per a exteriors i 0,7 per interiors quan utilitzem FRP. La ACI 318-05 recomana 0,4 mm per a reforços d'acer. Aquestes limitacions poden no se suficientment restrictives en condicions d'exposició suficientment agressives.

La formula per calcular l'amplada de fissura és independent del tipus de reforç que utilitzem, tan si és acer com FRP la podem determinar amb l'equació 2.16. S'ha de tenir en compte que també dependrà del coeficient d'adherència  $k_b$  que tinguem.

$$w = 2 \cdot \frac{f_f}{E_f} \cdot \beta \cdot k_b \cdot \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad (2.16)$$

on:

$w$  = Amplada de la fissura en (mm).

$f_f$  = Tensió en el reforç (MPa).

$E_f$  = Mòdul elàstic del reforç (MPa).

$\beta$  = ràtio entre la distància de la línia neutra a la cara traccionada i la distància entre la línia neutra i el centroid del reforç. (Ad)

$d_c$  = Gruix del recobriment des de la cara traccionada fins al centre de la barra mes propera. (mm).

$s$  = distància entre barres (mm).

El coeficient  $k_b$  té en compte el grau d'adherència entre la barra i el formigó que l'envolta. Per barres de FRP amb un nivell d'adherència similar a l'acer el coeficient  $k_b = 1$ . Per barres amb un nivell inferior a l'acer el coeficient es superior a 1, i per a barres amb l'adherència superior a la de l'acer  $k_b < 1$ . Bakis i Boothby (2004) van determinar que l'amplada de les fissures en bigues de formigó reforçades amb GFRP incrementaven els seu valor aproximadament un 40% en condicions ambientals d'interior i un 60% en condicions ambientals exterior, quan sostenien carregues mantingudes en períodes superiors als 3 anys. El comitè de la ACI 440.1R-06 ha determinat que un valor de  $k_b = 1,4$  és prou conservatiu i es pot utilitzar genèricament. Les barres llises i les reixes estan excloses d'aquesta recomanació, i per aquest casos s'haurà de consultar amb el fabricant.

### 2.8.2 Fletxa

En general, les previsions de la ACI 318-05 per el control de les fletxes es centra amb les flexions que tenen lloc quan l'estructura es troba amb les carregues en servei de forma continua i mantinguda. Les estructures de formigó reforçades amb FRP són més sensibles a les variables que afecten la fletxa que les reforçades amb acer amb una mida i distribució idèntiques. Les flexions en reforços de FRP tendeixen a ser majors degut a la menor rigidesa que presenten respecte els d'acer. És per això que com es veurà més endavant s'ha plantejat l'estudi d'aquest treball no només des del punt de vista de la resistència de l'element, sinó que, com proposa es proposa a Newhook et al. (2002) a "*Concrete flexural members reinforced with fiber reinforced polymers: design for cracking and deformability*", la principal restricció que tindrem en aquest tipus d'estructures vindrà determinada per la fletxa i l'ampla de fissura. Com es veurà una curvatura de 0,002 [Ad] en servei, ens permetrà no sobrepassar la fletxa màxima permesa. Tenint en compte que la ruptura de l'element es produiria amb una curvatura a l'entorn de 0,0138 i de 0,0178 [Ad].

### 2.8.3 Inèrcia efectiva

En una secció de formigó, sotmesa a flexió simple, on el moment aplicat  $M$  es trobi per sota el moment de fissuració  $M_{cr}$ , la seva inèrcia vindrà determinada per l'equació 2.17, on el càlcul es realitza amb la secció bruta de l'element.

$$I_g = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \quad (2.17)$$

Si el moment aplicat  $M$  augmenta i supera el moment de fissuració  $M_{cr}$  la secció es fissurarà i es produirà una reducció de la rigidesa. Aquesta fissuració anirà augmentant a mesura que s'incrementi el moment aplicat, arribant a tenir una secció completament fissurada. En aquest punt podem calcular la inèrcia de la secció fissurada, que correspondrà a la inèrcia de fissuració  $I_{cr}$ . Aquesta inèrcia es determina per a qualsevol tipus de reforç mitjançant les equacions 2.18 i 2.19.

$$I_{cr} = \frac{b \cdot d^3}{3} \cdot k^3 + n_f \cdot A_f \cdot d^2 \cdot (1 - k)^2 \quad (2.18)$$

on:

$$k = \sqrt{2 \cdot \rho_f \cdot n_f + (\rho_f \cdot n_f)^2} - \rho_f \cdot n_f \quad (2.19)$$

El que succeirà a la realitat és que la inèrcia de la secció anirà evolucionant des de un estat inicial on no tenim fissuració  $I_g$  a un estat final on trobem la secció completament fissurada  $I_{cr}$ . En aquesta situació haurem de parlar de la inèrcia efectiva  $I_e$ . La inèrcia efectiva es pot determinar mitjançant l'equació de Branson tal com es mostra a l'equació 2.20

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3 \cdot I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3\right] \cdot I_{cr} \quad \text{quan } I_e < I_g \quad (2.20)$$

L'equació de Branson reflecteix el fenomen del *Tension-stiffening* que es objecte d'estudi en el present treball. Aquesta expressió, però, està basada en el comportament d'elements reforçats amb acer i com han mostrat alguns estudis, sobreestima la inèrcia efectiva quan els reforços són de FRP, sobretot per a quanties relativament baixes de reforç. Per aquest motiu, la ACI.440.1R-06 incorpora la modificació de Gao et al. (1998) tal com es pot veure a l'equació 2.21.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3 \cdot \beta_d \cdot I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3\right] \cdot I_{cr} \quad (2.21)$$

on:

$$\beta_d = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_{fb}}\right) \leq 1.0 \quad (2.22)$$

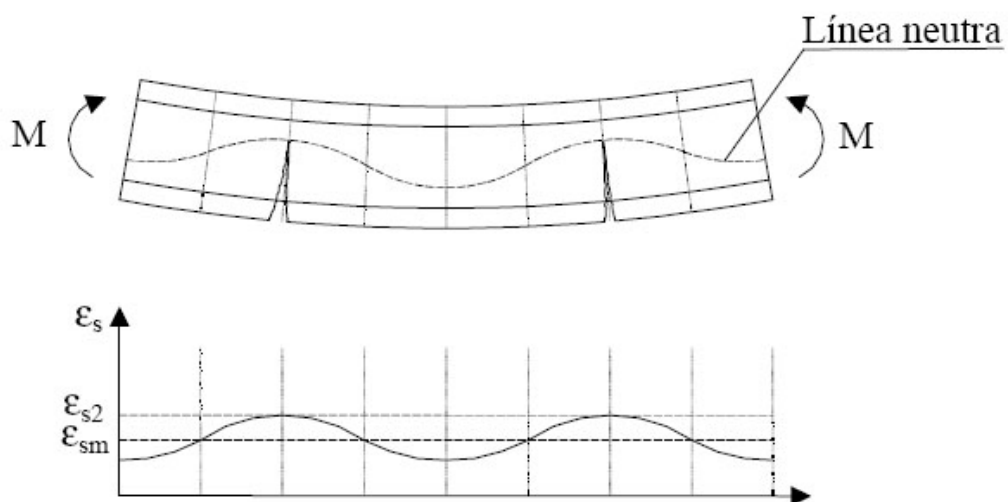
El factor  $\beta_d$  és un coeficient introduït degut a la disminució del fenomen del *Tension-stiffening* que mostren els reforços de FRP. Els estudis han demostrat que la quantia de reforç influeix en aquest fenomen, tal com queda reflectit a l'equació 2.22.

### 3. Modelització de la contribució del formigó traccionat entre fissures

#### 3.1 Introducció

Quan en un element de formigó armat apareixen esforços que generen tensions de tracció que superen la resistència del formigó aquest es fissura. Degut a l'efecte de l'adherència amb les armadures, el formigó situat entre fissures resisteix una certa força de tracció normal al pla fissurat donant lloc a un fenomen conegut com *Tension-Stiffening*. Aquest fenomen provoca un augment global de la rigidesa de l'element respecte a la que tindria si no contempléssim la contribució del formigó traccionat.

A la Figura 6 es pot veure que han aparegut fissures perquè el moment aplicat  $M$  a superat el moment de fissuració  $M_{cr}$ , però tot i així, el formigó entre les fissures manté una certa resistència. La deformació  $\varepsilon_s$  correspon a la deformació de l'armadura traccionada,  $\varepsilon_{sm}$  a la deformació mitja i  $\varepsilon_{s2}$  a la deformació de la secció completament fissurada.

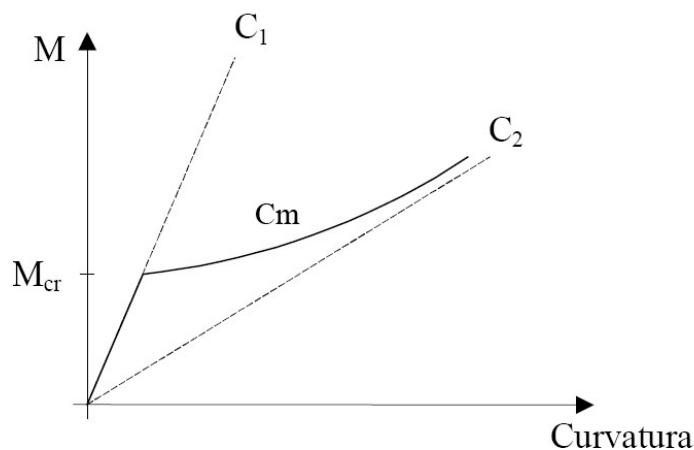


**Figura 6.** Biga de formigó armat sotmesa a flexió. (Torres 2001)

Aquest fet provocarà que a l'hora de calcular les deformacions de l'element no puguem considerar la secció ni sense fissurar ni completament fissurada. Com s'observa a la Figura 6 s'haurà de tenir en compte una curvatura mitja que anirà evolucionant a mesura que augmentem el moment aplicat cap a valors on la secció esta completament fissurada.

Tenint en compte, també, que el formigó no començarà a fissurar-se fins que arribem a valors que superin  $M_{cr}$ .

Tenim doncs que,  $C_1$  correspon a la curvatura que tindria la secció sense fissurar,  $C_2$  a la curvatura de la secció completament fissurada i  $C_m$  a la curvatura de la secció incloent el fenomen del *Tension-Stiffening*.



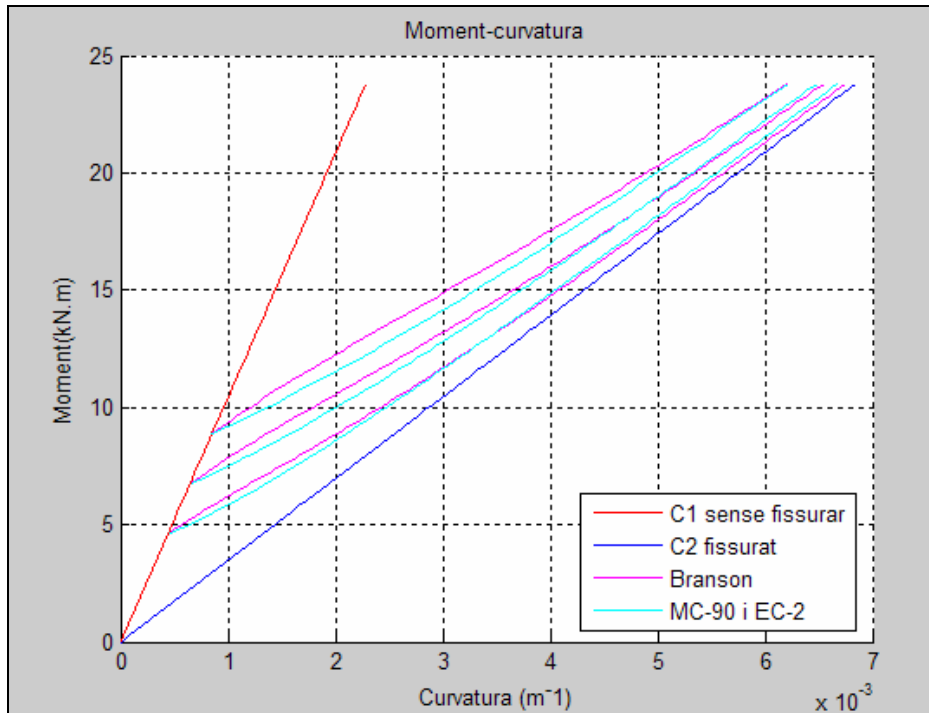
**Figura 7.** Diagrama moment curvatura segons les fissuracions de l'element.

Com a exemple, es mostra a les Figueres 8, 9 i 10 alguns casos on la variació de la resistència a tracció del formigó provoca una variació en el moment de fissuració i un augment de la rigidesa global de l'element. Els elements analitzats tenen les característiques de la Taula 13.

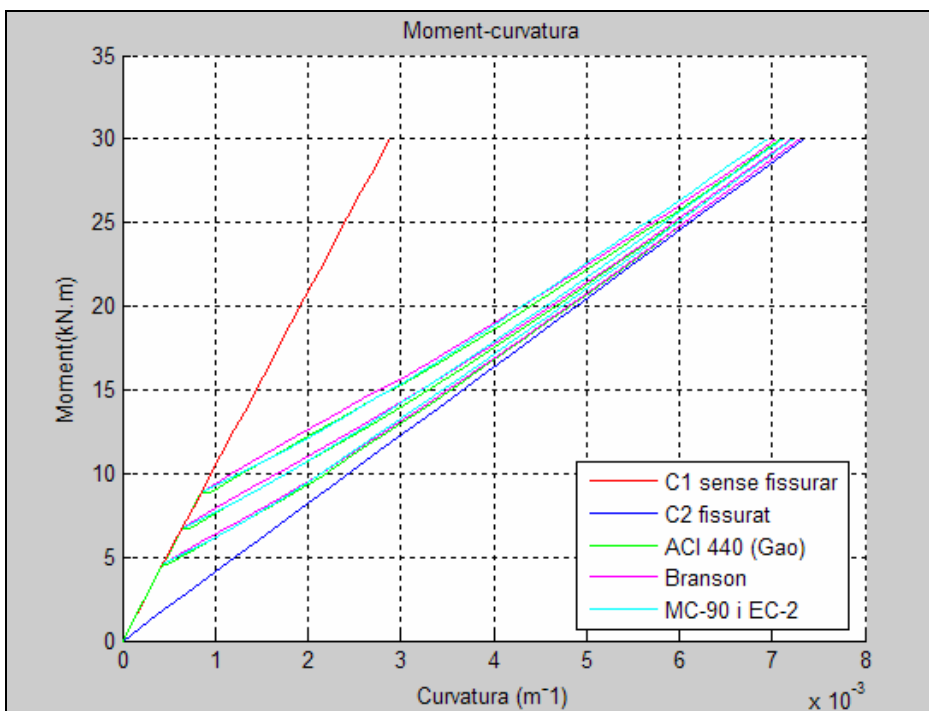
**Taula 13.** Exemples d'elements reforçats amb acer, GFRP i CFRP.

Fig.	Amp.	Cantell	Cantell efectiu	Res. Comp. formigó	Res. tracció o formigó	Mòdul elàstic formigó	Tipus de reforç	Res. Tracció reforç	Quant.	Moment de fiss.	Moment últim	Moment de servei
	[mm]	[mm]	[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]		[MPa]	[%]	[kN.m]	[kN.m]	[kN.m]
8	250	250	250	25	1,75	32009	ACER	500	0,64	4,55	38,12	23,82
8	250	250	250	25	2,57	32009	ACER	500	0,64	6,71	38,12	23,82
8	250	250	250	25	3,4	32009	ACER	500	0,64	8,87	38,12	23,82
9	250	250	250	25	1,75	32009	GFRP	550	3,93	4,55	60,50	30,02
9	250	250	250	25	2,57	32009	GFRP	550	3,93	6,71	60,50	30,02
9	250	250	250	25	3,4	32009	GFRP	550	3,93	8,87	60,50	30,02
10	250	250	250	25	1,57	32009	CFRP	2000	2,36	4,55	75,02	19,74
10	250	250	250	25	2,57	32009	CFRP	2000	2,36	6,71	75,02	19,74
10	250	250	250	25	3,4	32009	CFRP	2000	2,36	8,87	75,02	19,74

A les Figures es pot veure la diferència que tenim si obtenim la curvatura mitjana com la proposen l'Eurocodi-2 o el Model Code 90, o bé si la determinem a partir de l'equació de Branson com proposa la norma americana ACI 440.1R-06.

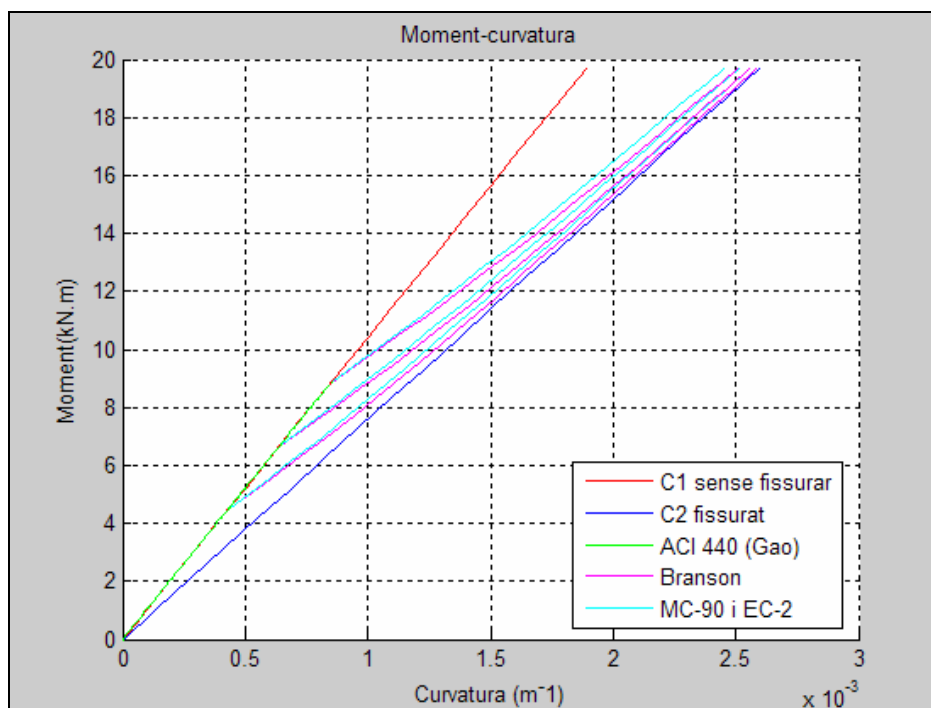


**Figura 8.** Exemple de la influència de la resistència a tracció del formigó reforçat amb acer.



**Figura 9.** Exemple de la influència de la resistència a tracció del formigó reforçat amb GFRP.





**Figura 10.** Exemple de la influència de la resistència a tracció del formigó reforçat amb CFRP.

A la Figura 8 no es mostra la curvatura que s'obtidria amb l'equació de la ACI 440.1R-06 perquè només serveix en cas que el reforç sigui de FRP. Pel que fa a les altres corbes s'observa clarament com degut al fenomen del *Tension-Stiffening* tot i tenir un mateix moment de servei la curvatura no serà la mateixa en aquest punt, ja que la rigidesa global haurà augmentat. Aquest fet es pot veure, també, a les Figures 9 i 10, on la corba de Gao queda molt semblant a la de Branson perquè les quanties de reforç utilitzades són elevades i el coeficient  $\beta_d$  s'apropa molt a 1.

Per tenir en compte el fenomen del *Tension-Stiffening* s'han tingut en compte propostes molt diverses. Els mètodes basats en l'adherència entre el formigó i les barres, utilitzen les corbes *bond-slip*. Aquest mètodes són els que presenten un tractament teòric més precís, tot establint la compatibilitat entre les pertinents equacions diferencials. Aquesta metodologia és la més complicada de totes, degut a la dificultat de determinar els paràmetres experimentals que regeixen el fenomen. Per aquest motiu el seu ús no s'ha estès a l'estudi de problemes estructurals reals.

Hi ha mètodes més simplificats que també tenen en compte el fenomen del *Tension-Stiffening*. Tan és així, que la ACI 440.1R-06 incorpora el mètode de Branson i (Gao et al. 1998), com s'ha vist al punt 2.8.3, que té en compte una inèrcia equivalent interpolada entre

els valors de la inèrcia de la secció completament fissurada i sense fissurar. (Gao et al. 1998) a més introdueix a la formula de la inèrcia equivalent una  $\beta_d$ , que pretén compensar la sobreestimació del *Tension-Stiffening* que té la formula de BRANSON sobretot per a baixos ràtios de reforç, ja que els reforços de FRP demostren tenir baixa *Tension-Stiffening*.

