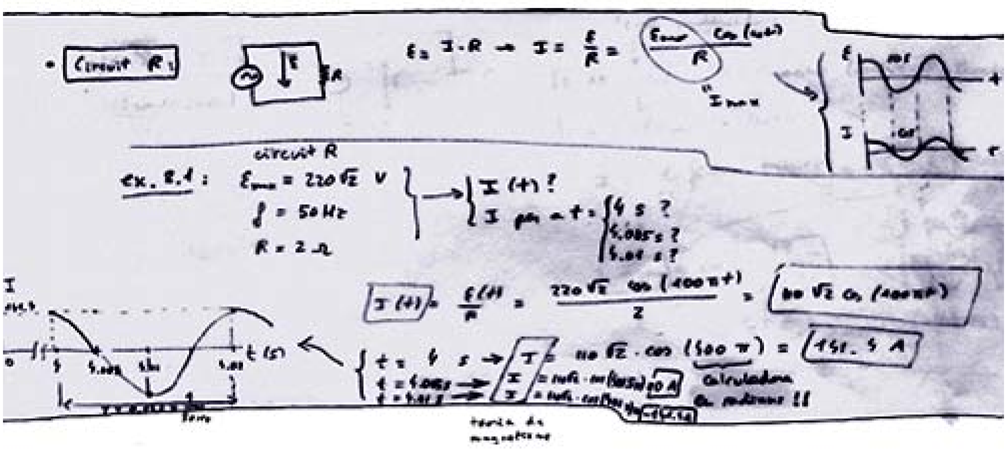
Física bàsica per a la univeritat

J. Fort, J. Saurina, J.J. Suñol i E. Úbeda



UdG

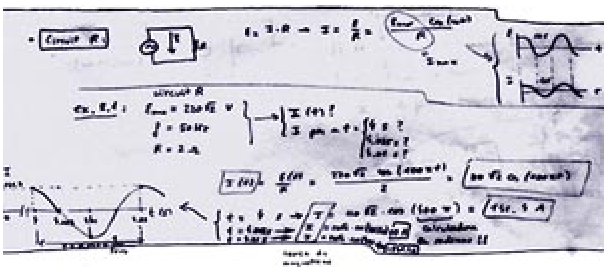
Física bàsica per a la universitat

J. Fort, J. Saurina, J.J. Suñol i E. Úbeda

Departament de Física

Universitat de Girona. 2005. 1 ed. català. Edició electrònica.

ISBN: 84-8458-218-3



Ressenya:

Com a part del pla d’actuacions de suport i millora del rendiment acadèmic, la UdG va considerar oportú oferir assignatures anomenades bàsiques, especialment orientades a reforçar els coneixements de fonamentació. L’objectiu estratègic és donar als alumnes, en un sol quadrimestre, la formació necessària per a seguir un curs de primer de física, així com que l’alumne tingui agilitat en la transformació d’unitats, s’habituï a comprovar la raonabilitat dels resultats i sigui capaç de superar la noció que la física és un conjunt de formules inconnexes.

1a edició electrònica, juny 2005

Autors: J. Fort, J. Saurina, J.J. Suñol i E. Úbeda
Coautoria d'aquesta edició electrònica: J. Fort, J. Saurina, J.J. Suñol i E. Úbeda i Universitat de Girona

ISBN: 84-8458-218-3

Dipòsit legal: GI.1006-2005

Edita:
Universitat de Girona
La Factoria de Recursos Docents
Biblioteca de Montilivi
Campus de Montilivi s/n
Tel. (972)41 89 06 / 639 40 89 73
lafactoria@udg.es

Índex

TEMA 1 MAGNITUDS. UNITATS. ÀLGEBRA VECTORIAL

Objectius

Conèixer la distinció entre magnitud física escalar i vectorial, així com les unitats de les magnituds físiques en els sistemes d'unitats més freqüents. A més, es tractaran les operacions bàsiques amb vectors.

Índex

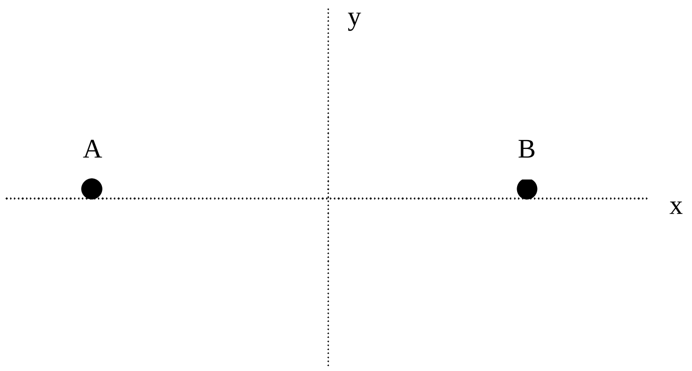
1.1 Magnituds físiques escalars i vectorials

Conceptes bàsics

Dins la física un es troba amb diverses magnituds que haurà de fer treballar, utilitzant equacions matemàtiques que responen als postulats i lleis de la física, per assolir l'objectiu d'un problema plantejat que cal resoldre. És fonamental doncs, conèixer les diferents magnituds que s'utilitzaran dins aquest curs de física bàsica. Cal distingir entre magnitud física escalar i magnitud física vectorial. La magnitud escalar és aquella que es defineix mitjançant un escalar, o sigui un número. Per exemple la temperatura, l'energia, la densitat, etc. Si ens diuen 37ºC, aquesta podria ser la temperatura corporal habitual d'una persona sana. El número 37 amb la unitat corresponent identifica la magnitud física Temperatura, i no cal res més. En canvi, una magnitud vectorial és aquella que es defineix mitjançant un vector. El vector quedarà totalment definit si l'hi coneixem el seu escalar, anomenat mòdul del vector, la seva direcció i el seu sentit. Per exemple, la velocitat, l'acceleració, la força, el camp gravitatori, el camp elèctric, etc..són vectors, i per tant s'haurà de conèixer l'operativitat necessària per treballar-hi.

Exemple 1.1

Un vehicle vol anar des del punt orígen A fins el punt destí B (veure dibuix) a una velocitat de v = 100 km/h. Indicar el mòdul, direcció i sentit del vector velocitat v.



Resolució

Com que la velocitat d'un mòbil és una magnitud vectorial, per respondre a la pregunta s'haurà d'indicar el mòdul, la direcció i el sentit del vector. El mòdul del vector velocitat és l'escalar, o sigui el número del vector, que és en el nostre cas, 100 amb les unitats de km/h. La direcció serà la recta que uneix el punt A amb el punt B, per tant, l'eix de les abscisses, eix *x*. El sentit serà des d'A fins a B, per tant, cap a l'eix *ox* positiu.

Exemple 1.2

Volem enlairar un objecte que es troba sobre una taula, 1.2 metres perpendicularment a aquesta. Definir el vector desplaçament.

Resolució

El desplaçament d'un objecte és una magnitud vectorial, per tant en el nostre cas el mòdul del vector desplaçament és 1.2 amb les unitats de m. La direcció serà la recta definida des de la taula fins on es troba l'objecte després d'enlairar-lo, per tant l'eix de l'ordena, eix *y*. *E*l sentit serà cap a munt.

1.2 Unitats. Factors de conversió

Conceptes bàsics

Tal com s'ha comentat anteriorment, tota magnitud física a d'anar acompanyada de la seva corresponent unitat. Si es diu que un cotxe circula a 80, el primer que un ha de preguntar és; quines unitats acompanyen a aquest número 80? Són kilòmetres per hora?, metres per segon?, kilòmetres per minut?, etc..És clar que si no ens diuen les unitats no ens fem idea si el cotxe va ràpid o lent. Dit això, el següent pas que un ha de fer quan desenvolupa un problema de física és escollir un sistema d'unitats, que serà comú per totes les magnituds que intervinguin en la resolució del problema. Un sistema d'unitats és un conjunt d'unitats, que per conveni s'en defineixen unes quantes, anomenades fonamentals, i a partir de les quals i utilitzant diferents operacions matemàtiques s'obtenen totes les altres, anomenades unitats derivades. Cal remarcar que per canviar de sistema d'unitats s'utilitzen els factors de conversió a partir de les equivalències entre les magnituds en els diferents sistemes. S'indicarà tot seguit alguna de les unitats fonamentals dels sistemes d'unitats més freqüents.

El sistema més estès i per tant més utilitzat és el Sistema Internacional (S.I.) o *MKS*, on es podrien destacar d'entre les unitats fonamentals, la unitat de longitud, el metre *m*, la unitat de la massa, el kilogram *kg*, i la unitat del temps, el segon *s*. El sistema cegessimal o *cgs* on s'utilitzaria el centímetre *cm*, el gram *g*, i el segon *s*. I per últim el sistema tècnic on s'utilitzaria el metre *m*, la unitat tècnica de massa *utm* per la massa, el kilogram-força o kilopondi *kp* per la força, i el segon *s* pel temps. Cal indicar que 1 kg de massa en el Sistema Internacional equival a 1/9.8 utm en el sistema tècnic, i 9.8 kgm/s^2 de força en el S.I. equival a 1 kp en el sistema tècnic.

Els principals múltiples i divisors es presenten a la taula següent.

Símbol (denominació)	**Equivalència**	**Exemple**
G (giga)	10^9	GPa (gigapascal)
M (mega)	10^6	MW (megawatt)
k (kilo)	10^3	kg (kilogram)
d (deci)	10^{-1}	dm (decímetre)
c (centi)	10^{-2}	cs (centisegon)
m (mili)	10^{-3}	mm (milímetre)
μ (micro)	10^{-6}	μg (microgram)
n (nano)	10^{-9}	nm (namòmetre)

Exemple 1.3

Un cotxe de carreres circula a una velocitat de 250 km/h. Quina serà la seva velocitat expresada en el sistema internacional d'unitats?

Resolució

$$250\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s}=69.4\frac{m}{s}$$

Exemple 1.4

Un mòbil es mou a una velocitat de 25 m/min. Expressar aquesta velocitat en el sistema cegessimal.

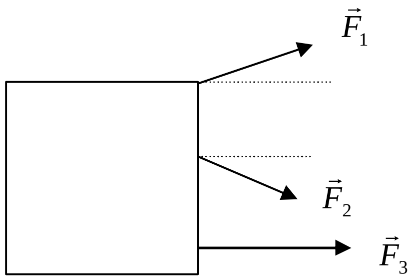
Resolució

$$25\frac{m}{min}\cdot\frac{100cm}{1m}\cdot\frac{1min}{60s}=41.7\frac{cm}{s}$$

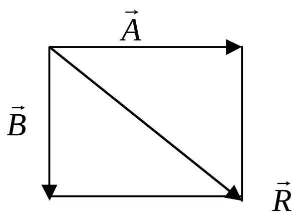
1.3 Composició i descomposició de vectors

Conceptes bàsics

Quan es treballa en magnituds vectorials, per exemple la força, i es vol saber la força total (resultant) que actua sobre un objecte, tenint en compte que sobre aquest n'hi actuen tres de diferents (veure el dibuix), s'haurà de tenir en compte l'àlgebra vectorial, ja que no podem agafar les tres forces i sumar-les com si fos una simple suma escalar.



El que s'haurà de fer és escollir uns eixos de coordenades ortogonals *xy*, i descomposar cadascun dels vectors en dos altres utilitzant la trigonometria, i aquests seran respectivament les components *x* i *y* dels vectors. Aleshores es podran sumar per una banda totes les components *x* dels vectors, i per l'altre totes les components *y*, en el cas de treballar en dos dimensions. Segons això, es pot concloure que la suma analítica de vectors és igual a la suma de les components dels vectors en cada eix. En la Física és interessant també l'operació inversa a la comentada anteriorment, és a dir, sumar vectors per obtenir-ne un altre (veure dibuix).



On $\vec{R}$ és el vector resultant de la suma vectorial dels vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, és a dir:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

El mòdul del vector resultant $\vec{R}$ es pot calcular de la següent manera:

$$R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Exemple 1.5

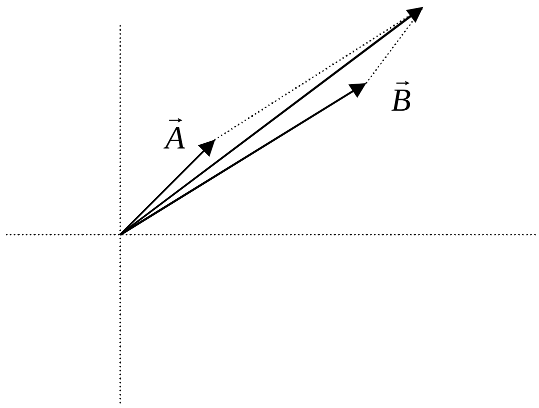
Donat el vector $\vec{A}$ = (2,3) i el vector $\vec{B}$ = (3,6)

a) Trobar el vector $\vec{A} + \vec{B}$.
b) Representar-lo en els eixos de coordenades ortogonals *xy*.
c) Buscar el mòdul del vector $\vec{A} + \vec{B}$.

Resolució

a) $\vec{A} + \vec{B} = (2+3, 3+6) = (5,9)$

b)



c) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{5^2+9^2} = 10.3$

Exemple 1.6

Donats els vectors $\vec{A}$ = (2,1,2), $\vec{B}$ = (1,1,1), i $\vec{C}$ = (3,2,4), trobar el vector $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$.

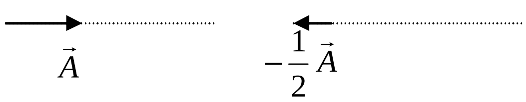
Resolució

$$\vec{A}+\vec{B}-\vec{C} = (2+1-3,1+1-2,2+1-4) = (0,0,-1)$$

1.4 Producte d'un escalar per un vector

Conceptes bàsics

El resultat de multiplicar un escalar per un vector és un altre vector que té les característiques següents: sigui $\vec{A}$ el vector que multipliquem per l'escalar *n* donant com a resultat de l'operació el vector $\vec{B}$. Aleshores, el mòdul de $\vec{B}$ és n vegades el de $\vec{A}$. La seva direcció és la de $\vec{A}$, i té el mateix sentit que $\vec{A}$ si *n* és positiu, i sentit contrari a $\vec{A}$ si *n* és negatiu (veure dibuix).



Exemple 1.7

Donat el vector $\vec{A} = (2,3,1)$, trobar el vector $\vec{B} = 2\cdot\vec{A}$

Resolució

$$\vec{B} = 2\cdot(2,3,1) = (4,6,2)$$

El vector $\vec{B}$ té la mateixa direcció i sentit que el vector $\vec{A}$, però el seu mòdul és dos vegades més gran.

Exemple 1.8

Donat el vector $\vec{A} = (3,3,2)$, trobar el vector $\vec{B} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{A}$

Resolució

$$\vec{B} = -\frac{1}{2} \cdot (3,3,2) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1\right)$$

El vector $\vec{B}$ té la mateixa direcció i sentit contrari que el vector $\vec{A}$, i el seu mòdul és la meitat que el d' $\vec{A}$.

1.5 Vector unitari d'un vector donat

Conceptes bàsics

El vector unitari d'un vector donat és un altre vector que té les següents característiques: el seu mòdul és la unitat, i la seva direcció i sentit són els del vector donat. Cal destacar els vectors unitaris associats als eixos de coordenades ortogonals *xyz*. Aquests són: el vector unitari $\vec{i}$ en l'eix de la *x*, el vector unitari $\vec{j}$ en l'eix de la *y*, i el vector unitari $\vec{k}$ en l'eix de la *z*. Després del que s'ha dit, es pot concloure que qualsevol vector es pot escriure com a producte del mòdul pel seu vector unitari:

$$\vec{A} = \left|\vec{A}\right| \cdot \vec{u}_{\vec{A}}, \text{ per tant } \vec{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$

Exemple 1.9

Donat el vector $\vec{A} = (4,3)$, determinar el vector unitari de $\vec{A}$

Resolució

Utilitzant la definició de vector unitari d'un vector donat, $\vec{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$, el mòdul del vector $\vec{A}$ és:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

per tant el vector unitari és:

$$\vec{u}_{\vec{A}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

Cal adonar-se que el vector $\vec{u}_{\vec{A}}$ té la mateixa direcció i sentit que el vector $\vec{A}$, però el seu mòdul és la unitat.

Exemple 1.10

Expressar el vector $\vec{A} = (2{,}3{,}-4)$ en funció del seu vector unitari.

Resolució

Qualsevol vector es pot expressar com a producte del mòdul pel seu vector unitari, per tant, el mòdul del vector $\vec{A}$ és:

$$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

i el vector unitari del vector $\vec{A}$ és:

$$\vec{u}_{\vec{A}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, -\frac{4}{\sqrt{29}} \right)$$

per tant, el vector $\vec{A}$ es pot expressar en funció del vector unitari de la manera següent:

$$\vec{A} = \sqrt{29} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, -\frac{4}{\sqrt{29}} \right)$$

1.6 Components escalars d'un vector

Conceptes bàsics

Tal com s'ha vist en l'apartat 1.3; qualsevol vector es pot expressar com a suma dels seus components cartesians. Per exemple, en dos dimensions es pot escriure que:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

i pel que s'ha explicat en l'apartat 1.5, es pot concloure que:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

on A_x i A_y són les components escalars del vector $\vec{A}$. Per trobar l'angle que forma el vector $\vec{A}$ respecte un dels eixos de coordenades, es prosseguirà de la següent manera: sigui j l'angle que forma el vector $\vec{A}$ respecte l'eix de les abscisses, aleshores:

$$\mathrm{tg}\, j = \frac{A_y}{A_x}, \quad \text{per tant,} \quad j = \mathrm{arctg}\frac{A_y}{A_x}.$$

Exemple 1.11

Expressar en les seves components cartesianes un vector $\vec{A}$ de mòdul 2 que forma un angle de 30º amb l'eix o*x* positiu.

Resolució

El vector $\vec{A}$ expressat en funció de les seves components cartesianes és: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$, aleshores:

$$A \cdot \cos 30^\circ = A_x$$

$$A \cdot sin 30^\circ = A_y$$

en el nostre cas:

$$A_x = 2 \cdot 0.87 = 1.74$$

$$A_y = 2 \cdot 0.5 = 1$$

i per tant, el vector $\vec{A}$ expressat en funció de les seves components cartesianes és:

$$\vec{A} = 1.74\vec{i} + \vec{j}$$

Exemple 1.12

Les components escalars d'un vector $\vec{V}$ són respectivament $V_x = 4$, i $V_y = 1$, trobar el mòdul del vector $\vec{V}$, i l'angle que forma respecte l'eix de les abscisses.

Resolució

El vector $\vec{V}$ es pot expressar com $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$. Aplicant la definició de mòdul d'un vector s'obté:

$$V = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

Sigui j l'angle format pel vector respecte l'eix positiu de les abscisses, per tant:

$$\mathrm{tg}\, j = \frac{V_y}{V_x} = \frac{1}{4}, \quad \text{per tant,} \quad j = \mathrm{arctg}\, 0.25 = 14^\circ$$

1.7 Producte escalar de dos vectors

El resultat de l'operació del producte escalar de dos vectors és un escalar, i el podem trobar fent el producte dels mòduls dels vectors i multiplicant-los pel cosinus de l'angle que formen. Si $\vec{A}$ i $\vec{B}$ són dos vectors que formen un angle φ, aleshores el producte escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ té la següent expressió:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos j$$

Les propietats més destacables del producte escalar de dos vectors són:

La propietat commutativa: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. Si dos vectors són perpendiculars, el seu producte escalar és igual a zero, ja que cos90º = 0, per tant els productes dels vectors unitaris associats als eixos de coordenades següents és:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

El producte escalar d'un vector per ell mateix és igual al seu mòdul al quadrat, ja que cos 0º =1, per tant:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Per això, si es vol efectuar el producte escalar de dos vectors analíticament és procedirà de la següent manera:

Sigui el vector $\vec{A} = (x, y, z)$ i el vector $\vec{B} = (x', y', z')$, aleshores $\vec{A} \cdot \vec{B} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$

Exemple 1.13

Sigui el vector $\vec{A} = (2,2,2)$, i el vector $\vec{B} = (1,2,1)$. Trobar el producte escalar d'ambdos.

Resolució

Aplicant la definició analítica del producte escalar de dos vectors, s'obté:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 4 + 2 = 8$$

Exemple 1.14

Donats els vectors de l'exemple 1.13, trobar l'angle que formen ambdos.

Resolució

Aplicant la definició del producte escalar de dos vectors, s'obté:

$$\cos j = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \frac{8}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}} = 0.94 \text{ , per tant, } j = \arccos 0.94 = 19.9^\circ$$

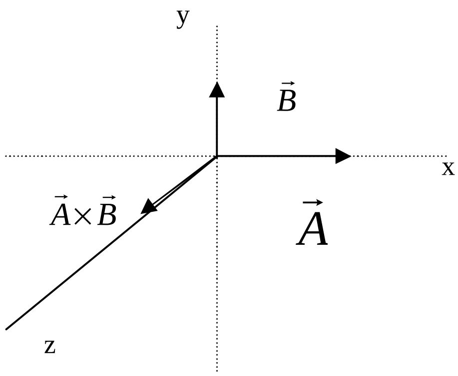
1.8 Producte vectorial de dos vectors

Conceptes bàsics

El resultat de l'operació del producte vectorial entre dos vectors és un altre vector. Podem trobar el seu mòdul fent el producte dels mòduls dels vectors implicats i multiplicant-los pel sinus de l'angle que formen. Si $\vec{A}$ i $\vec{B}$ són dos vectors que formen un angle j, el mòdul del producte vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ té la següent expressió:

$$\left|\ \vec{A}\times\vec{B}\ \right| = A\cdot B\cdot sin j$$

La direcció del vector resultant de l'operació del producte vectorial entre $\vec{A}$ i $\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{B}$, és perpendicular al pla determinat per $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Per saber el sentit, s'haurà d'aplicar la regla del tornavis, o la regla de la ma dreta, en el sentit de gir de $\vec{A}$ cap a $\vec{B}$ pel camí més curt (veure dibuix).



Les propietats més destacables del producte vectorial de dos vectors són:

La propietat anticommutativa: $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$. El producte vectorial d'un vector per ell mateix és zero, ja que *sin 0º* = 0, per tant:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$

El mòdul del producte vectorial de dos vectors equival a l'àrea del paral·lelogram que determinen aquests vectors.

Si es vol efectuar el producte vectorial entre dos vectors analíticament s'ha de tenir en compte que:

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, etc.. per tant el desenvolupament del producte $\vec{A}\times\vec{B}$ en les seves components coincideix amb el desenvolupament del determinant format de la manera següent:

En la primera fila es posaran els vectors unitaris associats als eixos de coordenades $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, en la segona fila les components del primer vector A_x, A_y i A_z, i en la tercera fila les components del segon vector, és a dir, B_x, B_y i B_z.

Exemple 1.15

Donats els vectors $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, i $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, trobar el vector $\vec{A} \times \vec{B}$.

Resolució

Desenvolupant el determinant s'obté:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} - \left(6\vec{k} + \vec{j} + 2\vec{i}\right) = 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Exemple 1.16

Trobar l'àrea del paral·lelogram que determinen els vectors $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Resolució

Per trobar l'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ cal buscar el mòdul del producte vectorial d'ambdos. El producte vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ serà:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} - \left(-\vec{k} + 4\vec{j} + \vec{i}\right) = -3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

i el mòdul de $\vec{A} \times \vec{B}$ és $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19}$, per tant, l'àrea del paral·lelogram val $\sqrt{19}u^2$.

Problemes

1.1 Escriure les magnituds següents en unitats del Sistema Internacional: volum, densitat volumètrica i velocitat.

1.2 Canviar les unitats expressades en el Sistema Internacional al Sistema cegessimal de les magnituds següents: v = 30 m/s, F= 100 Kg m/s, r = 1000 Kg/m^3, i a =3 m/s^2.

1.3 Expressar les següents unitats en unitats del Sistema Internacional: 1km/h, 1m/min, 2kp, i 1cm^3.

1.4 Expressar en les seves components cartesianes un vector de mòdul 7 que forma un angle de 23º amb l'eix ox positiu.

1.5 Donades les components escalars d'un vector $A_x = 2$, i $A_y = 3$, trobar el mòdul del vector i l'angle que forma respecte l'eix de l'ordenada.

1.6 Dibuixar el vector $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Trobar el seu vector unitari.

1.7 Trobar el mòdul i l'angle que forma amb l'eix ox el vector resultant de la suma de tres vectors, dels quals ens donen la següent informació: el mòdul del primer vector és 2 i forma un angle de 30º respecte l'eix ox positiu. El mòdul del segon vector és 3, i forma un angle de 135º respecte l'eix ox positiu, i el tercer vector és el $-2\vec{j}$.

1.8 Descompondre el vector $\vec{A} = (2,4,6)$ en les direccions dels vectors: $\vec{B} = (2,0,0)$, $\vec{C} = (0,2,0)$ i $\vec{D} = (0,0,2)$.

1.9 Trobar un vector de mòdul 1 en la direcció del vector $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

1.10 Donats els vectors $\vec{A} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{B} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, calcular el mòdul de cadascun d'ells.

1.11 Donats els vectors $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, trobar el producte escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$,

1.12 Donats els vectors $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, trobar l'angle format entre ambdos,

1.13 Donats els vectors $\vec{A} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 12\vec{k}$ i $\vec{B} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 10\vec{k}$, trobar els vectors $\vec{A} + \vec{B}$ i $\vec{A} - \vec{B}$,

1.14 Calcular el producte vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, essent $\vec{A} = (2,3,5)$ i $\vec{B} = (1,1,2)$.

1.15 Donats els vectors $\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ i $\vec{B} = n\vec{i} + 5\vec{j}$, trobar n perquè el vector $\vec{C} = 2 \cdot \vec{A} + \vec{B}$ sigui unitari.

1.16 Donats els vectors $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, calcular: $(\vec{A} + 3 \cdot \vec{B}) \cdot (4 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B})$.

1.17 Donat el vector $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Calcular: a) un vector perpendicular al donat, essent la seva segona component 3; b) un vector unitari perpendicular a l' $\vec{A}$.

1.18 Trobar l'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{A} = (1,2,-2)$ i $\vec{B} = (-3,1,-3)$.

1.19 Utilitzant els vectors de l'exercici 1.16, trobar l'àrea del triangle determinat per ambdos.

1.20 Sabem que el resultat del producte vectorial de dos vectors és el vector $-8\vec{i} + 19\vec{j} - 2\vec{k}$, i que el mòdul d'un és $\sqrt{29}$, i el de l'altre és $\sqrt{30}$. Trobar l'angle que formen ambdos vectors.

Solucions

1.1 $V \equiv m^3$, $r \equiv kg/m^3$, $v \equiv m/s$

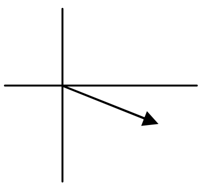
1.2 v = 3000cm/s, F = 10^7g·cm/s, r = 1g/cm^3, a = 300cm/s^2

1.3 1km/h = 0.28 m/s, 1m/min = 17·10^{-3} m/s, 2kp = 19.6 N, 1cm^3 = 10^{-6} m^3

1.4 A_x = 6.44, A_y = 2.74

1.5 $A = \sqrt{13}$, j = 33.7º

1.6



$$\vec{u}_{\vec{A}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

1.7 R = 1.18, j = 109.2º

1.8 $\vec{b} = (2,0,0)$, $\vec{c} = (0,4,0)$, $\vec{d} = (0,0,6)$

1.9 $\vec{u}_{\vec{A}} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

1.10 $A = \sqrt{29}$, $B = \sqrt{30}$

1.11 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 13$

1.12 j = 32.47º

1.13 $\vec{A} + \vec{B} = 9\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{i} + 11\vec{j} - 22\vec{k}$

1.14 $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

1.15 n = -4

1.16 $\left(\vec{A} + 3 \cdot \vec{B}\right) \cdot \left(4 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B}\right) = 62$

1.17 a) $\vec{v} = -\frac{9}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$, b) $\vec{u}_{\vec{v}} = -0.83\vec{i} + 0.55\vec{j}$

1.18 A = 12.08 u^2

1.19 A = 4.75 u^2

1.20 j = 44.6º

TEMA 2 CINEMÀTICA

Objectius

Conèixer les magnituds físiques relacionades amb el moviment d'una partícula, prescindint de les causes que el provoquen, així com els diferents tipus de moviments rectilinis i circulars, i la composició de dos moviments rectilinis uniformes perpendiculars.

Índex

2.1 Vector velocitat

Conceptes bàsics

Si es vol tenir localitzada una partícula que varia la seva posició a mesura que passa el temps, es necessita conèixer l'equació del vector de posició d'aquesta en funció del temps. Si a més es vol saber si la partícula es mou més o menys ràpid es necessita conèixer la velocitat d'aquesta, que serà igual a la variació del vector de posició en el temps. Un cop dit això el que cal tenir clar és que la velocitat mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 a una posició 2 és el quocient entre la variació del vector de posició entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$\vec{v}_m = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

on el vector $\vec{v}_m$ té la mateixa direcció i sentit que el vector $D\vec{r}$.

Si es fa el límit de la velocitat mitjana quan Δt tendeix a zero es troba la velocitat instantània, vector tangent a la trajectòria de la partícula. És a dir:

$$\vec{v} = \lim_{Dt \to 0} \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

essent la velocitat instantània la derivada del vector posició respecte el temps.

Exemple 2.1

Donat el vector de posició d'una partícula $\vec{r} = 3t\vec{i} + 2t\vec{j}$ (amb unitats del Sistema Internacional), determinar les components de la velocitat instantània.

Resolució

La velocitat instantània d'una partícula ve donada per l'expressió $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. En el nostre cas $\vec{v} = \left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right)$m/s

Exemple 2.2

Tenim localitzada una partícula que es mou en una dimensió gràcies a l'equació de la posició d'aquesta, a saber: $x = 2t^3 + 3t^2 + 4t - 6$, on x s'expressa en centímetres i t en segons. Calcular la velocitat mitjana entre els instants de temps 2s i 6s. Expressar-la en unitats del Sistema Internacional.

Resolució

La velocitat mitjana d'una partícula entre dos punts donats 1 i 2 és:

$$v_m = \frac{Dx}{Dt} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

En el nostre cas:

$$v_m = \frac{\left(2\cdot 6^3 + 3\cdot 6^2 + 4\cdot 6 - 6\right) - \left(2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 6\right)}{6-2} = \frac{528}{4} = 132\ \frac{cm}{s}$$

$$v_m = 132\frac{cm}{s}\cdot\frac{0.01m}{1cm} = 1.32\frac{m}{s}$$

2.2 Vector acceleració

Conceptes bàsics

En el cas de l'exemple 1, s'ha trobat que la velocitat era constant. A la majoria de situacions la velocitat és variable. La magnitud física que mesura el canvi de la velocitat en el temps s'anomena acceleració. S'ha de tenir en compte que la velocitat és una magnitud vectorial i per tant, en el temps pot canviar no només el seu mòdul, sinó també la seva direcció i el seu sentit. Es pot concloure per tant que en qualsevol moviment no rectilini hi haurà acceleració. L'acceleració mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 a una posició 2 és el quocient entre la variació de la velocitat entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

on el vector $\vec{a}_m$ té la direcció i el sentit que depenen de les velocitats final i inicial en el període de temps mesurat.

Si es fa el límit de l'acceleració mitjana quan *Dt* tendeix a zero es troba l'acceleració instantània, és a dir:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

essent l'acceleració instantània la derivada del vector velocitat instantània respecte el temps.

Exemple 2.3

Donat el vector posició $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} - 4\vec{k}$ (amb unitats del Sistema Internacional), trobar l'acceleració instantània.

Resolució

L'acceleració instantània d'una partícula ve donada per l'expressió $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. En el nostre cas $\vec{a} = 6\vec{i}\,\frac{m}{s}$.

Exemple 2.4

La trajectòria d'una partícula que es mou en una dimensió ve governada per l'equació de la posició $x = 2t^3 + 3t^2 + 4t - 6$, (expressada en unitats del Sistema Internacional). Calcular l'acceleració mitjana entre els instants de temps 1s i 2s.

Resolució

L'acceleració mitjana d'una partícula que es mou des del punt 1 fins al punt 2 ve donada per l'expressió:

$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$. En el nostre cas:

$v = 6t^2 + 6t + 4$, per tant:

$$a_m = \frac{\left(6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 4\right) - \left(6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 4\right)}{2 - 1} = \frac{24}{1} = 24\frac{m}{s^2}$$

2.3 Moviment rectilini uniforme

Conceptes bàsics

En el moviment rectilini uniforme la partícula descriu una trajectòria rectilínia on el vector velocitat manté el mòdul, direcció i sentit invariables en el temps. Anem a veure les equacions del vector posició i del vector velocitat en funció del temps per aquest tipus de moviment.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

On $\vec{r}$ és la posició de la partícula en l'instant de temps *t*, $\vec{r}_0$ és la posició de la partícula en l'instant de temps $t = 0$, i $\vec{v}$ és la velocitat d'aquesta.

$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

Com que el vector velocitat es manté invariable en el temps, la velocitat de la partícula en tot moment és igual a la velocitat que porta en l'instant de temps $t = 0$, és a dir, $\vec{v}_0$.

Exemple 2.5

Un corredor fa una cursa a la velocitat constant de 12 *km/h* i triga 5 *min* en arribar a la meta. Si la pista de curses és totalment recta, quants metres ha recorregut?

Resolució

L'equació de la posició d'un mòbil en un moviment rectilini uniforme ve donada per l'expressió $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$, per tant, $\vec{r} = \vec{v}t$. En el nostre cas $x = vt$.

El que cal fer primer és unificar unitats per poguer expressar el resultat en metres.

$$12\frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{60min} = 200\frac{m}{min}$$

$$x = 200\frac{m}{min} \cdot 5min = 1000m$$

Exemple 2.6

Un ciclista que es mou sobre l'eix de les abscisses a velocitat constant, triga 2 minuts en recòrre 7200 metres. Trobar la velocitat del ciclista en unitats de metres per segon.

Resolució

S'haurà d'utilitzar l'equació $x = x_0 + vt$. En el nostre cas:

$x = vt$, per tant, $v = \dfrac{x}{t}$

$$2min \cdot \frac{60s}{1min} = 120s$$

$$v = \frac{7200m}{120s} = 60\frac{m}{s}$$

2.4 Moviment rectilini uniformement variat

Conceptes bàsics

En el moviment rectilini uniformement variat, la partícula descriu una trajectòria rectilínia on el vector velocitat és variable en el temps i el vector acceleració manté el mòdul, direcció i sentit invariables en el temps. Anem a veure les equacions del vector posició i del vector velocitat en funció del temps per aquest tipus de moviment.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

On $\vec{r}$ és la posició de la partícula en l'instant de temps *t*, $\vec{r}_0$ és la posició de la partícula en l'instant de temps $t = 0$, $\vec{v}_0$ és la velocitat d'aquesta en l'instant de temps $t = 0$, i $\vec{a}$ és l'acceleració.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

On $\vec{v}$ és la velocitat de la partícula en l'instant de temps *t*.
Si s'elimina el temps entre aquestes dues equacions, s'obté:

$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$$

On $\Delta\vec{r} = (\vec{r} - \vec{r}_0)$. Cal dir que l'acceleració pot ser positiva o negativa depenent de la força que la causa, per tant, si l'acceleració és positiva, el moviment rectilini s'anomena accelerat, i si l'acceleració és negativa aleshores el moviment rectilini s'anomena desaccelerat. En el primer cas la velocitat d'una partícula augmenta, i en el segon cas, disminueix (és l'exemple del cas d'un frenat).

Exemple 2.7

Un cotxe canvia la seva velocitat des de 50 *km/h* a 120 *km/h* en mig minut, trobar l'acceleració d'aquest en les unitats del Sistema Internacional.

Resolució

L'equació de la velocitat d'un mòbil que descriu un moviment uniformement variat és $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, per tant $\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$. En el nostre cas:

$$50\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = 13.9\frac{m}{s}$$

$$120\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s}=33.3\frac{m}{s}$$

$$0.5min\cdot\frac{60s}{1min}=30s$$

$$a=\frac{33.3-13.9}{30}=\frac{19.4}{30}=0.6\frac{m}{s^2}$$

Exemple 2.8

Es deixa caure un tomàquet des d'una alçada de 20*m*. Trobar la velocitat quan arriba a terra.

Resolució

La pedra descriu un moviment de caiguda lliure en l'eix de l'ordenada, per tant serà un moviment rectilini uniformement accelerat amb acceleració constant, la de la gravetat. L'equació que cal utilitzar per trobar el temps que triga el tomàquet en arribar a terra és:

$y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}gt^2$. En el nostre cas:

$0=20-\frac{1}{2}\cdot 9.8\cdot t^2$, per tant

$-20=-4.9\cdot t^2$, és a dir, $20=4.9\cdot t^2$, aleshores:

$t^2=\frac{20}{4.9}=4.1$, $\Rightarrow$ t = 2s, temps que triga el tomàquet en arribar a terra.

Utilitzant ara l'equació de la velocitat del moviment uniformement accelerat s'obté:

$v=v_0+gt$, per tant:

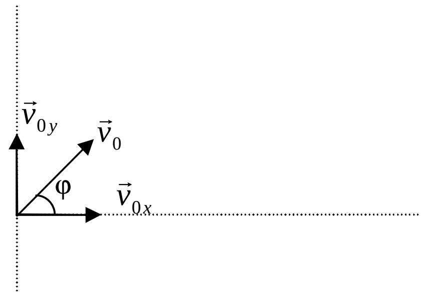
$$v=9.8\cdot 2=19.6\frac{m}{s}$$

2.5 Composició del moviment rectilini uniforme i del rectilini uniformement variat

Conceptes bàsics

L'estudi del moviment d'un projectil en un llançament oblic es realitza composant dos moviments rectilinis en uns eixos de coordenades *xy*. L'un és uniforme en l'eix de les abscisses i l'altre uniformement variat en l'eix de les ordenades. S'ha de tenir en compte que la única força que actua sobre el cos és el pes, per tant en tot moment l'acceleració d'aquest cos és la de la gravetat, $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$. Per desenvolupar un problema d'aquestes característiques, el que s'ha de fer primer és expressar el vector velocitat inicial en les seves components cartesianes (veure dibuix).

Si v_0 és el mòdul del vector velocitat inicial, aleshores:



$$\vec{v}_0 = v_0 \cdot \cos j\,\vec{i} + v_0 \cdot sin j\,\vec{j} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

aleshores les equacions del moviment són:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

i

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 .$$

La velocitat del projectil en qualsevol instant es trobarà de la següent manera:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = v_{0x}\vec{i} + \left(v_{0y} - gt\right)\vec{j}$$

on

$$v_x = v_{0x}$$

i

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Exemple 2.9

Es tira una pedra, cap abaix, des d'un turó d' alçada 300*m* respecte el terra, formant un angle de 60º amb la vertical. Si la velocitat inicial és de 5*m/s*, trobar el temps que triga en arribar a terra.

Resolució

L'equació del vector de posició d'un moviment rectilini uniformement accelerat és:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

En el nostre cas aquest moviment es localitza en l'eix de l'ordenada, per tant:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 .$$

on

$$v_{0y} = v_0 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 0.5 = 2.5\frac{m}{s}$$

Quan la pedra arriba a terra, y=0, aleshores, s'ha de resoldre l'equació de segon grau següent:

$0 = 300 - 2.5t - 4.9\, t^2$

i, per tant,

$t = 7.6s$

Exemple 2.10

Des de dalt d'una torre de 45*m* d'alçada es llança una fletxa cap a munt amb una velocitat de 200*m/s* formant un angle de 60º amb la vertical. Trobar l'alçada màxima i l'abast de la fletxa.

Resolució

El primer que cal fer és calcular les components cartesianes del vector velocitat inicial. En el nostre cas:

$$v_{0x} = 200 \cdot sin60^\circ = 173.2\frac{m}{s}$$

i

$$v_{0y} = 200 \cdot \cos 60^\circ = 100\frac{m}{s}$$

Quan la fletxa assoleixi l'alçada màxima, la coordenada y de la velocitat, v_y, valdrà zero, per tant, a partir de l'equació de la velocitat d'un moviment rectilini uniformement variat es pot calcular el temps que trigarà la fletxa en assolir l'alçada màxima.

$$v_y = v_{0y} - gt\,, \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{100}{9.8} = 10.2s$$

Substituint aquest temps en l'equació de la posició de l'eix de l'ordenada es troba l'alçada màxima.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

$$y_{màx} = 45 + 100 \cdot 10.2 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10.2)^2 = 555.2m$$

Quan la fletxa arriba a terra, $y = 0$, per tant, utilitzant l'equació de la posició en l'eix de l'ordenada es troba el temps requerit per aconseguir-ho.

$$0 = 45 + 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2$$

Resolent aquesta equació de segon grau es troba que el temps que triga la fletxa en arribar a terra és:

$t = 20.8s$.

