

# DINÀMICA DE ROTACIÓ D'UN SÒLID RIGID

## ÍNDEX:

### 1.- Rotació al voltant d'un eix fix:

#### 1.1.-Exercicis

### 2.- Moment d'inèrcia:

#### 2.1.-Exercicis

### 3.- Energia cinètica:

#### 3.1.-Exercicis

### 4.- Principi de conservació de l'energia:

#### 4.1.-Exercicis

### 5.- Moment angular:

#### 5.1.-Exercicis

### 6.- Teorema del moment angular:

#### 6.1.-Exercicis

### 7.- Conservació del moment angular:

#### 7.1.-Exercicis

### 8.- Exercicis de síntesis:

### 9.- Laboratori: Mesura de moments d'inèrcia:

<http://copernic.udg.es/docencia/guions/Inercia.pdf>

#### 9.1.- Treball de laboratori: Mesura de moments d'inèrcia

#### 9.2.- Treball de laboratori: Simulació pràctica

### 10.- Problemes ACME

### 11.- Bibliografia recomanada

---

### 1.- Rotació al voltant d'un eix fix:

En la rotació al voltant d'un eix fix, les equacions del moviment són:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm} \text{ i } M = I\alpha$$

On  $I$  representa el moment d'inèrcia del sòlid respecte l'eix de rotació i  $\alpha$  é l'acceleració angular del sòlid respecte aquest eix de giro.

## Relacions entre magnituds cinemàtiques amb acceleració uniforme

### Moviment rotatori

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

### Moviment rectilini

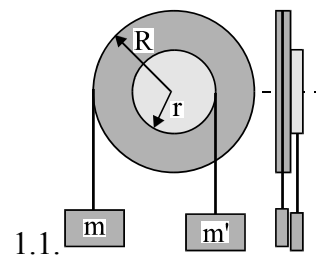
$$v = v_0 + at$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

### 1.1 Exercicis:

- 1.1. S'estira l'extrem d'una corda d'una bobina d'eix fix amb una força de 15 N. La massa de la bobina és de 4 kg i té un radi de 33 cm. S'observa que la bobina s'accelera uniformement des del repòs fins adquirir una velocitat de 30 rad/s en 3 s. Calcula el moment d'inèrcia de la bobina. **Sol:** 0,495 Kg.m<sup>2</sup>.
- 1.2. Una roda d'un afilador de fulles metàl·liques té 0,1 m de radi i gira amb una velocitat angular de 12 rad/s. Si l'afilador pressiona una fulla contra la pedra amb una força de 55 N durant 3 s, la roda disminueix la seva velocitat a 10 rad/s. Calcula el moment d'inèrcia de la roda. **Sol:**
- 1.3. Una galleda extreu aigua d'un pou. La galleda penja d'una politja d'eix fix, de massa 4 kg, radi 33 cm i moment d'inèrcia 0,495 kg.m<sup>2</sup>. Si la galleda té un pes de 15 N, calcula: a.- l'acceleració angular de la politja i la lineal de la galleda; b.- la velocitat lineal de la galleda als 3 s de recorregut si parteix del repòs. **Sol:**
- 1.4. S'uneixen en ambdós extrems d'una corda una massa de 0,50 kg i un altra de 0,7 kg. La corda passa per una politja de radi 0,1 m i moment d'inèrcia 1,3 · 10<sup>-3</sup> kg.m<sup>2</sup> que penja del sostre. Si la fricció entre la corda i la politja origina una diferència de 10% entre les tensions. Calcula l'acceleració lineal de cada massa. **Sol:** 0,4 m/s<sup>2</sup>



- 1.5. Dues corrioles de radi  $R$  i  $r$  respectivament, estan acoblades sòlidament de manera que formen un únic bloc que pot girar al voltant del seu eix central horitzontal. De la regata de la corriola gran penja una massa  $m$  i de la petita penja una massa  $m'$  de manera que el pes d'ambdues masses tendeixen a fer girar el sistema en sentits oposats. En deixar el sistema lliure, aquest es posa en moviment. (a) En quin sentit es mourà el sistema? (b) avalueu l'acceleració angular de les corrioles i les acceleracions de les masses, (c) Avalueu la tensió a cada corda. Dades:  $m = 600$  g,  $m' = 500$  g, massa total de les dues corrioles 800g,  $R = 8$ cm i  $r = 6$ cm i pel càlcul del moment d'inèrcia suposeu que es tracta d'un únic disc de radi 8cm. **Sol:** 21.5 rad/s<sup>2</sup>; 4.85 N i 5.54 N.

## 2.- Moment d'inèrcia:

El moment d'inèrcia del sòlid respecte a un eix  $\Delta$  es defineix per la relació:

$$I_{\Delta} = \int r^2 dm$$

El moment d'inèrcia respecte un eix qualsevol es determina pel **teorema de Steiner** o dels eixos paral·lels:

$$I_{\Delta} = I_{cm} + md^2$$

On  $d$  és la distància entre el centre de masses a l'eix de rotació i  $I_{cm}$  el moment d'inèrcia respecte a un eix paral·lel i que passa pel seu centre de masses.

