ANÁLISIS DEL MODELO DE LA TELARAÑA EN CONTEXTO DE INCERTIDUMBRE

Resumen / ***Abstract***

En el trabajo se analiza el comportamiento de un conocido modelo de mercado con un único bien en el que se considera que los parámetros que ligan las variables que incorpora el modelo vienen expresadas a través de magnitudes inciertas. El objetivo del estudio consiste en el análisis del equilibrio intertemporal desde las hipótesis de incertidumbres establecidas.

In the present work the behavior of a model acquaintance of market is analyzed with an only one, in that is considered that the parameters that tie the variables that it incorporates the pattern come expressed through uncertain magnitudes. The objective of the study consists on the analysis of the balance from the hypotheses of established uncertainties.

Palabras clave ***/ Key words***

Modelo de la telaraña, incertidumbre, números borrosos

Spider's model, uncertainty, fuzzy numbers

Joan Carles Ferrer, *Doctor, Departamento de Empresa, Departamento de Informática y Matemática Aplicada, Universidad de Girona, Girona, España*
e-mail: joancarles.ferrer@udg.es
Xavier Bertran, *Departamento de Empresa, Departamento de Informática y Matemática Aplicada, Universidad de Girona, Girona, España*
Narcis Clara, *Departamento de Empresa, Departamento de Informática y Matemática Aplicada, Universidad de Girona, Girona, España*
Dolors Corominas, *Departamento de Empresa, Departamento de Informática y Matemática Aplicada, Universidad de Girona, Girona, España*

Recibido: Mayo del 2003
Aprobado: Julio del 2003

INTRODUCCIÓN

En la última década los investigadores y científicos dedicados al tema de los métodos cuantitativos aplicados a la gestión empresarial, se han dado a la tarea de buscar soluciones eficientes a los diferentes problemas a los que se enfrenta los directivos.

Entre los numerosos métodos desarrollados se encuentra la teoría fuzzy. En el presente trabajo se muestra una aplicación de los conjuntos borrosos.[1-10] En el mismo se estudia y analiza el modelo de la telaraña borrosa a través de la cual se logra describir en una forma más realista el comportamiento del precio.

Para ello se define un coeficiente de convergencia como una razón entre dos áreas, las cuales pueden ser interpretadas como la posibilidad de convergencia.

Para llevar a cabo la aplicación se utilizan dos numeros borrosos, lo cual permite obtener resultados acordes con los previstos.

EL MODELO DE LA TELARAÑA

Considerando el estudio de un modelo económico de oferta y demanda en el cual se tiene un único producto y tanto la cantidad demandada como ofertada son funciones lineales del precio considerado este *como una función del tiempo (discreto), dadas por las expresiones:*

$Q_d = c - a \cdot P_{t+1} \qquad (a, c > 0)$
$Q_s = -d + b \cdot P_t \qquad (b, d > 0)$

y que se conoce el precio en el instante $t = 0$, es decir, $P(0) = P_0$.

En estas condiciones se quiere hallar si existe un tiempo t en el cual el mercado se encuentre en equilibrio (dinámico) , es decir, si se verifica:

$$Q_d = Q_s$$

Imponiendo esta condición se tiene:

$$c - a.P_{t+1} = -d + b.P_t$$
$$a.P_{t+1} + b.P_t = c + d$$
$$P_{t+1} + \frac{b}{a} P_t = \frac{c+d}{a}$$

Puede observarse que se trata de una ecuación en diferencias de primer orden de tipo lineal, que resolviéndola se tiene:

$$P_t = (P_0 - \frac{c+d}{a+b}).(-1)^t.\left(\frac{b}{a}\right)^t + \frac{c+d}{a+b}$$

que da la relación entre el precio y el tiempo.

Substituyendo este valor en las funciones de demanda y oferta respectivamente se tiene:

$$Q_d = c - a\left[(P_0 - \frac{c+d}{a+b}).(-1)^{t+1}.\left(\frac{b}{a}\right)^{t+1} + \frac{c+d}{a+b}\right]$$

$$Q_s = -d + b.\left[(P_0 - \frac{c+d}{a+b}).(-1)^t.\left(\frac{b}{a}\right)^t + \frac{c+d}{a+b}\right]$$

con lo cual puede observarse que no existe ningún valor finito de t para el cual el mercado se encuentre en equilibrio. No obstante, si se hace tender el tiempo hacia el infinito, siempre que la relación *a/b* se mantenga inferior a la unidad, entonces la demanda es igual a la oferta y en este caso el precio tiende a un precio límite dado por: $P_\infty = \frac{c+d}{a+b}$, con lo cual puede decirse que la trayectoria temporal es convergente.

ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DEL PRECIO EN EL MODELO DE LA TELARAÑA EN CONTEXTO DE INCERTIDUMBRE

A continuación se analiza la convergencia de la trayectoria del precio en el modelo de la telaraña cuando se consideran la demanda y la oferta números borrosos como consecuencia de suponer que los coeficientes del precio son números borrosos.

$$\tilde{Q}_d = c - \tilde{a}.\tilde{P}_{t+1}$$
$$\tilde{Q}_s = -d + \tilde{b}.\tilde{P}_t$$

Donde c y d son dos números reales positivos, $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ dos números borrosos definidos por sus respectivas funciones de pertenencia o equivalentemente por sus α-cortes:

$$\tilde{a} = \{(x, \mu_{\tilde{a}}(x))\} \quad \text{o} \quad a_\alpha = \left[\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\right]$$

$$\tilde{b} = \{(x, \mu_{\tilde{b}}(x))\} \quad \text{o} \quad b_\alpha = \left[\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\right]$$

Además, se supondrá que los dos números borrosos son definidos positivos y del tipo *L-R* con soporte compacto.

Con estas hipótesis se tiene:

$$a_0 = \left[\underline{a}(0), \overline{a}(0)\right] \subset \Re^+$$

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & x < \underline{a}(0) \\ L_a(x) & \underline{a}(0) \le x < a(1) \\ 1 & x = a(1) \\ R_a(x) & a(1) < x \le \overline{a}(0) \\ 0 & x > \overline{a}(0) \end{cases}$$

$$b_0 = \left[\underline{b}(0), \overline{b}(0)\right] \subset \Re^+$$

$$\mu_{\tilde{b}} = \begin{cases} 0 & x < \underline{b}(0) \\ L_b(x) & \underline{b}(0) \le x < b(1) \\ 1 & x = b(1) \\ R_b(x) & b(1) < x \le \overline{b}(0) \\ 0 & x > \overline{b}(0) \end{cases}$$

Con estas condiciones se puede determinar el precio por la ecuación borrosa:

$$\tilde{P}_t = (P_0 - \frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}).(-1)^t.\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^t + \frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}$$

Para estudiar la convergencia de la trayectoria desde un punto de vista de números borrosos, se deben comparar los números borrosos $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$, una manera podría ser a partir de la función de pertenencia de $\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$, calculando la parte proporcional de área situada a la izquierda de la recta $x = 1$ y dentro de la gráfica de la función de pertenencia de $\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$ y del área encerrada por dicha función de pertenencia; esto tiene el inconveniente que la función de pertenencia de $\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$ en general será complicada y el cálculo de dichas áreas puede ser muy laborioso. Por todo esto, se propone un método alternativo definiendo lo que se llamará a partir de ahora el coeficiente de convergencia del precio que se designará por β.

$$\beta = \frac{A_1 + A_2}{2A_T}$$

donde A_1 es el área situada a la izquierda de L_a y dentro de $\tilde{b}$, A_2 es el área situada a la izquierda de R_a y dentro de $\tilde{b}$ y A_T es el área total limitada por el número borroso $\tilde{b}$ (figura 1).

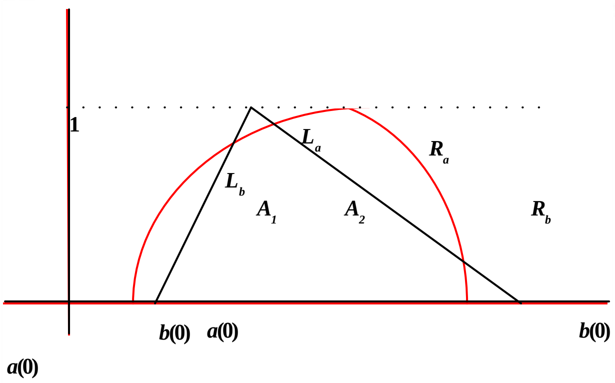

Fig. 1

Nótese que si $\bar{b}(0) < \underline{a}(0)$, entonces β = 1, o sea que la trayectoria será convergente; por otro lado, si $\underline{b}(0) > \bar{a}(0)$, se tendrá β = 0 y, por tanto, la trayectoria no será convergente.

Entonces β da la posibilidad que la trayectoria del precio converja en el número borroso $\frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}$, o bien que la posibilidad que la trayectoria converja en el número borroso $\frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}$ es β.

