

# Modelo de comportamiento en servicio para estructuras reticulares de hormigón

## Parte I: Descripción del modelo y ejemplos de aplicación

### *Serviceability model for concrete frames* *Part I: Description of the model and application examples*

**LI. Torres**

Prof. Universitat de Girona



**X. Cahís**

Prof. Universitat de Girona



**F. López Almansa**

Prof. Universitat Politècnica de Catalunya



**L. Bozzo**

Prof. Universitat de Girona

#### RESUMEN

Se presenta un modelo general para el análisis en servicio, instantáneo y diferido, de estructuras reticulares planas de hormigón estructural. El desarrollo se basa en una extensión de la formulación matricial para análisis de barras en la que se tienen en cuenta los principales aspectos que influyen en el comportamiento estructural del hormigón como son fisuración, fluencia, retracción o pérdidas de pretensado. Se adopta un modelo de fisuración distribuida (desarrollado en la Parte II) basado en la modificación del diagrama constitutivo del hormigón. El planteamiento general permite su aplicación a distintos materiales y leyes de comportamiento. Se contempla la construcción evolutiva (seccional y estructural) con posibilidad de incorporación de refuerzos, consideración de la historia de cargas, de los procesos de cimbrado y descimbrado o de la restricción o liberación de grados de libertad. Se incluyen ejemplos para mostrar las posibilidades del modelo.

#### SUMMARY

*A general method for instantaneous and time-dependent serviceability analysis of plane concrete frames is presented. The methodology is based in an extension of the classic matrix formulation for bars. The main aspects influencing the behavior of the structural concrete are considered: cracking, creep, shrinkage or prestress losses. To simulate the effect of cracking a smeared model (developed in Part II) based on the modification of the tensile branch of the concrete stress-*

*strain relationship is adopted. The general approach considered permits the application to different materials and constitutive laws. Sequential construction (sectional and structural), incorporation of reinforcement, consideration of the loads history, placing and removing shores, and restraining or releasing in boundary conditions are considered. Some examples are included to highlight the capabilities of the model.*

#### 1. INTRODUCCIÓN

La determinación de la situación tensodeformacional del hormigón estructural, sometido a cargas de servicio, constituye un problema complejo en el que intervienen multitud de factores, entre los que cabe destacar el comportamiento conjunto de dos o más materiales con propiedades distintas, la adecuada modelización de la fisuración, la variación de las propiedades resistentes con el tiempo y la influencia del comportamiento reológico de los materiales empleados. En los casos de reparación o de construcción evolutiva habrá que añadir a los aspectos anteriores los cambios de las características resistentes de la sección (daños, corrosión, refuerzos), la influencia del proceso constructivo y de la historia de cargas.

Frente al empleo de métodos de análisis simplificado del comportamiento seccional en servicio, con un ámbito más restringido de aplicación, surge la necesidad de desarrollar modelos de análisis generales en los que se contemplen de manera racional los fenómenos descritos en el apartado anterior, tal como recoge la actual Instrucción de Hormigón

Estructural EHE [1]. Por otra parte, la disponibilidad de ordenadores personales con creciente potencia de cálculo y capacidad de memoria posibilita en gran medida su aplicación a un número cada vez mayor de casos.

Con distintos grados de complejidad y de generalidad, en los últimos años se han desarrollado diversos procedimientos para el análisis en el tiempo de estructuras reticulares de hormigón. Así, existen modelos de tipo general para el análisis no lineal instantáneo y diferido como los de Kang [2], Marí [3,4], Carol y Murcia [5] y Ulm et al. [6]. Otros como los de Van Zyl y Scordelis [7], Ketchum [8], Abbas y Scordelis [9], Millanes [10], Murcia y Henkerkoff [11], incluyen los efectos de la construcción evolutiva, aunque adoleciendo algunos de ellos de la inclusión de la fisuración, del efecto de *Tension-Stiffening* (colaboración del hormigón traccionado entre fisuras) o de la consideración de la evolución en las dos direcciones, transversal y longitudinal.

Muchos de los modelos citados se basan en el Método de los Elementos Finitos (MEF) [2, 3, 7-9], sin embargo para el análisis de estructuras constituidas por barras también se han desarrollado procedimientos basados en la extensión de los métodos matriciales hacia una Formulación Matricial Generalizada (FMG) [4, 5, 12], la cual ha sido aplicada asimismo a otros tipos de estructuras y materiales (elementos curvos de obra de fábrica, Molins y Roca [13]). Esta metodología se caracteriza por el establecimiento "exacto" del equilibrio entre cargas exteriores y esfuerzos internos. No es necesaria la discretización de las barras en elementos de menor dimensión (reduciéndose así los grados de libertad del problema) ni el empleo de funciones de forma para aproximar la ley de desplazamientos. Como contrapartida, deben efectuarse integraciones a lo largo de los elementos para lo cual deben adoptarse reglas numéricas adecuadas.

Dentro de los modelos generales escalables a estructuras reales, basados en la formulación matricial, que incluyen la construcción evolutiva, la fisuración y el análisis diferido, cabe destacar el trabajo de Ghali y Elbadry [14], que incorpora el *Tension-Stiffening* mediante interpolación del comportamiento entre secciones totalmente fisuradas y no fisuradas [15], con la realización de un doble cálculo durante el proceso de análisis en el tiempo y la utilización del método AEMM (módulo efectivo ajustado con la edad) [16, 17] que permite la consideración de períodos largos a costa de suponer una variación preestablecida de la tensión con el tiempo. Más recientemente Cruz et al. [18] y Marí [19] han presentado modelos muy completos para construcción evolutiva basados en el MEF.

Por lo que se refiere al comportamiento en servicio y a la incidencia estructural de las propiedades diferidas del hormigón, con aplicaciones a construcción en diversas fases, cabe destacar los recientes trabajos de Pérez Caldentey [20] y del Grupo de Trabajo II/3 del GEHO [21].

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo de análisis en servicio para estructuras reticulares planas de hormigón (armado o pretensado), aplicable asimismo a estructuras mixtas y de acero, basado en la FMG [22, 23]. Las secciones se discretizan en capas y el comportamiento en el

tiempo se describe mediante un método paso a paso. Incorpora los aspectos más relevantes del análisis de pórticos, se incluyen las no linealidades geométricas y se ha hecho especial incidencia en la implementación del efecto de *Tension-Stiffening* (instantáneo y diferido) y de la influencia del proceso constructivo. La contribución del hormigón traccionado entre fisuras se tiene en cuenta mediante la modificación de la ley constitutiva del hormigón, lo cual proporciona un método directo y genérico, ajustable a datos experimentales, a modelos contrastados. Se tiene en cuenta la construcción evolutiva (seccional y estructural), la incorporación de refuerzos, la historia de cargas, los procesos de cimbrado y descimbrado, la variación de las propiedades de los materiales con el tiempo o el empleo conjunto de distintos materiales. La implementación de la metodología ha mostrado su capacidad para el análisis de estructuras a escala real con un número relativamente importante de nudos y barras.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El desarrollo se realiza para el análisis de estructuras de barras en dos dimensiones, constituidas por secciones con un eje de simetría, contenido en el plano de carga. Las secciones se discretizan en capas paralelas entre sí y perpendiculares al eje de simetría, pudiéndose anular o incorporar nuevas capas a lo largo del proceso de cálculo. El análisis se lleva a cabo tomando un eje de referencia cualquiera, paralelo a las capas, independizándolo así de la posible variación del baricentro seccional.

