



Universitat de Girona

# **MODELIZACIÓN CONSTITUTIVA Y COMPUTACIONAL DEL DAÑO Y LA FRACTURA DE MATERIALES COMPUESTOS**

**Pere MAIMÍ VERT**

**ISBN: 978-84-690-7202-8**  
**Dipòsit legal: GI-766-2007**



UNIVERSITAT DE GIRONA  
ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR  
DEPT. D'ENGINYERIA MECÀNICA I DE LA CONSTRUCCIÓ INDUSTRIAL

---

MODELIZACIÓN CONSTITUTIVA Y  
COMPUTACIONAL DEL DAÑO Y LA  
FRACTURA DE MATERIALES  
COMPUESTOS

---

TESIS DOCTORAL

PERE MAIMÍ

2006

DIRECTORES

DR. P.P. CAMANHO  
UNIVERSIDADE DO PORTO

DR. J.A. MAYUGO  
UNIVERSITAT DE GIRONA



## Agraïments

Als directors d'aquesta tesis, el Dr. P.P. Camanho i el Dr. J.A. Mayugo, pel continu seguiment, les interessants suggerències i la seva empatia, imprescindibles durant la llarga elaboració d'aquesta tesis.

Als mestres i amics del grup de recerca AMADE i del departament d'Enginyeria Mecànica de la Universitat de Girona, pels bons moments compartits aquests darrers anys.

L'elaboració d'aquesta tesis m'ha donat l'oportunitat de conèixer Porto i treballar amb el Dr. P.P. Camanho, la Cassilda i els companys de la Facultat de Enginyeria. A ells els dec els resultats experimentals d'aquesta tesis. Les estades de recerca han estat finançades per la Universitat de Girona i el grup de recerca AMADE.

També he tingut l'oportunitat de realitzar una estada al Langley Research Center de la NASA a qui haig d'agraïr al Dr. Carlos G. Dávila.

Finalment, a la meua família per ensenyarme a fer les coses amb amor.



# Índice general

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Contenido de la tesis . . . . .	5
<b>2. Estabilidad y fractura</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Límite de estabilidad . . . . .	17
2.3. Mecánica de la fractura . . . . .	22
2.3.1. La zona de fallo . . . . .	25
2.3.2. La Curva de Resistencia (" <i>R-curve</i> ") . . . . .	26
2.4. Ley de escala (SEL) . . . . .	27
2.5. Los modelos de zona cohesiva . . . . .	30
2.6. Consideraciones estadísticas . . . . .	33
<b>3. Bases de la mecánica del daño continuo</b>	<b>39</b>
3.1. Introducción . . . . .	39
3.2. Elemento representativo de volumen . . . . .	41
3.3. Descripción del daño en la mesoescala . . . . .	44
3.3.1. Cierre de las grietas, unilateralidad del daño . . . . .	48
3.4. Bases termodinámicas de los modelos constitutivos . . . . .	51
3.5. Activación y evolución de las variables de estado . . . . .	55
3.6. Daño distribuido y daño localizado . . . . .	58

<b>4. Modelización de los materiales compuestos</b>	<b>69</b>
4.1. Introducción . . . . .	69
4.2. Modos de daño en laminados multicapa . . . . .	71
4.2.1. Criterios de fallo para láminas . . . . .	77
4.2.2. Fallo del laminado . . . . .	82
4.3. Mesomodelos . . . . .	84
4.3.1. Método del " <i>Ply discount</i> " . . . . .	86
4.3.2. Modelo de Matzenmiller <i>et al.</i> . . . . .	88
4.3.3. Modelo de Ladevèze <i>et al.</i> . . . . .	90
4.3.4. Modelo de Linde <i>et al.</i> . . . . .	93
4.3.5. Modelo de Barbero <i>et al.</i> . . . . .	95
4.3.6. Modelo de Williams <i>et al.</i> . . . . .	96
4.3.7. Comentarios finales sobre los mesomodelos . . . . .	99
4.4. Modelos en dos escalas . . . . .	101
4.4.1. Ley de mezclas . . . . .	105
4.4.2. Método de los elementos finitos en dos escalas . . . . .	107
<b>5. Agrietamiento de la matriz y delaminación</b>	<b>109</b>
5.1. Introducción . . . . .	109
5.2. Tratamiento analítico . . . . .	111
5.2.1. Inicio del agrietamiento y de la delaminación bajo esfuerzos transversales . . . . .	113
5.2.2. Evolución de la densidad de grietas bajo esfuerzos transversales	121
5.2.3. Evolución del agrietamiento y la delaminación bajo esfuerzos transversales . . . . .	128
5.2.4. Variabilidad de la energía crítica de fractura. Consideraciones estadísticas . . . . .	134
5.2.5. Respuesta bajo tensiones cortantes en el plano . . . . .	138
5.2.6. Inicio del agrietamiento y de la delaminación bajo esfuerzos cortantes en el plano . . . . .	146
5.2.7. Evolución de la densidad de grietas y la delaminación bajo esfuerzos cortantes en el plano . . . . .	151
5.2.8. Determinación de los parámetros elásticos $k_2$ y $k_6$ . . . . .	155

5.2.9.	Agrietamiento bajo estados de tensión no uniformes . . . . .	157
5.2.10.	Agrietamiento y delaminación bajo tensiones combinadas en el plano . . . . .	159
5.2.11.	Ejemplos numéricos . . . . .	167
5.3.	Modelo de daño transversalmente isótropo . . . . .	170
5.3.1.	Características del modelo: descripción del daño y cierre de grietas . . . . .	170
5.3.2.	Energía libre complementaria y disipación mecánica . . . . .	173
5.3.3.	Funciones de activación del daño ( $F_N$ ) . . . . .	174
5.3.4.	Funciones de carga ( $\phi_N$ ) . . . . .	174
5.3.5.	Evolución de los umbrales de daño ( $r_N$ ) . . . . .	176
5.3.6.	Leyes de daño ( $d_M$ ) . . . . .	177
5.3.7.	Algoritmo y tensor constitutivo tangente . . . . .	183
5.3.8.	Ejemplos numéricos . . . . .	186
<b>6.</b>	<b>Análisis estructural</b>	<b>197</b>
6.1.	Introducción . . . . .	197
6.2.	Modelo constitutivo para compuestos laminados . . . . .	197
6.2.1.	Energía libre complementaria y descripción del daño . . . . .	198
6.2.2.	Funciones de activación del daño y la plasticidad . . . . .	200
6.2.3.	Disipación . . . . .	204
6.2.4.	Evolución del daño y la plasticidad . . . . .	207
6.2.5.	Leyes de daño . . . . .	209
6.2.6.	Energías críticas de fractura . . . . .	220
6.2.7.	Regularización viscosa . . . . .	221
6.2.8.	Algoritmo y tensor constitutivo tangente . . . . .	222
6.3.	Modelo de daño para elementos sólidos . . . . .	223
6.4.	Ejemplos numéricos . . . . .	225
6.4.1.	Objetividad de la respuesta . . . . .	225
6.4.2.	Sensibilidad a la entalla . . . . .	227
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y futuras líneas de trabajo</b>	<b>235</b>
7.1.	Conclusiones . . . . .	235
7.2.	Futuras líneas de trabajo . . . . .	238



<b>Bibliografía</b>	<b>240</b>
<b>Apéndices</b>	<b>265</b>
A.1. Algoritmo de integración numérica . . . . .	265
A.2. Método de la secante para determinar $A_M$ . . . . .	266
A.3. Tensor constitutivo tangente del modelo trans. isótropo . . . . .	267
A.4. Tensor constitutivo tangente . . . . .	268

# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

### 1.1. Introducción

Los materiales compuestos de altas prestaciones progresivamente están sustituyendo materiales tradicionales en muchas aplicaciones estructurales. Se conoce como materiales compuestos aquellos formados por la combinación de dos o más materiales conocidos como fases, materiales componentes, o constituyentes. En los materiales compuestos las distintas fases no pierden su naturaleza y se encuentran separadas a través de una interfase. Habitualmente una de estas fases mantiene continuidad y se conoce como matriz mientras las otras fases se encuentran embebidas y se conocen como refuerzo.

Existen distintas clasificaciones de los materiales compuestos, ya sea por la geometría del refuerzo o el material que constituye la matriz. Entre la geometría del refuerzo se pueden diferenciar esos formados por fibras largas, cortas o partículas. Las fibras pueden mantener una dirección preferencial en el compuesto, encontrarse aleatoriamente orientadas o incluso formar un tejido. Por lo que se refiere al material base de la matriz los materiales más típicos son los formados por matriz polimérica (PMC, "*polymer matrix composites*"), metálica (MMC, "*metal matrix composites*") y cerámica (CMC, "*ceramic matrix composites*").

Tradicionalmente en ingeniería se utilizan materiales metálicos en la mayoría de máquinas mientras los materiales cerámicos son altamente utilizados en ingeniería civil. El incentivo para el desarrollo de los materiales compuestos es la mejora de las propiedades de estos materiales clásicos.

Las propiedades a mejorar de los metales son básicamente su elevada densidad, su mal comportamiento mecánico a altas temperaturas y su comportamiento frágil bajo cargas a fatiga. Por otro lado los objetos metálicos son fáciles de fabricar y poseen una elevada rigidez y resistencia. Bajo cargas estáticas ofrecen gran tenacidad.

Los compuestos de matriz polimérica (por ejemplo, epoxy) y refuerzo cerámico (por ejemplo, fibras de carbono) ofrecen una mayor rigidez y resistencia específica que los metales así como un mejor comportamiento a fatiga, estos materiales han sustituido a muchas piezas metálicas en la industria aeronáutica donde el peso y el buen comportamiento a fatiga son parámetros de diseño esenciales. Estos materiales son la base de la presente tesis.

El mal comportamiento a altas temperaturas de los metales puede ser mejorado utilizando materiales cerámicos en el compuesto, ya sea en la matriz o en alguna fase de refuerzo.

Probablemente el material compuesto más utilizado, sobretodo en edificación, es el hormigón armado. La fragilidad y baja resistencia a tracción del hormigón se refuerza con barras de acero. El hormigón ofrece una barrera al fuego y a los agentes corrosivos así como confinamiento al acero.

No obstante las propiedades de cada uno de las fases no son un indicador claro de las propiedades que tendrá el material compuesto. El comportamiento del material será altamente dependiente, no solo de la naturaleza de las fases, sino también de la geometría y tamaño del refuerzo así como el comportamiento de la interfase matriz-refuerzo. La interfase tiene gran importancia en el comportamiento no-lineal del material siendo de gran influencia en parámetros como la tenacidad.

Para obtener una buena eficiencia en el diseño de estos materiales deben desarrollarse modelos capaces de predecir el comportamiento de un compuesto a partir del conocimiento de la geometría, distribución y propiedades de los distintos constituyentes. La simulación numérica parece la herramienta más prometedora [1] para el diseño y optimización de nuevos materiales y estructuras.

## 1.2. Motivación

Los laminados multicapa producidos a partir de la union de capas unidireccionales, constituidas por una matriz polimérica y unas fibras cerámicas largas orientadas en una dirección, son unos de los materiales más utilizados en la industria aeronáutica debido a sus excelentes propiedades específicas, rigidez y resistencia además de su excelente comportamiento a fatiga.

Actualmente la estrategia de diseño de estructuras de materiales compuestos reside en el conocido como *"building block approach"* [2], el cuál consiste en analizar un conjunto de piezas simples y no pasar a un nivel de mayor complejidad hasta alcanzar un suficiente nivel de conocimiento de su comportamiento. Este conocimiento se adquiere a base de carísimos ensayos experimentales. La simulación mediante computadoras, conocido como *"virtual mechanical testing"*, debe permitir adquirir gran parte de estos conocimientos sobre el comportamiento estructural a partir de baratos análisis numéricos. El ensayo virtual a parte de ser económicamente más barato que la experimentación ofrece la capacidad de entender mejor los procesos físicos envueltos en el comportamiento del material, ya que aparte de las variables medibles en un ensayo experimental es capaz de ofrecer toda la información del estado del sistema permitiendo optimizar el diseño a partir de un conocimiento detallado del comportamiento del material.

El desarrollo de las técnicas numéricas y de la computación son dos pasos imprescindibles para la evolución de la simulación numérica. No obstante es necesario que estos avances vengán acompañados por un conocimiento más profundo del material, definiendo modelos constitutivos basados en la micromecánica y de las técnicas de escala. La diferencia de escala entre las estructuras y los procesos físicos envueltos en el proceso de fractura se encuentran separadas por unos 10 ordenes de magnitud [1]. La resistencia y tenacidad de los compuestos es altamente dependiente de las propiedades del material en la escala de los constituyentes, las cuáles se encuentran muy alejadas a las estructuras que formaran, resultando imposible modelar explícitamente los materiales base en toda la estructura.

### 1.3. Objetivos

El objetivo de la presente tesis se centra en desarrollar modelos constitutivos para la determinación del comportamiento mecánico de materiales compuestos avanzados y de las estructuras fabricadas con ellos.

Se estudian materiales formados por capas unidireccionales de matriz polimérica termoestable (por ejemplo, epoxy) y fibras cerámicas largas y orientadas en una dirección. En el presente trabajo sólo se consideran estructuras trabajando bajo esfuerzos estáticos, no se consideran efectos viscosos ni cargas a fatiga.

La tesis considera tanto el diseño del material propiamente como de estructuras construidas a partir de este. El material se fabrica mediante la unión de distintas capas unidireccionales orientadas en distintas direcciones formando un laminado. Se realizan modelos analíticos y numéricos para determinar el diseño óptimo de espesores y orientaciones de las distintas capas para evitar la degradación de estas, básicamente su agrietamiento y la delaminación, la separación de las mismas. Los modelos para el diseño del laminado son comparados con datos experimentales que determinan el agrietamiento y comportamiento no lineal de la matriz determinando el conocido como "*in-situ effect*" [3], es decir la capacidad de las laminas de aumentar su resistencia al formar un laminado. El modelo numérico es un modelo de daño continuo para un material transversalmente isótropo apropiado para el tratamiento de subestructuras como uniones, solapamientos, etc. que se encuentren bajo estados de tensión complejos.

Las estructuras laminadas requieren definir modelos de daño para ser tratados mediante la teoría de cáscaras. Se define un modelo que se compara con experimentos sobre estructuras laminadas. Este es capaz de determinar la tenacidad de la estructura así como el efecto tamaño, la capacidad de las estructuras de sustentar menores esfuerzos al aumentar su tamaño. Experimentos realizados con laminados con agujeros muestran esta tendencia a menudo llamada "*notch size effect*" [4].

## 1.4. Contenido de la tesis

En el capítulo dos se da una visión sobre el tema de la estabilidad y la fractura de los materiales cuasi-frágiles bajo cargas estáticas. Se realiza un estudio de las distintas aproximaciones históricas al tema del fallo, se tratan desde los criterios en tensiones, las consideraciones estadísticas y la aproximación energética de la estabilidad.

El tratamiento de los fenómenos no lineales y la fractura dentro de la mecánica de los medios continuos parece la opción más válida para el tratamiento de procesos complejos y acoplados en piezas de cualquier geometría. En el capítulo tercero se describen las bases de la modelización constitutiva.

En el capítulo cuarto se realiza una breve descripción de los distintos enfoques existentes en la bibliografía para el tratamiento y modelado del daño y la fractura de los materiales compuestos. El resumen se limita a metodologías para el cálculo estructural, ya sea a partir de modelos macromecánicos o de dos escalas, los cuáles tienen en cuenta explícitamente la morfología del material.

La definición de modelos constitutivos basados en los fenómenos físicos involucrados en cada mecanismo de daño debe ser la clave para definir herramientas numéricas fiables para el tratamiento de las distintas partes estructurales. En el capítulo quinto se estudia el más común de los mecanismos de daño de los compuestos multicapa. El agrietamiento de la matriz y la delaminación, estos mecanismos no son catastróficos, es decir su presencia no provoca la pérdida de capacidad estructural del material pero sí la aparición de no linealidades en el comportamiento de la estructura. En este capítulo se realiza una breve introducción al tratamiento del agrietamiento de la matriz y se define un modelo analítico y un modelo numérico micromecánico.

Debido a la utilización de estos materiales en estructuras muy esbeltas es necesario que el tratamiento numérico se realice a partir de la teoría de cáscaras. En el sexto capítulo se define un modelo de daño para el tratamiento estructural.

Para finalizar en el apartado de conclusiones se enumeran las deficiencias del tratamiento propuesto a partir de comparaciones experimentales y se proponen nuevas líneas de trabajo para corregir las carencias.



# Capítulo 2

## Estabilidad y fractura

### 2.1. Introducción

A pesar de la evidente necesidad de garantizar la estabilidad de las construcciones humanas, el dimensionamiento estructural se realiza básicamente a partir del conocimiento práctico adquirido a base de experiencia y ensayos en laboratorio, y no de un conocimiento analítico de los procesos físicos envueltos.

La determinación de la pérdida de estabilidad de cualquier estructura se presenta como un problema de formidable complejidad en la que es necesario el conocimiento de varias ciencias para llegar a resultados aproximados. El desarrollo de las matemáticas, la termodinámica, la ciencia de los materiales, la computación por ordenador, y las técnicas experimentales son herramientas sin las cuáles hoy parece imposible el planteamiento de cualquier diseño estructural. No obstante, a pesar del enorme desarrollo de estas ciencias en la segunda mitad del siglo XX y de los avances alcanzados, las técnicas de análisis actual a veces son incapaces de determinar la fuerza última que será capaz de sustentar una estructura tan simple como un pasamano con un agujero. Por todos es bien conocido que el factor de concentración de tensiones provocados por discontinuidades en el material y tabulados en todos los libros de diseño de máquinas no es suficiente para predecir el límite de fallo. Deben ser corregidos con parámetros semi-empíricos, como el factor de sensibilidad a la entalla, los cuáles dependen del material y de sus circunstancias, ya sean temperatura, ciclo de las cargas, tamaño, etc.





