

Problemes de Resistència de Materials

Lluís Torres, Albert Turon, Xavier Cahís,
Jordi Renart, Cristina Barris, Miquel Llorens

A l'Àngel Mateos, pel seu mestratge

CIP 539.3/.4(07) PRO

Problemes de resistència de materials / Lluís Torres ...
[et al.]. – Girona : Universitat de Girona. Servei de
Publicacions, 2012. – 226 p. ; cm
ISBN 978-84-8458-405-6

I. Torres Llinàs, Lluís 1. Resistència de materials –
Problemes, exercicis, etc 2. Disseny d'estructures –
Problemes, exercicis, etc

CIP 539.3/.4(07) PRO

© Dels textos: els autors corresponents
© D'aquesta edició: Universitat de Girona
Octubre 2012
ISBN: 978-84-8458-405-6
Dipòsit legal: GI.1594-2012
Coberta: Lorena Marín Hernandez (lorena.marin@gmail.com)
Universitat de Girona: Servei de Publicacions
Ed. Les Àligues - Pl. Sant Domènec, 3, 17071 Girona
Tel. 972 41 82 06 - Fax 972 41 80 31
www.udg.edu/publicacions/
publicacions@udg.edu

Sota les sancions establertes per la Llei, estan rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, la reproducció total o parcial d'aquesta obra en cap mitjà o procediment –inclosa la reprografia i el tractament informàtic– ni la distribució d'exemplars d'aquesta edició mitjançant lloguer o préstec públic.

TAULA DE CONTINGUT

Pròleg	7
Anàlisi de tensions i deformacions	9
Tracció i compressió	51
Cisallament	76
Diagrames d'esforços.....	79
Tensions en elements sotmesos a flexió.....	100
Deformacions en elements sotmesos a flexió	126
Torsió	158
Esforços combinats	170
Energia de deformació	196
Vinclament	214

Aquest llibre presenta una col·lecció de problemes resolts de Resistència de Materials i Introducció al Càlcul d'Estructures per a estudiants d'Enginyeria i Arquitectura, que pretenen cobrir els temes bàsics i que s'han seleccionat tenint en compte l'experiència dels autors en la docència d'aquestes disciplines a l'Escola Politècnica Superior de la Universitat de Girona.

L'objectiu del llibre és que l'estudiant trobi exercicis que li serveixin de complement per a una correcta comprensió dels conceptes teòrics i li mostrin, d'una manera esquemàtica, l'aplicació pràctica d'aquesta matèria fonamental en el disseny d'elements resistents.

Si bé l'ordre dels capítols s'adequa al que podria ser un temari clàssic en una assignatura introductòria, l'estructura actual dels plans docents universitaris fa que el llibre no segueixi una assignatura en concret de Resistència de Materials i Estructures de les que s'imparteixen en els primers cursos dels estudis esmentats. Creiem, però, que l'estudiant hi trobarà el més fonamental de cada tema, de manera que podrà seleccionar els exercicis que més s'adaptin al seu pla d'estudis i, al mateix temps, disposarà d'exemples per complementar la matèria cursada.

Malgrat tot, és impossible que un llibre com aquest cobreixi de manera exhaustiva totes les tipologies de problemes i tots els graus de complexitat; tampoc ho hem pretès: el nostre objectiu ha estat seleccionar exemples significatius de cada tema, que permetin il·lustrar els conceptes teòrics.

Finalment, volem donar les gràcies a tots els que d'una manera o altra han fet possible que aquest llibre surti a la llum, i molt especialment a l'Imma Duran, per la seva inestimable ajuda en l'edició de textos i figures.

Els autors.

1. Anàlisi de tensions i deformacions

Problema 1.1. El vector corrent, $\vec{\delta}_P$, d'un punt P d'un medi continu elàstic, té per components referides a un sistema de coordenades ortogonal, amb origen al punt O:

$$u = 4 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$$

$$v = 8 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 + 10^{-4} y$$

$$w = -2 \cdot 10^{-4} \cdot y^2$$

Determineu:

- El tensor de deformacions de l'estat definit per u , v i w .
- Les deformacions i direccions principals en el punt P (0.5, 1, 0.5).
- Les deformacions intrínseques en la direcció \overrightarrow{OP} , en el punt P.

a) El tensor de deformacions de l'estat definit per u , v i w .

El tensor de deformacions s'obté derivant els corriments respecte a les variables x , y , i z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 8 \cdot 10^{-4} x & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 10^{-4} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 16 \cdot 10^{-4} z - 4 \cdot 10^{-4} y = 4 \cdot 10^{-4} (4z - y) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Per tant, el tensor de deformacions $[D]$ resultant és:

$$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^{-4} x & 0 & 0 \\ 5^{-4} & 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} (4z - y) \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} (4z - y) & 0 \end{bmatrix}$$

b) Les deformacions i direccions principals en el punt P (0.5, 1, 0.5).

El tensor de deformacions en el punt P s'obté substituint les coordenades del punt:

$$[D]_P = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$$

Per determinar les deformacions principals, es calculen els valors propis del tensor anterior, solucionant l'equació

$$\det([D] - \varepsilon \cdot I) = 0$$

on I és la matriu identitat.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-4} - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} - \varepsilon & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} & -\varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_I \\ \varepsilon_{II} \\ \varepsilon_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.56 \cdot 10^{-4} \\ 2.56 \cdot 10^{-4} \\ 4 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Les direccions principals en el punt P s'obtenen determinant els vectors propis associats a cada deformació principal.

(i) Direcció principal associada a la deformació principal $\varepsilon_I = -1.56 \cdot 10^{-4}$:

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-4} - \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} - \varepsilon_I & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} & -\varepsilon_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituint $\varepsilon_I = -1.56 \cdot 10^{-4}$:

$$\left. \begin{aligned} 5.56 \cdot 10^{-4} \alpha_1 &= 0 \\ 2.56 \cdot 10^{-4} \beta_1 + 2 \cdot 10^{-4} \gamma_1 &= 0 \\ 2 \cdot 10^{-4} \beta_1 + 1.56 \cdot 10^{-4} \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La tercera i quarta equació del sistema anterior són linealment dependents, per tant cal afegir una condició extra per tal de poder solucionar el sistema. Per a fer-ho s'introdueix la següent condició:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

El sistema d'equacions a resoldre és:

$$\left. \begin{aligned} 5.56 \cdot 10^{-4} \alpha_1 &= 0 \\ 2.56 \cdot 10^{-4} \beta_1 + 2 \cdot 10^{-4} \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Els valors $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, solució del sistema d'equacions anterior són les components de la direcció principal associada a la deformació principal $\varepsilon_I = -1.56 \cdot 10^{-4}$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.62 \\ -0.79 \end{bmatrix} \quad \vec{n}_1 = [0, 0.62, -0.79]^T$$

(ii) *Direcció principal associada a la deformació principal $\varepsilon_{II} = 2.56 \cdot 10^{-4}$:*

Seguint el mateix procediment que en l'apartat anterior, el sistema d'equacions a resoldre és:

$$\left. \begin{aligned} 1.44 \cdot 10^{-4} \alpha_2 &= 0 \\ -1.56 \cdot 10^{-4} \beta_2 + 2 \cdot 10^{-4} \gamma_2 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.79 \\ -0.62 \end{bmatrix}$$

i el vector propi associat a aquesta deformació principal:

$$\vec{n}_2 = [0, -0.79, -0.62]^T$$

(iii) *Direcció principal associada a la deformació principal: $\varepsilon_{III} = 4 \cdot 10^{-4}$:*

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 0 \\ -3 \cdot 10^{-4} \beta_3 + 2 \cdot 10^{-4} \gamma_3 &= 0 \\ +2 \cdot 10^{-4} \beta_3 - 4 \cdot 10^{-4} \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

En aquest cas només hi ha dues equacions no nul·les que imposen la condició $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, sigui quin sigui el valor de α_1 . Si afegim la condició que el vector ha de ser unitari, llavors cal afegir la condició

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

que es complirà sempre que $\alpha_1 = 1$. Per tant, la direcció principal associada a la deformació principal $\varepsilon_{III} = 4 \cdot 10^{-4}$ és:

$$\vec{n}_3 = [1, 0, 0]^T$$

c) Les deformacions intrínseques en la direcció \overline{OP} , en el punt P.

Per calcular les deformacions intrínseques cal projectar sobre el pla perpendicular a la direcció considerada.

El mòdul del vector $\overline{OP} = [0.5 \ 1 \ 0.5]^T$ val $|OP| = \sqrt{(0.5^2 + 1^2 + 0.5^2)} = 1.22$. Per tant, el vector unitari que defineix la direcció OP és:

$$\vec{n} = [0.41, 0.82, 0.82]^T$$

El vector de deformació unitari $\vec{\varepsilon}$ s'obté multiplicant el tensor de deformacions en el punt P, pel vector director unitari \vec{n} :

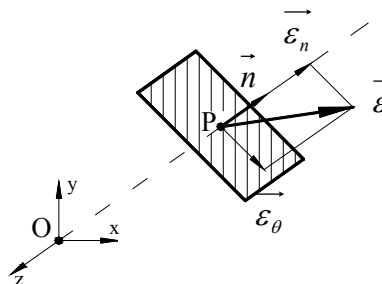
$$\vec{\varepsilon} = [D] \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.82 \\ 0.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.64 \cdot 10^{-4} \\ 2.46 \cdot 10^{-4} \\ 1.64 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Per tant, la deformació intrínseca en la direcció normal al pla perpendicular al vector unitari \vec{n} :

$$|\varepsilon_n| = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 1.64 \cdot 10^{-4} & 2.46 \cdot 10^{-4} & 1.64 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.82 \\ 0.82 \end{bmatrix} = 4.03 \cdot 10^{-4}$$

I la deformació intrínseca en la direcció tangent al pla perpendicular al vector unitari \vec{n} :

$$|\varepsilon_\theta| = \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_n^2} = \sqrt{(1.64 \cdot 10^{-4})^2 + (2.64 \cdot 10^{-4})^2 + (1.64 \cdot 10^{-4})^2 - (4.03 \cdot 10^{-4})^2} = 2.2 \cdot 10^{-4}$$



Problema 1.2. En l'element tensionat de la Figura 1.2 determineu:

- a) La tensió normal i la tensió tallant en el pla indicat.
- b) Les tensions principals.
- c) Les deformacions principals.

Dades:

Mòdul d'elasticitat del material (E) = 10^5 MPa

Coefficient de Poisson (ν) = 0.2

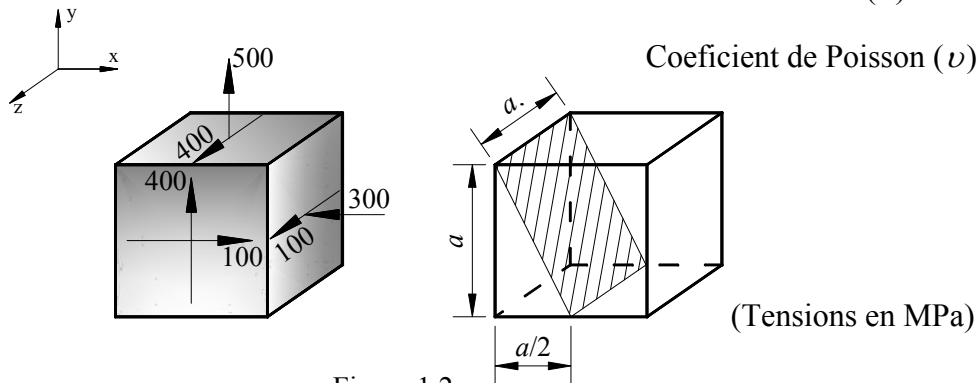
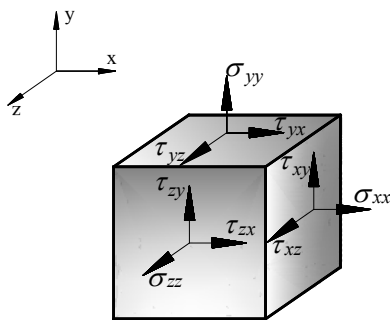


Figura 1.2

a) La tensió normal $\vec{\sigma}$ i la tensió tallant $\vec{\tau}$ en el pla indicat.

Es defineix un sistema d'eixos de manera que l'estat tensional s'escriu:

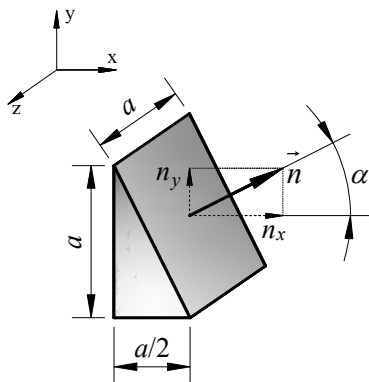


$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -300 \text{ MPa} & \tau_{xy} &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} &= 500 \text{ MPa} & \tau_{yz} &= 400 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz} &= 0 \text{ MPa} & \tau_{zx} &= 100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

En notació tensorial:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 & 0 & 100 \\ 0 & 500 & 400 \\ 100 & 400 & 0 \end{bmatrix}$$

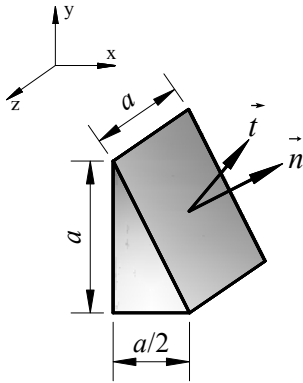
El vector director \vec{n} del pla indicat a la Figura 1.2 és:



$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6^\circ \\ n_x &= \cos(\alpha) = \cos(26.6^\circ) = 0.894 \\ n_y &= \sin(\alpha) = \sin(26.6^\circ) = 0.447 \end{aligned}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0.894 \\ 0.447 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector de tensions \vec{t} en el pla indicat s'obté multiplicant el vector director pel tensor de tensions:



$$\vec{t} = [T] \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} -300 & 0 & 100 \\ 0 & 500 & 400 \\ 100 & 400 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.894 \\ 0.447 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -268 \\ 224 \\ 268 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Per tant, els mòduls de la tensió normal $\vec{\sigma}$ i de la tensió tallant $\vec{\tau}$ valen:

$$\sigma = |\vec{\sigma}| = \vec{n}^T \cdot \vec{t} = [0.894 \quad 0.447 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -268 \\ 224 \\ 268 \end{bmatrix} = -140 \text{ MPa}$$

$$t = \sqrt{(-268)^2 + 224^2 + 268^2} = 440 \text{ MPa}$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = \sqrt{t^2 - |\sigma|^2} = \sqrt{440^2 - 140^2} = 417 \text{ MPa}$$

b) Les tensions principals.

Per calcular les tensions principals cal determinar els valors propis del tensor de tensions:

$$\det([D] - \varepsilon \cdot I) = 0 \quad \text{on } I \text{ és la matriu identitat.}$$

$$\begin{bmatrix} -300 - \sigma & 0 & 100 \\ 0 & 500 - \sigma & 400 \\ 100 & 400 & 0 - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \sigma_I = 724 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = -166 \text{ MPa} \\ \sigma_{III} = -358 \text{ MPa} \end{array}$$

c) Les deformacions principals si $E = 10^5 \text{ MPa}$ i $\nu = 0.2$.

Les deformacions principals es calculen a partir de la llei de Hooke generalitzada, que relaciona les tensions i les deformacions:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_I \\ \varepsilon_{II} \\ \varepsilon_{III} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_I \\ \varepsilon_{II} \\ \varepsilon_{III} \end{bmatrix} = \frac{1}{10^5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 724 \\ -166 \\ -358 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 828 \cdot 10^{-7} \\ -239 \cdot 10^{-7} \\ -470 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.28 \cdot 10^3 \\ -2.39 \cdot 10^3 \\ -4.7 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \mu\varepsilon$$

Problema 1.3. Dos cubs de costat 10 mm se sotmeten a les condicions de càrrega i de contorn de la Figura 1.3. Calculeu, les tensions a les cares de cada cub i els allargaments unitaris resultants.

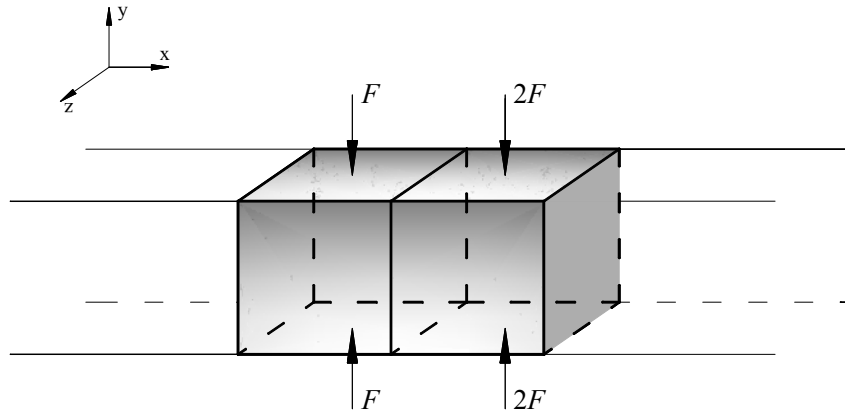


Figura 1.3

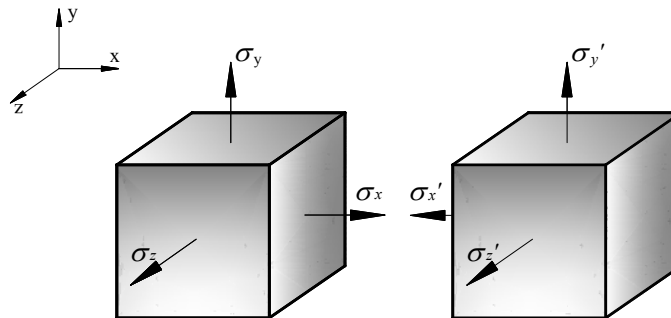
Dades:

Mòdul d'elasticitat del material (E) = $2.1 \cdot 10^5$ MPa

Coefficient de Poisson (ν) = 0.3

Força aplicada (F) = 15 kN

L'estat de tensions a les cares de cada cub serà:



Les equacions, que relacionen tensions i deformacions (lleis de Hooke generalitzada), per a cadascun dels dos cubs, seran:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma'_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma'_z + \sigma'_y)$$

$$\varepsilon'_y = \frac{\sigma'_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma'_x + \sigma'_z)$$

$$\varepsilon'_z = \frac{\sigma'_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma'_y + \sigma'_x)$$

En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \end{bmatrix}$$

Per solucionar el sistema anterior s'han de plantejar les condicions de contorn:

- (i) Els dos cubs no es poden moure horitzontalment; per tant, $\varepsilon_x + \varepsilon'_x = 0$.
- (ii) Com que l'àrea de contacte entre les cares és la mateixa, per equilibri de forces s'obté que $\sigma_x = \sigma'_x$.
- (iii) La tensió σ_y és igual a la força externa F aplicada sobre la cara dividida per l'àrea de la cara, $\sigma_y = \frac{-F}{10 \cdot 10} = -150 \text{ MPa}$.
- (iv) La tensió σ'_y és igual a la força externa $2 \cdot F$ aplicada sobre la cara dividida per l'àrea de la cara, $\sigma'_y = \frac{-2 \cdot F}{10 \cdot 10} = -300 \text{ MPa}$.
- (v) Com que la cara z és una superfície lliure, $\sigma_z = \sigma'_z = 0$.

Les dades desconegudes són: σ_x , ε_x , ε_y , ε'_y , ε_z , ε'_z .

Finalment, substituint en les expressions anteriors, s'obté:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{2.1 \cdot 10^5} - \frac{0.3}{2.1 \cdot 10^5} (-150 + 0) = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5} (\sigma_x + 45) \quad (1.3.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{-150}{2.1 \cdot 10^5} - \frac{0.3}{2.1 \cdot 10^5} (0 + \sigma_x) = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5} (-150 - 0.3\sigma_x) \quad (1.3.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{0}{2.1 \cdot 10^5} - \frac{0.3}{2.1 \cdot 10^5} (\sigma_x + -150) = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5} (-0.3\sigma_x + 45) \quad (1.3.3)$$

$$-\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{2.1 \cdot 10^5} - \frac{0.3}{2.1 \cdot 10^5} (0 + -300) = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5} (\sigma_x + 90) \quad (1.3.4)$$

$$\varepsilon'_y = \frac{-300}{2.1 \cdot 10^5} - \frac{0.3}{2.1 \cdot 10^5} (\sigma_x + 0) = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5} (-300 - 0.3\sigma_x) \quad (1.3.5)$$

$$\varepsilon'_z = \frac{0}{2.1 \cdot 10^5} - \frac{0.3}{2.1 \cdot 10^5} (-300 + \sigma_x) = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5} (90 - 0.3\sigma_x) \quad (1.3.6)$$

Igualant les equacions (1.3.1) i (1.3.4), s'obté el valor de la tensió $\sigma_x = \sigma'_x$.

$$\frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(\sigma_x + 45) + \frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(\sigma_x + 90) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = -67.5 \text{ MPa}$$

Per tant, les tensions a les cares de cada cub són:

$$\sigma_x = \sigma'_x = -67.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -150 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_y = -300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = \sigma'_z = 0 \text{ MPa}$$

Substituint el valor de σ_x a les equacions anteriors, s'obtenen els valors de la resta d'incògnites:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(-67.5 + 45) = -107 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(-150 - 0.3(-67.5)) = -618 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(-0.3(-67.5) + 45) = +311 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon'_x = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(-67.5 + 90) = +107 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon'_y = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(-300 - 0.3(-67.5)) = -133 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon'_z = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5}(90 - 0.3(-67.5)) = +525 \cdot 10^{-6}$$

Problema 1.4. El cub de la Figura 1.4 està sotmès a una càrrega de compressió. Determineu:

- La càrrega màxima P que es pot aplicar de manera que no entri en contacte amb les parets laterals.
- La variació de volum per a aquesta càrrega.

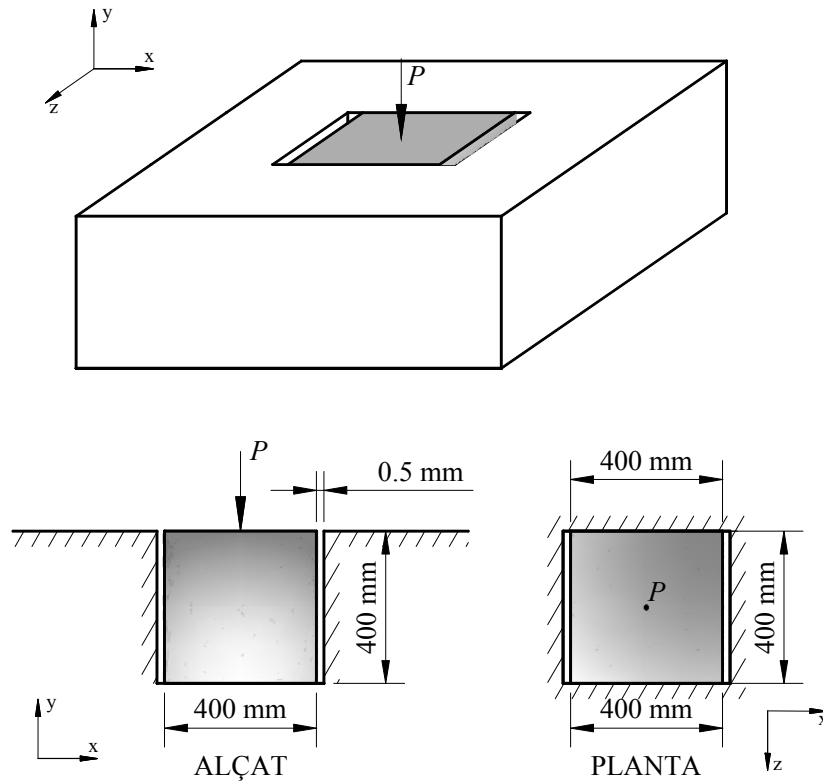


Figura 1.4

Dades:

Mòdul d'elasticitat del material (E) = 10^4 MPa

Coefficient de Poisson (ν) = 0.2

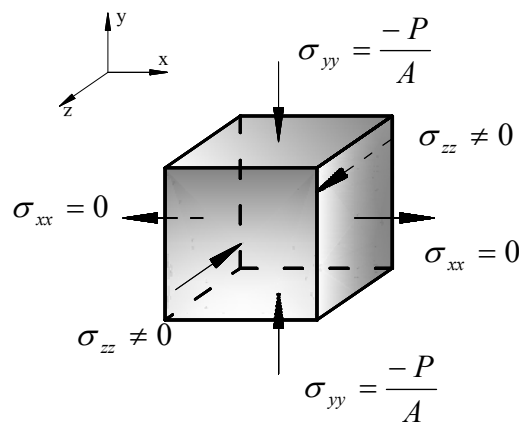
- La càrrega màxima P que es pot aplicar de manera que no entri en contacte amb les parets laterals.

La relació entre tensions i deformacions en un estat tridimensional és:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Les condicions de contorn del problema són:

- (i) Les tensions en la direcció x són nul·les perquè no hi ha contacte entre el cub i la paret vertical, $\sigma_{xx} = 0$.
- (ii) Les tensions en la direcció y són iguals a la càrrega aplicada entre l'àrea de la superfície, $\sigma_{yy} = \frac{-P}{400 \cdot 400}$.
- (iii) Les tensions en la direcció z no són nul·les perquè existeix contacte entre el cub i la paret vertical, $\sigma_{zz} \neq 0$.
- (iv) La deformació en la direcció x no és nul·la perquè el cub té espai per deformar-se. No obstant, aquesta deformació està limitada, $0 \neq \varepsilon_{xx} \leq \frac{1}{400}$.
- (v) La deformació en la direcció y no és nul·la perquè el cub té una superfície lliure, la qual es pot deformar, $\varepsilon_{yy} \neq 0$.
- (vi) La deformació en la direcció z és nul·la perquè no existeix espai entre el cub i la paret vertical i, per tant, no es pot deformar en aquesta direcció, $\varepsilon_{zz} = 0$.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{400} \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 10^4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$2.5 \cdot 10^{-3} = 1.25 \cdot 10^{-10} P - 2.10^{-5} \sigma_{zz}$$

$$\varepsilon_{yy} = -6.25 \cdot 10^{-10} P - 2.10^{-5} \sigma_{zz}$$

$$0 = 1.25 \cdot 10^{-10} P + 1.10^{-4} \sigma_{zz}$$

La solució del sistema d'equacions anterior és:

$$\varepsilon_{yy} = -0.01$$

$$\sigma_{zz} = -20.8 \text{ MPa}$$

$$P = 16.7 \cdot 10^6 \text{ N}$$

b) La variació de volum per aquesta càrrega.

El volum inicial és: $V_o = a \cdot b \cdot c = 400 \cdot 400 \cdot 400$

El volum final és: $V_f = a \cdot (1 + \varepsilon_{xx}) \cdot b \cdot (1 + \varepsilon_{yy}) \cdot c \cdot (1 + \varepsilon_{zz}) =$
 $= V_o \cdot \left(1 + \frac{1}{400}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) \cdot (1 + 0) = 0.992V_o$

Per tant, la variació de volum és:

$$\Delta V = V_f - V_o = 0.992V_o - V_o = -0.00753V_o$$

I la variació unitària de volum,

$$V = \frac{\Delta V}{V_o} = -0.00753 = -0.753\%$$

Problema 1.5. L'element de la Figura 1.5 està sotmès a un estat pla de tensions.

- Determineu les tensions principals (σ_I i σ_{II}) i la tensió tallant màxima (τ_{max}) de l'element de la Figura 1.5.
- Dibuixeu l'estat tensional en l'orientació corresponent a la tensió tallant màxima, especificant l'angle que l'element ha girat.

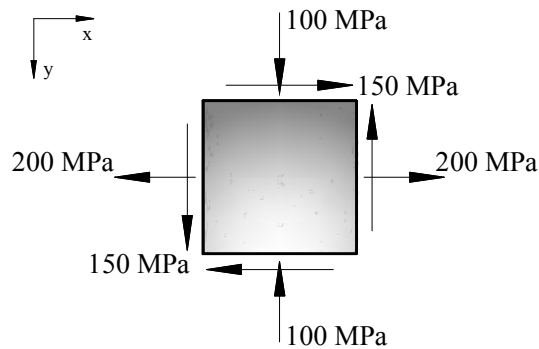
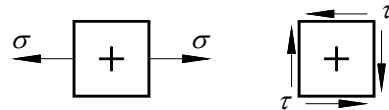


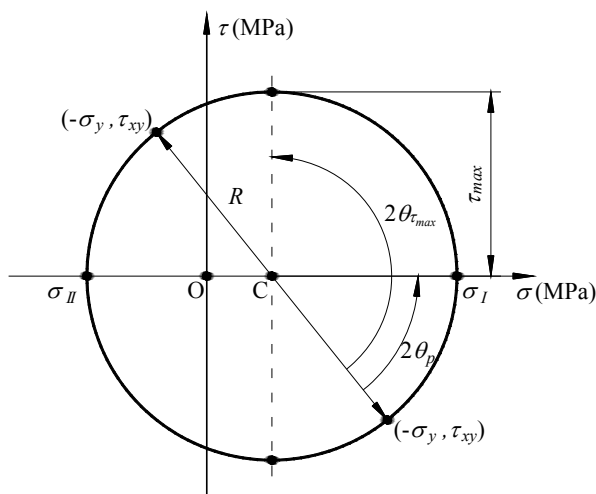
Figura 1.5

- Determineu les tensions principals (σ_I i σ_{II}) i la tensió tallant màxima (τ_{max}) de l'element de la Figura 1.5

Es defineix un sistema d'eixos i un conveni de signes per a σ i τ en el pla:



A partir de l'estat de tensions bidimensional, es construeix el cercle de Mohr:



La distància des de l'origen de coordenades fins al centre del cercle de Mohr és

$$OC = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

I el radi del cercle de Mohr,

$$R = \sqrt{(\sigma_{xx} - OC)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Sabent que

$$\sigma_{xx} = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = -100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -150 \text{ MPa}$$

el valor de la distància OC és:

$$OC = \frac{200 + (-100)}{2} = 50 \text{ MPa}$$

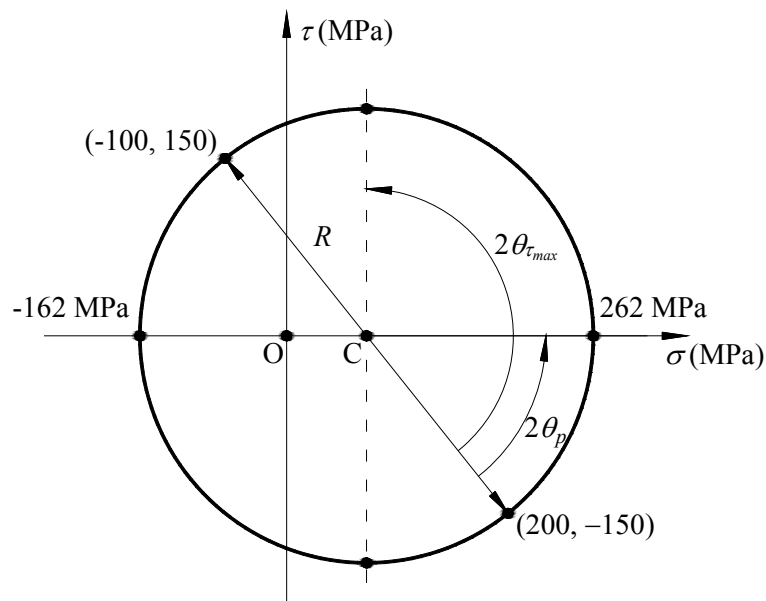
I el radi,

$$R = \sqrt{(200 - 50)^2 + 150^2} = \sqrt{150^2 + 150^2} = 212 \text{ MPa}$$

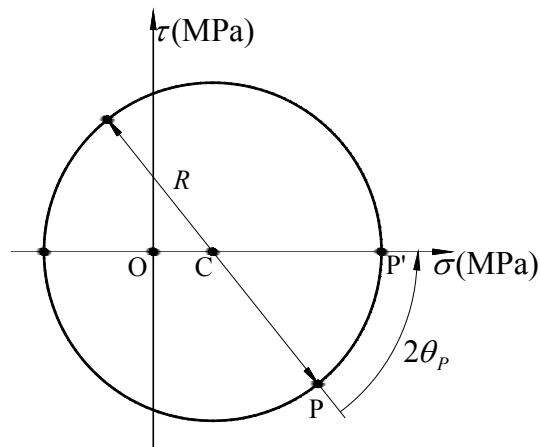
Un cop situat el centre, C , i conegut el radi, R , del cercle de Mohr, les tensions principals són:

$$\sigma_I = OC + R = 50 + 212.13 = 262 \text{ MPa}$$

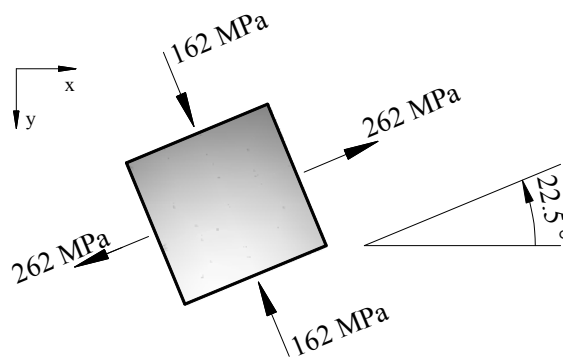
$$\sigma_{II} = OC - R = 50 - 212.13 = -162 \text{ MPa}$$



Per obtenir aquest estat tensional cal girar els eixos un angle θ_p des de P a P'.



$$\theta_p = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{150}{200 - 50}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan(1) = 22.5^\circ = \frac{\pi}{8} \text{ rad, en sentit antihorari.}$$



b) Dibuixeu l'estat tensional en l'orientació corresponent a la tensió tallant màxima, especificant l'angle que l'element ha girat.

La tensió tallant màxima és igual al radi del cercle de Mohr: $\tau_{\max} = R = 212 \text{ MPa}$.

Per obtenir aquest estat tensional, cal girar els eixos un angle

$$\theta_{\tau_{\max}} = \theta_p \pm \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} \text{ rad} = -22.5^\circ \text{ en sentit horari.}$$

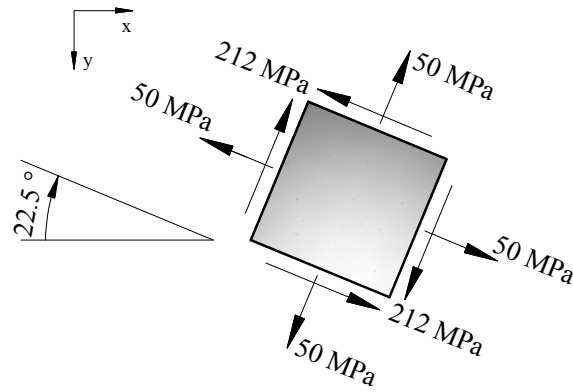
Si girem els eixos -22.5° , l'estat tensional és:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\sigma_{(-22.5)} = \frac{200 + (-100)}{2} + \frac{200 - (-100)}{2} \cos(-45) - (-150) \sin(-45) = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{(-22.5-90)} = \frac{200 + (-100)}{2} + \frac{200 - (-100)}{2} \cos(-225) - (-150) \sin(-225) = 50 \text{ MPa}$$

Per tant, la representació gràfica de l'estat tensional és:



S'observa que la tensió normal és correspon amb el valor de l'abscissa del centre del cercle de Mohr, i igual en totes les cares de l'element.

Problema 1.6. Les deformacions a les galgues *a* i *b* de la Figura 1.6 són $125\mu\epsilon$ i $200\mu\epsilon$, respectivament, i la deformació angular, $\gamma_{xy} = 50\mu\epsilon$.

- Calculeu la deformació de la galga *c*.
- Calculeu les deformacions principals.
- Si es considera que les galgues estan situades en un punt on l'estat de tensions és pla, calculeu ϵ_z i les tensions σ_x , σ_y .

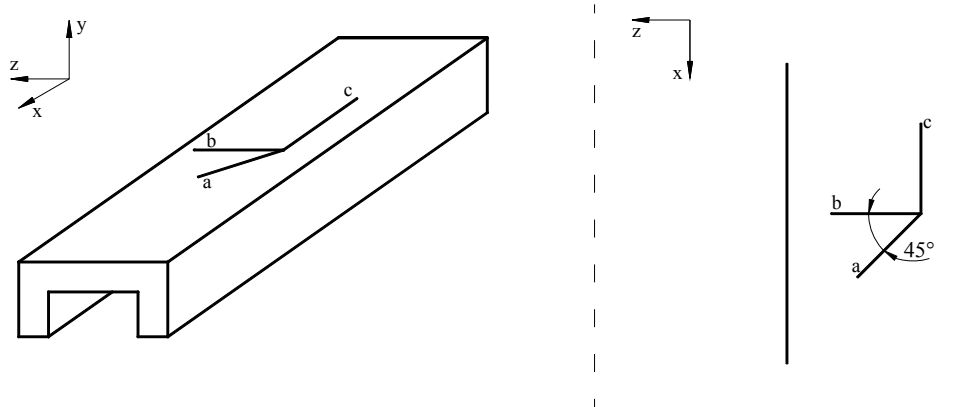


Figura 1.6

Dades:

Mòdul d'elasticitat del material (E) = $2.1 \cdot 10^5$ MPa

Coefficient de Poisson (ν) = 0.3

a) Calculeu la deformació de la galga *c*.

La deformació de la galga *c* és igual a ϵ_x i la de la galga *b*, igual a ϵ_y :

$$\epsilon_x = \epsilon_c$$

$$\epsilon_y = \epsilon_b$$

La deformació de la galga *a* es pot calcular a partir de les deformacions $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$.

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \cos(2\theta) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2\theta)$$

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_x + 200}{2} + \frac{\epsilon_x - 200}{2} \cdot \cos(2 \cdot 45) - \frac{50}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45)$$

$$125 \cdot 2 = \epsilon_x + 200 - 50, \text{ per tant, } \epsilon_x = \epsilon_c = 100\mu\epsilon$$

b) Calculeu les deformacions principals.

Per calcular les deformacions principals s'utilitza el cercle de Mohr.

$$\varepsilon_x = 100 \mu\varepsilon$$

$$\varepsilon_y = 200 \mu\varepsilon$$

$$\gamma_{xy} = 50 \mu\varepsilon$$

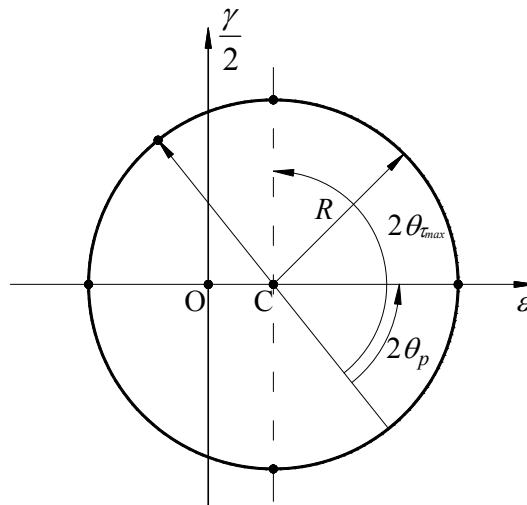
El centre del cercle de Mohr és:

$$OC = \frac{200 + 100}{2} = 150 \mu\varepsilon$$

I el radi:

$$R = \sqrt{(200 - 150)^2 + \left(\frac{50}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{50^2 + \left(\frac{50}{2}\right)^2} = 55.9 \mu\varepsilon$$

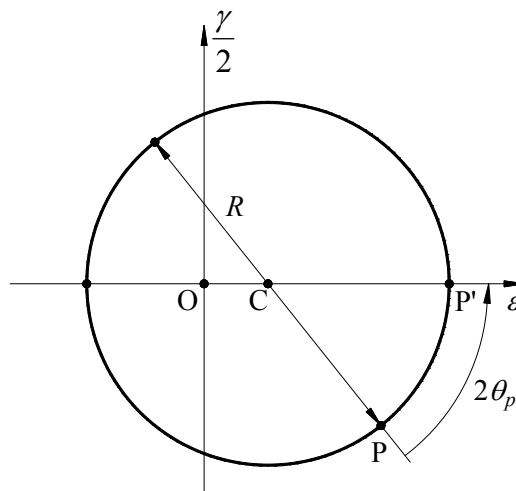


Per tant, les deformacions principals són:

$$\varepsilon_I = OC + R = 150 + 55.90 = 206 \mu\varepsilon$$

$$\varepsilon_{II} = OC - R = 150 - 55.90 = 94.1 \mu\varepsilon$$

Per obtenir aquest estat de deformacions cal girar els eixos un angle θ_p des de P a P'.



$$\theta_p = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{50/2}{200 - 150}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0.23 \text{ rad} = 13.3^\circ, \text{ en sentit antihorari.}$$

- c) Si es considera que les galgues estan situades en un punt on l'estat de tensions és pla, calculeu ε_z i les tensions σ_x , σ_y .

La llei de Hooke generalitzada relaciona les deformacions i les tensions:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Si és un estat de tensió plana, vol dir que $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} = \frac{1}{2.1 \cdot 10^5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0.3 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \cdot 0.21 = \begin{bmatrix} \sigma_x - 0.3\sigma_y \\ -0.3\sigma_x + \sigma_y \\ -0.3\sigma_x - 0.3\sigma_y \end{bmatrix}$$

$$100 \cdot 0.21 = \sigma_x - 0.3\sigma_y$$

$$200 \cdot 0.21 = -0.3\sigma_x + \sigma_y$$

$$\varepsilon_z \cdot 0.21 = -0.3\sigma_x - 0.3\sigma_y$$

Les solucions són:

$$\sigma_x = 36.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 53.1 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_z = -128 \mu\varepsilon$$

Problema 1.7. A partir de l'estat tensional mostrat a la Figura 1.7, i considerant un estat pla de tensions,

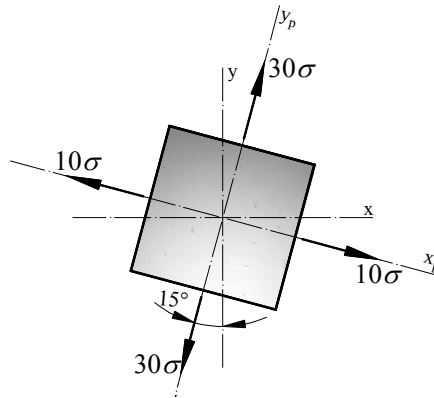


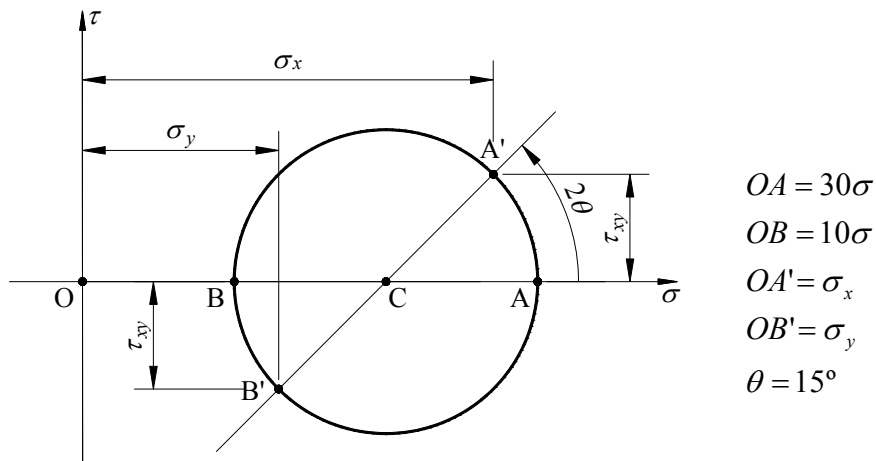
Figura 1.7

Determineu:

- a) Les tensions en els eixos x i y .
- b) La tensió tallant màxima considerant l'estat tridimensional.

a) Calculeu les tensions en els eixos x i y .

Per calcular les tensions en els eixos x i y , es dibuixa el cercle de Mohr a partir de l'estat tensional en el pla $x_p y_p$, que és el que es mostra en la Figura 1.7. S'observa que els eixos $x_p y_p$ són eixos principals ja que la tensió tallant és nul·la. Per tant, les tensions en cada cara són tensions principals i defineixen els punts A i B del cercle de Mohr:



A, B representen l'estat tensional dels plans definits pel sistema d'eixos x_p, y_p .
 A', B' representen l'estat tensional dels plans definits pel sistema d'eixos x, y .

El centre del cercle de Mohr és:

$$OC = \frac{OB + OA}{2} = 20\sigma$$

El radi del cercle de Mohr és:

$$R = \frac{OA - OB}{2} = 10\sigma$$

Un cop representat el cercle de Mohr, es calculen els valors de les tensions σ_x , σ_y i τ_{xy} en els eixos x i y :

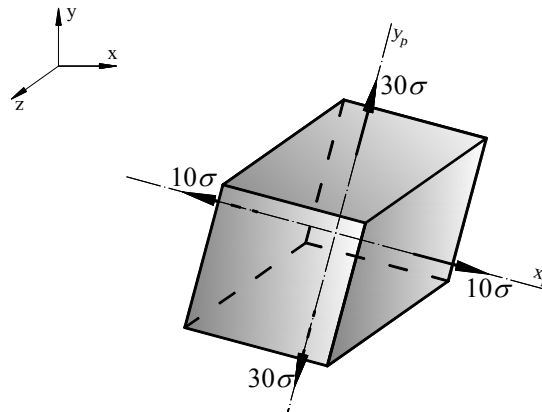
$$\sigma_x = OC + R \cdot \cos 30 = (20 + 10 \cos 30)\sigma = 28.7\sigma$$

$$\sigma_y = OC - R \cdot \cos 30 = (20 - 10 \cos 30)\sigma = 11.3\sigma$$

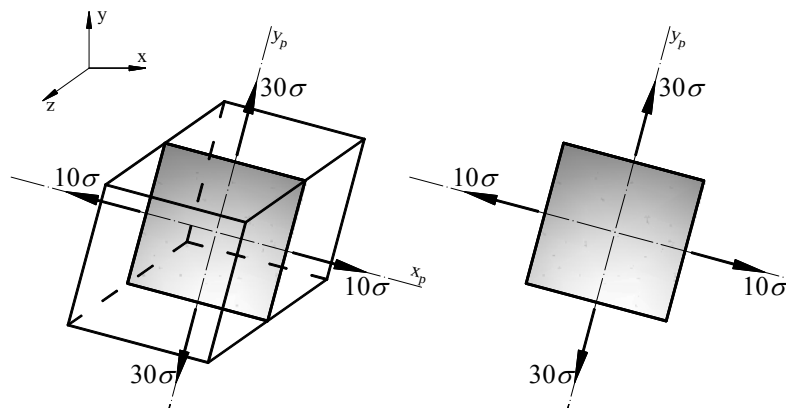
$$\tau_{xy} = R \cdot \sin 30 = \pm 10\sigma \sin 30 = \pm 5\sigma$$

b) Determieu la tensió tallant màxima considerant l'estat tridimensional.

Per determinar la tensió tallant màxima considerant l'estat tridimensional cal representar dos cercles de Mohr addicionals corresponents als dos plans perpendiculars als eixos x_p, y_p

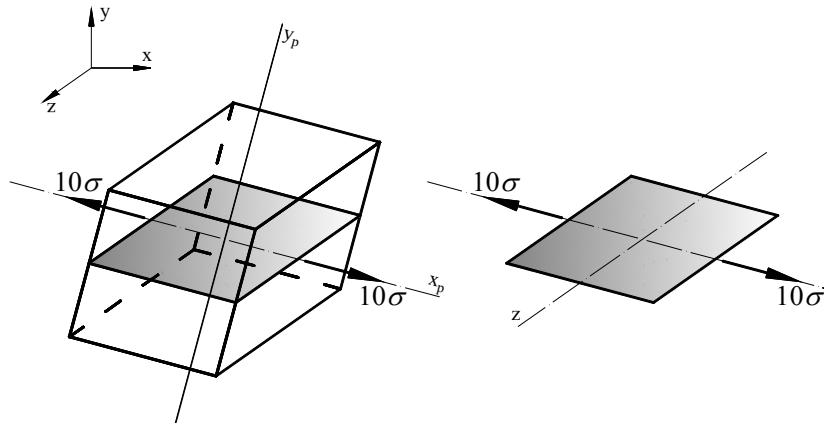


L'estat tensional en el pla $x_p y_p$ és el que es mostra a continuació:

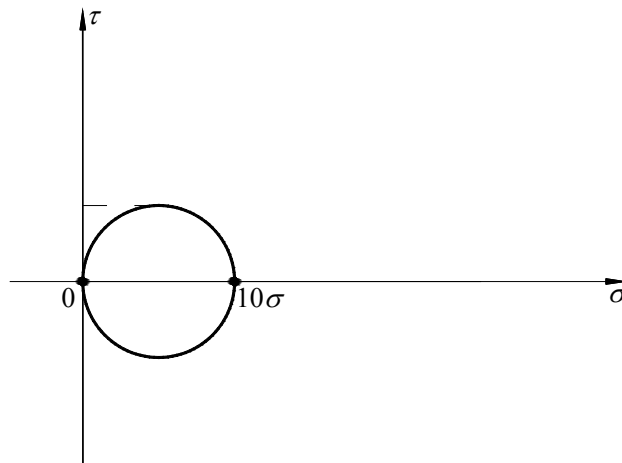


El cercle de Mohr d'aquest estat és el de l'apartat a).

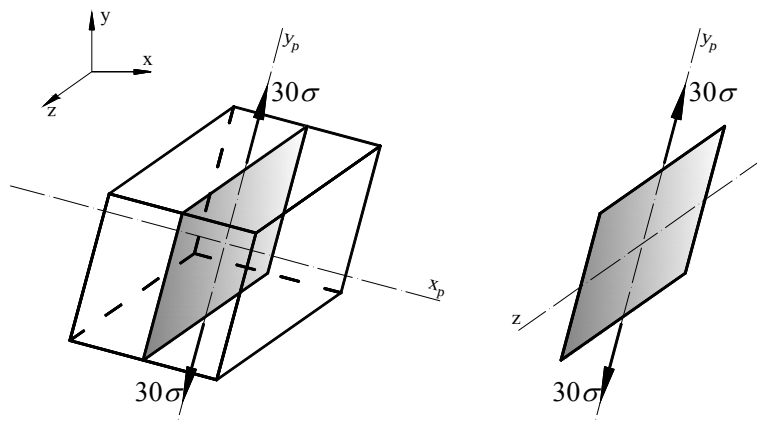
L'estat tensional en el pla x_pz és el que es mostra a continuació:



Les cares perpendiculars a la direcció x_p tenen una tensió de 10σ en canvi, en les perpendiculars a z , la tensió és nul·la. El cercle de Mohr en aquest pla és:

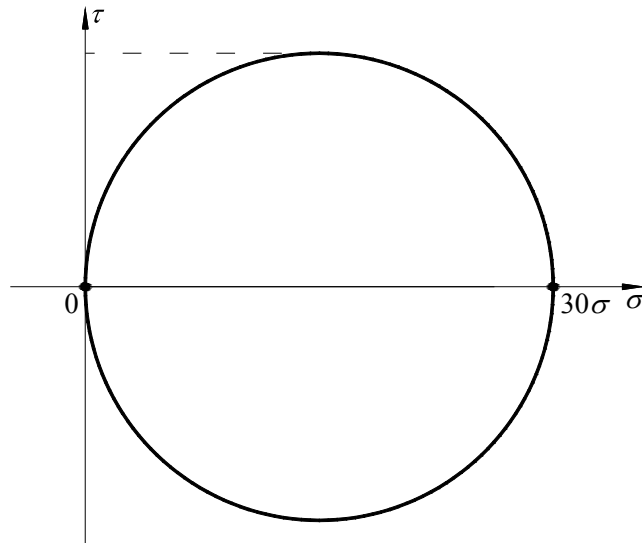


L'estat tensional en el pla y_pz és el que es mostra a continuació:



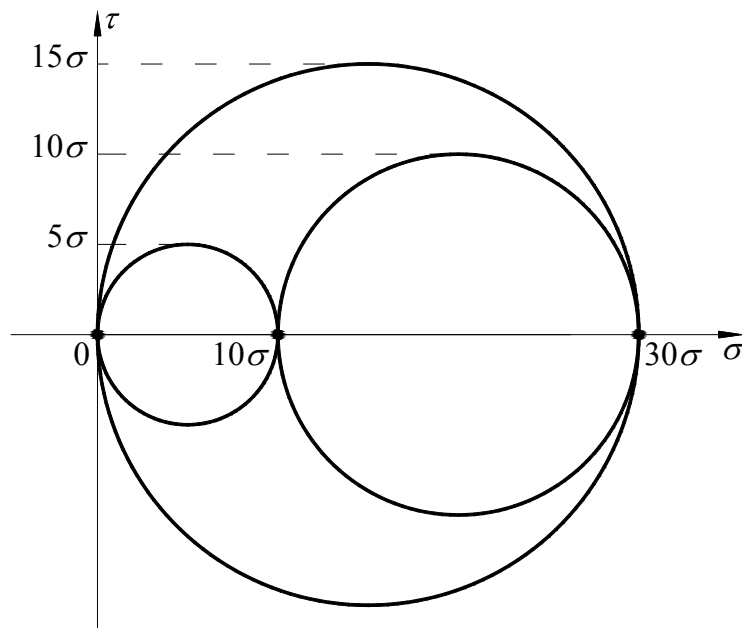
Les cares perpendiculars a la direcció y_p tenen una tensió de 30σ ; , en canvi, en les perpendiculars a z , la tensió és nul·la, igual que en el cas del pla x_pz .

El cercle de Mohr en aquest pla és:



Ja que en aquest cas no hi ha esforços aplicats en la direcció z , es tracta d'un estat uniaxial de tensions i, per tant, l'altra tensió principal és nul·la i se situa en el punt O .

D'aquesta manera, els tres cercles de Mohr queden definits pels diàmetres AB (cercle representat a l'apartat a), OB i OA .

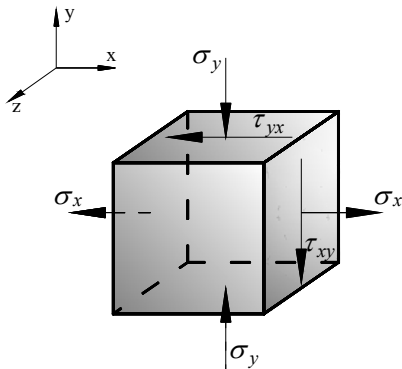


L'ordenada dels punts situats en els extrems superior i inferior de cada cercle corresponen a les tensions tallants màximes, associades a cada parell de tensions normals principals: $\tau_{y_p z}$, $\tau_{x_p y_p}$ i $\tau_{x_p z}$

La tensió tallant màxima és la major d'aquestes tres: $\tau_{max} = 15\sigma$.

Problema 1.8. Determineu per a quin valor es poden multiplicar les tensions de l'element de la Figura 1.8 per tal que no arribi a fallar, i determineu quan valdran aquestes tensions en el cas límit de fallada. Suposeu que es tracta d'un material dúctil i que s'han d'aplicar les teories de:

- La tensió tallant màxima.
- L'energia de distorsió per unitat de volum.



Dades:

Tensió de fluència (S_y) = 250 MPa

Tensió en la direcció x (σ_x) = 62.5 MPa

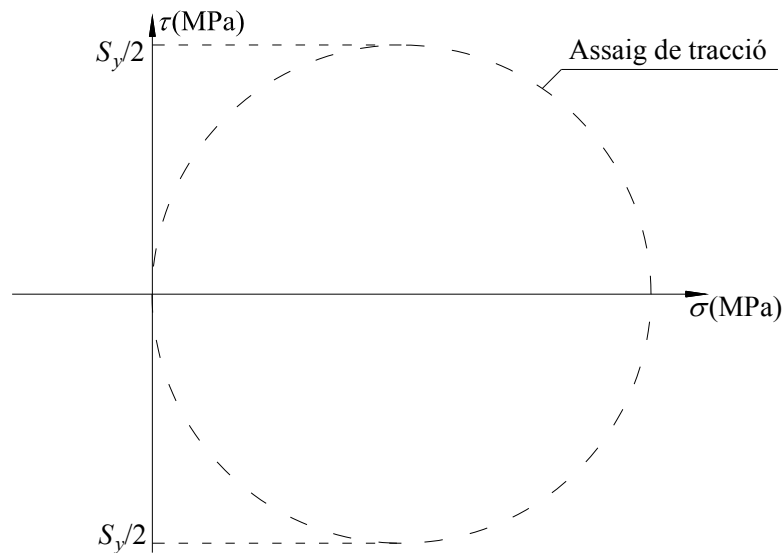
Tensió en la direcció y (σ_y) = -12.5 MPa

Tensió tallant en el pla xy (τ_{xy}) = 21.5 MPa

Figura 1.8

a) Teoria de la tensió tallant màxima.

Si es defineix τ_{falla} com el valor del tallant quan a l'assaig de tracció comença la fluència, aplicant la teoria de la tensió tallant màxima, la fallada té lloc quan τ_{max} arriba a τ_{falla} .



S'ha de complir que $\tau_{max} \leq \frac{S_y}{2}$

El centre del cercle de Mohr és:

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{62.5 - 12.5}{2} = 25 \text{ MPa}$$

I el radi:

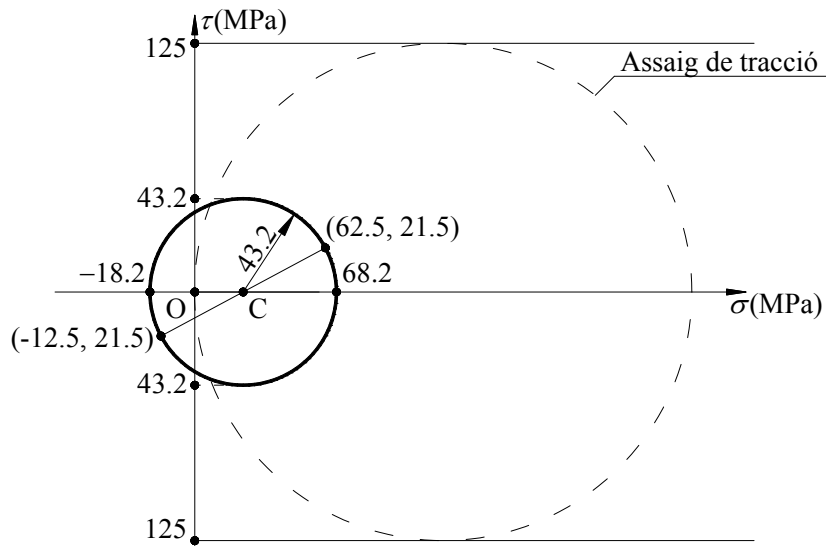
$$R = \sqrt{(\sigma_x - OC)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(62.5 - 25)^2 + 21.5^2} = 43.2 \text{ MPa}$$

Les tensions principals són:

$$\sigma_I = \sigma_a = OC + R = 25 + 43.2 = 68.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_b = OC - R = 25 - 43.2 = -18.2 \text{ MPa}$$

Amb aquestes dades es pot representar el cercle de Mohr i determinar la tensió tallant màxima.



La tensió tallant màxima és igual al radi del cercle de Mohr: $\tau_{max} = R = 43.2 \text{ MPa}$.

Per tant, es compleix la condició anterior $\tau_{max} \leq \frac{S_y}{2}$.

A partir d'aquest valor, es pot determinar el coeficient de seguretat i les tensions límit que portarien l'element de la Figura 1.8 a la fallada.

El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la fórmula següent:

$$n_{\tau_{max}} = \frac{S_y / 2}{\tau_{max}} = \frac{250 / 2}{43.2} = 2.89$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 2.89.

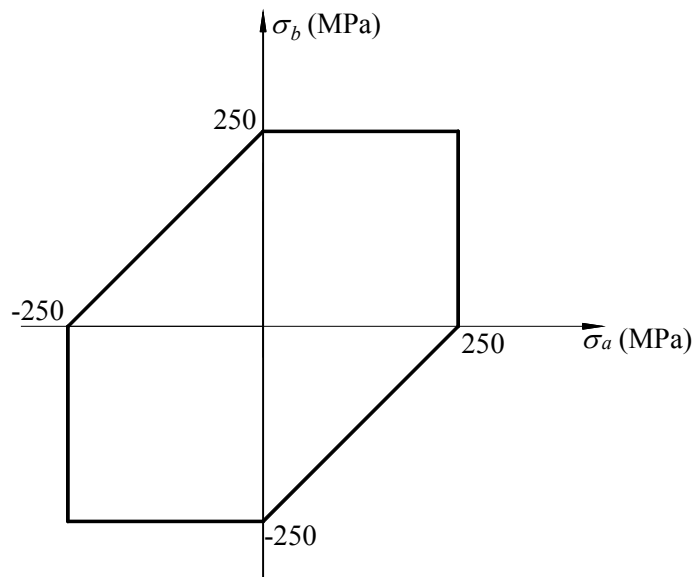
Els valors de les tensions en el cas límit de fallada es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

$$\sigma_x' = \sigma_x \cdot n = 62.5 \cdot 2.89 = 181 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y' = \sigma_y \cdot n = -12.5 \cdot 2.89 = -36.1 \text{ MPa}$$

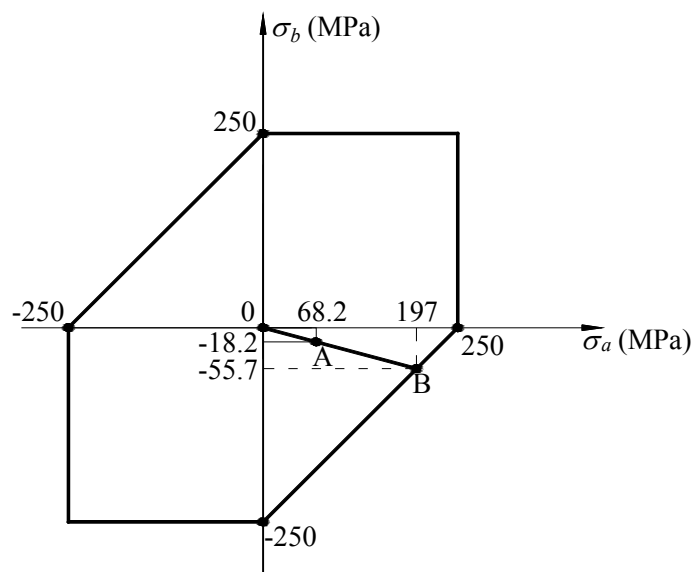
$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} \cdot n = 21.5 \cdot 2.89 = 62.1 \text{ MPa}$$

Les dades anteriors es poden representar gràficament. La representació gràfica de la superfície de fallada és:



on σ_b i σ_a són les tensions principals i $S_y = 250 \text{ MPa}$ és la tensió de fluència (o de fallada) obtinguda a l'assaig de tracció.

Si a la representació gràfica del límit en l'estat anterior es representen l'estat de tensions actual (Punt A) i l'estat de tensions en el moment de la fallada (Punt B) s'obté:



on la línia contínua correspon a les tensions principals obtingudes per a l'estat de tensions actual:

$$\sigma_I = 68.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = -18.2 \text{ MPa}$$

i la discontinua, a les noves tensions principals obtingudes a partir de les tensions límit:

$$\sigma_{I'} = 197 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II'} = -55.7 \text{ MPa}$$

Llavors, el coeficient de seguretat es pot determinar gràficament: $n = \frac{\overline{OB}}{OA} = 2.89$

b) Teoria de l'energia de distorsió per unitat de volum.

En aquest apartat, perquè l'element no falli, s'ha de complir la condició següent:

$$\sigma_{eq} \leq S_y$$

Per calcular el valor de la tensió equivalent s'aplica la fórmula següent:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{62.5^2 + (-12.5)^2 - 62.5(-12.5) + 3 \cdot 21.5^2}$$

$$\sigma_{eq} = 78.9 \text{ MPa}$$

Com que $78.9 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa}$, l'element no falla.

A partir d'aquest valor, es pot determinar el coeficient de seguretat i les tensions límit que portarien l'element de la Figura 1.8 a la fallada.

El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la fórmula següent:

$$n_{\sigma_{eq}} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} = \frac{250}{78.9} = 3.17$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 3.17.

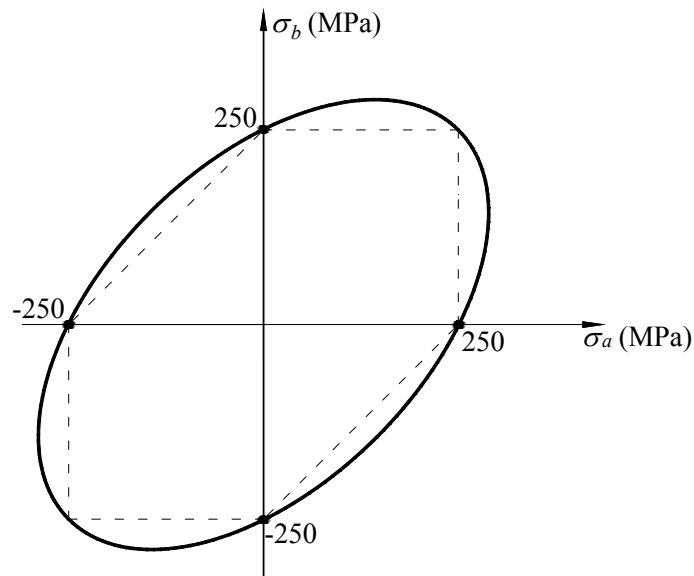
I els valors de les tensions en el cas límit de fallada es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

$$\sigma_x' = \sigma_x \cdot n = 62.5 \cdot 3.17 = 198 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y' = \sigma_y \cdot n = -12.5 \cdot 3.17 = -39.6 \text{ MPa}$$

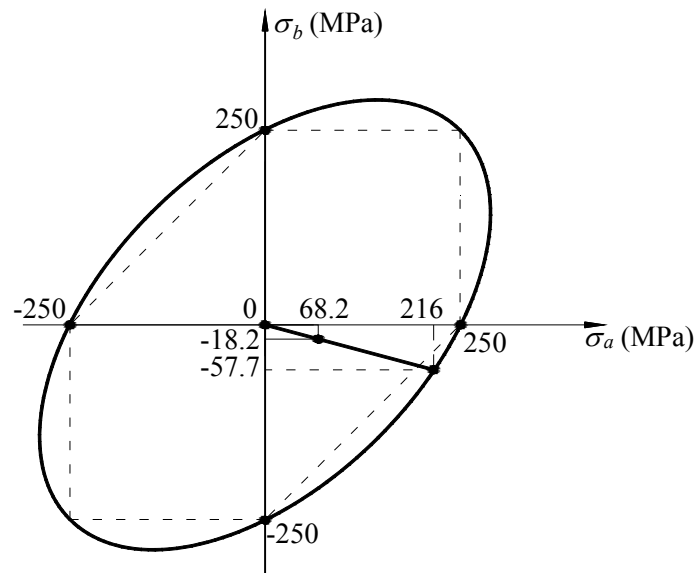
$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} \cdot n = 21.5 \cdot 3.17 = 68.1 \text{ MPa}$$

En aquest cas, la representació gràfica de la superfície de fallada en l'estat pla de tensions és:



On σ_b i σ_a són les tensions principals i S_y és la tensió de fluència obtinguda a l'assaig de tracció.

Si es calculen les tensions principals a partir de les tensions de l'enunciat i les tensions principals a partir de les tensions límit, es poden representar en el gràfic anterior.



Fent una taula resum dels resultats obtinguts amb l'aplicació de les dues teories:

Teoria	n	σ_x' (MPa)	σ_y' (MPa)	τ_{xy}' (MPa)
Tensió tallant màxima	2.89	181	-36.1	62.1
Energia de distorsió per unitat de volum	3.17	198	-39.6	68.1

Si es comparen els resultats es pot observar que aplicant la teoria de l'energia de distorsió per unitat de volum, el coeficient de seguretat és més gran que l'obtingut amb la teoria de tensió tallant màxima i, per tant, les tensions límit tenen valors més elevats amb aquesta teoria.

Problema 1.9. Determineu el coeficient de seguretat i les tensions límit que portarien l'element de la Figura 1.9 a la fallada, per als dos casos següents:

a) Les tensions són: $\sigma_x = -80 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 30 \text{ MPa}$.

b) Les tensions són: $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -120 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -30 \text{ MPa}$.

Es tracta d'un material fràgil amb $S_{ut} = 100 \text{ MPa}$ i $S_{uc} = 300 \text{ MPa}$ i es demana aplicar les teories de:

I. Tensió normal màxima.

II. Fricció interna (Criteri de Mohr – Coulomb).

III. Fricció interna modificada (Criteri de Mohr – Coulomb modificat).

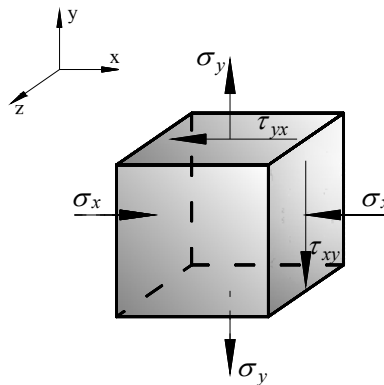


Figura 1.9

a) Les tensions són: $\sigma_x = -80 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 30 \text{ MPa}$.

I. Teoria de la tensió normal màxima.

En aquesta teoria de la tensió normal màxima, tenint en compte que $\sigma_a > \sigma_b$, s'han de complir les condicions següents: $\sigma_a < S_{ut}$ i $|\sigma_b| < S_{uc}$.

on σ_b i σ_a són les tensions principals i S_{ut} i S_{uc} són les tensions de ruptura obtingudes en els assaigs de tracció i compressió.

Les tensions principals s'obtenen utilitzant el cercle de Mohr. El centre del cercle de Mohr és:

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-80 + 10}{2} = -35 \text{ MPa}$$

I el radi:

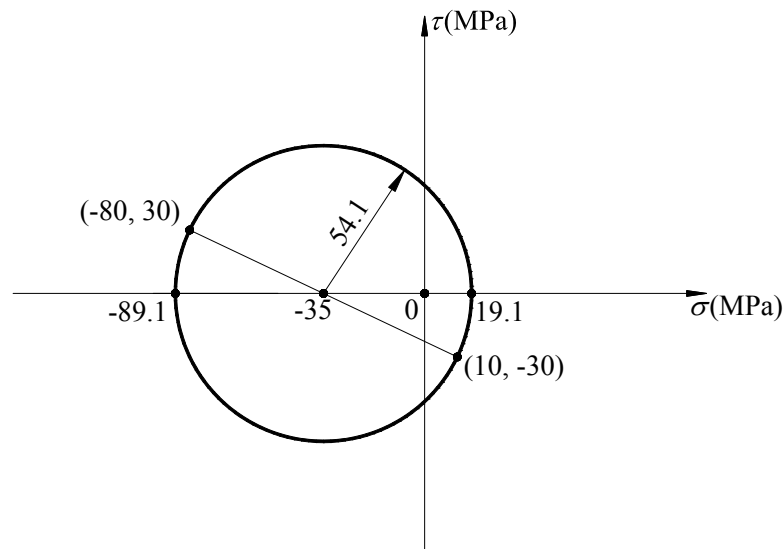
$$R = \sqrt{(\sigma_x - OC)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(-80 + 35)^2 + 30^2} = 54.1 \text{ MPa}$$

Les tensions principals són:

$$\sigma_I = \sigma_a = OC + R = -35 + 54.08 = 19.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_b = OC - R = -35 - 54.08 = -89.1 \text{ MPa}$$

Amb aquestes dades es representa el cercle de Mohr:



Com que

$$\sigma_a < S_{ut} \Rightarrow 19.1 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_b| < S_{uc} \Rightarrow |-89.1 \text{ MPa}| < 300 \text{ MPa}$$

es comprova que les dues condicions es compleixen, i que per tant, segons aquesta teoria, l'element no fallarà.

