Estratègies per resoldre problemes de matemàtiques

Estratègies per resoldre problemes de matemàtiques

Membres del Seminari del ICE que han col·laborat en la resolució de problemes de matemàtiques:

Antoni Anglada Marcé
Francesc Borrell Thió
Enrique Edo Fernández
Carles Ignasi Gómez Ruiz
M. Àngels López Faxedas
Isabel López Gómez
Pere Nogué Font
Jesús Eloy del Oso Gallego
Anna M. Pol Masjoan (coordinadora)
Berenguer Sabadell Noguera
Elisabet Saguer Canadell
Rosa M. Santos Arenas
Lluïsa Teixidor Marimón
Carme Tibau Noguer
Miquel Vilà Renart
Carles Vila Mulleras
Jordi Vilarrubí Costa

Universitat de Girona
Institut de Ciències de l'Educació
Servei de Publicacions

Dades recomanades per la Biblioteca de la UdG

Seminari de Resolució de Problemes de Matemàtiques

Estratègies per resoldre problemes de matemàtiques : [Seminari de Resolució de Problemes de Matemàtiques / Institut de Ciències de l'Educació] ; Antoni Anglada Marcè ... [et al.]. - Girona : Universitat de Girona. Institut de Ciències de l'Educació. Servei de Publicacions, 1995. - p. ; cm
ISBN: 84-88762-37-2

I. Anglada Marcè, Antoni II. Universitat de Girona. Institut de Ciències de l'Educació III. Títol
1. Resolució de problemes 2. Matemàtica - Ensenyament
CIP 51:37.02 SEM

Imatge de la coberta: M. Lacomba

Desembre 1995

Edita: Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat de Girona

ISBN: 84-88762-37-2
Dipòsit legal: Gi.-1770-95

Universitat de Girona
Servei de Publicacions
Edifici Les Àligues - Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 87

PRESENTACIÓ

Amb aquesta publicació s'inicia un procés que permet al nostre Institut de Ciències de l'Educació començar a satisfer una de les fites que des de l'inici sempre havíem perseguit, poder fer partícip tot el professorat de les nostres comarques d'aquells estudis i treballs, elaborats per diferents grups de professors, que, per les seves característiques, ofereixen recursos educatius útils per a la reflexió i millora de la tasca docent.

El recull de problemes que presentem ha estat elaborat pels integrants del Seminari de resolució de problemes, organitzat per l'ICE al llarg del curs 1994-95, seminari que ha format part del Pla de formació permanent del Departament d'Ensenyament.

La finalitat d'aquest seminari ha estat treballar problemes, la resolució dels quals oferís, per les seves característiques, recursos didàctics i metodològics al professorat de matemàtiques.

Des de l' Institut de Ciències de l'Educació, analitzant la tasca duta a terme per aquest seminari, volem donar a conèixer el treball que han realitzat, convençuts que ofereix al professorat d'aquesta assignatura la possibilitat de participar en la reflexió que han portat els seus membres, i analitzar els diferents mètodes de resolució i estratègies emprades en la resolució dels diferents problemes.

M. Rosa Terradellas i Piferrer
Directora de l'ICE

1. Queda determinat un triangle si es coneixen els punts mitjos de dos costats i l'ortocentre?

2. Dos punts A i B estan situats sobre una circumferència i un tercer punt C es mou sobre aquesta circumferència. Determineu el lloc geomètric dels quatre punts notables del triangle ABC.

3. Proveu que el polinomi $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - ... - 2n\,x + 2n+1$ no té arrels reals.
(Entrance Examination for the Independent University of Moscow. Juny 1991*)*

4. Doneu una fórmula que permeti sumar tots els divisors del número $N=a^m b^n c^p$...
Comproveu la fórmula d'Euclides per buscar nombres perfectes (la suma de tots els divisors propis és igual al nombre):
"$N=2^{p-1}.(2^p - 1)$ és perfecte quan 2^{p-1} és primer"
(Toeplitz, O.-Rademacher, H. *Números y figuras,* cap. 19)

5. Observeu les igualtats següents: $2+3+7+4=5+6+4+1$
$2^2+3^2+7^2+4^2=5^2+6^2+4^2+1^2$
Com es poden construir igualtats d'aquest tipus?
El procés és generalitzable; per exemple:

$$12+5+13+6+17+4+14+1 = 2+15+3+16+7+14+4+11$$
$$12^2+5^2+13^2+6^2+17^2+4^2+14^2+1^2 = 2^2+15^2+3^2+16^2+7^2+14^2+4^2+11^2$$
$$12^3+5^3+13^3+6^3+17^3+4^3+14^3+1^3 = 2^3+15^3+3^3+16^3+7^3+14^3+4^3+11^3$$
Investigueu.

6. Demostreu que tots els nombres de la forma $2^{2^n}+1$ (anomenats primers de Fermat) acaben en 7, essent n un nombre natural més gran que 1.
(B. Lewis *Matemàticas modernas. Aspectos recreativos)*

7. Considereu la successió següent de figures (cercles i polígons regulars), cadascuna inscrita dins de l'anterior: un cercle, un triangle equilàter, un cercle, un quadrat, un cercle, un pentàgon regular, un cercle... Comproveu que la successió de les longituds dels radis dels cercles té límit diferent de 0.

8. Considereu la successió de segments de longituds 1, 1/2, 1/3, 1/4... ,cadascun d'ells formant un angle α amb la direcció de l'anterior. El primer segment té un extrem a l'origen de coordenades i forma un angle α amb l'eix OX. Calculeu les coordenades del punt límit.

9. **El cercle dels vuit punts**. Si ABCD és un quadrilàter amb les diagonals perpendiculars, els quatre punts mitjans dels costats P, Q, R, i S i els quatre peus de les perpendiculars des d'aquests punts mitjans al costat oposat, P', Q', R', i S', són en una circumferència que té per centre el punt d'intersecció de les rectes PR i QS.
(Louis Brand of Cincinnati, 1944)

10. **El cercle de nou punts.** En un triangle ABC, els nou punts següents:
    - els punts mitjans dels tres costats: A' , B', C'
    - els peus de les tres altures: P,Q,R
    - els punts d'Euler, que són els punts mitjans dels segments que uneixen els tres vèrtexs amb l'ortocentre, X,Y,Z

    són en un cercle.
    (1700-1800; enunciat el 1821 per Poncelet)

11. Tres cercles del mateix radi r passen per un punt O i intercepten dos a dos en un segon punt P, Q, R, respectivament. El circumcercle del triangle PQR és un cercle també de radi r.

12. 25, 365 i 2030 tenen la propietat compartida següent: hi ha tres, cinc, set quadrats consecutius tals que, respectivament,
$$3^2+4^2=5^2=25$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=365$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2=2030$$
    Podríeu trobar un mètode general que ens permeti calcular tots els nombres naturals que es poden obtenir com a suma de n quadrats consecutius i també com a suma dels n-1 quadrats consecutius següents? És el 45955 un d'aquests nombres?
    (Gardner, M. *Los mágicos números del Doctor Matrix,* pàg. 35. Gedisa. Barcelona, 1988)

13. Construïu, amb regle sense marques i compàs, un triangle un cop conegudes les seves tres altures. En quines condicions tres segments qualssevol poden ser les altures d'un triangle?
    (González, M. Palencia, J. *Trazado geométrico,* pàg. 98, 99. Sevilla, 1988)

14. Calculeu $\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k}+\ldots+\binom{n+m}{k}$ $\quad n,m,k \in N, k \le n$
    (Yaglom, Yaglom. *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions,* I, pàg 16. Dover. Nova York, 1987)

15. Considereu els triangles de costats enters. Observeu que només n'hi ha un tal que la longitud dels seus costats sigui menor o igual que 1, el (1,1,1). N'hi ha tres la longitud dels costats dels quals és menor o igual que 2, els (1,1,1) (1,2,2) i (2,2,2). Podríeu calcular quants tenen la longitud dels seus costats menor o igual que n?
    (Bragg, Grossman. *The College Mathematicals Journal,* vol 25, núm. 3 prob.503)

16. Thabit ibn Qurra (826-901) té un teorema que diu:
    Si ABC és un triangle qualsevol, M i N són dos punts sobre el costat BC, i els angles AMB=BAC=ANC, llavors el quadrat sobre AB és igual al rectangle BMxBC i el quadrat sobre AC és igual al rectangle CNxBC.
    Podríeu justificar aquesta afirmació, dir de quin teorema és generalització i quin teorema és equivalent, i mostrar l'equivalència?
    (Boyer, C.B. *Historia de la Matemática,* pàg. 304,305. Alianza Ed. Madrid, 1986)

17. Inscriviu dins d'un triangle acutangle el triangle de perímetre mínim.

18. Es fa una pilota de futbol cosint peces de cuir pentagonals i hexagonals. Demostreu que el nombre de peces pentagonals ha de ser 12.

19. Sobre la circumferència dels nou punts (problema 10), designem per P' el punt de l'arc A'P del cercle d'Euler tal que arc(A'P') = 1/3 arc(A'P). Definim Q' i R' de manera similar. Demostreu que el triangle P'Q'R' és equilàter.

20. Tenim 10 cartes numerades amb nombres qualssevol, no necessàriament naturals. El joc que es proposa consisteix a endevinar la carta més alta i es juga de la manera següent:
El jugador gira una de les cartes. Pot decidir que és la carta més alta i plantar-se o bé girar una segona carta.
    - En el primer cas, s'acaba el joc i guanya si realment la carta girada és la més alta de les 10.
    - En el segon cas, si la segona carta és més baixa que la primera, ha de girar una altra carta (si no, evidentment perdria el joc); si la segona carta és més alta que la primera, pot decidir plantar-se o continuar jugant.

Estudieu el joc i la millor estratègia per guanyar.

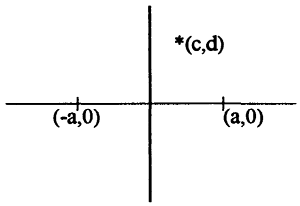
ÍNDEX

P1 Queda determinat un triangle si es coneixen els punts mitjos de dos dels costats i l'ortocentre

Resolució 1

Dades: M_{AB}=(-a,0), M_{AC}=(a,0) i O=(c,d)

Agafem la referència següent: origen de coordenades, el punt mig entre M_{AC} i M_{AB}, que suposarem situat sobre l'eix X.



Plantejament

1) L'altura h_A passa per l'ortocentre i és perpendicular al segment $\overline{M_{AC}M_{AB}}$ El punt A és sobre aquesta altura.

$h_A:\ x = c \quad A = (c,y_0)$

2) M_{AB} =(-a,0) és el punt mig entre A i B $\Leftrightarrow$ B = (-2a-c , $-y_0$)

3) La direcció del costat AC és la del vector $\vec{v}$ d'origen A i extrem M_{AC}

$$\vec{v} = (a - c, -y_0)$$

4) L'altura h_B té la direcció del vector $\vec{t}$, que uneix B amb l'ortocentre

$$\vec{t} = (2a + 2c, d + y_0)$$

5) $\vec{v}$ i $\vec{t}$ són perpendiculars: $2(a-c)(a+c) - dy_0 - y_0^2 = 0$

Resolució
$$y_0 = \frac{-d \pm \sqrt{d^2+8\left(a^2-c^2\right)}}{2} \qquad (1)$$

Discussió de les possibles solucions

Aquesta equació de segon grau tindrà solució quan $d^2 + 8\left(a^2 - c^2\right) \geq 0$

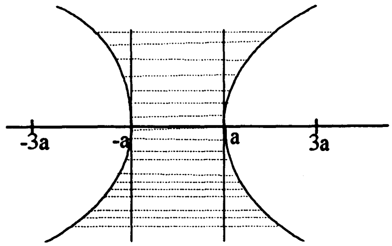
Canviant les coordenades de l'ortocentre (c,d) per (x,y), la desigualtat anterior es pot escriure:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{8a^2} \leq 1 \qquad (2)$$

Per tant, les solucions d'aquesta inequació donen les possibles posicions de l'ortocentre, per tal que hi hagi un triangle un cop coneguts els punts mitjos de dos dels costats, i, en el cas de l'existència, per (1) trobem les coordenades del punt A.

Solucions de la inequació (2)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{8a^2} = 1$ és una hipèrbola de focus (3a,0) i (-3a,0). Gràficament, la solució de l'equació correspon a la part ratllada del gràfic següent:



Nombre de solucions en funció de la situació de l'ortocentre (c,d)

a) Si l'ortocentre és sobre la hipèrbola, però no en els vèrtexs (no pot ser que l'ortocentre coincideixi amb el punt mig d'un dels costats), el discriminant és igual a zero.

El punt $A=(c, \frac{-d}{2})$. Hi ha un únic triangle.

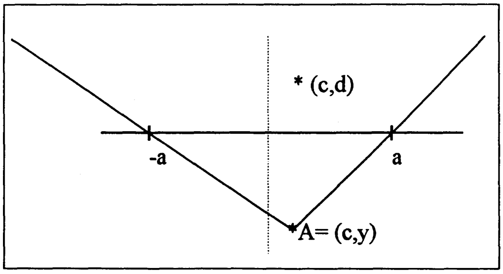
b) Si l'ortocentre és sobre les rectes $x=a$ o $x=-a$, aleshores les solucions de l'equació (1) són $y_0 = 0$, $y_0 = -d$. La solució $y_0 = 0$ no és vàlida (el punt A coincidiria amb un dels punts mitjos) i, per tant, hi ha solució única. $A=(c,-d)$. El triangle és rectangle.

c) Si l'ortocentre és dintre la zona de solucions i $c<-a$ o $c>a$, hi ha dos triangles obtusangles. L'alçada h_A sempre queda fora del triangle ABC.

d) Si $-a < c < a$, la solució sempre és doble. Per determinar els tipus de triangles, observem l'expressió de y_0

$$y_0 = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 8\,(a^2 - c^2)}}{2}$$

$\sqrt{d^2 + 8(a^2 - c^2)} > d$. Si suposem $d > 0$, una de les solucions és menor que -d.

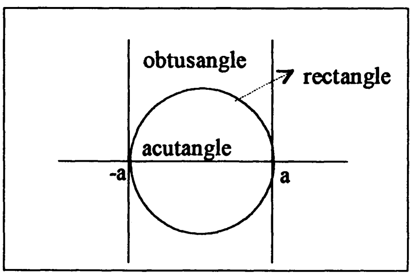


La distància d'A a la recta que uneix els punts mitjos és la meitat de l'altura, per tant, l'ortocentre queda interior al triangle i el triangle és acutangle.

L'altra solució

$$\frac{-d + \sqrt{d^2 + 8\,(a^2 - c^2)}}{2}$$

pot ser més gran, igual o menor que d, i per tant el triangle seria acutangle (l'ortocentre seria interior al triangle), rectangle (l'ortocentre coincidiria amb el vèrtex A) o obtusangle (l'ortocentre seria exterior al triangle), respectivament. Ara bé,

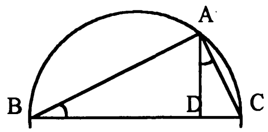


$$\frac{-d + \sqrt{d^2 + 8\,(a^2 - c^2)}}{2} > \quad \Rightarrow$$

$c^2 + d^2 < a^2$ i això resol el tipus de triangle.

