



QUADERN D'EXERCICIS DE: MÈTODES NUMÈRICS

Alumne:

ANGEL CASELLAS GIBERT

23 d'agost de 2012

Índex

1	Aproximació i error	5
1.1	Exercici 1	5
1.2	Exercici 2	5
1.3	Exercici 3	5
1.4	Exercici 4	6
1.5	Exercici 5	6
1.6	Exercici 6	6
1.7	Exercici 7	7
1.8	Exercici 8	7
1.9	Exercici 9	7
2	Sistemes Lineals	9
2.1	Exercici 1	9
2.2	Exercici 2	9
2.3	Exercici 3	10
2.4	Exercici 4	10
2.5	Exercici 5	11
2.6	Exercici 6	12
2.7	Exercici 7	12
2.8	Exercici 8	13
3	Zeros de Funcions	15
3.1	Exercici 1	15
3.2	Exercici 2	15
3.3	Exercici 3	16
3.4	Exercici 4	16
3.5	Exercici 5	16
3.6	Exercici 6	17
3.7	Exercici 7	17
3.8	Exercici 8	17

4	Integració Numèrica	19
4.1	Exercici 1	19
4.2	Exercici 2	19
4.3	Exercici 3	20
4.4	Exercici 4	20
4.5	Exercici 5	21
4.6	Exercici 6	21
A	Dates límit	23

Aproximació i error

1.1 Exercici 1

Converteix els següents números enters amb signe: -37 , 24 a binari i expressa'ls en forma de complement a 2 suposant un sistema de representació de 10 dígit. Escriu els resultats separats per comes.

EXEMPLE: 1010101,0101001

Solució:

1111011011,0000011000

1.2 Exercici 2

Converteix els següents números enters expressats en format de complement a 2: 11010000 , 01001000 a decimal. Escriu els resultats separats per comes.

Solució:

-48,72

1.3 Exercici 3

Converteix els següents números enters amb signe: -45 , 30 a binari i expressa'ls en excés a 127. Escriu els resultats separats per comes. EXEMPLE: 1010101,0101001

Solució:

01010010,10011101

1.4 Exercici 4

Converteix a binari els números següents: 0.53125 ,0.24 . Escriu els resultats separats per coma de la forma següent:

- Si el número té una expressió finita com per exemple 0.011 escriu tot el número.
- Si el número té una part periòdica com per exemple 0.1100100100... escriu-el de la forma següent: 0.1_100_ (separant la part periòdica amb _ _)

EXEMPLE: 0.011,0.1_100_

Solució:

0.10001,0._00111101011100001010_

1.5 Exercici 5

Converteix a binari els números següents: 2.5625, 2.65 . Escriu els resultats separats per coma de la forma següent:

- Si el número té una expressió finita com per exemple 10.011 escriu tot el número.
- Si el número té una part periòdica com per exemple 10.1100100100... escriu-el de la forma següent: 10.1_100_ (separant la part periòdica amb _ _)

EXEMPLE: 10.011,10.1_100_

Solució:

10.1001,10.10100_1100_

1.6 Exercici 6

Quina es la representació en precissió simple (IEEE 754) del número: 1.51236 Escriu la solució de la forma: **Signe Exponent Mantissa**

EXEMPLE: 1 01110000 1010111100000000100100 (1 bit 8 bits 23 bits)

Solució:

0 01111111 10000011001010100000011

1.7 Exercici 7

Quina es la representació en precisió simple (IEEE 754) del número: 0.792325 Escriu la solució de la forma: **Signe Exponent Mantissa**

EXAMPLE: 1 01110000 10101111000000000100100 (1 bit 8 bits 23 bits)

Solució:

0 01111110 10010101101010111001111

1.8 Exercici 8

Quin és el valor decimal de el número "0 10000100 00011011110111101011100" escrit en precisió simple seguint l'estàndard IEEE 754? Escriu el resultat amb un mínim de nou xifres significatives.

Solució:

35.48374938964844

1.9 Exercici 9

Quin és el valor decimal de el número "0 01111100 00010101111110011001100" escrit en precisió simple seguint l'estàndard IEEE 754? Escriu el resultat amb un mínim de nou xifres significatives.