El estudio del comportamiento en el tiempo se realiza por etapas. Las cargas exteriores, los esfuerzos de tesado o las variaciones de las propiedades resistentes de una sección (adición, sustitución o supresión de partes seccionales) se incluyen al inicio de una etapa.

### 2.1. Hipótesis básicas

Se han considerado las siguientes hipótesis: (1) las secciones inicialmente planas continúan siendo planas después de la aplicación de una carga o deformación impuesta; (2) no se tienen en cuenta las deformaciones debidas a las tensiones tangenciales; (3) se admite adherencia perfecta entre los distintos materiales que constituyen la estructura; (4) se considera que los esfuerzos se aplican en un plano de simetría de la sección, originándose una situación de flexocompresión recta.

### 2.2. Modelización del comportamiento de los materiales

La deformación en el hormigón en un instante de tiempo  $t$ , se descompone en suma de la mecánica  $\varepsilon_c^m(t)$  y de la no mecánica  $\varepsilon_c^{nm}(t)$ .

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c^m(t) + \varepsilon_c^{nm}(t) \quad (1)$$

$$\varepsilon_c^{nm}(t) = \varepsilon_c^c(t) + \varepsilon_c^s(t) + \varepsilon_c^a(t) + \varepsilon_c^T(t) \quad (2)$$

considerándose como deformación mecánica la producida de manera instantánea por la tensión aplicada, mientras que la no mecánica engloba a la deformación debida a la fluencia  $\epsilon_c^s(t)$ , a la retracción  $\epsilon_c^r(t)$ , al envejecimiento  $\epsilon_c^a(t)$  y a los efectos térmicos  $\epsilon_c^T(t)$  [4,19].

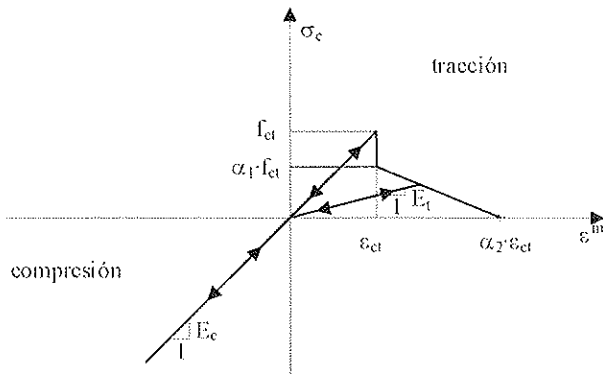


Figura 1. Diagrama tensión - deformación para el hormigón.

En la Figura 1 se muestra el modelo constitutivo instantáneo del hormigón. Para situaciones de servicio, puede adoptarse un comportamiento lineal en compresión, mientras que para el hormigón traccionado se considera una ley lineal siempre que no se supere el valor de la resistencia a tracción  $f_{ct}$ . El efecto de *Tension - Stiffening* se tiene en cuenta adoptando un modelo de fisuración distribuida con una ley constitutiva del hormigón modificada. En este trabajo se ha escogido un diagrama con una forma similar al presentado por Damjanic y Owen [24], de forma sencilla y amplia difusión, en el que la rama decreciente queda definida por los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , que afectan a la resistencia a tracción  $f_{ct}$  y a la deformación correspondiente  $\epsilon_{ct}$ . En un trabajo complementario (Parte II) se presenta una metodología para el ajuste de dichos coeficientes. Los procesos de inversión de cargas se representan siguiendo la trayectoria definida por las flechas del diagrama de la Figura 1. En la zona fisurada la pendiente  $E_s$ , menor que  $E_c$ , tiene en cuenta el grado de fisuración alcanzado hasta el momento.

Ya que el modelo descrito en la Figura 1 es no lineal, el análisis se desarrolla en forma incremental. El incremento de deformación mecánica se obtiene de la ec. (3), donde  $\Delta\sigma_c$  es el incremento de tensión en el hormigón y  $E$  su módulo de deformación, que adoptará distintos valores dependiendo del signo de la tensión y del grado de fisuración.

$$\Delta\epsilon_c^m(t) = \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E(t)} \quad (3)$$

En el tratamiento de la fluencia, para niveles de carga en servicio, puede asumirse linealidad entre las deformaciones y las tensiones (principio de superposición de Boltzman). Para el caso general de un elemento sometido a una tensión variable en el tiempo, supuesto un valor inicial  $\sigma_c(t_0)$  y una función de fluencia  $C(t, t_0)$ , se tiene

$$\epsilon(t) = \sigma(t_0) C(t, t_0) + \int_{t_0}^t C(t, \tau) d\sigma_c(\tau) \quad (4)$$

La resolución de la ec. (4) se plantea mediante un método general de cálculo "paso a paso", subdividiendo el tiempo en intervalos de duración creciente. Los incrementos de tensión se introducen de forma discreta en el instante central de cada intervalo de tiempo, procedimiento que según Kawano y Warner [25] es el que mejores resultados presenta frente a diversas tipologías de variación tensional. De acuerdo con ello la deformación no mecánica de fluencia en un determinado intervalo de tiempo puede obtenerse de

$$\Delta\epsilon_c^s(t_{i+}, t_{(i-1)+}) = \left[ \sum_{j=0}^i \left( \phi(t_{i+}, t_j) - \phi(t_{(i-1)+}, t_j) \right) \frac{\Delta\sigma_c(t_j)}{E_c(t_j)} \right] \quad (5)$$

donde  $t_i$  es el instante central de cálculo del intervalo  $(t_{i+}, t_{(i-1)+})$  y  $t_j$  un instante anterior de aplicación del incremento de tensión  $\Delta\sigma_c(t_j)$ ,  $\phi$  es el coeficiente de fluencia y  $E_c(t_j)$  es el módulo de deformación a tiempo  $t_j$ , que deberá ser  $E_c$  (28) en el caso de usar el modelo de fluencia del CEB-FIP MC-90 [26] (adoptado por defecto en el presente trabajo).

Las deformaciones no mecánicas correspondientes a la retracción y a incrementos de temperatura en un determinado intervalo de tiempo  $(t_{i+}, t_{(i-1)+})$  se hallan mediante

$$\Delta\epsilon_c^r(t_{i+}, t_{(i-1)+}) = \epsilon_s(t_{i+}, t_s) - \epsilon_s(t_{(i-1)+}, t_s) \quad (6)$$

$$\Delta\epsilon_c^T(t_{i+}, t_{(i-1)+}) = \alpha(T_{i+} - T_{(i-1)+}) \quad (7)$$

donde  $\epsilon_s(t_{i+}, t_s)$  representa la deformación debida a la retracción entre el momento en que ésta empieza  $t_s$ , y el instante final del intervalo de cálculo  $t_{i+}$ ;  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal del material; y  $T_{i+}, T_{(i-1)+}$  las temperaturas en los instantes que definen el intervalo de tiempo considerado.

La deformación debida al envejecimiento  $\epsilon_c^a$  se tiene en cuenta considerando en cada instante de cálculo los correspondientes valores de  $E_c(t_i)$  o  $f_{ct}(t_i)$ , obtenidos de forma experimental o usando expresiones proporcionadas por distintos códigos.

