1ra Part **Camps elèctrics**

Camp elèctric degut a una distribució de càrrega uniforme

A/ Deducció a partir de la llei de Coulomb

1/ Llei de coulomb: $$\vec{F} = \int \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot dq}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$\vec{F} \equiv$ força feta sobre la càrrega per una distribució de càrrega.

$dq \equiv$ element diferencial de la distribució de càrrega

$\vec{u}_r \equiv$ vector unitari

2/ Camp elèctric: $$\vec{E}(P) = \int \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r_p^{\,2}} \cdot \vec{u}_p$$

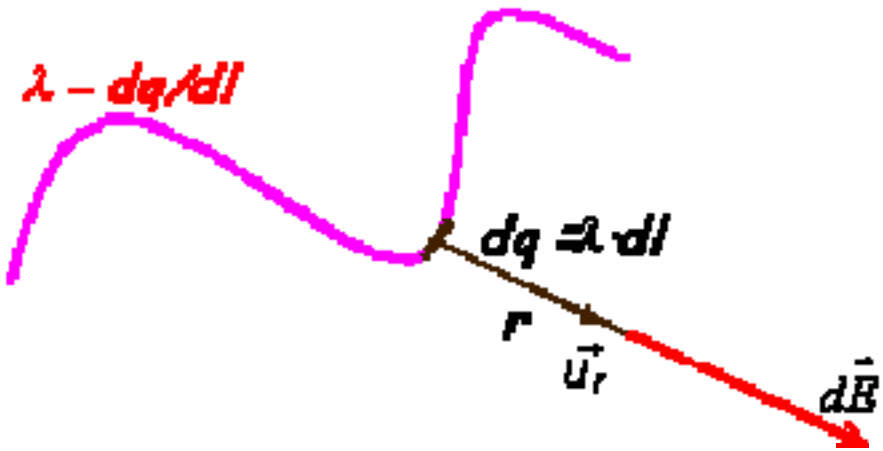
$\vec{E} \equiv$ camp creat per la distribució de càrega en un punt P de l'espai $\left[\frac{N}{C}\right]$

1/ Distribucions lineals de càrrega

Considerem una linea càrregada uniformement (és a dir, cada unitat de longitud té la mateixa càrrega).

Q serà la càrrega total i λ la seva distribució de càrrega (quantitat de càrrega distribuida en una longitud L).

$$Q = \lambda \cdot L \Rightarrow \lambda = \frac{Q}{L}$$



L'expressió en forma diferencial s'escriurà com,

$$dq = \lambda \cdot dl \Rightarrow \lambda = \frac{dq}{dl}$$

Substituint en l'equació de camp:

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \Pi \cdot \varepsilon_0} \int_C \lambda \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot dl$$

2/ Distribució superficial de càrrega

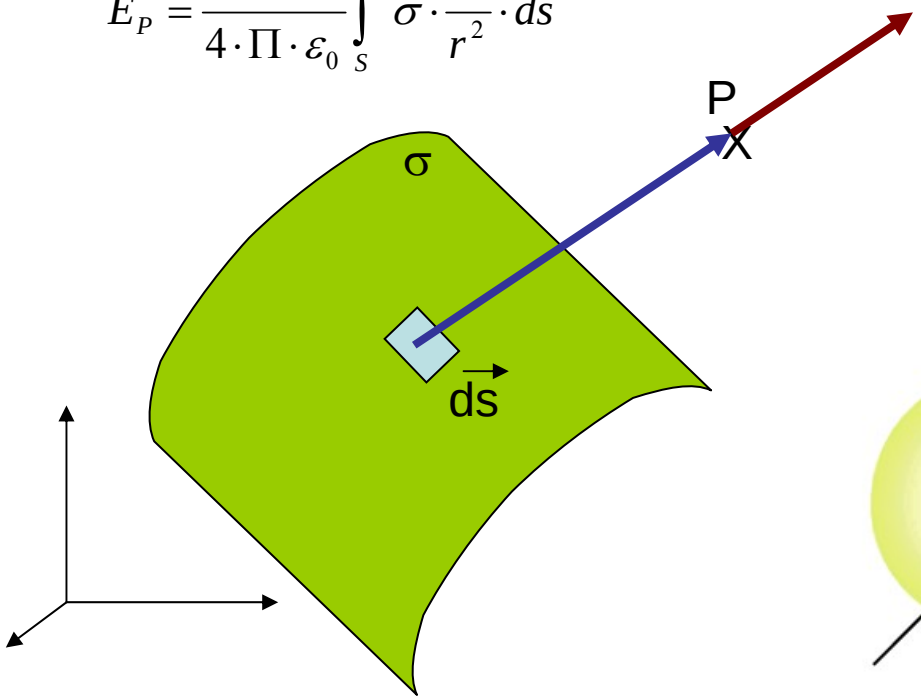
$$Q = \sigma \cdot S \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{S}$$