Figura 2.1: Pont du Gard y acueducto de Tarragona.

El uso de nuevos materiales con nuevas características resistentes hace que el conocimiento empírico adquirido a lo largo de años de experiencia deba ser tratado con mucha cautela.

Más allá de la experiencia uno de los pocos criterios constructivos de la antigüedad era que todas las partes estructurales trabajaran a compresión. En el caso que el criterio no pudiera satisfacerse era necesario la utilización de madera para esas partes destinadas a sustentar tracciones. Este criterio, que para su optimización requiere elevados análisis matemáticos, fue la que originó los arcos y las cúpulas, como los construidos por los romanos en Europa, como el puente de Gard o el acueducto de Tarragona ambos de arco semicircular (figura 2.1) o con la cúpula del Panteón de Roma (figura 2.2.a). Probablemente alcanzó su mayor nivel de intuición con el trabajo del arquitecto Antoni Gaudí, ya en el siglo XIX, quien ideó y puso en práctica un ingenioso sistema. Con cuerdas hacía una especie de esqueleto de lo que proyectaba. En él colgaba sacos de distintos pesos llenos con perdigones de plomo. Las formas y ángulos que adoptaban las cuerdas y sus distintas curvaturas establecían exactamente la geometría de los arcos y posición de las columnas. El boceto de la fachada de la iglesia de la colonia Güell (figura 2.2.b) fue realizado por Gaudí pintando sobre la fotografía de uno de estos modelos hechos con cuerdas. Luego invirtiendo el sentido de la gravedad todas las cuerdas que sólo trabajan a tracción pasan a ser columnas trabajando a compresión. Un criterio semejante, pero no igual ya que es más imperfecto, se ha utilizado para el cálculo, mediante elementos finitos, de grandes estructuras de hormigón, definiendo una ley constitutiva sin capacidad de

sustentar tracciones se obtiene el campo de tensiones que tendría el material una vez agrietado. No obstante análisis teóricos y numéricos indican la peligrosidad de tal consideración [5][6].



Figura 2.2: a) Cúpula del Panteón de Roma y b) Boceto de la fachada de la iglesia de Colonia Güell proyectada por Antoni Gaudí y nunca construida.

Posiblemente la mecánica nació en Grecia con el trabajo de Aristóteles y, sobre todo Arquímedes introduciendo la demostración del funcionamiento de la palanca y del centro de gravedad de los cuerpos. No obstante no fue hasta el trabajo de Galileo Galilei que se realiza un estudio científico de la resistencia de los materiales. En 1638 publica un libro titulado *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue scienze"*, hoy conocido como *"Dos nuevas ciencias"* [7]. El libro se estructura mediante el dialogo que mantienen tres personajes a lo largo de cuatro jornadas. Las dos últimas, más famosas, tratan el problema del movimiento iniciando la física tal y como hoy la conocemos. La otra ciencia, la que nos interesa en la presente tesis, trata del fallo estructural y las leyes de escala. Hasta la obra de Galileo la ingeniería estructural sólo era considerada como un arte.

Galileo realizó numerosos experimentos para determinar la resistencia última de elementos bajo cargas axiales y a flexión. Se dio cuenta que bajo fuerzas axiales la resistencia del material era proporcional al área rechazando la idea introducida por Leonardo da Vinci según la cuál la resistencia de una cuerda, o barra trabajando axialmente, era inversamente proporcional a su longitud. Sus estudios de vigas a



Figura 2.3: Portada original del libro *"Dos Nuevas Ciencias"* de Galileo Galilei (1638) [7] y dos ilustraciones sobre la fragilidad de los gigantes (*"weakness of giants"*).

flexión parten de la bien conocida ley de la palanca. Durante toda su obra consideró que la línea neutra de una viga trabajando a flexión pura se encontraba en una cara, línea ABC de la figura 2.3. Esta suposición es errónea pues no se mantiene el equilibrio entre extensión y compresión en las distintas secciones, o bien la rigidez del material a compresión es infinita. Probablemente este error sea fruto de la observación de la fractura, pues una viga en voladizo de un material con menor resistencia a tracción que compresión termina, en última instancia, formando una rótula en la parte inferior del empotramiento, punto A en la figura 2.3. La cinemática de una viga a flexión no fue correctamente descrita hasta el trabajo de E. Mariotte (1680) y la correcta determinación de los esfuerzos si la viga sigue la ley de Hooke hasta el momento del fallo hasta el trabajo de Parent (1713). Coulomb tuvo en consideración que una vez superado el límite elástico, al ser distinto a tracción que a compresión

la línea neutra se desplazaba.

En el siglo XVII la poderosa industria náutica Veneciana requería, cada vez más, la construcción de navíos más grandes para el transporte marítimo. Galileo observó que las distintas naves no mantenían similitud geométrica, los navíos grandes debían aumentar sus piezas desproporcionadamente. Galileo encontró dos razones para tal explicación: aplicando la ley de la palanca observó que las tensiones en elementos trabajando a flexión aumentaba en función del punto de aplicación de la carga. Al mismo tiempo consideró que la masa total de un cuerpo es proporcional al cubo de las dimensiones de este ( $D^3$ ) mientras la resistencia, bajo esfuerzos axiales, al cuadrado ( $D^2$ ). Galileo hizo el mismo razonamiento para mostrar la imposibilidad de construir estructuras indefinidamente grandes y lo comparo con el tamaño de los animales (figura 2.3). D'Arcy [8] a principios del siglo XX comparó la proporción de masa ósea respecto a la masa total de distintos vertebrados terrestres observando que esta proporción aumentaba con el tamaño del animal. Así, por ejemplo en ratones la masa del esqueleto supone un 8 % de la masa total, un 14 % en perros, un 18 % en humanos y hasta un 27 % en elefantes. Galileo también percibió que en animales acuáticos esta tendencia no era aplicable debido al empuje hidrostático, proporcional al volumen.

### Teoría de la elasticidad

Este factor de escala es tenido en cuenta en la teoría de la elasticidad diferencial desarrollada a principios del siglo XIX. El desarrollo de la teoría matemática de la elasticidad fue un paso esencial para la determinación del estado de tensiones y deformaciones a que se encuentran los distintos puntos de los sólidos sometidos a cargas externas. La teoría de la elasticidad en los medios continuos explica todas las observaciones realizadas por Galileo. Su aparición data de la Francia post-revolucionaria, el profundo tratamiento matemático de los ingenieros y científicos de la "*École Polytechnique*" supuso un salto adelante en la ingeniería y en el tratamiento matemático de problemas complejos [9].

Poisson utilizó la vieja idea según la cual entre dos partículas actúan fuerzas que son de atracción o repulsión según la distancia en que estas se encuentran para solucionar la extensión de membranas. No obstante fue Navier quien desarrollo la teoría molecular de los cuerpos elásticos. Considerando que en cada partícula que

componen los cuerpos sólidos actúan dos tipos de fuerzas ( $\sum \mathbf{F}$  y  $\sum \mathbf{F}_1$ ), las primeras son fuerzas que se balancean entre si representando las fuerzas entre las moléculas cuando no son aplicadas fuerzas externas, las otras balancean las fuerzas externas aplicadas como, por ejemplo, el peso. Navier asumió que la variación de las fuerzas son inversamente proporcionales a la variación de la distancia entre moléculas y actúan en la línea que une ambas. De este modo Navier desarrolló la teoría de la elasticidad de los cuerpos isótropos. Este modelo sólo requiere un parámetro de ajuste resultando el coeficiente de Poisson fijado por la propia teoría.

Fue Cauchy [10]-[13] quien introdujo el concepto de presión en un plano en la mecánica de los cuerpos sólidos. Conocedor del concepto gracias a la hidrodinámica considero que, al contrario que en los fluidos, la presión en los sólidos no tiene porque ser normal al plano en que actúa. Relacionó el tensor de tensiones ( $\sigma$ ), las tracciones en el plano ( $\mathbf{t}$ ) y los cosenos directores normales al plano ( $\mathbf{n}$ ) mediante:

$$\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n} \quad (2.1)$$

dedujo la condición de equilibrio de un elemento diferencial:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\sigma$  es un tensor de segundo orden,  $\rho$  la densidad del material y  $\mathbf{b}$  el vector de las aceleraciones a que se encuentra sometido el material ya sea debido a una variación de la velocidad, al efecto de un campo gravitacional, magnético, etc.

Mediante la condición de equilibrio de momento interno también demostró la simetría del tensor de tensiones ( $\sigma = \sigma^T$ ), es decir las igualdades:

$$\tau_{12} = \tau_{21} ; \tau_{13} = \tau_{31} ; \tau_{23} = \tau_{32} \quad (2.3)$$

Encontró un plano en el cual las tensiones cortantes eran nulas, la orientación de este plano define las direcciones principales y las tensiones en el son las tensiones principales, por convenio se ordenan de mayor a menor:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , excepto en la mecánica del suelo donde se ordenan de menor a mayor.

Determinó la cinemática en pequeñas deformaciones, llegando a las relaciones, hoy conocidas con su nombre:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & ; & \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \quad ; & \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & ; & \quad \gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \quad ; & \quad \gamma_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cauchy relacionó las componentes de las tensiones y las deformaciones linealmente mediante dos constantes,  $k$  y  $K$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= k\varepsilon_{11} + K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) & ; & \quad \tau_{12} = \frac{k}{2}\gamma_{12} \\ \sigma_{22} &= k\varepsilon_{22} + K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) & ; & \quad \tau_{13} = \frac{k}{2}\gamma_{13} \\ \sigma_{33} &= k\varepsilon_{33} + K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) & ; & \quad \tau_{23} = \frac{k}{2}\gamma_{23}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Lo que resulta la ley de Hooke generalizada para materiales isótropos:

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon \tag{2.6}$$

A partir del trabajo de Cauchy la Teoría de la Elasticidad para materiales isótropos bajo pequeñas deformaciones quedaba bien definido. Una vez establecida la teoría matemática de la elasticidad numerosos científicos y matemáticos, Euler y Saint-Venant entre otros, se dedicaron a la solución de distintos problemas. El problema restaba en solucionar una ecuación diferencial. En la mayoría de los casos se consideraba la ley de Hooke como ley constitutiva del material.

El desarrollo de la teoría de la elasticidad facilitó considerablemente el desarrollo de la resistencia de los materiales. Era un requisito poder determinar el campo de tensiones y deformaciones presentes en el material para poder definir un criterio de fallo en tensiones. Estos consideran que el material falla cuando las tensiones en un punto han alcanzado un valor umbral determinado que es propiedad del material.

### Criterios de fallo

La mayoría de información sobre la resistencia de materiales se obtiene de ensayos uniaxiales, ya sean a compresión o tracción. Es necesario definir una norma de tensiones, o deformaciones, que relacione estados de tensión o deformación multiaxiales a un estado uniaxial equivalente. Hasta la aparición de criterios de fallo complejos la práctica habitual era considerar la máxima tensión (Lamé, Rankine) o deformación (Poncelet, Saint-Venant) principal como criterio.

Coulomb consideró la resistencia a compresión axial a partir de asumir que la fractura se produce en un plano  $\alpha$  que maximiza el cortante (figura 2.4) cuando este alcanza un valor crítico el material rompe. Es decir, todos los estados que cumplan  $\tau_n(\alpha) \leq c$ ,  $\forall \alpha$  siendo  $c$  la cohesión del material, son asumibles. En un

ensayo uniaxial a compresión el plano de fallo se produce a  $45^\circ$  de la dirección principal. Posteriormente consideró que la fricción entre los planos debe tenerse en cuenta, el criterio se reescribe como:

$$\tau_n(\alpha) - \eta\sigma_n(\alpha) \leq c \quad \forall \alpha \quad (2.7)$$

donde  $\sigma_n(\alpha)$  es la tensión normal al plano  $\alpha$  y  $\eta$  el coeficiente de fricción. Bajo un ensayo uniaxial a compresión la relación entre la carga aplicada  $\sigma$  y las tensiones normales y cortantes en un plano  $\alpha$  se determinan mediante la transformación:  $\tau_n(\alpha) = \sigma \cos(\alpha) \sin(\alpha)$  y  $\sigma_n(\alpha) = \sigma \cos^2(\alpha)$ . En el momento de fallo uniaxial a compresión la tensión aplicada equivale a  $\sigma = f_c$  y el ángulo de fallo,  $\alpha = \alpha_0$ . Bajo estas circunstancias los parámetros de cohesión ( $c$ ) y el coeficiente de fricción ( $\eta$ ) pueden determinarse como:

$$\eta = \frac{-1}{\tan(2\alpha_0)} \quad c = f_c \frac{\cos^2(\alpha_0)}{\sin(2\alpha_0)} \quad (2.8)$$

Coulomb comprobó que este planteamiento daba buenos resultados con materiales frágiles.

Otto Mohr (1866) definió una representación gráfica de los estados de tensión en cada punto. Marcando las direcciones principales en el eje de ordenadas se podían dibujar tres círculos, el radio del círculo mayor (definido por  $\sigma_1 - \sigma_3$ ) define el cortante máximo. Mohr utilizó su representación gráfica del estado tensional para revisar las teorías de fallo. Dibujando los distintos círculos en el que el material falla bajo distintos estados tensionales se podía determinar la envolvente de los distintos círculos y considerarlo como la superficie de fallo. Utilizando la tensión principal máxima y mínima el criterio de Mohr-Coulomb se puede escribir:

$$\sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin(\phi) - 2c \cos(\phi) \leq 0 \quad (2.9)$$

donde  $\phi$  es el ángulo de rozamiento interno  $\eta = \tan(\phi)$  (figura 2.4).

Tresca (1868) asumió que el flujo plástico en materiales dúctiles se iniciaba cuando el cortante máximo alcanzaba un valor umbral. También constató que el flujo plástico no producía una variación de volumen. El criterio de Tresca puede ser expresado utilizando las tensiones principales como:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_y \quad (2.10)$$

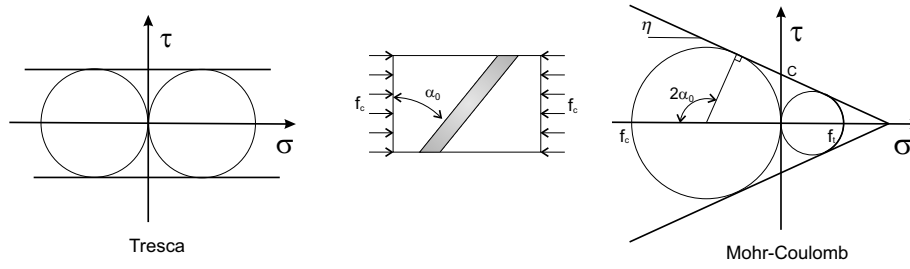


Figura 2.4: Representación de los criterios de Tresca y Mohr-Coulomb en el método gráfico de Mohr. Los círculos pertenecen a un ensayo a tracción y compresión uniaxial.

donde  $\sigma_y$  es la tensión de fluencia en un ensayo uniaxial.

Maxwell notó que la densidad de energía elástica almacenada en el sólido podía descomponerse en una parte volumétrica y otra de distorsión. Maxwell sugirió, aunque no la desarrolló, que la cedencia se producía cuando la energía de distorsión alcanzaba un valor crítico. Beltrami (1885) desarrolló un criterio que consideraba el fallo cuando la máxima densidad de energía elástica almacenada en un punto alcanzaba un valor límite. Esta teoría no concuerda con los resultados experimentales debido a la gran cantidad de energía elástica almacenada bajo cargas hidrostáticas. Fueron M. T. Huber, e independientemente R. von Mises, quienes consideraron la energía de distorsión para determinar el fallo bajo cargas combinadas, esta puede escribirse en función de las tensiones principales y del módulo a rigidez cortante ( $G$ ) como:

$$U = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (2.11)$$

Cuando esta llegue al valor de un ensayo uniaxial:  $U = \frac{\sigma_y^2}{6G}$ , el material cede. El criterio de fallo puede escribirse en función de las tensiones principales como:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sqrt{2}\sigma_y \quad (2.12)$$

En 1952 Drucker y Prager desarrollaron un criterio de fallo como el de Von Mises pero que tenía en cuenta la presión hidrostática, este se puede escribir:

$$\frac{2 \sin(\phi)}{3 - \sin(\phi)}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} - \frac{6c \cos(\phi)}{3 - \sin(\phi)} \leq 0 \quad (2.13)$$

Los criterios de Tresca, ecuación (2.10), y Von Mises, ecuación (2.11), (o de máxima energía de distorsión) funcionan en materiales dúctiles para determinar



la tensión de inicio del flujo plástico, estos son insensibles al signo de las cargas. Los materiales frágiles se comportan de distinta manera según si las cargas son a tracción o compresión. Los criterios de Mohr-Coulomb, ecuación (2.9), y de Drucker-Prager, ecuación (2.13), ofrecen una buena aproximación. La geometría del criterio de Von Mises corresponde a un cilindro en el espacio de tensiones principales, el eje del cual es el hidrostático,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (figura 2.5). El criterio de Tresca es un cuerpo de sección hexagonal inscrito en el cilindro de Von Mises. La superficie de Drucker-Prager corresponde a un cono en el espacio de tensiones principales, su eje corresponde con la línea de tensiones hidrostáticas, en su vértice se encuentra el material traccionado y cumple  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{c}{3 \tan(\phi)}$ . El criterio de Mohr-Coulomb corresponde a un cono de sección hexagonal inscrito a la superficie de Drucker-Prager (figura 2.5).