Resolució 2

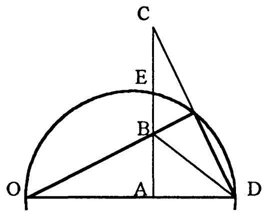
Consideracions prèvies:



1. Es compleix que l'angle CBA i l'angle DAC són iguals, ja que els segments BC, AD, i AB, AC són perpendiculars dos a dos. Per tant, els triangles BDA i ADC són semblants.
   De la semblança de triangles es dedueix que: $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$, per tant $AD^2 = BD \cdot DC$

2. Els triangles OAB i CAD són semblants, per tant es verifica:
   $\frac{OA}{CA} = \frac{AB}{AD}$, és a dir, $AB.AC = OA.AD$. Però s'ha vist que $OA.AD = AE^2$, per tant

   s'observa que: $AB.AC = AE^2$

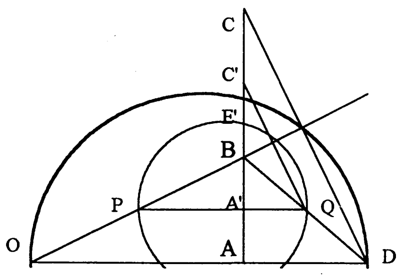


Resolució

Sigui el triangle OBD, P i Q són els punts mitjos dels costats OB i BD i C és l'ortocentre del triangle. Per tant, P, Q i C són coneguts.
Considerem dos casos:

a) L'altura corresponent al vèrtex B és interior al triangle
b) L'altura corresponent al vèrtex B és exterior

Cas a) (El dibuix correspon a un triangle obtusangle, podria ser acutangle o rectangle



En aquest triangle es compleix: $A'B \cdot A'C' = A'E'^2$ (consideració prèvia 2) i
$BC' = BC/2$ (per semblança)
$A'C' = A'B + BC' = A'B + BC/2$. Per tant: $A'B \cdot (A'B + BC/2) = A'E'^2$

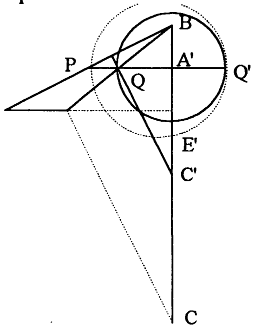
Si fem A'E'=1 ; A'B = x i A'C=h, aleshores BC=A'C-A'B = h-x, i substituint en la igualtat anterior queda $x(x+\frac{h-x}{2})=1$, és a dir, $x^2+hx-2=0$ on $x=\frac{-h\pm\sqrt{h^2+8}}{2}$.

Per tant, s'ha posat x en funció de h, és a dir, A'B en funció d'A'C, on A' i C són coneguts, per tant s'ha trobat B i ja es pot construir el triangle.

Aquest cas a) sèmpre és resoluble, encara que el nombre de solucions i els resultats concrets depenen del tipus de triangle. Així, en el cas acutangle, hi ha també dues solucions, que són

$$x=\frac{+h\pm\sqrt{h^2+8}}{2}$$

Cas b) L'altura corresponent al vèrtex B és exterior al triangle.



En aquesta situació es compleix que els triangles PA'B i C'A'Q són semblants, llavors:

A'P / A'C' = A'B /A'Q, d'on es dedueix que A'B·A'C' = A'P·A'Q. Fent A'Q'=A'Q i aplicant la consideració prèvia 2 del principi, tenim: A'P.A'Q = A'P·A'Q'=A'E'^{2}
Així, A'B·A'C' = A'E'^{2}

Es compleix:
BC'=BC/2 (per semblança)
A'C'=BC'-A'B=BC/2 - A'B .

Si fem A'E'=1 ; A'B = x i A'C=h, aleshores BC= A'B+A'C = x + h i substituint, queda $x\cdot(\frac{x+h}{2}-x)=1$, és a dir, $-x^2+hx-2=0$ on $x=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-8}}{-2}$. Per tant, tindrà solució si $h^2-8\geq 0$, és a dir, $h\geq\pm\sqrt{8}$.

Per tant, s'ha posat x en funció de h, és a dir, A'B en funció d'A'C, on A' i C són coneguts, per tant, s'ha trobat B i ja es pot construir el triangle.

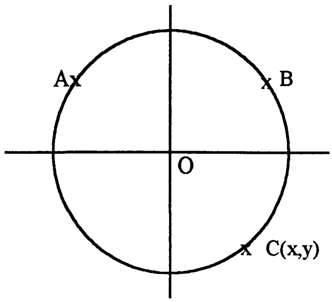
P2 Dos punts A i B estan situats sobre una circumferència, i un tercer punt C es mou sobre aquesta circumferència. Determineu els llocs geomètrics dels quatre punts notables del triangle ABC.

Resolució 1

a) **Circumcentre**: és el centre de la circumferència

b) **Baricentre**:

Agafem la referència següent: origen de coordenades, el centre de la circumferència, eix Y, la recta perpendicular a la corda AB . Per tant, A=(-a,b) i B=(a,b)



Equació de la circumferència:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Coordenades de C = $\left(x, \pm\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}\right)$

Coordenades del baricentre:

$$G=\left(\frac{x+a-a}{3}, \frac{\pm\sqrt{a^2+b^2-x^2}+b+b}{3}\right)$$

Anomenen (X,Y) les coordenades del baricentre $X=\frac{x}{3}$, per tant $x = 3X$

Amb les noves coordenades $G=\left(X, \frac{\pm\sqrt{a^2+b^2-9X^2}+2b}{3}\right)$

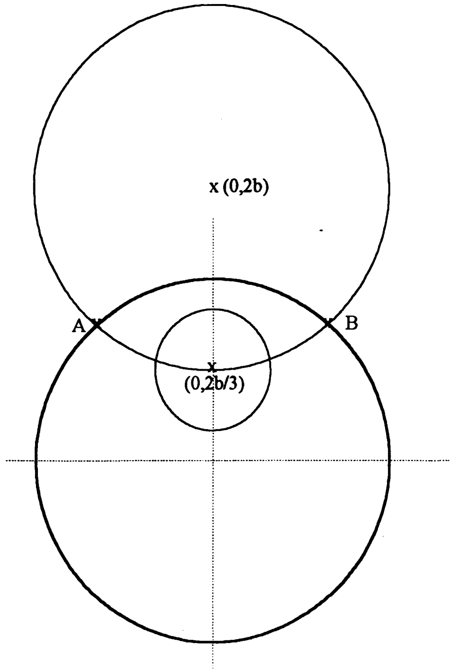
<u>Lloc geomètric de G</u> $Y = \frac{\pm\sqrt{a^2+b^2-9X^2}+2b}{3}$. Operant i dividint per 9, obtenim l'equació de la circumferència

$$X^2 + Y^2 - \frac{4bY}{3} - \frac{a^2-3b^2}{9} = 0.$$

Centre de la circumferència $\left(0, \frac{2b}{3}\right)$.

Radi de la circumferència: $R^2 = \frac{4b^2}{9} + \frac{a^2-3b^2}{9} = \frac{a^2+b^2}{9} = \frac{r^2}{9} \Rightarrow R = \frac{r}{3}$

Per tant, el lloc geomètric de G és una circumferència de radi $\frac{1}{3}r$ i de centre el punt $\left(0, \frac{2b}{3}\right)$, que és el baricentre del triangle format entre els punts A i B i el centre O de la circumferència inicial.



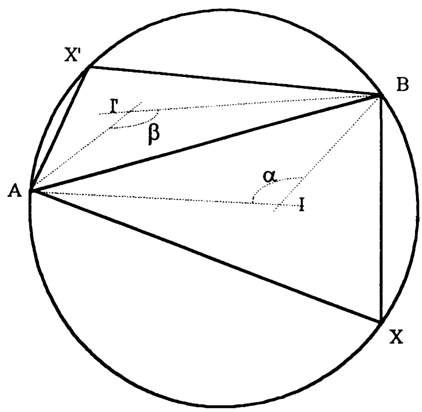
c) **Ortocentre**

En un triangle qualsevol, ortocentre, baricentre i circumcentre estan alineats i determinen la recta d'Euler del triangle. El baricentre és entre el circumcentre i l'ortocentre, i la distància del baricentre a l'ortocentre és el doble que la distància del baricentre al circumcentre.

Com que el circumcentre és fix, el lloc geomètric de l'ortocentre és una circumferència homotètica a la descrita pel baricentre. El centre d'homotècia serà el circumcentre i la raó 3. Centre de la circumferència (0,2b) i radi r igual al de la circumferència inicial.

Noteu que la circumferència passa per A i per B, que correspon al cas dels dos únics triangles rectangles.

d) **Incentre**



Considerarem dos casos, segons si el tercer punt és a una banda o l'altra del segment AB.

a) <u>Triangle ABX</u>

I és l'incentre del triangle

$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=180-\alpha$

$\hat{A}+\hat{B}=180-\hat{X}$ D'aquí es dedueix

$\alpha=90+\frac{\hat{X}}{2}$ Com que l'angle X abraça un arc constant, té un valor fix, igual a la meitat de l'angle central AOB (O centre de la circumferència). Per tant, $\alpha=90+\frac{\widehat{AOB}}{4}$.

El lloc geomètric és l'arc capaç del segment AB i angle α.

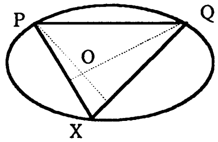
b) <u>Triangle ABX'</u> Per un raonament semblant, el lloc geomètric és un altre arc capaç del segment BA i angle β. $\beta=180-\frac{\widehat{AOB}}{4}$

Resolució 2

Es demostrarà que el lloc geomètric dels ortocentres dels triangles determinats per dos punts P i Q fixos d'una cònica no degenerada, C, i un punt variable X de la mateixa cònica, és una nova cònica C' que conserva l'espècie afí de C.

<u>Resolució</u>

Sigui una cònica no degenerada C (és a dir, no valen una parella de rectes, una recta doble, un punt doble, etc.) i dos punts fixos P i Q de C. Donat un punt variable X sobre C, es construeix el triangle PQX



Per construir l'ortocentre només es necessiten 2 altures. Per tant, es pot determinar l'ortocentre del triangle com a intersecció de rectes pels punts fixos P i Q de C. Això fa recordar el teorema de Steiner per a còniques.

> Siguin P i Q dos punts diferents del pla projectiu i $P^* \xrightarrow{\alpha} Q^*$ una projectivitat.
> Aleshores el lloc geomètric dels punts d'intersecció $l \cap \alpha(l)$ amb $l \in P^*$ és el conjunt de punts d'una cònica. Aquesta cònica és degenerada $\Leftrightarrow$ α és una perspectiva

P* significa el feix de rectes per P i Q* el feix de rectes per Q

Consideracions prèvies al teorema

1) **Què és el pla projectiu?**

Considerem dins l'espai euclidià ordinari (sobre els reals o sobre els complexos) un pla π i un punt exterior O. Fem correspondre a cada punt A de π la recta OA. A cada punt de π li correspon una recta de l'espai que passa per O. Però aquesta correspondència entre les rectes per O i punts de π no és bijectiva. En efecte, a totes les rectes per O paral·leles al pla π no els correspon cap punt del pla. Per fer que aquesta correspondència sigui bijectiva, convenim que a les rectes per O paral·leles a π els fem correspondre un **punt impropi o punt de l'infinit.** A més, les rectes de π es corresponen amb plans per O. Anàlogament, aquesta correspondència no és bijectiva, ja que al pla π' paral·lel a π i que conté O no li correspon cap recta. El conjunt de punts impropis correspon al conjunt de rectes contingudes en π'. Com que als plans per O els corresponen rectes de π, diem que els punts impropis constitueixen la **recta impròpia** o **recta de l'infinit** del pla π.

El pla euclidià π ampliat amb la recta de l'infinit (que anotarem com a r_∞) és el que es coneix com a pla projectiu (que anotarem com a P^2)

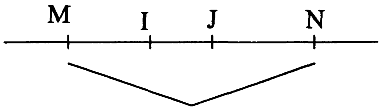
2) **Què és una projectivitat?**

És tota aplicació entre espais projectius que, mirada en l'espai euclidià, és un **isomorfisme lineal.** Si la projectivitat és d'un pla projectiu en ell mateix, parlem d'**homografies**.

Les projectivitats, a part d'heretar totes les propietats dels isomorfismes lineals entre espais vectorials, tenen dues propietats importants: una és que transforma punts alineats en punts alineats. És més, conserven raons dobles per projeccions (diem que és una **coalineació**). A més, qualsevol aplicació entre espais projectius composta per projeccions i seccions és una projectivitat (les projeccions i les seccions resulten de fer aplicacions lineals entre espais euclidians).

3) **Què cal fer?**
Cal muntar una projectivitat a P^2 (llavors serà una homografia) entre P^* i Q^*, de manera que la recta inicial sigui l'altura per P i la recta final sigui l'altura per Q.

4) **Què vol dir perpendicular a ...?**
La perpendicularitat entre varietats afins és un concepte euclidià que necessita una mètrica per poder-se definir. Quan fem la immersió de l'espai euclidià en el projectiu, la matriu de producte escalar (és a dir, la matriu de la mètrica associada a aquest espai) es transforma en una forma bilineal simètrica definida positiva, anomenada **cònica de l'absolut.**
A P^2, la cònica de l'absolut viu a r_∞, té per equació reduïda $x^2 + y^2 = 0$ i està formada per dos punts anomenats I i J. Es pot demostrar que, donada una direcció a π, que de fet és el mateix que donar un punt de r_∞, la direcció perpendicular és la que defineix el punt que forma quaterna harmònica amb I, J i el punt de l'infinit de la primera recta.



Direccions perpendiculars $(M,N;I,J) = -1$

Ara ja es pot començar el problema. Es munta la projectivitat següent entre els feixos de rectes per P i Q.

$$\begin{array}{l} \alpha : P^* \to r_\infty \to r_\infty \to Q^* \to C \to P^* \to r_\infty \to r_\infty \to Q^* \\ \quad\; l \;\; \to M \to N \to QN \to X \to PX \to R \to S \to QS \end{array}$$

on N és la direcció perpendicular de M, i S és la direcció perpendicular a R.

1) α és una projectivitat, ja que és producte de projeccions, de seccions i d'**involucions** (la involució I, J és una projectivitat ja que la relació de perpendicularitat és un isomorfisme lineal definit per la matriu del producte escalar).

2) Aplicant Steiner, el lloc geomètric dels punts intersecció és una cònica, ja que varia la recta l pel feix de P (que és el mateix que dir que el punt X recorre la cònica). Aquesta cònica serà degenerada si i només si la recta PQ és invariant (i.e. $\alpha(PQ)=PQ$). Però això en general no passa mai. L'únic cas possible de degeneració s'obté quan precisament la perpendicular a la recta PQ és la tangent a C en Q. Però fins i tot en aquest cas, si apliquem la projectivitat, ens adonem que el punt resultant de la intersecció és el punt Q. Per tant, C i C' tindran en comú un punt de tangència.

3) Per veure que es manté l'espècie afí, estudiarem el cas de la hipèrbole. Si C és una hipèrbole, la seva intersecció a l'infinit són dos punts reals i conjugats per I, J que són les direccions asimptòtiques de C. Es pot veure que la nova cònica C' té per direccions asimptòtiques les perpendiculars a les de C. Per veure-ho, anomenem A, B les direccions asimptòtiques de C, i E, F les de C'. Per la projectivitat tenim $PE \to E \to A \to QA \to A \to PA \to A \to E \to QE$
Aquí fem servir que les direccions definides pels punts E i A són perpendiculars (anàlogament B i F). També fem servir que una cònica i una recta es tallen en dos punts. La recta QA talla C en dos punts. Però tant Q com A pertanyen a C. Per tant, en fer intersecció amb la cònica C, aquesta dóna com a resultat el punt A (podem fer un raonament anàleg amb les direccions B i F). És clar que la intersecció de les rectes PE i QE ens dóna el punt E (tal com volíem demostrar).