El valor total de la deformación a tiempo  $t_{i+}$  según la ec. (1), supuesta una discretización temporal en  $i$  intervalos de cálculo, puede expresarse de la siguiente forma

$$\epsilon_c(t_{i+}) = \sum_{j=0}^i \Delta\epsilon_{c_j}^m + \sum_{j=0}^i \epsilon_{c_j}^{mm} \quad (8)$$

La deformación del acero en el rango de tensiones previsibles en estado de servicio, vendrá dada por la ec. (9), donde  $\Delta\sigma_s$  es el incremento de tensión y  $E_s$  es el módulo de deformación.

$$\Delta\epsilon_s(t) = \frac{\Delta\sigma_s(t)}{E_s} \quad (9)$$

Para la relajación intrínseca de los aceros activos se ha adoptado la formulación del MC-90 [26] dada por la ec. (10),

en la que  $\rho_t$  es la relajación a  $t$  horas,  $\rho_{1000}$  es la relajación a 1000 horas y  $k$  es un factor dependiente de las características del acero que puede tomarse como 0.12 para aceros de Clase 1 y 0.19 para aceros de Clase 2.

$$\rho_t = \rho_{1000} \left( \frac{t}{1000} \right)^k \quad (10)$$

La consideración de los efectos de la relajación a deformación variable se tiene en cuenta mediante el método de las tensiones ficticias (Hernández y Gamble [27]).

El planteamiento expuesto conduce a un modelo abierto que permite la inclusión de distintos refinamientos sobre la base ya establecida. Este podría ser el caso de la consideración de fluencia y retracción diferencial en un mismo tipo de hormigón en una sección o el deslizamiento entre acero y hormigón, entre otros.

### 2.3. Análisis seccional

El comportamiento seccional se obtiene hallando las deformaciones (curvatura  $C$  y deformación unitaria  $\epsilon_0$  de la fibra de referencia) a partir de los esfuerzos internos (momento flector  $M$  y axil  $N$ ).

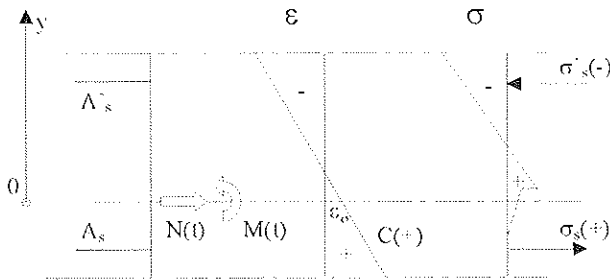


Figura 2. Sección sometida a flexocompresión.

La Figura 2 muestra el convenio de signos utilizado. Las ecuaciones de compatibilidad, equilibrio y constitutivas, en forma incremental son, respectivamente

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_0 - y \Delta C \quad (11)$$

$$\Delta N = \int \Delta \sigma \, dA \quad \Delta M = - \int \Delta \sigma \, y \, dA \quad (12)$$

$$\Delta \sigma = E \, \Delta \epsilon^m + \Delta \sigma^0 = E (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^{mm}) + \Delta \sigma^0 \quad (13)$$

donde  $y$  es la ordenada de la fibra analizada respecto del eje de referencia,  $N$ ,  $M$  los esfuerzos en la sección y  $\sigma^0$  la tensión inicial. De las tres ecuaciones anteriores y la ec. (1) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int E \, dA & - \int E \, y \, dA \\ - \int E \, y \, dA & \int E \, y^2 \, dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_0 \\ \Delta C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta N^0 \\ \Delta M^0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

siendo  $N^0$  y  $M^0$  unos esfuerzos ficticios capaces de generar las deformaciones no mecánicas y las tensiones iniciales, de tal forma que

$$\begin{aligned} \Delta N^0 &= \int E \, \Delta \epsilon^{mm} \, dA + \int \Delta \sigma^0 \, dA \\ \Delta M^0 &= - \int E \, y \, \Delta \epsilon^{mm} \, dA - \int y \, \Delta \sigma^0 \, dA \end{aligned} \quad (15)$$

De una forma más compacta puede escribirse

$$\sigma = \mathbf{K}_s \epsilon + \sigma^0 \quad (16)$$

donde  $\mathbf{K}_s$  es la matriz de rigidez de la sección;  $\sigma (N, M)^T$  es el vector de esfuerzos seccionales,  $\epsilon (\epsilon_0, C)^T$  el vector de deformaciones totales y  $\sigma^0 (N^0, M^0)^T$  un vector que engloba los esfuerzos debidos a las tensiones y a las deformaciones iniciales [4].

La resolución del sistema de ecuaciones (14) se aborda en forma incremental, aplicando un procedimiento iterativo basado en el método de *Newton-Raphson*. Conocido el estado tensodeformacional al final de un intervalo de cálculo, se halla la matriz de rigidez seccional tangente a partir del estado de fisuración previo; se determina el vector incremento de deformaciones  $(\Delta \epsilon_0, \Delta C)^T$  resolviendo (14); se obtienen los incrementos de deformación  $\Delta \epsilon_i$  en cada capa mediante la ec. (11) y se actualizan  $\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + \Delta \epsilon_i$ ; se hallan las variaciones de tensión  $\Delta \sigma_i$  en cada capa mediante las ecuaciones constitutivas y se actualizan  $\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta \sigma_i$ ; se determina el vector de esfuerzos seccionales  $(N_i, M_i)$  mediante la ec. (12); se hallan los esfuerzos residuales  $N^r_i, M^r_i$ ; siguiendo un esquema iterativo se repiten los pasos anteriores introduciendo  $N^r_i, M^r_i$  en (14) hasta alcanzar la convergencia.

En el caso de añadir capas, el proceso acumulativo de cálculo de tensiones y deformaciones debe partir de un valor inicial nulo para el instante en que se han introducido. Cuando se suprima un grupo de capas, éstas dejarán de contabilizarse en los cálculos desde el momento en que dejen de estar presentes.

En la implementación numérica la situación de fisuración de cada capa se controla mediante una variable que adopta distintos valores según se trate de capa no fisurada, parcialmente fisurada (se ha sobrepasado el valor de  $\epsilon_{ct}$ , pero no se ha llegado a  $\alpha_2 \epsilon_{ct}$ ) y capa totalmente fisurada (se ha sobrepasado  $\alpha_2 \epsilon_{ct}$  y ya no es posible ninguna colaboración del hormigón traccionado). Asimismo, el paso de zona de tracción a compresión, y viceversa, para procesos de inversión de carga se controla con la variable  $\epsilon_{tr}$  definida en la Figura 3.

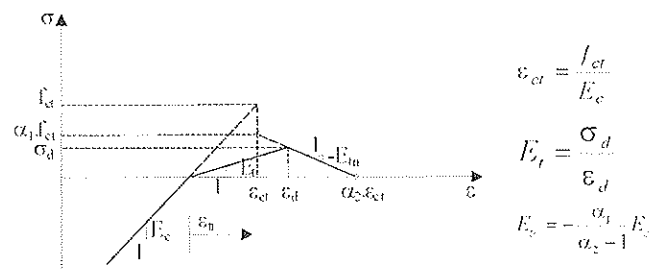


Figura 3. Capa de hormigón parcialmente fisurada.