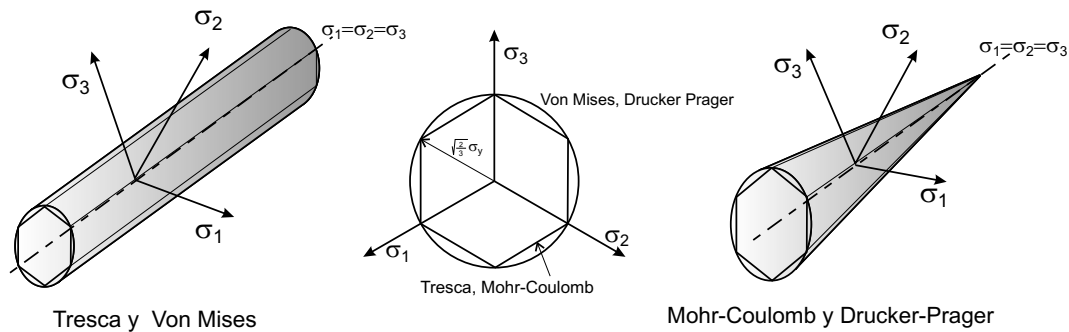


Figura 2.5: Criterios de fluencia y daños para materiales dúctiles, Tresca y Von Mises y para materiales frágiles, Mohr-Coulomb y Drucker-Prager en el espacio de tensiones principales.

Si la cohesión toma el valor de  $c = \sigma_y/2$  y  $\phi = 0$  el criterio de Drucker-Prager coincide con el de Von Mises y el de Mohr-Coulomb con el de Tresca. Las superficies de Von Mises y Drucker-Prager ofrecen ventajas al ser implementadas en modelos computacionales de plasticidad o daño debido a que su derivada no ofrece singularidades.

La aparición de la teoría de la elasticidad y la capacidad de determinar el campo de tensiones en las estructuras, en los casos complejos gracias a la ayuda de los métodos numéricos, ha capacitado el estudio y la determinación del límite de estabilidad de muchas estructuras, pero también ha sido el principal factor de muchos fracasos en la ingeniería. Es una hipótesis de cálculo habitual el considerar como límite de

diseño la máxima tensión alcanzada en un punto, este procedimiento requiere la solución de un problema de elasticidad. Es común el diseño de estructuras de tal modo que no dejen de trabajar en su régimen elástico. En este caso un criterio en tensiones que defina el momento en que la respuesta deje de ser lineal es suficiente. El diseño de estructuras para que estas trabajen en el régimen lineal elástico solo requiere un análisis en tensiones. No obstante la estabilidad de una estructura dañada por sobrecargas, defectos, impactos, estructuras sometidas a sismos, etc. es un tema que requiere ser incluido en los criterios de diseño y su tratamiento mediante la elasticidad no es suficiente.

Otro tema importante que requiere un análisis más allá del tradicional es el resultado de ensayos experimentales sobre modelos a escala, si se ensaya una estructura fabricada a escala y sometidos a unas cargas que producen unas tensiones  $\sigma$ , en un punto de referencia, la carga de fallo de la estructura real no será cuando el mismo punto esté cargado a la misma tensión  $\sigma$ , sino antes. Este hecho conocido como ley de escala no es explicado por las observaciones de Galileo, ni por la teoría de la elasticidad con un límite de tensiones. Este debe ser estudiado con análisis energéticos.

## 2.2. Límite de estabilidad

La determinación de la estabilidad de un sistema es un tema de gran interés en muchas ramas de conocimiento. En la mecánica estructural la importancia de un buen análisis de estabilidad reside en predecir la capacidad de la estructura de sustentar sobrecargas, acumular daño o ser insensible a ciertas imperfecciones ya sea en las tolerancias de la fabricación o en los materiales utilizados. El primer análisis de estabilidad en la mecánica de los sólidos se debe al trabajo de Euler (1744) quien calculó la carga crítica de pandeo de una viga, ésta depende de una inestabilización geométrica. El análisis que nos interesa en la presente tesis se basa en inestabilidades ocasionadas por un comportamiento no lineal, con ablandamiento, del material.

La definición tradicional de estabilidad, debida a Liupanov (1892), se puede escribir: *Un sistema es estable si un pequeño cambio en las condiciones iniciales produce un cambio pequeño en la respuesta del sistema.*

La pérdida de estabilidad es, por definición, un fenómeno transitorio. El análisis

de estructuras en régimen no lineal es un trabajo arduo y prácticamente imposible de tratar en casos complejos. No obstante a partir del análisis de los casos críticos es posible determinar los la pérdida de estabilidad bajo una carga determinada. Por ejemplo, el análisis del pandeo de una columna de Euler.

**Teorema de Lagrange-Dirichlet:** *El equilibrio de un sistema sujeto a fuerzas conservativas y disipativas es estable si la energía potencial del sistema tiene un mínimo absoluto.*

Este teorema fue anunciado por Torricelli (1644) para determinar la estabilidad de sistemas sometidos a un campo gravitatorio, presentado por Lagrange [14], a principios del siglo diecinueve, y posteriormente demostrado por Dirichlet [15].

La energía interna de una estructura se puede describir mediante una función escalar  $U$ , la energía aportada por las cargas externas equivale a  $W$ . La energía potencial se define:  $\Pi = U - W$ . Para que este sólido se encuentre en equilibrio debe cumplirse:  $\delta\Pi = 0$ , es decir:  $\delta U = \delta W = \mathbf{P}\delta\mathbf{u}$ , donde  $\mathbf{P}$  son un conjunto de fuerzas exteriores aplicadas a un conjunto de puntos que experimentan un desplazamiento  $\mathbf{u}$ . El equilibrio se obtiene cuando:  $\mathbf{P} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}}$ , lo que resulta el segundo teorema de Castigliano.

Si a un sólido en equilibrio bajo unos desplazamientos prescritos  $\mathbf{u}$  se le aplica un desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}$  la función energía potencial variará. Si esta se describe mediante una función continua el incremento de energía potencial puede ser expandido mediante las series de Taylor según [15]:

$$\Delta\Pi = \Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{u}) = \delta\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) + \delta^2\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) + \delta^3\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) + \dots \quad (2.14)$$

La nueva posición estará en equilibrio si  $\delta\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) = 0$ . Según el teorema de Lagrange-Dirichet el nuevo equilibrio es estable si la variación de segundo orden de la energía potencial es positiva:  $\delta^2\Pi > 0$  para cualquier  $\delta\mathbf{u}$ . Si esta es nula el sistema esta en equilibrio estable si la tercera variación de la energía potencial es positiva,  $\delta^3\Pi > 0$  y así sucesivamente.

Las variaciones del potencial se determinan:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) &= \frac{\partial\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} & ; \\ \delta^2\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}^2}\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u} & ; \\ \delta^3\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) &= \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}^3}\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si bien es habitual que en procesos inelásticos no se conozca, o no exista, una función potencial si es posible determinar su variación. Considérese la variación de segundo orden de la energía potencial:

$$\delta^2\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) = \delta^2U - \delta^2W = \frac{1}{2}\frac{\partial^2U}{\partial\mathbf{u}^2}\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u} \quad (2.16)$$

si existe una relación tangente entre las cargas aplicadas y los desplazamientos tal que:

$$\delta\mathbf{P} = \mathbf{K}^T\delta\mathbf{u} \quad (2.17)$$

teniendo en cuenta que la variación de segundo orden de la energía interna puede determinarse (figura 2.6.b):

$$\delta^2U = \frac{1}{2}\frac{\partial^2U}{\partial\mathbf{u}^2}\delta\mathbf{u}\delta\mathbf{u} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{P}\delta\mathbf{u} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{u}\mathbf{K}^T\delta\mathbf{u} \quad (2.18)$$

resultando:

$$\delta^2\Pi(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{u}\mathbf{K}^T\delta\mathbf{u} - \frac{1}{2}\delta\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} \quad (2.19)$$

donde  $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{u}}$  depende de las cargas, bajo peso muerto, a fuerza constante resulta  $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{u}} = 0$ .

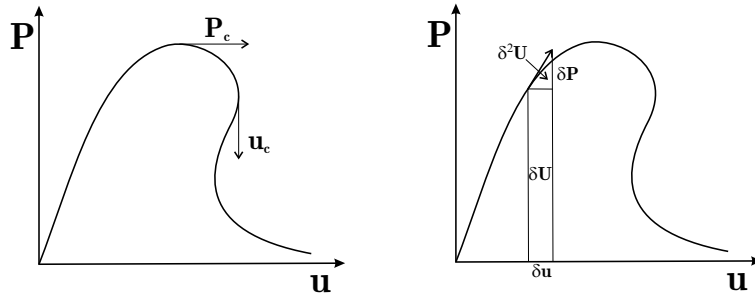


Figura 2.6: Relación fuerza desplazamiento, límite de estabilidad bajo fuerza ( $\mathbf{P}_c$ ) y desplazamiento controlado ( $\mathbf{u}_c$ ). Trabajo de primer ( $\delta U$ ) y segundo ( $\delta^2 U$ ) orden.

El criterio de estabilidad ( $\delta^2\Pi > 0$ ) bajo un peso muerto se puede escribir:

$$\det(\mathbf{K}^T) > 0 \quad (2.20)$$

mientras el determinante de la matriz de rigidez tangente es definido positivo la estructura es estable bajo una fuerza constante (ver figura 2.6.a).

En algunos casos la relación de rigidez tangente no es simétrica [15]. Materiales en que haya fricción o daño resultan en relaciones tangentes no simétricas. En este

caso el criterio de estabilidad debe determinarse con la parte simétrica de la matriz de rigidez tangente:

$$\det \left( \mathbf{K}^T + (\mathbf{K}^T)^T \right) > 0 \quad (2.21)$$

Si consideramos una estructura a la que se le aplica un incremento de fuerza virtual  $\delta \mathbf{P}$ , la variación de segundo orden de la energía potencial se puede escribir:

$$\delta^2 \Pi (\mathbf{P} + \delta \mathbf{P}) = \delta^2 U - \delta^2 W = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{P}^2} \delta \mathbf{P} \delta \mathbf{P} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}} \delta \mathbf{P} \delta \mathbf{P} = 0 \quad (2.22)$$

Donde existe la relación tangente ( $\mathbf{H}^T$ ) entre los incrementos de fuerzas y desplazamiento ( $\mathbf{H}^T = (\mathbf{K}^T)^{-1}$ ):

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{H}^T \delta \mathbf{P}$$

La variación de segundo orden de la energía interna:

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{P}^2} \delta \mathbf{P} \delta \mathbf{P} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{P} \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \delta \mathbf{P} \delta \mathbf{P} \quad (2.23)$$

resultando

$$\delta^2 \Pi (\mathbf{P} + \delta \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \delta \mathbf{P} \delta \mathbf{P} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}} \delta \mathbf{P} \delta \mathbf{P} = 0 \quad (2.24)$$

Donde  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}}$  depende de la función que rige las fuerzas y desplazamientos en las condiciones de contorno. Bajo el caso de desplazamiento controlado  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{0}$ . La estructura es estable bajo desplazamiento fijo si:

$$\det \left( \mathbf{H}^T + (\mathbf{H}^T)^T \right) > 0 \quad (2.25)$$

Es común tener subestructuras fracturables con ablandamiento conectadas con medios elásticos. Se examinan los dos casos extremos, si estos medios se encuentran conectados en serie o en paralelo. Como se muestra en la figura 2.7.

### Conexión en serie de un elemento fracturable y un elemento elástico

Consideremos una estructura elástica de rigidez  $K_E$  conectado en serie a un elemento fracturable. El equilibrio de fuerzas exige que se mantenga la relación  $F = K_E u_E = F_D(u_D)$ , la ecuación de compatibilidad requiere que el desplazamiento total sea la adición de los dos desplazamientos:  $u = u_E + u_D$ .

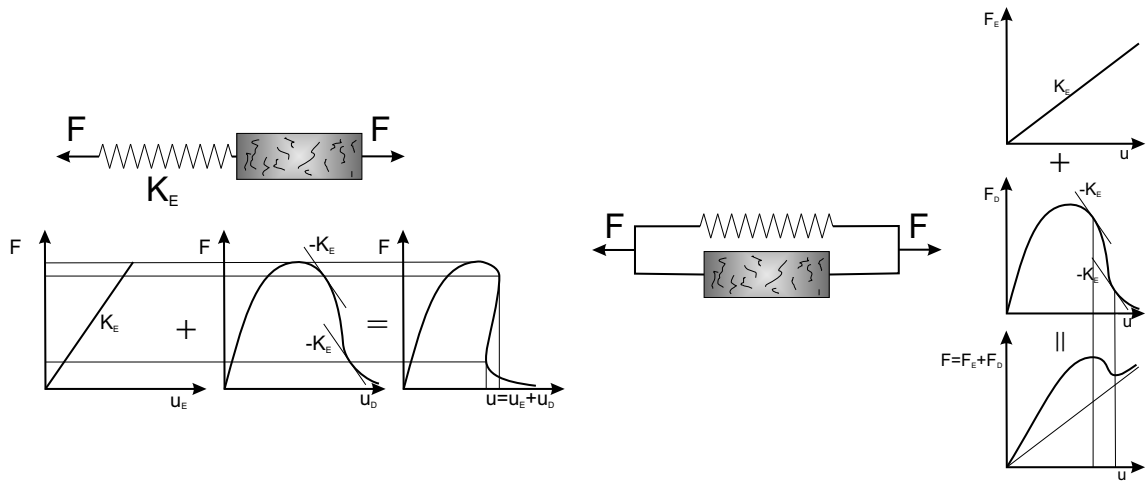


Figura 2.7: Comportamiento de un elemento fracturable conectado con un elemento elástico. Comportamiento en serie y en paralelo.

Bajo las cargas ocasionadas por un peso muerto, es decir controlando las fuerzas, la pérdida de estabilidad se obtiene  $\delta F = 0$ , lo que equivale a:

$$K_E \delta u_E = K_D^T \delta u_D = 0$$

donde  $K_D^T$  es la rigidez tangente del elemento fracturable, ésta se determina:  $K_D^T = \partial F_D / \partial u_D$ .

En el momento en que la estabilidad se pierde se debe cumplir  $\delta u_E = K_D^T = 0$ .

Para determinar la pérdida de control bajo desplazamiento prescrito se debe considerar  $\delta u = 0$ , lo que equivale  $\delta u_E = -\delta u_D$ . Si consideramos la condición de equilibrio de fuerzas:  $F = -K_E \delta u_D = K_D^T \delta u_D$ , resultando una condición:  $K_D^T = -K_E$ .

### Conexión en paralelo de un elemento fracturable y un elemento elástico

Cuando los elementos se conectan en paralelo los desplazamientos de cada elemento coinciden  $u = u_E = u_D$ , y la fuerza total se determina  $F = (K_E + K_D) u$ . Si se aplica la condición de pérdida de equilibrio bajo fuerzas controladas resulta  $K_D^T = -K_E$ . Bajo desplazamiento controlado la pérdida de estabilidad se obtiene cuando  $K_D^T \rightarrow -\infty$ .

### 2.3. Mecánica de la fractura

Mediante la teoría continua de la elasticidad Inglis (1913) resolvió la distribución de tensiones de un cuerpo infinito con un agujero en forma elíptica, observando que cuando la elipse se aplana las tensiones tienden a infinito. Griffith (1921,1924) notó que en estos casos un criterio de fallo en tensiones no tenía sentido pues el resultado era que cualquier cuerpo con una discontinuidad rompía por pequeñas que fueran las cargas, por solventar esta inconsistencia introdujo un criterio energético. Este puede resumirse como:

*Una grieta progresará si la energía elástica que se descarga en el sólido es superior a la energía necesaria para separar la estructura atómica del material.*

El trabajo original de Griffith consideraba la propagación de grietas en materiales muy frágiles y homogéneos (vidrio) con lo que una buena medida de la energía necesaria para el avance de una grieta es la energía superficial  $\gamma_0$ .

No obstante en materiales heterogéneos con una macrogrieta avanzando presenta una zona de daño distribuida avanzando con ella, esta se conoce como la zona de proceso de fallo (FPZ, de su acrónimo inglés). El tamaño de esta zona acostumbra a considerarse una propiedad del material y la energía necesaria para que evolucione, la energía crítica de fractura ( $G_c$ ), también. La mecánica de la fractura, también la no lineal, parte de la consideración que el tamaño de la zona de fallo es pequeña comparada con el tamaño de la estructura.

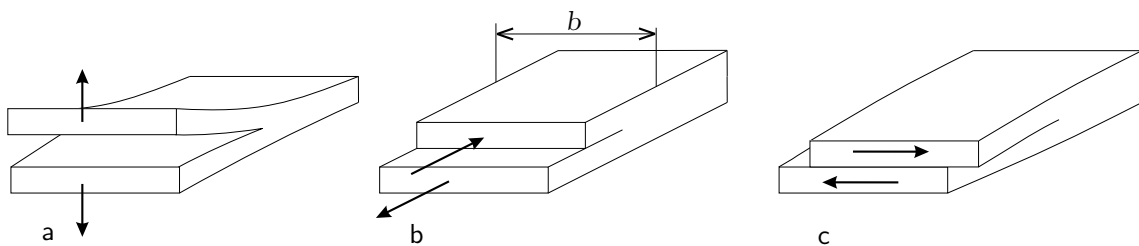


Figura 2.8: Modos de progresión de una grieta, a) modo I o de apertura, b) modo II o deslizante y c) modo III o de rotura transversal.