Substituint aquest temps en l'equació de la posició en l'eix de les abscisses s'obté l'abast de la fletxa, és a dir, la distància respecte el peu de la torre.

$$x = x_0 + v_{0x}t = 173.2 \cdot 20.8 = 3607.8m \approx 3.6km \text{ x}$$

2.6 Moviment circular

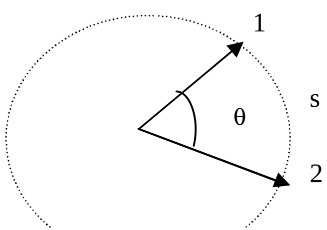
Conceptes bàsics

La trajectòria d'una partícula que descriu un moviment circular és una circumferència. Si la partícula es desplaça des d'un punt 1 fins a un punt 2 (veure el dibuix), es defineix la velocitat angular mitjana com l'angle central escombrat pel radi, anomenat desplaçament angular (expressat en unitats de radiant en el Sistema Internacional, essent el radiant adimensional), dividit pel temps que triga la partícula per anar des del punt 1 fins al punt 2, és a dir:

$$w_m = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero s'obté la velocitat angular instantània:

$$w = \frac{dq}{dt}$$



La unitat de la velocitat angular en el Sistema d'unitats Internacional és el radiant per segon, *rad/s*. En alguns casos, aquesta velocitat ve donada en unitats de *rpm*, que vol dir, revolucions dividit per minut, essent una revolució igual a 2π radiants. Cal recordar que el desplaçament angular és igual a l'arc *s* (magnitud lineal), descrit per la partícula, dividit pel radi *R* de la circumferència, és a dir:

$$q = \frac{s}{R} \quad ; \quad s = q \cdot R$$

per tant:

$$v = w \cdot R \quad \text{ja que} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

L'acceleració angular mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 a una posició 2 és el quocient entre la variació de la velocitat angular entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$a_m = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1}$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero s'obté l'acceleració angular instantània:

$$a = \frac{dw}{dt}$$

La unitat de l'acceleració angular en el Sistema d'unitats Internacional és el radiant per segon al quadrat, *rad /s2*.

Exemple 2.11

L'equació del desplaçament angular d'una partícula que dóna voltes sobre una circumferència de radi $R = 3m$ ve donada per l'expressió $q = 4t^2 + 3t$. Trobar la velocitat lineal i l'acceleració angular en el instant $t = 2s$. (Les unitats de *q* és el radiant, i el temps ve expressat en segons).

Resolució

Ja s'ha comentat que l'arc descrit per la partícula en un moviment circular és una magnitud lineal, per tant:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

on $s = R \cdot q = 3m \cdot (4t^2 + 3t) rad = (12t^2 + 9t)\ m$, per tant:

$v = (24t + 9)\dfrac{m}{s}$. Quan el temps és igual a t = 2s, aleshores:

$$v(2) = 57\frac{m}{s}.$$

Com que:

$$a = \frac{dw}{dt}, \text{ i } w = \frac{dq}{dt}, \text{ aleshores:}$$

$$w = (8t + 3)\frac{rad}{s}, \text{ i } a = 8\frac{rad}{s}, \text{ per tant l'acceleració angular és constant.}$$

Exemple 2.12

Una mota de pols es diposita a una distància de 3cm del centre d'un disc de radi 14cm, el qual es troba donant voltes sobre un tocadiscs a la velocitat angular de w = 45 rpm. Trobar en unitats del Sistema Internacional la velocitat lineal de la mota de pols. Si aquesta hagués caigut sobre la perifèria del mateix disc, quina velocitat lineal portaria?

Resolució

Primer cal passar les unitats de la velocitat angular a unitats del Sistema Internacional.

$$w = 45rpm = 45\frac{rev}{min}\cdot\frac{2p rad}{1rev}\cdot\frac{1min}{60s} = 1.5p\frac{rad}{s}.$$

La velocitat lineal i angular d'una partícula estan relacionades mitjançant l'expressió:

$$v = w \cdot R$$

En el primer cas R = 0.03m, i en el segon cas, R = 0.14m, per tant:

$$v = 1.5 \cdot p \cdot 0.03 = 0.14\frac{m}{s}$$

i

$$v = 1.5 \cdot p \cdot 0.14 = 0.66\frac{m}{s}$$

Cal adonarse'n que malgrat la mota de pols gira a la mateixa velocitat angular en ambdós casos, la velocitat lineal és diferent, depenent on es troba aquesta respecte l'eix de rotació

2.7 Moviment circular uniforme

Conceptes bàsics

La partícula que descriu un moviment circular uniforme té la velocitat angular constant, i per tant el mòdul del vector velocitat lineal també ho és. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$q = q_0 + wt$$

i

$$w = w_0$$

on q i w són el desplaçament i velocitat angular respectivament en un instant de temps t, i q_0 i w_0 són el desplaçament i velocitat angular respectivament en l'instant de temps t = 0.

Cal remarcar que en un moviment circular uniforme, malgrat sigui constant el mòdul del vector velocitat lineal, no ho és la seva direcció. L'acceleració centrípeta o normal $\vec{a}_c$ és la magnitud física que mesura la variació de la direcció del vector velocitat. Aquesta acceleració és perpendicular a la trajectòria de la partícula i va dirigida cap al centre de la trajectòria circular. El mòdul de $\vec{a}_c$ ve donat per:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = w^2 \cdot R$$

Exemple 2.13

Si estem escoltant la bona música del disc de l'exemple 2.12 durant 10min, calcular el desplaçament angular total que ha descrit aquest en unitats del Sistema Internacional.

Resolució

El disc descriu un moviment circular uniforme, per tant:

$q = q_0 + wt$, en el nostre cas:

$$t = 10min \cdot \frac{60s}{1min} = 600s$$

aleshores:

$$q = 1.5p \cdot 600 = 900prad$$

Exemple 2.14

Trobar l'acceleració centrípeta que adquireix un nen que ha pujat a les voladores de fires quan aquestes giren a una velocitat angular de 0.5π *rad/s*, i la distància radial és de 3*m*.

Resolució

L'acceleració centrípeta ve donada per l'expressió:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = w^2 \cdot R = 2.47 \cdot 3 = 7.4 \frac{m}{s^2}$$

2.8 Moviment circular uniformement variat

Conceptes bàsics

En aquest tipus de moviment el que és invariable és l'acceleració angular, mentre que la velocitat angular canvia en el temps. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$q = q_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

i

$$w = w_0 + at$$

Si s'elimina el temps entre les dues equacions, s'obté:

$$w^2 = w_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta q$$

essent $Dq = q - q_0$

Cal dir que les equacions del moviment circular uniforme i del circular uniformement variat són anàlogues respectivament a les del moviment rectilini, només canviant les magnituds lineals per les angulars.

En aquest tipus de moviment el vector velocitat lineal té el mòdul i la direcció variables. La magnitud que mesura la variació del mòdul de la velocitat és l'acceleració tangencial $\vec{a}_t$, i aquesta és tangent a la trajectòria de la partícula. L'expressió del mòdul de $\vec{a}_t$ ve donada per:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \; , \Rightarrow \quad a_t = R \cdot a$$

L'acceleració tangencial és perpendicular a l'acceleració centrípeta, i ambdues són les components del vector acceleració, per tant, es pot escriure:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

essent el mòdul del vector acceleració el següent:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Exemple 2.15

El disc d'una politja de 30*cm* de radi, inicialment en repòs, gira amb una acceleració angular constant de 1.5 *rad/s2* durant 20*s*. Trobar el nombre de voltes efectuades per aquesta politja.

Resolució

L'equació del desplaçament angular d'un moviment circular uniformement accelerat ve donada per:

$$q = q_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

En el nostre cas, q_0 = 0, i w_0 = 0, per tant:

$$q = \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot (20)^2 = 300 rad$$

aleshores:

$$300 rad \cdot \frac{1 volta}{2 p rad} = 47.7 voltes \, .$$

Exemple 2.16

Una moto que surt del repòs descriu un looping circular de radi 200*m* assolint els 100*km/h* en 0.5 minuts, trobar l'acceleració total de la moto transcorregut aquest temps.

Resolució

El que cal fer primer és unificar unitats:

$$100 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 27.8 \frac{m}{s} \, .$$

$$0.5 min \cdot \frac{60s}{1min} = 30s$$

Per trobar l'acceleració total $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$ cal buscar les seves components vectorials.

El mòdul de l'acceleració tangencial és:

$$a_t = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{27.8}{30} = 0.9\frac{m}{s^2}.$$

El mòdul de l'acceleració centrípeta és:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(27.8)^2}{200} = 3.9\frac{m}{s^2}.$$

El mòdul de l'acceleració total és:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 4\frac{m}{s^2}.$$

La direcció del vector acceleració total es pot trobar calculant l'angle que forma aquest amb el vector $\vec{a}_t$:

$$j = \text{arctg}\frac{a_c}{a_t} = \text{arctg}\frac{3.9}{0.9} = 77^\circ$$

Problemes

2.1 Una partícula descriu una trajectòria definida pel vector de posició $\vec{r} = 8t\vec{i} + (2t - 4)\vec{j}$, en unitats del Sistema Internacional, determinar el mòdul de la velocitat instantània.

2.2 Un tren circula per una via rectilínia i es coneix en tot moment la seva posició gràcies a l'equació $x = 3t^3 + 2t^2 - t + 14$, on x ve mesurada en metres i t en segons. Trobar en unitats del Sistema Internacional la posició i la velocitat quan $t = 2s$.

2.3 Un mòbil descriu una trajectòria sobre l'eix de les abscisses determinada per l'equació següent: $x = 5t^2 - 2t + 2$,on x ve mesurada en metres i t en segons. Calcular en unitats del sistema cegessimal l'acceleració en l'instant $t = 4s$.

2.4 Una partícula es mou sobre l'eix de les abscisses segons l'equació: $x = t^3 + 4t - 6$. Les unitats de x són els mil·límetres i les de t segons. Determinar la velocitat mitjana entre l'interval de temps 2s i 6s i expressar-la en unitats del sistema cegessimal.

2.5 Un patinador que circula a 15 *km/h* s'incorpora a una cursa que es desenvolupa sobre una pista recta quan els contrincants ja han recorregut 100*m* des de la sortida. Si el nostre patinador espavilat triga 3 minuts en arribar a la meta, quin recorregut total té la pista?

2.6 Un camió que circula a la velocitat de 80 *km/h* travessa un pont rectilini per evitar el semàfor de la carretera que passa per sota. El pont forma un angle de 30º respecte la carretera. Després de 3 minuts, que és el temps que triga en travessar el pont, el camioner gira el cap 150º a l'esquerra i veu un restaurant, així que encara el camió cap allà i s'hi acosta en línia recta. Quants metres ha hagut de recórrer el camió per arribar al restaurant un cop ja havia travessat el pont?

2.7 Col·loquem un gos famolenc al començament d'un tub de gran diàmetre i 10 metres de longitud, i al final d'aquest tub i posem menjar. El gos , inicialment parat, arriba al final del tub amb una velocitat de 12 *km/h* . Trobar l'acceleració del pobre gos.

2.8 Es tira una pilota cap a munt, perpendicularment al terra amb una velocitat inicial de 42 *m/s*. Trobar el temps que estarà pujant.

2.9 Es llença una pedra cap a munt, perpendicularment al terra amb una velocitat inicial de 38 *m/s*. Quina alçada assolirà?.

2.10 Un nen, jugant tira el seu nino cap a munt, perpendicularment al terra amb una velocitat inicial de 15 *m/s*. Quant temps haurà d'esperar el nen per agafar el seu nino i porta'l al col·legi?

2.11 Al nen del problema anterior, li fa gràcia arribar al col·legi per dir-li a la senyoreta l'instant en que el seu nino anava a la velocitat de 10 *m/s*, però no ho sap calcular. L'ajudes?

2.12 Des del terrat d'un edifici es deixa anar una ceba (per Sant Joan) i triga 5 segons en arribar al carrer. Quina alçada té l'edifici?

2.13 Un nen fa córrer un camió de joguina sobre la taula de la cuina d'alçada 0.9*m*. El camió surt disparat de la taula a la velocitat de 10 *m/s*. El que pretén el nen és que el camió caigui dins d'una paperera que es troba a terra, a 3*m* de la taula. Ho aconseguirà?

2.14 Un estudiant d'enginyeria li agrada anar per pedregals amb la seva bicicleta de muntanya, però un dia, la roda posterior de la bicicleta llençà una pedra cap enrera a la velocitat de 40 *km/h*, amb un angle de 30º sobre l'horitzontal. Determinar l'alçada màxima que assolirà la pedra.

2.15 En el problema anterior la pedra no porta perill, a menys que darrera de l'estudiant el segueixi un company a uns 3*m* de distància, també amb bicicleta de muntanya, a la velocitat de 35 *km/h* , portant la mateixa direcció i sentit que l'estudiant. Esbrinar si la pedra tocarà al noi del darrera (que no té cap culpa).

2.16 Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de radi 250 *cm* segons l'equació següent: $q = 2t^2-4t + 6$, q expressat en radiants i t en segons. Determinar l'acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del Sistema Internacional, en l'instant de temps $t = 3s$.

2.17 Segons l'equació de la trajectòria circular del problema anterior, calcular la velocitat angular, així com l'acceleració centrípeta i angular, expressades en el Sistema Internacional, en l'instant de temps $t = 10s$.

2.18 Una atracció de fires dóna voltes descrivint un cercle amb una acceleració angular constant. La velocitat angular en els dos primers segons és de 90 radiants per segon. Trobar l'acceleració i el desplaçament angular en aquest període de temps. Suposeu que inicialment està en repòs.

2.19 Les rodes d'un camió giren amb una velocitat angular constant de w = 100 *rad/s*. El conductor veu un obstacle sobre la carretera i frena, trigant 2*s* en aturar-se. Calcular l'acceleració angular amb la qual frena.

2.20 Un tractor inicialment en repòs es desplaça durant 90*s*. Les rodes del tractor, de 100*cm* de radi giren amb una acceleració angular de 1*rad/s2* durant 60*s*, mantinent la velocitat adquirida durant els 30*s* restants. Determinar la velocitat final del tractor i el nombre de voltes efectuades per una roda.

Solucions

2.1 v = 8.25 m/s

2.2 $x(2)$ = 44 m, $v(2)$ = 43 m/s

2.3 $a = 10^3$ cm/s^2

2.4 v_m = 5.6 cm/s

2.5 l = 850.6 m

2.6 x = 3461 m

2.7 a = 0.56 m/s^2

2.8 t = 4.3 s

2.9 $y_{màx}$ = 73.7 m

2.10 t = 3 s

2.11 t_1 = 0.5 s, t_2 = 2.6 s

2.12 y = 122.5 m

2.13 El camió toca al terra a 4.2m de la taula enlloc de 3m.

2.14 $y_{màx}$ = 1.58 m

2.15 Sí

2.16 a_t = 10 m/s^2

2.17 $w(10)$ = 36 rad/s, $a_c(10)$ = 3240 m/s^2, $a(10)$ = 4 rad/s^2

2.18 a = 45 rad/s^2, $q - q_0$ = 90 rad

2.19 a = -50 rad/s^2

2.20 v = 60 m/s, nºvoltes = 573 voltes

TEMA 3 CAUSES DEL MOVIMENT. DINÀMICA I

Objectius

Una vegada estudiada la descripció del moviment, podem passar a estudiar les causes que l'originen (forces) i les lleis que el governen. Veurem les forces que actuen sobre cossos, dibuixarem el diagrama del sòlid lliure i aplicarem les lleis de Newton per la resolució dels problemes.

Índex

3.1 Força

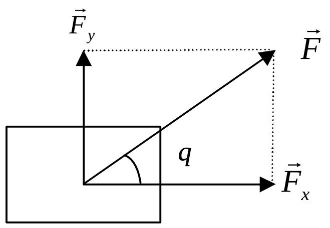
Conceptes bàsics

Un objecte es posa en moviment quan és empès o arrossegat per una *força* o hi està sotmès.

La força és una magnitud vectorial que resulta determinada per:

- el mòdul o intensitat de la força
- la direcció
- el sentit
- el punt d'aplicació

Exemple:



mòdul:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

on: $\vec{F}_x$ i $\vec{F}_y$ són les components rectangulars de la força, $\vec{F}$

direcció i sentit:

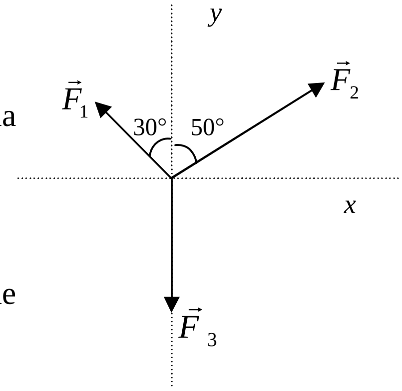
$$q = arctg \frac{F_y}{F_x}$$

La força $\vec{F}$ també es pot escriure en forma vectorial en funció dels vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. En aquest cas:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

La unitat de *força* en el Sistema Internacional és el Newton (N), 1 N = 1 kg·m/s^2

Exemple 3.1



Calculeu la força resultant del sistema de forces de la figura on F_1=10 N, F_2=20 N y F_3=30 N

Resolució

Descomponem les forces segons els eixos de coordenades *xy* que s'han escollit:

$$F_{1x} = F_1 \, sen\,30°, F_{2x} = F_2 \, sen\,50°$$
$$F_{1y} = F_1 \cos 30°, F_{2y} = F_2 \cos 50°, F_{3y} = F_3$$

$$F_x = F_{2x} - F_{1x}, \qquad F_x = 15.3 - 5 = 10.3 \text{ N}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_3, \qquad F_y = 8.7 + 12.8 - 30 = -8.5 \text{ N},$$

El signo negatiu indica que aquesta component està dirigida segons la part negativa del l'eix *y*.

El mòdul de la força resultant és:

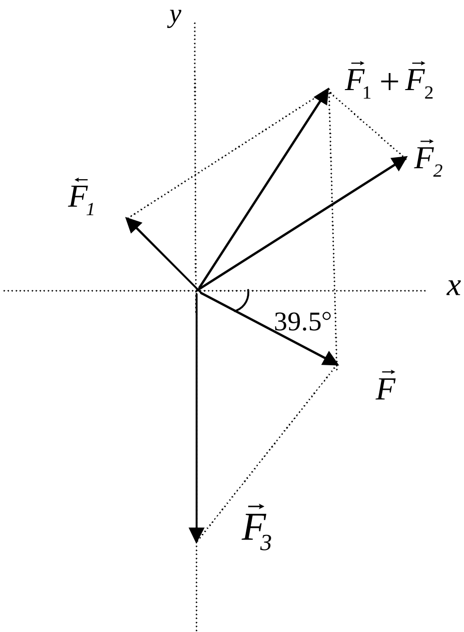
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 13.4 \text{ N}$$

La direcció y el sentit de la força resultant és : $q = arctg \dfrac{F_y}{F_x}$, θ = -39.5° respecte a l'eix *x*

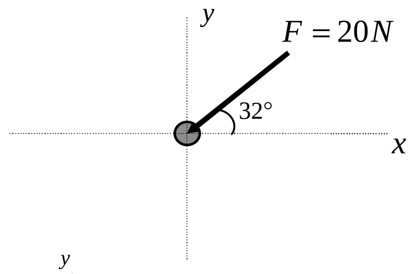
Podem expressar la força resultant en funció dels vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = \left(10.3\vec{i} - 8.5\vec{j}\right) \text{ N}$$

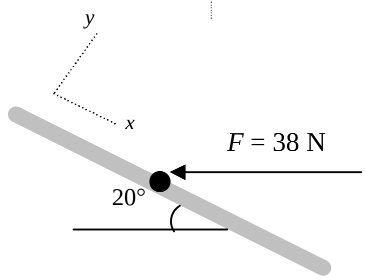
Gràficament és:



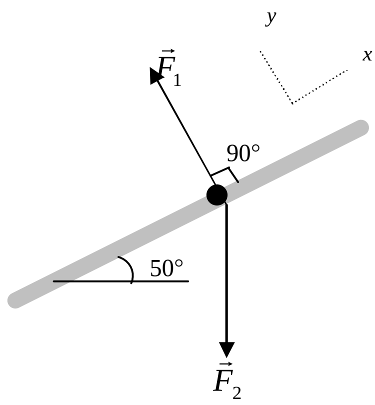
Problemes



3.1 Descomponeu la força de la figura següent segons les direccions *x* i *y*. Calculeu les seves components.



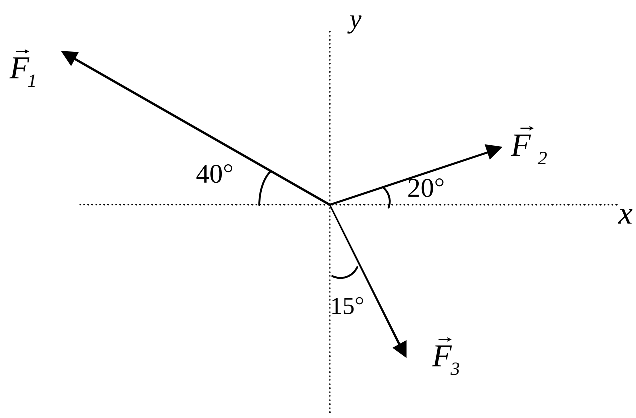
3.2 a) Descomponeu la força aplicada sobre el punt de la superfície de la figura següent segons la direcció perpendicular i paral·lela a la superfície.
b) Calculeu les seves components.
c) Comproveu a partir de les components que $F = 38$ N



3.3 Calculeu la força resultant del sistema de forces aplicat sobre el punt indicat a la superfície de la figura, on $F_1 = 10$ N i $F_2 = 40$ N.

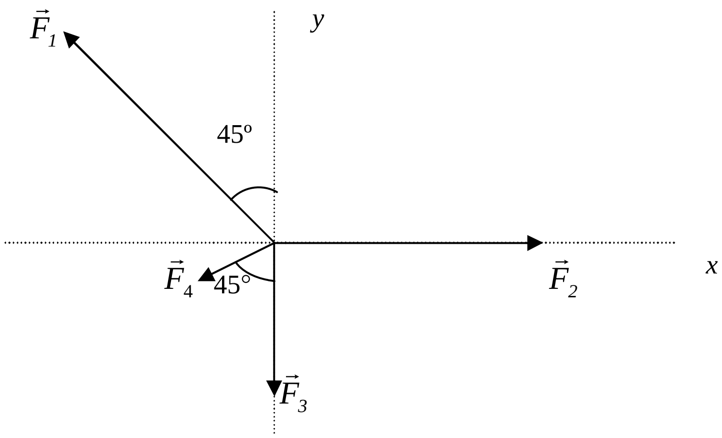
3.4 Calculeu la força resultant del sistema de forces de la figura següent:

$F_1 = 50N$
$F_2 = 20N$
$F_3 = 30N$

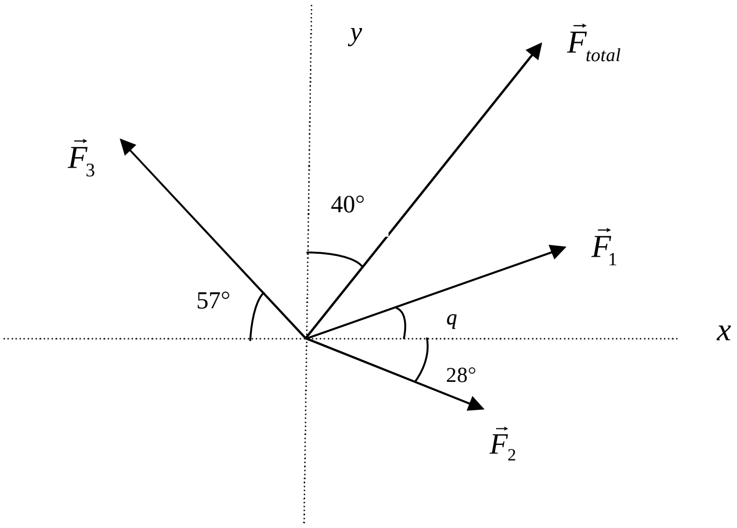


3.5 Calculeu la resultant del sistema de forces indicat a la figura:

$F_1 = 100$ N
$F_2 = 80$ N
$F_3 = 40$ N
$F_4 = 60$ N

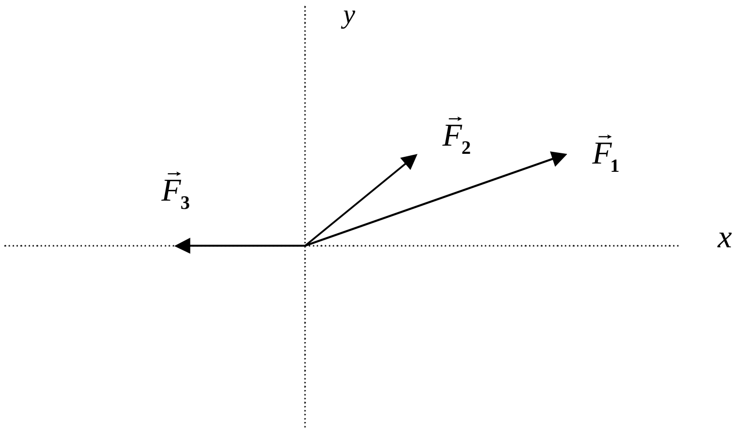


3.6 Calculeu la força $\vec{F}_1$ del sistema de forces de la figura següent, on el mòdul de la força resultant, $\vec{F}_{total}$, val 150 N y les forces $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ tenen de mòdul 40 N i 75 N, respectivament.

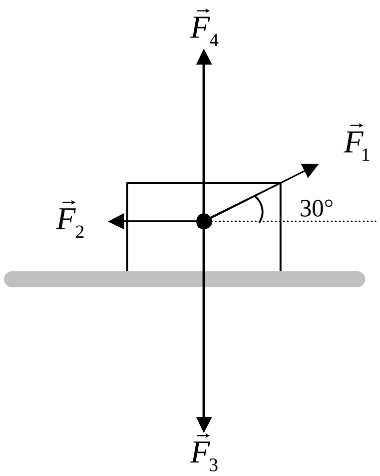


3.7 Calculeu el mòdul, la direcció y el sentit de la força resultant formada por dues forces concurrents de mòduls 200 N y 300 N que formen angles de 60° y 80°, respectivament, amb l'eix horitzontal, *x*.

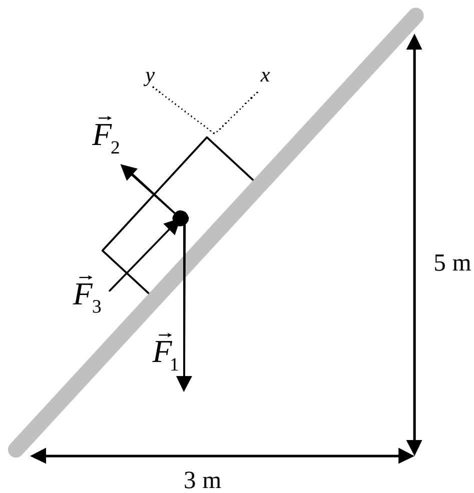
3.8 Calculeu la resultant del sistema de forces de la figura, on els mòduls de les forces són, F_1 = 250 N i $F_2 = F_3$ = 100 N. Els angles que formen les forces amb l'eix horitzontal són: 30°, 45° i 180°, respectivament.



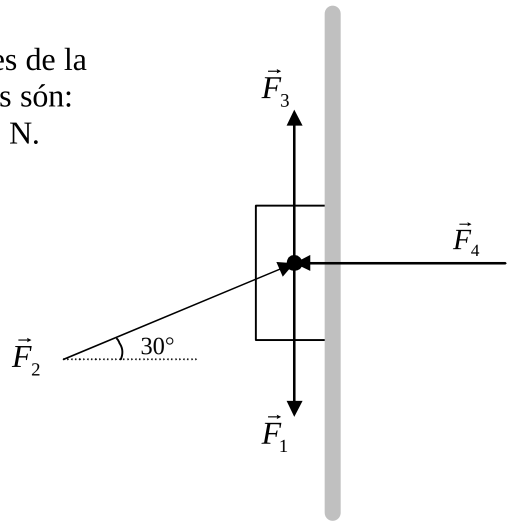
3.9 Calculeu la força resultant del sistema de forces que actua sobre el punt indicat en l'objecte de la figura. Els valors del mòduls de les forces aplicades són: F_1 = 10 N, F_2 = 8.66 N, F_3 = 30 N i F_4 = 25 N.



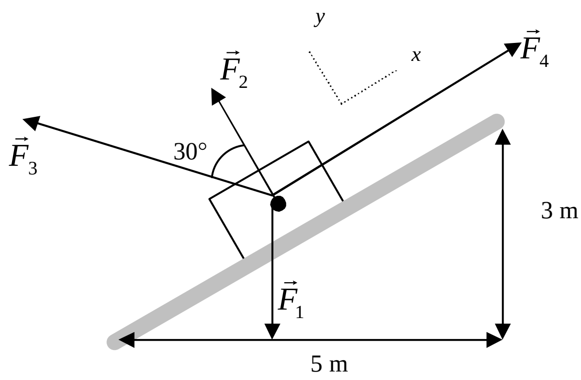
3.10 Calculeu la força resultant del sistema de forces que actua sobre el punt indicat en l'objecte de la figura. La força $\vec{F}_2$ forma 90° amb la superfície inclinada, $\vec{F}_3$ és paral·lela a la superfície i $\vec{F}_1$ és paral·lela al costat de 5 m. Els mòduls de les forces aplicades són: F_1 = 100 N i F_2 = 51.5 N i F_3 = 40 N.



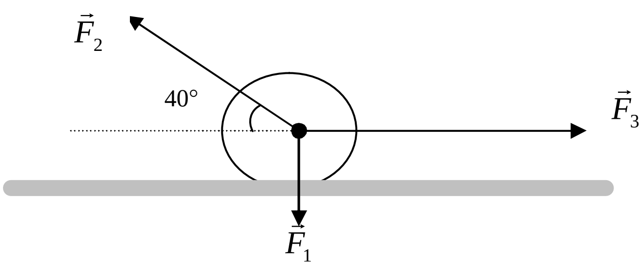
3.11 Calculeu la força neta del sistema de forces de la figura. Els valors dels mòduls de les forces són: F_1 = 30 N, F_2 = 40 N, F_3 = 10 N i F_4 = 20 N.



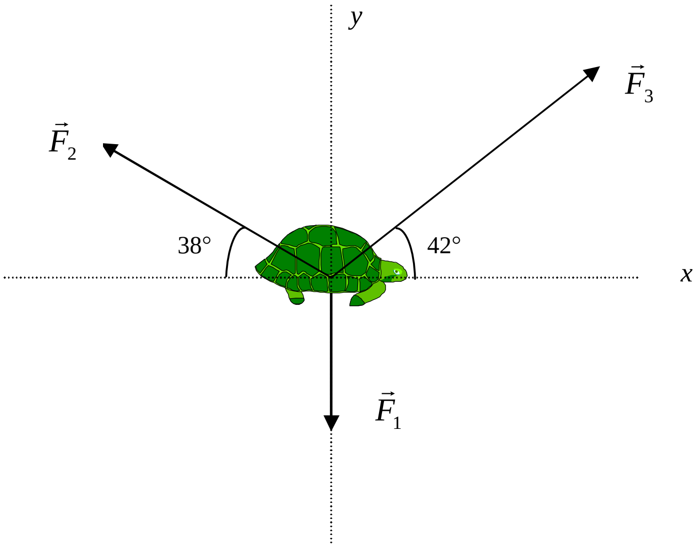
3.12 Calculeu la força total exercida sobre el punt de la figura. F_1 = 20 N, F_2 = 30 N, F_3 = 50 N i F_4 = 70 N.



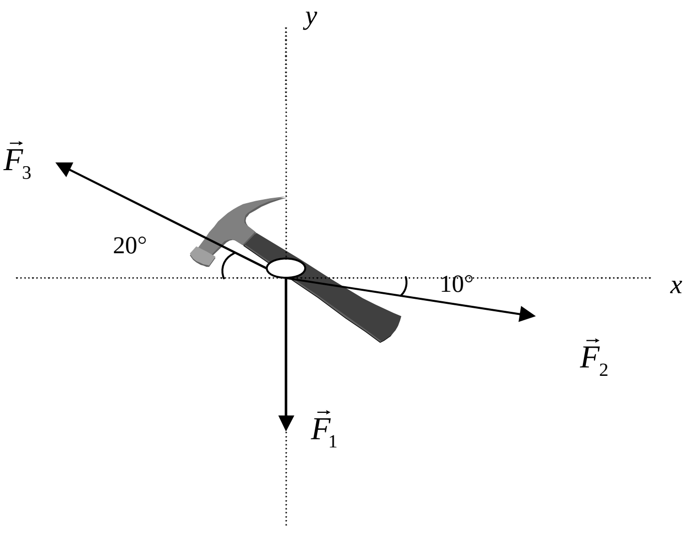
3.13 Calculeu la força total exercida sobre el punt de la figura. F_1 = 20 N, F_2 = 30 N, F_3 = 50 N.



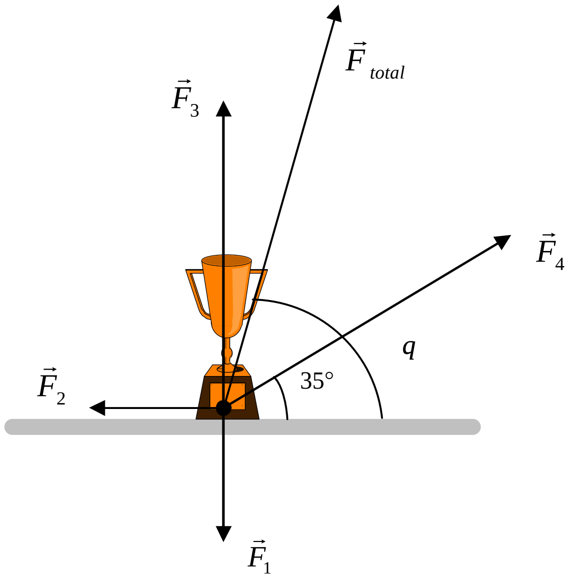
3.14 Calculeu la força total exercida sobre la tortuga de la figura. F_1 = 5 N, F_2 = 7 N, F_3 = 8 N.



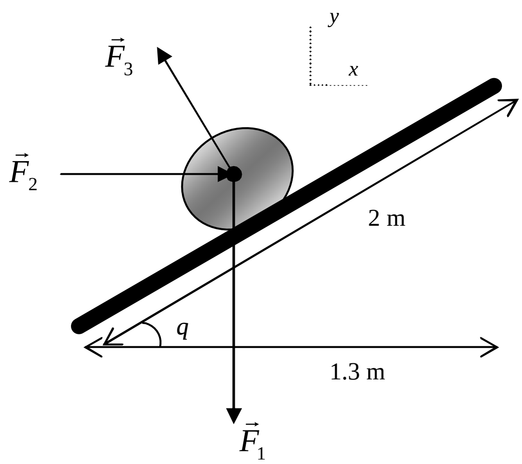
3.15 Calculeu la força total exercida sobre el punt dibuixat en el martell de la figura. F_1 = 5 N, F_2 = 7 N, F_3 = 8 N.



3.16 Sobre el punt de la figura actua una força total de 40 N. Els mòduls de les forces són: F_2 =20 N i F_3 = 40 N i F_4 = 30 N. Calculeu el mòdul de la força $\vec{F}_1$.



3.17 Calculeu la força total exercida sobre el punt dibuixat en la figura.Les dades dels mòduls de les forces són: F_1 = 5 N, F_2 = 7 N i F_3 = 4 N i aquesta és perpendicular a la superfície.



3.2 Forcés a distància.

Conceptes bàsics

En la Natura existeixen fonamentalment dos tipus de forcés:

- d'acció a distància
- de contacte

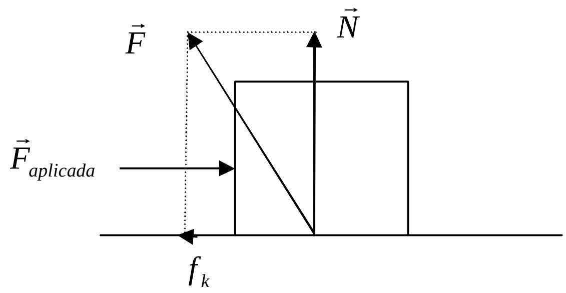
Les forcés de acció a distància són forcés que poden actuar entre cossos que no estan en contacte entre si. Són d'aquest tipus les forcés gravitatòries, magnètiques y elèctriques. Una força particularment important és la força amb que la Terra atreu els cossos, que s'anomena *pes*, $\vec{P} = m\vec{g}$, on m és la massa de l'objecte i $\vec{g}$ és l'acceleració de la gravetat, que val aproximadament 9.8 m s^{-2}. Les forces elèctriques és veuran al tema 5.

3.3 Forces de contacte.

Conceptes bàsics

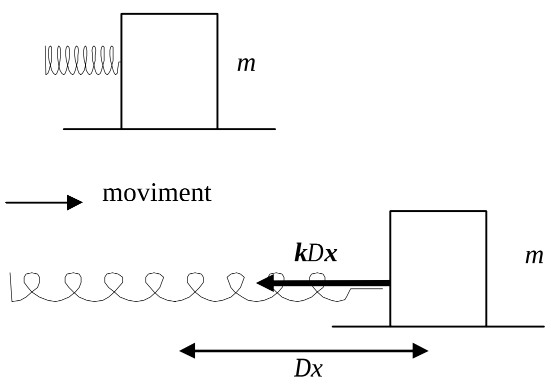
Les forcés que actuen quan dos objectés estan en contacte s'anomenen forcés de contacte, malgrat això, a nivell microscòpic, aquestes forcés són magnètiques y elèctriques. Són exemples de forcés de contacte la força de fricció, la força que exerceix una molla sobre un objecte, les tensions en les cordés i les forces aplicades. Sempre, on hi ha un contacte hi haurà una força.

En l'exemple següent es mostren forces de contacte, que són: $\vec{F}_{apliicada}$, i $\vec{F}$



$\vec{F}_{aplicada}$ és la força externa que s'aplica sobre l'objecte, $\vec{F}$ és la força de contacte entre les dues superfícies, $\vec{N}$ y $\vec{f}_k$ són les components de la força de contacte que són perpendicular a la superfície y paral·lela a la superfície, respectivament. f_k és la força de fregament cinètica y té la forma: $f_k = m_k N$, on m_k és el coeficient de fregament cinètic que té un valor constant en un interval relativament ample de velocitats i només és funció de la natura de les superfícies que estan en contacte. En el tema següent es calcularà l'energia dissipada per aquesta força.

Una altra força de contacte que s'utilitza amb freqüència és la força elàstica que realitza una molla sobre un objecte de massa m. Aquesta força segueix la llei de Hooke: $\vec{F} = k\Delta\vec{x}$, on $D\vec{x}$ és la deformació experimentada per la molla.



3.4 Les lleis de Newton. Diagrama del sòlid lliure

Conceptes bàsics

Malgrat que en la natura existeixen molts tipus de forces, les efectes de qualsevol d'aquestes a nivell macroscòpic es descriuen mitjançant les tres lleis de Newton:

- Primera llei de Newton: "Un objecte continua en estat de repòs o de moviment uniforme rectilini, a menys ser que sobre ell actuïn forces que el facin canviar d'estat".

Sí $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, es diu que l'objecte està en equilibri, on $\sum \vec{F}_{ext}$ indica la suma de les forces externes que actuen sobre l'objecte.

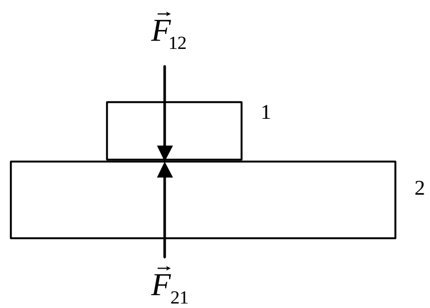
- Segona llei de Newton: "Quan existeix una força neta que actua sobre un objecte, aquest objecte experimenta una acceleració en la mateixa direcció de la força.

És a dir:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$, on m és la massa de l'objecte i $\vec{a}$ és l'acceleració

Per tant en equilibri ($\sum \vec{F}_{ext} = 0$) no hi ha acceleració de forma que la velocitat és constant. Podem dir que la primera llei de Newton és un cas particular de la segona llei.