P3 Proveu que el polinomi $P_n(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2nx + 2n + 1$ no té arrels reals

Resolució 1

Tenim $P(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2nx + 2n + 1$

La primera idea davant d'aquest enunciat pot ser la de tractar el polinomi com una funció real qualsevol i tractar d'estudiar-ne la gràfica.

Per fer-ho un primer pas pot ser calcular la derivada:

$$P'(x) = 2nx^{2n-1} - 2(2n-1)x^{2n-2} + 3(2n-2)x^{2n-3} - \ldots - (2n-2)3x^2 + (2n-1)2x - 2n$$

Amb un simple cop d'ull es pot veure que, per a $x = 1$, es verifica:

$$P'(1) = 2n - 2(2n-1) + 3(2n-2) - \ldots - (2n-2)3 + (2n-1)2 - 2n = 0$$

El resultat anterior ens pot fer pensar en la possibilitat que el polinomi tingui un extrem, que podria ser el mínim absolut, per a $x = 1$.

Per comprovar si $P(1) = n + 1$ és un mínim, podem calcular la segona derivada i estudiar-ne el signe.

Doncs bé, la segona derivada val

$$P''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} - 2(2n-1)(2n-2)x^{2n-3} + 3(2n-2)x^{2n-4} - \ldots$$
$$\ldots + (2n-3)\cdot 4\cdot 3x^2 - (2n-2)3\cdot 2x + (2n-1)2$$

i, per tant,

$$P''(1) = 2n(2n-1) - 2(2n-1)(2n-2) + 3(2n-2)(2n-3) - \ldots$$
$$\ldots + (2n-3)\cdot 4\cdot 3 - (2n-2)\cdot 3\cdot 2 + 2(2n-1)$$

El signe d'aquesta derivada ens donaria si $P(1)$ és màxim o mínim i, en cas de ser mínim, encara ens faltaria comprovar que és el mínim absolut.

Podem seguir, però, un altre camí tenint en compte els dos punts següents:

1) Atès que el grau de $P(x)$ és parell, és evident que $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$

2) Les gràfiques de $y = P(x)$ i la recta $y = n + 1$ només es tallen en el punt $(1, n+1)$

En efecte, l'equació $P(x) = n + 1$ es converteix en

$$x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2nx + n = 0 \quad (*)$$

aquest polinomi té, com a mínim, una arrel, que és 1; però l'important és que no en té més.

En efecte, aplicant l'algorisme de Ruffini tenim:

	1	-2	3	-4	5	-6	2n-1	-2n	n
1		1	-1	2	-2	3	-n+1	n	-n
	1	-1	2	-2	3	-3	n	-n	0
1		1	0	2	0	3	0	n	
	1	0	2	0	3	0	n	0	

Tots els coeficients resultants de la segona aplicació de l'algorisme són no negatius i les corresponents potències de x són parells. Això vol dir que el polinomi (*) no té més arrels.

Combinant els resultats d' 1) i 2) tenim que $P(x) \geq n + 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}$ i, en definitiva, no té arrels reals.

Resolució 2

Ho demostrarem pel mètode d'inducció.

Per a n=1 el polinomi queda reduït a $P_1(x) = x^2 - 2x + 3$.
Si prenem el polinomi com a funció tenim:

$$P_1(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$P_1'(x) = 2x - 2$$
$$P_1''(x) = 2$$

i buscant els extrems obtenim $P_1'(x) = 0$ per a $x = 1$ i $P_1''(1) > 0$. El punt $(1, P_1(1)) = (1, 2)$ és, en conseqüència, un mínim de la funció i, per tant, el polinomi no s'anul·la mai.

Com que el mínim es troba per a x = 1, podem pensar si per a qualsevol n el mínim absolut de la funció serà $P_n(1) = n + 1$.

En el cas de n=1, ja hem comprovat que és cert.
Suposem que és cert fins a n-1 i $P_{n-1}(x) \geq n \quad \forall x \in R$

Com que

$$\begin{aligned} & x^2 \cdot P_{n-1}(x) - 2nx + (2n+1) = \\ & = x^2 \cdot (x^{2(n-1)} - 2x^{2(n-1)-1} + 3x^{2(n-1)-2} - \ldots - 2(n-1)x + (2(n-1)+1)) - 2nx + (2n+1) = \\ & = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2(n-1)x^3 + (2n-1)x^2 - 2nx + (2n+1) = \\ & = P_n(x) \end{aligned}$$

tenim

$$P_n(x) = x^2 \cdot P_{n-1}(x) - 2nx + (2n+1) \geq x^2 n - 2nx + (2n+1), \text{ per hipòtesi d'inducció.}$$

La funció $\quad Q(x) = nx^2 - 2nx + (2n+1)$
verifica $\quad Q'(x) = 2nx - 2n$
$\quad Q''(x) = 2n > 0$

i, per tant, tenint en compte que Q és de segon grau, que Q' s'anul·la per a x=1 i que Q'' és positiva, deduïm que el mínim absolut de la funció *Q* val $Q(1) = n + 1$.

Tornant a $P_n(x)$, tenim:

$$P_n(x) \geq Q(x) \geq n + 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

i, com a conseqüència, deduïm que $P_n(x)$ no té arrels.

P4 Doneu una fórmula que permeti sumar tots els divisors del número $N = a^m b^n c^p \ldots$
Comproveu la fórmula d'Euclides per a buscar nombres perfectes (la suma de tots els divisors propis és igual al nombre): "$N=2^{p-1}(2^p-1)$ és perfecte quan 2^p-1 és primer"

Si $N=a^m$, aquest número té m+1 divisors que són $1, a, a^2, \ldots, a^m$. La seva suma serà la suma dels elements d'una progressió geomètrica de raó a. Aplicant la fórmula, el resultat de la suma és: $\frac{a^{m+1}-1}{a-1}$.

Si $N=a^m b^n$, aquest número té (m+1)(n+1) divisors que s'obtenen multiplicant les m+1 potències de a per les n+1 potències de b. La seva suma valdrà:

$$1(1+b+b^2+\ldots+b^n)+a(1+b+b^2+\ldots+b^n)+\ldots+a^m(1+b+b^2+\ldots+b^n)$$

Traient el parèntesi de factor comú, la suma dóna:

$$(1+a+\ldots+a^m)(1+b+b^2+\ldots+b^n)$$

Cada parèntesi és la suma d'una progressió geomètrica, per tant la suma és:

$$\left(\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)$$

En general, si $N=a^m b^n c^p \ldots$ la suma de tots els divisors serà:

$$\left(\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\right)$$

que és el resultat demanat.

Cal comprovar ara la fórmula d'Euclides: si 2^p-1 és primer, llavors $N=2^{p-1}(2^p-1)$ és perfecte.

Cal buscar la suma de tots els divisors de N. Si se sumen tots els divisors de N, entre aquests figura ell mateix. Per tant N és perfecte si i només si la suma de tots els divisors de N dóna 2N.

Primer es calcula la suma de tots els divisors del primer factor de N, que és 2^{p-1}. Utilitzant el resultat anterior, la suma és: $\frac{2^p-1}{2-1}=2^p-1$.

Ara cal buscar la suma dels divisors de l'altre factor: 2^p-1. Per hipòtesi, és primer, per tant els seus divisors són 1 i ell mateix, 2^p-1. La seva suma és, per tant, 2^p.

Així, la suma de tots els divisors de N és $(2^p-1)2^p$. Aquest resultat és el doble de N, en efecte: $2N=2.2^{p-1}.(2^p-1)=2^p.(2^p-1)$. Per tant, N és perfecte.

El recíproc es compleix suposant que N és parell. És a dir, si N és perfecte i parell, llavors $N=2^{p-1}.(2^p-1)$ essent 2^p-1 primer.

Per demostrar-ho, observem que en la descomposició de N en factors primers hi haurà una potència de 2, ja que N és parell. Per tant, $N=2^m.a^n.b^p$... Sigui $q=a^n.b^p$..., així se simplificarà la notació. Per tant, $N=2^m.q$. La suma de les potències de 2^m dóna $2^{m+1}-1$, tal com hem vist abans. Sigui Q la suma de tots els altres divisors de N (els divisors de q). Així, la suma de tots els divisors de N serà $(2^{m+1}-1).Q$. D'altra banda N és perfecte i la suma de tots els seus divisors és 2N (N també està inclòs entre els seus divisors). Per tant es verifica la igualtat: $(2^{m+1}-1).Q=2.N=2.2^m.q=2^{m+1}.q$

Multiplicant el parèntesi de la part esquerra de la igualtat: $2^{m+1}.Q-Q=2^{m+1}.q$

Per tant: $2^{m+1}.Q-2^{m+1}.q=Q$. Traient factor comú: $2^{m+1}.(Q-q)=Q$. Sumant i restant q s'obté: $2^{m+1}.(Q-q)=(Q-q)+q$. Passant (Q-q) a l'altre costat de la igualtat i traient-lo de factor comú: $(Q-q).(2^{m+1}-1)=q$. D'on $2^{m+1}-1=\frac{q}{Q-q}$.

La part esquerra d'aquesta última igualtat és un nombre enter, per tant la divisió entre q i Q-q també. Així, Q-q és un divisor de q. Si es demostra que Q-q és 1, quedarà que $2^{m+1}-1=q$; substituint a $N=2^m.q$, s'obté $N=2^m.(2^{m+1}-1)$, que és el resultat buscat substituint l'exponent m per p-1.

Així només falta demostrar que Q-q és 1. Si no fos així, q tindria com a mínim tres divisors, que serien 1, Q-q i q. Per hipòtesi, la suma de tots els divisors de q era Q, però si se sumen aquests tres divisors dóna Q+1, que sobrepassa Q!! Per tant, Q-q ha de ser 1, i així q només té 2 divisors, que són 1=Q-q i q, divisors que sumen Q. D'aquí s'obté també que $q=2^{m+1}-1$ és primer.

Així, tots els nombres perfectes parells s'obtenen a partir de la fórmula d'Euclides. Això fou demostrat per Euler. Avui encara no se sap si hi ha nombres perfectes imparells; els nombres perfectes coneguts, 24 en total, són tots parells. Sembla que tots els nombres perfectes han de ser parells, però això no s'ha pogut demostrar.

El segon factor de la fórmula d'Euclides, 2^p-1, ha de ser un nombre primer, els nombres primers obtinguts així s'anomenen primers de Mersenne. Aquests nombres només són primers si l'exponent p ho és. El recíproc és fals. Actualment es coneixen 24 primers de Mersenne, i com a conseqüència, 24 nombres perfectes.

Tampoc no se sap si el nombre de primers de Mersenne és finit o infinit i, per tant, si la sèrie de nombres perfectes és limitada o il·limitada.

Els últims nombres perfectes són nombres molt elevats i s'han obtingut amb l'ajuda de potents ordinadors. En la taula següent hi ha alguns dels nombres perfectes que es coneixen i el total de les seves xifres.

Valor de p	Primer de Mersenne	Nombre perfecte	Total de xifres
p=2	$2^p-1=3$	N=6	1
p=3	$2^p-1=7$	N=28	2
p=5	$2^p-1=31$	N=496	3
p=7	$2^p-1=127$	N=8128	4
p=13	$2^p-1=8191$	N=33550336	8
p=17	$2^p-1=131071$	N=8589869056	10
p=19	$2^p-1=524287$	N=137438691328	12
p=31	$2^p-1=2147483647$	N=2305843008139952128	19
p=61			37
p=89			54
p=107			65
p=127			77
p=521			314
p=607			366
p=1279			770
p=2203			1327
p=2281			1373
p=3217			1937
p=4253			2561
p=4423			2663
p=9689			5834
p=9941			5985
p=11213			6751
p=19937			12003

Números y figuras, H. Rademacher
Festival mágico-matemático, M. Gardner

P5 Observeu les igualtats següents: $2+3+7+4=5+6+4+1$

$$2^2+3^2+7^2+4^2=5^2+6^2+4^2+1^2$$

Com es poden construir igualtats d'aquest tipus?

El procés és generalitzable; per exemple:

$$12+5+13+6+17+4+14+1=2+15+3+16+7+14+4+11$$

$$12^2+5^2+13^2+6^2+17^2+4^2+14^2+1^2=2^2+15^2+3^2+16^2+7^2+14^2+4^2+11^2$$

$$12^3+5^3+13^3+6^3+17^3+4^3+14^3+1^3=2^3+15^3+3^3+16^3+7^3+14^3+4^3+11^3$$

Investigueu

Siguin a i b dos nombres reals qualssevol. A partir d'aquests dos, donat k real, tenim la igualtat $a + b = (a-k) + (b+k)$. Per tant, es poden aconseguir quatre nombres reals tals que $a+b=c+d$

1. Si $a+b = c+d$, aleshores, per qualsevol k, es verifica

$$a + b + (c+k) + (d+k) = (a+k) + (b+k) + c + d$$

i també és verifica que:

$$a^2+b^2+(c+k)^2+(d+k)^2=(a+k)^2+(b+k)^2+c^2+d^2$$

ja que, operant, totes les potències al quadrat s'anul·len i queda:

$2k(c+d) = 2k(a+b)$ i aquesta igualtat és certa.

2. Per 1., es poden trobar $8 = 2^2 +2^2$ nombres reals tals que:

$$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$$

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2$$

3. <u>Inducció</u>

Per qualsevol n natural, es poden trobar $2^{n+1}=2^n+2^n$ nombres reals tals que per qualsevol $m \le n$, m natural, es verifica:

$$a_1^m+a_2^m+\ldots+a_{2n}^m=b_1^m+b_2^m+\ldots+b_{2n}^m$$

Se suposa cert per n i ho demostrarem per n+1. Com que ja s'ha vist que és cert per n=1 (i també per n=2), quedarà demostrat per tot n

* Si és cert per n, aleshores, pel cas m=1 i per qualsevol k real tenim:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2n}+(b_1+k)+(b_2+k)+\ldots+(b_{2n}+k)=$$
$$=(a_1+k)+(a_2+k)+\ldots+(a_{2n}+k)+b_1+b_2+\ldots+b_{2n}$$

I a més, per qualsevol $m \le n+1$, m i n naturals, es verifica:

$$a_1^m+a_2^m+\ldots+a_{2n}^m+(b_1+k)^m+(b_2+k)^m+\ldots+(b_{2n}+k)^m=$$
$$=(a_1+k)^m+(a_2+k)^m+\ldots+(a_{2n}+k)^m+b_1^m+b_2^m+\ldots+b_{2n}^m$$

ja que, operant, i després de simplificar totes les potències d'ordre m, queda:

$$mk(b_1^{m-1}+b_2^{m-1}+\ldots+b_{2n}^{m-1})+\binom{m}{2}k^2(b_1^{m-2}+b_2^{m-2}+\ldots+b_{2n}^{m-2})+\ldots+$$
$$+mk^{m-1}(b_1+b_2+\ldots+b_{2n})=$$
$$=mk(a_1^{m-1}+a_2^{m-1}+\ldots+a_{2n}^{m-1})+\binom{m}{2}k^2(a_1^{m-2}+a_2^{m-2}+\ldots+a_{2n}^{m-2})+\ldots+$$
$$+mk^{m-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{2n})$$

I per hipòtesi d'inducció, aquesta igualtat és certa, ja que si $m \le n+1 \Rightarrow m-1 \le n$

P6 Demostreu que tots els nombres de la forma $2^{2^n}+1$ (anomenats primers de Fermat) acaben en 7, essent n un nombre natural més gran que 1.

Caldrà demostrar que 2^{2^n} acaba en 6 per a n>1.