**El teorema dels eixos perpendiculars** ens relaciona els moments d'inèrcia respecte tres eixos perpendiculars:

$$I_z = I_x + I_y$$

### 2.1 Exercicis:

2.1. S'estira l'extrem d'una corda d'una bobina d'eix fix amb una força de 15 N. La massa de la bobina és de 4 kg i té un radi de 33 cm. S'observa que la bobina s'accelera uniformement des del repòs fins a adquirir una velocitat de 30 rad/s en 3 s. Calcula el moment d'inèrcia de la bobina. **Sol:** 0,495 Kg.m<sup>2</sup>.

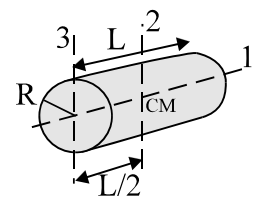
2.2. Dues masses de 5 i 7 kg es troben sobre una barra de pes menyspreable. Els objectes es troben separats una distància de 4 m. Determineu el moment d'inèrcia del sistema.  
a.- respecte un eix que passa pel punt mig del sistema; b.- respecte un eix situat a 0,50 m a l'esquerra de la massa de 5 kg. **Sol:** 48 kg. m<sup>2</sup>, 143 kg. m<sup>2</sup>.

2.3. Troba el moment d'inèrcia d'una barra prima de massa  $m$ , longitud  $L$  i homogènia

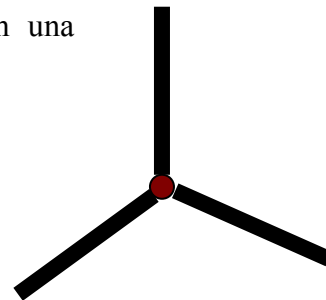
respecta als dos eixos dibuixats a la figura. **Sol:**  $I_1 = \frac{1}{12} mL^2$ ;  $I_2 = \frac{1}{3} mL^2$

2.4. Avaleu el  $I$  d'un cilindre massís i homogèni de longitud  $L$  i radi  $R$  respecte als tres eixos dibuixats en la figura. **Sol:**

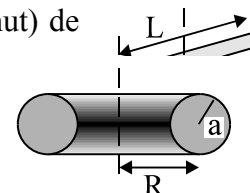
$$I_1 = \frac{1}{2} m R^2; I_2 = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2; I_3 = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{3} m L^2$$



2.5. Considera la pala del rotor d'un helicòpter com una vareta llarga i prima. Si cada una de les tres pales de l'helicòpter té 3,75 m de longitud i 160 kg de massa. Calcula el moment d'inèrcia de les tres pales del rotor respecte l'eix de rotació. Quin és el moment de força necessari per fer girar el rotor des del repòs a 5 rev/s en 8 s? **Sol:**



2.6. Calcula el volum i el moment d'inèrcia d'un torus (donut) de radi interior  $a$  i radi exterior  $R$  respecte al eix amb simetria de revolució que passa pel centre del



$$V = 2\pi^2 R a^2; I = m \left( R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right)$$

forat. **Sol:**

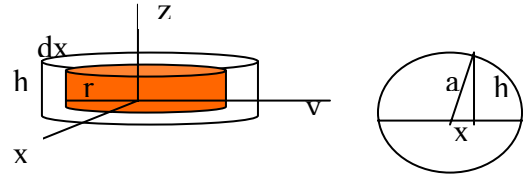
**Resolució:**

$$dM = \rho dV = \rho 2\pi r h dx; dI = r^2 dM$$

Primer calcularem el volum:

$$dV = 2\pi r(2h)dx = 4\pi r h dx; h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V = \int_{-a}^a 4\pi(R-x)\sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 R a^2$$

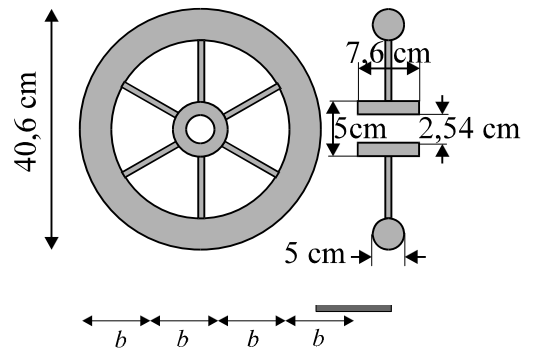


Ara calcularem el moment d'inèrcia respecte l'eix z



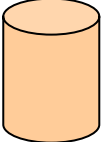
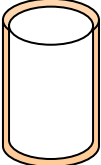


$$dI = r^2 dM$$

$$I = \int_{-a}^a 4\pi\rho(R-x)^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = M \left( R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right)$$

- 2.7. Calculeu el moment d'inèrcia del volant d'acer de la figura que està format per un anell exterior en forma de torus de secció 5cm (diàmetre) i està soldat mitjançant 6 radis cilíndrics de secció 2,6 cm<sup>2</sup> a un eix central. Aquest eix central consisteix en un cilindre foradat de 7,6 cm de longitud, diàmetre exterior de 5 cm i diàmetre interior de 2,54 cm. Nota la densitat de l'acer és 7.82 g/cm<sup>3</sup>. **Sol:** I = 0,563 Kgm<sup>2</sup>.