En un nivell entremig queden els mètodes basats en diagrames i equacions que relacionen les deformacions seccionals amb els esforços aplicats (moment-curvatura). El comportament de la secció s'obté de la interpolació de la resposta per a la secció no fissurada (I) i per a la secció completament fissurada (II), obtenint així un valor entremig, i tractant la fissuració com a un fenomen distribuït. La resposta estructural es determina a partir de la consideració del comportament de les diferents seccions dels elements. Aquests models tenen l'avantatge d'involucrar la majoria dels factors que intervenen en el fenomen, tant en comportament instantani com a diferit, essent utilitzats en nombrosos resultats experimentals.

Un dels mètodes més utilitzats en els darreres anys per modelitzar el comportament del formigó traccionat entre fissures ha estat la utilització de lleis constitutives modificades per als diferents materials que formen part de la secció, ja sigui el propi formigó, l'acer, o en el nostre cas les barres de FRP. Aquestes corbes poden adoptar diferents formes, però en la majoria de casos, es basen en una disminució de la resistència a mesura que augmenta la deformació un cop superada la corresponent a la tracció del formigó. En aquests casos, la fissuració es contempla, també, com un fenomen distribuït.

Pel cas de l'acer i el FRP aquestes lleis consisteixen en determinar una rigidesa fictícia i major que la real, que va disminuint a mesura que augmenta la deformació i la secció es va fissurant.

En el cas del formigó s'ha establert una disminució de la capacitat resistent del formigó a mesura que van augmentant les deformacions un cop superada la resistència a tracció del formigó. Segons els autors, s'han proposat diverses modificacions en la forma del diagrama del comportament a tracció. El procediment s'ha anat implementant en nombrosos models d'anàlisi estructural basat en elements finits, MEF, resultant un sistema més senzill que els mètodes basats en les corbes *bond-slip* i amb capacitat per aplicar-se a problemes de comportament global d'estructures.

Per altre banda, existeix una gran variació entre els coeficients proposats per definir la forma del diagrama en la zona traccionada, tals com la deformació màxima fins on cal

considerar el *Tension-Stiffening*, el pendent de les corbes o la magnitud de les discontinuïtats en el cas dels diagrames escalonats.

Els resultats experimentals han posat de manifest que l'efecte de *Tension-Stiffening* depèn de les característiques seccionals i dels materials (quantia d'acer, diàmetre de les barres, resistència, adherència).

### 3.2 Models de referència

En aquest treball es prendrà com a model de referència per al comportament moment-curvatura el de l'Eurocodi-2. Encara que es tracta d'un model inicialment previst per a estructures de formigó reforçades amb acer, diversos estudis han mostrat un bon ajust per a estructures amb armadures de FRP (Pecce et al. 2000)

El model de referència, d'acord amb treballs realitzats per el CEB (Comité Euro International du Béton) presentats al EC-2, indica que la curvatura mitja a considerar en una determinada secció pot expressar-se com:

$$C_m = C_1 \quad \sigma_{s2} < \sigma_{sr} \quad (3.1)$$

$$C_m = (1 - \zeta) \cdot C_1 + \zeta C_2 \quad \zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right) \quad \sigma_{s2} \geq \sigma_{sr} \quad (3.2)$$

On  $C_m$ ,  $C_1$  i  $C_2$ , són la curvatura mitja i les que corresponen als estats I i II;  $\beta_1$  és un coeficient que té en compte les propietats adherents de les barres, el seu valor és 1 per a alta adherència (corrugades) i 0,5 per a barres llises;  $\beta_2$  té en compte la duració de la càrrega, essent 1 per a una única càrrega de curta durada i 0,5 per a càrregues mantingudes o cicles de càrrega repetits;  $\sigma_{s2}$  és la tensió de l'armadura traccionada suposant la secció a l'estat II i  $\sigma_{sr}$  és la tensió del FRP traccionat calculada a l'estat II per a les càrregues en que es produeix fissuració  $M_{cr}$ .

A flexió simple  $\sigma_{sr}/\sigma_{s2}$  és equivalent a  $M/M_{cr}$  on  $M$  és el moment que està actuant i  $M_{cr}$  el de fissuració.

Basant-se en la mateixa idea, el MC-90 ha adoptat una formulació similar per a la curvatura mitja.

$$C_m = C_1 \quad M < M_{cr,red} \quad (3.3)$$

$$C_m = C_2 - (C_{2r} - C_{1r}) \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right) \quad M \geq M_{cr,red} \quad (3.4)$$

$$M_{cr} = W_1 \cdot \left( f_{ct} - \frac{N}{A_1} \right) \quad (3.5)$$

On  $C_{1r}$  i  $C_{2r}$  són les curvatures en els estats I i II corresponents a les càrregues que produeixen la fissuració;  $W_1$  i  $A_1$  el mòdul i l'àrea resistent de la secció per l'estat I;  $f_{ct}$  la resistència mitja a tracció;  $\beta_1$  val 1 per barres d'alta adherència i 0,5 per barres llises;  $\beta_2$  val 0,8 per la càrrega de curta durada i 0,5 per càrregues mantingudes o cicles de càrrega repetits.  $M_{cr,red}$  és el moment de fissuració reduït definit per la intersecció de la corba  $C_m$  i la recta que representa la curvatura  $C_1$  per a flexió simple sense retracció adopta el valor  $(\beta_1 \cdot \beta_2)^{1/2} \cdot M_{cr}$ .

Aquest moment reduït s'introdueix per tenir en compte l'efecte de les càrregues prèvies, la retracció o les variacions de temperatura durant la construcció. Tenint en compte que en el nostre cas no tenim esforços axials la equació 3.5 queda com:

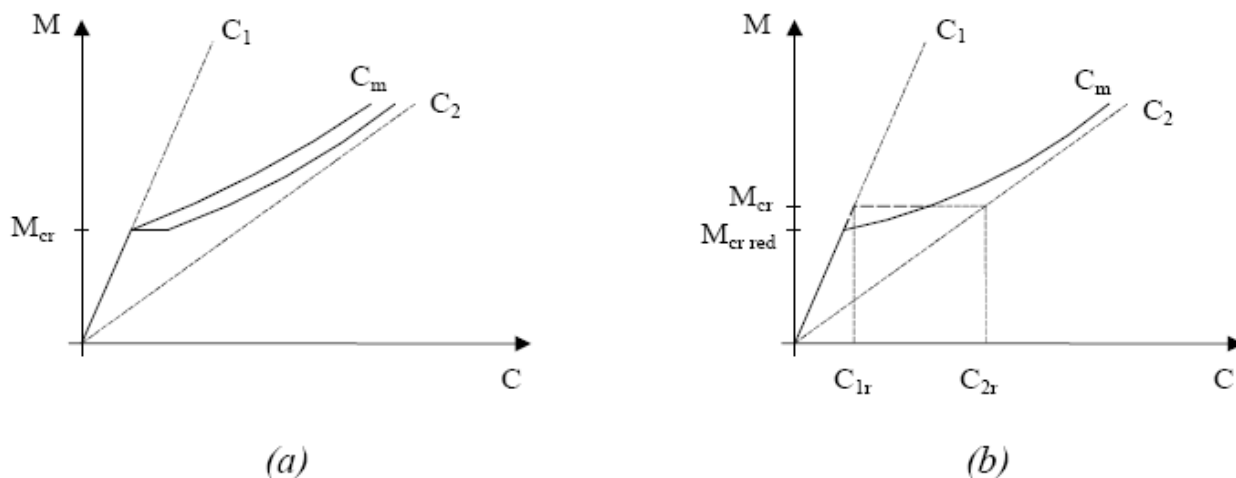
$$M_{cr} = W_1 \cdot f_{ct} \quad (3.6)$$

Per a flexió simple (sense retracció) l'equació 3.4 es transforma en:

$$C_m = C_2 - (C_{2r} - C_{1r}) \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)$$

$$C_m = \left[ \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \right] \cdot C_1 + \left[ 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \right] \cdot C_2 \quad (3.7)$$

Coincidint amb l'equació 3.2. En el nostre cas totes les hipòtesis les hem considerat a flexió simple. Les equacions anteriors es poden representar gràficament com a la Figura 11.



**Figura 11.** Diagrames moment-curvatura: (a) EC-2, (b) MC-90

Podem obtenir algunes curvatures mitjanes i comparar-les en funció del tipus de reforç, i així, tenim acer a la Figura 12, GFRP al 13, AFRP al 14 i CFRP a la Figura 15. amb les característiques de la Taula 14.

**Taula 14.** Característiques dels elements reforçats amb acer, GFRP, AFRP i CFRP.

Fig.	Amp.	Cantell	Cantell efectiu	Res. Comp. formigó	Res. tracció formigó	Mòdul elàstic formigó	Tipus de reforç	Res. Tracció reforç	Quantia	Moment de fiss.	Moment últim	Moment de servei
	[mm]	[mm]	[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]		[MPa]	[%]	[kN.m]	[kN.m]	[kN.m]
12	400	600	550	50	2,77	38629	ACER	500	1,12	6,67	519,89	324,93
13	400	600	550	50	2,77	38629	GFRP	550	2,23	6,67	549,84	222,61
14	400	600	550	50	2,77	38629	AFRP	1200	2,23	6,67	707,46	286,40
15	400	600	550	50	2,77	38629	CFRP	2000	2,23	6,67	864,83	350,13

Amb les Figures 12, 13 ,14 i 15 em volgut comparar el comportament d'un element de formigó en funció del tipus de reforç que s'utilitzi. Tenint en compte que l'acer és el reforç amb major mòdul elàstic s'ha utilitzat la meitat de quantia. Com a conclusions podem dir que el CFRP és el reforç que podrà suportar més càrrega, en detriment del GFRP que degut a la baixa rigidesa que presenta el moment de servei es veurà reduït per culpa de les fissuracions i les deformacions que es produiran a l'element. Les curvatures últimes també són majors als FRP, essent aquest factor i no la resistència el que els limitarà per al moment de servei. Si passem les curvatures últimes a adimensionals multiplicant per el cantell efectiu  $d$  ens adonarem que estem molt propers del que és proposa a Newhook et al. (2002).

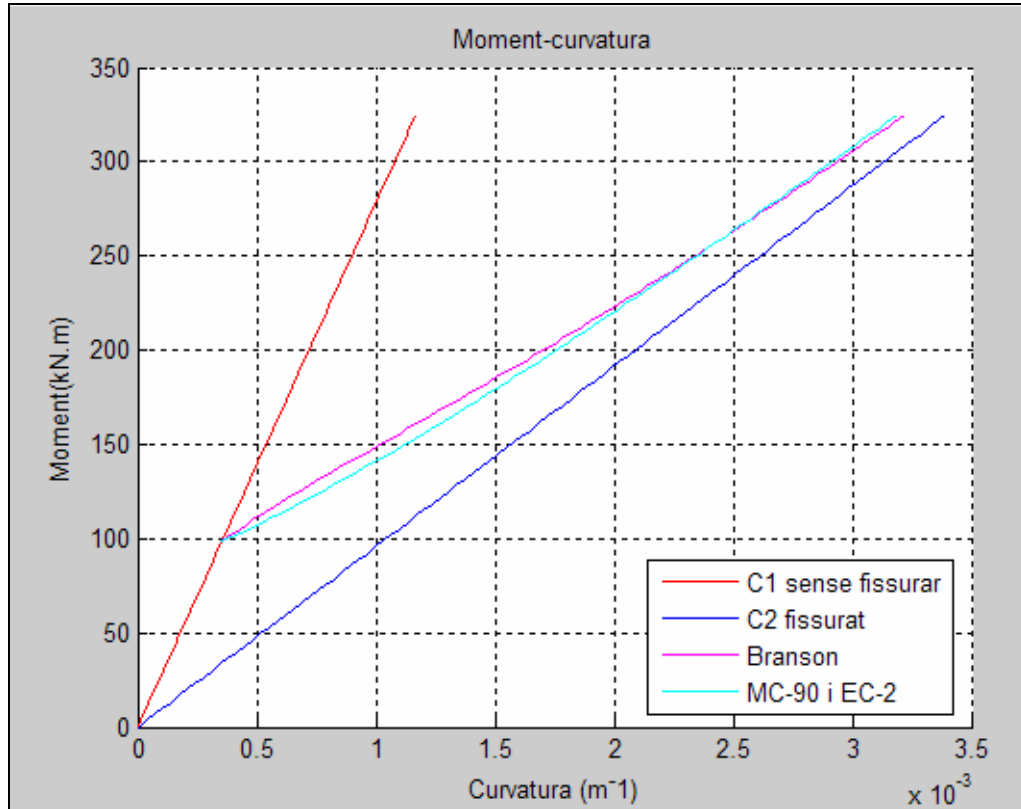


Figura 12. Element de formigó reforçat amb acer segons Taula 14.

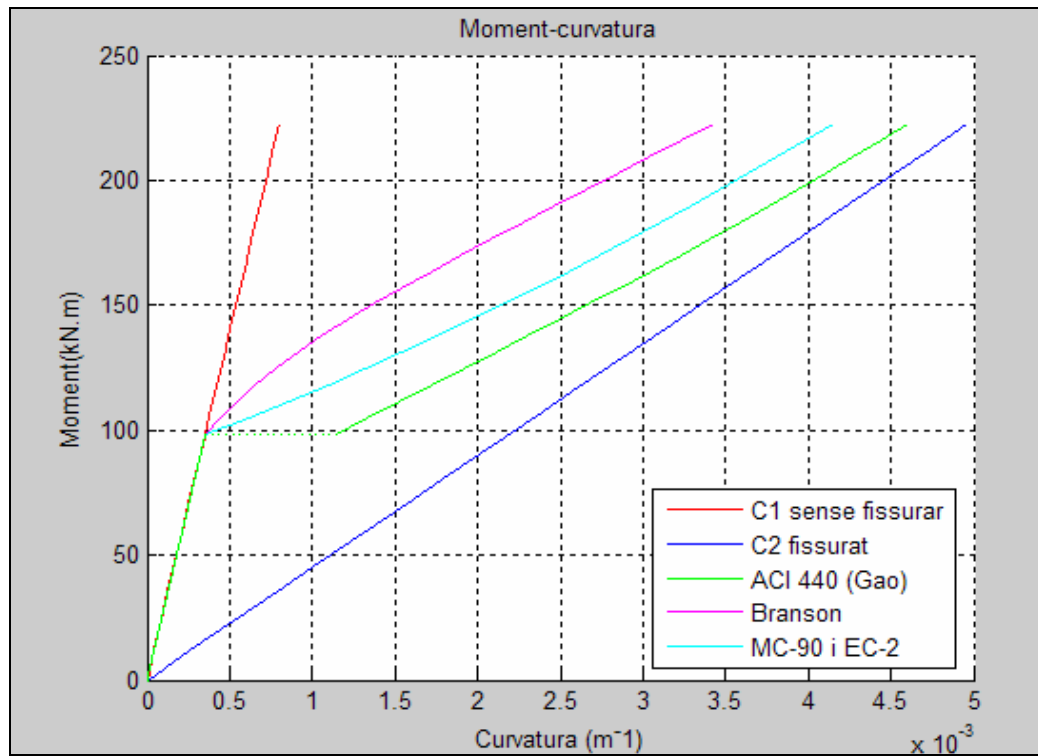


Figura 13. Element de formigó reforçat amb GFRP segons Taula 14.

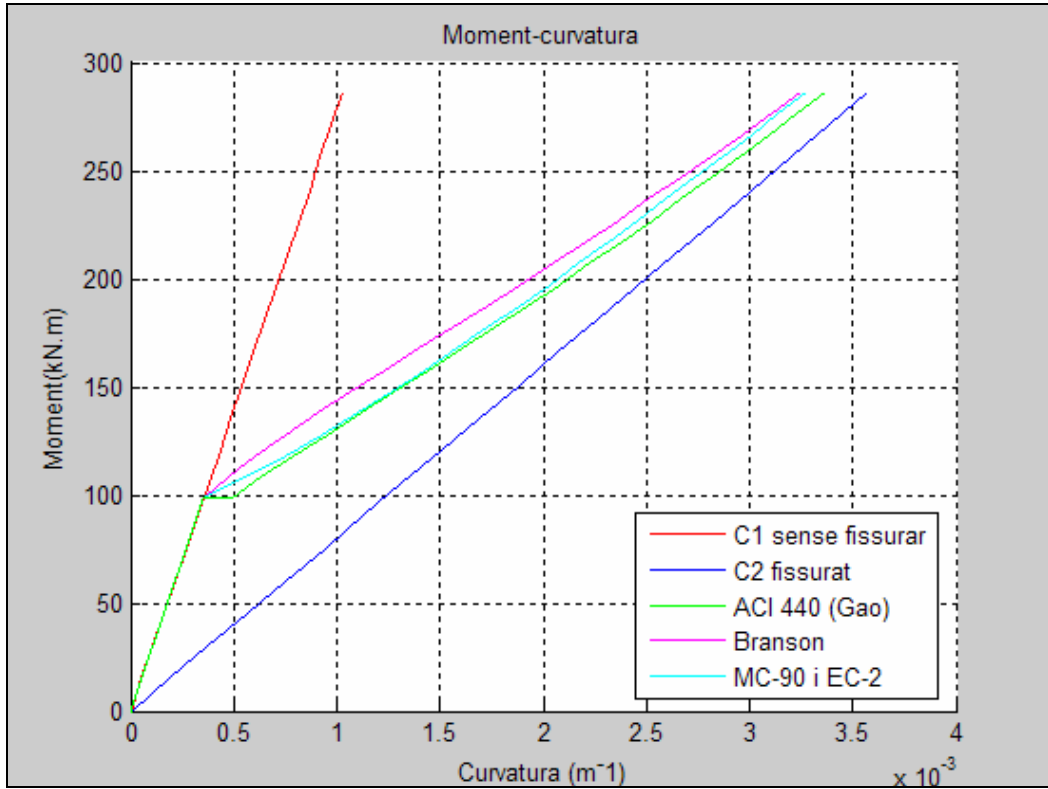


Figura 14. Element de formigó reforçat amb AFRP segons Taula 14

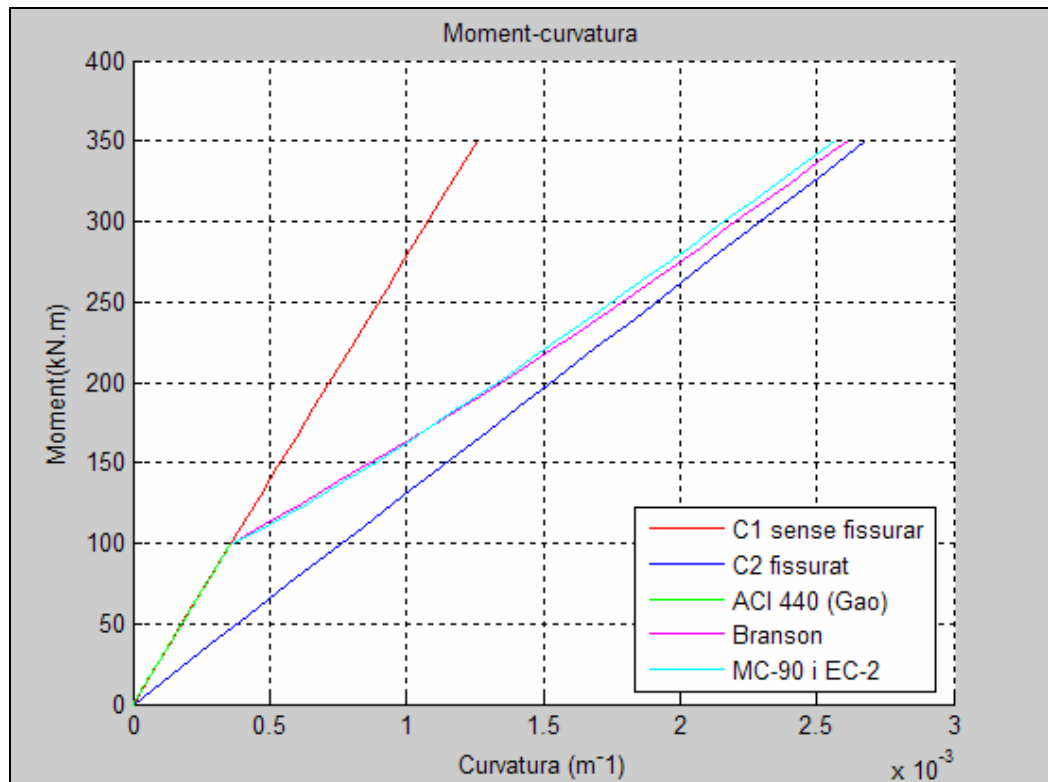


Figura 15. Element de formigó reforçat amb AFRP segons Taula 14

### 3.3 Model constitutiu adoptat

En aquest treball s'ha modelitzat la contribució del formigó traccionat entre fissures adoptant una llei constitutiva modificada referida al formigó, tal com es mostra a la Figura 16. El model adoptat contempla tres estats, en que podem trobar-nos el formigó ben diferenciats. En el primer tram el formigó es troba a compressió, al ser un model simplificat el podem modelitzar com una recta de pendent  $E_c$ , que és el mòdul elàstic del formigó. En el segon tram el formigó es troba a tracció, com que encara no em superat  $f_{ct}$ , el formigó encara no s'ha fissurat. La resistència a tracció del formigó es pot determinar aproximadament segons Eurocodi-2 segons l'equació 3.8.

$$f_{ct} = 1,4 \cdot \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.8)$$

Un cop em superat el moment de fissuració, es sabut, que l'element no es fissura en tots els punts a la vegada sinó que van apareixen esquerdes a mesura que el moment va augmentant per sobre el moment de fissuració. Aquest fet es degut al *Tension-Stiffening*, ja que, el formigó entre fissures encara és capaç de suportar determinada tensió. Aquest darrer tram queda determinat per els paràmetres  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , multiplicant a la resistència a tracció  $f_{ct}$  i de la deformació corresponent  $\epsilon_{ct}$ .