L'expressió en forma diferencial s'escriurà com,

$$dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow \sigma = \frac{dq}{ds}$$

Substituint en l'equació de camp:

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4 \cdot \Pi \cdot \varepsilon_0} \int_S \sigma \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot ds$$



3/ Distribució volúmica de càrrega

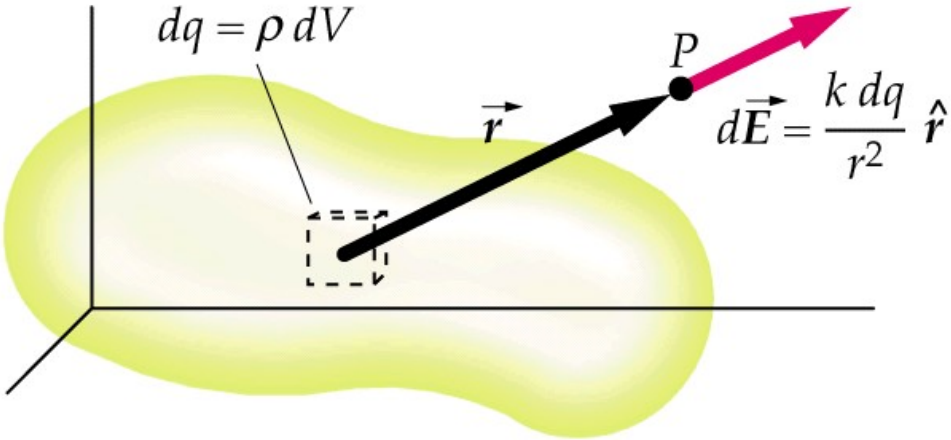
$$Q = \rho \cdot V \Rightarrow \rho = \frac{Q}{V}$$

L'expressió en forma diferencial s'escriurà com,

$$dq = \rho \cdot dV \Rightarrow \rho = \frac{dq}{dV}$$

Substituint en l'equació de camp:

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4 \cdot \Pi \cdot \varepsilon_0} \int_V \rho \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot dV$$

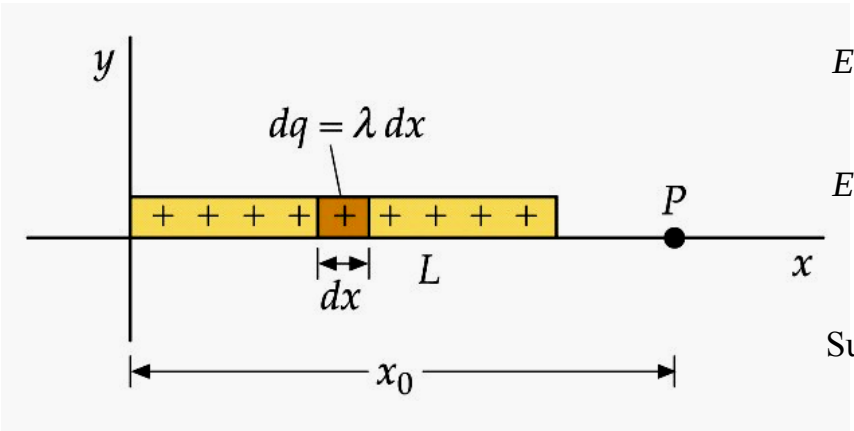


Exercici: Camp creat per una distribició lineal finita (barra)

