

Modelo de comportamiento en servicio para estructuras reticulares de hormigón

Parte II: Diagrama tensión - deformación para elementos fisurados a flexión

Serviceability model for concrete frames
Part II: Stress - strain diagram for cracked flexural members

LI. Torres

Prof. Universitat de Girona



X. Cahís

Prof. Universitat de Girona



F. López Almansa

Prof. Universitat Politècnica de Catalunya



L. Bozzo

Prof. Universitat de Girona

RESUMEN

Se presenta una metodología general para ajustar los coeficientes que definen una ley constitutiva para modelizar el comportamiento en condiciones de servicio de secciones fisuradas de hormigón, sometidas a flexión simple o acompañada de compresión. Aunque para este fin pueden emplearse datos experimentales, el trabajo se centra en la utilización de los modelos propuestos por el CEB, de manera que se obtienen conclusiones más generales no circunscritas a ensayos determinados. Mediante un estudio paramétrico se determinan las variables que tienen más incidencia en el efecto de *Tension-Stiffening* y se halla una expresión simplificada válida para secciones rectangulares. Asimismo se ha realizado un estudio sistemático de la capacidad del método para predecir los efectos a largo plazo. La metodología puede ser implementada como un proceso inicial en un modelo general de cálculo como el presentado en la Parte I.

SUMMARY

This paper presents a general methodology to adjust the coefficients defining a constitutive law for tensioned concrete to simulate, under serviceability conditions, the behavior of cracked concrete members subjected to simple and combined bending (with axial compressive forces). Although experimental results could be used to attain the mentioned objective, in this work the models proposed by the CEB are utilized, in order to obtain more general conclusions not subjected to

specific experiments. A numerical parametrical analysis is performed to determine the more significant variables influencing the Tension-Stiffening effect and a simplified closed-form solution is derived for rectangular sections. A systematic study has been made to verify the ability of the method to simulate long-term effects. The methodology can be implemented as an initial process in a general model of analysis like the one presented in Part I.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando en un elemento de hormigón armado aparecen esfuerzos que generan tensiones de tracción que superan la resistencia del hormigón, éste se fisura. Debido al efecto de la adherencia con las armaduras, el hormigón situado entre fisuras resiste una cierta fuerza de tracción normal al plano de las mismas, dando lugar al fenómeno conocido como *Tension-Stiffening (T-S)*.

Para tener en cuenta este fenómeno se han presentado propuestas muy diversas, desde modelos basados en el mecanismo de adherencia entre acero y hormigón (*bond - slip*), hasta procedimientos simplificados como el método de Branson [1]. Su aplicación a modelos generales, como el propuesto en la Parte I, suele presentar dificultades, en unos casos por su grado de complejidad y en otros por su excesiva simplicidad.

En una situación intermedia se encuentran los métodos basados en el uso de relaciones entre las deformaciones y los esfuerzos aplicados (axil - deformación unitaria, momento -



curvatura) obteniéndose una respuesta seccional media. Es el caso del modelo propuesto por el CEB en el "Manual de Fisuración y Deformaciones" (MFD) [2], recogido en el CEB-FIP Model Code-90 (MC-90) [3] y en el Eurocódigo-2 (EC-2) [4]. El método ha sido ampliamente utilizado y contrastado con numerosos resultados experimentales, tanto en comportamiento instantáneo como diferido, involucrando a la mayoría de los factores que intervienen en el fenómeno [5-8]. Como inconveniente cabría citar la necesidad de realizar un doble cálculo en el tiempo para secciones no fisuradas y totalmente fisuradas, y la dificultad de su uso en situaciones de secciones evolutivas y cargas variables.

Uno de los procedimientos más empleados en los últimos años para la modelización del T-S, contemplando la fisuración como un fenómeno distribuido, ha consistido en el uso de una ley constitutiva modificada para el hormigón en tracción. Esta metodología fue inicialmente introducida por Scanlon [9] y ha sido aplicada por numerosos autores con distintas variaciones, como pueden ser Lin y Scodelis [10], Gilbert y Warner [11], Damjanic y Owen [12], Bazant y Oh [13] y Prakhya y Morley [14], entre otros. El procedimiento ha sido implementado en numerosos modelos de análisis estructural, la mayoría de ellos basados en el MEF [15-17], resultando un sistema directo y con capacidad de ser aplicado a problemas de estructuras a escala real. Aun cuando la idea básica de dichas leyes es similar, existen notables diferencias entre los coeficientes propuestos para definir su forma, la deformación máxima hasta la cual el efecto de T-S debe considerarse, la pendiente de las curvas o la magnitud de las discontinuidades en el caso de diagramas escalonados.

Los resultados experimentales han puesto de manifiesto que existen numerosos factores que afectan al T-S: cuantía de acero, diámetro de las barras, características resistentes del hormigón, adherencia, etc. [18-20]. Ha habido algunas propuestas para relacionar la forma de las leyes constitutivas con dichos parámetros. Así, por ejemplo, Prakhya y Morley [14], usaron un procedimiento de ajuste a valores experimentales y hallaron una expresión dependiente del porcentaje de armadura en el área de tracción, de su recubrimiento, separación y superficie específica. Aun cuando la correlación no fue muy buena, presentaba interés por la metodología y por su utilidad práctica. Massicotte et al. [21], a partir de una curva de *Tension - Softening* determinada de resultados experimentales y de la idea de interpolar entre los estados I (no fisurado) y II₀ (totalmente fisurado) propusieron que la contribución del hormigón dependía del producto de la relación de módulos y cuantía (np), de la resistencia a tracción, del módulo de deformación del hormigón y del límite elástico del acero. Ambos trabajos presentan la particularidad de introducir distintos factores seccionales en la formulación. Por otra parte, debe indicarse que en ellos se estudiaba únicamente el comportamiento instantáneo y que se calibraron con unas series específicas de ensayos, lo cual podría hacerles perder actualidad y generalidad.

Recientemente, el Grupo de Trabajo V/4 del GEHO [22] ha realizado un estudio en el que se han ajustado las curvas usadas por Prakhya y Morley [14] a los valores obtenidos por el modelo del MC-90 [3] para tracción, hallándose una expresión en función de la cuantía de armadura referida al área eficaz. El traba-

jo presenta un gran interés por su metodología y resultados, aun cuando se ha circunscrito a estructuras mixtas de perfiles de acero y hormigón armado. Asimismo Kaklauskas y Ghaboussi [23] han propuesto un método para determinar la ley tensión - deformación en vigas a flexión basándose en resultados de ensayos experimentales, y aplicarlo al desarrollo de leyes constitutivas a partir de modelos de redes neuronales que puedan incorporar la influencia de múltiples parámetros.