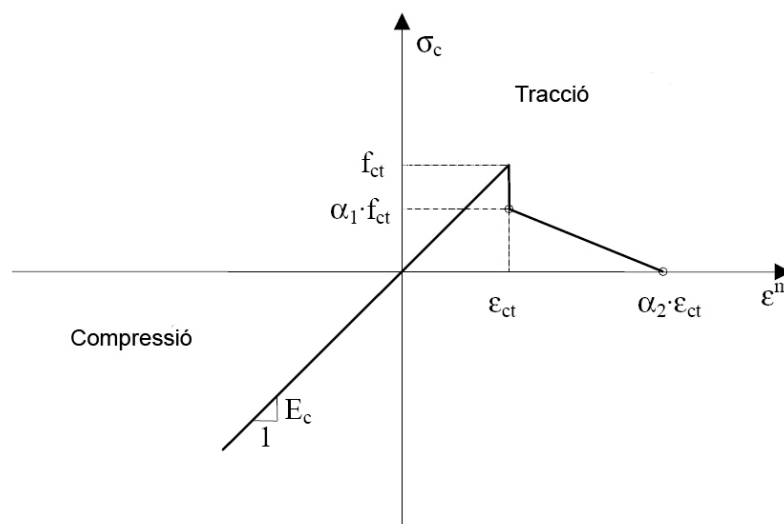


Figura 16. Modelització del *Tension-Stiffening*. (Torres 2001)

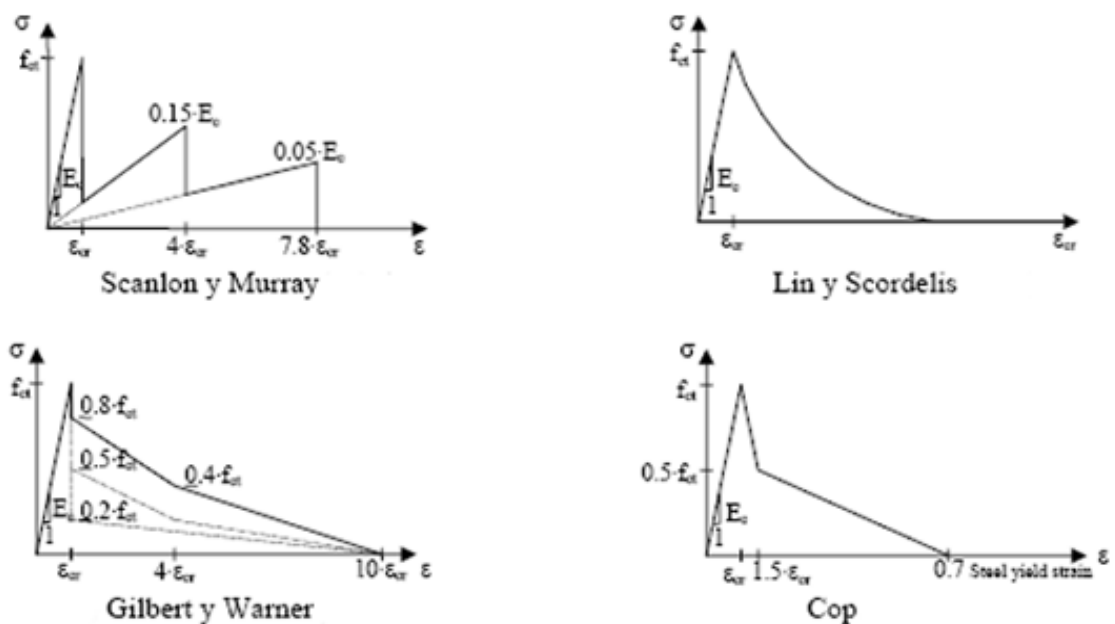
A la Figura 16 es pot comprovar com es té en compte per al model tan la resistència a tracció del formigó  $f_{ct}$ , com el *Tension-Stiffening* amb la inclusió del graó fictici limitat per  $\alpha_1$  i



$\alpha_2$ . S'ha realitzat un estudi paramètric mitjançant l'ajust per mínims quadrats al model de referència que ens permet determinar els valors  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Nombrosos estudis experimentals han posat de manifest que existeixen nombrosos factors que afecten la *Tension-Stiffening*, com són la quantia de reforç, el diàmetre de les barres, les característiques resistents del formigó, l'adherència, etc.

A partir del model general s'ha portat a terme un estudi particularitzat per seccions rectangulars sotmeses a flexió simple, determinant quines són les característiques seccionals que influeixen en la llei adoptada.

A les Figures 17.1 i 17.2 es mostren diferents models i proposicions d'autors per al model adoptat.



**Figura 17.1** Propostes de diferents autors de modificació del model. (Torres 2001)

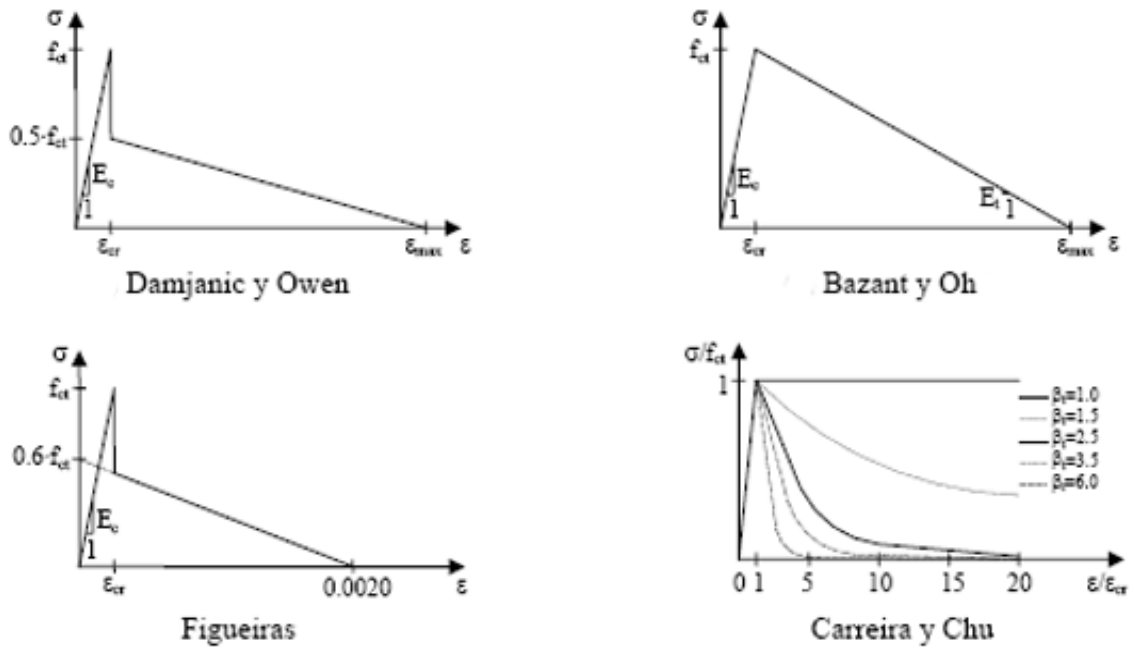


Figura 17.2 Propostes de diferents autors de modificació del model. (Torres 2001)

### 3.4 Determinació dels coeficients $\alpha_1$ i $\alpha_2$

Per determinar els coeficients  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  hem hagut de procedir de diferent manera, ja que no signifiquen el mateix i cada variable té el seu propi mètode d'obtenció.

#### 3.4.1 Coeficient $\alpha_1$

S'ha pogut determinar experimentalment en els assajos que si no tenim esforç axial a l'element un valor de  $\alpha_1 = 0,4$  té uns resultats correctes i acceptables per als casos estudiats. Hem de tenir en compte que  $\alpha_1$  equival al pendent que pren la corba de la curvatura mitjana, un cop em superat el moment de fissuració. S'ha pogut comprovar també que la presència d'esforç axial provoca una reducció en l'efecte del *Tension-Stiffening*. Podem determinar una equació per escollir  $\alpha_1$  basada en estudis paramètrics realitzats amb anterioritat.

$$\alpha_1 = 0,4 \left( 1 - \frac{N}{f_{ct} \cdot A} \right) \geq 0 \quad \text{on } N \text{ és l'esforç axial a l'element.} \tag{3.9}$$

### 3.4.2 Coeficient $\alpha_2$

Per determinar el valor més adequat de  $\alpha_2$  hem d'utilitzar un procés iteratiu i anar creant corbes per a diferents valors de  $\alpha_2$ . Mitjançant un ajust per mínims quadrats escollirem el valor que proporcioni una corba més ajustada a la de referència. Aquest procés el realitza el programa C2gen, desenvolupat per el departament d'enginyeria mecànica de la UDG, i que ens permet trobar el valor de  $\alpha_2$  i determinar els diagrames moment – curvatura per a diferents seccions a estudiar incorporant el model del *Tension-Stiffening*. Així podrem observar la influència d'aquests valors i comparar la corba amb la del model de referència obtenint d'aquesta manera el valor de  $\alpha_2$  més adequat per cada cas. També caldrà avaluar la influència que té el moment de servei  $M_s$  en l'ajust i la relació  $M_s/M_{cr}$ .

En el present treball s'ha volgut determinar la sensibilitat d'aquest procés i estudiar quina influència pot tenir en el resultats de l' $\alpha_2$  la variació del moment de servei. S'haurà de comprovar si el valor varia en funció de si escollim com a límit el moment de servei o el moment últim.

S'han calculat dos moments de servei diferents, l'un prové del model que proposa la ACI 440.1R-06 amb un factor de reducció del 1,4 que és el terme mig amb que es majoren les càrregues que si apliquen, el segon model del que es proposa a Newhook et al. (2002)

### 3.5 Influència de $\alpha_1$ i $\alpha_2$ en els gràfics moment – curvatura

A la Figura 8 podem veure com es comporta el model adoptat comparant-lo amb el de referència si utilitzem diferents valors de  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . S'ha considerat una secció rectangular amb les següents característiques, amplada  $b=300$  mm, un cantell de  $h=500$  mm i un cantell efectiu  $d=450$  mm. Pel que fa al formigó la resistència característica és de  $f_{ck} = 30$  MPa i la quantia del reforç és  $\rho = 0,005$ . En aquest cas com que el reforç és acer el mòdul elàstic és 200000 MPa.

**Taula 15.** Característiques dels elements reforçats amb acer, GFRP, AFRP i CFRP.

Figura	Amp.	Cantell	Cantell efectiu	Res. Comp. formigó	Res. tracció formigó	Mòdul elàstic formigó	Tipus de reforç	Res. Tracció reforç	Quantia	Moment de fiss.	Moment últim
	[mm]	[mm]	[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]		[MPa]	[%]	[kN.m]	[kN.m]
8	300	500	450	35	2,9	32009	ACER	500	0,5	37,67	78,27

Com s'observa a la Figura 18 els valor  $\alpha_1 = 0,4$  és el que millor s'ajusta al gràfic a l'inici de la fissuració un cop superat el moment de fissuració  $M_{cr}$ . El valor de  $\alpha_2$  tenen més

influència quan el moment aplicat a l'element supera en escreix el de fissuració. Com es veu, els valors de  $\alpha_1=0,4$  i  $\alpha_2=17,5$  són els que millor s'ajusten al model de referència que hem escollit i que proposa l'Eurocodi-2.

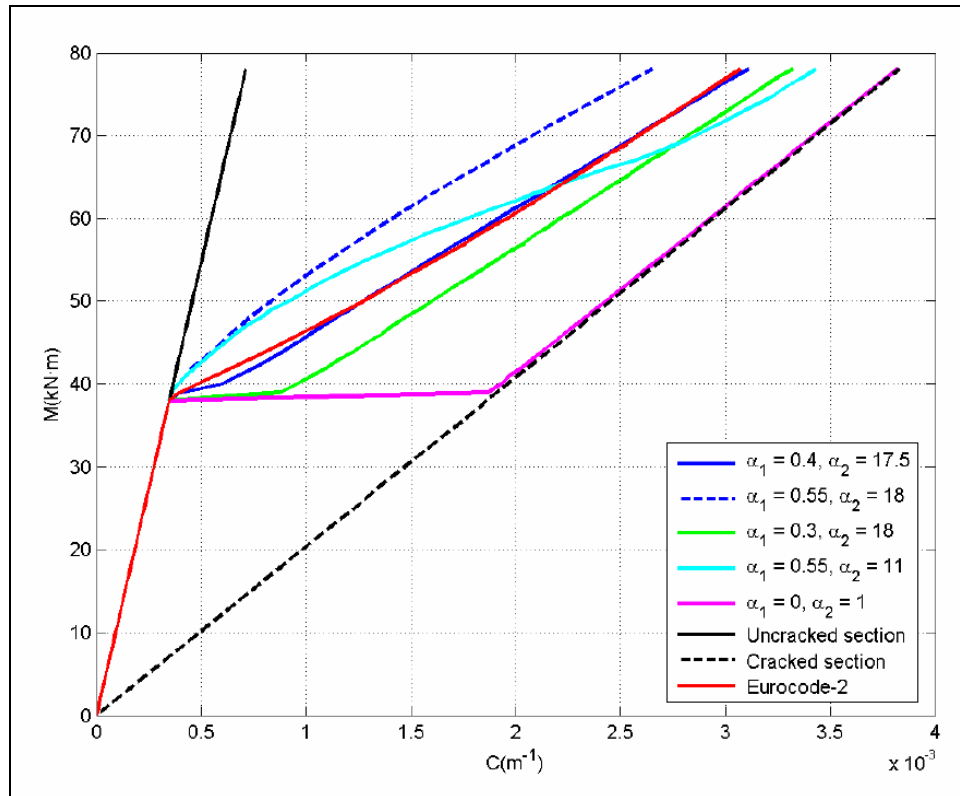
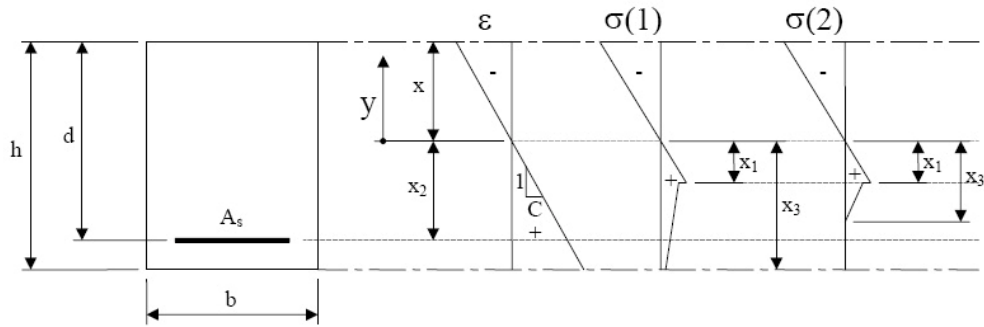


Figura 18 . Influència de  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . (Torres et al. 2004)

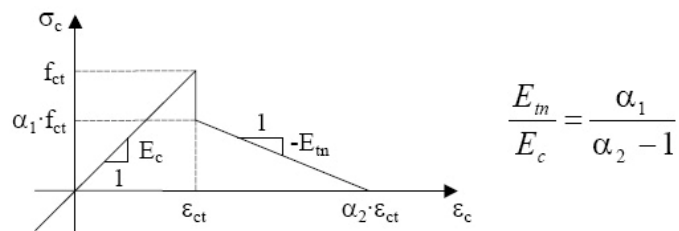
El model de referència es troba entre la curvatura que tindria l'element si la secció no arribes a fissurar mai, això equivaldria a  $f_{ct} = \infty$ . En el cas que  $f_{ct} = 0$  la secció seguiria la recta on la fissuració es completa des de l'inici, ja que la resistència a tracció del formigó seria nul·la. En cas que si tinguéssim en compte la resistència a tracció del formigó  $f_{ct} \neq 0$  però no volguéssim considerar la tensió els valors de les alfas a utilitzar són de  $\alpha_1 = 0$  i  $\alpha_2 = 1$ . Això es donaria si un cop superat el moment de fissuració la secció es fissures en tots els punts a la vegada.

### 3.6 Tension-stiffening del model adoptat

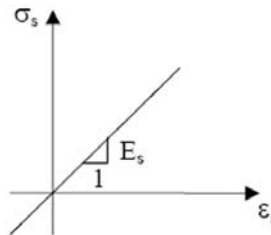
Partim d'una secció armada rectangular com la de la Figura 20. Prescindim de l'armadura comprimida perquè, com s'ha vist, que té escassa influència.



**Figura 20.** Secció rectangular amb les tensions i les deformacions de la secció.



**Figura 21.** Model adoptat pel formigó.



**Figura 22.** Model adoptat per l'acer.

Un cop haguem superat el moment de fissuració  $M_{cr}$  tindrem dos situacions possibles depenen de si la fibra inferior esta sotmesa a tracció o no. Les següents expressions han estat extretes de Torres (2001).

Tenint en compte que  $C$  és la curvatura i  $f_{ct}$  la resistència a tracció del formigó podem establir les següents relacions.

$$x_1 = \frac{f_{ct}}{E_c \cdot C} \qquad x_3 = h - x \qquad x_2 = d - x \qquad C \cdot d = \frac{f_{ct}}{E_c} \cdot \frac{1}{\frac{x_1}{d}} \qquad (3.10)$$

El diagrama de deformacions quedarà definit per  $C$  i  $x$ . Al haver-hi una relació fixa entre  $C$  i  $x_1$ , es desenvoluparan les equacions en funció de  $x_1$  i  $x$ . Si formulem les equacions d'equilibri i compatibilitat, i prenent la línia neutra com a referència obtenim:

$$\int E \cdot y \cdot dA = 0 \quad (3.11)$$

$$C = \frac{M}{\int E \cdot y \cdot dA} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon = -C \cdot y \quad (3.13)$$

On  $M$  és el moment flector aplicat i  $E$  és el mòdul secant dels materials,  $E_s$  per el reforç i  $E_c$  per la zona no fissurada del formigó. En cas de superar la resistència a tracció del formigó s'obtindrà:

$$\varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_c \leq \alpha_2 \varepsilon_{ct} \quad \sigma_c = -E_{tn} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{ct}) + \alpha_1 \cdot f_{ct} \quad (3.14)$$

$$E = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1}\right) \cdot E_c - \frac{\alpha_1 \cdot f_{ct}}{Cy} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}\right) \quad E = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} \quad (3.15)$$

Per la primer situació el desenvolupament de l'equació 3.11 ens condueix a:

$$\int_{-x_2}^{-x_1} \left[ -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1}\right) E_c - \frac{\alpha_1 \cdot f_{ct}}{Cy} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}\right) \right] b \cdot y \cdot dy + \int_{-x_2}^{-x_1} E_c \cdot b \cdot y \cdot dy + E_s \cdot A_s (-x_2) = 0 \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1}\right) \cdot \frac{E_c \cdot b}{2} \cdot \left[ (h-x)^2 - \frac{f_{ct}^2}{E_c \cdot C^2} \right] - \frac{b}{C} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1}\right) f_{ct} + \alpha_1 f_{ct} \left( h - x - \frac{f_{ct}}{E_c C^2} \right) + \frac{E_c b}{2} \left( x^2 - \frac{f_{ct}^2}{E_c^2 C^2} \right) \cdot \left( x^2 - \frac{f_{ct}^2}{E_c^2 C^2} \right) - E_s A_s (d-x) = 0 \quad (3.17)$$

Que si la plantejem en termes adimensionals:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1} \left[ \left(\frac{x_1}{d}\right)^2 - \left(\frac{h-x}{d} - \frac{x}{d}\right)^2 \right] - 2 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1} + \alpha_1\right) \cdot \left(\frac{x_1}{d}\right) \left(\frac{h-x}{d} - \frac{x}{d} - \frac{x_1}{d}\right) - \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{d}\right)^2 + 2n\rho \left(1 - \frac{x}{d}\right) = 0 \quad (3.18)$$

Per altre banda de l'equació 3.12 obtindrem:

$$\frac{f_{ct}}{E_c \cdot x_1} = \frac{M}{\int E \cdot y^2 \cdot dA} \quad (3.19)$$

Si operem obtindrem la segona equació adimensional

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1} \left[ \left( \frac{x_1}{d} \right)^3 - \left( \frac{h-x}{d} \right)^3 \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{d} \right) \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1} + \alpha_1 \right) \left[ \left( \frac{x_1}{d} \right) - \left( \frac{h-x}{d} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{d} \right)^3 + \frac{1}{3} \left( \frac{x_1}{d} \right)^3 + n\rho \left( 1 - \frac{x_1}{d} \right) - m \left( \frac{x_1}{d} \right) = 0 \quad (3.20)$$

$$m = \frac{1}{f_{ct}} \frac{M}{bd^2} = \frac{1}{r_{cr}} \cdot \frac{W}{bd^2} \quad (3.21)$$

On  $W$  és el mòdul resistent i  $r_{cr}$  és la relació entre el moment de fissuració  $M_{cr}$  i el moment aplicat  $M$ .