A/ Sobre l'eix de la barra

$$dE_x = \frac{1}{4\Pi\varepsilon} \cdot \frac{dq}{(x_0 - x)^2} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon} \cdot \frac{\lambda dx}{(x_0 - x)^2}$$

Per a determinar el camp total es necessari integrar entre els limits corresponents a la geometría de la distribució de càrrega (des de x=o a x=L)



$$E_x = \int_0^L dE_x = \int_0^L \frac{1}{4\Pi\varepsilon} \cdot \frac{\lambda dx}{(x_0 - x)^2} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{(x_0 - x)} \right]_0^L$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{L}{x_0 \cdot (x_0 - L)} \right)$$

Subtituint λ en funció de la càrrega i la longitud, ens queda,

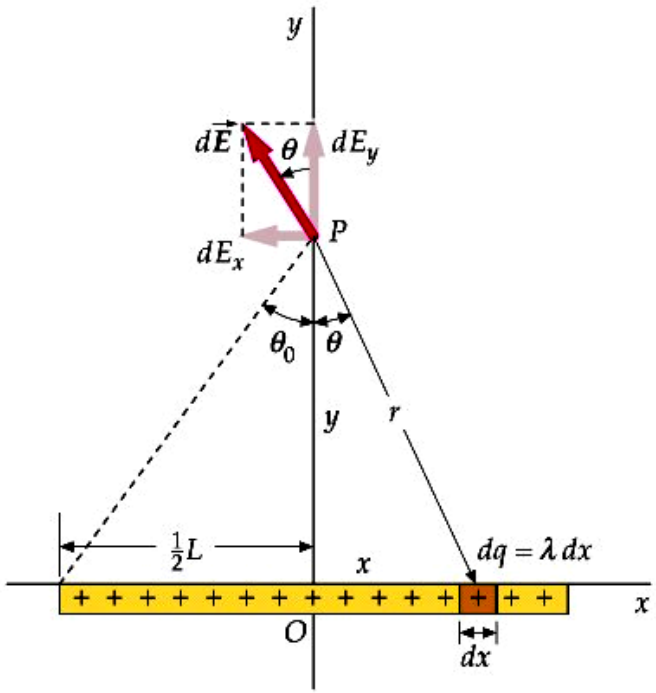
$$E_x = \frac{1}{4\Pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{x_{0.}(x_0 - L)}$$

$Unitats : S.I.$

Q: quines serian les unitats???

Exercici: Camp creat per una distribició lineal finita (barra)

B/ En un punt P situat sobre la mediatriu



Per a determinar el camp total aprofitarem que el problema és simètric. Tindrem en compte les contribucions en els diferents eixos x, i y.

Integrarem entre els limits corresponents a la geometría de la distribució de càrrega (des de x=-L/2 a x=L/2)

$$dE = \frac{1}{4\Pi\varepsilon}\cdot\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$[x]: E_x = \int dE_x = \int dE\cdot\sin\theta = 0$$

$$[y]: E_y = \int dE_y = \int dE\cdot\cos\theta = \frac{1}{4\Pi\varepsilon}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}\cdot\cos\theta$$

$$On: \cos\theta = \frac{y}{r}; r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$E_y = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} \frac{1}{4\Pi\varepsilon}\cdot\frac{\lambda\cdot y\cdot dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\cdot\int_{x=0}^{x=\frac{L}{2}} \frac{1}{4\Pi\varepsilon}\cdot\frac{\lambda\cdot y\cdot dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Es resol la integral d'acord amb les taules estàndards d'integració

$$\int\frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y^2}\cdot\sin\theta$$ Per **x=0 => θ=0** , I per **x=L/2 => θ= θ_0** (d'acord amb P)