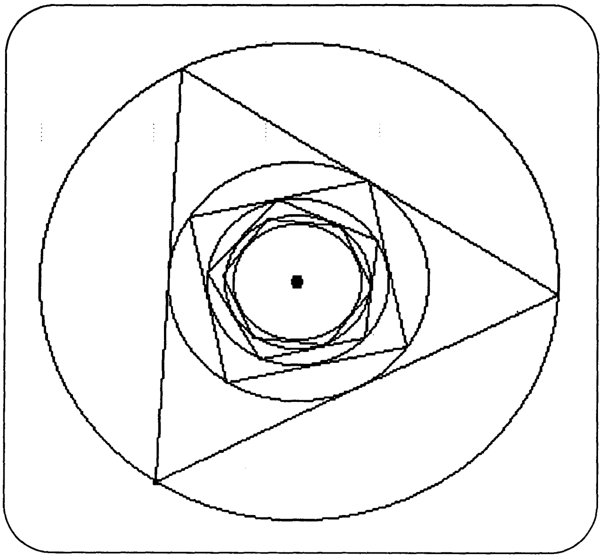
Cal observar que cada element és el quadrat de l'anterior, en efecte: si $A=2^{2^n}$, elevant al quadrat els dos membres de la igualtat anterior s'obté: $A^2=\left(2^{2^n}\right)^2=2^{(2^n.2)}=2^{2^{n+1}}$.

Per a n=2, la potència 2^{2^n} dóna 16, que ja acaba en 6. Per a n=3 s'obté el quadrat de l'anterior, tal com s'ha vist, és a dir, 16^2, que també acaba en 6, i això es complirà per a tot n>2, ja que el quadrat d'un número que acaba en 6 és un altre número que també acaba en 6.

Cal assenyalar finalment que d'aquests números, anomenats primers de Fermat, només són primers els quatre primers números, és a dir, pels valors de n=1, 2, 3 i 4, que donen 5, 17, 257 i 65537. El següent nombre, que és el 4294967297 ja no és primer. La seva descomposició, obtinguda per Euler, és: 641x6700417. Els nombres que segueixen tampoc no són primers.
(B.Lewis, *Matemáticas modernas. Aspectos recreativos*)

P7 Sigui una circumferència de radi R i un triangle equilàter inscrit dins seu. Dintre del triangle anterior inscrivim una altra circumferència i dintre seu un quadrat. Dintre del quadrat inscrivim una altra circumferència i dintre seu un pentàgon regular. Iterem aquesta construcció alternant circumferències i polígons regulars d'un costat més en cada iteració.
Quin és el límit del radi de la circumferència inscrita en les successives iteracions?

(John Allen Paulos, *Más de los números,* Tusquets Editors. 1993)



Resolució

Segons el mateix autor del llibre d'on està tret el problema, "a primera vista sembla com si hagués de ser zero, i que el procés acabaria en un únic punt aïllat. Recordem, però, que, a mesura que augmenta el nombre de costats dels polígons, aquests es fan cada vegada més circulars i, després d'un cert temps, el procés es converteix, o almenys gairebé es converteix, en la inscripció d'un cercle dins d'un altre, amb una pèrdua mínima d'àrea entre un pas i el següent. El límit d'aquest procés és un cercle, concèntric amb el primer i d'un diàmetre aproximadament 12 vegades menor que el d'aquest".

Representarem per $R = T$ el radi del cercle inicial. Per $R_3 = Q$, el radi del cercle inscrit al triangle. Per $R_4 = P$, el radi del cercle inscrit al quadrat. I, en general, per $R_m = M$ el radi del cercle inscrit al polígon de m costats. És fàcil comprovar que

$$Q = T \cdot \cos 60 = T \cdot \cos \tfrac{\pi}{3}$$

és a dir,

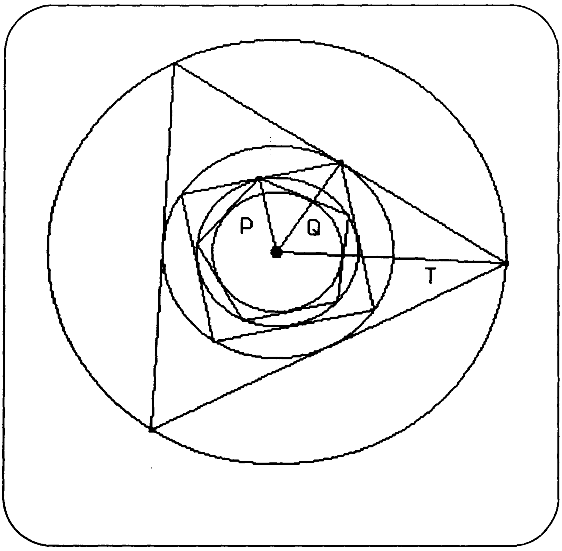
$$R_3 = R \cdot \cos \tfrac{\pi}{3}$$

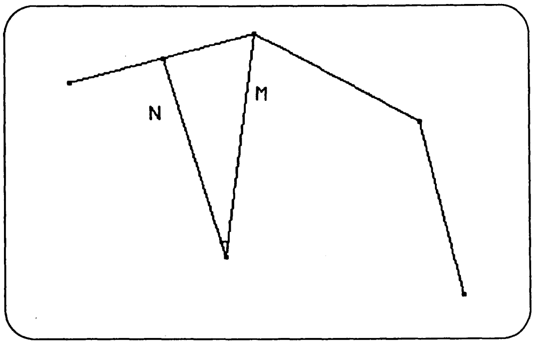
i que

$$P = Q \cdot \cos 45 = Q \cdot \cos \tfrac{\pi}{4}$$

és a dir,

$$R_4 = R_3 \cdot \cos \tfrac{\pi}{4} = R \cdot \cos \tfrac{\pi}{3} \cdot \cos \tfrac{\pi}{4}$$





Si $R_{n-1} = R_m = M$ és el radi del polígon de $n-1$ costats i $R_n = N$ el del polígon de n costats, es verifica

$$N = M \cdot \cos\frac{180}{n} = M \cdot \cos\frac{\pi}{n}$$

és a dir,

$$R_n = R_{n-1} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$$

Tenint en compte les consideracions anteriors, tenim:

$$R_n = R_{n-1} \cdot \cos\frac{\pi}{n} = R_{n-2} \cdot \cos\frac{\pi}{n-1} \cdot \cos\frac{\pi}{n} = R \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \ldots\ldots \cdot \cos\frac{\pi}{n-1} \cdot$$

El límit del radi serà expressat per

$$R_\infty = \lim_{n\to\infty} R_n = R \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{5} \cdot \ldots\ldots \cdot \cos\frac{\pi}{n-1} \cdot \cos\frac{\pi}{n}\right)$$

No hem trobat una manera de calcular aquest límit i hem hagut de recórrer al càlcul numèric un resum del qual mostrem a continuació.
Suposant que $R = 1$, tenim:

R_3=0.5	R_{20}=0.1462645976531552	$R_{5.000}$=0.1150555327526143
R_4=0.3535533905932738	R_{30}=0.1351392632171725	$R_{10.000}$=0.1149987776396105
R_5=0.2860307014088422	R_{40}=0.1298408644212033	$R_{50.000}$=0.1149533896248006
R_6=0.2477098536823387	R_{50}=0.126743419638792	$R_{100.000}$=0.1149477171274502
R_7=0.2231788664404506	R_{100}=0.1207271226093694	$R_{500.000}$=0.1149431792902697
R_8=0.2061903867934024	R_{200}=0.1178061889991415	$R_{1.000.000}$=0.1149426120706656
R_9=0.1937555849467525	R_{500}=0.1160809516182976	$R_{5.000.000}$=0.1149421582965918
R_{10}=0.1842725116321881	$R_{1.000}$=0.1155103783604969	$R_{10.000.000}$=0.1149421015749328

Podem imaginar que en tots aquests resultats hi haurà moltes xifres errònies, perquè, tot i haver usat variables de doble precisió, s'han aconseguit amb un senzill programa iteratiu.

De tota manera, el resultat que donava el llibre, de $\frac{1}{12} = 0.08333333333$, s'allunya molt de l'obtingut.

P8 Considereu la successió de segments de longituds 1, 1/2, 1/3, 1/4... , cadascun dels quals forma un angle α amb la direcció de l'anterior. El primer segment té un extrem a l'origen de coordenades i forma un angle α amb l'eix OX. Calculeu les coordenades del punt límit.

Considerem primer alguns casos particulars:

- Si $\alpha=0°$ tenim la sèrie $1+1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ...$, que és una sèrie divergent. Per tant, no té punt límit.
- Si $\alpha=180°$ tenim la sèrie $- 1+1/2 - 1/3 + 1/4 - 1/5 + ...$, que és una sèrie alternada que suma -ln2. El punt límit és (-ln2,0).

L'estudi es farà considerant els extrems dels segments com els afixos de vectors. Es pot observar, unint uns quants segments amb un angle de variació α, que els afixos són respectivament $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(\cos\alpha + 1/2 \cos 2\alpha , \sin\alpha + 1/2 \sin 2\alpha)$, i així successivament. Per tant, es tracta de resoldre la sèrie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(\cos k\alpha + i\sin k\alpha)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(\cos k\alpha + i\sin k\alpha) \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^k$$

(1) Fórmula de Moivre (2) $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$

Calculant el límit, tenim $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^k = -\ln(1-z)$ *per* $z \neq 1$ (el cas 1+0i ja estava descartat)

Càlcul del límit

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$ (sèrie geomètrica complexa on el radi de convergència $|z| \leq 1$, excepte el cas 1+i0, que ja hem descartat)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z z^n dz = \int_0^z \frac{1}{1-z} dz = -\ln(1-z)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-z) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

El resultat - ln(1-z) és un nombre complex.Calcularem la part real i la part imaginària.

Definició de logaritme principal: $\log z = \log|z| + i\, Arg\, z$

$$-\ln(1-z) = -\ln|1-z| - i\, Arg(1-z)$$

Càlcul de la part real

$$|1-z| = |1-\cos\alpha - i\sin\alpha| = |(1-\cos\alpha) - i\sin\alpha| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} =$$
$$\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \sqrt{2-2\cos\alpha} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2\cdot 2(\tfrac{1-\cos\alpha}{2})}$$
$$2\sqrt{(\tfrac{1-\cos\alpha}{2})} \overset{(3)}{=} 2\sin\tfrac{\alpha}{2}$$

(3) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{(\frac{1-\cos\alpha}{2})}$, però $\frac{\alpha}{2}$ és un angle del primer o segon quadrant, per tant el sinus serà positiu.

Per tant: **Part real - Coordenada X:** $-\ln(2\sin\frac{\alpha}{2})$

Càlcul de la part imaginària

$$\text{Arg }(1\text{-z}) = \text{Arg }(1 - \cos\alpha - \text{i}\sin\alpha) = \beta$$

$$\tan\beta = \frac{-\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \overset{(3)}{=} \frac{-\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \overset{(4)}{=} \frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{-\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{-\sin\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= \frac{\cos(-\frac{\alpha}{2})}{\sin(-\frac{\alpha}{2})} = \cot(-\tfrac{\alpha}{2}) = -\cot(\tfrac{\alpha}{2}) = \tan(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\pi}{2}) \quad \text{per tant} \quad \beta = \frac{\alpha+\pi}{2}$$

(4) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

El nombre complex $1\text{-z} = 1 - \cos\alpha + \text{i}\sin\alpha$ està situat en el primer o en el quart quadrant per qualsevol angle $\alpha \in (0, 2\pi)$

Poden passar dos casos:

$1-\cos\alpha > 0$ *i* $\sin\alpha > 0$ $\rightarrow$ primer quadrant
$1-\cos\alpha > 0$ *i* $\sin\alpha < 0$ $\rightarrow$ quart quadrant

Per tant, s'ha de restar π a l'angle β.

$$\beta = \frac{\alpha+\pi}{2} - \pi = \frac{\alpha-\pi}{2}$$

Per tant: **Part imaginària - Coordenada Y: -Arg (1-z) =** $\frac{\alpha-\pi}{2}$

Així, la solució del problema és el punt $\left(-\ln(2\sin\frac{\alpha}{2}),\ \frac{\pi-\alpha}{2}\right)$

P9 Si ABCD és un quadrilàter amb les diagonals perpendiculars, els quatre punts mitjans dels costats P,Q,R,S i els quatre peus de les perpendiculars des d'aquests punts mitjans al costat oposat, P',Q',R',S', són en una circumferència que té per centre el punt d'intersecció de les rectes PR i QS.

(Louis Brand of Cincinnati. 1994)

1r Fet.- *Si unim els punts mitjans dels quatre costats d'un quadrilàter, el nou quadrilàter format és un paral·lelogram. (Figura* 1)

Es dibuixa la diagonal AC, els triangles ABC i PBQ són semblants, ja que tenen un angle igual B que és comú, i els dos costats que el formen són proporcionals. Així PQ és paral·lel a AC i també la meitat d'AC. Fent el mateix a l'altra banda, RS és paral·lel a AC i igual a la meitat d'AC. Per tant PQ=RS i paral·lels.

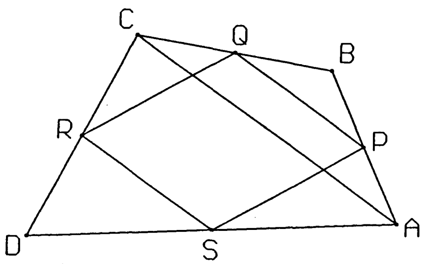
Conseqüència immediata.- Com que els costats del paral·lelogram són paral·lels a les diagonals, si aquestes són perpendiculars el paral·lelogram és un rectangle.

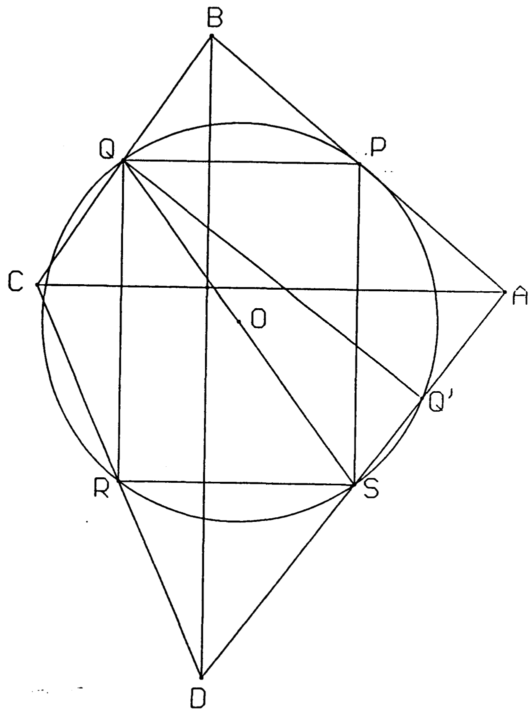
2n Fet.- *Qualsevol rectangle es pot inscriure en una circumferència que té el centre en el punt d'intersecció de les diagonals. (Figura* 2)

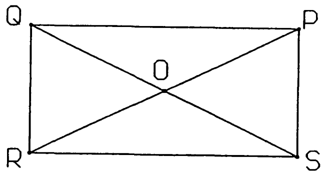
Pel teorema de Pitàgores les diagonals són iguals. Els triangles PSO i QRO són iguals ja que O=O per oposats pel vèrtex, R=P per alterns interns i PS=QR costats oposats d'un rectangle. Per tant, SO=OQ i PO=OR i les diagonals es tallen al punt mig.

Per tant, existeix una circumferència que passa per PQRS i que té el centre en el punt d'intersecció de les rectes PR i QS. Només cal veure que els altres quatre punts també hi són.

Demostració per Q'. (Figura 3)
El triangle QQ'S és rectangle per construcció, i QS és un diàmetre de la circumferència, per tant el vèrtex Q' és sobre la circumferència per arc capaç.