En este trabajo se presenta una metodología general para ajustar la ley constitutiva del hormigón en tracción al comportamiento seccional en flexión definido por diagramas Momento - Curvatura (M-C) determinados según los procedimientos propuestos por el CEB [2]. El diagrama utilizado para el comportamiento en tracción del hormigón es similar al propuesto por Damjanic y Owen [12] y se muestra en la Figura 1. Los coeficientes α_1 y α_2 adoptados afectan a la resistencia a tracción f_{ct} y a la deformación correspondiente ϵ_{ct} , respectivamente.

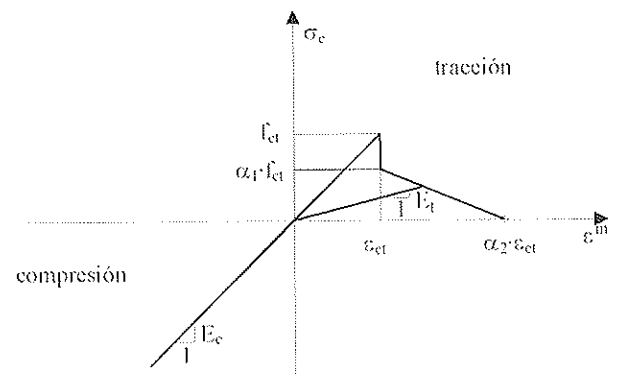


Figura 1. Ley constitutiva adoptada para el hormigón.

Se realiza un estudio paramétrico para determinar α_1 , se hallan las curvas de respuesta seccional según un procedimiento de interpolación como el definido en [2] y se procede a un ajuste de α_1 y α_2 por mínimos cuadrados. Esta metodología es aplicable a una sección genérica y puede ser implementada como un proceso inicial en un modelo general de cálculo no lineal como el presentado en la Parte I, obteniéndose una respuesta adaptada a las características seccionales. A partir del método general, se lleva a cabo un estudio particularizado para secciones rectangulares, determinando cuáles son las características seccionales que influyen en la ley adoptada y estableciendo una relación sencilla mediante regresión lineal [24].

2. MODELO DE REFERENCIA ADOPTADO

De acuerdo con los trabajos realizados por el CEB, presentados en el MFD [2], el EC-2 [3] indica que la curvatura media seccional puede expresarse mediante

$$C_m = C_1 \quad \sigma_{s2} \leq \sigma_{sr} \quad (1)$$

$$C_m = (1 - \zeta)C_1 + \zeta C_2 \quad (2)$$

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\sigma_{sr} / \sigma_{s2} \right) \quad (3)$$

donde C_m , C_1 y C_2 , son la curvatura media y las correspondientes a los estados I y II₀, respectivamente; β_1 es un coeficiente que tiene en cuenta las propiedades adherentes de las barras, de valor 1 para alta adherencia y 0.5 para barras lisas; β_2 tiene en cuenta la duración de la carga, siendo 1 para carga única de corta duración y 0.5 para cargas mantenidas o ciclos de cargas repetidas; σ_{s2} es la tensión en el acero traccionado suponiendo la sección en estado II₀; y σ_{sr} es la tensión en el acero traccionado calculada en estado II₀ y para las cargas a las que se produce la fisuración (M_{cr} , N).

El mismo procedimiento puede aplicarse para la obtención de la deformación media en una fibra de referencia [7]

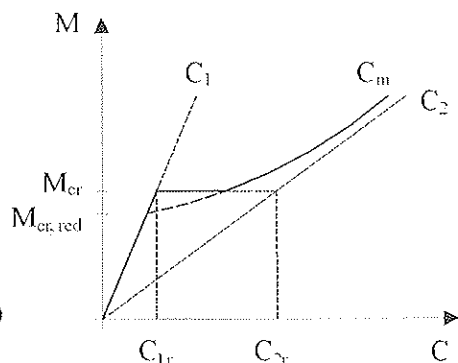
$$\epsilon_{0m} = \epsilon_1 \quad \sigma_{s2} \leq \sigma_{sr} \quad (4)$$

$$\epsilon_{0m} = (1 - \zeta)\epsilon_1 + \zeta \epsilon_2 \quad \sigma_{s2} > \sigma_{sr} \quad (5)$$

siendo ϵ_{0m} , ϵ_{01} , ϵ_{02} , las deformaciones media y de los estados I y II₀.

El MC-90 [3] ha adoptado una formulación similar para la curvatura media, con ligeras modificaciones en el coeficiente de interpolación (p.e. β_2 vale 0.8 para carga de corta duración), e introduciendo el concepto de momento de fisuración reducido $M_{cr,red}$, definido por la intersección de la curva C_m y la recta que representa la curvatura C_1 . Asimismo, Ghali y Favre [7] aplican un procedimiento de interpolación en el que en lugar del cociente $(\sigma_{sr} / \sigma_{s2})$ utilizan (f_{ct} / σ_{1max}) donde f_{ct} es la resistencia a tracción del hormigón y σ_{1max} la tensión de tracción en la fibra extrema de la sección suponiendo sección no fisurada. En la Figura 2 se muestra la forma típica de diagramas $M-C$ obtenidos según los métodos descritos.

(a)

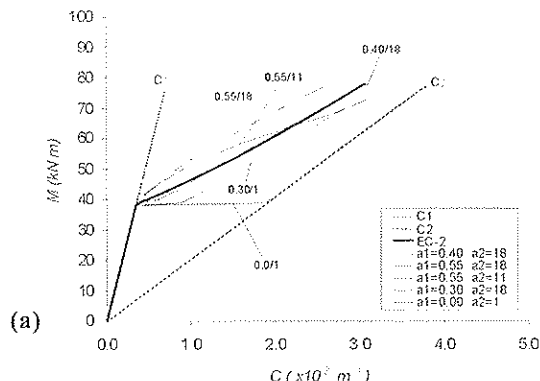


(b)

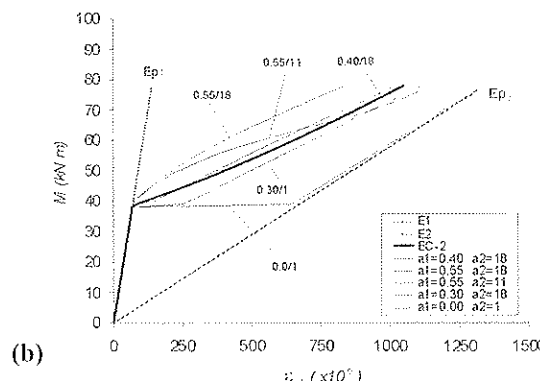
3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES α_1 Y α_2

Se ha implementado un algoritmo de análisis seccional para determinar las curvas $M-C$ y $M-\epsilon_0$ para los estados I y II₀ según un procedimiento general de cálculo paso a paso el tiempo como el propuesto en la Parte I, e interpolando el valor medio de acuerdo con el modelo de referencia indicado. Las mismas curvas se determinan usando una ley constitutiva como la definida en la Figura 1, pudiéndose ajustar los coeficientes α_1 y α_2 minimizando las diferencias al cuadrado entre los dos modelos. Las series de valores se han tomado desde cero hasta el momento de servicio. Las propiedades mecánicas de los materiales se han obtenido de MC-90 [3].