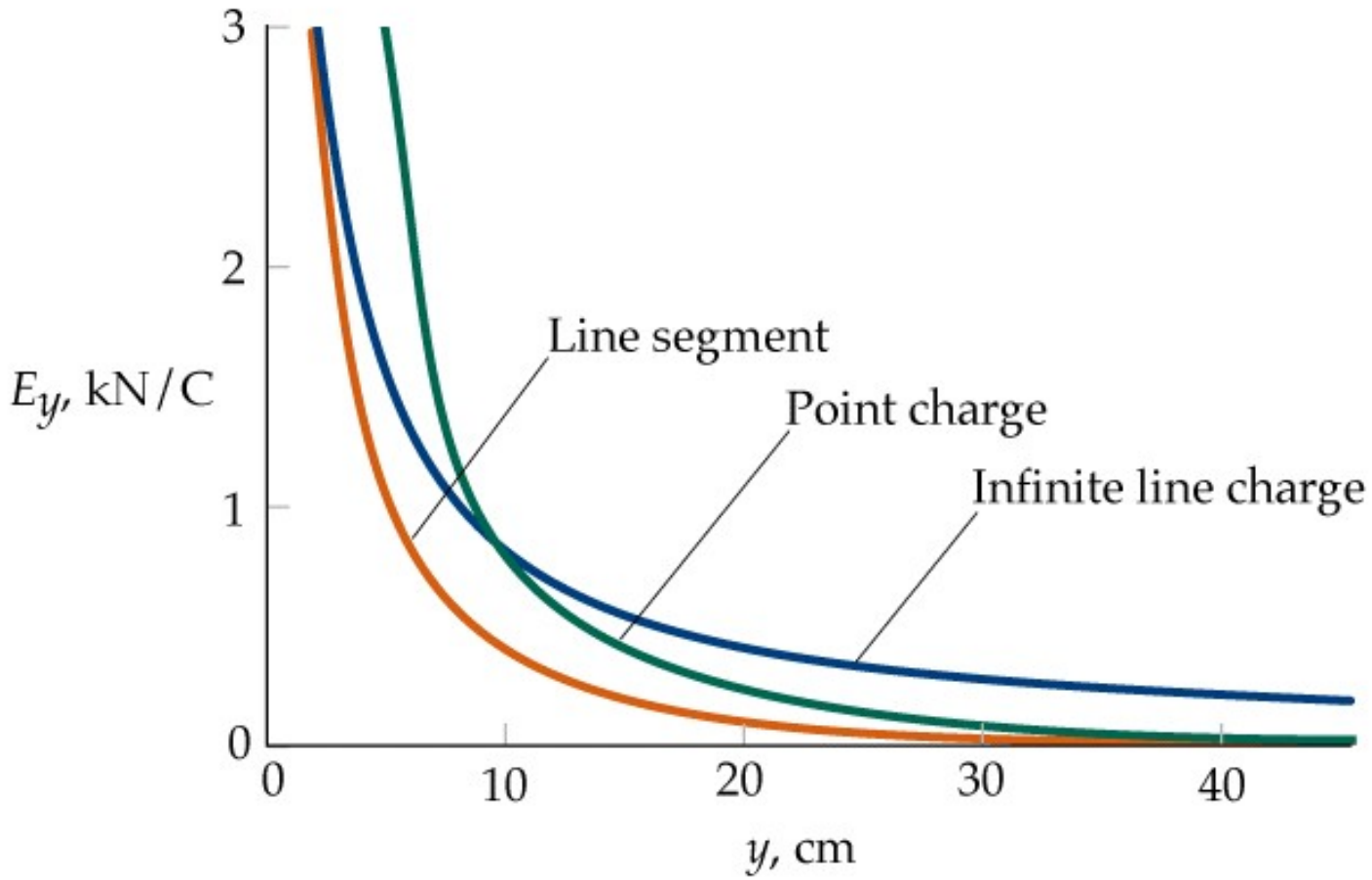
Així:

$$E_y = 2\cdot\frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon}\cdot\left[\frac{\sin\theta}{y}\right]_0^{\theta_0} = 2\cdot\frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon}\cdot\frac{\sin\theta_0}{y}$$

Caldria expressar **sin θ_0** segons les dades del problema (en funció de L,y).

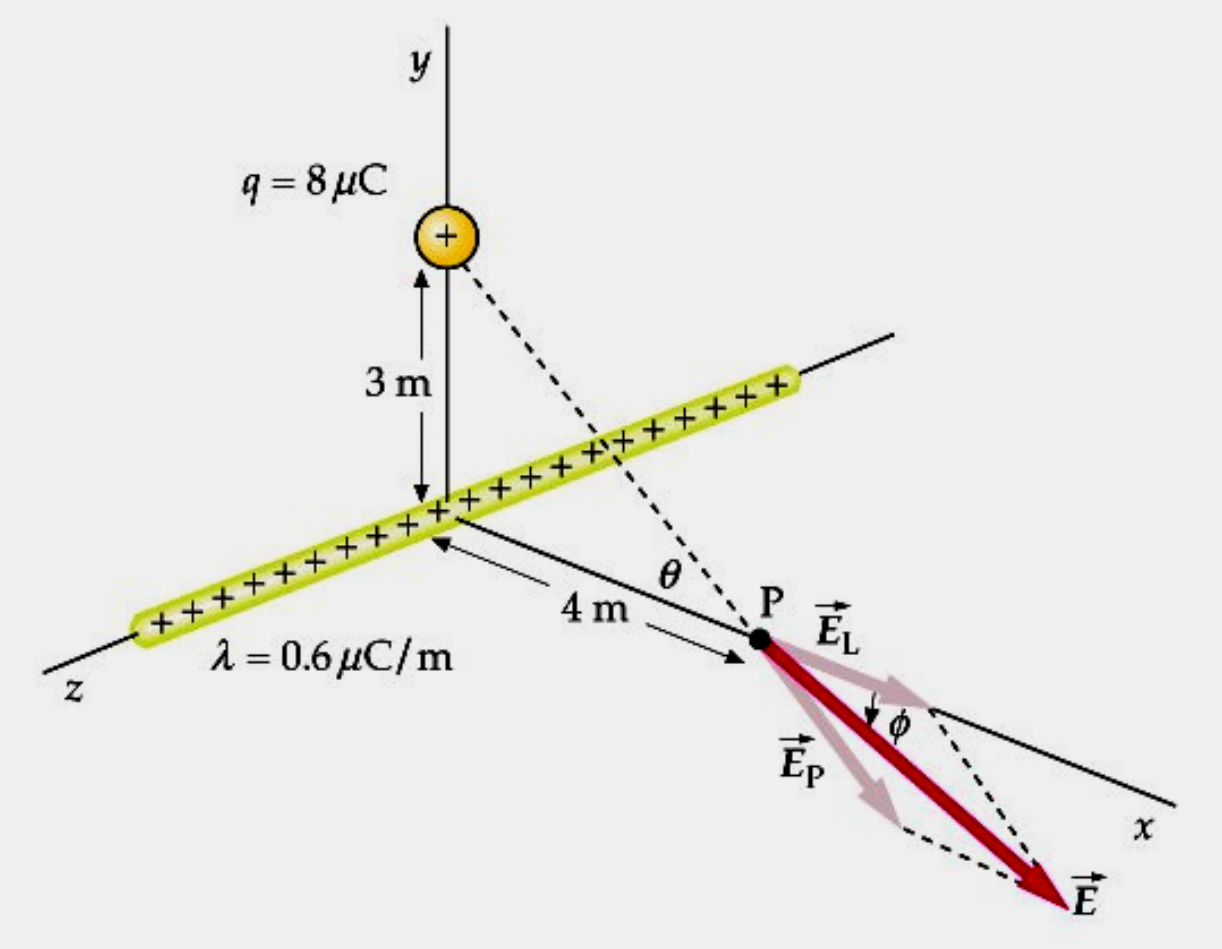
Q: Deduir l'expressió del camp per una distribució de longitud infinita