Solució:

0.13572996854782104

Sistemes Lineals

2.1 Exercici 1

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de Gauss amb pivotatge i escalat

$$\begin{cases} -x + 5y + 3z = 2 \\ 7x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 5z = 5 \end{cases}$$

Escriu la matriu ampliada del sistema un cop triangularitzada a les columnes A B C D i la solució a la columna E, amb un mínim de 6 xifres significatives

A	B	C	D	E
Matriu	Ampliada	del Sistema		Solució
7.00000	8.00000	0	5.00000	-2.33333
0	0.857142	3.00000	2.28571	2.66666
0	0	4.50000	-0.00000	-0.00000

2.2 Exercici 2

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de Gauss amb pivotatge i escalat

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 4 \\ 7x + 4y + 2z = 7 \\ x - 2y + 6z = 4 \end{cases}$$

Escriu la matriu ampliada del sistema un cop triangularitzada a les columnes A B C D i la solució a la columna E, amb un mínim de 6 xifres significatives

A	B	C	D	E
Matriu	Ampliada	del Sistema		Solució
7.00000	8.00000	0	5.00000	-2.33333
0	0.857142	3.00000	2.28571	2.66666
0	0	4.50000	-0.00000	-0.00000

2.3 Exercici 3

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de Jacobi

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 4 \\ 7x - y - 4z = 4 \\ 3x - y + 5z = 5 \end{cases}$$

Escriu el primer iterat i la solució final amb un error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} , fent servir la norma infinit. Excriu les respostes amb un mínim de 6 xifres significatives. Exemple: Suposem que hem aplicat el mètode de Jacobi a un sistema i que el resultat és

	x	y	z
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.248915	2.564789	3.265874
2	1.324589	2.568947	3.298647
3	1.358947	2.569921	3.282589
4	1.356232	2.569241	3.283784
5	1.357953	2.569353	3.284549
...
n	1.357847	2.569321	3.284589

has d'escriure $\{ 1.248915, 2.564789, 3.265874 \}$, $\{ 1.357847, 2.569321, 3.284589 \}$

Solució:

$\{ 0.571428, 0.800000, 1.000000 \}$, $\{ 0.879255, 0.147137, 0.501854 \}$

2.4 Exercici 4

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de Jacobi

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 4 \\ 7x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 5z = 5 \end{cases}$$

Escriu el primer iterat i la solució final amb un error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} , fent servir la norma infinit. Excriu les respostes amb un mínim de 6 xifres significatives. Exemple: Suposem que hem aplicat el mètode de Jacobi a un sistema i que el resultat és

	x	y	z
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.248915	2.564789	3.265874
2	1.324589	2.568947	3.298647
3	1.358947	2.569921	3.282589
4	1.356232	2.569241	3.283784
5	1.357953	2.569353	3.284549
...
n	1.357847	2.569321	3.284589

has d'escriure $\{ 1.248915, 2.564789, 3.265874 \}, \{ 1.357847, 2.569321, 3.284589 \}$

Solució:

$\{0.285714, 0.800000, 1.000000\}, \{0.333355, 0.166681, 0.833298\}$

2.5 Exercici 5

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} -2x + 6y + 3z = 7 \\ 7x - y - 4z = 4 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

Escriu el primer iterat i la solució final amb un error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} , fent servir la norma infinit. Excriu les respostes amb un mínim de 6 xifres significatives. Exemple: Suposem que hem aplicat el mètode de Gauss-Seidel a un sistema i que el resultat és

	x	y	z
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.248915	2.564789	3.265874
2	1.324589	2.568947	3.298647
3	1.358947	2.569921	3.282589
4	1.356232	2.569241	3.283784
5	1.357953	2.569353	3.284549
...
n	1.357847	2.569321	3.284589

has d'escriure $\{ 1.248915, 2.564789, 3.265874 \}, \{ 1.357847, 2.569321, 3.284589 \}$

Solució:

$\{0.571428, 1.357142, 0.803571\}, \{1.055834, 1.251154, 0.534871\}$

2.6 Exercici 6

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 5 \\ 7x + 3y - z = 2 \\ x - y + 6z = 4 \end{cases}$$

Escriu el primer iterat i la solució final amb un error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} , fent servir la norma infinit. Excriu les respostes amb un mínim de 6 xifres significatives. Exemple: Suposem que hem aplicat el mètode de Gauss-Seidel a un sistema i que el resultat és

	x	y	z
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.248915	2.564789	3.265874
2	1.324589	2.568947	3.298647
3	1.358947	2.569921	3.282589
4	1.356232	2.569241	3.283784
5	1.357953	2.569353	3.284549
...
n	1.357847	2.569321	3.284589

has d'escriure $\{ 1.248915, 2.564789, 3.265874 \}$, $\{ 1.357847, 2.569321, 3.284589 \}$