CASOS PARTICULARES

Si se supone que el número borroso $\tilde{a}$ sea nítido, en este caso si se denomina $\tilde{c} = \frac{\tilde{b}}{a}$, entonces la función de pertenencia de $\tilde{c}$ será $\mu_{\tilde{c}} = \mu_{\tilde{b}}(a.x)$.

En este caso, puede observarse que el coeficiente de convergencia es ½ de la proporción entre el área limitada a la izquierda de la recta $x = a$ con la función de pertenencia del número borroso $\tilde{b}$ y el área total limitada por la función de pertenencia de dicho número (figura 2).

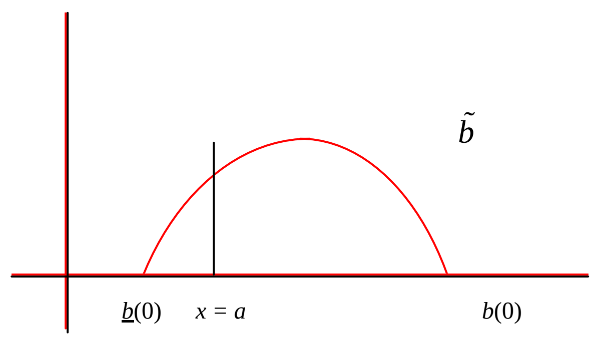

Fig. 2

El resultado anterior es equivalente a la proporción entre el área situada a la izquierda de la recta $x = 1$ con la función de pertenencia del número borroso $\frac{\tilde{b}}{a}$ y el área limitada por la función de pertenencia del número borroso anterior.

En efecto:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{\underline{b}(0)}^{a} \mu_{\tilde{b}}(x).dx}{\int_{\underline{b}(0)}^{\bar{b}(0)} \mu_{\tilde{b}}(x).dx}$$

haciendo el cambio de variable $x = a.t,\ dx = a.dt$ entonces

$$x = \underline{b}(0) \qquad t = \frac{\underline{b}(0)}{a}$$

$$x = \bar{b}(0) \qquad t = \frac{\bar{b}(0)}{a}$$

$$x = a \qquad t = 1$$

con lo cual

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\int_{\frac{\underline{b}(0)}{a}}^{1} \mu_{\tilde{b}}(a.t).dt}{a\int_{\frac{\underline{b}(0)}{a}}^{\frac{\bar{b}(0)}{a}} \mu_{\tilde{b}}(a.t).dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{\frac{\underline{b}(0)}{a}}^{1} \mu_{\tilde{c}}(t).dt}{\int_{\frac{\underline{b}(0)}{a}}^{\frac{\bar{b}(0)}{a}} \mu_{\tilde{c}}(t).dt}$$

Esto gráficamente corresponde con la figura 3.

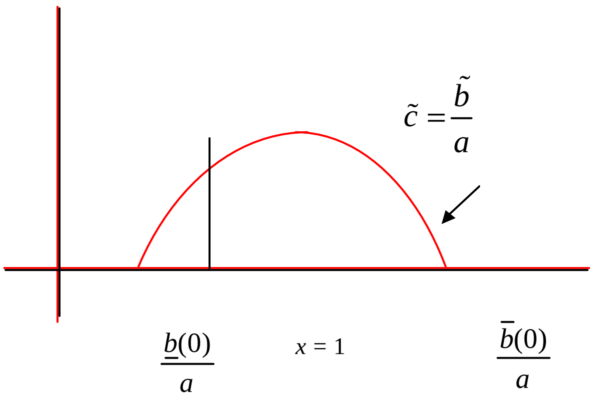

Fig. 3

El segundo caso particular es cuando el número borroso $\tilde{b}$ es nítido en este caso el coeficiente de convergencia se definirá como la proporción de área situada dentro del número borroso $\tilde{c} = \frac{b}{\tilde{a}}$ y a la izquierda de la recta $x = 1$, y el área total limitada por dicho número (figura 4).

Para finalizar y fijar más las ideas, se desarrollará un ejemplo numérico en el cual se utilizarán números borrosos triangulares.

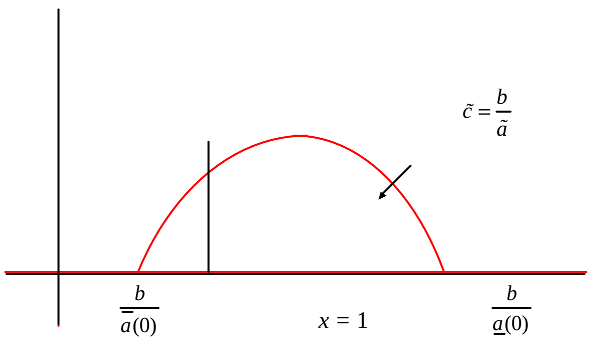

Fig. 4

EJEMPLO NUMÉRICO

Sean los números borrosos triangulares $\tilde{a}$ = (2,5,12) y $\tilde{b}$ = (1,6,10) cuyas funciones de pertenencia son:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3} & si \quad 2 \leq x < 5 \\ \frac{12-x}{7} & si \quad 5 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{5} & si \quad 1 \leq x < 6 \\ \frac{10-x}{4} & si \quad 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

La representación gráfica se muestra en la figura 5.