C
Q
B
R
P
D
S
A


B
Q
P
C
A
O
Q'
R
S
D


Q
P
O
R
S

P10 En un triangle ABC, els nou punts següents:
- els punts mitjans dels tres costats A', B' i C',
- els peus de les tres altures P,Q i R,
- els punts d'Euler, que són els punts mitjans dels segments que uneixen els tres vèrtexs amb l'ortocentre X, Y i Z, són en un cercle.

(1700-1800; enunciat el 1821 per Poncelet)

Considerem la circumferència circumscrita al triangle A'B'C'.
Demostrarem que P, peu de l'altura que passa per A, és un punt de la circumferència; el mateix procediment es pot aplicar als punts Q i R, peus de les altures per B i C respectivament.

L'angle APA' és recte per hipòtesi. Passa el mateix amb l'angle XPA'. Si es demostra que el segment XA' és un diàmetre de la circumferència, llavors per arc capaç P ha de ser de la circumferència.

Demostració que XA' és un diàmetre de la circumferència

Els triangles ABC i A'B'C' tenen la mateixa recta d'Euler ja que:

a) tenen el mateix baricentre (G), perquè les seves mitjanes coincideixen per Thales.
b) les mediatrius d'ABC són les altures d'A'B'C'. Per tant, l'ortocentre d'A'B'C' (H2) coincideix amb el circumcentre del triangle ABC.

A la recta d'Euler el baricentre està situat entre l'ortocentre i el circumcentre, i la distància de l'ortocentre al baricentre és el doble que la distància del circumcentre al baricentre.
Suposem que G està situat sobre el 0 d'una recta graduada i que H2 és sobre l'1, llavors el circumcentre d'A'B'C' (CI) és a -0.5 i l'ortocentre d'ABC (H) és a -2. Per tant:

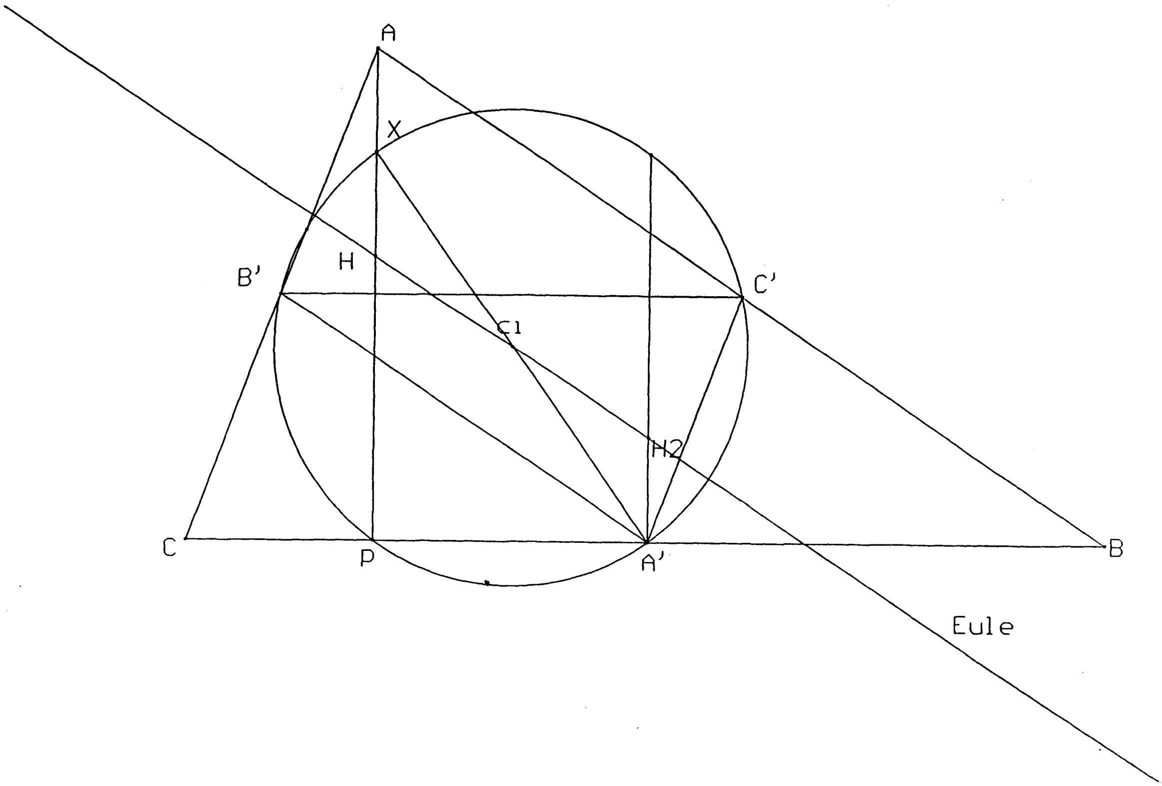
$$d(CI,H2) = d(CI,H) = 1.5$$

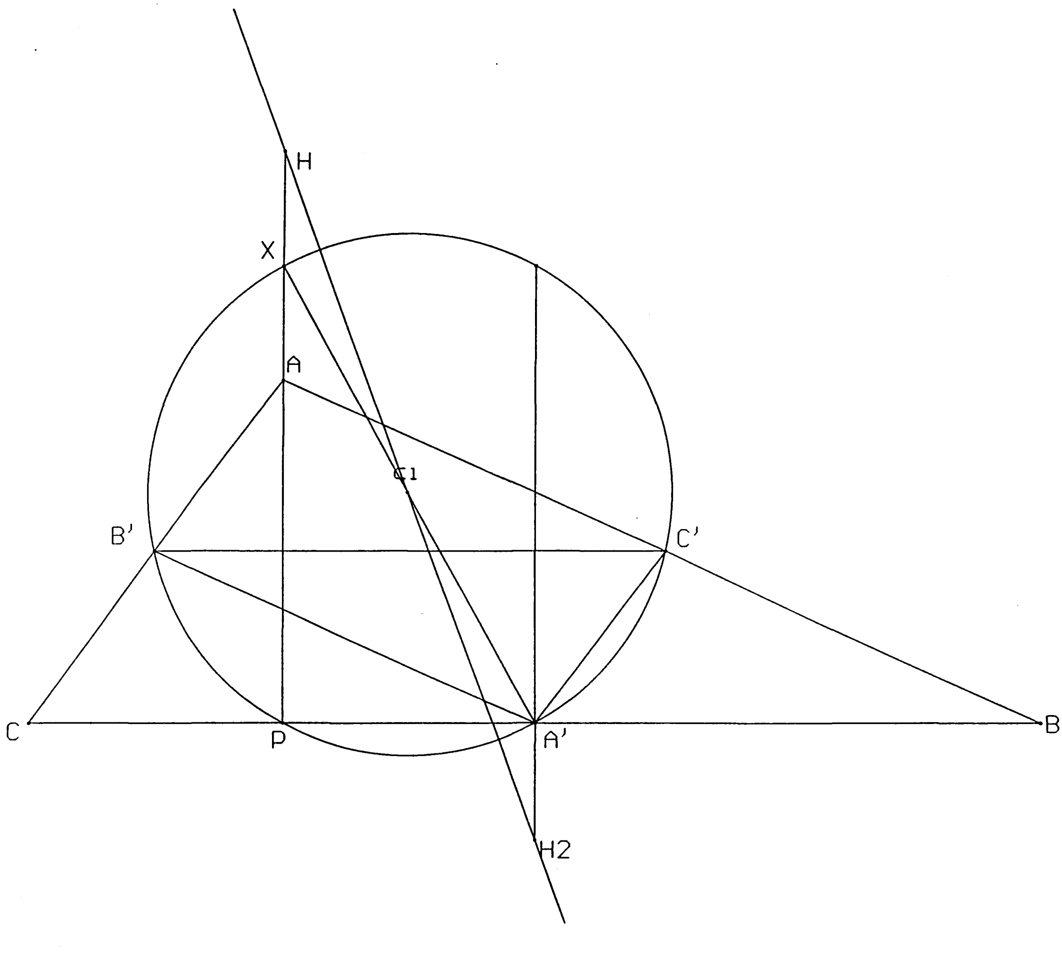
és a dir, el circumcentre CI està situat al punt mig del segment que uneix els dos ortocentres.

Com que els costats BC i B'C' són paral·lels, les alçades respectives per A i A' són dues rectes paral·leles secants a una circumferència i a la mateixa distància del centre. Per tant, les dues cordes que determinen són iguals i paral·leles i els seus extrems determinen un paral·lelogram inscrit en una circumferència que, per tant, ha de ser un rectangle, i la seva diagonal XA' és un diàmetre.

Demostració que X és un punt d'Euler

S'ha de comprovar que d(H,A)=2.d(X,A)
Per la igualtat dels triangles XHCi i H2A'Ci d(H,X)=d(H2,A')
Per la semblança dels triangles ABC i A'B'C' d(H,A)=2d(H2,A') c.v.d.


A
X
H
B'
C'
C1
H2
C
P
A'
B
Eule


H
X
A
C1
B'
C'
C
P
A'
B
H2

P11 Tres cercles del mateix radi r passen per un punt O i intercepten dos a dos en un segon punt P, Q, R, respectivament. El circumcercle del triangle PQR és un cercle també de radi r.

Siguin O_1, O_2, O_3 els centres de les 3 circumferències.

Com que O és un punt comú a les 3 circumferències $d(O, O_1) = d(O, O_2) = d(O, O_3) = r$

per tant, el circumcercle del triangle $O_1O_2O_3$ és de radi r i centre O.

Demostrarem que el triangle PQR és igual al triangle $O_1O_2O_3$, amb la qual cosa queda demostrat el problema.

Segons la figura, agafem els rombes:

rombe 1: O_1PO_2O, rombe 2: OO_2RO_3, rombe 3: O_1OO_3Q.

Són rombes ja que tots els costats són iguals a r.

Sigui α la meitat de l'angle O_1 i O_2 del rombe 1.

Sigui β la meitat de l'angle O_2 i O_3 del rombe 2.

Sigui γ la meitat de l'angle O_1 i O_3 del rombe 3.

Si ara agafem el triangle $O_1O_2O_3$, tenim:

$$O_1 = \alpha + \gamma\,,\ O_2 = \alpha + \beta,\ O_3 = \beta + \gamma$$

per tant, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180$ (1)

Considerem els triangles PO_1O_2 i QO_3R.

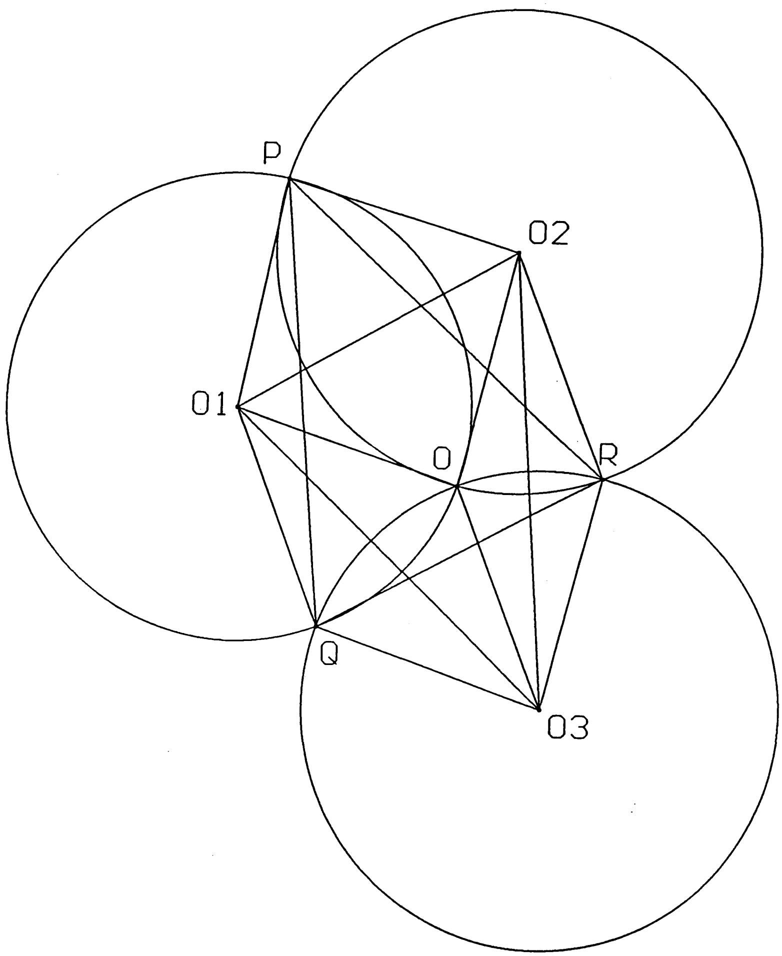
$$PO_1 = PO_2 = r = QO_3 = RO_3.$$

Per demostrar que són iguals cal veure que $\hat{O}_3 = \hat{P}$

Però $\hat{O}_3 = 2\beta + 2\gamma$

$\hat{P} = 180 - 2\alpha$ per (1) els dos angles són iguals i, per tant, els 2 triangles són iguals, amb la qual cosa queda demostrat que $\overline{O_1O_2} = \overline{QP}$.

Fent un raonament semblant, es pot veure que $\overline{O_1O_3} = \overline{PR}$ i $\overline{O_3O_2} = \overline{QP}$, i així queda demostrada la igualtat dels triangles.


P
O2
O1
O
R
Q
O3

P12 25,365 i 2030 tenen la propietat compartida següent: existeixen tres, cinc, set quadrats consecutius tals que, respectivament:

$$3^2+4^2=5^2=25$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=365$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2=2030$$

¿Podríeu trobar un mètode general que ens permeti calcular tots els nombres naturals que es poden obtenir com a suma de **n** quadrats consecutius i també com a suma dels **n-1** quadrats consecutius següents? És el 45955 un d'aquests números?

Resolució: el problema quedarà resolt si trobem tots els valors de n i k que verifiquen la igualtat següent:

$(k-(n-1))^2+(k-(n-2))^2+\ldots+(k-2)^2+(k-1)^2+k^2=(k+1)^2+(k+2)^2+\ldots+k+(n-1))^2$

$n, k \in N$, $k \neq 0$ $k > n$. És clar que el nombre de quadrats consecutius del primer membre és n i al segon membre hi ha $n-1$ quadrats. El valor de k és el valor de la base del darrer (i major) element del primer membre.

La simetria que es pot observar en aquesta fórmula ens permet obtenir una expressió molt més reduïda; operem:

$$k^2-2(n-1)k+(n-1)^2+k^2-2(n-2)k+(n-2)^2+\ldots\ldots\ldots+k^2-4k+4+k^2-2k+1+k^2 =$$
$$k^2+2(n-1)k+(n-1)^2+k^2+2(n-2)k+(n-2)^2+\ldots\ldots\ldots+k^2+4k+4+k^2+2k+1.$$

Al segon membre s'ha aplicat la propietat commutativa. Es poden observar els elements repetits a cada membre de la igualtat. La igualtat inicial és equivalent a la següent:

$k^2=4k((n-1)+(n-2)+\ldots\ldots+3+2+1))$. Com que $1+2+3+\ldots..+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ obtenim altres expressions equivalents a la fórmula inicial:

$k^2=\frac{4kn(n-1)}{2}$ $\rightarrow$ $k^2=2kn(n-1)$. Com que $k\neq 0$, podem dividir els dos membres per k i obtenim la fórmula cercada:

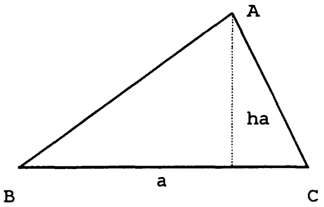
$$\boxed{k=2n\,(n-1)}$$

Aquesta fórmula ens dóna una família infinita de solucions: per cada valor del "paràmetre" n (a partir de $n=2$) obtenim un valor de k, i per tant, un nombre natural que es pot descompondre de la manera indicada. Les igualtats proposades a l'enunciat corresponen a les tres primeres solucions (per $n=2$, $n=3$ i $n=4$). La taula adjunta indica els valors successius de n, k, i la suma de cada membre (que és igual a N).

n	2	3	4	5	6	7	8
k	4	12	24	40	60	84	112
N	25	365	2030	7230	19855	45955	94220

Podem observar que, efectivament, el número 45955 és una de les solucions.

