1ra Part Camps elèctrics

Potencial elèctric degut a de càrrega puntuals.

A/ Recordatori: Camps conservatius

- Potencial d'un camp

En els camps de tipus conservatiu, es poden definir en cada punt, dues magnituds: una vectorial corresponent al camp $\vec{E}$ i una d'escalar anomenada potencial **V** (potencial elèctric**)**.

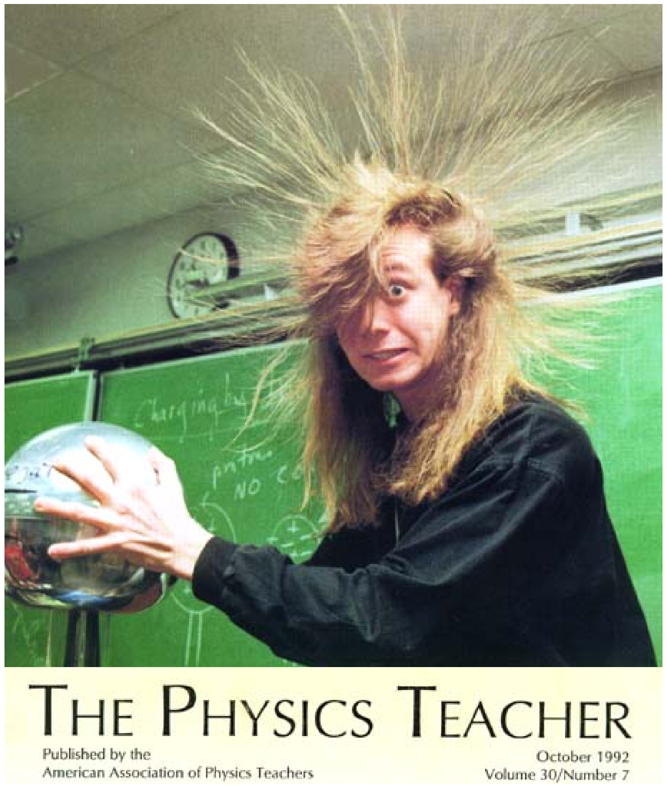
Ambdues magnituds depenen únicament de la font que generi el camp, i de la posició del punt d'observació o treball.

En general, $V = \int_{r_p}^{r_{ref}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ on

r_p correspon a la distància entre el punt i l'origen de camp.
r_{ref} correspon al punt de referència d'origen del potencial $V(r_0=0)$

- Energia potencial

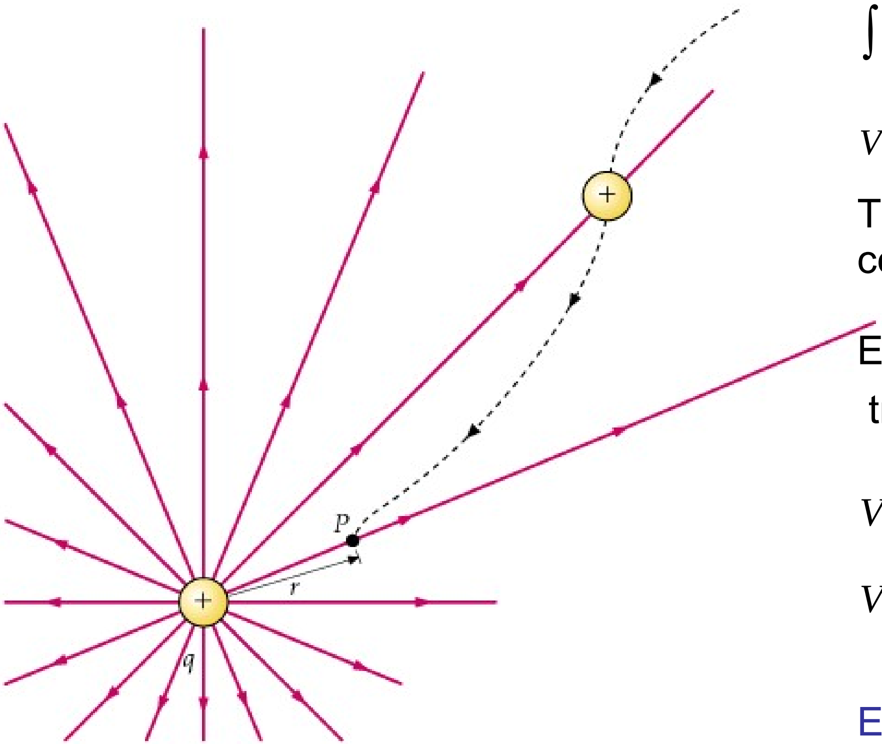
L'energia potencial serà SEMPRE directament proporcional al potencial. La constant de proporcionalitat dependrà de la natura del camp.