Representació gràfica del camp elèctric
comparació en els 3 casos lineals que hem treballat

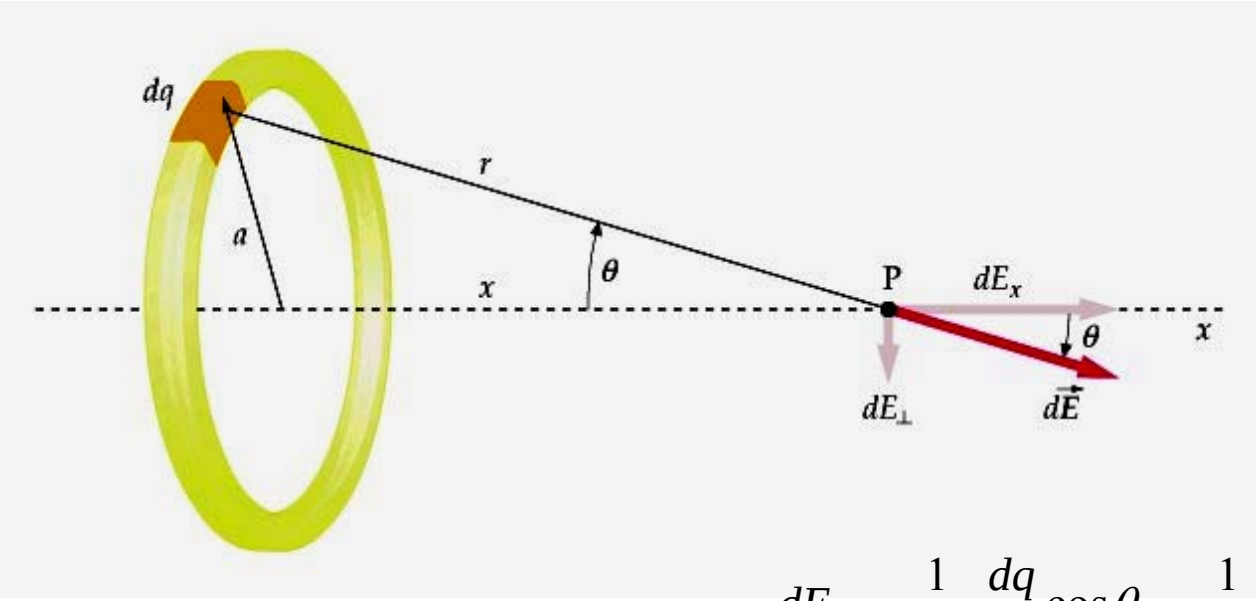


Fes-ho tu!

Càlcul del camp elèctric en un punt P per un conductor de longitud infinita



Camp elèctric, E, originat per una distribució de càrrega linial anul·lar sobre l'eix