La mecánica de la fractura considera que una grieta puede avanzar de tres modos, llamados modo I, II y III. El primer modo es de apertura, el segundo de cortante en el plano y el tercero de cortante fuera el plano como se esquematizan en la figura 2.8, se supone que cada uno tiene su energía crítica de avance llamadas:  $G_{Ic}$ ,  $G_{IIc}$  y

$G_{IIIc}$  respectivamente. Cuando una grieta avanza por combinación de los distintos modos se dice que esta avanza en modo mixto.

Consideremos el siguiente equilibrio energético, dado un cuerpo con una energía elástica almacenada ( $U_e$ ), a la que se aplica un incremento casi estático de energía externa ( $\delta W$ ), ocasionando una variación de la energía elástica almacenada ( $\delta U_e$ ). La diferencia entre la energía exterior aportada y la variación de la energía elástica es la energía que se encuentra disponible para la fractura. En el caso que esta tenga un crecimiento inestable el cuerpo experimentará una aceleración que se convertirá en energía cinética ( $\delta K$ ).

$$\delta W - \delta U_e = G_c \delta A + \delta K \quad (2.26)$$

donde  $\delta A$  es el incremento de área fracturada.

Según el criterio de propagación de Griffith la ecuación (2.26) puede tener estos casos:

- Si  $\delta W - \delta U_e < G_c b \delta A$  luego  $\delta A = 0$  y  $\delta K = 0$  No hay crecimiento  
 Si  $\delta W - \delta U_e = G_c b \delta A$  luego  $\delta A > 0$  y  $\delta K = 0$  Hay crecimiento estable  
 Si  $\delta W - \delta U_e > G_c b \delta A$  luego  $\delta A > 0$  y  $\delta K > 0$  Hay crecimiento inestable

donde  $\delta W - \delta U_e$  es la energía disponible para la fractura. Si se da el primer caso, el de no crecimiento de la grieta debe garantizarse la ecuación de equilibrio (2.26), la energía exterior aportada se transforma en energía elástica, esto es:  $\delta W - \delta U_e = 0$ .

Consideremos, ahora, los dos casos extremos y habitualmente de interés, la energía exterior viene gobernada por una fuerza o por un desplazamiento prescrito.

Si describimos la energía elástica del material con una expresión  $U_e(A, u)$  donde sólo  $u$  y  $A$  pueden variar la energía disponible para la fractura se escribe:

$$\delta W - \delta U_e = \left( P - \frac{\partial U_e(A, u)}{\partial u} \right) \delta u - \frac{\partial U_e(A, u)}{\partial A} \delta A = - \frac{\partial U_e(A, u)}{\partial A} \delta A \quad (2.27)$$

Si se mantiene constante la área fracturada resulta el segundo teorema de Castigliano  $P = \partial U_e(A, u) / \partial u$ . Ésta es la energía disponible para la fractura bajo desplazamiento prescrito. Si se determina la energía complementaria mediante  $U_e(A, u) = Pu - U_e^*(A, P)$  se deriva  $\delta U_e(A, u) = \delta(Pu) - \delta U_e^*(A, P) = u \delta P +$



$P\delta u - (\partial U_e^*(A, P)/\partial u)\delta A - (\partial U_e^*(A, P)/\partial P)\delta P$  y se substituye resulta la energía disponible para la fractura con fuerzas controladas:

$$\delta W - \delta U_e = \left(-u + \frac{\partial U_e^*(A, P)}{\partial P}\right)\delta P + \frac{\partial U_e^*(A, P)}{\partial A}\delta A = \frac{\partial U_e^*(A, P)}{\partial A}\delta A \quad (2.28)$$

Entre paréntesis el primer teorema de Castigliano  $u = \partial U_e^*(A, P)/\partial P$ . Una grieta progresara si:

$$G = \frac{\partial U_e^*(A, P)}{\partial A} = -\frac{\partial U_e(A, u)}{\partial A} \geq G_c \quad (2.29)$$

donde  $G$  se conoce como la energía disponible para la fractura.

Irwin relacionó la energía de fractura con el factor de intensidad de tensiones crítico ( $K_c$ ) mediante la expresión:

$$K_c = \sqrt{E'G_c} \quad \begin{cases} E' = E & \text{Tensión plana} \\ E' = E/(1 - \nu^2) & \text{Deformación plana} \end{cases} \quad (2.30)$$

Para cada energía crítica, en modo I, II y III, le corresponde un factor de intensidad de tensiones crítico. El criterio de evolución de una grieta puede expresarse mediante el factor de intensidad de tensiones, cuando este es igual a su valor crítico la grieta avanza. En problemas elásticos el factor de intensidad de tensiones está relacionado con el campo de tensiones alrededor de una grieta.

La energía de fractura y el factor de intensidad de tensiones críticos representan una propiedad del material. Esta puede depender de la temperatura, humedad o modificarse mediante el trabajo. Por ejemplo un metal sometido previamente a fatiga aumenta su fragilidad.

### 2.3.1. La zona de fallo

La mecánica de la fractura lineal asume que el material se comporta de manera elástica y sólo tiene la presencia de una grieta consumiéndose energía en su avance. No obstante en el extremo de una grieta el comportamiento del material es claramente no lineal. La mecánica de la fractura no lineal fue iniciada por Irwin al añadir plasticidad perfecta en el comportamiento del material.

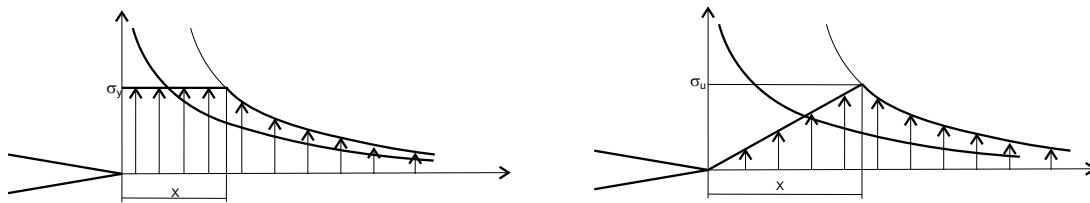


Figura 2.9: Distribución de tensiones y tamaño de la zona de fallo para un material con plasticidad perfecta y con un material con ablandamiento.

En 1964 Irwin añade plasticidad en la formulación de la mecánica de la fractura, su planteamiento se basa en considerar una ley de plasticidad perfecta en el material a partir de superar la tensión de fluencia,  $\sigma_y$ . Este considera que el campo de tensiones sólo se ve modificado en la zona adyacente al extremo de la grieta pareciéndose mucho a la respuesta lineal a cierta distancia, según el principio de Saint-Venant. Esta suposición implica que los resultados serán aceptables cuando la zona de fallo sea pequeña en comparación con el tamaño de la estructura. Irwin determina, aproximadamente, la region sometida a plasticidad perfecta considerando (figura 2.9.Izquierda) que en el extremo de la grieta la tensión equivale a la de fluencia y la longitud al extremo de la grieta sometido a la tensión de fluencia la determina igualando la fuerza resultante. Bajo estas consideraciones la distancia de la zona plástica  $x$  puede determinarse:

$$x = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.31)$$

Los materiales conocidos como cuasi-frágiles, hormigón, compuestos, etc. presentan una zona de daño relativamente grande dónde el material primero experimenta un endurecimiento y luego un ablandamiento. Como menor sea el pendiente de ablandamiento del material mayor será la zona de fallo en la dirección de la grieta. Bazant [16] determinó el tamaño de la zona de fallo considerando la distribución

con ablandamiento de la figura 2.9 resultado una longitud doble que en el caso de plasticidad perfecta.

### 2.3.2. La Curva de Resistencia ("*R-curve*")

La curva de resistencia (o "*R-curve*") determina la energía necesaria para que una grieta avance. Según la definición anterior ésta es constante y vale  $R(a) = G_c$ . No obstante el fallo de muchas piezas estructurales se produce antes que la zona de fallo este completamente generada. La curva de resistencia determina la energía de fractura entre el momento que empieza a generarse la zona de proceso de fallo hasta que el valor de la curva se estabiliza, momento en el que se dice que la grieta crece de manera auto-similar. Para determinar el efecto de la zona de fallo en la estructura se considera una longitud de grieta equivalente en un material lineal elástico, de tal modo que el efecto del campo de tensiones en la zona del proceso de fallo (ver figura 2.9) puede ser considerado como una grieta de longitud  $\ell_0$  en la mecánica de la fractura lineal.

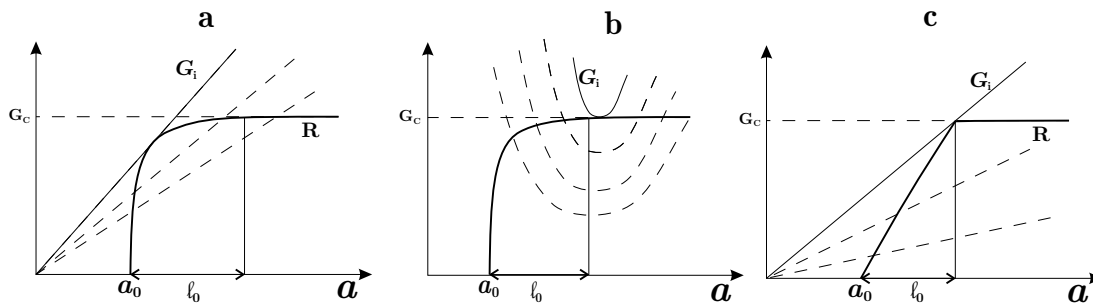


Figura 2.10: Curva de resistencia ( $R$ ) y energía disponible para la fractura ( $G$ ) en función de la longitud de grieta  $a$ . El límite de estabilidad,  $G_i$  corresponde a la tangencia entre las curvas  $G$  y  $R$ . a) caso con geometría positiva, b) negativa y c) curva de resistencia con la que la estructura rompe cuando la zona de fallo se ha generado completamente.

En la figura 2.10 se muestra el valor de la curva de resistencia en función de la longitud de grieta equivalente ( $a$ ), cuando ésta equivale a  $\ell_0$  la zona de proceso de fallo ha se ha formado y la grieta crece de manera autosimilar. La energía disponible para la fractura ( $G = \partial U / \partial A$ ) se encuentra dibujado para varias cargas aplicadas. La intersección entre las curvas  $G$  y  $R$  indica el tamaño de la grieta equivalente  $a$ .

Cuando éstas son tangentes ( $\partial G_i/\partial A = \partial R/\partial A$ ) indica la carga máxima capaz de sustentar la estructura.

La mayoría de estructuras la energía disponible para la fractura aumenta con la longitud de la grieta (ver figura 2.10.a) éstas se conocen como estructuras de geometría positiva. Si por otro lado el valor de  $G$  disminuye al aumentar la grieta se dice que es una estructura con geometría negativa (figura 2.10.b). Las estructuras con geometría positiva alcanzan la máxima capacidad de sustentación antes que la zona de proceso de fallo se genere completamente. En estructuras con geometría negativa es posible el crecimiento estable de una grieta bajo fuerzas controladas.

## 2.4. Ley de escala (SEL)

La mecánica de la fractura no lineal es una extensión de la mecánica de la fractura lineal. La energía crítica de fractura no sólo se encuentra relacionada con la energía superficial, requerida para separar la estructura atómica del material, sino que con ella avanza la zona de proceso de fallo que tiene unas dimensiones finitas y que también disipa energía. La mecánica de la fractura requiere, para conseguir unos resultados correctos, que la zona de fallo tenga unas dimensiones reducidas en comparación con el tamaño de la estructura.

En la figura 2.11, se muestra una probeta que sigue la mecánica de la fractura lineal con una grieta de longitud  $a$  sometido a un estado de tensiones  $\sigma_u$ , se puede considerar que la solución del problema elástico resulta en una parte del material cargado y en otra parte de material descargado, el pendiente  $k$  es aproximadamente constante en función del tamaño de la pieza ( $D$ ) y de la grieta ( $a$ ). Bajo estas consideraciones la energía elástica almacenada en el material se puede escribir:

$$U_e = \frac{\sigma_u^2}{2E} t (Db - ka^2) \quad (2.32)$$

siendo  $t$  el espesor,  $b$  la longitud y  $D$  el ancho del la pieza y  $k$  un parámetro que depende de la geometría.

Según el criterio de propagación de Griffith la grieta progresará si se cumple la ecuación (2.29):

$$-\frac{1}{t} \left[ \frac{\partial U_e}{\partial a} \right]_{\sigma_u} = \frac{\sigma_u^2}{E} ka = G_c \quad (2.33)$$

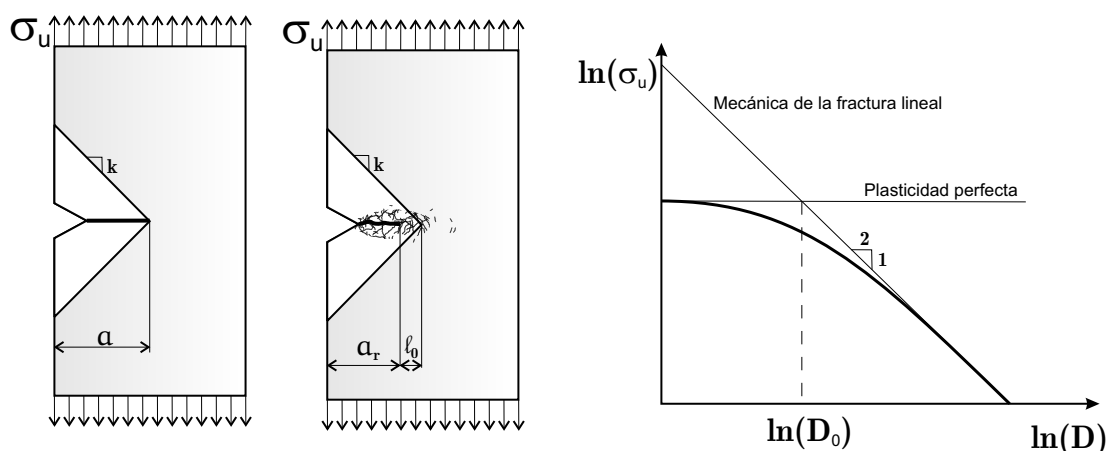


Figura 2.11: En la izquierda se muestra un espécimen con una grieta en un cuerpo elástico sometida a una tensión remota, en blanco la región descargada debido a la presencia de la grieta, a su derecha se encuentra el mismo espécimen con un comportamiento no lineal alrededor de la grieta. En la derecha se muestra la resistencia nominal en función del tamaño de la estructura.

Resultando una tensión de fallo:  $\sigma_u = \sqrt{\frac{EG_c}{ka}}$ . Si es una estructura con geometría positiva, como la de la figura 2.11, el material se inestabiliza bajo peso muerto al crecer la grieta, luego la máxima fuerza la sustentará cuando  $a = a_0$ .

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{EG_c}{ka_0}} \quad (2.34)$$

Realizando una serie de ensayos con probetas de distinto tamaño que mantengan similitud geométrica, tal que si  $D$  es una medida de la estructura todas sus dimensiones son escaladas, también la entalla inicial  $a_0 = nD$ . Luego la relación logarítmica entre la tensión de fallo y el tamaño de la probeta es una recta de pendiente  $-1/2$ , como se muestra en la figura 2.11.c.

En los materiales cuasi-frágiles antes que la grieta crezca debe formarse la zona de proceso de fallo, una vez está completamente formada la grieta crece de manera autosimilar. En estas circunstancias la zona de fallo tiene una dimensión  $x$  (ver figura 2.9), el efecto que ésta tiene sobre la respuesta global puede ser considerado como un problema de mecánica de la fractura lineal equivalente con una grieta ficticia. El tamaño de esta grieta será  $a = a_r + \ell_0$ , donde  $a_r$  es la grieta, libre de tracciones, y  $\ell_0$  un incremento de grieta que tiene en cuenta el efecto de la zona de fallo, tal que produzca un efecto igual a que si siguiera la mecánica de la fractura lineal.

Este parámetro, que depende del material y el modo de fallo, se encuentra entre los valores límites:  $0 < \ell_0 < x$ .

La energía elástica equivalente almacenada en el sólido es:

$$U_e = \frac{\sigma_u^2}{2E} t [Db - k(a_r + \ell_0)^2] \quad (2.35)$$

En las estructuras con geometría positiva la estabilidad de la estructura se perderá en algún momento entre que empiece el daño y que la zona de proceso de fallo se encuentra totalmente formada, con lo cuál el tamaño de la grieta equivale al de la entalla inicial:  $a_r = a_0$ . Si se asume que la estabilidad se pierde cuando la zona de proceso de daño se encuentra completamente formada, figura 2.10.c, el criterio de propagación se puede expresar:

$$-\frac{1}{t} \left[ \frac{\partial U_e}{\partial a} \right]_{\sigma_u} = \frac{\sigma_u^2}{E} k(a_0 + \ell_0) = G_c \quad (2.36)$$

La tensión de última de la estructura se escribe:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{EG_c}{k(a_0 + \ell_0)}} \quad (2.37)$$

Si se considera que en la estructura mantiene similitud geométrica, tal que  $a_0 = nD$  se puede representar la relación entre la tensión última y el tamaño de la pieza  $D$ . En escala logarítmica esta función está graficada en la figura 2.11, donde se observa que cuando el tamaño de la zona de fallo es pequeño comparado con el tamaño de la estructura la solución tiende a la mecánica de la fractura lineal. No obstante, cuando el tamaño de la estructura es del mismo orden que el de la zona de fallo la resistencia última tiende a un valor constante debido a que la zona no lineal afecta al campo de tensiones de toda la pieza.

La ley de escala permitió a Bažant [17]-[20] la definición de la energía de fractura y del tamaño de la zona de proceso de fallo. Si la dimensión de la estructura tiende a infinito la mecánica de la fractura lineal es aplicable porque el tamaño relativo de la zona de proceso fallo es insignificante. En este caso se puede determinar la energía de fractura cómo la energía elástica descargada por la estructura al avanzar la grieta. El tamaño de la zona de proceso de fallo es la distancia entre el extremo de la grieta real y el extremo de la grieta equivalente aplicando la mecánica de la fractura lineal.