Por lo que se refiere a la consideración de los efectos diferidos en aquellas capas con una situación de fisuración parcial o total, trabajando en la zona de tracción, la deformación no mecánica de fluencia se determina según la ec. (5) empleando igualmente  $E_c$ , ya que solamente fluye el hormigón entre fisuras, sometido a una tensión media  $\Delta\sigma_c(t)$ . Sin embargo en la determinación de  $N^0$ , se toma  $E_s$  con lo que se pretende modelizar la pérdida de adherencia gradual entre acero y hormigón a medida que aumenta el grado de fisuración. De esta forma

$$\Delta N^0 = \Delta \epsilon_c^{mm} E_t A_c \quad (17)$$

donde  $\Delta \epsilon_c^{mm}$  incluye la retracción. Véase que  $E_t$  varía entre  $E_c$  y cero para capa no fisurada y totalmente fisurada, respectivamente. Ello representa una pérdida de la compatibilidad, no transmitiéndose toda la deformación no mecánica al acero. La relación  $E_t/E_c$  viene a ser un indicativo del daño en la determinación de  $N^0$ , de manera que se tendría el valor máximo para  $E_t = E_c$  y el mínimo para  $E_t = 0$ . Con este planteamiento, cuando la sección está totalmente fisurada, la posible deformación no mecánica sigue contribuyendo al valor de  $\epsilon_w$  (y por tanto podrá influir en la inversión de cargas) pero no tiene el efecto de deformación impuesta sobre la sección.

### 2.4. Análisis estructural

Se cumplirá la siguiente relación entre fuerzas y desplazamientos

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d} + (\mathbf{f}^e + \mathbf{f}^0) \quad (18)$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas aplicadas directamente a los nudos,  $\mathbf{d}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $\mathbf{f}^e$  y  $\mathbf{f}^0$  son, respectivamente, los vectores de fuerzas de empotramiento perfecto debidas a las cargas aplicadas sobre la barra y debidos a las tensiones iniciales y  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global. Asimismo, para cada elemento el vector de fuerzas en extremos de barra  $\mathbf{f}_{el}$  vendrá dado por

$$\mathbf{f}_{el} = \mathbf{K}_{el} \mathbf{d}_{el} + (\mathbf{f}_{el}^e + \mathbf{f}_{el}^0) \quad (19)$$

El convenio adoptado para los ejes de coordenadas y grados de libertad se muestra en la Figura 4.

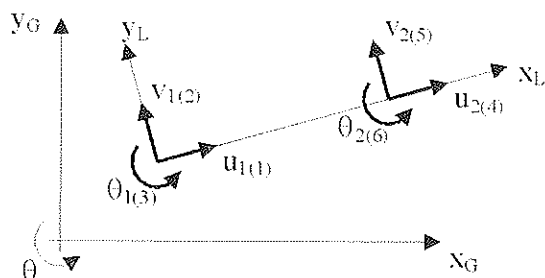


Figura 4. Convenio de signos.

Aplicando las ecuaciones de compatibilidad cinemática se tiene

$$u_2 - u_1 = \int \epsilon_0 dx \quad (20)$$

$$\theta_2 L - (v_2 - v_1) = \int C x dx \quad (21)$$

$$\theta_2 - \theta_1 = - \int C dx \quad (22)$$

Si se permite el desplazamiento unitario alternativo en cada uno de los grados de libertad nodales, manteniendo fijos los demás, las fuerzas en los nudos corresponden a los coeficientes de la matriz de rigidez. Por ejemplo, para el caso del nudo 1 se tiene el esquema de la Figura 5.

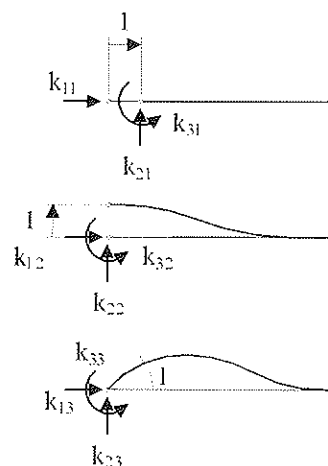


Figura 5. Coeficientes de rigidez del nudo 1.

La matriz de rigidez de la barra es simétrica (6 x 6) y en general sus términos no serán nulos. Por ejemplo, las ecuaciones para  $u_1 = 1$  son las siguientes

$$\begin{aligned} \Delta u_1 = 1 &= \int_0^L \Delta \epsilon_{0(k_{11})} dx - \int_0^L \Delta \epsilon_{0(k_{21})} dx + \int_0^L \Delta \epsilon_{0(k_{31})} dx \\ \Delta v_1 = 0 &= - \int_0^L \Delta C_{(k_{11})} x dx + \int_0^L \Delta C_{(k_{21})} x dx - \int_0^L \Delta C_{(k_{31})} x dx \\ \Delta \theta_1 = 0 &= \int_0^L \Delta C_{(k_{11})} dx - \int_0^L \Delta C_{(k_{21})} dx + \int_0^L \Delta C_{(k_{31})} dx \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\Delta \epsilon_{0(k_{i1})}$ ,  $\Delta C_{(k_{i1})}$  son, respectivamente, la deformación y la curvatura debidos a la aplicación de la fuerza de extremo de barra  $K_{i1}$  en la fibra de referencia. Las integrales se calculan numéricamente (mediante los procedimientos de Gauss-Legendre o Simpson) correspondiendo los puntos de integración con las secciones de control en las que se efectúan los cálculos. De la misma forma pueden ser calculados los coeficientes  $K_{i2}$  y  $K_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), siendo necesario resolver seis ecuaciones debido a la simetría de la matriz. Obtenida la submatriz ( $\mathbf{K}_{1-1}$ ) de dimensión (3 x 3) asociada al extremo 1, por consideraciones de simetría y de equilibrio en las barras puede hallarse la matriz total de (6 x 6).

Las diferencias entre los desplazamientos en los nudos y el resultado de aplicar las ec. (20-22) a cada barra darán lugar a unos desplazamientos desequilibrados (residuales)  $\mathbf{d}^r = (u^r, v^r, \theta^r)^T$  de modo que para restablecer la compatibilidad se requieren unas fuerzas adicionales en el extremo 1 de valor

$$\mathbf{f}_1^r = \mathbf{K}_{1-1} \mathbf{d}^r \quad (24)$$

Los incrementos de fuerzas en el extremo 2 se obtienen imponiendo el equilibrio de la barra. Cuando se introduzca en el cálculo el efecto de las cargas externas el vector  $\mathbf{f}^r$  se corresponde con las denominadas fuerzas de empotramiento perfecto y en las fases intermedias de un proceso iterativo es el vector de fuerzas residuales.

Para la resolución iterativa del problema estructural no lineal, a partir del estado tensodeformacional al final de una etapa de cálculo, se halla  $\Delta \mathbf{d}$  en la ec. (18), considerada en forma incremental, usando  $[\mathbf{K}_{i-1}]$  correspondiente a la iteración anterior; se actualizan los desplazamientos nodales  $\mathbf{d}_i$  y de extremo de barra  $\mathbf{d}_{ei}$ ; se hallan los incrementos de esfuerzos de extremo de barra de acuerdo con (19) y se actualizan sus valores; se determina la rigidez tangente para cada elemento a partir de las características seccionales; se hallan las fuerzas residuales necesarias para restablecer la compatibilidad; se procede al ensamblaje de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales residuales; se repiten los pasos anteriores hasta lograr la convergencia.

Aun cuando en la mayoría de los casos de estructuras de hormigón en servicio, el análisis en primer orden será suficiente, con objeto de dotar al modelo de mayor generalidad se han incorporado las no linealidades de origen geométrico, estableciendo el equilibrio sobre la geometría deformada (segundo orden). Se ha mantenido la hipótesis de pequeñas deformaciones, lo cual hace que no sea necesario reformular la condición de compatibilidad. De esta forma, la matriz de rigidez se va actualizando de acuerdo con la deformación de la estructura y se tiene en cuenta la influencia de los desplazamientos sobre los esfuerzos seccionales.