1ra Part **Camps elèctrics**

Potencial elèctric degut a de càrrega puntuals.

B/ Recordatori: Potencial elèctric



Potencial per a càrregues puntuals

$$\int dV = \int_r^{r_0} -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_r^{r_0} \frac{q}{r^2}dr$$

$$V = +\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r} + V_0 = V(r) - V(r_0)$$

Triarem **V(r$_0$)** per conveniencia,segons la nostra comoditat: **per tant allà on el seu valor sigui nul**.

En el cas del potencial generat per una **càrrega puntual**, triarem com **origen del potencial** $r_0 = \infty$

$$V(r_0 = \infty) = 0$$

$$V = \frac{1}{4\Pi\varepsilon}\frac{q}{r}$$

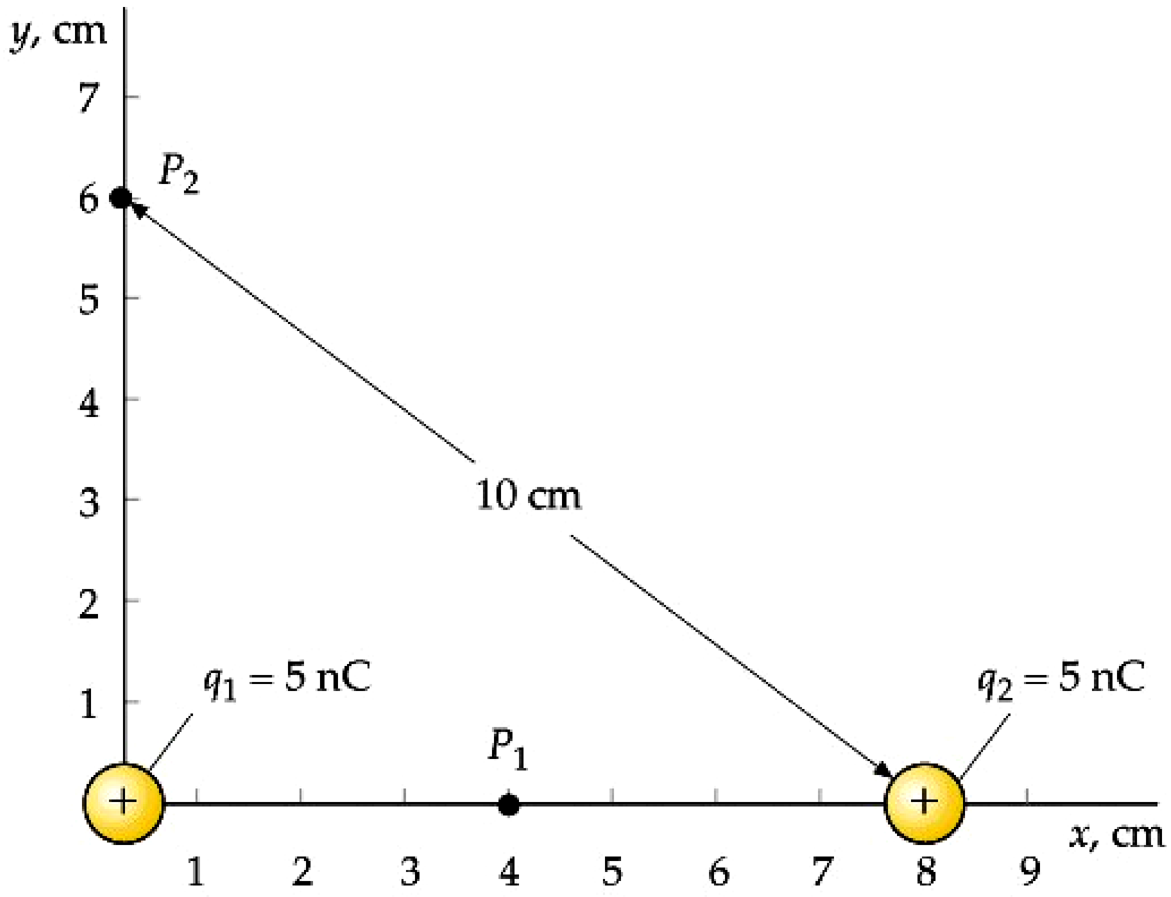
Unitats $\left[\frac{N}{C}\cdot m = \frac{J}{C} \equiv V\right]$