- Tercera Llei de Newton: "Per cada acció existeix sempre una reacció igual però de sentit oposat". Les forces sempre actuen per parelles. Les forces d'acció i reacció actuen sobre objectes diferents y tenen el mateix mòdul i direcció però sentits oposats. En el cas següent, $\vec{F}_{12}$ és la força que exerceix l'objecte 1 sobre el 2 y $\vec{F}_{21}$ és la força que exerceix l'objecte 2 sobre l'1. Totes dues són forcés d'acció i reacció.



Avui sabem que la tercera llei de Newton és valida per a forces gravitatòries i elèctriques (incloent les forces de contacte), però no per a forces magnètiques.

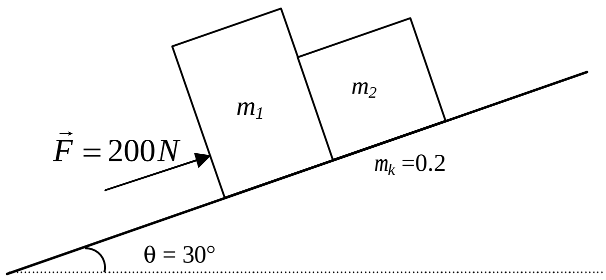
Diagrama del sòlid lliure:

El mètode general para resoldre problemes mitjançant les lleis de Newton consisteix en els següents passos:

- Aïllar l'objecte y dibuixar les forces reals que actuen sobre ell. Si hi ha més d'un objecte, caldrà dibuixar un diagrama de forces per cadascun.
- Escollir un sistema de coordenades per cada objecte i aplicar la segona llei de Newton en forma de components.
- Resoldre el sistema d'equacions.

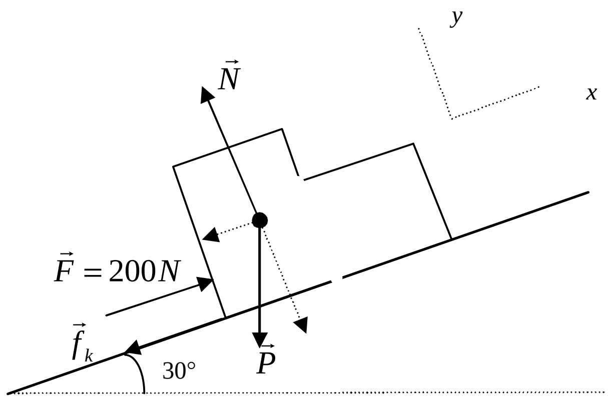
Exemple 3.2

A partir de l'esquema de la figura, a) dibuixeu el diagrama del cos lliure del sistema format per les dues caixes de masses, m_1 = 5 kg i m_2 = 10 kg; b) calculeu l'acceleració de les caixes; i c) calculeu la força de fregament que actua en cadascuna. d) calculeu la força de contacte entre les dues caixes.



Resolució

a)



on:

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{g} = M\vec{g}$$

b) Apliquem la segona llei de Newton en les direccions x i y:

direcció x:

$$F - f_k - Mgsin30^\circ = Ma\ ,$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$f_k = m_k N$$

direcció y:

$$N = Mg\ cos\ 30^\circ$$

$$f_k = m_k Mg \cos 30^\circ$$

$$F - m_k Mg \cos 30^\circ - Mg \sin 30^\circ = Ma$$

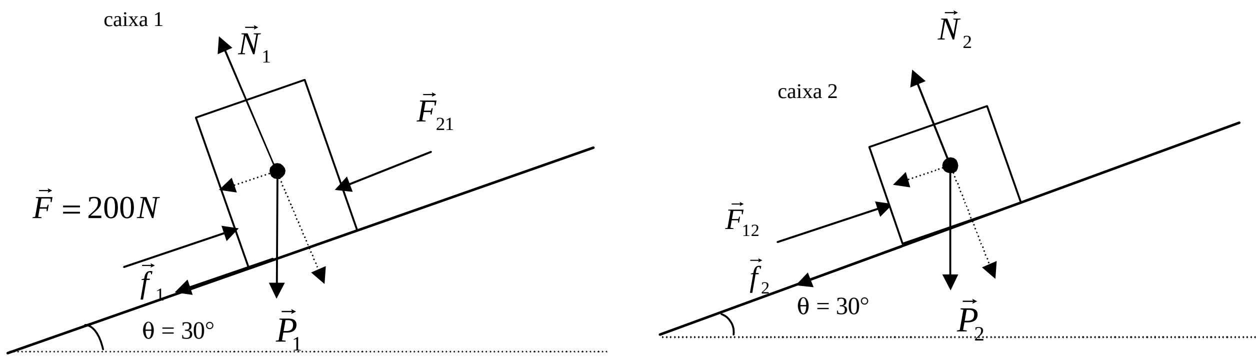
Substituint els valors numèrics i aïllant l'acceleració: a = 6.7 m/s^2

c)

$$f_1 = \mu_k N_1 = \mu_k m_1 g \cos 30^\circ = 8.5\,\text{N}$$

$$f_2 = \mu_k N_2 = \mu_k m_2 g \cos 30^\circ = 17\,\text{N}$$

d) Dibuixem els diagrama del sòlid lliure de cadascuna de les caixes:



f_1 i f_2 són les forces de fricció cinètica.

Per la tercera llei de Newton:

$$F_{12} = F_{21}, \text{ en forma vectorial: } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

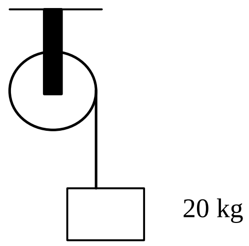
Apliquem la segona llei de Newton a la caixa *2*:

$$F_{12} - P_2 \,\text{sen}\, 30 - f_2 = m_2 a$$
$$F_{12} = 64 + 49 + 17 = 133.5N$$

Problemes

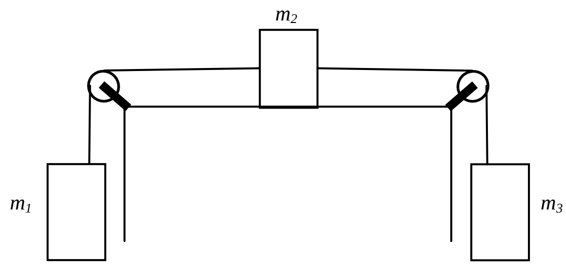
3.18 Sobre un cos en repòs de massa m_1 actua una força de 100 N en direcció horitzontal. Sobre un altre cos de massa m_2 actua la mateixa força i l'acceleració produïda és doble que l'acceleració del primer cos. a) Calculeu la relació entre les dues masses. b) Si la massa m_1 = 10 kg, calculeu l'acceleració dels dos cossos.

3.19 Un objecte de 20 kg està sotmès a una tensió de 10 N . Calculeu la seva acceleració.



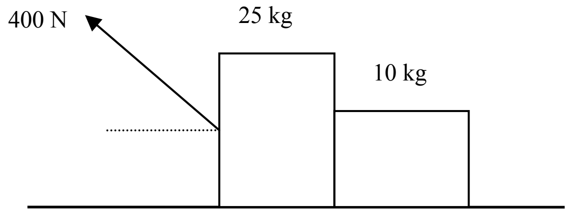
3.20 Un home arrossega un objecte de massa 5 kg situat sobre un pla horitzontal mitjançant una força de 5 N que forma un angle de 30° amb l'horitzontal. a) Dibuixeu el diagrama del sòlid lliure de l'objecte. b) Calculeu la força que fa el pla sobre l'objecte. c) Calculeu la seva velocitat quan ha recorregut 10 m. d) Calculeu el temps que ha trigat a assolir-la. Negligiu la fricció.

3.21 En el diagrama de la figura, el sistema està inicialment en repòs. Les cordés i les politges tenen massa negligible. La massa $m_1 = m_2 = 5$ kg i la $m_3 = 7.5$ kg. Calculeu: a) L'acceleració de les masses. b) Les tensions de les cordes. c) L'altura que les separa quan ha transcorregut un temps de 2 s.



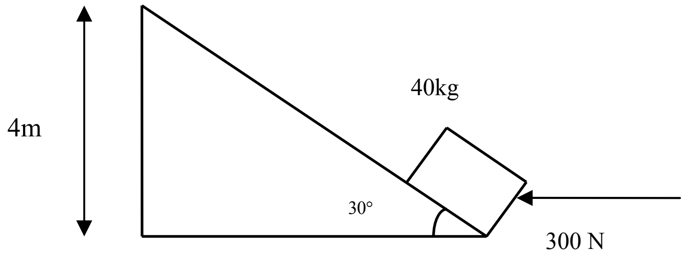
3.22 Repetiu el problema anterior tenint en compte que el coeficient de fricció cinètic entre la superfície i el bloc de massa m_2 és 0.2

3.23 Dos blocs de massa 10 kg i 25 kg, enganxats entre ells, inicialment en repòs i recolzats sobre una superfície horitzontal llisa són arrosegats per una força que forma un angle de 45° amb l'horitzontal. a) Calculeu l'acceleració dels dos blocs així com la velocitat i l'espai recorregut quan ha passat un temps de 2 s. b) Calculeu la força entre els dos blocs.

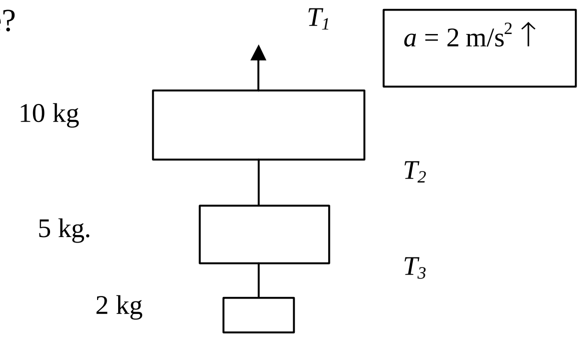


3.24 Un cos es deixa anar des de dalt d'una rampa de 40° d'inclinació. a) Calculeu la velocitat que té a l'instant en què ja ha recorregut els dos primers metres. Considereu negligible la fricció. b) Repetiu el problema tenint en compte que el coeficient de fregament cinètic entre la rampa i el cos és 0.2

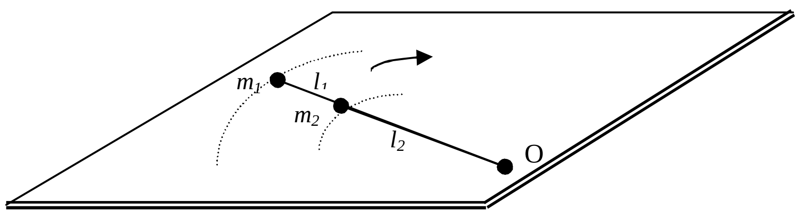
3.25 Un objecte de massa 40 kg puja un pla inclinat que forma un angle de 30° respecte a l'horitzontal sota l'efecte d'una força horitzontal constant de 300 N (vegeu figura). Si inicialment l'objecte està aturat, determineu, aplicant les lleis de Newton, la velocitat de l'objecte quan ha pujat 4 m. Suposeu que el fregament és negligible.



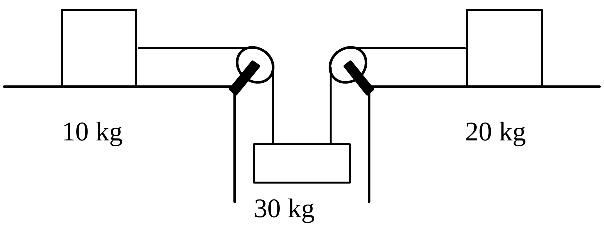
3.26 Quant valen les tensions a cada cable?



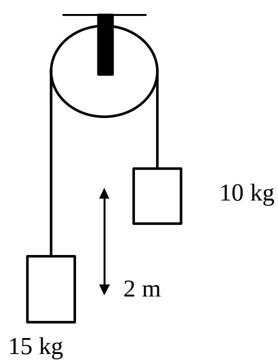
3.27 Un bloc de massa m_1 = 3 kg, que està lligat a l'extrem d'una corda de longitud l_1 = 50 cm, fa un moviment circular a 20 r.p.m. sobre una taula sense fregament. L'altre extrem de la corda està fixat a la taula. Calculeu: a) la tensió de la corda. b) Si mitjançant un fil de longitud l_2 = 20 cm afegim una massa m_2 = 2 kg i fem girar el conjunt a 40 r.p.m., quan valdran ara les tensions del fils?



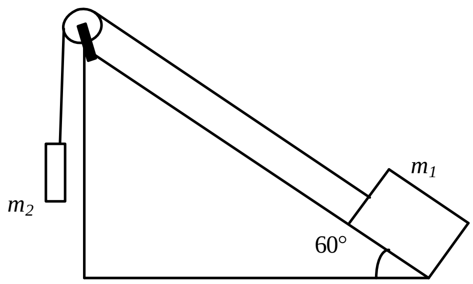
3.28 Calculeu les tensions de les cordes així com l'acceleració del sistema de la figura suposant un coeficient de fricció cinètic de 0.2



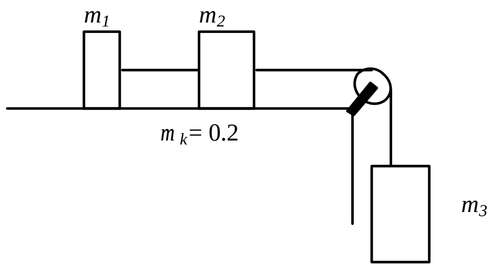
3.29 En una màquina de Atwood, els dos cossos estan inicialment separats una altura de 2 m (vegeu figura) i les seves masses son m_1 = 10 kg i m_2 = 15 kg. Quina massa hauria d'afegir-se a un d'ells perquè l'altura entre ells sigui de 5 m en 2 s?



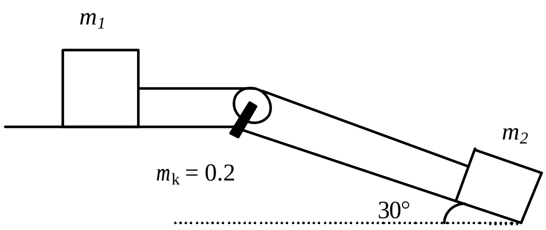
3.30 En el sistema de la figura, les masses valen m_1 = 10 kg i m_2 = 4 kg i estan inicialment en repòs. El coeficient de fricció cinètic entre m_1 i el pla és 0.3. Calculeu: a) L'acceleració de les masses. b) La tensió dels cables. c) El temps que triguen en recórrer 2 m.



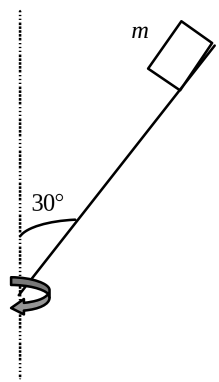
3.31 Tres masses, m_1 = 2 kg, m_2 = 4 kg i m_3 = 10 kg, estan unides tal com s'indica a la figura mitjançant un fil inextensible de massa negligible. El coeficient de fricció cinètic val 0.2 a) Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs. b) Calculeu les tensions. c) Calculeu la velocitat de cada massa quan m_3 hagi baixat 15 m.



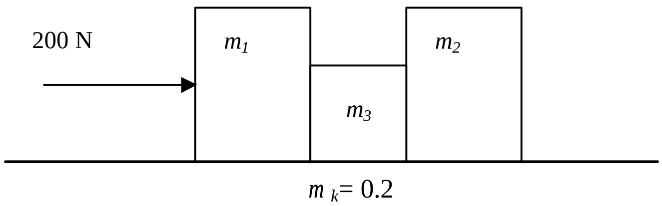
3.32 El sistema de la figura és mou inicialment amb una velocitat de 4 m/s. Les masses són m_1 = 6 kg i m_2 = 14 kg. El coeficient de fricció cinètic val 0.2. La massa de la politja és negligible. a) Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs. b) Calculeu la tensió de la corda. c) Calculeu la velocitat de cada bloc després de 3 segons.



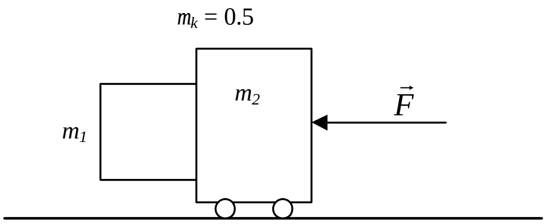
3.33 Un regle inclinat 30° de longitud 1 m gira al voltant d'un eix vertical. Un cos de massa m es manté en equilibri sobre l'extrem. Si el coeficient de fricció és menyspreable, trobeu la velocitat angular a què ha de girar la superfície perquè no caigui el cos.



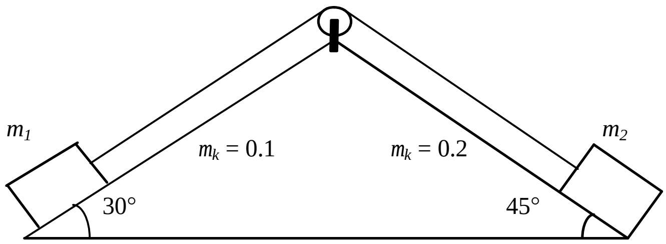
3.34 Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs de masses m_1 = 20 kg, m_2 = 5 kg i m_3 = 40 kg. Calculeu l'acceleració del sistema i les forcés de contacte entre els blocs. El coeficient de fricció cinètic val 0.2.



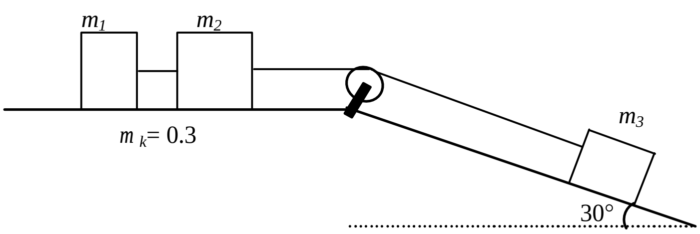
3.35 Entre el bloc de massa m_1 = 5 kg i el de massa m_2 = 10 kg existeix un coeficient de fricció cinètic m_k = 0.5. Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs de la figura. Calculeu: a) la força mínima F que hauria d'aplicar-se sobre la massa m_2 perquè el bloc de massa m_1 no llisqués i b) el mòdul de la força de contacte entre els dos blocs.



3.36 Dues masses m_1 = 10 kg i m_2 = 22 kg estan lligades als extrems d'una corda com s'indica a la figura. Si els coeficients de fricció cinètics són, 0.1 i 0.2, dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun del blocs. Calculeu l'acceleració del conjunt i la tensió de la corda quan es deixa el sistema en llibertat.



3.37 Tenim tres masses m_1 =1 kg, m_2 = 2 kg i m_3 = 8 kg, unides tal com s'indica a la figura mitjançant una corda inextensible de massa negligible. a) Cap a on es mou el sistema? b) Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs tenint en compte que existeix fricció per a la superfície horitzontal i no per al pla inclinat. Calculeu: c) l'acceleració del sistema, d) la velocitat de cada bloc quan la massa m_3 hagi baixat una altura de 8 m respecte a la posició inicial de repòs.



Solucions

3.1 $F_y = -10.6$ N, $F_x = -17$ N

3.2 $F_\perp = -13$ N, $F_{//} = -35.71$ N

3.3 $\vec{F} = \left(-30.64\vec{i} - 15.71\vec{j}\right)$N

3.4 $\vec{F} = \left(-11.74\vec{i} + 10\vec{j}\right)$N

3.5 $\vec{F} = \left(-33\vec{i} - 11.7\vec{j}\right)$N

3.6 $\vec{F}_1 = \left(102\vec{i} + 70.7\vec{j}\right)$N

3.7 $\vec{F} = \left(152\vec{i} + 468.6\vec{j}\right)$N

3.8 $\vec{F} = \left(187.2\vec{i} + 195.7\vec{j}\right)$N

3.9 0

3.10 $\vec{F} = \left(-45.7\vec{i}\right)$N

3.11 $\vec{F} = \left(14.6\vec{i}\right)$N

3.12 $\vec{F} = \left(34.7\vec{i} + 56.1\vec{j}\right)$N

3.13 7 N cap a la dreta i paral·lela a la superfície

3.14 $\vec{F} = \left(0.43\vec{i} + 4.66\vec{j}\right)$N

3.15 $\vec{F} = \left(-0.62\vec{i} - 6.52\vec{j}\right)$N

3.16 17.46 N

3.17 $\vec{F} = \left(3.96\vec{i} - 2.4\vec{j}\right)$N

3.18 a) $m_1 = 2m_2$, b) $a_1 = 10$ m/s^2 , $a_2 = 20$ m/s^2

3.19 9.3 m/s^2

3.20 b) 46.5 N, c) 4.16 m/s, d) 4.78 s

3.21 a) 1.4 m/s^2 , b) 56 N, 63 N, c) 5,6 m

3.22 a) 0.84 m/s^2, b) 53.2 N, 67.2 N, c) 3.36 m

3.23 a) 8.08 m/s^2, 16.16 m/s, 16.12 m, b) 80.8 N

3.24 a) 5.02 m/s, b) 4.38 m/s

3.25 5.05 m/s

3.26 200.6 N, 82.6 N, 23.6 N

3.27 a) 6.55 N, b) 26.32 N, 7.02 N

3.28 3.92 m/s^2, 58.8 N, 117.6 N

3.29 treure 3.34 kg a la massa de 10 kg

3.30 2.21 m/s^2, b) 48.04 N, c) 1.34 s

3.31 b) 14.7 N, 44.1 N, c) 12.72 m/s

3.32 b) T=21.67 N, a=1.65 m/s^2, c) v=8.9 m/s

3.33 5.8 rad/s

3.34 1.12 m/s^2, 138.4 N, 15.4 N

3.35 Sol: a) 294 N, b) $F_{12} = F_{21} = 109.6\,\mathrm{N}$

3.36 2.0 m/s^2, 77.5 N

3.37 a) Cap a la dreta, c) 2.76 m/s^2, d) 9.4 m/s

TEMA 4 CAUSES DEL MOVIMENT. DINÀMICA II

Objectius

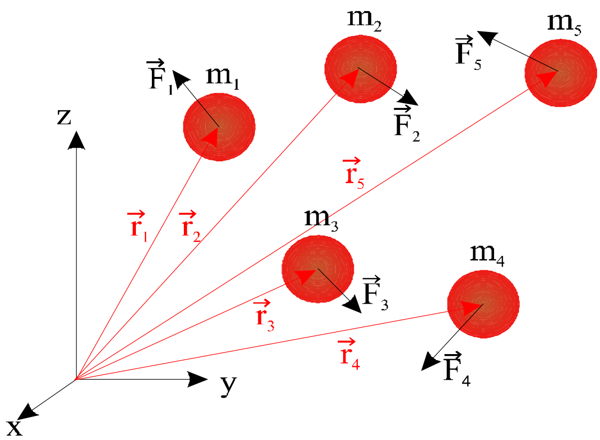
S'estudiarà el moviment del centre de masses d'un sistema de partícules. S'introduiran magnituds molt importants com ara: la quantitat de moviment i la seva conservació quan es produeix un xoc entre dos o més cossos, l'energia cinètica que esta associada amb la massa i la velocitat que assoleix un cos, la energia potencial associada a la posició de l'objecte i el teorema de la conservació de la energia mecànica.

Índex

4.1 Moviment del centre de masses.

Conceptes bàsics

El centre de masses (c.d.m. o CM) d'un sistema de partícules és aquell punt on està concentrada tota la massa del sistema i es mou com si sobre seu actuessin totes les forces externes aplicades al sistema. Les forces internes s'anul·len entre si perquè són d'acció i reacció. Tenim un sistema de partícules sobre les quals actuant forces externes, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ La posició $\vec{R}$ del centre de masses es calcula de la manera següent:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1} m_i \vec{r}_i}{M}, \text{ on } \quad M = \sum_{i=1} m_i$$

En components:

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}, \; Y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}, \; Z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$$

La velocitat del centre de masses és:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1} m_i \vec{v}_i}{M}$$

La acceleració del centre de masses és:

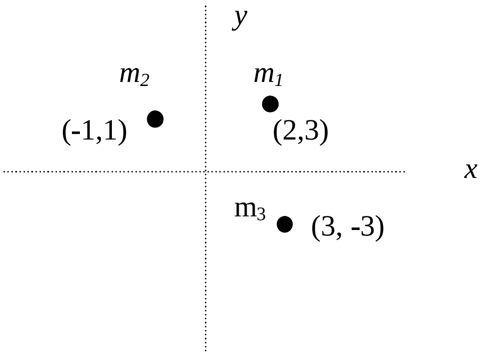
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1} m_i \vec{a}_i}{M}$$

La segona llei de Newton aplicada a un sistema de partícula és:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

Exemple 4.1

Calculeu la posició del centre de masses del sistema discret de partícules de la figura. Les masses són m_1 = 1 g, m_2 = 2 g i m_3 = 3 g. Les posicions de les partícules estan en *cm*. Aquest sistema esta sotmès a una força $\vec{F} = \left(3\vec{i} + 5\vec{j}\right)$ N aplicada sobre la massa m_1. Calculeu l'acceleració del centro de masses.



Resolució

La posició del centre de masses serà:

$$X_{CM} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3}{6} = \frac{9}{6} = 1.5\,\text{cm}$$

$$Y_{CM} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-3)}{6} = \frac{-4}{6} = -0.7\,\text{cm}$$

$$\vec{R}_{CM} = (1.5, -0.7)\ \text{cm}$$

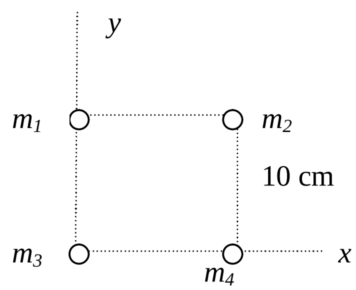
L'acceleració del centre de masses és:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Sigma \vec{F}_{ext}}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{3\vec{i} + 5\vec{j}}{6\cdot 10^{-3}} = \left(500\vec{i} + 833\vec{j}\right) m/s^2$$

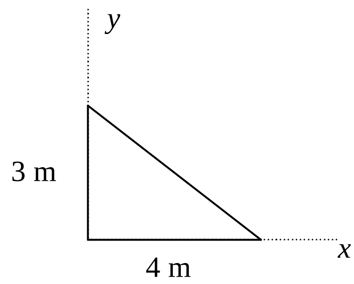
Problemes

4.1 Les quatre masses de la figura estan col·locades formant un quadrat que fa 10 cm de costat. Els valors d'aquestes masses són, m_1 = 100 g, m_2 = 200 g, m_3 = 300 g i m_4 = 400 g. a) Calculeu el c.d.m.. del sistema. b) Si les masses són iguals en els quatre vèrtexs, calculeu el c.d.m..

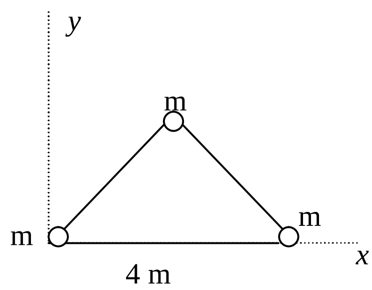


4.2 Un sistema esta format per dues masses puntuals de 200 g y 600 g unides per una vareta de longitud 1 m i massa negligible. a) Calculeu el c.d.m. del sistema. b) Si s'aplica sobre la massa de 200 g una força externa de 5 N, quina serà l'acceleració del c.d.m. del sistema. c) Calculeu l'espai recorregut pel sistema desprès de 5 s. d) En quina posició estarà el c.d.m. del sistema desprès dels 5 s ?

4.3 Calculeu la posició del c.d.m. del sistema de la figura format per tres varetes de densitats lineals diferents i constants al llarg de cadascuna. La massa és la mateixa en les tres i val 3 kg.

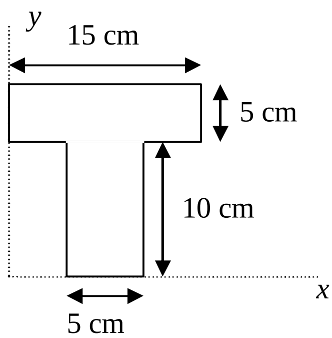


4.4 Calculeu la posició del c.d.m. del sistema de la figura format per tres masses puntuals, *m*, col·locades formant un triangle equilàter que fa 4 m de costat.

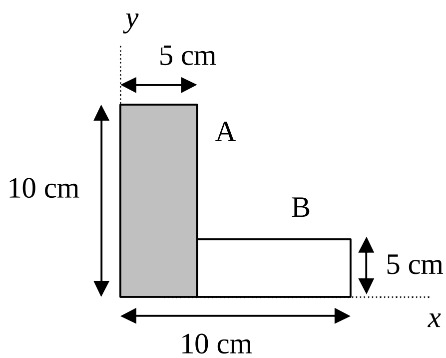


4.5 Una esfera massissa de radi *R* està formada per dos hemisferis de densitats volumíniques homogènies amb valors respectius r_1 = 6 g/cm^3 i r_2 = 0.8 g/cm^3. El c.d.m. d'una semiesfera és (0, 4R/3π). a) Calculeu el c.d.m. de l'esfera. b) Calculeu el c.d.m.. de l'esfera si tota l'esfera fos homogènia.

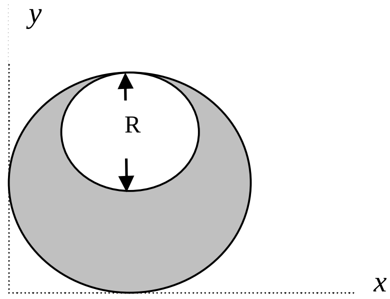
4.6 Calculeu el c.d.m. de la figura plana i densitat superficial homogènia.



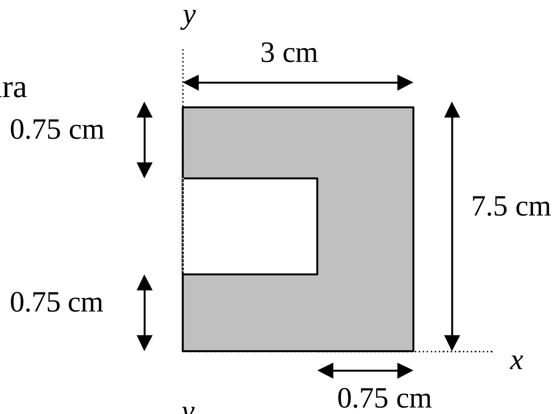
4.7 Determineu: a) la posició del c.d.m. de la figura plana formada per dos materials de densitats superficials homogènies i constants, r_A = 7 g/cm^2 i r_B = 12 g/cm^2. b) On seria si les dues parts fossin del mateix material ?



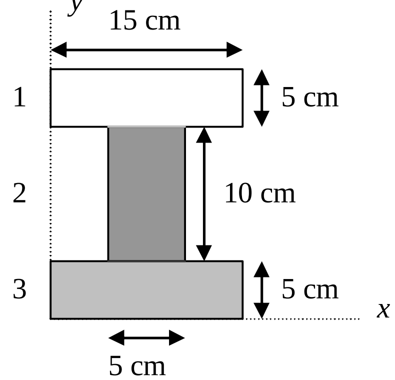
4.8 Calculeu el c.d.m. de la figura plana homogènia que està ombrejada.



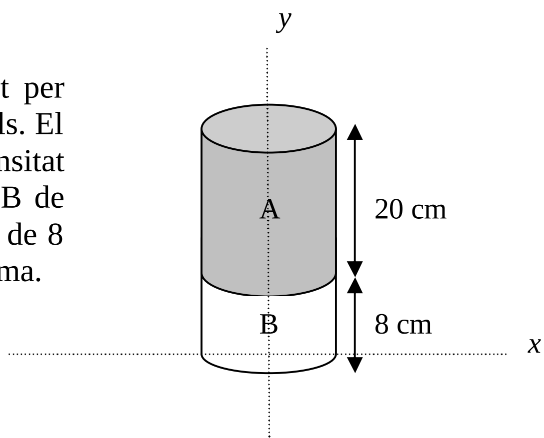
4.9 Calculeu la posició del c.d.m. de la figura plana i homogènia.



4.10 Calculeu la posició del c.d.m. de la figura plana. El rectangle *1* té una densitat superficial homogènia de 0.8 g/cm^3, el *2* la té de 3 g/cm^3 i el *3* la té de 4 g/cm^3.



4.11 Un cilindre de longitud *L* està format per dos cilindres units de diferents materials. El cilindre A, de radi *R*, té una densitat homogènia de 0.6 g/cm^3 i el cilindre B de mateix radi té una densitat homogènia de 8 g/cm^3. Calculeu el c.d.m. de tot el sistema.



4.2 Quantitat de moviment. Conservació de la quantitat de moviment.

Conceptes bàsics:

• El moment lineal o quantitat de moviment d'una partícula de massa m que té una velocitat $\vec{v}$ es defineix com: $\vec{p} = m\vec{v}$. El moment lineal o quantitat de moviment és una magnitud vectorial que té:
mòdul: mv
direcció y sentit: igual que la velocitat.
Unitat en el S.I: kg·m/s

• La quantitat de moviment d'un sistema de partícules és:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = M\vec{V}_{CM}$$

La segona llei de Newton es pot posar en funció del $\vec{P}$ de la manera següent:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(M\vec{V}_{CM}\right)}{dt} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

"La variació de la quantitat de moviment només és deguda a les forces externes que actuen sobre el sistema". Si la suma de forces externes és zero, la quantitat de moviment és constant.

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = ctt$$

Quan $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, es diu que el sistema és un sistema aïllat.

El principi de la conservació de la quantitat de moviment lineal diu: "En un sistema aïllat, la velocitat del centre de masses és constant i la quantitat de moviment es conserva". Aquest principi té un gran interès en la física. Es compleix en qualsevol tipus de xoc elàstic i inelàstic entre dos o més cossos, sempre que s'esculli com a sistema el conjunt format per tots els elements que intervenen en el xoc. Si s'escull com a sistema una part dels elements que intervenen en el xoc, aleshores no es compleix el principio perquè existeixen forces externes al sistema (les que exerceixen la resta dels elements) que canvien la quantitat de moviment, és a dir, la força resultant exterior sobre el sistema elegit no és nul·la.

• Impuls d'una força: quan sobre un objecte de massa m que es mou a una velocitat $\vec{v}$, hi actua una força constant $\vec{F}$ durant un interval de temps Dt, el canvi en la quantitat de moviment $\vec{p}$ en l'interval de temps es defineix com l'impuls $\vec{I}$ de la força.

$$\vec{I} = D\vec{p} = \vec{F}Dt$$

Exemple 4.2

Es llança horitzontalment contra una paret un ou de massa 60 g amb una velocitat de 6 m/s i es deforma 4 cm aproximadament. Calculeu: a) el temps que dura el xoc. b) la variació de la quantitat de moviment, c) la força i l'acceleració durant el xoc, suposades aquestes constants.

Resolució

Sí el sistema que escollim està format per l'ou i la paret, la variació en la quantitat de moviment d'aquest sistema es zero perque les forces externes que hi actuen (el pes de l'ou) son molt petites comparades amb les forces de interacció o impulsores interns del xoc entre l'ou i la paret. Por tant aquest sistema es pot considerar aïllat.

Sí escollim l'ou com sistema, sobre aquest actua una força externa impulsora del xoc i podrem calcular-la.

El sistema que estudiarem, per tant, és l'ou.

a) Primer es calcula la velocitat mitjana que assoleix l'ou:

$$\bar{v} = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{6+0}{2} = 3\,\text{m/s}$$

el temps que dura el xoc és:

$$t = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{0.04}{3} = 0.013\,\text{s}$$

b) La variació en la quantitat de moviment és la quantitat de moviment final menys l'inicial:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 0 - (0.06 \cdot 6) = -0.36\vec{i}\ \text{kg·m/s}$$

El mòdul de la variació en la quantitat de moviment és: 0.36 kg·m/s

c) la força promitja constant que actua sobre l'ou durant el interval de temps que dura el xoc és:

$$F = \frac{\Delta p}{t} = \frac{0.36}{0.013} = 27.7\,\text{N}$$

Aquest valor de força pot identificar-se com una massa de aproximadament 2.8 kg caient sobre l'ou..

L'acceleració, aproximadament constant en el mateix interval de temps, és:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{27.7}{0.06} \approx 462\,\text{m/s}^2$$

Problemes

4.12 Un objecte, situat inicialment en l'origen de coordenades, de 2 kg de massa, té una quantitat de moviment instantània de $\vec{P} = 16\vec{i}$ kg·m/s. Sobre aquest objecte actua una força de valor $\vec{F} = (5\vec{i} + 8\vec{j})$N. Calculeu: a) l'acceleració de l'objecte, b) la velocitat, c) la posició després de 2 s, d) la quantitat de moviment de l'objecte després dels 2 s.

4.13 Un conductor de massa 80 kg circula en un cotxe a 60 km/h i porta posat el cinturó de seguretat. En un moment determinat xoca contra un mur. La deformació que experimenta el cotxe és la distancia recorreguda pel cotxe fins que para. Suposeu que aquesta distància és de 60 cm. Calculeu: a) El temps que dura el xoc. b) La variació de la quantitat de moviment del cap del home de massa 3.5 kg aproximadament. c) La força i l'acceleració suposades constants durant el xoc, que fa el coll sobre el cap del conductor.

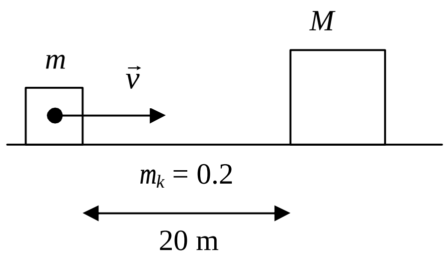
4.14 El conductor del problema anterior no porta el cinturó de seguretat. Estimeu la força que experimenta el cap en el xoc suposant que aquesta rep el cop a sobre del volant.

4.15 Un nen de 50 kg de massa salta endavant i cap enfora des d'una barca de 2000 kg. Ambdós es trobaven en repòs. El nen salta a una velocitat de 7 m/s. Quina serà la velocitat de retrocés de la barca buida?

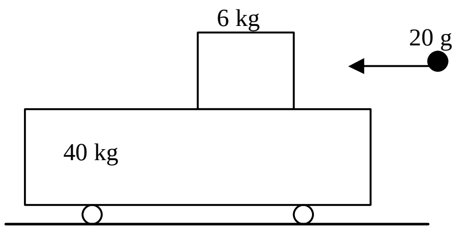
4.16 Es dipara un projectil en una direcció que forma un angle de 45° amb l'horitzontal i a una velocitat de 400 m/s. Quan el projectil arriba al punt més alt de la seva trajectòria, explota i es trenca en dues parts de la mateixa massa. Una part, amb velocitat inicial zero, cau verticalment. A quina distància del punt on s'ha disparat el projectil caurà sobre el terreny el segon fragment?.

4.17 Dues nenes de masses m_1 = 45 kg i m_2 =40 kg patinen en una pista de gel. Inicialment estan en repòs i s'empenyen l'una a l'altra. a) Calculeu la velocitat del c.d.m. 2 s després de deixar-se anar. La nena de massa m_1 surt amb una velocitat de 2 m/s. b) Quina velocitat assoleix l'altra nena?. c) Calculeu l'espai que separa ambdues nenes quan han passat 2 s.

4.18 Un cos de massa m = 5 kg té una velocitat constant de 5 m/s i en aquest instant se aplica una força horitzontal constant de 10 N. Xoca amb un altre objecte de massa M = 80 kg en repòs i queda encastat. a) Calculeu la velocitat de la massa m just abans del xoc. b) Calculeu la velocitat del conjunt just després del xoc.



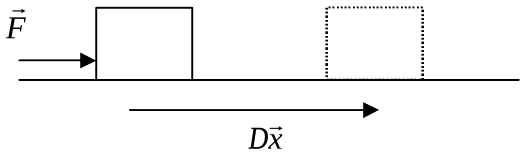
4.19 Disparem una massa de 20 g a una velocitat de 500 m/s contra un cos de massa 6 Kg que reposa sobre un carretó. El coeficient de fricció entre el cos i el carretó és 0.4. Sabent que la massa del carretó és de 40 kg i que pot rodar lliurement, trobeu: a) la velocitat del cos sobre el carretó després de l'impacte. b) l'acceleració del cos i del carretó.