En la implementación del modelo para estructuras de barras rectas, se ha contemplado la posibilidad de introducir tramos de integración con características resistentes distintas en un mismo elemento, quitar o añadir barras a una cierta configuración deformada y utilizar puntales que solo trabajen a tracción. Debido a que en el planteamiento de un análisis lineal en servicio de estructuras de barras no son de esperar problemas no lineales importantes (*softening, snap-through, snap-back*), el esquema de solución indicado se ha mostrado adecuado para las aplicaciones realizadas hasta el momento, alcanzándose la convergencia de manera satisfactoria. No obstante, el modelo permite la incorporación de estrategias de análisis adecuadas para la resolución de situaciones no lineales complejas y de iteraciones complementarias a nivel de elemento tal como ha sido indicado por Molins y Roca [13] para el caso de estructuras de obra de fábrica.

### 3. CONTRASTACIÓN CON BENCHMARKS

El Subcomité 3 del Comité Técnico TC 114 de la RILEM ha propuesto una base de datos de ensayos experimentales

para la evaluación de programas de cálculo de estructuras de hormigón con fluencia, retracción y fisuración [28]. En este apartado se procede a la contrastación del modelo desarrollado con dos de dichos *benchmarks*.

El primer *benchmark* corresponde a ensayos llevados a cabo en el Instituto Federal Suizo de Tecnología por Jaccoud y Favre [29]. Cinco series de vigas simplemente apoyadas de hormigón armado y sección rectangular, de características similares, ( $b = 750 \text{ mm}$ ;  $h = 160 \text{ mm}$ ,  $A_s = 565 \text{ mm}^2$ ,  $d = 131 \text{ mm}$ ,  $A'_s = 57 \text{ mm}^2$   $d' = 26 \text{ mm}$ ) fueron sometidas a cargas mantenidas, consistentes en el peso propio y dos fuerzas puntuales equidistantes del centro. La longitud de las vigas era de 3.1 m y la separación entre las cargas de 1.10 m.

Las cargas concentradas son diferentes para cada viga, variando entre 6.1 y 15.7 kN con objeto de obtener distintos niveles de fisuración (los momentos flectores máximos se encuentran entre 0.3 y 0.6 veces el momento de agotamiento) y se aplican instantáneamente a la edad de 28 días manteniéndose constantes. Los datos a contrastar consisten en la variación en el tiempo de las flechas en el centro de las vigas. La Figura 6 muestra la comparación de los resultados proporcionados por el cálculo numérico con los de los ensayos de las vigas fisuradas, mostrándose una concordancia satisfactoria.

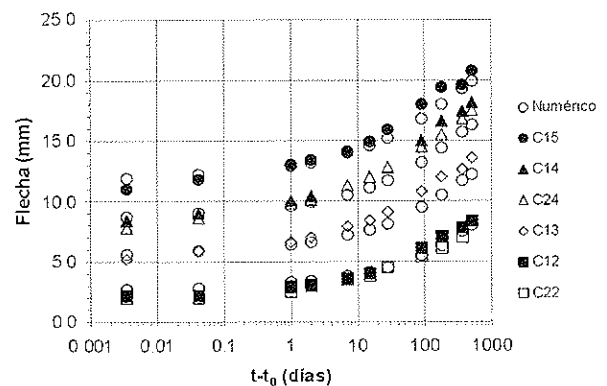


Figura 6. Comparación primer benchmark.

La RILEM destaca como característica interesante de los experimentos la constatación de que la relación entre la flecha total y la instantánea no es independiente del nivel de carga, cosa que no se refleja, por ejemplo, en el método simplificado propuesto por EHE [1] (o por ACI [30]). Así, para la viga C15 esta relación tiene un valor aproximado de 2, mientras que para C22 es de 3.5. En la Tabla 1 se indican los valores experimentales de la flecha final, los obtenidos con el modelo propuesto y los calculados según el método simplificado de EHE [1], observándose para éste último una considerable desviación para niveles de carga intermedios o bajos consecuencia de aplicar el mismo factor multiplicativo en todos los casos.

En el segundo *benchmark* considerado se muestran los resultados de unos ensayos realizados en la Universidad de Bruselas por Espion and Halleux [31]. Una serie de vigas parcialmente pretensadas de sección rectangular ( $b = 340 \text{ mm}$ ;  $h = 400 \text{ mm}$ ) fueron sometidas a cargas mantenidas, consistentes en el peso propio y dos cargas puntuales equidistantes del centro. La longitud era de 8 m y la separación entre las cargas de 4 m.

Tabla 1. Flechas a 538 días en mm

	Modelo propuesto			EHE [1]	
	a	b	b/a	c	c/a
C15	20.75	20.21	0.97	18.56	0.89
C14	18.13	16.62	0.92	12.67	0.70
C24	17.50	15.88	0.91	11.19	0.64
C13	13.56	12.10	0.89	6.61	0.49
C12	8.33	8.37	1.00	2.89	0.36

En este trabajo se consideran dos de dichas vigas (en las que se llegó a la fisuración), con grados de pretensado distinto, uno elevado (LT-0.8-Q) y otro bajo (LT-0.5-Q). El pretensado se efectuó a base de tendones no adherentes con excentricidad constante para la primera y trazado trilineal para la segunda. Las cargas se aplican secuencialmente a partir de los 14 días y se mantienen hasta los cuatro años y medio.

Una característica relevante de estos experimentos y que debe ser tenida en cuenta de manera correcta en su simulación es la interacción entre relajación, fluencia, retracción y fisuración, así como la significativa redistribución de tensiones que tiene lugar entre hormigón y armaduras pasivas.

En el cálculo se han tomado las propiedades reológicas del hormigón de la referencia [31] corregidas para tener en cuenta la variación de espesor medio entre vigas y probetas. La Figura 7 muestra los resultados comparativos entre ensayos y modelo observándose una concordancia satisfactoria.

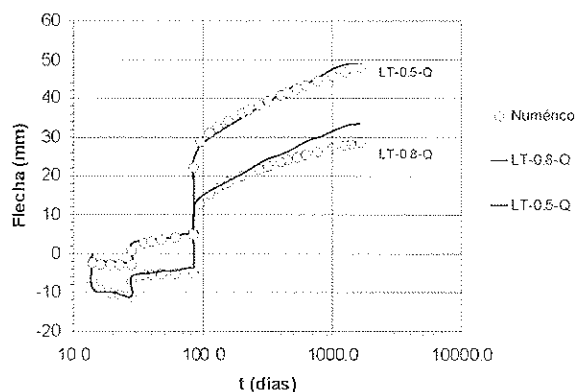


Figura 7. Comparación segundo benchmark.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En este apartado se muestran dos ejemplos de aplicación del modelo desarrollado, con objeto de poner de manifiesto sus aplicaciones y posibilidades más que el hecho de llegar a conclusiones determinadas, para las cuales se requeriría de un uso más amplio y sistemático y que será objeto de trabajos futuros.