En la Figura 3 se muestran algunos ejemplos de la influencia de α_1 y α_2 referidos a una sección rectangular (HA-30; $b = 0.30$ m; $h = 0.50$ m; $d/h = 0.9$; $\rho = 0.5\%$) sometida a flexión simple. El caso de $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, corresponde a no considerar la colaboración del hormigón entre fisuras. Se observa que según cuales sean los valores adoptados, la respuesta puede ser considerablemente distinta de la del modelo de referencia.



(a)



(b)

Figura 2. Diagramas M-C: a) EC-2; b) MC-90.

Figura 3 - Influencia de α_1 , α_2 : (a) Diagramas Momento - Curvatura; (b) Diagramas Momento - Deformación unitaria acero.

Se ha constatado experimentalmente la influencia de múltiples factores en el fenómeno del *T-S* [18-20], aunque de momento no se han obtenido leyes suficientemente contrastadas que permitan valorar su repercusión. La consideración de métodos de interpolación como los expuestos, adoptados por códigos de reconocido prestigio y verificados por multitud de ensayos experimentales, supone una primera simplificación de los posibles parámetros a considerar. De esta manera, teniendo en cuenta las variables que intervienen en el cálculo analítico de secciones fisuradas y no fisuradas, deberá pensarse básicamente en d/h , d'/h , ρ'/ρ , $n\rho$ ($n = E_s/E_c$) y $\chi\phi$, para secciones rectangulares, añadiendo h_0/d y b_0/b para secciones en T. La simbología anterior queda definida en la Figura 4, siendo $\chi\phi$ el producto del coeficiente de envejecimiento χ por el de fluencia ϕ [25]. Como parámetros adicionales cabría incluir f_{cr} por la intervención del momento de fisuración en el proceso de interpolación y la retracción ϵ_{cs} por su influencia en el comportamiento diferido. Por último, el uso de un procedimiento de ajuste de mínimos cuadrados debe hacer pensar en la posible incidencia de los límites de la serie de valores, que en este caso vendrán dados por la relación entre el momento de fisuración y el de servicio.

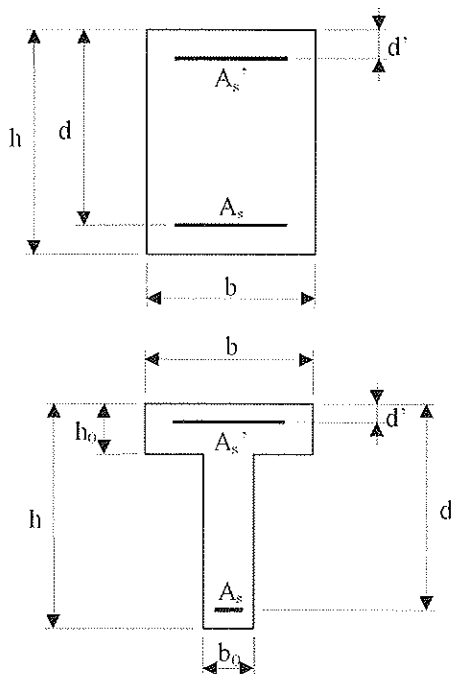


Figura 4 - Nomenclatura seccional adoptada.

En el trabajo que se expone se ha realizado un estudio paramétrico aplicando la metodología indicada a 264 casos de secciones rectangulares o en T, en los que se han variado las características mecánicas y dimensionales de las secciones así como el tipo de esfuerzos, permitiendo observar el comportamiento del modelo frente a diversas variables. El análisis se ha llevado a cabo para hormigones con resistencia entre 25 y 35 MPa y acero de 500 MPa de límite elástico, por considerar que en este rango se incluyen la gran mayoría de los usados habitualmente. Para las secciones rectangulares la variación de parámetros ha sido la siguiente: $b = 0.3 \div 1.0$; $h = 0.3 \div 1.0$ m; $\rho = 0.3\% \div 2\%$; $d/h = 0.8 \div 1.0$; $\rho'/\rho = 0 \div 1$; $d'/h = 0 \div 0.2$; $f_{cr} = 1.95 \div 3.85$ MPa; $E_c = 32000 \div 35000$ MPa.

En el caso de secciones en T: $b = 0.6 \div 1.5$ m; $h = 0.5 \div 1.0$ m; $b_0/b = 0.2 \div 0.4$; $h_0/d = 0.10 \div 0.20$; $\rho = 0.3\% \div 2\%$; $d/h = 0.9$; $\rho'/\rho = 0.5$; $d'/h = 0 \div 0.2$

Del estudio se obtienen algunas conclusiones que son utilizadas en el desarrollo posterior: 1) aun cuando los valores de α_1 y α_2 están relacionados pueden ser determinados independientemente con suficiente precisión; 2) se observa una escasa influencia de ρ'/ρ en los valores de α_1 , α_2 ; 3) los coeficientes ajustados para un valor medio de f_{cr} se muestran válidos para el rango probable de variación de esta magnitud ($f_{crk, min}$, $f_{crk, max}$); 4) el valor ajustado de α_1 se ve afectado por la presencia de esfuerzo axil acompañando al momento flector, pero se muestra poco sensible a las otras variables; 5) el ajuste para comportamiento instantáneo produce resultados suficientemente satisfactorios para el comportamiento diferido; 6) de entre las variables consideradas en el método, d/h y $n\rho$ son las que más influyen en α_2 .

El comportamiento deformacional de una sección en flexión queda definido por los diagramas *M-C* y *M-ε₀*. El estudio paramétrico ha mostrado que los coeficientes α_1 y α_2 con los que se logra el mejor ajuste en ambos tipos de diagrama son ligeramente distintos. En los ejemplos de la Figura 3 se pone de manifiesto este hecho ya que se observa que $\alpha_1 = 0.40$ y $\alpha_2 = 18$, ajusta muy bien la curva *M-C*, mientras que se aprecia una ligera diferencia en la curva *M-ε₀*. Dada la influencia, en general más relevante, de las curvatura en el comportamiento global de estructuras y en el cálculo de flechas, se ha dado prioridad al ajuste de la ley *M-C*, lo cual simplifica notablemente el método. Tomando este criterio las desviaciones que se han observado en las curvas *M-ε₀* no revisten gran importancia y son de un orden parecido al que se muestra en el citado ejemplo de la Figura 3.