□ Taula de moments d'inèrcia

<p><b>Anell prim, al voltant d'un eix perpendicular al pla de l'anell i que passa pel seu centre</b></p>	$I = MR^2$	
<p><b>Esfera massissa al voltant del seu diàmetre</b></p>	$I = \frac{2}{5}MR^2$	
<p><b>Cilindre massís al voltant del seu eix</b></p>	$I = \frac{1}{2}MR^2$	
<p><b>Cilindre buit al voltant del seu eix</b></p>	$I = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$	
<p><b>Vareta prima al voltant d'una línia perpendicular que passa per un extrem</b></p>	$I = \frac{1}{3}ML^2$	
<p><b>Paral·lelepípede massís al voltant d'un eix que passa pel seu centre i que és perpendicular a una de les cares</b></p>	$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	

### 3.- Energia cinètica:

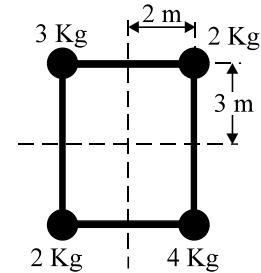
Si el sòlid rígida gira al voltant d'un eix fix, la seva energia cinètica  $E_c$  és igual a:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

On  $I$  representa el moment d'inèrcia del cos respecte l'eix de rotació i  $\omega$  la seva velocitat angular.

#### 3.1 Exercicis:

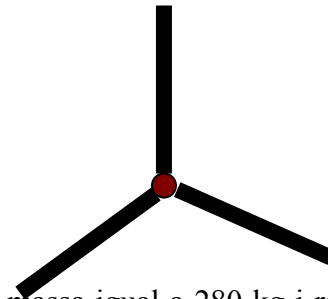
3.1. Les quatre partícules de la figura estan connectades mitjançant barretes lleugeres i rígides. Si el sistema gira en el pla  $XY$  al voltant de l'eix  $Z$  amb una velocitat angular de  $8 \text{ rad/s}$ , calculeu: (a) el moment d'inèrcia del sistema. (b) l'energia cinètica del sistema. **Sol:**  $I = 143 \text{ Kg m}^2$ ;  $E_c = 4576 \text{ J}$ .



3.2. Una massa de  $4 \text{ kg}$  i una altra de massa  $3 \text{ kg}$  es troben unides als extrems d'una barra de prima horitzontal de  $50 \text{ cm}$  de llarg i de massa  $0.5 \text{ kg}$ . Si el sistema gira amb una velocitat angular de  $8 \text{ rad/s}$  respecte un eix perpendicular a la barra i que passa pel seu centre. Determineu: a.- l'energia cinètica del sistema, b.- l'energia cinètica del sistema considerant que l'eix passa pel centre de masses del sistema. **Sol:**

3.3. El rotor d'una centrifuga té un moment d'inèrcia de  $4.25 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$ . Quina és la variació d'energia cinètica quan passa de  $0$  a  $10 \text{ rpm}$ . **Sol:**  $2.33 \cdot 10^4 \text{ J}$

3.4. Considera la pala del rotor d'un helicòpter com una vareta llarga i prima. Si cada una de les tres pales de l'helicòpter té  $3,75 \text{ m}$  de longitud i  $160 \text{ kg}$  de massa i giren amb una velocitat angular de  $45 \text{ rpm}$ . Calcula l'energia cinètica del rotor de l'helicòpter. **Sol:**



3.5. Una plataforma cilíndrica uniforme en rotació de massa igual a  $280 \text{ kg}$  i radi  $5.5 \text{ m}$  desaccelera passant de  $3.8 \text{ rev/s}$  al repòs en  $18 \text{ s}$  quan el seu motor és desconnectat. Calcula la potència del motor necessària per mantenir una velocitat uniforme de  $3.8 \text{ rev/s}$ . **Sol:**

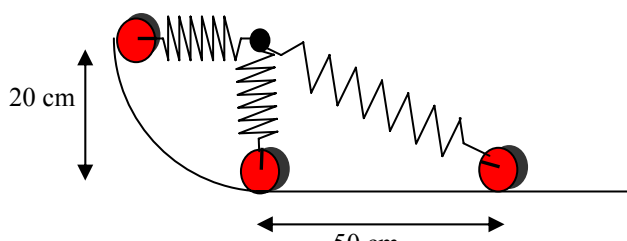
### 4.- Principi de conservació de l'energia:

Si les forces que actuen sobre el sòlid que gira al voltant d'un eix fix són conservatives es