P13 Construïu, amb regle sense marques i compàs, un triangle un cop conegudes les seves tres altures. En quines condicions tres segments qualssevol poden ser les altures d'un triangle?



Si ABC és un triangle, anomenem a, b i c els costats del triangle i h_a, h_b, i h_c les corresponents altures relatives al vèrtexs A, B i C, respectivament.

Prenem com a mesura unitat l'altura més petita, i si identifiquem la nomenclatura dels segments amb la de la seva mesura, podem suposar: $1 = h_a \leq h_b \leq h_c$

Es verifica:

El producte d'un costat multiplicat per l'altura relativa al vèrtex oposat és constant i és igual al doble de l'àrea del triangle.

Així, si S és l'àrea del triangle ABC,
$a.h_a = b.h_b = c.h_c = 2.S$, i per tant els costats a, b i c són inversament proporcionals a les altures relatives als vèrtexs oposats. És a dir,

$$a = \frac{2.S}{h_a} = \frac{2.S}{1} \qquad b = \frac{2.S}{h_b} \qquad c = \frac{2.S}{h_c}$$

Per tant, el triangle de costats *a, b* i *c* és semblant al triangle de costats $1 \quad \frac{1}{h_b} \quad \frac{1}{h_c}$

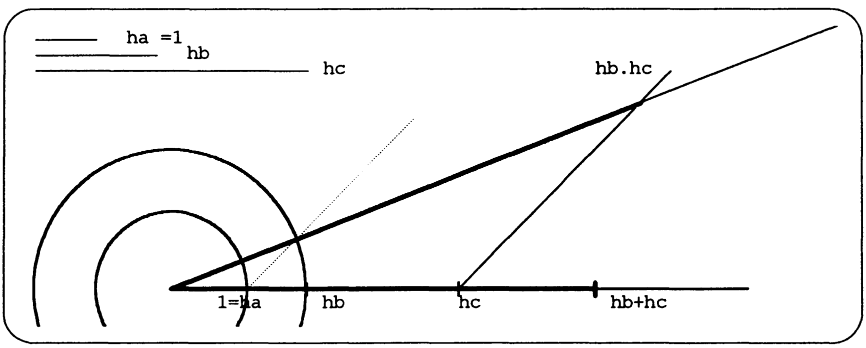
** Condició per tal que tres segments h_a, h_b, i h_c siguin les tres altures d'un triangle.*

Tres segments h_a, h_b, i h_c , $1=h_a< h_b,< h_c$, són les altures d'un triangle si els segments $1 = \frac{1}{h_a} \quad \frac{1}{h_b} \quad \frac{1}{h_c}$ determinen un triangle, és a dir, si el segment més gran és menor que la suma dels altres dos.

Així, de $1 = h_a \leq h_b \leq h_c$ deduïm $1 \geq \frac{1}{h_b} \geq \frac{1}{h_c}$ i per tant, si aquests han de formar triangle,

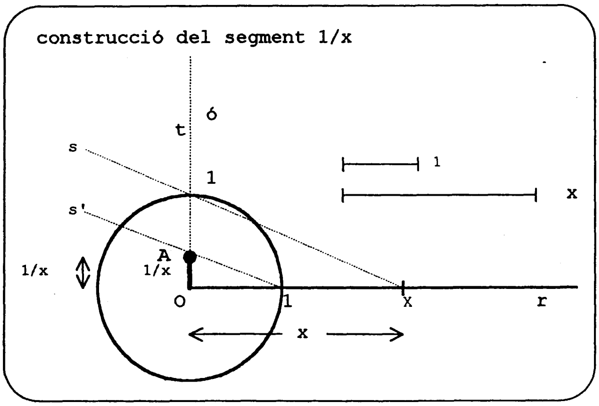
haurà de ser $1 < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, condició equivalent a $\boxed{h_b.h_c < h_b + h_c}$

Per comparar gràficament els segments $\mathbf{h_b.\ h_c}$ i $\mathbf{h_b + h_c}$, ho podem fer seguint la construcció:

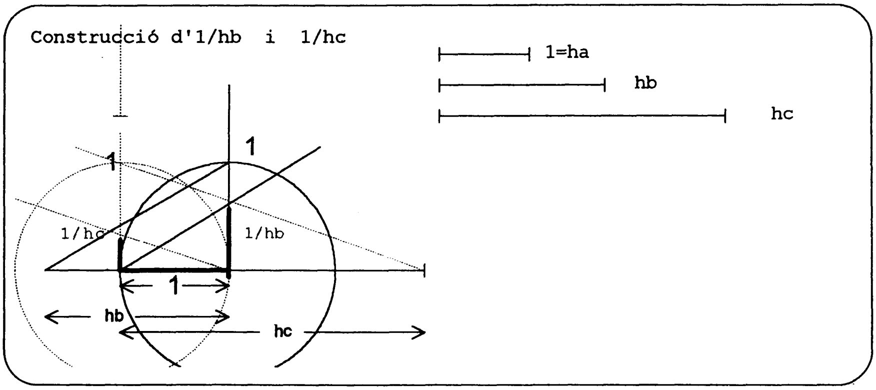


**** *Construcció del triangle d'altures $1=h_a$, h_b i h_c***

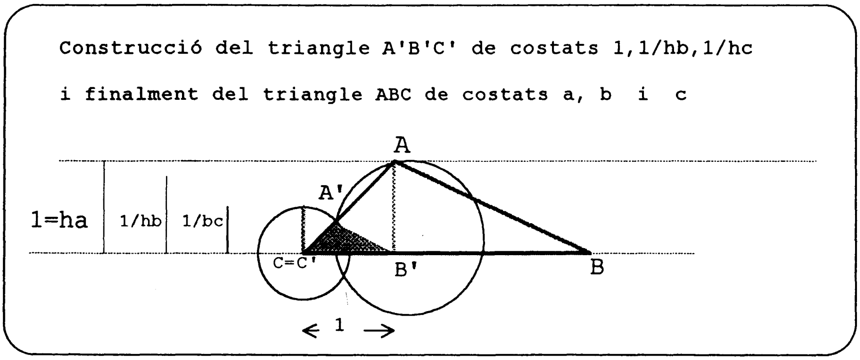
Primer construirem els segments $\frac{1}{h_b}$ i $\frac{1}{h_c}$, en segon lloc construirem el triangle A'B'C' de costats $1 \quad \frac{1}{h_b} \quad \frac{1}{h_c}$ i finalment el triangle ABC semblant a l'anterior i d'altura relativa al vèrtex A de mesura $1=h_a$.



Sobre una recta r construïm els segments 1 i x amb origen comú i en el mateix sentit. Dibuixem una recta t secant a r (a l'origen O), i sobre seu construïm el segment unitat amb origen O. Considerem la recta s que passa per l'extrem X de r i la unitat de t, i la recta s', paral·lela a la recta s i que passa per la unitat de r. Pel teorema de Tales, OA és un segment de longitud 1/x.



$1/h_c$ s'ha construït com a 1/x. La construcció d'$1/h_b$ és una construcció simètrica a la d'1/x.



P14 Calculeu

$$\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k}+\ldots\ldots+\binom{n+m}{k} \quad n,m,k\in N, k\le n$$

Resolució: en primer lloc explicarem la solució obtinguda fent una **justificació intuïtiva**. A la segona part d'aquesta resolució **demostrarem** els resultats. L'observació de la part inicial del triangle de Tartaglia ens permet obtenir de manera intuïtiva la solució:

1
1 1
1 **2** 1
1 **3** 3 1
1 **4** 6 4 1
1 **5** 10 10 5 1
1 **6** 15 20 15 6 1
1 **7** 21 35 35 21 7 1
1 **8** 28 56 70 56 28 8 1
1 **9** 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 **45** 120 210 252 210 120 45 10 1

•Si $n=k$, $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots\ldots+\binom{k+m}{k}=\binom{k+m+1}{k+1}$

Estem sumant elements que corresponen a línies que són paral.leles al "costat" que té tots els elements iguals a "1" de l'esquerra del triangle: cal recordar la relació que hi ha entre els números combinatoris i els valors que apareixen al triangle. En aquest cas (quan $n=k$), la suma comença pel primer element (si considerem un ordre descendent) i té m sumands. El resultat és sempre l'element que es troba al lloc immediatament inferior i a la dreta de l'ultim element sumat. Per exemple, si considerem la suma dels elements assenyalats en negreta ($k=1, m=8$), obtenim la suma de la successió dels primers 9 nombres naturals (excepte el zero), que és igual a 45. Cal remarcar que aquesta fórmula ens permet sumar totes les successions que formen les línies esmentades.

••Si $n>k$, $\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k}+\ldots+\binom{n+m}{k}=\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{k}{k}-\binom{k+1}{k}-\ldots-\binom{n-1}{k}$

Aquest cas és semblant a l'anterior. Només hem de tenir en compte que, si es comença a sumar per l'element situat a la posició n, el resultat l'hem de restar la suma dels anteriors. Si tornem a aplicar la fórmula anterior per sumar aquests darrers, obtenim una fórmula més simplificada:

$$\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k}+\ldots+\binom{n+m}{k}=\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$$

Oferim a continuació una demostració d'aquests resultats utilitzant el mètode d'inducció completa.
És clar que el primer cas exposat no és més que un cas particular del segon (si $n = k$ no existeix l'element $\binom{n}{k+1}$ i no s'ha de restar res a l'altre element, que és equivalent en ambdós casos).

Demostració de la fórmula general: aquesta demostració utilitza un resultat conegut de la teoria combinatòria: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad n > k \quad ,n,k \in N$

Utilitzem l'esmentat mètode **d'inducció completa** sobre m.

*La fórmula indicada és vàlida per $m = 1$:
Com que $\binom{n+2}{k+1} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, si reduïm els termes iguals que es troben a cada membre de la igualtat obtenim:

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

*De manera similar, es pot comprovar que és certa per $m = 2, m = 3...$
Si suposem que és certa per $m - 1$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \dots\dots\dots + \binom{n+m-1}{k} = \binom{n+m}{k+1} - \binom{n}{k+1}.$$

* Per demostrar que és certa per m només cal sumar el terme $\binom{n+m}{k}$ a cada membre de la igualtat. Al primer membre obtenim els mateixos valors que a la fórmula que volem demostrar. Per acabar de comprovar la igualtat cercada, només cal tenir en compte que:

$\binom{n+m}{k+1} + \binom{n+m}{k} = \binom{n+m+1}{k+1}$ i fer la substitució al segon membre dels dos elements d'aquesta suma pel resultat.

CONTINUACIÓ DEL PROBLEMA número 14

"Suma de les k-potències dels n primers nombres naturals $\sum_{i=1}^{n} i^k$

Si k és menor o igual que n, es verifica

(1) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\bullet\bullet\bullet+\binom{k+n-1}{k}=\binom{k+n}{k+1}$ k, n naturals

La primera part de la igualtat es pot transformar en

$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\bullet\bullet\bullet+\binom{k+n-1}{k}=\frac{1}{k!}\sum_1^n i(1+1)\ldots(i+k-1)$, i per tant:

(2) $\sum_1^n i(1+1)\ldots(i+k-1)=k!.\binom{k+n}{k+1}$

El terme de l'esquerra de (2) és la suma de polinomis de grau k. en i. Escriurem els primers (per k=1,2,3)

k

1	$\sum_1^n i=$	$=1!.\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$
2	$\sum_1^n i(i+1)=\sum_1^n i^2+\sum_1^n i$	$=2!.\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1).(n+2)}{3}$
3	$\sum_1^n i(i+1)(i+2)=\sum_1^n i^3+3\sum_1^n i^2+2\sum_1^n i$	$=3!.\binom{n+3}{4}=\frac{n(n+1).(n+2).(n+3)}{4}$

En general, per a qualsevol k tindrem:

$$\sum_1^n \mathrm{i}(1+1)\ldots(\mathrm{i}+\mathrm{k}-1)=\sum_1^n i^k+a_{k-1}^k\sum_1^n i^{k-1}+\ldots+a_1^k\sum_1^n i=\mathrm{k}!.\binom{\mathrm{n}+\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}=.\frac{\mathrm{n}.(\mathrm{n}+1)\ldots(\mathrm{n}+\mathrm{k})}{\mathrm{k}+1}$$

es a dir,

(3)

$$\sum_1^n i^k+a_{k-1}^k\sum_1^n i^{k-1}+\ldots+a_1^k\sum_1^n i=\frac{n.(n+1)\ldots.(n+k)}{k}$$

Els coeficients a_i^{k+1} es poden calcular per recurrència en funció dels a_i^k de la manera següent:

(4) $$\begin{cases} a_{k+1}^{k+1}=1 \\ a_i^{k+1}=k.a_i^k+a_{i-1}^k \quad per \quad i=k,k-1,\ldots,1 \end{cases}$$

Si disposem els coeficients dels polinomis en forma de triangle com el de la figura,

k	coeficients				
1	1				
2	1	a^2_1			
3	1	a^3_2	a^3_1		
4	1	a^4_3	a^4_2	a^4_1	
5	1	a^5_4	a^5_3	a^5_2	a^5_1
...	.				

Obtenim els valors següents pels **coeficients dels primers 10 polinomis**:

k	a^K_K	a^K_{K-1}	a^K_{K-2}	a^K_{K-3}	...					
1	1									
2	1	1								
3	1	3	2							
4	1	6	11	6						
5	1	10	35	50	24					
6	1	15	85	225	274	120				
7	1	21	175	735	1.624	1.764	720			
8	1	28	322	1.960	6.769	13.132	13.068	5.040		
9	1	36	546	4.536	22.449	67.284	118.124	109.584	40.320	
10	1	45	870	9.450	63.273	269.325	723.680	1.172.700	1.026.576	362.880

A partir de (3) i d'aquests coeficients, es pot calcular la suma dels n primers quadrats, dels n primers cubs ..., per recurrència sobre k:

$$\sum_{i=1}^{k} i^k = \frac{n.(n+1)....(n+k)}{k+1} - a^k_{k-1}.\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} - ... - a^k_{k1}.\sum_{i=1}^{n} i$$

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^4+2^4+...+n^4 = \frac{n.(n+1).(2n+1).(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$1^5+2^5+...+n^5 = \frac{n^2.(2n^2+2n-1).(n+1)^2}{12}$$

$$1^6+2^6+...+n^6 = \frac{n.(n+1).(111n^4-396n^3-2667n^2-4312n-2147)}{42}$$

$$1^7+2^7+...+n^7 = \frac{n.(n+1).(3n^6+81n^5-1147n^4+4819n^3+31930n^2+51734n+25776)}{24}$$

P15 Considereu els triangles de costats enters. Observeu que només n'hi ha un tal que la longitud dels seus costats sigui menor o igual que 1, el (1,1,1). N'hi ha tres la longitud dels costats dels quals és menor o igual que 2, els (1,1,1), (1,2,2) i (2,2,2). Podríeu calcular quants tenen la longitud dels seus costats menor o igual que n?