Energia potencial

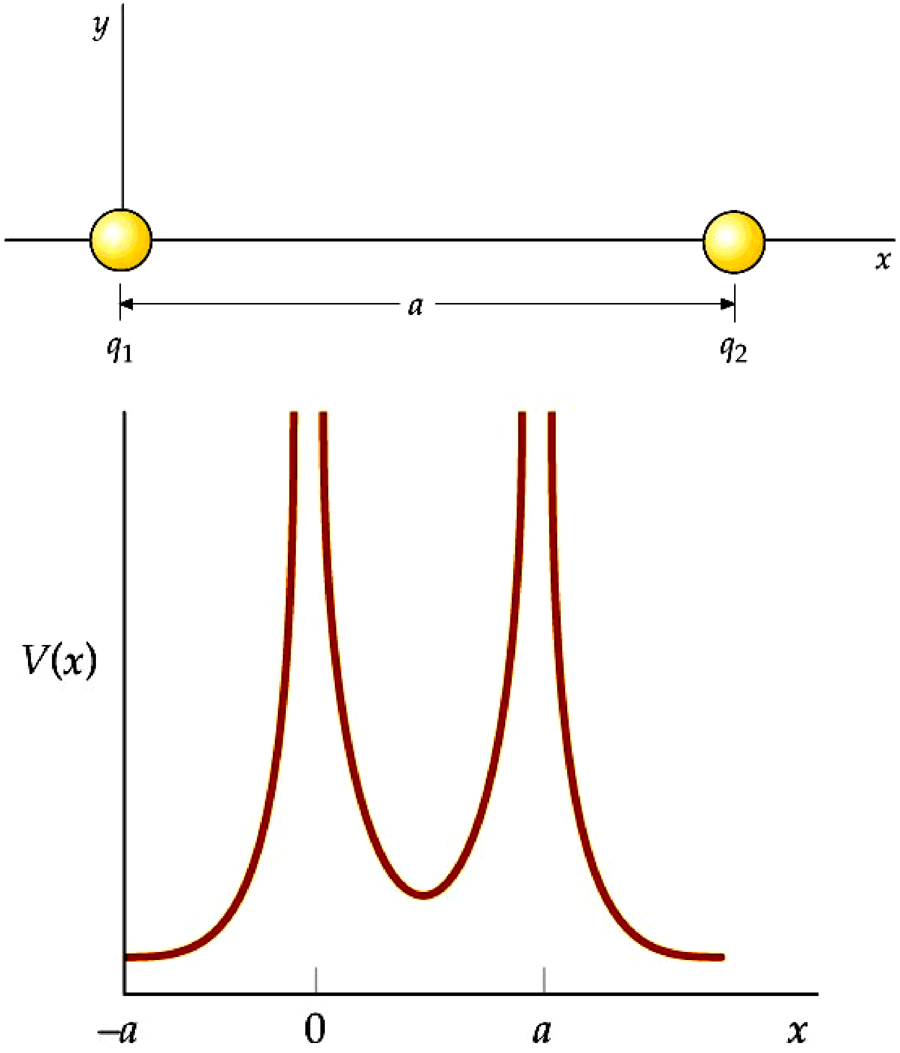
$$E_p = q \cdot V$$

Per varies càrregues puntuals: $V_{tal} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_i}{r}$

Fes-ho tu! Determinar el potencial elèctric en els punts P1 i P2



Fes-ho tu! Determinar el potencial elèctric en els punts P1 i P2



Comprova i justifica que la representació de V en funció de x, per al cas de les dues càrregues puntuals idèntiques de la figura, és sempre positiu i es fa infinit en la posició de cada una d’elles.

Quin és el signe de les càrregues?

C) El camps elèctric i el potencial es relacionen

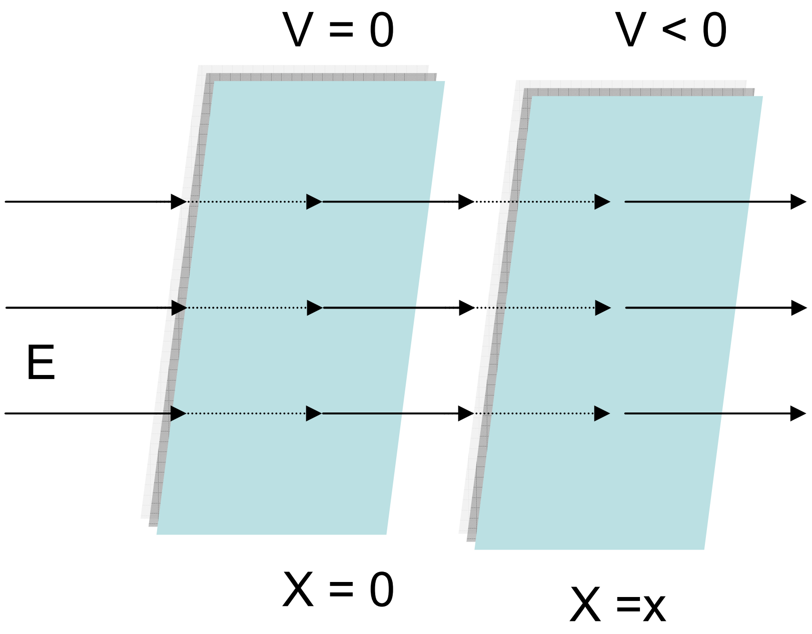
El potencial elèctric i el camp, es relacionen:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Això es pot escriure de manera compacte com :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Expressió que ens permet calcular el camp elèctric a partir del potencial o a l'inversa.