3.1. Coeficiente α_1

En el estudio efectuado se ha podido constatar que, en ausencia de esfuerzo axil, un valor de $\alpha_1 = 0.40$ presenta unos resultados suficientemente satisfactorios para la mayoría de los casos.

Es conocida la reducción del *T-S* en presencia de un esfuerzo axil de compresión. Este fenómeno puede ser tenido en cuenta tomando valores decrecientes α_1 . El estudio realizado ha mostrado que la relación M_{cr}/M_{dc} entre el momento de fisuración y el de descompresión (Figura 5) proporciona un parámetro simple para considerar esta variación de α_1 , de manera que cuando la diferencia entre los valores anteriores disminuye, el efecto de *T-S* se reduce y viceversa.

Lo expuesto anteriormente está en consonancia con el método indicado en MFD [2] donde la influencia del esfuerzo axil en el *T-S* se obtiene también de una manera simplificada de la relación entre M_{cr} y M_0 (intersección entre la asíntota a la curva C_2 y la recta C_1) anulándose cuando se igualan. La utilización del criterio expuesto en este trabajo conduce a una expresión más simple y que se ha mostrado válida para la aplicación propuesta.

Se ha observado que para $M_{cr}/M_{dc} \leq 2$ puede prescindirse de la contribución del hormigón entre fisuras sin cometer errores de importancia, de manera que:

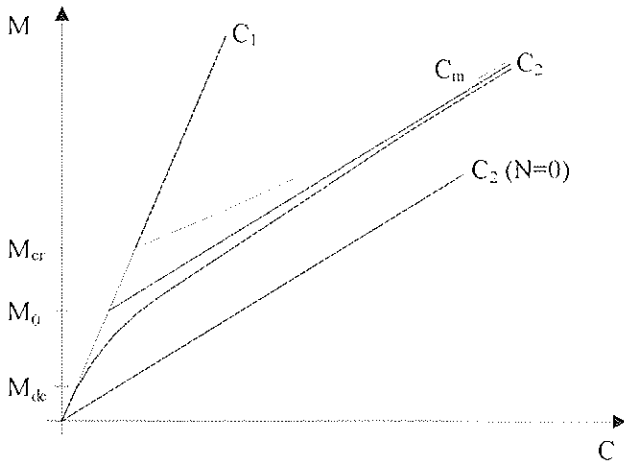


Figura 5 - Diagrama M-C para flexión compuesta.

$$\frac{M_{cr} - M_{dc}}{M_{dc}} = \frac{M_{cr}}{M_{dc}} - 1 = \frac{f_{ct} A}{N} \quad (6)$$

$$\frac{M_{cr}}{M_{dc}} \leq 2 \Rightarrow \frac{f_{ct} A}{N} \leq 1 \quad (7)$$

donde A es el área homogeneizada de la sección (a efectos de cálculo se puede sustituir por el área bruta) y N es el esfuerzo

axil de compresión aplicado en su baricentro.

La consideración de una interpolación lineal entre $N / (f_{ct} A) = 0$ ($\alpha_1 = 0.40$) y $N / (f_{ct} A) = 1$ ($\alpha_1 = 0$) se ajusta bien a los resultados obtenidos, obteniéndose la siguiente ecuación

$$\alpha_1 = 0.4 \left(1 - \frac{N}{f_{ct} A} \right) \geq 0 \quad (8)$$

Como se verá en el apartado siguiente, solamente en el caso de flexión simple ($N = 0$) y cuando la relación entre el momento de servicio y el de fisuración sea muy pequeña ($M_s / M_{cr} < 1.25$), puede mejorarse el ajuste del conjunto α_1, α_2 tomando un valor de 0.45 para el primero en lugar de 0.40.

En Figura 6 se indican algunos ejemplos para secciones rectangulares o en T, con distinto grado de importancia del efecto T-S utilizando el coeficiente α_1 definido por la ecuación (8) y ajustando el de α_2 según se indica en el apartado siguiente. Se puede observar una excelente concordancia en todos los casos.

En la Figura 6(f) se muestra una situación de flexión simple con una relación entre el momento de servicio y el de fisuración de valor pequeño (en este caso $M_s / M_{cr} = 1.15$). Este cociente disminuye cuando lo hacen los valores de ρp y de d/h y cuando aumenta f_{cr} . Manteniendo $\alpha_1 = 0.40$, el ajuste por mínimos cuadrados aumenta mucho el valor de α_2 . Aun cuando esta circunstancia no tiene repercusiones de importancia en el análisis estructural y además el efecto es parecido a una dis-