Solució:

$\{ 0.285714, 0.828571, 0.757142 \}$, $\{ 0.051721, 0.810343, 0.793103 \}$

2.7 Exercici 7

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de SOR amb $\omega = 0.8$

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 5 \\ 7x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

Escriu el primer iterat i la solució final amb un error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} , fent servir la norma infinit. Excriu les respostes amb un mínim de 6 xifres significatives. Exemple: Suposem que hem aplicat el mètode de SOR a un sistema i que el resultat és

	x	y	z
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.248915	2.564789	3.265874
2	1.324589	2.568947	3.298647
3	1.358947	2.569921	3.282589
4	1.356232	2.569241	3.283784
5	1.357953	2.569353	3.284549
...
n	1.357847	2.569321	3.284589

has d'escriure $\{ 1.248915, 2.564789, 3.265874 \}, \{ 1.357847, 2.569321, 3.284589 \}$

Solució:

$\{0.228571, 0.690285, 0.646628\}, \{0.084622, 0.769220, 0.899999\}$

2.8 Exercici 8

Resol el següent sistema d'equacions lineals fent servir el mètode de SOR amb $\omega = 0.8$

$$\begin{cases} -x + 5y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 2z = 7 \\ x - 2y + 6z = 4 \end{cases}$$

Escriu el primer iterat i la solució final amb un error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} , fent servir la norma infinit. Excriu les respostes amb un mínim de 6 xifres significatives. Exemple: Suposem que hem aplicat el mètode de SOR a un sistema i que el resultat és

	x	y	z
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.248915	2.564789	3.265874
2	1.324589	2.568947	3.298647
3	1.358947	2.569921	3.282589
4	1.356232	2.569241	3.283784
5	1.357953	2.569353	3.284549
...
n	1.357847	2.569321	3.284589

has d'escriure $\{ 1.248915, 2.564789, 3.265874 \}, \{ 1.357847, 2.569321, 3.284589 \}$

Solució:

$\{0.800000, 0.448000, 0.546133\}, \{0.723378, 0.180855, 0.606388\}$

Zeros de Funcions

3.1 Exercici 1

L'equació $x^2 - 2 = \sin(x/4)$ té almenys una arrel positiva. Localitza l'arrel positiva més petita donant un interval obert que, amb tota seguretat, la contingui. Escriu els extrems de l'interval entre claus de la forma $\{a, b\}$. Per calcular l'arrel localitzada es vol fer servir el mètode de la bisecció. Dóna l'interval inicial (a, b) i els dos primers intervals (a_1, b_1) , (a_2, b_2) que s'obtenen a l'aplicar el mètode de la bisecció. Fes els càlculs amb un mínim de 6 xifres decimals. Introdueix els interval separats per comes en l'ordre següent: $\{a, b\}, \{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}$. Dóna el valor de l'arrel positiva més petita de l'equació inicial amb un error absolut menor que 10^{-4} i l'últim interval calculat. Escriu la resposta de la forma següent: $x, \{a_n, b_n\}$ amb un mínim de 6 xifres significatives.

Solucions:

$\{0, 2\}$

$\{0.000000, 2.000000\}, \{1.000000, 2.000000\}, \{1.500000, 2.000000\}$

$1.541442, \{1.541381, 1.541503\}$

3.2 Exercici 2

L'equació $2x - 2 = \cos(x)$ té almenys una arrel positiva. Localitza l'arrel positiva més petita donant un interval obert que, amb tota seguretat, la contingui. Escriu els extrems de l'interval entre claus de la forma $\{a, b\}$. Per calcular l'arrel localitzada es vol fer servir el mètode de la bisecció. Dóna l'interval inicial (a, b) i els dos primers intervals (a_1, b_1) , (a_2, b_2) que s'obtenen a l'aplicar el mètode de la bisecció. Fes els càlculs amb un mínim de 6 xifres decimals. Introdueix els interval separats per comes en l'ordre següent: $\{a, b\}, \{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}$. Dóna el valor de l'arrel positiva més petita de l'equació inicial amb un error absolut menor que 10^{-4} i l'últim interval calculat. Escriu la resposta de la forma següent: $x, \{a_n, b_n\}$ amb un mínim de 6 xifres significatives.