A partir de les tensions principals, es pot determinar el coeficient de seguretat i les tensions límit que portarien a l'element de la Figura 1.9 a la fallada.

El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la fórmula següent:

$$n_{\sigma_{max}} = \min \left[\frac{S_{uc}}{|\sigma_b|}; \frac{S_{ut}}{\sigma_a} \right]$$

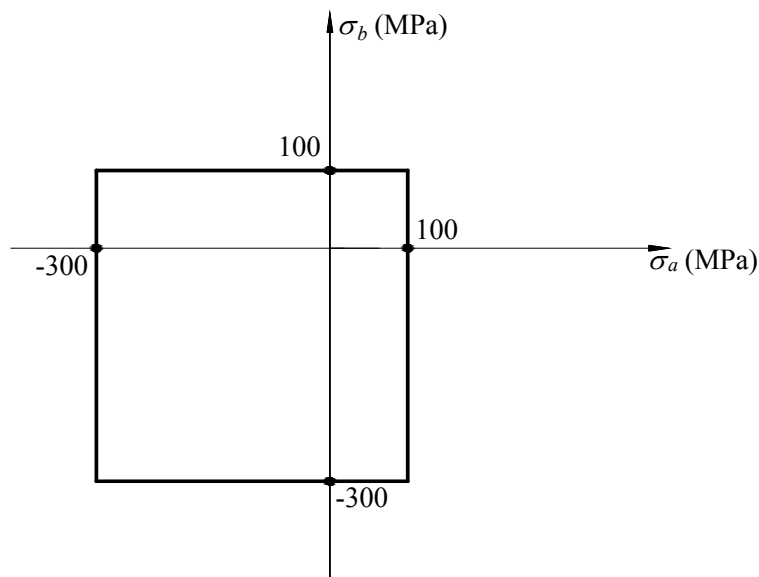
$$n_{\sigma_{max}} = \min \left[\frac{300}{|-89.1|}; \frac{100}{19.1} \right] = 3.36$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 3.36.

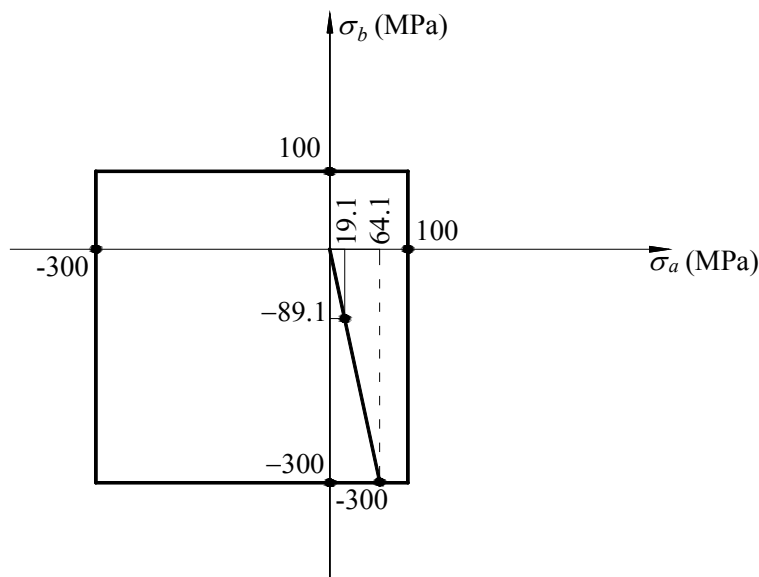
Els valors de les tensions en el cas límit de fallada es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x \cdot n = -80 \cdot 3.36 = -269 \text{ MPa} \\ \sigma'_y = \sigma_y \cdot n = 10 \cdot 3.36 = 33.6 \text{ MPa} \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot n = 30 \cdot 3.36 = 101 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_I = 64.1 \text{ MPa} \\ \sigma'_{II} = -300 \text{ MPa} \end{cases}$$

La representació gràfica de la superfície de fallada en l'estat pla de tensions és:



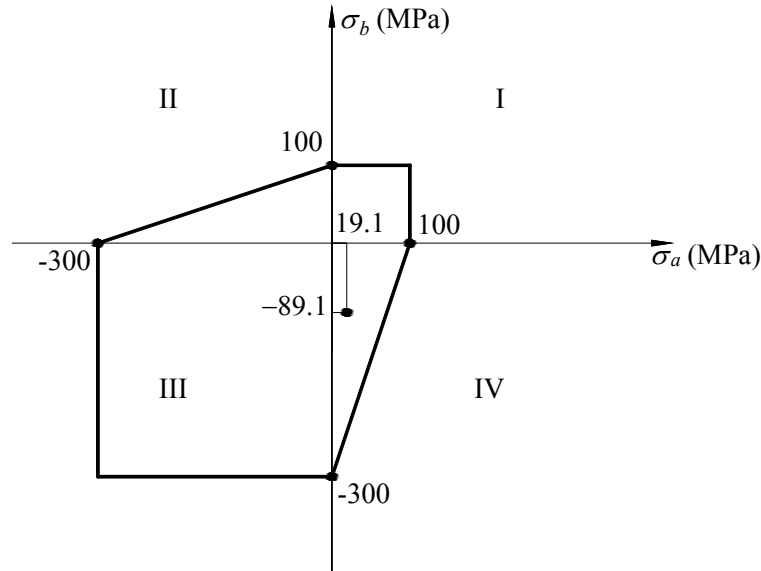
Si es calculen les tensions principals a partir de les tensions de l'enunciat i les tensions principals a partir de les tensions límit, es poden representar en el gràfic anterior.



La línia contínua representa les tensions principals obtingudes amb les dades de l'enunciat, i la discontinua, les noves tensions principals obtingudes a partir de les tensions límit.

II. Teoria de la fricció interna (Criteri de Mohr – Coulomb).

Per poder aplicar la teoria de la fricció interna, cal saber en quin quadrant de la representació gràfica en el pla $\sigma_a\sigma_b$ es troba l'element, per poder aplicar les fórmules adequades.



En aquest cas, l'element de la Figura 1.9 es troba en el quadrant IV, perquè es compleix que:

$$\sigma_a > 0 \Rightarrow 19.1 \text{ MPa} > 0$$

$$\sigma_b < 0 \Rightarrow -89.1 \text{ MPa} < 0$$

El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la següent fórmula:

$$\frac{1}{n_{\text{mohr-coulomb}}} = \frac{\sigma_a}{S_{ut}} - \frac{\sigma_b}{S_{uc}}$$

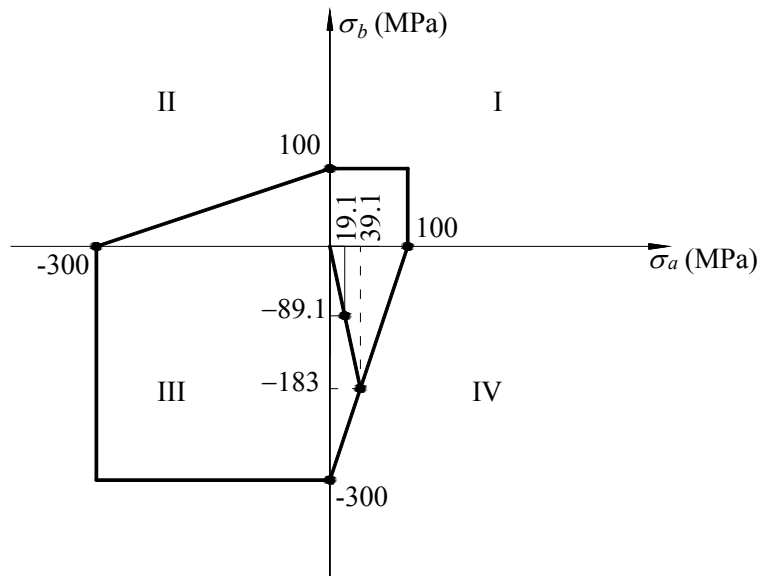
$$\frac{1}{n_{\text{mohr-coulomb}}} = \frac{19.1}{100} - \frac{-89.1}{300} = 0.49$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 2.05.

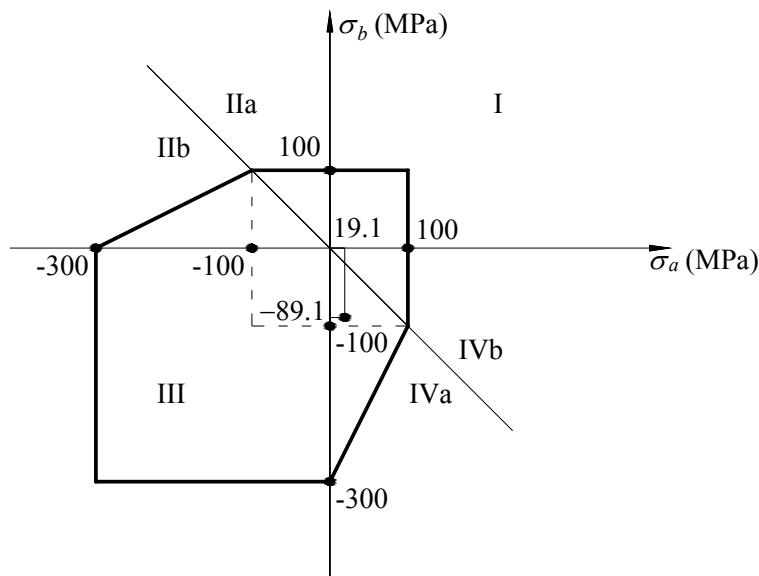
I, els valors de les tensions en el cas límit de falla es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x \cdot n = -80 \cdot 2.05 = -164 \text{ MPa} \\ \sigma'_y = \sigma_y \cdot n = 10 \cdot 2.05 = 20.5 \text{ MPa} \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot n = 30 \cdot 2.05 = 61.5 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_I = 39.1 \text{ MPa} \\ \sigma'_{II} = -183 \text{ MPa} \end{cases}$$

A la representació gràfica de la superfície de fallada en l'estat pla de tensions es poden representar les tensions principals a partir de les tensions de l'enunciat, i les tensions principals a partir de les tensions límit:



III. Teoria de la fricció interna modificada (Criteri de Mohr – Coulomb modificat).



Per poder aplicar la teoria de la fricció interna modificada, s'ha de seguir el mateix procediment que amb la teoria anterior. Cal saber en quin quadrant de la representació gràfica es troba l'element de la Figura 1.9, per poder aplicar les fórmules adequades.

En primer lloc, s'han de determinar els valors de les tensions principals. A l'apartat I s'han trobat aquests valors amb l'ajuda del cercle de Mohr:

$$\sigma_a = \sigma_I = 19.1 \text{ MPa} \text{ i } \sigma_b = \sigma_{II} = -89.1 \text{ MPa} .$$

Per tant, l'estat tensional de l'element de la Figura 1.9 es troba en el quadrant IVa, ja que es compleix que:

$$\sigma_a > 0 \Rightarrow 19.1 \text{ MPa} > 0$$

$$\sigma_b < 0 \Rightarrow -89.1 \text{ MPa} < 0$$

$$\sigma_a < |\sigma_b| \Rightarrow 19.1 \text{ MPa} < |-89.1| \text{ MPa}$$

El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la fórmula següent:

$$\frac{1}{n_{\text{mohr-coulomb-modificat}}} = \frac{\sigma_a}{\frac{S_{ut} \cdot S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}}} - \frac{\sigma_b}{S_{uc}}$$

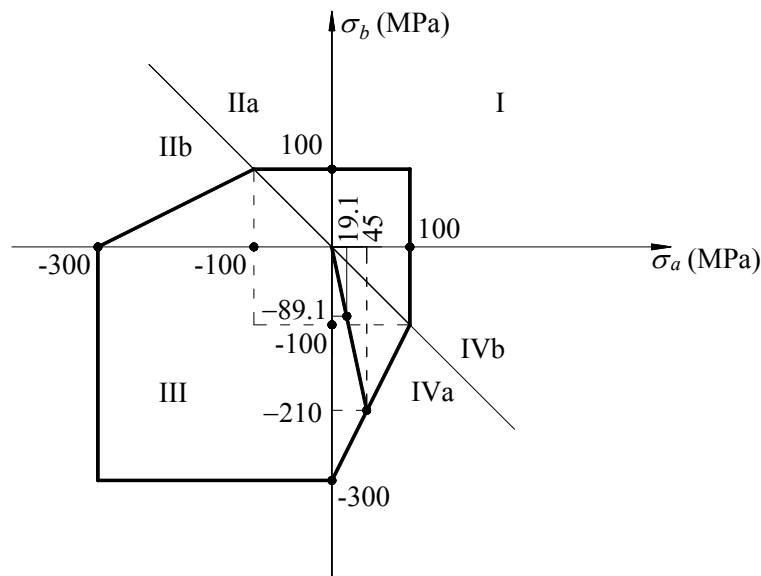
$$\frac{1}{n_{\text{mohr-coulomb-modificat}}} = \frac{19.1}{\frac{100 \cdot 300}{300 - 100}} - \frac{-89.1}{300} = 0.42$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 2.36.

I els valors de les tensions en el cas límit de fallada es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x \cdot n = -80 \cdot 2.36 = -189 \text{ MPa} \\ \sigma'_y = \sigma_y \cdot n = 10 \cdot 2.36 = 23.6 \text{ MPa} \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot n = 30 \cdot 2.36 = 70.7 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 45 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = -210 \text{ MPa} \end{cases}$$

A la representació gràfica de la superfície de fallada en l'estat pla de tensions es poden representar les tensions principals a partir de les tensions de l'enunciat, i les tensions principals a partir de les tensions límit:



En la taula següent es resumeixen els resultats obtinguts amb l'aplicació de les tres teories:

Teoria	n	σ_x' (MPa)	σ_y' (MPa)	τ_{xy}' (MPa)
Tensió normal màxima	3.36	-269	33.6	101
Fricció interna	2.05	-164	20.5	61.5
Fricció interna modificada	2.36	-189	23.6	70.7

Si es comparen els resultats es pot observar que, aplicant la teoria de la tensió normal màxima, el coeficient de seguretat és més gran que els obtinguts amb les teories de fricció interna i de fricció interna modificada i, per tant, les tensions límit tenen valors més elevats amb aquesta teoria. En aquest cas, la teoria més restrictiva és la teoria de la fricció interna.

b) Les tensions són: $\sigma_x = 60$ MPa, $\sigma_y = -150$ MPa, $\tau_{xy} = -30$ MPa .

I. Tensió normal màxima.

En aquesta teoria, tenint en compte que $\sigma_a > \sigma_b$, s'han de complir les condicions següents: $\sigma_a < S_{ut}$ i $|\sigma_b| < S_{uc}$,

on σ_b i σ_a són les tensions principals i S_{ut} i S_{uc} són les tensions de ruptura obtingudes en els assaigs de tracció i compressió.

Es calculen les tensions principals amb el cercle de Mohr. El centre del cercle de Mohr és:

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 120}{2} = -45 \text{ MPa}$$

i el radi,

$$R = \sqrt{(\sigma_x - OC)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(60 + 45)^2 + (-30)^2} = 109 \text{ MPa}$$

Les tensions principals són:

$$\sigma_I = \sigma_a = OC + R = -45 + 109 = 64.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_b = OC - R = -45 - 109 = -154 \text{ MPa}$$

Per tant, tenint en compte que $64.2 \text{ MPa} > -154 \text{ MPa}$ i recuperant les condicions anteriors:

$$\sigma_a < S_{ut} \Rightarrow 64.2 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_b| < S_{uc} \Rightarrow |-154 \text{ MPa}| < 300 \text{ MPa}$$

Es pot comprovar que les dues condicions es compleixen i que, per tant, l'element no fallarà quan s'apliquin les tensions de l'enunciat.

A partir de les tensions principals es poden determinar el coeficient de seguretat i les tensions límit que portarien l'element a la fallada.

El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la fórmula següent:

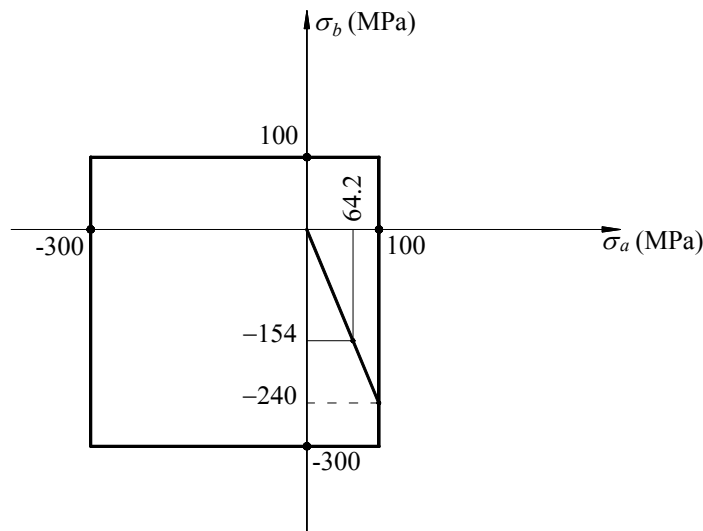
$$n_{\sigma_{max}} = \min \left[\frac{S_{uc}}{|\sigma_b|}; \frac{S_{ut}}{\sigma_a} \right]$$

$$n_{\sigma_{max}} = \min \left[\frac{300}{|-154|}; \frac{100}{64.2} \right] = 1.56$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 1.56, i els valors de les tensions en el cas límit de fallada es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x \cdot n = 60 \cdot 1.56 = 93.5 \text{ MPa} \\ \sigma'_y = \sigma_y \cdot n = -150 \cdot 1.56 = -234 \text{ MPa} \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot n = -30 \cdot 1.56 = -46.7 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_I = 100 \text{ MPa} \\ \sigma'_II = -240 \text{ MPa} \end{cases}$$

A la representació gràfica de la superfície de fallada en l'estat pla de tensions es poden representar les tensions principals a partir de les tensions de l'enunciat i les tensions principals a partir de les tensions límit:

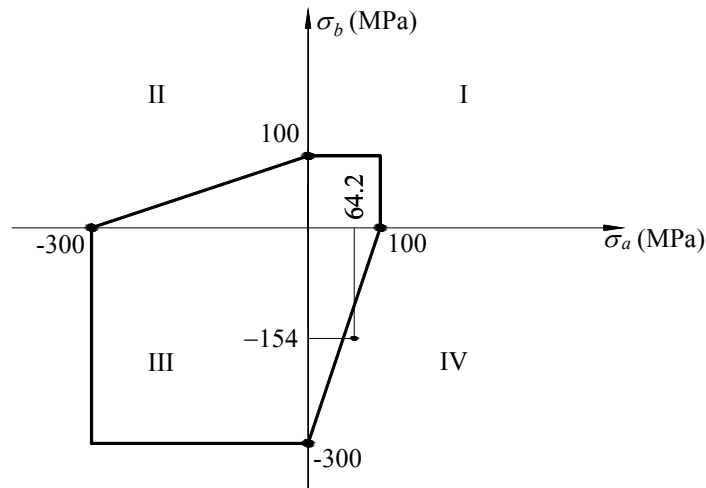


II. Fricció interna (Criteri de Mohr – Coulomb).

Per poder aplicar la teoria de la fricció interna, cal saber en quin quadrant de la representació gràfica es troba l'element de la Figura 1.9, per tal d'aplicar les fórmules adequades. A l'apartat I s'han trobat aquests valors amb l'ajuda del cercle de Mohr, $\sigma_a = 64.2 \text{ MPa}$ i $\sigma_b = -154 \text{ MPa}$. Per tant, l'element de la Figura 1.9 es troba en el quadrant IV, perquè es compleix que:

$$\sigma_a > 0 \Rightarrow 64.2 \text{ MPa} > 0$$

$$\sigma_b < 0 \Rightarrow -154 \text{ MPa} < 0$$



El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la fórmula següent:

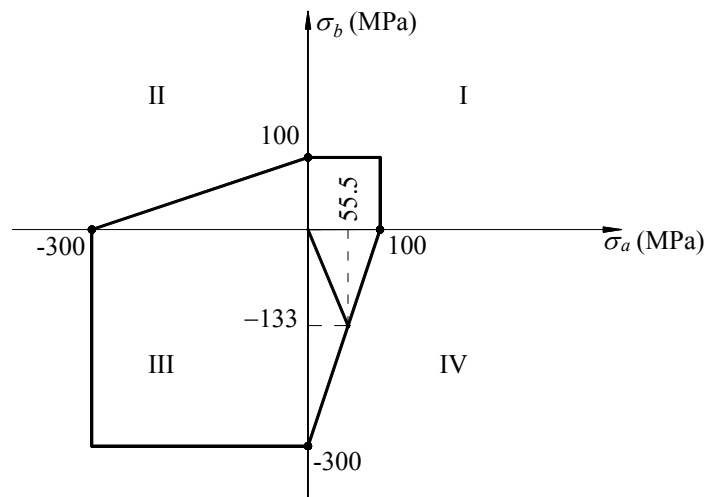
$$\frac{1}{n_{mohr-coulomb}} = \frac{\sigma_a}{S_{ut}} - \frac{\sigma_b}{S_{uc}}$$

$$\frac{1}{n_{mohr-coulomb}} = \frac{64.2}{100} - \frac{-154}{300} = 1.16$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 0.865, i els valors de les tensions en el cas límit de fallada es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

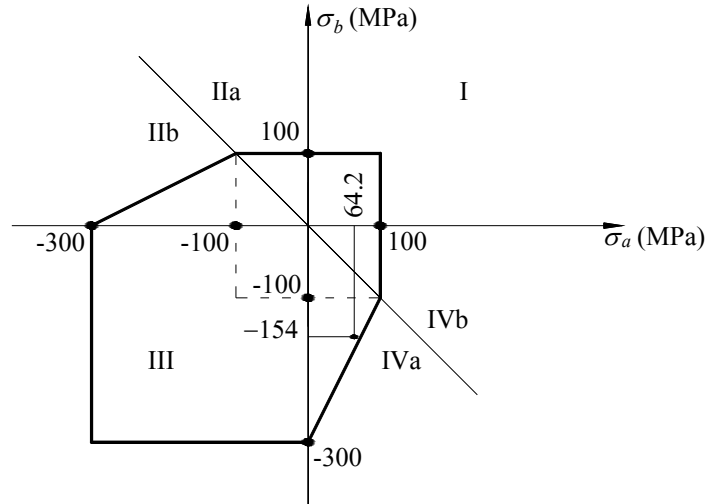
$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x \cdot n = 50 \cdot 1.03 = 51.9 \text{ MPa} \\ \sigma'_y = \sigma_y \cdot n = -120 \cdot 1.03 = -130 \text{ MPa} \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot n = 30 \cdot 1.03 = -26 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_I = 55.5 \text{ MPa} \\ \sigma'_{II} = -133 \text{ MPa} \end{cases}$$

A la representació gràfica de la superfície de fallada en l'estat pla de tensions es poden representar les tensions principals a partir de les tensions de l'enunciat i les tensions principals a partir de les tensions límit:



III. Fricció interna modificada (Criteri de Mohr – Coulomb modificat).

Per poder aplicar la teoria de la fricció interna modificada, s'ha de seguir el mateix procediment que amb la teoria anterior. Cal saber en quin quadrant de la representació gràfica es troba l'element de la Figura 1.9, per tal d'aplicar les fórmules adequades.



En primer lloc, s'han de determinar els valors de les tensions principals. A l'apartat I s'han trobat aquests valors amb l'ajuda del cercle de Mohr, $\sigma_a = 64.2$ MPa i $\sigma_b = -154$ MPa.

Per tant, l'element de la Figura 1.9 es troba en el quadrant IVa, perquè es compleix que:

$$\sigma_a > 0 \Rightarrow 64.2 \text{ MPa} > 0$$

$$\sigma_b < 0 \Rightarrow -154 \text{ MPa} < 0$$

$$\sigma_a < |\sigma_b| \Rightarrow 64.2 \text{ MPa} < |-154 \text{ MPa}|$$

$$\frac{\frac{\sigma_a}{S_{ut} \cdot S_{uc}} - \frac{\sigma_b}{S_{uc}}}{S_{uc} - S_{ut}} < 1 \Rightarrow 0.942 < 1$$

El coeficient de seguretat, en aquest cas, es calcula amb la fórmula següent:

$$n_{\text{mohr-coulomb-modificat}} = \frac{1}{\frac{\frac{\sigma_a}{S_{ut} \cdot S_{uc}} - \frac{\sigma_b}{S_{uc}}}{S_{uc} - S_{ut}}}$$

$$n_{\text{mohr-coulomb-modificat}} = 1.06$$

Per tant, el coeficient de seguretat és 1.06, i els valors de les tensions en el cas límit de fallada es calculen multiplicant la tensió inicial pel coeficient de seguretat:

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x \cdot n = 60 \cdot 1.06 = 63.7 \text{ MPa} \\ \sigma'_y = \sigma_y \cdot n = -150 \cdot 1.06 = -159 \text{ MPa} \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot n = -30 \cdot 1.06 = -31.8 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_I = 68.1 \text{ MPa} \\ \sigma'_II = -164 \text{ MPa} \end{cases}$$

Problema 1.10. En realitzar assaigs sobre unes provetes d'un material fràgil, s'han obtingut els valors de fallada següents:

Assaig de tracció: fallada quan la tensió arriba a 100 MPa.

Assaig de compressió: fallada quan la tensió arriba a -400 MPa.

Assaig biaxial $\sigma_b = -5\sigma_a$: falla quan $\sigma_a = 50$ MPa i $\sigma_b = -250$ MPa .

Determineu quin és el criteri de fallada més adient per a aquest material i dibuixeu la superfície de fallada que en resultaria.

Sabent que es tracta d'un material fràgil, s'aplicaran les teories següent:

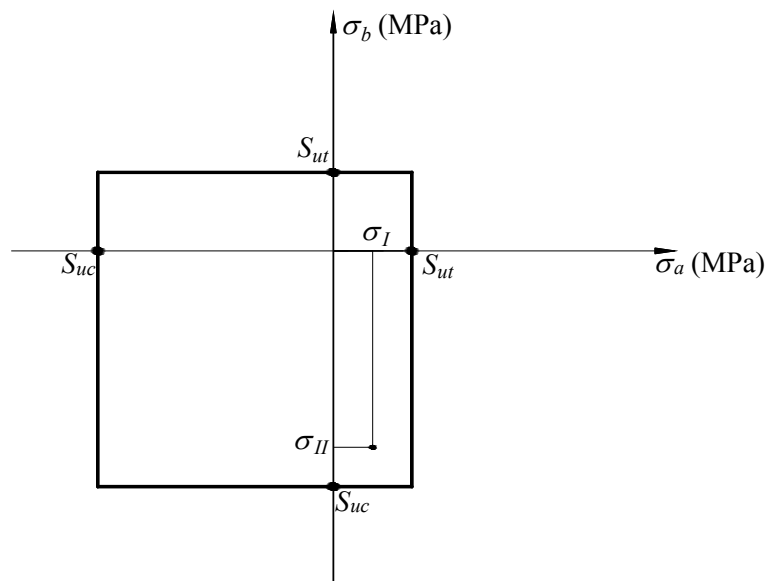
- Tensió normal màxima.
- Fricció interna.
- Fricció interna modificada.

De l'assaig de tracció s'obté la resistència del material a tracció $S_{ut} = 100$ MPa i de l'assaig de compressió, $S_{uc} = -400$ MPa .

a) Tensió normal màxima:

Aplicant la teoria de la tensió normal màxima quan es realitza l'assaig biaxial $\sigma_b = -5\sigma_a$, el material hauria de fallar:

$$\begin{aligned} \text{Si } \sigma_a = S_{ut} &\Rightarrow \sigma_a = 100 \text{ MPa} &\Rightarrow \sigma_b = -500 \text{ MPa} \\ \text{Si } \sigma_b = S_{uc} &\Rightarrow \sigma_b = -400 \text{ MPa} &\Rightarrow \sigma_a = 80 \text{ MPa} \end{aligned}$$



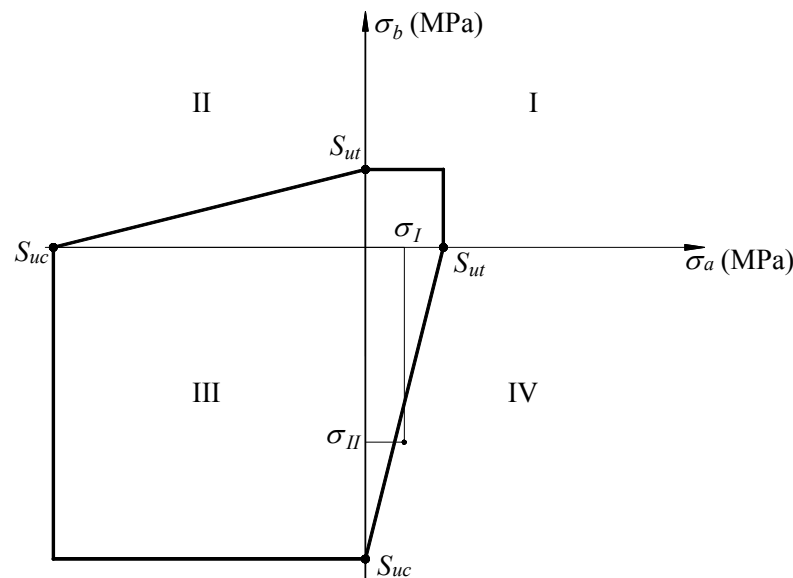
L'element hauria de fallar quan $\sigma_a = 80$ MPa ; en canvi, en l'assaig biaxial ha fallat a $\sigma_a = 50$ MPa , un valor inferior al que prediu la teoria de la tensió normal màxima.

Per tant, aquesta teoria no és adequada per a aquest material.

b) Fricció interna:

Aplicant la teoria de la fricció interna, quan es realitza l'assaig biaxial $\sigma_b = -5\sigma_a$, el material hauria de fallar:

$$\text{Si } \left[\frac{\sigma_a}{S_{ut}} + \frac{|\sigma_b|}{S_{uc}} \right] = \left[\frac{\sigma_a}{S_{ut}} - \frac{5\sigma_a}{S_{uc}} \right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_a = 44.4 \text{ MPa}$$



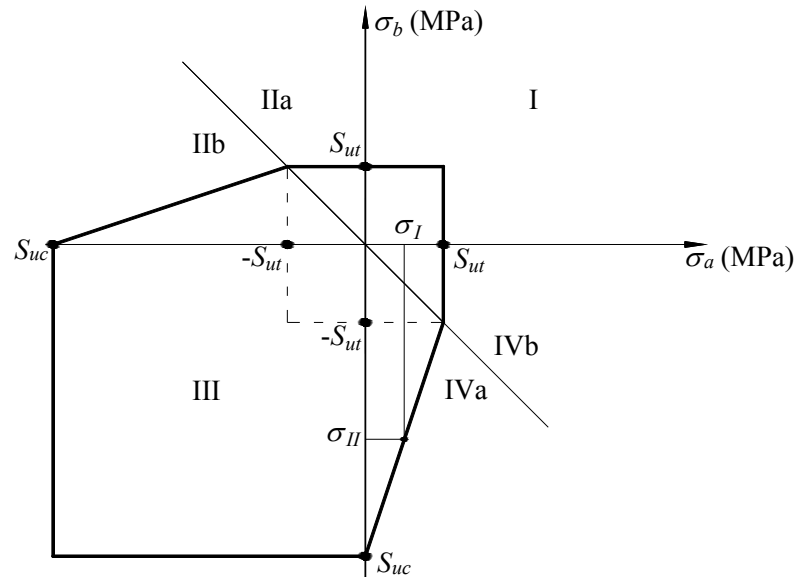
L'element hauria de fallar quan $\sigma_a = 44.4 \text{ MPa}$; en canvi, en l'assaig biaxial ha fallat a $\sigma_a = 50 \text{ MPa}$, un valor superior al que prediu la teoria de la fricció interna. Per tant, aquesta teoria no és adequada per a aquest material, perquè és massa conservadora.

c) Fricció interna modificada:

Aplicant la teoria de la fricció interna modificada, quan es realitza l'assaig biaxial $\sigma_b = -5\sigma_a$, el material hauria de fallar:

$$\text{Si } \frac{\frac{\sigma_a}{|S_{uc}| \cdot S_{ut}}}{|S_{uc}| - S_{ut}} + \frac{\sigma_b}{S_{uc}} = \frac{\frac{\sigma_a}{400 \cdot 100}}{400 - 100} + \frac{-5\sigma_a}{400} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_a = 50 \text{ MPa}$$

L'element hauria de fallar quan $\sigma_a = 50 \text{ MPa}$. Aquest valor coincideix amb el trobat amb l'assaig biaxial, en el qual ha fallat a $\sigma_a = 50 \text{ MPa}$. Per tant, aquesta teoria és adequada per a aquest material.



2. Tracció i compressió

Problema 2.1. Calculeu la força P que s'ha d'aplicar a l'extrem del cilindre de la Figura 2.1 de manera que la seva expansió no deixi espai lliure entre les dues peces.

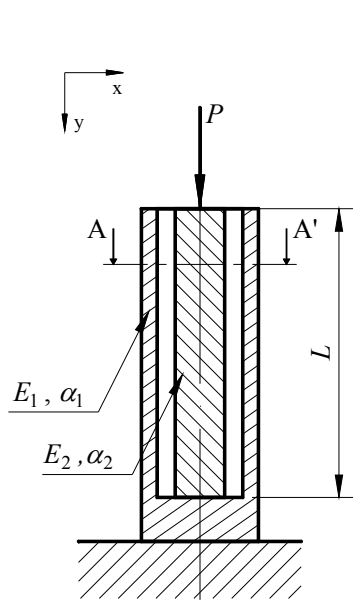
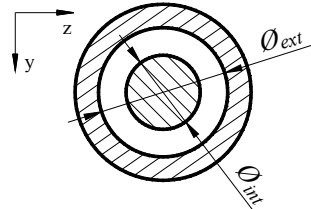


Figura 2.1

Secció A-A'



Dades:

Longitud (L) = 500 mm

Diàmetre exterior (ϕ_{ext}) = 70.25 mm

Diàmetre interior (ϕ_{int}) = 70 mm

Mòdul d'elasticitat del material 1 (E_1) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Mòdul d'elasticitat del material 2 (E_2) = $3.1 \cdot 10^3$ MPa

Coefficient de Poisson (ν) = 0.4

La deformació unitària transversal, ε_T , que ha d'experimentar el cilindre interior per omplir el joc disponible, és:

$$\Delta\phi = \phi_{ext} - \phi_{int} = 70.25 - 70 = 0.25 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta\phi}{\phi_{int}} = \frac{0.25 \text{ mm}}{70 \text{ mm}} = 3.57 \cdot 10^{-3}$$

I la deformació unitària longitudinal, ε_L , és:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad \varepsilon_L = -\frac{\varepsilon_T}{\nu} = -\frac{3.57 \cdot 10^{-3}}{0.4} = -8.93 \cdot 10^{-3}$$

A partir de la llei de Hooke, s'obté la tensió a la barra interior:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

A partir de la tensió, es determina l'esforç normal:

$$N = \sigma \cdot A = -27.68 \cdot \frac{\pi \cdot 70^2}{4} = -107 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Per tant, la força P és de 107 kN.

Problema 2.2. Determineu l'allargament total de l'element de la Figura 2.2, de gruix constant.

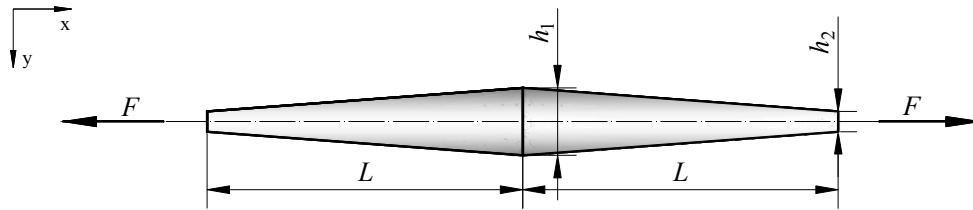
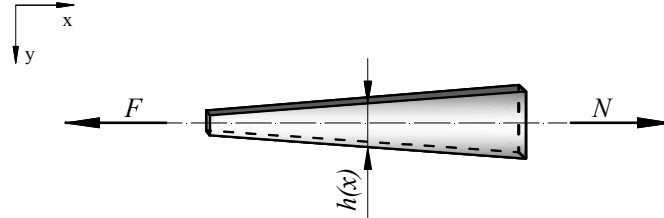


Figura 2.2

Dades:Força (F) = 50 kNLongitud (L) = 500 mmAlçada 1 (h_1) = 50 mmAlçada 2 (h_2) = 25 mmGruix (e) = 6 mmMòdul de Young (E) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Es resol la meitat de la peça, ja que presenta simetria geomètrica i de forces. L'allargament total serà el doble de l'obtingut.



L'allargament serà:

$$\delta = 2 \int_0^L \varepsilon \cdot dx = 2 \int_0^{500} \varepsilon \cdot dx \quad (2.2.1)$$

on:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad (2.2.2)$$

La variació de la secció transversal al llarg de la peça és :

$$A = h(x) \cdot e \quad (2.2.3)$$

on $h(x)$ és una funció lineal:

$$h(x) = A + B \cdot x$$

Es poden determinar les constants A i B a partir dels valors coneguts de 2 punts de la recta:

$$\begin{cases} x = 0 \text{ mm} & h(x) = 25 \text{ mm} \\ x = 500 \text{ mm} & h(x) = 50 \text{ mm} \end{cases}$$

i, per tant:

$$h(x) = 25 + 0.05x$$

Substituint l'equació anterior a l'equació (2.2.3), s'obté la funció de la variació de l'àrea:

$$A = 150 + 0.30x \quad (2.2.4)$$

A partir de l'equació (2.2.1), tenint en compte les equacions (2.2.2) i (2.2.4), i considerant que l'esforç N és constant i igual a 50 kN al llarg de la peça, s'obté:

$$\delta = 2 \int_{x=0}^{x=500} \frac{N}{EA} dx = 2 \int_0^{500} \frac{5 \cdot 10^4}{7 \cdot 10^4} \cdot \frac{dx}{150 + 0.30x} = 3.17 \text{ mm}$$

L'allargament total és de 3.17 mm.

Problema 2.3. La Figura 2.3 representa un cilindre de diferents materials. Calculeu les tensions dels dos materials, per a les següents situacions:

- Aplicant una força de 100 kN.
- Sense aplicar cap força i amb un increment de temperatura de 20 °C.

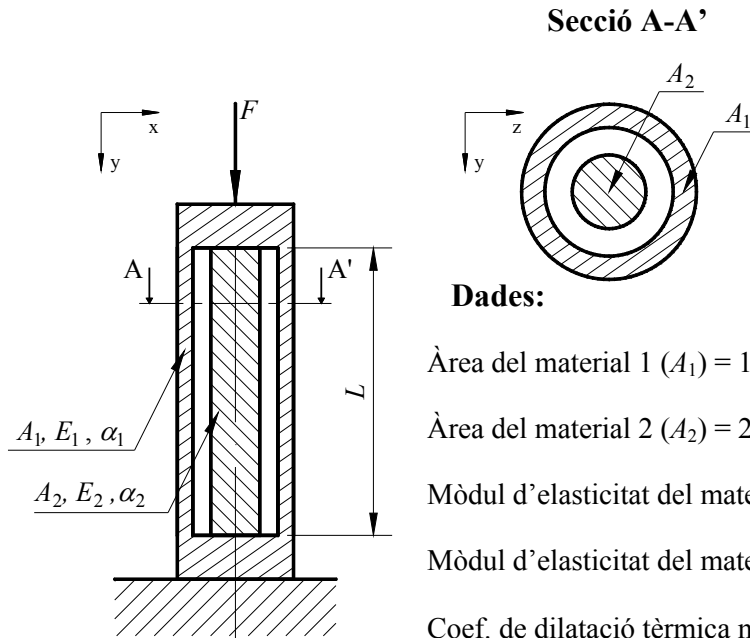


Figura 2.3

Dades:

Àrea del material 1 (A_1) = 10^3 mm²

Àrea del material 2 (A_2) = $2 \cdot 10^3$ mm²

Mòdul d'elasticitat del material 1 (E_1) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Mòdul d'elasticitat del material 2 (E_2) = $2 \cdot 10^4$ MPa

Coef. de dilatació tèrmica material 1 (α_1) = $12 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹

Coef. de dilatació tèrmica material 2 (α_2) = $20 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹

- Aplicant una força de 100 kN.

Es plantegen les equacions d'equilibri:

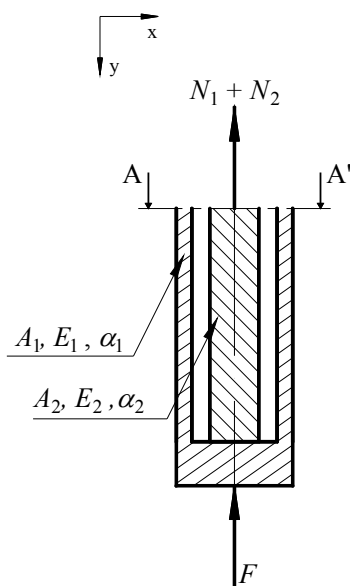
$$\Sigma F_y = 0 \quad 100 + N_1 + N_2 = 0 \quad (2.3.1)$$

on N_1 és la força axial en el material 1 i N_2 en el material 2.

Es tracta d'un cas hiperestàtic amb dues incògnites i una sola equació d'equilibri. Per solucionar-lo cal tenir en compte la compatibilitat de deformacions:

$$\delta_1 = \delta_2 \quad (2.3.2)$$

Les deformacions es poden determinar mitjançant la llei de Hooke, i substituint en l'equació anterior, la deixen de la forma següent:



$$\frac{N_1 \cdot L}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot L}{E_2 \cdot A_2}$$

Per tant:

$$\frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2}$$

Introduint els valors corresponents a les àrees transversals i els mòduls elàstics es té:

$$N_1 = 5 \cdot N_2 \quad (2.3.3)$$

A partir de les equacions (2.3.1) i (2.3.3), es determinen N_1 i N_2 :

$$\begin{cases} 100 + N_1 + N_2 = 0 \\ N_1 = 5N_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = -83.3 \text{ kN} \\ N_2 = -16.7 \text{ kN} \end{cases}$$

Finalment, s'obtenen les tensions en els dos materials:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{83.3 \cdot 10^3}{10^3} = -83.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{16.7 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = -8.33 \text{ MPa}$$

b) Sense aplicar cap força i amb un increment de temperatura de 20 °C.

Es planteja l'equació d'equilibri:

$$\Sigma F_y = 0 \quad N_1 + N_2 = 0 \quad (2.3.4)$$

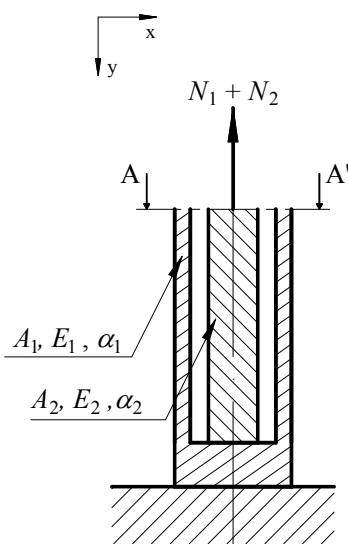
On N_1 és la força axial en el material 1 i N_2 en el material 2.

És tracta d'un cas hiperestàtic i per a solucionar-ho es planteja l'equació de compatibilitat de deformacions:

$$\delta_1 = \delta_2 \quad (2.3.5)$$

La deformació de les dues peces es pot determinar tenint en compte la llei de Hooke i la llei de deformacions per temperatura:

$$\delta_1 = \delta_1^{\Delta T} + \delta_1^N = \alpha_1 \cdot L \cdot \Delta T + \frac{N_1 \cdot L}{E_1 \cdot A_1}$$



$$\delta_2 = \delta_2^{\Delta T} + \delta_2^N = \alpha_2 \cdot L \cdot \Delta T + \frac{N_2 \cdot L}{E_2 \cdot A_2}$$

que substituint a (2.3.5) i dividint per L queda:

$$\alpha_1 \cdot \Delta T + \frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} = \alpha_2 \cdot \Delta T + \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2}$$

i substituint els valors coneguts:

$$12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 + \frac{N_1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 20 + \frac{N_2}{2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3}$$

i simplificant:

$$N_1 = 32 \cdot 10^3 + 5N_2 \quad (2.3.6)$$

A partir de les equacions (2.3.4) i (2.3.6), es determinen N_1 i N_2 :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 0 \\ N_1 = 32000 + 5N_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 5.33 \text{ kN} \\ N_2 = -5.33 \text{ kN} \end{cases}$$

Finalment, es poden determinar les tensions:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{5.33 \cdot 10^3}{10^3} = 5.33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{5.33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = -2.67 \text{ MPa}$$

Problema 2.4. La Figura 2.4 representa una columna de formigó armat sotmesa a una càrrega de compressió. Calculeu la tensió del formigó i de l'acer en les situacions següents:

- Aplicant una força de 800 kN.
- Amb una variació de temperatura de 30 °C.
- Aplicant simultàniament la força i la variació de temperatura.

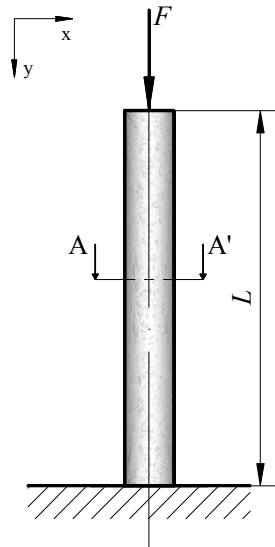
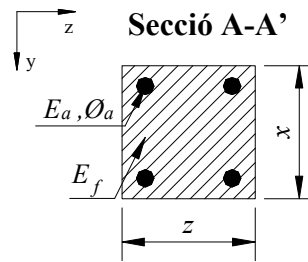
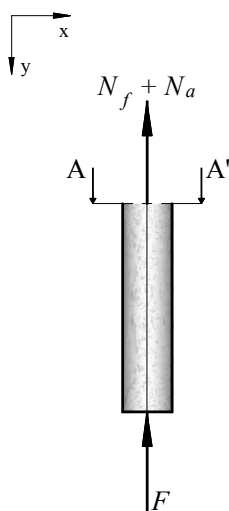


Figura 2.4

**Dades:**Longitud (L) = 2 mSecció de la columna ($z \cdot x$) = 300 mm·300 mmDiàmetre de l'armadura (\varnothing_a) = 20 mmMòdul d'elasticitat del material 1 (E_f) = $3 \cdot 10^4$ MPaMòdul d'elasticitat del material 2 (E_a) = $2 \cdot 10^5$ MPaCoef. de dilatació tèrmica material 1 (α_f) = $11.2 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹Coef. de dilatació tèrmica material 2 (α_a) = $12 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹

- Aplicant una força de 800 kN.



Es planteja l'equació d'equilibri:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$800 + N_f + N_a = 0 \quad (2.4.1)$$

on N_f és la força axial en el formigó i N_a la força axial a l'acer.

Es tracta d'un problema hiperestàtic amb dues incògnites i una sola equació d'equilibri. Per solucionar-lo, es planteja la condició de compatibilitat de deformacions:

$$\delta_f = \delta_a \quad (2.4.2)$$

Les deformacions queden definides per la llei de Hooke:

$$\delta_f = \frac{N_f \cdot L}{E_f \cdot A_f}$$

$$\delta_a = \frac{N_a \cdot L}{E_a \cdot A_a}$$

Substituint en l'equació (2.4.2) s'obté:

$$\frac{N_f}{E_f \cdot A_f} = \frac{N_a}{E_a \cdot A_a}$$

on A_f és l'àrea del formigó i A_a l'àrea de l'acer.

$$A_a = \pi \cdot r^2$$

$$A_a = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \quad A_a = 1.26 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_f = A_t - A_a \quad \text{on } A_t \text{ és l'àrea total de la secció.}$$

$$A_f = x \cdot z - \pi \cdot r^2$$

$$A_f = 300 \cdot 300 - 1257 \quad A_f = 8.87 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

Substituint valors es troba:

$$\frac{N_f}{3 \cdot 10^4 \cdot 8.87 \cdot 10^4} = \frac{N_a}{2 \cdot 10^5 \cdot 1.26 \cdot 10^3}$$

$$N_f = 10.59 \cdot N_a \quad (2.4.3)$$

A partir de les equacions (2.4.1) i (2.4.3), es determinen N_a i N_f :

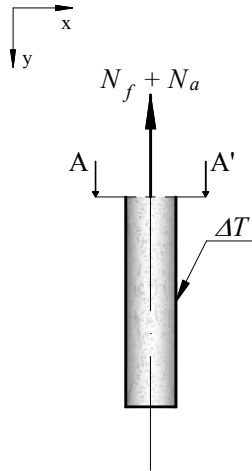
$$\begin{cases} 800 + N_f + N_a = 0 \\ N_f = 10.59 \cdot N_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_a = -69 \text{ kN} \\ N_f = -731 \text{ kN} \end{cases}$$

Finalment, es poden determinar les tensions en el formigó i en l'acer.

$$\sigma_f = \frac{N_f}{A_f} = -\frac{731 \cdot 10^3}{8.87 \cdot 10^4} = -8.24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_a} = -\frac{69.02 \cdot 10^3}{1.26 \cdot 10^3} = -54.9 \text{ MPa}$$

b) Amb una variació de temperatura de 30 °C.



Es planteja l'equació d'equilibri:

$$\Sigma F_y = 0 \quad N_f + N_a = 0 \quad (2.4.4)$$

És un cas hiperestàtic, amb dues incògnites i una sola equació. Es planteja la compatibilitat de deformacions:

$$\delta_f = \delta_a \quad (2.4.5)$$

La deformació de les dues peces es pot determinar tenint en compte la llei de Hooke i la llei de deformacions per temperatura:

$$\delta_f = \delta_f^{\Delta T} + \delta_f^N = \alpha_f \cdot L \cdot \Delta T + \frac{N_f \cdot L}{E_f \cdot A_f}$$

$$\delta_a = \delta_a^{\Delta T} + \delta_a^N = \alpha_a \cdot L \cdot \Delta T + \frac{N_a \cdot L}{E_a \cdot A_a}$$

Substituint a l'equació (2.4.5), s'obté:

$$\alpha_f \cdot L \cdot \Delta T + \frac{N_f \cdot L}{E_f \cdot A_f} = \alpha_a \cdot L \cdot \Delta T + \frac{N_a \cdot L}{E_a \cdot A_a}$$

i substituint valors:

$$11.2 \cdot 10^{-6} \cdot 30 + \frac{N_f}{3 \cdot 10^4 \cdot 8.87 \cdot 10^4} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 30 - \frac{N_f}{2 \cdot 10^5 \cdot 1.26 \cdot 10^3} \quad (2.4.6)$$

A partir de les equacions (2.4.3) i (2.4.6), es determinen N_a i N_f .

$$\begin{cases} \frac{N_f}{3 \cdot 10^4 \cdot 8.87 \cdot 10^4} + \frac{N_f}{2 \cdot 10^5 \cdot 1.26 \cdot 10^3} = 2.4 \cdot 10^{-5} \\ N_f + N_a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_f = 5.5 \text{ kN} \\ N_a = -5.5 \text{ kN} \end{cases}$$

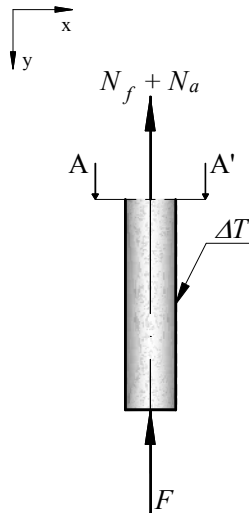
Finalment, es poden determinar les tensions en el formigó i en l'acer.

$$\sigma_f = \frac{N_f}{A_f} = \frac{5.5 \cdot 10^3}{8.87 \cdot 10^4} = 0.062 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_a} = -\frac{5.5 \cdot 10^3}{1.26 \cdot 10^3} = -4.38 \text{ MPa}$$

A causa de la similitud de valors dels dos coeficients de dilatació, es pot observar que es generen forces i tensions relativament baixes si es comparen amb les de l'apartat a).

c) Aplicant simultàniament la força i la variació de temperatura.



Per trobar l'efecte combinat de la càrrega i de l'increment de la temperatura, s'aplica el principi de superposició:

$$\sigma_f = -8.24 + 0.062 = -8.18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = -54.9 - 4.38 = -59.3 \text{ MPa}$$

Problema 2.5. Per a l'element de la Figura 2.5, format per dos materials (alumini i acer), suposant que no intervé el pes propi i que hi ha adherència perfecta entre els dos materials, calculeu:

- La tensió normal que suporten l'acer i l'alumini al tram BC.
- El desplaçament del punt B i del punt C.

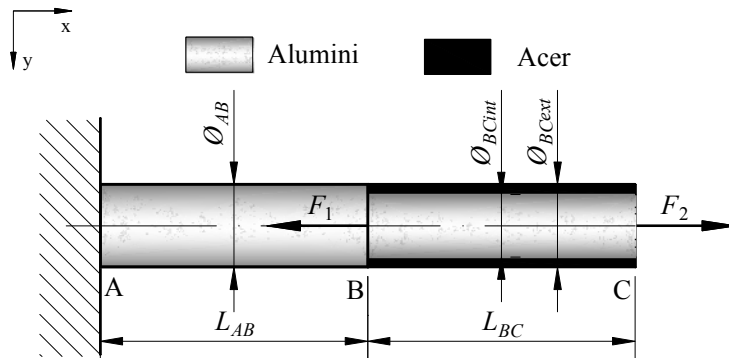


Figura 2.5

Dades:

Força 1 (F_1) = 100 kN

Força 2 (F_2) = 200 kN

Longitud del tram AB (L_{AB}) = 0.8 m

Longitud del tram BC (L_{BC}) = 0.8 m

Diàmetre del tram AB (\varnothing_{AB}) = 250 mm

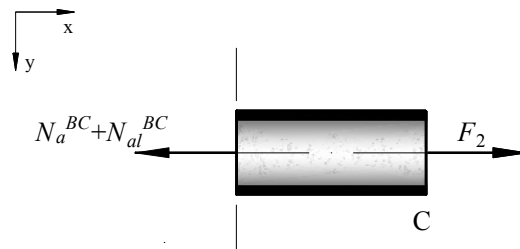
Diàmetre exterior del tram BC (\varnothing_{BCext}) = 250 mm

Diàmetre interior (\varnothing_{BCint}) = 200 mm

Mòdul d'elasticitat de l'acer (E_a) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Mòdul d'elasticitat de l'alumini (E_{al}) = $7.5 \cdot 10^4$ MPa

- La tensió normal que suporten l'acer i l'alumini al tram BC.



Es talla la peça per una secció genèrica del tram BC i es planteja l'equació d'equilibri de forces horitzontals:

$$N_a^{BC} + N_{al}^{BC} = 200 \text{ kN} \quad (2.5.1)$$

Es tracta d'un cas hiperestàtic amb dues incògnites i una sola equació d'equilibri. Per solucionar-lo, es planteja la compatibilitat de deformacions:

$$\delta_a^{BC} = \delta_{al}^{BC}$$

Substituint les deformacions per les expressions corresponents en la llei de Hooke s'obté:

$$\frac{N_a^{BC}}{E_a \cdot A_a} = \frac{N_{al}^{BC}}{E_{al} \cdot A_{al}}$$

on A_a és l'àrea de l'acer i A_{al} la de l'alumini.

$$A_a = \frac{\pi \cdot (\phi_{BCext}^2 - \phi_{BCint}^2)}{4} = \frac{\pi \cdot (250^2 - 200^2)}{4} = 1.77 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$A_{al} = \frac{\pi \cdot \phi_{BCint}^2}{4} = \frac{\pi \cdot 200^2}{4} = 3.14 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

Substituint valors, s'obté:

$$\frac{N_a^{BC}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1.77 \cdot 10^4} = \frac{N_{al}^{BC}}{7.5 \cdot 10^4 \cdot 3.14 \cdot 10^4}$$

$$N_a^{BC} = 1.5 N_{al}^{BC} \quad (2.5.2)$$

A partir de les equacions (2.5.1) i (2.5.2), es determinen N_a^{BC} i N_{al}^{BC} :

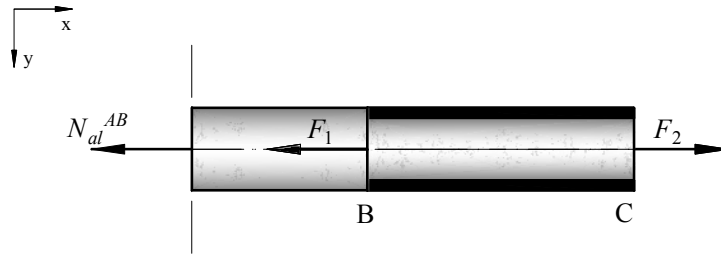
$$\begin{cases} N_a^{BC} + N_{al}^{BC} = 200 \text{ kN} \\ N_a^{BC} = 1.5 N_{al}^{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_a^{BC} = 120 \text{ kN} \\ N_{al}^{BC} = 80 \text{ kN} \end{cases}$$

Finalment, es poden determinar les tensions dels materials:

$$\sigma_a^{BC} = \frac{N_a^{BC}}{A_a} = \frac{120 \cdot 10^3}{1.77 \cdot 10^4} = 6.79 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{al}^{BC} = \frac{N_{al}^{BC}}{A_{al}} = \frac{80 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 10^4} = 2.55 \text{ MPa}$$

b) El desplaçament del punt B i del punt C.



Per determinar el desplaçament dels punts B i C, abans cal determinar els esforços en el tram AB. Es talla la peça per una secció genèrica d'aquest tram i es planteja l'equació d'equilibri de forces:

$$N_{al}^{AB} = F_2 - F_1 = 200 - 100$$

$$N_{al}^{AB} = 100 \text{ kN}$$

Com que el punt A és fix, $\delta_B = \delta_{AB}$ i $\delta_C = \delta_{AB} + \delta_{BC}$.

$$\delta_{AB} = \int_A^B \varepsilon \cdot dx = \int_A^B \frac{N}{A \cdot E} dx = \frac{N_{al}^{AB} \cdot L_{AB}}{E_{al} \cdot A_{al}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 800}{7.5 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 125^2} = 0.02173 \text{ mm}$$

$$\delta_{BC} = \int_B^C \varepsilon \cdot dx = \int_B^C \frac{N}{A \cdot E} dx = \frac{N_a^{BC} \cdot L_{BC}}{E_a \cdot A_a} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 800}{2 \cdot 10^5 \cdot 17671.46} = 0.02716 \text{ mm}$$

$$\delta_B = \delta_{AB} = 0.02173 \text{ mm}$$

Per tant, el punt B es desplaça 0.0217 mm cap a la dreta.

$$\delta_C = \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0.02173 + 0.02716 = 0.04889 \text{ mm}$$

Per tant, el punt C es desplaça 0.0489 mm cap a la dreta (+x).

Problema 2.6. La Figura 2.6 representa una barra encastada pels extrems amb una força aplicada en el punt C. Determineu:

- Les reaccions en els recolzaments de la barra, sabent que està sotmesa a un increment de temperatura de 30 °C.
- El desplaçament del punt C.

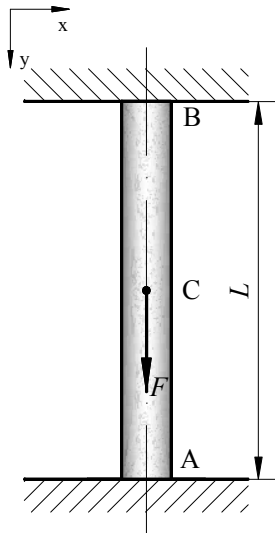


Figura 2.6

Dades:

Força aplicada en el punt C (F) = 100 kN

Longitud (L) = 1 m

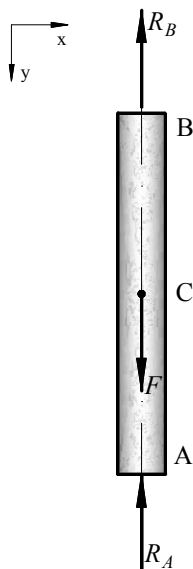
Àrea de la barra (A) = 10^3 mm²

Mòdul d'elasticitat del material (E) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Coef. de dilatació tèrmica del material (α) = $5 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹

Increment de temperatura (ΔT) = +30 °C

- Les reaccions en els recolzaments de la barra, sabent que està sotmesa a un increment de temperatura de 30 °C.



Es planteja l'equació d'equilibri de forces:

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_A + R_B = F$$

$$R_A + R_B = 100 \text{ kN} \quad (2.6.1)$$

Es tracta d'una estructura d'un grau d'hiperestaticitat; per tant, cal imposar una condició de deformació.

$$\delta_{AB} = 0$$

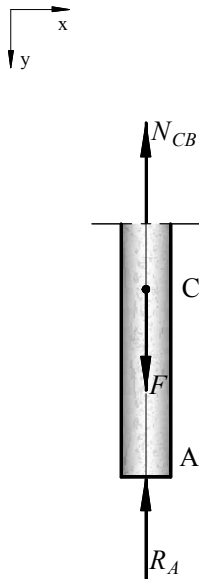
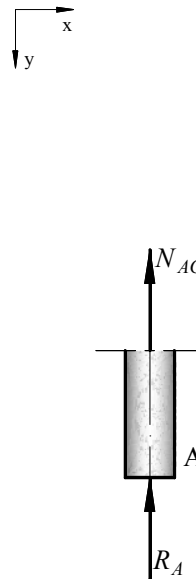
La deformació està composta per la deformació tèrmica i la deformació causada pels esforços normals:

$$\delta_{AB}^N + \delta_{AB}^{\Delta T} = 0$$

Substituint les deformacions de l'equació anterior per les expressions corresponents en la llei de Hooke i en la llei de deformacions tèrmiques, s'obté:

$$\frac{N_{CB} \cdot L_{CB}}{E \cdot A} + \frac{N_{AC} \cdot L_{AC}}{E \cdot A} + \alpha \cdot L_{AB} \cdot \Delta T = 0 \quad (2.6.2)$$

Per determinar una relació entre els esforços axials i una de les reaccions es realitza un tall i es planteja l'equilibri de forces.

Tram BC**Tram AC**

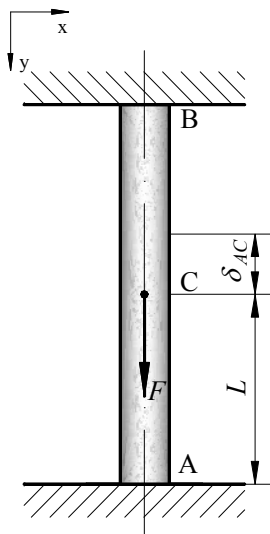
$$N_{CB} = F - R_A = 100 - R_A$$

$$N_{AC} = -R_A$$

Substituint les relacions anteriors a l'equació (2.6.2), s'obté:

$$\frac{(100 \cdot 10^3 - R_A) \cdot 0.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^3} - \frac{(R_A) \cdot 0.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^3} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 30 = 0$$

D'on es determina que $R_A = 80$ kN. Substituint el valor obtingut a l'equació (2.6.1) s'obté $R_B = 20$ kN.

b) El desplaçament del punt C.

El desplaçament del punt C respecte del punt A s'obté tenint en compte la llei de Hooke i la llei de deformacions tèrmiques:

$$\delta_{AC} = \delta_{AC}^N + \delta_{AC}^{\Delta T} = \frac{N_{AC} \cdot L_{AC}}{E \cdot A} + \alpha \cdot L_{AC} \cdot \Delta T$$

Sabent que $N_{AC} = -R_A$

$$\delta_{AC} = \frac{-8 \cdot 10^4 \cdot 0.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^3} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5 \cdot 10^3 \cdot 30$$

$$\delta_{AC} = -0.2 + 0.075 = -0.125 \text{ mm}$$

El tram AC s'escurça, i per tant el punt C es desplaça 0.125 mm cap avall (-y).

Problema 2.7. L'element de la Figura 2.7 representa una barra d'un sol material amb dos trams de diferent secció, sol·licitat per forces i sotmès a una variació de la temperatura. Negligint l'efecte del pes propi, determineu:

- Les tensions normals i les deformacions unitàries al tram AB .
- El desplaçament del punt B.

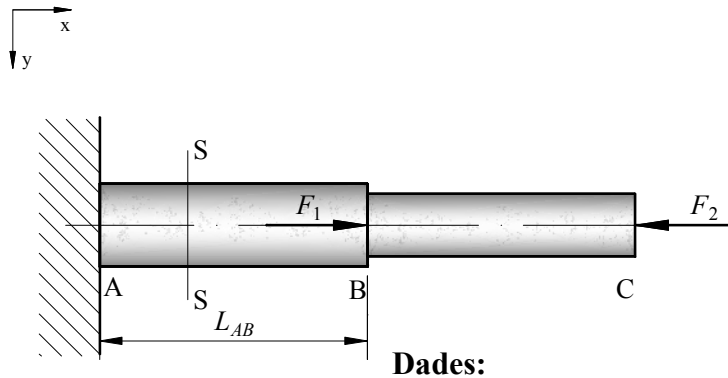


Figura 2.7

Dades:

Força aplicada en el punt B (F_1) = 30 kN

Força aplicada en el punt C (F_2) = 10 kN

Longitud del tram AB (L_{AB}) = 0.8 m

Àrea del tram AB (A_{AB}) = 10^3 mm²

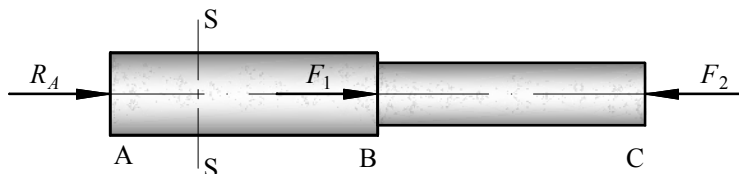
Mòdul d'elasticitat (E) = $1 \cdot 10^4$ MPa

Coef. de dilatació tèrmica del material (α) = $1 \cdot 10^{-5}$ °C⁻¹

Increment de temperatura (ΔT) = +30 °C

- Les tensions i deformacions unitàries al tram AB .

En primer lloc es calcula la reacció a l'encastament plantejant l'equilibri de forces:



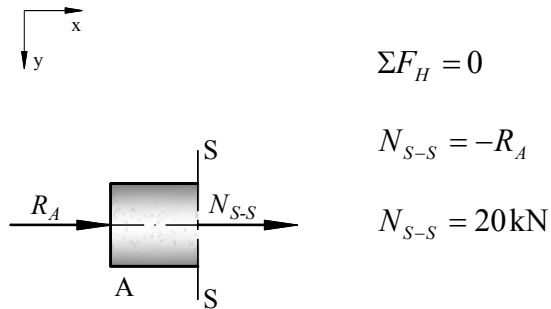
$$\Sigma F_H = 0$$

$$R_A + F_1 - F_2 = 0$$

Substituint les variables conegudes:

$$R_A = -20 \text{ kN}$$

Per calcular el valor de l'esforç normal al tram AB , es planteja l'equilibri entre forces externes i internes (esforços), aplicant un tall fictici a una secció intermèdia S-S:



A partir del valor de l'esforç normal, es pot determinar la tensió de la secció S-S i, per extensió, en tot el tram AB:

$$\sigma_{S-S} = \frac{N_{S-S}}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = 20 \text{ MPa}$$

La deformació unitària al tram AB és la suma de la deformació unitària causada per la tensió i per la variació de temperatura:

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon^N + \varepsilon^{\Delta T} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{20}{1 \cdot 10^4} + 1 \cdot 10^{-5} \cdot 30$$

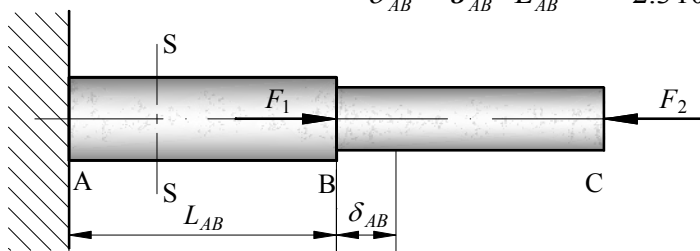
La deformació unitària al tram AB resulta ser $2.3 \cdot 10^{-3}$.

b) El desplaçament del punt B.

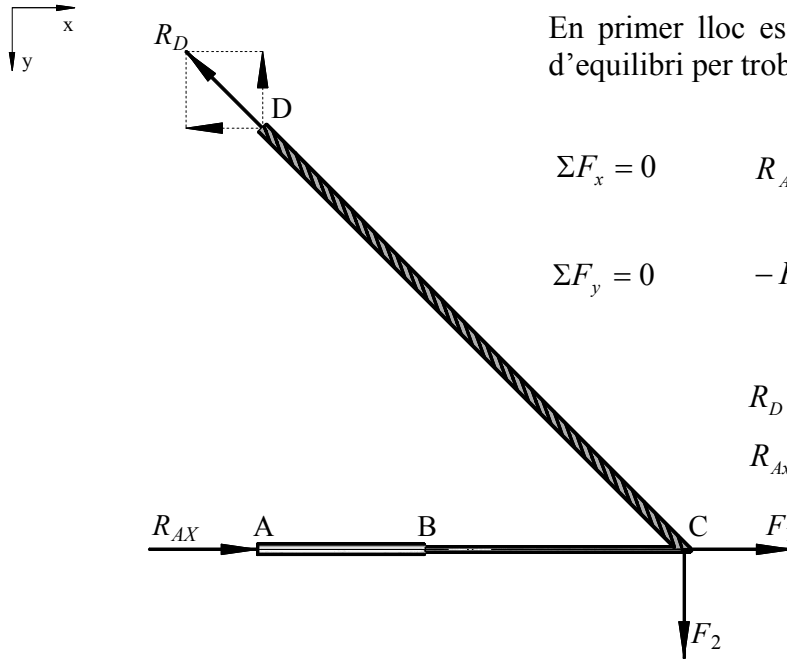


Com que el punt A es considera fix, $\delta_{AB} = \delta_B$.

Com que la deformació unitària del tram AB és constant,
 $\delta_{AB} = \varepsilon_{AB} \cdot L_{AB} = 2.3 \cdot 10^{-3} \cdot 800 = 1.84 \text{ mm}$



El tram AB s'allarga, i per tant el punt B es desplaça 1.84 mm cap a la dreta (+x).

a) Els esforços a l'acer i a l'alumini al tram AB .