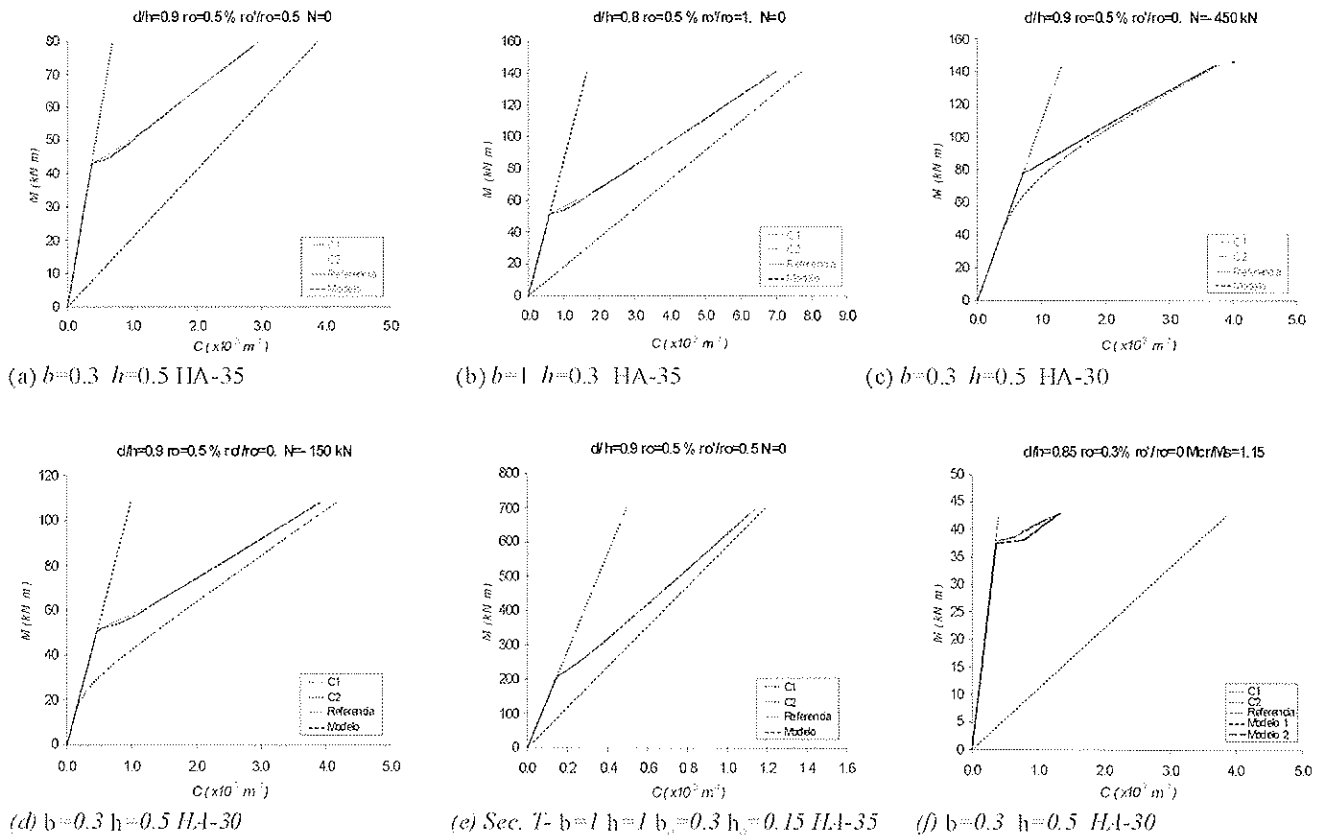


Figura 6 - Ajuste del coeficiente α_1 (unidades en m).

minución del valor de β_2 como hace MC-90 [3], se ha comprobado que para estos casos ($M_s/M_{cr} < 1.25$) se mejora el ajuste con una ligera variación a $\alpha_1 = 0.45$, tal como se observa en la figura indicada (representado como Modelo 1).

3.2. Coeficiente α_2

A partir del valor de α_1 definido por la ec. (6) se ajusta por mínimos cuadrados el valor de α_2 para comportamiento instantáneo, y se comprueba que su implementación según el procedimiento descrito en la Parte I, reproduce de manera satisfactoria el comportamiento diferido.

En la Figura 7 se presentan diversos ejemplos en los que se puede comprobar la escasa influencia de la presencia de armadura de compresión ρ'/ρ y de f_{ct} en el valor de α_2 (ajustado para $\rho'/\rho = 0$ y f_{ctm}), tal como se ha comentado anteriormente. Los gráficos corresponden a una sección rectangular (HA-30, B500S, $b = 0.30$ m, $h = 0.50$ m, $d/h = 0.9$, $d'/h = 0.1$). Los valores de f_{ct} se corresponden con el valor medio y los característicos máximo y mínimo de la resistencia a tracción según MC-90 [3].

En las Figuras 8, 9 y 10 se muestran una serie de ejemplos de comportamiento diferido, referidos a la misma sección utilizada para los ejemplos de la Figura 7. El valor de α_2 se calcula para comportamiento instantáneo. Los diagramas correspondientes al modelo de referencia se han obtenido con la formulación recogida en EC-2 [4], usando un coeficiente $\beta_2 = 0.5$ para carga mantenida. Tomando la idea de momento de fisuración reducido de MC-90 [3], en los gráficos se ha representado con línea discontinua la prolongación de la curva de la zona fisurada hasta su intersección con la correspondiente al comportamiento no fisurado.

Para tres valores distintos de la cuantía de la armadura traccionada, se varía la armadura de compresión y se realiza el análisis para tres intervalos de permanencia de la carga (365, 1825 y 10000 días) siendo $t_0 = 28$ días. Los coeficientes de fluencia y de retracción se han obtenido con la formulación de MC-90 [3] ($HR = 60\%$).

Se puede observar una buena concordancia en todas las situaciones presentadas. Asimismo se aprecia que el uso de un coeficiente β_2 fijo, en el modelo de referencia, produce una discontinuidad del mismo orden para cualquier tiempo de cálculo. Mediante el empleo del modelo propuesto la respuesta se sitúa de manera razonablemente correcta en torno del momento de fisuración reducido observándose que presenta un comportamiento racional, de manera que el momento de fisuración disminuye con el tiempo debido a la influencia de la retracción, siendo este efecto más acusado al aumentar la cuantía de la armadura.

3.3. Sensibilidad del procedimiento propuesto

En este apartado se analiza la sensibilidad de la metodología propuesta con respecto del valor ajustado de α_2 . Se analiza la sección utilizada en el apartado anterior sometida a flexión simple para diferentes combinaciones de los parámetros más relevantes ρ y d/h . Se determina el coeficiente α_2 por el método presentado y se va variando su valor hasta obtener diferencias máximas del 5 y del 10 %, en valor absoluto, entre las curvaturas de los diagramas $M - C$ de referencia y el generado con el modelo (más allá de las pequeñas discontinuidades próximas al momento de fisuración). Los resultados se presentan en la Tabla 1.

Los resultados de la Tabla 1 muestran claramente la dependencia de α_2 de las propiedades seccionales. No obstante se