4.1. Forjado con prelasas pretensadas

Se analiza el comportamiento en el tiempo de un forjado constituido por una prelisa pretensada prefabricada que se

completa con una capa de hormigón vertido en obra (60 + 160). En el ejemplo presentado se dimensiona un forjado unidireccional simplemente apoyado, con una luz de 5 m y previsto para uso industrial, utilizando para ello las fichas de características técnicas facilitadas por el fabricante. Se obtiene un elemento en el que debe tenerse en cuenta el efecto del pretensado y la presencia de dos hormigones con edades y características distintas. Se aplica una determinada historia de cargas, considerando el proceso constructivo, analizándose el comportamiento tensodeformacional en el tiempo.

Las características seccionales se definen en la Figura 8 y en la Tabla 2.

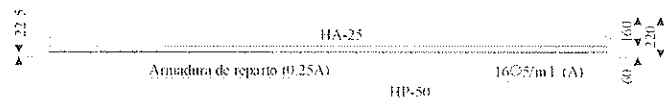


Figura 8. Sección forjado.

Tabla 2. Materiales y armaduras

Hormigón prelosa	HP-50/P/20/IIa
Hormigón en obra	HA-25/B/20/IIa
Acero de pretensado	$f_{max} = 1860$ MPa
Relajación a 1000 horas	1.0; 2.0; 5.5
Armadura activa	16Ø5/m.l.; r = 22.5 mm
Tensión inicial armadura	1300 MPa

La historia de cargas y tiempos considerada se indica en la Tabla 3. Para el uso indicado se supone una relación entre carga cuasipermanente y sobrecarga de 0.7.

Tabla 3. Tiempos y cargas

Operación	t (días)	$\Delta q$ (kN/m <sup>2</sup> )
Hormigonado prelosa	0	—
Transferencia	3	—
Colocación en obra	21	6.0
Descimbrado	35	—
Tabiquería	60	0.5
Pavimento	75	0.5
Entrada en servicio	100	4.5
Carga cuasipermanente	101	-1.5
Sobrecarga de uso	10000	1.5

Las propiedades reológicas del hormigón se determinan según MC-90 [26], suponiendo una humedad relativa del 60%. El comportamiento seccional diferido vendrá influenciado por la presencia de dos hormigones de distinta resistencia y edad.

A título ilustrativo, a continuación, se indican algunos resultados del análisis, como son la evolución de las flechas en el centro de la luz y las deformaciones y tensiones en el hormigón de la prelisa.

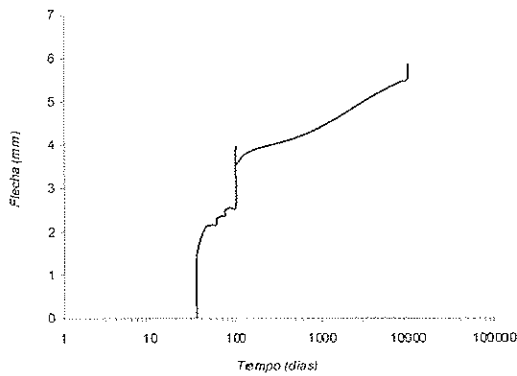


Figura 9. Flecha.

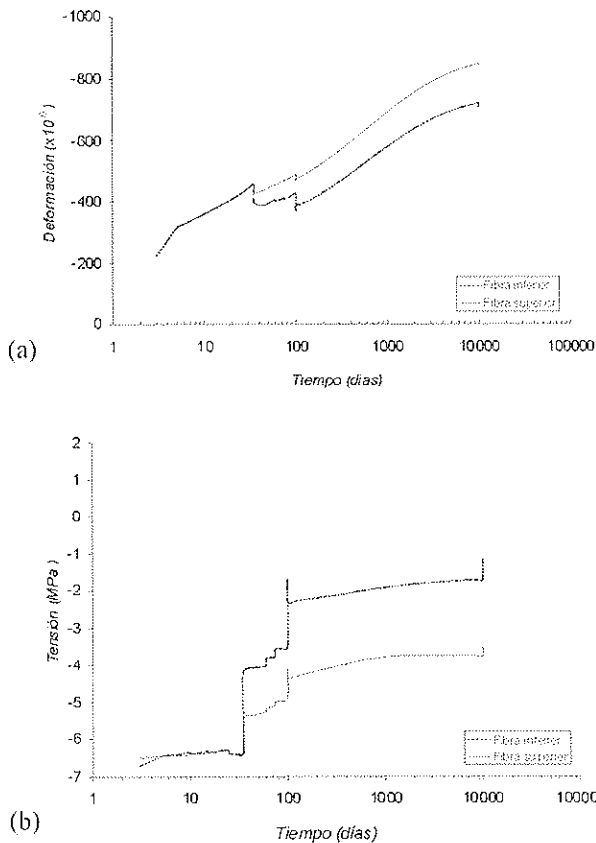


Figura 10 – Fibra superior e inferior en hormigón prelosa: (a) Deformaciones; (b) Tensiones.

En la Figura 9 se puede apreciar la rápida evolución de la flecha al descimbrar a los 35 días desde un valor instantáneo inicial de 1.39 mm hasta 2.16 mm en el momento de la construcción de la tabiquería a los 60 días. Asimismo se advierten los pequeños incrementos debidos a las cargas de tabiquería y pavimento, el importante aumento al aplicar la sobrecarga a los 100 días y la evolución hasta los 10000 días.

En la Figura 10 se indican las deformaciones y tensiones en las fibras inferior y superior del hormigón de la prelosa. Puesto que la armadura está prácticamente centrada, se parte de unos valores aproximadamente idénticos en el momento de la aplicación del pretensado. Hasta la aplicación del hormigón en obra (25 días) se produce un aumento de las deformaciones debido básicamente a los efectos diferidos en el hormi-

gón. A partir de la aplicación de las cargas exteriores (100 días) continúa produciéndose un acortamiento en las fibras de la prelosa por el efecto de las deformaciones no mecánicas, ya que siguen estando en compresión, aunque debido a la flexión provocada por la carga exterior, éste es menor en la fibra superior. En las tensiones se produce un efecto parecido, descargándose la fibra superior respecto de la inferior, aunque la variación entre 100 y 10000 días es mucho menos pronunciada, ya que las deformaciones mecánicas son menores que las no mecánicas.

En la Figura 11 se muestran las posibilidades de uno de los aspectos más interesantes del modelo, cual es la variación de distintos parámetros y su influencia en la respuesta estructural. En este caso se representa la curvatura en la sección central (asimilable a flecha).

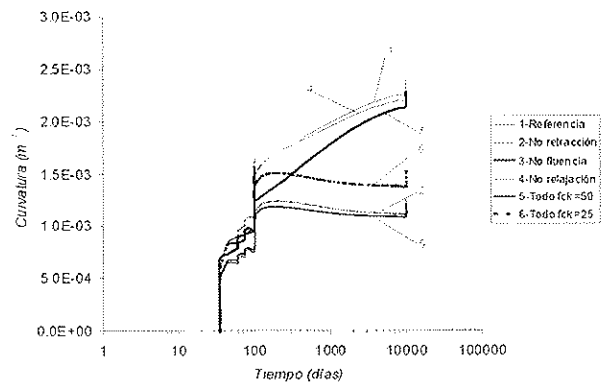


Figura 11. Comparación de curvaturas en sección central.

La curva 1 corresponde a la situación de referencia indicada anteriormente. Se observa la poca incidencia de la relajación (curva 4) y en cambio el gran efecto que produce la retracción, en este caso distinta entre los dos hormigones (mayor en el superior) y favorecedora de la curvatura. Cuando se suprime el efecto de la retracción, la curvatura tiene tendencia a disminuir en la parte final como consecuencia de la acción favorable de la fluencia en la prelosa. Al considerar sección evolutiva, pero con un solo hormigón (curvas 5 y 6) este efecto de la retracción diferencial también se anula.

