QUADERN D'EXERCICIS DE: MATEMÀTIQUES 1 (3105G06001/2011)

Alumne:
Martí FIGUERAS VIÑALS

23 d'agost de 2012

Índex

ACTIVITAT 1

ACME de prova (no avaluable)

1.1 Exercici 1

Calculeu:

$4 - \frac{10}{12} + \frac{3}{4} - \frac{8}{9}$

Nota: cal que el resultat sigui una fracció irreductible. La fracció $\dfrac{a}{b}$ cal escriure-la com a/b

1.2 Exercici 2

Resol l'equació: $\dfrac{2}{x-5} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x+8}$.

1.3 Exercici 3

Trobeu a i b tals que

$4x^2 + 12x + 9 = (a+b)^2$.

Escriviu el resultat en la forma $a + b$, on a i b són, possiblement, expressions complicades.

Nota: una expressió tal com $2\sqrt{3} - 2\sqrt{5}x^2$ cal escriure-la com

```
2*Sqrt[2]-2*Sqrt[5]*x^2
```

1.4 Exercici 4

Transformeu l'expressió

$3 - ((-3)(3(-1/a)) - 3)$

en una expressió de la forma A/B (és a dir, amb una sola ratlla de fracció), on A i B seran, possiblement, expressions complicades.

Nota: una expressió com ara $\dfrac{2-x^2}{ay^2}$ cal escriure-la com

```
(2-x^2)/(a*y^2)
```

1.5 Exercici 5

Simplifiqueu el màxim possible l'expressió
$-((2/x)^3-(1/e)^3)/(2/x-1/e)+(2/x+1/e)^2$.

ACTIVITAT 2

Funcions elementals

2.1 Exercici 1

Quines són les arrels reals del polinomi $p(x) = (-3/4)x^4 + 3x^2 + 2$? Introdueix-les com una llista separades per comes. Si dónes una aproximació numèrica, fes-ho amb un mínim de 6 xifres decimals. Per exemple les dues llistes següents són respostes vàlides:

$$1 + Sqrt[5], 1 - Sqrt[5]$$

$$3.236067978, -1.236067978$$

2.2 Exercici 2

Divideix per Ruffini $2x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 26x - 12 : x + 2$

Nota: Escriu el polinomi quocient i el residu separats per un coma. Exemple: `2*x^3-x^2+12*x+3,12`

2.3 Exercici 3

Digueu en quina base b és cert que

$\log_b 3 = 1/2$.

Cal entrar el resultat en forma d'enter o fracció

(No amb punt decimal)

2.4 Exercici 4

Resol el triangle , suposant que l'angle $A = \dfrac{\pi}{12}$, l'angle $B = \dfrac{3\pi}{5}$

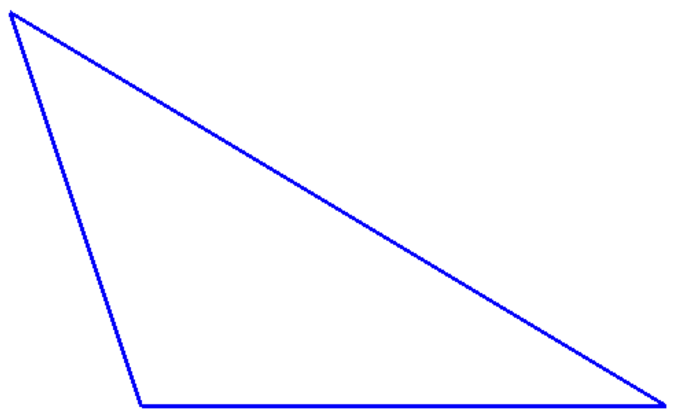
i el costat $a = 3$.

(veure figura)

Nota: La solució és una llista amb els 3 valors, cal donar-los amb el següent ordre, en primer lloc l'angle, en segon i tercer lloc els dos costats per ordre d'abecedari és a dir el b i després el c.

Exemple: Si els angles donats són $A = \frac{\pi}{12}$, $B = \frac{7\pi}{10}$ i el costat $a = 2$ la solució és, en format Mathematica, si utilitzem xifres decimals (els angles en radiants):

.6806784085,6.251603272,4.863014551



2.5 Exercici 5

Calcula els valors de les raons trigonomètriques:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right),\ \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)$$

Nota: Cal que realitzis tots els càlculs de forma simbòlica. No utilitzis xifres decimals. Per solucionar aquest exercici convé utilitzar les fórmules trigonomètriques de la suma , i la diferència d'angles. Exemple: Si has de calcular, $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$, la solució que caldria donar seria de la forma:

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

i en format Mathematica

```
Sqrt[3]*Sqrt[2]/4+Sqrt[2]/4, Sqrt[3]*Sqrt[2]/4+Sqrt[2]/4,
(1-Sqrt[3]/3)/(1+Sqrt[3]/3)
```