Si prenem un valor aproximat de  $W$ , la equació 3.21 quedarà com:

$$W \approx \frac{1}{6} bh^2 \quad m = \frac{1}{r_{cr}} \frac{1}{6 \left( \frac{d}{h} \right)^2} \quad (3.22)$$

Així, doncs, el comportament seccional queda definit per el sistema d'equacions no lineal 3.16 i 3.18.

La segona situació es presenta quan es compleix:

$$x_3 < h - x$$

$$x_1 x_2 < h - x \quad \rightarrow \quad \frac{x_1}{d} < \frac{1}{\alpha_2} \left( \frac{h-x}{d} \right) \quad (3.23)$$

El desenvolupament de l'equació 3.11 condueix a:

$$-\left(\frac{x_1}{d}\right)^2 \alpha_1(\alpha_2 - 1) + \left(\frac{x}{d}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{d}\right)^2 - 2np\left(1 - \frac{x}{d}\right) = 0 \quad (3.24)$$

Mentre que de l'equació 3.12 obtenim:

$$\left(\frac{x_1}{d}\right) \alpha_1(\alpha_2 - 1) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \alpha_2\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{d}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{d}\right)^3 + np\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 - m\left(\frac{x_1}{d}\right) = 0 \quad (3.25)$$

On les equacions 3.24 i 3.25 defineixen el comportament seccional.

Si establim un valor per la relació  $f_{ct}/E_c$ , es poden obtenir diagrames moment-curvatura adimensionals  $1/r_{cr}$  en funció de  $C \cdot d$  amb la intervenció del paràmetres seccionals  $d/h$  i  $\rho$ .

### 3.7 Tension-stiffening del model de referència segons Eurocodi-2

La curvatura mitjana deguda a la interpolació de curvatures que marca l'equació 3.2 queda segons marca l'Eurocodi 2 com:

$$C_m = \frac{M}{E_c \cdot I_1} \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 + \frac{M}{E_c \cdot I_2} \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2\right] \quad \text{si } M > M_{cr} \quad (3.26)$$

on  $I_1$  i  $I_2$  són les inèrcies corresponents als estats I i II respectivament, segons la secció estigui fissurada o no.

$$x_1 = \frac{f_{ct}}{E_c \cdot C} \quad r_{cr} = \frac{M_{cr}}{M} \quad (3.27) \text{ i } (3.28)$$

Substituint les equacions (3.28 i 3.27) a la (3.26) ens queda:

$$\frac{x_1}{d} = \frac{r_{cr}}{\frac{W \cdot d}{I_1} \cdot r_{cr}^2 + \frac{W \cdot d}{I_2} \cdot (1 - r_{cr}^2)} \quad (3.29)$$

Si aïllem  $r_{cr}$ :

$$r_{cr} = \frac{\frac{d}{x_1} + \sqrt{\left(\frac{d}{x_1}\right)^2 - 4 \left(\frac{W \cdot d}{I_1} - \frac{W \cdot d}{I_2}\right) \cdot \frac{W \cdot d}{I_2}}}{2 \cdot \left(\frac{W \cdot d}{I_1} - \frac{W \cdot d}{I_2}\right)} \quad (3.30)$$



Que ens permet obtenir el valor  $r_{cr}$  per un cert valor de  $x_1/d$  del model a ajustar. Per la secció no fissurada es prenen els valors:

$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \quad W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 \quad (3.31) \text{ i } (3.32)$$

essent

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot b \cdot x^3 + n \cdot A_s \cdot (d - x)^2 \quad \frac{x}{d} = n \cdot \rho \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho}} \right) \quad (3.33) \text{ i } (3.34)$$

Obtenim les següents expressions.

$$\frac{Wd}{I_1} = 2 \cdot \left( \frac{d}{h} \right) \quad \frac{Wd}{I_2} = \frac{1}{2 \left( \frac{d}{h} \right)^2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{x}{d} \right)^3 + n \rho \left( 1 - \frac{x}{d} \right)^2 \right]} \quad (3.35) \text{ i } (3.36)$$

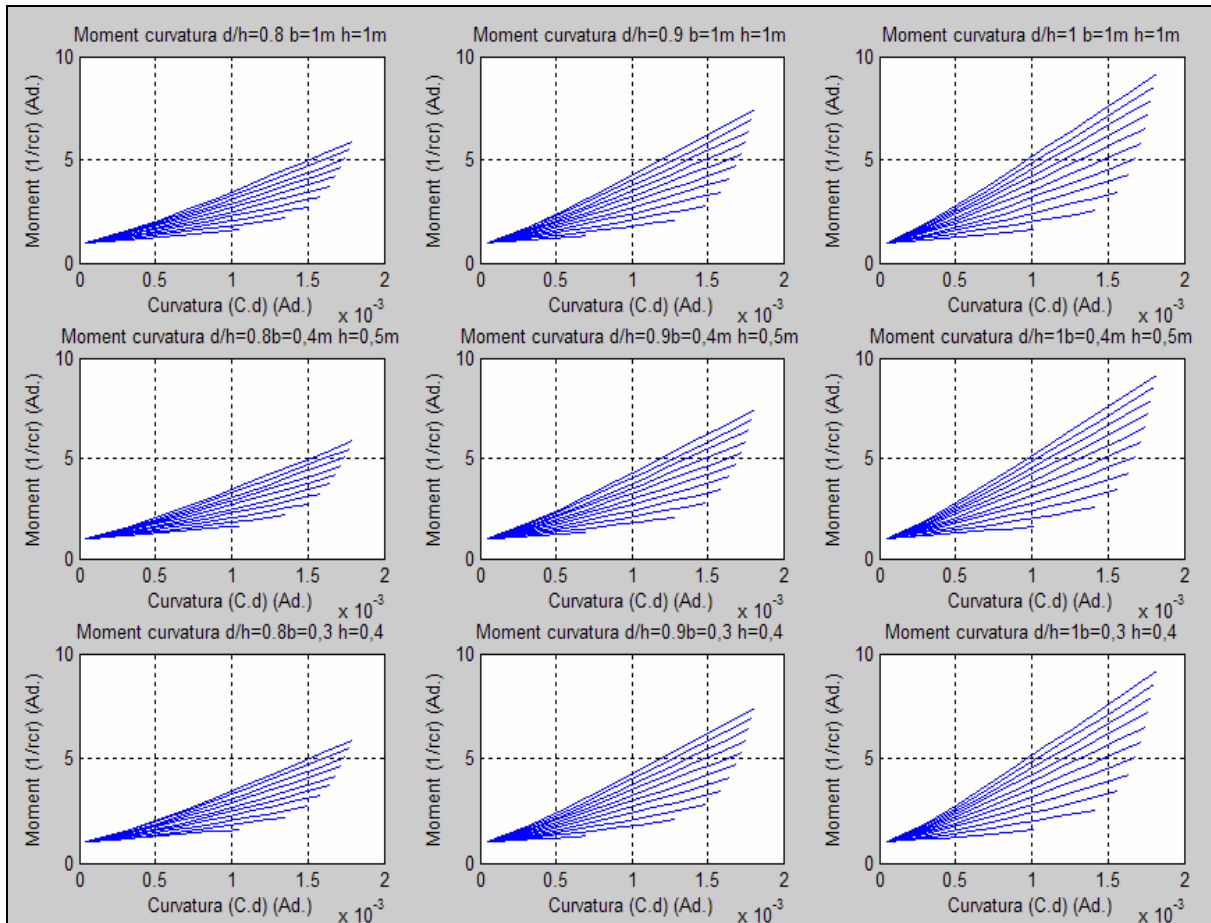
Com podem observar a les expressions els paràmetres que intervenen són  $d/h$  i  $\rho$ .

### 3.7.1 Corbes d'exemple moment – curvatura adimensionals

Mitjançant les equacions anteriors podem determinar diagrames moments-curvatura adimensionals per varies seccions amb la finalitat de comprovar si es comporten de la mateixa forma. A la Figura 9 tenim nou gràfics, a l'eix de les Y de cada gràfic es representa el moment adimensional  $M/M_{cr}$ , per això les corbes parteixen del moment = 1, perquè és el punt on  $M=M_{cr}$ . A l'eix de les X tenim les curvatures adimensionals, per trobar la curvatura real de cada secció només caldria dividir-la pel cantell efectiu.

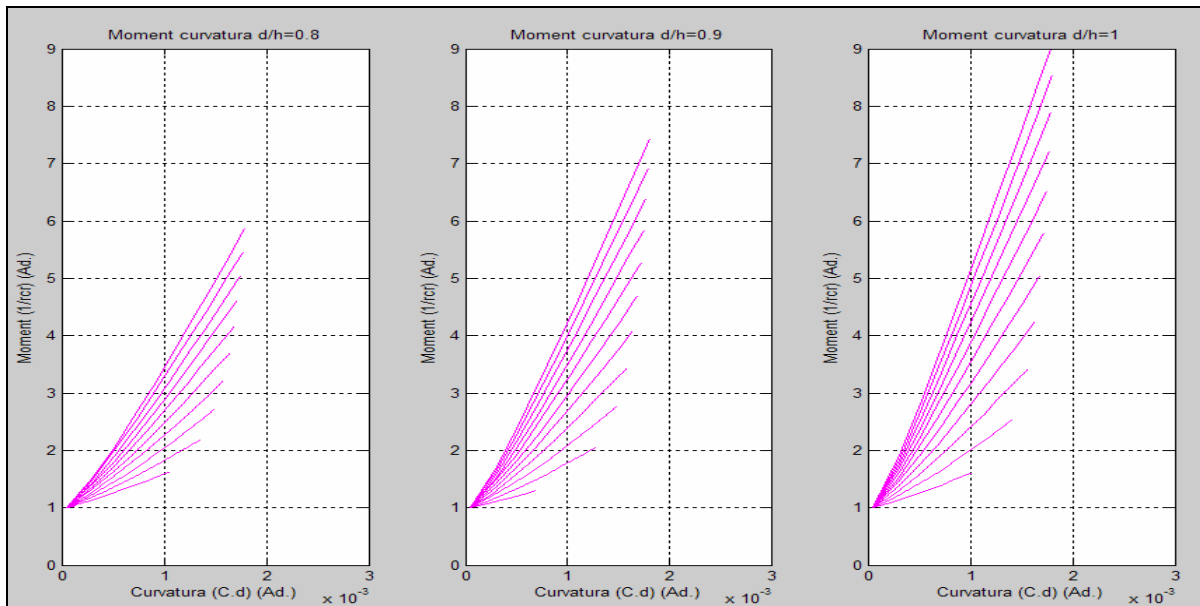
Observant la Figura 9 tenim, situat en files, tres seccions diferents, la primera d'amplada 1m i cantell 1m, a la segona fila una secció amb 0,4m d'amplada i 0,5 de cantell i a la tercera fila la secció fa 0,3m d'amplada per 0,4 de cantell. Situat en columnes tenim les relacions entre el cantell efectiu i el cantell  $d/h$ , que van des de  $dh=0,8$  per la primera columna a  $dh=1$  per la última. Dins de cada gràfic les diferents corbes representen una quantia de reforç, en aquest cas les quanties van de 0,3% a 2%. És lògic que a major quantia de reforç major serà la resistència de la secció, per tant, les corbes que arriben a valors de moments adimensionals  $M_u/M_{cr} \approx 9$  per  $d/h=1$ , de  $M_u/M_{cr} \approx 7$  per  $d/h=0,9$  i  $M_u/M_{cr} \approx 5$  per  $d/h=0,8$  corresponent a quanties del 2%. I les corbes inferiors que sobrepassen lleugerament el moment de fissuració corresponen a quanties del 0,3%.

Si ens fixem bé en els gràfics només s'aprecien diferències entre ells quan variem la relació entre cantells  $d/h$ , ja que per un mateix valor de  $d/h$  les corbes són independents de l'amplada i el cantell. Per aquest motiu en la Figura 23 s'han sobreposat els resultats obtenint una sola figura on la única variable es  $d/h$ . Els moments últims s'han calculat segons l'Eurocodi-2 per al cas de l'acer i segons la ACI 440.1R-06 per al cas del FRP, tal com es mostra a l'annex A del present document.



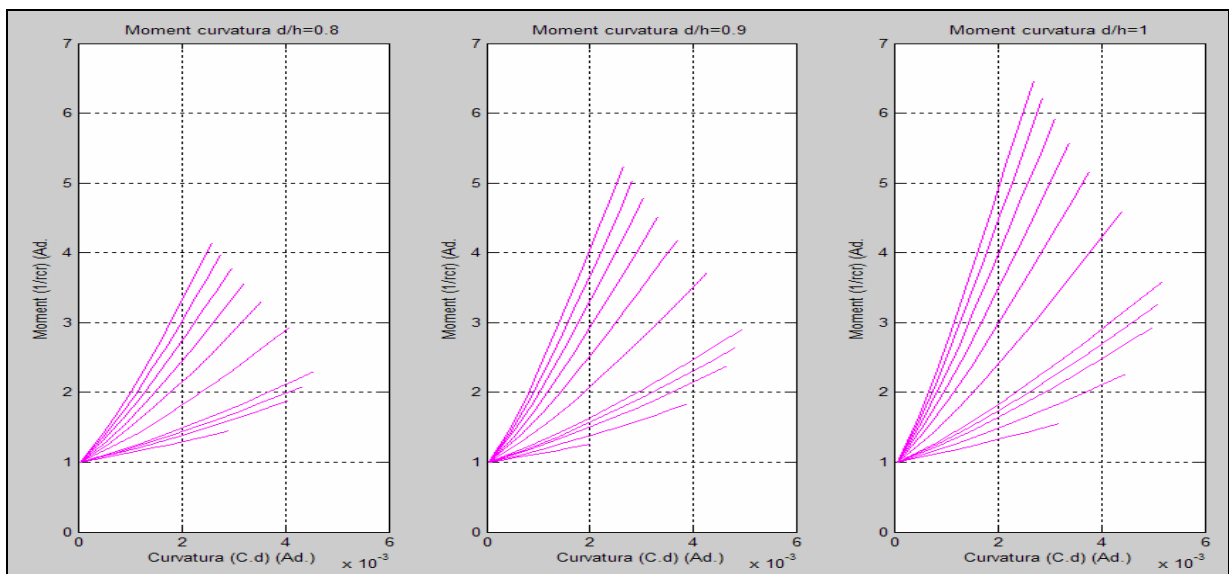
**Figura 23.** Diagrames moment – curvatura per diverses seccions

A la Figura 24 hem dibuixat tres possibles valors de  $d/h$  que són:  $d/h=0.8$ ,  $d/h=0.9$  i  $d/h=1$ , que correspondria al cas de dibuixar en un mateix gràfic cada columna de la Figura 23. Es pot comprovar com la resistència augmenta al disminuir el recobriment, ja que les barres de reforç es trobaran més properes a la superfície inferior. El tipus de formigó es HA-25 i s'ha utilitzat acer com a reforç amb quanties de 0,3% a 2%. El reforç té  $f_{yk} = 500$  MPa i  $E_c=200000$  MPa.



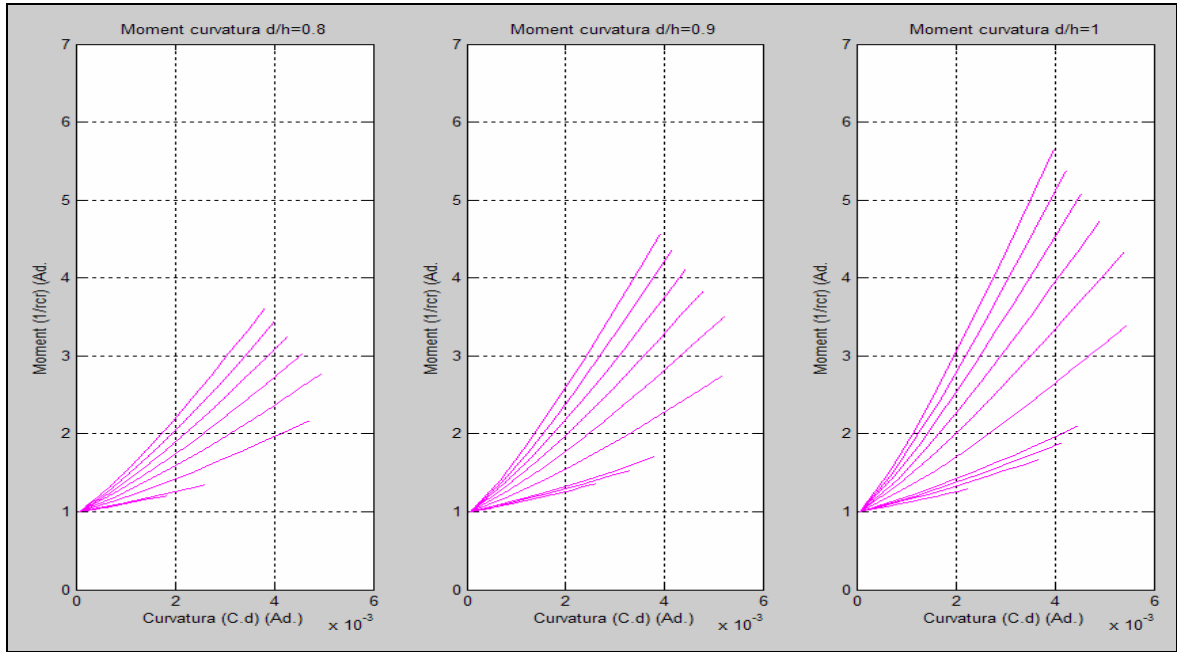
**Figura 24.** Diagrames moment – curvatura sobreposats utilitzant acer com a reforç.

A les Figures 25 i 26 tenim diagrames moment-curvatura adimensionals per GFRP amb disseny ELS i per a diferents resistències del formigó, de 25 MPa i 60 MPa, amb les següents característiques per al Gràfic 11, una  $f_c=25$  MPa,  $E_c=40000$  MPa,  $f_{tu}=550$  MPa i una quantia de reforç entre el 0,37% i el 4%.



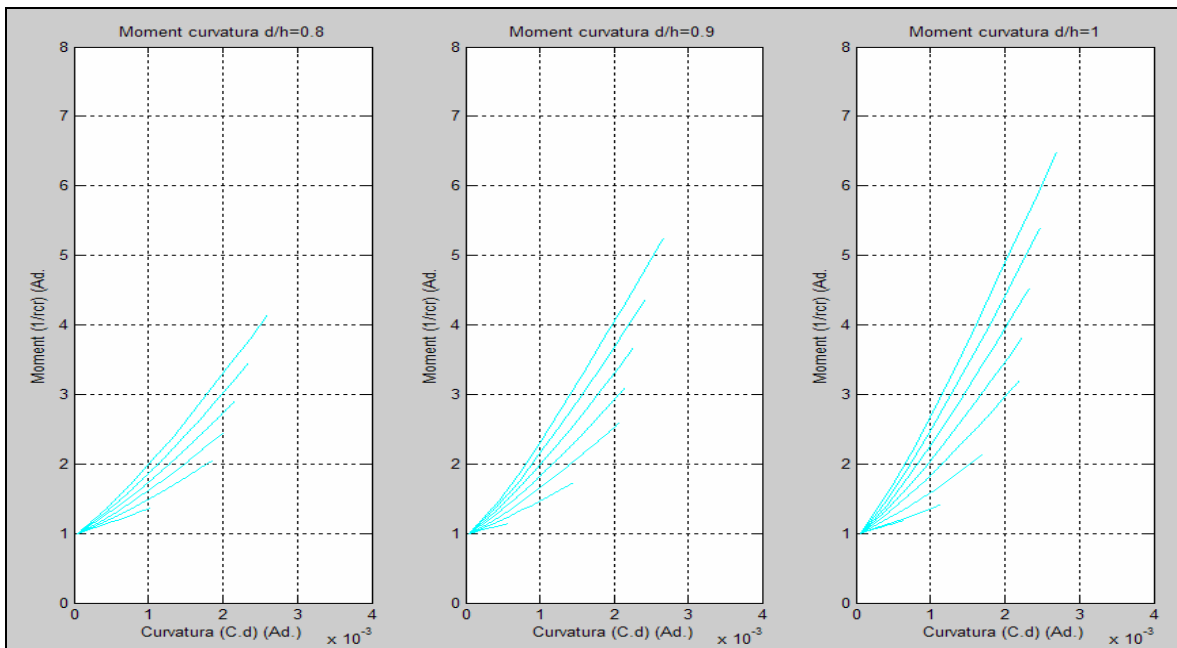
**Figura 25.** Diagrames moment – curvatura GFRP per formigó amb  $f_c = 25$  MPa

Tenim les següents característiques per al Gràfic 12, una  $f_c=60$  MPa,  $E_c=40000$  MPa,  $f_{tu}=550$  MPa i una quantia de reforç entre el 4% i el 0,37%.