En primer lloc es plantegen les equacions d'equilibri per trobar les reaccions:

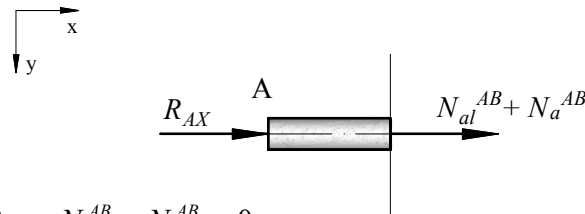
$$\Sigma F_x = 0 \quad R_{Ax} - R_D \cdot \cos(45) + 30 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -R_D \cdot \sin(45) + 100 = 0$$

$$R_D = 141 \text{ kN}$$

$$R_{Ax} = 70 \text{ kN}$$

L'esforç normal al tram AB es repartirà entre l'acer i l'alumini. Plantegem l'equilibri en una secció qualsevol de la barra AB :



$$\Sigma F_x = 0 \quad R_{Ax} + N_a^{AB} + N_{al}^{AB} = 0$$

$$70 \cdot 10^3 + N_a^{AB} + N_{al}^{AB} = 0 \quad (2.8.1)$$

Es tracta d'un cas hiperestàtic amb dues incògnites i una sola equació d'equilibri. Per solucionar-lo, es planteja la compatibilitat de deformacions:

$$\delta_a^{AB} = \delta_{al}^{AB}$$

Tenint en compte la llei de Hooke i substituint:

$$\frac{N_a^{AB} \cdot L_{AB}}{E_a \cdot A_a} = \frac{N_{al}^{AB} \cdot L_{AB}}{E_{al} \cdot A_{al}}$$

d'on:

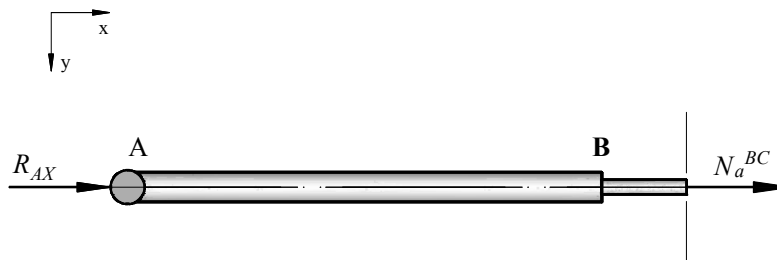
$$N_a^{AB} = 1.43 \cdot N_{al}^{AB} \quad (2.8.2)$$

Resolent el sistema format per les equacions (2.8.1) i (2.8.2), es determina N_a^{AB} i N_{al}^{AB} :

$$\begin{cases} N_a^{AB} = 1.43 \cdot N_{al}^{AB} \\ 70 \cdot 10^3 + N_a^{AB} + N_{al}^{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_a^{AB} = -41.2 \cdot 10^3 \text{ N} \\ N_{al}^{AB} = -28.8 \cdot 10^3 \text{ N} \end{cases}$$

b) La tensió normal màxima de l'acer de la barra AC.

La barra AC suporta un esforç normal constant. En el tram BC aquest esforç el suporta íntegrament la barra d'acer, i per tant serà en aquest tram on l'acer suportarà la tensió normal màxima.



Es plantegen les equacions d'equilibri per trobar el valor de l'esforç normal N_a^{BC} :

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_{Ax} + N_a^{BC} = 0 \quad N_a^{BC} = -70 \text{ kN}$$

d'on:

$$\sigma_a^{BC} = \frac{N_a^{BC}}{A_a} = \frac{-70 \cdot 10^3}{200} = -350 \text{ MPa}$$

c) El desplaçament del nus C.

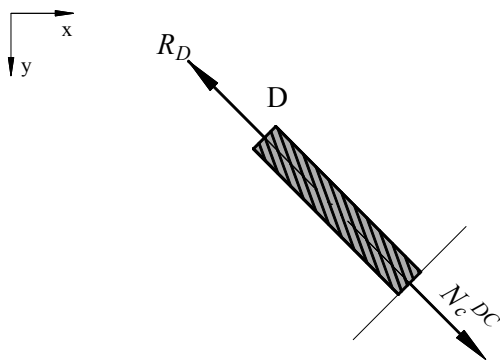
Per obtenir el desplaçament del nus C cal determinar les deformacions de la barra AC i del cable DC:

Deformació de la barra AC

$$\delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{N_a^{AB} \cdot L_{AB}}{E_a \cdot A_a} + \frac{N_a^{BC} \cdot L_{BC}}{E_a \cdot A_a} = \frac{1}{E_a \cdot A_a} (N_a^{AB} \cdot L_{AB} + N_a^{BC} \cdot L_{BC})$$

$$\delta_{AC} = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} (-41.2 \cdot 10^3 \cdot 1800 - 70 \cdot 10^3 \cdot 1200) = -3.95 \text{ mm}$$

Deformació del cable DC

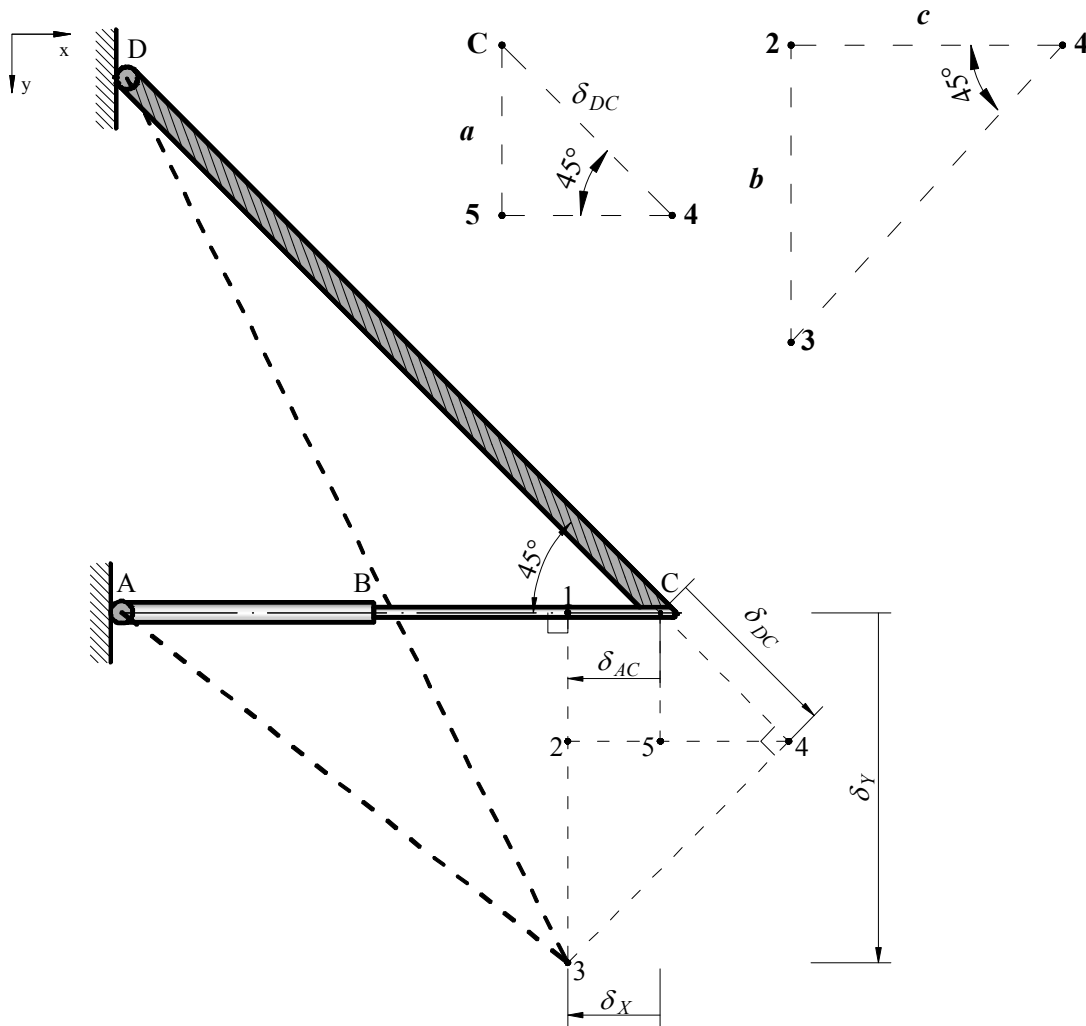


Per equilibri, R_D és igual a N_c^{DC} :

$$\delta_{DC} = \frac{N_c^{DC} \cdot L_{DC}}{E_a \cdot A_c}$$

$$\delta_{DC} = \frac{141 \cdot 10^3 \cdot \frac{3000}{\cos(45)}}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 7.5 \text{ mm}$$

El desplaçament horitzontal i vertical del nus C s'obté a partir dels allargaments de les barres:



La deformada s'ha exagerat per tal que es visualitzi millor.

El desplaçament horitzontal, paral·lel a l'eix x , és igual al desplaçament de la barra AC.

$$\delta_x = \delta_{AC} = -3.95 \text{ mm}$$

El desplaçament vertical –en la direcció y – de C és igual a la suma del desplaçament del punt 1 al 2 més el del punt 2 al 3:

$$\delta_y = a + b$$

$$a = \delta_{DC} \cdot \sin(45) = 7.5 \cdot \sin(45) = 5.3 \text{ mm}$$

$$c = \delta_{AC} + \delta_{DC} \cdot \cos(45) = 3.95 + 7.5 \cdot \cos(45) = 9.25 \text{ mm} \quad b = \frac{c}{\tan(45)} = \frac{9.25}{\tan(45)} = 9.25 \text{ mm}$$

$$\delta_y = 5.3 \text{ mm} + 9.25 \text{ mm} = 14.6 \text{ mm}$$

El desplaçament del nus en la direcció x és -3.95 mm i en la direcció y , 14.6 mm .

Problema 2.9. Per a l'estructura de la Figura 2.9, formada per elements d'acer i d'alumini, determineu:

- Les tensions dels materials a la secció S1-S1'.
- L'allargament total entre D i C'.
- L'allargament entre B i A.

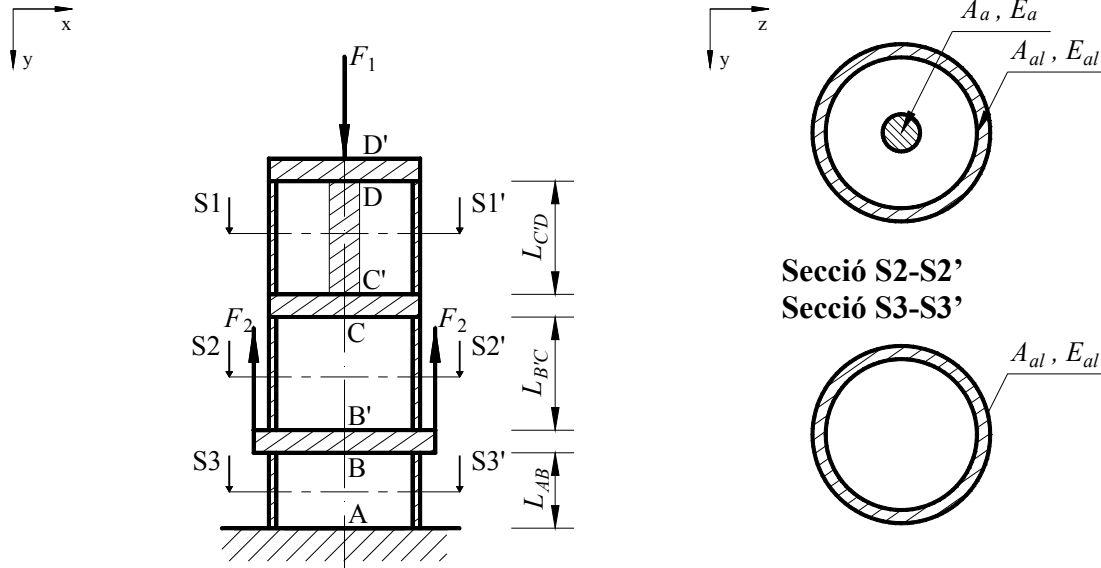


Figura 2.9

Dades:

Força aplicada en el punt D' (F_1) = 500 kN

Força aplicada en el punt B' (F_2) = 20 kN

Longitud del tram AB (L_{AB}) = 500 mm

Longitud del tram B'C ($L_{B'C}$) = 750 mm

Longitud del tram CD' ($L_{C'D}$) = 750 mm

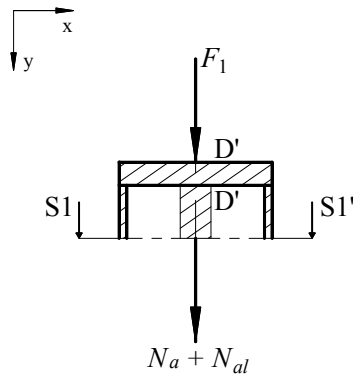
Àrea de l'acer (A_a) = 300 mm²

Àrea de l'alumini (A_{al}) = 600 mm²

Mòdul d'elasticitat de l'acer (E_a) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Mòdul d'elasticitat de l'alumini (E_{al}) = $7 \cdot 10^4$ MPa

a) Les tensions dels materials a la secció S1-S1'.



Es planteja l'equació d'equilibri de forces en el tram DC' :

$$\Sigma F_y = 0 \quad N_a^{DC'} + N_{al}^{DC'} + F_1 = 0$$

$$N_a^{DC'} + N_{al}^{DC'} + 500 \cdot 10^3 = 0 \quad (2.9.1)$$

Es tracta d'un cas hiperestàtic amb dues incògnites i una sola equació d'equilibri. Per solucionar-lo, es planteja la compatibilitat de deformacions:

$$\delta_a^{DC'} = \delta_{al}^{DC'}$$

Tenint en compte la llei de Hooke l'equació queda en funció dels esforços dels materials:

$$\frac{N_a^{DC'} \cdot L_{DC'}}{E_a \cdot A_a} = \frac{N_{al}^{DC'} \cdot L_{DC'}}{E_{al} \cdot A_{al}}$$

$$\frac{N_a^{DC'}}{2 \cdot 10^5 \cdot 300} = \frac{N_{al}^{DC'}}{7 \cdot 10^4 \cdot 600}$$

$$N_a^{DC'} = 1.43 \cdot N_{al}^{DC'} \quad (2.9.2)$$

A partir de les equacions (2.9.1) i (2.9.2), es pot resoldre el sistema d'equacions i determinar $N_a^{DC'}$ i $N_{al}^{DC'}$.

$$\begin{cases} N_a^{DC'} = 1.43 \cdot N_{al}^{DC'} \\ N_a^{DC'} = -N_{al}^{DC'} - 500 \cdot 10^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_a = -294 \cdot 10^3 \text{ N} \\ N_{al} = -206 \cdot 10^3 \text{ N} \end{cases}$$

A partir dels valors de $N_a^{DC'}$ i $N_{al}^{DC'}$, es determina la tensió de cada material a la secció S1-S1':

$$\sigma_a^{DC'} = \frac{N_a^{DC'}}{A_a} = \frac{-294 \cdot 10^3 \text{ N}}{300 \text{ mm}^2} = -981 \text{ MPa}$$

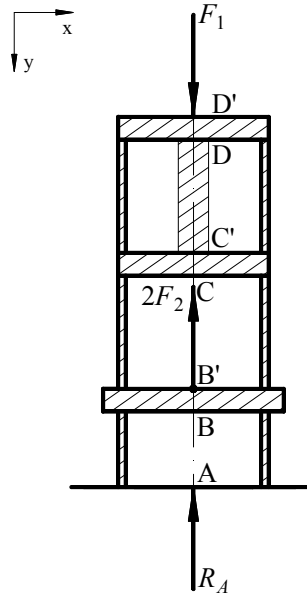
$$\sigma_{al}^{DC'} = \frac{N_{al}^{DC'}}{A_{al}} = \frac{-206 \cdot 10^3 \text{ N}}{600 \text{ mm}^2} = -343 \text{ MPa}$$

b) L'allargament total entre D i C'.

L'allargament dels dos materials és el mateix, per compatibilitat de deformacions:

$$\delta_{DC'} = \delta_a = \delta_{al} = \frac{N_a \cdot L_{DC'}}{E_a \cdot A_a}$$

$$\delta_{DC'} = \frac{-294 \cdot 10^3 \cdot 750}{2 \cdot 10^5 \cdot 300} = -3.68 \text{ mm}$$

**c) L'allargament entre B i A.**

Es planteja l'equació d'equilibri de forces per determinar el valor de la reacció en el punt A:

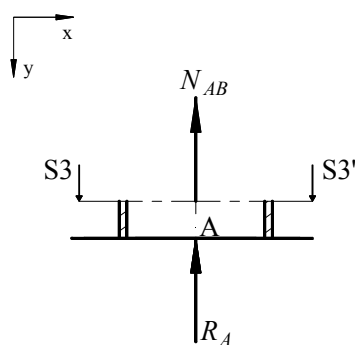
$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + 2F_B - F_1 = 0$$

d'on, tenint en compte el valor de les forces:

$$R_A = 460 \text{ kN}$$

Es planteja l'equació d'equilibri de forces en el tram BA:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_{BA} + R_A = 0$$

$$N_{BA} + 460 = 0$$

$$N_{BA} = -460 \text{ kN}$$

Conegut l'esforç del tram BA, es pot determinar l'allargament mitjançant la llei de Hooke:

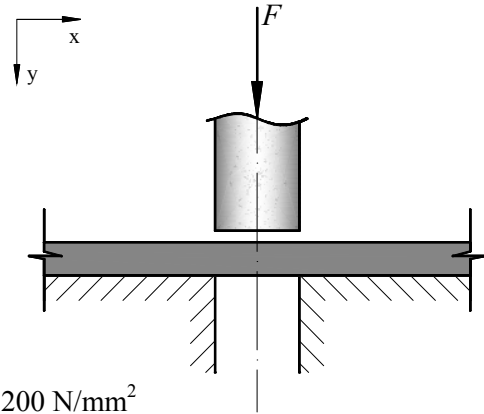
$$\delta_{BA} = \frac{N_{BA} \cdot L_{BA}}{E_{al} \cdot A_{al}}$$

$$\delta_{BA} = \frac{-460 \cdot 10^3 \cdot 500}{7 \cdot 10^4 \cdot 600} = -5.48 \text{ mm}$$

3. Cisallament

Problema 3.1. Es vol fer un forat circular de 30 mm de diàmetre en una xapa d'acer de 6 mm de gruix amb un punxó cilíndric del mateix diàmetre, tal com s'indica a la Figura 3.1. Determineu:

- La força necessària.
- La tensió normal en el cilindre.



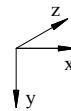
Dades:

Tensió de cisallament de l'acer de la xapa (τ_c): 200 N/mm²

Figura 3.1

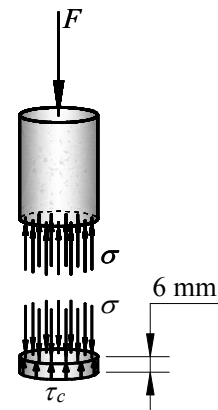
- La força necessària.

$$F = \tau_c \cdot A_{\text{perimetral}} = 200 \cdot (\pi \cdot 30 \cdot 6) = 113 \cdot 10^3 \text{ N}$$



- La tensió normal en el cilindre.

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{punxo}}} = \frac{113 \cdot 10^3}{\pi \cdot \frac{30^2}{4}} = 160 \text{ N/mm}^2$$



Problema 3.2. Trobeu la longitud dels cordons de soldadura necessària per transmetre una càrrega F , d'un element sotmès a tracció pura compost per dos perfils laminats L 70.70.7, a una xapa de 12 mm de gruix, d'acord amb la Figura 3.2.

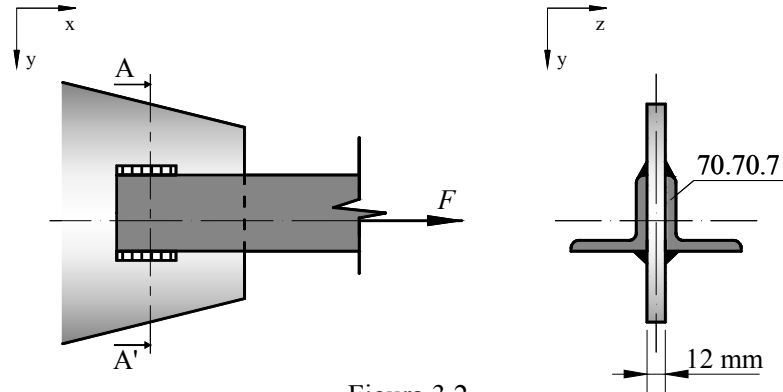


Figura 3.2

Dades:

Tensió admissible en les soldadures (τ_{adm}): 200 N/mm²

Gorja de la soldadura (a): 5 mm

La força F de tracció estarà aplicada al centre de gravetat de la secció composta. D'acord amb les característiques dels perfils, la posició del centre de gravetat (c.d.g) és la de la Figura 3.2.1.

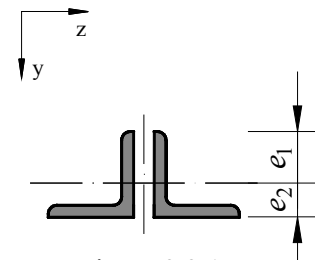
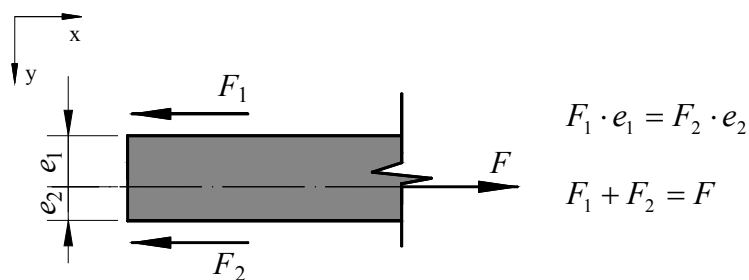


Figura 3.2.1

La força transmesa pels cordons de soldadura ha de garantir l'equilibri:



Considerant que les soldadures treballen a cisallament i tenint en compte que hi ha dos cordons superiors i dos d'inferiors:

$$F_1 = 2L_1 \cdot a \cdot \tau_{adm}$$

$$F_2 = 2L_2 \cdot a \cdot \tau_{adm}$$

Substituint,

$$2L_1 \cdot a \cdot \tau_{adm} \cdot e_1 = 2L_2 \cdot a \cdot \tau_{adm} \cdot e_2$$

$$2L_1 \cdot a \cdot \tau_{adm} + 2L_2 \cdot a \cdot \tau_{adm} = F$$

Tenint en compte que $a = 5 \text{ mm}$
 $e_1 = 50.3 \text{ mm}$
 $e_2 = 19.7 \text{ mm}$
 $\tau_{adm} = 100 \text{ N/mm}^2$

Es determinen, $L_1 = 84.4 \text{ mm}$
 $L_2 = 216 \text{ mm}$

4. Diagrames d'esforços

Problema 4.1. A la Figura 4.1 es representa una biga isostàtica simplement recolzada sotmesa a una càrrega uniformement distribuïda en el tram AB i a un moment en el punt C.

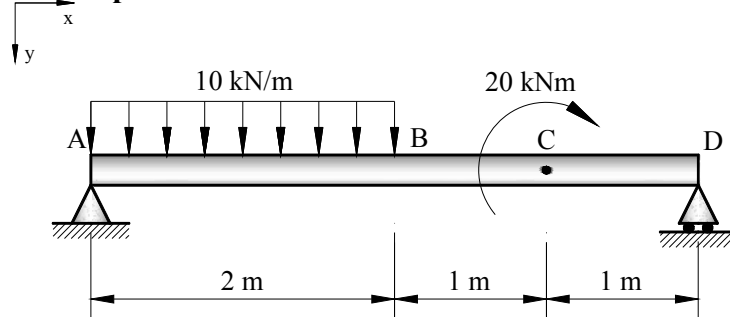
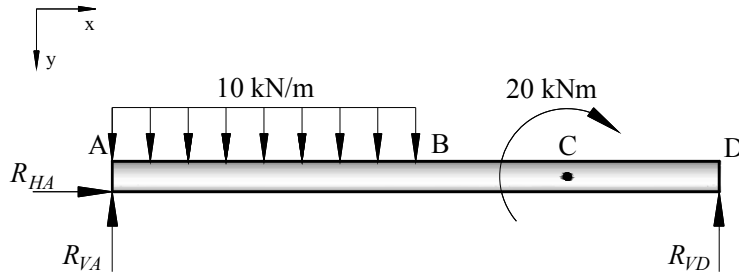


Figura 4.1

- c) Dibueixu els diagrames d'esforços tallants $V(x)$ i de moments flectors $M(x)$ a partir dels diagrames de cos lliure dels diferents trams de la biga.
- d) Dibueixu els diagrames d'esforços tallants $V(x)$ i de moments flectors $M(x)$ aplicant les expressions $V_j = V_i - S_{q,ij}$ i $M_j = M_i + S_{V,ij}$, on $S_{q,ij}$ és l'àrea del diagrama de càrregues entre els punts i i j , i $S_{V,ij}$ és l'àrea del diagrama de tallants entre els punts i i j .

El diagrama de cos lliure de la biga és:



A partir de les equacions d'equilibri estàtic es calculen les reaccions:

$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HA} = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad R_{VA} + R_{VD} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ kN} \quad R_{VA} = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0) \quad R_{VD} \cdot 4 = 10 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \quad R_{VD} = 10 \text{ kN}$$

a) Dibueixu els diagrames d'esforços tallants $V(x)$ i de moments flectors $M(x)$ a partir dels diagrames de cos lliure dels diferents trams de la biga.

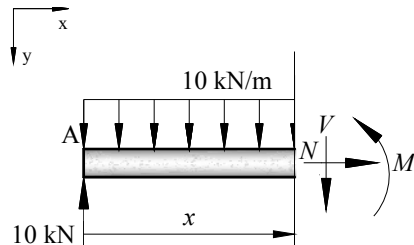
Per determinar les expressions dels esforços tallants i dels moments flectors al llarg de la biga, es divideix aquesta en diferents trams. En els punts A, B, C i D hi ha discontinuïtats pel que fa a l'estat de càrregues; per tant, s'analitzen els trams AB, BC i CD.

El conveni de signes és:

- Tallant: $\uparrow \boxed{+} \downarrow$ $\downarrow \boxed{-} \uparrow$
- Moment: $\curvearrowright \boxed{+} \curvearrowleft$ $\curvearrowleft \boxed{-} \curvearrowright$

Tram AB: $0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$

Es fa un tall en una secció qualsevol entre les seccions A i B. A partir de les equacions d'equilibri es determinen $V(x)$ i $M(x)$.

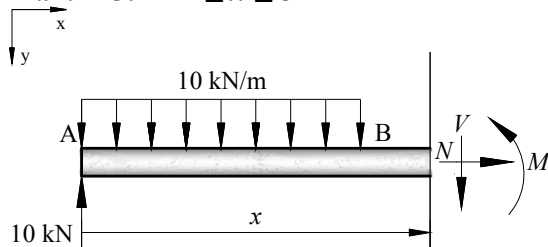


$$V(x) = 10 - 10x$$

$$M(x) = 10x - 10x \frac{x}{2} = 10x - 5x^2$$

S'observa que en aquest tram l'esforç tallant varia linealment mentre que el moment flector té una variació parabòlica.

Tram BC: $2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$

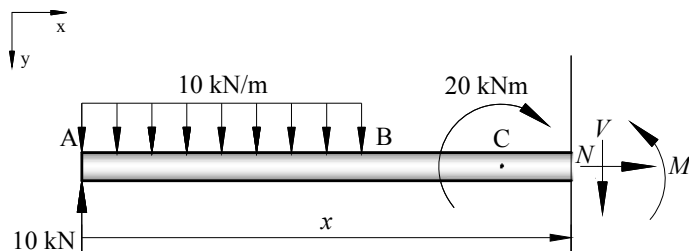


$$V(x) = 10 - 10 \cdot 2 = -10 \text{ kN}$$

$$M(x) = 10x - 10 \cdot 2(x - 1) = -10x + 20$$

En aquest tram l'esforç tallant es manté constant i el moment flector varia linealment.

Tram CD: $3 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$

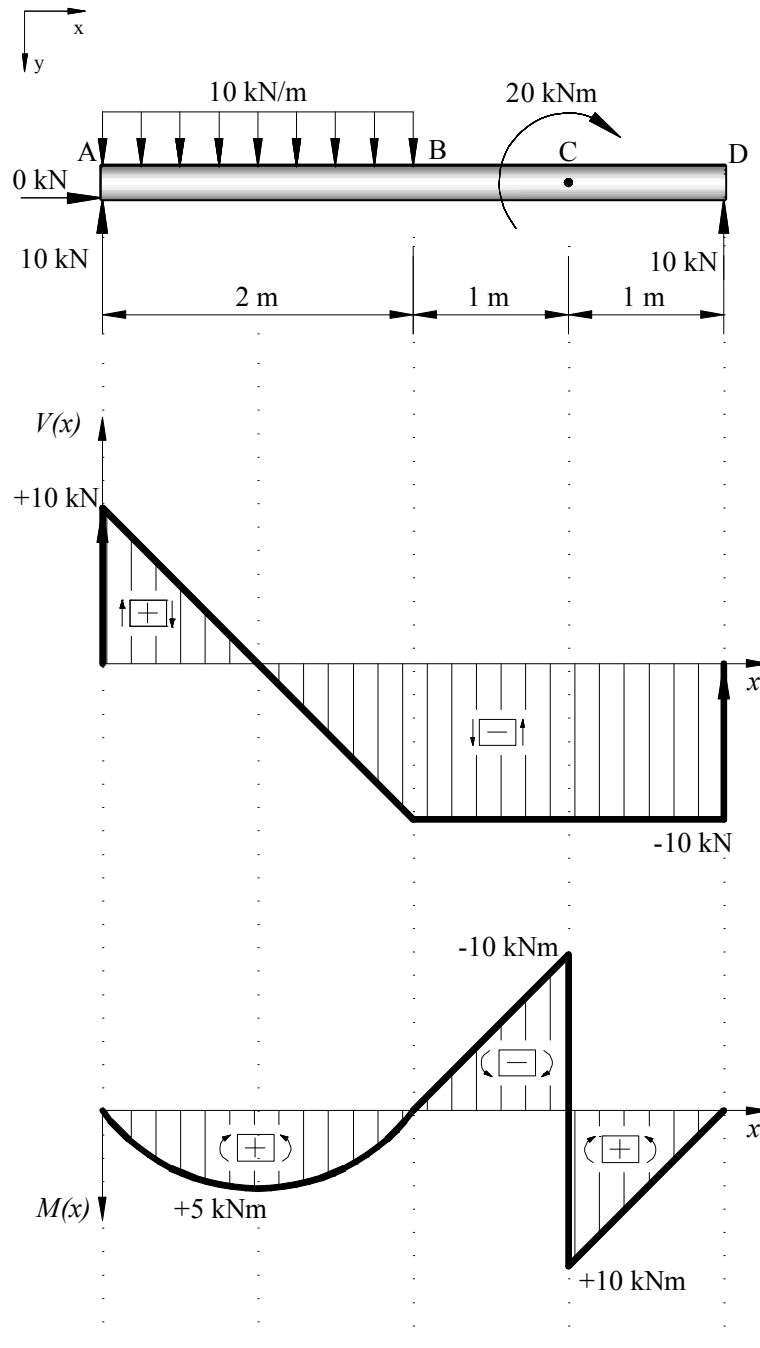


$$V(x) = 10 - 10 \cdot 2 = -10 \text{ kN}$$

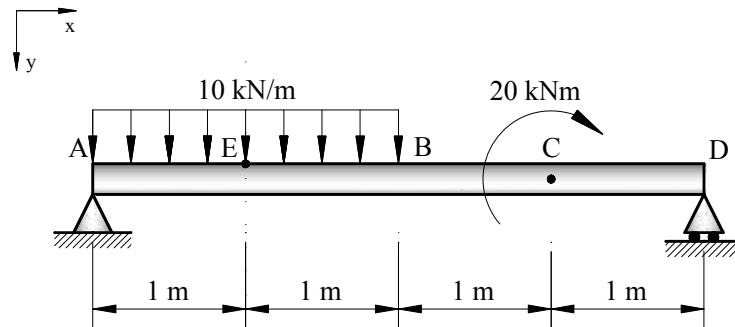
$$M(x) = -10x + 40$$

L'esforç tallant es manté constant i el moment flector varia linealment. A causa del moment puntual aplicat en el punt C, s'obté un salt en el diagrama de moments de 20 kNm. Per a $x = 3$, $M(3)$ en el tram BC val -10 kNm i $M(3)$ en el tram CD val 10 kNm.

A partir de les funcions $V(x)$ i $M(x)$ de cadascun dels trams, es dibuixen els diagrames d'esforços tallants i moments flexors:



- b) Dibueixu els diagrames d'esforços tallants $V(x)$ i de moments flectors $M(x)$ aplicant les expressions $V_j = V_i - S_{q,ij}$ i $M_j = M_i + S_{v,ij}$, on $S_{q,ij}$ és l'àrea del diagrama de càrregues entre els punts i i j , i $S_{v,ij}$ és l'àrea del diagrama de tallants entre els punts i i j .



Tram AE:

En el punt A el tallant és igual a la reacció ($V_A = R_A$). El tallant en el punt E és igual al tallant en el punt A menys la càrrega distribuïda aplicada sobre la biga (10 kN/m) per la distància entre A i E (1 m). Per tant, el tallant en aquest punt és nul.

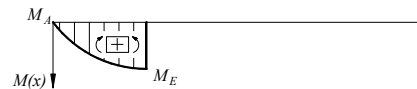
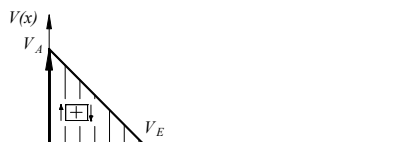
Pel que fa al diagrama de moments, en el punt A el moment és nul, ja que la biga està articulada per aquest punt. Per tant, el diagrama parteix de 0. El valor del moment en el punt E és igual al moment en el punt A més l'àrea del diagrama de tallants entre els punts A i E.

$$V_A = R_A = 10 \text{ kN}$$

$$M_A = 0 \text{ kNm}$$

$$V_E = V_A - 10 \text{ kN/m} \cdot 1 \text{ m} = 0 \text{ kN}$$

$$M_E = M_A + 10 \text{ kN/m} \cdot 1 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \text{ m} = 5 \text{ kNm}$$



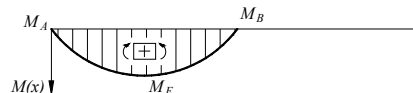
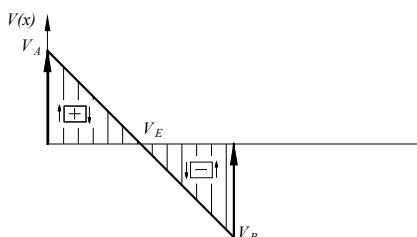
Es pot comprovar que quan el tallant V_E és nul, el moment M_E és màxim.

Tram EB:

Se segueix el mateix procediment que en el tram AE.

$$V_B = V_E - 10 \text{ kN/m} \cdot 1 \text{ m} = -10 \text{ kN}$$

$$M_B = M_E - 10 \text{ kN/m} \cdot 1 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \text{ m} = 0 \text{ kNm}$$

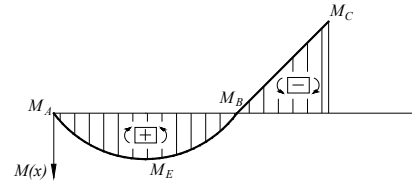
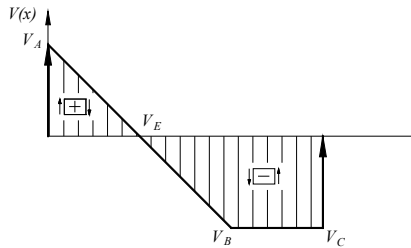


Tram BC:

Per seguir amb el diagrama de tallants en aquest tram BC, es parteix del valor de V_B , el qual es manté constant fins al punt C, ja que la biga no està sotmesa a cap càrrega externa en aquest tram.

$$V_C = V_B = -10 \text{ kN}$$

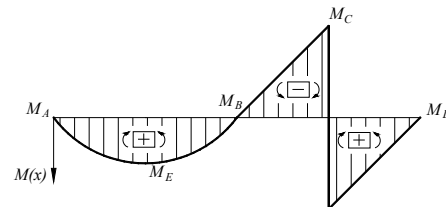
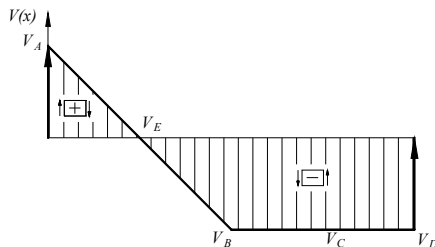
$$M_C = M_B - 10 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = -10 \text{ kNm}$$

**Tram CD:**

En el diagrama de tallants la gràfica es manté constant, per la mateixa raó que en el tram BC. El diagrama de moments presenta una discontinuïtat en el punt C a causa del moment flector aplicat.

$$V_D = V_C = -10 \text{ kN}$$

$$M_D = M_C + 20 \text{ kNm} - 10 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 0 \text{ kNm}$$



Problema 4.2. De la biga simplement recolzada de la Figura 4.2, sotmesa a les càrregues que s'hi indiquen, es demana:

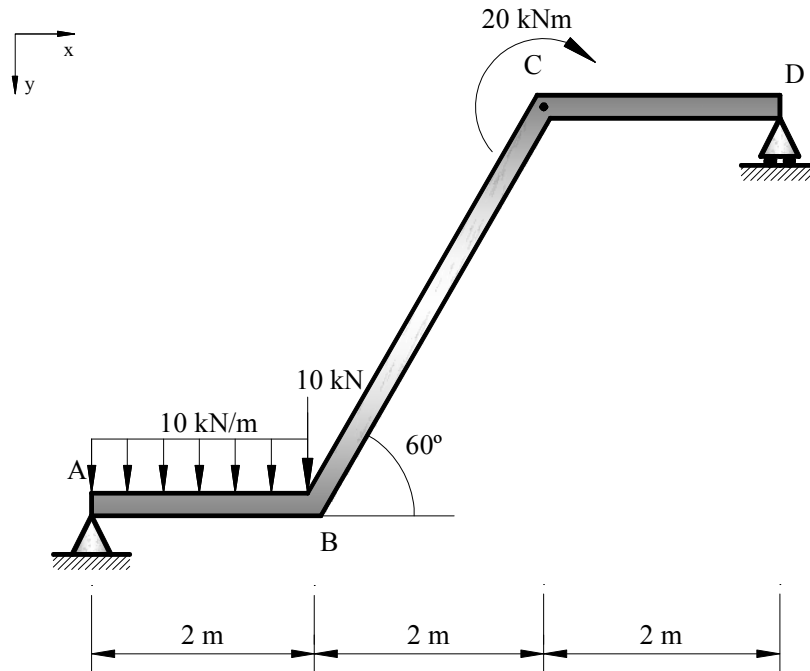
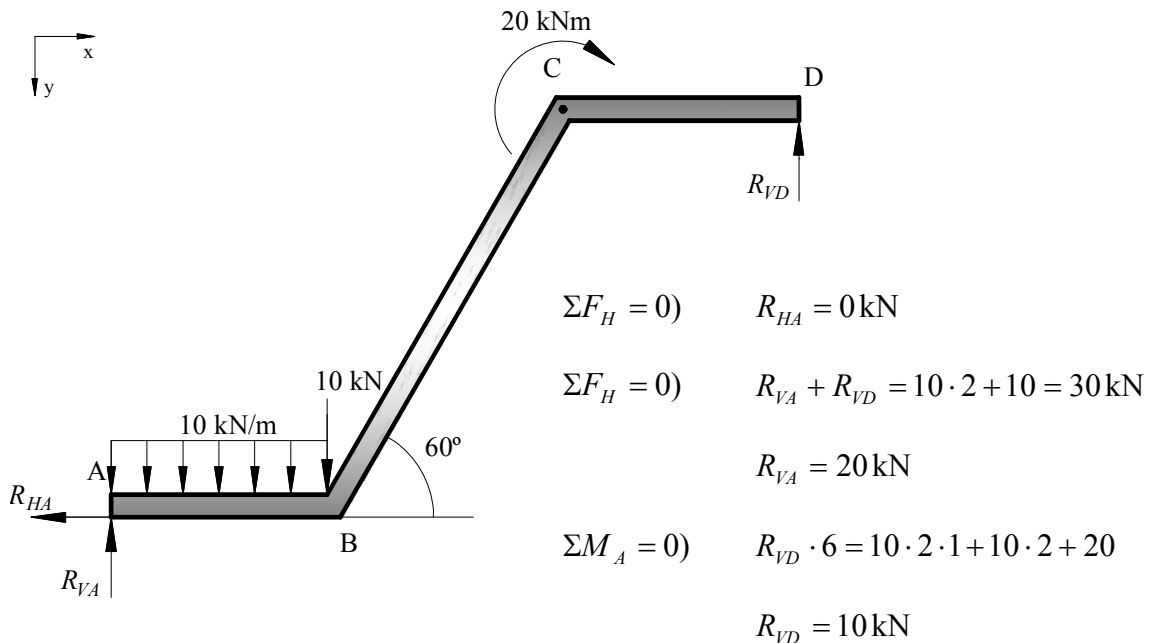


Figura 4.2

- Dibuixeu els diagrames de $N(x)$, $V(x)$ i $M(x)$.
- Dibuixeu la corba aproximada de la deformatada.
- Determineu $N(x)$, $V(x)$ i $M(x)$, aplicant el principi de superposició, si en el punt B hi tenim una càrrega de 20 kN en comptes de la de 10 kN.

Determinació de les reaccions:

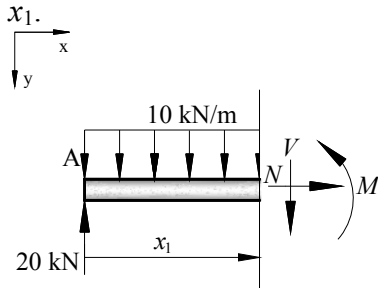


a) Dibuixeu els diagrames de $N(x)$, $V(x)$ i $M(x)$.

Com que en els punts A, B, C i D hi ha discontinuïtats pel que fa a l'estat de càrregues o variacions en la direcció de la barra, s'han de fer els tall en els segments AB , BC i DC .

Tram AB: $0 \text{ m} \leq x_1 \leq 2 \text{ m}$

Es fa un tall al mig del tram, a una longitud x_1 d'A. Es determinen N , V i M en funció de



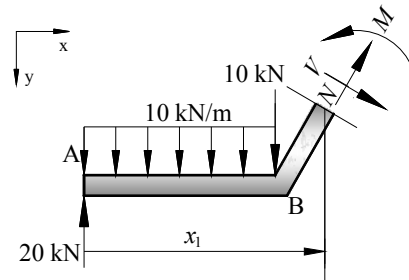
$$N(x_1) = 0$$

$$V(x_1) = 20 - 10x_1$$

$$M(x_1) = 20x_1 - 10x_1 \frac{x_1}{2} = 20x_1 - 5$$

No hi ha esforç normal, l'esforç tallant varia linealment i el moment flector té una variació parabòlica.

Tram BC: $2 \text{ m} \leq x_1 \leq 4 \text{ m}$



$$N(x_1) = 10 \sin 60^\circ + 10 \cdot 2 \sin 60^\circ - 20 \sin 60^\circ$$

$$N(x_1) = 8.67 \text{ kN}$$

$$V(x_1) = -10 \cos 60^\circ - 10 \cdot 2 \cos 60^\circ + 20 \cos 60^\circ$$

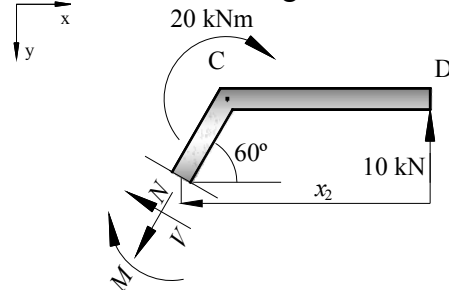
$$V(x_1) = -5 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = 20x_1 - 10 \cdot 2 \cdot (x_1 - 1) - 10 \cdot (x_1 - 2)$$

$$M(x_1) = -10x_1 + 40$$

Tram CB: $2 \text{ m} \leq x_2 \leq 4 \text{ m}$

També es poden analitzar els esforços de la biga prenent com a referència el punt D. Si es fa un tall a una longitud x_2 de D, es determinen N , V i M en funció de x_2 .

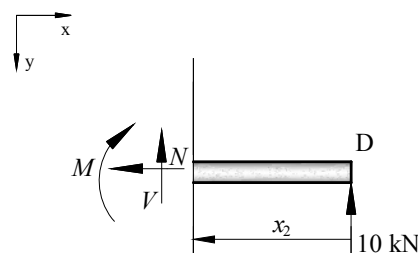


$$N(x_2) = 10 \sin 60^\circ = 8.67 \text{ kN}$$

$$V(x_2) = -10 \cos 60^\circ = -5 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = 10x_2 - 20$$

Tram DC: $0 \text{ m} \leq x_2 \leq 2 \text{ m}$



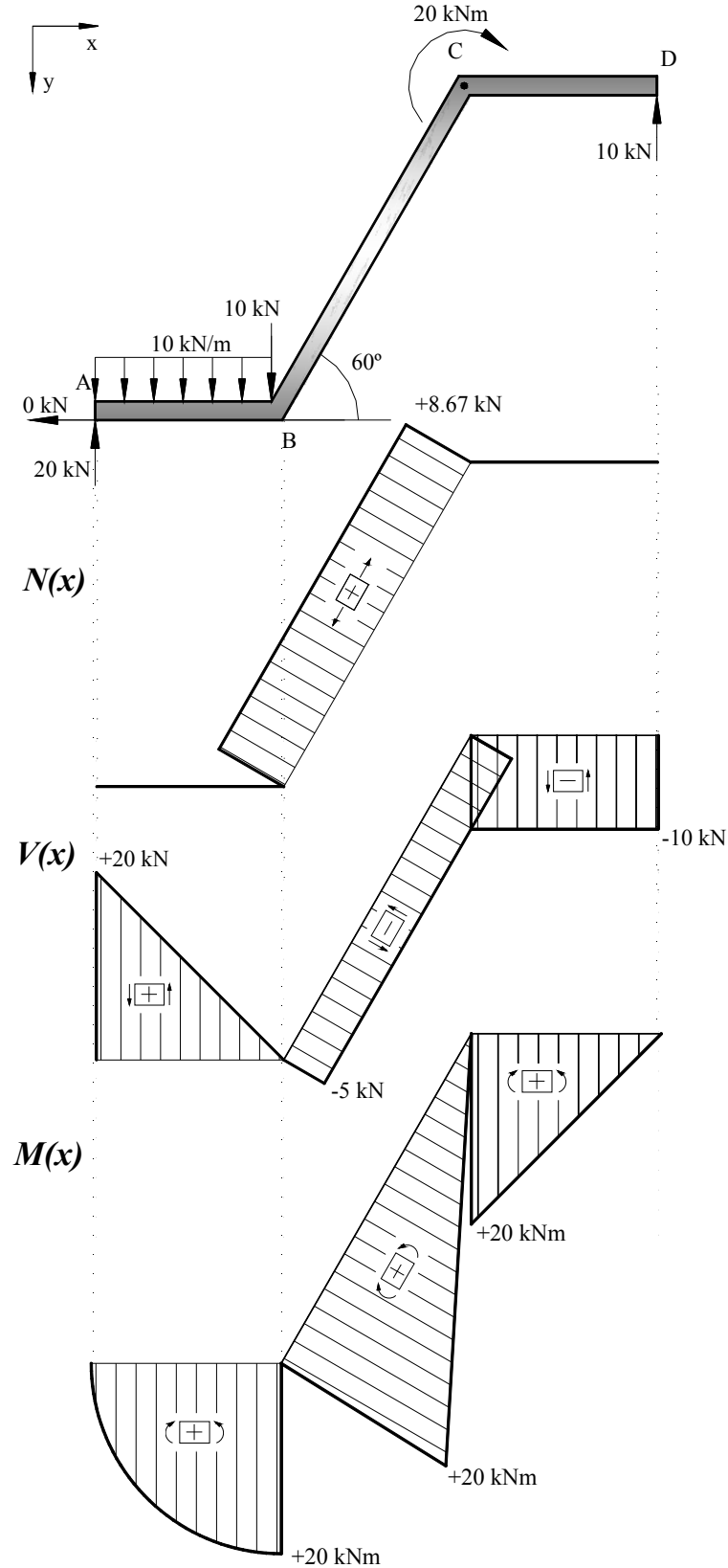
$$N(x_2) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x_2) = -10 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = 10x_2$$

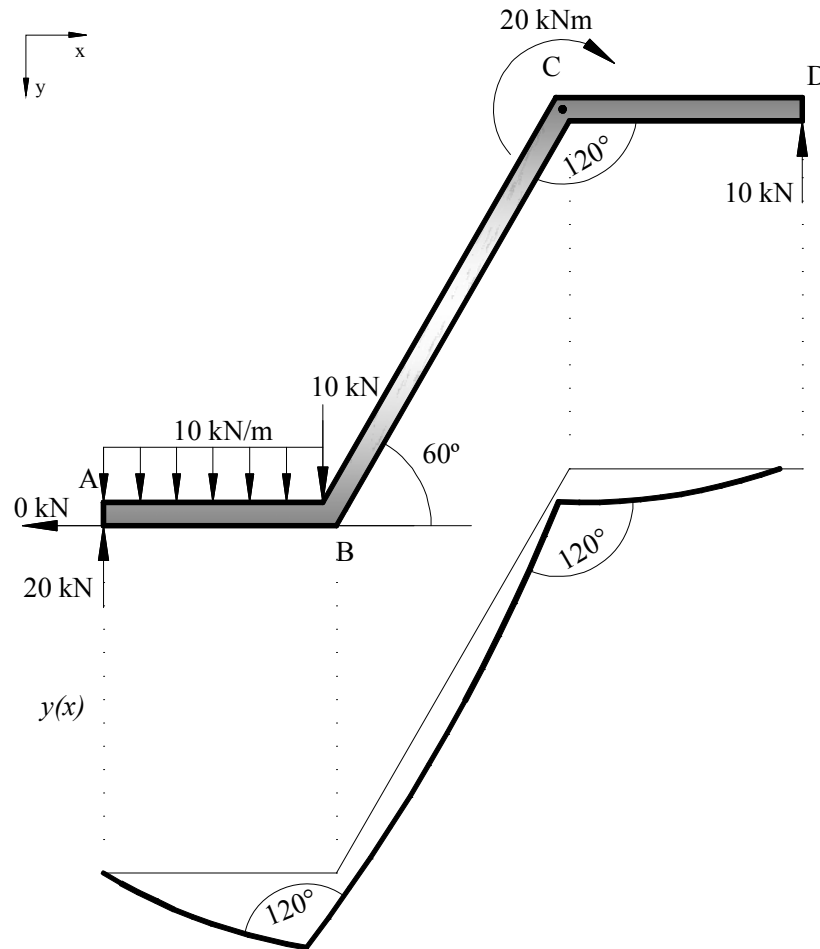
En els trams BC , CB i DC l'esforç normal i el tallant es mantenen constants; en canvi, el moment flector varia linealment.

A partir de les funcions $N(x)$, $V(x)$ i $M(x)$ per a cada un dels trams, es poden representar els diagrames de moment i de tallant i d'esforç normal:



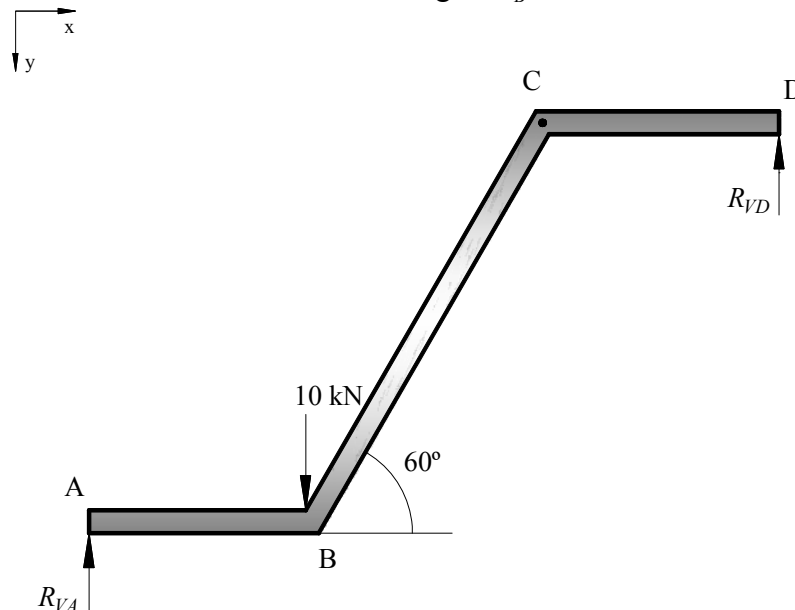
b) Dibuixeu la corba aproximada de la deformada.

A partir del signe dels diagrames de moments es pot deduir la curvatura de les barres, i tenint en compte les restriccions de moviment, dibuixar de forma aproximada la deformada.



c) Determineu $N(x)$, $V(x)$ i $M(x)$, aplicant el principi de superposició, si en el punt B hi tenim una càrrega de 20 kN en comptes de la de 10 kN.

S'analitza l'estructura amb l'increment de càrrega $\Delta P_B = 20 - 10 = 10$ kN



Determinació de les noves reaccions provocades per la càrrega afegida de 10 kN:

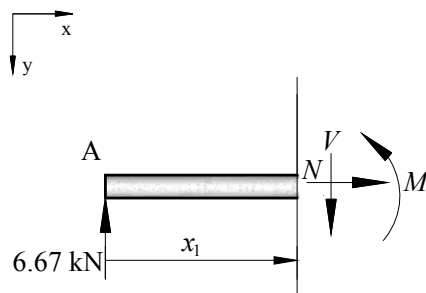
$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HA} = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad R_{VA} + R_{VD} = 10 \text{ kN} \quad R_{VA} = \frac{20}{3} \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0) \quad R_{VD} \cdot 6 = 10 \cdot 2 \quad R_{VD} = \frac{10}{3} \text{ kN}$$

Tram AB: $0 \text{ m} \leq x_1 \leq 2 \text{ m}$

Es fa un tall al mig del tram, a una longitud x_1 d'A. Es determinen N , V i M en funció de x_1 .



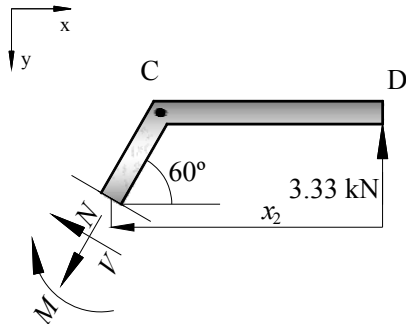
$$N(x_1) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x_1) = \frac{20}{3} = 6.67 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = \frac{20}{3} x_1 = 6.67 x_1$$

L'esforç tallant es manté constant i el moment flector varia linealment.

Tram CB: $2 \text{ m} \leq x_2 \leq 4 \text{ m}$



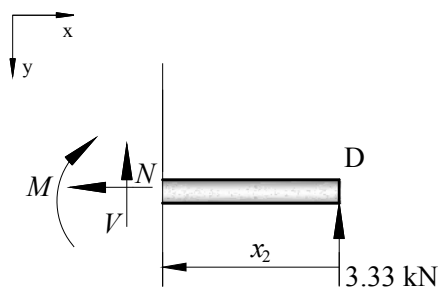
$$N(x_2) = \frac{10}{3} \sin 60^\circ = 2.89 \text{ kN}$$

$$V(x_2) = \frac{10}{3} \cos 60^\circ = 1.67 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = 3.33 x_2$$

L'esforç tallant es manté constant i el moment flector varia linealment.

Tram DC: $0 \text{ m} \leq x_2 \leq 2 \text{ m}$



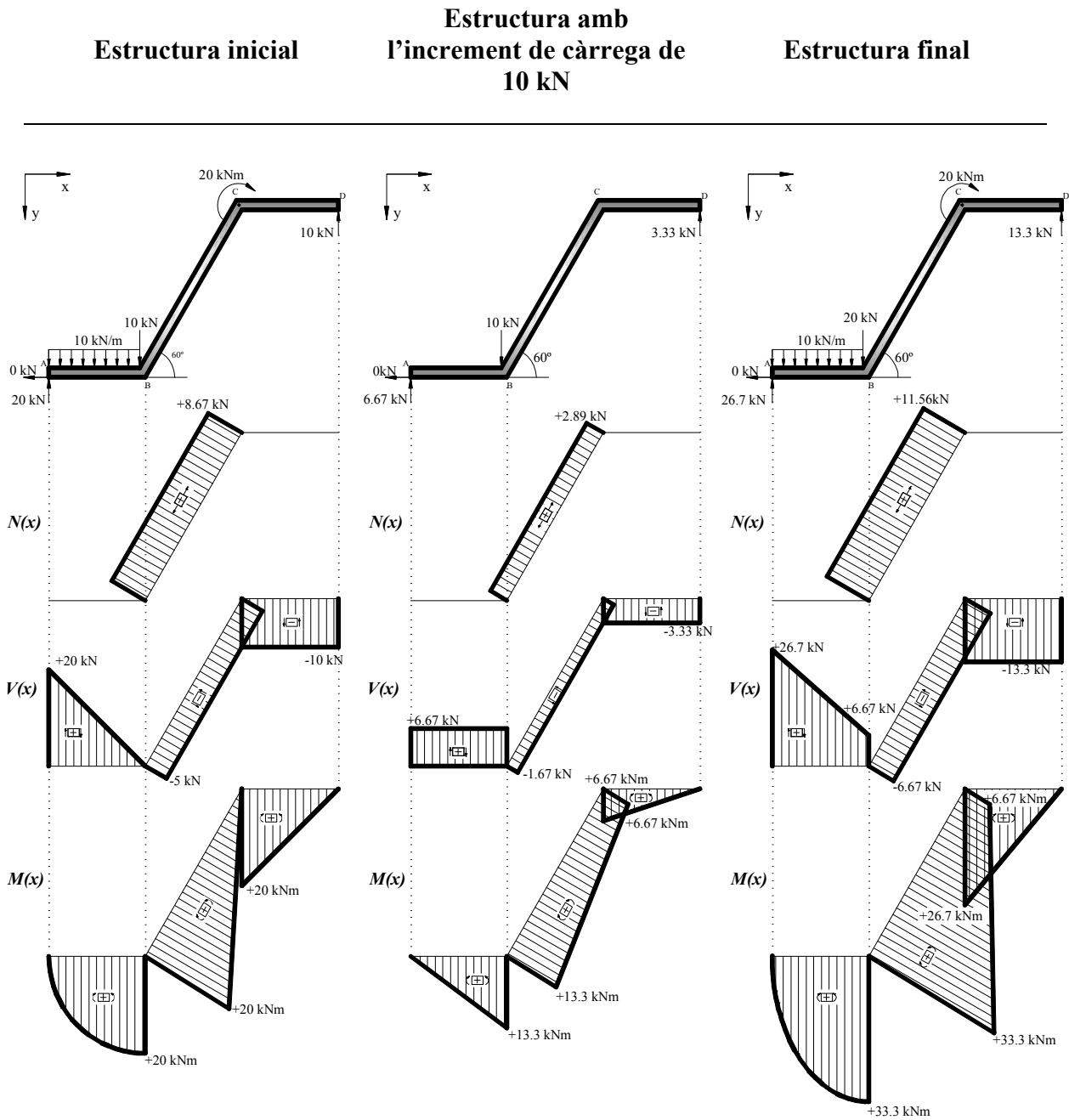
$$N(x_2) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x_2) = -3.33 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = 3.33 x_2$$

L'esforç tallant es manté constant i el moment flector varia linealment.

Aplicant el principi de superposició, amb els resultats dels apartats anteriors s'obtenen els diagrames de $N(x)$, $V(x)$ i $M(x)$:



Problema 4.3. La biga simplement recolzada de la Figura 4.3 està sotmesa a una càrrega distribuïda en el tram BC. Es demana:

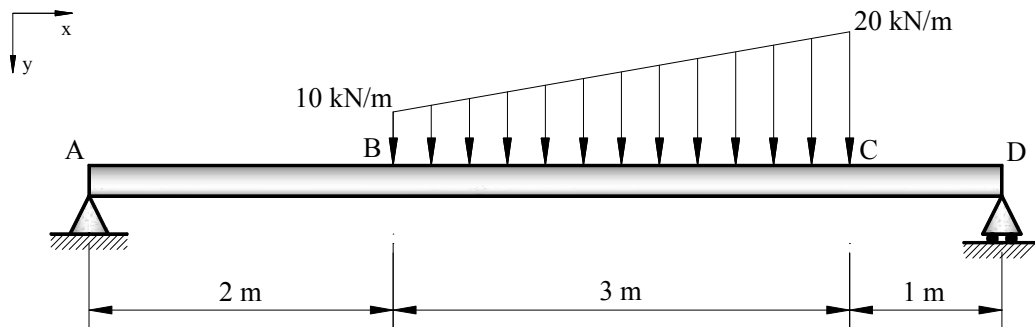
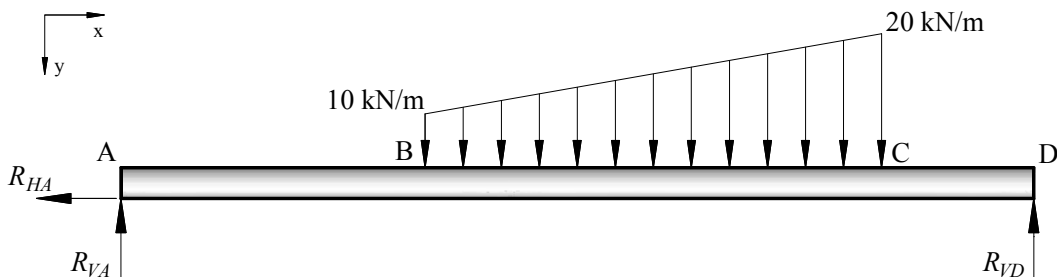


Figura 4.3

- Dibuixeu els diagrames de $V(x)$ i $M(x)$.
- Determineu el punt en el qual M_{max} .

Es calculen les reaccions en els recolzaments:



$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HA} = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad R_{VA} + R_{VD} = 10 \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3}{2} = 45 \text{ kN} \quad R_{VA} = 17.5 \text{ kN}$$

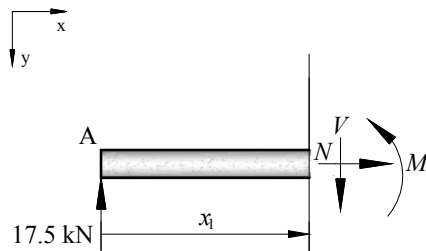
$$\Sigma M_A = 0) \quad R_{VD} \cdot 6 = 10 \cdot 3 \cdot (2 + 1.5) + \frac{10 \cdot 3}{2} \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 3\right) \quad R_{VD} = 27.5 \text{ kN}$$

a) Dibuixeu els diagrames de $V(x)$ i $M(x)$.

Com que en els punts A, B, C i D hi ha discontinuïtats pel que fa a l'estat de càrregues, es fan els talls pels segments AB , BC i CD .

Tram AB : $0 \text{ m} \leq x_1 \leq 2 \text{ m}$

Es fa un tall al mig del tram, a una longitud x_1 d'A. Es determinen N , V i M en funció de x_1 .

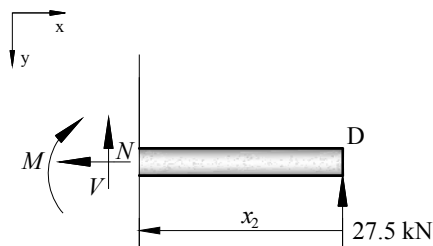


$$V(x_1) = 17.5 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = 17.5 \cdot x_1$$

L'esforç tallant es manté constant i el moment flector varia linealment.

Tram CD : $0 \text{ m} \leq x_2 \leq 1 \text{ m}$

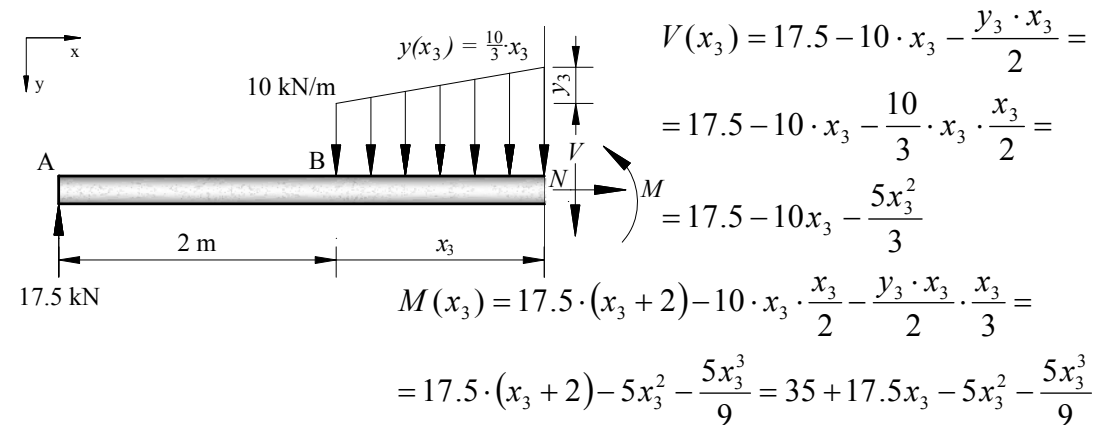


$$V(x_2) = -27.5 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = 27.5 \cdot x_2$$

L'esforç tallant es manté constant i el moment flector varia linealment.

Tram BC : $0 \text{ m} \leq x_3 \leq 3 \text{ m}$



$$V(x_3) = 17.5 - 10 \cdot x_3 - \frac{y_3 \cdot x_3}{2} =$$

$$= 17.5 - 10 \cdot x_3 - \frac{10}{3} \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2} =$$

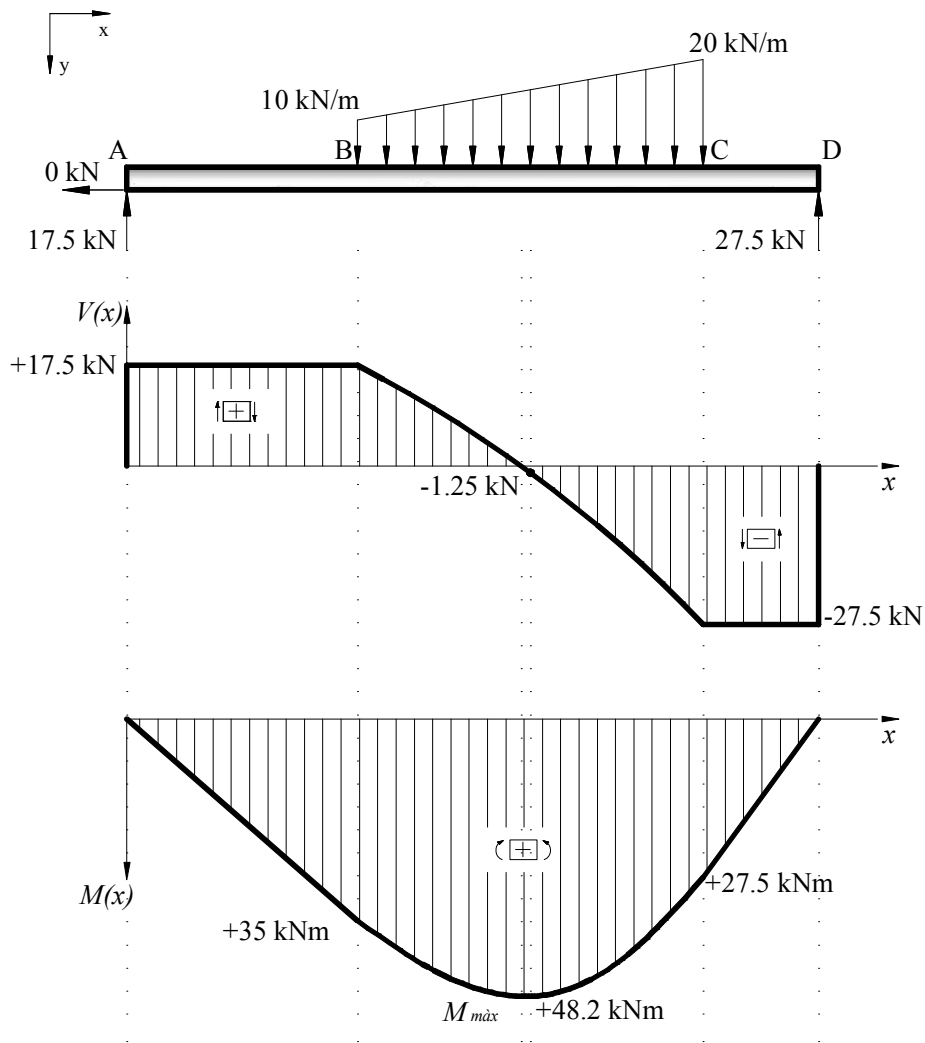
$$= 17.5 - 10x_3 - \frac{5x_3^2}{3}$$

$$M(x_3) = 17.5 \cdot (x_3 + 2) - 10 \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2} - \frac{y_3 \cdot x_3}{2} \cdot \frac{x_3}{3} =$$

$$= 17.5 \cdot (x_3 + 2) - 5x_3^2 - \frac{5x_3^3}{9} = 35 + 17.5x_3 - 5x_3^2 - \frac{5x_3^3}{9}$$

L'esforç tallant varia parabòlicament, mentre que el moment ho fa segons una funció cúbica.

A partir de les funcions $V(x)$ i $M(x)$ de cadascun dels trams, es poden representar els diagrames d'esforç tallant i de moment flector:



b) Determineu el punt en el qual M_{max} .

A partir de l'equació $V(x_3)$ del tram BC, s'observa que hi ha un zero a $x_3 \in [0,3]$. Aquest zero a $V(x_3)$ és un màxim o un mínim a $M(x_3)$.

$$V(x_3) = 17.5 - 10x_3 - \frac{5}{3}x_3^2 = 0$$

S'obtenen 2 valors de x : $x_3 = \cancel{7.42\text{ m}}$ està fora de l'interval .

$x_3 = 1.42\text{ m}$; per tant, a $x_3 = 1.42\text{ m}$

$$V(x_3) = 0$$

$$M_{max} = M(1.42) = 48.2\text{ kNm}$$

Problema 4.4. A partir del diagrama de tallants d'una biga representat a la Figura 4.4, determineu:

- L'estat de càrregues aplicat sobre la biga (d'A a E), sabent que a la secció E hi ha aplicat un moment flector en sentit antihorari.
- El valor del moment en el punt C, M_C .