La ley de escala definida por la ecuación 2.37 corresponde a estructuras de tipo II, estructuras con una entalla inicial. Cuando la estructura no tiene una pregrieta formada se dice que es una estructura de tipo I. En este caso el plano de falla se inicia en una superficie lisa y la resistencia nominal en función del tamaño estructural puede expresarse [21]–[23]:

$$\sigma_u(d) = f_t^\infty \left( 1 + \frac{rd_N}{d + \ell_I} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.38)$$

donde el parámetro  $f_t^\infty$  representa la tensión de fallo en una estructura de dimensiones infinitas,  $r$  es un parámetro positivo que controla el pendiente de la ley de escala que se introduce por razones de ajuste, no teniendo efecto en la derivación de la ley y  $d_N$  es la longitud de la zona dañada antes del fallo. Considerando que las estructuras muy pequeñas tienen una resistencia finita se introduce el parámetro  $\ell_I$ . La resistencia última de la estructura en función del tamaño  $d$  se muestra en la figura 2.13.

## 2.5. Los modelos de zona cohesiva

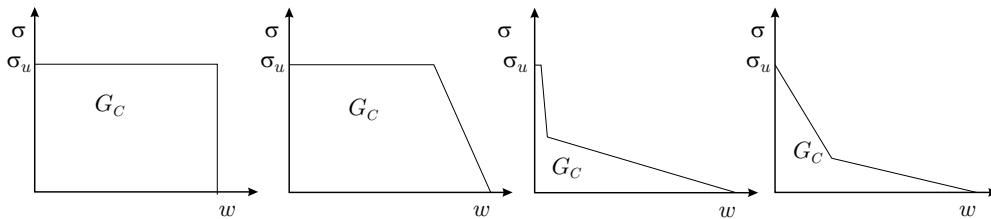


Figura 2.12: Leyes cohesivas para distintos materiales, metales, termoplásticos, compuestos y hormigón.

Los modelos cohesivos definen una ley de ablandamiento que relaciona las tensiones con la apertura de la grieta. Dudgalde [24] fue el primero en utilizar modelos cohesivos para el cálculo del avance de una grieta en materiales metálicos, posteriormente fue utilizado por Barenblatt [25] para su aplicación en materiales frágiles. No obstante se limitaron a definir una ley constitutiva de plasticidad perfecta sin un límite de rotura. Este modelo no es capaz de detectar el efecto tamaño pues la energía disipada es infinita. No obstante es capaz de eliminar la singularidad en la punta de

la grieta, aspecto poco realista de la mecánica de la fractura. Una solución simple es cortar la respuesta tensión desplazamiento una vez se haya alcanzado el valor de la energía de fractura del material ( $G_C = \sigma w_{cr}$ ), figura 2.12.a. Este procedimiento acostumbra a dar fuerzas ligeramente superiores a las que realmente sustentan las estructuras pero es capaz de detectar el efecto tamaño.

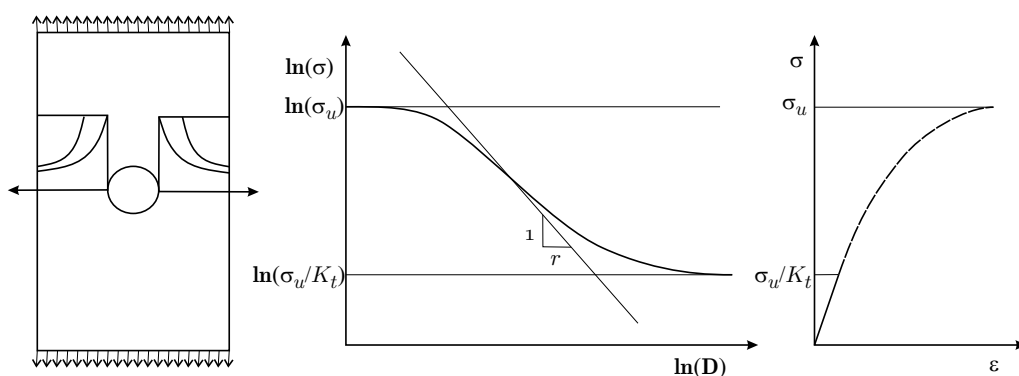


Figura 2.13: Probeta con agujero sometida tracción uniaxial donde se muestra la distribución de tensiones ne la zona de fallo según la teoría elástica y plástica. Ley de escala para probetas geoméricamente similares. Típica respuesta tensión deformación.

En 1976 Hillerborg *et al.* [26] presentaron un trabajo para la determinación de la iniciación y la progresión de una grieta para geomateriales. Su trabajo se inicia con los trabajos experimentales que se realizaron en hormigón a finales de los sesenta [27]-[29] en los que observaron que cuando el tamaño de las probetas son lo suficientemente pequeñas se podía observar que el descenso de la fuerza al generarse la grieta era gradual y no brusco, pudiéndose, bajo desplazamiento controlado, determinar toda la curva fuerza desplazamiento hasta la rotura total. El modelo de Hillerborg es capaz de determinar también el inicio de la grieta siendo un modelo que puede determinar todo el proceso de fallo. Este considera que el material se comportará de una manera lineal elástica hasta que llegue a una tensión umbral, a partir de este momento el daño y las deformaciones se localizarán en una banda previamente definida por el analista. La energía que se disipará en esta banda equivale a la energía de fractura, la cual es propiedad del material.

Los resultados de los cálculos mediante modelos cohesivos muestran que la forma de la curva de ablandamiento tiene importancia en la resistencia última de las



estructuras [30]. Ésta es función de la naturaleza y distribución de los defectos y constituyentes que forman el material. En la figura 2.12 se muestran un conjunto de leyes de cohesión que se han mostrado efectivas para el tratamiento de la fractura en distintos materiales, metales, termoplásticos, compuestos y hormigón. Una solución ampliamente utilizada ha sido la curva bilineal, esta requiere cuatro parámetros de ajuste, es interesante tener en cuenta: 1) tensión de inicio del ablandamiento, 2) pendiente inicial de ablandamiento, 3) energía de fractura, área total bajo la curva tensión-apertura, y 4) límite de apertura, momento a partir del cual la tensión residual es nula.

Es evidente que la determinación experimental de la curva de ablandamiento es difícil pues deben realizarse ensayos con desplazamiento controlado y probetas muy pequeñas para evitar el fallo inestable (ver figura 2.7). Por esta razón es habitual utilizar curvas exponenciales o simplemente lineales pues se ajustan con dos parámetros, el inicio del ablandamiento y la energía de fractura, estos son los parámetros más fáciles de medir experimentalmente.

En la figura 2.13 se muestra una probeta con el campo de tensiones en la sección crítica asumiendo una respuesta elástica, plástica y un estado intermedio. Este estado de tensiones resulta de aplicar la primera ley cohesiva representada en la figura 2.12. Es fácilmente observable que la estabilidad se perderá cuando un punto del material se encuentre completamente abierto y no sea capaz de transmitir más tensiones cohesiva.

Cuando se consideran probetas geoméricamente similares pero de distinto tamaño es posible determinar la resistencia en los tamaños estructurales extremos. Cuando el tamaño es muy pequeño ( $d \rightarrow 0$ ) la región que plastifica tiende a ocupar todo el plano de fallo y la probeta no es sensible a la concentración de tensiones. Por otro lado cuando el tamaño de la probeta es muy grande ( $d \rightarrow \infty$ ) el tamaño de la zona plástica es muy pequeña en comparación con el plano de fallo, en este caso la carga máxima se obtiene mediante la teoría elástica. En la figura 2.13 se representa, en escala logarítmica, la resistencia en función del tamaño de la estructura.  $K_t$  corresponde al factor de concentración de tensiones pero en un caso más general es la relación entre la carga máxima obtenida mediante la teoría del límite plástico y la teoría de la elasticidad. La transición entre los dos límites es lo que se conoce como ley de escala cuya forma y pendiente ( $r$ ) depende de la ley cohesiva del material y

de la geometría de la estructura.

Cuando el agujero tiende a una grieta el factor de concentración de tensiones es infinito ( $K_t = \infty$ ) y el pendiente de la ley de escala debe ser dos ( $r = 2$ ) para seguir la teoría de la Mecánica de la Fractura Lineal. La resistencia de las estructuras de gran tamaño tienden a él asintóticamente, como se muestra en la figura 2.11.

Cuando se aplica la teoría del límite plástico para determinar la capacidad estructural independientemente del tamaño se está asumiendo que la energía de fractura del material es infinita. Por otro lado cuando se considera que el límite viene determinado por la teoría de la elasticidad se está asumiendo que la energía de fractura es nula. Éstos son los dos casos extremos que marcan la máxima capacidad de una estructura muy pequeña y una de muy grande.

Este efecto tamaño tiene importancia cuando se analiza un componente estructural fabricado a escala pues se puede sobreestimar la resistencia de la estructura. Cuando se analiza una probeta sin entalla, con un campo de tensiones uniforme, este efecto de escala no se encuentra presente.

## 2.6. Consideraciones estadísticas

Leonardo da Vinci llevo a cabo un conjunto de experimentos para determinar la resistencia de cuerdas. Analizadas un conjunto de cuerdas con la misma sección y composición pero con distintas longitudes concluyó que la resistencia era inversamente proporcional a la longitud de la cuerda. Mariotte en su "*Traité du mouvement des eaux*" (1686) a parte de importantes contribuciones a la elasticidad, y claro, a la hidráulica, define la inhomogeneidad de la materia. Luego la resistencia de una cuerda no es función de su longitud, como ya indicó Galileo [7], sino de los defectos que contiene. Al aumentar la longitud de la cuerda la probabilidad de tener un defecto mayor por donde el material falle aumenta.

La variabilidad de las propiedades del material no se considera en la escala estructural, para el cálculo se utiliza un material homogeneizado con las propiedades uniformes a lo largo del volumen. Cuando se analiza una estructura con una distribución de tensiones no uniforme la posición de la grieta viene definida por la región con las tensiones más grandes. Este análisis considera los aspectos determinísticos de la fractura, energía y resistencia. Si se considera una probeta con un campo uni-

forme de tensiones el tratamiento homogeneizado resulta en una solución no realista, todos los puntos del material dañan en el mismo instante. No obstante el material romperá por un sólo plano de fallo. Para garantizar la formación de una grieta se requiere la inclusión de algún defecto que promueva su crecimiento en un plano.

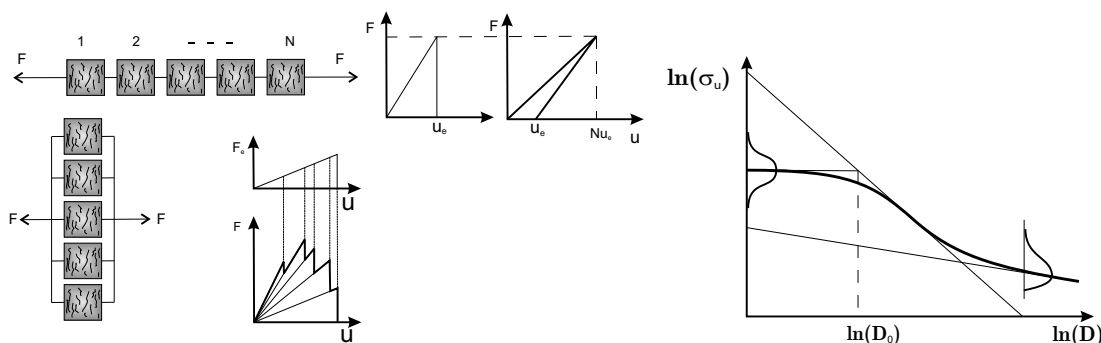


Figura 2.14: Respuesta de un conjunto de elementos elástico fracturables con variabilidad en la resistencia conectados en serie y en paralelo. Resistencia estructural en función del tamaño de la pieza, se muestra la distribución del fallo, si el tamaño es pequeño sigue una campana de Gauss, si es grande una distribución de Weibull.

La estadística de los valores extremos [31] se encarga de determinar el mínimo y máximo de un conjunto de valores. Si se tienen  $N$  muestras de unas entidades estadísticamente independientes cuya resistencia última ( $\sigma_u$ ) sigue una función de probabilidad igual para las  $N$  muestras,  $P_1(\sigma) = P(\sigma_u \leq \sigma)$ . La probabilidad que falle uno de los  $N$  especímenes se escribe  $P_N(\sigma) = P(\min_{i=1}^N((\sigma_u)_i) \leq \sigma)$ .

Si  $P_1(\sigma)$  es la función probabilidad de fallo de un elemento sometido a una tensión  $\sigma$ , su probabilidad de supervivencia se escribe como  $1 - P_1(\sigma)$ . Teniendo  $N$  entidades iguales la probabilidad que ninguna se rompa es la unión de la probabilidad de supervivencia de cada una de ellas:  $1 - P_N(\sigma) = (1 - P_1(\sigma))^N$ . Lo que es lo mismo:  $\ln(1 - P_N(\sigma)) = N \ln(1 - P_1(\sigma))$ . Los casos de interés se centran cuando  $P_1(\sigma) \approx 0$  y  $N$  es muy elevado. Si linealizamos la función logaritmo de probabilidad de supervivencia alrededor de  $P_1(\sigma) \approx 0$  resulta:

$$\ln(1 - P_N(\sigma)) \approx N \ln(1 - P_1(\sigma)) \Big|_{P_1(\sigma)=0} + \frac{\partial N \ln(1 - P_1(\sigma))}{\partial P_1(\sigma)} \Big|_{P_1(\sigma)=0} P_1(\sigma) = -NP_1(\sigma)$$

Si  $N$  es lo suficientemente grande como para considerar que los valores de interés de

$P_N(\sigma)$  corresponden a valores muy pequeños de  $P_1(\sigma)$ :

$$P_N(\sigma) = 1 - \exp(-NP_1(\sigma)) \quad (2.39)$$

La cola de la función de probabilidad de fallo de un espécimen puede ser aproximada alrededor del cero mediante la expresión:

$$P_1(\sigma) = \left\langle \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\rangle^m \quad (2.40)$$

donde  $\sigma_0$  y  $m$  son dos parámetros de ajuste.

Si se considera que el material se describe en el continuo la distribución de Weibull puede ser escrita:

$$P_N(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{V_r} \int_V P_1(f(\sigma)) dV\right) \quad (2.41)$$

donde  $V_r$  es el volumen de referencia utilizado para ajustar la función de probabilidad  $P_1$ , y  $f(\sigma)$  un valor escalar que hace la función de criterio de fallo.

Si el campo de tensiones es constante en toda la estructura la resistencia media en función del número de entidades puede escribirse:

$$\sigma_N = N^{-1/m} \Gamma(1 + m^{-1}) \sigma_0 \quad (2.42)$$

donde la función gamma se define:  $\Gamma(1 + m^{-1}) = \int_0^\infty t^{m^{-1}} e^{-t} dt$ .

Teniendo en cuenta que el volumen de la estructura es proporcional al número de entidades que la forman la ley de escala resultante se puede escribir [17]:

$$\sigma_u = k_0 d^{-n/m} \quad (2.43)$$

donde  $k_0$  es una constante que describe la geometría de la estructura,  $n$  es el número de dimensiones de la estructura, 1, 2 o 3 según si el problema es uni, bi o tridimensional y  $m$  depende de la función de probabilidad.

La teoría estadística de Weibull ha sido ampliamente utilizada para explicar la tendencia de las estructuras a fallar de un modo más frágil al aumentar su tamaño. Este efecto, que en estructuras con campos de tensiones no uniformes acostumbra a ser despreciable, ha sido utilizado en muchas ocasiones para ofrecer una explicación errónea al efecto de tamaño producido por la propagación estable de la grieta. Notase que la teoría estadística de fallo es exactamente igual a utilizar un criterio de

tensiones con aleatoriedad en el medio pero no tiene en cuenta la posibilidad que un punto del material se dañe sin producir la pérdida de estabilidad de la estructura. La teoría estadística solo es aplicable en materiales lo suficientemente fragilizados, como por ejemplo los ejes de ferrocarriles previamente fragilizados a fatiga, como en el trabajo de Wöhler [32].

En estructuras con capacidad de acumular daño antes de la pérdida de la estabilidad la teoría previamente expuesta no es aplicable, de la misma manera que tampoco lo es un criterio en tensiones. La derivación de la función de Weibull resulta de considerar que los elementos se encuentran conectados en serie, no obstante si estos se encuentran en paralelo (ver figura 2.14) la tensión máxima que será capaz de sustentar la estructura no debe ser igual a la tensión que produce el primer fallo en el material. La conexión de elementos en paralelo ocasiona una redistribución de las tensiones al fallar los elementos.

En problemas que tratan sobre la resistencia de un haz de fibras se ha utilizado el llamado GLS, (*"Global Load Sharing"*) que corresponde al caso de la figura 2.14 donde al fallar un elemento la fuerza es redistribuida homogéneamente entre las fibras restantes. En este caso la distribución de fallo tiende a una campana de Gauss [33][34].

El GLS es apropiado para tratar un haz de fibras si entre éstas no existe fricción y son incapaces de transferir tensiones cortantes. Si se considera que existe fricción entre las fibras las que se encuentran más cerca del fallo sustentaran mayores cargas. El LLS (*"Local Load Sharing"*) considera que al fallar una fibra las cargas se reparten entre las adyacentes. Si se considera la hipótesis del LLS la probabilidad de fallo tiende a una distribución de Weibull, pues al fallar una fibra sus adyacentes se cargan y facilitan la aparición de *"clusters"* que provocan el fallo catastrófico del haz de fibras.