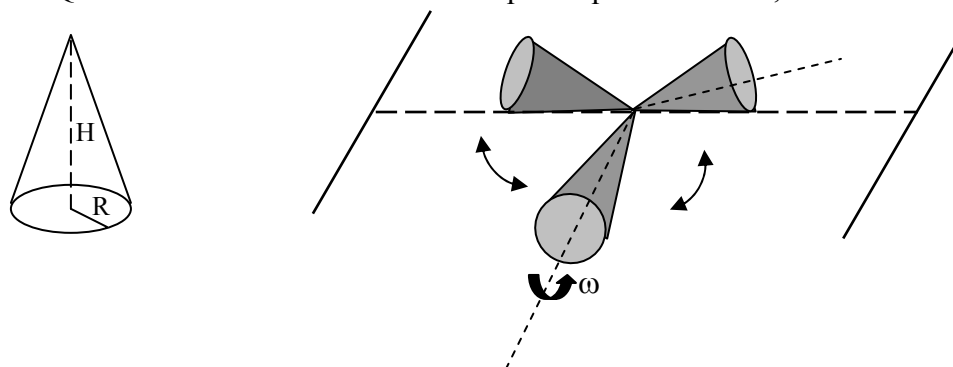
verifica que:  $H = E_c + E_p = \frac{1}{2} I \omega^2 + E_p = \text{constant}$ ; on  $H$  és l'energia mecànica del sòlid rígida i  $E_p$  la seva energia potencial.

## 4.1 Exercicis:

- 4.1. Un cilindre massís de radi 5 cm i massa 2 kg baixa una rampa rodolant sobre el seu eix. Si inicialment es troba sobre una alçada de 5 metres a una velocitat nul·la, determina: a) Velocitat d'arribada al final del pendent del centre de masses del cilindre? b) Si el cilindre fos més petit tindria una velocitat més baixa? c) Un cilindre buit, en què variaria la seva velocitat? **Sol:** 8,08 m/s. 8,08 m/s. 7 m/s.
- 4.2. Deixem anar per un pla inclinat d'alçada  $h$ , un cilindre, una esfera i un anell. Tots tenen la mateixa massa  $M$  i el mateix radi extern  $R$ . Quines velocitats tindran els seus centres de massa a la base del pla inclinat si l'altura és de 10 m? **Sol:**  $V_{\text{esfera}} = 11,83$  m/s;  $V_{\text{cilindre}} = 11,43$  m/s;  $V_{\text{anell}} = 9,89$  m/s.
- 4.3. Una pilota de 1,5 kg de massa i 20 cm de radi roda per un pendent de  $30^\circ$  de desnivell. Quan ha recorregut 1 metre en el pla, la seva velocitat en el centre de masses és de 3,2 m/s. Considerant la pilota com una esfera perfecte, a) Si el pendent fa 2 metres de llarg, caurà la pilota per l'altre costat o tornarà a rodant cap a baix? b) De quina velocitat ha partit inicialment? **Sol:** no caurà per l'altre costat. 6,96 m/s.
- 4.4. Un cilindre massís de 15 cm de radi i 90 kg de pes baixa rodant per una rampa sense rrelliscar on inicialment es trobava amb velocitat nul·la. a) A quina velocitat passarà el cilindre abans que la constant elàstica de la molla de 1500 N/m comenci a actuar? b) Quina serà la velocitat angular del cilindre quan el seu centre s'hagi mogut 50 cm cap a la dreta? c) Quina longitud de tensió tindrà la molla en el moment que el cilindre tingui una velocitat angular nul·la? **Sol:** 10,77 rad/s. 10,64 rad/s. 0,48 m.



- 4.5. Tenim un con d'altura  $H=20$  cm i radi de la base  $R=0,1$  m. El deixem perpendicular a un pendent de manera que el con oscil·la d'un costat a l'altre de la pendent rodolant sense lliscar. Quina és la seva velocitat màxima que adquireix? **Sol:** 2,5 m/s



## 5.- Moment angular:

El moment angular en la direcció de l'eix de rotació és igual al producte del moment d'inèrcia del cos respecte aquest eix per la velocitat angular.

$$L = I\omega$$

- 5.1. Calculeu el moment angular d'un cilindre massís de massa 2 Kg i 50 cm de radi que gira al voltant del seu eix central amb una velocitat angular de 10 rad/s. **Sol:** 2,5 Kg m<sup>2</sup> / s.
- 5.2. Un objecte amb moment d'inèrcia de 8,2 Kg m<sup>2</sup> respecte l'eix de rotació gira amb una velocitat angular de 3,5 rad/s. Calculeu el seu moment angular. **Sol:** 28,7 Kg m<sup>2</sup> / s.
- 5.3. Calculeu la velocitat angular d'un objecte si el seu moment angular és de 2 Kg m<sup>2</sup> / s i el seu moment d'inèrcia respecte l'eix de rotació és de 5 Kg m<sup>2</sup>. **Sol:** 0,4 rad/s.
- 5.4. Calculeu quin hauria de ser el moment d'inèrcia d'un objecte per tal que la seva velocitat angular fos de 7,5 rad/s i el seu moment angular fos de 3 Kg m<sup>2</sup> / s. **Sol:** 0,4 Kg m<sup>2</sup>.
- 5.5. S'ha de construir un dispositiu amb una esfera, de radi 0,25 m, que ha de girar respecte un eix que passa pel seu centre amb  $\omega = 0,08$  rad/s i  $L = 5$  Kg m<sup>2</sup> / s. Calculeu la densitat que hauria de tenir el material amb que es construeix l'esfera. **Sol:** 3,81 Kg/m<sup>3</sup>.