Exemple senzill:

Càlcul del camp a partir d'un potencial del tipus V=-k·x

Si apliquem el gradient, tindrem $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = k; E_y = 0; E_z = 0$

Per tant l'expressió del camp és la d'un camp uniforme, perpendicular a les superficies equipotencials, en el sentit dels potencials decreixents:

Fes-ho tu!

Questions

A) Representa les superficies equipotencials per una càrrega puntual positiva

B) Deduïu quina és la relació geomètrica envers les corresponents línies de camp

C) Calcula l'expressió del potencial originat per un camp elèctric de tipus E=(0,E,0) en funció de la distància a l'eix x. Feu el mateix si l'expressió del camp fos del tipus E=(E,0,0)

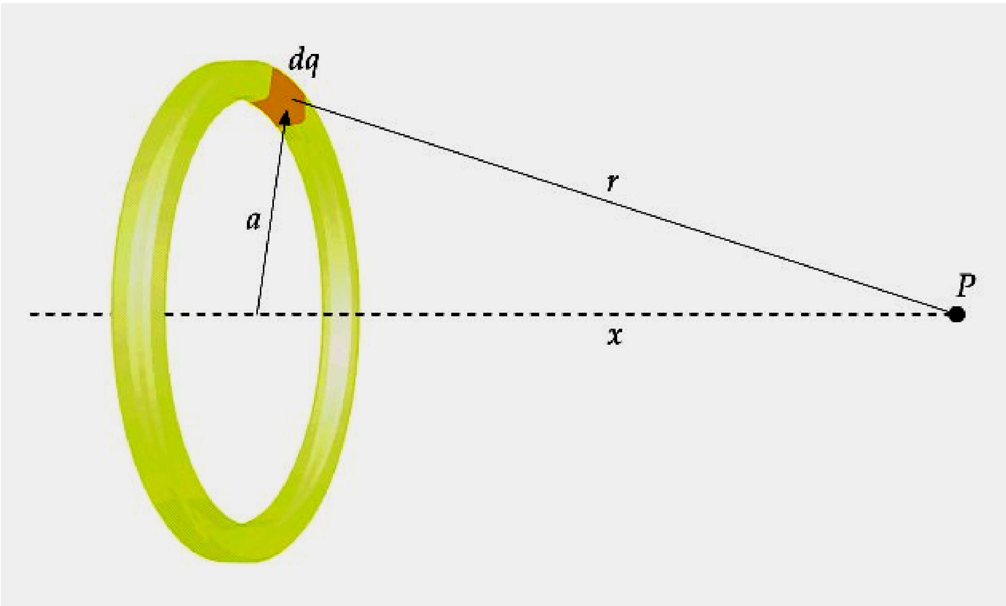
D) Representa aquests potencials en funció de la distància a l'eix.

D) Potencial per a distribucions continues de càrrega

El potencial en el cas de distribucions correspon a :