**4.2. Pórtico de hormigón armado con consideración del proceso constructivo**

Se analiza un pórtico plano de edificación formado por 5 vanos y 5 plantas, con un total de 55 elementos. Se supone una distancia entre pórticos de 4.5 m, con forjados unidireccionales constituidos por viguetas prefabricadas de hormigón. Para estas dimensiones y las cargas consideradas, se toma un canto 24 cm, no siendo necesario el cimbrado intermedio de los forjados. La relación luz / canto útil ( $L/d$ ) considerada en las jácenas no cumple los requisitos de la Tabla 50.2.2.1 de EHE [1], lo cual obliga a la comprobación de la flecha.

Las dimensiones y características seccionales se indican en la Figura 12 y en la Tabla 4.



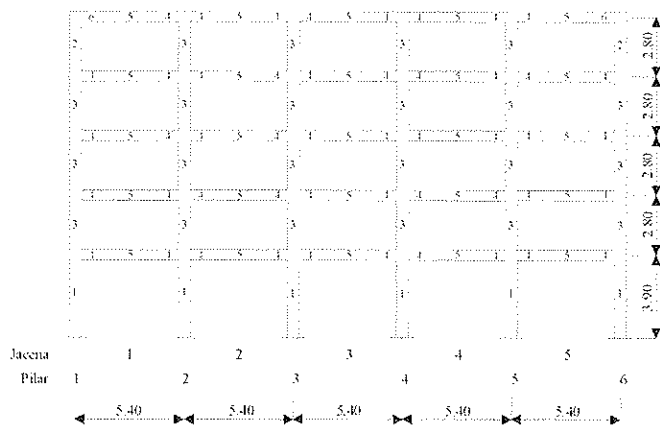


Figura 12 – Pórtico analizado.

Tabla 4. Características seccionales

Sec.	b' x h (m)	Armadura <sub>inf</sub>	Armadura <sub>sup</sub>	d' (mm)
1	0.35 x 0.35	220	2Ø20	45
2	0.30 x 0.30	3Ø20	3Ø20	45
3	0.30 x 0.30	2Ø20	2Ø20	45
4	0.80 x 0.24	2Ø12+ 2Ø0	412+ 4Æ20	45
5	0.80 x 0.24	2Ø12+ 4Ø20	4Ø12	45
6	0.80 x 0.24	2Ø12+ 2Ø20	4Ø12+ 2Ø20	45

El análisis se efectúa considerando la influencia de la historia de cargas aplicada y el proceso constructivo. Se supone una velocidad de construcción de una planta cada dos semanas. La retirada de correas y tableros de encofrado se produce a los 4 días y el descimbrado a los 25 días del hormigonado. Se dispone un máximo de dos plantas cimbradas consecutivas. La sobrecarga de uso se aplica inicialmente a los 300 días, se retira y se vuelve a aplicar a los 10.000 días. Se suponen siete pares de puntales en cada vano entre ejes de pilares, modelizados como barras biarticuladas que no soportan tracciones con una rigidez seccional de  $6 \times 10^4$  kN.

A continuación se comentan algunos de los resultados que se obtienen, como por ejemplo, los momentos flectores en jácenas, las cargas en puntales durante el proceso constructivo y la evolución de flechas en el tiempo.

La comparación de los momentos finales obtenidos para las jácenas con la utilización del modelo y los que se obtendrían con un análisis estándar lineal y no evolutivo, para el caso considerado, producen diferencias que alcanzan un 16% en los momentos negativos y un 14 % en los positivos. Para los pilares se aprecian variaciones porcentuales mayores, que sin embargo corresponden a valores absolutos pequeños con respecto a su capacidad resistente. Estos resultados quedan circunscritos al caso analizado y no se pueden, evidentemente, extrapolar a otras estructuras o secuencias constructivas, para lo cual sería necesario un estudio más exhaustivo.

Para la evaluación de las cargas durante el proceso constructivo se han comparado los resultados del cálculo numérico con los que se obtienen mediante el método simplificado propuesto por Grundy y Kabaila [32,33]. Las cargas máximas obtenidas en los puntales mediante el método simplificado se

producen en la primera planta con un valor de 2 veces la carga que se obtendría de suponer el peso propio y cargas constructivas de una planta repartida de manera uniforme entre todos los puntales. Con la aplicación del modelo numérico la carga máxima se obtiene en la cuarta planta, con un valor de 2.14 veces la carga de referencia citada (en la primera planta se obtiene un valor máximo de 2.09). Cabe indicar, no obstante, que esto sucede para un puntal junto a pilar, cuya influencia no se considera en el método simplificado, debido a que en esta situación los puntales se van cargando como consecuencia de los efectos diferidos y de llevarse una parte de la carga que las jácenas transmiten a los pilares. Por lo que respecta a los momentos en jácenas, con el método simplificado se obtiene un valor de 2.38 veces el momento que se obtendría con un análisis lineal con todo el pórtico cargado con el peso propio y las cargas de construcción, en la segunda planta (la última hormigonada con puntales hasta el terreno). Mediante el modelo propuesto el valor máximo se obtiene para la misma planta y operación pero con un valor de 2.06. Es de destacar la importancia de los esfuerzos producidos durante el proceso constructivo, y según cual sea el valor del coeficiente de seguridad adoptado puede darse una situación determinante para el dimensionamiento.

Finalmente, en la Figura 13 se indica la variación de la flecha en el tiempo para las jácenas del primer vano (Figura 13) en la tercera, cuarta y quinta planta.

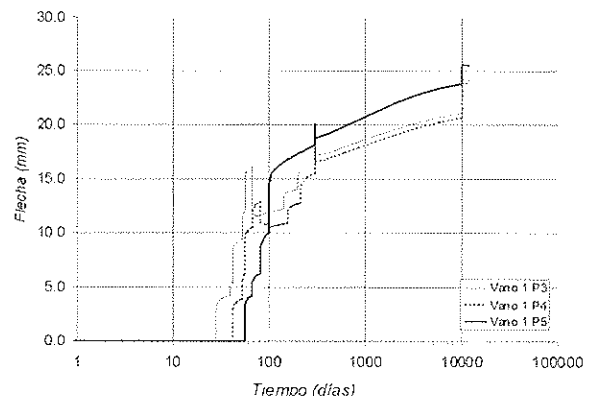


Figura 13. Evolución de la flecha en vano extremo.

El valor máximo obtenido es de 25.5 mm para la planta de cubierta y de 24.2 mm para la tercera planta, mientras que la flecha activa máxima es de 12.9 mm en la cuarta planta. Como referencia se puede indicar que los valores límites aconsejados en EHE [1] para procedimientos usuales de cálculo serían de 21.6 mm ( $L / 250$ ) para la flecha total y de 10 mm para la flecha activa. Como dato adicional se puede señalar que un cálculo efectuado mediante el procedimiento simplificado de EHE [1], usando  $E_c$  (28) y la carga máxima para la determinación de  $I_c$ , proporciona un valor de 20.7 mm para la flecha total de la Planta 3.