Cuando se considera que las fibras tienen una relación constitutiva elástica hasta el momento del fallo y el material es capaz de transferir cortantes el LLS es apropiado, no obstante si se considera una ley constitutiva con una fase elástica y otra con plasticidad perfecta el GLS es una hipótesis apropiada ya que existe una zona donde se redistribuyen las tensiones.

La zona donde se redistribuyen las tensiones al fallar una fibra puede considerarse como la zona de proceso de fallo, si esta ocupa gran parte del plano de fallo la

distribución seguirá una campana de Gauss, si la zona de fallo es pequeña comparada con el plano de fallo seguirá la ley de Weibull.

Esta tendencia puede ser explicada, también, a partir de considerar una ley cohesiva con algunos de sus parámetros generados aleatoriamente según su posición. Si se considera una probeta con un agujero cuyo material tiene una ley cohesiva de plasticidad perfecta como la presentada en la figura 2.12 pero generada aleatoriamente de tal modo que la resistencia ( $\sigma_u$ ) no sea constante.

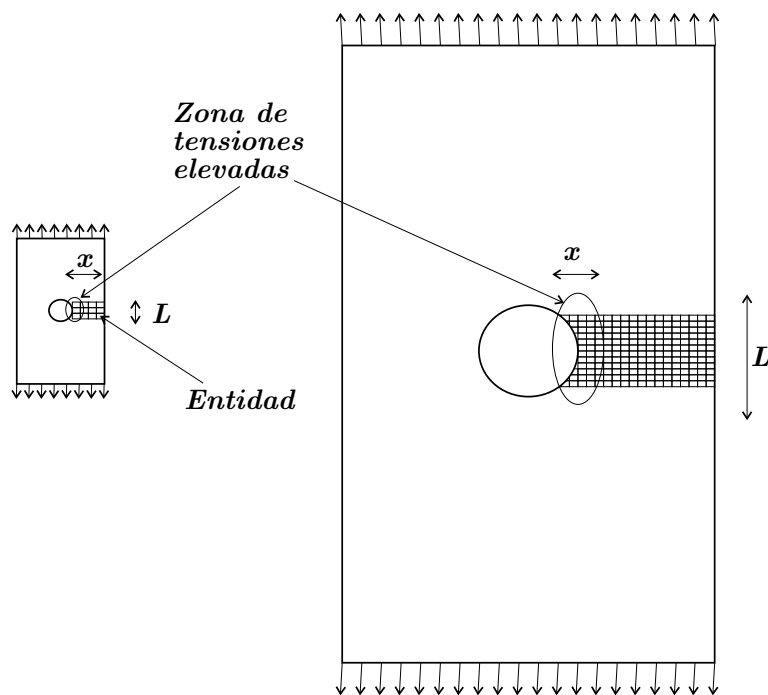


Figura 2.15: Probetas geométricamente similares con un agujero.  $x$  es la longitud que debe ser dañada antes del fallo, aproximadamente constante, y  $L$  la longitud donde es probable aparezca un plano de fallo.

En la figura 2.15, se representan dos probetas geométricamente similares de distinto tamaño. Donde  $x$  es la longitud de la zona de proceso de fallo, esta debe ser dañada antes del fallo estructural y es aproximadamente constante al aumentar el tamaño de la estructura, puede ser aproximada mediante la propuesta de Irwin (ecuación 2.31).  $L$  marca la región donde pueden aparecer distintos planos de falla que produzcan la rotura del material y los cuadrados representados son las entidades donde las propiedades del material se han generado aleatoriamente.

Cuando se analiza una estructura pequeña el tamaño de la zona de proceso

de fallo es parecido al de la estructura y la resistencia debe resultar la media de todas las entidades pues antes del colapso todas deben ser dañadas. En este caso la distribución de Weibull no es aplicable pues esta analiza el valor mínimo de un conjunto de datos. Como la resistencia es el valor medio puede aplicarse el teorema del límite central lo que resulta que la resistencia sigue una distribución de Gauss.

Por otro lado cuando la estructura es muy grande la región donde las tensiones son lo suficientemente elevadas como para provocar el fallo es mucho mayor que la zona de proceso de fallo. Luego el fallo vendrá regido por las entidades más débiles presentes en esta región. En este caso, la determinación del valor mínimo debe seguir una de las tres distribuciones de los valores extremos, la de Weibull.

El efecto tamaño estadístico tiene cierta influencia cuando el factor de intensidad de tensiones es cercano a la unidad ( $K_t \approx 1$ ) y cuando el tamaño de la estructura es mucho mayor que el de la zona de proceso de fallo.

Estas consideraciones permiten mejorar la ley de escala energética, ecuación (2.38) con un término que tiene en cuenta la variabilidad de la resistencia [34]–[36]:

$$\sigma_N(d) = f_t^\infty \left[ \left( \frac{L_0}{d + L_0} \right)^{\frac{rn}{m}} + \frac{rd_N}{d + \ell_I} \right]^{\frac{1}{r}} \quad (2.44)$$

Se observa que cuando  $d$  es pequeña la influencia del término estadístico es negligible. La resistencia nominal en función del tamaño de las estructura descrito por la ecuación (2.44) se muestra en la figura 2.14.

# Capítulo 3

## Bases de la mecánica del daño continuo

### 3.1. Introducción

La mecánica de los medios continuos es la herramienta de certificación estructural más ampliamente utilizada. Esta parte de la hipótesis que las variables del problema pueden ser descritas mediante ecuaciones continuas. Lo que requiere que exista la suficiente diferencia de escala entre el tamaño de las discontinuidades del material y el tamaño de la estructura a calcular. Tras esta simplificación es posible tratar el problema mediante ecuaciones diferenciales.

Muchos problemas de la mecánica del sólido pueden ser tratados mediante la mecánica de los medios continuos. Considérese una estructura con una geometría dada, la cuál ocupa un volumen definido en el espacio  $V$ , en cuyo contorno  $\Gamma$  se prescriben unas tracciones o desplazamientos que producen un campo de esfuerzos y desplazamientos en cada punto del dominio  $V$ . Estos son descritos mediante funciones continuas. La parte simétrica del gradiente de la función de desplazamientos  $\mathbf{u}(x, y, z)$  define el campo de deformaciones,  $\varepsilon(x, y, z)$  y mediante la ecuación constitutiva se determinan las tensiones de cada elemento diferencial,  $\sigma(x, y, z)$ . Si se garantiza la ecuación de equilibrio (ecuación (2.2)) en cada punto del dominio la estructura se encuentra en equilibrio. La integración en el volumen de la ecuación de equilibrio raramente puede realizarse analíticamente con lo que se han desarrollado técnicas numéricas. La de más éxito es el Método de los Elementos Finitos [37]. El



diagrama de Tonti [38] (ver figura 3.1) esquematiza el problema a solucionar para casos cuasi-estáticos con pequeñas deformaciones.

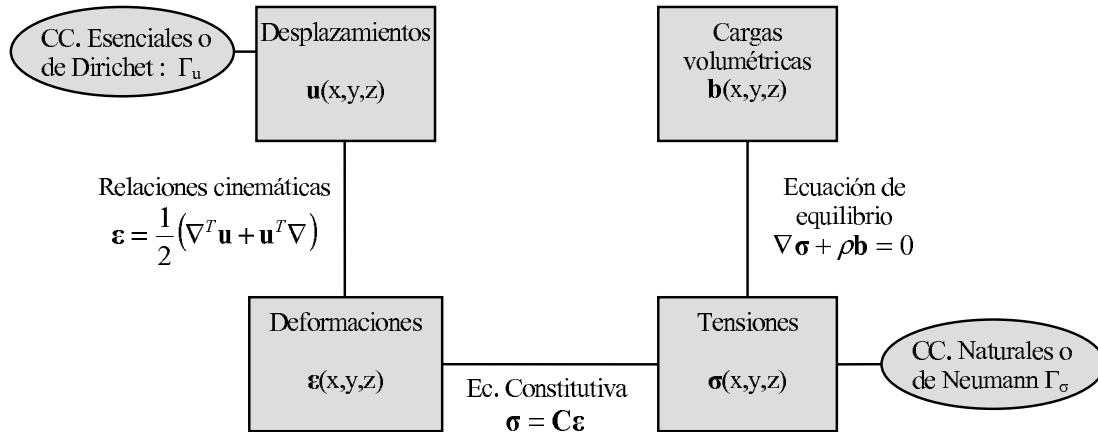


Figura 3.1: Diagrama de Tonti [38] relacionando los distintos campos en un problema cuasi estático en pequeños desplazamientos

Los modelos constitutivos se encargan de definir una relación entre las tensiones y las deformaciones. Los modelos constitutivos enmarcados en la mecánica de los medios continuos se presentan como la herramienta más prometedora para el tratamiento de la respuesta estructural. Esta permite el cálculo de estructuras geométricamente complejas gracias a los códigos de elementos finitos y, al mismo tiempo, permiten el acoplamiento de varios fenómenos constitutivos en la misma formulación. Por ejemplo, acoplamiento de problemas termo-mecánicos con daño y plasticidad.

La relación constitutiva más simple es la famosa ley de Hooke en que las deformaciones y las tensiones mantienen una relación lineal, este modelo también se conoce como modelo elástico y es la versión más simple de los modelos hiperelásticos. Los modelos hiperelásticos se caracterizan por definir una energía potencial mediante una función escalar, bajo cualquier ciclo cerrado de tensiones o deformaciones la disipación es nula. Los modelos hiperelásticos no consideran que existe un cambio en la estructura del material bajo estados de tensión severos. Si se quieren modelar fenómenos que produzcan un cambio irreversible en el material deben definirse un conjunto de variables internas que hagan referencia a la historia pasada del material y que definan su estado actual. Para garantizar la admisibilidad física de la evolución de estas variables internas los modelos deben definirse dentro el marco de la termodinámica de los procesos irreversibles.

Las dos tipologías de descripción constitutiva en cálculos cuasi-estáticos que determinan la variación de las propiedades del material son los modelos de plasticidad y los modelos de daño. Los modelos de plasticidad tratan de las deformaciones irreversibles llamadas plásticas ( $\varepsilon^p$ ) de los metales (o otros materiales) al superar cierto umbral de tensiones. Los modelos de daño tratan la pérdida de rigidez de los materiales debido a la nucleación y al crecimiento de grietas. Existen modelos de daño y plasticidad, entre los cuáles los modelos de daño plástico son aquellos que consideran la pérdida de rigidez debido a la evolución de las variables plásticas.

La inmensa mayoría de modelos de plasticidad o daño presentan una estructura parecida. Una primera fase donde se considera que el material sigue la ley de Hooke, a partir de cierto umbral determinado por una función escalar de las tensiones o de las deformaciones los procesos disipativos empiezan. La evolución de las variables internas se determina mediante las leyes de daño o plasticidad, las cuales han sido previamente definidas a partir de la micromecánica o directamente postuladas. Si se descarga el material sigue la ley de Hooke, en el caso de daño con una rigidez reducida hasta el origen, si es plasticidad con la misma rigidez inicial pero sin pasar por el origen.

### 3.2. Elemento representativo de volumen

La mecánica de los medios continuos parte de la hipótesis que el material es homogéneo y continuo en una determinada escala, luego las ecuaciones que describen el medio y sus propiedades termomecánicas pueden ser representadas mediante funciones continuas. Evidentemente el material no es continuo, ya desde su escala atómica hasta aquellos materiales compuestos de diferentes agregados, pasando por la distribución de defectos iniciales o generados a lo largo de su vida. Se define el elemento representativo de volumen como aquel donde los fenómenos a estudiar pueden ser promediados a lo largo del volumen. Se pueden definir distintas escalas, estas no son absolutas sino relativas al fenómeno a estudiar:

- **Microescala:** Donde se estudian los mecanismos que provocan la elasticidad, la disminución de rigidez o la plasticidad.

La elasticidad se encuentra relacionada con los movimientos de los átomos. La plasticidad en los metales se estudia analizando el movimiento relativo de las

distintas dislocaciones entre los cristales del material. El despegue entre los distintos cristales o la rotura de ligaduras atómicas es la fuente del daño.

En los materiales compuestos el daño ocurre básicamente en la interfase de los distintos constituyentes debido a las grandes concentraciones de tensiones que acostumbran a generar. En los compuestos la fibra y la matriz se acostumbran a separar y luego aparece daño en las distintas fases. En el hormigón el agregado y el cemento se separan. Es común que estos materiales tengan, en ciertos casos, un comportamiento plástico debido, en gran parte, a la fricción que aparece entre las micro-grietas, cuya orientación no coincide con las tensiones principales medias en el material.

- **Mesoescala:** Donde se pueden definir las ecuaciones constitutivas continuas para el análisis mecánico. Aquí se define el elemento representativo de volumen. La mesoescala es donde los fenómenos de la microescala pueden ser promediados y ser tratados como continuos. Estos serán válidos mientras los procesos micromecánicos puedan ser considerados como estadísticamente homogéneos dentro el elemento representativo de volumen. A partir de este momento el tratamiento de la evolución de las variables internas deberá realizarse a partir de otras consideraciones.
  
- **Macroescala:** Es la escala de las estructuras a analizar.

Los materiales compuestos presentan varias escalas muy diferenciadas, como se muestra en la figura 3.2. Se puede considerar como microescala la estructura molecular de cada fase. A nivel de fibra y matriz se puede considerar como homogéneas para definir un modelo constitutivo continuo para cada una de estas fases. En la macroescala se observan las distintas fases y se puede determinar la interacción de las mismas. Esta aproximación requiere una gran capacidad computacional que la imposibilitan para el cálculo estructural pero la hacen una herramienta interesante para el diseño de materiales. Por ejemplo, el tejido óptimo para un compuesto tridimensional.

Es posible considerar la microescala como aquella en que se producen las interacciones entre las distintas fases y definir las ecuaciones continuas de la mesoescala teniendo en cuenta que representan conjuntamente las distintas fases, es decir cada

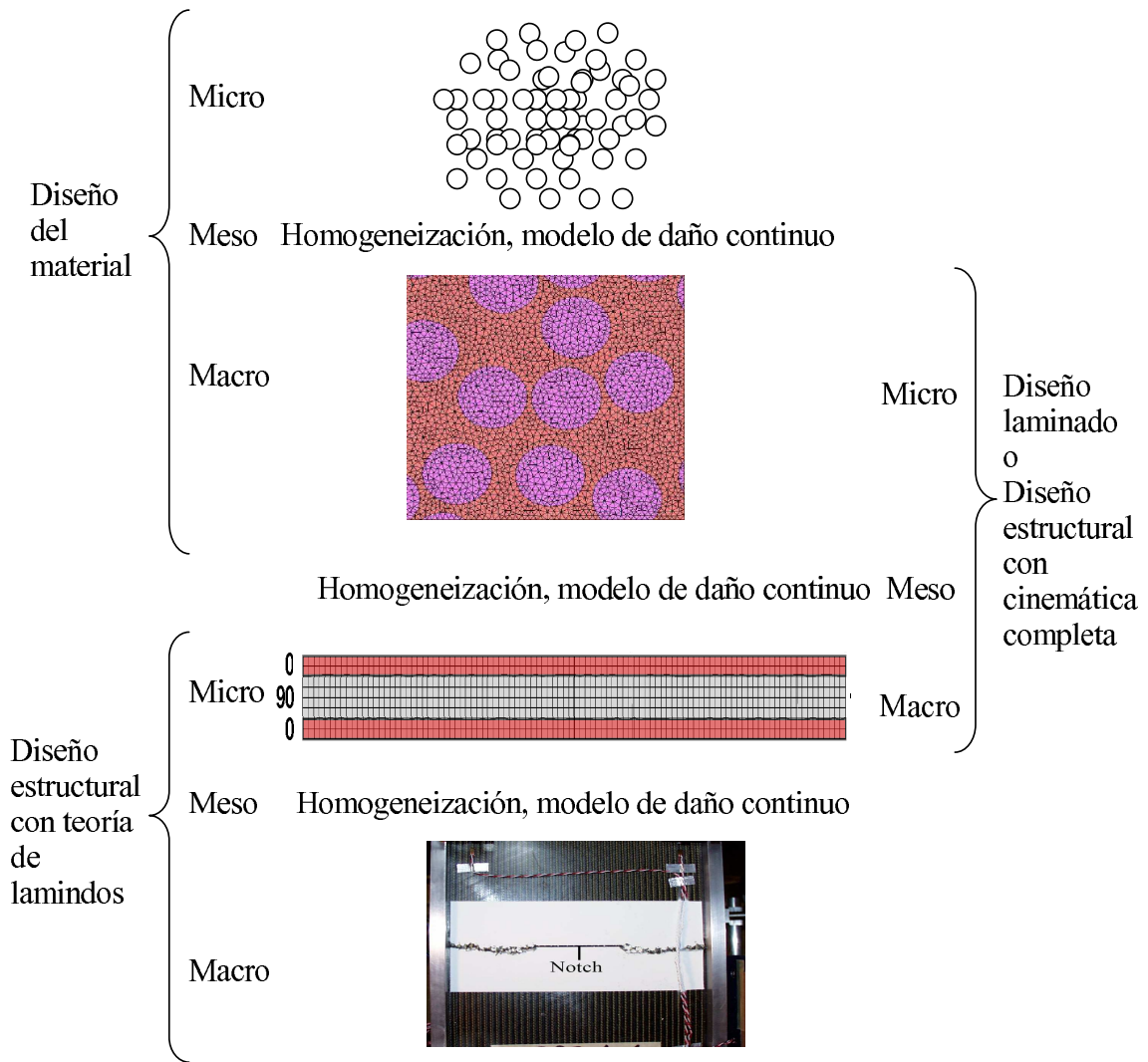


Figura 3.2: Distintas escalas donde el material puede ser homogeneizado.

punto material de la mesoescala está formado por todo el compuesto. En el capítulo 5 se define un modelo constitutivo de daño en esta escala.