Bragg, Grossman. *The College Mathematicals Journal*, vol. 25, núm. 3, prob. 503

Simbolitzem amb T_n el nombre de triangles amb el costat gran de mida n

$T_1 = 1$	(1,1,1)
$T_2 = 2$	(2,2,2)(2,2,1)
$T_3 = 3+1 = 4$	(3,3,3)(3,3,2)(3,3,1) (3,2,2)
$T_4 = 4+2 = 6$	(4,4,4)...(4,4,1) (4,3,3)(4,3,2)
$T_5 = 5+3+1 = 9$	(5,5,5)...(5,5,1) (5,4,4)...(5,4,2) (5,3,3)
$T_6 = 6+4+2 = 12$	(6,6,6)...(6,6,1) (6,5,5)...(6,5,2) (6,4,4)(6,4,3)

Per recurrència:

$$T_{2n-1} = (2n-1) + (2n-3) + \dots + 1 = n^2$$

$$T_{2n} = 2n + (2n-2) + \dots + 2 = n^2+n$$

Simbolitzem amb N_k el nombre de triangles amb els costats de longitud menor i igual que k

$$\{N_k\} = \{1, 3, 7, 13, 22, 34, \dots\}$$

Es tracta de buscar el terme general d'aquesta successió:
Si k és senar k=2n-1:

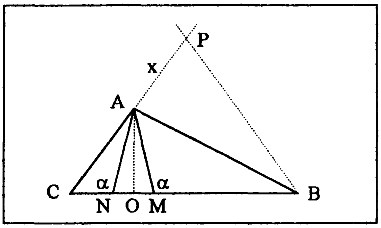
$$N_{2n-1} = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{2n-1} = (T_1 + T_3 + \dots + T_{2n-1}) + (T_2 + T_4 + \dots + T_{2n-2}) =$$
$$= (1 + 4 + \dots n^2) + (2 + 6 + \dots + (n-1)^2 + (n-1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 + (i-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i)$$
$$= 2(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n) - \tfrac{n+1}{2}n = \tfrac{2}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n$$

Si k és parell, k=2n

$$N_{2n} = N_{2n-1} + T_{2n} = (\tfrac{2}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n) + (n^2 + n) = \tfrac{2}{3}n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{6}n$$

P16 Thabit ibn Qurra (826-901) té un teorema que diu:
Si ABC és un triangle qualsevol, M i N són dos punts sobre el costat BC, i eis angles AMB=BAC=ANC, llavors el quadrat sobre AB és igual al rectangle BMxBC i el quadrat sobre AC és igual al rectangle CNxBC.

Cas 1. L'angle BAC és obtús



Per semblança de triangles

$$ABC \approx AMB \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{CB}{AB} \Rightarrow AB^2 = CB \cdot MB$$

$$ABC \approx ACN \Rightarrow \frac{AC}{CN} = \frac{CB}{AC} \Rightarrow AC^2 = CB \cdot CN$$

Generalització del teorema del catet: en un triangle ABC, si AB forma un angle α amb AC, i es projecta sobre BC segons un angle α, aleshores AB és mitjana proporcional entre el costat BC i la projecció d'angle α d'AB sobre BC.

Equivalència amb el teorema del cosinus:
Sumant les dues igualtats anteriors obtenim: $AB^2 + AC^2 = BC(CN+MB)=BC(BC-MN)=$
$= BC^2 - BC.MN$
Aïllant BC^2, obtenim: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + BC.MN$
Pel teorema del cosinus: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AC.AB.\cos\alpha$
Comprovem que: $BC.MN = -2\ AC.AB.\cos\alpha$

$-2\ AC.AB.\cos\alpha = 2\ AC.AB.\cos(180°- \alpha) = 2\ AC.x$ (vegeu figura)

$$BC.MN \stackrel{?}{=} 2\ AC.x$$

Observem que $\frac{MN}{2} = OM$. Per tant, cal provar la igualtat BC.OM = AC.x

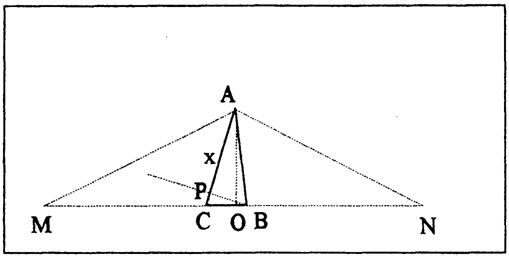
Aquesta última igualtat és certa per dues semblances de triangles:
El triangle AOM és semblant al triangle ABP $\Rightarrow \frac{OM}{x} = \frac{AM}{AB}$
El triangle AMB és semblant al triangle ABC $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{BC}$
Per tant, $\frac{OM}{x} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC.OM = AC.x$, com es volia demostrar

Cas 2. L'angle BAC és recte.

Els punts N i M coincideixen. L'enunciat en aquest cas particular és el teorema del catet i, repetint el procediment anterior, s'obté el teorema de Pitàgores, que es pot considerar un cas particular del teorema del cosinus.

Cas 3. L'angle BAC és agut.

Observem, en aquest cas, que la situació dels punts M i N depèn de la mesura de l'angle BAC en comparació amb els altres dos angles del triangle.
Si l'angle BAC és estrictament menor que els altres dos angles, els punts M i N són exteriors; si és estrictament més gran que els altres dos angles, els dos punts M i N són interiors. Si tots tres angles són diferents i no és ni el gran ni el petit, un dels punts serà interior i l'altre exterior. En el cas de triangles isòsceles o equilàters, hi haurà coincidència entre els punts M i N i algun dels vèrtexs B o C.
Considerem un dels casos: l'angle BAC és el més petit. La demostració del teorema és idèntica a la del cas de l'angle obtús.



Fixem-nos que, com que AB projecta sobre CB, no té sentit que M sigui a la dreta de B. Precisament, l'altre possible punt M és el punt N.

Demostració del teorema $ABC \approx AMB \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{CB}{AB} \Rightarrow AB^2 = CB \cdot MB$

$$ABC \approx ACN \Rightarrow \frac{AC}{CN} = \frac{CB}{AC} \Rightarrow AC^2 = CB \cdot CN$$

Aquest teorema, com en el cas 1 (angle obtús) és una generalització del teorema del catet.
Equivalència amb el teorema del cosinus
Sumant les dues igualtats anteriors obtenim: $AB^2 + AC^2 = BC(CN+MB) = BC(BC+MN) =$ [*] $= BC^2 + BC.MN$
[*] A diferència del cas de l'angle obtús, CN+MB=BC+MN, i aquesta igualtat és vàlida en qualsevol dels casos en què l'angle CAB és agut.
Aïllant BC^2, obtenim: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - BC.MN$
Pel teorema del cosinus: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC.AB.\cos\alpha$
Comprovem que: $BC.MN = 2\,AC.AB.\cos\alpha$
$2\,AC.AB.\cos\alpha = 2\,AC.x$ (vegeu figura)

$$BC.MN \stackrel{?}{=} 2\,AC.x$$

Observem que $\frac{MN}{2} = MO$. Per tant, cal provar la igualtat $BC.OM = AC.x$
Aquesta última igualtat és certa per dues semblances de triangles:

El triangle AOM és semblant al triangle ABP $\Rightarrow \frac{OM}{x} = \frac{AM}{AB}$

El triangle AMB és semblant al triangle ABC $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{BC}$

Per tant, $BC.OM = AC.x$, com es volia demostrar

P17 Inscriviu dins d'un triangle acutangle el triangle de perímetre mínim

Resolució

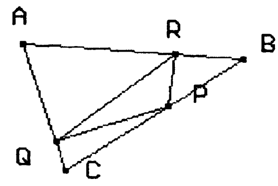


Fig. 1

Donat el triangle acutangle ABC, es tracta de trobar-ne un altre, com ara PQR, inscrit en l'anterior, de manera que el seu perímetre sigui mínim (fig. 1).

Simetritzem (fig. 2) el triangle ABC sobre el costat CA per obtenir AB'C. Els punts simètrics de P i R són expressats per P' i R'.
A continuació simetritzem el triangle AB'C sobre el costat B'A per obtenir AB'C'. El punt simètric de P' és expressat per P".
És evident que el perímetre P-Q-R té la mateixa longitud que el recorregut P-Q-R'-P" i, per tant, el perímetre de PQR serà mínim quan el recorregut P-Q-R'-P" ho sigui. Això s'aconsegueix quan P-Q-R'-P" és una línia recta.

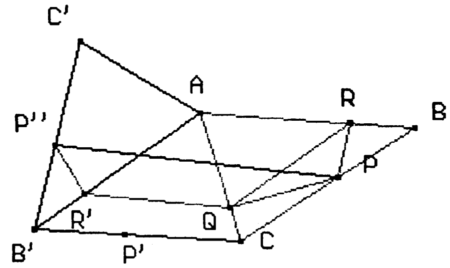


Fig. 2

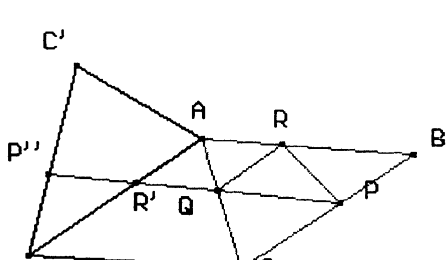


Fig. 3

Deixant fix el punt P, mourem els Q i R fins a aconseguir que P-Q-R'-P" sigui, en efecte, una línia recta (fig. 3).

Amb això, <u>fixat el punt P</u>, hem construït un triangle inscrit en ABC de perímetre mínim.
Però la situació de P fa variar la longitud de la línia recta P-P" i, per tant, el perímetre de PQR.

L'objectiu següent és trobar la posició de P que faci mínima la longitud de P-P"

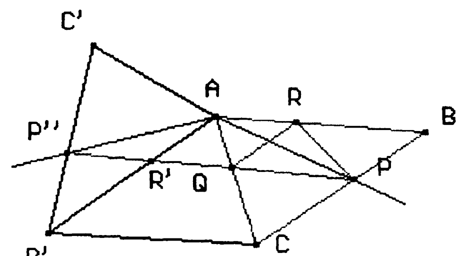


Fig. 4

Per aconseguir-ho observarem (fig. 4) que el triangle APP" és isòsceles i que l'angle P-A-P" és fix (i doble que el B-A-C per haver fet una doble simetria de centre A), independentment de la posició inicial de P sobre el costat BC.

En un triangle isòsceles, si l'angle determinat pels dos costats iguals és fix, el perímetre es pot expressar com a funció de la longitud d'aquests costats. Com a conseqüència, la longitud P-P" serà mínima quan ho sigui A-P i, per tant, quan A-P sigui perpendicular al costat BC (fig. 5).

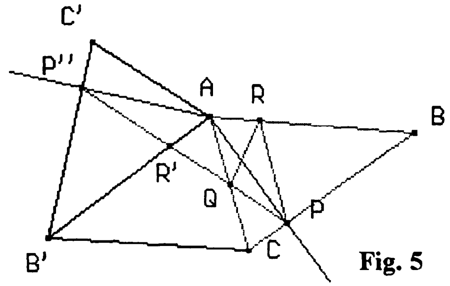


Fig. 5

En definitiva, hem aconseguit el sistema de trobar el triangle de perímetre mínim inscrit en un altre de donat.

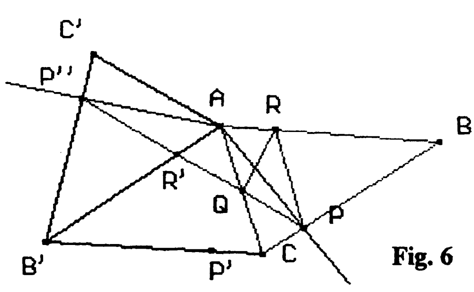


Fig. 6

En efecte (fig. 6): donat ABC, fem l'altura corresponent a un costat (per exemple, BC) i obtenim P. Després simetritzem ABC sobre AC per obtenir AB'C i simetritzem AB'C sobre AB' per obtenir AB'C'. El punt P ha passat, en aquestes dues simetritzacions, als P' i P". Unint P i P" amb una recta, tallem el costat AC a Q i l'AB' a R'. El simètric de R' respecte a AC ens dóna R. El triangle buscat és PQR.

P18 Es fa una pilota de futbol cosint peces de cuir pentagonals i hexagonals. Demostreu que el nombre de peces pentagonals ha de ser 12.

Per construir una pilota "coherent", cal que es verifiqui:

1) Dos polígons han de tenir un vèrtex o tota una aresta en comú
2) En cada vèrtex concorren el mateix nombre d'arestes.

Designem per
m = nombre d'arestes concurrents a cada vèrtex
H = nombre d'hexàgons
A = nombre d'arestes
P = nombre de pentàgons de la pilota
C = nombre de polígons
V = nombre de vèrtexs

Es compleixen les relacions:

1) $C = P + H$
2) $2A = 5P + 6H$
3) $2A = V.m \quad \Rightarrow \quad 5P + 6H = V.m$

La característica d'Euler d'una esfera és 2,

$X(S^2) = 2$ = cares - arestes + vèrtexs = $C - A + V$. Utilitzant les relacions anteriors,

$$2 = P + H - \frac{5P+6H}{2} + \frac{5P+6H}{m}$$
$$4m = 2mP + 2mH + 10P + 12H - 5mP - 6mH$$
$$4m = (10-3m)P + (12-4m)H \quad (*)$$

Però ha de ser:
1) $m \leq 3$ ja que per $m \geq 4$ no té sentit la relació anterior (surten P i H negatius).
2) Per les hipòtesis del principi, $m \geq 3$.

Per tant, m=3, i substituint a la relació (*) obtenim P = 12, com volíem demostrar.

P19 Sobre la circumferència dels nou punts (problema 10), designem per P' el punt de l'arc A'P del cercle d'Euler tal que arc(A'P') = 1/3 arc(A'P). Definim Q' i R' de manera similar. Demostreu que el triangle P'Q'R' és equilàter.

Suposem que tenim un triangle on els angles A,B,C verifiquen $A \geq B \geq C$. Per veure que el triangle P'Q'R' és equilàter, veurem que els angles dels vèrtexs P', Q', R' són tots iguals i d'amplitud $\frac{\pi}{3}$. Com que P', Q', R' estan inscrits al cercle d'Euler, és el mateix veure que

$$\text{arc}(Q'R') = \text{arc}(P'R') = \text{arc}(P'Q') = \frac{2\pi}{3}$$

Observem que la mesura de l'arc A'B' sobre la circumferència d'Euler del triangle ABC és igual a la mesura de l'arc AB sobre la circumferència circumscrita al triangle ABC i igual a dues vegades la mesura de l'angle C. Permutant les lletres, es pot dir el mateix per als arcs A'C' i B'C'.

$$\text{arc}(A'B') = 2C \qquad \text{arc}(A'C') = 2B \qquad \text{arc}(B'C') = 2A \quad (1)$$

Les primeres igualtats són certes per l'homotècia que transforma $ABC \rightarrow A'B'C'$ i la segona per angles inscrits en una circumferència.

Al triangle CHB es compleix que:
A' és el punt mig del segment BC,
Z és el punt mig del segment CH, per tant, el segment A'Z és paral·lel al segment BH. (2)
Y és el punt mig del segment BH, per tant, el segment A'Y és paral·lel al segment CH.
Per tant, A'ZHY és un paral·lelogram i es compleix que els angles Y i Z són iguals pel fet de ser angles oposats. Aquest angle l'anomenem α.