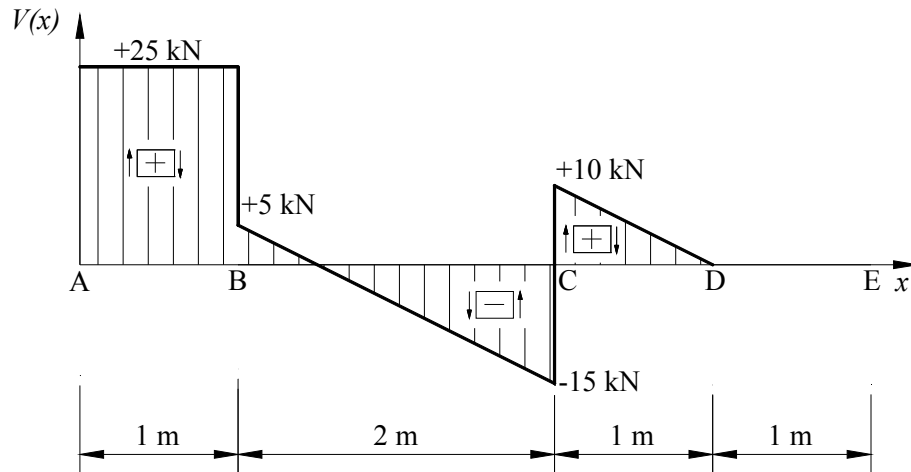
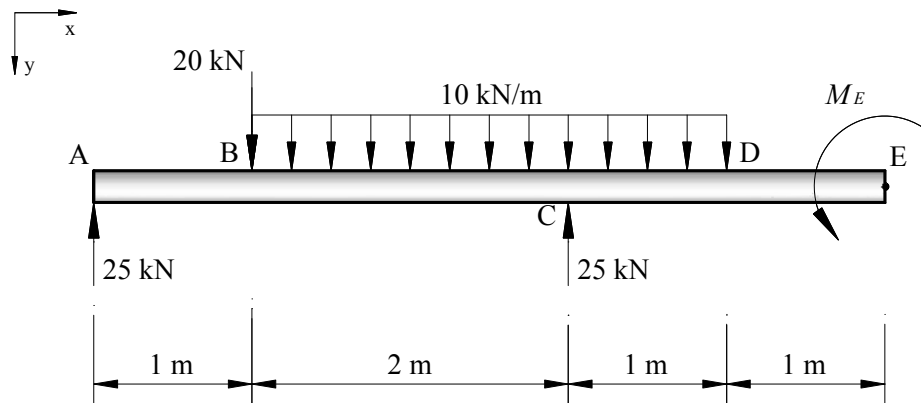


Figura 4.4

- Determineu l'estat de càrregues aplicat sobre la biga (d'A a E), sabent que a la secció E hi ha aplicat un moment flector en sentit antihorari.

Si $V(x)$ és el tallant i $q(x)$, la càrrega distribuïda.

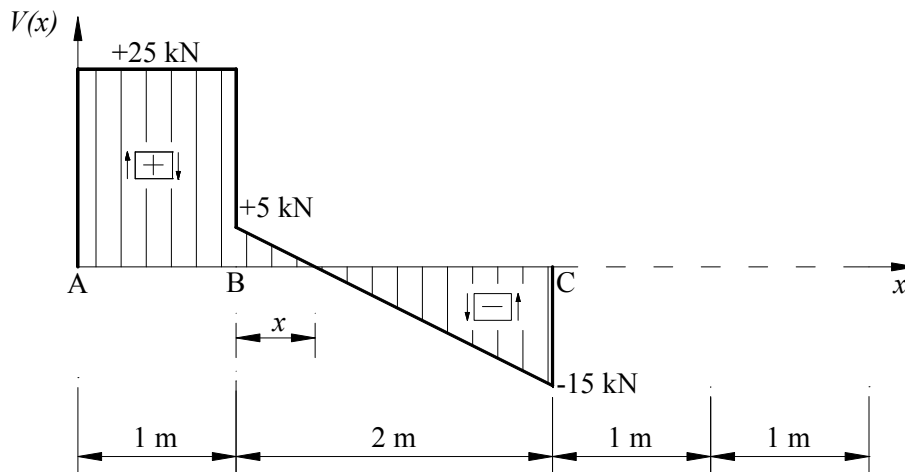
- | | | | |
|-----|---------------------------------------|------------|-----------------------------|
| A: | Discontinuitat de 25 kN | → | Càrrega puntual de 25 kN |
| AB: | Diagrama constant | → | No hi ha càrrega, |
| B: | Discontinuitat de -20 kN | → | Càrrega puntual de -20 kN |
| BC: | $V(x)$ lineal amb pendent de -10 kN/m | → | $q(x) = -10$ kN/m |
| | $V(x) = a + bx$ | si $x = 0$ | $V(0) = 5$ $a = 5$ kN |
| | | si $x = 2$ | $V(2) = -15$ $b = -10$ kN/m |
| | $V(x) = 5 - 10x$ | | |
| | $q(x) = -10$ kN/m | | |
| C: | Discontinuitat de 25 kN | → | Càrrega puntual de 25 kN |
| CD: | $V(x)$ lineal amb pendent de -10 kN/m | → | $q(x) = -10$ kN/m |
| DE: | $V(x) = 0$ i constant | → | No hi ha càrrega, $q(x)$ |



Per obtenir el valor de M_E , es planteja l'equilibri de moments a la biga:

$$\Sigma M_A = 0) \quad 20 \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot (1 + 1.5) - 25 \cdot 3 - M_E = 0 \quad M_E = 20 \text{ kNm}$$

b) Determineu el valor de M_C .



Per calcular $S_{V,AC}$ cal determinar la distància x .

L'equació de l'esforç tallant en el tram BC és:

$$V(x) = 5 - 10x$$

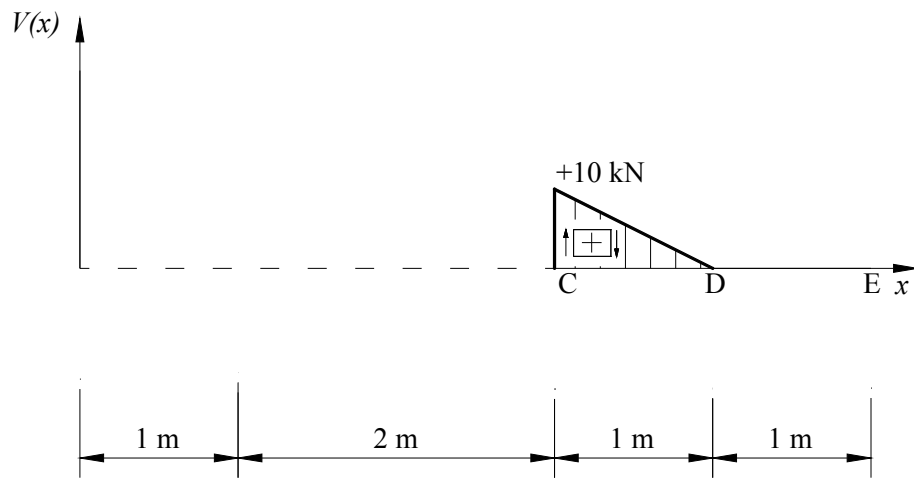
Si el tallant és nul, $V(x) = 0$, es pot determinar la distància x fent:

$$0 = 5 - 10x \quad x = 0.5 \text{ m}$$

El valor del moment en el punt C, M_C és:

$$M_C = M_A + S_{V,AC} = 0 + 25 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{0.5}{2} - 15 \cdot \frac{1.5}{2} = 15 \text{ kNm}$$

També es pot determinar M_C amb el diagrama $V(x)$ a la dreta de la secció C:



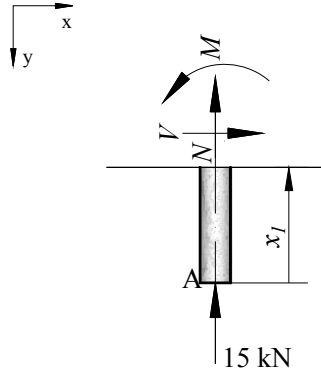
El valor del moment en el punt C, M_c és:

$$M_E = M_C + S_{V,CE} \quad 20 = M_C + 10 \cdot \frac{1}{2} \quad M_C = 15 \text{ kNm}$$

Es fan talls al llarg del pòrtic. Com que en els punts A, B, C, D, E, F i G hi ha discontinuïtats pel que fa a l'estat de càrregues o canvis de direcció, es fan els talls pels segments AB , GB , BC , CD , EF i DE .

Tram AB : $0 \text{ m} \leq x_1 \leq 1 \text{ m}$

Es fa un tall al mig del tram, a una longitud x_1 de la secció A. Es determinen N , V i M en funció de x_1 .

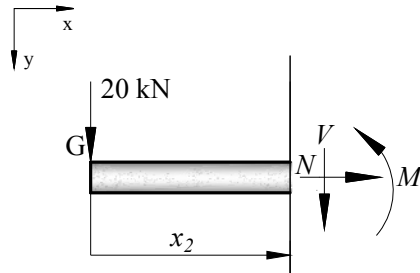


$$N(x_1) = -15 \text{ kN}$$

$$V(x_1) = 0 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = 0 \text{ kNm}$$

Tram GB : $0 \text{ m} \leq x_2 \leq 1.5 \text{ m}$

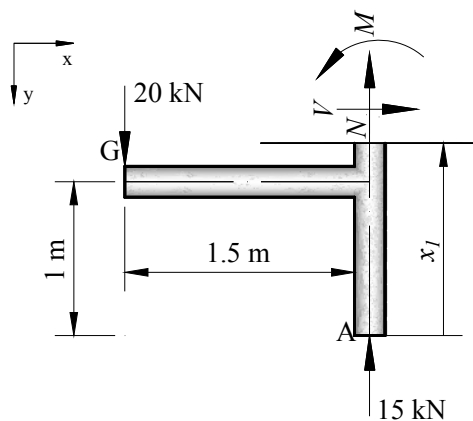


$$N(x_2) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x_2) = 20 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = -20 \cdot x_2$$

Tram BC : $1 \text{ m} \leq x_1 \leq 2 \text{ m}$

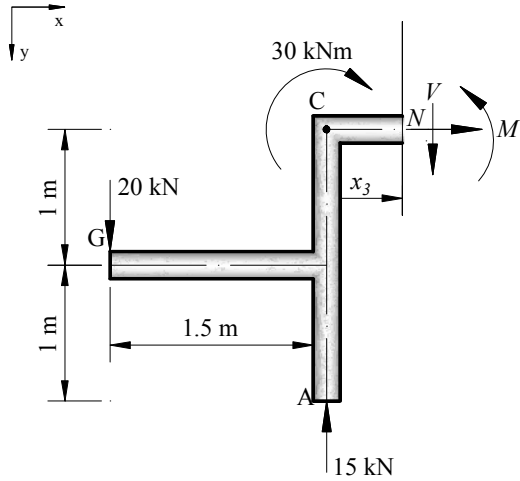


$$N(x_1) = 20 - 15 = 5 \text{ kN}$$

$$V(x_1) = 0 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = -20 \cdot 1.5 = -30 \text{ kNm}$$

Tram CD: $0 \text{ m} \leq x_3 \leq 2 \text{ m}$

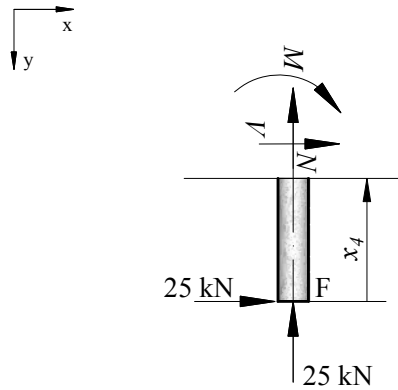


$$N(x_3) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x_3) = 15 - 20 = -5 \text{ kN}$$

$$M(x_3) = 15 \cdot x_3 + 30 - 20(x_3 + 1.5) = -5 \cdot x_3$$

Tram EF: $0 \text{ m} \leq x_4 \leq 1 \text{ m}$

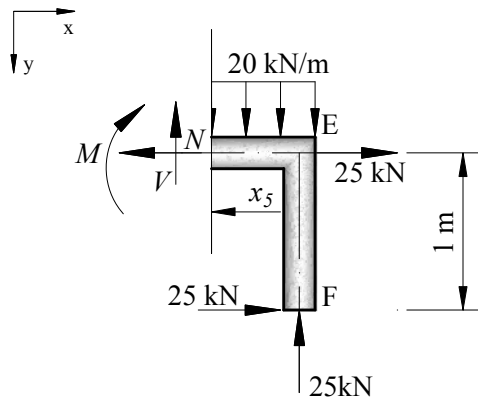


$$N(x_4) = -25 \text{ kN}$$

$$V(x_4) = 25 \text{ kN}$$

$$M(x_4) = -25 \cdot x_4$$

Tram DE: $0 \text{ m} \leq x_5 \leq 1 \text{ m}$

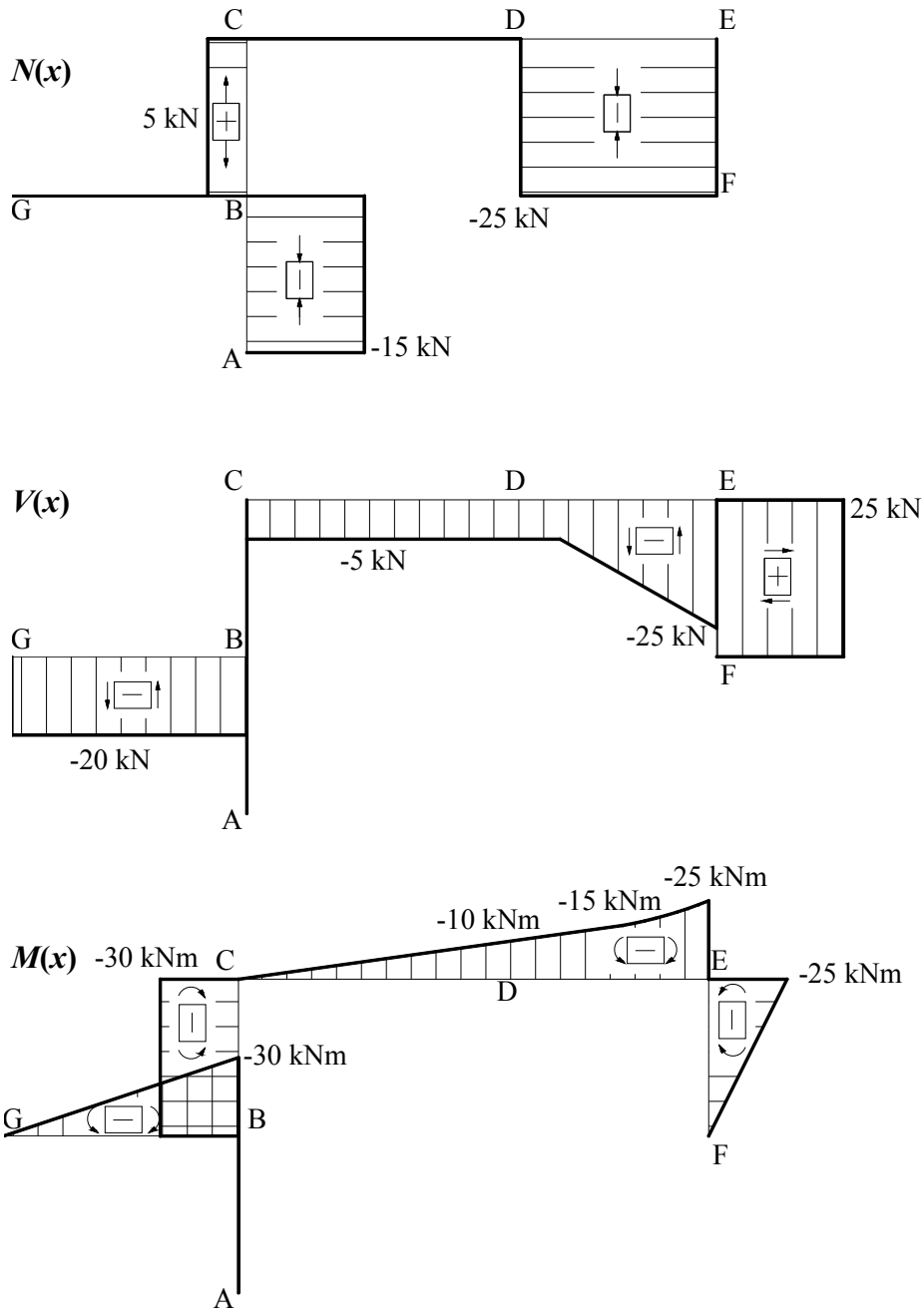


$$N(x_5) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x_5) = 20 \cdot x_5 - 25$$

$$M(x_5) = 25 \cdot x_5 - 25 \cdot 1 - 20 \cdot x_5 \cdot \frac{x_5}{2} = -10 \cdot x_5^2 + 25 \cdot x_5 - 25$$

A partir de les funcions $N(x)$, $V(x)$ i $M(x)$ de cada un dels trams, es poden representar els diagrames d'esforç normal, d'esforç tallant i de moment flector:



5. Tensions en elements sotmesos a flexió

Problema 5.1. La secció representada a la Figura 5.1 es troba sotmesa a flexió simple. Sabent que la deformació unitària en el punt A és de $500 \mu\epsilon$, determineu:

- La curvatura i el radi de curvatura de la secció.
- La tensió normal en el punt B.
- La força normal resultant de l'àrea ratllada.
- El moment flector que hi ha aplicat a la secció.

Dades:

Mòdul d'elasticitat del material (E) = $2 \cdot 10^5$ MPa.

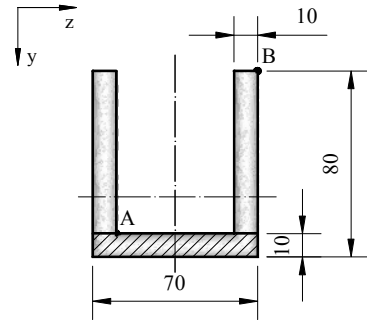
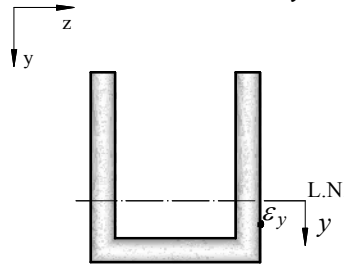


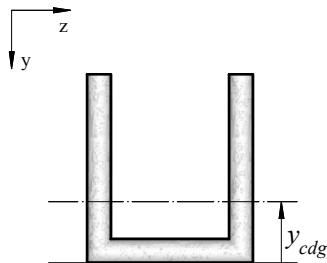
Figura 5.1 (Cotes en mm)

- La curvatura i el radi de curvatura de la secció.

Aplicuem la teoria fonamental de la flexió: $C = \frac{1}{r} = \frac{\epsilon_y}{y}$.



Si $\epsilon_A = 500 \mu\epsilon$, cal conèixer el valor de y_A per trobar la curvatura. Per tant, en primer lloc caldrà situar el centre de gravetat (c.d.g.) de la secció, que coincidirà amb la línia neutra (L.N.), perquè es tracta d'un cas de flexió simple.



$$y_{cdg} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A} = \frac{70 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot 70 \cdot 10 \cdot 45}{70 \cdot 10 + 2 \cdot 70 \cdot 10} = 31.7 \text{ mm}$$

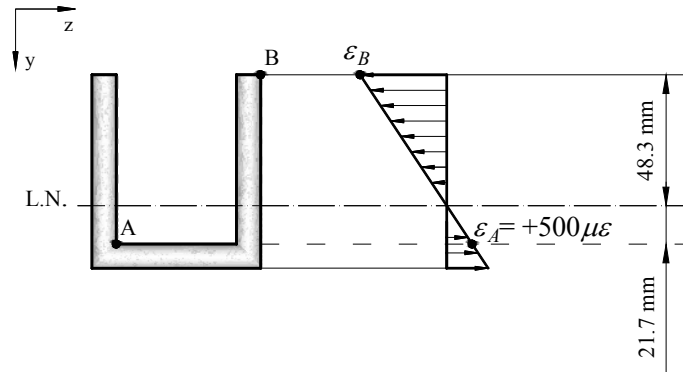
La curvatura de la secció serà:

$$C = \frac{\epsilon_A}{y_A} = \frac{+500 \cdot 10^{-6}}{(31.7 - 10)} = 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$$

I el radi de curvatura, $r = \frac{1}{C} = 43.3 \text{ m}$

b) La tensió normal en el punt B.

Sabent que la secció es manté plana després de la deformació, i que l'allargament de la línia neutra és nul, es dedueix el diagrama de deformacions unitàries, ε :



$$\frac{\varepsilon_A}{21.7} = \frac{\varepsilon_B}{-48.3}$$

$$\varepsilon_B = -\frac{48.3}{21.7} \cdot 500 \mu\varepsilon = -1.12 \cdot 10^3 \mu\varepsilon$$

Per altra banda,

$$C = 2.31 \cdot 10^{-5} = \frac{\varepsilon_B}{-48.3}$$

$$\varepsilon_B = -2.31 \cdot 10^{-5} \cdot 48.3 = -1.12 \cdot 10^3 \mu\varepsilon$$

Com que el material compleix la Llei de Hooke:

$$\sigma_B = \varepsilon_B \cdot E = -223 \text{ MPa}$$

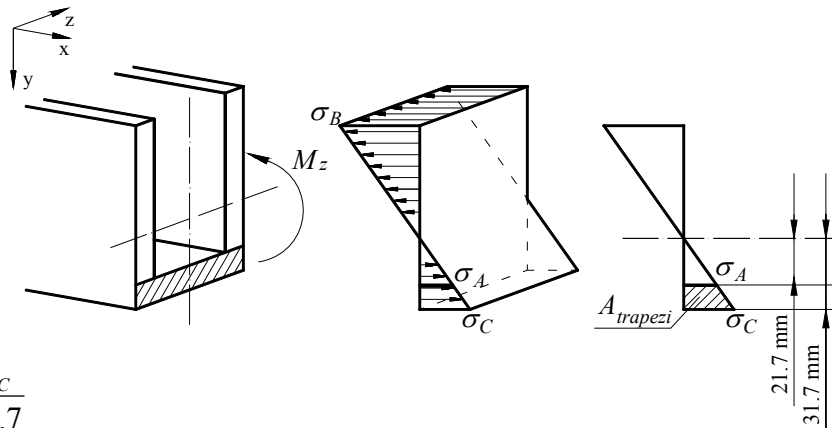
c) La força normal resultant de l'àrea ratllada.

La força normal resultant és la integral de la distribució de tensions en la superfície indicada, on $y_1 = 21.7 \text{ mm}$ i $y_2 = 31.7 \text{ mm}$.

Per tant,

$$\begin{aligned} F_N &= \int_A \sigma \cdot dA = \int_{y_1}^{y_2} \sigma(y) \cdot b \cdot dy = \int_{y_1}^{y_2} E \cdot \varepsilon(y) \cdot b \cdot dy = E \cdot b \int_{y_1}^{y_2} C \cdot y \cdot dy = E \cdot b \cdot C \cdot \frac{y^2}{2} \\ &= 2 \cdot 10^5 \cdot 70 \cdot 2.31 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{31.7^2 - 21.7^2}{2} \right) = 86.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

Alternativament, sabent que la distribució de tensions és lineal, la força normal també es pot calcular com el volum de tensions en la zona indicada:



$$\frac{\sigma_A}{21.7} = \frac{\sigma_C}{31.7}$$

$$\sigma_A = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^5 = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = 146 \text{ MPa}$$

$$F_N = A_{\text{trapezi}} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (146 + 100) \cdot 10 \cdot 70 = 86.2 \text{ kN}$$

d) El moment flector que hi ha aplicat a la secció.

El moment flector es pot calcular com:

$$C = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad \Rightarrow \quad M_z = C \cdot E \cdot I_z$$

La inèrcia de la secció respecte a l'eix z és:

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 70 \cdot 10^3 + 70 \cdot 10 \cdot (31.7 - 5)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 70^3 + 10 \cdot 70 \cdot (48.3 - 35)^2 \right) = 1.32 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

El moment flector serà:

$$M_z = 2.31 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1.32 \cdot 10^6 = 6.12 \text{ kNm}$$

Aquest moment també s'hauria pogut calcular a partir de la tensió en qualsevol punt i aplicant la fórmula de Navier. Per exemple, en el punt A:

$$M_z = \frac{\sigma_A \cdot I_z}{y_A} \quad \Rightarrow \quad M_z = \frac{\sigma_A \cdot I_z}{y_A} = \frac{+100 \cdot 1.32 \cdot 10^6}{+21.7} = 6.12 \text{ kNm}$$

Problema 5.2. La Figura 5.2 representa una biga simplement recolzada sotmesa a una càrrega uniformement distribuïda i a una càrrega puntual. Calculeu les tensions normals màximes de tracció i compressió i escolliu el perfil més adequat entre els que s'indiquen.

Dades:

Tensió normal admissible (σ_{adm}) = 173 MPa

Taules de perfils laminats UPE i IPE

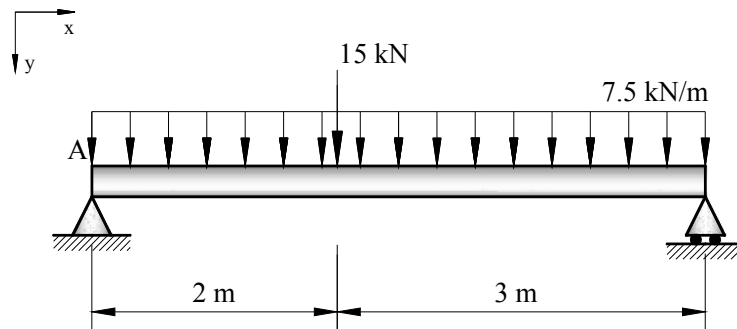


Figura 5.2

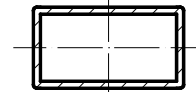
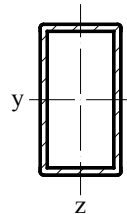
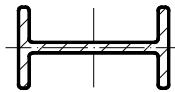
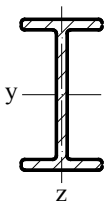
Perfils que es poden escollir:

a) IPE

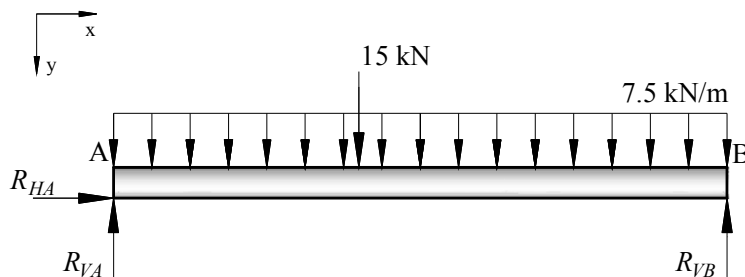
b) IPE

c) 2 UPE

d) 2 UPE



En primer lloc cal trobar el moment flector màxim ja que serà el determinant per al dimensionament:



$$\sum F_H = 0)$$

$$R_{HA} = 0$$

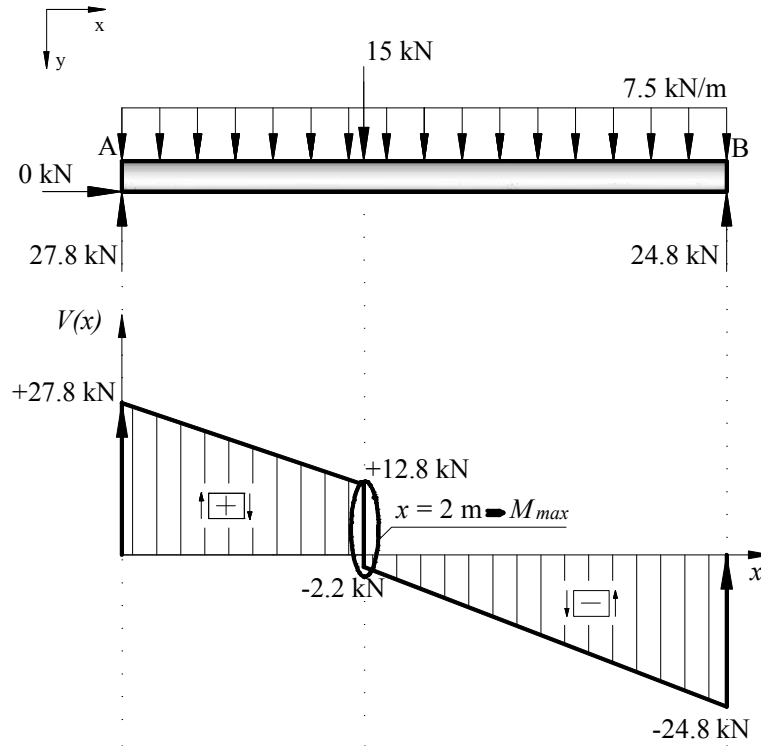
$$\sum F_V = 0)$$

$$R_{VA} + R_{VB} = 7.5 \cdot 5 + 15 \quad R_{VA} = 27.8 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0)$$

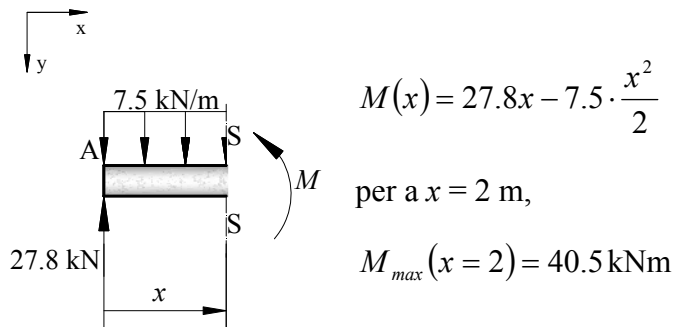
$$R_{VB} \cdot 5 = 7.5 \cdot 5 \cdot 2.5 + 15 \cdot 2 \quad R_{VB} = 24.8 \text{ kN}$$

Partint de les reaccions i de les forces aplicades sobre la biga, es pot determinar el diagrama de tallants $V(x)$:



El moment màxim es dona en el punt on el diagrama de tallants passa per zero. Per tant, en aquest cas, el moment màxim es troba a 2 m del recolzament A.

Per trobar el valor del moment màxim M_{max} , es fa un tall en una secció qualsevol (Secció S-S) i es determina l'equació del moment M en funció de x .



El mòdul resistent mínim de la secció serà

$$W_{\min} = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{40.5 \cdot 10^6}{173} = 234 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

a) Perfil IPE amb flexió segons l'eix y:

$$W_{\min} = W_{y, IPE} \Rightarrow (\text{Taules}) \Rightarrow \text{IPE} - 220 \quad (W_y = 252 \cdot 10^3 \text{ mm}^3)$$

Les tensions màximes de tracció i compressió seran:

$$\sigma_t = \frac{M_{\max}}{W_{y, IPE 220}} = \frac{40.5 \cdot 10^6}{252 \cdot 10^3} = 161 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = -\sigma_T = -161 \text{ MPa}$$

b) Perfil IPE amb flexió segons l'eix z:

$$W_{\min} = W_{z, IPE} \Rightarrow (\text{Taules}) \Rightarrow \text{IPE} - 550 \quad (W_z = 254 \cdot 10^3 \text{ mm}^3)$$

Les tensions màximes de tracció i compressió seran:

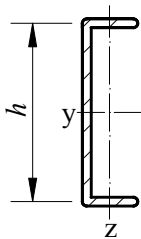
$$\sigma_t = \frac{M_{\max}}{W_{z, IPE 550}} = \frac{40.5 \cdot 10^6}{254 \cdot 10^3} = 159 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = -\sigma_T = -159 \text{ MPa}$$

c) 2 perfils UPE amb flexió segons l'eix y:

$$W_{\min} = W_{y, 2UPE}$$

En aquest cas, cal buscar quin és el mòdul resistent per a 2UPE treballant amb flexió respecte a l'eix y:



$$I_y' = 2 \cdot I_y$$

$$W_y' = \frac{I_y'}{h/2} = \frac{2 \cdot I_y}{h/2} = 2 \cdot W_y$$

El mòdul resistent de la secció composta serà el doble del mòdul resistent de la secció simple. Per tant:

$$W_{y, UPE, \min} = \frac{234 \cdot 10^3}{2} = 117 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow (\text{Taules}) \Rightarrow 2 \text{ UPE} - 180 \quad (W_{y, UPE} = 150 \cdot 10^3 \text{ mm}^3)$$

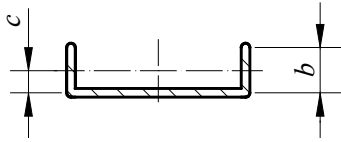
Les tensions màximes de tracció i compressió seran:

$$\sigma_T = -\sigma_c = \frac{M_{\max}}{W_{y, UPE 180}} = \frac{40.5 \cdot 10^6}{2 \cdot 150 \cdot 10^3} = 135 \text{ MPa}$$

d) 2 perfils UPE amb flexió segons l'eix z:

$$W_{\min} = W_{z,2UPE}$$

El mòdul resistent per a 2UPE treballant amb flexió respecte a l'eix z serà:



$$I_z' = 2 \cdot I_z + 2 \cdot A \cdot (b - c)^2$$

$$W_z' = \frac{I_z'}{b}$$

En aquest cas no es pot trobar directament el perfil que compleix aquestes condicions; per tant, es trobarà per tempteig:

2 UPE-220: $I_z = 246 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$; $A = 33.9 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$; $b = 85 \text{ mm}$; $c = 27 \text{ mm}$.

$$I_z' = 2 \cdot 246 \cdot 10^4 + 2 \cdot 33.9 \cdot 10^2 \cdot (85 - 27)^2 = 2.77 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$W_z' = \frac{2.77 \cdot 10^7}{85} = 326 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 > 234 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Com que el mòdul resistent obtingut és superior al necessari, es pot provar d'optimitzar el perfil:

2 UPE-180: $I_z = 144 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$; $A = 25.1 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$; $b = 75 \text{ mm}$; $c = 24.7 \text{ mm}$.

$$I_z' = 2 \cdot 144 \cdot 10^4 + 2 \cdot 25.1 \cdot 10^2 \cdot (75 - 24.7)^2 = 1.56 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$W_z' = \frac{1.56 \cdot 10^7}{75} = 208 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 < 234 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Aquest perfil no compliria la condició. Per tant, es prova el perfil immediatament superior:

2 UPE-200: $I_z = 187 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$; $A = 29 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$; $b = 80 \text{ mm}$; $c = 25.6 \text{ mm}$.

$$I_z' = 2 \cdot 187 \cdot 10^4 + 2 \cdot 29 \cdot 10^2 \cdot (80 - 25.6)^2 = 2.09 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$W_z' = \frac{2.09 \cdot 10^7}{80} = 261 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 > 234 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Així doncs, el perfil òptim seria 2 UPE-220. Les tensions màximes de tracció i compressió seran:

$$\sigma_T = -\sigma_c = \frac{M_{\max}}{W_{z,2UPE200}} = \frac{40.5 \cdot 10^6}{234 \cdot 10^3} = 173 \text{ MPa}$$

Problema 5.3. La biga de la Figura 5.3, originalment de fusta i de secció rectangular de $60 \cdot 120 \text{ mm}^2$, es reforça en els 2 m centrals amb una platina d'acer de $40 \cdot 12 \text{ mm}^2$. Es demana quina és la càrrega màxima P que pot resistir aquesta biga.

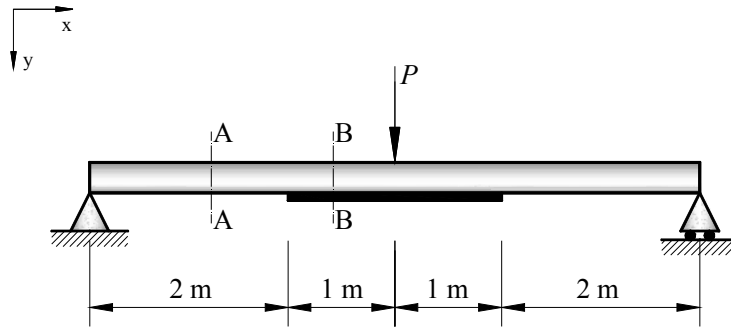
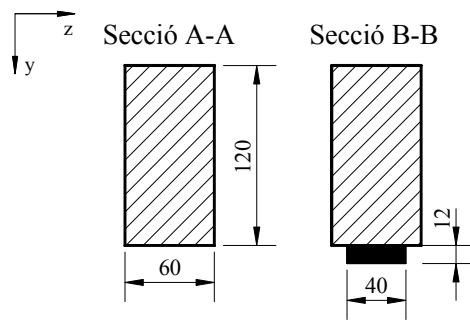
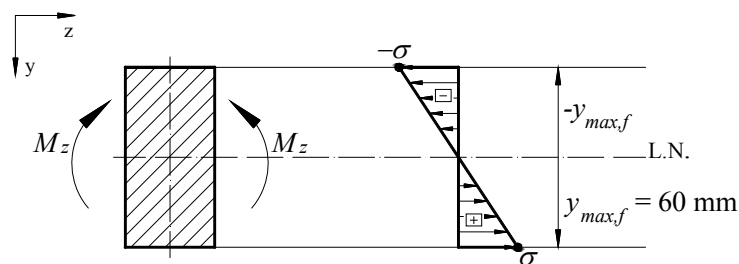


Figura 5.3

**Dades:**Mòdul d'elasticitat de la fusta (E_f) = 10^4 MPaMòdul d'elasticitat de l'acer (E_a) = $2 \cdot 10^5$ MPaTensió màxima de la fusta ($\sigma_{adm,f}$) = 40 MPaTensió màxima de l'acer ($\sigma_{adm,a}$) = 240 MPa

(Cotes de les seccions en mm)

Cal estudiar quins són els esforços màxims que pot resistir la secció sense reforçar (Secció A-A) i la secció reforçada (Secció B-B). El moment màxim estarà determinat per les tensions màximes que resisteixen els materials de la secció.

Secció A-A:

A la fibra més allunyada de la línia neutra, la tensió normal no pot ser superior a la tensió màxima de la fusta. Per tant, podem calcular el moment màxim que pot resistir la secció de fusta:

$$\sigma_{max,f} = 40 \text{ MPa} = \frac{M_{max} \cdot y_{max,f}}{I_{z,A-A}}$$

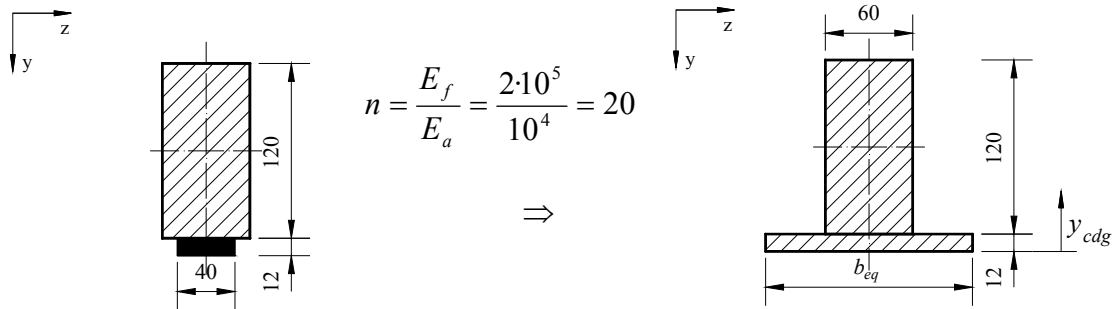
$$I_{z,A-A} = \frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 120^3 = 8.64 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M_{max,f} = \frac{40 \cdot 8.64 \cdot 10^6}{60} = 5.76 \text{ kNm}$$

Secció B-B:

A les fibres d'acer i de fusta més allunyades de la línia neutra (L.N.), la tensió normal no pot ser superior a la tensió màxima del material corresponent.

Per trobar la L.N. d'aquesta secció s'utilitza el concepte de secció equivalent: es transforma tot el material a fusta i es busca el centre de gravetat de la secció:



$$b_{eq} = 20 \cdot 40 = 800 \text{ mm}$$

$$y_{cdg} = \frac{800 \cdot 12 \cdot 6 + 60 \cdot 120 \cdot 72}{800 \cdot 12 + 60 \cdot 120} = 34.3 \text{ mm}$$

Les distàncies màximes a la línia neutra (L.N.) són:

$$y_a = 34.3 \text{ mm}$$

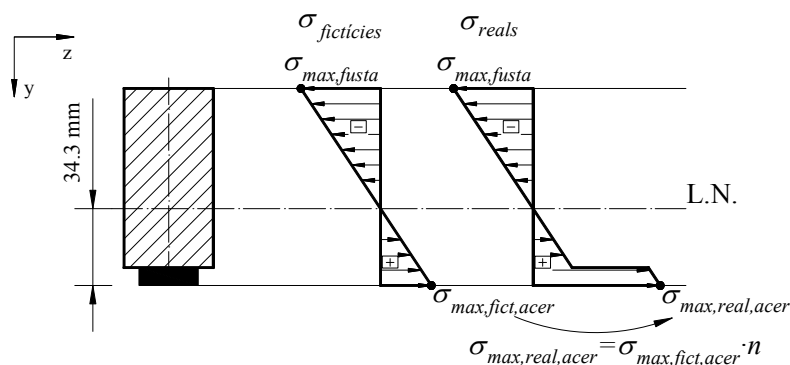
$$y_f = 120 + 12 - 34.3 = 97.7 \text{ mm}$$

El moment d'inèrcia de la secció equivalent és:

$$I_{z,B-B} = \frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 120^3 + 60 \cdot 120 \cdot (72 - 34.3)^2 + \frac{1}{12} \cdot 800 \cdot 12^3 + 800 \cdot 12 \cdot (34.3 - 6)^2$$

$$= 2.67 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Els diagrames de tensions fictícies i reals són:

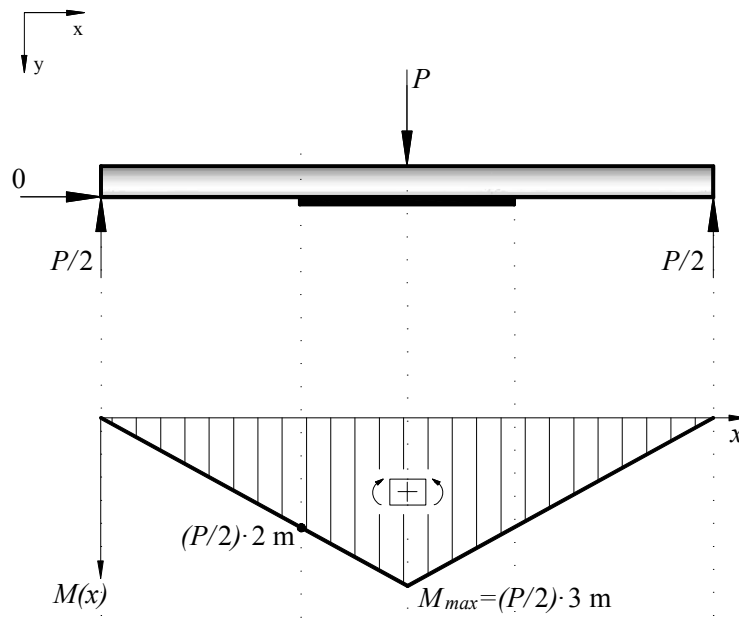


El moment màxim que pot resistir la secció reforçada el dóna el mínim de

$$M_{max,f} = \frac{\sigma_{max,f} \cdot I_{z,B-B}}{y_f} = \frac{40 \cdot 2.67 \cdot 10^7}{97.7} = 10.9 \text{ kNm}$$

$$M_{max,a} = \frac{\sigma_{max,a} \cdot I_{z,B-B}}{y_a} \cdot \frac{1}{n} = \frac{240 \cdot 2.67 \cdot 10^7}{34.3} \cdot \frac{1}{20} = 9.34 \text{ kNm}$$

El moment màxim que pot suportar la secció A-A és de 5.76 kNm i la secció B-B, de 9.34 kNm. El diagrama de moments flectors de la biga és:



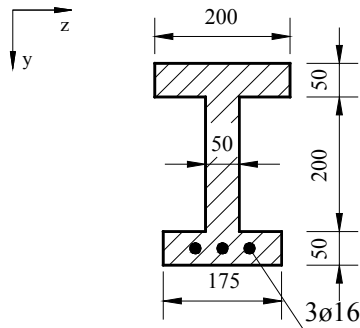
Per tant, la càrrega P que provocarà el moment màxim que pot suportar cadascuna de les dues seccions és:

$$M_{max,A-A} = \frac{P}{2} \cdot 2 = P \quad \Rightarrow \quad P = 5.76 \text{ kN}$$

$$M_{max,B-B} = \frac{P}{2} \cdot 3 = 1.5 \cdot P \quad \Rightarrow \quad P = \frac{9.34}{1.5} = 6.22 \text{ kN}$$

La càrrega màxima que podrà suportar la biga és el mínim de les dues càrregues anteriors: $P = 5.76 \text{ kN}$.

Problema 5.4. Determineu el moment màxim M_{max} que pot resistir la secció de formigó armat de la Figura 5.4, per tal que la tensió màxima al formigó no excedeixi 10 MPa i la tensió màxima a l'acer no excedeixi 200 MPa.



Dades:

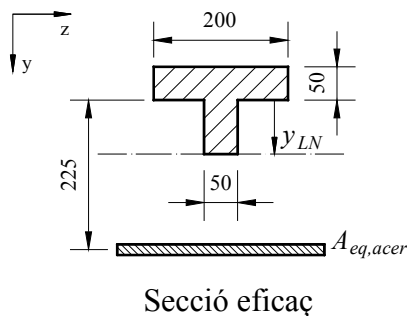
Mòdul d'elasticitat del formigó (E_f) = 10^4 MPa

Mòdul d'elasticitat de l'acer (E_a) = $2 \cdot 10^5$ MPa

(Cotes en mm)

Figura 5.4

Considerant que el formigó és un material que no suporta esforços de tracció, només es representa la part de la secció comprimida. En aquest cas, la part de la secció d'acer es transforma a formigó per aconseguir una secció homogeneïtzada (d'un sol material) o secció eficaç:



$$n = \frac{E_a}{E_f} = \frac{2 \cdot 10^5}{10^4} = 20$$

$$A_{acer} = 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 16^2}{4} \right) = 603 \text{ mm}^2$$

$$A_{eq,acer} = n \cdot A_{acer} = 20 \cdot 603 = 12 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Secció eficaç

La línia neutra de la secció coincideix amb el centre de gravetat de la secció eficaç:

$$0 = \frac{200 \cdot 50 \cdot (y + 25) + \frac{50 \cdot y^2}{2} - 12 \cdot 10^3 \cdot (225 - y)}{200 \cdot 50 + 50y + 12 \cdot 10^3} \Rightarrow y = 100 \text{ mm}$$

La inèrcia de la secció homogeneïtzada és:

(En el càlcul de la inèrcia equivalent s'ha negligit la inèrcia de les armadures d'acer respecte al seu c.d.g.)

$$I_{eq} = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 50^3 + 200 \cdot 50 \cdot (25 + 100)^2 + \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 100^3 + 12 \cdot 10^3 \cdot (225 - 100)^2 = 364 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

El moment màxim que pot resistir cada material és aquell que es produeix quan les fibres més allunyades de la línia neutra estan sotmeses a la tensió màxima del material.

$$\sigma_{max,z} = \frac{M_{max,i} \cdot y_{max,i} \cdot n_e}{I_{eq}}$$

- Moment màxim que suporta el formigó:

$$-10 \text{ MPa} = \frac{-M_{max,f} \cdot (50 + 100)}{364 \cdot 10^6} \quad \Rightarrow \quad M_{max,f} = 24.2 \text{ kNm}$$

- Moment màxim que suporta l'acer:

$$200 \text{ MPa} = \frac{M_{max,a} \cdot (225 - 100)}{364 \cdot 10^6} \cdot 20 \quad \Rightarrow \quad M_{max,a} = 29.1 \text{ kNm}$$

El moment màxim que resisteix la secció és el mínim dels que resisteix cada material, sigui, $M_{max} = 24.2 \text{ kNm}$.

Problema 5.5. A la peça de la Figura 5.5, trobeu la càrrega màxima P que es pot aplicar si no es vol superar la tensió de 150 MPa a la zona corba.

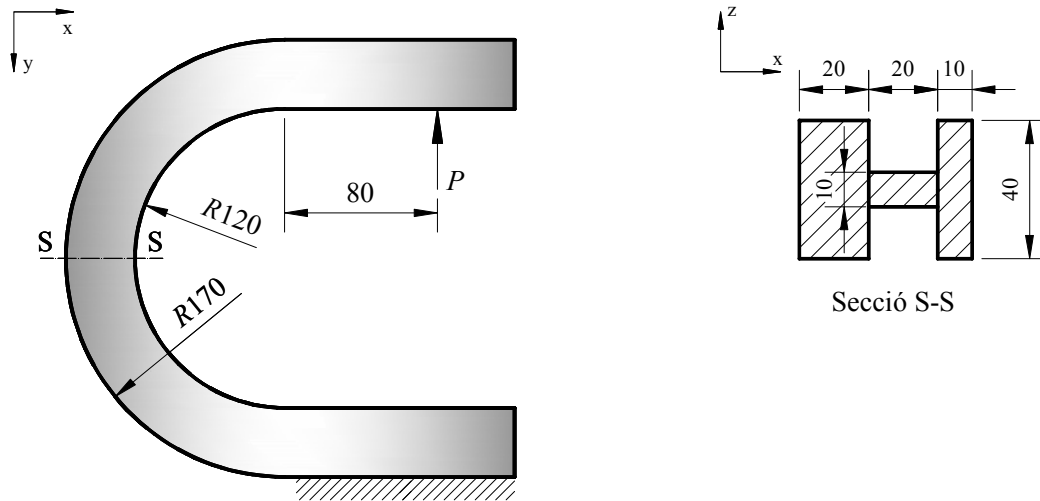
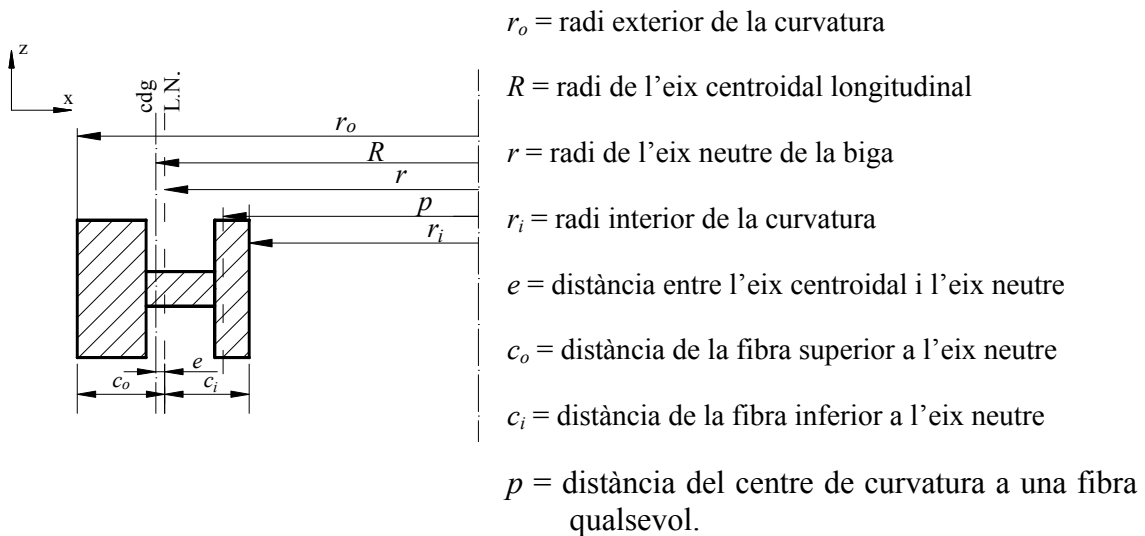


Figura 5.5

Els paràmetres de la secció són:



Amb les dades de l'enunciat s'obté: $r_o = 170 \text{ mm}$; $r_i = 120 \text{ mm}$.

Es determina la posició de l'eix centroidal de la secció S-S a partir de la geometria de la peça:

$$y_{cdg} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A} = \frac{20 \cdot 40 \cdot 40 + 20 \cdot 10 \cdot 20 + 10 \cdot 40 \cdot 5}{20 \cdot 40 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 40} = 27.1 \text{ mm}$$

Per tant, el radi de l'eix centroidal longitudinal és:

$$R = r_i + y_{cdg} = 120 + 27.1 = 147 \text{ mm}$$

El moment a la secció S-S és:

$$M = P \cdot (80 + R) = P \cdot (80 + 147) = 227P \text{ Nmm}$$

Es determina el radi de l'eix neutre de la biga, sabent que l'àrea total de la secció és 1400 mm^2 .

$$r = \frac{A}{\int \frac{dA}{p}} \quad \text{on } p \text{ és la distància del centre de curvatura a una fibra qualsevol.}$$

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_o} \frac{dA}{p} &= \int_{r_i}^{r_o} \frac{bdp}{p} = 40 \cdot \ln \frac{r_i + 10}{r_i} + 10 \cdot \ln \frac{r_i + 10 + 20}{r_i + 10} + 10 \cdot \ln \frac{r_o}{r_i + 10 + 20} = \\ &= 40 \cdot \ln \frac{120 + 10}{120} + 10 \cdot \ln \frac{120 + 10 + 20}{120 + 10} + 10 \cdot \ln \frac{170}{120 + 10 + 20} \end{aligned}$$

$$r = \frac{1400}{40 \cdot \ln \frac{130}{120} + 10 \cdot \ln \frac{150}{130} + 10 \cdot \ln \frac{170}{150}} = 145 \text{ mm}$$

La fibra més interior està sotmesa a una tensió de:

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} \cdot c_i}{A e r_i} = \frac{P}{1400} + \frac{227P \cdot (145 - 120)}{1400 \cdot (147 - 145) \cdot 120} = \frac{P}{1400} + 1.8 \cdot 10^{-2} P = 1.87 \cdot 10^{-2} P$$

per tant la càrrega màxima perquè no falli la fibra interior és:

$$\sigma_i \leq 150 \Rightarrow P \geq 8.03 \text{ kN}$$

mentre que la tensió a la fibra més exterior serà:

$$\sigma_o = \frac{P}{A} - \frac{M_{\max} c_o}{A e r_o} = \frac{P}{1400} - \frac{227P \cdot (145 - 170)}{1400 \cdot (147 - 145) \cdot 170} = \frac{P}{1400} - 1.24 \cdot 10^{-2} P = -1.17 \cdot 10^{-2} P$$

Per tant, la càrrega màxima perquè no falli la fibra interior és:

$$|\sigma_o| \leq 150 \Rightarrow P \geq 12.8 \text{ kN}$$

El valor màxim de la càrrega P que es pot aplicar per tal de no superar la tensió de 150 MPa és 8.03 kN.

Problema 5.6. Es disposa de dos perfils armats d'acer, (a) i (b), per resistir els esforços de la biga simplement recolzada sotmesa a tres forces puntuals de la Figura 5.6. Es demana que calculeu la força normal màxima per unitat de longitud que ha de resistir cada cordó de soldadura en ambdós casos.

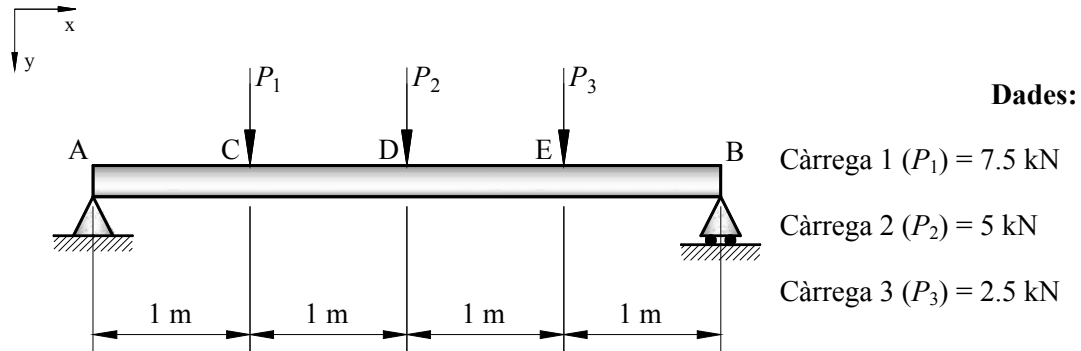
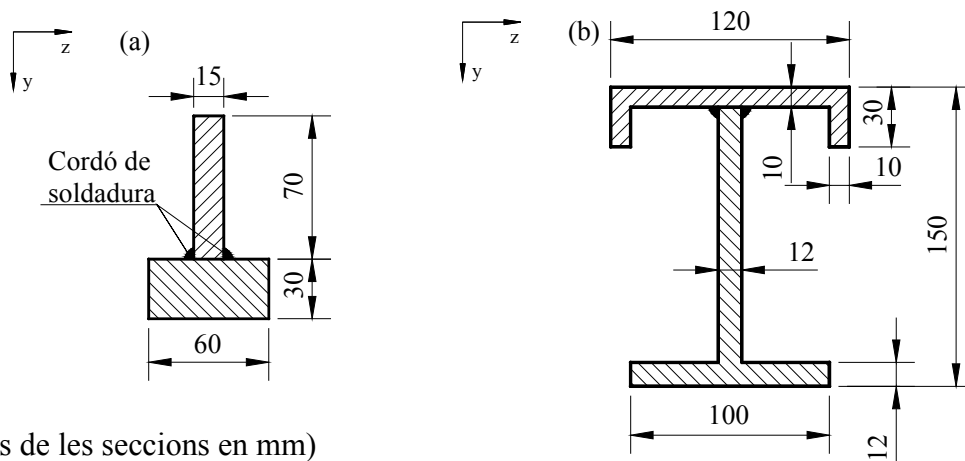
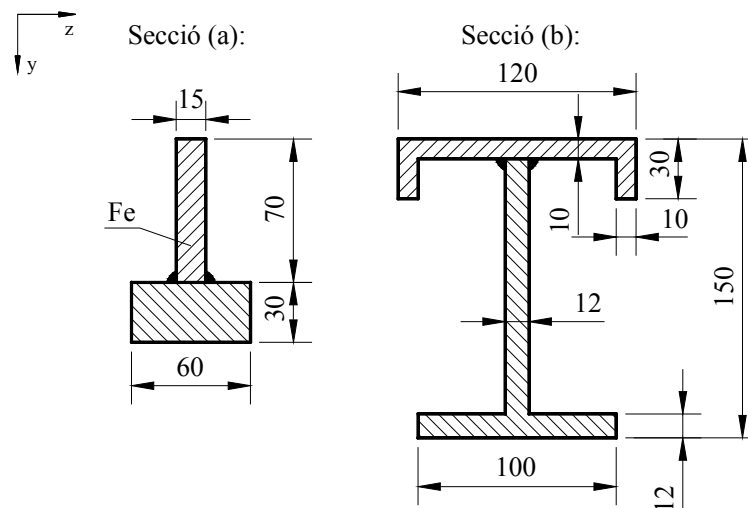


Figura 5.6



(Cotes de les seccions en mm)

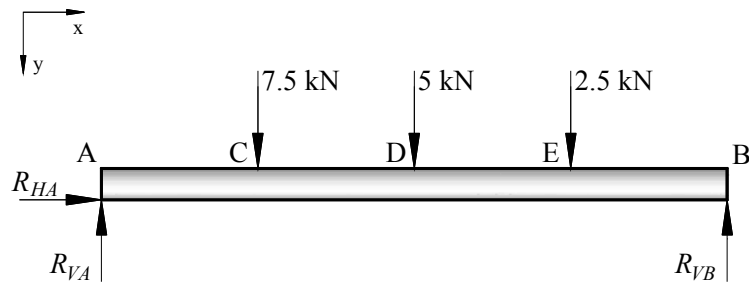
La força que resistiran els dos cordons de soldadura serà la força d'esquinçament que hi ha entre les dues parts de la peça:



$$F_B = \frac{\Delta M}{I_z} \cdot M_e$$

on ΔM és la màxima diferència de moments flectors per metre lineal. Aquest increment màxim per unitat de longitud del diagrama de moments (dM/dx) es troba on el tallant ($V = dM/dx$) és màxim.

Les reaccions a A i B són:

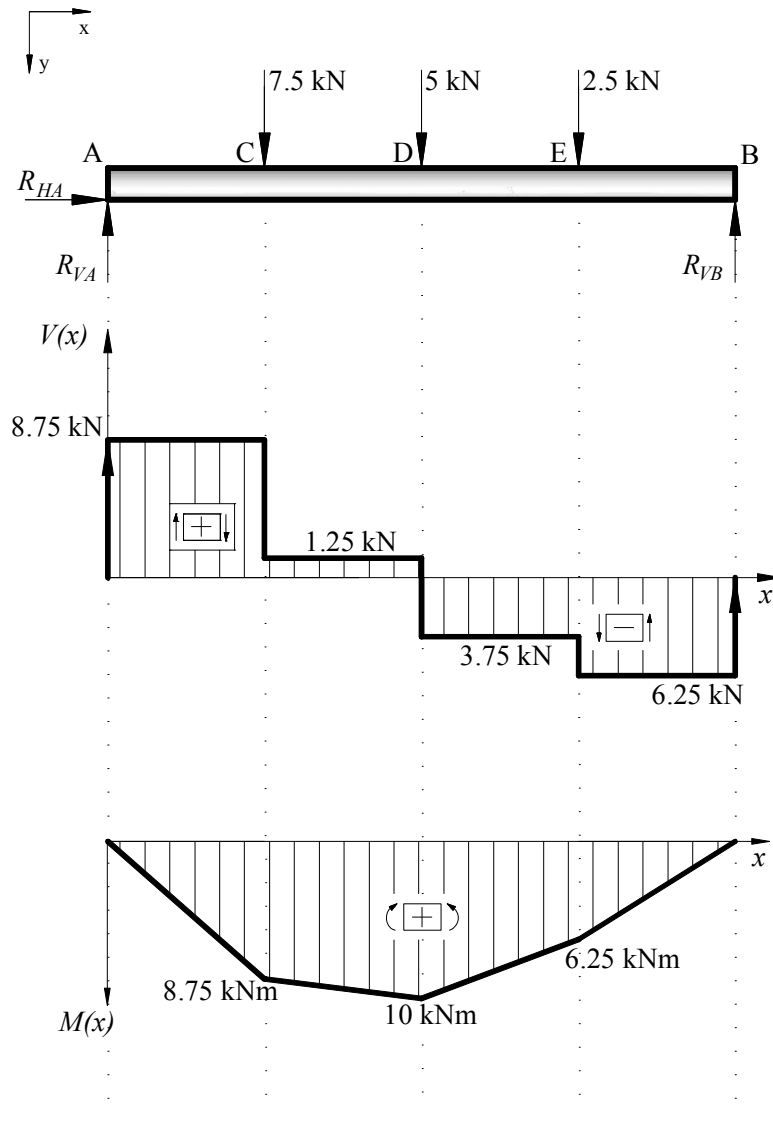


$$\sum F_H = 0) \quad R_{HA} = 0$$

$$\sum F_V = 0) \quad R_{VA} + R_{VB} = 15 \quad R_{VB} = 6.25 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0) \quad R_{VA} \cdot 4 = 7.5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 2.5 \cdot 1 \quad R_{VA} = 8.75 \text{ kN}$$

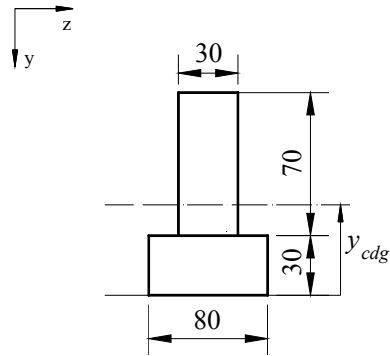
Els diagrames de tallants i de moments flectors de la biga són:



L'increment màxim de moment per metre lineal es troba en el tram AC i és de $\Delta M_{max} = 8.75$ kNm.