4.3 Treball i potencia.

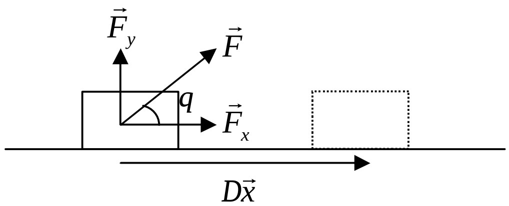
Conceptes bàsics:

• Treball (W) realitzat per una força constant que actua durant tot el moviment:



$$W = F \cdot \Delta x$$

•Treball realitzat per una força constant que no acta en la direcció del moviment:



$$W = F_x \cdot \Delta x = F \cos\theta \cdot \Delta x$$

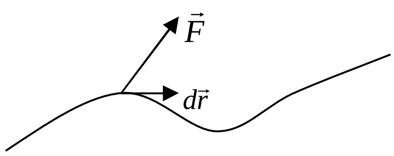
La component $\vec{F}_y$ no realitza treball.

El treball és una magnitud escalar i la seva unitat en el Sistema Internacional (S.I.) es el Joule. 1 J = 1 N·m

• En notació vectorial, i tenint en compte la definició de producte escalar de dos vectors, l'expressió del treball és:

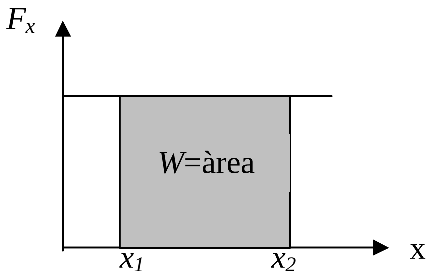
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$$

• Si la força no és constant i la trajectòria no és rectilínia, aquesta es descompon en petits trams, prou petits com per poder considerar constant la força i el moviment rectilínio. En el cas límit aquest trams són infinitesimals i cada un dels trams es pot considerar representat per un vector $d\vec{r}$. El treball en cada un dels trams és: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ i el treball total és:



$$W_{if} = \int_i^f dW = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

• Mètode gràfic per calcular el treball:



La potència relaciona el treball amb l'interval de temps en què es realitza.

Potència promitja , $\overline{\mathrm{P}} = \frac{\Delta \mathrm{W}}{\Delta \mathrm{t}}$

La unitat en el S.I. és el Watt. 1W = 1 J/s

4.4 Energia cinètica.

Conceptes bàsics

La energia cinètica, K, és una mesura del treball que una força pot realitzar en virtut del seu moviment. Per un cos de massa m que es mou a una velocitat v, la energia cinètica associada és:

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

• Teorema del treball i l'energia: el treball i l'energia cinètica es poden relacionar de la manera següent:

$$W = DK$$

on, W és el treball realitzat per totes las forces que actuen sobre el cos i DK és la variació en l'energia cinètica experimentada pel cos, es a dir la energia cinètica final menys la inicial.

4.5 Forces conservatives y energia potencial.

Conceptes bàsics:

Una força es conservativa quan compleix que: el treball realitzat per aquesta força no depèn del camí recorregut.Una definició equivalent és que el treball realitzat per la força al llarg d'un camí tancat és zero.

Són forces conservatives: la gravitatòria, l'elàstica, l'elèctrica. La força de fricció és una força no conservativa.

Els efectes de qualsevol força conservativa es poden descriure mitjançant un terme d'energia potencial.

Exemples:

• Si llancem un objecte de pes P cap a dalt des d'una alçada inicial h_i fins a una alçada final h_f, l'única força que actua és la gravitatòria, sempre que negligim el fregament amb l'aire. El treball realitzat per aquesta força conservativa és:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_i^f - mgdr = -\left(mgh_f - mgh_i\right)$$

El terme mgh s'anomena energia potencial gravitatòria, U. Per tant:

$$W = -DU$$

En general, per qualsevol força conservativa que realitzi treball es compleix:

$$W_{conserv} = -DU$$

• Una altre força conservativa és la força elàstica d'una molla. Si un objecte de massa m unit a una molla de constant elàstica K es desplaça des d'una posició inicial fins a una posició final, el treball realitzat per la força elàstica de la molla és:

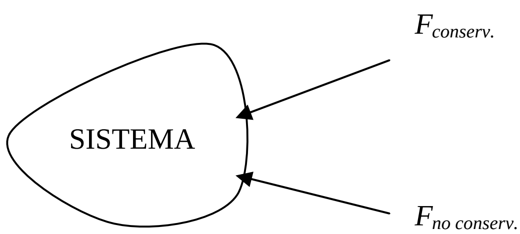
$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_i^f -kxdx = \left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right)$$

Per tant, en aquest cas la energia potencial elàstica és el terme $\frac{1}{2}kx^2$

4.6 Energia mecànica. Conservació de l'energia mecànica.

Conceptes bàsics

Sí sobre un sistema realitzen treball forces conservatives i no conservatives , el treball total és:



$$W = W_{conserv.} + W_{no\ conserv.}$$

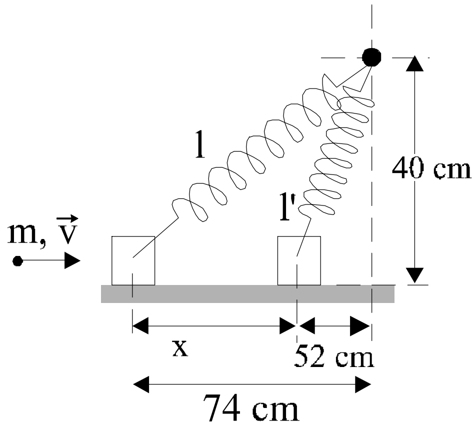
Apliquem el teorema del treball i l'energia:

$$\Delta K = W$$
$$DK = -DU + W_{no\ conserv.}$$
$$DK + DU = W_{no\ conserv.}$$
$$D(K + U) = W_{no\ conserv.}$$

El termino $K + U$ s'anomena energia mecànica. La energia total sempre es conserva
Si $W_{no\ conserv.} = 0$, l'energia mecànica es conserva $\Rightarrow$ $DK = -DU$

Exemple 4.3

Un objecte de massa m = 200 g, i velocitat 100 m/s xoca, de forma totalment inelàstica, amb una caixa cuadrade que fa 20 cm de costat i massa M = 100 kg, que està unida pel seu centre geomètric a una molla de constant elàstica 4000 N/m i longitud natural de 50 cm i queda encastada. Calculeu: a) la velocitat del conjunt després del xoc. b) Es constant l'acceleració del conjunt després del xoc?. c) Calculeu la pèrdua d'energia durant el xoc. d) Calculeu la velocitat del sistema quan aquest ha recorregut la distància x



Resolució

Aquest xoc és inelàstic i por tant és conserva la quantitat de moviment del sistema objecte-caixa però no és conserva l'energia.

a) Primer es planteja la conservació de la quantitat de moviment i així calcularem la velocitat del conjunt després del xoc.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$
$$mv = (m + M)V$$
$$V = \frac{0.2 \cdot 100}{1200} = 0.017 m/s$$

b) L'acceleració no és constant perque actua la força elàstica de la molla i aquesta depèn de la posició.

c) L'energia abans i desprès del xoc no es conserva però si es conserva l'energia mecànica després del xoc i fins quel sistema ha recorregut l'espai de 2 m.

Abans del xoc l'energia mecànica te dos components, l'energia cinètica associada a l'objecte que es mou i l'energia potencia elàstica associada a la molla que es troba estirada.

La longitud de la molla és :

$$l = \sqrt{0.3^2 + 0.74^2} = 0.8\,\text{m}$$

L'energia mecànica abans del xoc és:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(l - l_0)^2 = 1000 + 180 = 1180\,\text{J}$$

Desprès del xoc l'energia mecànica val:

$$E = \frac{1}{2}(m + M)V^2 + \frac{1}{2}K(l - l_0)^2$$

i per tant la variació d'energia mecànica és:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2 = 1000 - 0.1734 = 999.83\,\text{J}$$

d) Aplicarem el teorema de la conservació de l'energia mecànica després del xoc i fins que recorre la distancia *x*.

La longitud *l'* val :

$$l' = \sqrt{0.3^2 + 0.52^2} = 0.6\,\text{m}$$

$$E_i = E_f$$

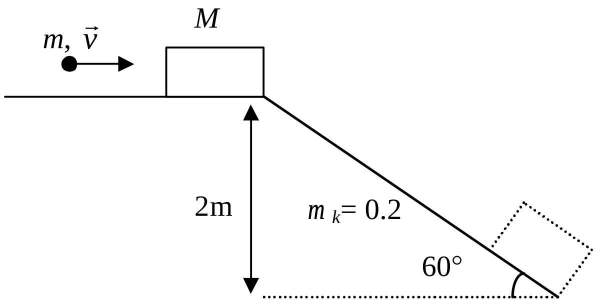
$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 + \frac{1}{2}K(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}(m + M)V_f^2 + \frac{1}{2}K(l' - l_0)^2$$

Substituint els valors numèrics i aïllant la V_f:

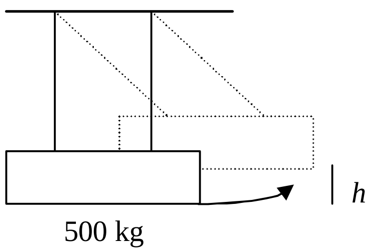
$$V_f = 0.071 \text{ m/s}$$

Problemes

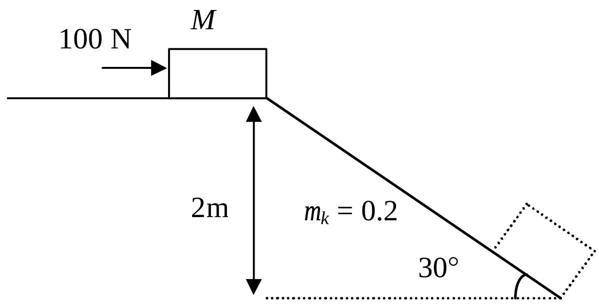
4.20 Un cos de massa m = 20 g i velocitat 50 m/s xoca amb un altre cos en repòs de massa M = 2 kg. Ambdós baixen per un pla inclinat d'angle 60° i coeficient de fricció cinètic 0.2. Calculeu la velocitat del sistema al final del pla inclina aplicant el teorema de la conservació de l'energia mecànica.



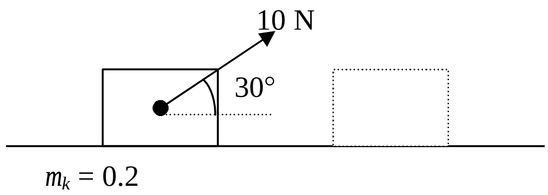
4.21 Un pèndol balístic de massa 500 kg es troba en repòs. Una massa puntual de 400 g i velocitat 100 m/s xoca i queda encastada. A quina alçada h pujarà el pèndol?



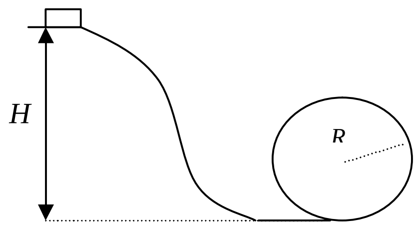
4.22 Una força constat de valor 100 N actua sobre un objecte de massa M = 80 kg durant tot el moviment. Calculeu, a partir de la conservació de l’energia mecànica, la velocitat de l’objecte al final del pla inclinat que té un angle de 30°. El coeficient de fricció cinètic entre l’objecte i el pla és 0.2.



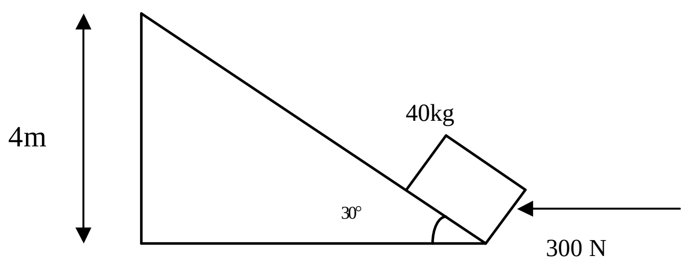
4.23 Un bloc de massa 2 kg inicialment en repòs, és sotmès a una força constant de 10 N. El coeficient de fricció cinètic es 0.2. Calculeu l’acceleració i la variació de energia cinètica que experimenta quan han passat 3 s.



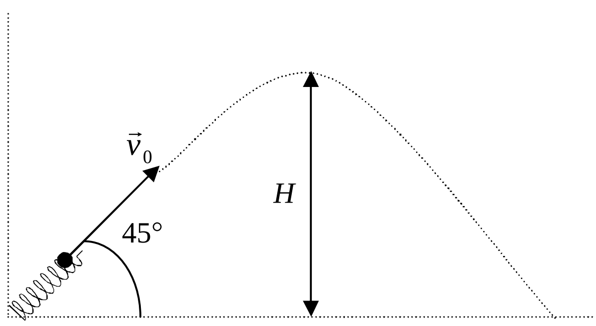
4.24 En unes muntanyes russes on el fregament se suposa pràcticament nul, un rodet es disposa a fer un bucle de radi R. Si es deixa anar des del repòs situat a una alçada H respecte la base del cercle, determineu el valor mínim de H perquè el rodet no caigui quan arriba al punt més alt del cercle.



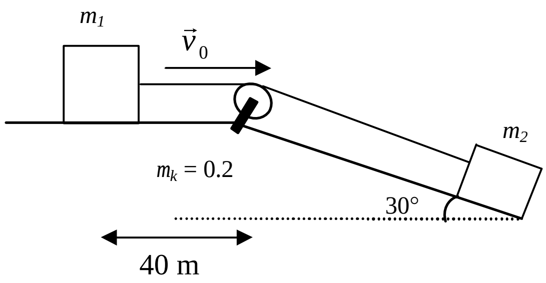
4.25 Un objecte de massa 40 kg puja un pla inclinat que forma un angle de 30° respecte a l’horitzontal sota l’efecte d’una força horitzontal constant de 300 N (vegeu figura). Si inicialment l’objecte està aturat, determineu, a partir del càlcul de l’energia mecànica, la velocitat de l’objecte quan ha pujat 4 m. Suposeu que el fregament és negligible.



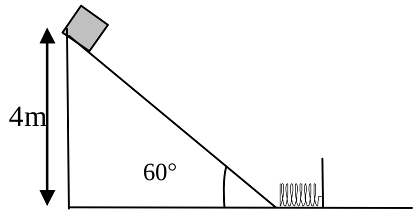
4.26 El dispositiu següent serveix per llançar una boleta de massa 80 g. Una molla de constat elàstica 4000 N/m i longitud natural de 20 cm esta situat en l’origen de coordenades i inclinat un angle de 45°. La molla esta comprimida 50 mm. a) Calculeu la velocitat de sortida de la boleta b) Calculeu la alçada màxima H que puja respecte a l’eix horitzontal.



4.27 En el sistema de la figura la massa m_1 es mou inicialment amb una velocitat de 4 m/s. Els valors de les masses són m_1 = 6 kg i m_2 = 14 kg. El coeficient de fricció cinètic en els dos plans (horitzontal i inclinat) val 0.2. La massa de la politja és negligible i la corda és inextensible. Calculeu: a) l'espai recorregut per la massa m_1 i m_2. b) la energia total dissipada per el moviment dels blocs després de un temps de 3 s.

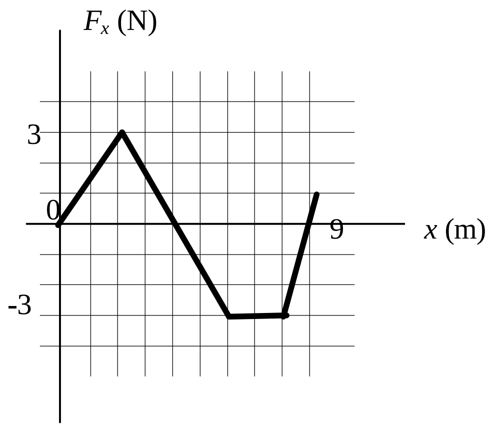


4.28 El bloc de massa m = 2 kg baixa per la rampa de la figura. Calculeu la compressió màxima de la molla de constant elàstica 2000 N/m. El coeficient de fricció cinètic és de 0.3 durant tot el moviment



4.29 Un dia asolellat, l'energia solar incideix sobre el sostre d'una casa amb una intensitat mitjana de 500 W/m^2 durant 8 hores. Quina quantitat d'energia és captada per una placa solar de 1.5 m^2? Si el seu rendiment és d'un 70 %, calculeu el nombre de radiadors de 500W que poden estar encesos durant 5 hores.

4.30 La figura mostra la variació d'una força F_x amb la posició, x. A partir del gràfic, calculeu el treball fet per la força quan una partícula es mou des de x = 0 fins als següents valors de x : 2, 4, 6, 8 i 9 m.



Solucions

4.1 a) (6,3) cm, b) (5,5)

4.2 a) 75 cm de la massa de 200 g, b) 6.25 m/s^2, c) 78.12 m, d) 78.875 m

4.3 (1.3, 1.0) m

4.4 (2, 1.15) m

4.5 a) (0, 0.32R), b) (0, 0)

4.6 (7.5, 9.5) cm

4.7 a) (4.8. 3.8) cm, b) (4.17, 4.17) cm

4.8 (*R*, -2*R*/3)

4.9 (2.06, 3.75) cm

4.10 (7.5, 6.47) cm

4.11 (0, 6.24) cm

4.12 a) $\vec{a} = \left(2.51\vec{i} + 4\vec{j}\right)m/s^2$, b) $\vec{v}_f = \left(13\vec{i} + 8\vec{j}\right)m/s$, c) $\vec{r} = \left(21\vec{i} + 8\vec{j}\right)m$
d) $\vec{P}_f = \left(26\vec{i} + 16\vec{j}\right)kg \cdot m/s$

4.13 a) 0.072 s, b)59.5 kg·m/s, c)826 N, 236 m/s^2

4.14 1653 N

4.15 0.175 m/s

4.16 24.4 km

4.17 a) 0, b) 2.25 m/s, c) 12.75 m

4.18 a) 6.6 m/s, b) 0.39 m/s

4.19 a) 1.7 m/s, b) –3.92 m/s^2, 0.59 m/s^2

4.20 6.19 m/s

4.21 0.326 mm

4.22 6.4 m/s

4.23 74 J

4.24 5R/2

4.25 5.05 m/s

4.26 a) 11.18 m/s, b) 3.296 m

4.27 a) 19.4 m cadascú , b) 689 J

4.28 0.25 m

4.29 1 radiador

4.30 3 J, 6 J, 3 J, -3 J, -4.5 J

TEMA 5 ELECTRICITAT

Objectius

Adquirir pràctica en el càlcul de les forces d'interacció elèctrica entre càrregues puntuals, i en el de l'energia associada a aquestes forces. Ser conscient de l'aventatge que comporta fer servir el camp i el potencial elèctric. Nocions elementals sobre conductors i dielèctrics.

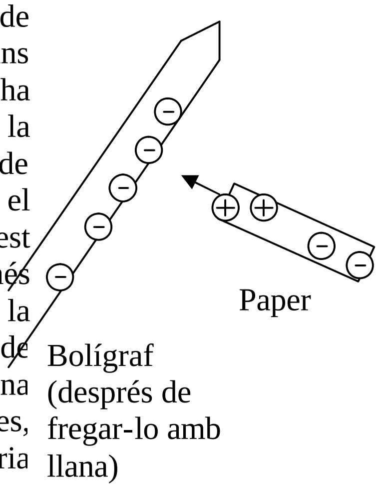
Índex

5.1 Forces elèctriques

Conceptes bàsics

A diferència de les forces gravitatòries, que fan caure les pomes dels arbres i orbitar la Lluna envoltant de la Terra, les forces elèctriques són més sobtils d'observar a la Natura. Anem a veure, però, un exemple quotidià i senzill en què s'observen forces elèctriques.

Si fregueu un bolígraf de plàstic amb un jersey de llana, veureu que el bolígraf atreu trocets de paper. Aquesta mena de força no pot ser gravitatòria, perquè si pesem el bolígraf abans i després de fregar-lo amb la llana, veurem que la massa no ha variat en suficient mesura. Avui se sap que l'explicació és la següent: quan freguem el bolígraf, aquest arrenca electrons de la llana i per tant queda carregat negativament. En acostar el bolígraf a un trocet de full, les càrregues negatives d'aquest s'allunyen (per repulsió del bolígraf) i la zona del paper més propera al bolígraf queda carregada positivament (vegeu la figura). Per això, un bolígraf fregat amb llana atreu trocets de paper (les càrregues negatives atrauen les positives, amb una força superior a aquella amb què repel·leixen les negatives, més allunyades). Sense estudiar les forces elèctriques seria impossible explicar aquesta mena de fenòmens.



Primera forma de calcular forces:

L'expressió següent per a la força d'interacció elèctrica entre dues càrregues puntuals A i B està d'acord amb els resultats experimentals, i s'anomena llei de Coulomb:

$$\vec{F}_{AB} = k\,\frac{q_A\, q_B}{r_{AB}^2}\,\hat{u}_{AB},$$

on $\vec{F}_{AB}$ és la força elèctrica ***que fa q_A sobre q_B*** *(no pas q_B sobre q_A)*, i està en la direcció que uneix q_A i q_B :

$$\hat{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{\left|\vec{r}_B - \vec{r}_A\right|}$$

és el vector unitari ***des del lloc on hi ha la càrrega puntual*** q_A ***fins al punt on hi ha*** q_B *(no pas des de* q_B *fins a* q_A*).*

La unitat de q_A i q_B en el sistema internacional d'unitats és el Coulomb (es simbolitza amb la lletra C).

La constant k s'anomena constant de Coulomb (com a exercici, demostreu quines unitats ha de tenir en sistema internacional). El seu valor és

$$k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,,$$

on ε_0 (permitivitat elèctrica del buit) val $1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) = 8.85 \cdot 10^{-12} \quad \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}$.

<u>Segona forma de calcular forces:</u>

Una segona forma, menys elegant però que sol evitar confusions amb els signes, i que també permet trobar la força entre dues càrregues Q i q és escriure simplement:

$$\vec{F} = k\,\frac{|Q|\,|q|}{r^2}\,\hat{u}\,,$$

on r és la distància que separa les càrregues i

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

és un vector unitari en la direcció que uneix les dues càrregues, i triar el sentit de $\vec{F}$ (i de $\hat{u}$) tenint en compte que, per definició, dues càrregues del mateix signe es repel·leixen mentre que dues càrregues de signes oposats s'atreuen.

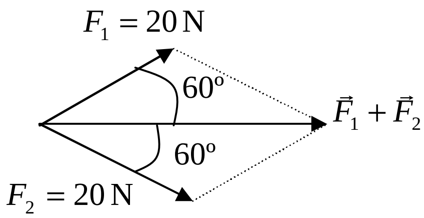
Incís

Recordem que és molt important tenir clar que la força és un vector, no un número. Per tant:

· ***Sempre que es demani una força, el resultat ha de ser un vector, mai un número***. A continuació veurem alguns exemples.

· ***Si hi ha més d'una força, la força total és la suma de vectors, no la suma de mòduls.*** Això ho recordem del tema de vectors: a tall d'il·lustració, a l'exemple 1.5 tenim $\vec{A} = (2,3)$, $\vec{B} = (3,6)$, i el mòdul de la suma dels vectors és $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{(2+3)^2 + (3+6)^2} = 10.296$, però això és diferent de la suma de mòduls: $\left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right| = \sqrt{2^2+3^2} + \sqrt{3^2+6^2} = 10.314$.

· ***La suma de mòduls no te significat físic.*** Un exemple on això es veu molt clar és el de la figura adjunta.



En aquest cas el mòdul de la força total (suma de forces) és:

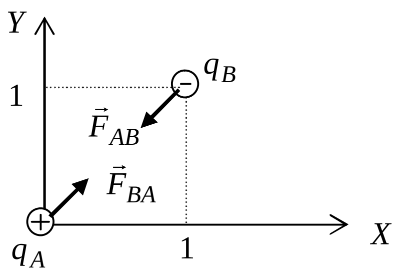
$\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right| = 20\cos 60º + 20\cos 60º = 10 + 10 = 20\ \mathrm{N}$

Però això és diferent de la suma de mòduls, que val:

$\left|\vec{F}_1\right| + \left|\vec{F}_2\right| = 20 + 20 = 40\ \mathrm{N} \neq 20\ \mathrm{N}$.

Serien iguals només si els vectors estiguessin en línia (és a dir, si tinguessin la mateixa direcció i sentit).

Així doncs, ***la suma de mòduls no te cap interés ni utilitat. No s'ha de calcular mai. El que sí interessa és el mòdul de la suma de vectors.***



Com a exemple de la llei de Coulomb, suposem que volem determinar les forces elèctriques entre

$q_A = 2$ C i $q_B = -3$ C, situades respectivament a (0,0) i (1 m,1 m) (vegeu la figura).

Primera forma:

Una primera forma és aplicar la llei de Coulomb escrivint la força de q_A sobre q_B com

$$\vec{F}_{AB} = k\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\hat{u}_{AB} = k\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = k\frac{q_A q_B}{r_{AB}^3}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot(-3)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^3}\left(1-0,\ 1-0\right) =$$

$$\frac{-54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1)\ \text{N}.$$

En canvi, la força de q_B sobre q_A és

$$\vec{F}_{BA} = k\frac{q_B q_A}{r_{BA}^2}\hat{u}_{BA} = k\frac{q_B q_A}{r_{BA}^2}\frac{\vec{r}_{BA}}{r_{BA}} = k\frac{q_B q_A}{r_{BA}^3}\left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) = 9\cdot 10^9\,\frac{(-3)\cdot 2}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^3}\left(0-1,\ 0-1\right) =$$

$$\frac{54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1)\ \text{N}.$$

Ens adonem que es cumpleix la tercera llei de Newton (llei d'acció-reacció): $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

Segona forma:

Tal i com hem indicat, una segona forma (que potser trobeu més senzilla, però menys generalista) és escriure simplement

$$\vec{F} = k\frac{|q_A||q_B|}{r^2}\hat{u} = k\frac{|q_A||q_B|}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{|q_A||q_B|}{r^3}\vec{r} = \frac{54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1).$$

Aquesta és la força sobre q_A, perquè te les dues components positives (això ho sabem gràcies a la figura anterior, en la què hem aplicat que dues càrregues de signe oposat s'atreuen). Per la llei d'acció-reacció, la força sobre q_B és:

$$-\vec{F} = \frac{-54\cdot 10^9}{2^{3/2}}(1{,}1),$$

de forma que obtenim els mateixos resultats que de la primera forma.

Principi de superposició

L'anomenat principi de superposició diu que la força total sobre una càrrega q és igual a la suma de les forces degudes a les altres càrregues Q_i:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = k\frac{Q_i\, q}{r_i^{\,2}}\hat{u}_i\ ,$$

on

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}}{\left|\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}\right|},$$

i comprovarem sempre que el signe de les seves components sigui coherent amb el fet que dues càrregues d'igual (diferent) signe es repel·leixen (atreuen). Per aquest motiu cal fer sempre un dibuix, abans d'escriure cap equació.

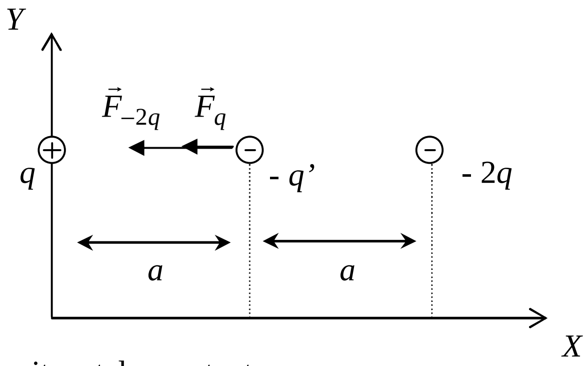
Convé tenir clar que el principi de superposició és vàlid en general, no només per a forces elèctriques. Per exemple, la força total sobre un bloc és igual a la suma de forces (pes, fregament…), vegeu l'exemple de la secció 3.5 d'aquest llibre.

Exemple 5.1

Tres càrregues es troben situades sobre un pla, en el qual considerem coordenades cartesianes (x, y). La primera càrrega, $q > 0$, és al punt (0,*a*); la segona és $-2q < 0$ i es troba al punt (2*a*,*a*); i la tercera, $-q' < 0$, al (*a*,*a*). ¿Quina força fan les dues primeres càrregues sobre la tercera? Trobeu-ne les components i el mòdul.

Resolució

Al dibuix adjunt representem les forces que fan la primera i segona càrregues sobre la tercera, que és situada al mig. Per dibuixar les forces, tenim en compte que dues càrregues del mateix signe (p. ex. negatives) es repel·leixen, mentre que dues càrregues de signe oposat s'atreuen.



Veiem que les dues forces són horitzontals, per tant

$$F_y = 0 .$$

D'altra banda, la component horitzontal de la força és

$$F_x = -k\frac{qq'}{a^2} - k\frac{(2q)q'}{a^2} ,$$

és a dir

$$F_x = -3k\frac{qq'}{a^2} .$$

Ens adonem que el resultat és negatiu, tal i com ha de ser en vista de la figura. Insistim que, per aquest motiu, és molt útil dibuixar un esquema de les forces, abans de fer cap càlcul per resoldre un problema quasevol d'electrostàtica.

El mòdul de la força és

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} ,$$

en el nostre cas:

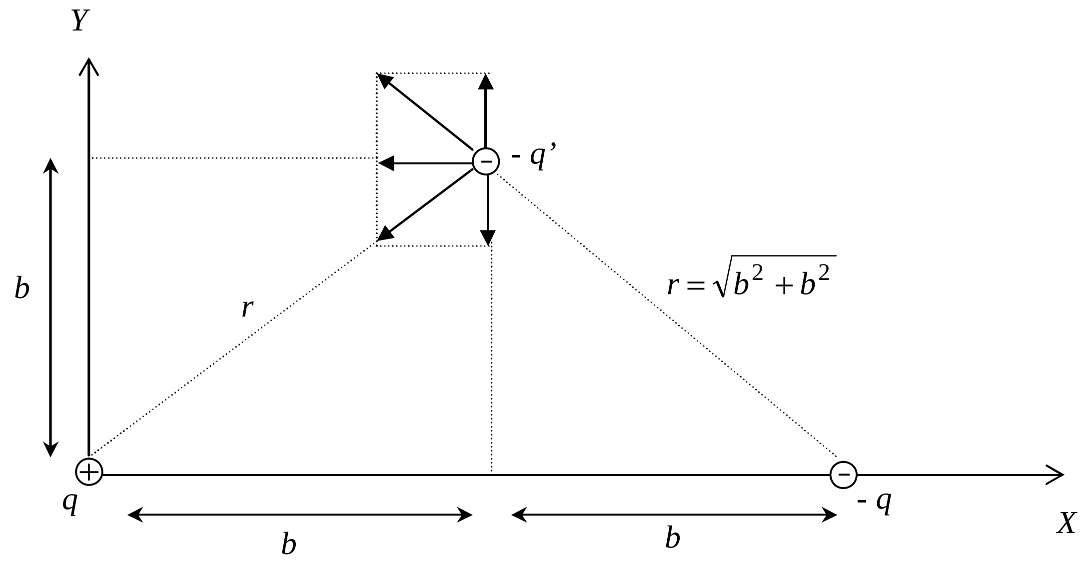
$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{\left(-3k\frac{qq'}{a^2}\right)^2 + 0^2} = 3k\frac{qq'}{a^2}$$

Exemple 5.2

Una càrrega $q > 0$ és al punt (0,0), i una altra $-q < 0$ a (2*b*,0). Si al punt (*b*,*b*) n'hi ha una tercera, de valor $-q' < 0$, ¿Quina força actua sobre aquesta?.

Resolució

Tal i com hem indicat, el primer pas en la ressolució és fer sempre un dibuix. Al mateix representarem les forces sobre la càrrega que interessa:



Donada la simetria, les components verticals de les dues forces s'anul·len:

$$F_y = 0\,.$$

D'altra banda, la component horitzontal de la força és:

$$F_x = -k\frac{qq'}{b^2+b^2}\cos 45^{\mathrm{o}} - k\frac{qq'}{b^2+b^2}\cos 45^{\mathrm{o}}\,,$$

és a dir

$$F_x = -2k\frac{qq'}{2b^2}\cos 45^{\mathrm{o}} = -k\frac{qq'}{b^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

i és negativa, tal i com esperàvem gràcies a la figura anterior.

Problemes

5.1 Si al punt (0,0) hi ha una càrrega q, al punt $(a, -a)$ una altra de valor q, i al punt $(2a,0)$ una tercera que té valor $-q$, quins són els components i el mòdul de la força total sobre una quarta càrrega $-q'$ situada a (a,a)?

5.2 Donades dues càrregues, una de – 1 µC situada a l'origen de coordenades, i una altra de 0.1 µC al punt (3, 0), quines components te la força total sobre una tercera càrrega de 3 µC situada a (3, 1)? Les coordenades anteriors venen expressades en cm.

5.3 A cada vèrtex d'un triangle equilàter de costat a, hi ha una càrrega $q > 0$. Trobeu la força que fa cadascuna de les tres càrregues sobre una quarta càrrega $Q > 0$ situada al punt mig del costat inferior (suposeu-lo horitzontal). Un cop trobades, determineu la força total sobre Q.

5.4 Considereu un hexàgon, amb costats de longitud $l = 10$ cm i el costat inferior horitzontal. Si a cada vèrtex del costat inferior hi ha una càrrega de -2 mC, i a cadascun de la resta de vèrtexs n'hi ha una de 3 mC, quina força hi ha sobre una setena càrrega de 1 mC situada al centre?

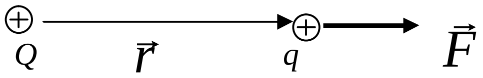
5.2 Camp elèctric

Conceptes bàsics

Recordem de l'apartat 5.1 que la força creada per una càrrega Q sobre una altra q, situada a un punt de vector posició $\vec{r}$ relatiu a Q, es pot escriure com:

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\hat{u} \ ,$$

on



$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

és el vector unitari en la direcció i sentit des de Q fins al punt de vector posició $\vec{r}$ relativa a Q.

Definim el ***camp elèctric*** creat per Q en un punt de vector posició $\vec{r}$ com ***la força que faria Q sobre una càrrega de 1 Coulomb situada en aquell punt.*** És a dir, posant $q = 1C$ a la fòrmula anterior, obtenim el camp elèctric enlloc de la força:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{u} \ ,$$

Comparant les fòrmules de la força i del camp, veiem que la força sobre q deguda a Q es pot escriure com:

$$\vec{F} = q\vec{E} \ ,$$

per tant, en el sistema internacional les unitats de camp elèctric són Newton/Coulomb (N/C).

¿Per què fer servir el camp elèctric si és simplement un cas particular de la força? Perquè el camp, com el voltatge (apartat 5.3), permet comparar millor sistemes diferents.

A l'apartat 5.1 hem enunciat el principi de superposició de forces, és a dir:

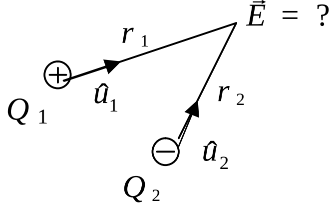
$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = k\frac{Q_i\, q}{r_i^2}\hat{u}_i \ ,$$

on

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}}{|\vec{r}_q - \vec{r}_{Qi}|} \ ,$$

de forma que (en dividir per q) veiem que aquest principi és vàlid també per al camp elèctric, que podem calcular al punt $\vec{r}$ així:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \sum\ k\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{u}_i = k\frac{Q_1}{r_1^2}\hat{u}_1 + k\frac{Q_2}{r_2^2}\hat{u}_2 + \ldots$$

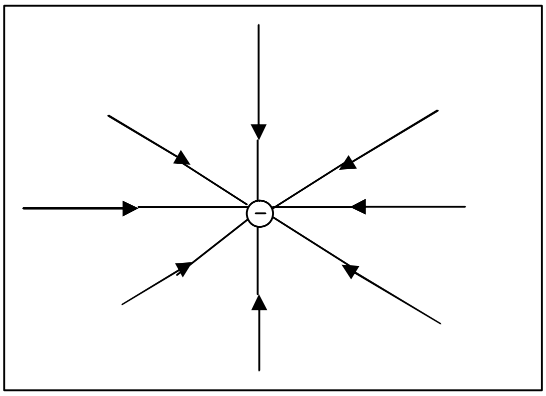


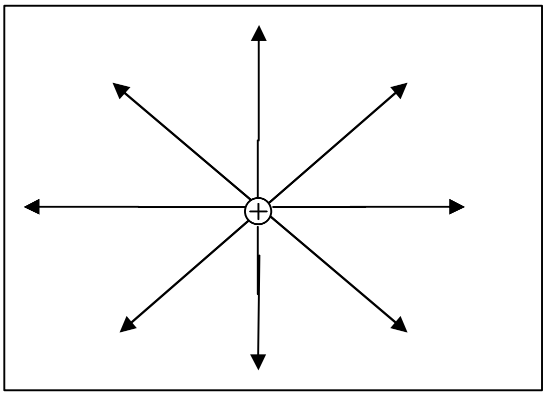
En aquesta equació, quan substituïm valors numèrics, cal posar no només els valors absoluts, sinó també ***els signes*** de Q_1, Q_2, etc.

Cal insistir en què el camp elèctric és un vector, com ho és la força: per tant, si es demana el camp elèctric la resposta ha de ser un vector, no un número. Tanmateix, ***si hi ha***

varis camps el total és la suma de vectors, no la suma de mòduls (vegeu l'incís corresponent a l'apartat 5.1, i també el tema 1).

Per definició, les ***línies de camp*** són línies tangents, a qualsevol dels seus punts, al vector camp elèctric. Per exemple, els dibuixos següents il·lustren les línies de camp degudes, respectivament, a una càrrega puntual negativa i positiva (la direcció i els sentits de les fletxes han estat determinats tot recordant que el vector camp elèctric és la força sobre una càrrega de +1 C).





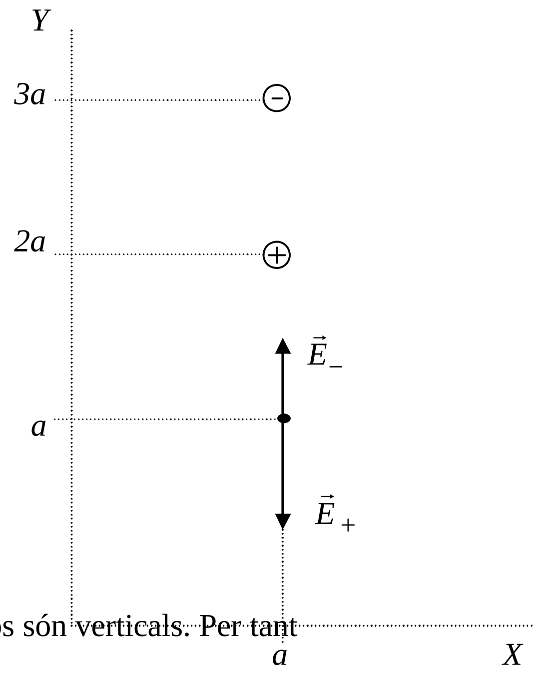
Les línies de camp són fàcils d'observar fent servir llimadures de ferro, especialment si les submergim en un líquid de baix fregament (és a dir, viscositat). Les llimadures d'orienten en el sentit del camp, pel mateix motiu que els trocets de paper considerats a la secció 5.1. Les límies de camp permeten saber la direcció i sentit del camp i, per tant, cap on tendeix a moure's una càrrega ($\vec{F} = q\vec{E}$). També donen idea del mòdul del camp: per exemple, a les figures anteriors veiem que a les regions on les línies de camp són més properes entre sí (és a dir, a prop de les càregues) el camp és més intens (a menor distància, major camp creat per una càrrega, i $E = kq/r^2 \to \infty$ quan $r \to 0$).

Exemple 5.3

Dues càrregues – q i q, es troben (a,3a) i (a,2a), respectivament. Quin és el camp a (a,a)?

Resolució

Al dibuix adjunt indiquem el camp creat per cada càrrega, i l'hem fet de la forma següent: el camp elèctric és la força sobre una càrrega de $+1$ C. Per tant, donat que la càrrega negativa n'atrauria una de $+1$ C, el camp que crea $-q$ va cap amunt. En canvi, donat que la càrrega positiva es repeliria amb una de $+1$ C, el camp que fa va cap avall. Aquest camp serà més gran, perquè la càrrega positiva és més propera que la negativa i tenen el mateix valor absolut.



Del dibuix obtingut es dedueix que els camps són verticals. Per tant

$$E_x = 0 + 0 = 0 .$$

D'altra banda,

$$E_y = E_- - E_+ = \frac{kq}{(2a)^2} - \frac{kq}{a^2} = \frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3kq}{4a^2} .$$

Aquest resultat és negatiu, tal i com havíem d'esperar en vista de la figura.