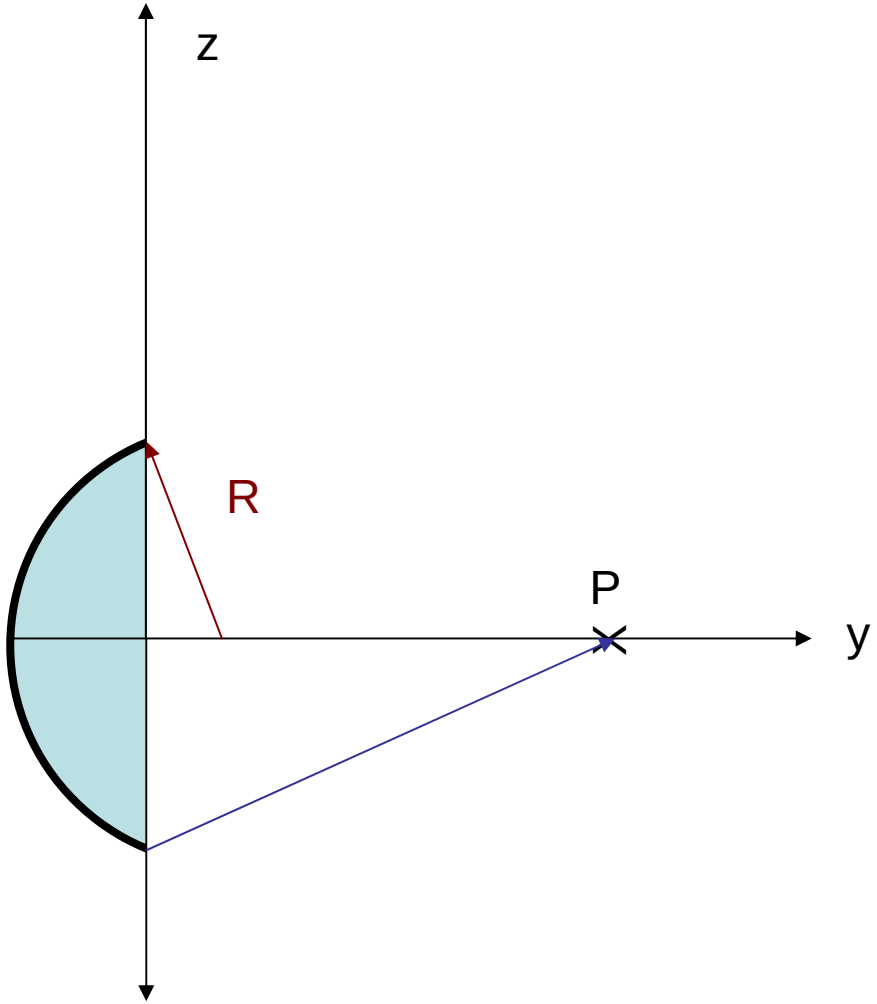
$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{\left(x^2+a^2\right)^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^Q dq$$

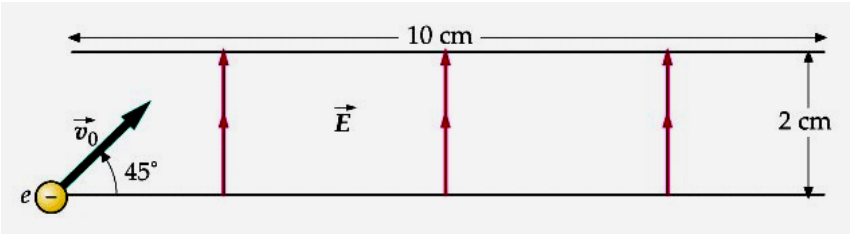
$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q\cdot x}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Fes-ho tu!

Calcula el camp generat per la distribució de càrrega uniforme de l'arc de cercle de la figura, en un punt P del seu eix de simetria