Les propietats geomètriques de cada secció són:

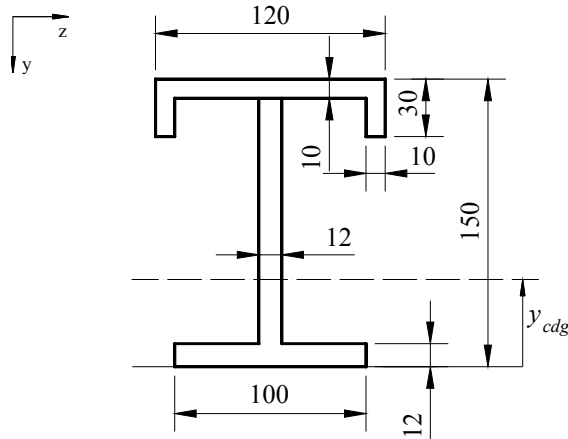
Secció (a):



$$y_{cdg} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A} = \frac{80 \cdot 30 \cdot 15 + 30 \cdot 70 \cdot 65}{80 \cdot 30 + 30 \cdot 70} = 38.3 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 80 \cdot 30^3 + 80 \cdot 30 \cdot (38.3 - 15)^2 + \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 70^3 + 30 \cdot 70 \cdot (65 - 38.3)^2 = 3.84 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Secció (b):



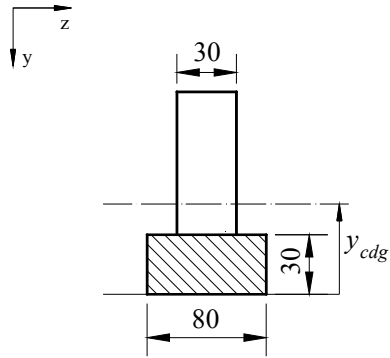
$$y_{cdg} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A} = \frac{100 \cdot 12 \cdot 6 + 12 \cdot 128 \cdot 76 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 130 + 120 \cdot 10 \cdot 145}{100 \cdot 12 + 12 \cdot 128 + 2 \cdot 10 \cdot 20 + 120 \cdot 10} = 80.7 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 12^3 + 100 \cdot 12 \cdot (80.7 - 6)^2 + \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 128^3 + 12 \cdot 128 \cdot (76 - 80.7)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 20^3 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot (130 - 80.7)^2 + \frac{1}{12} \cdot 120 \cdot 10^3 + 120 \cdot 10 \cdot (145 - 80.7)^2 = 1.43 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

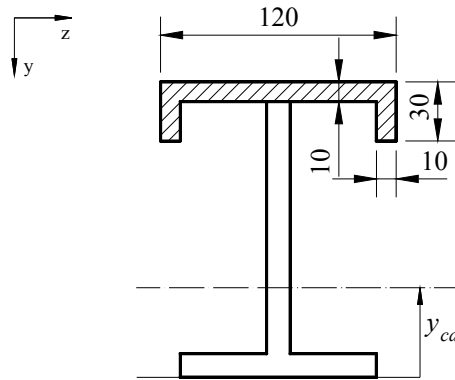
El moment estàtic de cada tros de peça és:

Secció (a):



$$M_e = 80 \cdot 30 \cdot 23.3 = 56 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Secció (b):



$$M_e = 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot (130 - 80.7) + 120 \cdot 10 \cdot (145 - 80.7) = 96.9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Per tant, la força d'esquinçament màxima per metre lineal és:

Secció (a): $F_e = \frac{8.75 \cdot 10^3}{3.84 \cdot 10^6} 56 \cdot 10^3 = 128 \text{ kN}$

Secció (b): $F_e = \frac{8.75 \cdot 10^3}{1.48 \cdot 10^7} 96.9 \cdot 10^3 = 57.3 \text{ kN}$

La força que ha de resistir cada cordó de soldadura és la meitat de la força d'esquinçament:

Secció (a): $F_{\text{soldadura}} = 128 / 2 = 63.8 \text{ kN/m}$

Secció (b): $F_{\text{soldadura}} = 57.3 / 2 = 28.6 \text{ kN/m}$

Problema 5.7. La biga de la Figura 5.7 està sotmesa a una càrrega puntual de 10 kN en el punt B. Dibuixeu el diagrama de flux de tensions tallants i el de tensions tallants suposant les seccions indicades, sabent que la força passa pel centre d'esforços tallants i que produeix flexió respecte a l'eix z de la secció:

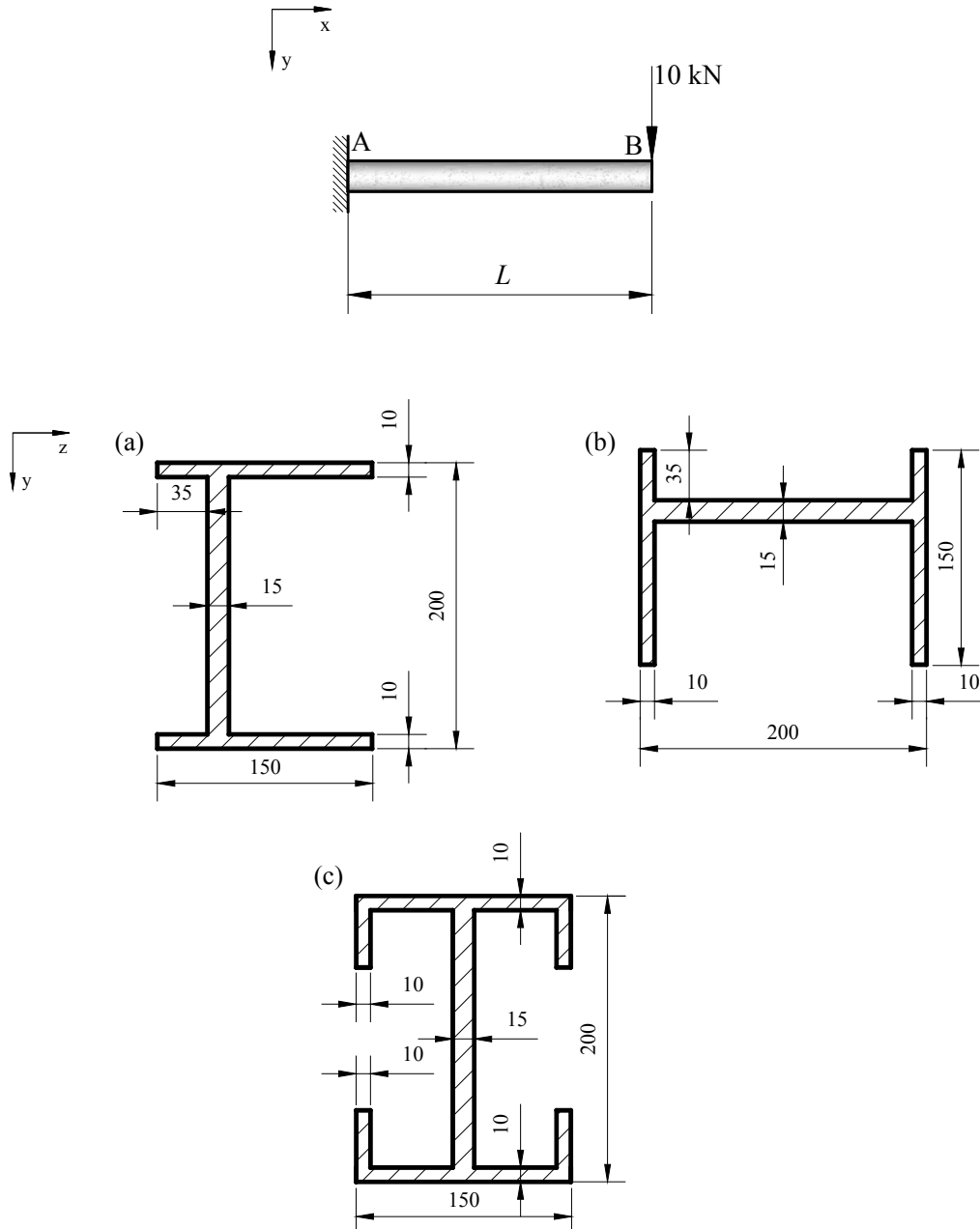
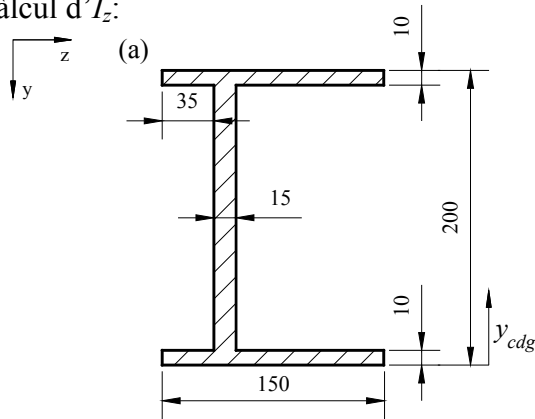


Figura 5.7

Si les seccions són de parets primes, les tensions tallants es poden considerar constants en tot el gruix i el flux de tensions és $f = \tau e$:

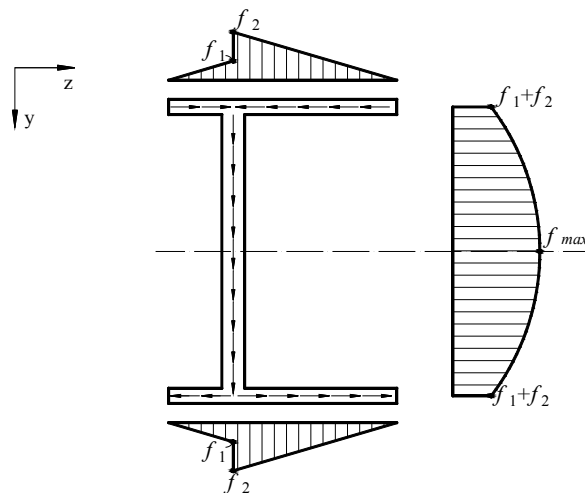
$$\tau = \frac{V \cdot M_e}{I_z \cdot e} \quad ; \quad f = \frac{V \cdot M_e}{I_z}$$

Cal calcular el moment d'inèrcia de la secció, el moment estàtic de cada tram, i determinar el sentit del flux de tensions tallants. Amb aquestes propietats geomètriques i les equacions anteriors es pot dibuixar el diagrama de tensions tallants:

Cas a)Càlcul d' I_z :

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 200^3 - \frac{1}{12} \cdot 135 \cdot 180^3 = 3.44 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Sentit del flux de tensions tallants:



Càlcul dels punts representatius del diagrama de flux de tensions tallants:

$$f_1 \Rightarrow M_{e1} = 42.5 \cdot 10 \cdot 95 = 40.4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow f_1 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 40.4 \cdot 10^3}{3.44 \cdot 10^7} = 11.7 \text{ N/mm}$$

$$f_2 \Rightarrow M_{e2} = 108 \cdot 10 \cdot 95 = 102 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow f_2 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 102 \cdot 10^3}{3.44 \cdot 10^7} = 29.7 \text{ N/mm}$$

$$f_{max} \Rightarrow M_{e,max} = M_{e1} + M_{e2} + 15 \cdot 90 \cdot 45 = 203 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow f_{max} = 59.1 \text{ N/mm}$$

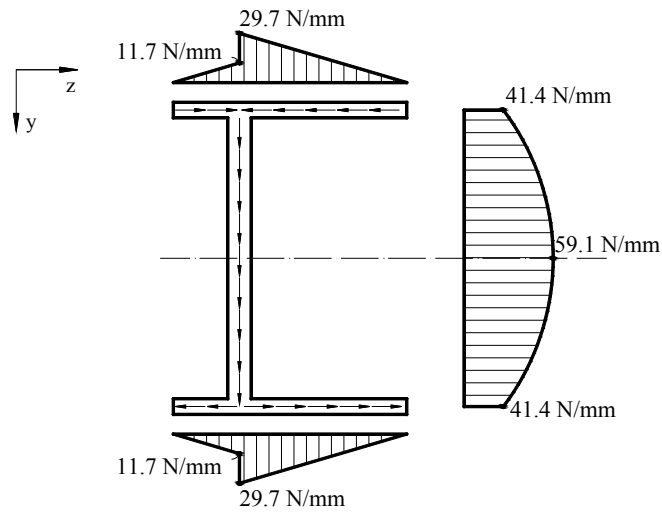
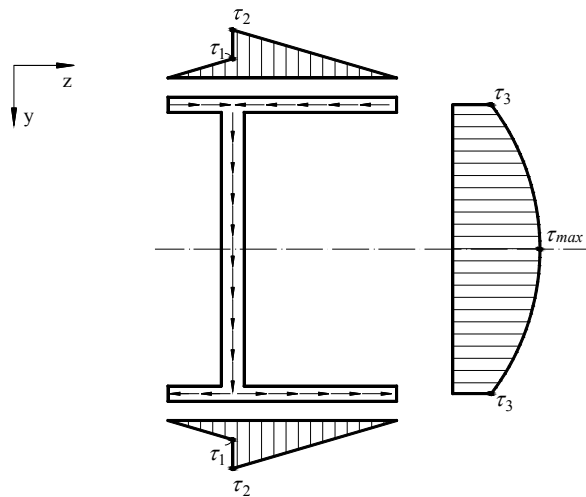


Diagrama de tensions tallants:



$$\tau_1 = f_1 / 10 = 1.17 \text{ MPa}$$

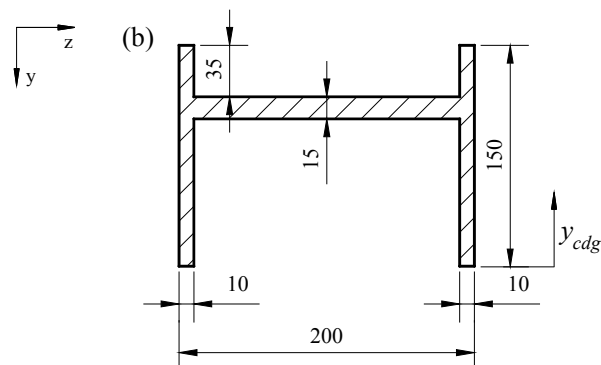
$$\tau_2 = f_2 / 10 = 2.97 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 = (f_1 + f_2) / 15 = 2.76 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = f_{max} / 15 = 3.94 \text{ MPa}$$

Cas b)

Càlcul d' I_z : En aquest cas, com que la biga no presenta simetria respecte de l'eix z, es calcula prèviament el centre de gravetat de la secció:

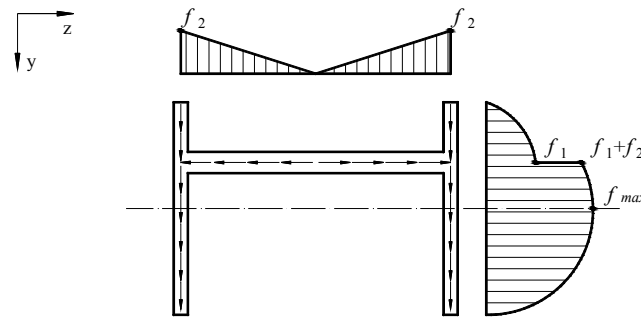


$$y_{cdg} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 150 \cdot 75 + 180 \cdot 15 \cdot 108}{2 \cdot 10 \cdot 150 + 180 \cdot 15} = 90.4 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 150^3 + 2 \cdot 10 \cdot 150 \cdot (90.4 - 75)^2 + \frac{1}{12} \cdot 180 \cdot 15^3 + 180 \cdot 15 \cdot (108 - 90.4)^2$$

$$= 7.18 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Sentit del flux de tensions tallants:



Càlcul dels punts representatius del diagrama de flux de tensions tallants:

$$f_1 \Rightarrow M_{e1} = 10 \cdot (35 + 7.5) \cdot \left(\left(150 - \frac{42.5}{2} \right) - 90.4 \right) = 16.3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 16.3 \cdot 10^3}{7.18 \cdot 10^6} = 22.7 \text{ N/mm}$$

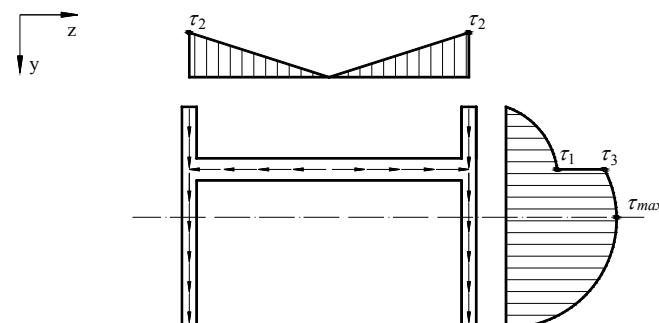
$$f_2 \Rightarrow M_{e2} = 95 \cdot 15 \cdot (108 - 90.4) = 24.4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 24.4 \cdot 10^3}{7.18 \cdot 10^6} = 34 \text{ N/mm}$$

$$f_{max} \Rightarrow M_{e,max} = \frac{10 \cdot 90 \cdot 39^2}{2} = 40.9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{max} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 40.9 \cdot 10^3}{7.18 \cdot 10^6} = 56.9 \text{ N/mm}$$

Diagrama de tensions tallants:

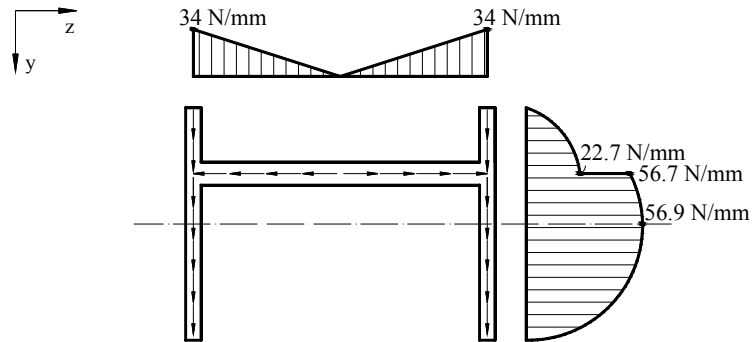


$$\tau_1 = f_1 / 10 = 2.27 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = f_2 / 15 = 2.26 \text{ MPa}$$

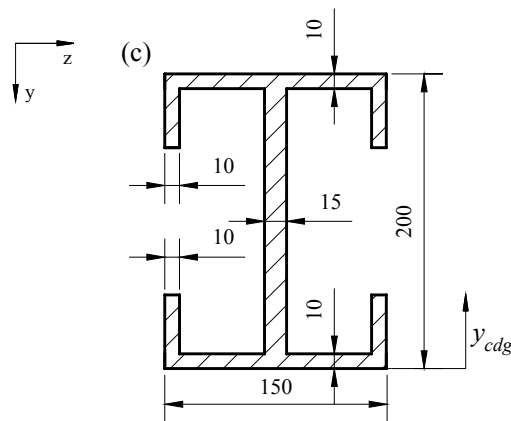
$$\tau_3 = (f_1 + f_2) / 10 = 5.67 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = f_{max} / 10 = 5.69 \text{ MPa}$$



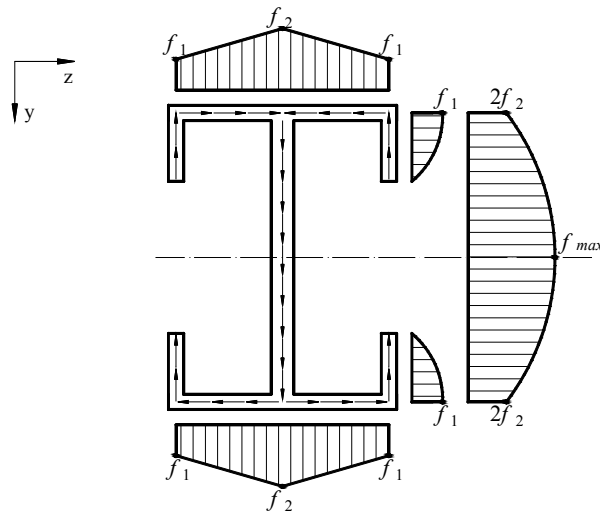
Cas c)

Càlcul d' I_z :



$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 200^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 100^3 + \frac{1}{12} \cdot 57.5 \cdot 180^3 \right) = 4.24 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Sentit del flux de tensions tallants:



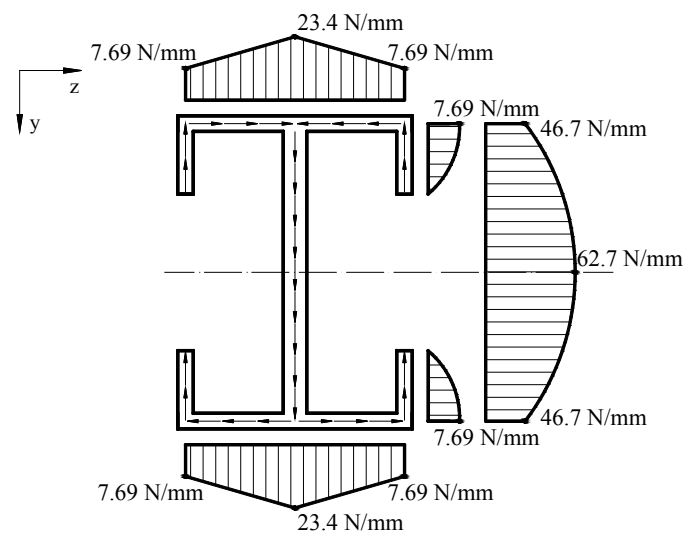
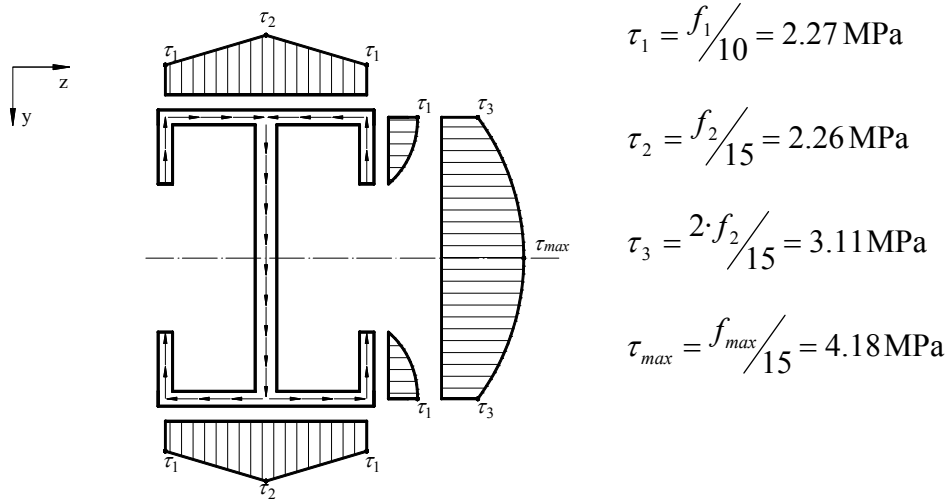
Càlcul dels punts representatius del diagrama de flux de tensions tallants:

$$f_1 \Rightarrow M_{e1} = 10 \cdot 45 \cdot 72.5 = 32.6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow f_1 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 32.6 \cdot 10^3}{4.24 \cdot 10^7} = 7.69 \text{ N/mm}$$

$$f_2 \Rightarrow M_{e2} = M_{e1} + 70 \cdot 10 \cdot 95 = 99.1 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow f_2 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 99.1 \cdot 10^3}{4.24 \cdot 10^7} = 23.4 \text{ N/mm}$$

$$f_{max} \Rightarrow M_{e,max} = 2M_{e2} + 15 \cdot 95 \cdot 47.5 = 266 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow f_{max} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 266 \cdot 10^3}{4.24 \cdot 10^7} = 62.7 \text{ N/mm}$$

Diagrama de tensions tallants:



Problema 5.8. Trobeu el centre d'esforços tallants per a la secció del cas a) del problema 5.7.

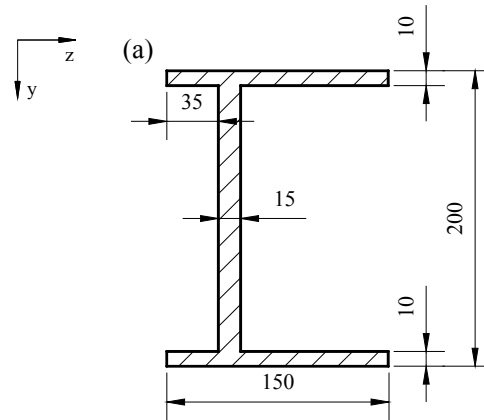
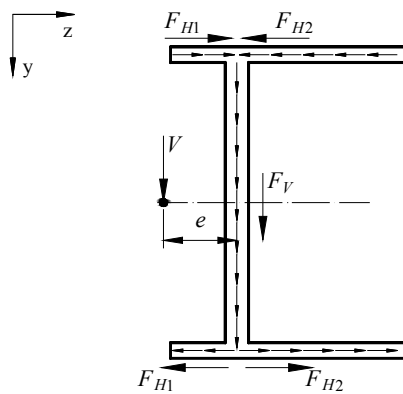


Figura 5.8

(cotes en mm)

El centre d'esforços tallants és el punt per on ha de passar la resultant dels esforços tallants a la secció per tal de no produir esforços de torsió. Per tant, el sumatori de moments produïts per totes les forces tallants respecte d'aquest punt és igual a zero.



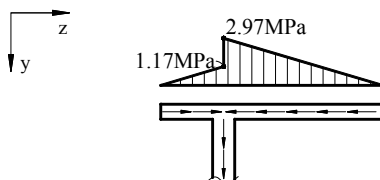
$$\sum M_A = 0)$$

$$(F_{H1} - F_{H2})190 = F_v \cdot e$$

$$e = \frac{(F_{H1} - F_{H2})190}{F_v}$$

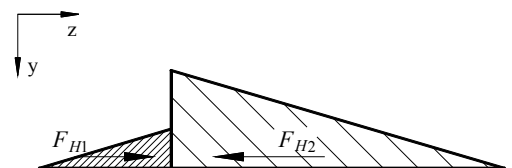
Les forces horitzontals s'obtenen amb la integració de tensions tallants en aquests trams.

De l'exercici anterior, es coneix:



Per tant: $F_{H1} = \frac{1}{2} \cdot 1.17 \cdot 42.5 \cdot 10 = 249 \text{ N}$

$$F_{H2} = \frac{1}{2} \cdot 2.97 \cdot 108 \cdot 10 = 1.6 \cdot 10^3 \text{ N}$$



La força vertical coincideix amb el tallant de la secció $F_V = 10$ kN.

La posició del centre d'esforços tallants O està determinada per :

$$e = \frac{1.6 \cdot 10^3 - 249}{10 \cdot 10^3} \cdot 190 = 25.6 \text{ mm}$$

6. Deformacions en elements sotmesos a flexió

Problema 6.1. La biga simplement recolzada de la Figura 6.1 està sotmesa a una càrrega uniformement distribuïda i a una càrrega puntual. Determineu:

- La fletxa en el punt C.
- L'angle que formen les tangents a l'elàstica entre els punts A i C.

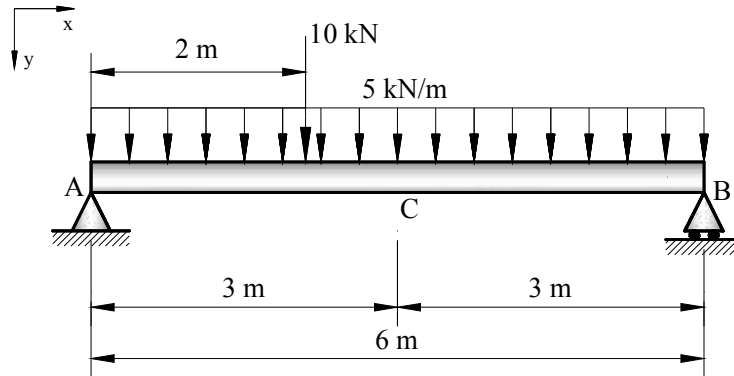


Figura 6.1

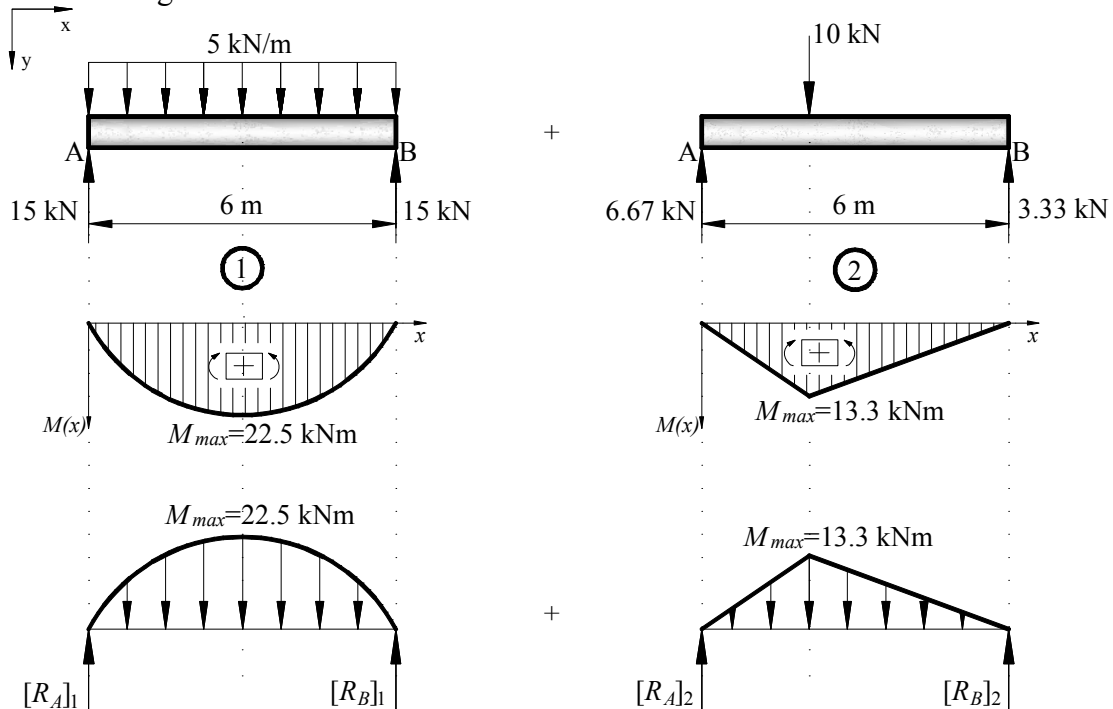
Dades: $(E \cdot I) = 10^6 \text{ Nm}^2$

El problema es resol mitjançant els teoremes de Mohr (també es pot resoldre amb l'equació de l'elàstica).

a) La fletxa en el punt C.

Per trobar la fletxa en el punt C, s'aplica el mètode de la biga conjugada pel càlcul de fletxes i el principi de superposició.

En primer lloc, es troba la biga conjugada per a cadascuna de les càrregues a què està sotmesa la biga:



Les reaccions de les bigues conjugades seran:

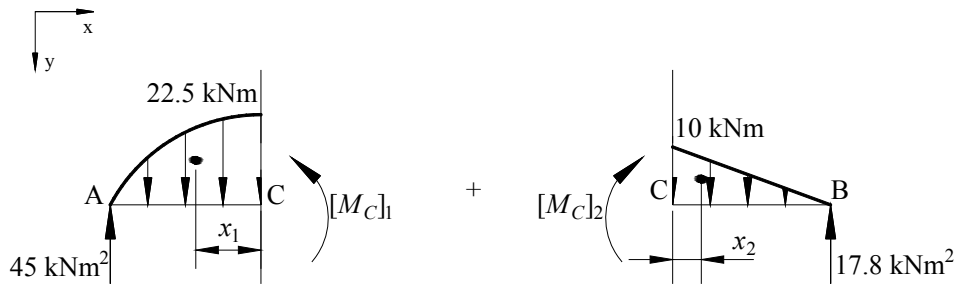
$$[R_A]_1 = [R_B]_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 22.5 \right) = 45 \text{ kNm}^2$$

$$[R_B]_2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13.3 \right) \cdot \frac{8}{3} = 17.8 \text{ kNm}^2$$

La fletxa en el punt C es pot calcular com la suma de les fletxes degudes a cada càrrega:

$$\delta_C = [\delta_C]_1 + [\delta_C]_2 = \frac{[M_C]_1}{E \cdot I} + \frac{[M_C]_2}{E \cdot I}$$

La curvatura de cada biga conjugada $\left(\frac{[M_i]}{E \cdot I} \right)$ es calcula plantejant l'equilibri de moments:



$$[M_C]_1 = 45 \cdot 3 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 22.5 \right) \cdot x_1 = 84.4 \text{ kNm}^2$$

on x_1 és la distància entre el c.d.g. de la càrrega distribuïda i el punt C,
 $x_1 = \frac{3}{8} \cdot 3 = 1.13 \text{ m}$.

$$[M_C]_2 = 17.8 \cdot 3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \right) \cdot x_2 = 38.3 \text{ kNm}^2$$

on x_2 és la distància entre el c.d.g. de la càrrega distribuïda triangular i el punt C,
 $x_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.00 \text{ m}$.

La fletxa a C és:

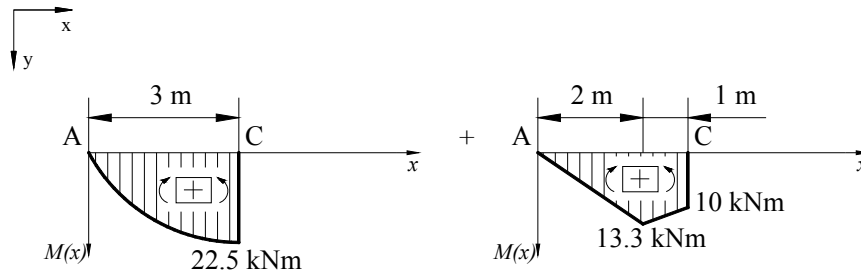
$$\delta_C = \frac{[M_C]_1 + [M_C]_2}{E \cdot I} = \frac{(84.4 + 38.3) \cdot 10^3}{10^6} = 123 \text{ mm}$$

b) L'angle que formen les tangents a l'elàstica entre els punts A i C.

L'angle que formen les tangents a l'elàstica entre dos punts es pot calcular aplicant el primer teorema de Mohr:

$$\theta_C - \theta_A = \frac{-S_{M,AC}}{E \cdot I}$$

on $S_{M,AC}$ és l'àrea del diagrama de moments entre A i C. Aplicant el principi de superposició,



$$S_{M,AC,1} = \frac{2}{3} \cdot 22.5 \cdot 3 = 45 \text{ kNm}^2 \quad S_{M,AC,2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{40}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{40}{3} + 10 \right) \cdot 1 = 25 \text{ kNm}^2$$

L'angle buscat és:

$$\theta_C - \theta_A = \frac{(45 + 25) \cdot 10^3}{10^6} = -0.07 \text{ rad}$$

Problema 6.2. Determineu la fletxa en el punt D de la biga de la Figura 6.2.

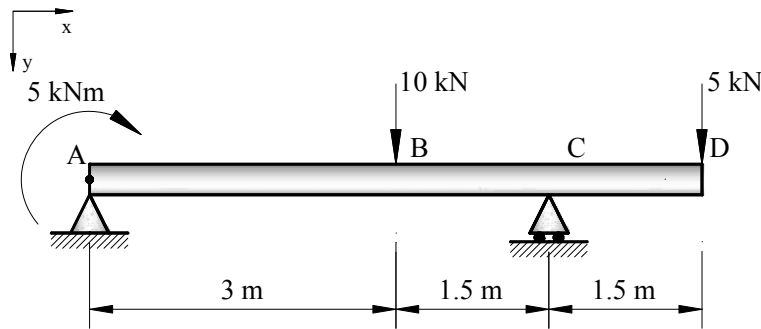


Figura 6.2

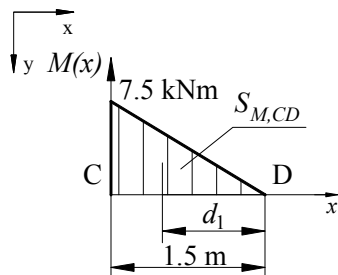
Dades: $E \cdot I = 10^6 \text{ Nm}^2$.

El problema es resol mitjançant els teoremes de Mohr (també es pot resoldre amb l'equació de l'elàstica).

La fletxa en el punt D (δ_D) es calcula aplicant el principi de superposició de moviments. El primer moviment se suposa que és de flexió del voladís sense gir a la secció C (δ_{D1}). El segon moviment del voladís seria el de cos rígid causat pel gir de C (δ_{D2}).

$$\delta_D = \delta_{D1} + \delta_{D2}$$

Aplicant el segon teorema de Mohr, la fletxa del punt D, considerant que C no gira és,



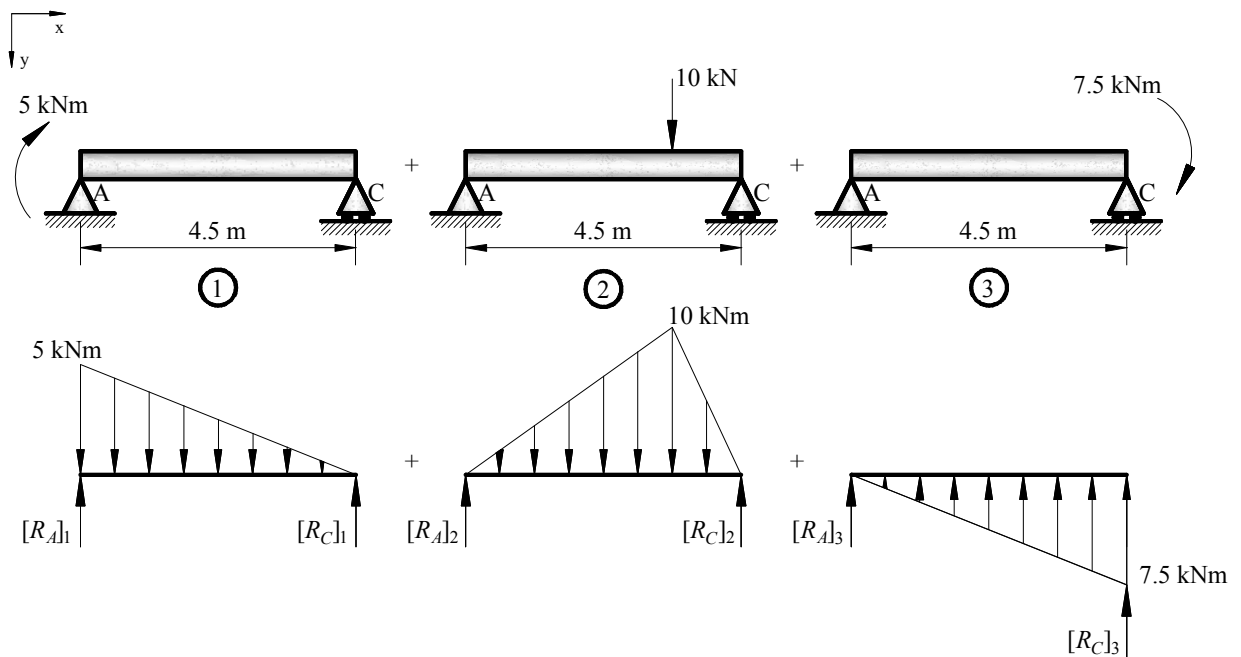
$$\delta_{D1} = -\frac{S_{M,CD} \cdot d_1}{E \cdot I} = -\frac{\left(-\frac{1}{2} \cdot 7.5 \cdot 1.5 \cdot 1\right) \cdot 10^3}{10^6} = 5.63 \text{ mm}$$

Com que θ_C és un angle petit, es calcula la segona component de la fletxa a D aplicant els teoremes de la biga conjugada en el tram AC i s'aplica el principi de superposició.

$$\delta_{D2} \approx \theta_C \cdot 1.5 \text{ m}$$

$$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} + \theta_{C3} = \frac{[V_C]_1 + [V_C]_2 + [V_C]_3}{E \cdot I}$$

Els diagrames de moments, les bigues conjugades i les seves reaccions a C són:



Fent l'equilibri de moments respecte al punt A s'obtenen els valors de les reaccions en el punt C:

$$[R_C]_1 = \frac{1}{6} \cdot 4.5 \cdot 5 = 3.75 \text{ kNm}^2$$

$$[R_C]_2 = \frac{1}{4.5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot 10 \cdot 2.5 \right) = 12.5 \text{ kNm}^2$$

$$[R_C]_3 = -\frac{1}{3} \cdot 4.5 \cdot 7.5 = -11.3 \text{ kNm}^2$$

El gir total en el punt C és la suma dels girs en el punt C en cada situació:

$$\begin{aligned} \theta_C &= \theta_{C1} + \theta_{C2} + \theta_{C3} = \frac{[V_C]_1 + [V_C]_2 + [V_C]_3}{E \cdot I} = -\frac{[R_C]_1 + [R_C]_2 + [R_C]_3}{E \cdot I} = -\frac{5 \cdot 10^3}{10^6} = \\ &= -5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\delta_{D2} \approx \theta_C \cdot 1.5 \text{ m} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5 = -7.5 \text{ mm}$$

El valor total de la fletxa en el punt D és:

$$\delta_D = \delta_{D1} + \delta_{D2} = 5.63 - 7.5 = -1.88 \text{ mm}$$

Problema 6.3. Per a la biga de la Figura 6.3, recolzada en el punt B i subjectada per un cable pel punt C, trobeu:

- Totes les reaccions i el desplaçament en el punt C.
- L'equació de l'elàstica entre el punt B i el punt C.
- El gir en el punt B.

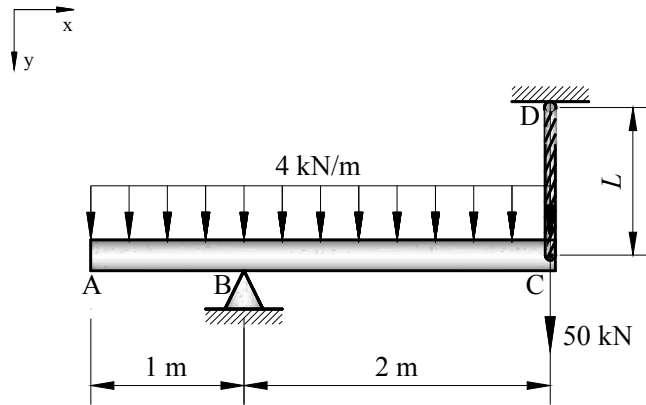


Figura 6.3

Dades:

Longitud cable (L) = 1 m

Àrea del cable (A) = 300 mm²

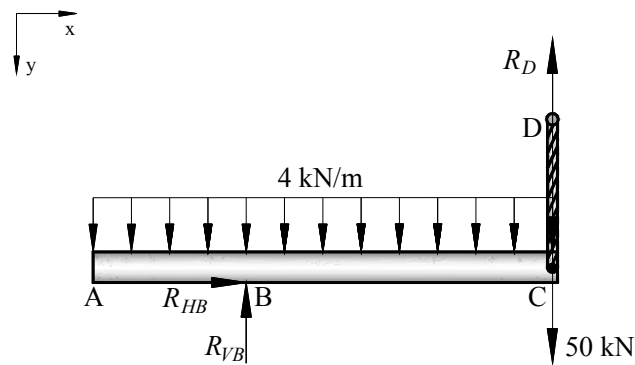
Mòdul d'elasticitat cable (E) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Inèrcia AC (I) = $6 \cdot 10^9$ mm⁴

Per conveniència, en aquest exercici les unitats de força seran kN, i les de longitud, m.

- Totes les reaccions i el desplaçament en el punt C.

Determinació de les reaccions:



$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HB} = 0$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad R_{VB} - 4 \cdot 3 - 50 + R_D = 0 \quad R_D = 53 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0) \quad 2 \cdot R_{VB} - 12 \cdot 1.5 = 0 \quad R_{VB} = 9 \text{ kN}$$

Càlcul del desplaçament en el punt C:

$$\delta_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot L}{E \cdot A}$$

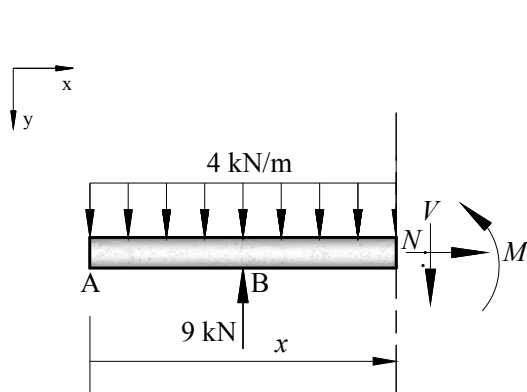
$$N_{CD} = R_D = 53 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\delta_{CD} = \frac{53 \cdot 10^3 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 300} = 0.883 \text{ mm}$$

El desplaçament en el punt C és de 0.883 mm.

b) L'equació de l'elàstica entre el punt B i el punt C.

Tram BC: $1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$



$$y'' = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

$$\Sigma M(x) = 0 \quad \frac{-4 \cdot x^2}{2} + 9 \cdot (x-1) - M(x) = 0$$

$$E \cdot I \cdot y'' = 2x^2 - 9x + 9$$

$$E \cdot I \cdot y' = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x + C_1$$

$$E \cdot I \cdot y = \frac{2}{12}x^4 - \frac{9}{6}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

Per a $x = 1$ $y(x) = 0$

$$E \cdot I \cdot 0 = \frac{2}{12} \cdot 1^4 - \frac{9}{6} \cdot 1^3 + \frac{9}{2} \cdot 1^2 + 1 \cdot C_1 + C_2$$

$$C_1 + C_2 = -\frac{19}{6}$$

Per a $x = 3$ $y(x) = 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

$$1.2 \cdot 10^3 \cdot 8.4 \cdot 10^{-4} = \frac{2}{12} \cdot 3^4 - \frac{9}{6} \cdot 3^3 + \frac{9}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot C_1 + C_2$$

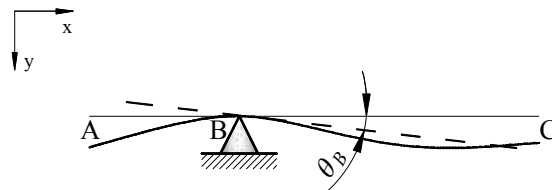
$$3C_1 + C_2 = -\frac{25}{2}$$

$$C_1 = -\frac{14}{3} \text{ kNm}^3 \quad , \quad C_2 = \frac{3}{2} \text{ kNm}^3$$

L'equació de l'elàstica és:

$$y(x) = \frac{1}{1.2 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{1}{6} x^4 - \frac{3}{2} x^3 + \frac{9}{2} x^2 - \frac{14}{3} x + \frac{3}{2} \right)$$

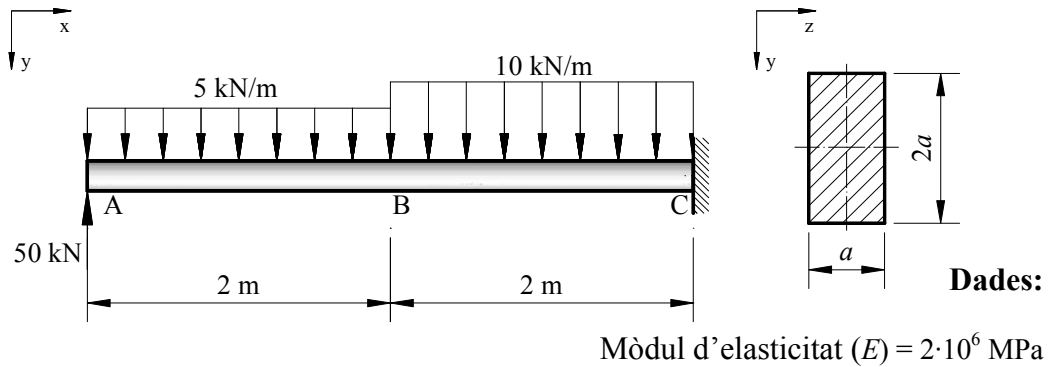
c) El gir en el punt B.



$$\theta_B = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1\text{m}} = \frac{1}{1.2 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{9}{2} \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - \frac{14}{3} \right) = 4.17 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Problema 6.4. La biga de la Figura 6.4 està encastada per una banda i lliure per l'altra. Està sotmesa a càrregues uniformement repartides de diferent valor en els trams AB i BC i a una força puntual a l'extrem lliure. Determineu:

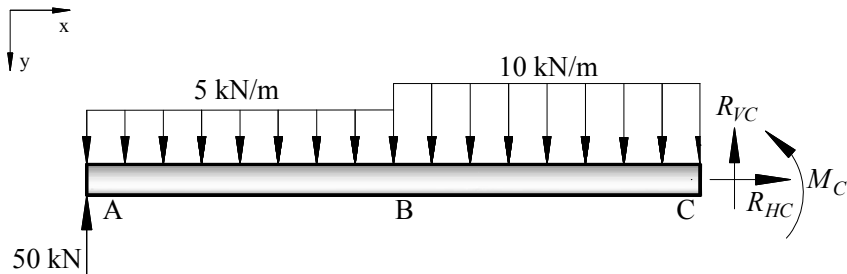
- L'equació de l'elàstica per al tram BC .
- El cantell de la biga per tal que la fletxa sigui inferior a 2 mm.



Per conveniència, en aquest exercici les unitats de força seran kN, i les de longitud, m.

- L'equació de l'elàstica per al tram BC .

Es calculen les reaccions:

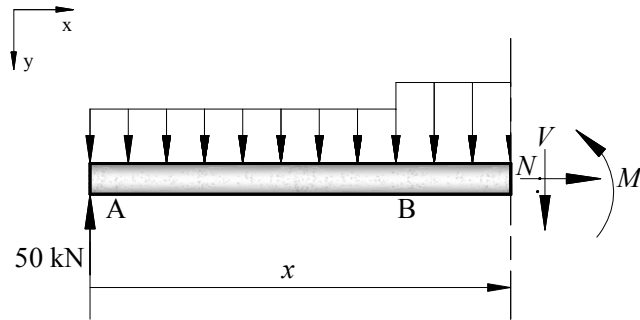


$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HC} = 0$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad 50 - 5 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + R_{VC} = 0 \quad R_{VC} = -20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0) \quad 50 \cdot 4 - 10 \cdot 3 - 20 \cdot 1 - M_C = 0 \quad M_C = 150 \text{ kNm}$$

Tram BC: $2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$



$$y'' = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

$$\Sigma M(x) = 0 \quad 50 \cdot x - 10 \cdot (x-1) - \frac{10 \cdot (x-2)^2}{2} - M = 0$$

$$M = 50x - 10x + 10 - 5x^2 - 20 + 20x = -5x^2 + 60x - 10$$

$$E \cdot I \cdot y'' = -M = 5x^2 - 60x + 10$$

$$E \cdot I \cdot y' = \frac{5}{3}x^3 - \frac{60}{2}x^2 + 10x + C_1$$

$$E \cdot I \cdot y = \frac{5}{12}x^4 - \frac{60}{6}x^3 + \frac{10}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

Per a $x = 4$ $y'(x) = 0$

$$0 = \frac{5}{3} \cdot 4^3 - \frac{60}{2} \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + C_1 \quad C_1 = \frac{10^3}{3} \text{ kNm}^2$$

Per a $x = 4$ $y(x) = 0$

$$0 = \frac{5}{12} \cdot 4^4 - \frac{60}{6} \cdot 4^3 + \frac{10}{2} \cdot 4^2 + C_1 \cdot 4 + C_2$$

$$4C_1 + C_2 = \frac{1360}{3} \quad C_2 = -880 \text{ kNm}^3$$

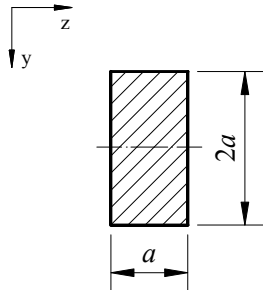
L'equació de l'elàstica en el tram BC ($2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$) és:

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{5}{12}x^4 - 10x^3 + 5x^2 + \frac{1000}{3}x - 880 \right)$$

b) El cantell de la biga per tal que la fletxa sigui inferior a 2 mm.

La fletxa màxima, en el tram BC , es produeix per a $x = 2$ (en el punt B).

El moment d'inèrcia de la secció val:



$$I_z = \frac{1}{12} \cdot a \cdot (2a)^3 = \frac{2}{3} \cdot a^4$$

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ kPa}$$

Substituint $x = 2$ a l'equació de l'elàstica i fixant $y \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$$2 \cdot 10^{-3} \geq \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot \frac{2}{3} a^4} \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot 2^4 - 10 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + \frac{1000}{3} \cdot 2 - 880 \right)$$

$$a \geq 0.356 \text{ m}$$

S'obté que la biga ha de tenir com a mínim un cantell de 356 mm.

Problema 6.5. Determineu les reaccions de la biga contínua de la Figura 6.5.

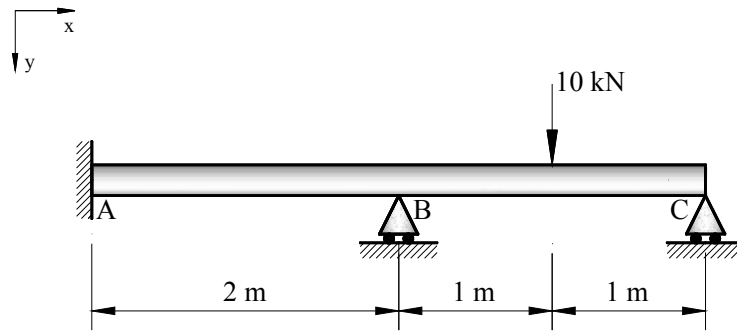
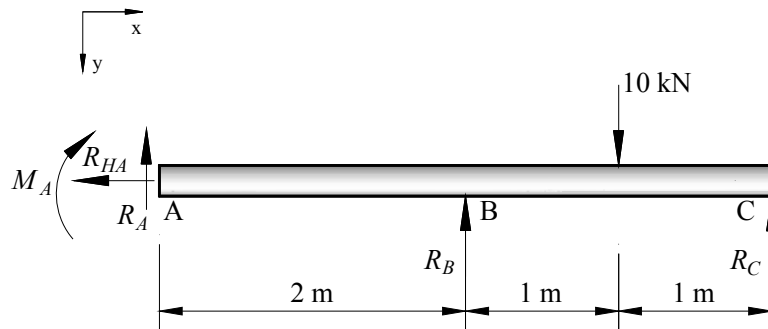


Figura 6.5

Es plantegen les equacions d'equilibri en el diagrama de sòlid lliure de la biga:



$$\Sigma F_H = 0)$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad R_A + R_B + R_C = 10 \quad (6.5.1)$$

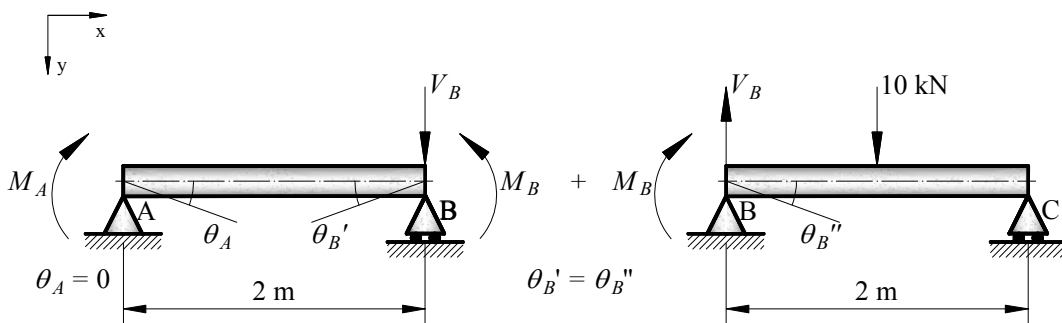
$$\Sigma M_A = 0) \quad M_A - 2R_B - 4R_C + 3 \cdot 10 = 0 \quad M_A = 2R_B + 4R_C - 30 \quad (6.5.2)$$

S'obté un sistema de tres equacions amb cinc incògnites. Calen dues equacions addicionals basades en la compatibilitat de deformacions. Es tracta d'un sistema hiperestàtic de grau dos.

Per conveniència, en aquest exercici les unitats de força seran kN, i les de longitud, m.

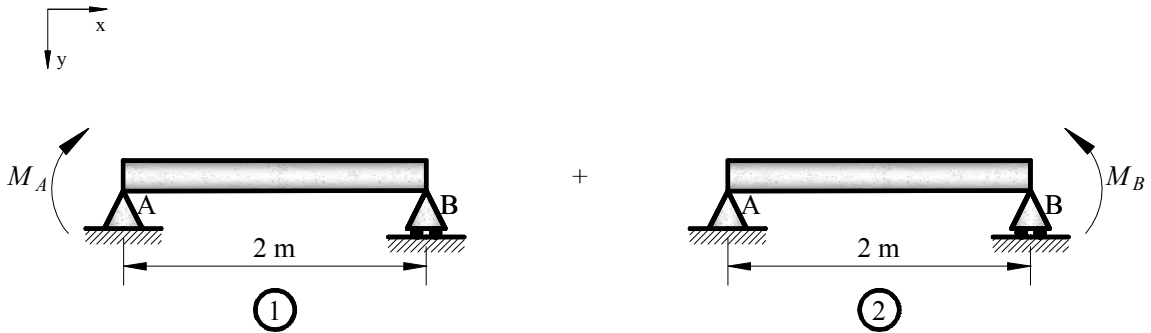
Es presenten tres alternatives diferents per obtenir les dues equacions que falten.

Alternativa 1: $\theta_A = 0$; $\theta_B' = \theta_B''$

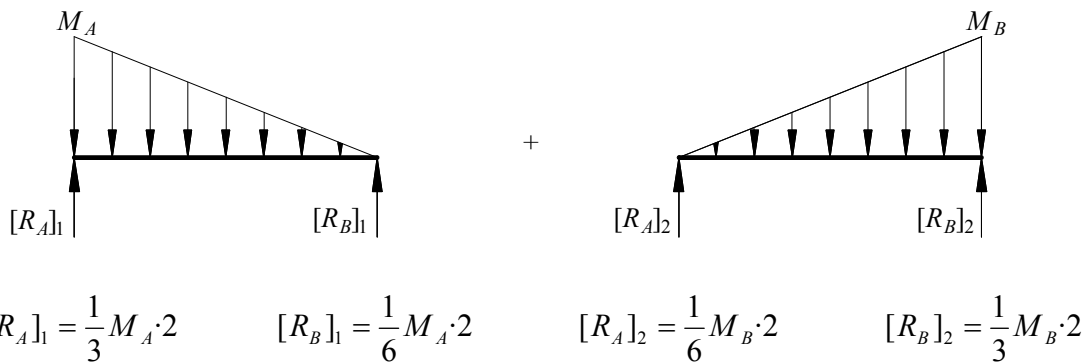


Tram AB:

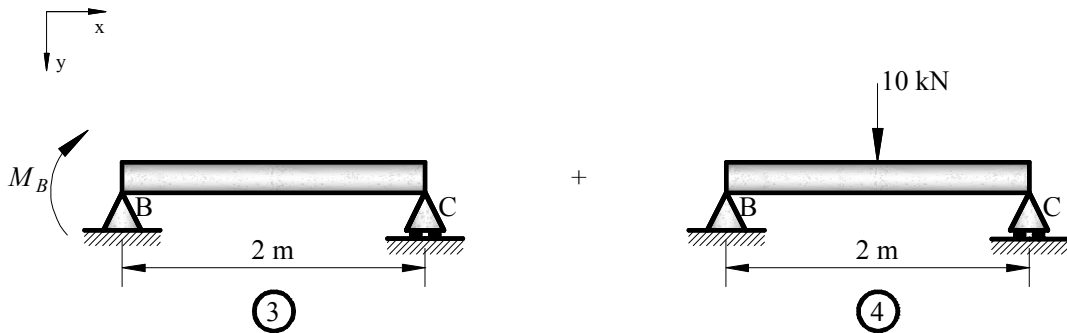
S'aplica el principi de superposició.



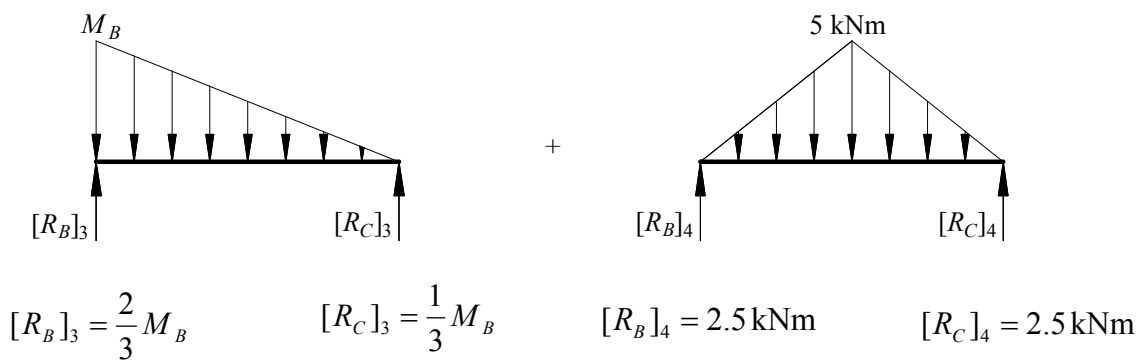
Les bigues conjugades seran:



Tram BC:



Les bigues conjugades seran:



Es determinen els angles aplicant els teoremes de la biga conjugada:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \cdot ([R_A]_1 + [R_A]_2)$$

$$\theta_A = 0$$

$$\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2}{3} M_A + \frac{1}{3} M_B \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -\frac{1}{2} M_B \quad (6.5.3)$$

$$\theta_B' = -\frac{1}{EI} \cdot ([R_B]_1 + [R_B]_2)$$

$$\theta_B'' = \frac{1}{EI} \cdot ([R_B]_3 + [R_B]_4)$$

$$\theta_B' = \theta_B''$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{3} M_A + \frac{2}{3} M_B \right) = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2}{3} M_B + 2.5 \right) \Rightarrow M_A = -4M_B - 7.5 \quad (6.5.4)$$

De les equacions 6.5.3 i 6.5.4, es troben M_A i M_B .

$$\begin{cases} M_A = -\frac{1}{2} M_B \\ M_A = -4M_B - 7.5 \end{cases} \quad \begin{cases} M_B = -2.14 \text{ kNm} \\ M_A = 1.07 \text{ kNm} \end{cases}$$

A partir de M_B es pot trobar R_C :

$$\Sigma M_B = 0 \quad M_B + 1 \cdot 10 = 2R_C \quad R_C = 3.93 \text{ kN}$$

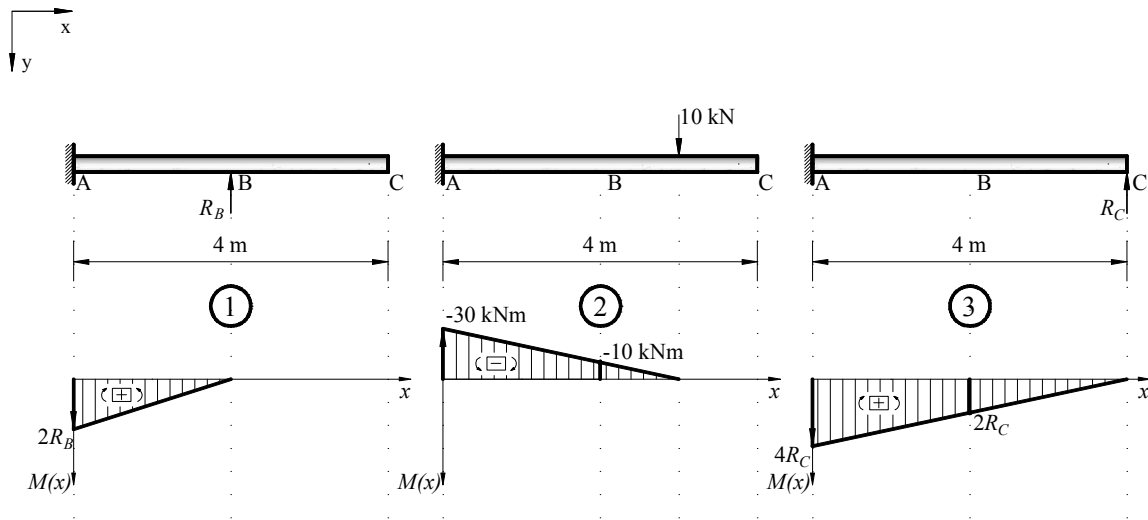
Amb les equacions inicials, 6.5.1 i 6.5.2, es determinen la resta d'incògnites:

$$R_A = -1.61 \text{ kN}$$

$$R_B = 7.68 \text{ kN}$$

Alternativa 2: $\delta_{VB} = 0$; $\delta_{VC} = 0$.

S'aplica el principi de superposició:



Es calculen els desplaçaments verticals dels punts B i C amb el segon teorema de Mohr.

$$\delta_{VB} = \Delta_{AB} = -\frac{1}{EI} \cdot (S_{M,AB} \cdot d_B)$$

$$\delta_{VB} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{EI} \cdot \left[\left(2 \cdot R_B \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) - (10 \cdot 2 \cdot 1) - \left(20 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + (2 \cdot R_C \cdot 2 \cdot 1) + \left(2 \cdot R_C \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right]$$

$$R_C = 7 - \frac{2}{5} R_B \quad (6.5.5)$$

$$\delta_{VC} = \Delta_{AC} = -\frac{1}{EI} \cdot (S_{M,AC} \cdot d_C)$$

$$\delta_{VC} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{EI} \cdot \left[\left(2 \cdot R_B \cdot \frac{2}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \right) - \left(30 \cdot \frac{3}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + 1 \right) + \left(4 \cdot R_C \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right]$$

$$R_C = \frac{1}{64} \cdot (405 - 20R_B) \quad (6.5.6)$$

De les equacions 6.5.5 i 6.5.6, es troben R_B i R_C :

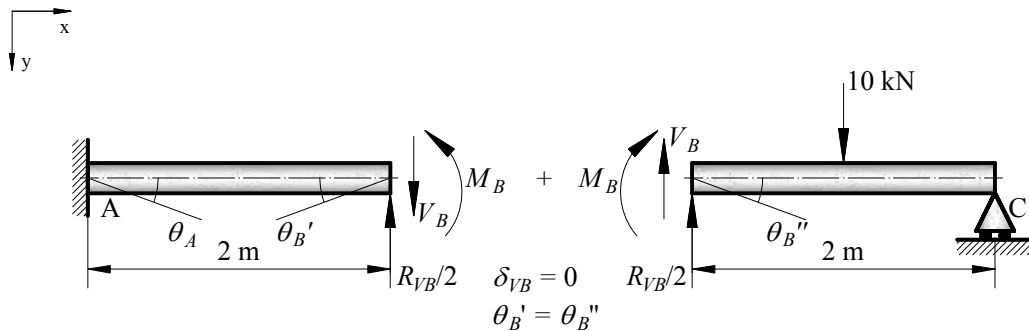
$$\begin{cases} R_C = 7 - \frac{2}{5}R_B \\ R_C = \frac{1}{64} \cdot (405 - 20R_B) \end{cases} \quad \begin{cases} R_B = 7.68 \text{ kN} \\ R_C = 3.93 \text{ kN} \end{cases}$$

Amb les equacions 6.5.1 i 6.5.2 es determinen la resta d'incògnites:

$$R_A = -1.61 \text{ kN}$$

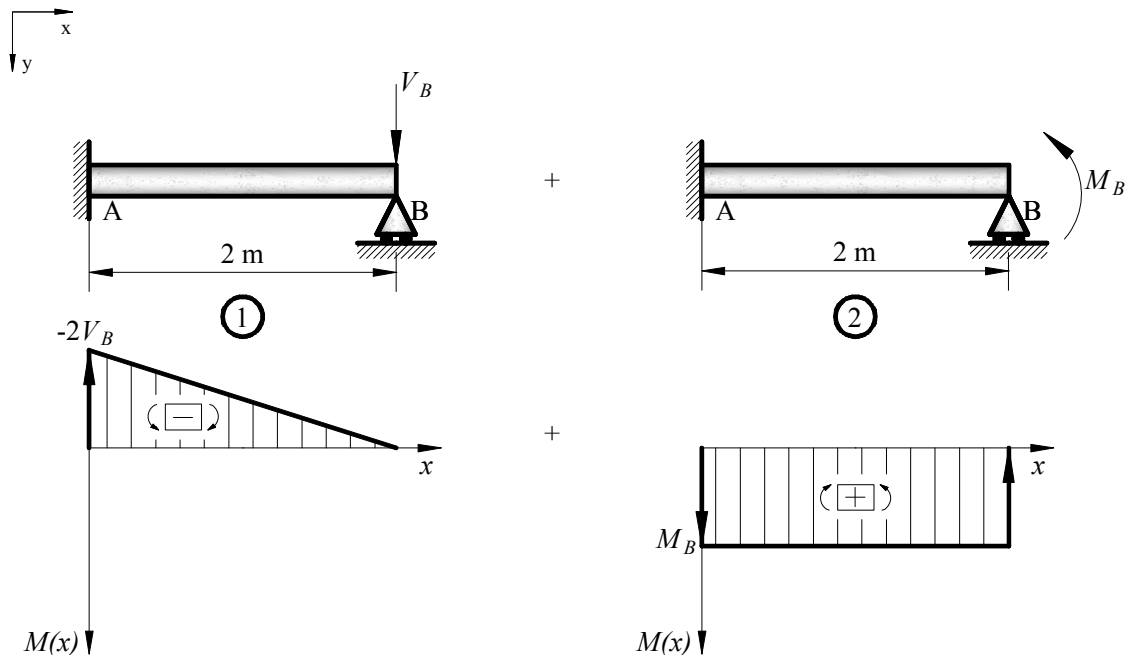
$$M_A = 1.07 \text{ kNm}$$

Alternativa 3: $\theta_B' = \theta_B''$; $\delta_{VB} = 0$



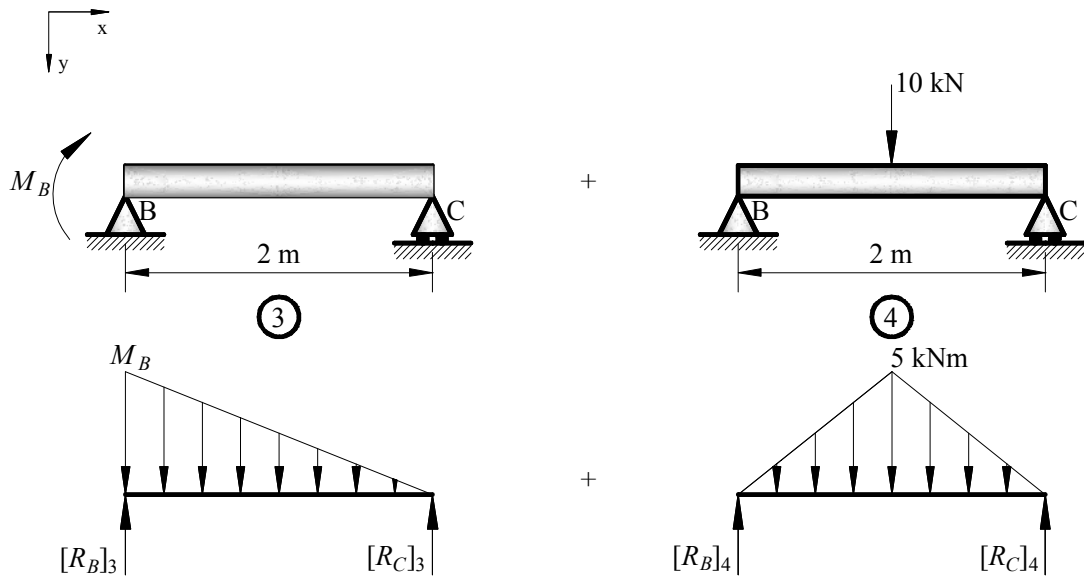
Tram AB:

En aquest tram es calcularà δ_{VB} amb el segon teorema de Mohr i θ_B' amb el primer teorema de Mohr.



Tram BC:

En aquest tram es calcularà θ_B'' amb els teoremes de la biga conjugada.



Del tram AB:

$$\delta_{VB} = \Delta_{AB} = -\frac{1}{EI} \cdot (S_{M,AB} \cdot d_B)$$

$$\delta_{VB} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{EI} \cdot \left[\left(-2 \cdot V_B \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + (M_B \cdot 2 \cdot 1) \right]$$

$$M_B = \frac{4}{3} V_B \tag{6.3.7}$$

Dels trams AB i BC:

$$\theta_B' = -\frac{1}{EI} \cdot A_{AB}$$

$$\theta_B'' = \frac{1}{EI} \cdot ([R_B]_3 + [R_B]_4)$$

$$\theta_B' = \theta_B''$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot \left[\left(2V_B \cdot \frac{2}{2} \right) + (2M_B) \right] = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2}{3} M_B + 2.5 \right)$$

$$M_B = \frac{3}{8} \cdot (2V_B - 2.5) \quad (6.3.8)$$

Es resol el sistema format per les equacions 6.3.7 i 6.3.8:

$$\begin{cases} M_B = \frac{4}{3} V_B \\ M_B = \frac{3}{8} \cdot (2V_B - 2.5) \end{cases} \quad \begin{cases} V_B = -1.61 \text{ kN} \\ M_B = -2.14 \text{ kNm} \end{cases}$$

A partir de M_B , es pot trobar R_C :

$$\Sigma M_B = 0) \quad M_B + 1 \cdot 10 = 2R_C \quad R_C = 3.93 \text{ kN}$$

I amb les equacions inicials, 6.5.1 i 6.5.2, es determinen la resta d'incògnites:

$$R_A = -1.61 \text{ kN}$$

$$R_B = 7.68 \text{ kN}$$

Problema 6.6. La biga de la Figura 6.6 està encastada pel punt A, recolzada pel punt C i té un voladís al costat dret. Està sotmesa a un moment en el punt B i a una càrrega puntual en el punt D. Determineu:

- Les reaccions de la biga.
- El diagrama d'esforços tallants i el de moments flectors.

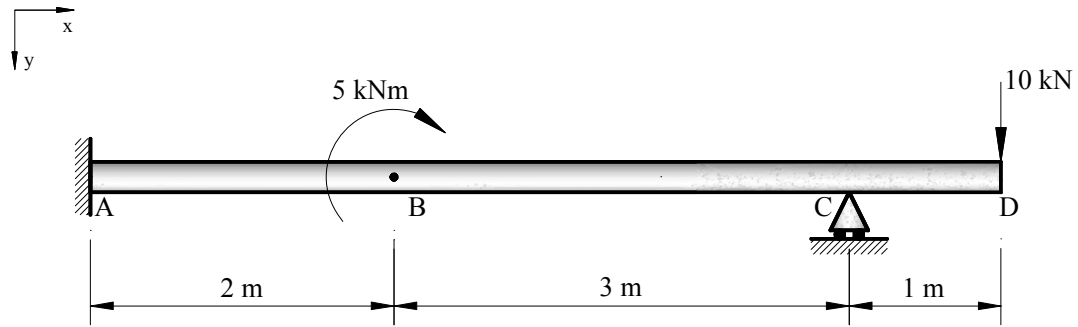


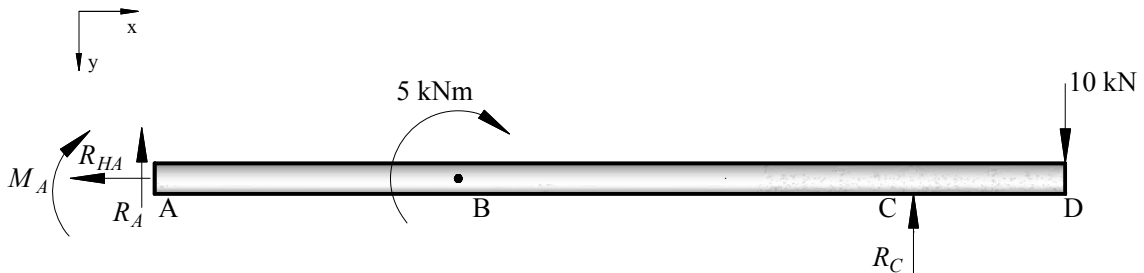
Figura 6.6

Dades: $EI = 10^6 \text{ Nm}^2$

Per conveniència, en aquest exercici les unitats de força seran kN, i les de longitud, m.

- Les reaccions de la biga.

Es tracta d'una biga hiperestàtica de grau 1. Té impeditos 4 moviments (δ_{HA} , δ_{VA} , δ_{VC} , θ_A), que corresponen a 4 reaccions (R_{HA} , R_{VA} , M_A , R_C), i es disposa de 3 equacions d'equilibri:



$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HA} = 0 \quad (6.6.1)$$

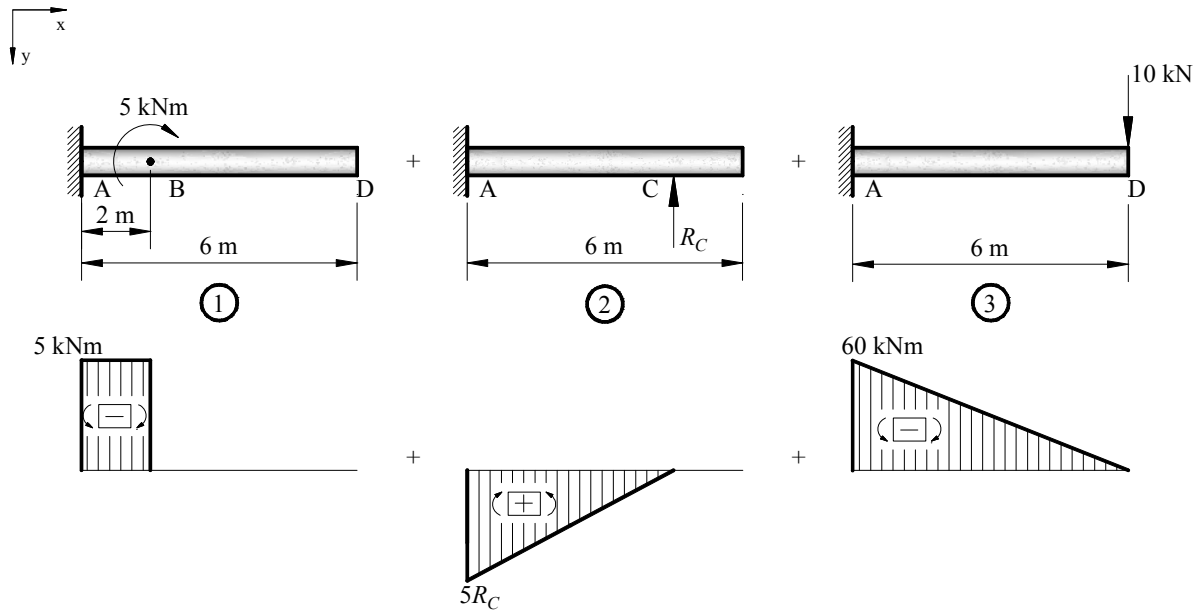
$$\Sigma F_V = 0) \quad R_{VA} + R_C = 10 \quad (6.6.2)$$

$$\Sigma M_A = 0) \quad M_A + 5 - 5R_C + 10 \cdot 6 = 0 \quad M_A = 5R_C - 65 \quad (6.6.3)$$

Es planteja una biga isostàtica equivalent amb una condició de gir o desplaçament que reproduïxi el comportament de la biga original amb les seves restriccions. En aquest cas es proposa alliberar el grau de llibertat corresponent al moviment vertical del punt C i plantejar $\delta_C = 0$.

El problema es resoldrà aplicant el segon teorema de Mohr.