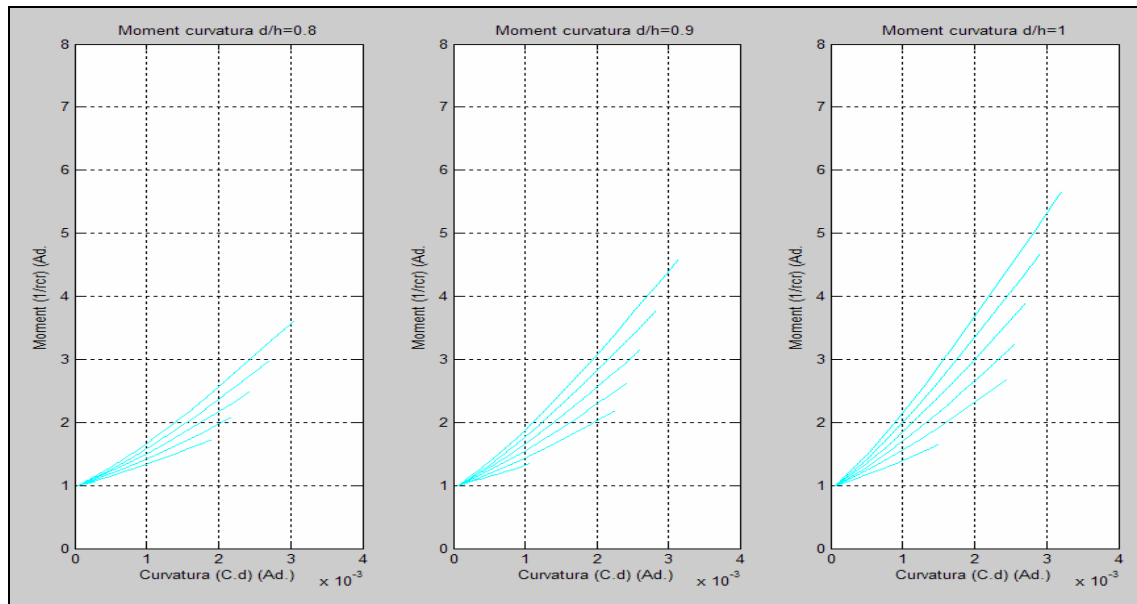


**Figura 26.** Diagrames moment – curvatura GFRP per formigó amb  $f_c = 60$  MPa

A les Figures 27 i 28 tenim diagrames moment-curvatura adimensionals per GFRP utilitzant formigons de diferent resistència, de 25 MPa i 60 MPa, amb disseny segons Newhook et al. (2002), on el moment de servei està limitat per la curvatura dimensional al voltant del 0,002 [Ad] tal i com es pot observar.



**Figura 27.** Diagrames moment – curvatura GFRP per formigó amb  $f_c = 25$  MPa



**Figura 28.** Diagrames moment – curvatura GFRP per formigó amb  $f_c = 60$  MPa

### Anàlisi dels resultats de les gràfiques

A les Figures anteriors observem com les curvatures es van reduint a mesura que disminueix la quantia del reforç i s'apropen cada vegada més al valor de moment igual a 1, que equival a dir, que s'apropen al moment de fissuració  $M_{cr}$ . Al augmentar la resistència característica del formigó la curvatura adimensional augmenta i el moment adimensional es redueix. Aquest efecte es degut a l'augment que pateix el moment de fissuració  $M_{cr}$  i per tant la relació  $M_u/M_{cr}$  disminueix i provoca que la curvatura adimensional augmenti.

Al mateix temps s'observa clarament com al disminuir el cantell efectiu i augmentar el recobriment mecànic el moment de servei queda reduït dràsticament en els gràfics, observant-se una reducció de la rigidesa de l'element i, per tant, una disminució en el pendent de les corbes. La màxima rigidesa i, com a conseqüència, la resistència de l'element major s'obté al col·locar les armadures de reforç sense recobriment mecànic, aprofitant així, tot el cantell de l'element.

Les gràfiques on hem utilitzat com a reforç l'acer el moment adimensional augmenta exponencialment respecte la curvatura, en el cas d'utilitzar reforços de FRP es produeix un tall degut al canvi de criteri que s'utilitza en el càlcul, això equivaldria a que la secció pateix un canvi de domini ja que per a quanties de reforços baixes trencarà per el reforç i quan utilitzem quanties de reforç elevades el trencament es produirà per el formigó a compressió.

## 4. Generació dels valors $\alpha_2$

Amb les equacions anteriors podem determinar els diagrames Moment – curvatura adimensionals ( $C.d, r_{cr}$ ) de l'annex D. On la curvatura dels elements només depèn de la quantia de reforç i de la relació entre el cantell  $h$  i el cantell efectiu  $d$ .

Per obtenir els valors de  $\alpha_2$ , com que  $C.d$  depèn de  $f_{ct}$  i  $E_c$  és per això que hem de tenir en compte el rang de formigons que utilitzem en l'estudi que és de HA-25, HA-30, HA-35, HA-50 i HA-60. Els valors de  $f_{ct}$  i  $E_c$  els obtenim amb les equacions 4.1 i 4.4 que proposa l'Eurocodi-2.

Com que els valors de  $f_{ct}$  dependrà de cada tipus de formigó, podem determinar un valor mig amb l'equació 4.1.

$$f_{ct,mig} = 1,4 \cdot \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.1)$$

De tota manera per determinar la influència que té la resistència a tracció en el càlcul de les alfes podem establir un rang de  $f_{ct,max}$  i  $f_{ct,min}$  amb les equacions 4.3 i 4.2.

$$f_{ct,min} = 0,95 \cdot \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.2)$$

$$f_{ct,max} = 1,85 \cdot \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.3)$$

$$E_c = 21500 \cdot \left( \frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.4)$$

Mitjançant l'algorisme C2gen exposat a l'apartat 3.4.2 del present treball, generem els valors de  $\alpha_2$  per cada tipus de formigó i reforç, utilitzant aquell valor de  $\alpha_2$  que proporciona una suma de diferències menor entre la corba de referència i la que obtenim amb les alfes.

La ruptura en elements reforçats amb acer va acompanyat de grans curvatures. Aquesta curvatura es major quan la falla es produeix per el reforç en tensió. (en seccions

subreforçades) i es redueix dràsticament quan la ruptura es produeix per la falla del formigó (seccions sobreforçades). Per aquesta raó el codis han recomanat que els elements a flexió es dissenyin subreforçadament, o el que és el mateix, que la quantia del reforç es trobi substancialment per sota la quantia balancejada. En el cas del FRP les seccions s'han de dissenyar sobreforçades per assegurar-nos que la ruptura es produeixi per la falla del formigó i no per la ruptura de les barres de reforç.

En el present treball s'ha volgut determinar si el moment de servei influeix en el resultat de  $\alpha_2$  i s'han comparat els valors que obtenim determinant el  $M_s$  per dos mètodes diferents. El primer es considerant una mitjana dels coeficients que proposa la ACI 440.1R-06 que entre la minoració de  $\Phi$  que hem de multiplicar per el moment capaç de resistir la secció i la majoració de les càrregues ( $1,2 \cdot \dots + 1,6 \cdot \dots$ ) que en mitjana s'ha utilitzat 1,4 obtenim un  $M_s$  al voltant del 40% del  $M_u$ .

El segon mètode es considerant el factors  $M_u/M_s$  que proposa Newhook et al (2000). En aquest article s'argumenta com en els elements de formigó reforçats amb FRP el disseny vindrà determinat per l'amplada de fissura, i la fletxa, degut al baix mòdul elàstic que ofereixen els reforços i no pas per la resistència de les armadures, que és major en els FRP que en l'acer.

El moment en servei, doncs, bé determinat per la fletxa que vulguem obtenir un cop l'element entri en càrrega. Però necessitaríem saber la longitud de l'element per determinar la fletxa que tindria, GHALI diu que realment si podem controlar la curvatura podrem controlar la fletxa i la fissura, ja que, la curvatura serà la que ens ho provocarà. És per aquest motiu que hem de limitar la tensió de les barres a una petita part de la seva resistència per prevenir d'excedir-nos en la fissuració i la fletxa.

Les barres de FRP tenen major resistència a la tracció  $f_{tu}$ , que la del acer  $f_y$ . De tota manera, degut a que el mòdul elàstic és notablement inferior, aquesta resistència superior no es pot aprofitar completament. Això succeeix, degut a que és necessari controlar l'amplada de la fissura a la zona traccionada. Els principals paràmetres que influeixen en la fissuració són l'adherència entre les barres i el formigó, la separació entre barres, i principalment, la deformació del reforç. La ACI 318-99 (1999) limita l'amplada de la fissura a 0,4 mm per a totes les condicions d'exposició. Si pensem en el factor de càrrega que suporten els reforços d'acer esta al voltant del 0,85/1,38, és a dir aproximadament un  $0,6 \cdot f_y$ . Alguns manuals de càlcul permeten utilitzar aquest paràmetre per controlar la fissuració. Per a reforços d'acer  $f_y=400$  MPa, la deformació del reforç correspon a  $1,2 \cdot 10^{-3}$  [Ad].

Degut a que les barres de FRP no presenten corrosió, la ACI 440.1R-06 permeten fissuracions entre 1,8 i 1,5 vegades superiors a la que es permet a l'acer en les mateixes condicions. GHALI utilitza un terme mig (5/3). I limita la curvatura a  $(5/3) \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 2,0 \cdot 10^{-3}$ . Aquesta curvatura correspon a tensions de 80, 160 i 300 MPa, per el GFRP, l'AFRP i el CFRP respectivament. Per tant, si en el disseny no sobrepassem aquests valors no caldrà calcular si es compleixen els criteris de deformació.

A la Taula 16.1 es mostren el coeficients de reducció de la resistència que extraiem de considerar un disseny ELU menys el coeficient de reducció 1,4 que és una mitjana del que la ACI 440.1R-06 considera per majorar les carregues. Per trobar aquests coeficients de reducció s'ha determinat el valor de  $\Phi$  per cada quantia, i hem fem la operació  $1,4 / \Phi$  per poder determinar el factor de reducció global. Obtenint valors entre 2,15 i 2,55, això suposa que la secció en servei treballi a l'entorn del 40% de la seva resistència a moment últim. Per tant la relació entre el moment últim i el moment de servei queda entre 2,15 i 2,55.

A la Taula 16.2 es mostren els coeficients de reducció de la resistència que es proposen a Newhook et al. (2002) en funció de la quantia del reforç i la resistència a compressió del formigó per cada tipus de reforç de FRP que tenim, el GFRP, els AFRP i el CFRP. Val a dir que al Newhook et al. (2002) no es considera el factor de reducció ambiental  $C_E$  ni el factor de minoració del moment nominal  $\Phi$ . Per aquesta raó els coeficients s'obtenen directament sense cap tipus d'operació. En aquest cas, el coeficient és la relació entre el moment últim i el moment de servei.

Per poder obtenir les següents gràfiques s'ha partit de la taula 4 del Newhook et al (2000) i s'han realitzat les interpolacions i extrapolacions necessàries per tal d'obtenir tot els rangs de valors per a cada quantia i per a cada tipus de formigó. El resultat d'aquestes operacions es mostren als Gràfics 14, 15 i 16 i a les Taules 16.1 i 16.2.



Taula 16.1. Valors de  $M_u/M_s$  que proposa ACI 440.1R-06 segons la el tipus de formigó.

GFRP									
$f_c$ 25		$f_c$ 30		$f_c$ 35		$f_c$ 50		$f_c$ 60	
Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$
0,37	2,55	0,40	2,55	0,43	2,55	0,53	2,55	0,60	2,55
0,54	2,55	0,60	2,55	0,67	2,55	0,86	2,55	0,99	2,55
0,70	2,55	0,80	2,55	0,90	2,55	1,19	2,55	1,38	2,55
0,79	2,55	0,90	2,55	1,01	2,55	1,34	2,55	1,57	2,55
0,88	2,55	1,00	2,55	1,13	2,55	1,50	2,51	1,75	2,45
1,44	2,15	1,50	2,15	1,56	2,20	1,75	2,33	1,88	2,37
2,00	2,15	2,00	2,15	2,00	2,15	2,00	2,17	2,00	2,29
2,50	2,15	2,50	2,15	2,50	2,15	2,50	2,15	2,50	2,15
3,00	2,15	3,00	2,15	3,00	2,15	3,00	2,15	3,00	2,15
3,50	2,15	3,50	2,15	3,50	2,15	3,50	2,15	3,50	2,15
4,00	2,15	4,00	2,15	4,00	2,15	4,00	2,15	4,00	2,15

AFRP									
$f_c$ 25		$f_c$ 30		$f_c$ 35		$f_c$ 50		$f_c$ 60	
Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$
0,18	2,55	0,19	2,55	0,21	2,55	0,25	2,55	0,28	2,55
0,24	2,55	0,27	2,55	0,29	2,55	0,38	2,55	0,44	2,55
0,30	2,55	0,34	2,55	0,38	2,55	0,51	2,55	0,59	2,23
0,38	2,55	0,42	2,55	0,46	2,52	0,59	2,55	0,67	2,15
0,46	2,32	0,50	2,42	0,54	2,33	0,67	2,46	0,75	2,15
0,60	2,15	0,75	2,15	0,90	2,15	1,33	2,15	1,63	2,15
0,75	2,15	1,00	2,15	1,25	2,15	2,00	2,15	2,50	2,15
1,21	2,15	1,50	2,15	1,79	2,15	2,67	2,15	3,25	2,15
1,67	2,15	2,00	2,15	2,33	2,15	3,33	2,15	4,00	2,15
2,30	2,15	2,68	2,15	3,05	2,15	4,16	2,15	4,90	2,15
2,94	2,15	3,35	2,15	3,76	2,15	4,98	2,15	5,80	2,15

CFRP									
$f_c$ 25		$f_c$ 30		$f_c$ 35		$f_c$ 50		$f_c$ 60	
Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$
0,10	2,55	0,11	2,55	0,12	2,55	0,14	2,55	0,16	2,55
0,15	2,55	0,17	2,55	0,19	2,55	0,24	2,55	0,28	2,55
0,20	2,55	0,23	2,55	0,26	2,55	0,34	2,55	0,39	2,55
0,24	2,55	0,27	2,55	0,30	2,55	0,39	2,55	0,45	2,55
0,27	2,46	0,30	2,55	0,33	2,55	0,43	2,49	0,50	2,42
0,30	2,33	0,40	2,21	0,50	2,15	0,80	2,15	1,00	2,15
0,33	2,22	0,50	2,15	0,67	2,15	1,17	2,15	1,50	2,15
0,58	2,15	0,75	2,15	0,92	2,15	1,42	2,15	1,75	2,15
0,83	2,15	1,00	2,15	1,17	2,15	1,67	2,15	2,00	2,15
1,21	2,15	1,40	2,15	1,59	2,15	2,17	2,15	2,55	2,15
1,58	2,15	1,80	2,15	2,02	2,15	2,67	2,15	3,10	2,15

**Taula 16.2.** Valors de  $M_u/M_s$  que es proposen a Newhook et al. (2002) segons la el tipus de formigó.

GFRP									
$f_c$ 25		$f_c$ 30		$f_c$ 35		$f_c$ 50		$f_c$ 60	
Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$
0,37	6,80	0,40	6,80	0,43	6,80	0,53	6,80	0,60	6,80
0,54	6,69	0,60	6,70	0,67	6,71	0,86	6,74	0,99	6,75
0,70	6,58	0,80	6,60	0,90	6,62	1,19	6,68	1,38	6,70
0,79	6,18	0,90	6,20	1,01	6,22	1,34	6,28	1,57	6,30
0,88	5,78	1,00	5,80	1,13	5,82	1,50	5,88	1,75	5,90
1,44	4,62	1,50	4,80	1,56	4,98	1,75	5,51	1,88	5,65
2,00	3,47	2,00	3,80	2,00	4,13	2,00	5,13	2,00	5,40
2,50	3,14	2,50	3,45	2,50	3,76	2,50	4,70	2,50	4,95
3,00	2,81	3,00	3,10	3,00	3,39	3,00	4,27	3,00	4,50
3,50	2,48	3,50	2,75	3,50	3,02	3,50	3,83	3,50	4,05
4,00	2,15	4,00	2,40	4,00	2,65	4,00	3,40	4,00	3,60

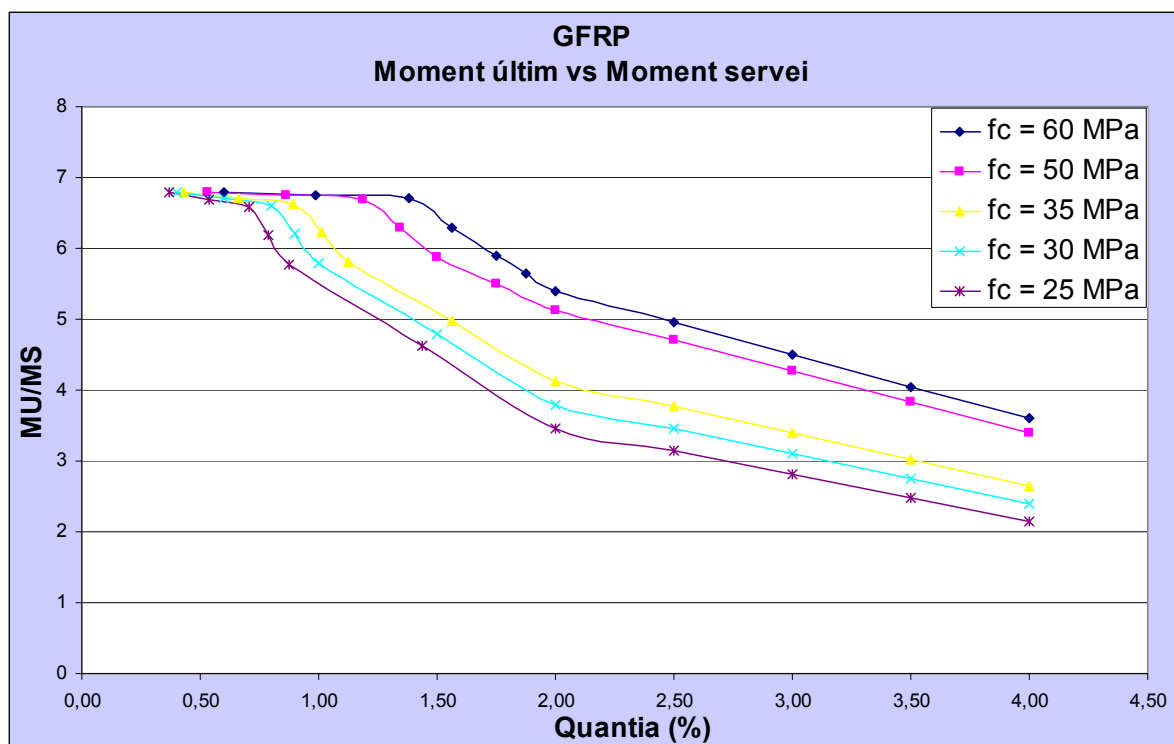
AFRP									
$f_c$ 25		$f_c$ 30		$f_c$ 35		$f_c$ 50		$f_c$ 60	
Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$
0,18	7,40	0,19	7,40	0,21	7,40	0,25	7,40	0,28	7,40
0,24	7,29	0,27	7,30	0,29	7,31	0,38	7,34	0,44	7,35
0,30	7,18	0,34	7,20	0,38	7,22	0,51	7,28	0,59	7,30
0,38	6,43	0,42	6,50	0,46	6,57	0,59	6,79	0,67	6,85
0,46	5,68	0,50	5,80	0,54	5,93	0,67	6,30	0,75	6,40
0,60	4,81	0,75	4,80	0,90	4,79	1,33	4,76	1,63	4,75
0,75	3,95	1,00	3,80	1,25	3,65	2,00	3,22	2,50	3,10
1,21	3,38	1,50	3,28	1,79	3,17	2,67	2,86	3,25	2,78
1,67	2,81	2,00	2,75	2,33	2,69	3,33	2,50	4,00	2,45
2,30	2,25	2,68	2,23	3,05	2,20	4,16	2,14	4,90	2,13
2,94	1,68	3,35	1,70	3,76	1,72	4,98	1,78	5,80	1,80

CFRP									
$f_c$ 25		$f_c$ 30		$f_c$ 35		$f_c$ 50		$f_c$ 60	
Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$	Quantia (%)	$M_u/M_s$
0,10	6,78	0,11	6,80	0,12	6,82	0,14	6,87	0,16	6,90
0,15	6,58	0,17	6,60	0,19	6,62	0,24	6,67	0,28	6,70
0,20	6,38	0,23	6,40	0,26	6,42	0,34	6,47	0,39	6,50
0,24	5,88	0,27	5,90	0,30	5,93	0,39	6,00	0,45	6,05
0,27	5,37	0,30	5,40	0,33	5,43	0,43	5,53	0,50	5,60
0,30	4,78	0,40	4,70	0,50	4,63	0,80	4,40	1,00	4,25
0,33	4,18	0,50	4,00	0,67	3,82	1,17	3,27	1,50	2,90
0,58	3,56	0,75	3,43	0,92	3,29	1,42	2,89	1,75	2,63
0,83	2,93	1,00	2,85	1,17	2,77	1,67	2,52	2,00	2,35
1,21	2,31	1,40	2,28	1,59	2,24	2,17	2,14	2,55	2,08
1,58	1,68	1,80	1,70	2,02	1,72	2,67	1,77	3,10	1,80

A les Figures 29, 30 i 31, s'observen el factors de reducció que es proposen a Newhook et al. (2002) per no sobrepassar la resistència a tracció dels reforços i obtenir fissures superiors a les permises. Podem comprovar com varia la relació entre el moment últim i el moment de servei en funció de la quantia de reforç que estiguem utilitzant i la resistència característica del formigó. Aquestes gràfiques provenen de les Taules 16.1 i 16.2 i permeten comprovar visualment la tendència dels coeficients depenen del tipus de reforç que vulguem utilitzar.