ACTIVITAT 3

Nombres complexes

3.1 Exercici 1

Efectua les operacions següents i expressa el resultat en forma binòmica.

$$\frac{(3+2i)(-3+4i)}{2-i} \quad \text{i} \quad \frac{-1}{-3-3i}+\frac{2}{3+i}$$

Entra els resultats separats per comes. En cas que entris algun coeficient en forma decimal, dóna'l amb un mínim de 6 xifres decimals. Per exemple, si els resultas són $1+i$, $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$, les respostes següents són correctes:

- 1+I,1/3+2/3*I
- 1+I,0.333333+0.666666*I

3.2 Exercici 2

Calcula tots els factors irreductibles complexos del polinomi $p(z)=z^3+2z^2-2z+3$.

Entra cada un dels factors separats per comes. En cas que entris algun coeficient en forma decimal, dóna'l amb un mínim de 6 xifres decimals. Per exemple, si les arrels del polinomi són 1, $\frac{1+\sqrt{5}i}{2}$ i $\frac{1-\sqrt{5}i}{2}$, les respostes següents són correctes:

- z-1,z-1/2-I*Sqrt[5]/2,z-1/2+I*Sqrt[5]/2
- z-1,z-0.5-1.118034*I,z-0.5+1.118034*I

3.3 Exercici 3

Calcula les arrels quartes de -256 i expressa el resultat en forma binòmica.

Entra els resultats separats per comes. En cas que entris algun coeficient en forma decimal, dóna'l amb un mínim de 6 xifres decimals. Per exemple, si els resultats són i, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ i , $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ les respostes següents són correctes:

- I,Sqrt[3]/2+1/2*I,Sqrt[3]/2-1/2*I
- I,0.866025+0.500000*I,0.866025-0.500000*I

3.4 Exercici 4

Sabem que dues de les arrels n-èssimes d'un nombre complex z són

$$\{1+i,-1+i\}$$

i que aquestes són consecutives (no hi ha cap altre amb argument un valor intermedi dels arguments de les dues arrels donades). Llavors:

- $n=4$.
- $z=-16$.
- $z=4$.
- No es poden conèixer la resta de les arrels.
- $n=6$.
- $n=2$.
- $n=8$.
- $z=8$.

3.5 Exercici 5

Sabem que un polinomi $p(z)$ a coeficients reals i de grau 4 té les arrels

$$-2i,3+i$$

. Llavors podem assegurar que:

- el polinomi descompon com a producte de dos polinomis complexes irreductibles.
- el polinomi descompon com a producte de dos polinomis reals irreductibles.
- el polinomi descompon com a producte de quatre polinomis reals irreductibles.
- el polinomi és irreductible real, però descompon en els complexes.
- el polinomi descompon com a producte de tres polinomis reals irreductibles.
- el polinomi és irreductible tant en els reals com en els complexes.

ACTIVITAT 4

Matrius i determinants

4.1 Exercici 1

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula $A+3B-2C$.

NOTA: La resposta és una matriu. Cal que entris, entre claus i separades per comes, les files de la matriu. Cada fila és una llista, també entre claus, de valors separats per comes. Si un element de la matriu és un nombre real cal que l'entris en forma racional (exemple: no entris 4.5 sinó 9/2). Per exemple, $\{\{4/3, 6, -1\}, \{0, 1/2, 2\}\}$ és una resposta vàlida, i representa una matriu de 2 files i 3 columnes. Un altre exemple: $\{\{1/3, 0\}, \{0, 1\}, \{-3, 2\}\}$ és una matriu de 3 files i 2 columnes.

Solució:

```
{{3,8},{-14,-2},{23,10}}
```

4.2 Exercici 2

Resol l'equació matricial $AX+B=C$, on

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

NOTA: La resposta és una matriu. Cal que entris, entre claus i separades per comes, les files de la matriu. Cada fila és una llista, també entre claus, de valors separats per comes. Si un element de la matriu és un nombre real cal que l'entris en forma racional (exemple: no entris 4.5 sinó 9/2). Per exemple, $\{\{4/3, 6, -1\}, \{0, 1/2, 2\}\}$ és una resposta vàlida, i representa una matriu de 2 files i 3 columnes. Un altre exemple: $\{\{1/3, 0\}, \{0, 1\}, \{-3, 2\}\}$ és una matriu de 3 files i 2 columnes.

4.3 Exercici 3

Calculeu el determinant de la matriu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 3 \\ 5/3 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 7/3 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}$.

NOTA: Entreu la resposta en forma racional. Per exemple, 7 i 8/3 són respostes correctes, però 7.0, 7. i 2.66 són incorrectes.