Aplicant el principi de superposició, s'obté:



Es calcula el desplaçament del punt C per a cada cas:

$$\delta_C = -\frac{S_{M,CD} \cdot d}{E \cdot I}$$

$$\delta_{C1} = -\frac{(2 \cdot (-5) \cdot 4)}{E \cdot I} = \frac{40}{E \cdot I} \text{ kNm}^3$$

$$\delta_{C2} = -\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5R_C\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{E \cdot I} = -\frac{41.7R_C}{E \cdot I} \text{ kNm}^3$$

$$\delta_{C3} = -\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-50) \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + 5 \cdot (-10) \cdot 2.5\right)}{E \cdot I} = \frac{542}{E \cdot I} \text{ kNm}^3$$

$$\delta_C = 0$$

$$\delta_C = \frac{(40 - 41.7R_C + 542)}{E \cdot I} = 0$$

$$R_C = 14 \text{ kN}$$

Amb el valor d'aquesta reacció, es poden trobar la resta de reaccions, amb les equacions d'equilibri 6.6.1, 6.6.2 i 6.6.3:

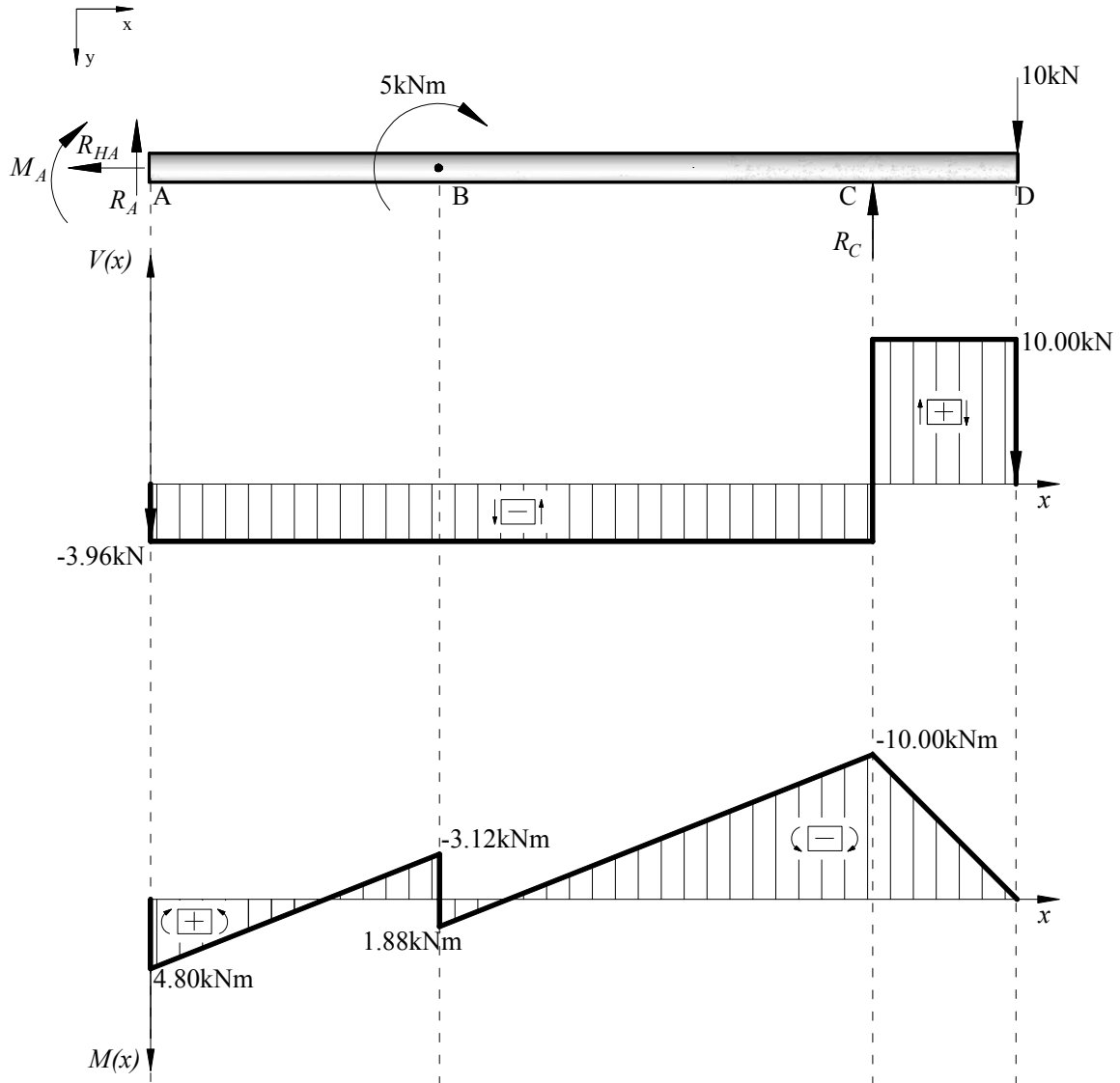
$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HA} = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad R_{VA} = 10 - 14 = -3.96 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0) \quad M_A = -5 - 10 \cdot 6 + 14 \cdot 5 = 4.8 \text{ kNm}$$

b) El diagrama d'esforços tallants i el de moments flectors.

El diagrama d'esforços tallants i el de moments flectors són:



Problema 6.7. La biga contínua de la Figura 6.7 està recolzada pels punts A, B i C i té un voladís de 1.2 m. Està sotmesa a un moment en el punt A i a dues càrregues puntuals, una entre el tram BC i l'altra a l'extrem del voladís. Determineu:

- a) Les reaccions de la biga.
- b) El diagrama d'esforços tallants i el de moments flectors.

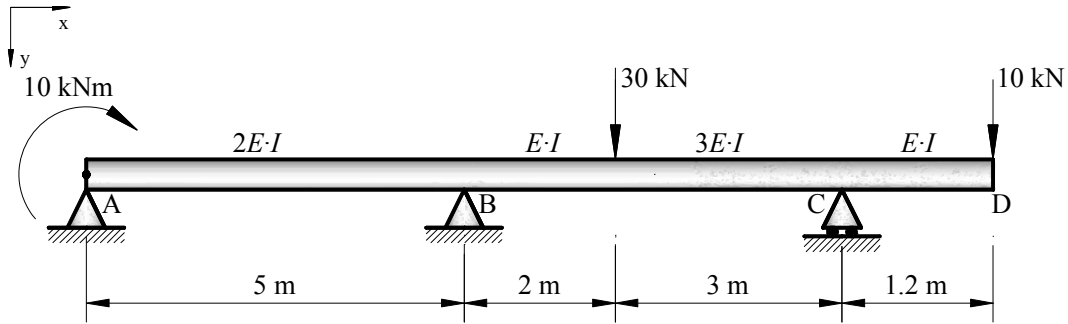
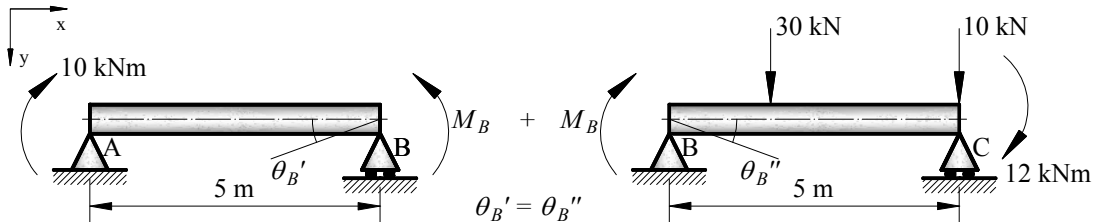


Figura 6.7

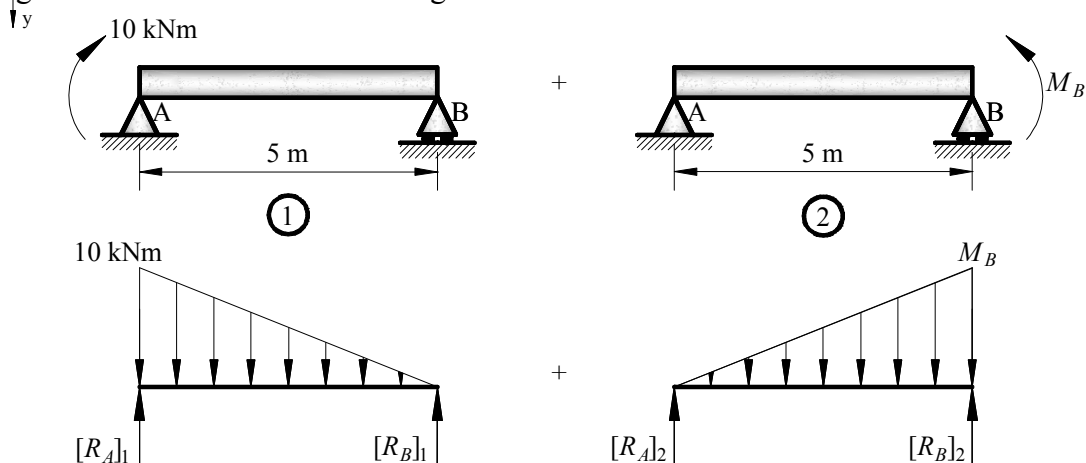
Per conveniència, en aquest exercici les unitats de força seran kN, i les de longitud, m.

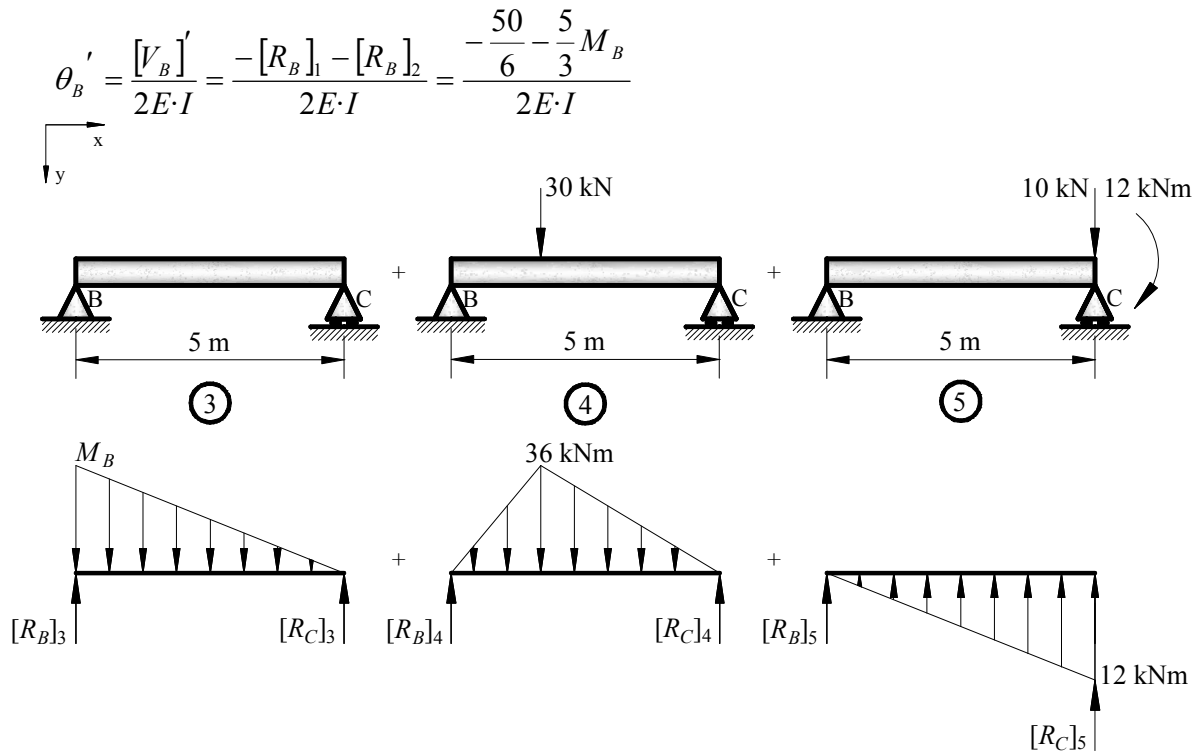
- a) Les reaccions de la biga.

El problema es resol descomponent la biga contínua en dues bigues isostàtiques equivalents i amb una condició de compatibilitat: l'angle girat pel recolzament B és el mateix per al tram de l'esquerra i per al de la dreta.



Mitjançant els mètodes de la biga conjugada i el principi de superposició, es determina el gir del recolzament B en cada biga.





$$\theta_B'' = \frac{[V_B]''}{3E \cdot I} = \frac{[R_B]_3 + [R_B]_4 + [R_B]_5}{3E \cdot I} = \frac{4.23 M_B + 100.8 - 17.04}{3E \cdot I}$$

Igualant $\theta_B' = \theta_B''$, s'obté, $M_B = -14.3 \text{ kNm}$.

Les reaccions de l'estructura s'obtenen aplicant les equacions de l'estàtica a les bigues isostàtiques corresponents a cada tram (AB i BC).

$$R_{HA} = 0 \text{ kN}$$

$$R_{VA} = -4.86 \text{ kN}$$

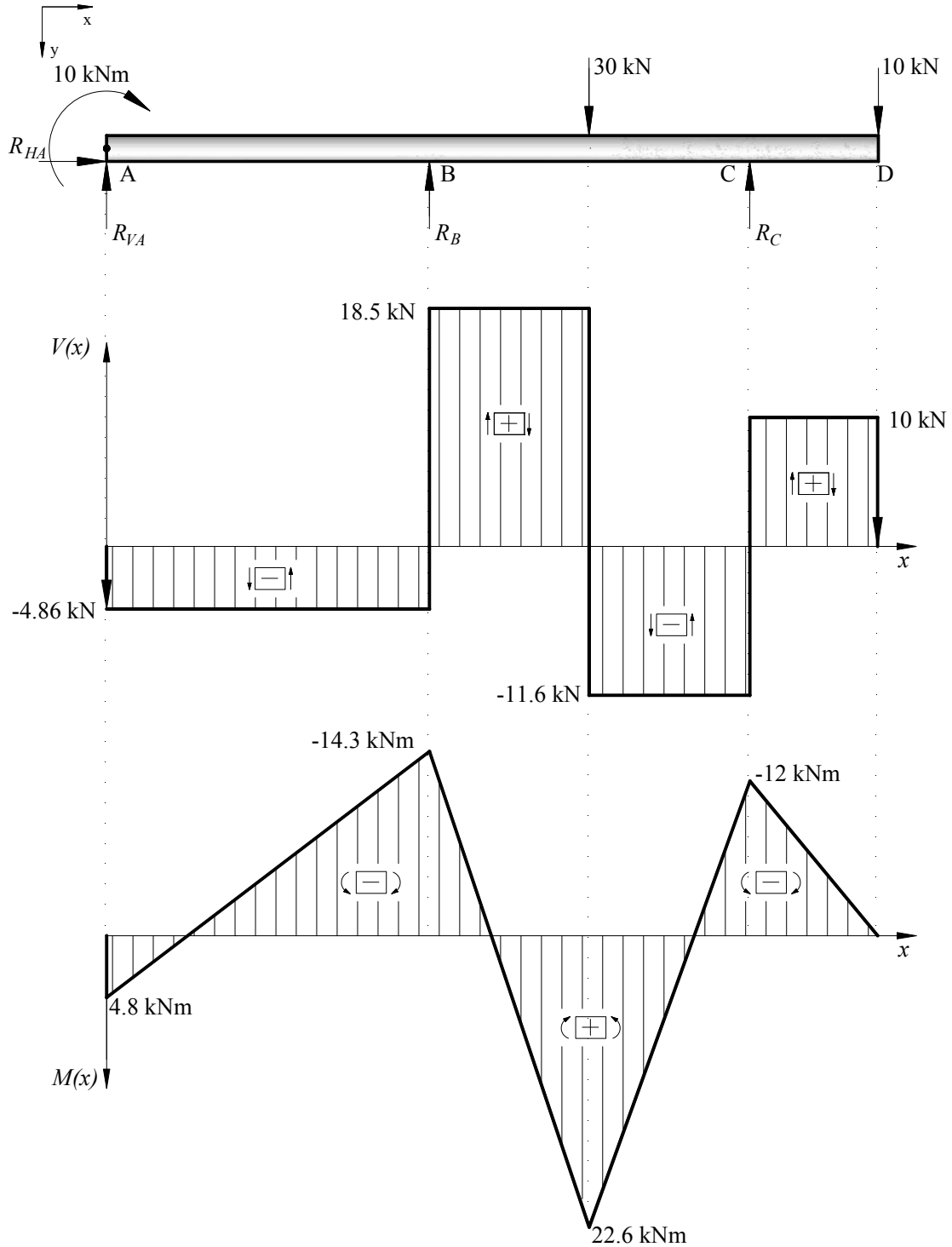
$$R_{B1} = 4.86 \text{ kN}$$

$$R_{B2} = 18.5 \text{ kN}$$

$$R_C = 21.6 \text{ kN}$$

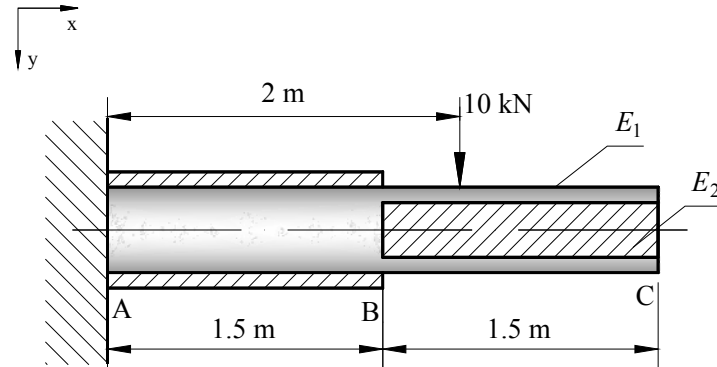
b) El diagrama d'esforços tallants i el de moments flectors.

El diagrama d'esforços tallants i el de moments flectors són:



Problema 6.8. El voladís de la Figura 6.8, format per dues seccions i amb materials diferents, està sotmès a una càrrega puntual en el tram BC. Determineu:

- La fletxa en el punt C.
- Les tensions màximes en els dos materials.



Dades:

Mòdul d'elasticitat del material 1 (E_1) = 10^4 MPa

Mòdul d'elasticitat del material 2 (E_2) = $2 \cdot 10^5$ MPa

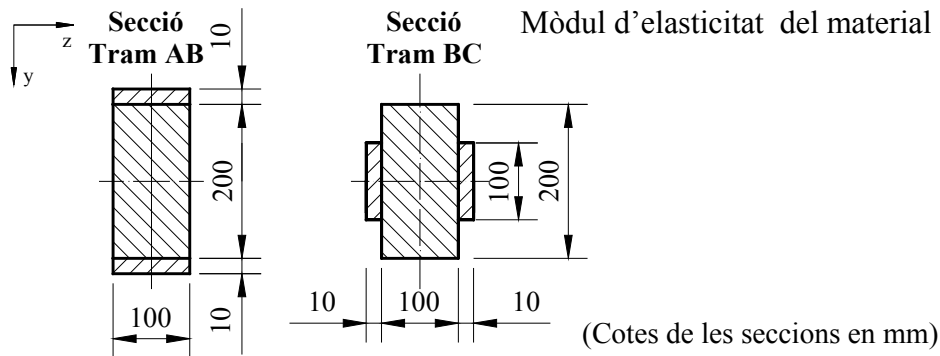


Figura 6.8

- La fletxa en el punt C.

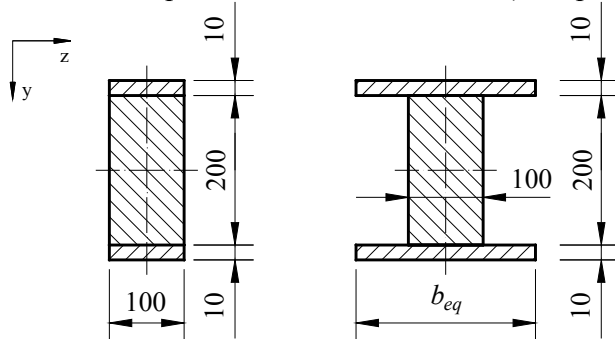
El problema es resol aplicant el segon teorema de Mohr:

$$\delta_C = \Delta_{AC} = -\frac{S_{M,AC} \cdot d_C}{EI}$$

Es calcula el valor de les rigideses per a cada tram:

Tram AB

La secció d'aquest tram està formada per dos materials i s'ha de determinar la rigidesa de la secció equivalent a un sol material (en aquest cas, el material 1).



$$n = \frac{E_2}{E_1} = 20$$

$$b_{eq} = 100n = 2 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

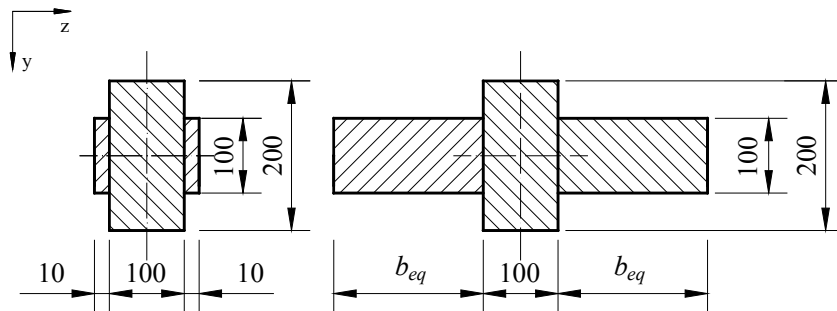
Les propietats de la secció equivalent seran:

$$I_{AB,1} = \frac{1}{12} \cdot (2000 \cdot 220^3 - 1900 \cdot 200^3) = 5.08 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$E \cdot I_{AB,1} = 10^4 \cdot 5.08 \cdot 10^8 = 5.08 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Tram BC

De la mateixa manera,



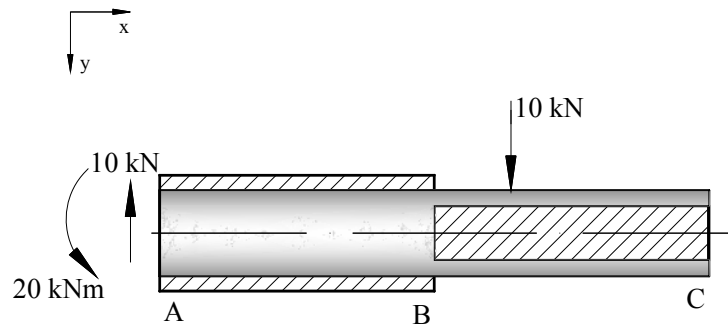
$$b_{eq} = 10n = 200 \text{ mm}$$

Les propietats de la secció equivalent seran:

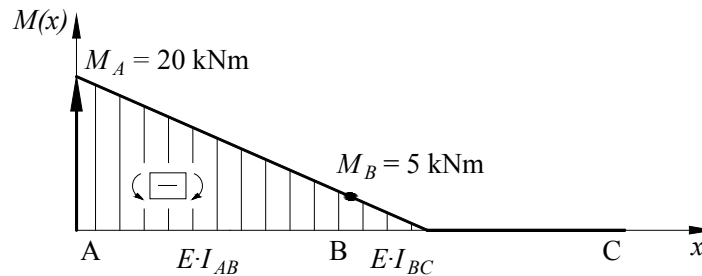
$$I_{BC,1} = \frac{1}{12} \cdot (100 \cdot 200^3 + 2 \cdot 200 \cdot 100^3) = 1 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$E \cdot I_{BC,1} = 10^4 \cdot 1 \cdot 10^8 = 1 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Plantejant les equacions d'equilibri estàtic es calculen les reaccions de l'element, de manera que el diagrama de cos lliure és:

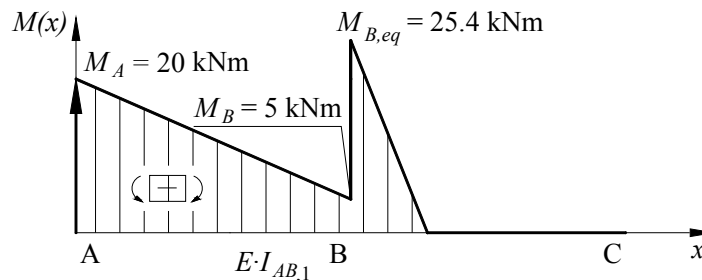


El diagrama de moments de la biga és:



Per aplicar el segon teorema de Mohr, la rigidesa $E \cdot I$ de la biga ha de ser constant. En aquest cas, la rigidesa de la biga varia entre els trams AB i BC . Per tant, cal crear una biga equivalent d'inèrcia constant que la seva deformada sigui igual a la de la biga original.

Es crea una biga equivalent d'inèrcia constant i igual a $E \cdot I_{AB}$. El diagrama de moments d'aquesta biga equivalent, per tal que es deformi igual que la biga original, ha de ser:



on $M_{B,eq}$ és el moment en el punt B en el diagrama de moments de la biga homogeneïtzada. S'obté a partir del moment en la biga original M_B :

$$M_{B,eq} = M_B \cdot \frac{EI_{AB}}{EI_{BC}} = 5 \cdot \frac{5.08 \cdot 10^{12}}{1 \cdot 10^{12}} = 25.4 \text{ kNm}$$

Finalment, la fletxa en el punt C s'obté aplicant el segon teorema de Mohr:

$$\delta_C = \frac{S_1 \cdot d_1 + S_2 \cdot d_2 + S_3 \cdot d_3}{E \cdot I_{AB}}$$

$$\delta_C = - \frac{\left(-\frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 15 \cdot 2.5 - 1.5 \cdot 5 \cdot 2.25 - \frac{1}{2} \cdot 25.4 \cdot 0.5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 \right) \right) \cdot 10^{12}}{5.08 \cdot 10^{12}} = 10.5 \text{ mm}$$

b) Les tensions màximes en els dos materials.

Les seccions on es pot tenir la tensió màxima són la secció A (moment d'inèrcia I_{AB}) i la B (moment d'inèrcia I_{BC}):

Per al material 1:

$$\text{Secció A: } \sigma_{max} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 100}{5.08 \cdot 10^8} = 3.94 \text{ MPa}$$

$$\text{Secció B: } \sigma_{max} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 100}{1 \cdot 10^8} = 5 \text{ MPa}$$

La tensió màxima en el material 1 és a la secció B i val 5 MPa.

Per al material 2:

$$\text{Secció A: } \sigma_{max} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 110}{5.08 \cdot 10^8} \cdot \frac{E_2}{E_1} = 86.6 \text{ MPa}$$

$$\text{Secció B: } \sigma_{max} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 50}{1 \cdot 10^8} \cdot \frac{E_2}{E_1} = 5 \text{ MPa}$$

La tensió màxima en el material 2 és a la secció A i val 86.6 MPa.

Problema 6.9. Per a l'element de la Figura 6.9, sotmès a una càrrega uniformement distribuïda en el tram AB , a una de puntual en el punt B i a un moment en el punt C , es demana que trobeu l'equació de l'elàstica.

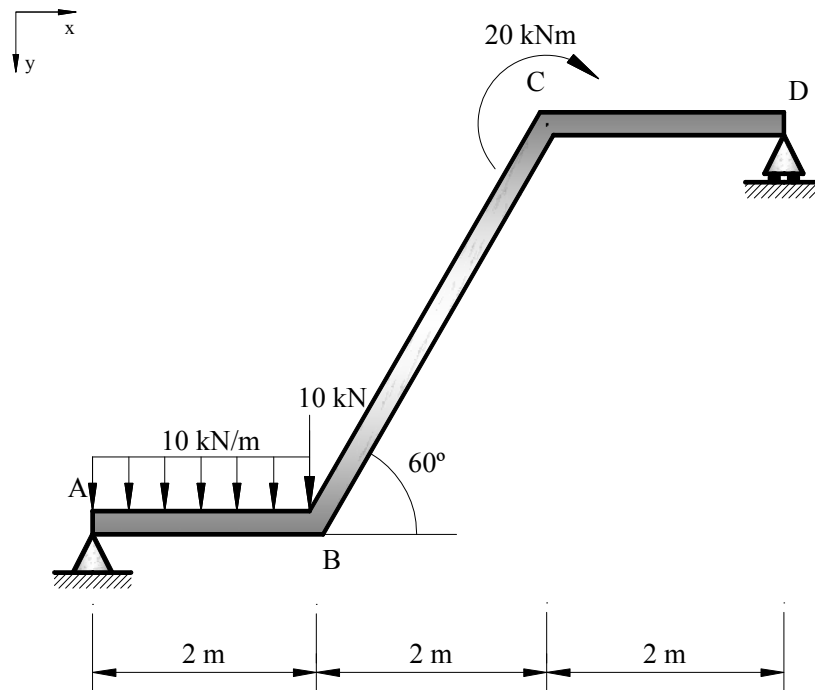
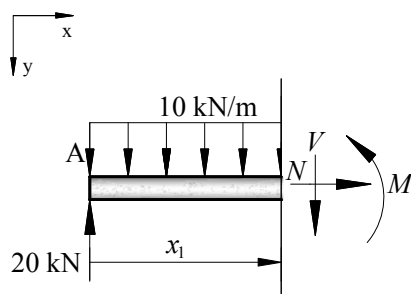


Figura 6.9

Cal plantejar-ho tenint en compte els trams on canviï l'equació de moments flectors. En aquest cas: AB , BC i CD .

Tram AB : $0 \text{ m} \leq x_1 \leq 2 \text{ m}$



$$y'' = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

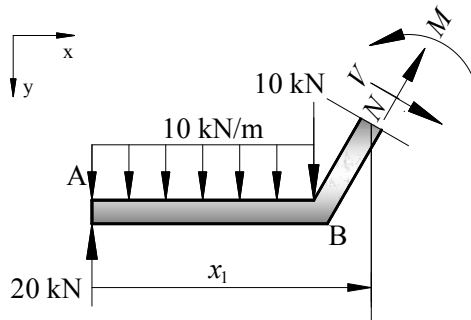
$$M(x_1) = -EIy_1'' = -5x_1^2 + 20x_1$$

$$EIy_1' = \frac{5}{3}x_1^3 - 10x_1^2 + C_1$$

$$EIy_1 = \frac{5}{12}x_1^4 - \frac{10}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2$$

$$y_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{12}x_1^4 - \frac{10}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \right)$$

Tram BC: $2 \text{ m} \leq x_1 \leq 4 \text{ m}$



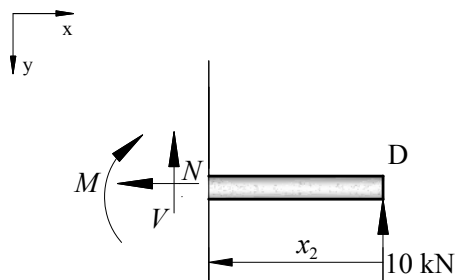
$$M(x_1) = -EIy_2'' = -10x_1 + 40$$

$$EIy_2' = 5x_1^2 - 40x_1 + C_3$$

$$EIy_2 = \frac{5}{3}x_1^3 - 20x_1^2 + C_3x_1 + C_4$$

$$y_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{3}x_1^3 - 20x_1^2 + C_3x_1 + C_4 \right)$$

Tram DC: $4 \text{ m} \leq x_1 \leq 6 \text{ m}$, $0 \text{ m} \leq x_2 \leq 2 \text{ m}$



$$M(x_2) = 10x_2$$

$$x_2 = 6 - x_1$$

$$M(x_1) = 10(6 - x_1)$$

$$EIy_3'' = -10x_1 + 60$$

$$EIy_3' = -5x_1^2 + 60x_1 + C_5$$

$$EIy_3 = -\frac{5}{3}x_1^3 + 30x_1^2 + C_5x_1 + C_6$$

$$y_3 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{3}x_1^3 + 30x_1^2 + C_5x_1 + C_6 \right)$$

Aquestes tres equacions de l'elàstica, corresponents als diferents trams de la biga, tenen sis constants d'integració. Aplicant les condicions de contorn:

(1) Per a $x_1 = 0$ $y_1(x_1) = 0$

(2) Per a $x_1 = 2$ $y_1(x_1) = y_2(x_1)$

(3) Per a $x_1 = 2$ $y_1'(x_1) = y_2'(x_1)$

(4) Per a $x_1 = 4$ $y_2(x_1) = y_3(x_1)$

(5) Per a $x_1 = 4$ $y_2'(x_1) = y_3'(x_1)$

(6) Per a $x_1 = 6$ $y_3(x_1) = 0$

Apliquem la condició (1):

$$y_1(0) = 0 \quad -\frac{5}{12}x_1^4 + \frac{10}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 = 0 \quad C_2 = 0$$

Apliquem la condició (2):

$$y_1(2) = y_2(2) \quad \frac{5}{12}x_1^4 - \frac{10}{3}x_1^3 + C_1x_1 = \frac{5}{3}x_1^3 - 20x_1^2 + C_3x_1 + C_4$$

$$2C_1 - 2C_3 - C_4 = -\frac{140}{3}$$

Apliquem la condició (3):

$$y'_1(2) = y'_2(2) \quad \frac{5}{3}x_1^3 - 10x_1^2 + C_1 = 5x_1^2 - 40x_1 + C_3 \quad C_1 - C_3 = -\frac{100}{3}$$

Apliquem la condició (4):

$$y_2(4) = y_3(4) \quad \frac{5}{3}x_1^3 - 20x_1^2 + C_3x_1 + C_4 = \frac{5}{3}x_1^3 - 30x_1^2 + C_5x_1 + C_6$$

$$4C_3 + C_4 - 4C_5 - C_6 = -160$$

Apliquem la condició (5):

$$y'_2(4) = y'_3(4) \quad 5x_1^2 - 40x_1 + C_3 = 5x_1^2 - 60x_1 + C_5 \quad C_3 - C_5 = -80$$

Apliquem la condició (6):

$$y_3(6) = 0 \quad \frac{5}{3}x_1^3 - 30x_1^2 + C_5x_1 + C_6 = 0 \quad 6C_5 + C_6 = 720$$

$$C_1 = \frac{110}{3} \text{ kNm}^2 \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 70 \text{ kNm}^2$$

$$C_4 = -20 \text{ kNm}^3 \quad C_5 = 150 \text{ kNm}^2 \quad C_6 = -180 \text{ kNm}^3$$

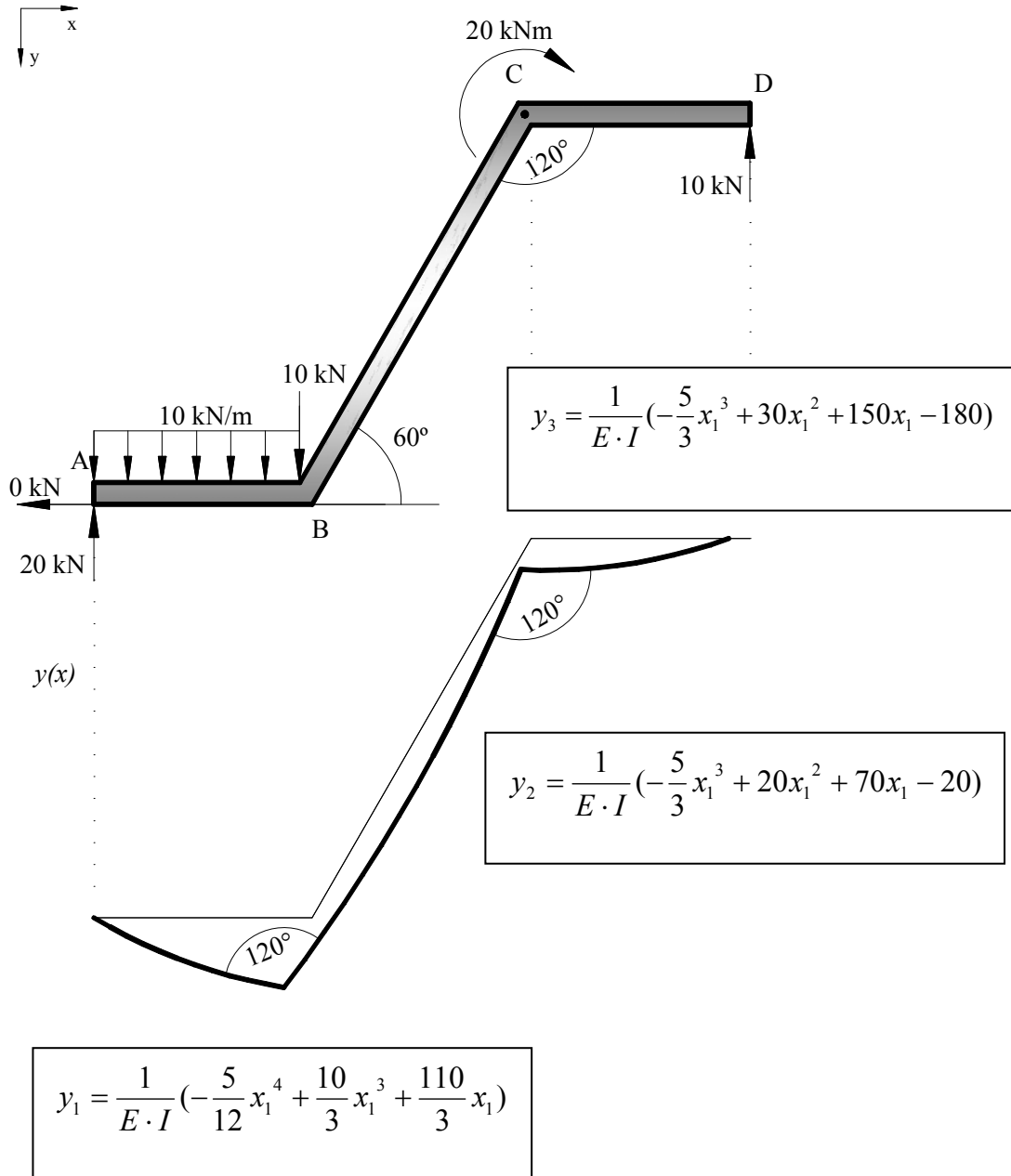
Per tant, l'equació de l'elàstica queda de la manera següent:

Per al tram AB ($0 \text{ m} \leq x_1 \leq 2 \text{ m}$)
$$y_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{12}x_1^4 + \frac{10}{3}x_1^3 + \frac{110}{3}x_1 \right)$$

Per al tram BC ($2 \text{ m} \leq x_1 \leq 4 \text{ m}$)
$$y_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{3}x_1^3 + 20x_1^2 + 70x_1 - 20 \right)$$

Per al Tram CD ($4 \text{ m} \leq x_1 \leq 6 \text{ m}$)
$$y_3 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{3}x_1^3 + 30x_1^2 + 150x_1 - 180 \right)$$

Amb aquestes tres equacions es pot dibuixar la corba de la deformada.



Problema 6.10. A la Figura 6.10 es representa una biga simplement recolzada amb voladissos a ambdós costats, sotmesa a una càrrega uniformement distribuïda en tota la seva longitud i a una càrrega puntual en el punt C. Determineu l'equació de l'elàstica en el tram BC.

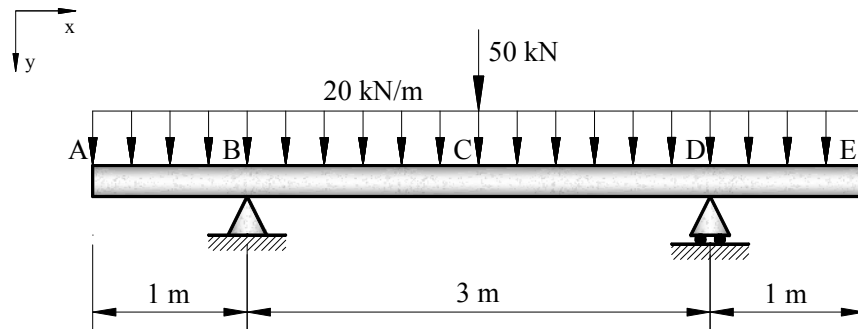
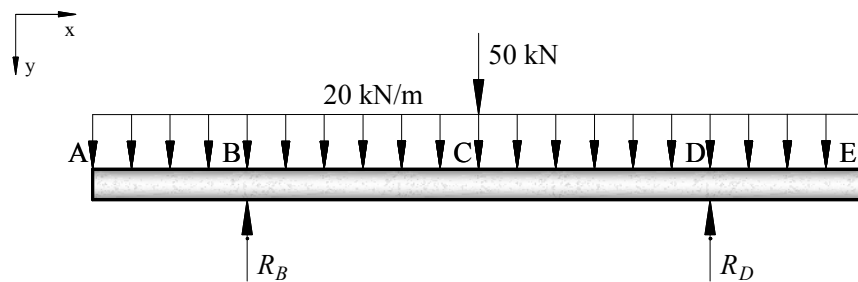


Figura 6.10

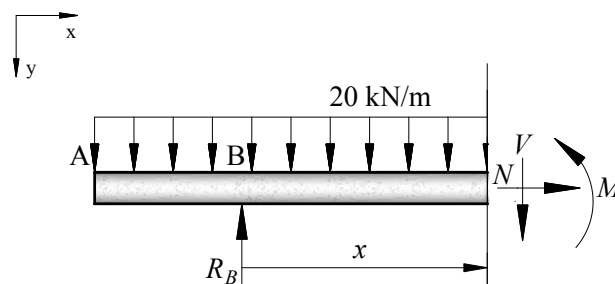
Es determinen les reaccions:



$$\Sigma F_V = 0) \quad R_B + R_D = 20 \cdot 5 + 50 = 150 \text{ kN} \quad R_B = 75 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0) \quad R_D \cdot 3 = 50 \cdot 1.5 + 20 \cdot 5 \cdot 1.5 \quad R_D = 75 \text{ kN}$$

Tram BC: $0 \text{ m} \leq x \leq 1.5 \text{ m}$



L'equació de moments flectors en funció de x és:

$$\Sigma M_x = 0) \quad M = -20 \cdot \frac{(x+1)^2}{2} + 75x \quad M = -10x^2 + 55x - 10$$

L'equació diferencial de l'elàstica és:

$$-E \cdot I \cdot y'' = -10x^2 + 55x - 10$$

$$-E \cdot I \cdot y' = -\frac{10}{3}x^3 + \frac{55}{2}x^2 - 10x + C_1$$

$$-E \cdot I \cdot y = -\frac{10}{12}x^4 + \frac{55}{6}x^3 - 5x^2 + C_1x + C_2$$

Per determinar C_1 i C_2 podem partir de les següents condicions de deformació:

Per a $x = 0$,

$$y(x) = 0 \quad 0 = -\frac{10}{12}x^4 + \frac{55}{6}x^3 - 5x^2 + C_1x + C_2 \quad C_2 = 0$$

Per a $x = 1.5$,

$$y'(x) = 0 \quad 0 = -\frac{10}{3}x^3 + \frac{55}{2}x^2 - 10x + C_1 \quad C_1 = -35.6 \text{ kNm}^2$$

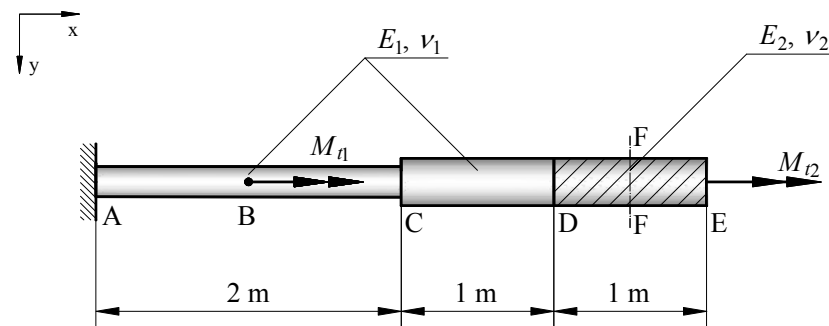
$$y(x) = \frac{1}{E \cdot I} \left(\frac{10}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{65}{2}x^2 - 35.6x \right)$$

7. Torsió

Problema 7.1. L'element de la Figura 7.1 està encastat per un costat i lliure per l'altre. El tram AC és de secció tubular i el tram CE és de secció massissa. La secció B està sotmesa a un moment M_{t1} i la secció E, a un moment M_{t2} .

Es demana que:

- Calculeu l'angle de gir, φ_{AF} .
- Calculeu φ_{AE} a partir de φ_{AF} , aplicant el principi de superposició.
- Calculeu la tensió tallant màxima a la secció d'unió, D, entre els dos materials.



Dades:

Moment en el punt B (M_{t1}) = 30 kNm

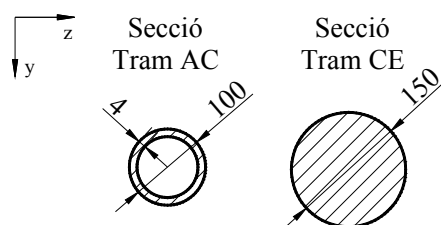
Moment en el punt E (M_{t2}) = -10 kNm

Coef. de Poisson del material 1 (ν_1) = 0.3

Coef. de Poisson del material 2 (ν_2) = 0.25

Mòdul d'elasticitat del mat. 1 (E_1) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Mòdul d'elasticitat del mat. 2 (E_2) = 10^5 MPa



(mides en mm)

Figura 7.1

- Calculeu l'angle de gir, φ_{AF} .

$$\varphi_{AF} = \frac{M_{t1} \cdot L_{AB}}{G_1 \cdot I_{P_{AC}}} + \frac{M_{t2} \cdot L_{AC}}{G_1 \cdot I_{P_{AC}}} + \frac{M_{t2} \cdot L_{CD}}{G_1 \cdot I_{P_{CE}}} + \frac{M_{t2} \cdot L_{DF}}{G_2 \cdot I_{P_{CE}}}$$

G_1 i G_2 són els mòduls de tallant dels materials 1 i 2:

$$G_1 = \frac{E_1}{2 \cdot (1 + \nu_1)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0.3)} = 0.77 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G_2 = \frac{E_2}{2 \cdot (1 + \nu_2)} = \frac{10^5}{2 \cdot (1 + 0.25)} = 0.4 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

I $I_{P_{AC}}$ i $I_{P_{CE}}$, els moments d'inèrcia polar dels trams AC i CE:

$$I_{P_{AC}} = \frac{\pi}{32} \cdot (\phi_{ext}^4 - \phi_{int}^4) = \frac{\pi}{32} \cdot (100^4 - 92^4) = 2.78 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{P_{CE}} = \frac{\pi}{32} \cdot (\phi_{ext}^4) = \frac{\pi}{32} \cdot (150^4) = 4.97 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \varphi_{AF} &= \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0.77 \cdot 10^5 \cdot 2.78 \cdot 10^6} - \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{0.77 \cdot 10^5 \cdot 2.78 \cdot 10^6} - \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0.77 \cdot 10^5 \cdot 4.97 \cdot 10^7} - \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^3}{0.4 \cdot 10^5 \cdot 4.97 \cdot 10^7} = \\ &= +0.0416 \text{ rad} = 2.38^\circ \end{aligned}$$

b) Calculeu φ_{AE} a partir de φ_{AF} , aplicant el principi de superposició.

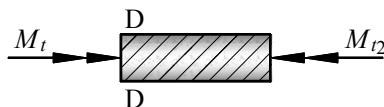
$$\varphi_{AE} = \varphi_{AF} + \varphi_{FE} = \varphi_{AF} + \frac{M_{t2} \cdot L_{FE}}{G_z \cdot I_{P_{CE}}} = 0.0416 \text{ rad} - \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^3}{0.40 \cdot 10^5 \cdot 4.97 \cdot 10^7} = 0.0391 \text{ rad} = 2.24^\circ$$

c) Calculeu la tensió tallant màxima a la secció d'unió, D, entre els dos materials.

En la zona d'unió:



$$M_t = M_{t2} = 10 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$



$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot \phi / 2}{I_{P_{CE}}} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 75}{4.97 \cdot 10^7} = 15.1 \text{ MPa}$$

Problema 7.2. Calculeu l'angle de gir per unitat de longitud i la τ_{max} de les seccions indicades, sotmeses a torsió sense coaccions, suposant que formen part d'un element com el següent:

Dades:

Moment torsor (M_t) = 1 kNm

Mòdul elasticitat transversal (G) = $8 \cdot 10^4$ MPa

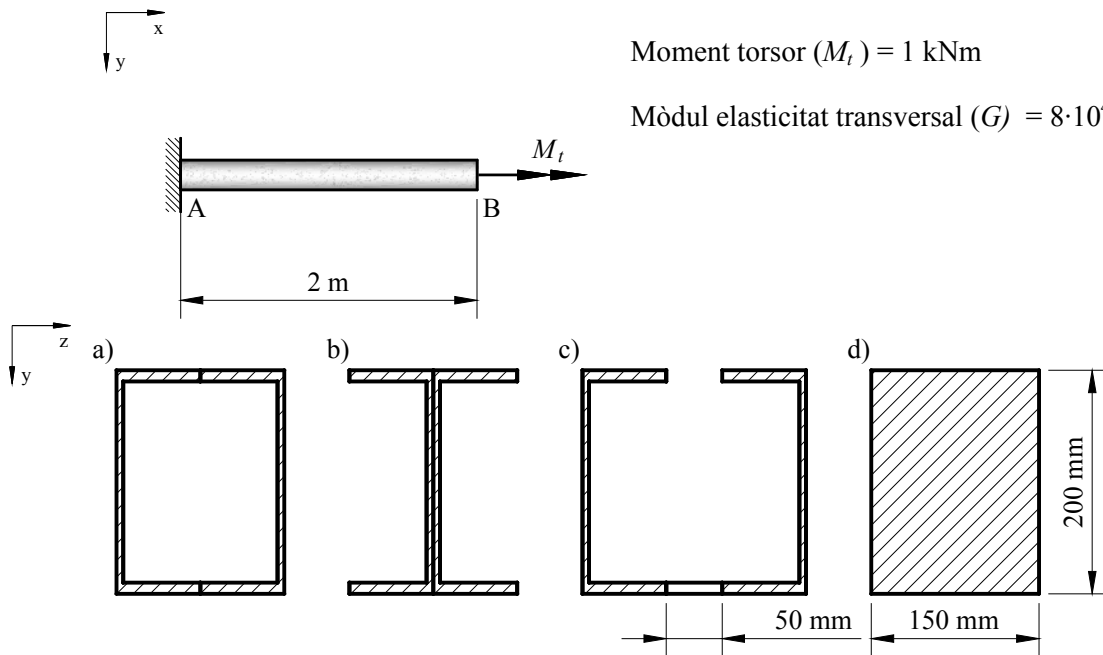
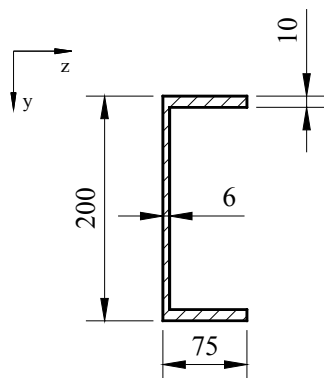
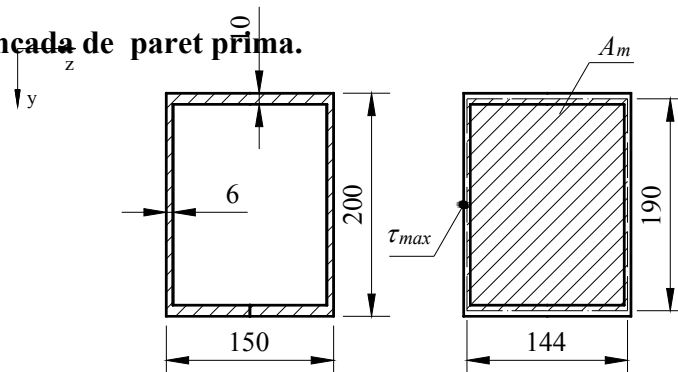


Figura 7.2

Les seccions a), b) i c) es constitueixen a partir de dos perfils en U de les característiques següents:



a) Secció tancada de paret prima.



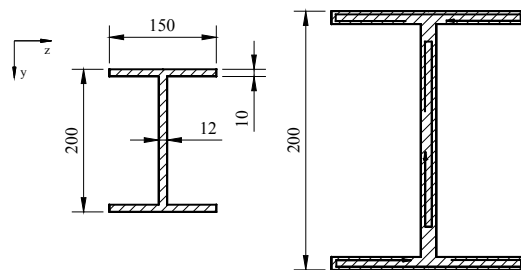
(mides en mm)

$$I_T = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot A_m^2}{2 \int_0^{190} \frac{ds}{6} + 2 \int_0^{144} \frac{ds}{10}} = \frac{4 \cdot (144 \cdot 190)^2}{2 \cdot \frac{190}{6} + 2 \cdot \frac{144}{10}} = 3.25 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_T} = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 3.25 \cdot 10^7} = 0.00077 \text{ rad} = 0.044^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot e \cdot A} = \frac{1 \cdot 10^6}{2 \cdot 6 \cdot (144 \cdot 190)} = 3.05 \text{ MPa}$$

b) Secció oberta formada per rectangles.



(mides en mm)

La inèrcia de torsió I_T es calcula amb l'expressió següent:

$I_T = \alpha \cdot \Sigma I_{Ti}$, on I_{Ti} és la inèrcia de torsió de cada rectangle i α s'obté amb la Taula 7.2.1. Aquest coeficient varia en funció de la forma de la secció.

α	Secció
1.0	
1.1	
1.3	(en doble T)

Taula 7.2.1

La inèrcia de torsió de cada subrectangle es calcula amb l'expressió següent:

$I_T = \beta \cdot b \cdot e^3$, on β és un coeficient que s'obté amb la Taula 7.2.2, b és el costat major i e és el costat menor.

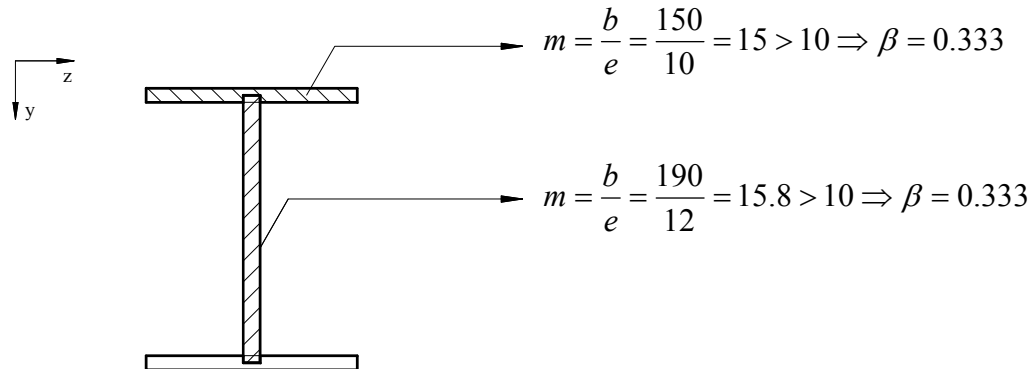
Amb aquesta taula s'obtenen els coeficients β i μ , a partir de les dimensions de la secció de la peça (b i e). Aquesta taula correspon a la Taula 3.A3.1 – Peces sol·licitades a torsió uniforme de la normativa NBE EA-95.

m=b/e	μ	β
1.0	0.208	0.141
1.5	0.238	0.196
2.0	0.256	0.229
2.5	0.269	0.249
3.0	0.278	0.263
4.0	0.290	0.281
5.0	0.298	0.291
6.0	0.303	0.299
7.0	0.307	0.303
8.0	0.310	0.307
9.0	0.312	0.310
10.0	0.314	0.313
>10.0	0.333	0.333

Taula 7.2.2

Com que la secció és una doble T, el coeficient de forma α , segons la Taula 7.2.1, és 1.3.

Com que es considera que la peça està formada per tres rectangles, el valor β per a cada subrectangle és:



$$m = \frac{b}{e} = \frac{150}{10} = 15 > 10 \Rightarrow \beta = 0.333$$

$$m = \frac{b}{e} = \frac{190}{12} = 15.8 > 10 \Rightarrow \beta = 0.333$$

Per tant,

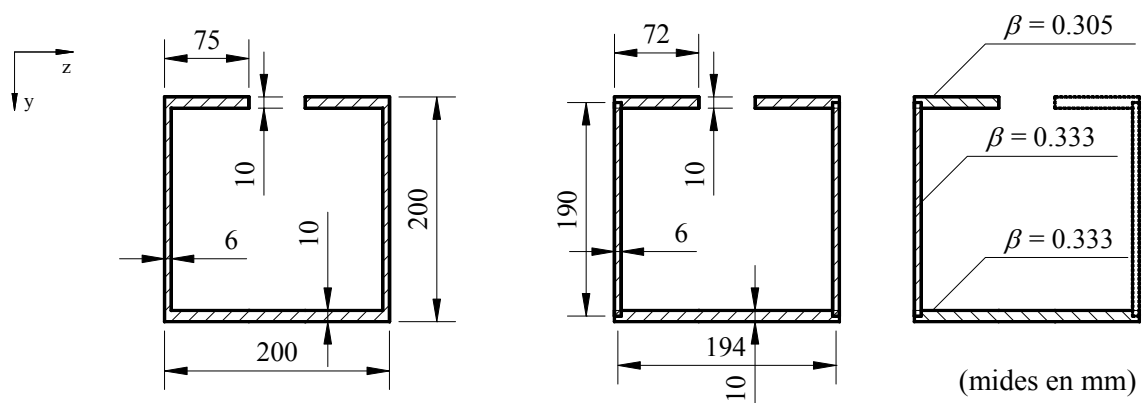
$$I_T = \alpha \sum_{i=1}^5 I_{T_i} = 1.3 \cdot [0.333 \cdot 190 \cdot 12^3 + 2 \cdot 0.333 \cdot 150 \cdot 10^3] = 2.72 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_T} = \frac{1 \cdot 10^6}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 2.72 \cdot 10^5} = 46 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_T} \cdot e_{max} = \frac{1 \cdot 10^6}{2.72 \cdot 10^5} \cdot 12 = 44.1 \text{ MPa}$$

c) Perfil obert.

En aquest perfil s'ha afegit un passamà de 50 mm a la base.



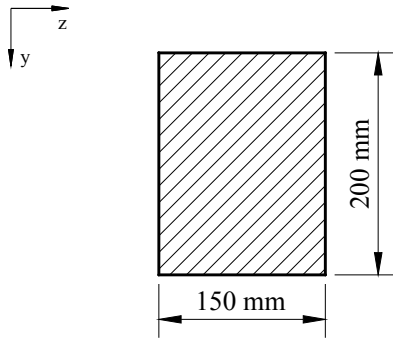
$$I_T = \alpha \sum I_{T_i} = 1.1 \cdot (0.305 \cdot 72 \cdot 10^3 \cdot 2 + 0.333 \cdot 190 \cdot 6^3 \cdot 2 + 0.333 \cdot 194 \cdot 10^3) = 1.49 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

La inèrcia de torsió d'aquest perfil és $1.49 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$, sensiblement inferior a la del perfil a).

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_T} = \frac{1 \cdot 10^6}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 1.49 \cdot 10^5} = 83.9 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_T} \cdot e_{max} = \frac{1 \cdot 10^6}{1.49 \cdot 10^5} \cdot 10 = 67.1 \text{ MPa}$$

d) Secció rectangular.



$$I_T = \beta \cdot b \cdot e^3$$

$$m = \frac{200}{150} = 1.33 \quad \Rightarrow \beta = 0.178$$

$$\Rightarrow \mu = 0.228$$

$$I_T = 0.178 \cdot 200 \cdot 150^3 = 1.2 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_T} = \frac{1 \cdot 10^6}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 1.2 \cdot 10^8} = 10.4 \cdot 10^{-8} \text{ rad/mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_T} = \frac{M_t}{\mu \cdot b \cdot e^2} = \frac{1 \cdot 10^6}{0.228 \cdot 200 \cdot 150^2} = 0.975 \text{ MPa}$$

Problema 7.3. L'element hiperestàtic de la Figura 7.3 està encastat per ambdós extrems i està compost per dos tipus de secció, una en el tram AB i l'altra en el tram BC.

- a) Calculeu les reaccions.
b) Determineu el valor de τ_{max} .

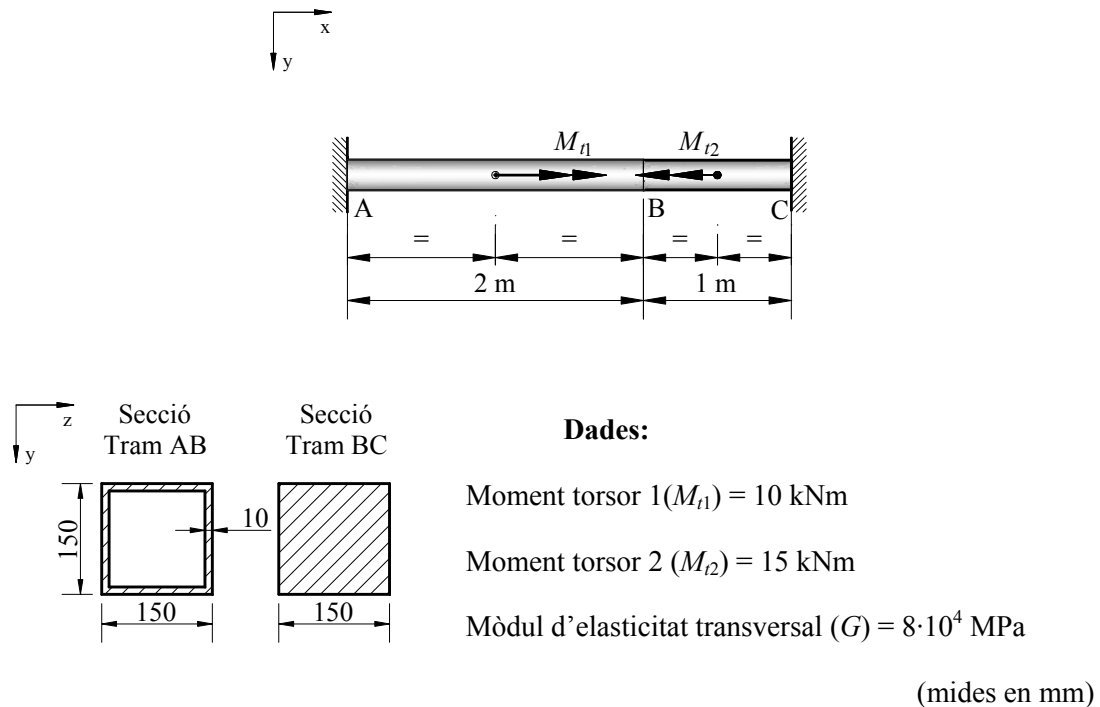
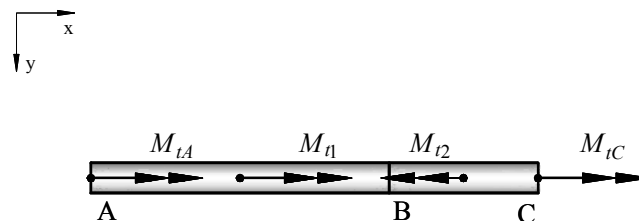


Figura 7.3

- a) Calculeu les reaccions.



$$\Sigma M_t = 0) \quad M_{tA} + M_{tC} + 10 - 15 = 0$$

Es tracta d'un cas hiperestàtic de grau 1.

$$I_{T_{AB}} = \frac{4 \cdot A_m^2 \cdot e}{s} = \frac{4 \cdot (140 \cdot 140)^2 \cdot 10}{140 \cdot 4} = 2.74 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_{T_{BC}} = 0.141 \cdot 150 \cdot 150^3 = 7.14 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\varphi_{AC} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{Ti}} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 2.74 \cdot 10^7} - \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 2.74 \cdot 10^7} - \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 500}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 7.14 \cdot 10^8} +$$

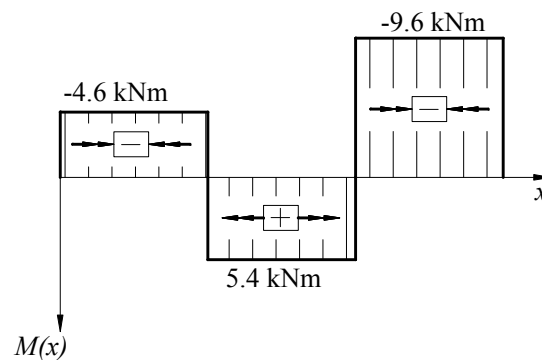
$$+ \frac{M_{tC} \cdot 2 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 2.74 \cdot 10^7} + \frac{M_{tC} \cdot 1 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 7.14 \cdot 10^8} = 0$$

$$M_{tC} = 9.6 \text{ kNm}$$

$$M_{tA} = -4.6 \text{ kNm}$$

b) Determineu el valor de τ_{max} .

A partir del diagrama de moments torsors es poden veure els esforços màxims per cada tipus de secció:



$$\tau_{AB} = \frac{M_t}{2 \cdot e \cdot A} = \frac{5.4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10 \cdot 140^2} = 13.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_t}{\mu \cdot b \cdot e^2} = \frac{|-9.6 \cdot 10^6|}{0.208 \cdot 150 \cdot 150^2} = 13.7 \text{ MPa}$$

La secció més desfavorable és AB, amb un valor de $\tau = 13.8 \text{ MPa}$.

Problema 7.4. El perfil tubular de la Figura 7.4 està encastat per una banda i lliure per l'altra. Determineu el gir total acumulat a la secció C del tub si:

- El tub està compost per dues seccions. El tram AB per la Secció O (oberta) i el tram BC per la Secció T (tancada) de la figura.
- La secció és constant al llarg del tub i igual a la Secció T (tancada) de la figura.

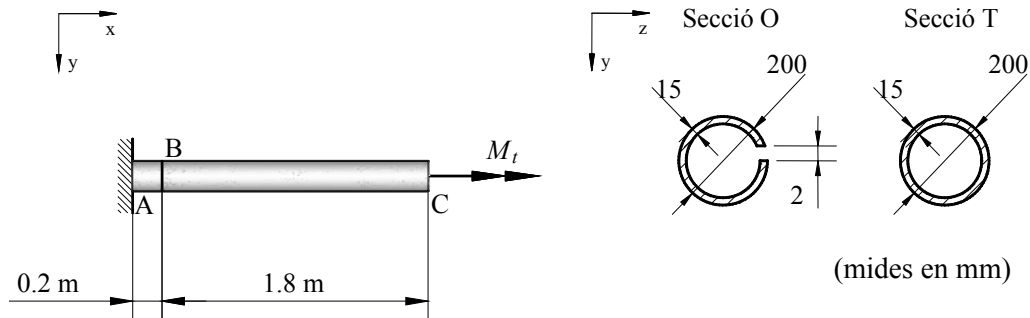


Figura 7.4

Dades:

Moment torsor (M_t) = 15 kNm

Mòdul d'elasticitat transversal (G) = $0.8 \cdot 10^5$ MPa

- El tub està compost per dues seccions. El tram AB per la Secció O (oberta) i el tram BC per la Secció T (tancada) de la figura.

L'angle de gir degut a un moment torsor s'obté amb l'expressió:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p}$$

El mòdul de torsió de cada tram és:

$$I_{T_{AB}} = (200\pi - 2) \cdot 0.333 \cdot 15^3 = 7.04 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{T_{BC}} = \frac{\pi \cdot (200^4 - 170^4)}{32} = 7.51 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

El tub de secció de paret prima i oberta, per analogia amb la membrana, es comporta com un perfil rectangular.

Per tant, l'angle de gir val:

$$\phi_C = \frac{M_T \cdot L_{BC}}{G \cdot I_{T_{BC}}} + \frac{M_T \cdot L_{AB}}{G \cdot I_{T_{AB}}} = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 1.8 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 7.51 \cdot 10^7} + \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 0.2 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 7.04 \cdot 10^5} = 0.057 \text{ rad}$$
$$= 3.27^\circ$$

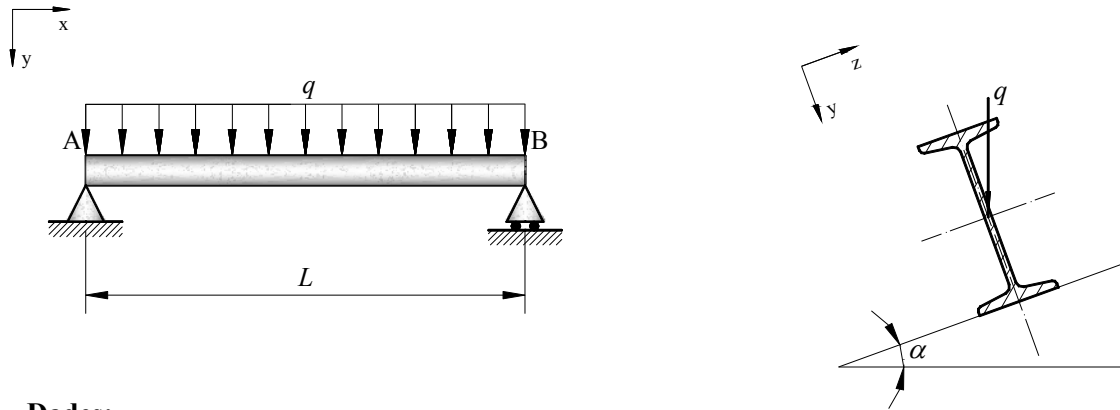
b) La secció és constant al llarg del tub i igual a la Secció T (tancada) de la figura.

$$\phi_C = \frac{M_T \cdot L}{G \cdot I_{T_{BC}}} = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 10^5 \cdot 7.51 \cdot 10^7} = 0.00493 \text{ rad} = 0.282^\circ$$

Es pot veure que en aquest cas el gir és molt inferior a l'obtingut en l'apartat anterior.

8. Esforços combinats

Problema 8.1. Una biga de coberta IPN-160 està simplement recolzada i sol·licitada per una càrrega q uniformement repartida. Determineu la tensió normal màxima i la fletxa total en la secció central.



Dades:

Càrrega distribuïda (q) = 2 kN/m

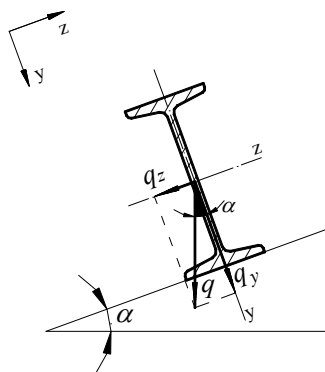
Longitud (L) = 3 m

Angle d'inclinació (α) = 18°

Mòdul d'elasticitat (E) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Figura 8.1

Es descompon la càrrega en els eixos geomètrics principals y i z de la secció:



$$q_y = q \cdot \cos \alpha$$

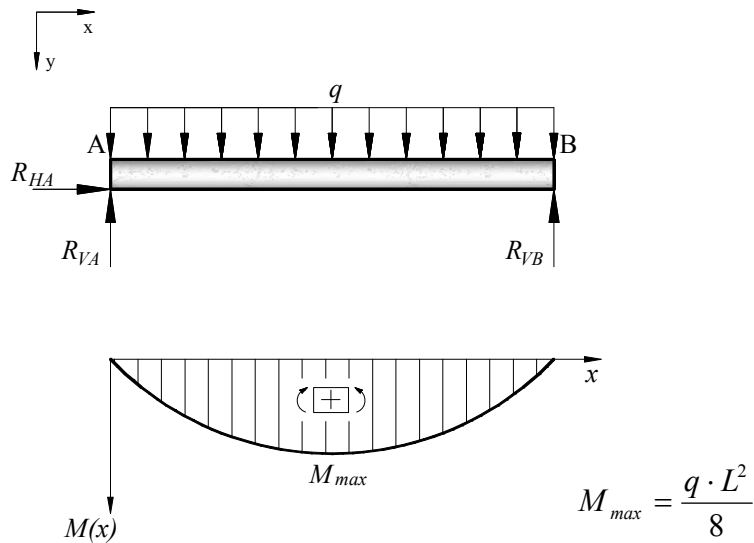
$$q_z = q \cdot \sin \alpha$$

El moment d'inèrcia de la IPN segons la direcció dels eixos principals és:

$$I_y = 5.47 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 9.35 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

El moment màxim és a la secció central de la biga:

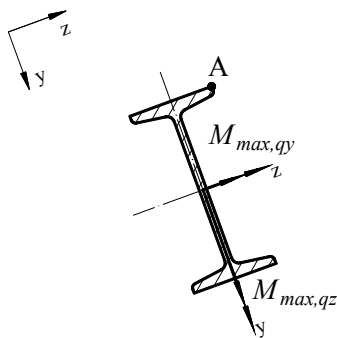


La descomposició del moment M_{\max} en els eixos geomètrics principals de la secció resulta:

$$M_{\max, q_y} = \frac{q_y \cdot L^2}{8} = \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot \cos \alpha = \frac{2 \cdot (3 \cdot 10^3)^2}{8} \cdot \cos 18^\circ = 2.14 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{\max, q_z} = \frac{q_z \cdot L^2}{8} = \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot \sin \alpha = \frac{2 \cdot (3 \cdot 10^3)^2}{8} \cdot \sin 18^\circ = 6.95 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

La tensió més desfavorable es trobarà en el punt més allunyat del c.d.g., que és el punt A.



$$\sigma_A = \sum \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M_{\max, q_y} \cdot y_A}{I_z} + \frac{M_{\max, q_z} \cdot z_A}{I_y} = \frac{2.14 \cdot 10^6 \cdot 80}{9.35 \cdot 10^6} + \frac{6.95 \cdot 10^5 \cdot 37}{5.47 \cdot 10^5} = 65.3 \cdot 10^6 \text{ MPa}$$

L'expressió de la fletxa en el punt mig d'una biga simplement recolzada amb càrrega uniforme és:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$

La fletxa en cadascun dels eixos geomètrics principals de la secció és:

$$f_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_y \cdot L^4}{E \cdot I_z} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2 \cdot \cos 18^\circ \cdot (3 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 9.35 \cdot 10^6} = 1.07 \text{ mm}$$

$$f_z = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_z \cdot L^4}{E \cdot I_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2 \cdot \sin 18^\circ \cdot (3 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 5.47 \cdot 10^5} = 5.96 \text{ mm}$$

i la fletxa total:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = 6.38 \text{ mm}$$

Problema 8.2. La biga en voladís de la Figura 8.2, de secció rectangular, està sotmesa a dues càrregues, una en la direcció y i l'altra, en la z . Determineu la tensió normal en el punt A (σ_A).