$$V = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{dq}{r}$$

Exemple: potencial generat per una anella en un punt del seu eix

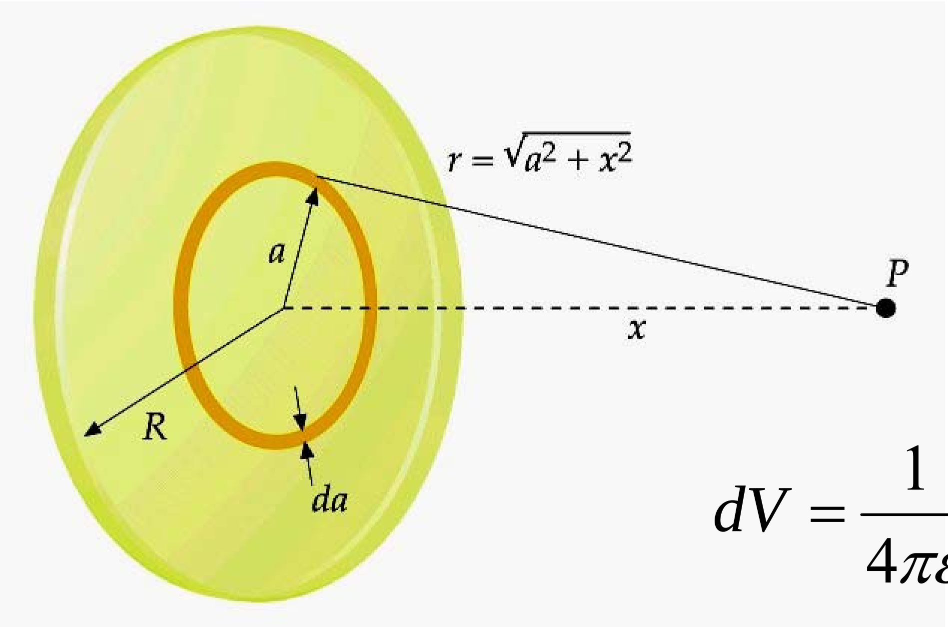


$$V = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{dq}{r} = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Exemple: Potencial generat per un disc carrregat uniformement, en un punt del seu eix

A partir del potencial de l'anell



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\sigma\cdot 2\pi a\cdot da}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$$

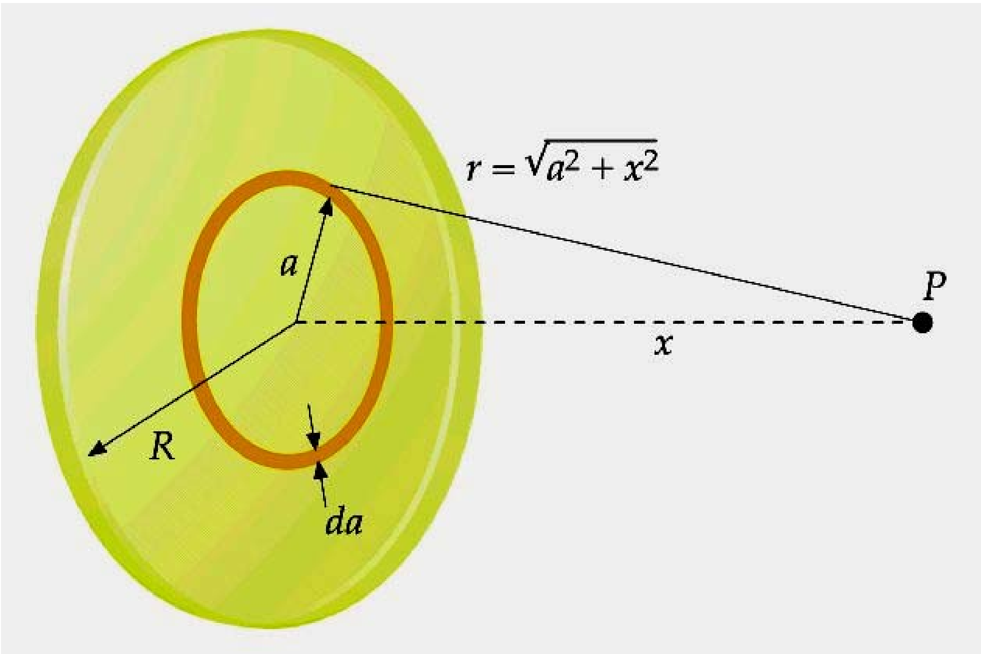
$$V = \frac{\sigma\pi}{4\pi\varepsilon}\int_0^R \frac{2a\cdot da}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[\sqrt{(x^2+R^2)} - x\right]$$

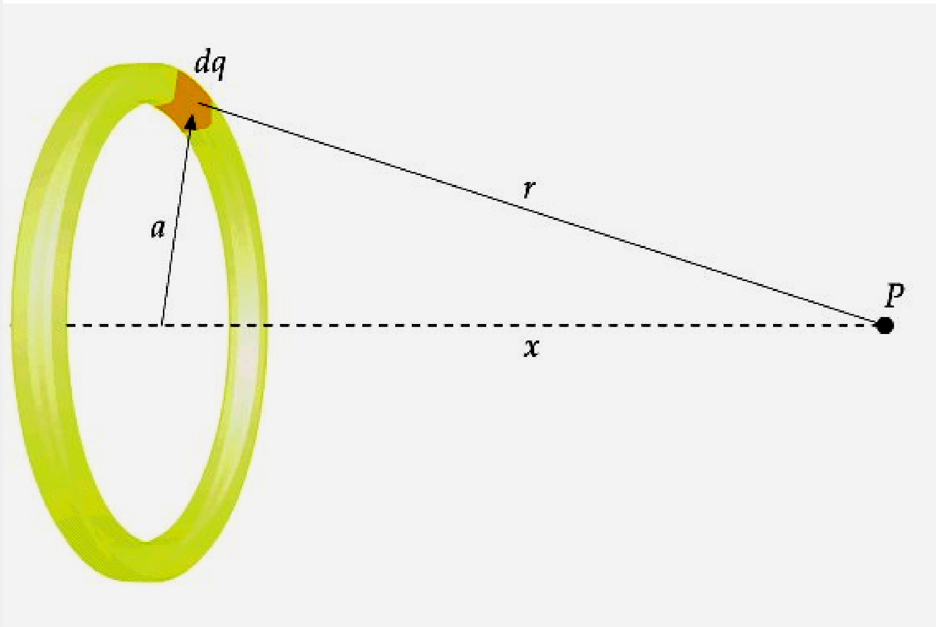
Fes-ho tu!