Com s'observa clarament es produeix una reducció molt considerable del coeficient a mesura que augmentem la quantia del reforç, això passa perquè al augmentar l'àrea de reforç la secció podrà suportar majors moments a flexió simple, però nosaltres volem mantenir la curvatura a l'entorn del 0,002 [Ad] per el tema de la fissuracions i les fletxes. Per el mateix motiu, un altre efecte que s'observa és que a major resistència a compressió del formigó per a una mateixa quantia també augmenta el coeficient.

Tenim tres Figures, la 29 pel GFRP, la 30 pel AFRP i la 31 pel CFRP.



**Figura 29.** Reducció de la relació  $M_U/M_S$  en reforços de GFRP.

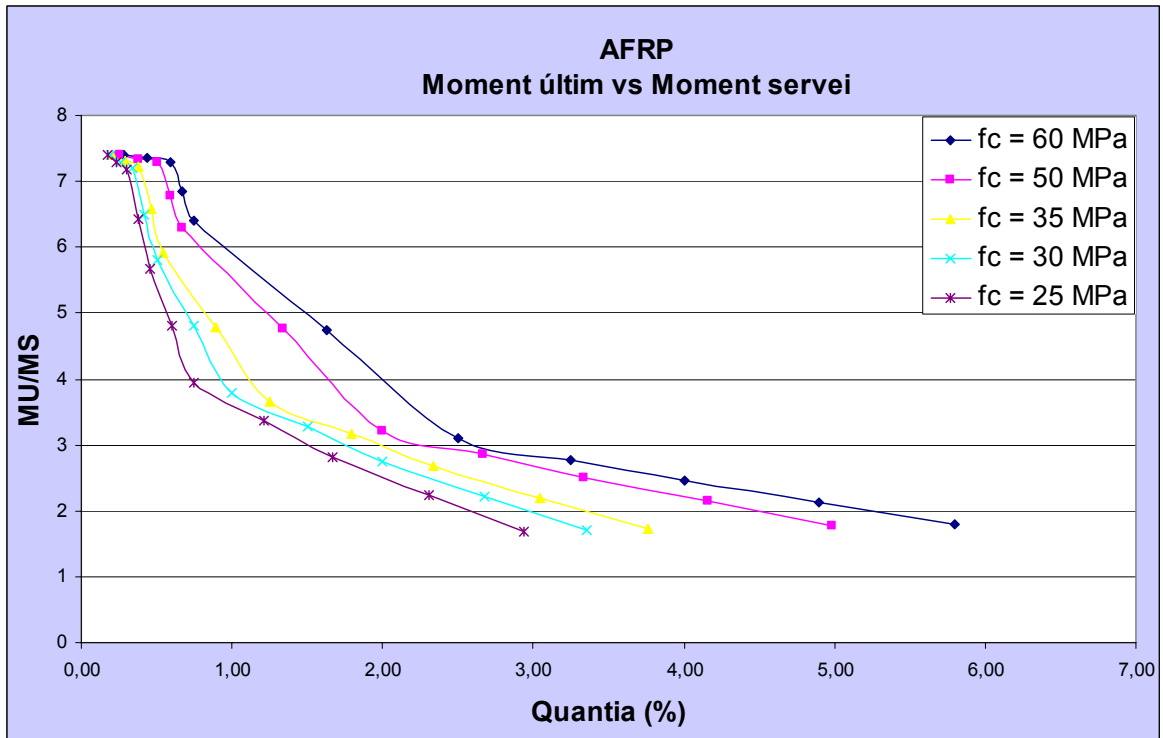


Figura 30. Reducció de la relació  $M_u/M_s$  en reforços de AFRP.

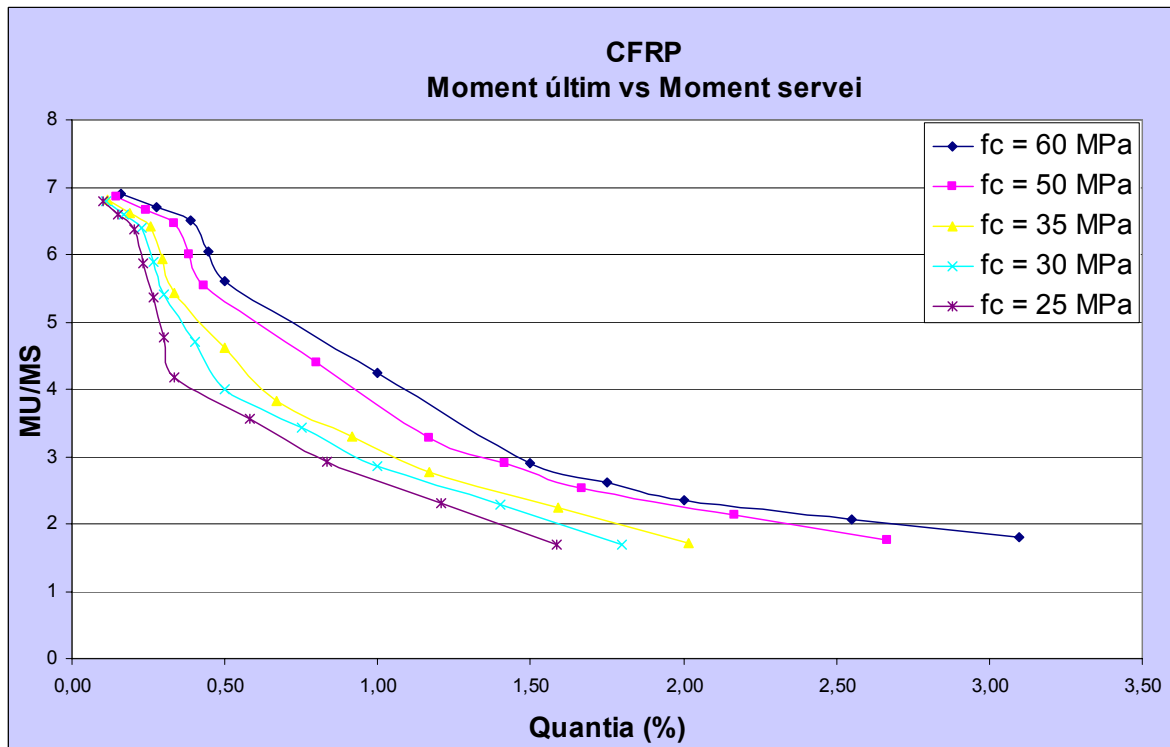


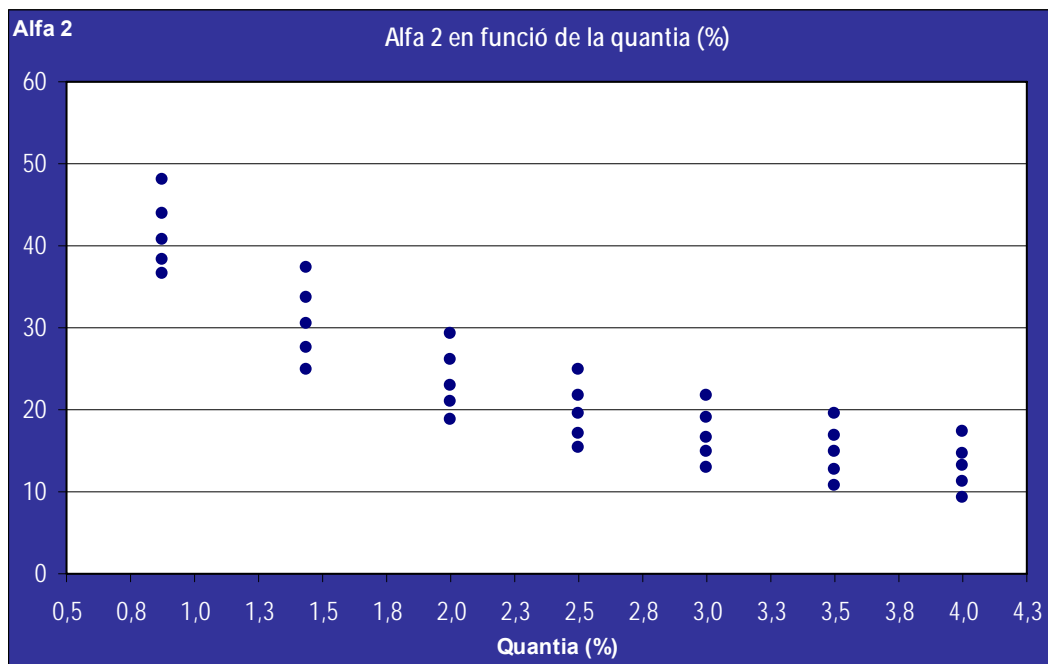
Figura 31. Reducció de la relació  $M_u/M_s$  en reforços de CFRP.

#### 4.1 Equacions per determinar la $\alpha_2$ amb reforços de GFRP.

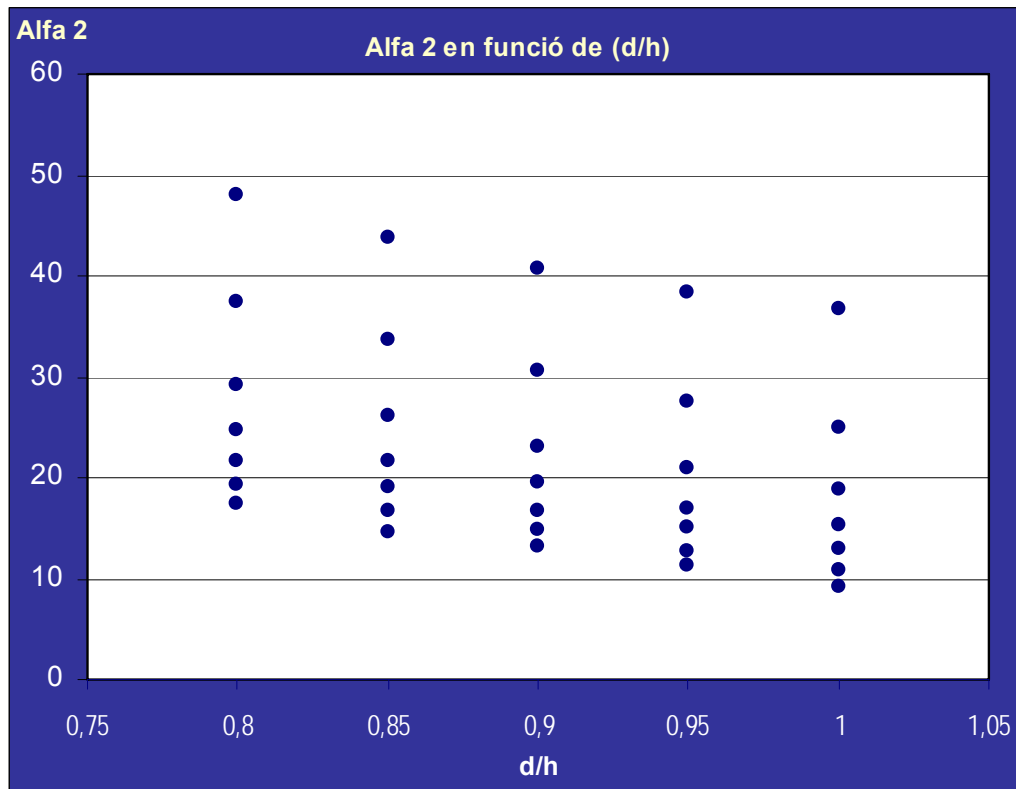
Utilitzant un programari com el Minitab Release 14 podem determinar una expressió per saber el valor  $\alpha_2$  que més s'ajusta en cada moment mitjançant regressió. Primer s'ha buscat una expressió que depengui només de  $d/h$  i  $\rho$ ,  $\alpha_2 = f(d/h, \rho)$ , posteriorment s'ha volgut estudiar l'influència de la  $f_{ct}$  del formigó.  $\alpha_2 = f(d/h, \rho, f_{ct})$ . Per aconseguir una expressió amb un nivell de fidelitat elevat s'ha optat per utilitzar una regressió quadràtica i adaptar-la a posteriori amb la introducció de la variable  $d/h$  les variacions del valor que es produeixen al canviar el cantell efectiu.

S'ha comprovat que passaria si utilitzéssim una regressió lineal amb les variables,  $d/h$  i  $\rho$ , i també en el cas d'utilitzar tres variables,  $d/h$ ,  $\rho$  i  $f_{ct}$ . Però els resultats obtinguts no han estat acceptables, ja que es produeix molt d'error a causa que la superfície a parametritzar segueix una tendència exponencial quan va disminuint la quantia.

A continuació es mostren els resultats obtinguts pels valors d'  $\alpha_2$  en funció de la quantia i de la relació entre el cantell i el cantell efectiu. En la Figura 32 i 33 es mostren els resultats pels casos on  $f_c = 25$  MPa, amplada  $b = 250$  mm, cantell  $d = 250$  mm i  $f_{ct} = 2,57$  MPa. agafant com a quanties l'interval entre [0,88% a 4%] i  $d/h$  entre [0,8 i 1] utilitzant com a reforç el GFRP.



**Figura 32.** Valors alfa 2 en funció de la quantia amb reforços de GFRP.



**Figura 33.** Valors alfa 2 en funció de  $d/h$  amb reforços de GFRP.

A les figures anteriors es poden observar tendències clarament definides per als diferents valors d' $\alpha_2$ . Es pot observar com els valors van disminuint de forma asimptòtica a mesura que augmenta la quantia i tendeixen a agrupar-se quan les quanties augmenten.

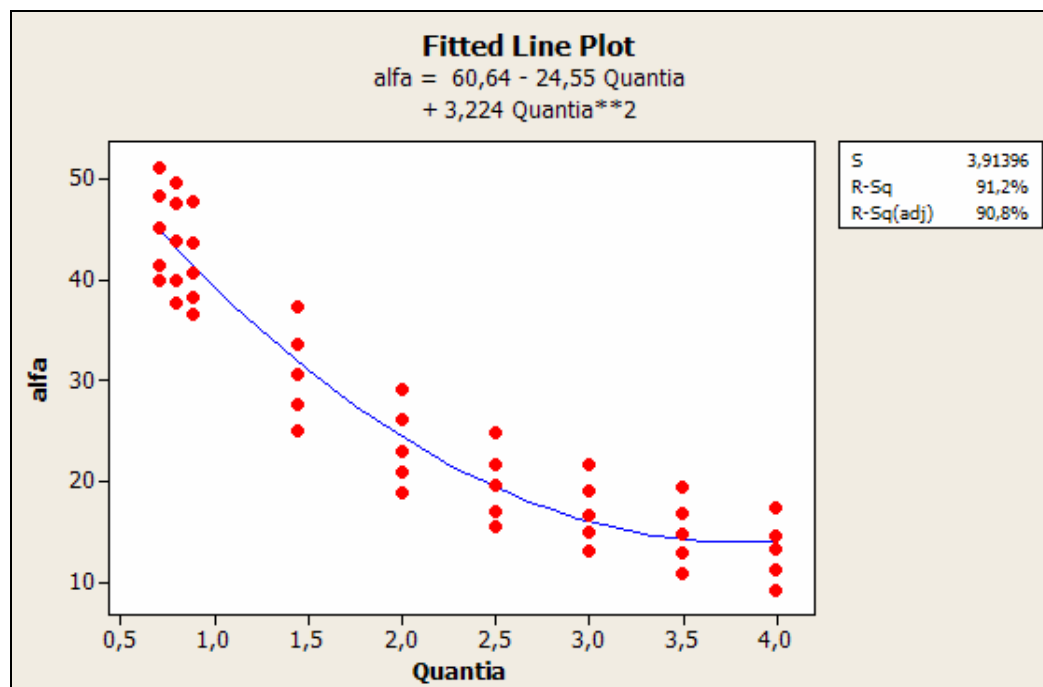
A la Figura 33 es demostra com els valors disminueixen de forma lineal quan augmenta el valor  $d/h$ , és a dir, a mesura que anem perdent recobriment i apropem les barres de reforç cap a l'exterior de l'element.

A partir de l'anàlisi dels resultats s'ha buscat una expressió que s'ajusti als diferents valors englobant algunes de les variables que influeixen en el càlcul. A partir de les Figures 32 i 33 podem obtenir la relació d' $\alpha_2$  a partir de dues variables com són la quantia de reforç i la  $d/h$ .

#### 4.1.1 $\alpha_2$ per formigons de 25 MPa 35 MPa.

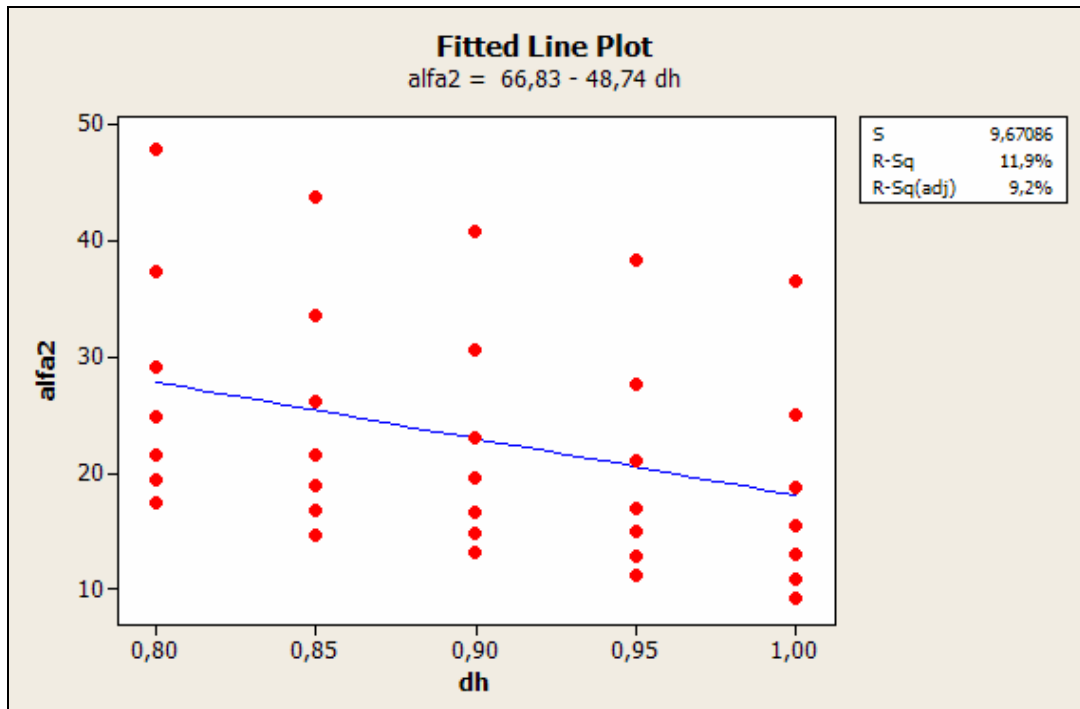
Per determinar una expressió,  $\alpha_2 = f(d/h, \rho)$ , que ens pogués aproximar al resultats que hem obtingut experimentalment s'ha utilitzat el programa Minitab Release 14 que ajusta una expressió per una sèrie de punts determinats. En el nostre cas com que volíem una expressió que depengués alhora de la quantia i la relació entre els cantells hem optat per realitzar un ajust per regressió quadràtica sobre les quanties i llavors ajustar l'expressió manualment per incloure la variable  $d/h$ , ja que no volíem obtenir una expressió excessivament complicada.