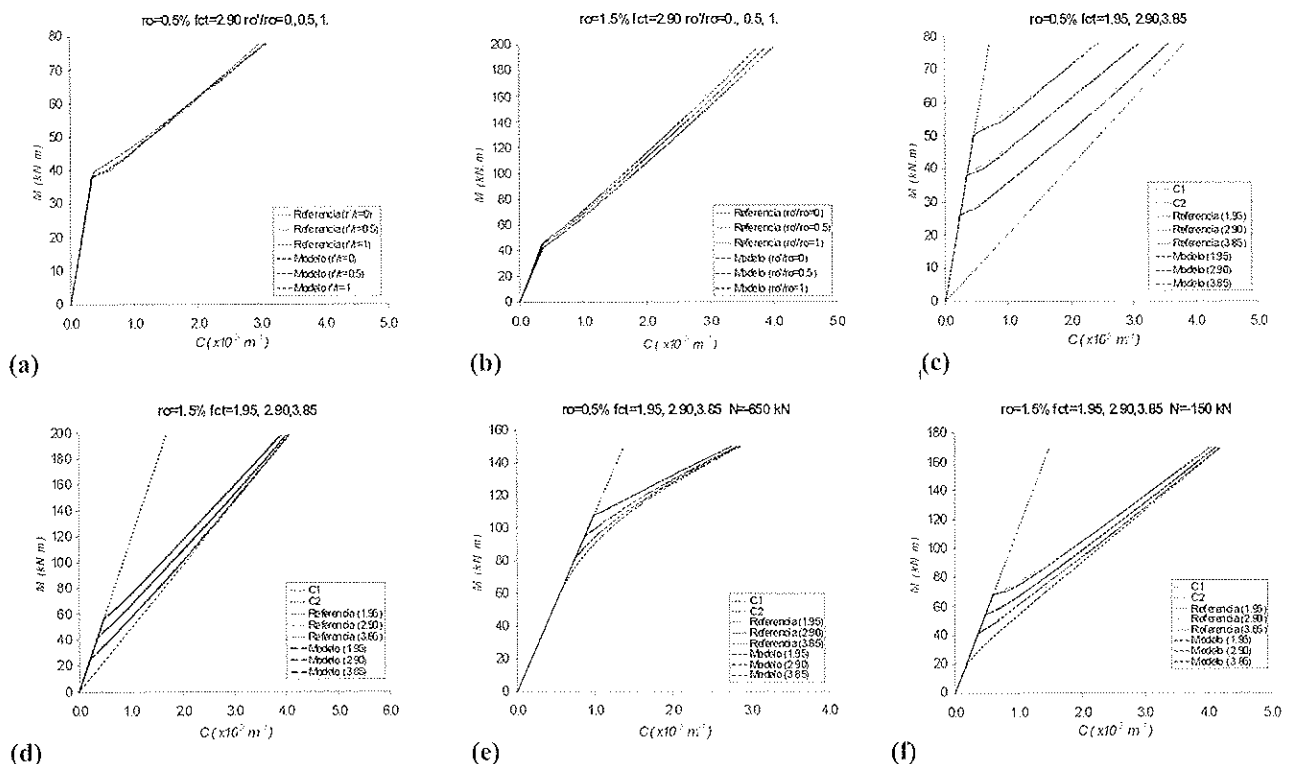


Figura 7. Ajuste del coeficiente α_2 . Influencia de diversos factores.

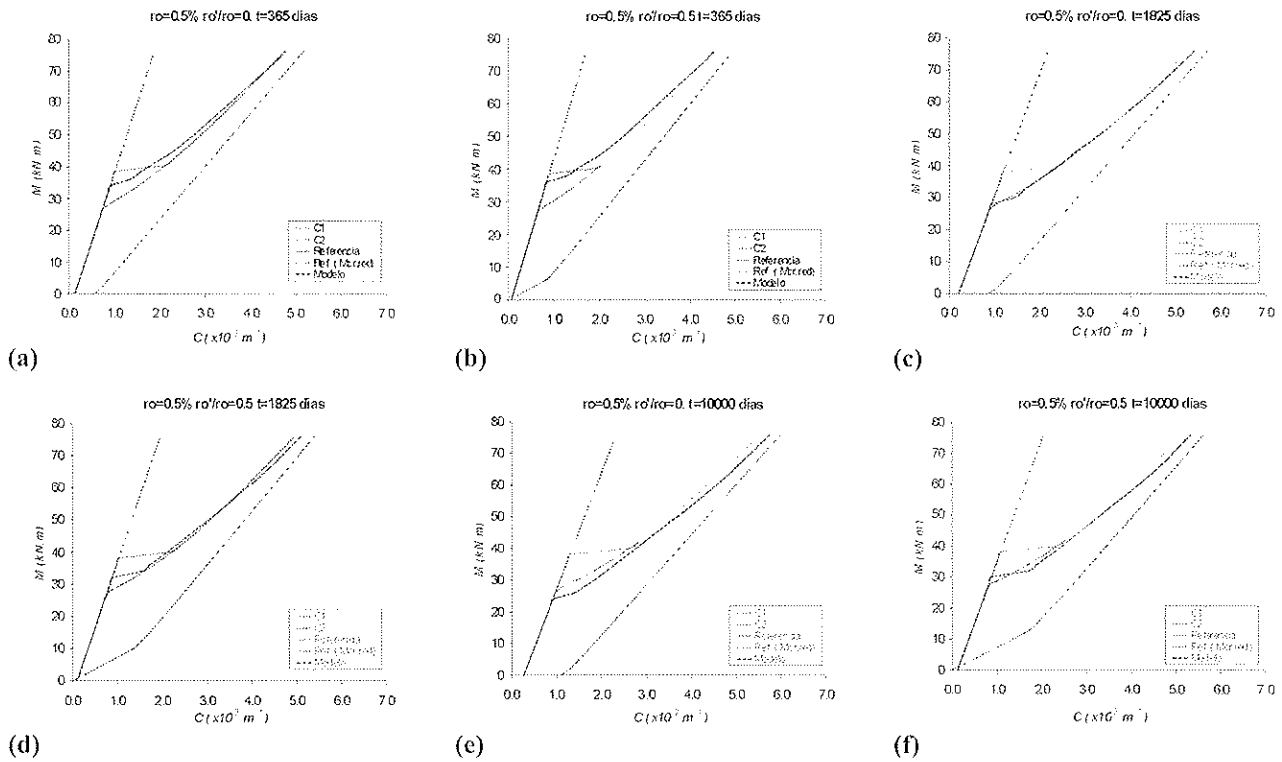


Figura 8. Comportamiento a largo plazo ($\rho = 0.5\%$).