Solucions:

$\{0, 4\}$

$\{0.000000, 4.000000\}, \{0.000000, 2.000000\}, \{1.000000, 2.000000\}$

$1.187194, \{1.187133, 1.187255\}$

3.3 Exercici 3

Localitza l'única solució de l'equació $x^5 + 4.2x^4 + 7.4x^3 + 8.6x^2 + 5.4x + 2.2 = 0$ (dóna una interval que la contingui) i calcula-la fent servir el mètode de Newton amb una error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} . Escriu l'interval entre claus i la solució a continuació. Per exemple si l'interval que conté la solució és el $(1, 2)$ i la solució és 1.789432 has d'escriure $\{1, 2\}, 1.789432$.

Solució:

$\{-10, 10\}, -2.200000$

3.4 Exercici 4

L'equació següent té una única solució. Primer localitza-la (dóna una interval que la contingui) i calcula-la fent servir el mètode de Newton amb una error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} .

$$x^5 + \frac{16}{3}x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 3x - 6 = 0$$

Escriu l'interval entre claus i la solució a continuació. Per exemple si l'interval que conté la solució és el $(1, 2)$ i la solució és 1.789432 has d'escriure $\{1, 2\}, 1.789432$.

Solució:

$\{-10, 10\}, 0.666666$

3.5 Exercici 5

L'equació $e^{x-2} = 2 - x - x^2$ té almenys una arrel positiva. Localitza l'arrel positiva més petita donant un interval obert que, amb tota seguretat, la contingui i que tingui una longitud no superior a 1 unitat. Escriu els extrems de l'interval entre claus de la forma $\{a, b\}$. Per calcular l'arrel localitzada es vol utilitzar el mètode de Newton. Dóna un punt inicial (x_0) i els dos primers iterats (x_1, x_2) del mètode de Newton, i l'error relatiu aproximat (en valor absolut) que es comet si prenem com a solució l'últim dels iterats. Fes els càlculs amb un mínim de 6 xifres decimals. Introdueix els valors separats per comes en l'ordre següent: $x_0, x_1, x_2, error$. Dóna el valor de l'arrel positiva més petita de l'equació inicial amb un error relatiu aproximat menor que 10^{-6} .

Solucions: $\{0, 1\}$

0.000000, 1.642391, 1.032618, 0.590500

0.886245

3.6 Exercici 6

L'equació $x^5 - 5x^3 + 4x = \cos(2x)$ té almenys una arrel positiva. Localitza l'arrel positiva més petita donant un interval obert que, amb tota seguretat, la contingui i que tingui una longitud no superior a 1 unitat. Escriu els extrems de l'interval entre claus de la forma $\{a, b\}$. Per calcular l'arrel localitzada es vol utilitzar el mètode de Newton. Dóna un punt inicial (x_0) i els dos primers iterats (x_1, x_2) del mètode de Newton, i l'error relatiu aproximat (en valor absolut) que es comet si prenem com a solució l'últim dels iterats. Fes els càlculs amb un mínim de 6 xifres decimals. Introdueix els valors separats per comes en l'ordre següent: $x_0, x_1, x_2, error$. Dóna el valor de l'arrel positiva més petita de l'equació inicial amb un error relatiu aproximat menor que 10^{-6} .

Solucions: $\{0, 1\}$

0.000000, 0.250000, 0.238797, 0.046910

0.238852

3.7 Exercici 7

Calcula la primera arrel positiva de l'equació $2x^2 + x - 1 = \sin(x/2)$ amb un error relatiu aproximat més petit que 10^{-4} .

Solució:

0.591573

3.8 Exercici 8

Donada l'equació $x^2 - 1 = \sin(x/2)$ calcula l'arrel positiva més petita amb un error relatiu aproximat menor que 10^{-4} .

Solució:

1.260729

Integració Numèrica

4.1 Exercici 1

Es vol calcular l'àrea de la regió del pla delimitada per les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ entre les rectes $x = 0$ i $x = 1$. A partir de les dades de la taula següent, troba'n el valor aproximat usant el mètode dels trapezis (T) i el de Simpson (S) (utilitza totes les dades).

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	0.5	1.1	2.03	1.5	1.1	1.63	1.52	2.13	2.81	2.02	1.45
$g(x)$	0.2	0.2	0.83	1.15	0.7	0.3	0.2	0.53	1.1	1.2	0.45

Introdueix els valors de T i S en aquest ordre, separats per comes i amb 4 xifres decimals.