Amb el primer procediment obtenim una equació que s'ajusta als punts tal com mostra la Figura 34. El cas correspon a formigó de 25 MPa amb  $f_{ct} = 2,57$  MPa amb un rang de quanties comprés entre 0,7% i el 4%. Per cada quantia tenim 5 punts diferents, que corresponen a les diferents relacions entre cantells  $d/h$ . Els punt superior correspon a  $d/h=0,8$  i l'inferior a  $d/h=1$ .



**Figura 34.** Corba d'ajust dels valors d'  $\alpha_2$  en funció de la quantia de reforç.

A la Figura 35 es mostra la línia de tendència que obtenim al anar augmentar el cantell efectiu i apropar les barres a l'exterior de l'element, és a dir, si disminuïm el recobriment mecànic. En aquest cas per cada relació  $d/h$  tenim les diferents quanties utilitzades, que van de 0,7% al 4%. el punt superior correspondrà a la quantia de 0,7% i l'inferior a la de 4%, tal com es dedueix de la Figura 34.



**Figura 35.** Recta de tendència al augmentar el cantell efectiu.

Mitjançant les dues equacions ajustades anteriorment en les Figures 34 i 35 podem agrupar-les manualment en una sola expressió que s'ajusti i ens proporcioni els valors  $\alpha_2$  que hem obtingut experimentalment.

L'expressió per a formigons de 25 a 35 MPa de resistència a compressió queda com a 4.5.

$$\alpha_2 = 105 - 24,55 \cdot \rho + 3,22 \cdot \rho^2 - 49 \cdot dh \quad \text{si} \quad M_s > 1,25 M_{cr}$$

(4.5)

on:

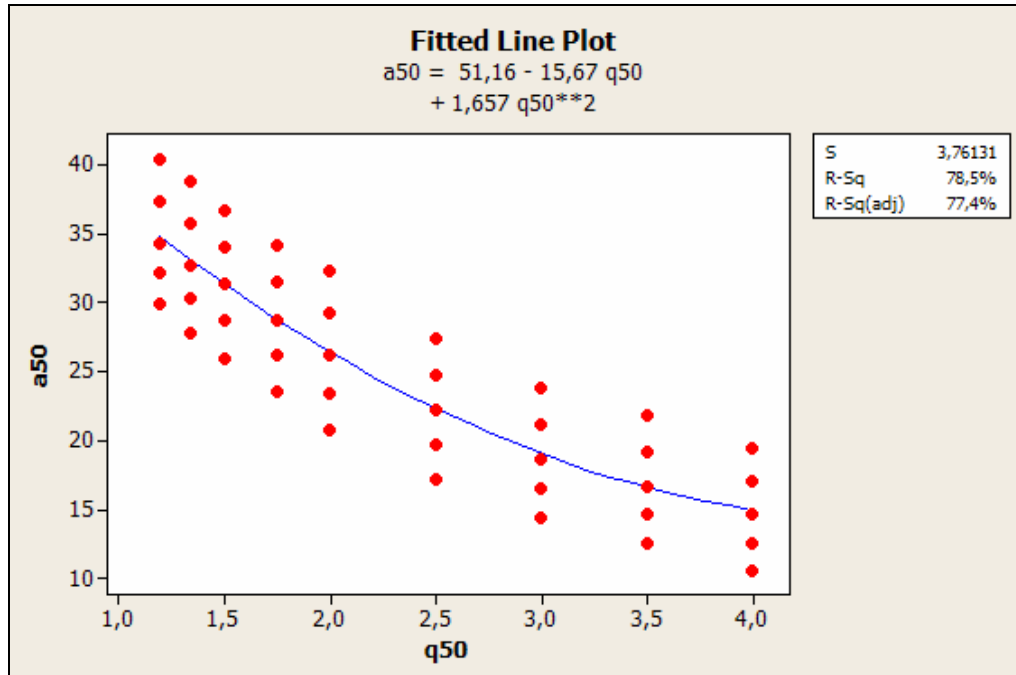
$\rho$  = a la quantia de reforç expressada en [%]

dh = és la relació entre el cantell i el cantell efectiu [Ad]

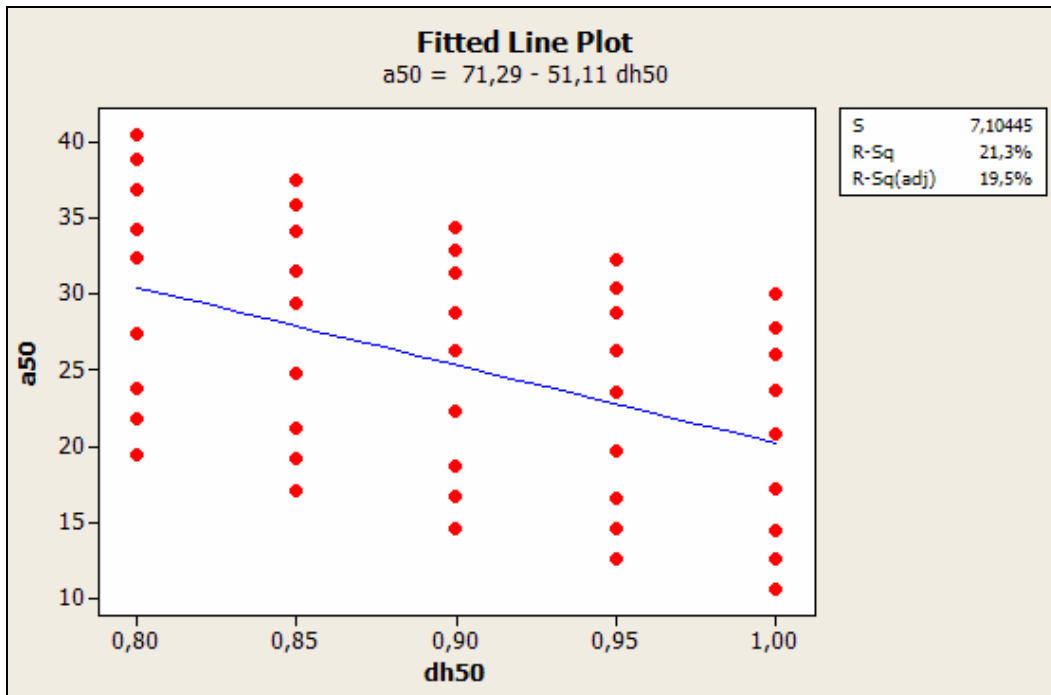


**4.1.2  $\alpha_2$  per formigons de 35 MPa 60 MPa.**

Per els casos  $60 \text{ MPa} > f_c > 35 \text{ MPa}$  amb una  $f_{ct,mig}$  utilitzem el mateix procediment amb el Minitab Release 14.



**Figura 36.** Corba d'ajust dels valors d'alfa 2 en funció de la quantia.



**Figura 37.** Recta de tendència al augmentar el cantell efectiu.

Agrupant les dues equacions anterior en una sola obtenim la següent expressió per a formigons de 35 MPa a 60 MPa.

$$\alpha_2 = 97 - 15,67 \cdot \rho + 1,66 \cdot \rho^2 - 51 \cdot dh \quad \text{si} \quad M_s > 1,25 M_{cr} \quad (4.6)$$

on:

$\rho$  = a la quantia de reforç expressada en [%]

$dh$  = és la relació entre el cantell efectiu i el cantell [Ad]

Les equacions anteriors no tenen en compte la influència de la resistència a tracció del formigó, i els resultats que s'obtenen corresponen al cas de considerar una resistència a la tracció mitja estimada segons proposa l'Eurocodi-2 com a  $f_{ct,mig}$ .

#### 4.1.3 $\alpha_2$ segons Newhook et al. (2002).

Per els casos amb disseny Newhook et al. (2002) l'expressió,  $\alpha_2 = f(dh, \rho)$ , es complica una mica però és útil per a tot el rang de formigons des de 25 MPa fins a 60 MPa amb una  $f_{ct,mig}$  i es pot determinar com:

$$\alpha_2 = 123 - (46 - 36,3 \cdot dh) \cdot \rho + (7 - 6 \cdot dh) \cdot \rho^2 - 91,3 \cdot dh \quad \text{si} \quad M_s > 1,25 M_{cr} \quad (4.7)$$

on:

$\rho$  = a la quantia de reforç expressada en [%]

$dh$  = és la relació entre el cantell efectiu i el cantell [Ad]

En aquest cas tampoc s'ha tingut en compte la influencia de  $f_{ct}$  i els valors es determinen per un valor de  $f_{ct,mig}$  obtingut segons l'Eurocodi-2. En aquest cas hem hagut de complicar l'equació perquè els coeficients que multipliquen a les quanties difereixen substancialment en funció de la relació  $d/h$  que tinguem. S'ha buscat una recta que ajustés aquests valors, i en comptes de tenir un escalar multiplicat a les diferents variables tenim aquestes rectes.

#### 4.1.4 $\alpha_2$ per a formigons de 25 MPa a 60 MPa incloent $f_{ct}$ .

L'expressió  $\alpha_2 = f(dh, \rho, f_{ct})$ , pels casos  $f_c$  de 25 MPa a 60 MPa la expressió que ajusta millor amb disseny ACI 440.1R-06

$$\alpha_2 = (187,5 - 30 \cdot f_{ct}) - (47,7 - 8,5 \cdot f_{ct}) \cdot \rho + (6,9 - 1,4 \cdot f_{ct}) \cdot \rho^2 - (97,5 - 17,1 \cdot f_{ct}) \cdot dh \quad (4.8)$$

si  $M_s > 1,25 M_{cr}$

on:

$\rho$  = a la quantia de reforç expressada en [%]

$dh$  = és la relació entre el cantell efectiu i el cantell [Ad]

$f_{ct}$  = Resistència a tracció del formigó en [MPa]

## 4.2 Desviacions de l'expressió respecte els valors reals

Per tenir una referència de com l'expressió s'ajusta als valors trobats experimentalment es mostren els resultats obtinguts a les taules següents per el cas  $f_c = 25$  MPa i  $f_{ct} = 2,57$  MPa. Per poder considerar els errors que cometem, hem de buscar els errors que cometem. Amb l'equació 4.9 busquem els errors absoluts i amb la 4.10 els errors percentuals respecte el valor original.

### 4.2.1 Diferències absolutes

$$\text{Error}_{\text{absolut}} = X_{\text{exp}} - X_{\text{eq}} \quad [\text{Ad}] \quad (4.9)$$

on:

$X_{\text{exp}}$ : Són els valors obtinguts experimentalment. [Ad]

$X_{\text{eq}}$ : Són els valors obtinguts amb l'expressió. [Ad]

### 4.2.2 Diferències percentuals

$$\text{Error}_{\text{percentual}} = \frac{(X_{\text{exp}} - X_{\text{eq}})100}{X_{\text{exp}}} \quad [\%] \quad (4.10)$$

on:

$X_{\text{exp}}$ : Són els valors obtinguts experimentalment. [Ad]

$X_{\text{eq}}$ : Són els valors obtinguts amb l'expressió. [Ad]

Més endavant és demostrat amb els valors obtinguts i mostrats en aquests gràfics són correctes d'acord amb els anàlisis de rigidesa realitzats. Ja que l'error que podem cometre al escollir un valor d' $\alpha_2$  està comprès dins un rang de variació bastant elevat comparat amb l'error que cometem amb qualsevol valor del rang.

#### 4.2.3 Error que es produeix per formigons de 25 a 35 MPa.

Em volgut comparar numèricament el valor que hem obtingut realment amb el programa C2gen que ens permetia trobar el valor de  $\alpha_2$  que més s'ajustava a la corba i el valor de  $\alpha_2$  que obtenim amb l'equació 4.5 trobada mitjançant regressió amb Minitab Release 14.

A la Taula 17 es mostra la diferència entre el valor real i el de l'equació 4.5 amb formigó de 25 MPa i  $f_{ct}=2,57$  MPa, corresponent a la Taula E.3 de l'annex E, obtinguts amb l'equació 4.9. A la Taula 16 els resultats s'obtenen amb l'expressió 4.10.

**Taula 17.** Diferències absolutes

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0,70	1,1	0,7	0,0	-1,2	-0,3
0,79	1,4	1,8	0,5	-1,1	-0,8
0,88	1,2	-0,5	-1,1	-1,0	-0,4
1,44	0,2	-1,1	-1,7	-2,2	-2,4
2,00	-0,4	-0,9	-1,7	-1,2	-1,0
2,50	0,3	-0,5	0,0	-0,2	0,7
3,00	0,5	0,3	0,4	1,2	1,7
3,50	0,1	-0,1	0,4	0,8	1,3
4,00	-1,7	-2,1	-1,0	-0,6	-0,1

**Taula 18.** Diferències percentuals

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0,70	2,1%	1,5%	-0,1%	-2,8%	-0,8%
0,79	2,7%	3,8%	1,1%	-2,7%	-2,2%
0,88	2,5%	-1,2%	-2,7%	-2,7%	-1,0%
1,44	0,6%	-3,3%	-5,4%	-8,0%	-9,5%
2,00	-1,3%	-3,5%	-7,3%	-5,9%	-5,2%
2,50	1,0%	-2,3%	-0,3%	-1,2%	4,2%
3,00	2,2%	1,7%	2,2%	8,1%	12,8%
3,50	0,4%	-0,4%	2,6%	6,5%	11,9%
4,00	-9,9%	-14,2%	-7,7%	-5,1%	-1,3%

A les taules de diferències absolutes s'observen errors que poden portar a creure que la fórmula no ajusta correctament. Per aquest motiu s'ha realitzat l'estudi de sensibilitat, per observar les desviacions respecte el resultat que provoquen variacions en l'elecció del coeficient  $\alpha_2$ . De tota manera la majoria dels errors els trobem dins el rang  $\pm 2$ . Amb un error màxim de -2.4. Si considerem els errors percentuals obtenim variació màxima del 15%. S'ha de tenir en compte que el programa C2gen treballava amb una precisió de  $\pm 0,2$  en el valor de  $\alpha_2$ .

#### 4.2.4 Error que es produeix per formigons de 35 a 60 MPa

Per al rang de formigons amb resistència a compressió superior a 35 MPa ha calgut trobar una expressió diferent per poder millorar els resultats que s'obtenien. Aquest cas correspon al formigó de 50 MPa, la taula de valors d' $\alpha_2$  es pot veure a l'annex E, taula E.6.

Taula 19. Diferències absolutes

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0,70	0,5	0,0	-0,4	-0,1	0,3
0,79	0,7	0,2	-0,2	-0,2	-0,1
0,88	0,4	0,2	0,1	-0,1	-0,2
1,44	0,3	0,2	0,0	0,0	-0,1
2,00	0,9	0,4	-0,2	-0,4	-0,5
2,50	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	0,0
3,00	-0,3	-0,4	-0,4	0,0	0,5
3,50	0,1	0,1	0,0	0,6	1,1
4,00	-0,7	-0,5	-0,4	0,2	0,7

Taula 20. Diferències percentuals

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0,70	1,1%	0,0%	-1,3%	-0,3%	0,9%
0,79	1,7%	0,6%	-0,7%	-0,6%	-0,5%
0,88	1,0%	0,6%	0,2%	-0,3%	-0,9%
1,44	1,0%	0,6%	0,1%	0,0%	-0,3%
2,00	2,8%	1,2%	-0,8%	-1,5%	-2,4%
2,50	0,0%	-0,2%	-0,5%	-0,3%	0,0%
3,00	-1,4%	-1,8%	-2,3%	0,1%	3,3%
3,50	0,5%	0,3%	0,1%	3,8%	8,8%
4,00	-3,5%	-3,1%	-2,6%	1,3%	6,8%

En aquest cas l'error màxim en valor absolut és de tan sols 1,1. Aquesta diferència tan petita alhora d'escollir la  $\alpha_2$  introduirà errors pràcticament inapreciables en el càlcul de la curvatura mitja. Pel que fa a les diferències percentuals l'error és del 8,8%, sembla molt elevat però s'ha de tenir en compte que el valor real d' $\alpha_2$  en aquest punt és de 12,6 i el trobat amb l'equació 4.6 és de 11,5. Realment l'error en escollir un valor o altre serà insignificant.

#### 4.2.5 Error que es produeix per al mètode proposat a Newhook et al. (2002)

Anem a veure ara com s'ajusta l'expressió per als moments de servei que proposa el Newhook et al. (2002). Hem de tenir en compte, que només podrem calcular la  $\alpha_2$  quan el moment de servei superi el de fissuració. Per aquesta expressió difícilment el superarem, sobretot quan tinguem quanties baixes, a l'entorn de 0,88 %. Tot i això el nivell d'ajust és molt correcte, ja que en cap cas tenim diferències percentuals superiors al 10%. A la Taula 21 és mostren els resultats obtinguts amb l'expressió 4.9 per a reforços amb GFRP. A la Taula 22 els resultats s'obtenen amb l'expressió 4.10. Aquest cas analitzat correspon a la Taula E.2 de l'annex E apartat Newhook.

Taula 21. Diferències absolutes

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
1,44	0,5	-0,6	-2,8	-2,6	0,0
2,00	-0,8	-1,5	-1,2	-0,8	-0,3
2,50	-0,1	-0,4	-0,3	-0,2	0,1
3,00	0,5	0,1	0,4	0,2	0,6
3,50	1,1	0,1	0,2	0,5	0,8
4,00	0,1	-0,6	0,1	0,2	0,3

Taula 22. Diferències percentuals

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
1,44	1,5%	-2,0%	-12,5%	-13,1%	-0,1%
2,00	-3,5%	-7,1%	-6,0%	-4,7%	-1,9%
2,50	-0,5%	-2,1%	-1,8%	-1,3%	0,7%
3,00	2,7%	0,8%	2,3%	1,3%	4,9%
3,50	5,6%	0,9%	1,6%	4,1%	7,4%
4,00	0,5%	-4,2%	0,7%	1,7%	3,3%

Com es veu a la Taula 22 els percentatges d'error són molt baixos i es repeteixen per a tots els formigons de 25 MPa a 60 MPa.

#### 4.2.6 Error que es produeix per formigons de 25 MPa a 60 MPa incloent $f_{ct}$ .

Aquesta expressió ha estat la més complicada d'ajustar ja que depèn de tres variables,  $d/h$ ,  $\rho$  i  $f_{ct}$ . Tot i així els resultat són prou bons tinguent en compte que és molt fàcil que l'error augmenti per a quanties altes de reforç ja que els valor de  $\alpha_2$  en aquest punt és molt petit, de l'ordre de 10. Aquest cas correspon a la taula E.6 de l'annex E, per a formigons de 50 MPa.

**Taula 23.** Diferències absolutes

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0,70	-0,9	-1,0	-1,5	-2,4	-1,4
0,79	-0,5	0,2	-0,9	-2,3	-1,8
0,88	-0,6	-2,1	-2,4	-2,1	-1,2
1,44	-1,0	-2,1	-2,4	-2,7	-2,6
2,00	-1,1	-1,4	-1,9	-1,2	-0,7
2,50	0,0	-0,5	0,1	0,2	1,3
3,00	0,6	0,7	0,9	2,0	2,7
3,50	0,5	0,6	1,3	2,0	2,6
4,00	-1,0	-1,1	0,2	0,9	1,5

**Taula 24.** Diferències percentuals

Quantia [%]	d/h				
	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0,70	-1,7%	-2,1%	-3,4%	-5,9%	-3,4%
0,79	-1,0%	0,4%	-2,1%	-5,6%	-4,7%
0,88	-1,1%	-4,7%	-5,9%	-5,5%	-3,4%
1,44	-2,6%	-6,2%	-7,9%	-9,9%	-10,6%
2,00	-3,6%	-5,3%	-8,3%	-5,8%	-4,0%
2,50	0,0%	-2,5%	0,8%	1,3%	8,5%
3,00	2,7%	3,5%	5,7%	13,5%	20,8%
3,50	2,8%	3,6%	8,7%	15,4%	24,5%
4,00	-5,6%	-7,5%	1,4%	7,7%	16,7%

En aquest cas l'error absolut comés és de  $\pm 2,5$  aproximadament. Tenint en compte que l'equació 4.8 ens serveix per a formigons de 25 MPa a 60 MPa l'ajust és del tot acceptable.