## 6.- Teorema del moment angular:

L'equació diferencial del moviment de rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix fix, correspon a:

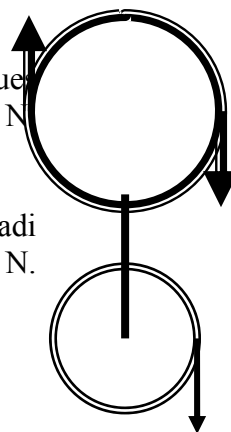
$$\frac{dL}{dt} = I\alpha = M$$

I s'expressa com **el producte del moment d'inèrcia del cos respecte l'eix de rotació per l'acceleració angular és igual al moment resultant, M, de les forces exteriors respecte aquest eix.**

- 6.1. Sobre un volant que es trobava en repòs, s'aplica un moment de forces de 5 N m. Si el seu moment d'inèrcia és de 10 Kg m<sup>2</sup>. Calculeu: a) L'acceleració angular del volant, b) la seva velocitat angular després d' 1 minut. **Sol:** 0,5 rad/s<sup>2</sup>, 30 rad/s.

- 6.2. Sobre una roda de radi 1 m i massa 3 Kg s'apliquen dues forces tangents en el seu plaï contraposades de 5 N. Calculeu la seva acceleració angular. **Sol:** 10/3 rad/s<sup>2</sup>.

- 6.3. A un cilindre massís, amb el seu eix principal fixa, i de radi 0,5 m i massa 1 Kg se li aplica una força tangent de 8 N. Calculeu la seva acceleració angular. **Sol:** 64 rad/s<sup>2</sup>.



- 6.4. Quina és la força tangent a la seva superfície que cal aplicar sobre una esfera, amb el seu eix central fixat, de radi 1m i massa 10 Kg per tal d'obtenir una acceleració angular de 5 rad/s<sup>2</sup>. **Sol:** 20 N.
- 6.5. Tenim un cilindre que ha de girar respecte el seu eix central amb una acceleració angular de 3 rad/s<sup>2</sup>. A quina distància del seu eix de rotació cal aplicar una força tangent de 10 N?. Dades del cilindre: massa = 2 Kg, radi = 0,5 m. **Sol:** 0,019 m.



## 7.- Conservació del moment angular:

Quan el moment resultant de les forces externes que actua sobre un sòlid rígid és zero, aleshores:

$$L = I\omega = \text{constant}$$

- 7.1. Tenim dos objectes A i B que giren respecte el mateix eix amb  $I_A = 2 I_B$ . Si la velocitat angular de l'objecte A és de 3 rad/s. Quina ha de ser la velocitat angular de B per tal que quan entrin en contacte s'aturin ambdós objectes? **Sol:** 6 rad/s amb sentit de gir contrari al de l'objecte A.
- 7.2. Tenim dos objectes de massa 3 Kg units per un cable rectilini de 3 m i de massa negligible. L'eix de rotació és normal al cable i passa per aquest a 1 m d'un dels objectes, essent el moment d'inèrcia d'aquest objecte de 7 Kg m<sup>2</sup>. Si volem que  $\omega = 6$  rad/s i  $L = 10$  Kg m<sup>2</sup>/s, quin ha de ser el moment d'inèrcia del segon objecte respecte de l'eix que passa pel seu centre de masses i és paral·lel a l'eix de rotació?. Indicacions: És recomanable dibuixar un esquema del sistema descrit. A més, cal utilitzar en els càlculs el teorema de Steiner. **Sol:** 15,67 Kg m<sup>2</sup>.
- 7.3. Calculeu quin hauria de ser el moment d'inèrcia d'un objecte respecte l'eix de rotació per tal que  $\omega = 5$  rad/s i  $L = 10$  Kg m<sup>2</sup>/s. **Sol:** 2 Kg m<sup>2</sup>.
- 7.4. Un disc de radi 0,4 m i massa 0,5 Kg gira respecte de l'eix que passa pel seu centre i és normal al pla que defineix amb  $\omega = 10$  rad/s. Si s'adhereix una partícula de 50 g a 0,2 m del seu centre, calculeu la nova velocitat angular del conjunt. **Sol:** 9,5 rad/s.
- 7.5. Tenim un sistema mecànic amb  $I = 2$  Kg m<sup>2</sup> i  $\omega = 8$  rad/s. Si hem de substituir l'objecte per un altre amb  $I = 10$  Kg m<sup>2</sup>, calculeu la velocitat angular que caldria obtenir per tal de mantenir constant el moment angular del sistema. **Sol:** 1,6 rad/s.