Així doncs, el resultat final per al camp elèctric és:

$$\vec{E} = \left(0, -\frac{3kq}{4a^2}\right).$$

Exemple 5.4

Donades les càrregues de l'exemple 5.3, quina força farien sobre una càrrega de – 4 C situada al punt (a,a)?

Resolució

Donat que ja sabem el camp, no cal pas trobar cada força i sumar-les. És més ràpid seguir el procediment següent:

$$\vec{F} = q\vec{E} = (-4)\left(0,\ -\frac{3kq}{4a^2}\right) = \left(0, \frac{3kq}{a^2}\right).$$

Problemes

5.5 Dos objectes, ambdós de càrrega negativa $-q$, són suficientment petits com per poder ser considerats puntuals i es troben a (0,0) i (0,2a). Determineu el camp elèctric al punt (a,a).

5.6 Repetiu el problema anterior si la càrrega a (0,0) és $+2q$ en lloc de $-q$.

5.7 A cada vèrtex d'un triangle equilàter de costat *a*, hi ha una càrega $q > 0$. Trobeu el camp elèctric al centre del triangle (agafeu el costat inferior paral·lel a l'eix *X*).

5.8 Per a la mateixa distribució de càrregues que al problema anterior, trobeu el camp elècric al punt mig del costat inferior del triangle (suposeu-lo horitzontal).

5.9 Per a la mateixa distribució de càrregues que al problema anterior, trobeu la força elèctrica sobre una càrrega $Q > 0$ situada al punt on hem trobat el camp al probl. 5.8, aplicant el resultat obtingut allà (adoneu-vos que ha de donar el mateix resultat que el probl. 5.3, però ara fem servir el concepte de camp elèctric). Quant valdria la força per a una càrrega *3Q* en lloc de *Q*?

5.10 Trobeu les components del camp elèctric a (1,1) si hi ha una càrrega puntual de 2 μC a (0,0) i una altra de -3μC a (2,0). Les coordenades estan en metres.

5.11 Determineu quins són el mòdul i l'angle amb l'eix *X* (en graus i minuts) del camp trobat al problema 5.10. Quant val aquest angle en radians?

5.12 Tenim una càrrega positiva de 1 nC al punt (0,5m), i una altra negativa de -2 nC al punt (-1m,0). Trobeu el camp elèctric a l'origen, és a dir al punt (0,0). Recordeu que nC significa nanocoulombs, i que podeu consultar el factor de conversió corresponent a la taula de l'apartat 1.2.

5.3 Energia potencial i potencial elèctric

Conceptes bàsics

L'energia potencial elèctrica U es defineix de forma que la seva variació entre dos estats (o posicions durant el moviment d'una càrrega) inicial *i* i final *f* ve donada per:

$$-\left(U_f - U_i\right) = W_i^f = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f q\vec{E} \cdot d\vec{r} \, ,$$

on *W* és el treball (ja introduït al tema 4). Així doncs, les unitats d'energia potencial són les mateixes que les del treball, i al sistema internacional són els joules: 1 Joule = 1 Newton · metre (símbols: J=N·m).

El ***potencial*** elèctric o ***voltatge*** es defineix com l'energia potencial elèctrica per unitat de càrrega:

$$V = \frac{U}{q} \, .$$

En combinar aquesta equació amb l'anterior, obtenim immediatament:

$$-\left(V_f - V_i\right) = \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r} \, .$$

Les unitats de potencial en sistema internacional és el volts. Així doncs: 1 Volt = 1 Joule/Coulomb (símbols: V=J/C).

Per a un sistema de càrregues puntuals l'origen de potencial elèctric es tria a una distància infinitament allunyada del sistema:

$$V(r \to \infty) = 0\,, \qquad U(r \to \infty) = 0\,.$$

Es pot demostrar que la força elèctrica és conservativa, per això te sentit definir l'energia potencial (vegeu l'apartat 4.5). Per a una càrrega puntual q sotmesa a la força elèctrica d'una altra càrrega puntual Q, triem una trajectòria amb $d\vec{r}$ paral·lel a $\vec{E}$, com a estat inicial aquell on volem determinar U i com a estat final $r \to \infty$. Així obtenim:

$$U = -(0-U) = -(U_{\infty} - U) = \int_r^{\infty} q\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} qE\,dr = \int_r^{\infty} \frac{kqQ}{r^2}\,dr = -\,kqQ\left(0 - \frac{1}{r}\right).$$

Per tant:

$$U = \frac{kQq}{r}\,,$$

i el potencial és

$$V = \frac{kQ}{r}\,.$$

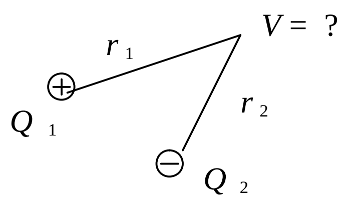
Agafant l'estat final a una distància infinita ($r \to \infty$) a la fòrmula de variació del potencial, obtenim:

$$V(r) = -(0 - V(r)) = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{W_r^{\infty}}{q}\,.$$

Per tant el potencial a un punt és el treball que faria el camp elèctric en portar una unitat de càrrega des del punt en qüestió fins l'infinit.

Finalment, en aplicar el principi de superposició del camp elèctric (secció 5.2), veiem que el potencial a un punt, degut a un conjunt de càrregues, és la suma algebraica de potencials deguts a cadascuna d'elles:

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum \int_r^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \sum V_i = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} + \ldots$$



En aquesta equació, quan substituïm valors numèrics, cal posar no només els valors absoluts, sinó també ***els signes*** de Q_1, Q_2, etc.

Exemple 5.5

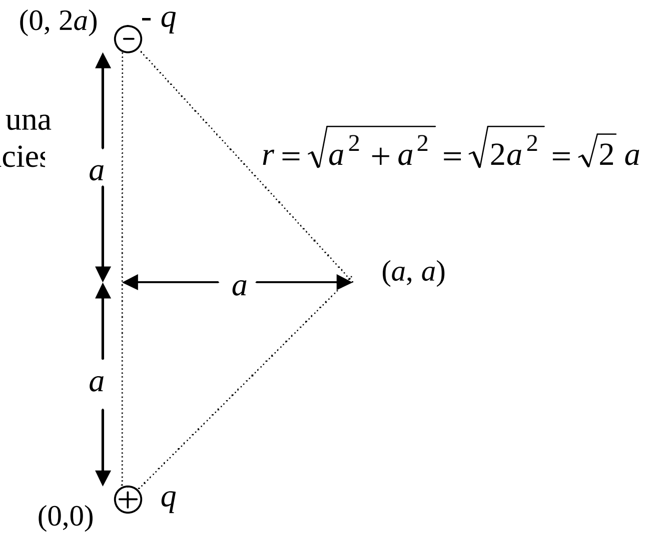
Trobeu el potencial al punt (a,a) si hi ha una càrrega positiva q a (0,0) i una de negativa $-q$ a (0,2a).

Resolució

Com sempre, comencem fent una figura per determinar les distàncies necessàries.

En vista de la figura, tenim que

$$V = V_+ + V_- = \frac{kq}{\sqrt{2}\,a} - \frac{kq}{\sqrt{2}\,a} = 0\,.$$



Exemple 5.6

Trobeu el potencial al mateix punt que a l'exemple anterior, si la càrrega inferior és 2q en lloc de q.

Resolució

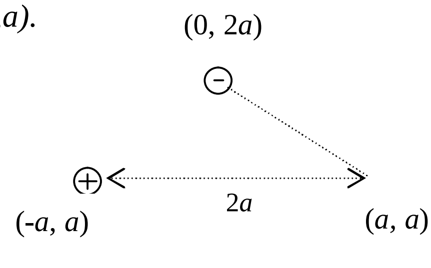
$$V = V_+ + V_- = \frac{k(2q)}{\sqrt{2}\,a} - \frac{kq}{\sqrt{2}\,a} = \frac{kq}{\sqrt{2}\,a}\,.$$

Exemple 5.7

Repetir l'exemple 5.6 suposant que la càrrega 2q és a *(-a,a)*.

Resolució

$$V = V_+ + V_- = \frac{k(2q)}{2\;a} - \frac{kq}{\sqrt{2}\;a} = \frac{kq}{a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

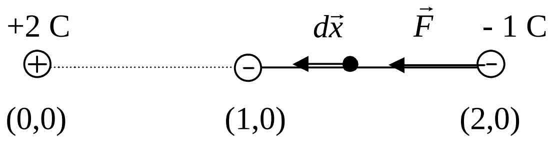


Exemple 5.8

Calculeu el treball fet pel camp elèctric creat per una càrrega de 2 C, situada a l'origen, si fa moure'n una altra de –1 C des de (2 m,0) fins a (1 m,0).

Resolució

A la figura següent il·lustrem la trajectòria de la càrrega negativa (la positiva es suposa fixa), i la direcció i sentit de la força:



Una primera forma de resoldre el problema és la següent:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f \left|\vec{F}\right| \; \left|d\vec{x}\right| = -\int_i^f F \; dx \, ,$$

on $F = \left|\vec{F}\right|$ i hem tingut en compte que $dx < 0$. Així doncs

$$\text{-}W = + \int_{x=2}^{x=1} \left|\vec{F}\right| dx = \int_2^1 \frac{kq|Q|}{x^2} = -\left[\frac{kq|Q|}{x}\right]_2^1 = -\frac{kq|Q|}{1} + \frac{kq|Q|}{2} = -\frac{kq|Q|}{2} = -9 \cdot 10^9 \text{ J} .$$

Una segona forma, més senzilla, de resoldre el mateix problema és aplicant el concepte d'energia potencial elèctrica:

$$W = -\Delta U = -\left(U_f - U_i\right) = -\left(\frac{kQq}{1} - \frac{kqQ}{2}\right) = -\frac{kqQ}{2} = +9 \cdot 10^9 \text{ J} .$$

Problemes

5.13 Per a la distribució de càrregues de l'exemple 5.5, trobeu una expressió per al camp elèctric vàlida a quasevol punt de la part de l'eix *Y* compresa entre les dues càrregues.

5.14 Apliqueu el resultat del problema anterior per a trobar el treball fet pel camp elèctric si mou una càrrega $q' > 0$ del punt (0,$\frac{a}{2}$) al punt (0,*a*).

5.15 Per a la distribució de càrregues de l'exemple 5.5, trobeu el potencial a un punt qualsevol de la part de l'eix *Y* compresa entre q i $-q$.

5.16 Apliqueu el resultat del problema anterior per a trobar l'energia potencial elèctrica d'una càrrega *q'* al mateix punt que el considerat allà.

5.17 Feu servir el resultat del problema anterior per a calcular el treball fet pel camp elèctric en fer moure una càrrega $q' > 0$ de (0, $\frac{a}{2}$) a (0, *a*) (comproveu que dóna el mateix que el problema 5.14, com ha de ser). Trobeu també el camp elèctric.

5.18 Trobeu el potencial (en kilovolts) al punt (1 m,1 m) si hi ha una càrrega puntual de 2 μC a (0,0) i una altra de –3 μC a (2 m,0). Trobeu també el camp elèctric.

5.19 Per a la distribució de càrregues del problema anterior, quin treball (en milijoules) faria el camp elèctric en moure una càrrega de –5 μC de (1 m,1 m) a l'infinit?

5.4 Conductors i dielèctrics

Conceptes bàsics

En els aïllants elèctrics (dielèctrics), els electrons estan retinguts a les molècules, de forma que no es poden moure: fins i tot si introduïm electrons a un dielèctric, no poden travessar els orbitals moleculars. Per tant, en un dielèctric no hi pot haver corrent elèctric. En canvi, als conductors elèctrics (p. ex., metalls) alguns electrons (anomenats lliures) es poden moure, és a dir que hi pot haver corrent elèctric.

Un conductor en equilibri es defineix com aquell en què, en promig, no hi ha moviment de càrregues. Propietats dels conductors en equilibri:

1. A l'interior $\vec{E}=0$ i V és uniforme.
2. A la superfície $\vec{E}$ és perpendicular a l'àrea local.
3. A qualsevol volum interior, la càrrega neta o total és zero (es troba a la superfície).

El límit de ruptura dielèctica és el valor mínim de $|\vec{E}|$ perquè un dielèctric es torni conductor. Per a l'aire, val uns $3\cdot 10^6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 3\cdot 10^6 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Si un dielèctric es coloca a una regió de l'espai on hi ha un camp elèctric, aquest causa una distorsió dels orbitals electrònics (polarització), cosa que fa disminuir el camp:

$$E = \frac{E_0}{k}\,,\ k > 1\,,$$

on E_0 és el camp al buit (o, aproximadament, a l'aire) i k s'anomena constant dielèctrica, o permitivitat relativa del dielèctric. La permitivitat absoluta es defineix com

$$e = k\, e_0\,,$$

on e_0 és la permitivitat del buit (vegeu l'apartat 5.1).

Aplicacions: Fotocopiadores i impressores làser

Hi ha vàries formes de convertir un aïllant en conductor. Una ja l'hem explicada: posar l'aïllant en un camp elèctric suficientment intens. Alguns aïllants es tornen conductors en fer-hi incidir llum (materials fotoconductors). Això es fa servir en les fotocopiadores i impressores làser. Hi ha una placa fotoconductora carregada positivament. Es fa incidir llum a tota la placa excepte als llocs corresponents a les lletres o línies de dibuixos. Les zones on incideix llum es tornen conductores, per tant la càrrega es mou i marxa per la connexió amb el terra. Després s'acosta la tinta o tóner, que està carregat negativament, i per atracció electrostàtica es mou cap a les càrregues positives de la placa, quedant dipositada a un full de paper situat abans que arribin a la placa.

Problemes

5.20 Donades dues plaques planes paral·leles, separades per aire, s'observa que en introduir un dielèctric 1 entre elles el camp elèctric es fa una tercera part, i en introduir un altre dielèctric 2 es fa la meitat que a l'aire. Relacioneu les constants dielèctriques dels dos dielèctrics.

5.21 Si mirant cap amunt veiem caure un llamp i comptem 8 segons fins sentir el tro, estimeu a quants kilòmetres d'alçada són els núvols de la tormenta (dada: velocitat del so a l'aire $\approx$335 m/s). Quina de diferència de potencial hi ha entre ells i la Terra?

Solucions

5.1 $\vec{F} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{kqq'}{a^2}, -\frac{kqq'}{4a^2} \right)$,

5.2 $\vec{F} = (-25.6\,\mathrm{N}, 18.5\,\mathrm{N})$

5.3 $\vec{F}_{\text{dreta}} = \left(-\frac{kqQ}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad 0 \right)$, $\vec{F}_{\text{esquerra}} = \left(\frac{kqQ}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad 0 \right)$, $\vec{F}_{\text{superior}} = \left(0, \quad -\frac{4kqQ}{3a^2} \right)$,

$\vec{F}_{\text{total}} = \left(0, \quad -\frac{4kqQ}{3a^2} \right)$

5.4 $(0, \; -7.79 \cdot 10^6 \; \mathrm{N})$

5.5 $\vec{E} = \left(-\frac{kq}{\sqrt{2}\, a^2}, 0 \right)$

5.6 $\vec{E} = \left(\frac{kq}{2\sqrt{2}\, a^2}, \; \frac{3kq}{2\sqrt{2}\, a^2} \right)$

5.7 $\vec{E} = (0,0)$

5.8 $\vec{E} = \left(0, \; -\frac{4kq}{3\,a^2} \right)$

5.9 $\vec{F} = \left(0, \; -\frac{4kqQ}{3a^2} \right)$, $\vec{F}_{3Q} = \left(0, \; -\frac{4kqQ}{a^2} \right)$

5.10 $\vec{E} = (1.59 \cdot 10^4 \; \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}, -3.18 \cdot 10^3 \; \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}})$

5.11 $\left|\vec{E}\right| = 1.62 \cdot 10^4 \; \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, $q = -11^{\circ}\,18' = -0.197$ rad.

5.12 $\vec{E} = (-18 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}, -0.36 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}})$

5.13 $E = \frac{kq}{y^2} + \frac{kq}{(2a - y)^2}$

5.14 $W = \dfrac{4kqq'}{3a}$

5.15 $V = \dfrac{kq}{y} - \dfrac{kq}{(2a - y)}$

5.16 $E_p = \dfrac{kqq'}{y} - \dfrac{kqq'}{(2a - y)}$

5.17 $W = \dfrac{4kqq'}{3a}$

5.18 $V = -6.4$ kV, $E_x = 15909.9$ N/C, $E_y = -3182.0$ N/C,

5.19 $W_r^{\infty} = 32$ mJ

5.20 $k_1 = 1.5 k_2$

5.21 2.7 km, 8000 milions de volts

TEMA 6 CORRENT CONTINU

Objectius

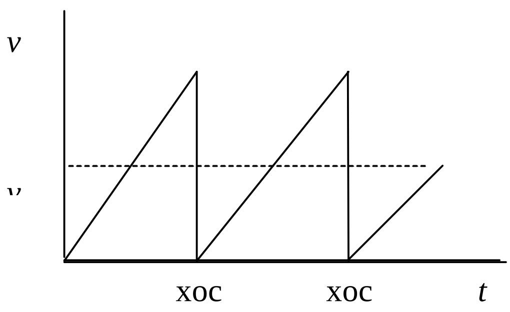
Adquirir nocions bàsiques sobre el corrent elèctric, tant a nivell microscòpic com macroscòpic. Complementar la descripció analítica del corrent i els circuits elèctrics amb una visió qualitativa que permeti treure profit de les analogies amb el moviment, més quotidià, de fluids sense càrrega elèctrica.

Índex

6.1 Moviment de càrregues dins un conductor

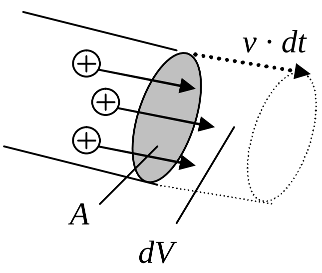
Conceptes bàsics

A la secció 5.4 hem definit els conductors elèctrics com materials en què hi ha càrregues lliures, és a dir càrregues que es mouen, en promig, si el camp elèctric no és zero ($\vec{F} = q\vec{E}$). Això no significa que en presència d'un camp elèctric, les càrregues lliures d'un conductor s'accelerin fins assolir una velocitat arbitràriament gran. De fet, els electrons liures col·lisionen amb els àtoms, que tenen molta més massa, i perden pràcticament tota la seva energia cinètica.



No obstant això, podem assignar una velocitat mitjana, v_m, al corrent elèctric, tal i com il·lustra la figura adjunta. El mateix passa amb les molècules d'un corrent d'aigua o aire: malgrat els xocs moleculars, podem assignat una velocitat mitjana al corrent.

En el corrent elèctric, hi ha el costum d'imaginar que les càrregues en moviment són positives. Es defineix la intensitat I del corrent com la càrrega que travessa una secció transversal A qualsevol del conductor per unitat de temps:



$$I = \frac{\text{càrrega que travessa } A \text{ durant } dt}{dt} = \frac{\text{càrrega a } dV \text{ del dibuix}}{dt} = \frac{n\, q_e\, dV}{dt}\,,$$

on dV és el volum diferencial indicat al dibuix, n és la densitat numèrica de càrregues (normalment electrons), q_e el seu valor (la càrrega de l'electró, en valor absolut) i A la secció del conductor. Sigui v la velocitat mitjana (abans dita v_m). Al dibuix veiem que $dV = A\,(v\,dt)$. Per tant:

$$I = n\, q_e\, A\, v\,.$$

Les unitats de I en sistema internacional és l'ampere (1 A = 1 C/s). Com a exercici, podeu obtenir les unitats de n a partir de l'equació anterior.

Exemple 6.1

Un cable de coure ($n \approx 10^{29}$ electrons/m^3) te un radi $r = 1$ mm. Si hi circula una intensitat de 10 A, quantes hores triga un electró qualsevol en moure's una distància de 2m? Raoneu com pot ser coherent el resultat obtingut amb el fet que quan apretem un interruptor d'una bombeta, aquesta s'encén quasi instantàniament. La càrrega d'un electró és $1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

Resolució

Mentre més ràpid es moguin els electrons, més càrrega circularà. Per això, la intensitat que circula ens permet trobar la velocitat mitjana dels electrons:

$$I = n\, q_e\, A\, v_m \;\rightarrow\; v_m = \frac{I}{n\, q_e A}\,.$$

Aplicant que l'àrea d'una secció circular és $A = \pi\, r^2$,

$$v_m = \frac{10}{10^{29} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right) \cdot \pi \left(10^{-3}\right)^2} = \quad 2 \cdot 10^{-4} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Un cop obtinguda la velocitat, podem trobar el temps mig que triga un electró en moure's una distància *d* en direcció longitudinal al llarg del cable:

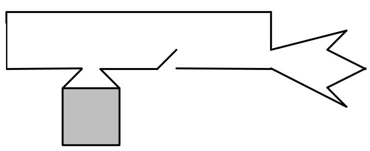
$$v_m = \frac{d}{t} \rightarrow t = \frac{d}{v_m} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^4\,\text{s}$$

Aquest resultat és molt gran, per tant serà més fàcil d'interpretar si el passem a hores:

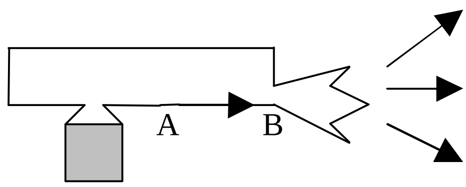
$$t = 10^4\,\text{s} \cdot \frac{1\,\text{minut}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{1\,\text{hora}}{60\,\text{minuts}} = 2.8 \approx 3\ \text{hores.}$$

Aparentment no pot ser que un electró inverteixi 3 hores en moure's només 2 metres, perquè això sembla indicar que després d'apretar l'interruptor hauriem d'esperar vàries hores a que s'encengués la bombeta. El motiu rau en que els electrons de tot el cable es posen en moviment, de manera que els que arriben abans són els de la part del cable més propera a la bombeta (punt B a la figura), no els més propers a l'interruptor o la pila (punt A). És semblant al que passa en un embassament d'aigua (vegeu les figures inferiors): les molècules d'aigua que arriben primer no són les properes a la clau de pas (punt C) sinó les del final del embassament (punt D).

Corrent elèctric

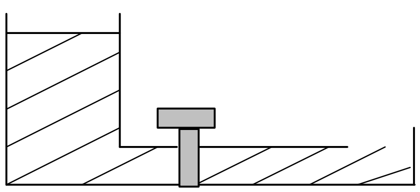


Abans d'apretar l'interruptor (no hi ha corrent d'electrons)

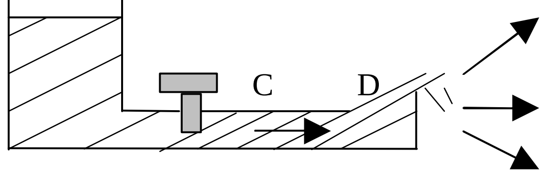


Després d'apretar l'interruptor (la bombeta s'encén)

Corrent d'aigua



Abans d'obrir la clau de pas (no hi ha corrent d'aigua)



Després d'obrir la clau de pas (l'aigua vessa)

Problema

6.1 Per un cable de coure ($n \approx 10^{29}$ electrons/m^3) volem fer circular un corrent elèctric de 6 A. Quina ha de ser la seva velocitat mitjana? Quants electrons travessen una secció qualsevol de cable cada segon? (la càrrega de l'electró és $1.6 \cdot 10^{-19}$ C).

6.2 Llei d'Ohm i efecte Joule

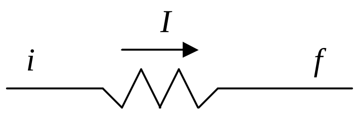
Conceptes bàsics

Una diferència de potencial (que simbolitzarem com $V_i - V_f$, ΔV o simplement V) entre dos punts d'un conductor correspon a un camp elèctric $\vec{E}$ que tendeix a moure les càrregues (recordeu del tema anterior que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$). Hem fet servir els subíndexs *i* i *j* per a denotar els punts inicial i final en el sentit de moviment de les càrregues positives.

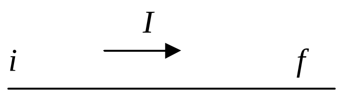
Com succeeix sempre, la relació més senzilla entre causa (en aquest cas, $V_i - V_f$) i efecte (en aquest cas, *I*) és que la causa sigui proporcional a l'efecte,

$$V_i - V_f = R \cdot I ,$$

de forma que no hi ha efecte ($I = 0$) sense causa ($V_i - V_f = 0$), i a major causa, major és l'efecte. Aquesta és la llei d'Ohm. *R* s'anomena resistència, donat que mentre major sigui *R*, menor serà la intensitat del corrent per a un valor donat de *V*. La seva unitat és l'ohm (Ω). És a dir, 1 Ω = 1 V / A (un ohm és un volt per ampere).



Representació d'un tros de cable conductor (rep el nom de resistència, i te el símbol R)



Representació d'un tros de cable conductor amb $R \approx 0$ i, per tant, $V_i \approx V_f$

Per definició, el sentit del corrent elèctric és aquell en que es mouen (o en què es mourien) les càrregues positives. És a dir, el sentit del corrent és oposat al del moviment dels electrons, que són negatius.

És molt important recordar en tot moment que ***el corrent elèctric va sempre dels punts de major cap als de menor potencial.*** Això és pot deduir de l'equació (ja vista a l'apartat 5.3):

$$-\left(V_f - V_i\right) = \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r} ,$$

però per definició el camp elèctric $\vec{E}$ és la força sobre 1C positiu. D'altra banda, el desplaçament $d\vec{r}$ serà paral·lel a la força. Per tant, són paral·lels el camp $\vec{E}$ i el desplaçament $d\vec{r}$ d'una càrrega positiva (que per definició correspon al sentit del corrent). Així doncs

$$-\left(V_f - V_i\right) > 0 ,$$

i el potencial final és inferior a l'inicial, com volíem demostrar. Veiem que també cal tenir ben clar que, per definició, ***el sentit del corrent és el de les càrregues positives.***

La resistència d'un tros de cable conductor es pot expressar com

$$R = r \, \frac{l}{A} ,$$

on r és una propietat del material (anomenada resistivitat, unitats Ω·m), *l* la longitud del conductor i *A* la seva secció. A major longitud del cable conductor, major és la resistència que presenta al corrent, mentre que a major secció, menor és la resistència. Això és raonable si ens adonem que el mateix passa amb una tuberia d'aigua.

Tal i com hem indicat al principi d'aquest tema, els electrons col·lisionen amb els àtoms o ions, perdent energia cinètica. Aixó dóna lloc a un escalfament del conductor, de forma que es perd energia en forma de calor (efecte Joule). La potència (energia per unitat de temps) perduda és

$$P_{calor} = V \cdot I = I^2 \cdot R, \qquad \textbf{[vàlid a les resistències]}$$

i les seves unitats en el sistema internacional és el watt (1 W = 1 J/s). Aquí, V és la diferència de potencial entre els punts anterior i posterior a R (com a la figura d'adalt).

Als circuits, l'energia que es perd en forma de calor és subministrada per les piles o generadors, segons l'expressió (en aquest llibre suposem menyspreable la resistència interna de la pila):

$$P_{pila} = V \cdot I = e \cdot I, \qquad \textbf{[vàlid a les piles]}$$

on e s'anomena força electromotriu (f.e.m.) de la pila, i és la diferència de potencial entre els seus pols ($e = V = V_+ - V_-$). Per tant es mesura en volts, no en newtons (no és una força, malgrat el seu nom). Malgrat que en els conductors es mouen càrregues negatives (electrons), per evitar confusions amb els signes sempre ens imaginem (per conveni) que hi ha un corrent (intensitat) de càrregues positives en sentit contrari a aquell en què es mouen els electrons. D'altra banda, és fàcil demostrar que les càrregues positives (i, per tant, la intensitat) sempre van dels punts de major a menor potencial.

Exemple 6.2

Connectem una resistència de 1.5 Ω a una pila de f.e.m. 4.5 V, fent servir cables de resistència menyspreable en comparació amb els 1.5 Ω.

a) Quina intensitat marcarà un amperímetre en aquest circuit?
b) Quanta energia per segon dóna la pila?
c) Quanta energia per segon es dissipa en forma de calor a la resistència?

Resolució

a) $I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{4.5}{1.5} = 3$ A.

b) $P_{pila} = e \cdot I = 3 \cdot 4.5 = 13.5$ W.

c) $P_{calor} = I^2 R = 3^2 \cdot 1.5 = 13.5$ W. Veiem que dóna el mateix que b), de forma que l'energia subministrada és igual a la perduda, tal i com ha de ser.

Problemes

6.2 Una instal·lació elèctrica feta amb fil de Coure ($r = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ω·m) de 1.6 mm de diàmetre, te una longitud total de fil de 200 m. Quina és la resistència del fil?

6.3 Un cable conductor te una longitud l_1 i un radi r_1. Si en lloc d'aquest cable en fem servir un altre, fet del mateix material però amb longitud doble i radi també el doble, quin dels dos te major resistència?

6.4 Si connectem els dos cables del problem anterior, cadascun a una pila de 4.5 V, per quin passa més corrent?

6.5 En el cas considerat al problema anterior, per quin cable es perd més energia per unitat de temps?

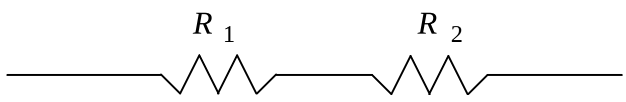
6.6 Una central elèctrica de 60 MW proporciona electricitat a una ciutat. Compareu la pèrdua d'energia, deguda a l'escalfament dels cables entre la central i la ciutat, en els casos següents: a) línies de baixa tensió (220 V), b) línies d'altra tensió (600 000 V).

6.3 Associacions de resistències

Conceptes bàsics

a) Resistències en sèrie:

Per definició, dues resistències estan en sèrie quan totes les càrregues que travessen una d’elles circulen també per la següent. Per exemple:



La definició anterior implica que:

$$I_1 = I_2 .$$

Com veurem, és molt útil considerar una resistència (anomenada equivalent) tal que tingui el mateix efecte que te el conjunt de resistències considerat, és a dir que hi circuli la mateixa intensitat i que causi la mateixa caiguda de potencial:

$$V_{eq} = V_1 + V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I_1 \left(R_1 + R_2\right).$$

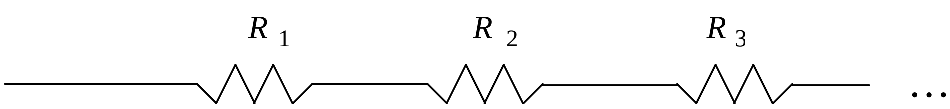
D’altra banda, per la llei d’Ohm:

$$V_{eq} = I_1 \ R_{eq} .$$

Per tant:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

De vegades, en lloc de dues trobarem tres o més resistències en sèrie, per exemple:



En aquest cas tenim que:

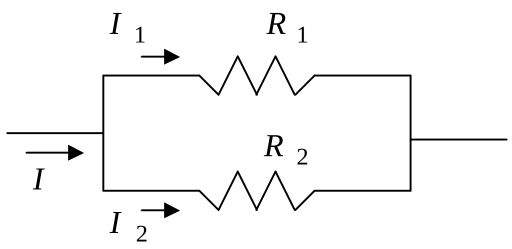
$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots,$$

i es fàcil veure que:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

b) Resistències en paral·lel:

Per definició, dues resitències sotmeses a la mateixa caiguda de tensió estan en paral·lel. Per exemple:



Tal i com hem indicat a l'apartat 6.2, a aquestes figures les línies rectes representen fils de resistència menyspreable (a diferència de les línies en zig-zag). Tenim que:

$$V_1 = V_2,$$

per tant

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}, \; I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_1}{R_2},$$

de forma que, en general:

$$I_1 \neq I_2.$$

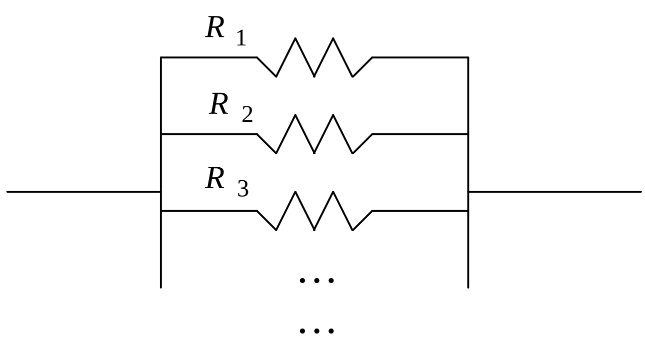
A la figura anterior veiem que totes les càrregues passen per una o altra resistència, és a dir:

$$I = I_1 + I_2.$$

Substituint les equacions anteriors i aplicant el concepte de resistència equivalent ($I = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = \frac{V_1}{R_{eq}}$) obtenim:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

De vegades tenim més de dues resistències en paral·lel. Per exemple:



En aquest cas tenim:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \ldots,$$

i la resistència equivalent és:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

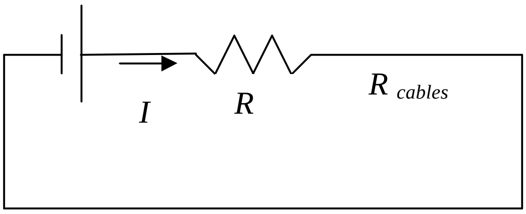
Exemple 6.3

Repetiu l'exemple 6.2 si els cables són de Coure ($r = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ω·m) i tenen un radi de 0.8 m i una longitud total de 100 m.

Resolució

La resistència dels cables és (vegeu l'apartat de teoria 6.2):

$$R_{cables} = r\,\frac{l}{A} = r\,\frac{l}{p\,r^2} = 1.7 \cdot 10^{-8}\,\frac{100}{p\left(0.8 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 0.85\,\Omega$$



En el dibuix adjunt representem el circuit, d'acord amb l'enunciat del problema (les dues línies verticals representen la pila: la més llarga representa el pol positiu). Tenim dues resistències en sèrie, per tant:

$$R_{eq} = R_{cables} + R = 0.85 + 1.5 = 2.35\,\Omega.$$

Ara podem resoldre el problema de la mateixa forma que a l'exemple 6.2, però fent servir la resistència equivalent a les dues que tenim al circuit:

a) $I = \dfrac{V}{R_{eq}} = \dfrac{4.5}{2.35} = 1.91$ A.

b) $P_{pila} = e \cdot I = 1.91 \cdot 4.5 = 8.6$ W.

c) $P_{calor} = P_{calor\ R} + P_{calor\ cables} = I^2 R + I^2 R_{cables} = I^2\left(R + R_{cables}\right) = 1.91^2 \cdot 2.35 = 8.6$ W.

Aquest resultat és igual que el de l'apartat b), com ha de ser (l'energia subministrada és sempre igual a la perduda).

Exemple 6.4

Connectem tres resistències, de 1 Ω, 2 Ω i 3 Ω, en paral·lel. Si la pila que dóna el corrent és de 9 V,

a) trobeu les diferències de potencial i les intensistats a totes les resistències
b) determineu la intensitat donada per la pila, sense trobar la resistència equivalent
c) determineu la intensitat donada per la pila, trobant i aplicant la resistència equivalent

Resolució

a) Abans de res, representem el circuit orresponent a l'enunciat del problema (vegeu la figura adjunta).

Com no ens donen la resitència del cable, suposem el seu efecte menyspreable en comparació amb les de 1 Ω, 2 Ω i 3 Ω. Llavors $V_{AB} \approx 9$ V i tenim que:

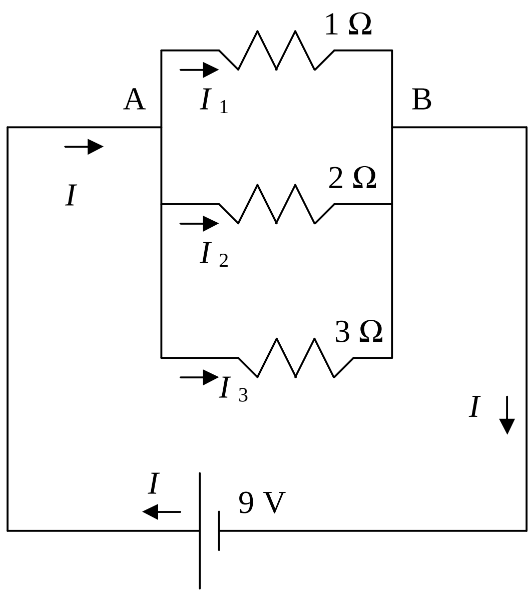
$V_1 = 9 \text{ V}, \; V_2 = 9 \text{ V}, \; V_3 = 9 \text{ V}.$

Les intensitats són:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{9}{1} = 9 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ A}.$$



b) La intensitat donada per la pila és:

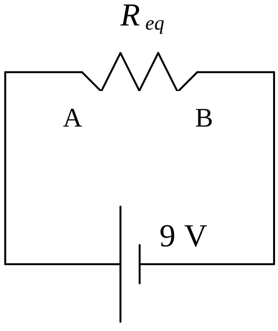
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 16.5 \text{ A}.$$

c) Donat que es tracta d'una connexió en paral·lel,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6}\Omega^{-1},$$

de forma que

$$R_{eq} = \frac{6}{11}\Omega.$$

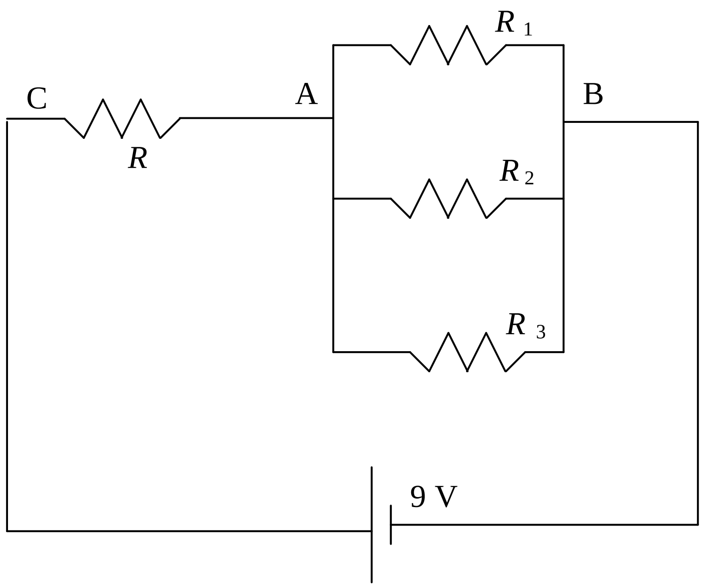


Així doncs, el circuit representat a l'apartat a) és equivalent al de la figura adjunta. La intensitat és

$$I = \frac{V_{AB}}{R_{eq}} = \frac{9}{6/11} = \frac{99}{6} = 16.5 \text{ A},$$

que és el mateix resultat que a l'apartat b), com ha de ser.

Exemple 6.5



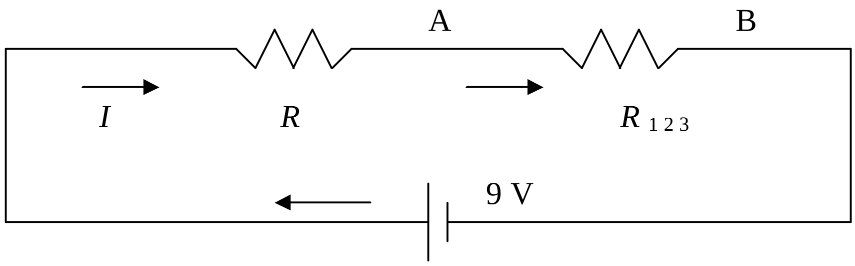
Trobeu les intensitats al circuit de la figura ($R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R = 1\Omega$).