Solució:

1.028, 1.0186

4.2 Exercici 2

Es vol calcular el volum de revolució obtingut en girar al voltant de l'eix OX la regió del pla que es troba entre l'eix d'abscisses i la gràfica de la funció $f(x)$ entre les rectes $x = 0$ i $x = 2$. A partir de les dades de la taula següent, troba'n el valor aproximat usant el mètode de Simpson amb $n = 4$ (S_4) i $n = 8$ (S_8) i dona l'error aproximat relatiu (e_a) que es comet si prenem com a correcte el valor S_8 .

x	0	1/4	1/2	3/4	1	5/4	3/2	7/4	2
$f(x)$	0	0.42	0.8	1.2	1.55	1.62	1.0	1.67	1.45

Introdueix els valors de S_4 , S_8 i e_a en aquest ordre, separats per comes i amb 6 xifres decimals.

Solució:

7.051566, 10.028565, 0.296851

4.3 Exercici 3

Es vol calcular l'àrea de la regió del pla delimitada per la gràfica de la funció $f(x)$ entre les rectes $x = 1$ i $x = 2$. A partir de les dades de la taula següent, troba'n el valor aproximat usant el mètode dels trapezis (T) i el de Simpson (S) (utilitza totes les dades).

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	1.1	2.03	1.05	2.13	1.84	1.95	0.51	0.75	0.47	0.75	1.2

Introdueix els valors de T i S en aquest ordre, separats per comes i amb 4 xifres decimals.

Solució:

1.2630, 1.3493

4.4 Exercici 4

Es vol calcular el volum de revolució obtingut en girar al voltant de l'eix OY la regió del pla que es troba entre l'eix d'abscisses i la gràfica de la funció $f(x)$ entre les rectes $x = 0$ i $x = 4$. A partir de les dades de la taula següent, troba'n el valor aproximat usant el mètode de Simpson amb $n = 4$ (S_4) i $n = 8$ (S_8) i dóna l'error aproximat relatiu (e_a) que es comet si prenem com a correcte el valor S_8 .

x	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4
$f(x)$	0.1	0.5	1.1	1.2	1.55	1.13	1.23	1.84	1.45

Introdueix els valors de S_4 , S_8 i e_a en aquest ordre, separats per comes i amb 6 xifres decimals.

Solució:

65.261351, 69.994684, 0.067624

4.5 Exercici 5

Calcula

$$\int_1^2 \frac{1}{x+2} \sin(3x) dx$$

amb un error relatiu aproximat més petit que $5 \cdot 10^{-6}$. Fent servir el mètode de Romberg. Pren $h = 0.25$ inicialment. Introdueix el valor aproximat de la integral i l'error relatiu aproximat que has obtingut. Realitza els càlculs i introdueix amb les respostes amb un mínim de 8 xifres significatives.

Solució:

-0.18306760, 0.00000008706331

4.6 Exercici 6

Calculeu

$$\int_1^2 \int_{1/(5-x)}^{(15-x)/5} \sqrt{25-xy} dy dx$$

Seguint el procediment següent:

1. Calculeu $H(x) = \int_{1/(5-x)}^{(15-x)/5} \sqrt{25-xy} dy$ per $n+1$ valors de x equiespaiats dins l'interval $[1, 2]$ i expresseu el resultat en forma de taula $(x, H(x))$.
2. Calculeu $\int_1^2 H(x) dx$ emprant els resultats de la taula de l'apartat anterior. Aquest resultat és una aproximació de la integral inicial.

Per calcular les integrals dels apartats anteriors empreu el mètode de Simpson per $n = 4$ i $n = 8$ i calculeu una aproximació de l'error. Introduiu el resultat separat per comes en el següent ordre: S_4 , S_8 i l'error relatiu aproximat. Realitzeu els càlculs amb un mínim de 7 xifres significatives

Solució:

11.5095415588, 11.5095464648, 0.0000004263

Dates límit

- Aproximació i error : 25/10/2011 23:59:00
- Sistemes Lineals : 10/11/2011 23:59:00
- Zeros de Funcions : 30/11/2012 23:59:00
- Integració Numèrica : 15/1/2012 23:59:00
- Pràctica 1 : 18/10/2011 23:59:00
- Pràctica 2 : 15/11/2011 23:59:00
- Pràctica 3 : 13/12/2011 23:59:00
- Pràctica 4 : 15/1/2012 23:59:00