Es compleix, per angles inscrits, que arc(A'B'Q)=2α i arc(A'R'R)=2α. (3)

Com que el segment A'Z és paral·lel a BH (2) i BH és perpendicular a AC $\Rightarrow$ A'Z $\perp$ AC, i ZH és perpendicular a AB. D'aquí es dedueix que A'ZH = α = CAB, i aquest angle l'anomenàvem A.

Per (3): arc(A'B'Q)=2A i arc(A'R'R)=2A. Per tant,
arc(B'Q) = arc(A'Q) - arc(A'B') $\Rightarrow$ arc(B'Q) = 2A - 2C (per 1).

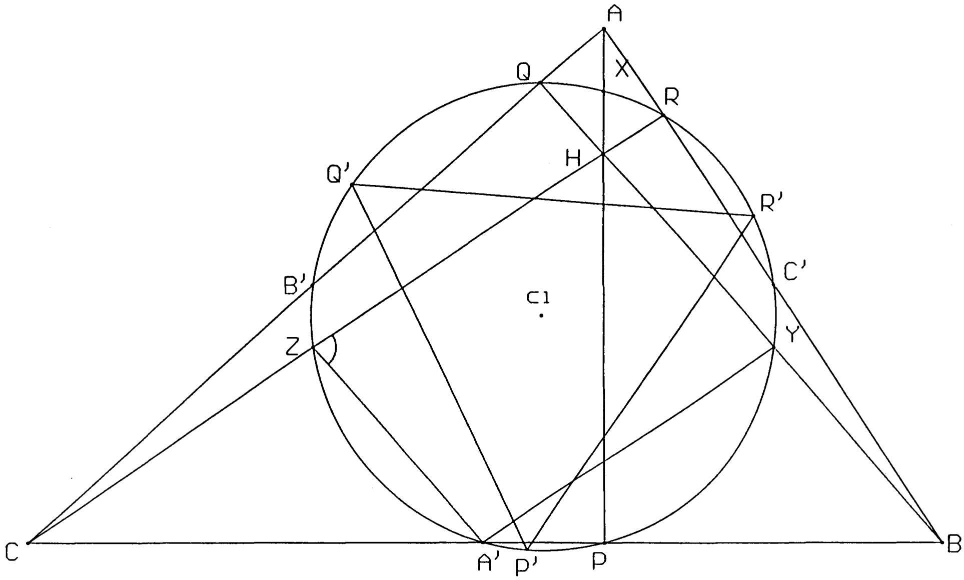
Fent uns raonaments anàlegs, es demostra que:

arc(C'R) = arc(A'R) - arc (A'C') $\Rightarrow$ arc(C'R) = 2A - 2B
arc(A'P) = arc (B'P) - arc(B'A') $\Rightarrow$ arc(A'P) = 2B - 2C

Per tant, ja estem en condicions de calcular l'arc(P'Q'):

$$\text{arc}(P'Q') = \text{arc}(P'A') + \text{arc}(A'B') + \text{arc}(B'Q') = \frac{1}{3}A'P + A'B' + \frac{1}{3}B'Q =$$
$$\frac{1}{3}(2B - 2C) + 2C + \frac{1}{3}(2A - 2C) = \frac{2}{3}(B + C + A) = \frac{2\pi}{3}.$$

Per als altres arcs es procedeix de manera anàloga.


A
Q
X
R
H
Q'
R'
C'
B'
C1
Z
Y
C
A'
P'
P
B

P20 Tenim 10 cartes numerades amb nombres qualssevol, no necessàriament naturals. El joc que proposem consisteix a endevinar la carta més alta i es juga de la manera següent:
El jugador gira una de les cartes. Pot decidir que és la carta més alta i plantar-se o bé girar una altra carta.
- Si es planta, s'acaba el joc i guanya si realment la carta girada és la més alta de totes.
- Si gira una altra carta, aquesta pot ser més baixa que la primera o més alta, si és més baixa no pot apostar per aquesta perquè no serà la més alta de totes, haurà de girar una altra carta. Si la carta girada és més alta que la primera, pot decidir plantar-se o continuar jugant.

Estudieu el joc i la millor estratègia per a guanyar.

Seguint una estratègia adequada, es pot aconseguir que augmenti la probabilitat d'encert. Per posar-ho de manifest, considerem que hi ha només 3 cartes: la petita, la mitjana i la gran.

- Si apostem a la primera carta girada, la probabilitat d'encert és 1/3.

- Si primer girem una carta, i apostem a la primera carta que la superi, la probabilitat d'encert augmenta: en efecte, es poden donar 3 casos segons la carta girada en primer lloc (que anomenarem carta descartada):
  a/ Si la carta descartada és la petita, només encertarem si la carta gran apareix abans que la carta mitjana, cosa que passarà la meitat de les vegades. Per tant, la probabilitat d'encert és la probabilitat de treure en primer lloc la carta petita multiplicada per la probabilitat que a continuació la carta gran aparegui abans que la mitjana: (1/3).(1/2)=1/6.
  b/ Si la carta descartada és la mitjana, sempre encertarem. Per tant, la probabilitat d'encert serà (1/3).1=1/3.
  c/ Si la carta descartada és la gran, no encertarem mai. Per tant, la probabilitat d'encert serà (1/3).0=0.
  Així si primer descartem una carta abans d'apostar, la probabilitat d'encert serà la suma dels 3 casos anteriors: (1/6)+(1/3)+0=1/2. Per tant, amb aquesta estratègia la probabilitat d'encert és més gran que si apostem per la primera carta girada.

- Si descartem dues cartes i apostem a la primera carta que les superi, en aquest cas només podrem apostar si la carta gran surt en tercer lloc. En aquest supòsit guanyarem. Per tant, la probabilitat d'encert coincideix amb la probabilitat que la carta gran estigui en tercer lloc, és a dir, 1/3.

Així, optimitzem la probabilitat d'encert si es descarta una carta i apostem per la primera carta que la superi. En general, caldrà saber quantes cartes cal descartar de manera que la probabilitat d'encert sigui la més gran possible.

Passem al cas general amb n cartes. Suposem que el nombre de cartes descartades és p, amb $p>0$ (amb $p=0$ no es descarta cap carta i voldrà dir que apostem per la primera carta girada;

per tant, la probabilitat d'encertar és sempre 1/n). Numerem les cartes segons l'ordre en què han estat girades. Suposem que la carta més gran, que designarem per M, es girarà en la posició k+1. Si k<p, voldrà dir que la carta més gran serà entre les cartes descartades, per tant és impossible encertar. Així, per encertar cal que k sigui més gran o igual que p. Fa falta també una altra condició, i és que la carta més alta entre les k primeres (és a dir, entre les anteriors a M) es trobi entre les descartades. Aquesta carta la designarem per N. Si la carta N no és entre les descartades, apostarem per una carta que superarà les p primeres i que no serà M. Haurem apostat per una carta equivocada.
Per tant, per encertar s'han de produir dues situacions:

1-Cal que k>p.

2-Cal que N estigui situada entre les p primeres. La probabilitat que això passi és p/k, ja que aquesta carta disposa de k llocs per situar-se, i d'aquests p llocs són favorables.

Càlcul de la probabilitat
Calcularem la probabilitat tenint en compte els diferents llocs on es pot trobar M, sempre amb k>p.

Suposem que M es troba a la posició p+1, la probabilitat que ocorri és 1/n. Hi ha p llocs anteriors a aquesta posició, i per guanyar també cal que N es trobi entre les p primeres. En aquest cas, això passarà sempre. Per tant, la probabilitat serà: la probabilitat que M es trobi al lloc p+1 multiplicada per la probabilitat que N es trobi entre les p primeres, és a dir, (1/n).(p/p).

Si M és a la posició p+2, la probabilitat que ocorri és 1/n. Hi ha p+1 llocs anteriors a aquesta posició i per guanyar també cal que N sigui als p primers llocs. Així la probabilitat serà igual: (1/n).(p/(p+1)).

Seguint, arribem a l'última posició. Suposem que M sigui a la posició n; la probabilitat que ocorri és 1/n. Hi ha n-1 llocs anteriors a aquesta posició, i per guanyar cal també que N figuri entre les descartades. Per tant, la probabilitat de guanyar serà: (1/n).(p/(n-1)).

Finalment, la probabilitat total de guanyar serà la suma de totes les anteriors:

$$\frac{1}{n}\frac{p}{p}+\frac{1}{n}\frac{p}{p+1}+\ldots+\frac{1}{n}\frac{p}{n-1}$$

es pot treure p/n de factor comú i el resultat final és:

$$\boxed{\frac{p}{n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$$

Per cada valor de n hi ha un valor de p pel qual el resultat de l'expressió anterior és màxim. Es tracta, per tant, de saber per cada valor de n quin és el valor de p que optimitza el valor de la probabilitat.

En el cas n=10 obtenim el següent:

- Amb p=1; prob = $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{9}\right)$ = 0.28289683
- Amb p=2; prob = $\frac{2}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{9}\right)$ =0.36579365
- Amb p=3; prob=0.39869048
- Amb p=4; prob=0.39825397
- Amb p=5; prob=0.37281746
- Amb p=6; prob=0.32738095
- Amb p=7; prob=0.26527778
- Amb p=8; prob=0.18888889
- Amb p=9; prob=0.1

Així per a n=10, la millor estratègia consisteix a descartar en primer lloc 3 cartes i apostar per la primera carta que superi aquestes 3.

Estratègia

Comprovarem ara quina és la millor estratègia per poder guanyar.
La millor estratègia serà aquella que faci que la probabilitat de guanyar sigui màxima. Per això el que farem serà calcular el màxim d'una funció definida a partir de la probabilitat de guanyar.

Definim la successió $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, on a_n és convergent i $\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma \quad \gamma \in (0,1)$
γ és la constant d'Euler - Mascheroni.

Utilitzarem tot això i després comprovarem que és cert tot el que s'ha suposat.
Per tant:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+...+\frac{1}{n-1} = (a_{n-1}+\ln(n-1)) - (a_{p-1}+\ln(p-1)) =$$
$$= (\ln(n-1)-\ln(p-1)) + (a_{n-1}-a_{p-1})$$

Llavors: $$\frac{p}{n}\left(\frac{1}{p}+...+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{p}{n}\ln\frac{n-1}{p-1} + \frac{p}{n}(a_{n-1}-a_{p-1})$$

$a_{n-1} - a_{p-1}$ tendeix a 0 quan n i p tendeixen a infinit. Per tant, per trobar el valor màxim de la probabilitat de guanyar només ens fa falta trobar el màxim de la funció $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$. Per fer-ho, calculem la seva derivada:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}(\ln x - 1).$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0$, per tant, $x = e$.

Si comparem la funció f(x) amb l'expressió de la probabilitat de guanyar, tenim $x = n/p$ i per tant, quan n es fa molt gran, la millor estratègia per guanyar és quan $\frac{p}{n} \to \frac{1}{e}$.

Ara només falta veure que a_n és convergent i que $\gamma \in (0,1)$

Per veure-ho calculem la integral $\int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx$

$\int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx = \int_1^n \frac{1}{x}dx - \int_1^n \frac{[x]}{x^2}dx$. La primera d'aquestes dues integrals és immediata. Per calcular la segona utilitzarem:

$$\int_1^n \frac{[x]}{x^{p+1}}dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{k}{x^{p+1}}dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{-p}x^{-p}\Big]_k^{k+1} = -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{(k+1)^p} - \frac{1}{k^p}\right) =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k^p} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k^p}\right) = -\frac{1}{p}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^p} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k^p}\right) =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\frac{n}{n^p} - 1 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^p}\right) = -\frac{1}{p}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)$$

Aplicant aquest últim resultat per $p=1$, queda:

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx - \int_1^n \frac{[x]}{x^2}dx = \ln n + 1\left(\frac{1}{n^0} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \ln n + 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) = 1 - a_n$$

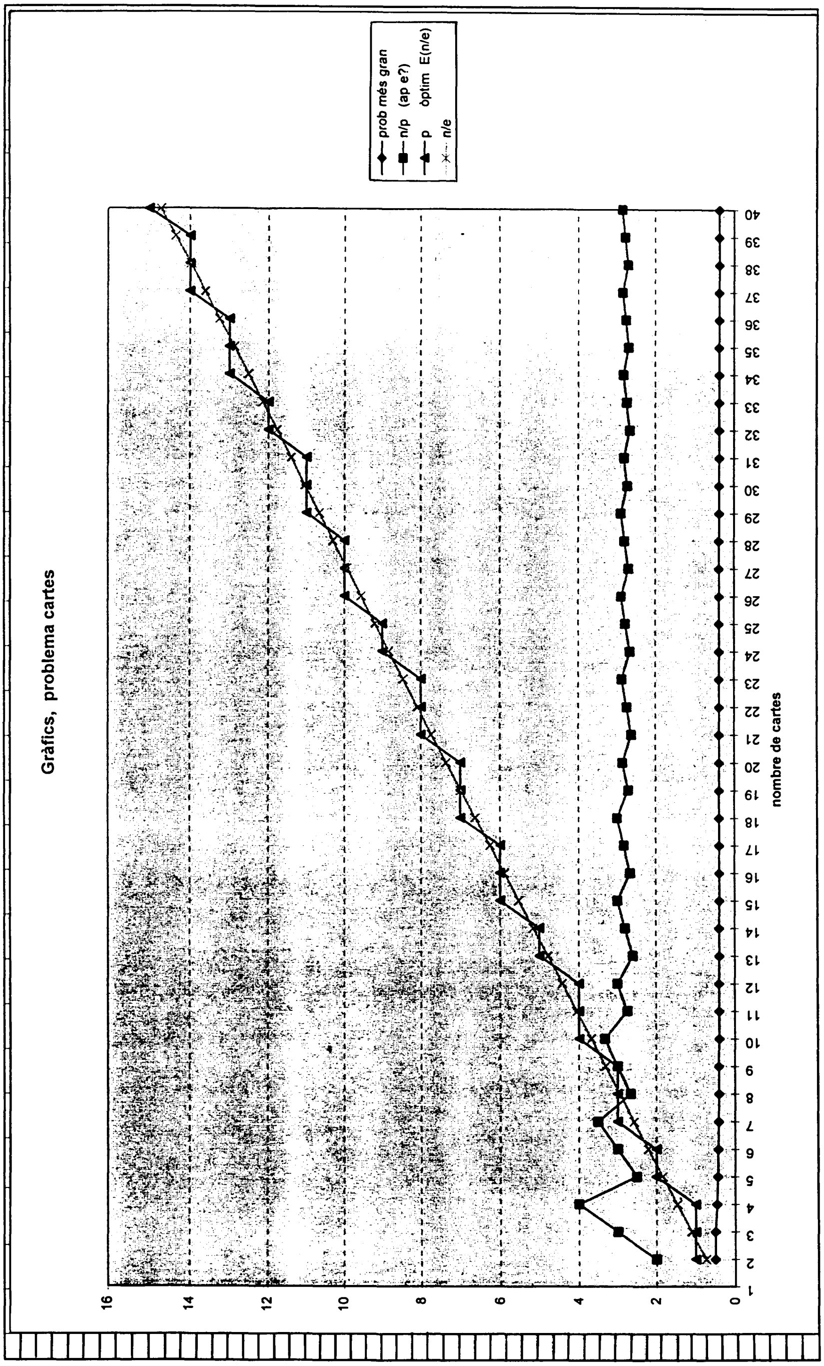
Llavors:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx < \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}dx = 1, \quad \text{per tant,}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx < \infty \quad \Rightarrow \quad a_n \text{ és convergent} \quad \text{i}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx > 0$$

$$a_n = 1 - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}dx < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < 1$$


Gràfics, problema cartes
prob més gran
n/p (ap e?)
p òptim E(n/e)
n/e
nombre de cartes