Resolució

En aquest cas $V_{AB} \neq 9$ V perquè hi ha la resistència R (a diferència de l'exemple anterior): en efecte, en vista de la figura tenim que:

$$9\text{ V} = V_{CB} = V_{CA} + V_{AB} \neq V_{AB}\,.$$

La pila sempre tendeix a donar intensitat del costat positiu (línia més llarga) cap al negatiu (línia mé curta). Ho indiquem a la figura següent:



Busquem la resistència equivalent al conjunt format per R_1, R_2 i R_3:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\,.$$

Ja hem fet aquest càlcul a l'exemple anterior. El resultat és:

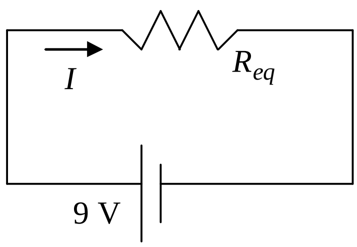
$$R_{123} = \frac{6}{11}\ \Omega.$$

Al dibuix anterior veiem que R és en sèrie amb R_{123}. Per tant:

$$R_{eq} = R + R_{123} = 1 + \frac{6}{11} = \frac{11}{11} + \frac{6}{11} = \frac{17}{11}\ \Omega,$$

i tenim el circuit equivalent dibuixat a continuació. La intensitat és:

$$I = \frac{9\text{ V}}{R_{eq}} = \frac{99}{17}\ \text{A.}$$



Per a trobar les altres intensitats, cal saber abans la diferència de potencial a R_1, R_2 o R_3, que és (vegeu la segona figura d'aquest exemple):

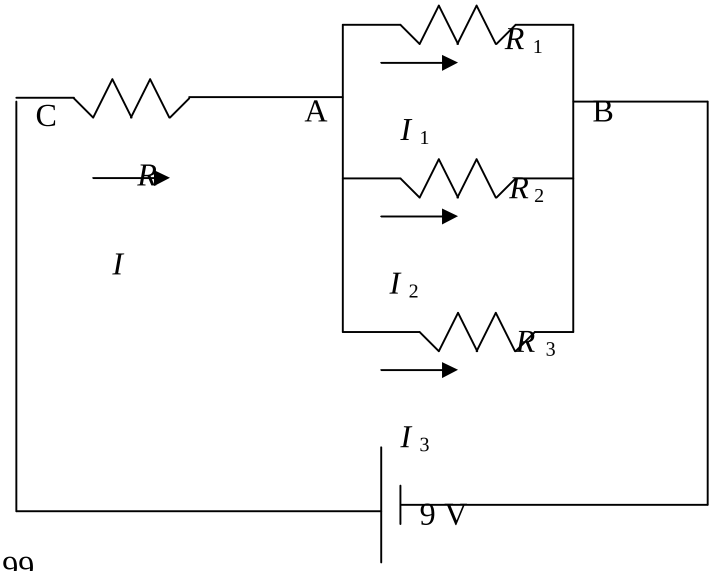
$$V_{AB} = R_{123} I = \frac{6}{11} \cdot \frac{99}{17} = \frac{54}{17}\ \text{V},$$

i ara podem determinar les intensitats que circulen per R_1, R_2 i R_3 (cal indicar-ne els sentits mitjançant una figura, tal i com fem a continuació):

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{54}{17} \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{54}{34} \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{54}{17 \cdot 3} = \frac{18}{17} \text{ A}.$$



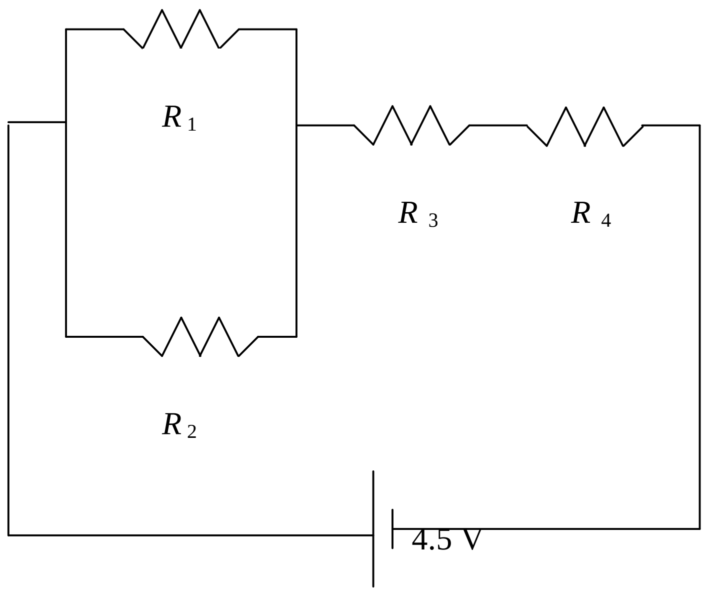
Sempre val la pena comprovar els càlculs.
Comprovem que $I = I_1 + I_2 + I_3$:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{54 \cdot 6 + 54 \cdot 3 + 54 \cdot 2}{17 \cdot 6} = \frac{99}{17} \text{ A} = I,$$

com ha de ser.

Problemes

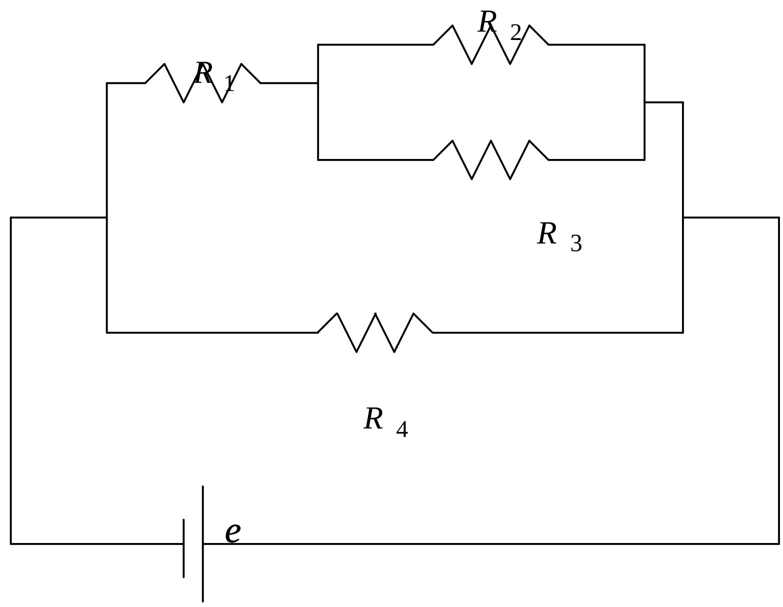
6.7 Trobeu totes les intensitats al circuit de la figura.
Dades:
$R_1 = 1\Omega$,
$R_2 = 0.5\Omega$,
$R_3 = 0.5\Omega$,
$R_4 = 1\Omega$.



6.8 Quina és la caiguda de potencial a cada resitència del problema anterior? I el potencial a cada punt si entre R3 i R4 està connectat el terra (0 Volts)?

6.9 Al problema 6.7, determineu:
a) La potència subministrada per la pila
b) La potència perduda a cada resistència en forma de calor
c) Comproveu que la potència subministrada és igual a la perduda al circuit

6.10 Trobeu totes les intensitats al circuit de la figura.
Dades:
$R_1 = (1/3)\Omega$,
$R_2 = 1\Omega$,
$R_3 = 2\Omega$,
$R_4 = 1\Omega$,
$e = 6\,\text{V}$.



6.11 Comproveu els resultats del problema anterior fent el balanç energètic (potència subministrada = potència perduda)

6.12 Determineu la diferència de potencial entre els extrems de cadascuna de les resistències del problema 6.10. I el potencial a cada punt, si el terra (0 Volts) està connectat al punt comú entre R1, R2 i R3?

6.4 Circuits elèctrics

Conceptes bàsics

Quan hi ha vàries piles, de vegades no és possible sustituir totes les resistències del circuit per una d'equivalent. Llavors aplicarem les regles de Kirchhoff.

Les passes a seguir són:

1) Dibuixar fletxes indicant les intensitats (procurant, si és possible, que vagin en el sentit correcte).

2) Aplicar les regles de Kirchhoff:

2.1) Regla dels nusos: a qualsevol nus (punt on s'uneixen tres o més cables), la suma de les intensitats que entren és igual a la suma de les que surten:

$$\sum_{nus} I_{entren} = \sum_{nus} I_{surten}\,.$$

Aplicarem aquesta regla a diferents nusos, sempre i quan doni lloc a equacions independents.

2.2) Regla de les malles: Donat que a qualsevol malla (trajectòria tancada al llarg de cables) es compleix $\sum \Delta V = 0$, és fàcil veure que es pot aplicar la següent equació:

$$\sum_{malla} \pm e_i = \sum_{malla} \pm I_i R_i\,,$$

on escriurem $+e_i$ si la pila ***tendeix a donar corrent*** en sentit horari ($-e_i$ en cas contrari), i $+I_i R_i$ si la intensitat I_i ha estat dibuixada en sentit horari ($-I_i R_i$ en cas contrari).

IMPORTANT: El signe de $\pm e_i$ no està relacionat amb la intensitat que passa per la pila (sinó amb cap on tendeix a donar corrent).

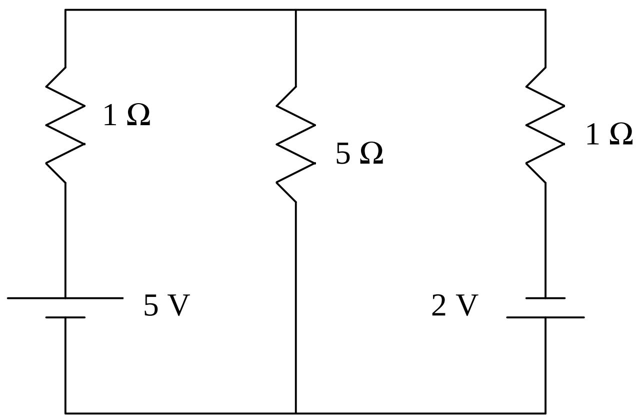
Aplicarem la regla de les malles fins que, juntament amb les equacions obtingudes al pas 2.1), tinguem el mateix nombre d'equacions ***independents*** que d'incògnites.

De vegades no és immediat veure si un conjunt d'equacions són independents o no. Llavors pot ser útil tener en compte que: a) si a una equació surt una incògnita que no sortia a les equacions ja escrites, llavors la nova equació ha de ser independent de les anteriors; b) el número d'equacions independents de malles és igual al número de malles interiors que formen el circuit (sense comptar la malla exterior o que engloba tot el circuit), i restant aquest número al número d'incògnites obtindrem el número de nusos als quals aplicar la regla dels nusos per obtenir equacions independents.

3) Un cop trobades les incògnites, comprovarem que hem resolt be el sistema (substituïnt a les equacions). A més, si alguna intensitat dóna negativa, indicarem que va en sentit oposat al triat (fent un dibuix), però te el mateix valor absolut (ex: si una intensitat ha estat dibuixada cap a l'esquerra i dóna -6 A vol dir que val 6 A però va cap a la dreta).

Exemple 6.6

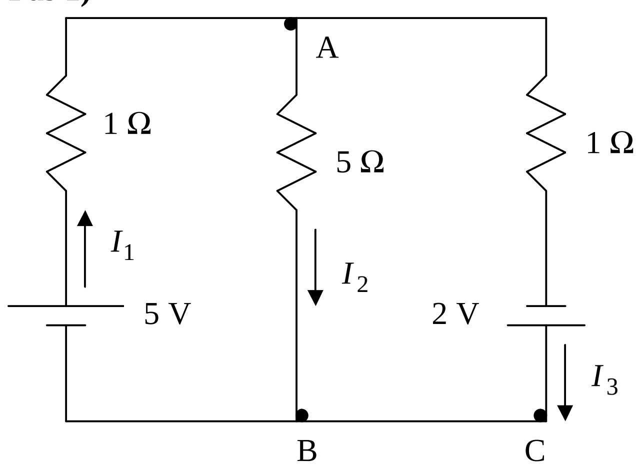
Trobeu totes les intensitats al circuit de la figura



Resolució

La pila de 5 V tendeix a donar corrent cap adalt (perquè sempre tendeixen a donar-lo sortint del pol positiu, que es simbolitza amb una línia més llarga). Per tant, tendeix a fer que el corrent que passa per la resistència de 5 Ω vagi cap avall. Anàlogament, veiem que la pila de 2 V tendeix a fer que el corrent que passa pels 5 Ω vagi cap amunt. Com la pila esquerra (5 V) te més volts que la de la dreta (2 V), hem d'esperar que guanyi l'efecte de la de 5 V, de forma que dibuixarem el corrent als 5 Ω cap avall. Així hem dibuixat les intensitats a la figura adjunta (pas 1 dels esmentats abans).

Pas 1)



Pas 2)

Número d'incògnites: 3 (I_1, I_2, I_3).

Número d'equacions independents de malles: 2 (el circuit és format per 2 malles interiors)

Número d'equacions independents de nusos: $3-2=1$.

Pas 2.1) Regla dels nusos:

Nus A: $\sum_{nus} I_{entren} = \sum_{nus} I_{surten} \;\rightarrow\; I_1 = I_2 + I_3$.

Evidentment podriem considerar el nus B, però obtenim $I_2 + I_3 = I_1$, que és la mateixa equació, de forma que no és independent i per tant no es te en compte. Al punt C clarament també podem plantejar una equació, que és $I_3 = I_3$, però tampoc diu res de nou, per tant no es te en compte. De fet, ja sabiem que només podiem obtenir una equació independent de nusos.

Pas 2.2) Regla de les malles:

Malla esquerra: $\sum_{malla} \pm e_i = \sum_{malla} \pm I_i R_i \;\rightarrow\; 5 = I_1 \cdot 1 + I_2 \cdot 5$.

Malla dreta: $\sum_{malla} \pm e_i = \sum_{malla} \pm I_i R_i \;\rightarrow\; 2 = -I_2 \cdot 5 + I_3 \cdot 1$

Podriem aplicar també la regla de les malles a la malla global, i obtenir $5 + 2 = I_1 \cdot 1 + I_3 \cdot 1$, però aquesta equació és la suma de les dues anteriors: per tant, en no ser independent, no l'aplicarem. De fet ja sabiem que només hi hauria 2 equacions independents de malles.

Així doncs hem obtingut un sistema de 3 equacions independents:

$$I_1 = I_2 + I_3,$$
$$5 = I_1 + 5I_2,$$
$$2 = -5I_2 + I_3,$$

on hi ha tres incògnites (I_1, I_2, I_3). Ara que tenim el mateix número d'equacions *independents* que d'incògnites, podem resoldre el sistema. Per exemple, sustituint la primera equació a la segona, tenim una equació on apareixen I_2 i I_3 però no I_1:

$$5 = 6I_2 + I_3.$$

Restant aquesta equació de la tercera del sistema, aconseguim trobar I_2:

$$-3 = -11\, I_2 \;\rightarrow\; I_2 = \frac{3}{11}\text{ A.}$$

Aquest resultat és positiu, per tant I_2 va en el sentit suposat a la figura anterior.

La segona equació del sistema permet trobar I_1:

$$I_1 = 5 - 5I_2 = 5 - \frac{15}{11} = \frac{55-15}{11} = \frac{40}{11}\text{ A,}$$

i la tercera ens porta al resultat per a I_3:

$$I_3 = 2 + 5I_2 = 2 + \frac{15}{11} = \frac{22+15}{11} = \frac{37}{11}\text{ A.}$$

Pas 3) Finalment, sempre comprovarem que es cumpleix el sistema:

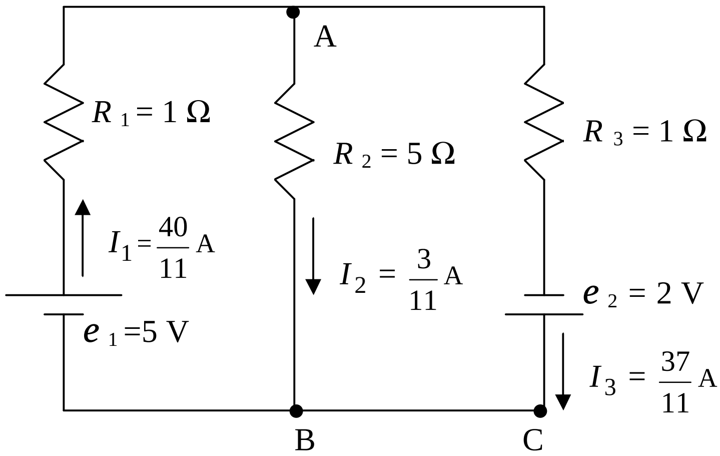
$$I_2 + I_3 = \frac{3}{11} + \frac{37}{11} = \frac{40}{11}\text{A} = I_1 \;\rightarrow \text{be}$$
$$I_1 + 5I_2 = \frac{40}{11} + \frac{15}{11} = \frac{55}{11} = 5 \rightarrow \text{be}$$
$$-5I_2 + I_3 = -\frac{15}{11} + \frac{37}{11} = \frac{22}{11} = 2 \rightarrow \text{be}$$

Exemple 6.7

Comproveu els resultats de l'exemple 6.6 fent el balanç energètic.

Resolució

Indiquem els resultats obtinguts mitjançant la següent figura:



Potència subministrada (nota: ***si una pila tendís a donar corrent al revés*** del sentit que te la intensitat, no subministraria sinó que consumiria energia, de forma que ***posariem un signe negatiu*** al terme corresponent):

$$e_1 I_1 + e_2 I_3 = 5 \cdot \frac{40}{11} + 2 \cdot \frac{37}{11} = \frac{274}{11} = 24.9 \text{ W.}$$

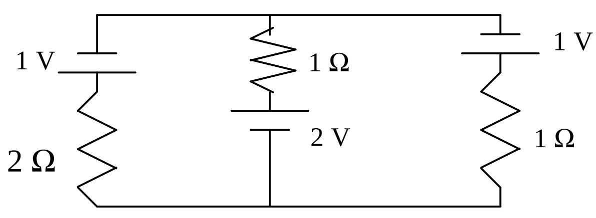
Potència perduda (nota: aquestes potències corresponen a pèrdues de calor i, per tant, ***són sempre positives***, independentment del sentit del corrent):

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 =$$
$$\left(\frac{40}{11}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{3}{11}\right)^2 \cdot 5 + \left(\frac{37}{11}\right)^2 \cdot 1 =$$
$$\frac{(40)^2 + 45 + (37)^2}{(11)^2} = \frac{3014}{121} = 24.9 \text{ W.}$$

Veiem que la potència subministrada és igual a la perduda. Per tant es satisfà el balanç energètic, tal i com ha de ser. Adoneu-vos que, si ens haguéssim equivocat en aplicar les regles de Kirchhoff, la comprovació feta al final de l'exemple 6.6 no ens hauria permés detectar el nostre error; en canvi, la potència subministrada no ens donaria igual a la perduda, i d'aquesta forma sí veuriem que hem resolt incorrectament l'exemple 6.6.

Problemes

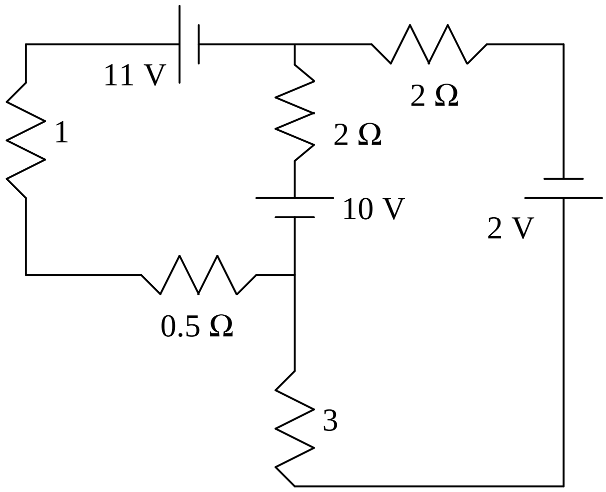
6.13 a) Trobeu les intensitats al circuit de la figura (quan l'hagiu resolt, comproveu que es satisfan les equacions plantejades).



b) Per què la intensitat que dóna la pila esquerra és menor que la que dóna la de la dreta, malgrat que tenen la mateixa força electromotriu?

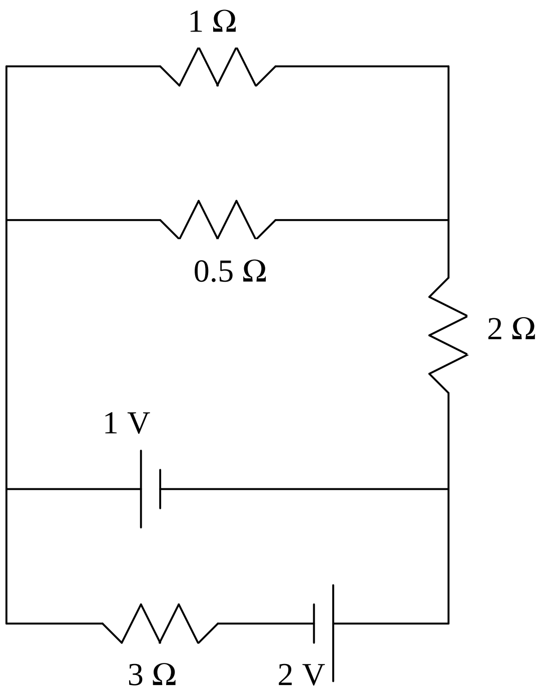
6.14 Fent servir els resultats obtinguts, comproveu que al problema 6.13 la potència subministrada és igual a la perduda per efecte Joule (calor per unitat de temps).

6.15 Determineu el valor de totes les intensitats al circuit següent.



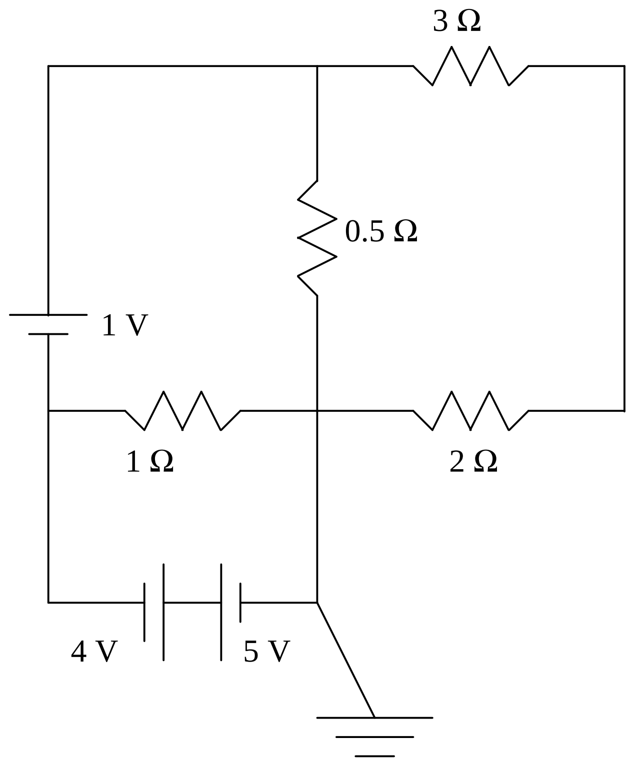
6.16 Demostreu que els resultats del problema 6.15 són correctes, pel mètode de comprobació del balanç energètic.

6.17 Calculeu les intensitats del circuit de la figura següent.



6.18 Comproveu els resultats del problema 6.17, tot comparant la potència subministrada amb la que es perd en forma de calor.

6.19 Trobeu les intensitats que circulen pels components del circuit de la figura. El punt inferior dret està connectat a Terra (això és el que indiquen les tres ratlles horitzontals, i llavors per conveni es diu que el seu potencial és de 0 V, i es suposa que la intensitat que marxa cap a Terra és menyspreable).



6.20 Comproveu que els resultats obtinguts al problema 6.19 són correctes, mitjançant el balanç energètic (recordeu que quan una pila s'oposa al corrent, no dóna energia sinó que en consumeix).

6.21 Trobeu el potencial als punts superior esquerra i superior dret del circuit del problema 6.19.

Solucions

6.1 $v_m = 2.4 \cdot 10^{-4}$ m/s, $3.8 \cdot 10^{19}$ electrons.

6.2 $R = 1.7\ \Omega$.

6.3 $R_2 = \dfrac{R_1}{2}$.

6.4 $I_2 = 2\, I_1$.

6.5 $P_2 = 2\, P_1$.

6.6 Per cada watt que es perd en alta tensió, se’n perden 7 milions en baixa tensió.

6.7 $I_1 = 0.82$ A, $I_2 = 1.64$ A, $I_3 = I_4 = 2.45$ A (totes van cap a la dreta).
Comprovació: $I_1 + I_2 \approx I_3$.

6.8 $V_1 = V_2 = 0.82$ V, $V_3 = 1.23$ V, $V_4 = 2.45$ V (en els quatre casos, el costat dret te menys potencial que el costat esquerra).
Comprovació: $V_1 + V_3 + V_4 = 4.5$ V.

6.9 a) $P_{pila} = 11.03$ W.
b) $P_{R1} = 0.67$ W, $P_{R2} = 1.34$ W, $P_{R3} = 3.00$ W, $P_{R4} = 6.00$ W.
c) $11.03 \approx 0.67 + 1.34 + 3.00 + 6.00$.

6.10 $I_1 = 6$ A (cap a l’esquerra), $I_2 = 4$ A (cap a l’esquerra), $I_3 = 2$ A (cap a l’esquerra), $I_4 = 6$ A (cap a l’esquerra), $I_{pila} = 12$ A (cap a la dreta).
Comprovacions: $I_1 = I_2 + I_3$, $I_{pila} = I_1 + I_4$.

6.11 $P_{pila} = 72$ W, $P_{calor} = 12 + 16 + 8 + 36 = 72$ W. Donen el mateix, com ha de ser.

6.12 $V_2 = V_3 = 4$ V, $V_4 = e = 6$ V, $V_1 = 2$ V (en els quatre casos, l’extrem esquerra te menys potencial que el costat dret).
Comprovació: $V_1 + V_2 = V_4 = e$.

6.13 a) $I_{2\Omega} = \dfrac{3}{5}$ A (cap avall), $I_{dreta} = \dfrac{6}{5}$ A (cap avall), $I_{2V} = \dfrac{9}{5}$ A (cap amunt).
b) $I_{2\Omega} < I_{dreta}$ perquè $2\Omega > 1\Omega$ (on 1Ω es refereix a la resistència a la branca dreta).

6.14 $P_{piles} = \dfrac{27}{5}$ W, $P_{calor} = \dfrac{27}{5}$ W. Són iguals, com ha de ser.

6.15 $I_{esquerra} = 6$ A (cap avall), $I_{dreta} = 0$ A, $I_{10V} = 6$ A (cap amunt).

6.16 $P_{piles} = 126$ W, $P_{calor} = 126$ W. Són iguals, com ha de ser, per tant queda comprovat.

6.17 $I_{2\Omega} = \frac{3}{7}$ A (cap avall), $I_{2V} = 1$ A (cap a la dreta), $I_{1V} = \frac{10}{7}$ A (cap a l'esquerra), $I_{1\Omega} = \frac{1}{7}$ A (cap a la dreta), $I_{0.5\Omega} = \frac{2}{7}$ A (cap a la dreta).

6.18 $P_{piles} = \frac{24}{7}$ W. $P_{calor} = \frac{1}{49} + \frac{2}{49} + \frac{18}{49} + 3 = \frac{24}{7}$ W. Donen el mateix, com ha de ser.

6.19 $I_{0.5\Omega} = 4$ A (cap avall), $I_{3\Omega} = I_{2\Omega} = \frac{2}{5}$ A (cap a la dreta), $I_{5V} = I_{4V} = \frac{27}{5}$ A (cap a l'esquerra), $I_{1V} = \frac{22}{5}$ A (cap amunt), $I_{1\Omega} = 1$ A (cap amunt).

6.20 $P_{piles} = \frac{22}{5} + 27 - \frac{4 \cdot 27}{5} = \frac{49}{5}$ W. $P_{calor} = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} + 1 + 8 = \frac{49}{5}$ W. Són iguals, com ha de ser.

6.21 Costat superior esquerra: $V = 2$ V. Costat superior dret: $V = \frac{4}{5}$ V.

TEMA 7 MAGNETISME

Objectius

Assolir els coneixements de la fenomenologia bàsica del magnetisme. La descripció física dels fenòmens electromagnètics es realitza emprant els conceptes vectorials de força magnètica i de camp magnètic. La resolució dels problemes ha de permetre afermar l'àlgebra vectorial. S'analitzarà el moviment d'una partícula carregada sota l'acció d'un camp magnètic uniforme i es comenten diverses aplicacions del magnetisme a la ciència i a la tecnologia. Conèixer la base de la mesura de camp magnètic utilitzant l'efecte Hall. Es comenta el magnetisme a la matèria.

Índex

7.1 Magnetisme. Representació del camp magnètic

Conceptes bàsics

Les forces magnètiques són les forces que s'exerceixen les càrregues elèctriques quan estan en *moviment* les unes envers les altres. Els fenòmens elèctrics i magnètics tenen un origen comú, la càrrega elèctrica, i la seva anàlisi es fonamenta en la teoria electromagnètica. La propietat d'un determinat mineral d'atraure trossos de ferro ja es coneixia a l'antiga Grècia. Al segle XIX, Oersted va descobrir que un corrent elèctric afectava l'orientació de l'agulla d'una brúixola, relacionant els fenòmens elèctrics i magnètics. La teoria electromagnètica fou establerta per J.C. Maxwell vers 1860, demostrant per exemple que un camp elèctric variable produeix un camp magnètic.

El moviment net de càrrega, origen dels fenòmens magnètics, es pot visualitzar en tres casos:

- moviment de càrregues puntuals.

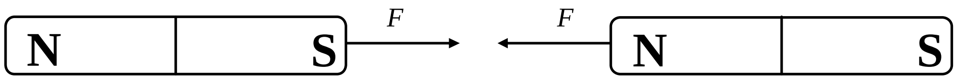
- intensitat de corrent circulant per un medi conductor: La intensitat de corrent és originada per un transport net de càrrega en una direcció concreta. Com que una intensitat fàcilment mesurable correspon a una densitat important de partícules portadores de càrrega, en lloc de fer l'anàlisi a partir d'aplicar el principi de superposició a totes les càrregues s'utilitza la intensitat de corrent per a descriure el moviment

- imant: en el cas d'un imant el moviment net de càrrega es produeix a bagues de corrent a l'interior del material imantat degudes al moviment intrínsec de les càrregues atòmiques, amb una determinada orientació en una zona concreta (anomenada domini) del material. En els imants es detecten dos pols magnètics (pol nord i pol sud). Es constata que dos pols nord (o sud) es repel·leixen entre si, i un pol nord i un pol sud s'atreuen entre si (vegeu figura).

a)

b)

c)

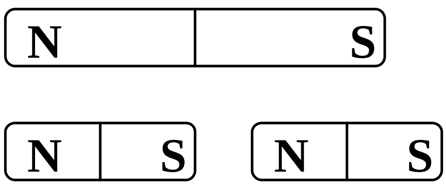


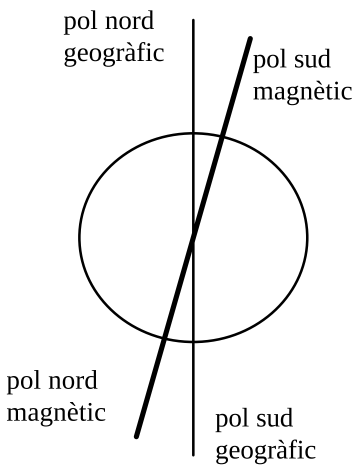
En dividir un imant **no** existeix cap constatació experimental de l'existència d'un monopol magnètic. El resultat són dos imants més petits, ambdós amb una intensitat més dèbil. Les forces magnètiques s'exerceixen a distància. Per tant, per a la descripció de la interacció electromagnètica amb l'entorn és adient introduir el concepte de camp magnètic $\vec{B}$ (també anomenat inducció magnètica). El camp magnètic és un camp vectorial. La unitat del sistema internacional és el Tesla (T). La unitat corresponent al sistema cegessimal és el Gauss (G). La relació entre ambdues unitats és 1 T = 10^4G.

Representació del camp magnètic:

De forma anàloga a d'altres camps vectorials com el camp gravitatori o el camp elèctric, es pot representar el camp magnètic mitjançant línies de camp magnètic (és adient no emprar l'expressió errònia de "línies de força magnètica" perquè la direcció de la força magnètica és perpendicular al camp magnètic). Les línies de camp magnètic són línies tangents al camp en tots els punts.

En els imants, les línies de camp es dibuixen per conveni sortint del pol nord i entrant al pol sud. En particular, la Terra és un imant natural, l'eix que uneix els pols magnètics de la Terra s'anomena eix magnètic o geomagnètic (aquest eix varia amb el temps i els pols magnètics no coincideixen amb els pols geogràfics). A més, el pol nord geogràfic de la Terra és a prop (uns 11°30') del pol sud magnètic i el pol sud geogràfic és a prop del pol nord magnètic.

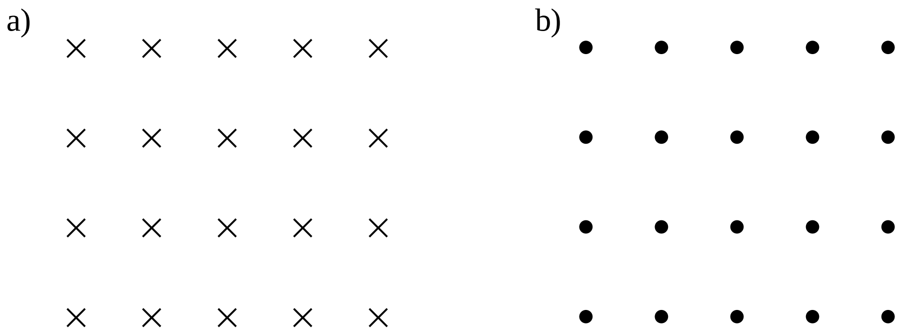




Una regió de l'espai amb un camp magnètic uniforme és una regió on el camp magnètic és constant. En representar el camp magnètic, s'utilitzen línies de camp magnètic situades a igual distancia unes de les altres. És a dir, distribuïdes uniformement.

En general, la densitat de línies de camp magnètic emprades en la representació ha de proporcionar informació sobre la intensitat del camp magnètic. Per exemple, a un camp magnètic doble correspondrà una densitat doble de línies de camp magnètic.

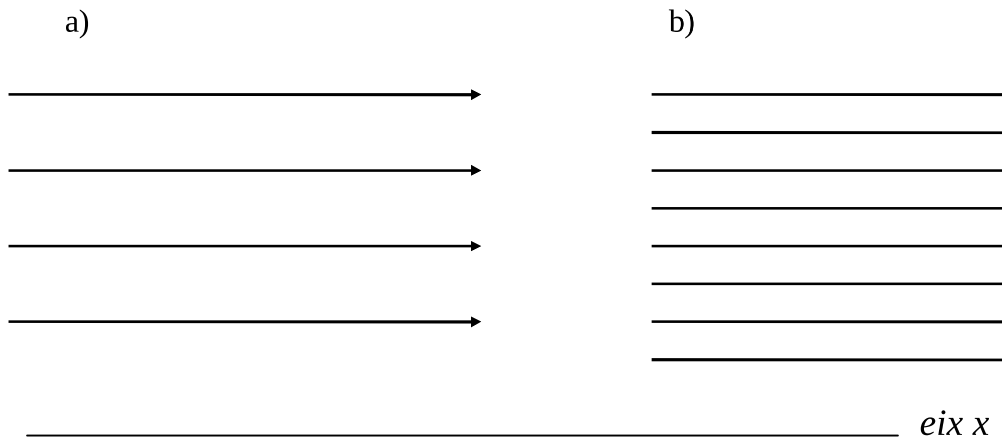
En fer una anàlisi tridimensional, és habitual dibuixar un camp magnètic de direcció perpendicular al pla definit pel paper (o anàlogament per la pissarra). En aquest cas, el símbol × assenyala que el camp magnètic es dirigeix cap al pla del paper, i el símbol • ens indica que el camp magnètic es dirigeix cap enfora del pla del paper. A la figura adjunta es representen dos camps magnètics uniformes: a) cap al pla de paper, b) cap enfora del pla del paper.



Exemple 7.1

En una determinada regió de l'espai hi ha un camp magnètic uniforme al llarg de l'eix x. Si el camp magnètic es duplica, representeu el camp magnètic: a) inicialment, b) després d'augmentar el seu valor.

Resolució



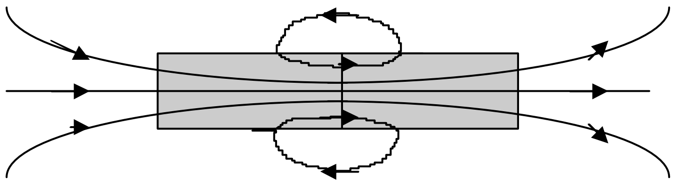
Problemes

7.1 Representeu un camp magnètic uniforme: a) de mòdul B al llarg de l'eix y, i b) de mòdul $2B$ al llarg de l'eix x. Suposeu en ambdós casos que els camps són positius.

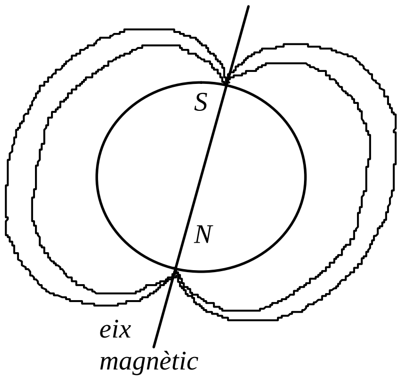
7.2 Representeu un camp magnètic uniforme: a) de mòdul B i que es dirigeix vers el pla del paper, i b) de mòdul $2B$ que es dirigeix cap enfora del pla del paper.

7.3 En els dos problemes anteriors, si el mòdul del camp magnètic és de $5{,}2 \cdot 10^3$ G. Quin és el mòdul del camp magnètic $2B$. Doneu el resultat en unitats del sistema internacional.

7.4 A l'imant de la figura, tot veient les línies de camp magnètic. Quin és el pol nord? I el pol sud?



7.5 Representació esquemàtica de la Terra. Indiqueu quin és el sentit de les línies de camp magnètic dibuixades.



7.2 Força d'un camp magnètic sobre una càrrega en moviment

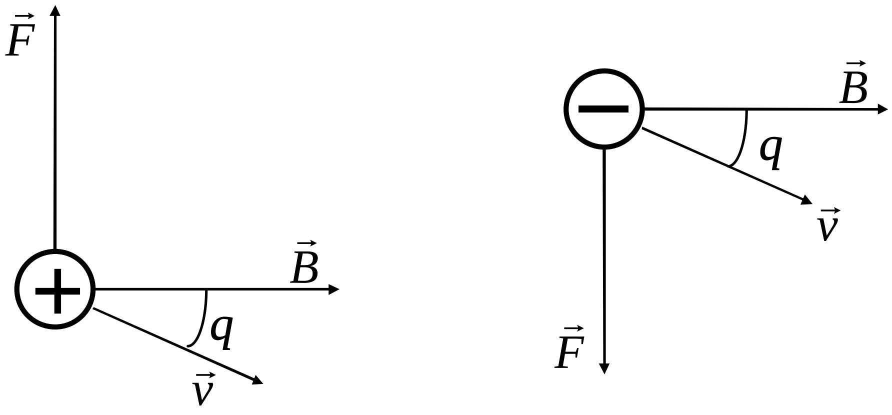
Conceptes bàsics

Així com el camp magnètic és produït per càrregues en moviment, un camp magnètic exerceix una força $\vec{F}$ sobre qualsevol càrrega q que es trobi dins de la regió on actua el camp magnètic. Es considera l'aproximació que una càrrega sola no varia apreciablement el camp magnètic extern. Experimentalment s'ha comprovat que la força que actua sobre una càrrega (q) que es mou en una regió amb un camp magnètic ($\vec{B}$) és:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

1. El mòdul de la força magnètica és: $F = q\, v\, B \sin q$.
2. La força magnètica sempre és perpendicular al pla definit pels vectors velocitat i camp magnètic. Si $q = 0$ o $q = p$ la força és nul·la.
3. La força és màxima quan la càrrega es mou en una direcció perpendicular al camp (l'angle corresponent és: $q = p/2$).
4. Per a determinar el sentit de la força magnètica cal aplicar la regla de la mà dreta (vegeu figura): Si l'índex i el cor assenyalen respectivament la direcció i sentit de la velocitat i del camp magnètic, el dit polze assenyala el sentit de la força si la partícula és

de càrrega positiva. Si la càrrega és negativa el sentit és just el contrari. Altra regla mnemotècnica és la del cargol o tirabuixó.