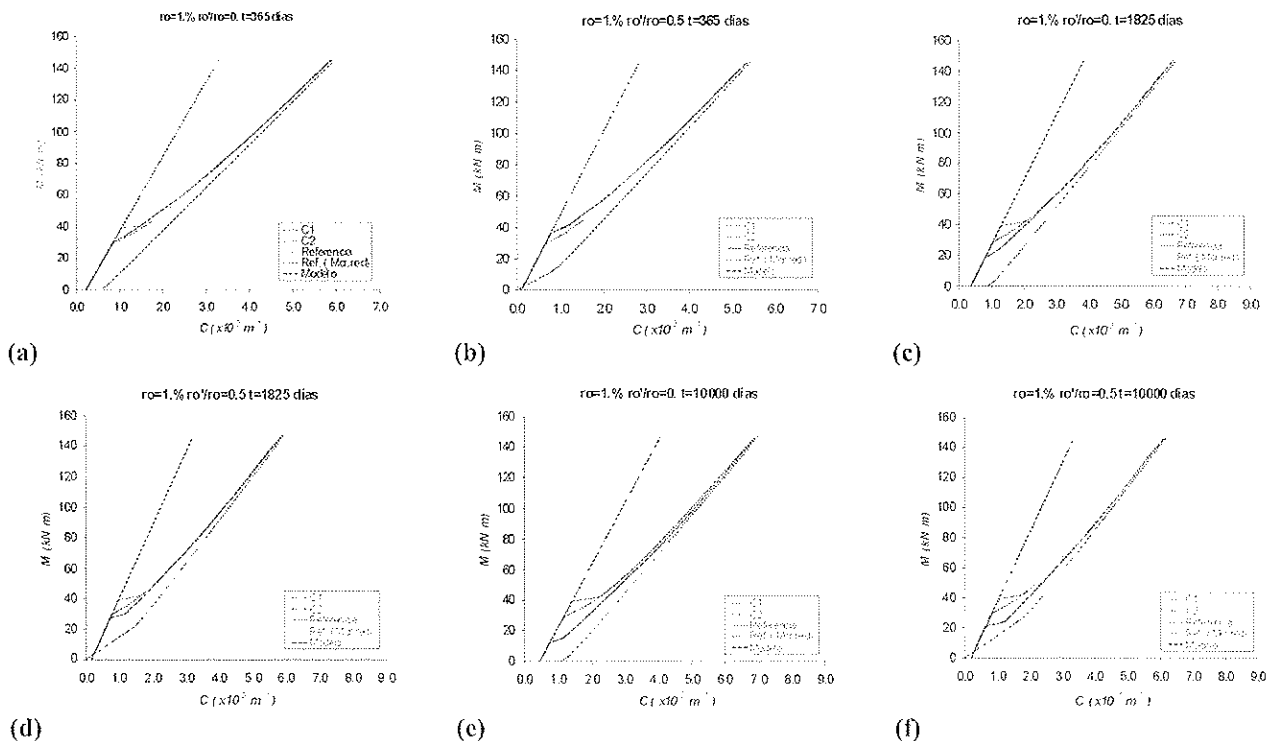


Figura 9. Comportamiento a largo plazo ($\rho = 1\%$).

observa que el procedimiento permite variar el valor ajustado de este coeficiente en un margen relativamente amplio, sin que aparezcan diferencias importantes en los diagramas $M-C$. Es asimismo interesante indicar que para cuantías elevadas y d/h medios o altos, se obtienen valores muy bajos para el límite inferior de α_2 en la columna $\pm 10\%$. Sin embargo si se toma $\alpha_2 = 1$ (ausencia de T-S) las diferencias con el modelo de referencia aumentan a cantidades del orden del 30 al 50% en

la zona baja de momentos, lo cual indica que es conveniente no prescindir de la colaboración del hormigón entre fisuras incluso en estos casos.

Todo ello es indicativo de la robustez del método propuesto y de que una vez fijado α_1 , se permite un cierto margen de variación de α_2 en torno del valor óptimo sin cometer grandes errores. No obstante, éstos pueden disminuirse mediante el



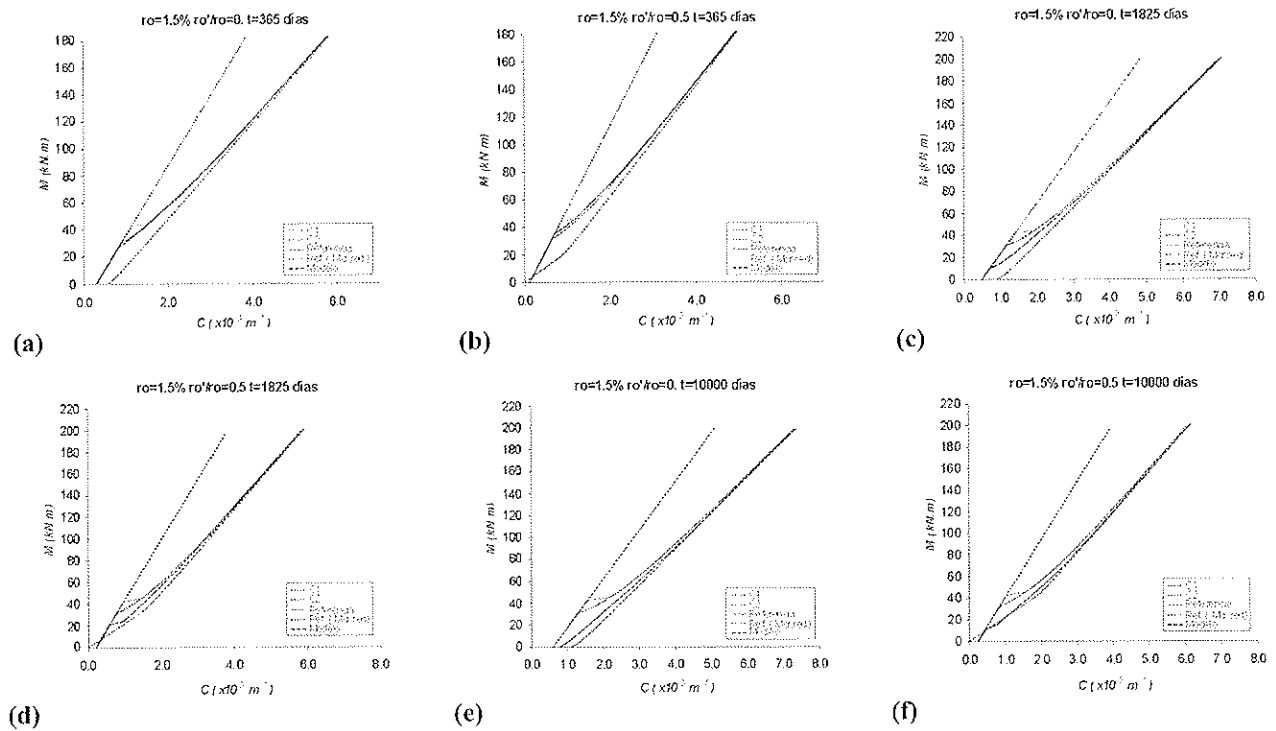


Figura 10. Comportamiento a largo plazo ($\rho = 1.5\%$).

Tabla 1. Sensibilidad del modelo respecto de α_2 .

ρ (%)	d/h	α_2 ajustado	α_2 ($\pm 5\%$)	α_2 ($\pm 10\%$)
0.45	0.8	26.5	24 - 30	21 - 37
	0.9	18.5	16 - 22	15 - 28
	1.0	14.5	13 - 16	11 - 23
1.00	0.8	16.5	14 - 19	11 - 29
	0.9	12.5	9 - 14	7 - 26
	1.0	9.5	6 - 11	4 - 26
1.50	0.8	13.5	10 - 15	7 - 35
	0.9	10.5	6 - 12	5 - (*)
	1.0	8.0	4 - 9	3 - (*)

(*) - No se obtienen diferencias superiores al 10%

uso de los procedimientos de tipo más general expuestos en el presente capítulo, que permiten trabajar con el valor de α_2 adecuado para cada caso.

4. EXPRESIÓN SIMPLIFICADA DE α_2

En los apartados precedentes se ha presentado un procedimiento general para el ajuste del parámetro α_2 , incorporable a un programa de cálculo y aplicable a cualquier tipo de sección y combinación de esfuerzos. En este apartado se deduce una expresión simplificada para secciones rectangulares en flexión simple. Se desarrollan las expresiones analíticas para el modelo de referencia y el propuesto, se generan los valores de α_2 que los ajustan por mínimos cuadrados y por regresión lineal se obtiene una expresión para este coeficiente en función de $n\rho$ y d/h . De acuerdo con las conclusiones previas no se considera la presencia de armadura comprimida ya que tiene escasa influencia en el valor de α_2 .