## 8.- Exercicis de síntesis:

### 9.- Laboratori: [Mesura de moments d'inèrcia](http://copernic.udg.es/docencia/guions/Inercia.pdf)

<http://copernic.udg.es/docencia/guions/Inercia.pdf>

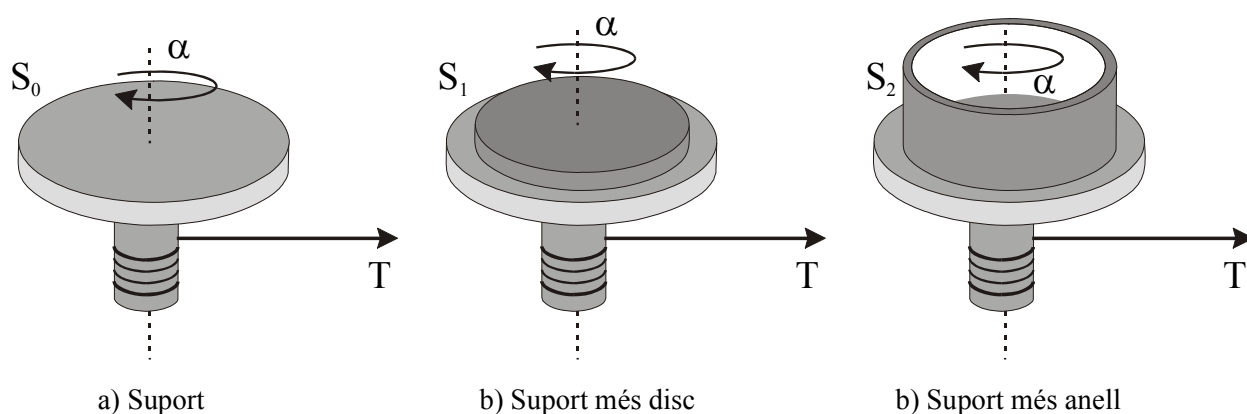
#### 9.1.- Treball de laboratori: Mesura de moments d'inèrcia

##### *Objectiu*

Obtenir experimentalment els moments d'inèrcia d'un disc i d'un anell per un mètode dinàmic. Comparar els resultats amb les previsions teòriques.

### Fonament teòric

El moment d'inèrcia d'un cos és la resistència que ofereix a verificar canvis en el seu moviment de rotació (igual que la massa ho fa respecte al seu moviment lineal). És un paràmetre que depèn de la distribució de la massa del cos respecte al seu eix de rotació. En aquesta pràctica es trobaran i es compararan els moments d'inèrcia d'un anell i un disc, respecte als seus eixos. En realitat es treballarà amb els tres sistemes representats a continuació:



El disc i l'anell tenen aproximadament la mateixa massa. El radi exterior del disc és igual al radi mitjà de l'anell. Es trobaran els moments d'inèrcia dels tres sistemes S<sub>0</sub>, S<sub>1</sub> i S<sub>2</sub>, i després es restarà el moment d'inèrcia del suport als dos darrers, o sigui,  $I_{\text{disc}} = I_{\text{suport+disc}} - I_{\text{suport}}$  (igual per l'anell) per trobar així els moments d'inèrcia del disc i de

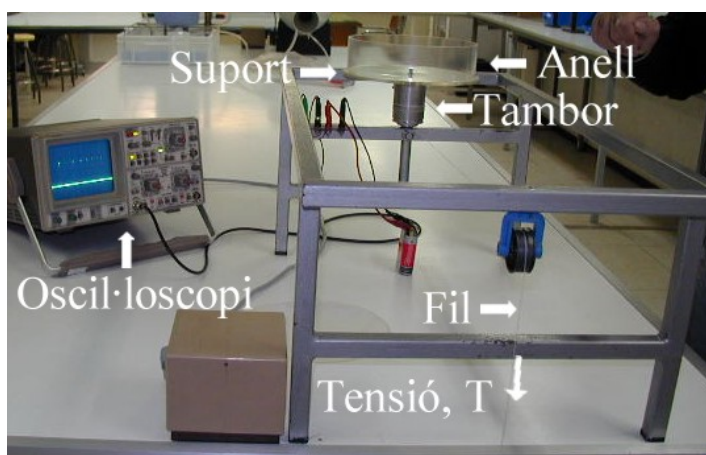


Figura 1. Muntatge experimental.

l'anell. D'aquesta manera els moments d'inèrcia serviran per comparar l'efecte de la distribució de massa al voltant de l'eix de rotació.