### 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo no lineal para el comportamiento en servicio de estructuras reticulares planas de hormigón. Para este tipo de estructuras, la utilización de la

Formulación Matricial Generalizada (FMG) se ha mostrado como una herramienta potente y práctica. El análisis en el tiempo se ha realizado mediante un método paso a paso. Uno de los aspectos a destacar es la incorporación del modelo de comportamiento seccional basado en un diagrama constitutivo modificado para el hormigón en tracción. En este sentido se ha prestado especial atención a la implementación del comportamiento diferido, habiéndose comprobado su idoneidad mediante la comparación con resultados experimentales y con modelos establecidos en códigos de diseño. La utilización del algoritmo seccional, por sí mismo, posibilita la obtención de diagramas Momento-Curvatura, cuya integración proporciona de manera directa las flechas en barras isostáticas. La metodología constituye un procedimiento general que no queda circunscrito a tipologías estructurales concretas y que permite la incorporación de distintos materiales, así como la actualización de las leyes de comportamiento de los mismos. Con los ejemplos desarrollados se ha mostrado la capacidad del modelo para resolver estructuras con un considerable número de barras y nudos, sometidas a historias complejas de cargas y para realizar estudios paramétricos lo cual lo hace apto para trabajos de investigación o para situaciones prácticas en las que un análisis simplificado no sea suficiente.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen las ayudas obtenidas a través de los Proyectos de investigación PB 98-0455, AMB 98-0558 y REN 2000-1740.

#### REFERENCIAS

[1] Comisión Permanente del Hormigón (1999). "Instrucción de Hormigón Estructural EHE", 5a. ed., Ministerio de Fomento, Madrid.

[2] Kang Y.J. (1980). "Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames." PhD thesis, Univ. of California, Berkeley.

[3] Mari, A.R. (1984). "Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames." *Rep. No. UCB/SESM-84/12*, Univ. of California, Berkeley.

[4] Mari, A.R. (1991). "Estudio comparativo entre diversos métodos de análisis no lineal de estructuras reticulares de hormigón armado y pretensado: Estado actual y líneas de futura actuación: Modelos de Análisis de Estructuras de Hormigón." GEHO, Comisión II, Madrid.

[5] Carol, I. y Murcia, J. (1989). "Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an "exact" formulation: I - theory, II - computer implementation for R.C. structures and examples." *Computers and Structures*, 33(1), 79-87, 89-102.

[6] Ulm, F.J., Clement, J.L. y Guggenberger, J. (1994). "Recent advances in 3-D nonlinear FE-analysis of R/C and P/C beam structures." *Proc. ASCE Structures Congress XII*, Atlanta (GA), New York, 427-1433.

[7] Van Zyl, S.F. y Scordelis, A.C. (1979). "Analysis of Curved Prestressed Segmental Bridges." *Journal of the Structural Division, ASCE*, 105(11), 2399-2417.

[8] Ketchum, M.A. (1986). "Redistribution of Stresses in Segmentally Erected Prestressed Concrete Bridges." *Rep. UCB/SESM-86-07*, Univ. of California, Berkeley.

[9] Abbas, S. y Scordelis, A.C. (1993). "Nonlinear geometric, material and time-dependent analysis of segmentally erected three-dimensional cable stayed bridges." *Rep. UCB/SESM-93/09*, Univ. of California, Berkeley.

[10] Millanes, F. (1985). "Un método general de cálculo para el seguimiento de la historia tensodeformacional en tableros de puentes construidos de forma evolutiva." *Hormigón y Acero*, 156, 9-43.

[11] Murcia, J. y Henkerkoff, L. (1994). "Análisis en el tiempo de puentes continuos de hormigón construidos a partir de elementos prefabricados." *Hormigón y Acero*, 192, 55-71.

[12] Mari, A.R. (1985). "A general method for the analysis of curved beams and space frames." Departament d'Enginyeria de la Construcció, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

[13] Molins, C. y Roca, P. (1998). "Capacity of Masonry Arches and Spatial Frames." *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 124(6), 653-663.

[14] Ghali, A. y Elbadry, M. (1990). "User's Manual and Computer Program CPF: Cracked Plane Frames in Prestressed Concrete." *Research Report CE85-2* (revised 1990), Department of Civil Engineering, University of Calgary, Alberta.

[15] CEB (1985). "Manual on Cracking and Deformations." Boletín nº 158-E.

[16] Trost, H. (1967). "Auswirkungen des Superpositionssprinzips auf Kriech- und Relaxations-Probleme bei Beton und Spannbeton." *Beton- und Stahlbetonbau*, 62 (10-11), 230-238, 261-269.

[17] Bazant, Z.P. (1972). "Prediction of concrete creep effects using aging-adjusted effective modulus method." *ACI Journal*, 69, 212-217.

[18] Cruz, P., Mari, A.R. y Roca, P. (1998). "Nonlinear Time-Dependent Analysis of Segmentally Constructed Structures." *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 124(3), 278-287.

[19] Mari, A.R., (2000). "Numerical simulation of the segmental construction of three dimensional concrete frames." *Engineering Structures*, 22, 585-596.

[20] Pérez, A. (1996). "Comportamiento en servicio del hormigón estructural. Estudio teórico y experimental." Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Madrid.

[21] GEHO. G.T. II/3 (1998). "Caracterización de las propiedades diferidas del hormigón y su incidencia estructural." Boletín Nº 22.

- [22] Torres, Ll., Bozzo, L.M., Purroy F. y López Almansa, F. (1998). "Nonlinear Analysis of Evolving Concrete Structures." *Proceedings of the IV World conference on Computational Mechanics*, Buenos Aires.
- [23] Torres, Ll. (2001). "Modelo numérico y verificación experimental del comportamiento en servicio de estructuras de hormigón." Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Catalunya.
- [24] Damjanic, F. y Owen, D.R.J. (1984). "Practical considerations for modelling of post-cracking concrete behaviour for finite element analysis of reinforced concrete structures." *Computer Aided Analysis and design of Concrete Structures*, Pineridge Press, Swansea, 693-706.
- [25] Kawano, A. y Warner, R.F. (1996). "Model Formulations for Numerical Creep Calculations for Concrete." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 122(3), 284-290.
- [26] Comité Euro International du Béton-Fédération Internationale de la Précontrainte. (1993). "CEB-FIP Model Code 1990." Thomas Telford, London.
- [27] Hernández, H.D. y Gamble, W.L. (1975). "Time-Dependent prestres losses in pre-tensioned concrete construction." *Structural Research Series*, No 417, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana.
- [28] Espion, B. (1993). "Benchmark Examples for Creep and Shrinkage Analysis Computer Programs. Creep and Shrinkage of Concrete." *Fifth International RILEM Symposium*, Barcelona, E&FN Spon, 877-888.
- [29] Jaccoud, J.P. y Favre, R. (1982). "Flèche des structures en béton armé: Vérification expérimentale d'une méthode de calcul." *Annales de l'Institut Technique du Batiment*, Paris, 406, 23-66.
- [30] ACI Committee 318 (1989). "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI-318-95) and Commentary (ACI-318R-95)." ACI, Detroit.
- [31] Espion, B. y Halleux, P. (1991). "Long-Term behavior of prestressed and partially prestressed concrete beams." *Computer Analysis of the Effects of Creep, Shrinkage and Temperature Changes of Concrete Structures*, ACI SP-129, 19-38.
- [32] Grundy, P. y Kabaila, A. (1963). "Construction Loads on Slabs with Shored Formwork in Multistory Buildings." *ACI Journal*, 60(12), 1729-1738.
- [33] Calavera, J. y García Dutari, L. (1992). *Cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado*. INTEMAC.