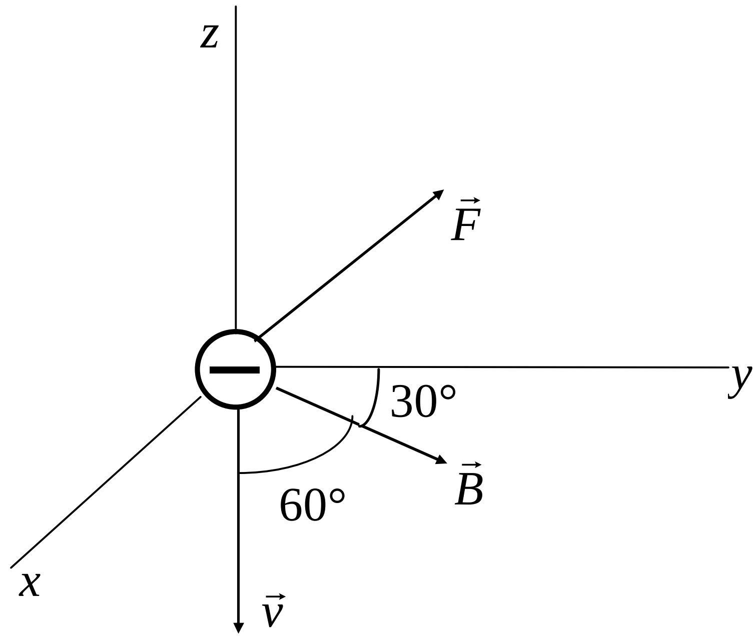
Exemple 7.2

Un electró es mou a una velocitat de $-2{,}0 \cdot 10^8$ m/s al llarg de l'eix *z*. Entra en una regió amb un camp magnètic $\vec{B}$. Calculeu la força magnètica que actua sobre l'electró: a) si el camp magnètic és de 4,0 T al llarg d'un eix contingut en el pla *yz* formant un angle de 30° amb l'eix *y* i un angle de 60° amb $\vec{v}$, b) si el camp magnètic és $\vec{B} = (4{,}0\ \vec{i} + 1{,}1\ \vec{j} + 0{,}2\ \vec{k})$ T.

Resolució

a) En aquest cas, el valor del mòdul de la força magnètica és:
$F = q\ v\ B\ sin\ q = 1{,}6{\cdot}10^{-19} \cdot 2{,}0{\cdot}10^{8} \cdot 4{,}0 \cdot sin\ 60° = 1{,}1{\cdot}10^{-10}$ N
cal tenir en compte que en aquesta expressió l'angle que hi apareix és el que hi ha entre els vectors $\vec{v}$ i $\vec{B}$.

I la direcció i sentit es poden obtenir aplicant la regla de la mà dreta. Com es veu a la figura adjunta la força té la direcció de l'eix *x* en el sentit de les *x* negatives.



b) En aquest cas emprarem dos mètodes diferents per a obtenir la força magnètica.

•Mètode 1: mitjançant el producte vectorial.

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = q\left[\left(v_y\, B_z - v_z\, B_y\right)\vec{i} + \left(v_z\, B_x - v_x\, B_z\right)\vec{j} + \left(v_x\, B_y - v_y\, B_x\right)\vec{k}\right]$$

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -2\cdot 10^8 \\ 4{,}0 & 1{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix} = -1{,}6\cdot 10^{-19}\left[\left(2{,}2\cdot 10^8\right)\vec{i} + \left(-8\cdot 10^8\right)\vec{j} + (0)\,\vec{k}\right]$$

$$\vec{F} = \left[\left(-3{,}52\cdot 10^{-11}\right)\vec{i} + \left(1{,}28\cdot 10^{-10}\right)\vec{j}\right]\ N$$

•Mètode 2: mitjançant el sinus de l'angle entre els vectors $\vec{v}$ i $\vec{B}$.

L'angle entre els vectors $\vec{v}$ i $\vec{B}$ el podem obtenir emprant el seu producte escalar.

$$\vec{v}\cdot\vec{B} = v\ B\cos q$$

on q és l'angle entre ambdós vectors

$$\cos q = \frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{v\ B} = \frac{v_x\, B_x + v_y\, B_y + v_z\, B_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{0 + 0 - 0{,}4\cdot 10^8}{\sqrt{0 + 0 + 4\cdot 10^{16}}\ \sqrt{16 + 1{,}21 + 0{,}04}}$$

per tant,

$$\cos q = 0{,}04815 \qquad \text{i} \qquad q = 87°\ 14'$$

A més, el mòdul del camp magnètic és:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = 4{,}1533\ \text{T}$$

El mòdul de la força magnètica és:

$$F = q\ v\ B\sin q = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2{,}0\cdot 10^8\cdot 4{,}1533\cdot \sin 87°\ 14' = 1{,}33\cdot 10^{-10}\ \text{N}$$

La direcció i el sentit venen determinats pel vector unitari $\vec{u}$

$$\vec{u} = \pm\frac{\vec{v}\wedge\vec{B}}{v\ B} = (-0{,}26\ \vec{i} + 0{,}96\ \vec{j})$$

on el símbol ± indica que hi ha una dependència respecte el signe de la càrrega: + correspon a una càrrega positiva i - correspon a una càrrega negativa (com en aquest exemple).

Problemes

7.6 Un protó es mou a una velocitat de $4{,}0\cdot 10^7$ m/s al llarg de l'eix x. Entra en una regió amb un camp magnètic al llarg de l'eix z, B_z = 2 T. Calculeu la força magnètica que actua sobre el protó.

7.7 Un electró es mou a una velocitat de $2{,}0 \cdot 10^7$ m/s al llarg de l'eix x. Entra en una regió amb un camp magnètic al llarg de l'eix z, $B_z = 4$ T. Calculeu la força magnètica que actua sobre l'electró.

7.8 Una càrrega de -50 mC es mou a una velocitat de $2{,}0 \cdot 10^5$ m/s al llarg de l'eix x. Entra en una regió amb un camp magnètic al llarg de l'eix z, $B_z = 0{,}7$ T. Calculeu la força magnètica que actua sobre la càrrega.

7.9 Un deuteró (nucli format per un neutró i un protó) entra en una regió amb un camp magnètic al llarg de l'eix y de 3,5 T. La força que actua sobre aquest nucli és de $2{,}5{\cdot}10^{-12}$ N al llarg de l'eix z. Calculeu la velocitat amb que ha entrat el deuteró. Recordeu que la càrrega d'un protó és igual a la de l'electró però de signe positiu.

7.10 Un electró es mou a una velocitat de $-7{,}6 \cdot 10^5$ m/s al llarg de l'eix x. En entrar a una regió amb un camp magnètic desconegut sobre ell actua una força de $-2{,}9{\cdot}10^{-12}$ N al llarg de l'eix z. Calculeu el camp magnètic que actua sobre l'electró.

7.11 Una càrrega de +20 mC es mou a una velocitat de $2{,}3 \cdot 10^3$ m/s al llarg de l'eix x. Entra en una regió amb un camp magnètic, contingut en el pla xy, $B = 0{,}7$ T. Si l'angle entre els vectors $\vec{v}$ i $\vec{B}$ és de 40°, calculeu la força magnètica que actua sobre la càrrega.

7.12 Una càrrega de -0,64 C es mou a una velocitat de $7{,}8 \cdot 10^3$ m/s al llarg de l'eix x. Entra en una regió amb un camp magnètic, contingut en el pla xy, $B = 0{,}9$ T. Si l'angle entre els vectors $\vec{v}$ i $\vec{B}$ és de 20°, calculeu la força magnètica que actua sobre la càrrega.

7.13 Un protó es mou a una velocitat de $5{,}3 \cdot 10^5$ m/s al llarg de l'eix x. Entra en una regió amb un camp magnètic $\vec{B} = (0{,}5\ \vec{i} + 0{,}3\ \vec{j})$ T. Calculeu la força magnètica que actua sobre el protó.

7.14 Una càrrega de +35 mC entra en una regió amb un camp magnètic $\vec{B} = (1\ \vec{i} - 2{,}1\ \vec{j})$ T. La seva velocitat en entrar és: $v_z = 3{\cdot}10^4$ m/s . Calculeu la força magnètica que actua sobre la càrrega.

7.15 Un càrrega de +1 μC es mou a una velocitat de $-2{,}0 \cdot 10^5$ m/s al llarg de l'eix y. Entra en una regió amb un camp magnètic $\vec{B} = (0{,}2\ \vec{i} + 1{,}4\ \vec{j} + 0{,}5\ \vec{k})$ T. Calculeu la força magnètica que actua sobre l'electró.

7.16 Una partícula de càrrega +3e (on $e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C) es mou a una velocitat $\vec{v} = (5{,}0\ \vec{i} + 2{,}3\ \vec{j} - 1{,}2\ \vec{k}) \cdot 10^5$ m/s. Entra en una regió amb un camp magnètic $\vec{B} = (0\ \vec{i} + 4{,}1\ \vec{j} + 1{,}5\ \vec{k})$ T. Calculeu la força magnètica que actua sobre la càrrega.

7.3 Moviment d'una partícula carregada en un camp magnètic uniforme

Conceptes bàsics

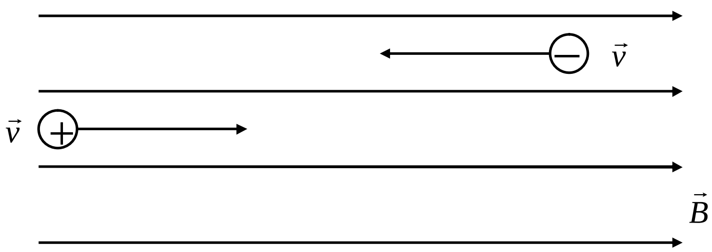
En particular, en ser perpendiculars els vectors força i velocitat, el treball fet sobre la partícula carregada per la força magnètica val zero. Per tant, la força de caràcter magnètic no varia el mòdul de la velocitat, només desvia la trajectòria de la càrrega. És a dir, el desplaçament d'una partícula carregada sotmesa a la única acció d'un camp magnètic és un moviment amb mòdul de la velocitat constant (v = constant, però $v \neq 0$ en general). Per tant, l'acció d'un camp magnètic sobre una càrrega en moviment no pot variar la seva energia cinètica.

El moviment d'una partícula carregada en un camp magnètic uniforme (uniforme indica que el vector camp magnètic és el mateix, NO varia, en una determinada regió de l'espai) es pot analitzar en tres situacions diferents (vegeu figures):

i) $\vec{v}$ paral·lel a $\vec{B}$

Això implica $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, i per tant sin$q$ = 0. Llavors, $F = q\ v\ B\ sin\,q = 0$

La partícula manté una trajectòria rectilínia i paral·lela al camp magnètic.



ii) $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{B}$

Això implica $q = p/2$, i per tant sin$q$ = 1. Llavors, $F = q\ v\ B\ sin\,q = q\ v\ B$

La partícula segueix un moviment circular uniforme dins la regió on actua el camp magnètic. A la figura adjunta la partícula positiva gira en sentit antihorari i la negativa en sentit horari.

Si recordem la segona llei de Newton per a sistemes on podem considerar la massa constant ($\vec{F} = m\,\vec{a}$) i l'expressió de l'acceleració centrípeta ($a = v^2\ /\ R$), on R és el radi, podem escriure:

$$F = q\ v\ B = m\ a = m\ v^2\ /\ R$$

i,

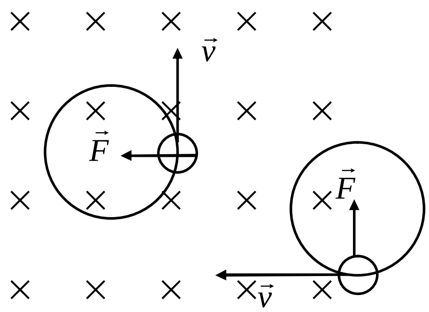
$$a = \frac{q\ v\ B}{m} \qquad\qquad R = \frac{m\ v}{q\ B}$$

La velocitat angular, w, d'aquest moviment circular ve donada per:

$$w = \frac{v}{R} = \frac{v\ \ q\ B}{m\ v} = \frac{q\ B}{m}$$

I la freqüència, f, i el període T del moviment circular són:

$$f = \frac{w}{2\,p} \qquad\qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\,p}{w} = \frac{2\,p\ \ m}{q\ B}$$



iii) $\vec{v}$ ni paral·lel ni perpendicular a $\vec{B}$

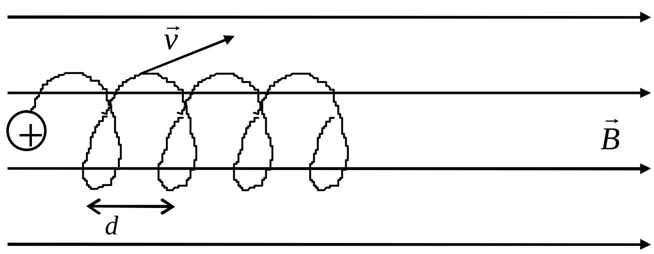
El vector velocitat es pot descompondre en dues components, una paral·lela al camp magnètic, v_{II}, i una altra de perpendicular, $v_{\perp}$, al camp magnètic.

La component paral·lela de la velocitat permet a la càrrega desplaçar-se en la direcció del camp magnètic (cas i), i la component perpendicular de la velocitat correspondria a un moviment circular (cas ii). Conseqüentment, el moviment és una combinació d'ambdós, és un moviment helicoïdal on el radi de l'hèlix ve donat per:

$$R = \frac{m\,v_{\perp}}{q\,B}$$

i la distancia que recorre la càrrega en la direcció del camp magnètic durant un període *T*, s'anomena pas de rosca, *d*, del moviment helicoïdal i el seu valor és:

$$d = v_{\Pi}\,T = \frac{v_{\Pi}\;2p}{w} = \frac{v_{\Pi}\;2p\;R}{v_{\perp}} = \frac{2p\;m\,v_{\Pi}}{q\,B}$$



Quan una càrrega es mou dins d'una regió de l'espai on hi ha tant camp elèctric com camp magnètic, l'expressió de la força és l'anomenada força de Lorentz:

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)\right]$$

Exemple 7.3

Un protó, amb una velocitat de $3{\cdot}10^{5}$ m/s, entra en una regió de l'espai on hi ha un camp magnètic uniforme de 0,8 T. Si el protó entra perpendicularment al camp, calculeu: a) el radi de l'òrbita que descriurà el protó, b) la freqüència, c) l'energia cinètica. I si l'angle entre els vectors velocitat i camp és de 30°: d) com serà la trajectòria?, a més, calculeu: e) el radi de l'òrbita que descriurà el protó, f) la freqüència, g) l'energia cinètica, h) el pas de rosca. Recordeu que la massa d'un protó és: $1{,}67{\cdot}10^{-27}$ Kg.

Resolució

- Cas $\vec{v}$ i $\vec{B}$ perpendiculars.

a) el radi de l'òrbita circular que descriurà el protó és:

$R = \dfrac{m\,v}{q\,B}$ = $(1{,}67{\cdot}10^{-27}\;\; 3{\cdot}10^{5} / 1{,}6{\cdot}10^{-19}\;\; 0{,}8) = 3{,}9{\cdot}10^{-3}$ m

b) la freqüència és:

$f = \dfrac{w}{2\,p} = \dfrac{v}{2\,p\;\;R} =$ $(3{\cdot}10^{5}$ / 2 p $3{,}9{\cdot}10^{-3})$ = $12{,}2{\cdot}10^{6}$ Hz

c) l'energia cinètica, expressada com E_c o K segons els diferents manuals, és:

$E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 =$ $[1{,}67{\cdot}10^{-27}$ $(3{\cdot}10^{5})^{2}$ / 2] = $7{,}5{\cdot}10^{-17}$ J

- Cas $\vec{v}$ i $\vec{B}$ formant un angle de 30°:

d) la trajectòria serà helicoïdal

e) el radi de l'òrbita helicoïdal és:

$R = \dfrac{m\,v_{\perp}}{q\;B} = \dfrac{m\,v\,sin\,q}{q\;B} =$ $(1{,}67{\cdot}10^{-27}$ $3{\cdot}10^{5}$ sin 30° / $1{,}6{\cdot}10^{-19}$ 0,8) = $1{,}95{\cdot}10^{-3}$ m

f) la freqüència és:

$f = \dfrac{w}{2\,p} = \dfrac{v_{\perp}}{2\,p\;\;R} =$ $(3{\cdot}10^{5}$ sin 30° / 2 p $3{,}9{\cdot}10^{-3})$ = $6{,}1{\cdot}10^{6}$ Hz

g) en canvi, l'energia cinètica és la mateixa:

$E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 =$ $[1{,}67{\cdot}10^{-27}$ $(3{\cdot}10^{5})^{2}$ / 2] = $7{,}5{\cdot}10^{-17}$ J

h) el pas de rosca és:

$d = \dfrac{2\,p\;\;m\,v_{\Pi}}{q\;B} = \dfrac{2\,p\;\;m\,v\,cos\,q}{q\;B} =$ [(2 p $1{,}67{\cdot}10^{-27}$ $3{\cdot}10^{5}$ cos 30°) / $(1{,}6{\cdot}10^{-19}$ 0,8)]

d = $21{\cdot}10^{-3}$ m

Problemes

7.17 Una càrrega de +80 mC entra amb una velocitat de $2{\cdot}10^{3}$ m/s en una regió amb un camp magnètic uniforme de 0,4 T. Si $\vec{v}$ i $\vec{B}$ són perpendiculars: a) calculeu el mòdul de la força magnètica. I si la càrrega fos de -80 mC, b) quin seria el mòdul de la força magnètica?

7.18 Una partícula carregada entra amb una velocitat de $6{,}7{\cdot}10^{3}$ m/s en una regió amb un camp magnètic uniforme, amb $\vec{v}$ i $\vec{B}$ perpendiculars. Si el radi de la trajectòria circular descrita és de $1{,}2{\cdot}10^{-3}$ m, calculeu el mòdul de l'acceleració centrípeta.

7.19 Una càrrega de -40 mC entra amb una velocitat de $7{,}1{\cdot}10^{4}$ m/s en una regió amb un camp magnètic uniforme de 0,2 T, amb $\vec{v}$ i $\vec{B}$ perpendiculars. Si la massa de la partícula carregada és de $1{,}6{\cdot}10^{-12}$ Kg, calculeu el radi de la trajectòria circular descrita.

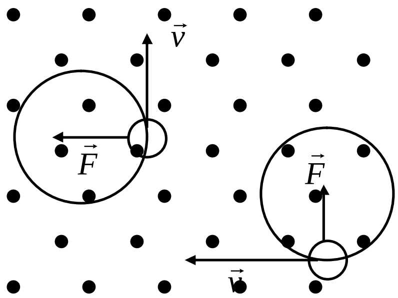
7.20 Una càrrega entra amb una velocitat de $1{,}2{\cdot}10^{4}$ m/s en una regió amb un camp magnètic uniforme, amb $\vec{v}$ i $\vec{B}$ perpendiculars. Si el radi de la trajectòria circular descrita és de $2{,}4{\cdot}10^{-2}$ m, calculeu: a) el període, b) la freqüència i c) la velocitat angular de la trajectòria circular descrita.

7.21 Una càrrega de -400 μC entra en una regió amb un camp magnètic uniforme, amb $\vec{v}$ i $\vec{B}$ perpendiculars. Si la freqüència de la trajectòria circular descrita és de $9{,}6{\cdot}10^{7}$ Hz i la massa de la partícula carregada és de $3{,}4{\cdot}10^{-13}$ Kg, calculeu el mòdul de $\vec{B}$.

7.22 Un protó, amb una velocitat de $7{,}3{\cdot}10^4$ m/s, entra en una regió de l'espai on hi ha un camp magnètic uniforme de 0,2 T. Si els vectors $\vec{v}$ i $\vec{B}$ formen entre si un angle de 35°, calculeu: a) la freqüència helicoïdal, b) l'energia cinètica, c) el radi de l'hèlix, i d) el pas de rosca.

7.23 Una partícula carregada (q = +45 mC, $m = 2{,}3{\cdot}10^{-7}$ Kg i $v = 1{,}6{\cdot}10^3$ m/s) entra en una regió de l'espai on hi ha un camp magnètic uniforme. Si el radi de l'hèlix descrita és de $2{,}6{\cdot}10^{-3}$ m i els vectors $\vec{v}$ i $\vec{B}$ formen entre si un angle de 65°, calculeu: a) el mòdul del camp magnètic, b) el pas de rosca.

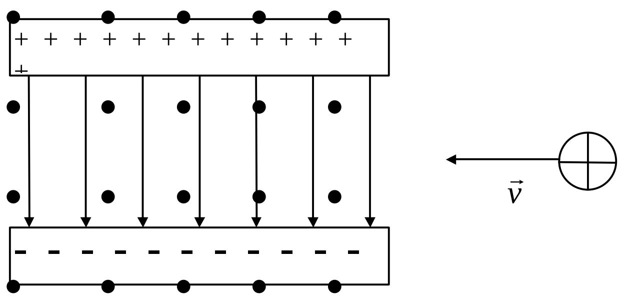
7.24 A la figura adjunta, indiqueu quin serà el signe de la càrrega de les dues partícules que estan descrivint una trajectòria circular.



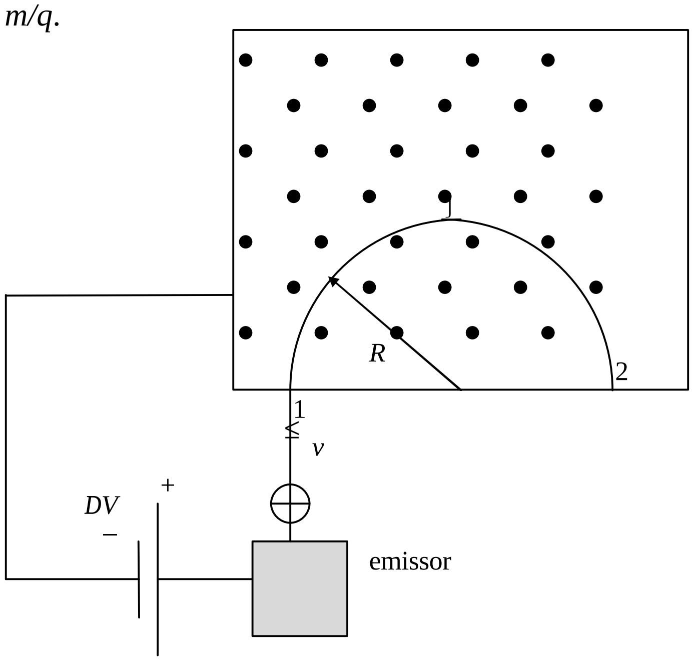
7.25 Una partícula (massa 0,3 g i càrrega $-5{\cdot}10^{-11}$ C) cau verticalment a l'atmosfera terrestre a 100 m/s. Tenint en compte que a l'atmosfera hi són presents tres camps vectorials diferents: el gravitatori, $\vec{g}$, l'elèctric, $\vec{E}$, i el magnètic, $\vec{B}$, amb mòduls (a la regió on es fa l'anàlisi): g = 9,82 m/s^2, E = 118 N/C i B = 40 mT. Els camps $\vec{g}$ i $\vec{E}$ estan dirigits verticalment cap avall, en canvi el camp magnètic $\vec{B}$ és horitzontal i dirigit aproximadament vers el nord geogràfic. a) Calculeu el mòdul de la força que fa cadascun d'aquests camps sobre la partícula, b) es pot negligir alguna de les forces, c) esmenteu qualsevol altre força que pugui actuar sobre la partícula.

7.26 Una regió de l'espai on coexisteixen camp magnètic i camp elèctric perpendiculars entre si s'anomena regió de camps creuats. Les forces de caràcter elèctric i de caràcter magnètic es poden anul·lar per a un valor determinat de la velocitat. Demostreu que el mòdul d'aquesta velocitat és: $v = E/B$. Aquest fenomen és la base del selector de velocitats.

7.27 En un selector de velocitats, un camp elèctric uniforme és generat per un condensador les plaques del qual es troben a una diferencia de potencial DV = 500 V i separades una distància d = 3 cm, (recordeu que en aquest cas, el camp elèctric és: $E = DV/d$). a) Quina és l'expressió de la velocitat en funció de d, B i DV, b) si B val 0,34 T, quina serà la velocitat seleccionada?



7.28 Espectòmetre de masses: és un dispositiu dissenyat per a mesurar la massa d'isòtops (vegeu figura adjunta). Els ions produïts per una font emissora d'ions són accelerats per un camp elèctric i entren en una regió amb un camp magnètic uniforme. Si les càrregues parteixen del repòs, a) quina expressió relaciona *DV* amb *m/q*? I b) quina expressió relaciona *R*, *B* i *DV* amb *m/q*.



7.29 Aplicació de l'espectòmetre de masses: La relació càrrega/massa per a un ió de velocitat coneguda es pot determinar mesurant el radi de l'òrbita circular de l'ió en presència d'un camp magnètic conegut. Si realitzem una experiència amb una diferencia de potencial, o tensió, $DV = 100$ V, un valor del camp magnètic $B = 2$ T i es mesura un radi $R = 3{\cdot}10^{-4}$ m, quin és valor de la raó càrrega/massa de l'ió analitzat?

7.30 L'espectòmetre de masses pot ser emprat com a detector de fuites en sistemes de buit. Normalment es dissenya l'equip per a detectar un ió d'un gas (amb valors de massa i de càrrega coneguts) que no sigui present habitualment en l'aire. Si hi ha fuita, l'espectòmetre ens permetrà conèixer la velocitat dels ions del gas. En aquest cas els valors són: $m = 9{,}2{\cdot}10^{-27}$ Kg i $q = 3{,}2{\cdot}10^{-19}$ C i la velocitat amb que arriben al detector és: $v = 2{,}5{\cdot}10^{4}$ m/s. Calculeu la posició $2R$ en que es detectarien els ions si el valor del camp magnètic és $B = 2{,}8$ T.

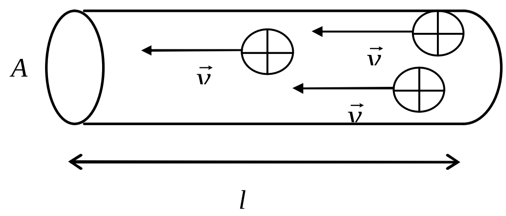
7.31 En un forn microones les ones electromagnètiques (produïdes per càrregues elèctriques accelerades) són absorbides per les molècules d'aigua. Aquest fenomen permet la cocció dels aliments i l'escalfament de líquids. Si la font de camp magnètic en un forn microones emet ones electromagnètiques amb una freqüència de $8{,}2{\cdot}10^{7}$ Hz i els electrons es mouen en trajectòria circular, quin és el valor del camp magnètic? I si disminuïm la freqüència en un factor 1/3, en quin factor disminuiria el camp magnètic?

7.32 Ciclotró: és un dispositiu basat en el fet que el període del moviment d'una partícula carregada en un camp magnètic uniforme és independent de la velocitat de la partícula. S'utilitza com a sistema accelerador de partícules. Utilitzem un ciclotró per a accelerar protons amb un camp magnètic de 1,2 T i el radi màxim del ciclotró és de 85 cm. Calculeu: a) la freqüència del ciclotró, b) l'energia cinètica dels protons en sortir de l'aparell.

7.4 Força d'un camp magnètic sobre un conductor on hi circula un corrent elèctric

Conceptes bàsics

El corrent elèctric és originat pel moviment net de càrrega en un medi conductor. Hom pot considerar que les càrregues es desplacen amb una velocitat mitjana v_m (anomenada velocitat de deriva). Si considerem un segment conductor (vegeu figura) de longitud *l* pel qual circula una intensitat de corrent *I* i sobre el qual actua un camp magnètic uniforme. L'expressió de la força de caràcter magnètic sobre el conductor és:



$$\vec{F} = n\,q\,A\,l\,(\vec{v}_m \wedge \vec{B})$$

on *q* és la càrrega de tots els portadors de càrrega neta, *A* és l'àrea de la secció transversal i *n* és la densitat de portadors de càrrega per unitat de volum. És a dir, la càrrega en el volum definit és *n q A l*. Per altra banda, la intensitat de corrent del fil és:

$$I = n\,q\,A\,v_m$$

en conseqüència, la força magnètica sobre un segment conductor rectilini és:

$$\vec{F} = I\,\vec{l} \wedge \vec{B}$$

on $\vec{l}$ sempre és un vector amb el sentit de la intensitat.

En particular, la força magnètica sobre un segment infinitesimal de conductor és:

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Un exemple d'aplicació de força magnètica sobre un conductor són els altaveus.

1. El mòdul de la força magnètica és: $F = I\,l\,B\,sin\,q$.
2. La força magnètica sempre és perpendicular al pla definit pels vectors $\vec{l}$ i camp magnètic. Si $q = 0$ o $q = p$ la força és nul·la.
3. La força és màxima quan la direcció de la intensitat és perpendicular al camp (l'angle corresponent és: $q = p/2$).
4. Per a determinar el sentit de la força magnètica cal aplicar la regla de la mà dreta. Si el sentit de $\vec{l}$ el dóna l'índex, el sentit de $\vec{B}$ el proporciona l'anular i el dit polze assenyala el sentit de la força. Cal recordar que per conveni la intensitat de corrent utilitzada correspon sempre al moviment que correspondria a càrregues positives, llavors tant si els portadors de càrrega són de càrrega negativa com si són de càrrega positiva, la diferencia queda recollida en el sentit del corrent i per tant s'evita la problemàtica del signe de la força que existeix en aplicar la regla de la ma dreta sobre una càrrega puntual.

Exemple 7.4

Per un conductor rectilini de 7,2 m de longitud hi passa una intensitat de corrent de 400 mA quan està sota l'acció d'un camp magnètic uniforme de 1,5 T. Determineu la força magnètica si: a) $\vec{l}$ i $\vec{B}$ són perpendiculars, b) $\vec{l}$ i $\vec{B}$ formen un angle de 40 graus (vegeu figura).

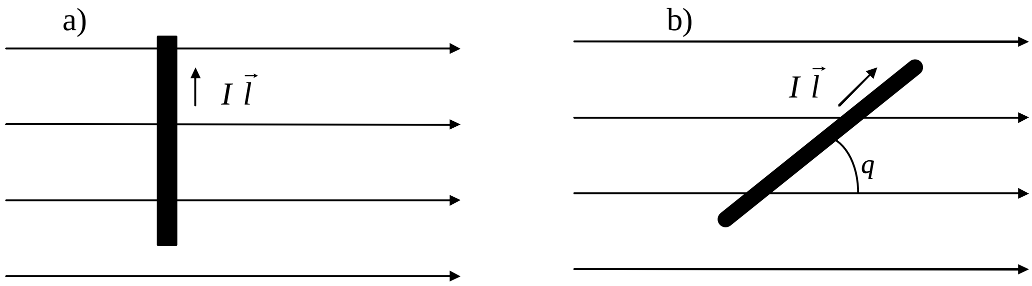
Resolució

• Mètode 1: mitjançant el sinus de l'angle

a) El mòdul de la força és:

$F = I\, l\, B \sin q = I\, l\, B \sin 90° = I\, l\, B$ = 4,32 N

El sentit el proporciona la regla de la mà dreta: La força magnètica te la direcció perpendicular al pla definit pel paper i es dirigeix cap al pla del paper.



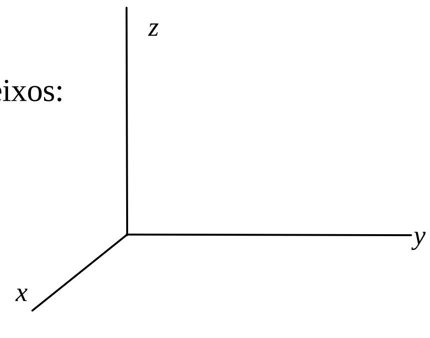
b) El mòdul de la força és:

$F = I\, l\, B \sin q = I\, l\, B \sin 40°$ = 2,76 N

El sentit el proporciona la regla de la ma dreta: La força magnètica té la direcció perpendicular al pla del paper i es dirigeix cap al pla del paper.

• Mètode 2: mitjançant el producte vectorial .

En aquest mètode considerarem els següents eixos:



a) en aquest apartat,

$\vec{l}$ = 7,2 $\vec{k}$ m $\vec{B}$ = 1,5 $\vec{j}$ T

$$\vec{F} = I \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_x & l_y & l_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = I\left[\left(l_y\, B_z - l_z\, B_y\right)\vec{i} + \left(l_z\, B_x - l_x\, B_z\right)\vec{j} + \left(l_x\, B_y - l_y\, B_x\right)\vec{k}\right]$$

$$\vec{F} = I \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 7{,}2 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}4\left[(-10{,}8)\,\vec{i} + (0)\,\vec{j} + (0)\,\vec{k}\right]$$

$$\vec{F} = \left[(-4{,}32)\,\vec{i}\right] N$$

b) En aquest apartat

$\vec{l}$ = (7,2 cos q $\vec{j}$ + 7,2 sin q $\vec{k}$) m = (5,5 $\vec{j}$ + 4,6 $\vec{k}$) m
$\vec{B}$ = 1,5 $\vec{j}$ T

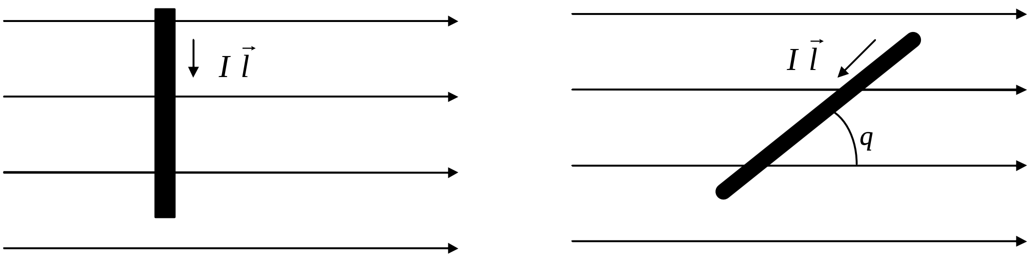
$$\vec{F} = I \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5{,}5 & 4{,}6 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}4\left[(-6{,}9)\,\vec{i} + (0)\,\vec{j} + (0)\,\vec{k}\right]$$

$$\vec{F} = \left[(-2{,}76)\,\vec{i}\right] N$$

Problemes

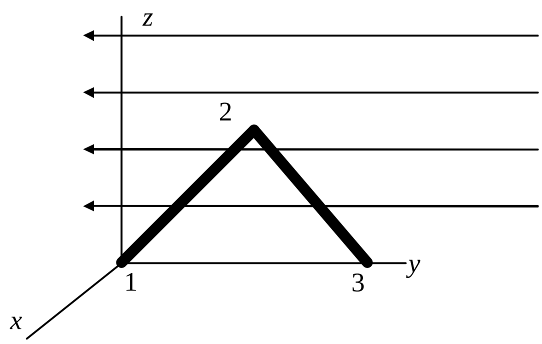
7.33 En un conductor els portadors de càrrega neta són electrons. L'àrea de la secció transversal és de 0,4 cm^2. Amb un amperímetre mesurem una intensitat de corrent de 35 mA. Si la velocitat de deriva dels electrons és v_m és de 8,2·10^{-4} m/s, calculeu n, la densitat de portadors de càrrega per unitat de volum.

7.34 Per un conductor rectilini de 0,35 m de longitud hi passa una intensitat de corrent de 2,15 A quan està sota l'acció d'un camp magnètic uniforme de 0,035 T. Determineu la força magnètica si: a) $\vec{l}$ i $\vec{B}$ són perpendiculars, b) $\vec{l}$ i $\vec{B}$ formen un angle de 25° (vegeu figura).



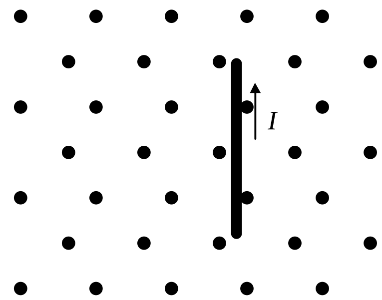
7.35 Calculeu la força que actua sobre el segment rectilini d'un conductor. Dades: $\vec{l}$ = (0,5 $\vec{i}$ + 3,2 $\vec{j}$ -1,2 $\vec{k}$) m. Entra en una regió amb un camp magnètic $\vec{B}$ = (0,3 $\vec{i}$ + 4,1 $\vec{j}$ + 1,5 $\vec{k}$) T. Calculeu la força magnètica que actua sobre el conductor si la intensitat és de 20 mA.

7.36 Calculeu la força que actua sobre cadascun dels segments rectilinis del conductor de la figura. Calculeu, a més, la força total sobre el conductor. El valor de la intensitat és de 1,2 A circulant de 1 a 3. El camp magnètic és $\vec{B}$ = (- 2,1 $\vec{j}$) T. Les coordenades dels punts són: Punt 1: (0, 0, 0)m. Punt 2: (0, 2, 2)m. Punt 3: (0, 4, 0)m.

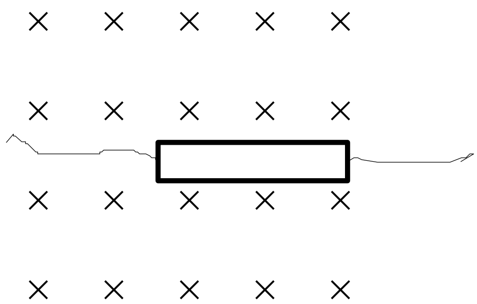


7.37 En el problema anterior, calculeu la força magnètica si els punts 1 i 3 els unim directament mitjançant un conductor rectilini i treiem els altres segments.

7.38 Per un conductor rectilini de 2 m de longitud hi passa un corrent de 4 A quan està sota l'acció d'un camp magnètic uniforme de 0,3 T. Determineu la força magnètica si $\vec{l}$ i $\vec{B}$ són perpendiculars.



7.39 Un segment conductor es troba perpendicularment a un camp magnètic de mòdul B. Els extrems del segment estan connectats a dos fils flexibles pels quals passa el corrent de manera que la força magnètica compensa el pes del conductor. La densitat del conductor és r i l'àrea de la seva secció transversal és A. a) Determineu la intensitat I en funció de r, A, g i B. b) Quin sentit té el corrent? c) Calculeu la intensitat de corrent si $r = 7{,}2\cdot 10^{-3}$ Kg/m^3, $A = 0{,}25$ cm^2 i $B = 20$ mT.



7.5 Força i moment magnètics sobre espires de corrent i imants

Conceptes bàsics

Una espira és qualsevol de les voltes d'un enrotllament, per exemple d'una bobina. En particular, una espira de corrent és una espira per on circula un corrent elèctric. La força neta sobre una espira de corrent és zero, així i tot hi pot actuar un moment de forces. En presència d'un camp magnètic uniforme actua com un dipol magnètic amb un moment magnètic, $\vec{m}$, que depèn del nombre de voltes, N, de l'àrea definida per l'espira, A, i de la intensitat de corrent elèctric, I, segons la relació:

$$\vec{m} = N\ I\ A\,\vec{u}$$

on $\vec{u}$ és un vector unitari en el sentit del moment magnètic, $\vec{u}$ és perpendicular al pla on es troba l'espira. El sentit del vector $\vec{u}$ el determina la regla de la mà dreta (vegeu figura). Al moment magnètic, en unitats del sistema internacional li correspon $A\ m^2$.

El moment de forces que actua sobre una espira que està en una regió on hi ha un camp magnètic ve donat per:

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Emprant la regla de la ma dreta, el dit polze assenyala el sentit del moment de forces. Si ho expressem en funció de la intensitat de corrent:

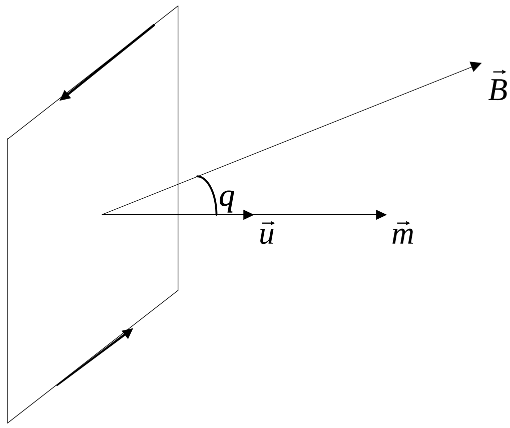
$$M = N\ I\ \ A\ B\ sin\, q$$

on q és l'angle entre els vectors $\vec{m}$ i $\vec{B}$ (vegeu figura).

L'expressió per a l'energia potencial, expressada com E_p *o U* segons els manuals, és:

$$E_p = -\,\vec{m}\cdot\vec{B} = -\,m\ B\ cos\, q$$

El moment de força tendeix a alinear el moment magnètic amb el camp magnètic. La força resultant sobre una espira de corrent en un camp magnètic uniforme és zero.



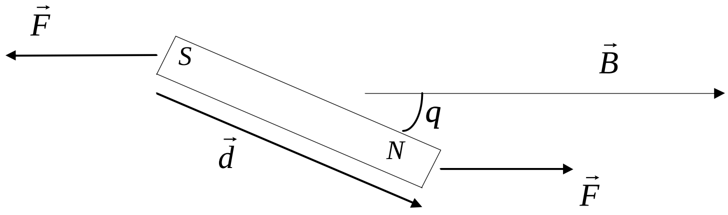
Per a analitzar un imant, es defineix una intensitat de pol, I_m , que és la constant de proporcionalitat entre la força que actua sobre el pol d'un imant i el camp magnètic. És important adonar-se que I_m no és una intensitat de corrent, en unitats del sistema internacional li correspon N/T. La intensitat de pol és positiva al pol nord i negativa en el pol sud.

$$\vec{F} = I_m\ \vec{B}$$

El moment magnètic d'un imant és:

$$\vec{m} = \left|I_m\right|\ \vec{d}$$

on $\vec{d}$ és un vector que va del pol sud al pol nord.