A partir de l'expressió del potencial, calculeu el camp elèctric sobre l'eix de:

A) un anell uniformement càrregat

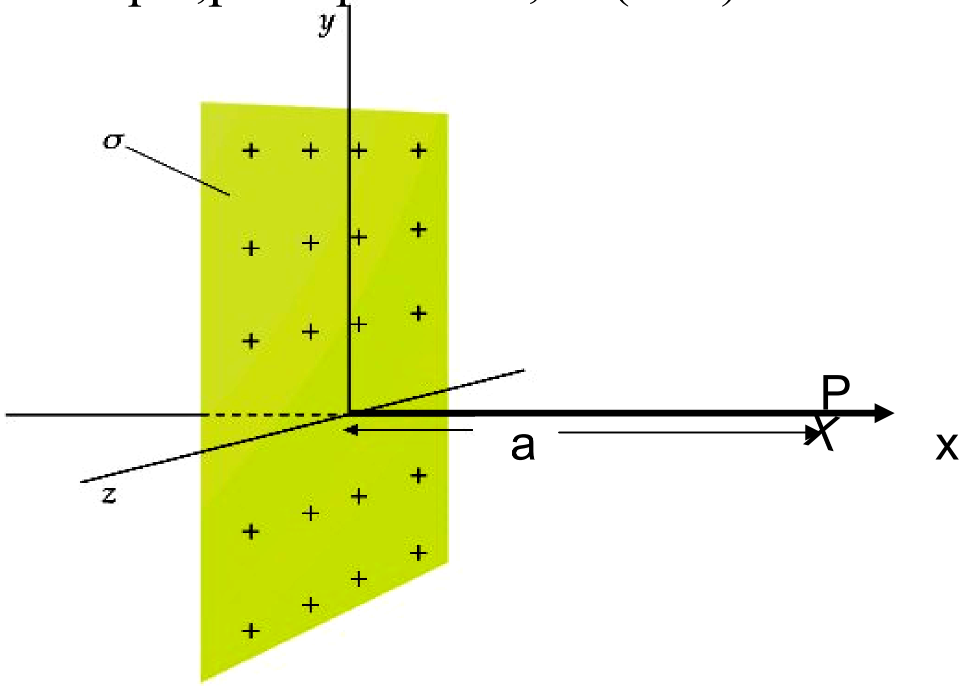
B) un disc uniformement càrregat





Exemple: Potencial V degut a un pla infinit de càrrega

Per distribucions de càrrega que s'extenen cap a l'infinit, es tria l'origen del potencial [V=0], en un punt finit (i no en l'infinit).Això representa que no serà útil pel càlcul, l'expressió $V = \int_{r}^{r_{ref}} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{r}$ atès que,per aquest cas, V (r=∞)= 0.



Utilitzarem pel càlcul l'expressió:

$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

El potencial és

$$dV = -\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon}\right)\vec{i}\cdot\left(dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}\right)$$