Solució:

```
-5183/6
```

4.4 Exercici 4

Calculeu per a quins valors del paràmetre λ el determinant de la següent matriu val 0:

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ -4 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

NOTA: Entreu els valors separats per comes. Per exemple, la resposta $1/3, -2$ és vàlida, i vol dir que els valors que fan que el determinant valgui 0 són $\lambda = 1/3$ i $\lambda = -2$. La resposta $2/5$ també és vàlida, i vol dir que el determinant val 0 només per a $\lambda = 2/5$.

Solució:

```
0,1
```

4.5 Exercici 5

Hi ha alguns valors del paràmetre m que fan que aquesta matriu tingui rang menor que 3. Digueu per a quins valors de m la matriu té rang 1 i per a quins valors de m té rang 2:

$$\begin{pmatrix} -8 & -2-m & 4 \\ 6-m & 0 & -2+m \\ -4 & -2-m & 2 \end{pmatrix}.$$

NOTA: Cal que entreu dues llistes separades per una coma: primer la llista **entre claus** de valors de m que fan que el rang sigui 1, i tot seguit la llista **entre claus** de valors de m que fan que el rang sigui 2. S'admeten llistes buides. Per exemple: si escriviu $\{\}, \{4, 5, -2\}$ esteu indicant que no hi ha cap valor de m que faci que el rang sigui 1, i que per a $m = 4, 5, -2$ el rang és 2. Un altre exemple: $\{-1\}, \{2, 7\}$ vol dir que per a $m = -1$ el rang és 1 i per a $m = 2, 7$ el rang és 2.

ACTIVITAT 5

Sistemes d'equacions lineals

5.1 Exercici 1

Resol el sistema lineal següent:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & -7 \\ -1 & -7 & -3 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Nota: Escriu la solució de la forma següent:

$$x = a, y = b, z = c, t = d$$

amb els coeficients en forma fraccionaria (no decimal) i sense deixar espais en blanc. Per exemple si la solució és $x = 0.5$, $y = 2$, $z = 3$ i $t = 4$ has d'escriure $x = 1/2, y = 2, z = 3, t = 4$ i si la solució és $x = 2y$, y lliure, $z = 4$ i $t = 2y-7$ llavors, has d'escriure $x = 2*y, y = y, z = 4, t = 2*y-7$.

5.2 Exercici 2

Resol el sistema lineal següent:

$$\begin{aligned} -4x - 2y - 4z + 4t &= -6 \\ 4x + 2y + 6z - 10t &= 2 \\ -4x - 2y + 4t &= -2 \\ -4x - 2y - 8z + 2t &= -12 \end{aligned}$$

Nota: Escriu la solució de la forma següent:

$$x = a, y = b, z = c, t = d$$

amb els coeficients en forma fraccionaria (no decimal) i sense deixar espais en blanc. Per exemple si la solució és $x = 0.5$, $y = 2$, $z = 3$ i $t = 4$ has d'escriure $x = 1/2, y = 2, z = 3, t = 4$ i si la solució és $x = 2y$, y lliure, $z = 4$ i $t = 2y-7$ llavors, has d'escriure $x = 2*y, y = y, z = 4, t = 2*y-7$.

5.3 Exercici 4

Trobar els valors de m i n que fan que el sistema

$$\begin{cases} x - y + mz &= 1 \\ -3x - y + 2z &= n \\ y + 2z &= 0 \end{cases}$$

sigui compatible indeterminat amb grau un de llibertat.

Nota: Escriu m i n separades per comes. En cas que no existeixi cap parell de valors escriu NO. Exemple: $3,5$ o bé NO

5.4 Exercici 5

Tenim un sistema homogeni amb 3 equacions i 4 incògnites del qual sabem que el rang de la seva matriu és 2. Llavors podem assegurar que

- el sistema pot ser incompatible depenent del rang de la matriu ampliada.
- el sistema és compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat.
- el sistema és compatible indeterminat amb 3 graus de llibertat.
- el sistema és compatible determinat amb 1 grau de llibertat.
- el sistema és compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat.
- el sistema és compatible determinat.

Solució: el sistema és compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat.

5.5 Exercici 6

Després d'aplicar el mètode de Gauss a la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals hem obtingut la següent matriu escalonada per files

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & b+a & 0 & a \end{array}\right),$$

on a i b són dos paràmetres indeterminats. Llavors podem assegurar que

- si $a + b \neq 0$ el sistema és compatible indeterminat.

- si $a = b = 0$ el sistema és compatible determinat.
- si $b \neq 0$ el sistema és compatible.
- si $a \neq 0$ el sistema sempre és compatible indeterminat.
- si $b + a \neq 0$ el sistema sempre és compatible determinat.
- si $b + a = 0$ el sistema sempre és incompatible.

Solució: si $a + b \neq 0$ el sistema és compatible indeterminat.