Es habitual utilizar la teoría de cáscaras para la determinación de la respuesta estructural de las piezas laminadas. De la utilización de la teoría de cáscaras resulta una limitada descripción cinemática del medio. En este caso, el elemento representativo de volumen debe considerarse como todo el espesor del laminado. Es posible considerar que la microescala es una capa y las leyes de daño de la mesoescala tienen en cuenta la interacción de las distintas capas. En el capítulo 6 se define un modelo para ser tratado con la teoría de cáscaras. Este utiliza, como leyes de daño,

la respuesta obtenida por los modelos definidos en el capítulo 5.

Para realizar estos saltos de escala debe asegurarse que las distancias entre ellas son lo suficientemente grandes para que no exista interacción entre ellas. Es decir el tamaño de los constituyentes (fibra y matriz) debe ser mucho mayor que las moléculas que forman el material. Del mismo modo las capas que forman el laminado deben ser lo suficientemente gruesas en comparación con el tamaño de la fibra.

Un estudio de los fenómenos mecánico en la microescala ayuda a la definición de los modelos constitutivos, a seleccionar las variables internas necesarias y a determinar las condiciones de su activación y evolución.

### 3.3. Descripción del daño en la mesoescala

La manera más simple de describir el daño es mediante una sola variable de daño que afecta por igual a todos los términos del tensor constitutivo como en el trabajo pionero de Kachanov [39][40]. La utilización de modelos de daño escalares es muy habitual en la modelización constitutiva debido a su simplicidad. Si bien no son capaces de determinar la anisotropía generada en el elemento representativo de volumen si son capaces de representar la orientación de una macrogrieta evolucionando en la macroescala.

En materiales inicialmente isótropos se pueden definir modelos de daño que describan la disminución de la rigidez mediante dos variables internas relacionadas con los dos parámetros elásticos independientes. Lo más habitual es definir una variable de daño que afecte al módulo volumétrico ( $K$ ) y otra al cortante ( $G$ ). Estos modelos mantienen la isotropía inicial del material y se llaman genéricamente modelos isótropos, el modelo escalar es su caso más simple. A nivel micromecánico estos modelos consideran el daño como cavidades uniformemente distribuidas o grietas sin ninguna orientación preferencial en el material.

Si el material no es inicialmente isótropo el número de variables de daño independientes que pueden definirse para que las direcciones principales del material no varíen es igual al número de parámetros elásticos del material. Es decir 5 para un material transversalmente isótropo, 9 para un ortótropo y hasta 21 para un material con anisotropía total. Este conjunto de variables escalares que describen el daño representan grietas orientadas en las direcciones preferenciales del material y

no consideran que la dirección de las cargas influyan en la orientación de las grietas, sólo si se generan unas grietas u otras. Esta suposición es muy habitual en modelos para compuestos de láminas unidireccionales, numerosos experimentos llevados a cabo con este tipo de material indican que las grietas se generan en la dirección transversal al refuerzo, rotura de la matriz, o en la dirección longitudinal, rotura de las fibras, con lo cual todas las posibles orientaciones se reducen a dos planos.

Los modelos de daño isótropos presentan una limitación en la descripción del daño que no es aceptable bajo ciertas condiciones, materiales bajo ciclos de tensión complejos que produzcan rotación de las direcciones principales del tensor de tensiones o que presenten una gran capacidad de distribuir el daño antes de que este forme un plano de fallo. El proceso de daño del material esta formado por la nucleación y crecimiento de grietas orientadas según el origen de las cargas y la morfología del material. La descripción del daño para casos complejos de carga requiere la representación tensorial. Existen bastantes modelos definidos para materiales inicialmente isótropos que describen el daño mediante vectores [41][42] o tensores de segundo [43]–[48] o de cuarto orden [49]–[51].

La manera más general de relacionar el tensor de rigidez virgen del material con un estado cualquiera de daño es mediante un tensor de octavo orden [52]. Es decir mediante  $3^8$  variables.

$$C_{ijkl} = (I_{ijklmnst} - D_{ijklmnst}) (C_0)_{mnst} \quad (3.1)$$

La condición de compatibilidad exige la simetría del tensor de deformaciones mientras el equilibrio de momento interno la del tensor de tensiones, esto provoca la simetría menor del tensor secante, las dos primeras igualdades de la ecuación (3.2). La existencia de una función escalar que sirva de potencial termodinámico exige la simetría mayor de este tensor, última igualdad de la ecuación (3.2).

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (3.2)$$

El resultado es un tensor de rigidez secante con 21 parámetros independientes para representar la anisotropía general. Estas condiciones restringen los parámetros independientes del tensor de daño ( $D_{ijklmnrs}$ ). Debida a la gran complejidad y a la imposibilidad de determinar los parámetros los tensores de octavo orden no se utilizan.

Para simplificar el tratamiento del tensor constitutivo dañado se acostumbra a considerar alguna hipótesis que permita relacionar cinemáticamente el estado del material dañado con un espacio ficticio del material virgen. Las tensiones y deformaciones en el espacio del material virgen siguen la ley elástica inicial,  $\tilde{\sigma} = \mathbf{C}_0 : \tilde{\varepsilon}$ . Los principios de equivalencia de deformaciones, tensiones y energía ofrecen distintas maneras de relacionar el espacio ficticio con las tensiones y deformaciones nominales,  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , en la mesoescala.

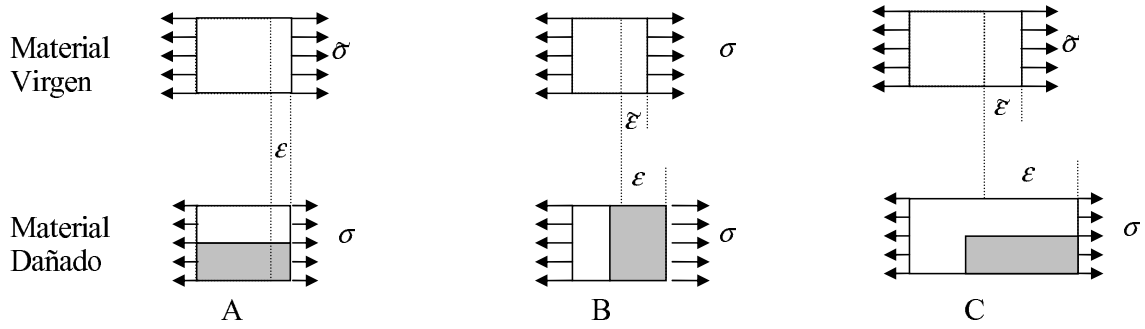


Figura 3.3: hipótesis de A) equivalencia de deformaciones, B) equivalencia de tensiones y C) equivalencia de energía entre los distintos espacios reales dañados y ficticios vírgenes

- **Principio de equivalencia de deformaciones:** La tensión efectiva aplicada al material virgen produce la misma deformación que la tensión nominal aplicada al material dañado. Esta equivalencia implica que los elementos fallan en paralelo (figura 3.3A). Resulta una relación entre tensiones nominales y efectivas y una relación secante:

$$\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \tilde{\sigma} \quad \text{y} \quad \sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \mathbf{C}_0 : \varepsilon \quad (3.3)$$

- **Principio de equivalencia de tensiones:** La deformación efectiva aplicada al material virgen produce la misma tensión que la deformación nominal aplicada al material dañado. Esta equivalencia implica que los elementos fallan en serie (figura 3.3B). Resulta una relación entre deformaciones nominales y efectivas y una relación secante:

$$\tilde{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \varepsilon \quad \text{y} \quad \sigma = \mathbf{C}_0 : (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \varepsilon \quad (3.4)$$

- **Principio de equivalencia de energía:** La densidad de energía libre de Helmholtz almacenada en el material virgen sujeto a una deformación efectiva es igual a la densidad de energía libre almacenada en el material dañado sujeto a la deformación nominal. Al mismo tiempo, la densidad de energía complementaria almacenada en el material virgen sujeto a una tensión efectiva es igual a la densidad de energía complementaria almacenada en el material dañado sujeto a la tensión nominal (figura 3.3C).

$$\Psi = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon} : \mathbf{C}_0 : \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon \quad \text{y} \quad G = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} : \mathbf{C}_0^{-1} : \tilde{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma \quad (3.5)$$

Resultando una relación constitutiva:

$$\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \mathbf{C}_0 : (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \varepsilon \quad (3.6)$$

La utilización de la hipótesis de equivalencia de deformaciones y tensiones da matrices de rigidez no simétricas, caso termodinámicamente inadmisibles, no obstante la equivalencia de energías resulta una relación secante simétrica. La utilización de estos principios, aunque no necesaria, produce que la relación más general entre el tensor virgen y el dañado sea mediante un tensor de cuarto orden. En la bibliografía se encuentran algunos modelos definidos a partir de tensores de cuarto orden [49]–[51], estos utilizan como variable interna el propio tensor de rigidez o de flexibilidad, luego su simetría es más fácil de garantizar.

Es habitual considerar que el daño puede ser representado mediante tensores simétricos de segundo orden [44]–[48][53]. Si consideramos que el estado de un material puede representarse mediante un conjunto de grietas ortogonales definidas por los vectores ortonormales  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$  que corresponden a las direcciones principales del tensor de segundo orden que describe el daño. En estas direcciones el daño puede escribirse mediante tres variables escalares:  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ . La relación entre las tensiones efectivas y nominales en estas direcciones se pueden escribir:

$$\sigma_{11} = (1 - D_1) \tilde{\sigma}_{11} \quad ; \quad \sigma_{22} = (1 - D_2) \tilde{\sigma}_{22} \quad ; \quad \sigma_{33} = (1 - D_3) \tilde{\sigma}_{33} \quad (3.7)$$

Las relaciones a cortante no quedan definidas (o definiendo la relación  $\sigma_{ij} = (I_{ik} - D_{ik}) \tilde{\sigma}_{kj}$  resulta una relación no simétrica) pero es lógico pensar que las tensiones en el plano 12 se verán afectadas por las variables de daño 1 y 2. Son comunes



las siguientes suposiciones [54][55]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12} &= \sqrt{(1 - D_1)(1 - D_2)} \tilde{\sigma}_{12} ; \\
 \sigma_{12} &= \frac{1}{2} [(1 - D_1) + (1 - D_2)] \tilde{\sigma}_{12} ; \\
 \sigma_{12} &= 2 \frac{(1 - D_1)(1 - D_2)}{2 - D_1 - D_2} \tilde{\sigma}_{12}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Estas relaciones no son más que una simetrización del tensor de tensiones efectivas. Si se aplica la equivalencia de energías resulta un tensor secante:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} : \mathbf{C}_0 : \mathbf{M} \tag{3.9}$$

Siendo  $\mathbf{M}$  una matriz que se puede expresar en las direcciones principales del daño como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 - D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - D_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - D_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - D_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - D_6 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

donde  $(1 - D_6) = \sqrt{(1 - D_1)(1 - D_2)}$ ,  $(1 - D_6) = \frac{1}{2} [(1 - D_1) + (1 - D_2)]$  o  $(1 - D_6) = 2 \frac{(1 - D_1)(1 - D_2)}{2 - D_1 - D_2}$  y sucesivamente según el tipo de simetrización.

Un enfoque muy distinto es el basado en el concepto del microplano. Estos definen el modelo constitutivo de un conjunto de planos del material separados un ángulo determinado y luego los integra alrededor de toda la esfera mediante la cuadratura de Gauss. El concepto del microplano fue avanzado por Taylor [56] y desarrollado por Batdorf y Budianski para plasticidad [57]. Posteriormente fue mejorado por Bažant para hormigón [58]–[60] con leyes en el plano con ablandamiento. Este planteamiento es una generalización de los modelos cohesivos y del *"smeared crack models"*. En algunos casos son equivalentes a una tensor de cuarto orden.

### 3.3.1. Cierre de las grietas, unilateralidad del daño

La unilateralidad del daño hace referencia a la recuperación de rigidez del material dañado bajo ciertas condiciones de carga. La aparición de fisuras en el material

produce distinta pérdida de rigidez secante según si las cargas son a tracción, encontrándose las grietas abiertas, o a compresión, cuando las caras de las grietas entran en contacto y permiten la transferencia de las cargas.

Existen la posibilidad de definir variables independientes según si el daño se ha producido bajo cargas a tracción ( $\mathbf{D}^t$ ) o a compresión ( $\mathbf{D}^c$ ). Otra posibilidad consiste en definir un sólo conjunto de variables internas ( $\mathbf{D}$ ) que se encuentran totalmente activas bajo cargas a tracción y que se recuperan parcial o totalmente bajo cargas a compresión según algún parámetro del material. Esta segunda opción considera que no es necesario definir un conjunto de variables internas especiales para tener en consideración la distinta naturaleza del daño generado a tracción y a compresión. Por otro lado cuando se consideran distintas variables internas para almacenar el daño generado a tracción y a compresión se requiere tener en cuenta que ambos daños afectan a la rigidez secante tanto bajo cargas a compresión como, sobretodo, a tracción.

La detección del estado activo o inactivo se acostumbra a determinar mediante la descomposición de las tensiones o deformaciones principales en una parte positiva y una negativa. En aquellas direcciones donde la tensión o deformación principal es positiva el daño activo será a tracción y en aquellas donde es negativa el daño activo será a compresión.

Cuando el daño se representa mediante un tensor de segundo o de cuarto orden es posible determinar cuales serán las variables activas teniendo en cuenta la dirección principal del tensor de daño. Conocidas estas direcciones se descompone el tensor de tensiones, o deformaciones, para determinar si en una dirección  $\mathbf{v}_i$  las grietas se encuentran activas o inactivas según su signo. Por ejemplo, Chaboche [50][51] propone definir un tensor secante:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(d) + \eta \sum_{i=1}^3 H(-\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{P}_i : [\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}(d)] : \mathbf{P}_i \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{P}_i = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i$ ,  $H(-\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i)$  es la función escalón,  $\mathbf{C}(d)$  es el tensor secante con las variables de daño completamente activas, debido a cargas a tracción, y  $\mathbf{C}_0$  es el tensor de rigidez isótropo inicial.  $\eta$  es el parámetro de recuperación del material, si este es 0 el material no recupera la rigidez a compresión y si es 1 la recupera totalmente.

Cormery *et al.* [61] analiza el comportamiento de los modelos de Chaboche [51] y

de Halm y Dragon [62], ambos con descripción anisótropa del daño y con descomposición en la parte positiva y negativa teniendo en cuenta las direcciones principales del daño y de la deformación demostrando en ambos modelos que la descripción de la densidad de energía elástica almacenada no era única por un mismo estado del sistema, en este caso la función que describe la energía libre no es un potencial termodinámico.

Carol *et al.* [63] estudia la conservación de la energía de los modelos con unilateralidad. Considerando que el proceso de activación y desactivación de las variables de daño no es un proceso disipativo, para cualquier ciclo cerrado de cargas que no produzca evolución de las variables internas, es decir incremento del daño, la disipación debe ser nula. Carol propone la expresión para determinar la disipación espúrea:

$$\Xi^{sp} = \frac{1}{2} \varepsilon : \dot{\mathbf{C}} \Big|_{d=0} : \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma : \dot{\mathbf{H}} \Big|_{d=0} : \sigma \quad (3.12)$$

Analizando distintos modelos de daño con unilateralidad que se encuentran en la bibliografía sólo los modelos que describen el daño con variables escalares ofrecen una disipación espúrea nula.

Los únicos modelos de daño continuo capaces de tratar de una manera consistente el cierre de las grietas son los que se describen mediante una sola variable escalar a tracción y otra a compresión. Si se considera que en cualquier instante se mantendrá la coaxialidad entre las deformaciones ( $\mathbf{e}$ ) y las tensiones ( $\mathbf{s}$ ) principales la relación constitutiva se puede expresar:  $\mathbf{e} = \mathbf{H} : \mathbf{s}$ , donde el tensor de flexibilidad secante en las direcciones principales se puede escribir:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d_1} & -\nu & -\nu \\ -\nu & \frac{1}{1-d_2} & -\nu \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{1-d_3} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde las variables de daño ( $d_i$ ) son función de las variables escalares de daño que determinan la pérdida de rigidez a tracción ( $d_+$ ) y a compresión ( $d_-$ ) y se activan según:

$$d_i = d_+ \frac{\langle s_i \rangle}{|s_i|} + d_- \frac{\langle -s_i \rangle}{|s_i|} \quad (3.14)$$

donde  $\langle x \rangle$  es el paréntesis de McCauley y se escribe  $\langle x \rangle := (x + |x|)/2$ .

Forzando la coaxialidad entre las deformaciones y las tensiones principales resulta un valor de rigidez cortante:

$$G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\varepsilon_{ij}} = \frac{s_j - s_i}{2(e_j - e_i)} \quad (3.15)$$

Otra problema detectado en los modelos de daño con unilateralidad es que la respuesta ofrezca saltos en la respuesta tensión deformación en el proceso de activación/desactivación de las variables activas. Este efecto se debe al coeficiente de Poisson y la clave para que no ocurra es que este no se vea afectado por el daño. En la ecuación (3.13) los coeficientes de Poisson no se ven afectados por las variables de daño. En el caso que se determinen las variables de daño activas según el signo de las tensiones principales ( $s_i$ ) en el momento que su valor sea nulo la variable de daño cambia de tracción a compresión, o viceversa, y sólo cambia el término que se ve afectado por la tensión nula. Por otro lado si se utiliza, para determinar las variables de daño activas, el signo de las deformaciones principales ( $e_i$ ) se produce un salto en la respuesta tensión deformación ya que ninguno de los componentes de las tensiones principales tiene porque ser nulo.