#### 4.2.7 Valoració global dels errors d'aproximació.

En els apartats anteriors, del 4.2.3 al 4.2.7 s'han analitzat els valors obtingut mitjançant les equacions resultants de les regressions i s'han comparat amb els obtinguts amb el programa C2gen. Val a dir que només s'hi exposen alguns exemples, ja que les expressions tenen utilitat per un gran nombre de casos, com són diferents resistències a compressió del formigó i diferents resistències a tracció. Per valorar la magnituds dels errors comesos s'ha realitzat un anàlisi de sensibilitat variant els valor d' $\alpha_2$  per tal de veure l'error que es comet en el càlcul de la curvatura mitja. S'han considerat variacions del  $\pm 15\%$ . que seria un terme representatiu dels errors màxims comesos a les taules anteriors.

### 4.3 Rigidesa del valor $\alpha_2$ i sensibilitat de l'ajust

S'ha portat a terme un anàlisi per determinar la rigidesa del coeficient i l'influència d'aquest amb la curvatura resultant. Per poder considerar l'error que estem cometent ens hem situat a la zona propera al moment de fissuració, exactament a 1,25 vegades  $M_{cr}$  i hem variat sensiblement el coeficient  $\alpha_2$  per veure els resultats que obteníem. A la Taula comparativa 25, on els valors d'  $\alpha_2$  es varien en un marge de +15%/-15% es pot comprovar com l'error comés és mínim i va augmentant lleugerament a mesura que anem disminuint la quantia de reforç.

**Taula 25.** Anàlisi de sensibilitat dels resultats considerant el *Tension-Stiffening*.

Quantia [%]	moment [Ad]	d/h [Ad]	$\alpha_2$ ajustat		$\alpha_2$ +15% error		error	$\alpha_2$ -15% error		error
			$\alpha_2$	Cm [m-1]	$\alpha_2$	Cm [m-1]		$\alpha_2$	Cm [m-1]	
0,7	1,25	0,8	51,2	0,009817	58,9	0,009210	6,18%	43,5	0,011000	12,05%
		0,9	45,2	0,007235	52,0	0,006916	4,41%	38,4	0,007874	8,83%
		1,0	40,0	0,005697	46,0	0,005429	4,70%	34,0	0,006004	5,39%
2	1,25	0,8	29,2	0,003946	33,6	0,003814	3,35%	24,8	0,004073	3,22%
		0,9	23,0	0,003073	26,5	0,003022	1,66%	19,6	0,003146	2,38%
		1,0	18,8	0,002453	21,6	0,002424	1,18%	16,0	0,002496	1,75%
4	1,25	0,8	17,4	0,002445	20,0	0,002417	1,15%	14,8	0,002522	3,15%
		0,9	13,2	0,001923	15,2	0,001879	2,29%	11,2	0,001947	1,25%
		1,0	9,2	0,001538	10,6	0,001528	0,65%	7,8	0,001552	0,91%

Aquest fet ens porta a la conclusió que si bé es important escollir un rang per el valor  $\alpha_2$  alhora de realitzar càlculs prop del moment de fissuració, l'error que cometem si ens equivoquem lleugerament en l'elecció no ens portarà a un error considerable en el resultat- També s'observa que si escollim un valor de  $\alpha_2$  superior al real la curvatura que ens resultarà serà inferior a la real, és a dir, estarem considerant que la rigidesa de l'element és superior a la real. Com s'havia apuntat amb anterioritat un error del  $\pm 15\%$  en l'elecció de la  $\alpha_2$  no tindrà gaire importància sobretot si estem treballant amb quanties elevades ja que el valor es molt petit i una variació del  $\pm 15\%$  serà poc important.

Si només volem considerar el fet de la resistència a tracció del formigó, o sigui  $f_{ct}$ , i no volem considerar el factor del *Tension-Stiffening* haurem de escollir  $\alpha_1 = 0$  i  $\alpha_2 = 1$ . Haurem de tenir en compte que l'error que cometem si no el tenim en compte augmenta a mesura que ens apropem al moment de fissuració. A la Taula 2 hem volgut comparar el resultat de la curvatura que obtenim si tenim en compte la rigidesa del formigó traccionat (*Tension-stiffening*) o si la menystenim.

**Taula 26.** Anàlisi de sensibilitat dels resultats si no tenim en compte el *Tension-Stiffening*.

Quantia [%]	moment [Ad]	d/h [Ad]	Amb <i>tension-stiffening</i>		Sense <i>tension-stiffening</i>		error
			$\alpha_2$	Cm [m-1]	$\alpha_2$	Cm [m-1]	
0,7	1,25	0,8	51,2	0,009817	1,0	0,017280	76,02%
		0,9	45,2	0,007235	1,0	0,013490	86,45%
		1,0	40,0	0,005697	1,0	0,010830	90,10%
2	1,25	0,8	29,2	0,003946	1,0	0,006915	75,24%
		0,9	23,0	0,003073	1,0	0,005339	73,74%
		1,0	18,8	0,002453	1,0	0,004258	73,58%
4	1,25	0,8	17,4	0,002445	1,0	0,003894	59,26%
		0,9	13,2	0,001923	1,0	0,002989	55,43%
		1,0	9,2	0,001538	1,0	0,002336	51,89%

Això ens pot portar a pensar que el fet de no considerar l'efecte del *Tensió-Stiffening* tampoc ens conduirà a errors considerables, cosa que no és certa com es pot comprovar a la Taula 26, ja que és produeixen errors en el càlcul superiors al 90%.

Així, doncs, és imprescindible tenir en compte l'efecte del *Tensió-Stiffening* per al càlcul en aquest tipus d'estructures un cop vistos els errors de càlcul que cometem si la ometim.



## 5. Resum. Estudi de costos.

Partida	Descripció	Quantitat	Preu unitari	Amortització	Cost
1	Maquinari	120 h	15 €/h	0,25	450 €
2	Realització del preestudi	150 h	22 €/h	1	3.300 €
3	Simulació i presa de dades	50 h	36 €/h	1	1.800 €
4	Comprovació de resultats	20 h	22 €/h	1	440 €
5	Redacció de l'estudi	20 h	22 €/h	1	440 €
SUBTOTAL					6.430 €
10% Benefici					643 €
16% IVA					1.131,68 €
<b>TOTAL ESTUDI</b>					<b>8.204,68 €</b>

Signat

El redactor, Gerard Vancells i Xuclà  
Girona, a 18 de juny de 2008.

## 6. Conclusions

En el present treball s'ha volgut analitzar el comportament dels elements de formigó reforçats amb barres de material compòsit com el GFRP, el AFRP i CFRP per veure com es comporta l'element a flexió simple i la influència del fenomen del *Tension-Stiffening*, tant des del punt de vista seccional com en la rigidesa global de l'element. Per a realitzar els càlculs s'han utilitzat les recomanacions de la guia de disseny ACI 440.1R-06 per al càlcul dels moments últims i de servei, i amb l'Eurocodi-2 per a la curvatura mitjana. El procediment per analitzar el formigó traccionat entre fissures s'ha portat a terme mitjançant una llei constitutiva modificada que depèn de dos paràmetres,  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Un cop hem trobat un mètode per calcular aquests paràmetres s'ha determinat la influència que tenien a l'hora de dissenyar elements amb aquest tipus de reforç.

Una de les primeres conclusions que hem extret de l'ús de d'aquest tipus de reforços en estructures de formigó és que, tot i tenir major resistència a la tracció que l'acer, d'uns 550 MPa per als GFRP fins a uns 2000 MPa per als CFRP, s'obtenen majors deformacions (curvatures i fletxes) de les que obtindríem si utilitzéssim l'acer com a reforç. Aquest fet està provocat pel baix mòdul elàstic que tenen el FRP, de 40000 i 80000 i 120000 MPa, segons si tenim GFRP, AFRP o CFRP respectivament, ja que l'acer té un mòdul elàstic 200000 MPa. Aquests efectes es poden veure a l'annex B, on s'han implementat 3 casos de bigues reforçades amb FRP on es varia el tipus de càrrega i es comproven els resultats en el cas de una càrrega puntual, dos càrregues puntuals equidistants i una càrrega continua. Així mateix, també s'hi observa l'aparició de la fissuració, i com la deformacions augmenten considerablement a partir d'aquest punt ja que disminueix la inèrcia al trobar-se part de la secció fissurada.

Per tal de poder determinar els paràmetres que regeixen la llei adoptada ( $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ ), s'ha començat per la realització de gràfics moment-curvatura adimensionals per tal d'independitzar-los de la mida de les seccions, és a dir, l'amplada, el cantell i el cantell efectiu. Aquests gràfics s'han programat mitjançant rutines de Matlab 7.0 i s'han anat variant els paràmetres significatius com la resistència a compressió del formigó i el tipus de reforç per poder observar les diferències que es produeixen en els resultats. Així doncs, a partir d'aquests gràfics adimensionals, només ens cal saber la quantia de reforç i la relació entre cantell efectiu i el cantell, o el que seria el mateix, el grau de recobriment mecànic que tenim, per trobar el moment de servei i la curvatura per a qualsevol tipus de secció.

Si comparem els diagrames moment-curvatura adimensionals per l'acer i per l'FRP, veurem que per l'acer obtenim curvatures molt menors. Un altre factor a tenir en compte és la seva ruptura fràgil, així doncs, haurem de tenir especial cura de no subestimar la resistència del formigó en excés perquè ens podríem trobar que si dissenyem per a que es produeixi una ruptura pel formigó, aquest podria aguantar més de l'esperat i produir-se la falla per la ruptura de les barres de reforç, cosa que produiria una ruptura fràgil, i per tant, la falla instantània de l'element.

Les rutines s'han implementat per el rang de formigons que va des de 25 MPa fins a 60 MPa, i per als 3 principals tipus de reforç que tenim, el GFRP, el AFRP i el CFRP. S'ha pogut veure com el valor de  $\alpha_2$  augmenta a mesura que disminueix la quantia i en augmentar el recobriment mecànic. També s'ha comprovat que els valors són lleugerament superiors si utilitzem FRP en comptes d'acer. Si observem detingudament els diagrames adimensionals veiem que el moment últim disminueix a mesura que augmenta la resistència del formigó. Aquest fet és provocat pel moment de fissuració, que augmenta en augmentar  $f_c$ , i per tant la relació  $M_u/M_{cr}$  disminueix. Per contra la deformació última augmenta si augmentem el cantell efectiu, cosa que provocarà que la secció pugui aguantar major esforç.

Tal i com es pretenia en l'objecte d'aquest treball s'han pogut determinar algunes expressions per al càlcul dels paràmetres de la llei constitutiva adaptada que s'ajusten amb suficient exactitud als valors trobats experimentalment mitjançant l'ajust per mínims quadrats. Tot i no haver aconseguit trobar una expressió que englobés tots els tipus de formigó entre 25 i 60 MPa, s'hi que se n'han pogut determinar algunes de genèriques per a la majoria de casos. Aquestes equacions s'han determinat a partir de regressions realitzades amb el programa de càlcul estadístic Minitab Release 14 i agrupades en una sola expressió que depèn de la quantia i la relació entre cantell i cantell efectiu, obtenint expressions del tipus  $\alpha_2 = f(\rho, dh)$  i  $\alpha_2 = f(\rho, dh, f_{ct})$ .

Un dels aspectes que cal remarcar i que s'ha volgut estudiar amb especial atenció, ha estat l'efecte que podria causar en el càlcul dels paràmetres la variació del moment de servei de l'element a considerar. En aquest cas, no obtenim els mateixos valors si considerem el moment de servei com al màxim que pot suportar la secció tenint en compte els factors de minoració de la resistència de la secció i els de majoració de les càrregues, o si partim, tal com es proposa a Newhook et al. (2002), de un moment màxim en servei, considerat com el que es produeix amb la curvatura adimensional de  $\approx 0,002$  [Ad], que serà

el que ens provocaria l'amplada de fissura i la fletxa màxima permesa. Val a dir, que el problema de la fletxa sol ser més estètic que no pas estructural.

Per últim cal remarcar que, tal i com es desprèn dels anàlisis de sensibilitat, variacions considerables en escollir el valor de les alfes produeixen variacions poc significatives de les curvatures i les fletxes. A més, el fet de menystenir l'efecte del *Tension-stiffening* pot provocar errors importants en el disseny, sobretot si estem treballant a la zona propera al moment de fissuració. Per aquest motiu és aconsellable tenir-lo en compte sobretot en estructures de formigó reforçades amb FRP, on la rigidesa del reforç és relativament baixa, i caldrà preveure acuradament les curvatures i les fletxes un cop l'estructura entri en càrrega.

Signat

El redactor, Gerard Vancells i Xuclà  
Girona, a 18 de juny de 2008.

## 7. Relació de documents

**Document nº1:** Memòria i Annexes

**ANNEX A:** Justificació dels càlculs

**ANNEX B:** Diagrames de moments, curvatures i fletxes

**ANNEX C:** Diagrames moment – curvatura

**ANNEX D:** Diagrames moment – curvatura adimensionals

**ANNEX E:** Càlcul del coeficient  $\alpha_2$

**ANNEX F:** Rutines de MATLAB 7.0 de l'ANNEX B.

**ANNEX G:** Rutines de MATLAB 7.0 de l'ANNEX C.

**ANNEX H:** Rutines de MATLAB 7.0 de l'ANNEX D.

## 8. Bibliografia

ACI committe 318,2005,"Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (318R-05)", American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich.

ACI committe 440,2006, "Guide for the Design and Construccion of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars" (ACI 440.1R-06), American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich

BANK, L.C.,(1993), "Properties of FRP Reinforcement for concrete," *Fiber-Reinforced-Plastic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures: Properties and Applications, Developments in Civil Engineering*,V. 42, A. Nanni, ed., Elsevier, Amsterdam, pp. 59-86.

BENMOKRANE, B.;CHAALLAL, O.; i MASMOUDI, R.; (1996) "Flexural Response of Concrete Beams Reinforced with FRP Reinforcing Bars," *ACI Structural Journal*, V.93, No.1, Jan-Feb.,pp 46-55.

BOOTLE,J.; Burzesi, F.; and Fiorini, L., 2001, "Design Guidelines," *ASM Handbook*, V.21, Composites, ASM International, Material Park, Ohio, pp. 388-395.

BOYLE, H.C., i KARBHARI, V.M.,(1994), "Investigation of Bond Behavior Between Glass Fiber Composite Reinforcements and Concrete,"*Journal of Polymer-Plastic Technology Engineering*, V.33, No. 6, pp. 733-753.

CEB-FIB Model Code 1990: Design Code, CEB Comite Euro International Du Beton.

EHSANI, M.R., (1993), "Glass-Fiber Reinforcing Bars" *Alternative Materials for the Reinforcement and Prestressing of Concrete*, J.L Clarke Academic & Professional, London, pp. 35-54.

EUROCODIGO 2 (EC-2)(1993)."Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación."

GAO, D.; Benmokrane, B., i Masmoudi, R.; (1998) "A Calculating Method of Flexural Properties of FRP-Reinforced Concrete Beam: Part 1: Crack width and deflection" Department of Civil Engineering, University of Sherbrooke, Québec, Canada 24 pp.

ISIS (2003), "Design Manual" *FRP concrete reinforcement*.

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS( JSCE), (1997), *Proceedings of the Third International Symposium on Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (FRPPRCS-3)*,V.2., Japan Concrete Institute, Tokyo, Japan, 314pp.

KOCHAOZ, S.; Samaranayake, V.A.; and Nanni, A., (2005) " Tensile Characterization of Glass FRP Bars," *Composites, Part B*, V.36, No.1,Jan.,pp. 127-134.

MALLICK, P.K., (1988), *Fiber Reinforced Composites, Materials, Manufacturing, and Design*,Marcell Dekker, Inc., New York, 469pp.

MEIER, U. (1992) "Carbon Fiber Reinforced Polymers: Modern Materials in Bridge Engineering", *Structural Engineering International*, Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering,V.2,N0.1,pp 7-12

NANNI, A.; Rizkalla,S.;Bakis,C.E.; Conrad,J.O.; and Abdelrahman, A.(1998) "Characterization of GFRP Ribbed Rod Used for Reinforced Concrete Construction," *Proceedings of the International Composites Exhibition (ICE-98)*, Nashville, Tenn., pp. 16A/1-6.

NEWHOOK, J; Ghali, A; Gamil, T; (2001), "Concrete flexural members reinforced with fiber reinforced polymer: design for cracking and deformability" pp. 125-134. *Can.J.Civ.Eng.*Vol.29,2002.

PECCE M, MANFREDI G, COSENZA E. (2000) "Experimental response and code models of GFRP RC beams in bending". *J Compos Constr*, 4(4), 182–90.

PLECNIK, J.; i AHMAD, S. H. (1998), "Transfer of composite Technology to Design and Construction of Bridges," *Final Report* to USDOT, Contract No. DTRS 5683-C000043.

RISKALLA, S. H. (1997), "A New Generation of Civil Engineering Structures and Bridges,"*Proceedings of the Third International Symposium on Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-3)*, V.1, Japan Concrete Institute, Tokyo, Japan, pp.113-128.

TADROS, G.; TROMPOSCH, E.; i MUFTI,A.,(1998) "University Drive/Crowchild Trail Bridge Superstructure Replacement," *Proceedings of the second International Conference on Composites in Infrastructure(ICCI-98)*, V.1, Tucson, Ariz., pp. 693-704.B31

TAERWE,L. (1997),"FRP Activities in Europe: Survey of Research and Applications," *Proceedings of the Third International Symposium on Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-3)*, V1, Japan Concrete Institute, Tokyo, Japan, pp.59-74.

TORRES, LI, (2001)"Modelo numérico y verificación experimental del comportamiento en servicio de estructuras de hormigón."Tesis Doctoral, Univ. Politècnica de Catalunya.

TORRES, LL.,; Emilio V. González, M. Llorens, M. Baena & A. Turon (2004) "*Tension stiffening model for finite element analysis of cracked concrete*" *Department of Mechanical and Construction Engineering, University of Girona, Spain*

WAMBEKE, B, and Shield, C.,; (2006) "Development Length of Glass Fiber Reinforced Polymer Bars in Concrete," *ACI Structural Journal* V.103, No.1 Jan-Feb., pp 11-17.

WU, W.P.,(1990) "Thermomechanical Properties of Fiber Reinforcement Plastic (FRP) bars," PhD dissertation, West Virginia University, Morgantown, W.Va., 292 pp.



## 9. Glossari

**AFRP:** Reforç d'aramida amb matriu polimèrica, de l'anglès *Aramid Fiber Reinforced Polymer*.

**CFRP:** Reforç de fibra de carboni amb matriu polimèrica, de l'anglès *Carbon Fiber Reinforced Polymer*.

**E-Glass:** Família de vidres compost de calci, alumina, borosilicat i alcalins al 2%. És una fibra d'ús general com a reforç de polímers.

**S-Glass:** Tipus de fibra de vidre a base de magnesi aluminosilicat.

**C-Glass:** Tipus de fibra de vidre resistent als ambients corrosius.

**GFRP:** Reforç de fibra de vidre amb matriu polimèrica, de l'anglès *Glass Fiber Reinforced Polymer*.

**FRP:** Polímer reforçat amb fibres, de l'anglès *Fiber Reinforced Polymer*.

## 10. Notació

$A_f$	Area de la secció transversal de reforç
$b$	Amplada de l'element de formigó
$d$	Distància des de l'estrem a compressió fins al centroide del reforç
$E_c$	Modul elàstic del formigó
$E_f$	Modul elàstic del reforç
$f_c$	Resistència a compressió del formigó
$f_f$	Tensió en el reforç de FRP
$f_{fu}$	Resistència a tracció garantida dels reforços de FRP
$I_{cr}$	Inèrcia de fissuració
$I_e$	Inèrcia equivalent de l'element fissurat
$I_g$	Inèrcia de l'element sense fissurar
$L$	Longitud de l'element
$M_a$	Moment màxim en l'element
$M_{cr}$	Moment de fissuració
$M_n$	Moment nominal
$M_s$	Moment màxim en servei de l'element
$M_u$	Moment últim de l'element
$nf$	Ratio entre els moduls elàstics del formigó i del reforç
$\rho_f$	Ratio de reforç del FRP
$\rho_{fb}$	Ratio balancejat de reforç