Exemple 7.5

Calculeu el moment magnètic i el moment de forces màxim d'un motor elèctric si el seu rotor està format per 500 espires circulars de 12 cm de radi per les que circula una intensitat de 2 A quan el valor del camp magnètic és de 0,5 T. Quina és l'energia potencial quan el moment de forces és màxim?

Resolució

Primer cal calcular la l'àrea de la superfície definida per una espira
$A = p\ R^2 = p\ (0{,}12)^2 = 0{,}045\ \text{m}^2$

El mòdul del moment magnètic és:
$m = N\,I\,A = 500 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}045 = 45\ \text{A m}^2$
amb una direcció perpendicular a la superfície definida per cada espira

El moment de forces màxim es dóna per sin q = 1, fet que correspon a un angle $q = p/2$.
$M = m\,B\,sin\,q\ = m\,B = 45 \cdot 0{,}5 = 22{,}5$ N m
amb una direcció i sentit que vindrien determinats per la regla de la mà dreta.

En el càlcul de l'energia potencial cal tenir en compte que $q = p/2$.
$E_p = -\,\vec{m} \cdot \vec{B} = -\,m\,B\,cos\,q\ = 0$ J.

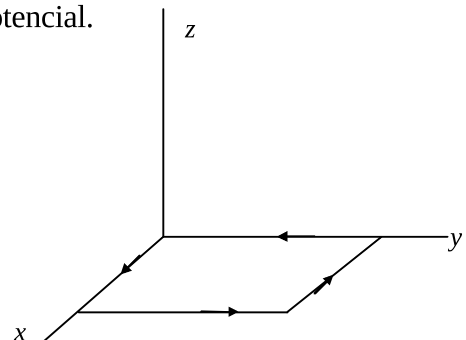
Problemes

7.40 En una regió de l'espai hi ha un camp magnètic uniforme de 1,5 T. Calculeu la força magnètica que actua sobre una espira circular de 30 cm de radi per la que circula un corrent de 2 A d'intensitat.

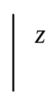
7.41 Calculeu els mòduls del moment magnètic i del moment de forces màxim d'un motor elèctric si el seu rotor està format per 100 espires circulars de 6 cm de radi per les que circula una intensitat de 2 A. El valor del camp magnètic és de 1,2 T.

7.42 Calculeu el camp magnètic i el nombre d'espires necessàries per a que un motor treballi amb una valors de moment magnètic 25 A m^2 i el moment de forces màxim de 28 Nm. El rotor del motor està format per espires quadrades de 12 cm de costat per les que circula una intensitat de 2 A.

7.43 Una bobina situada en el pla xy (vegeu figura) té 150 espires (voltes) de secció rectangular (costats: $x = 0{,}2$ m i $y = 0{,}4$ m). Per la bobina hi circula un corrent de 2,5 A d'intensitat. El camp magnètic a la regió on es troba la bobina és: $\vec{B} = (-1{,}2\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j} - 0{,}2\,\vec{k})$ T. Calculeu: a) el moment magnètic de la bobina, b) el moment de forces exercit sobre la bobina, i c) l'energia potencial.



7.44 Una bobina situada en el pla xy (vegeu figura) té 1000 espires de secció rectangular (costats $x = 0{,}4$ m i $y = 0{,}2$ m). Per la bobina hi circula un corrent de 85 mA d'intensitat.



El camp magnètic a la regió on es troba la bobina és: $\vec{B} = (+\,2{,}7\;\vec{i}\; - 1{,}5\;\vec{j}\; - 3{,}2\;\vec{k}\,)$ T. Calculeu: a) el moment magnètic de la bobina, b) el moment de forces exercit sobre la bobina, i c) l'energia potencial.

7.45 Sobre els pols d'un imant actua una força magnètica de mòdul 3,5 N quan es troba en una regió amb un camp magnètic de mòdul 0,42 mT. Calculeu: a) la intensitat de pol en el pol nord, b) la intensitat de pol en el pol sud, c) el mòdul del moment magnètic si l = 2 cm, d) el mòdul del moment de forces si l'angle entre els vectors $\vec{m}$ i $\vec{B}$ és de 23°.

7.46 Sobre els pols d'un imant actua una força magnètica de mòdul 195 N quan es troba en una regió amb un camp magnètic de mòdul 2,4 T. Calculeu: a) la intensitat de pol en el pol nord, b) la intensitat de pol en el pol sud, c) el mòdul del moment magnètic si l = 0,5 m, d) el mòdul del moment de forces si l'angle entre els vectors $\vec{m}$ i $\vec{B}$ és de 37°.

7.6 Mesura de camp magnètic. Efecte Hall

Conceptes bàsics

Quan un conductor per on circula un corrent elèctric és dins d'una regió amb un camp magnètic, es genera una diferencia de potencial (o tensió) en una direcció perpendicular tant al corrent com al camp magnètic. Aquest efecte prové de la desviació dels portadors de càrrega cap a un dels costats del conductor com a resultat de la força magnètica experimentada per aquests portadors.

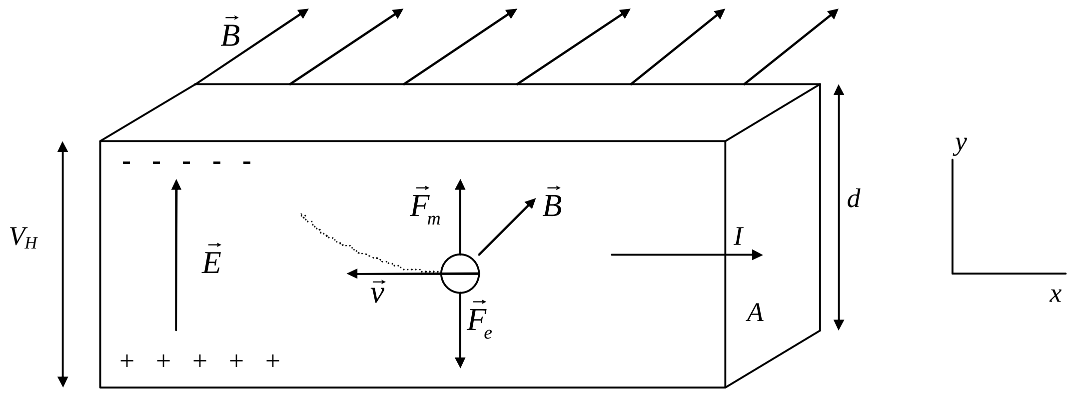
A la làmina conductora de la figura, hi ha un transport net de corrent en la direcció x, i hi ha un camp magnètic uniforme en la direcció perpendicular al pla definit pel paper. Si els portadors de càrrega són electrons, es mouran en direcció oposada a I. En mitjana podem considerar que tenen una velocitat de mòdul v en el sentit negatiu de l'eix x, i experimentaran una força magnètica cap amunt (la representarem per $\vec{F}_m$ per a distingir la força magnètica de la de caràcter elèctric). Com a conseqüència els electrons es mouen cap amunt i s'acumularan en el costat superior del conductor. Per tant, per apareixerà un excés de càrrega positiva a l'extrem inferior. La càrrega seguirà acumulant-se fins que el camp electrostàtic $\vec{E}$, provocat per aquesta separació de càrrega, sigui prou gran perquè la força electrostàtica i la magnètica es contrarestin ($F_m = F_e$).

Amb un voltímetre connectat al conductor es pot mesurar la diferencia de potencial generada. Aquesta diferencia de potencial es coneix com a voltatge Hall, V_H. De la condició $F_m = F_e$ es pot deduir que el camp magnètic és proporcional a aquest voltatge:

$$B = constant \cdot V_H$$

on la constant de proporcionalitat depèn de la densitat de portadors de càrrega, *n*, de la càrrega *q* dels portadors de càrrega, de la intensitat de corrent, *I*, i de la geometria del conductor (àrea *A* i gruix *d*).

$$constant = \frac{n\,q\,A}{I\,d}$$



Exemple 7.6

Per un conductor circula una intensitat de corrent de 300 mA. Té un gruix de 2 cm i l'àrea de la secció del conductor és 20 dm^2. La densitat de portadors de càrrega és de $5{,}8 \cdot 10^{23}$ portadors/m^3. Si els portadors de càrrega són protons, calculeu: a) la constant de proporcionalitat entre *B* i V_H. b) I si els portadors de càrrega fossin partícules de càrrega $q = 3{,}4 \cdot 10^{-19}$ C. c) si el voltatge Hall mesurat és de 2,3 μV, quin seria el mòdul del camp magnètic mesurat a cada cas?

Resolució

a) La constant de proporcionalitat és:

$$constant = \frac{n\,q\,A}{I\,d} = [(5{,}8 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 20 \cdot 10^{-2}) / (0{,}3 \cdot 0{,}02)] = 3{,}1 \cdot 10^{6} \text{ T/V}$$

b) Si només variem la càrrega dels portadors, la constant serà:

$$constant = \frac{n\,q\,A}{I\,d} = 6{,}6 \cdot 10^{6} \text{ T/V}$$

c) A ambdós casos, el mòdul del camp magnètic el proporciona l'expressió:

$B = constant \cdot V_H$

- protons com a portadors de càrrega:

$B = 3{,}1 \cdot 10^{6} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-6} = 7{,}13$ T

- càrrega $q = 3{,}4 \cdot 10^{-19}$ C:

$B = 6{,}6 \cdot 10^{6} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-6} = 15{,}18$ T

Problemes

7.47 a) Expresseu el voltatge Hall en funció de: la velocitat, *v*, el mòdul del camp magnètic, *B*, i el gruix de la làmina, *d*. b) Expresseu la densitat de portadors de càrrega, *n*, en funció de: el mòdul del camp magnètic, B, la intensitat de corrent, I, el voltatge Hall, V_H, la càrrega dels portadors de càrrega, q, i l'amplada de la làmina, l.

7.48 Emprant les expressions del problema anterior, calculeu: a) el voltatge Hall si v = 350 m/s, B = 3,5 T i d = 2 mm, b) la densitat de portadors de càrrega, n, si I = 350 mA, q = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C i l = 2 cm.

7.49 Per un conductor circula una intensitat de corrent de 1,2 A. Té un gruix de 1,3 cm i l'àrea de la secció del conductor és 0,2 cm^2. La densitat de portadors de càrrega és de $2{,}8{\cdot}10^{20}$ portadors/m^3. Si els portadors de càrrega són deuterons, calculeu: a) la constant de proporcionalitat entre B i V_H. b) Si el voltatge Hall mesurat és de 0,76 V, quin és el valor del camp magnètic mesurat?

7.50 Amb un voltímetre s'han mesurat els valors de voltatge Hall de la taula adjunta. Si el valor de la constant de proporcionalitat (constant Hall) és de 30 T/V, construïu una taula amb els valors del camp magnètic en unitats del sistema internacional.

V_H (mV)	40,3	50,5	60,7	70,9	81,1	91,3	101,5

7.51 Per un conductor circula una intensitat de corrent de 68 mA. Té un gruix de 1,3 cm i la secció transversal és de 0,4 cm^2. La densitat de portadors de càrrega és de $9{,}5{\cdot}10^{23}$ portadors/m^3. Si els portadors de càrrega són deuterons, calculeu: a) la constant de proporcionalitat entre B i V_H. b) Si el camp magnètic és de 0,45 T, quin és el valor del voltatge Hall mesurat?

7.52 El beril·li té una densitat de 1,83 g/cm^3 i una massa molar de 9,01 g/mol. Una làmina d'aquest material, de 2 mm de gruix i amplada, transporta un corrent amb una intensitat de 3,5 A. El camp magnètic té un mòdul de 0,25 T. El voltatge Hall mesurat és de 11,2 mV. a) Calculeu la densitat de portadors de càrrega, b) calculeu la densitat d'àtoms de beril·li. c) Quants electrons lliures hi ha per àtom de beril·li?

7.7 Magnetisme a la matèria

Conceptes bàsics

La majoria dels materials no presenten, almenys de manera apreciable, fenomenologia magnètica. Els materials poden ser classificats en tres categories diferents segons el comportament dels seus àtoms i molècules en ser sotmesos a un camp magnètic extern:

• Materials diamagnètics:

Són materials que tenen la propietat de ser repel·lits per un imant. Un camp magnètic extern produeix un moment magnètic en els àtoms molt feble que s'oposa al sentit del camp extern. Una aplicació és la construcció d'aparells (magnetòmetres) per a facilitar la localització de minerals en realitzar prospeccions geofísiques d'un territori.

La variable física que caracteritza el magnetisme a la matèria és la susceptibilitat magnètica, χ. Els materials diamagnètics es caracteritzen per un valor negatiu i petit de la susceptibilitat magnètica. Pràcticament no hi ha dependència amb la temperatura. Per exemple, per al bismut a 20°C: $\chi = -1{,}66 \cdot 10^{-5}$.

Exemples de materials diamagnètics: bismut, coure, or, diamant i d’altres.

• Materials paramagnètics:

Són materials on els àtoms tenen un moment magnètic permanent. Així i tot, en absència d’un camp magnètic extern l’orientació és aleatòria. En aplicar un camp magnètic tenen tendència a orientar-se en la direcció del camp, però feblement.

Els materials paramagnètics es caracteritzen per un valor positiu i petit de la susceptibilitat magnètica. La susceptibilitat varia amb la temperatura. Per exemple, per a l’alumini a 20° C: $\chi = +2{,}3 \cdot 10^{-5}$. Cal remarcar que els materials paramagnètics (i els diamagnètics) no tenen interès per a les indústries elèctrica i electrònica.

Exemples de materials paramagnètics: alumini, magnesi, titani, wolframi, platí, pal·ladi i d’altres.

• Materials ferromagnètics:

Els materials ferromagnètics són els materials que poden presentar un magnetisme espontani. Hi ha un acoblament molt fort entre àtoms que porta a una orientació paral·lela dels moments magnètics en regions anomenades dominis. Sota l’acció d’un camp magnètic extern poden orientar-se els dominis i convertir-se en un imant capaç de produir un camp magnètic més gran que l’extern. Quan deixa d’actuar el camp magnètic extern continuen estant imantats.

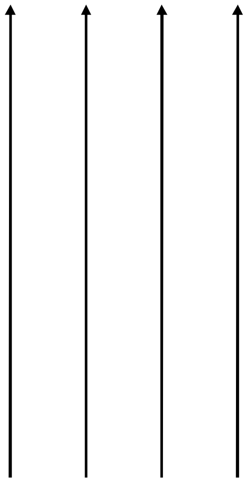
Els materials ferromagnètics es caracteritzen per un valor positiu i alt (de l’ordre de 1000) de la susceptibilitat magnètica. Per exemple, per a un ferro recuit: $\chi = +1800$.

Per als materials ferromagnètics hi ha una temperatura, anomenada temperatura de Curie, que en sobrepassar-la el material es torna paramagnètic.

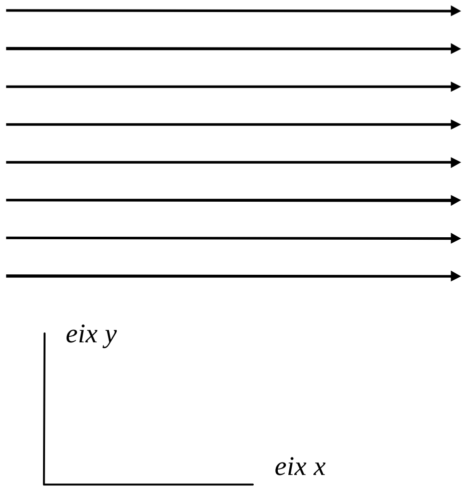
Exemples de materials ferromagnètics: ferro, cobalt, níquel, neodimi, disprosi i alguns minerals i aliatges metàl·lics.

Tema 7

7.1 a)

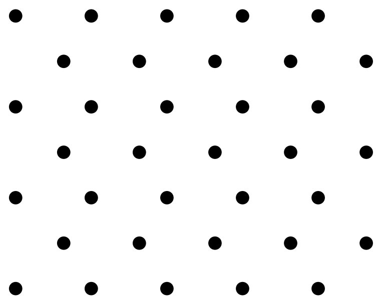


b)



7.2 a)

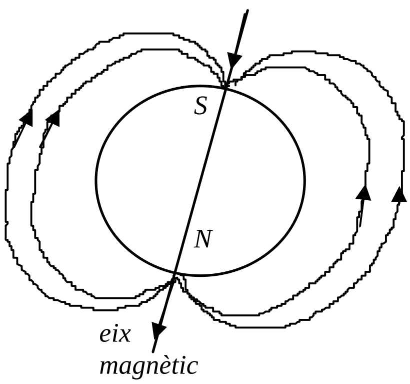
b)



7.3 $2B = 1{,}04$ T

7.4 El pol sud és a la part esquerra de l'imant i el pol nord a la part dreta

7.5



7.6 $\vec{F} = -1{,}28 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}$ N

7.7 $\vec{F} = +1{,}28 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}$ N

7.8 $\vec{F} = 7000\ \vec{j}$ N

7.9 $\vec{v} = 4{,}46 \cdot 10^{6}\ \vec{i}$ m/s

7.10 $\vec{B} = -23{,}8\ \vec{j}$ T

7.11 $\vec{F} = 20{,}7\ \vec{k}$ N

7.12 $\vec{F} = -1537\ \vec{k}$ N

7.13 $\vec{F} = 2{,}5 \cdot 10^{-14}\ \vec{k}$ N

7.14 $\vec{F} = (-2205\,\vec{i} + 1050\ \vec{j})$ N

7.15 $\vec{F} = (-0{,}1\,\vec{i} + 0{,}04\ \vec{j})$ N

7.16 $\vec{F} = (4{,}02 \cdot 10^{-13}\ \vec{i} - 3{,}6 \cdot 10^{-13}\,\vec{j} + 9{,}84 \cdot 10^{-13}\ \vec{k})$ N

7.17 $F = 64$ N

7.18 $a = 3{,}74 \cdot 10^{10}$ m/s^2

7.19 $R = 1{,}42 \cdot 10^{-5}$ m

7.20 a) $T = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ s, b) $f = 79{,}6$ kHz, c) $w = 5 \cdot 10^{5}$ rad/s

7.21 $B = 0{,}51$ T

7.22 a) $f = 3{,}0 \cdot 10^{6}$ Hz,, b) $E_c = 4{,}44 \cdot 10^{-18}$ J, c) $R = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ m, d) $d = 19{,}6$ mm

7.23 a) $B = 3{,}1$ T, b) $d = 7 \cdot 10^{-3}$ m

7.24 La partícula de l’esquerra té càrrega negativa i la de la dreta té càrrega positiva.

7.25 a) $F_e = 5{,}9 \cdot 10^{-9}$ N, b) $F_m = 2 \cdot 10^{-10}$ N, c) $F_g = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ N
b) Es poden negligir F_e i F_m. $F_g >> F_e, F_m$.
c) La força de fricció de la partícula amb l’aire.

7.26 $v = E/B$

7.27 a) $v = (DV / B\ d)$, b) $v = 4{,}9 \cdot 10^{4}$ m/s

7.28 a) $\dfrac{m}{q} = \dfrac{2\,\Delta V}{v^2}$,b) $\dfrac{m}{q} = \dfrac{B^2\ R^2}{2\,\Delta V}$

7.29 $(m/q) = 1{,}8 \cdot 10^{-9}$ Kg/C

7.30 $2R = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$ m

7.31 a) $B = 2{,}9$ mT, b) 1/3

7.32 a) $f = 18 \cdot 10^6$ Hz,, b) $E_c = 7{,}7 \cdot 10^{-12}$ J

7.33 $n = 6{,}67 \cdot 10^{22}$ electrons/m^3

7.34 a) $F = 0{,}026$ N, direcció perpendicular al pla del paper, sentit cap enfora
b) $F = 0{,}011$ N, direcció perpendicular al pla del paper, sentit cap enfora

7.35 $\vec{F} = (0{,}19\,\vec{i} - 0{,}022\,\vec{j} + 0{,}022\,\vec{k})$ N

7.36 $\vec{F}_{12} = 5{,}04\,\vec{i}$ N, $\vec{F}_{23} = -5{,}04\,\vec{i}$ N, $\vec{F} = 0$ N

7.37 $\vec{F} = 0$ N

7.38 $F = 2{,}4$ N. Força dirigida horitzontalment vers la dreta.

7.39 a) $I = \dfrac{r\ A\,g}{B}$, b) d'esquerra a dreta, c) $I = 8{,}82$ mA

7.40 $\vec{F} = 0$ N

7.41 $m = 2{,}26$ A m^2, $M = 2{,}71$ N m

7.42 $N = 868$ espires, $B = 1{,}12$ T, perpendicular a $\vec{m}$ i $\vec{M}$

7.43 a) $\vec{m} = 30\,\vec{k}$ A m^2, b) $\vec{M} = (-45\,\vec{i} + 36\,\vec{j})$ N m, c) $E_p = 6$ J

7.44 a) $\vec{m} = -6{,}8\,\vec{k}$ A m^2, b) $\vec{M} = (-10{,}2\,\vec{i} - 18{,}36\,\vec{j})$ N m, c) $E_p = -21{,}76$ J

7.45 a) $I_m = 8333$ N/T, b) $I_m = -8333$ N/T, c) $m = 167$ A m^2, d) $M = 27{,}4 \cdot 10^3$ N m

7.46 a) $I_m = 81{,}25$ N/T, b) $I_m = -81{,}25$ N/T, c) $m = 40{,}6$ A m^2, d) $M = 58{,}6$ N m

7.47 a) $V_H = v\,B\,d$, b) $n = \dfrac{I\ B}{q\,l\,V_H}$

7.48 a) $V_H = 2{,}45$ V, b) $n = 1{,}56 \cdot 10^{20}$ portadors/m^3

7.49 a) *constant* $= 57{,}4$ mT/V, b) $B = 43{,}6$ mT

7.50

V_H (mV)	40,3	50,5	60,7	70,9	81,1	91,3	101,5
B (T)	1,21	1,52	1,82	2,13	2,43	2,74	3,04

7.51 a) *constant* = 6878 T/V, b) $V_H = 6{,}54 \cdot 10^{-5}$ V

7.52 a) $n = 2{,}44 \cdot 10^{29}$ portadors/m^3, b) $r_{àtoms} = 1{,}22 \cdot 10^{29}$ portadors/m^3, c) 2

TEMA 8 CORRENT ALTERN

Objectius

Entendre el funcionament dels circuits de corrent altern, i la seva representació fasorial. Saber calcular impedàncies complexes en sèrie i en paral·lel. Ser capaç de resoldre circuits bàsics de corrent altern.

Índex

8.1 Circuits R, L i C

Conceptes bàsics

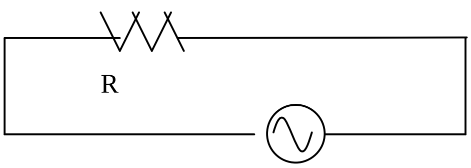
ABANS: Corrent continu → fonts de corrent constants (per exemple, piles de 4.5 V).

ARA: Corrent altern → fonts de corrent que varien en el temps, p. ex: $e = e_{max} \cos(w\, t)$.

· Pulsació o freqüència angular: $w = \frac{2p}{T}$ (unitats: rad/s).

· Freqüència: $f = \frac{1}{T}$ (unitats: s^{-1} = Hz).

Circuit R



$\varepsilon(t) = \varepsilon_{max} \cos(\omega t)$

Aplicant la llei d'Ohm, obtenim que:

$$I = \frac{e}{R} = I_{max} \cos(w\, t) \text{, amb } I_{max} = \frac{e_{max}}{R}.$$

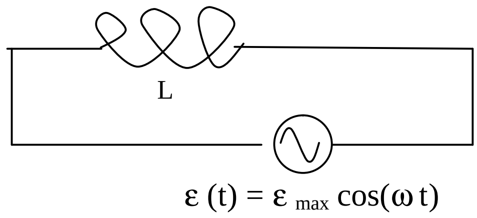
Exemple 8.1

Un circuit R te $e_{max} = 220\sqrt{2}$ V, $f = 50$ Hz i $R = 2\ \Omega$. Trobeu la intensitat en funció del temps i el seu valor per a $t = 4$ s, 4.005 s i 4.01 s.

Solució

$I(t) = 110\sqrt{2} \cos(100p\, t)$, 155.6A, 0 A, -155.6 A.

Circuit L



D'acord amb la teoria de magnetisme: $e = L\frac{dI}{dt}$,
on L és l'autoinducció, i te unitats Henrys (H).

Integrant obtenim:

$$I = I_{\max}\sin(w\,t)\,, \qquad I_{\max} = \frac{e_{\max}}{X_L}\,,$$

on $X_L = Lw$ és la reactància inductiva (unitats: Ω).

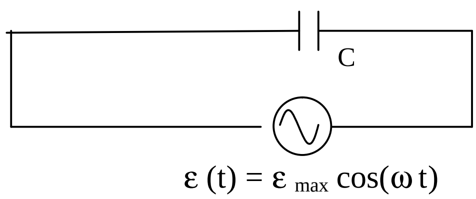
Exemple 8.2

Un circuit L te $e_{\max} = 220\sqrt{2}$ V, $f = 50$ Hz i $X_L = 2\,\Omega$. Trobeu la intensitat en funció del temps i el seu valor per a $t = 4$ s.

Solució

$I(t) = 110\sqrt{2}\sin(100p\ t)$, 0 A.

Circuit C



D'acord amb la teoria de condensadors: $\int I\,dt = Ce$,
on L és la capacitat, i te unitats Farads (F).

Per tant:

$$I = \frac{d(C\,e)}{dt} = -I_{\max}\sin(w\,t)\,,$$

$$I_{\max} = \frac{e_{\max}}{X_C}\,,$$

on $X_C = \frac{1}{Cw}$ és la reactància capacitativa (unitats: Ω).

Exemple 8.3

Un circuit C te $e_{\max} = 220\sqrt{2}$ V, $f = 50$ Hz i $X_C = 3\,\Omega$. Trobeu la intensitat en funció del temps.

Solució

$$I(t) = \frac{-220\sqrt{2}}{3}\sin(100p\ t)\,.$$

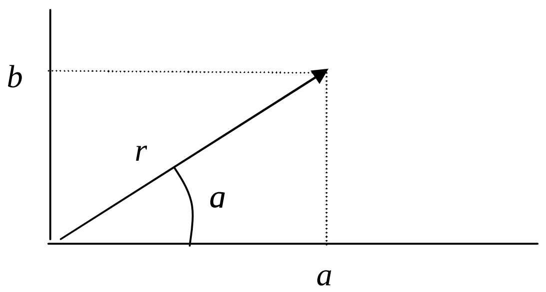
Resum

R	L	C
$I = I_{\max} \cos(w\,t)$	$I = I_{\max} \sin(w\,t) =$ $= I_{\max} \cos(w\,t - \frac{p}{2})$	$I = -I_{\max} \sin(w\,t) =$ $= I_{\max} \cos(w\,t + \frac{p}{2})$

8.2 Números complexes

$i = \sqrt{-1} \rightarrow j = \sqrt{-1}$ en electricitat.

Notacions binòmica, cartesiana i polar: $a + bj = (a,b) = r_q$



$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan q = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = r\cos q \\ b = r\sin q \end{cases}$$

Per a sumar i restar, es fa en forma binòmica. Multiplicar i dividir sol ser més ràpid en polar.
Producte: $r_q s_j = (r \cdot s)_{q+j}$.

Quocient: $\dfrac{r_q}{s_j} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{q-j}$; $\dfrac{a+bj}{c+dj} = \dfrac{a+bj}{c+dj}\dfrac{c-dj}{c-dj} = \dfrac{ac - bdj^2 - adj + bcj}{c^2 - d^2 j^2} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)\,j}{c^2+d^2}$.

Exemple 8.4

Expresseu el número complex $2-3j$ en forma polar

Solució

$2-3j = 3.6_{-0.98\ \mathrm{rad}}$

Exemple 8.5

Expresseu el número complex $3_{-p/4}$ en forma binòmica

Solució

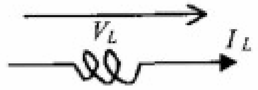
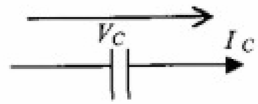
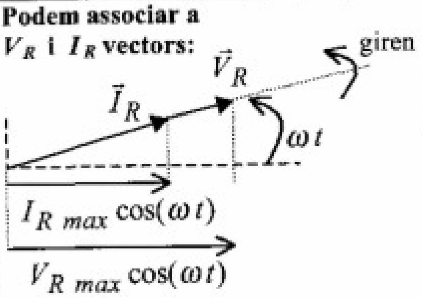
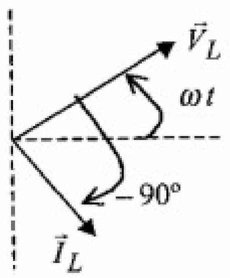
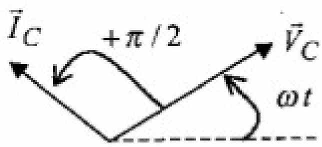
$3_{-p/4} = 2.12 - 2.12j$

8.3 Representació fasorial i complexa del corrent altern

La desenvolupem, pas a pas, a la pàgina següent.

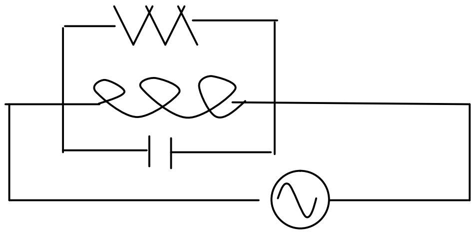
No són altra cosa que definicions que ens facilitaran els càlculs.

CORRENT ALTERN (Components bàsics)

Resistència	**Bobina**	**Condensador**
 Si $V_R = V_{R\,max}\cos(\omega t)$ $I_R = \frac{V_R}{R} = I_{R\,max}\cos(\omega t)$ $I_{R\,max} = \frac{V_{R\,max}}{R}$	 Si $V_L = V_{L\,max}\cos(\omega t)$ $I_L = I_{L\,max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $I_{L\,max} = \frac{V_{L\,max}}{X_L} = \frac{V_{L\,max}}{L\omega}$	 Si $V_C = V_{C\,max}\cos(\omega t)$ $I_C = I_{C\,max}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $I_{C\,max} = \frac{V_{C\,max}}{X_C} = \frac{V_{C\,max}}{1/(C\omega)}$
Podem associar a V_R i I_R vectors:  	 	
Podem associar a V_R i I_R complexes: $\bar{I}_R = I_{R\,max}\angle\omega t$ $\bar{V}_R = V_{R\,max}\angle\omega t$ **Parts reals:** $\mathrm{Re}(\bar{I}_R) = I_{R\,max}\cos(\omega t) = I_R$ $\mathrm{Re}(\bar{V}_R) = \ldots = V_R$	$\bar{I}_L = I_{L\,max}\angle\omega t - \frac{\pi}{2}$ $\bar{V}_L = V_{L\,max}\angle\omega t$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_L) = I_{L\,max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_L) = I_L$ $\mathrm{Re}(\bar{V}_L) = \ldots = V_L$	$\bar{I}_C = I_{C\,max}\angle\omega t + \frac{\pi}{2}$ $\bar{V}_C = V_{C\,max}\angle\omega t$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_C) = I_{C\,max}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $\mathrm{Re}(\bar{I}_C) = I_C$ $\mathrm{Re}(\bar{V}_C) = \ldots = V_C$
$\bar{I}_R = I_{R\,max}\angle\omega t = \left(\frac{V_{R\,max}}{R}\right)_{\angle\omega t}$ $\bar{I}_R = \frac{(V_{R\,max})_{\angle\omega t}}{R_{\angle 0°}} = \frac{\bar{V}_R}{R}$	$\bar{I}_L = \left(\frac{V_{L\,max}}{X_L}\right)_{\angle\omega t - \frac{\pi}{2}}$ $\bar{I}_L = \frac{V_{L\,max\angle\omega t}}{X_{L\angle\frac{\pi}{2}}} = \frac{\bar{V}_L}{\bar{X}_L}$	$\bar{I}_C = \left(\frac{V_{C\,max}}{X_C}\right)_{\angle\omega t + \frac{\pi}{2}}$ $\bar{I}_C = \frac{V_{C\,max\angle\omega t}}{X_{C\angle -\frac{\pi}{2}}} = \frac{\bar{V}_C}{\bar{X}_C}$
Definim la impedància $\bar{Z} = \bar{V}/\bar{I}$: $\bar{Z}_R = \frac{\bar{V}_R}{\bar{I}_R} = R = R_{\angle 0°} = R + 0j$ $(j = \sqrt{-1})$	$\bar{Z}_L = \frac{\bar{V}_L}{\bar{I}_L} = \bar{X}_L = X_L\angle\frac{\pi}{2}$ $\bar{Z}_L = 0 + jX_L = jX_L = jL\omega$	$\bar{Z}_C = \frac{\bar{V}_C}{\bar{I}_C} = \bar{X}_C = X_C\angle -\frac{\pi}{2}$ $\bar{Z}_C = 0 - jX_C = -jX_C = \frac{-j}{C\omega}$

comentaris: joaquim.fort@udg.es

Exemple 8.6



$\varepsilon\,(t) = \varepsilon_{\,max} \cos(\omega\, t)$

Al circuit de la figura $I_{R\,\max} = 1\,\text{A}$, $R = 10\Omega$, $C = 10^{-5}\,\text{F}$, $L = 1\,\text{H}$, $w = 100p$ rad/s.

Trobeu el potencial i les intensitats, de dues formes:

a) sense aplicar números complexos.

b) Aplicant la llei d'Ohm complexa: $\overline{V} = \overline{I}\ \overline{Z}$.

Solució

b) $I_R = 1\cos(100p\ t)$.

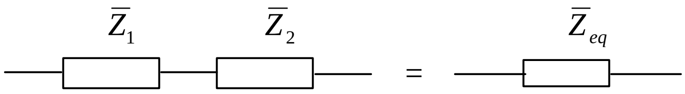
$$\overline{V} = \overline{I}\ \overline{Z} = 1_{wt} \cdot 10 \rightarrow V(t) = 10\text{V}\cos(100p\ t) .$$

$$\overline{I}_L = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_L} = 0.0318_{wt-p/2} \rightarrow I_L = 0.0318\text{A}\cos(100p\ t - \frac{p}{2}) .$$

$$\overline{I}_C = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_C} = 0.0314_{wt+p/2} \rightarrow I_C = 0.0314\text{A}\cos(100p\ t + \frac{p}{2}) .$$

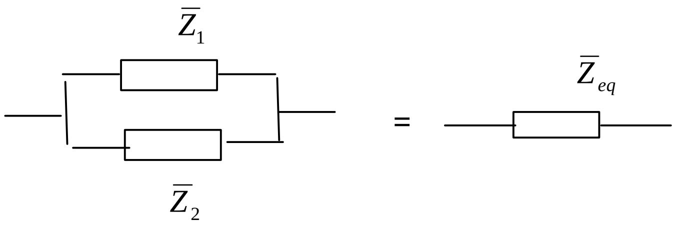
8.4 Impedàncies en sèrie i en paral·lel

· En sèrie:



$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{I}\ \overline{Z}_1 + \overline{I}\ \overline{Z}_2 \qquad \overline{V} = \overline{I}\ \overline{Z}_{eq} \qquad \rightarrow \qquad \overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$$

· En paral·lel:



$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} + \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_2} \qquad \overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_{eq}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2}$$

Exemple 8.7

Calculeu la impedància d'un circuit RLC sèrie, en forma binòmica i polar.

Solució

Binòmica: $\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + j\left(X_L - X_C\right)$.

Polar: Z_d, amb $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ i $\tan d = \dfrac{X_L - X_C}{R}$.

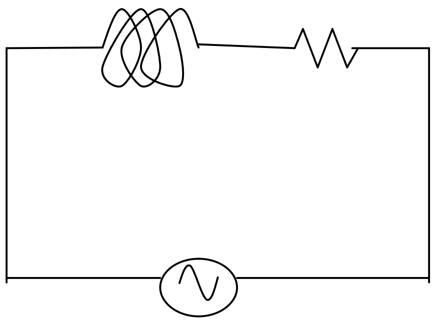
Problemes

8.1. Un condensador de 50 μF de capacitat i una bobina de 0,01 H d'autoinducció estan connectats en sèrie en un circuit de corrent altern de 100 Hz de freqüència. Calculeu la impedància del circuit.

8.2. Una resistència de 4 Ω, un condensador de 54 μF de capacitat i una bobina de 0,04 H d'autoinducció estan connectats en sèrie en un circuit de corrent altern de 50 Hz de freqüència. Calculeu la impedància del circuit.

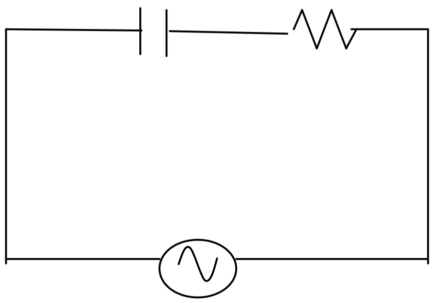
8.3 Al circuit de la figura, R = 1Ω, X_L =2Ω, $e_{max} = 220\sqrt{2}$ V, f = 50 Hz.

Trobeu la intensitat en funció del temps.



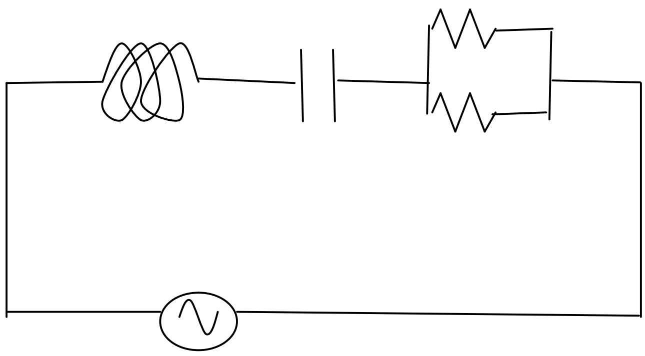
8.4 Al circuit de la figura, R = 2Ω, X_C =3Ω, $e_{max} = 220\sqrt{2}$ V, f = 50 Hz.

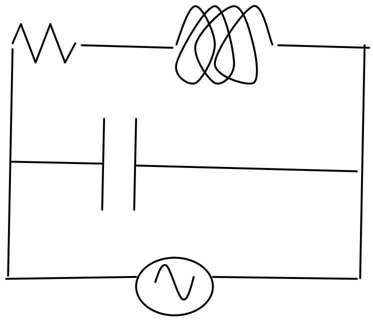
Trobeu les intensitats i potencials en funció del temps.



8.5 Al circuit de la figura, R_1 = 3000Ω, R_2 = 600Ω , L =10/π H, C= $20\cdot 10^{-6}/\pi$ F, $e = 250\sqrt{2}$ V sin(100π t).

Trobeu les intensitats en funció del temps.





8.6 Al circuit de la figura, $R = 10\Omega$, $X_L = 20\Omega$, $X_C = 30\Omega$, $e_{max} = 220$ V, f = 50 Hz.

Trobeu les intensitats en funció del temps.

Solucions

8.1. Z = 25,5 Ω, δ = - π/2 rad.

8.2. Z = 46,55 Ω, δ = -1,48 rad.

8.3 $I(t) = 139.14 \text{ A} \cos(100\pi\ t - 1.107)$.

8.4 $I(t) = 86.18 \text{ A} \cos(100\pi\ t + 0.98)$,

$V_R(t) = 172.36 \text{ V} \cos(100\pi\ t + 0.98)$,

$V_C(t) = 258.54 \text{ V} \cos(100\pi\ t + 0.98 - \frac{\pi}{2})$.

8.5 $I_L(t) = I_C(t) = 0.5 \text{ A} \cos(100\pi\ t - \frac{3\pi}{4})$,

$I_{R1}(t) = 0.083 \text{ A} \cos(100\pi\ t - \frac{3\pi}{4})$,

$I_{R2}(t) = 0.417 \text{ A} \cos(100\pi\ t - \frac{3\pi}{4})$.

8.6 $I_L(t) = I_R(t) = 9.84 \text{ A} \cos(100\pi\ t - 1.1)$,

$I_C(t) = 7.33 \text{ A} \cos(100\pi\ t + \frac{\pi}{2})$.