Fes-ho tu! Moviment d'una càrrega puntual a l'interior d'un camp elèctric uniforme



$$m_e = 9'1 \cdot 10^{-31} Kg$$

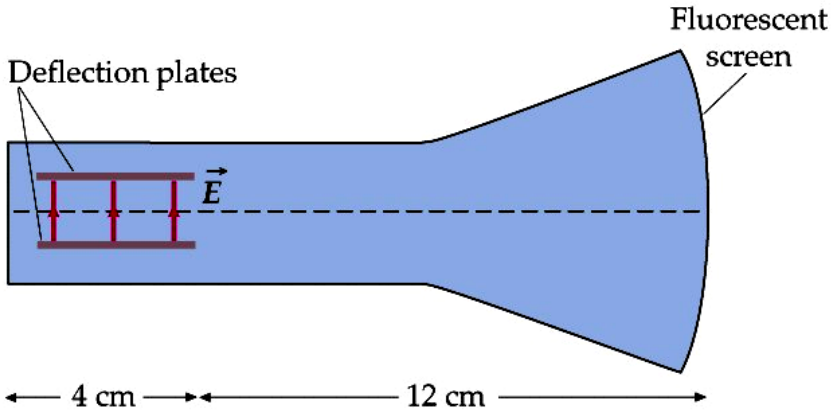
$$q_e = 1'6 \cdot 10^{-19} C$$

$$E = 3500 \frac{N}{C}$$

$$v_0 = 5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

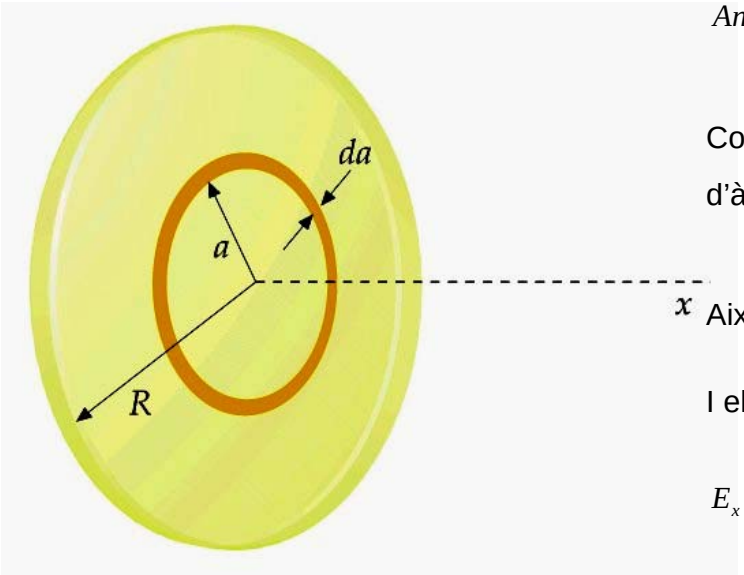
Sobre quina placa i en quina posició col·lisionarà l'electró?

Aplicacions:



Exercici: Camp creat per una distribució superficial de càrrega, circular de R=a

En un punt situat sobre el seu eix de rotació



Fixant-nos en la geometría del disc, podem partir de l'expressió del camp per una anella si considerem un disc com la superposicio de una sèrie d'anelles de radis compresos entre 0 i a (R=a)

$$Anella: E_x = \frac{1}{4\Pi\varepsilon}\frac{x\cdot Q}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$ és el camp generat per una anella sobre el seu eix

Considerem un element diferencial sobre el nostre disc d'àrea i càrregua :

$$dA = 2\Pi\cdot a\cdot da$$
$$dq = \sigma\cdot dA = 2\Pi\cdot\sigma\cdot a\cdot da$$

Així el diferencial de camp del nostre element de càrregaserà $dE_x = \frac{x}{4\Pi\varepsilon}\frac{2\Pi\cdot\sigma\cdot a\cdot da}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

I elslímits d'integració aniran de a=0 fins a= R.

$$E_x = \frac{x\cdot\Pi\cdot\sigma}{4\Pi\varepsilon}\int_0^R 2a\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot da$$

Es resol la integral d'acord amb les taules estàndards d'integració:

$$\int u^n du = \int (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\cdot dx$$

Així: $$E_x = \frac{x\sigma}{4\varepsilon}\cdot\left[\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^R = -\frac{x\sigma}{2\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}-\frac{1}{x}\right)$$