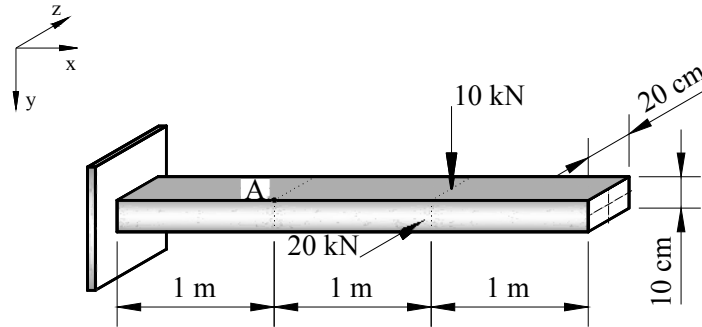
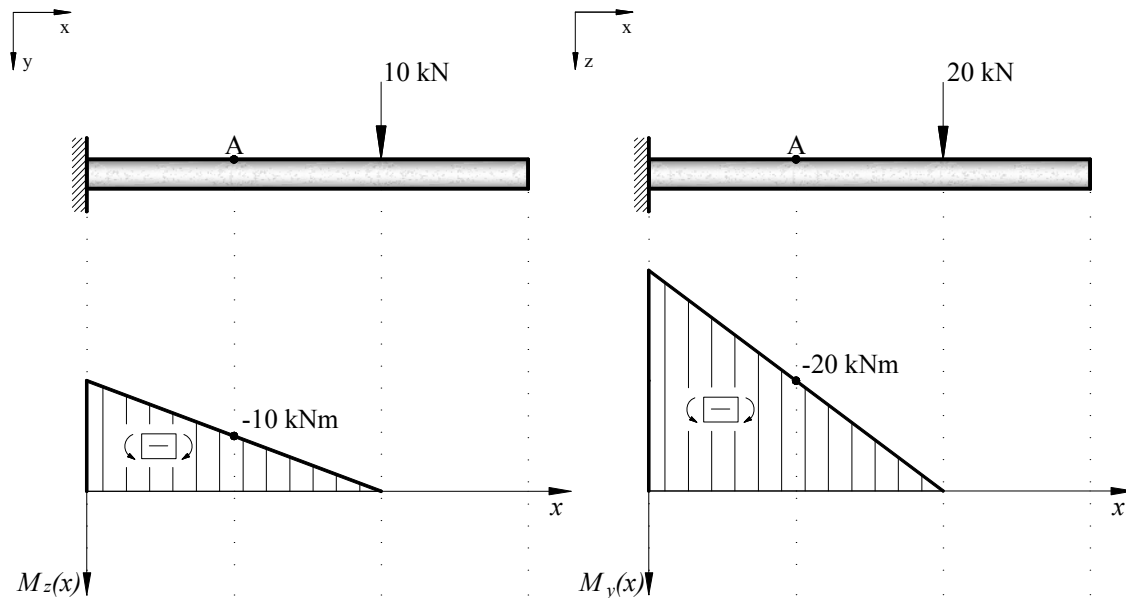
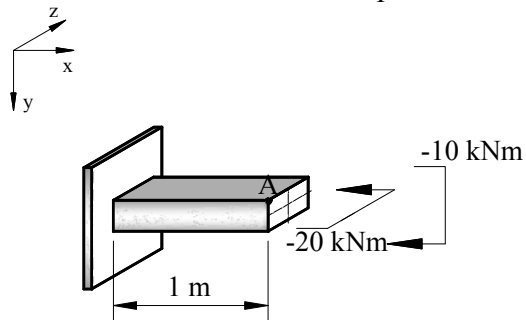


Figura 8.2

Les càrregues i els diagrames de moments segons els plans xy i xz són:



Els moments d'inèrcia corresponents als dos eixos del pla de la secció són:



$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 100^3 = 16.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3 = 66.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

La tensió en el punt A val:

$$\sigma_A = \frac{M_z \cdot y_A}{I_z} + \frac{M_y \cdot z_A}{I_y} = \frac{(-10 \cdot 10^6) \cdot (-50)}{16.7 \cdot 10^6} + \frac{(-20 \cdot 10^6) \cdot (-100)}{66.7 \cdot 10^6} = 30 + 30 = 60 \text{ MPa}$$

Problema 8.3. La biga de la Figura 8.3, de secció rectangular, està simplement recolzada i sotmesa a dues càrregues, una en la direcció y i l'altra, en z . Determineu la tensió normal en el punt A (σ_A).

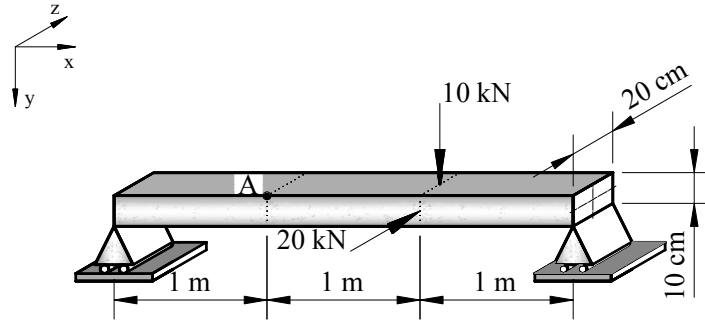
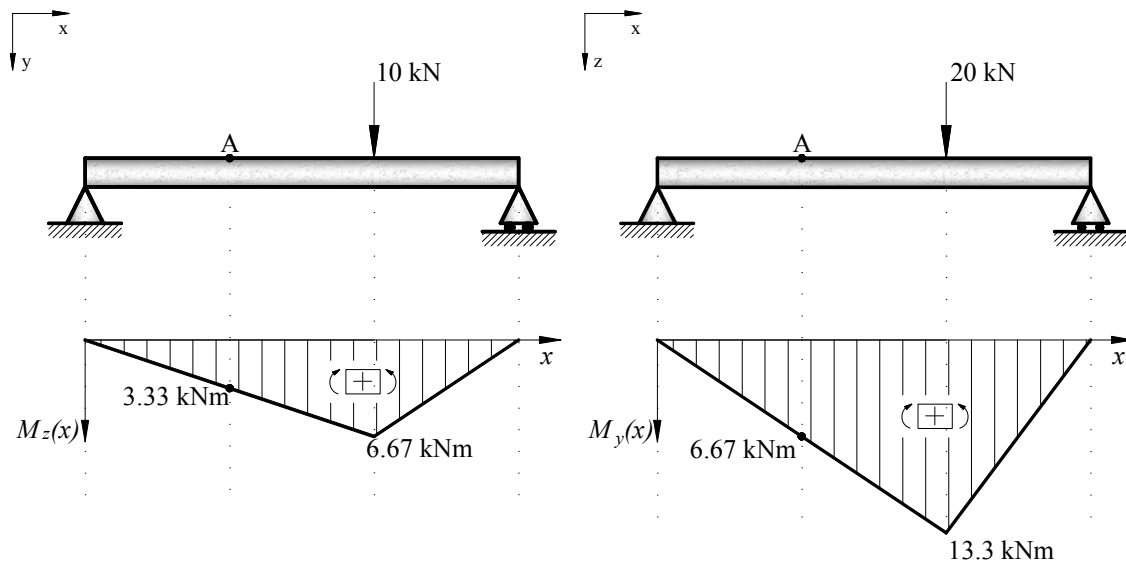
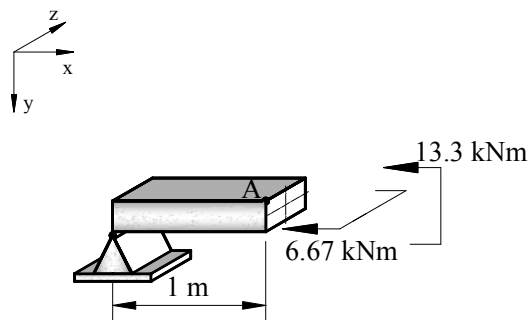


Figura 8.3

Representem les càrregues i els diagrames segons els plans xy i xz :



Els moments d'inèrcia corresponents als dos eixos del pla de la secció són:



$$I_Z = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 100^3 = 16.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3 = 66.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

La tensió en el punt A val:

$$\sigma_A = \frac{M_Z \cdot a}{I_Z} + \frac{M_Y \cdot b}{I_Y} = \frac{(3.33 \cdot 10^6) \cdot (-50)}{16.7 \cdot 10^6} + \frac{(6.67 \cdot 10^6) \cdot (-100)}{66.7 \cdot 10^6} = -10 - 10 = -20 \text{ MPa}$$

Problema 8.4. La columna de la Figura 8.4 està encastada – lliure i sotmesa a dues càrregues puntuals. Determineu la tensió normal en el punt A (σ_A).

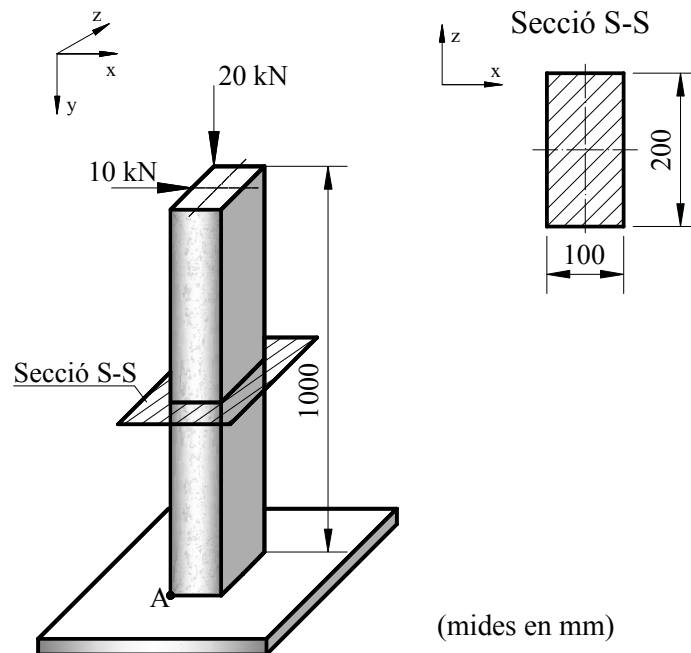
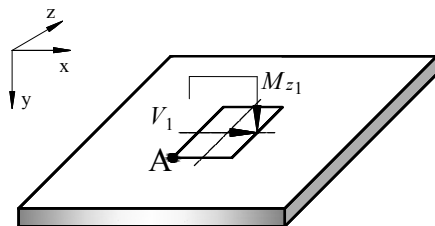


Figura 8.4

S'han de buscar els esforços a la secció de la base. Es fa un tall en aquesta secció i es planteja l'equilibri de forces. En aquest cas, es fa per la superposició de dos casos corresponents a cadascuna de les forces actuant sobre la peça tallada.

Els esforços s'han de trobar amb la resultant aplicada al centre de gravetat de la secció de la base.

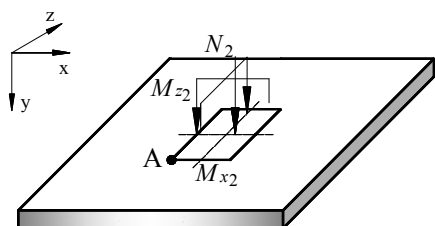
Cas 1: Força de 10 kN.



$$V_1 = 10 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$M_{z_1} = 10 \cdot 10^3 \cdot 1000 = 1 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

Cas 2: Força de 20 kN.

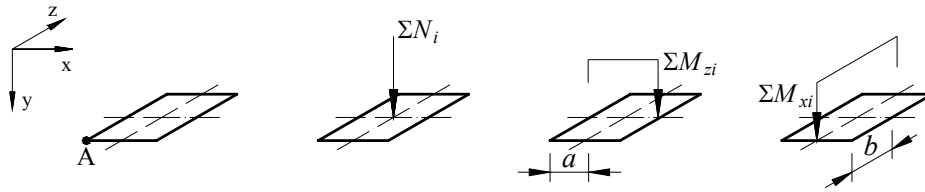


$$N_2 = 20 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$M_{y_2} = 20 \cdot 10^3 \cdot 100 = 2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{z_2} = 20 \cdot 10^3 \cdot 50 = 1 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Per trobar les tensions normals es considera l'esforç normal de la secció i els moments flectors totals en cada direcció.



$$\sigma_A = \frac{N_2}{S} + \frac{M_{z_1} \cdot a}{I_z} + \frac{M_{z_2} \cdot a}{I_z} + \frac{M_{x_2} \cdot b}{I_y}$$

on els paràmetres $a = \frac{100}{2}$ mm i $b = \frac{200}{2}$ mm són les distàncies entre el c.d.g. de la secció i el punt A.

Els moments d'inèrcia corresponents als dos eixos del pla de la secció són:

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 100^3 = 16.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3 = 66.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Per tant, la tensió en el punt A és:

$$\sigma_A = \frac{-20 \cdot 10^3}{200 \cdot 100} + \frac{-1 \cdot 10^7 \cdot (-50)}{16.7 \cdot 10^6} + \frac{1 \cdot 10^6 \cdot (-50)}{16.7 \cdot 10^6} + \frac{-2 \cdot 10^6 \cdot (-100)}{66.7 \cdot 10^6}$$

$$\sigma_A = -1 + 30 - 3 + 3 = 29 \text{ MPa}$$

Problema 8.5. La columna encastada – lliure de secció variable de la Figura 8.5 està sotmesa a quatre càrregues puntuals. Determineu:

- Les tensions normals màximes de tracció i compressió a la secció S-S.
- L'equació de la línia neutra a la secció S-S.
- L'increment que s'hauria d'aplicar a la força vertical de 40 kN per tal que la secció S-S no estigués sotmesa a tensions de tracció.

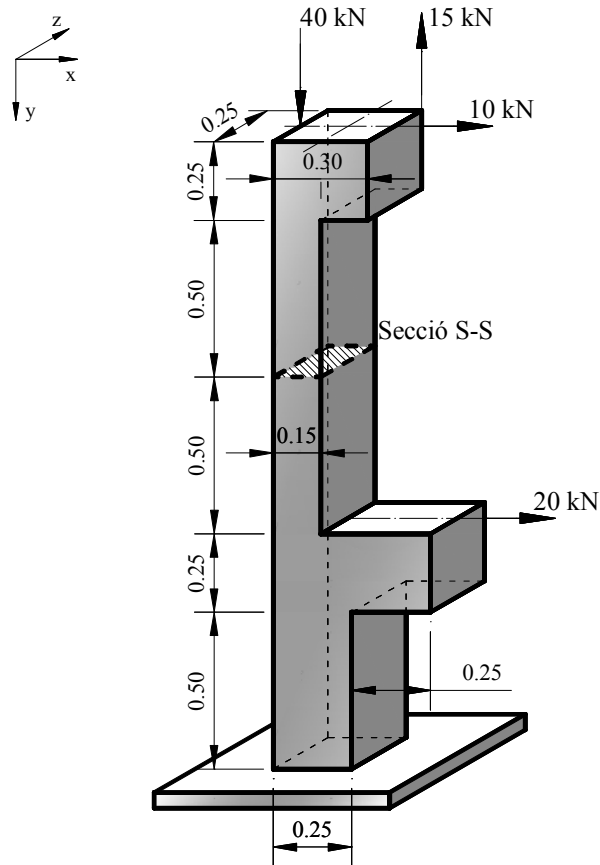
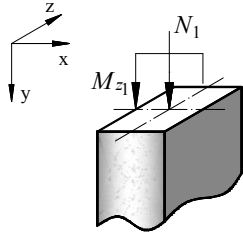


Figura 8.5

a) Les tensions normals màximes de tracció i compressió a la secció S-S.

S'han de buscar els esforços a la secció S-S. Es fa un tall en aquesta secció i es planteja l'equilibri de forces. En aquest cas, es fa per la superposició de tres casos corresponents a cadascuna de les forces actuant sobre la secció. Els esforços s'han de trobar amb la resultant aplicada al centre de gravetat de la secció S-S.

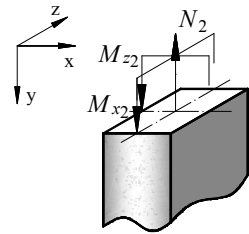
Cas 1: Força de 40 kN.



$$N_1 = 40 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$M_{z_1} = 40 \cdot 10^3 \cdot 75 = 3 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Cas 2: Força de 15 kN.

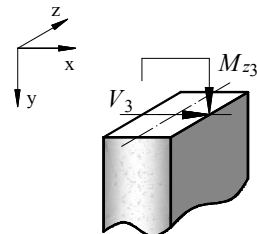


$$N_2 = 15 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$M_{z_2} = 15 \cdot 10^3 \cdot (300 - 75) = 3.38 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{x_2} = 15 \cdot 10^3 \cdot \frac{250}{2} = 1.88 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

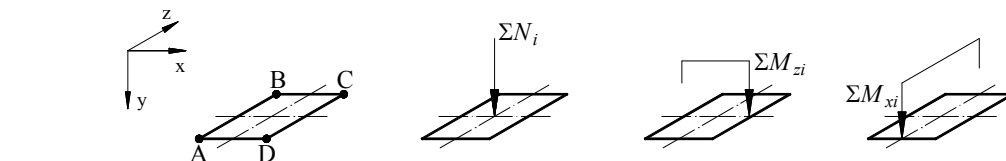
Cas 3: Força de 10 kN.



$$V_3 = 10 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$M_{z_3} = 10 \cdot 10^3 \cdot 750 = 7.5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Per trobar les tensions normals es considera l'esforç normal total a la secció i els moments flectors totals en cada direcció.



Punt B:

$$\sigma_{max,t} = -\frac{25 \cdot 10^3}{150 \cdot 250} + \frac{1.13 \cdot 10^6 \cdot \frac{150}{2}}{\frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 150^3} + \frac{1.88 \cdot 10^6 \cdot \frac{250}{2}}{\frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 250^3} = -0.67 + 1.20 + 1.20 = 1.73 \text{ MPa}$$

Punt D:

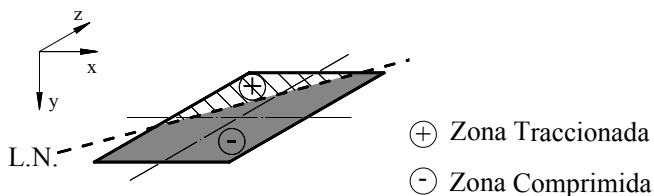
$$\sigma_{max,c} = -\frac{25 \cdot 10^3}{150 \cdot 250} - \frac{1.13 \cdot 10^6 \cdot \frac{150}{2}}{\frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 150^3} - \frac{1.88 \cdot 10^6 \cdot \frac{250}{2}}{\frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 250^3} = -0.67 - 1.20 - 1.20 = -3.07 \text{ MPa}$$

b) L'equació de la línia neutra a la secció S-S.

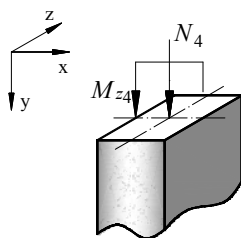
Per trobar l'equació de la línia neutra, es planteja l'equació que dóna la tensió normal en un punt genèric $P(z,y)$ del quadrant positiu del sistema de referència escollit i s'igualava a zero:

$$\sigma_P = -\frac{25 \cdot 10^3}{150 \cdot 250} - \frac{1.13 \cdot 10^6 \cdot x}{\frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 150^3} - \frac{1.88 \cdot 10^6 \cdot z}{\frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 250^3} = 0 \text{ MPa}$$

$$z(x) = -69.4 - 1.67x$$

**c) L'increment que s'hauria d'aplicar a la força vertical de 40 kN per tal que la secció S-S no estigués sotmesa a tensions de tracció.**

Si s'afegeix un increment de càrrega (ΔP) a la mateixa posició que la força de 40 kN, apareixen nous esforços a la secció S-S:

Cas 4: Força ΔP .

$$N_4 = \Delta P$$

$$M_{y4} = \Delta P \cdot \frac{150}{2} = 75\Delta P$$

Perquè la secció estigui tota ella comprimida, el punt més traccionat de l'apartat a), el punt B, ha de tenir una tensió nul·la; així la resta de punts estaran sotmesos a compressió.

Les noves tensions en el punt B són:

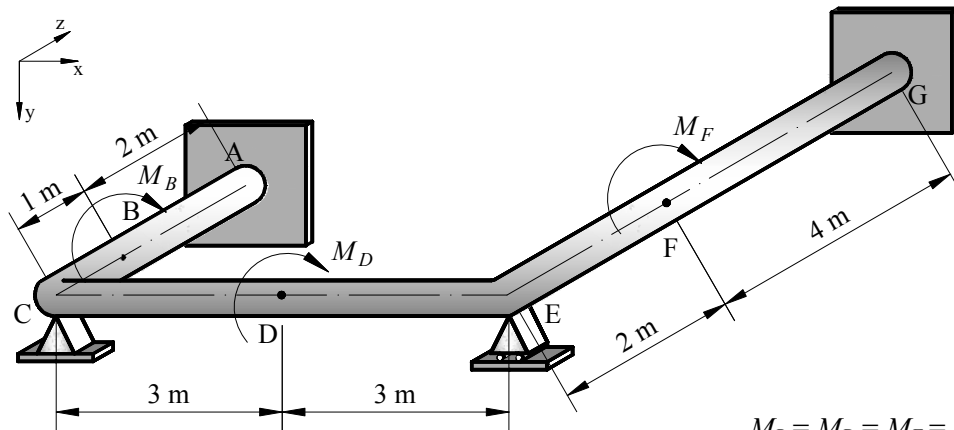
$$\sigma_{max,t} = -\frac{25 \cdot 10^3}{150 \cdot 250} - \frac{\Delta P}{150 \cdot 250} + \frac{(1.13 \cdot 10^6 + 75 \cdot \Delta P)}{\frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 150^3} \cdot \frac{150}{2} + \frac{1.88 \cdot 10^6}{\frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 250^3} \cdot \frac{250}{2} = 0$$

$$1.733 - \frac{\Delta P}{150 \cdot 250} - \frac{75 \cdot \Delta P \cdot 75}{\frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 150^3} = 0$$

$$\Delta P = 16.2 \text{ kN}$$

Problema 8.6. En l'estructura de la Figura 8.6, les barres AC i EG estan sotmeses a un moment i la barra CE, a un altre moment. Determineu:

- Els valors de σ_{max} i τ_{max} .
- L'angle φ_{GF} .



Dades:

$$M_B = M_D = M_F = 10 \text{ kNm}$$

Diàmetre de les barres (\varnothing) = 200 mm

Figura 8.6

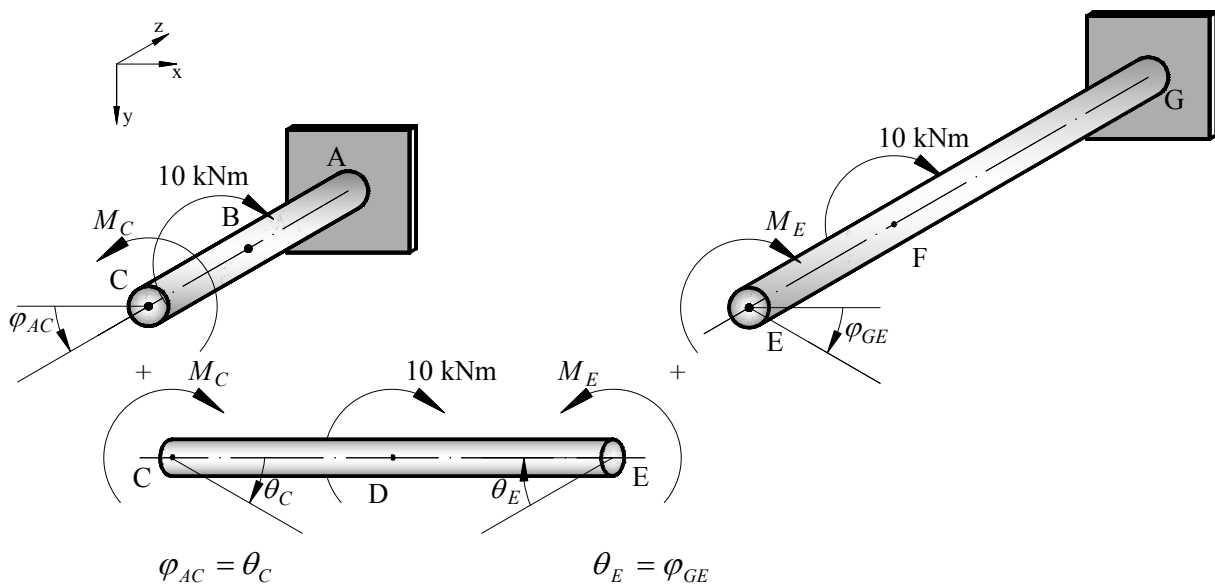
Mòdul d'elasticitat del material (E) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Mòdul d'elasticitat transversal del material (G) = $8.1 \cdot 10^4$ MPa

- Els valors de σ_{max} i τ_{max} .

Es tracta d'una biga hiperestàtica i per resoldre aquest apartat s'han de tenir en compte les dues condicions següents: $\varphi_{AC} = \theta_C$ i $\theta_E = \varphi_{GE}$.

En primer lloc es descompon l'estructura en trams:

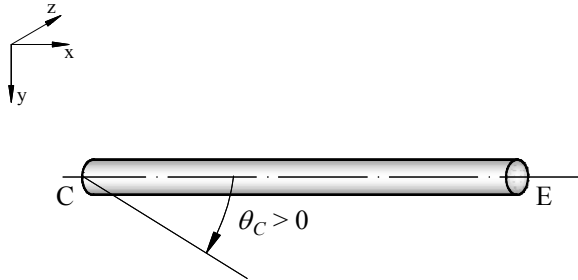


Es calculen els angles φ_{CA} i φ_{EG} . Es defineix l'angle de gir en el sentit de M_B (sentit horari) com a positiu.

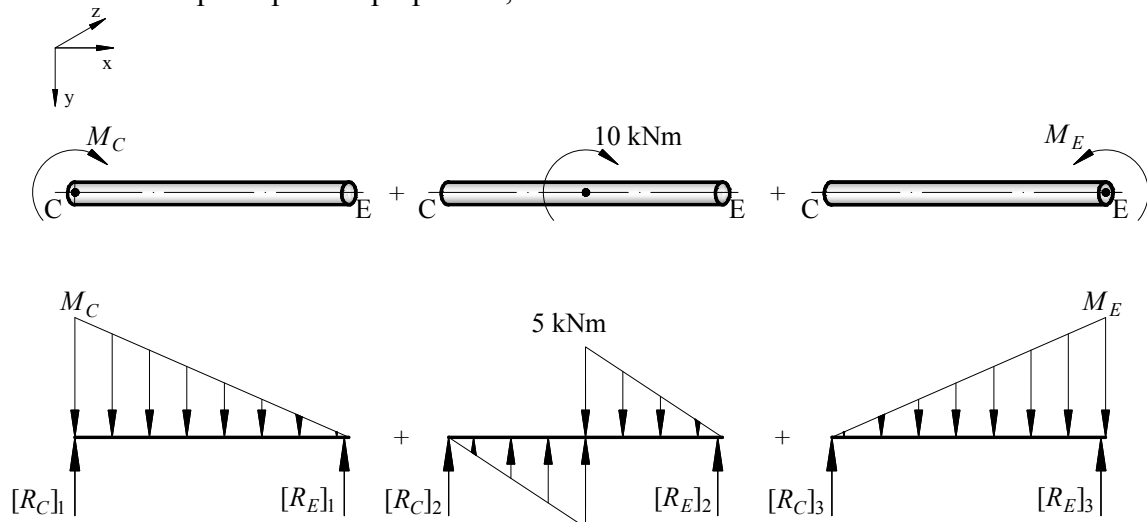
$$\varphi_{AC} = \frac{M_B \cdot d_{AB}}{G \cdot I_p} - \frac{M_C \cdot d_{AC}}{G \cdot I_p} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{G \cdot I_p} - \frac{M_C \cdot 3 \cdot 10^3}{G \cdot I_p}$$

$$\varphi_{GE} = \frac{M_F \cdot d_{GF}}{G \cdot I_p} + \frac{M_E \cdot d_{GE}}{G \cdot I_p} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^3}{G \cdot I_p} + \frac{M_E \cdot 6 \cdot 10^3}{G \cdot I_p}$$

Tot seguit es calcula el gir de la barra sotmesa a flexió CE:



Utilitzant el principi de superposició,



$$[R_C]_1 = \frac{1}{3} \cdot M_C \cdot 6 = 2M_C$$

$$[R_E]_1 = \frac{1}{6} \cdot M_C \cdot 6 = M_C$$

$$[R_C]_3 = \frac{1}{6} \cdot M_E \cdot 6 = M_E$$

$$[R_E]_3 = \frac{1}{3} \cdot M_E \cdot 6 = 2M_E$$

$$[R_C]_2 = -[R_E]_2 = -2.5 \text{ kNm}^2$$

$$[R_E]_2 \cdot 6 = -5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 2.5 \text{ kNm}^2$$

$$\theta_C = \frac{[V_C]}{EI} = \frac{[R_C]_1 + [R_C]_2 + [R_C]_3}{EI} = \frac{(2 \cdot M_C - 2.5 + M_E) \cdot 10^6 \cdot 10^3}{EI}$$

$$\theta_E = \frac{[V_E]}{EI} = \frac{-[R_E]_1 - [R_E]_2 - [R_E]_3}{EI} = -\frac{(M_C + 2.5 + 2 \cdot M_E) \cdot 10^6 \cdot 10^3}{EI}$$

on

$$G \cdot I_P = 8.1 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 200^4}{32} = 1.27 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$E \cdot I = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 200^4}{64} = 1.57 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

S'igualen els angles de gir calculats en el punt C: $\varphi_{AC} = \theta_C$

$$\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{1.27 \cdot 10^{13}} - \frac{M_C \cdot 3 \cdot 10^3}{1.27 \cdot 10^{13}} = \frac{(2 \cdot M_C - 2.5 + M_E) \cdot 10^6 \cdot 10^3}{1.57 \cdot 10^{13}}$$

$$6.37 \cdot 10^{-5} M_E + 1.27 \cdot 10^{-4} M_C = 1.73 \cdot 10^{-3}$$

i en el punt E: $\varphi_{GE} = \theta_E$

$$\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^3}{1.27 \cdot 10^{13}} - \frac{M_E \cdot 6 \cdot 10^3}{1.27 \cdot 10^{13}} = -\frac{(M_C + 2.5 + 2 \cdot M_E) \cdot 10^6 \cdot 10^3}{1.57 \cdot 10^{13}}$$

$$1.27 \cdot 10^{-4} M_E + 6.37 \cdot 10^{-5} M_C = -3.31 \cdot 10^{-3}$$

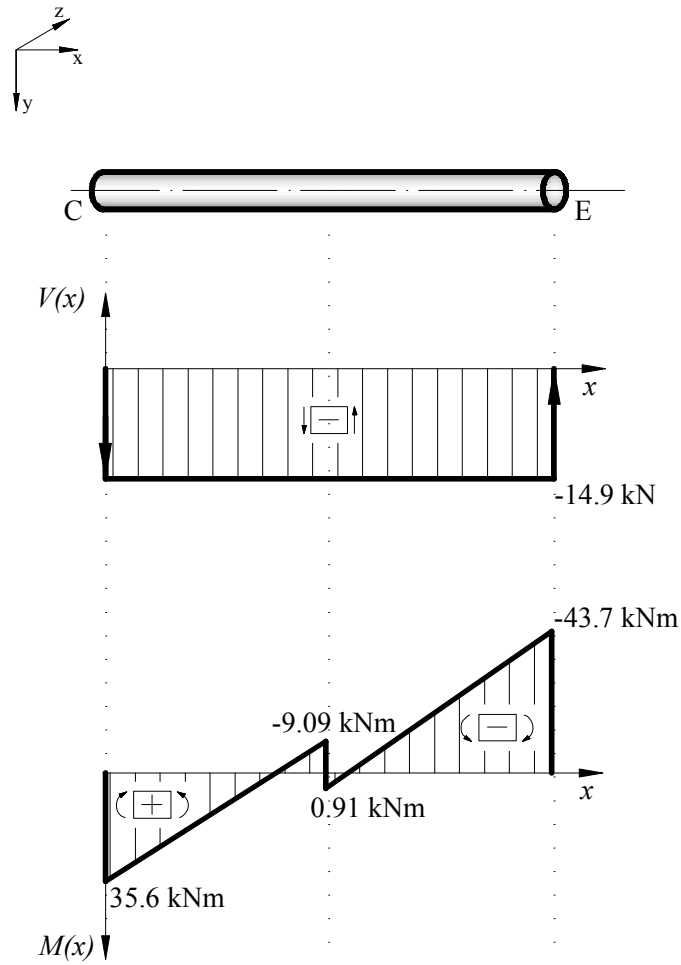
Finalment, es resol el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 6.37 \cdot 10^{-5} M_E + 1.27 \cdot 10^{-4} M_C = 1.73 \cdot 10^{-3} \\ 1.27 \cdot 10^{-4} M_E + 6.37 \cdot 10^{-5} M_C = -3.31 \cdot 10^{-3} \end{cases} \quad \begin{cases} M_E = -43.7 \text{ kNm} \\ M_C = 35.6 \text{ kNm} \end{cases}$$

La tensió normal màxima σ_{max} es trobarà en alguna secció de la barra CE, atès que és l'única que suporta tensions normals. Les reaccions als extrems de la barra CE i els diagrames d'esforços són els següents:

$$\Sigma M_C = 0) \quad R_E \cdot 6 = 35.6 + 10 + 43.7 \quad R_E = 14.9 \text{ kN}$$

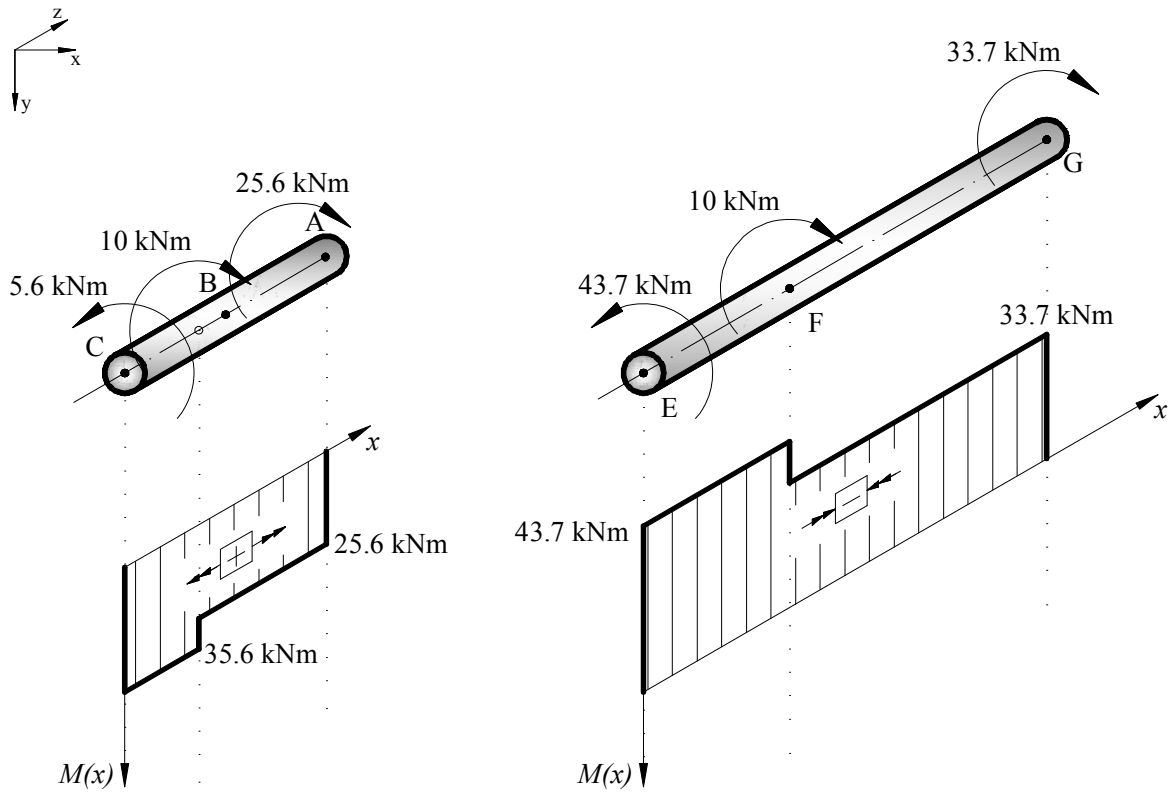
$$\Sigma F_V = 0) \quad R_C = -R_E = -14.9 \text{ kN}$$



La tensió normal màxima es trobarà en el punt C i serà de compressió:

$$\sigma_{max,C} = \frac{M_{max} \cdot r}{I} = \frac{43.7 \cdot 10^6 \cdot 100}{\frac{\pi \cdot 200^4}{64}} = 55.7 \text{ MPa}$$

La tensió tallant màxima τ_{max} deguda al moment torsor es trobarà o bé a la barra CA o bé a la barra EG:



La tensió tallant màxima deguda al moment torsor es localitza en la secció E i el seu valor és:

$$\tau_{max,t} = \frac{M_T \cdot r}{I_P} = \frac{43.7 \cdot 10^6 \cdot 100}{\frac{\pi \cdot 200^4}{32}} = 27.8 \text{ MPa}$$

Finalment, es calculen les tensions tallants degudes a la flexió a la barra CE: El tallant V es manté constant al llarg de tota la barra CE, $V = 14.9 \text{ kN}$. Per tant, la tensió tallant màxima serà la mateixa en cada secció de la barra CE, i el seu valor és:

$$\tau_{max,f} = \frac{4 \cdot V}{3 \cdot A} = \frac{4 \cdot 14.9 \cdot 10^3}{3 \cdot \frac{\pi \cdot 200^2}{4}} = 0.63 \text{ MPa}$$

Per tant, σ_{max} i τ_{max} són 55.7 MPa i 27.8 MPa, respectivament. El valor de σ_{max} es troba a la secció E, i el de τ_{max} , a totes les seccions del tram EF.

b) L'angle φ_{GF} .

$$\varphi_{GF} = \frac{M_F \cdot d_{GF}}{G \cdot I_P} - \frac{M_E \cdot d_{GF}}{G \cdot I_P} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^3}{1.27 \cdot 10^{13}} - \frac{43.7 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^3}{1.27 \cdot 10^{13}} = -1.06 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Problema 8.7. La biga ABC està formada per dues seccions diferents, en el tram AB té secció rectangular i en el tram BC, circular, i està sotmesa a una càrrega puntual en el punt B. Determineu:

- Les reaccions.
- El gir de torsió en el punt D (φ_{AD}).
- La fletxa en el punt D (δ_D).

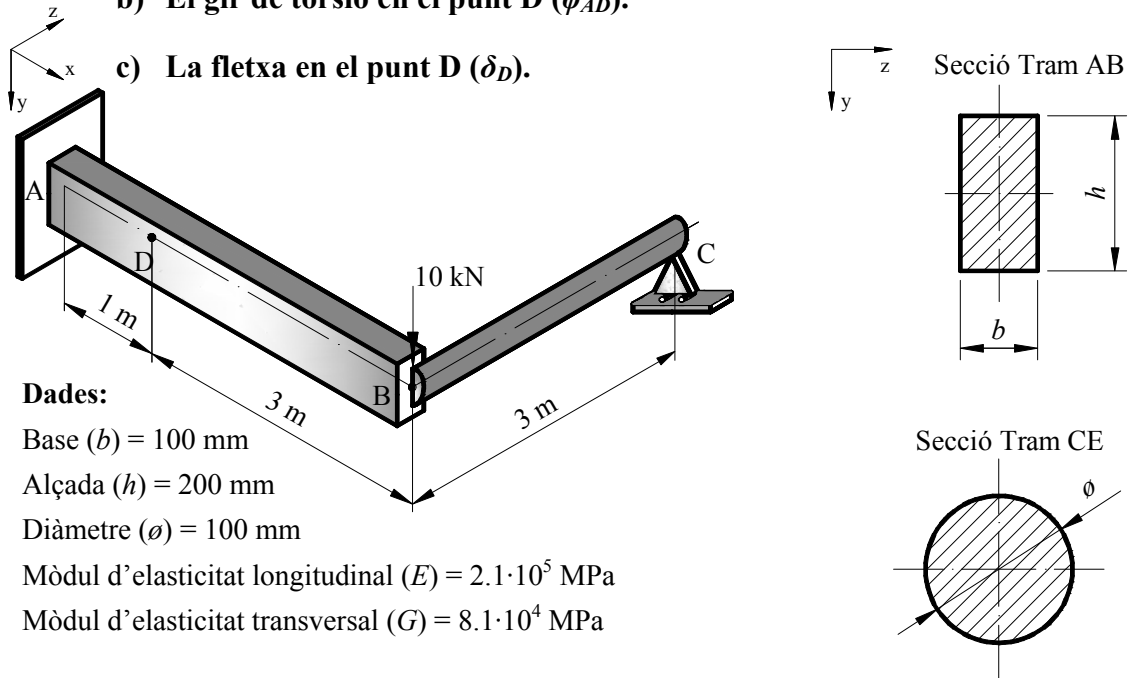
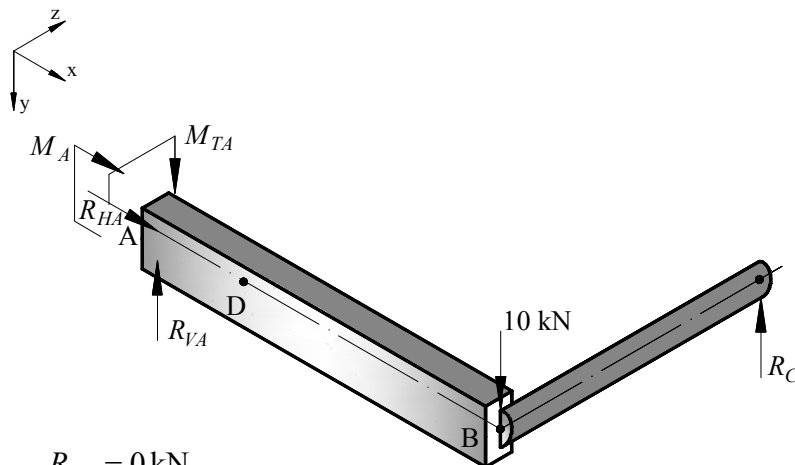


Figura 8.7

- Les reaccions.

Es planteja el diagrama de cos lliure de l'estructura per determinar-ne les reaccions.



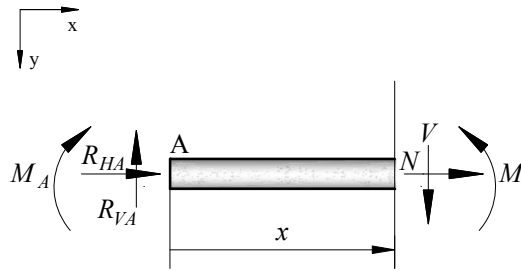
$$\begin{aligned} \Sigma F_H = 0) \quad R_{HA} &= 0 \text{ kN} \\ \Sigma F_V = 0) \quad R_{VA} + R_C &= 10 \\ R_{VA} &= 10 - R_C \\ \Sigma M_{FA} = 0) \quad M_A &= 4 \cdot R_C - 4 \cdot 10 = 4R_C - 40 \\ \Sigma M_{TA} = 0) \quad M_{TA} &= 3 \cdot R_C = 3R_C \end{aligned}$$

Com que es tenen tres equacions i quatre incògnites, es tracta d'un cas hiperestàtic. Per poder solucionar el sistema d'equacions s'han d'afegir equacions basades en la compatibilitat de deformacions.

S'utilitzen dues metodologies diferents per solucionar el problema hiperestàtic: *i)* a partir de l'equació de l'elàstica i *ii)* utilitzant els teoremes de Mohr.

Solució a partir de l'equació de l'elàstica

Tram AB: $0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$



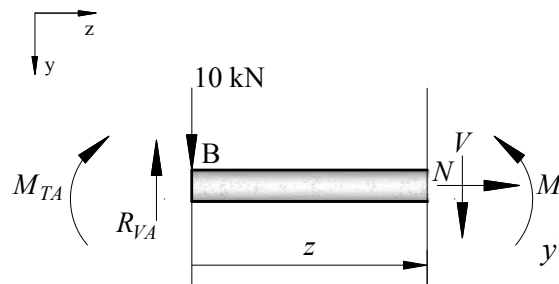
$$M(x) = R_{VA} \cdot x + M_A$$

$$y''(x) = \frac{1}{E \cdot I_{AB}} (-R_{VA} \cdot x - M_A)$$

$$y'(x) = \frac{1}{E \cdot I_{AB}} \left(-\frac{1}{2} R_{VA} \cdot x^2 - M_A \cdot x + A \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot I_{AB}} \left(-\frac{1}{6} R_{VA} \cdot x^3 - \frac{1}{2} M_A \cdot x^2 + A \cdot x + B \right)$$

Tram BC: $0 \text{ m} \leq z \leq 3 \text{ m}$



$$M(z) = R_{VA} \cdot z + M_{TA} - 10z$$

$$y''(z) = \frac{1}{E \cdot I_{BC}} (-R_{VA} \cdot z - M_{TA} + 10z)$$

$$y'(z) = \frac{1}{E \cdot I_{BC}} \left(-\frac{1}{2} R_{VA} \cdot z^2 - M_{TA} z + 5z^2 + C \right)$$

$$y(z) = \frac{1}{E \cdot I_{BC}} \left(-\frac{1}{6} R_{VA} \cdot z^3 - \frac{1}{2} M_{TA} \cdot z^2 + \frac{5}{3} z^3 + C \cdot z + D \right)$$

Les constants d'integració es determinen a partir de les condicions de contorn:

$$(1) \text{ Per } x = 0 \quad y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$(2) \text{ Per } x = 0 \quad y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$(3) \text{ Per } x = 4 \text{ i } z = 0$$

$$y(x) = y(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{E \cdot I_{AB}} \cdot \left(-\frac{32}{3} R_{VA} - 8M_A \right) = \frac{D}{E \cdot I_{BC}}$$

$$(4) \text{ Per } x = 4 \text{ i } z = 0$$

$$\varphi_{AB} = y'(z) \quad \Rightarrow \quad -\frac{R_C \cdot 3 \cdot 4}{G \cdot I_{TAB}} = \frac{C}{E \cdot I_{BC}}$$

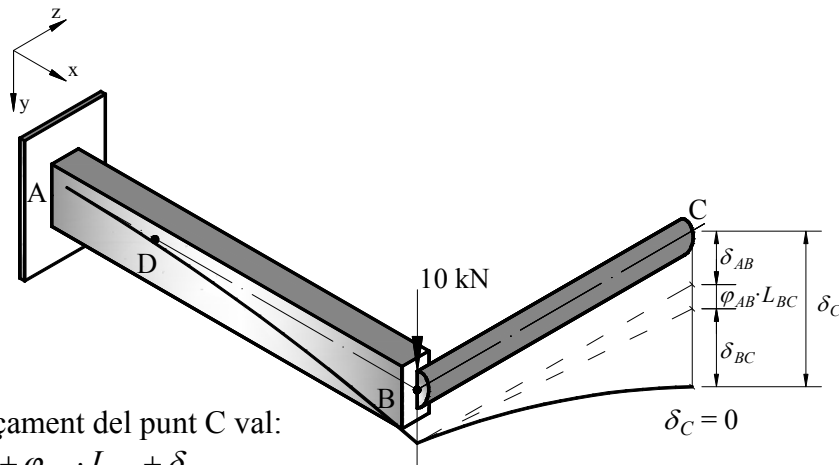
$$(5) \text{ Per } z = 3 \quad y(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{9}{2} R_{VA} - \frac{9}{2} M_{AT} + 45 + 3C + D = 0$$

S'han afegit tres equacions a les dues que ja es tenien i dues incògnites a les tres que ja es tenien, i queden, per tant, cinc equacions amb cinc incògnites:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{VA} = 10 - R_C \\ M_A = 4R_C - 40 \\ M_{TA} = 3 \cdot R_C = 3R_C \\ \frac{1}{E \cdot I_{AB}} \cdot \left(-\frac{32}{3} R_{VA} - 8M_A \right) = \frac{D}{E \cdot I_{BC}} \\ -\frac{R_C \cdot 3 \cdot 4}{G \cdot I_{TAB}} = \frac{C}{E \cdot I_{BC}} \\ -\frac{9}{2} R_{VA} - \frac{9}{2} M_{TA} + 45 + 3C + D = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_C = 0.76 \text{ kN} \\ M_A = -37 \text{ kNm} \\ R_{VA} = 9.24 \text{ kN} \\ D = 14.5 \\ C = -2.55 \\ M_{TA} = 2.29 \text{ kNm} \end{array} \right.$$

Solució 2: Amb els teoremes de Mohr

Es transforma en un cas "isostàtic", substituint la coacció a C per una força vertical R_C , i es planteja la condició de compatibilitat $\delta_C = 0$.



El desplaçament del punt C val:

$$\delta_C = \delta_{AB} + \varphi_{AB} \cdot L_{BC} + \delta_{BC}$$

on

$$\varphi_{AB} \cdot L_{BC} = -\frac{1}{G \cdot I_{TAB}} \cdot (R_C \cdot 3 \cdot 4) \cdot 3$$

i δ_{AB} i δ_{BC} s'obtenen utilitzant el segon teorema de Mohr:

$$\delta_{AB} = -\frac{1}{E \cdot I_{AB}} \cdot (R_C - 10) \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4$$

$$\delta_{BC} = -\frac{1}{E \cdot I_{BC}} \cdot (3 \cdot R_C \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3)$$

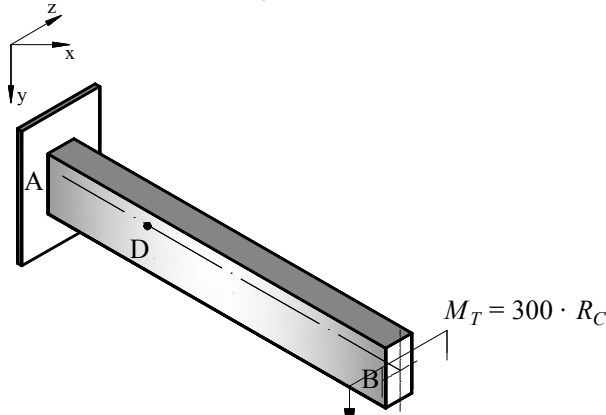
com que $\delta_C = 0$

$$0 = -\frac{1}{E \cdot I_{AB}} \cdot (R_C - 10) \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{R_C \cdot 3 \cdot 4}{G \cdot I_{TAB}} \cdot 3 - \frac{1}{E \cdot I_{BC}} \cdot 3 \cdot R_C \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3$$

$$R_C = 0.76 \text{ kN}$$

Amb el valor de R_C es poden trobar els altres valors: R_A , M_A i M_{TA} .

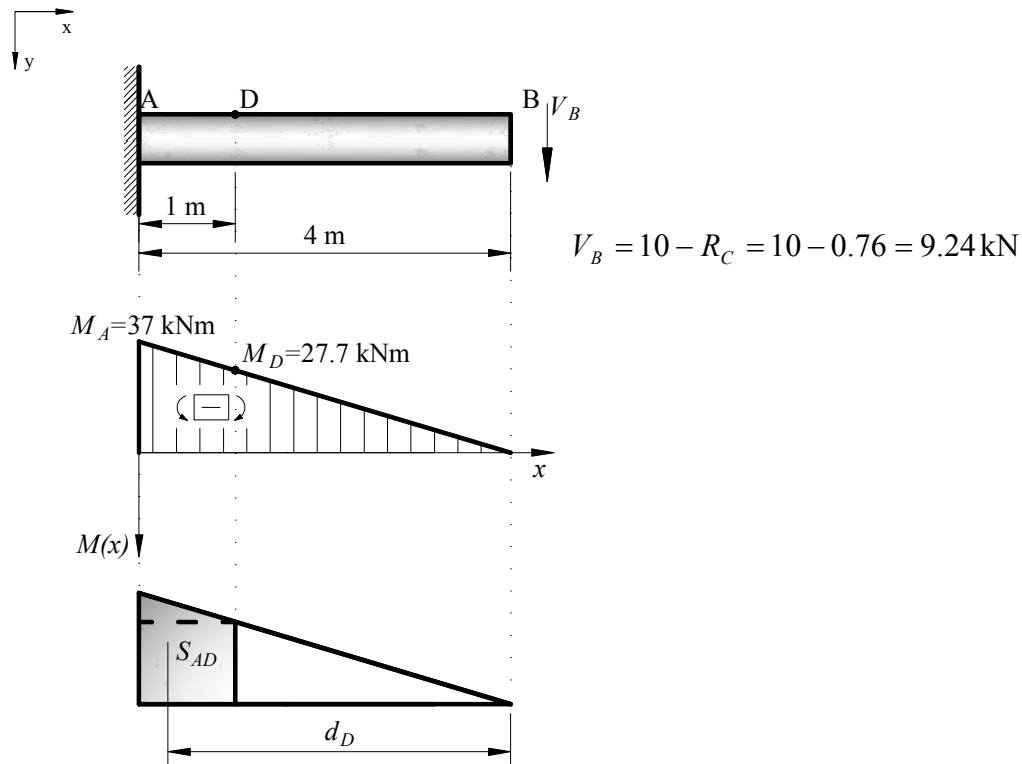
b) El gir de torsió en el punt D (φ_{AD}).



$$\varphi_{AD} = \frac{M_T \cdot L_{AD}}{G \cdot I_T} = \frac{0.76 \cdot 3 \cdot 1}{8.1 \cdot 10^7 \cdot 0.229 \cdot 0.2 \cdot 0.1^3} = 6.15 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.04^\circ$$

c) La fletxa en el punt D (δ_D).

Aplicant el segon teorema de Mohr entre A i D s'obté:



on S_{AD} és l'àrea del diagrama de moments entre els punts A i D i d_D és la distància entre el c.d.g. de l'àrea S_{AD} i el punt D.

$$\delta_D = -\frac{1}{EI_{AB}} \cdot (S_{AD} \cdot d_D) = -\frac{1}{EI_{AB}} \cdot \left(9.24 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 3 \right) + 9.24 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 3 \right) \right) =$$

$$= 0.00814 \text{ m} = 8.14 \text{ mm}$$

Problema 8.8. El voladís de la Figura 8.8 té secció rectangular i està sotmès a una càrrega puntual a l'extrem, a un moment flector i a un moment torsor. Determineu les tensions principals (σ_{ppals}) i la tensió tallant màxima (σ_{max}) en els punts A, B i C de la secció S-S.

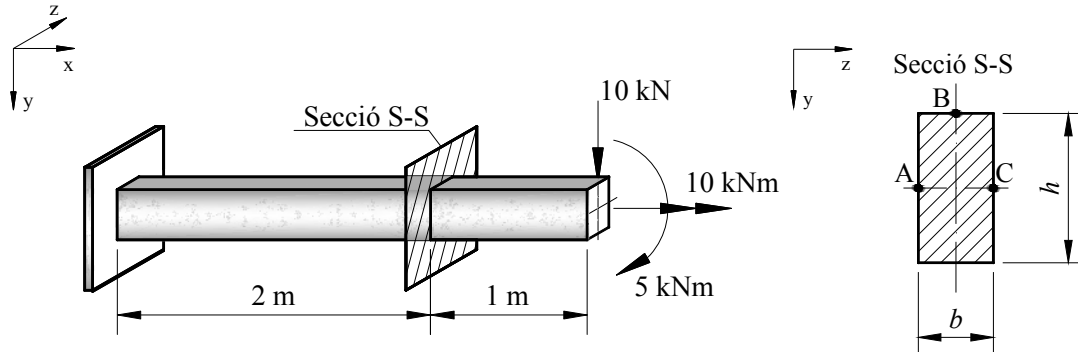


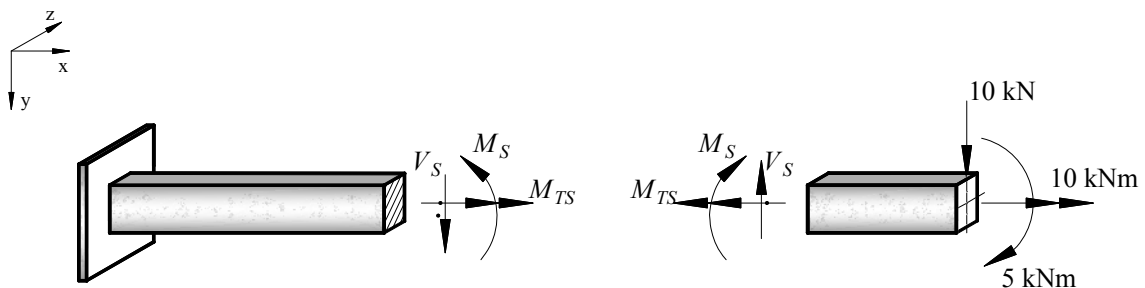
Figura 8.7

Dades:

Base (b) = 100 mm

Alçada (h) = 200 mm

Es determinen els valors dels esforços interns fent un tall a la secció S-S i plantejant l'equilibri:

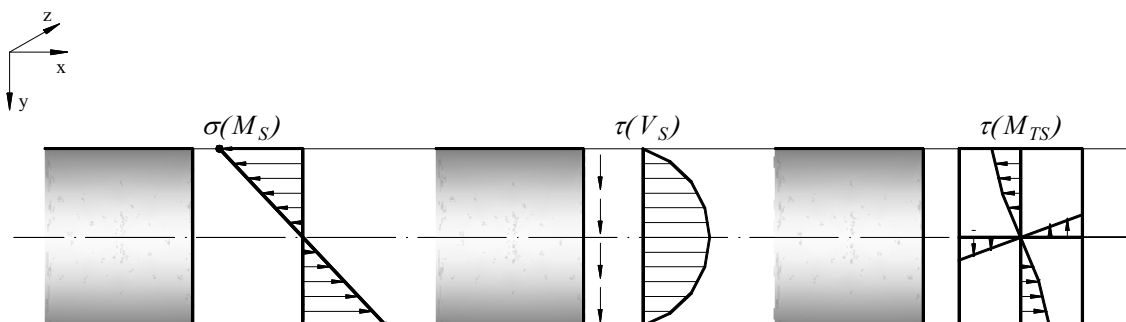


$$V_S = 10 \text{ kN}$$

$$M_S = -10 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 5 \text{ kNm} = -15 \text{ kNm}$$

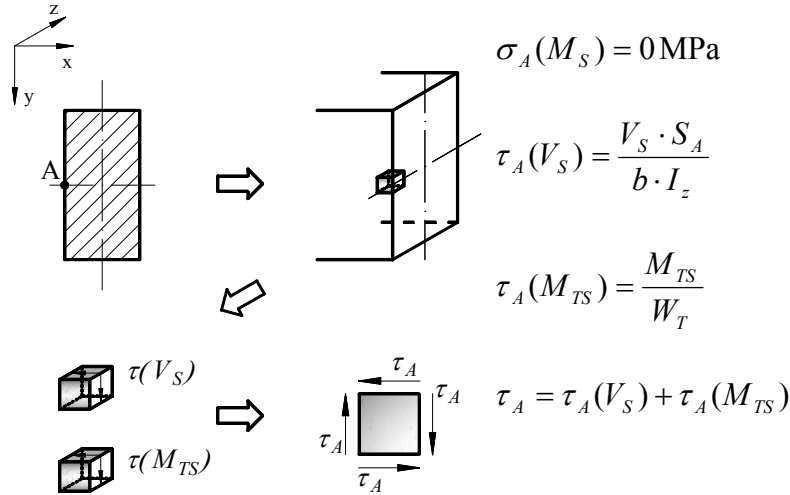
$$M_{TS} = 10 \text{ kNm}$$

A la secció S-S hi apareixen tensions normals degudes al moment flector M_S i tensions tallants degudes a l'esforç tallant V_S i al moment torsor M_{TS} .



Punt A

Per fer l'anàlisi de tensions al punt A es considera un element diferencial que l'envolti. Al punt A només hi ha tensions tallants, $\tau(V_S)$ i $\tau(M_{TS})$. Per fer-ne l'anàlisi s'ha considerat un estat de tensió plana a XY.



I_z és el moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix z , S_a és el moment estàtic de la part de secció que queda per sobre del punt A respecte de l'eix z i W_T és el mòdul resistent a la torsió de la secció rectangular.

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{100 \cdot 200^3}{12} = 66.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$S_a = A \cdot d = 100 \cdot 100 \cdot 50 = 0.5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$W_T = \mu \cdot h \cdot b^2 = 0.256 \cdot 200 \cdot 100^2 = 0.512 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

El paràmetre μ es calcula a partir de la relació entre els costats llarg (h) i curt (b) del rectangle ($m=h/b$). Per a $m=2$, $\mu=0.256$.

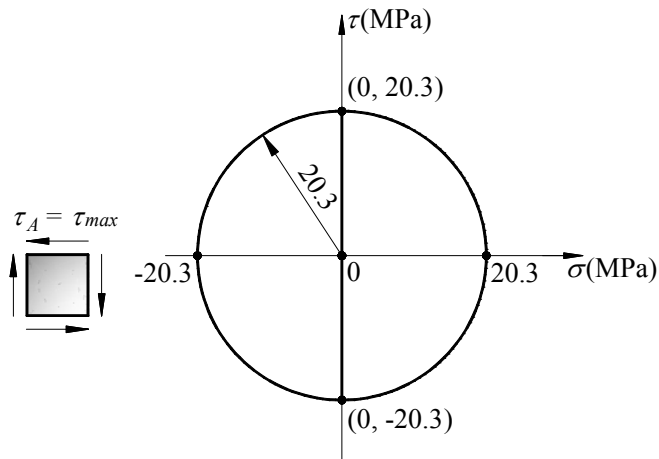
Per tant, la tensió tallant en el punt A val:

$$\tau_A(V_S) = \frac{V_S \cdot S_A}{b \cdot I_z} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0.5 \cdot 10^6}{100 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 0.75 \text{ MPa}$$

$$\tau_A(M_{TS}) = \frac{M_{TS}}{W_T} = \frac{10 \cdot 10^6}{0.512 \cdot 10^6} = 19.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = \tau_A(V_S) + \tau_A(M_{TS}) = 0.75 + 19.5 = 20.3 \text{ MPa}$$

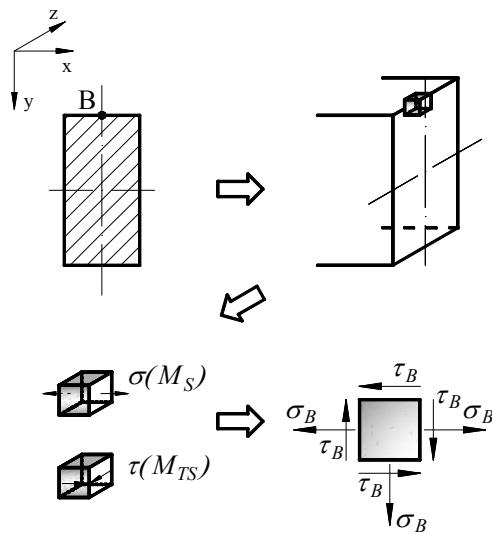
En el punt A només hi ha tensions tallants; per tant, $\tau_{max} = \tau_A$. En representar l'estat tensional del punt en el cercle de Mohr, s'observa que τ_{max} coincideix amb el radi del cercle i que aquest està centrat a l'origen de coordenades.

Tensions en el punt A:

$$\begin{aligned}
 C &= \sigma_A = 0 \text{ MPa} \\
 R &= \tau_A = 20.3 \text{ MPa} \\
 \tau_{max} &= R = 20.3 \text{ MPa} \\
 \sigma_I &= C + R = 20.3 \text{ MPa} \\
 \sigma_{II} &= C - R = -20.3 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Punt B

Per fer l'anàlisi de tensions en el punt B es considera un element diferencial que l'envolti. En el punt B tindrem les tensions degudes als moments torsor $\tau(M_{TS})$ i flector $\sigma(M_S)$, i a diferència del punt A, la tensió tallant $\tau(V_S)$ serà nul·la. Per fer-ne l'anàlisi s'ha considerat un estat de tensió plana a ZX.



$$\sigma_B(M_S) = \frac{M_S \cdot y}{I_z}$$

$$\tau_B(V_S) = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_B(M_{TS}) = \frac{\tau_A(M_{TS}) \cdot b}{h}$$

$$\tau_B = \tau_B(M_{TS})$$

I_z és el moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix z:

$$I_z = 66.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Per tant, la tensió normal en el punt B val:

$$\sigma_B(M_S) = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 100}{66.7 \cdot 10^6} = 22.5 \text{ MPa}$$

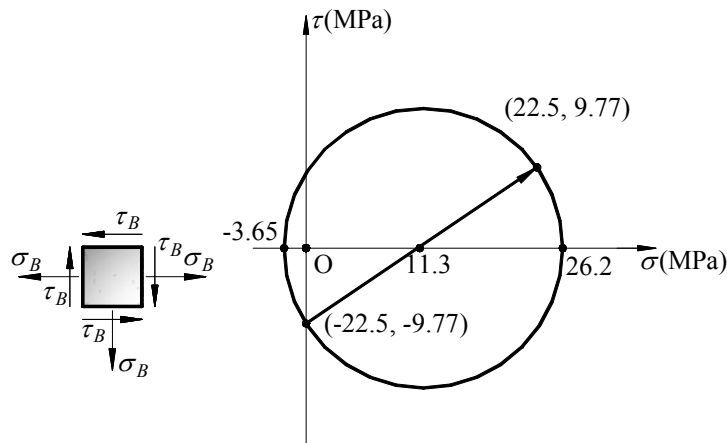
I la tensió tallant:

$$\tau_B(V_S) = 0$$

$$\tau_B(M_{TS}) = \frac{19.5 \cdot 100}{200} = 9.77 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = 0 + 9.77 = 9.77 \text{ MPa}$$

Al punt B hi ha tensions tallants i tensions normals.



Tensions en el punt B:

$$C = \frac{(22.5 + 0)}{2} = 11.3 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(22.5 - 11.3)^2 + (9.77)^2}$$

$$R = 14.9 \text{ MPa}$$

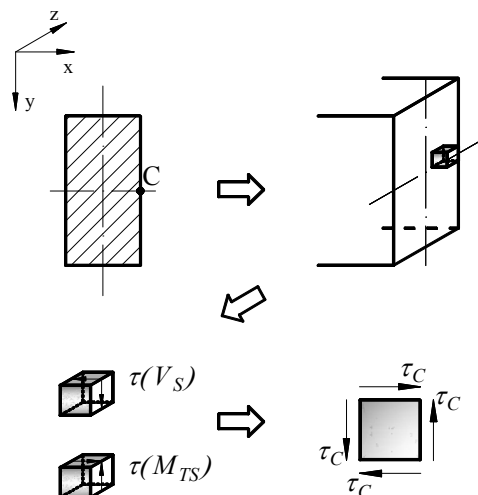
$$\tau_{\max} = R = 14.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_I = C + R = 26.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = C - R = -3.65 \text{ MPa}$$

Punt C

Per fer l'anàlisi de tensions en el punt C es considera un element diferencial que l'envolti. El punt C és simètric al punt A en la secció, respecte a l'eix principal vertical. Per tant, només hi haurà tensions tallants, $\tau(V_S)$ i $\tau(M_{TS})$. Per fer-ne l'anàlisi, s'ha considerat un estat de tensió plana a XY.



$$\sigma_C(M_S) = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_C(V_S) = \frac{V_S \cdot S_c}{b \cdot I_z}$$

$$\tau_C(M_{TS}) = \frac{M_{TS}}{W_T}$$

$$\tau_C = \tau_C(V_S) - \tau_C(M_{TS})$$

I_z és el moment d'inèrcia de la secció respecte de l'eix z, S_A és el moment estàtic de la part de secció que queda per sobre del punt A respecte de l'eix z i W_T és el mòdul resistent a la torsió de la secció rectangular.

$$I_z = 66.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$S_A = 0.5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$W_T = 0.512 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

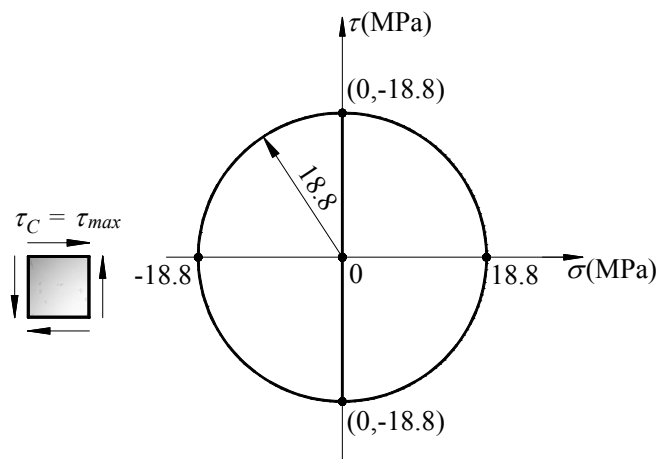
Per tant, la tensió tallant en el punt C val:

$$\tau_C(V_S) = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0.5 \cdot 10^6}{100 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 0.75 \text{ MPa}$$

$$\tau_C(M_{TS}) = \frac{10 \cdot 10^6}{0.512 \cdot 10^6} = 19.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_C = 0.75 - 19.5 = -18.8 \text{ MPa}$$

Al punt C només hi ha tensions tallants, i per tant $\tau_{max} = \tau_C$. En representar l'estat tensional del punt C en el cercle de Mohr, s'observa que el cercle de Mohr està centrat a l'origen de coordenades.