ACTIVITAT 6

Vectors

6.1 Exercici 1

Per a quins valors de α els vectors $(1,-1,-3)$, $(-1,0,2)$ i $(\alpha,1,-1)$ són linealment dependents? Escriu els valors separats per comes.

6.2 Exercici 2

Calcula α i β per tal que el vector $(\alpha,\beta,-10,15)$, sigui del subespai generat pels vectors $(2,1,0,-3)$ i $(1,-1,-2,-1)$. Escriu els valors de α i β separats per comes.

6.3 Exercici 3

A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ es considera el següent conjunt de vectors

$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 = x_1 - 5x_4,\ x_4 = x_2 + 3x_3\}$$

Determina una base de V. Escriu els vectors de la base separats per comes. Exemple si $(1,0,1,0)$ i $(0,1,0,0)$ són una base de V has d'escriure {1,0,1,0},{0,1,0,0}.

6.4 Exercici 4

Un vector v, respecte de la base canònica **e1**,**e2** té coordenades $(2,-2)$.

Calculeu-ne les coordenades respecte d'aquesta altra base:

$(3,0)$

$(1,5)$

NOTA: Entreu les tres coordenades de v incloses entre claus. I, si voleu entrar alguna de les coordenades com a nombre real, entreu-la amb exactament 4 decimals. Per exemple, $\{-1/2, 2.3145\}$ i $\{5/3, 4.7\}$ són respostes vàlides (4.7 s'interpreta com a 4.7000).Per altra banda que $(-1/2, 2.3145)$ o bé $-1/2, 2.3145$ no són respostes vàlides degut a que no estan expressades amb les claus.

6.5 Exercici 5

Calcula l'àrea del triangle de vèrtex $(2,5)$, $(3,-1)$ i $(1,2)$.

ACTIVITAT 7

Models matricials

7.1 Exercici 1

Calculeu els valors de a i b per a que la matriu $\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ b & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ tingui $(-4, -1, -1)$ per vector propi.

NOTA: La resposta ha de tenir el format de dos nombres separats per una coma. Obligatòriament el primer nombre ha de ser el valor de a i el segon el valor de b. Per exemple,

$$-5/3, 2/5$$

és una resposta vàlida.

7.2 Exercici 2

Calculeu els valors propis de la següent matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

NOTA: Entreu els valors separats per comes i repetits tantes vegades com la seva multiplicitat. Per exemple, la resposta $1/3, -2, -2$ és vàlida, i vol dir que els valors propis són $1/3$ i -2 amb multiplicitat 2.

7.3 Exercici 3

La dinàmica poblacional d'una certa espècie segueix un model de Leslie on la població de femelles es classifica en tres edats: joves, pre-adults i adults. Se sap que

- el nombre mitjà de femelles que neixen en un període de femelles pre-adultes i adultes és 1 i 4 respectivament,
- la proporció de femelles joves que sobreviuen i passen a l'etapa següent és 0.7

- i la proporció de femelles pre-adultes que sobreviuen i passen a adultes és 0.25

Troba, en el límit, si la població creixerà, decreixerà o si es mantindrà estable. Dóna la resposta en % (però sense escriure el %), en positiu si hi ha creixement i en negatiu si hi ha decreixement. Per exemple, si la població creix en un 11.34%, introdueix 11.34, si decreix en un 9.37%, introdueix -9.37. I si es manté, introdueix 0.

7.4 Exercici 4

La dinàmica poblacional d'una certa espècie segueix un model de Leslie de tres etapes (joves, pre-adults i adults) amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

on $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $\alpha = 0.75$ i $\beta = 0.7$. Troba la distribució de població (en %) en el límit.

NOTA: Introdueix la resposta com una llista de 3 nombres separats per comes i amb dues xifres decimals (sense el símbol %). Per exemple, la següent és una resposta sintàcticament correcta: $36.65, 34.15, 29.2$.

7.5 Exercici 5

Troba el vector d'estat estacionari de la matriu de probabilitats següent:

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

NOTA: Per definició, les components del vector d'estat estacionari han de sumar 1. Entra el vector com una llista de 2 nombres separats per comes i inclosos entre claus. Entra les coordenades amb un mínim de 4 xifres decimals. Per exemple, la següent és una resposta sintàcticament correcta: $\{0.7525, 0.2475\}$.

Apèndix A

Dates límit

- ACME de prova (no avaluable) : 22/9/2011 23:55:00
- Funcions elementals : 4/10/2011 23:55:00
- Nombres complexes : 25/10/2011 22:55:00
- Matrius i determinants : 15/11/2011 22:55:00
- Sistemes d'equacions lineals : 22/11/2011 23:59:00
- Vectors : 7/12/2011 22:55:00
- Models matricials : 10/1/2012 08:00:00