Expresiones analíticas para el modelo propuesto

Tal como se muestra en la Figura 11, superado el momento de fisuración se distinguen dos situaciones posibles para el diagrama de tensiones según que la fibra extrema esté o no sometida a tensión (a y b).

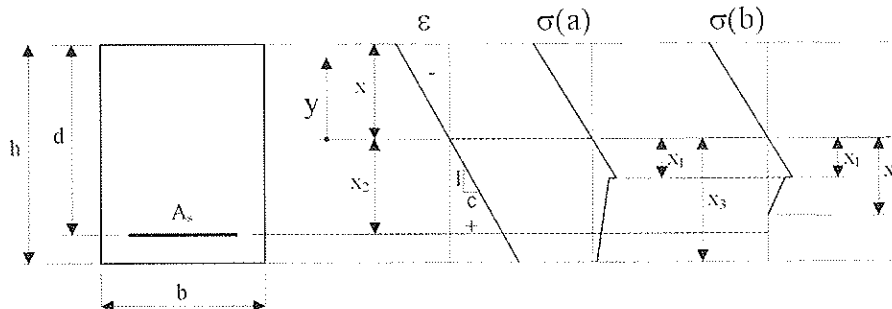


Figura 11. Sección rectangular: tensiones y deformaciones.

Teniendo en cuenta que $f_{ct} = E_c \epsilon_{ct}$ (Figura 1), la curvatura en términos adimensionales puede obtenerse según

$$C d = \frac{f_{ct}}{E_c} \frac{1}{x_1/d} \tag{9}$$

Para un hormigón determinado la curvatura puede ponerse en función del parámetro d/x_1 . Tomando la relación f_{ct}/E_c aproximadamente constante en el rango de hormigones considerados en el estudio paramétrico, pueden suponerse equivalentes los parámetros Cd y d/x_1 .

Se parte de las ecuaciones constitutivas, de equilibrio y de compatibilidad

$$\int E y dA = 0 \quad C = \frac{M}{\int E y^2 dA} \quad \epsilon = -C y \tag{10}$$

donde y es la ordenada (tomando como origen de coordenadas el centroide de la sección homogeneizada), E es el módulo secante de los materiales, acero u hormigón. En el caso de sobrepasar la resistencia a tracción, el valor de E_t (Figura 1) es:

$$E_t = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1}\right) E_c - \frac{\alpha_1 f_{ct}}{C y} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}\right) \tag{11}$$

Caso a (Fig. 10). Del desarrollo de las ecuaciones (10) en forma adimensional se obtiene el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} & A \left[(x_1/d)^2 - (h/d - x/d)^2 \right] + \\ & 2(A + \alpha_1)(x_1/d)(h/d - x/d - x_1/d) - \\ & (x/d)^2 + (x_1/d)^2 + 2n\rho(1 - x/d) = 0 \end{aligned} \tag{12 a}$$

$$\begin{aligned} & 1/3 A \left[(x_1/d)^3 - (h/d - x/d)^3 \right] - \\ & \frac{1}{2} (x_1/d) (A + \alpha_1) \left[(x_1/d)^2 - (h/d - x/d)^2 \right] + \\ & \frac{1}{3} (x/d)^3 + \frac{1}{3} (x_1/d)^3 + n\rho(1 - x/d)^2 - m(x_1/d) = 0 \end{aligned} \tag{12 b}$$

siendo

$$A = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1}\right) \quad m = \frac{1}{f_{ct}} \frac{M}{bd^2} = \frac{1}{r_{cr}} \frac{W}{bd^2} \tag{13}$$

donde W es el módulo resistente y r_{cr} es la relación entre el momento de fisuración M_{cr} y el momento aplicado M ($r_{cr} = M_{cr}/M$).

Caso b (Fig. 10). Esta situación se presenta cuando se cumple $x_3 < h-x$ lo cual conduce a

$$x_1/d < 1/\alpha_2 (h/d - x/d) \tag{14}$$

En este caso se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} & (x_1/d)^2 \alpha_1 (\alpha_2 - 1) - (x/d)^2 + (x_1/d)^2 + \\ & 2n\rho(1 - x/d) = 0 \end{aligned} \tag{15 a}$$

$$\begin{aligned} & (x_1/d)^3 \alpha_1 (\alpha_2 - 1) (1/3 + 1/6\alpha_2) + 1/3 (x/d)^3 + \\ & 1/3 (x_1/d)^3 + n\rho(1 - x/d)^2 - m(x_1/d) = 0 \end{aligned} \tag{15 b}$$

Expresiones analíticas para el modelo de referencia

La ecuación (2), para el caso de flexión simple, adopta la forma

$$C_m = \frac{M}{E_c I_1} \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 + \frac{M}{E_c I_2} \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2\right] \tag{16}$$

para $M > M_{cr}$.

Sustituyendo (9) en (16) y resolviendo para r_{cr} se obtiene

$$r_{cr} = \frac{(d/x_1) + \sqrt{(d/x_1)^2 - 4 W d'/I_2 (W d'/I_1 - W d'/I_2)}}{2(W d'/I_1 - W d'/I_2)} \tag{17}$$

Por otra parte, $W d'/I_1$ y $W d'/I_2$ vienen dados por

$$W d'/I_1 \approx \frac{2 h' d + 2 n \rho}{(h'/d)^2 - 2 n \rho (1 - h'/d)} \tag{18}$$

$$W d'/I_2 \approx \frac{1/12 (h' d)^3 + (h'/d) (x/d - 0.5 h' d)^2 + n \rho (1 - x/d)^2}{\left(1/3 (x/d)^3 + n \rho (1 - x/d)^2\right) (h' d - x/d)} \tag{19}$$

donde

$$x/d = n \rho \left(-1 + \sqrt{1 + 2/(n \rho)}\right) \tag{20}$$

Expresión para α_2

Las ecuaciones (12), (15) y (17) deducidas en los subpartados anteriores permiten la obtención de diagramas adimensionales $Cd - 1/r_{cr}$ para los dos modelos expuestos en función de los parámetros seccionales d/h y $n\rho$. Adoptando $\alpha_1 = 0.40$ se ajusta el valor de α_2 por mínimos cuadrados.

En sentido estricto el valor ajustado de α_2 puede depender de la amplitud del intervalo para el que se calculan las diferencias al cuadrado y por tanto del valor máximo de $1/r_{cr} = M_s/M_{cr}$. Si para la determinación del momento de servicio se adopta la ec. (21) [26], donde ω es la cuantía mecánica y μ el momento reducido, se tendrá el valor de $1/r_{cr,max}$ dado por la ec. (22).