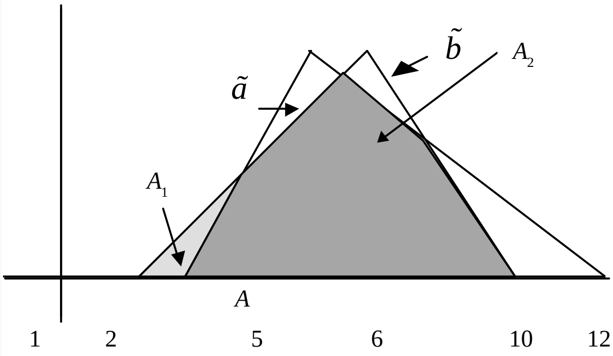

Fig. 5

Calculando las áreas se tiene:

$A_1 = 0{,}25$ $\qquad A_2 = 4{,}125$ $\qquad A_T = 4{,}5$

Entonces el coeficiente de convergencia valdrá:

$$\beta = \frac{A_1 + A_2}{2A_T} = \frac{0{,}25 + 4{,}125}{9} = 0{,}483$$

Se supondrá ahora que el número borroso $\tilde{a}$ sea nítido, que su valor sea a = 3 y el número borroso $\tilde{b}$ sea =(2,6,8); en este caso puede observarse la figura 6.

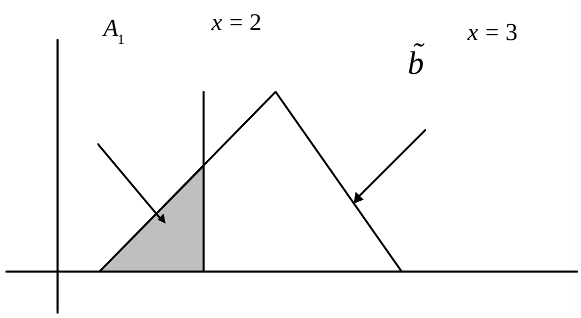

Fig. 6

$A_1 = 0{,}125$ $\qquad A_T = 3$

Con lo cual el coeficiente de convergencia da

$$\beta = \frac{A_1}{2\,A_T} = \frac{0{,}125}{6} = 0{,}020\ 8$$

CONCLUSIONES

Al considerar en el modelo de la telaraña las funciones de demanda y oferta definidas a partir de números borrosos, se puede estudiar la convergencia de la trayectoria que muestra el precio desde un punto de vista más realista y permite establecer un coeficiente de convergencia que da, en cada situación, la convergencia del precio con una cierta posibilidad, que deriva de establecer una comparación entre números borrosos. También se estudia el caso particular en el que alguno de los dos números borrosos que aparecen en el modelo sea nítido.

REFERENCIAS

1. **BERTRAN, X.:** "Nous aspectes de la teoria dels subconjunts borrosos i estudi d'algunes aplicacions a modela económics", Tesis Doctoral, Girona, julio de 2001.
2. **BUCKEY, J.J.:** *Solving Fuzzy Equations in Economics and Finance, Fuzzy Sets and Sistems*, 48, 1992.
3. **CHIANG, A.C.:** *Métodos fundamentales de economía matemática*, Ed.McGraw-Hill, Madrid, 1987.
4. **DUBOUS, D. AND H. PRADE:** *Operations on Fuzzy Numbers. International Journal of Systems*, Vol. 9, No. 6.
5. **KAUFFMANN, A.:** *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos*, Ed. CECSA, Ciudad de México, 1982.
6. **KAUFFMANN, A. Y J. GIL ALUJA:** *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, 2da. ed., Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1992.
7. **——— :** *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre. Elementos básicos para su aplicación en economía.* Ed Ceura, Madrid, 1990.
8. **—————— :** *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed.Hispano-Europea, Barcelona, 1987.
9. **YAGER, R. R. AND D. BASSON:** *Decision-Making with Fuzzy Sets. Decision Sci*. No. 3, 1975.
10. **ZADEH, L. A.:** *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems*, No. 1, 1978.