Per tal de trobar experimentalment els moments d'inèrcia es disposa d'un muntatge com el de la figura 1. (<http://diobma.udg.edu:8080/dspace/handle/10256.1/432>)

La massa  $m$  (suma de les masses de les peses i el porta- peses) provoca una tensió constant en el fil,  $T$ , que es troba enrotllat en el tambor. Es produeix així un moment de força sobre el sistema compost pel tambor, el disc suport i el cos que s'ha d'estudiar, i el conjunt gira amb acceleració angular constant. Podem dir que sobre el tambor actua tangencialment una força, que val:

$$T = m(g - a)$$

on  $a$  és l'acceleració de les peses. Si  $r$  és el radi del tambor, es produeix un moment respecte a l'eix de rotació  $e$ , de valor:

$$M_e = T \cdot r = m(g - a) \cdot r$$

el qual provoca una rotació tal que

$$M_e = I_e \alpha$$

on  $I_e$  és el moment d'inèrcia total respecte  $e$ , i  $\alpha$  l'acceleració angular del sistema en rotació, que es pot relacionar amb  $a$  segons:

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

Combinant les expressions anteriors obtenim:

$$I_e = mr \left( \frac{g}{\alpha} - r \right)$$

Totes les variables del segon terme de l'equació anterior poden ser mesurades directament, excepte l'acceleració angular, que en aquesta pràctica serà trobada experimentalment. A aquest efecte hi ha una barrera fotoelèctrica a prop del suport giratori. Aquest suport té una peça opaca i lleugera que interromp la barrera cada cop que tot el sistema completa una volta. La barrera envia aleshores un impuls elèctric a un oscil·loscopi, a la pantalla del qual es podrà observar el ritme de pas de la peça, és a dir, el temps que triga el sistema a completar cada volta (l'eix  $x$  és el temporal i l'eix  $y$  és el de voltatge). A partir d'aquests valors es pot trobar  $\alpha$  segons l'equació d'un moviment accelerat:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

on  $\theta$  és l'angle,  $\theta_0$  l'angle inicial,  $\omega$  la velocitat angular,  $\omega_0$  la velocitat angular inicial i  $t$  el temps. Cal alliberar el sistema de manera que  $\theta_0$  i  $\omega_0$  siguin nuls, d'aquesta manera l'acceleració angular només dependrà de la posició del sistema i del temps, mesurables ambdós experimentalment.

### ***Mètode operatiu***

- 1) Mesureu el radi  $r$  del tambor amb un peu de rei.

2) Peseu la massa de l'anell i del disc, i mesureu el radi del disc i els radis extern i intern de l'anell.

3) Poseu una massa fixa al porta- peses (per exemple 30 g) i peseu el conjunt. Aquesta serà la massa  $m$ .

4) Connecteu l'alimentació de la barrera fotoelèctrica a una font de corrent i el senyal de sortida a l'oscil·loscopi. Connecteu la memòria d'aquest (premeu el botó *stor*).

5) Enrotlleu el fil en el tambor, només amb el suport (sistema  $S_0$ ), poseu la peça opaca enfront de la barrera, de manera que aquesta envii senyal, i allibereu el sistema de manera que  $\theta_0$  i  $\omega_0$  siguin zero. Congeleu la pantalla de l'oscil·loscopi quan el sistema hagi donat unes quantes voltes (amb cinc o sis n'hi ha prou) (premeu el botó *hold*).

6) Anoteu els temps en els quals s'han produït les interrupcions successives de la barrera fotoelèctrica, comptant des de l'instant en què s'ha iniciat el moviment.

7) Opereu igualment per als sistemes  $S_1$  i  $S_2$ .

### Tractament de dades i qüestions

1) Anoteu les dades següents:  $r$  (radi del tambor);  $m_a$  (massa anell);  $m_d$  (massa disc);  $m$  (massa peses i porta- peses);  $r_a$  (radi mitjà de l'anell) i  $r_d$  (radi del disc).

2) Completeu la taula següent:

	$\theta$ (rad)					
Suport	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					
Suport més disc	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					
Suport més anell	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					

3) Representeu, en una mateixa gràfica per als tres sistemes, els valors de l'angle girat en funció del quadrat del temps. Per què s'utilitza el quadrat del temps?

4) Ajusteu rectes als punts representats i obteniu-ne els pendents. A partir dels pendents calculeu les respectives acceleracions angulars.

5) Quins moments d'inèrcia  $I_0$ ,  $I_1$  i  $I_2$  s'obtenen per als sistemes  $S_0$ ,  $S_1$  i  $S_2$ ?

6) Quins moments d'inèrcia s'obtenen experimentalment per l'anell i el disc? Quin és més gran? Per què?

7) Sabent que el moment d'inèrcia d'un anell de gruix negligible es pot calcular teòricament com a  $I_a = m_a r_a^2$  i el d'un disc com a  $I_d = \frac{1}{2} m_d r_d^2$ , calculeu aquests valors teòrics i compareu-los amb el resultat de l'apartat 6.

8) En els ascensors s'utilitzen volants inercials per tal de limitar l'acceleració de caiguda de l'ascensor quan el seu motor deixa d'operar. En aquestes condicions el sistema és similar al descrit en la pràctica, on el porta peses- faria el paper d'ascensor. Determineu el moment d'inèrcia del volant si l'acceleració màxima permesa és de  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}$ , la massa de l'ascensor amb l'equipatge és de 250 kg i el radi del tambor al que estan units el cable de l'ascensor i el volant és de 10 cm. Nota, una acceleració de  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}$  estableix una velocitat màxima de 3 m/s després d'un desplaçament 30 m, es a dir un recorregut equivalent a 10 pisos.