Tensions en el punt C:

$$C = \sigma_C = 0 \text{ MPa}$$

$$R = \tau_C = -18.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = R = 18.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_I = C + R = 18.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = C - R = -18.8 \text{ MPa}$$

9. Energia de deformació

Problema 9.1. L'element de la Figura 9.1, format pels trams AB, BC i CD, està sotmès a una càrrega puntual P en el punt D. Calculeu l'energia de deformació elàstica.

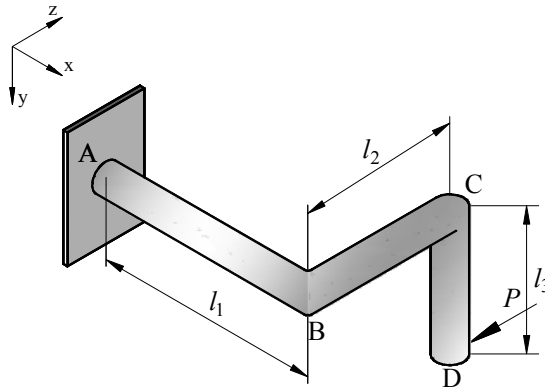


Figura 9.1

Dades:

$$\text{Força puntual } (P) = 20 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\text{Secció de la barra } (A) = 2.25 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$l_1 = 1.5 \text{ m}$$

$$l_2 = 1.5 \text{ m}$$

$$l_3 = 1.5 \text{ m}$$

$$\text{Moment d'inèrcia } (I) = 42 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

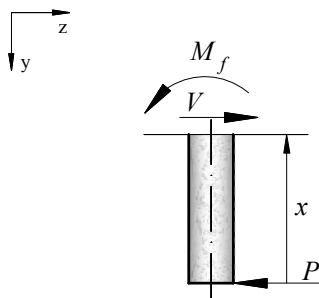
$$\text{Mòdul de torsió } (I_T) = 70 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{Mòdul d'elasticitat longitudinal del material } (E) = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\text{Mòdul d'elasticitat transversal del material } (G) = 80 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

Tram DC: $0 \leq x \leq l_3$

Aquest tram està sotmès a un esforç tallant i a un moment flector:



$$M_f = P \cdot x$$

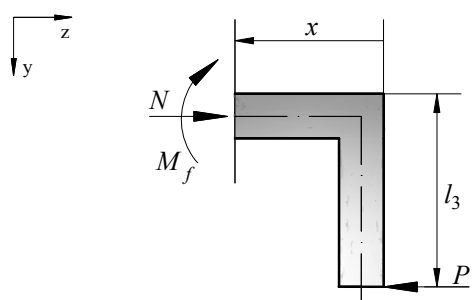
$$V = P$$

$$\begin{aligned} U_{DC} &= \int_0^{l_3} \frac{(P \cdot x)^2 dx}{2E \cdot I} + \int_0^{l_3} f \cdot \frac{P^2 dx}{2A \cdot G} = \\ &= \frac{P^2 \cdot l_3^3}{6E \cdot I} + f \cdot \frac{P^2 \cdot l_3}{2A \cdot G} \end{aligned}$$

on f és el factor de forma per tallant (per a secció circular 1.11).

Tram CB: $0 \leq x \leq l_2$

Aquest tram està sotmès a un esforç axial i a un moment flector:



$$M_f = P \cdot l_3$$

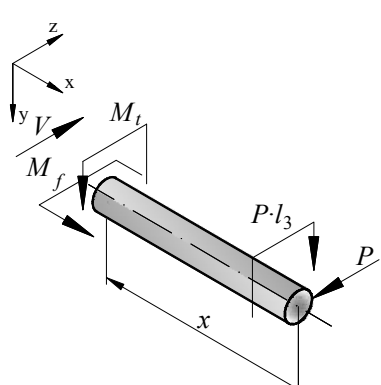
$$N = P$$

$$U_{BC} = \int_0^{l_2} \frac{(P \cdot l_3)^2 dx}{2E \cdot I} + \int_0^{l_2} \frac{P^2 dx}{2A \cdot E} =$$

$$= \frac{(P \cdot l_3)^2 \cdot l_2}{2E \cdot I} + \frac{P^2 \cdot l_2}{2A \cdot E}$$

Tram BA: $0 \leq x \leq l_1$

Aquest tram està sotmès a un esforç tallant, a un moment flector i a un moment torsor:



$$M_f = P \cdot x$$

$$V = P$$

$$M_t = P \cdot l_3$$

$$U_{BA} = \int_0^{l_1} \frac{(P \cdot x)^2 dx}{2E \cdot I} + \int_0^{l_1} f \cdot \frac{P^2 dx}{2A \cdot G} + \int_0^{l_1} \frac{(P \cdot l_3)^2 dx}{2G \cdot I_t} =$$

$$= \frac{P^2 \cdot l_1^3}{6E \cdot I} + f \cdot \frac{P^2 \cdot l_1}{2A \cdot G} + \frac{(P \cdot l_3)^2 \cdot l_1}{2G \cdot I_t}$$

El moment d'inèrcia que s'ha d'emprar en cada barra és el corresponent a l'eix perpendicular al pla de la flexió.

Tenint en compte els valors de l'enunciat, es calcula

$$E \cdot I = 8.4 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2 \quad G \cdot I_t = 5.6 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$$

$$A \cdot G = 1.8 \cdot 10^9 \text{ N} \quad A \cdot E = 4.5 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Substituint valors s'obté:

$$U_{DC} = \frac{(20 \cdot 10^3)^2 \cdot 1.5^3}{6 \cdot 8.4 \cdot 10^6} + 1.2 \cdot \frac{(20 \cdot 10^3)^2 \cdot 1.5}{2 \cdot 1.8 \cdot 10^9} = 26.79 + 0.2 = 27 \text{ J}$$

$$U_{BC} = \frac{(20 \cdot 10^3 \cdot 1.5)^2 \cdot 1.5}{2 \cdot 8.4 \cdot 10^6} + \frac{(20 \cdot 10^3)^2 \cdot 1.5}{2 \cdot 4.5 \cdot 10^9} = 80.36 + 0.07 = 80.4 \text{ J}$$

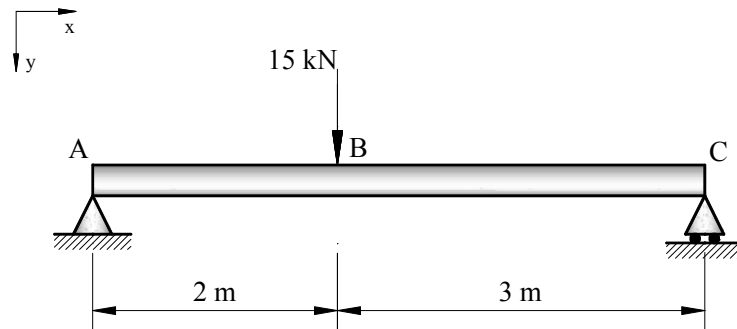
$$U_{BA} = \frac{(20 \cdot 10^3)^2 \cdot 1.5^3}{6 \cdot 8.4 \cdot 10^6} + 1.2 \cdot \frac{(20 \cdot 10^3)^2 \cdot 1.5}{2 \cdot 1.8 \cdot 10^9} + \frac{(20 \cdot 10^3 \cdot 1.5)^2 \cdot 1.5}{2 \cdot 5.6 \cdot 10^6} = 26.79 + 0.2 + 120.5 = 148 \text{ J}$$

$$U_{TOT} = 27 + 80.4 + 148 = 255 \text{ J}$$

S'observa que els termes de l'energia deguda a esforç normal i a esforç tallant són negligibles enfront dels causats per flexió i per torsió. Aquesta és la situació habitual, si bé el pes de cada factor per a casos específics es pot determinar amb les expressions genèriques deduïdes.

Problema 9.2. La biga de la Figura 9.2 està sotmesa a una càrrega puntual en el punt B. Determineu:

- L'energia de deformació elàstica deguda a la flexió.
- El desplaçament vertical del punt B.
- El treball efectuat per la força exterior aplicada.



Dades:

Figura 9.2

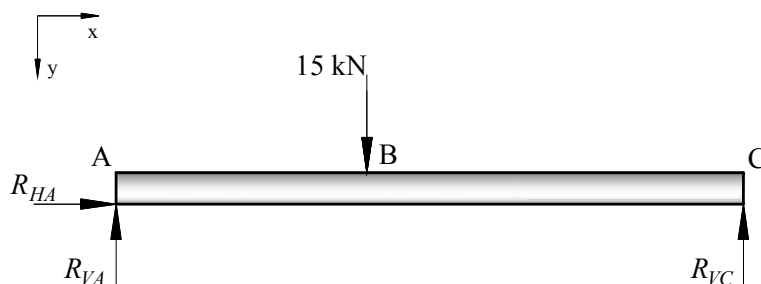
Moment d'inèrcia de la secció (I) = $9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

Mòdul d'elasticitat del material (E) = $2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Per conveniència en aquest exercici les unitats de força seran N i les de longitud, m. Amb això, $E \cdot I = 1.8 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$.

- L'energia de deformació elàstica deguda a la flexió.

La biga està sotmesa a un moment flector i a un esforç tallant. Negligim la influència de l'energia deguda a l'esforç tallant enfront de la del moment flector.



$$U = \int \frac{M^2 dx}{2E \cdot I}$$

Es calculen les reaccions en els recolzaments:

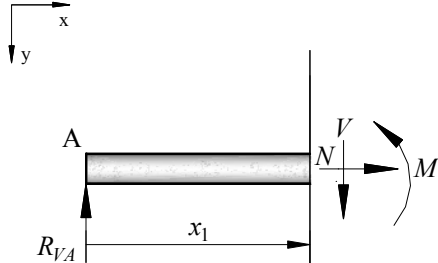
$$\Sigma F_H = 0) \quad R_{HA} = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_V = 0) \quad R_{VA} + R_{VC} = P \quad R_{VA} = \frac{3}{5}P$$

$$\Sigma M_A = 0) \quad R_{VC} \cdot 5 = 2P \quad R_{VC} = \frac{2}{5}P$$

Tram AB: $0 \leq x_1 \leq 2$ m

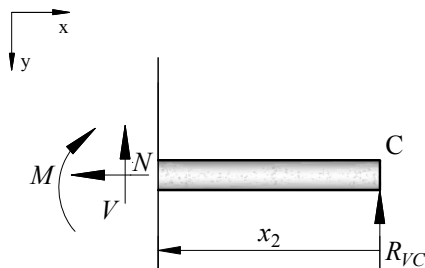
Es determina M en funció de x .



$$M(x) = \frac{3}{5}P \cdot x_1$$

$$U_{AB} = \int_0^2 \frac{\left(\frac{3}{5}P \cdot x_1\right)^2}{2E \cdot I} dx = \frac{1}{2E \cdot I} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot P^2 \cdot \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{0.48P^2}{E \cdot I}$$

Tram BC: $0 \leq x_2 \leq 3$ m



$$M(x) = \frac{2}{5}P \cdot x_2$$

$$U_{BC} = \int_0^3 \frac{\left(\frac{2}{5}P \cdot x_2\right)^2}{2E \cdot I} dx = \frac{1}{2E \cdot I} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot P^2 \cdot \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{0.72P^2}{E \cdot I}$$

$$U = U_{AB} + U_{BC}$$

Substituint valors, s'obté:

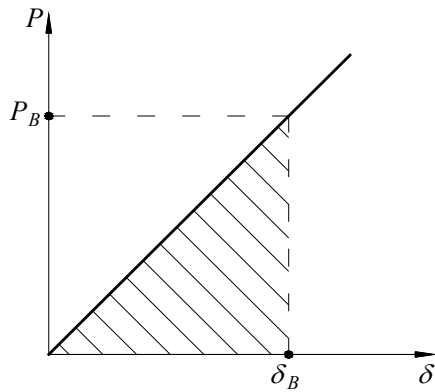
$$U = \frac{1.2P^2}{E \cdot I} = \frac{1.2 \cdot (15 \cdot 10^3)^2}{1.8 \cdot 10^6} = 150 \text{ J}$$

b) El desplaçament vertical del punt B.

Aplicant el teorema de Castigliano,

$$\delta_{VB} = \frac{\partial U}{\partial P_{VB}} = \frac{2 \cdot 1.2 \cdot P}{E \cdot I} = \frac{2.4 \cdot P}{E \cdot I} = \frac{2.4 \cdot 15 \cdot 10^3}{1.8 \cdot 10^6} = 0.02 \text{ m} = 20 \text{ mm}$$

c) El treball efectuat per la força exterior aplicada.



$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\delta_B} P d\delta = \int_0^{\delta_B} k \cdot \delta d\delta = \frac{1}{2} k \cdot \delta_B^2 = \\ &= \frac{1}{2} P_B \cdot \delta_B = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 0.02 = 150 \text{ J} \end{aligned}$$

que coincideix amb l'energia de deformació de la peça.

Problema 9.3. El pòrtic de la Figura 9.3 està format per tres barres, AB, BD i DE, amb les rigideses indicades. Aplicant el teorema de Castigliano, determineu:

- L'angle de gir del nus B.
- El desplaçament vertical del punt C.

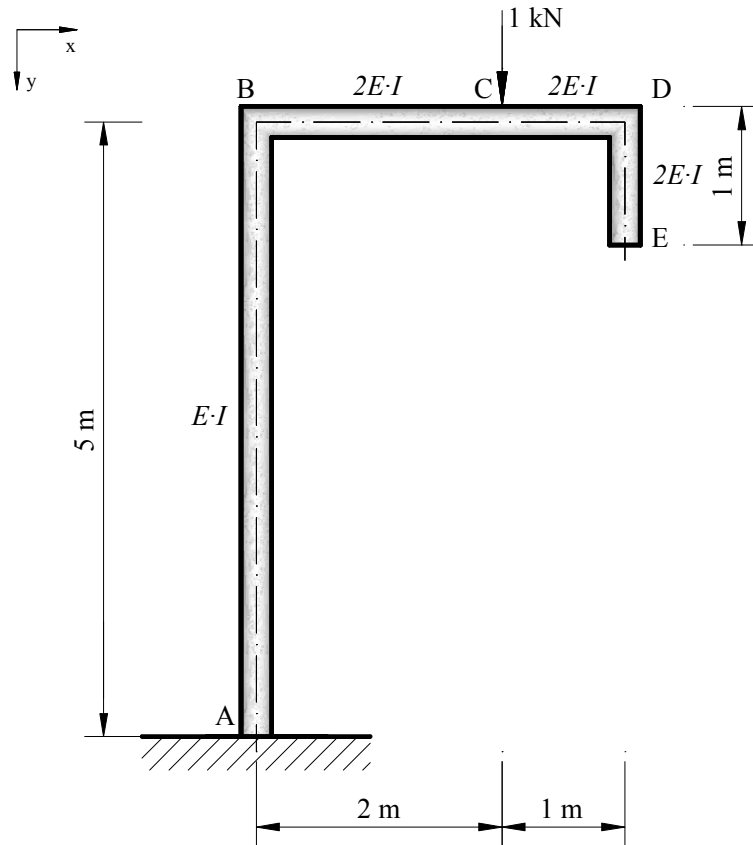


Figura 9.3

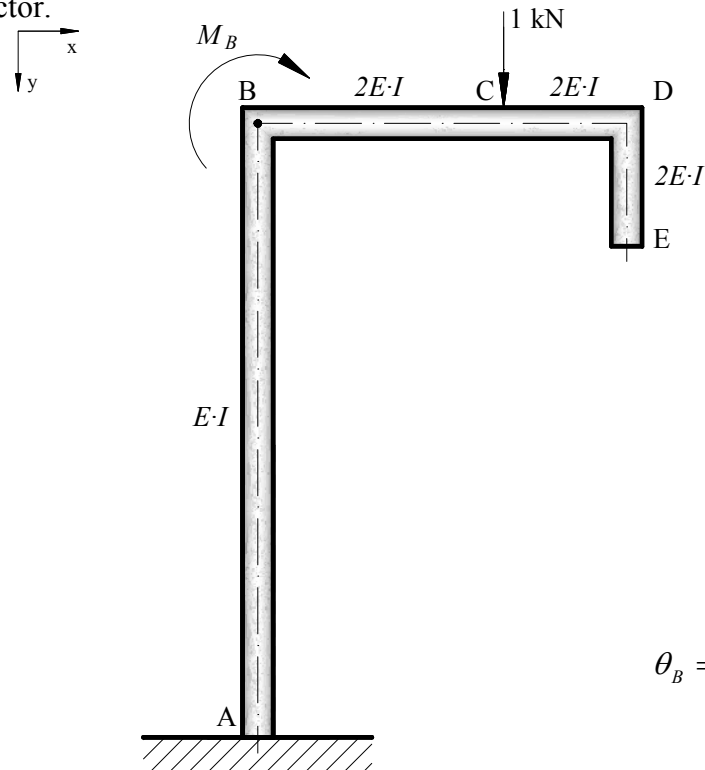
Dades:

Mòdul d'elasticitat del material per la inèrcia de la secció ($E \cdot I$) = 10^{12} Nmm²

Per conveniència, en aquest exercici les unitats de força seran N i les de longitud, m. Amb això, $E \cdot I = 10^6$ Nm².

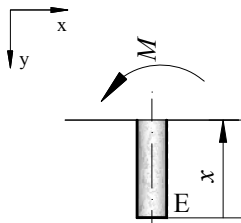
a) L'angle de gir del nus B.

Es planteja l'energia de deformació en funció d'un moment aplicat en el nus B (M_B). Es negligeix l'energia deguda a l'esforç tallant i a l'esforç normal en comparació amb la del moment flector.



$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B}$$

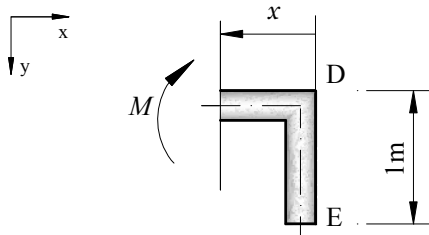
Tram ED: $0 \leq x \leq 1$ m



$$M(x) = 0$$

$$U_{ED} = 0$$

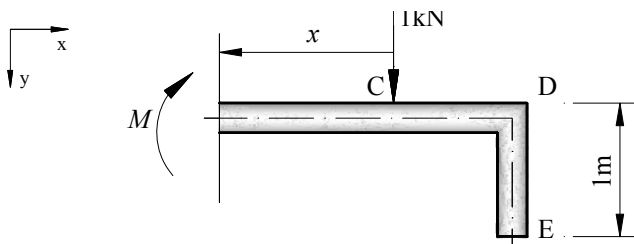
Tram DC: $0 \leq x \leq 1$ m



$$M(x) = 0$$

$$U_{DC} = 0$$

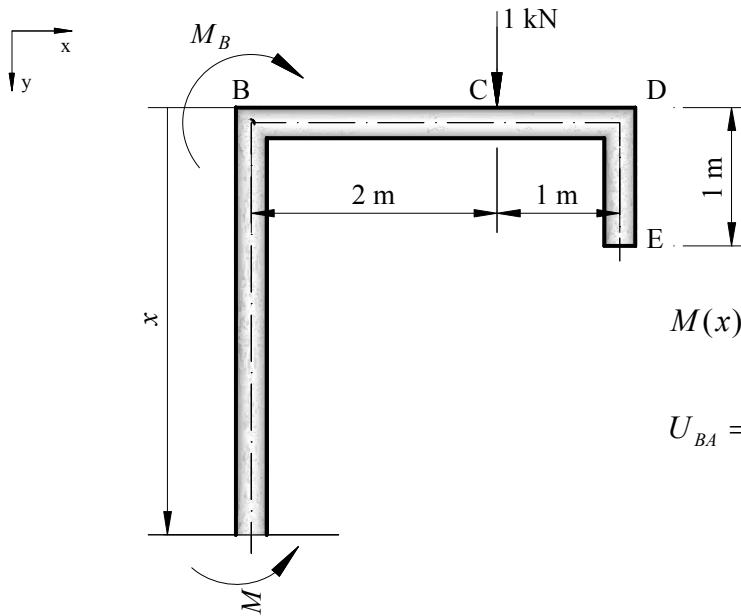
Tram CB: $1 \leq x \leq 3$ m



$$M(x) = -1 \cdot 10^3 x$$

$$U_{CB} = \int_0^2 \frac{(-1 \cdot 10^3 x)^2 dx}{2 \cdot (2E \cdot I)}$$

Tram BA: $0 \leq x \leq 5$ m



$$M(x) = 2 \cdot 1 \cdot 10^3 + M_B$$

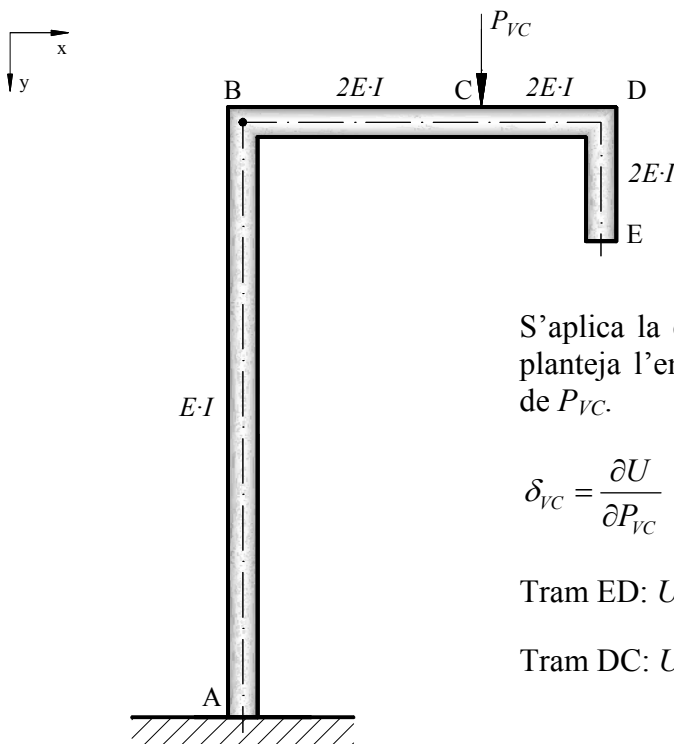
$$U_{BA} = \int_0^5 \frac{(2 \cdot 10^3 + M_B)^2}{2E \cdot I} dx$$

Es deriva respecte de M_B abans d'integrar respecte de x i així se simplifiquen les expressions. Un cop feta la derivada, se substitueix $M_B = 0$ per simplificar la resolució de la integral.

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0 + \int_0^5 \frac{2 \cdot (2 \cdot 10^3 + M_B)}{2E \cdot I} dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^5 2 \cdot 10^3 dx = \frac{1}{1 \cdot 10^6} \cdot 2 \cdot 10^3 x \Big|_0^5 = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 10^6} \cdot 10 \cdot 10^3 = 0.01 \text{ rad} \end{aligned}$$

Si és positiu, significa que el gir és en el sentit del moment M_B .

b) El desplaçament vertical del punt C.



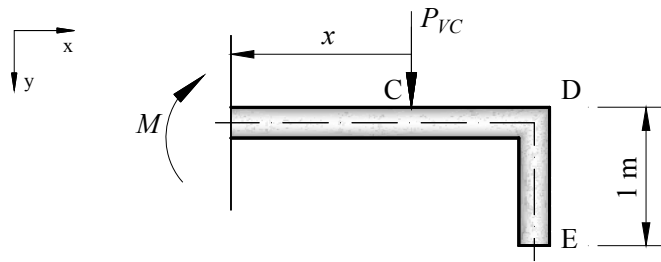
S'aplica la càrrega genèrica al punt C i es planteja l'energia de deformació en funció de P_{VC} .

$$\delta_{VC} = \frac{\partial U}{\partial P_{VC}}$$

Tram ED: $U_{ED} = 0$.

Tram DC: $U_{DC} = 0$.

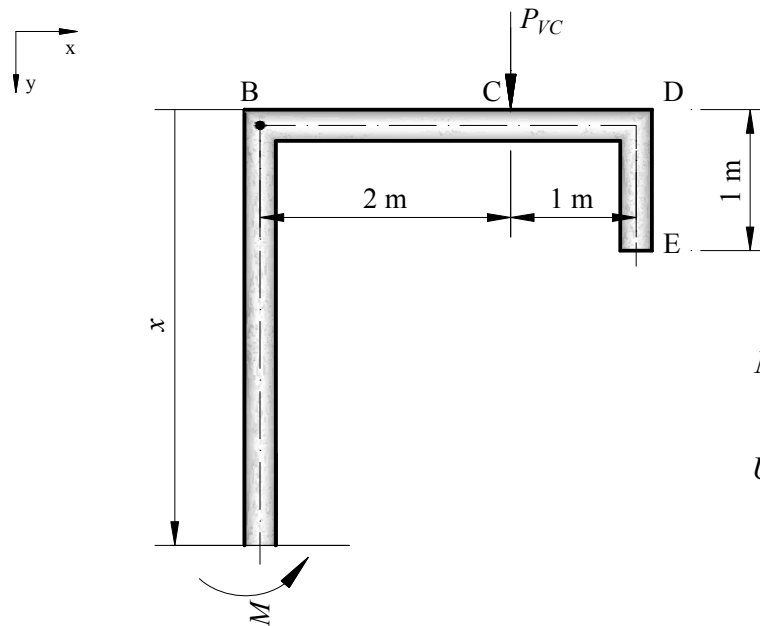
Tram CB: $1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$



$$M(x) = -P_{VC} \cdot x$$

$$U_{CB} = \int_0^2 \frac{(-P_{VC} \cdot x)^2}{2 \cdot (2E \cdot I)} dx$$

Tram BA: $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$



$$M(x) = 2P_{VC}$$

$$U_{BA} = \int_0^5 \frac{(2 \cdot P_{VC})^2}{2E \cdot I} dx$$

Es deriva respecte de P_{VC} abans d'integrar respecte de x , i un cop feta la derivada se substitueix $P_{VC} = 1000 \text{ N}$.

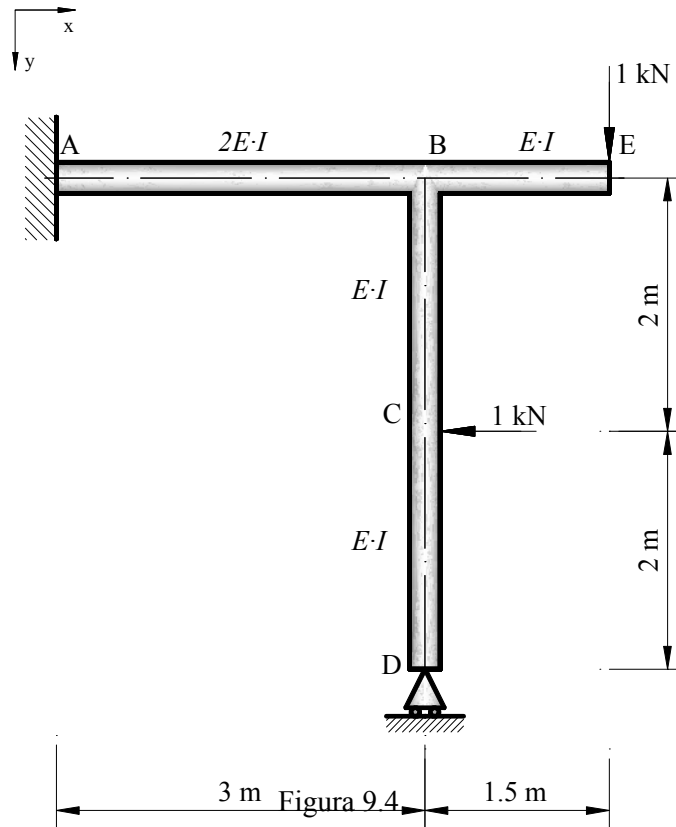
$$\delta_{VC} = \frac{\partial U}{\partial P_{VC}} = \frac{\partial}{\partial P_{VC}} \left[\frac{(-P_{VC} \cdot x)^2}{2 \cdot (2E \cdot I)} + \frac{(2P_{VC})^2}{2E \cdot I} \right] =$$

$$= \int_0^2 \frac{2 \cdot (-P_{VC} \cdot x) \cdot (-x) dx}{2(2E \cdot I)} + \int_0^5 \frac{2 \cdot (2 \cdot P_{VC}) \cdot 2 dx}{2E \cdot I} =$$

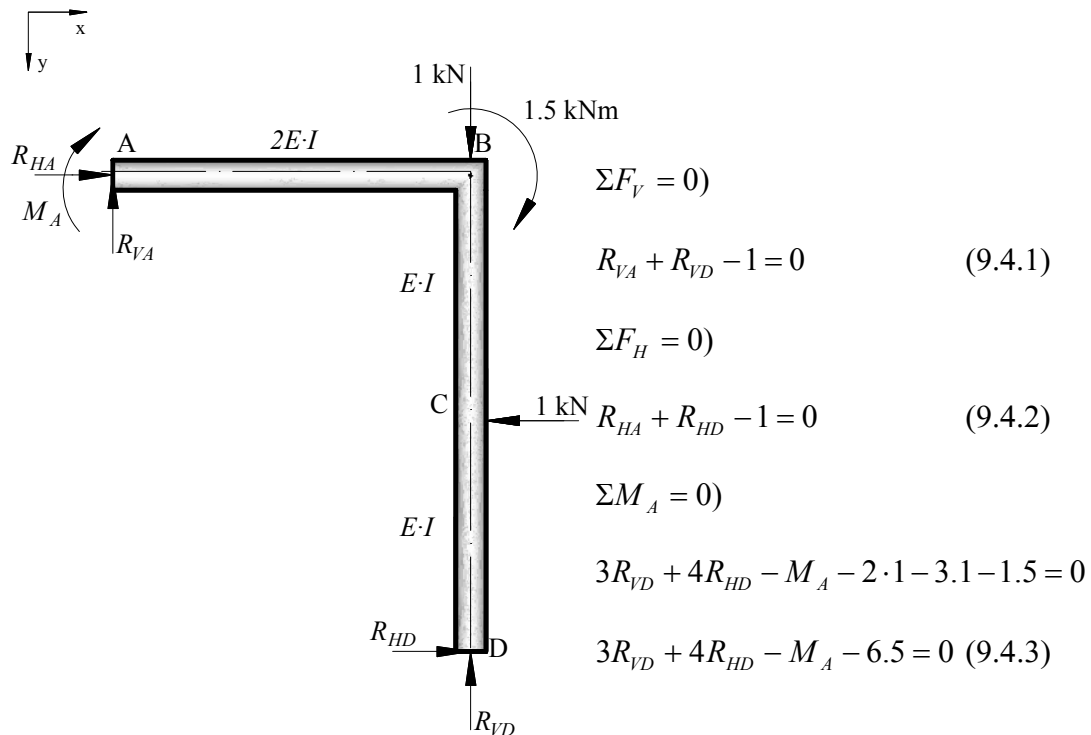
$$= \frac{1}{2E \cdot I} \cdot \int_0^2 1 \cdot 10^3 x^2 dx + \frac{4}{E \cdot I} \cdot \int_0^5 1 \cdot 10^3 dx =$$

$$= \frac{1 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^6} x^3 \Big|_0^2 + \frac{4 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^6} x \Big|_0^5 = \frac{1 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^6} \cdot 8 + \frac{4 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^6} \cdot 5 = 0.021 \text{ m} = 21 \text{ mm}$$

Problema 9.4. El pòrtic de la Figura 9.4 està encastat pel punt A i recolzat pel D, està format per trams de rigidesa diferent i sotmès a dues càrregues puntuals. Trobeu les reaccions del pòrtic mitjançant el teorema de Castigliano.



Es dibuixa el diagrama del sòlid lliure i es plantegen les equacions d'equilibri. Es pot simplificar el problema si les forces aplicades al voladís es redueixen al nus B.



Es tracta d'un cas de 2 graus d'hiperestaticitat. Per solucionar-lo, es plantegen dues equacions addicionals de compatibilitat de deformacions:

$$\delta_{HD} = 0 \quad (9.4.4)$$

$$\delta_{VD} = 0 \quad (9.4.5)$$

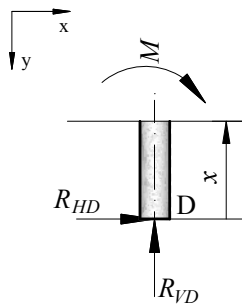
Si es resol el problema pel teorema de Castigliano, es poden calcular aquests desplaçaments amb les equacions següents:

$$\delta_{VD} = \frac{\partial U}{\partial R_{VD}} \quad \delta_{HD} = \frac{\partial U}{\partial R_{HD}}$$

Cal plantejar les equacions de l'energia de deformació en funció de les dues variables escollides.

$$U = f(R_{HD}, R_{VD})$$

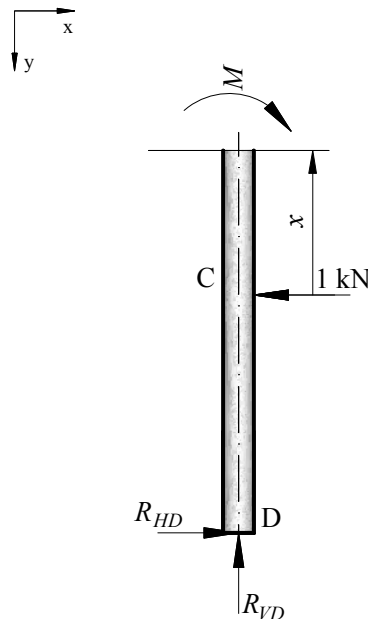
Tram DC: $0 \leq x \leq 2$ m



$$M(x) = R_{HD} \cdot x$$

$$U_{DC} = \int_0^2 \frac{(R_{HD} \cdot x)^2}{2E \cdot I} dx$$

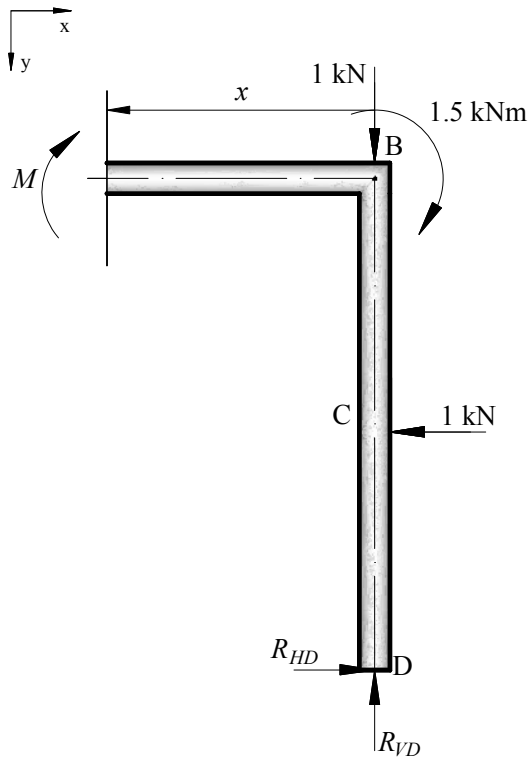
Tram CB: $0 \leq x \leq 2$ m



$$M(x) = R_{HD} \cdot (x + 2) - 1x = 2R_{HD} + R_{HD}x - x$$

$$U_{CB} = \int_0^2 \frac{(2R_{HD} + R_{HD}x - x)^2}{2 \cdot (2E \cdot I)} dx$$

Tram BA: $0 \leq x \leq 3$ m



$$M(x) = 4R_{HD} + R_{HD} \cdot x - 1 \cdot x - 1.5 - 2 = \\ = 4R_{HD} + R_{HD} \cdot x - x - 3.5$$

$$U_{BA} = \int_0^3 \frac{(4R_{HD} + R_{VD}x - x - 3.5)^2 dx}{2 \cdot (2E \cdot I)}$$

$$\delta_{HD} = \frac{\partial U}{\partial R_{HD}} = 0$$

Es poden fer les derivades abans d'integrar:

$$\frac{\partial U}{\partial R_{HD}} = \int_0^2 \frac{2 \cdot (R_{HD} \cdot x) \cdot x dx}{2E \cdot I} + \int_0^2 \frac{2 \cdot (2R_{HD} + R_{HD} \cdot x - x) \cdot (2 + x) dx}{2E \cdot I} + \\ + \int_0^3 \frac{2 \cdot (4R_{HD} + R_{VD}x - x - 3.5) \cdot 4 dx}{4E \cdot I} =$$

$$= \int_0^2 \frac{(R_{HD} \cdot x^2) dx}{E \cdot I} + \int_0^2 \frac{(4R_{HD} + 4R_{HD} \cdot x + R_{HD} \cdot x^2 - 2x - x^2) dx}{E \cdot I} + \\ + \int_0^3 \frac{(8R_{HD} + 2R_{VD} \cdot x - 2x - 7) dx}{E \cdot I} =$$

$$= \frac{R_{HD} \cdot x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{4R_{HD} \cdot x + 2R_{HD} \cdot x^2 + \frac{R_{HD} \cdot x^3}{3} - x^2 - \frac{x^3}{3}}{E \cdot I} \Big|_0^2 + \frac{8R_{HD} \cdot x + R_{VD} \cdot x^2 - x^2 - 7x}{E \cdot I} \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3E \cdot I} \cdot (136R_{HD} + 27R_{VD} - 110)$$

Aplicant la condició de l'equació (9.4.4), queda:

$$136R_{HD} + 27R_{VD} - 110 = 0 \quad (9.4.6)$$

$$\delta_{VD} = \frac{\partial U}{\partial R_{VD}} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_{VD}} &= \int_0^3 \frac{2 \cdot (4R_{HD} + R_{VD} \cdot x - x - 3.5) \cdot x dx}{4E \cdot I} = \int_0^3 \frac{(4R_{HD} \cdot x + R_{VD} \cdot x^2 - x^2 - 3.5x) dx}{2E \cdot I} = \\ &= \frac{2R_{HD} \cdot x^2 + \frac{R_{VD} \cdot x^3}{3} - \frac{x^3}{3} - 1.75x^2}{2E \cdot I} \Bigg|_0^3 = \frac{1}{2E \cdot I} \cdot (18R_{HD} + 9R_{VD} - 24.75) \end{aligned}$$

Aplicant la condició de l'equació (9.4.5), queda:

$$18R_{HD} + 9R_{VD} - 24.75 = 0 \quad (9.4.7)$$

Finalment, es resol el sistema de les cinc equacions plantejades. A partir de (9.4.6) i (9.4.7) es poden trobar R_{VD} i R_{HD} , i la resta, amb (9.4.1), (9.4.2) i (9.4.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{VA} + R_{VD} - 1 = 0 \\ R_{HA} + R_{HD} - 1 = 0 \\ 3R_{VD} + 4R_{HD} - M_A - 6.5 = 0 \\ 136R_{HD} + 27R_{VD} - 110 = 0 \\ 18R_{HD} + 9R_{VD} - 24.75 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{VA} = -0.88 \text{ kN} \\ R_{HA} = 0.56 \text{ kN} \\ M_A = 0.88 \text{ kNm} \\ R_{VD} = 1.88 \text{ kN} \\ R_{HD} = 0.44 \text{ kN} \end{array} \right.$$

Problema 9.5. L'estructura de barres articulades de la Figura 9.5 està sotmesa a dues càrregues puntuals aplicades en els nusos D i E. Determineu el desplaçament vertical del nus B:

a) Aplicant el teorema de Castigliano.

b) Aplicant el mètode de la càrrega unitat.

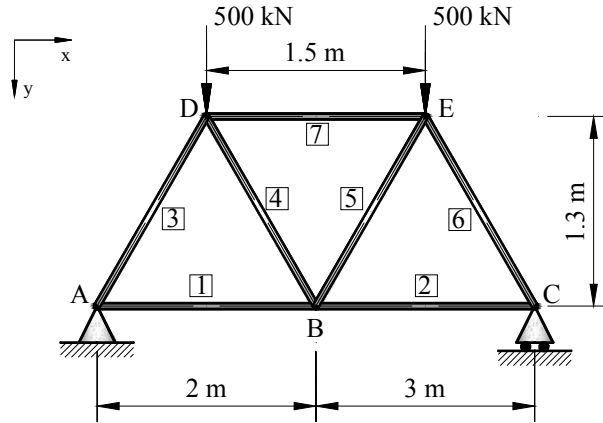


Figura 9.5

Dades:

Longitud de les barres (L_i) = 1.5 m

Mòdul d'elasticitat de les barres (E) = $2 \cdot 10^5$ MPa

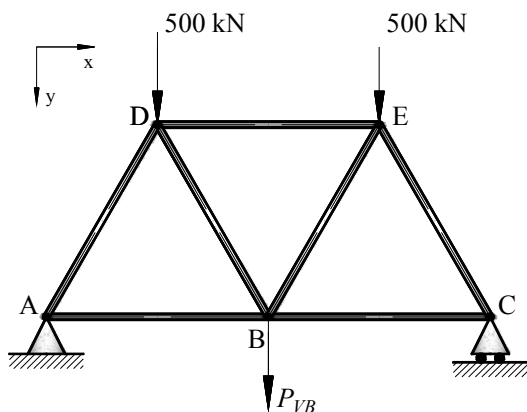
Àrea de les barres 1, 2, 7 (A_1, A_2, A_7) = $2 \cdot 10^3$ mm²

Àrea de les barres 3, 4, 5, 6 (A_3, A_4, A_5, A_6) = $2 \cdot 10^3$ mm²

Per conveniència en aquest exercici les unitats de força seran N i les de longitud m.

a) Aplicant el teorema de Castigliano.

En ser una gelosia de barres articulades pels extrems, aquestes només estaran sotmeses a un esforç axial. L'energia de deformació total serà la suma de la de cada barra.

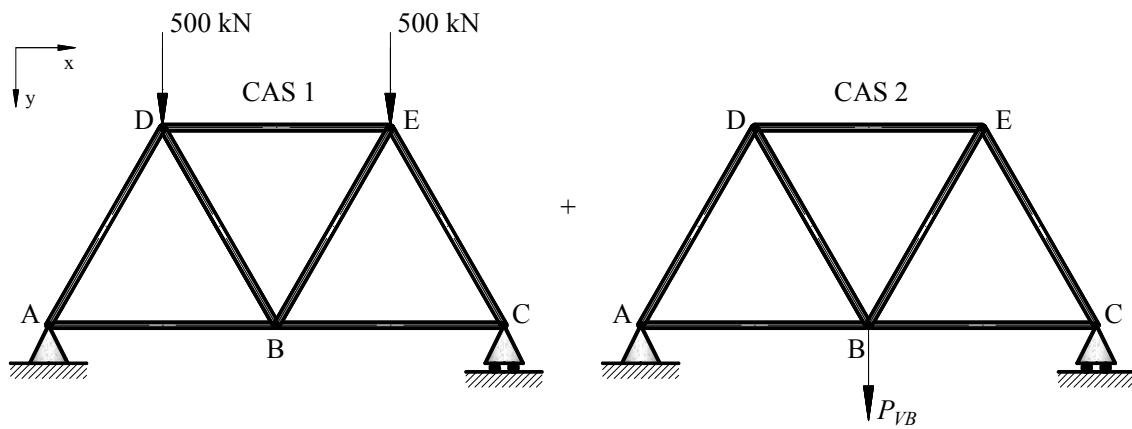


$$U = \sum \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2A_i \cdot E_i} \quad (9.5.1)$$

I per tant:

$$\delta_{VB} = \frac{\partial U}{\partial P_{VB}} = \sum \frac{\partial}{\partial P_{VB}} \left(\frac{N_i^2 \cdot l_i}{2A_i \cdot E_i} \right) = \sum \frac{2N_i \cdot l_i}{2A_i \cdot E_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial P_{VB}} = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial P_{VB}} \quad (9.5.2)$$

Cal trobar els esforços a cada barra en funció de P_{VB} . Una manera còmoda de fer-ho és aplicar el principi de superposició als casos següents:



Es poden confeccionar les taules següents i fent el sumatori de la columna final s'obté el valor de δ_{VB} (el valor de $P_{VB} = 0$ (*) s'ha de substituir a la penúltima columna, un cop ja feta la derivada):

Barra (i)	N_{i1} (N)	N_{i2} (N)	$N_i = N_{i1} + N_{i2}$ (N)	l_i (m)	$E_i \cdot A_i$ (N)	$\frac{\partial N_i}{\partial P_{VB}}$	$\frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i}$ (m)(*)	$\frac{\partial N_i}{\partial P_{VB}} \cdot \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i}$ (m)
1	2.89E+05	$0.29 \cdot P_{VB}$	$2.89E+05 + 0.29 \cdot P_{VB}$	1.5	4E+08	0.29	1.08E-03	3.12E-04
2	2.89E+05	$0.29 \cdot P_{VB}$	$2.89E+05 + 0.29 \cdot P_{VB}$	1.5	4E+08	0.29	1.08E-03	3.12E-04
3	$-5.77E+05$	$-0.58 \cdot P_{VB}$	$-5.77E+05 - 0.58 \cdot P_{VB}$	1.5	1E+09	-0.58	-8.66E-04	5E-04
4	0	$0.58 \cdot P_{VB}$	$0.58 \cdot P_{VB}$	1.5	1E+09	0.58	0	0
5	0	$0.58 \cdot P_{VB}$	$0.58 \cdot P_{VB}$	1.5	1E+09	0.58	0	0
6	$-5.77E+05$	$-0.58 \cdot P_{VB}$	$-5.77E+05 - 0.58 \cdot P_{VB}$	1.5	1E+09	-0.58	-8.66E-04	5E-04
7	$-2.89E+05$	$-0.58 \cdot P_{VB}$	$-2.89E+05 - 0.58 \cdot P_{VB}$	1.5	4E+08	-0.58	-1.08E-03	6.25E-04

$$\Sigma = 2.25E-03m$$

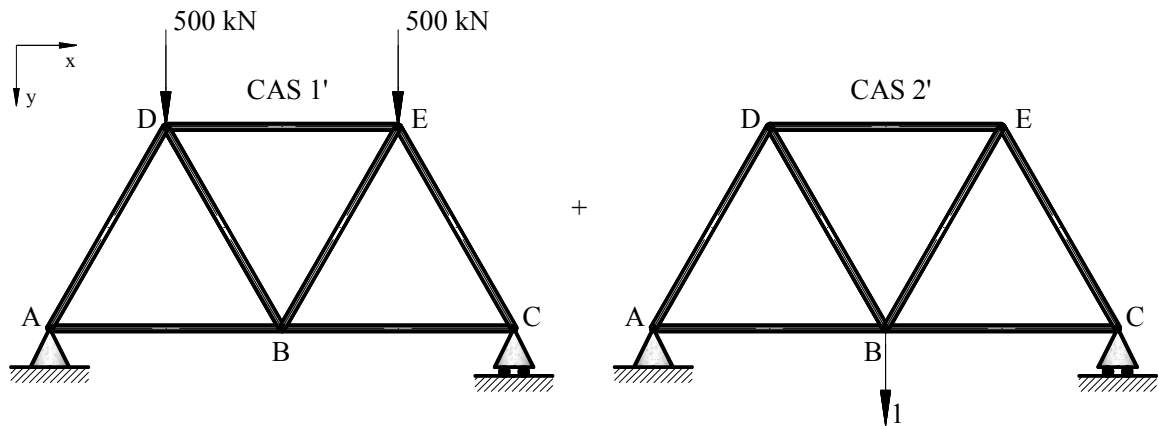
El desplaçament vertical en el nus B és de 2.25mm.

b) Aplicant el mètode de la càrrega unitat.

De l'apartat anterior es pot observar que els valors de la columna $\frac{\partial N_i}{\partial P_{VB}}$ es corresponen als esforços que hi hauria a les barres si s'apliqués una càrrega unitària al nus on es vol calcular el desplaçament. Amb el mètode de la càrrega unitat el desplaçament s'expressa:

$$\delta_{VB} = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i} \cdot N_{iu} \quad (9.5.3)$$

$\frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i}$ es calcula amb els valors dels esforços a cada barra corresponents al cas 1' i N_{iu} són els esforços a cada barra en el cas 2' amb una càrrega unitària aplicada al nus on es vol calcular el desplaçament.



Fent una nova taula i aplicant l'equació (9.5.3) es pot veure que el resultat és el mateix que a l'apartat a).

10. Vinclament

Problema 10.1. La columna d'acer de la Figura 10.1 està formada per un perfil tubular rectangular de 150·120·8. Està encastada a la base i lliure a l'altre extrem, en el qual s'aplica una càrrega P de compressió. Determineu:

- La tensió crítica d'Euler.
- La càrrega crítica d'Euler.
- La càrrega admissible.

Dades:

Longitud de la columna d'acer (L) = $3 \cdot 10^3$ mm

Àrea del perfil de la columna (A) = $3.84 \cdot 10^3$ mm².

Moment d'inèrcia respecte a l'eix z (I_z) = $117 \cdot 10^6$ mm⁴

Moment d'inèrcia respecte a l'eix x (I_x) = $827 \cdot 10^4$ mm⁴

Radi de gir (i_z) = 55.2 mm

Radi de gir (i_x) = 46.4 mm

Acer S275:

- Tensió associada al límit de fluència (σ_y) = 275 N/mm²

- Mòdul d'elasticitat del material (E) = $21 \cdot 10^4$ MPa.

Coefficient de seguretat (n) = 2

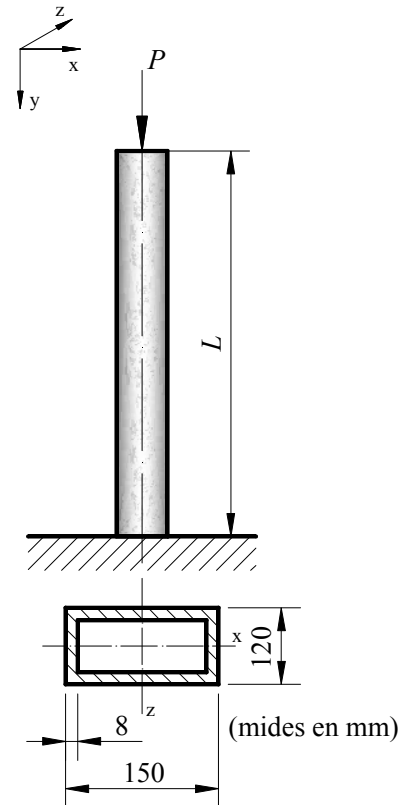


Figura 10.1

- La tensió crítica d'Euler.

La longitud de vinclament de la columna encastada – lliure és:

$$L_o = 2L = 2 \cdot 3 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

L'esveltesa màxima correspondrà al vinclament en un pla perpendicular a l'eix x (radi de gir mínim).

$$\lambda_x = \frac{L_o}{i_x} = \frac{6 \cdot 10^3}{46.4} = 129$$

La tensió crítica d'Euler és:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_x^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4}{129^2} = 124 \text{ N/mm}^2$$

b) La càrrega crítica d'Euler.

La càrrega crítica d'Euler és:

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 124 \cdot 3.84 \cdot 10^3 = 476 \cdot 10^3 \text{ N}$$

c) Càrrega admissible.

La càrrega admissible és:

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{n} = \frac{476 \cdot 10^3}{2} = 238 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Problema 10.2. La columna d'acer de la Figura 10.2 està formada per un perfil rectangular de 150·120·8. Està articulada pels extrems i travada en el punt mig, de manera que s'impedeix el moviment en el pla perpendicular a l'eix x , però no en l'altra direcció. Determineu:

- La tensió crítica d'Euler.
- La càrrega crítica d'Euler.
- La càrrega admissible.

Dades:

Longitud de la columna d'acer (L) = $7 \cdot 10^3$ mm

Àrea del perfil de la columna (A) = $3.84 \cdot 10^3$ mm²

Moment d'inèrcia respecte l'eix z (I_z) = $117 \cdot 10^5$ mm⁴

Moment d'inèrcia respecte l'eix x (I_x) = $827 \cdot 10^4$ mm⁴

Radi de gir (i_z) = 55.2 mm

Radi de gir (i_x) = 46.4 mm

Acer S275:

- Tensió associada al límit de fluència (σ_y) = 275 N/mm²

- Mòdul d'elasticitat del material (E) = $21 \cdot 10^4$ MPa

Coefficient de seguretat (n) = 2

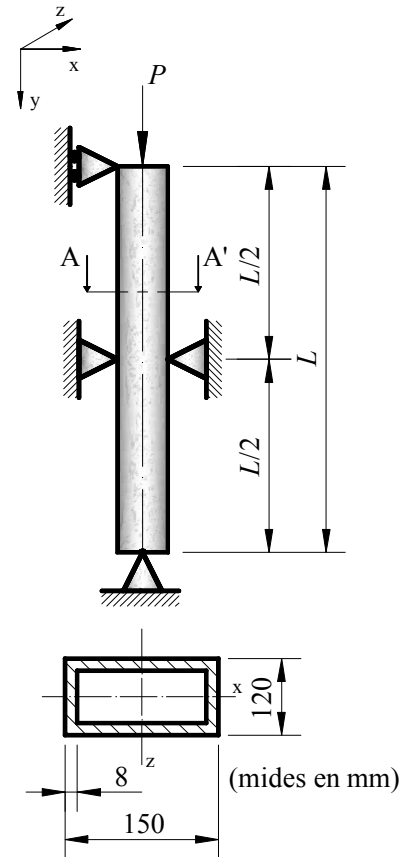


Figura 10.2

a) La tensió crítica d'Euler.

La longitud de vinclament en el pla perpendicular a l'eix z és:

$$L_{oz} = L = 7 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

La longitud de vinclament en el pla perpendicular a l'eix x és:

$$L_{ox} = \frac{L}{2} = 3.5 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

L'esveltesa en el pla perpendicular a l'eix z és:

$$\lambda_z = \frac{L_{oz}}{i_z} = \frac{7 \cdot 10^3}{55.2} = 127$$

L'esveltesa en el pla perpendicular a l'eix x és:

$$\lambda_x = \frac{L_{ox}}{i_x} = \frac{3.5 \cdot 10^3}{46.4} = 75.4$$

Per calcular la tensió crítica d'Euler s'ha de considerar l'esveltesa màxima. Com que $\lambda_x < \lambda_z$, l'esveltesa màxima és en el pla perpendicular a l'eix x.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_z^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4}{127^2} = 129 \text{ N/mm}^2$$

b) La càrrega crítica d'Euler.

La càrrega crítica d'Euler és:

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 129 \cdot 3.84 \cdot 10^3 = 495 \cdot 10^3 \text{ N}$$

c) La càrrega admissible.

La càrrega admissible és:

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{n} = \frac{495 \cdot 10^3}{2} = 248 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Problema 10.3. L'element d'acer de la Figura 10.3 de secció tubular està sotmès a dues càrregues de compressió, una centrada i l'altra excèntrica. Està encastada a la base i lliure per l'extrem superior. Emprant l'equació de la secant per al vinclament, determineu:

- La tensió màxima de compressió.
- El desplaçament transversal a l'extrem lliure.

Dades:

Longitud de la columna d'acer (L) = 2.5 m
 Diàmetre exterior de la secció (\varnothing_{ext}) = 120 mm
 Diàmetre interior de la secció (\varnothing_{int}) = 100 mm
 Càrrega 1 aplicada (P_1) = 50 kN
 Excentricitat de la càrrega 1 (e_1) = 0 mm
 Càrrega 2 aplicada (P_2) = 40 kN
 Excentricitat de la càrrega 2 (e_2) = 150 mm
 Mòdul d'elasticitat del material (E) = $21 \cdot 10^4$ MPa

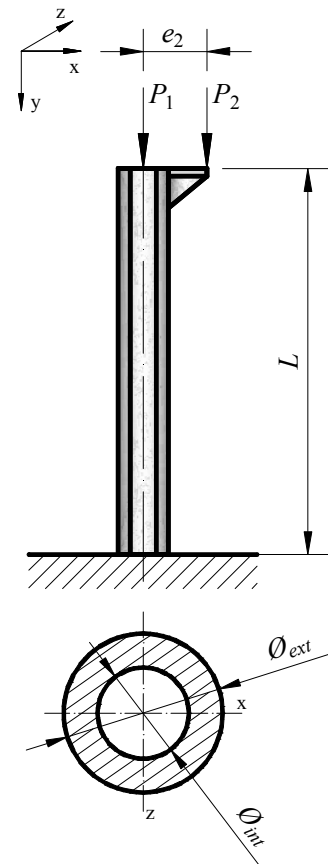


Figura 10.3

a) La tensió màxima de compressió.

La tensió màxima, emprant l'equació de la secant per a peces esveltes sotmeses a càrregues de compressió, s'expressa així:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{e \cdot c}{i^2} \cdot \sec \left(\frac{L_o}{2i} \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot A}} \right) \right)$$

on P , és la suma de totes les càrregues aplicades; A , l'àrea de la secció de l'element d'acer; e , l'excentricitat de la resultant de les càrregues aplicades; c , la distància de la línia neutra a la fibra de màxima tensió; i , el radi de curvatura i L_o , la longitud de vinclament.

Les característiques de la secció escollida són:

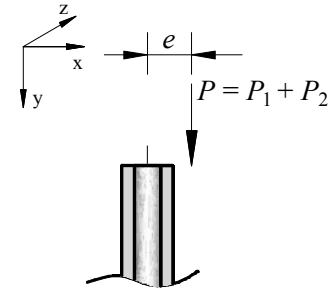
$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (\varnothing_{ext}^4 - \varnothing_{int}^4) = \frac{\pi}{64} \cdot (120^4 - 100^4) = 527 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot (\varnothing_{ext}^2 - \varnothing_{int}^2) = \frac{\pi}{4} \cdot (120^2 - 100^2) = 3.46 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{5270 \cdot 10^3}{3455.75}} = 39.1 \text{ mm}$$

L'excentricitat de la resultant de les càrregues aplicades és:

$$e = \frac{P_1 \cdot e_1 + P_2 \cdot e_2}{P_1 + P_2} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0 + 40 \cdot 10^3 \cdot 150}{90 \cdot 10^3} = 66.7 \text{ mm}$$



La longitud de vinclament és:

$$L_o = 2L = 2 \cdot 2.5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

Substituint,

$$\sigma_{max} = \frac{90 \cdot 10^3}{3.46 \cdot 10^3} \left(1 + \frac{66.7 \cdot 60}{39.1^2} \cdot \sec \left(\frac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot 39.1} \cdot \sqrt{\frac{90 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 3.46 \cdot 10^3}} \right) \right) = 116 \text{ N/mm}^2$$

b) El desplaçament transversal a l'extrem lliure.

El desplaçament transversal a l'extrem lliure es calcula amb l'equació següent:

$$\Delta_{max} = e \cdot \left(\sec \left(\frac{L_o}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} \right) - 1 \right)$$

I, en aquest cas, el valor del desplaçament transversal és:

$$\Delta_{max} = 66.7 \cdot \left(\sec \left(\frac{5 \cdot 10^3}{2} \cdot \sqrt{\frac{90 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 527 \cdot 10^4}} \right) - 1 \right) = 21.5 \text{ mm}$$

Problema 10.4. Calculeu la càrrega admissible de compressió per a l'element d'acer de la Figura 10.4, de secció circular, amb els extrems articulats per als dos casos:

- a) $L = 2 \text{ m}$.
b) $L = 1.5 \text{ m}$.

Dades:

Diàmetre de la secció circular (d) = 70 mm

Acer S355:

- Tensió associada al límit de fluència (σ_y) = 355 N/mm²

- Mòdul d'elasticitat del material (E) = 21·10⁴ MPa

Coefficient de seguretat (n) = 3

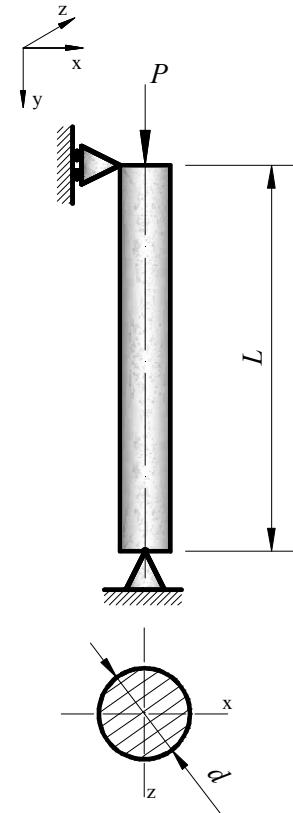


Figura 10.4

Considerem que el seu comportament obeeix les equacions (10.5.1) i (10.5.2):

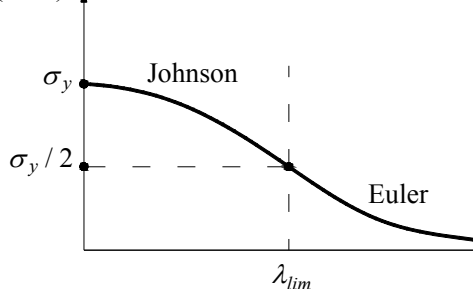
Equació d'Euler:	$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$	per a $\lambda > \lambda_{lim}$	(10.5.1)
Paràbola de Johnson:	$\sigma_{cr} = \sigma_y - \left(\frac{\sigma_y}{2\pi} \cdot \lambda \right)^2 \cdot \frac{1}{E}$	per a $\lambda < \lambda_{lim}$	(10.5.2)

En aquestes equacions, λ_{lim} és la corresponent a $\sigma_{cr} = \frac{\sigma_y}{2}$.

- a) $L = 2 \text{ m}$.

La gràfica que defineix el comportament de la peça comprimida és:

σ_{cr} (MPa)



El valor de λ_{lim} es pot trobar amb l'equació d'Euler per a $\sigma_{cr} = \frac{\sigma_y}{2}$:

$$\frac{\sigma_y}{2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{lim}^2} \Rightarrow \lambda_{lim} = 108$$

La longitud de vinclament és:

$$L_o = L = 2 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

El radi de gir és:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = \frac{70}{4} = 17.5 \text{ mm}$$

I l'esveltesa:

$$\lambda = \frac{L_o}{i} = \frac{2 \cdot 10^3}{17.5} = 114 > \lambda_{lim}$$

Com que $\lambda > \lambda_{lim}$, la tensió crítica es calcula amb l'equació d'Euler:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4}{114^2} = 159 \text{ N/mm}^2$$

La càrrega admissible és:

$$P_{adm} = \frac{\sigma_{cr} \cdot A}{n} = \frac{159 \cdot \frac{\pi \cdot 70^2}{4}}{3} = 204 \cdot 10^3 \text{ N}$$

b) $L = 1.5 \text{ m}$.

La longitud de vinclament és $L_o = L = 1.5 \cdot 10^3 \text{ mm}$

i l'esveltesa, $\lambda = \frac{L_o}{i} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{17.5} = 85.7 < \lambda_{lim}$

Com que $\lambda < \lambda_{lim}$, la tensió crítica es calcula amb l'equació de la paràbola de Johnson:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \left(\frac{\sigma_y}{2\pi} \cdot \lambda \right)^2 \cdot \frac{1}{E} = 355 - \left(\frac{355}{2\pi} \cdot 85.7 \right)^2 \cdot \frac{1}{21 \cdot 10^4} = 243 \text{ N/mm}^2$$

La càrrega admissible és:

$$P_{adm} = \frac{\sigma_{cr} \cdot A}{n} = \frac{243 \cdot \frac{\pi \cdot 70^2}{4}}{3} = 312 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Problema 10.5. Calculeu la càrrega de vinclament de la columna de la Figura 10.5 utilitzant el mètode d'Euler. Determineu la tensió que suporta cada material un cop s'assoleixi la càrrega crítica.

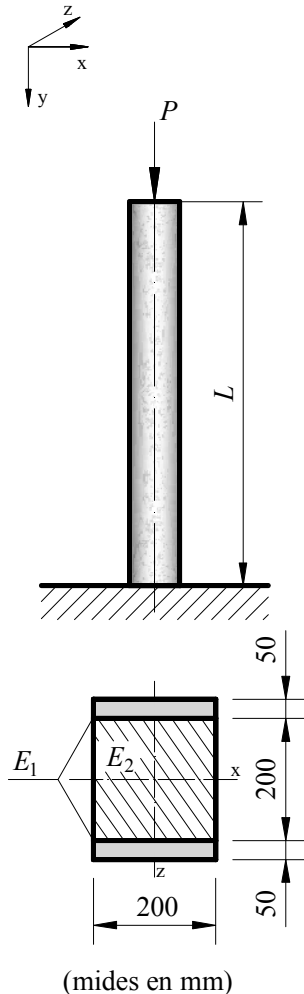


Figura 10.5

Dades:

Longitud de la columna (L) = 5 m

Mòdul d'elasticitat del material 1 (E_1) = $2 \cdot 10^5$ MPa

Mòdul d'elasticitat del material 2 (E_2) = $1 \cdot 10^4$ MPa

La càrrega crítica d'Euler s'expressa de la manera següent:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_p^2}$$

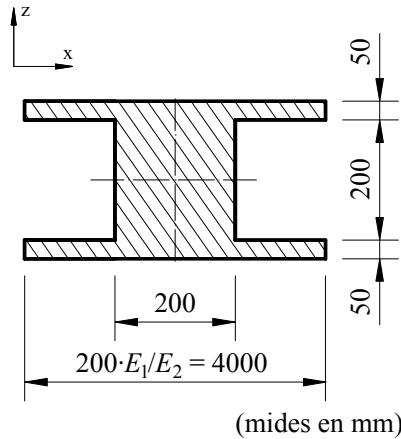
I la longitud de vinclament és:

$$L_o = \beta \cdot L, \text{ on } \beta = 2 \text{ (columna encastada - lliure).}$$

$$L_o = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}$$

Com que en la secció de la columna existeixen dos materials diferents, es calcula una secció equivalent per a cada un dels plans de vinclament:

Vinclament en el pla perpendicular a l'eix x: la secció gira respecte a l'eix x.

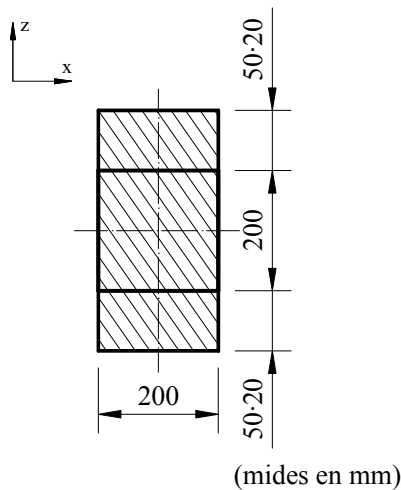


$$h_{eq} = 200n = 4 \cdot 10^3 \text{ mm} \quad \text{on } n = \frac{E_1}{E_2} = 20$$

$$I_{xx} = \sum \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 = \frac{1}{12} \cdot (4 \cdot 10^3 \cdot 300^3 - 3.8 \cdot 10^3 \cdot 200^3) = 6.47 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$P_{cr_{xx}} = \frac{\pi^2 \cdot E_2 \cdot I_{xx}}{L_o^2} = \frac{\pi^2 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 6.47 \cdot 10^9}{(1 \cdot 10^4)^2} = 639 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Vinclament en el pla perpendicular a l'eix z: la secció gira respecte a l'eix z.



$$b_{eq} = 50n = 100 \text{ mm} \quad \text{on } n = \frac{E_1}{E_2} = 20$$

$$I_{zz} = \sum \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot ((2 \cdot 50 \cdot 20 + 200) \cdot 200^3) = 1.47 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$P_{cr_{zz}} = \frac{\pi^2 \cdot E_2 \cdot I_{zz}}{L_o^2} = \frac{\pi^2 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1.47 \cdot 10^9}{(1 \cdot 10^4)^2} = 145 \cdot 10^4 \text{ N}$$

La càrrega de vinclament és $145 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Per a aquesta càrrega, les tensions són:

Material 1:

$$\sigma_{cr}^{(1)} = \frac{P_{cr}}{A^{(1)}} = \frac{145 \cdot 10^4}{(2 \cdot 50 \cdot 20 + 200) \cdot 200} = 3.3 \text{ MPa}$$

Material 2:

$$\sigma_{cr}^{(2)} = \sigma_{cr}^{(1)} \frac{E_1}{E_2} = 3.3 \cdot 20 = 65.9 \text{ MPa}$$

Problema 10.6. Calculeu la càrrega màxima, F , que es pot aplicar a l'estructura de barres articulades de la Figura 10.6 per tal que cap barra es vincli. Totes les barres són tubs de secció circular.

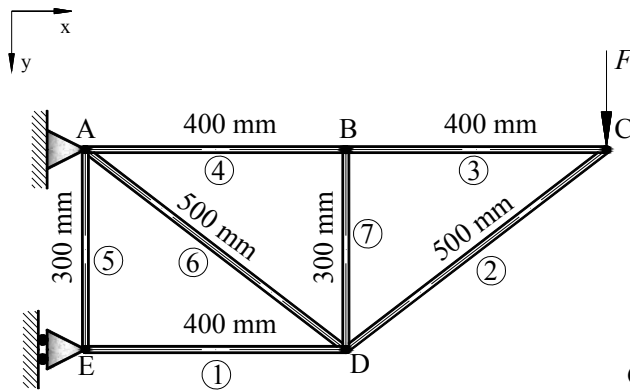


Figura 10.6

Dades:

Diàmetre de la secció circular (d) = 40 mm

Gruix de la paret dels tubs circulars (e) = 2 mm

Mòdul d'elasticitat del material (E) = $21 \cdot 10^4$ MPa

La Figura 10.6.1 indica, amb el signe negatiu (-), les barres que estan comprimides, amb el positiu (+) les que estan traccionades, i amb (x) les que no estan sotmeses a cap esforç.

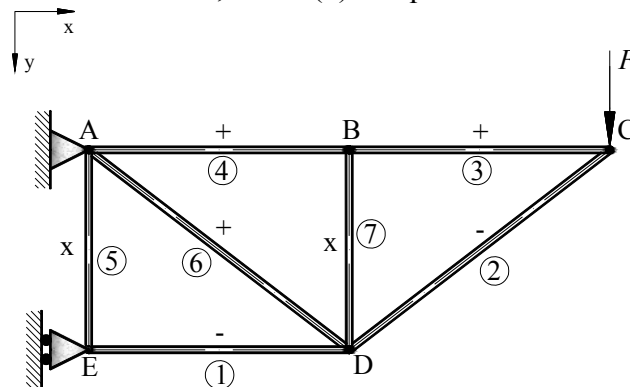


Figura 10.6.1

Les barres comprimides són (1) i (2):

$$N_1 = -\frac{8}{3}F$$

$$N_2 = -\frac{5}{3}F$$

Es calcula la càrrega crítica a cadascuna i es mira quina barra causarà la càrrega màxima, F :

- **Barra 1:** Aquesta barra està sotmesa a compressió i la seva longitud és de 400 mm.

$$\text{La càrrega crítica és } P_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_o^2}.$$

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot (\varnothing_{ext}^4 - \varnothing_{int}^4), \text{ on } \varnothing_{ext} \text{ és el radi exterior i } \varnothing_{int}, \text{ el radi interior.}$$

Per tant, la càrrega $F^{(1)}$ per tal que falli la barra 1 és:

$$F^{(1)} = \frac{3}{8} \cdot P_{cr}^{(1)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \cdot 43.2 \cdot 10^3}{400^2} = 210 \text{ kN}$$

- **Barra 2:** Aquesta barra també està sotmesa a compressió, però la seva longitud és de 500 mm.

$$\text{La càrrega crítica és } P_{cr}^{(2)} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_o^2}.$$

Per tant, la càrrega $F^{(2)}$ per tal que falli la barra 2 és:

$$F^{(2)} = \frac{3}{5} \cdot P_{cr}^{(2)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \cdot 43.2 \cdot 10^3}{500^2} = 215 \text{ kN}$$

Observant els dos resultats, la càrrega màxima F que es pot aplicar a l'estructura de barres articulades per tal que cap barra es vincli és de 210 kN.