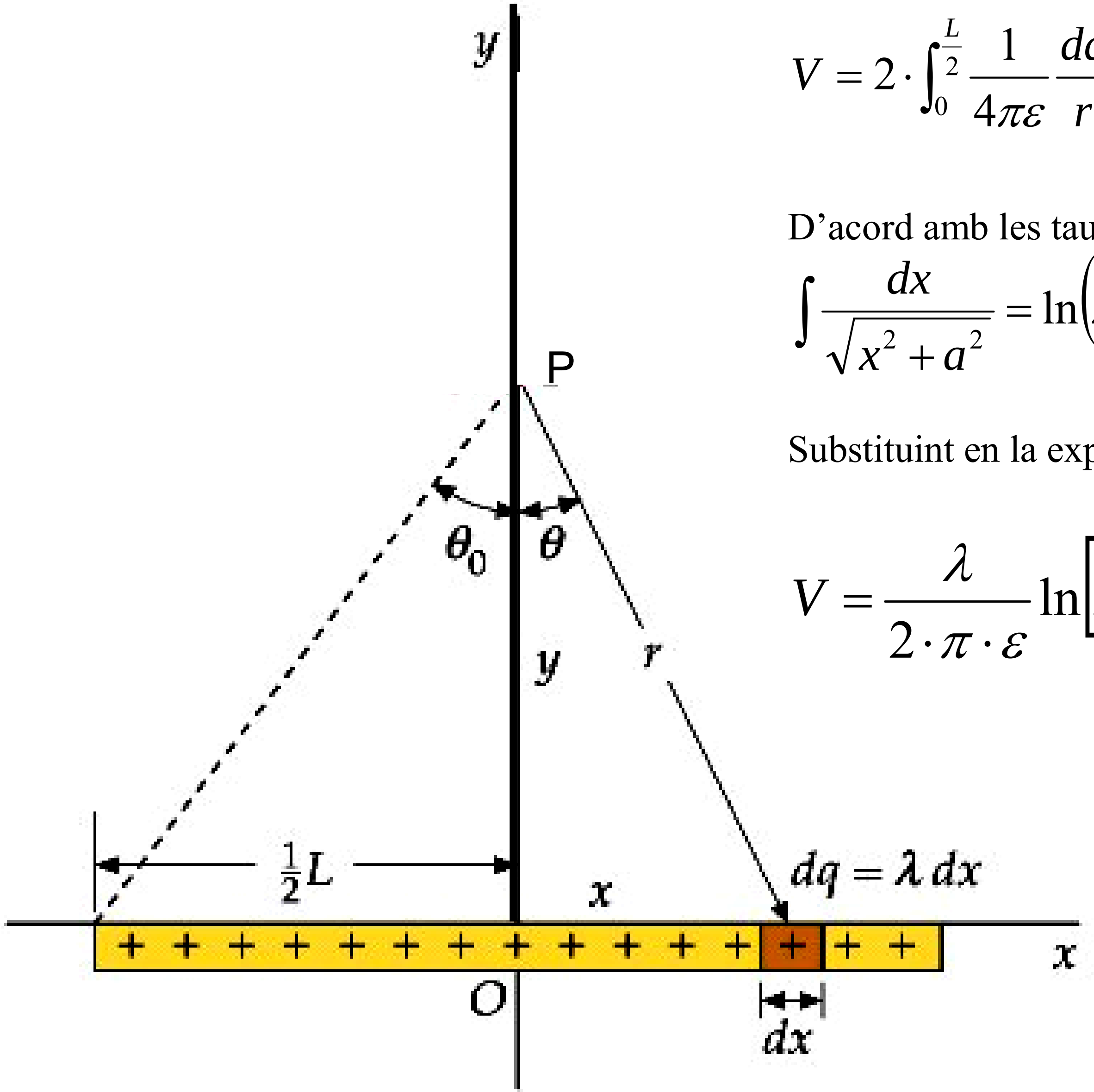
doncs: $dV = -\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon}\right)\cdot dx$

Integrant: $V = V_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon}\cdot a$

En aquest cas, per conveni:

en x=0 ,V_0=0

Exemple: Potencial generat per un fil finit, en un punt de la seva mediatriu



$$V = 2\cdot\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{r} = 2\cdot\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda\cdot dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

D'acord amb les taules d'estándar de integració:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

Substituint en la expressió que ens correspon :

$$V = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\ln\left[x+\sqrt{y^2+x^2}\right]_0^{\frac{L}{2}}$$

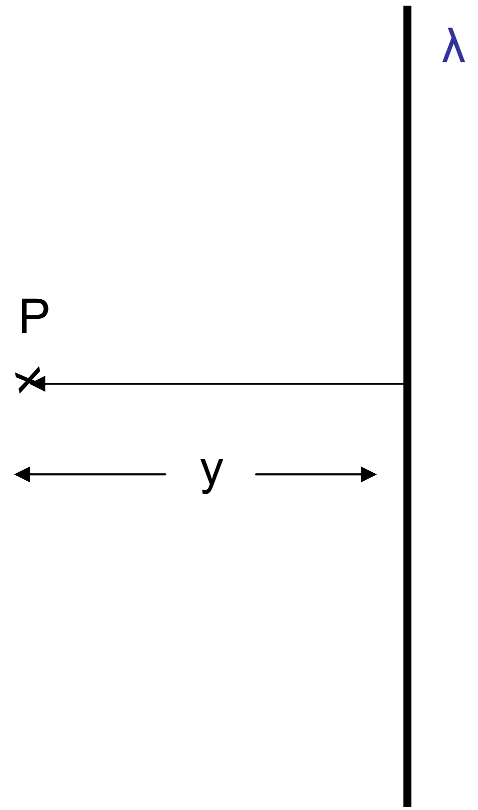
Finalment:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}{y}$$

Fes-ho tu!