**Recollida i Elaboració de dades: Mesura de moments d'inèrcia**

1) Anoteu les dades següents:

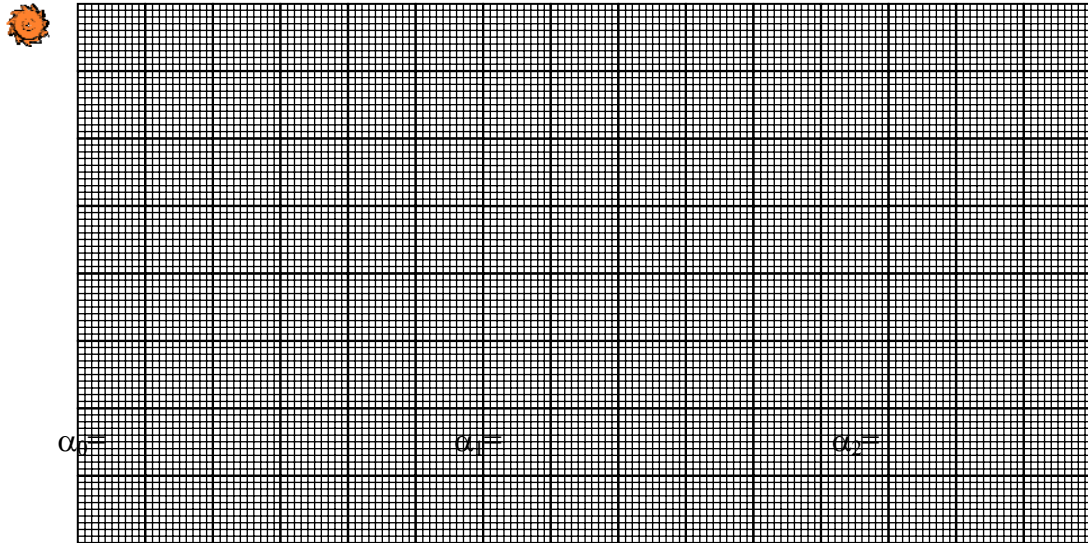
$r$  (radi del tambor)=  $m$  (massa peses i porta peses)=  
 $r_d$  (radi del disc)=  $m_d$  (massa disc)=  
 $r_a$  (radi mig de l'anell)=  $m_a$  (massa anell)=

2) Completeu la taula següent:

	$\theta$ (rad)					
Suport	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					
Suport més disc	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					
Suport més anell	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					

3) Representeu en una mateixa gràfica pels tres sistemes, els valors de l'angle girat en funció del quadrat del temps. Mitjançant regressió lineal ajusteu rectes als punts representats i obteniu els seus pendents. A partir dels pendents calculeu les respectives acceleracions angulars.

 <http://www.xtec.es/~ocasella/applets/inercia/appletsol.htm>



4) Calculeu els moments d'inèrcia  $I_0$ ,  $I_1$  i  $I_2$  pels sistemes  $S_0$ ,  $S_1$  i  $S_2$  de forma experimental. Calculeu els moments d'inèrcia del disc i de l'anell. Sabent que el moment d'inèrcia d'un anell de gruix menyspreable es pot calcular teòricament com  $I_a = m_a r_a^2$  i el d'un disc com

$I_d = \frac{1}{2} m_d r_d^2$ , calculeu aquests valors teòrics i compareu-los amb els resultats experimentals.

Indiqueu quin cos presenta un moment d'inèrcia major i perquè.

$I_0(\text{exp}) =$   
 $I_1(\text{exp}) =$   
 $I_d(\text{exp}) = I_1 - I_0 =$   
 $I_2(\text{exp}) =$   
 $I_a(\text{exp}) = I_2 - I_0 =$

$I_d(\text{teòric}) =$   
 $I_a(\text{teòric}) =$

### *Aplicació en un cas pràctic*

En els ascensors s'utilitzen volants inercials per tal de limitar l'acceleració de caiguda de l'ascensor quan el seu motor deixa d'operar. En aquestes condicions el sistema és similar al descrit en la pràctica, on el porta peses feria el paper d'ascensor. Determineu el moment d'inèrcia del volant si l'acceleració màxima permesa és de  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}$ , la massa de l'ascensor amb l'equipatge és de 250 kg i el radi del tambor al que estan units el cable de l'ascensor i el volant és de 10 cm.

## **9.2.- Treball de laboratori: Simulació pràctica**

## **10.- Problemes ACME**

## **11.- Bibliografia recomanada:**

Escoda Acero, M.L.; Planella Morató, J.; Suñol Martínez, J.J. ' Problemes de física per a batxillerat i cicles formatius'. Girona: Universitat, 2005. [Consulta 6 febrer 2008]  
<http://dugi-doc.udg.edu:8080/dspace/handle/10256/143>