Comprova que el potencial per un filament de longitud infinita en un punt P, cumpleix l'expressió

$$V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(y) + V_0$$



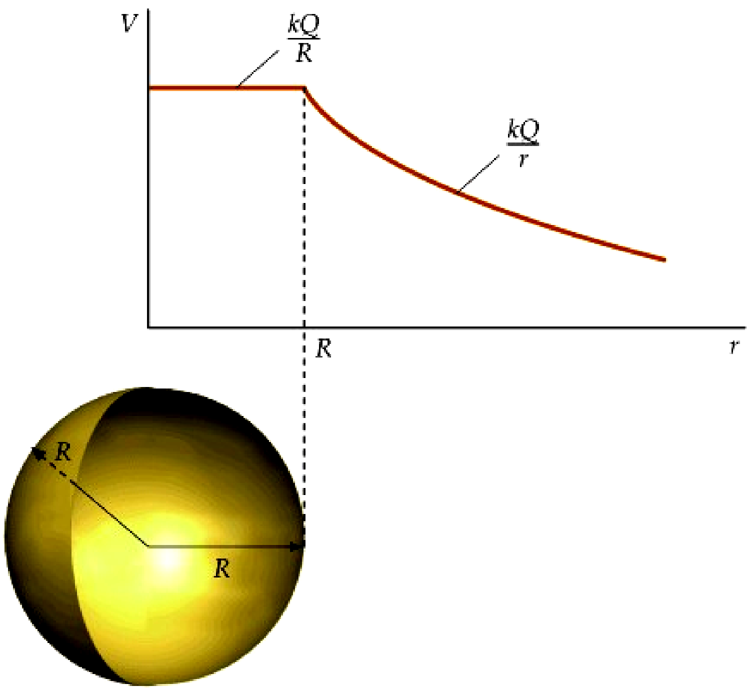
Exemple: Potencial V degut a una escorça esfèrica
1) en r >R 2) r<R

Com és una distribució finita de càrrega, podem calcular el potencial partint de qualsevol de les expressions:

1) $V = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{r}$ 2) $\Delta V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr}$

Ambdues ens portaràn a l'expressió solució:

$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$ *amb* $V(r=\infty) = V_0 = 0$



Cas 1: r<R

El camp elèctric és nul en l'interior de l'escorça, per tant: $V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = \int 0\cdot dr = Cst$

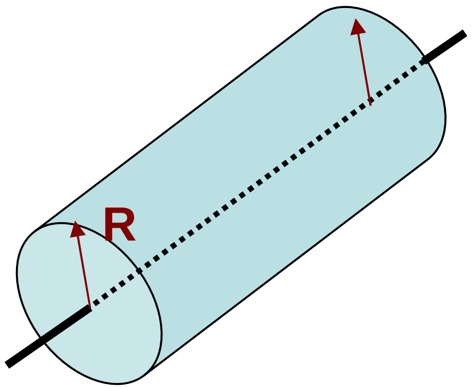
Cas 2: r>R

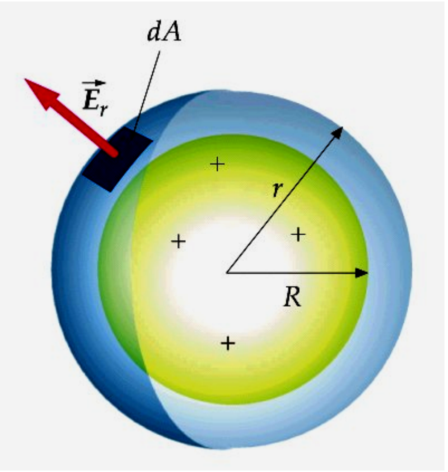
$$V(r) - V_0 = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$$

$$V(r=\infty) = V_0 = 0$$

En r=R ambdues expressions han de ser equivalents: $Cst = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R}$

Fes-ho tu! Comprova les expressions del potencial de les distribucions de càrrega següents





A) Esfera massissa de radi R

$$V_{int} = \frac{\rho}{3\cdot\varepsilon} r^2 \qquad V_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R}$$

B) Cílindre massís de radi R i longitud L=∞

$$V_{int}(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon} r^2 + C_1 \qquad V_{ext}(r) = -\frac{\rho\cdot R^2}{2\varepsilon}\ln(r) + C_2$$

C) Escorça cilíndrica de radi R i longitud L=∞

$$V_{int} = -\frac{\sigma\cdot R}{\varepsilon}\ln R \equiv Cst \qquad V_{ext} = V(r) = -\frac{\sigma\cdot R}{\varepsilon}\ln(r) + V_0$$