Chaboche [64] realiza una interesante aportación al comportamiento de las grietas al cerrarse considerando que además de una recuperación de la rigidez se produce fricción entre las caras de la grieta bajo esfuerzos cortantes.

Un enfoque que ha obtenido buenos resultados en la modelización del cierre de grietas son aquellos basados en el concepto de microplano [58]–[60].

### 3.4. Bases termodinámicas de los modelos constitutivos

La termodinámica de los procesos irreversibles ofrece un riguroso marco para definir modelos constitutivos con variables internas [43][65]–[69]. El método del estado local postula que el estado termodinámico de un punto en un instante determinado es completamente definido mediante el conocimiento de un conjunto de variables en ese instante y punto. La evolución de las variables internas que describen el estado sólo dependen del estado del punto en el instante actual. El valor de las derivadas temporales no intervienen en la definición del estado lo que implica que se pue-

de considerar que el punto se encuentra sometido a una sucesión de estados de equilibrio.

Se define una función de estado extensiva ( $e$ ) como medida de la energía total, esta se puede descomponer de forma aditiva mediante una componente de energía cinética ( $k$ ) y otra de energía interna ( $u$ ):  $e = u + k$ .

El primer principio de la termodinámica es un balance de energía que en forma local se puede escribir:

$$\rho \dot{u} = \sigma : \dot{\varepsilon} + \rho r - \nabla \mathbf{q} \quad (3.16)$$

La variación de la energía interna ( $\rho \dot{u}$ ) será igual a la potencia mecánica generada ( $\sigma : \dot{\varepsilon}$ ) más la aportación de fuentes de calor interno ( $\rho r$ ) menos el flujo de calor no convectivo ( $\nabla \mathbf{q}$ ) que circula por el contorno. Se considera que la densidad del material es constante.

El segundo principio restringe la evolución de la energía interna. Habiendo procesos factibles y otros no factibles a pesar del cumplimiento del primer principio, ecuación (3.16). Se define una variable de estado intensiva y definida positiva llamada temperatura absoluta ( $T$ ) y otra extensiva llamada entropía específica ( $s$ ). La evolución de la entropía debe ser mayor o igual a la cantidad de calor entrante dividido por la temperatura absoluta, eso es:

$$\rho \dot{s} \geq \rho \frac{r}{T} - \nabla \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \rho \frac{r}{T} - \frac{\nabla \mathbf{q}}{T} + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \quad (3.17)$$

Si la expresión (3.17) mantiene la igualdad el proceso es reversible, el aumento de entropía es igual a la relación entre el calor introducido y la temperatura absoluta, luego es posible volver al estado termodinámico previo. Por otro lado si el aumento de entropía es mayor que el calor introducido el proceso es irreversible, se ha disipado energía que no podrá volver a utilizarse.

La función entropía puede descomponerse aditivamente mediante una entropía externa, generada por la interacción con el medio colindante y otra generada por procesos internos.

$$\dot{s} = \dot{s}^i + \dot{s}^e \geq 0 \quad (3.18)$$

Se define la entropía externa como:

$$\rho \dot{s}^e = \rho \frac{r}{T} - \frac{\nabla \mathbf{q}}{T} + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \quad (3.19)$$

combinando las dos expresiones anteriores se obtiene la variación de entropía interna por aquellos procesos que provocan un cambio en el estado del material. La conocida desigualdad de Clausius - Duhem:

$$\rho \dot{s}^i = \rho \dot{s} - \rho \frac{r}{T} + \frac{\nabla \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \geq 0 \quad (3.20)$$

Teniendo en cuenta que el último término de la expresión (3.20) se refiere a la conducción térmica, se puede considerar que el flujo de calor siempre irá de la fuente de mayor a menor temperatura  $-\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \geq 0$ , restringiendo aún más la evolución de la entropía, resulta la desigualdad de Clausius - Plank:

$$\rho \dot{s}_{\text{local}}^i = \rho \dot{s} - \rho \frac{r}{T} + \frac{\nabla \mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad (3.21)$$

Puede establecerse la disipación mecánica y térmica multiplicando la expresión de la variación de entropía por la temperatura absoluta, como esta siempre es positiva garantizar una disipación positiva es equivalente al segundo principio:

$$\Xi_{\text{mecánica}} \equiv T \rho \dot{s} - \rho r + \nabla \mathbf{q} \geq 0 \quad ; \quad \Xi_{\text{térmica}} \equiv -\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (3.22)$$

combinando la disipación mecánica con la expresión del primer principio, ecuación (3.16), resulta:

$$\Xi_{\text{mecánica}} \equiv \sigma : \dot{\varepsilon} + \rho (T \dot{s} - \dot{u}) \geq 0 \quad (3.23)$$

Las variables medibles experimentalmente en un problema mecánico son la deformación ( $\varepsilon$ ), la tensión ( $\sigma$ ) y la temperatura absoluta ( $T$ ) además de las deformaciones permanentes en modelos de plasticidad o la disminución de rigidez en modelos de daño. En un problema termomecánico es difícil definir la energía interna ya que depende de la entropía,  $u(\varepsilon, s, \mathbf{D})$ . Es conveniente definir una nueva función de estado llamada energía libre de Helmholtz:

$$\Psi(\varepsilon, T, \mathbf{D}) = u(\varepsilon, s, \mathbf{D}) - T s \quad (3.24)$$

sustituyendo su variación temporal ( $\dot{\Psi} = \dot{u} - \dot{T}s - T\dot{s}$ ) en la expresión de la disipación mecánica (3.23):

$$\Xi_{\text{mecánica}} \equiv \sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) \geq 0 \quad (3.25)$$

Reescribiendo la variación de energía libre en función de sus argumentos:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \quad (3.26)$$

La disipación mecánica resulta:

$$\Xi_{\text{mecánica}} \equiv \left( \sigma - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \geq 0 \quad (3.27)$$

Siendo la deformación y temperatura absoluta las variables libres y pudiendo variar libremente para evitar la disipación negativa debe cumplirse:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \quad ; \quad s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (3.28)$$

Resultando una disipación mecánica:

$$\Xi_{\text{mecánica}} = - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} \geq 0 \quad (3.29)$$

donde  $\mathbf{Y}$  son las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables internas ( $\mathbf{D}$ ) en el campo complementario. Estas indican la variación de energía libre al evolucionar las variables internas.

En algunos casos es interesante definir la energía libre en función de las tensiones, se define la energía libre de Gibbs:  $G(\sigma, T, \mathbf{D})$ .

$$\rho G(\sigma, T, \mathbf{D}) = \rho \Psi(\varepsilon, T, \mathbf{D}) - \sigma : \varepsilon \quad (3.30)$$

Derivando respecto los argumentos ( $\rho \dot{G} = \rho \dot{\Psi} - \dot{\sigma} : \varepsilon - \sigma : \dot{\varepsilon}$ ) se llega a las igualdades:

$$\Xi_{\text{mecánica}} \equiv - \left( \rho \frac{\partial G}{\partial \sigma} + \varepsilon \right) : \dot{\sigma} - \rho \left( \frac{\partial G}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial G}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \geq 0 \quad (3.31)$$

Las leyes de estado derivadas a partir de la energía libre de Gibbs resultan:

$$\varepsilon = - \rho \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad ; \quad s = - \frac{\partial G}{\partial T} \quad ; \quad \mathbf{Y} = - \rho \frac{\partial G}{\partial \mathbf{D}} \quad (3.32)$$

Las relaciones entre las distintas funciones que describen la energía se determinan mediante la transformada de Legendre como ilustra la figura 3.4.

La modelización constitutiva exige escribir las funciones con los argumentos que provoquen una mayor facilidad en el trabajo y, sobretodo, en el ajuste. Es decir, definir la energía libre con las tensiones o deformaciones y la temperatura. Por lo que se refiere a las variables internas pueden referirse a una variación de rigidez (daño) a unas deformaciones permanentes (plasticidad) o a cualquier fenómeno que

se aprecie si estos son medibles experimentalmente. No obstante el valor de las fuerzas termodinámicas asociadas marcan el incremento de energía disipada al aumentar estas variables, estas no son medibles en el laboratorio. En problemas termomecánicos se acostumbra a definir los modelos mediante la energía libre de Helmholtz o de Gibbs (normalmente se define la energía complementaria  $C = -G$ ). Estos se describen mediante las tensiones o deformaciones y la temperatura, fácilmente medibles.

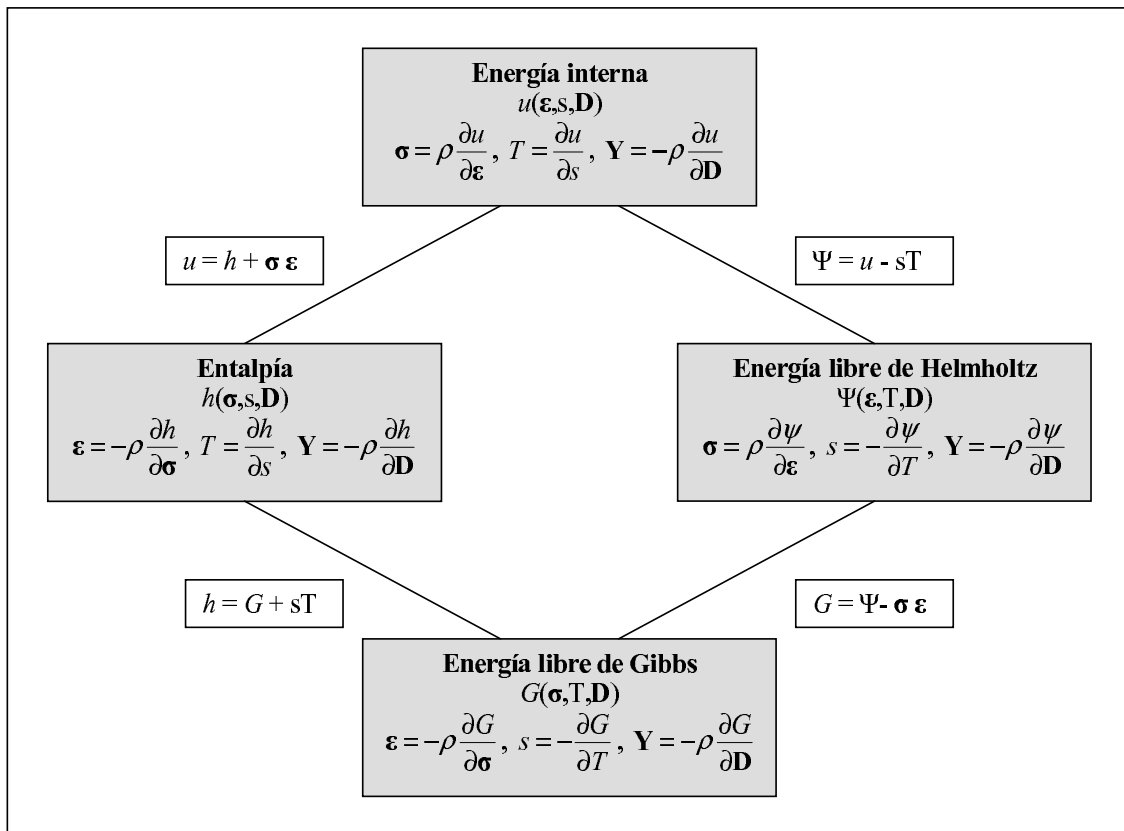


Figura 3.4: Transformada de Legendre entre los distintos potenciales

### 3.5. Activación y evolución de las variables de estado

Los modelos constitutivos con variables internas acostumbran a seguir el esquema clásico desarrollado con la teoría de la plasticidad. Consideran una región donde el material es lineal elástico, a partir de un cierto umbral los procesos inelásticos



empiezan. Se define una función escalar que depende de las variables libres ( $\varepsilon$ ) y de las variables internas ( $\mathbf{D}$ ) del modelo así como de un conjunto de constantes. Para cualquier valor de las variables libres debe garantizarse:

$$F(\varepsilon, \mathbf{D}) \leq 0 \quad (3.33)$$

La función umbral  $F(\varepsilon, \mathbf{D})$  define el dominio elástico, una superficie en el espacio de deformaciones que delimita el comportamiento elástico del material. Si la función umbral  $F(\varepsilon, \mathbf{D}) < 0$  el comportamiento del material es elástico, si  $F(\varepsilon, \mathbf{D}) = 0$  el material se encuentra en régimen de carga neutra, régimen de descarga o en régimen inelástico según la variación de las variables libres del sistema. Si la variación de las variables libres van hacia el interior de la superficie o se mantienen sobre ella, es decir:  $\dot{F}(\varepsilon, \mathbf{D}) \Big|_{\dot{\mathbf{D}}=0} \leq 0$ , el régimen es de descarga elástica o carga neutra y el comportamiento es elástico. Si estas tienden a salir hasta el exterior de la superficie,  $\dot{F}(\varepsilon, \mathbf{D}) \Big|_{\dot{\mathbf{D}}=0} > 0$ , el proceso es inelástico y las variables internas evolucionan. Estas condiciones de carga/descarga se expresan mediante las condiciones de *Kuhn-Tucker*:

$$F(\varepsilon, \mathbf{D}) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} F(\varepsilon, \mathbf{D}) = 0 \quad (3.34)$$

siendo  $\dot{\lambda}$  el multiplicador inelástico, un parámetro escalar que indica la velocidad de la evolución de las variables internas.

En el caso que las variables internas evolucionen debe cumplirse la condición de consistencia es decir la evolución de las variables internas debe garantizar, en todo momento;  $F(\varepsilon, \mathbf{D}) = 0$ :

$$\dot{F}(\varepsilon, \mathbf{D}) = 0 \quad (3.35)$$

Si las variables internas evolucionan ( $\dot{\mathbf{D}} \neq 0$ ) debe describirse como evoluciona una respecto la otra, es decir:

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\varepsilon, \mathbf{D}) \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{g}(\varepsilon, \mathbf{D})$  es un tensor del mismo orden de las variables internas que define la evolución relativa de una variable interna respecto las otras.

Mediante la regla de la cadena es posible desarrollar la ecuación (3.35), si se tiene en cuenta que la evolución del conjunto de variables internas ( $\dot{\mathbf{D}}$ ) puede escribirse mediante la ecuación (3.36) resulta:

$$\dot{F}(\varepsilon, \mathbf{D}) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{g}(\varepsilon, \mathbf{D}) = 0 \quad (3.37)$$

El resultado es una ecuación con una incognita, despejando el multiplicador inelástico se obtiene su evolución en función de las variables libres:

$$\dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{g}} \quad (3.38)$$

Si se reescribe la disipación, ecuación (3.29), la disipación mecánica resulta:

$$\Xi_{\text{mecánica}} = \dot{\lambda} \mathbf{Y} : \mathbf{g} \geq 0 \quad (3.39)$$

Si  $\dot{\lambda} \geq 0$  y  $\mathbf{Y} : \mathbf{g} \geq 0$  se garantiza una disipación positiva. Una manera de garantizar la disipación positiva es definiendo una función umbral respecto a las fuerzas termodinámicas asociadas,  $F(\mathbf{Y}, \mathbf{D})$ , convexa y con el cero en el origen. La dirección del flujo inelástico, definida por el tensor  $\mathbf{g}$ , debe ser derivada de una función potencial  $\mathbf{g} = \frac{\partial H(\mathbf{Y}, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{Y}}$ , donde el potencial  $H(\mathbf{Y}, \mathbf{D})$  contiene el origen y es convexa respecto  $\mathbf{Y}$ .

El parámetro de consistencia puede determinarse a partir de la aplicación de la condición de consistencia, ecuación (3.35):

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} \right) : \dot{\mathbf{D}} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \dot{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} \right) : \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Y}} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Resultando:

$$\dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon}}{\left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} \right) : \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Y}}} \quad (3.41)$$

La función potencial de evolución ( $H$ ) indica la dirección en que evolucionarán las variables internas y el factor de consistencia ( $\dot{\lambda}$ ) indica la distancia a que se encuentra del equilibrio. Para modelos con una sola variable interna no es necesario definir el potencial de evolución pues estas evolucionaran hasta el equilibrio marcado por la condición de consistencia, ecuación (3.35).

Si se utiliza la misma función para el potencial de evolución que para la función umbral ( $F(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) \propto H(\mathbf{Y}, \mathbf{D})$ ) se dice que es un modelo de flujo asociado. Por ejemplo, en plasticidad el tensor de deformaciones permanentes evoluciona en la

dirección que marca el gradiente de la superficie potencial de evolución. Si se utiliza la superficie de Von Mises, esta geoméricamente es un cilindro cuyo eje coincide con la tensión hidrostática (ver figura 2.5), la dirección que marca es perpendicular a la superficie esto indica que el flujo plástico sólo tendrá componente desviadora, con lo que las deformaciones plásticas no producen cambio volumétrico.

Es común, sobretodo en materiales compuestos, el considerar más de una función de activación, o definir uno para cada fenómeno no lineal a modelar. Si el dominio elástico se encuentra definido por  $n$  criterios de activación es necesario garantizar las condiciones de carga-descarga:

$$F_n(\varepsilon, \mathbf{D}) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}_n \geq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}_n F_n(\varepsilon, \mathbf{D}) = 0 \quad (3.42)$$

y de consistencia ( $\dot{F}_n = 0$ ) para cada una de las funciones.

Un estado de deformaciones cualquiera puede ocasionar la evolución de ninguna, una o varias funciones de activación. Si ninguna evoluciona el régimen es elástico, si evolucionan  $m$  funciones de activación a la vez, siendo  $m \leq n$ , deben buscarse  $m$  factores de consistencia, luego la solución la ecuación (3.37) se convierten en un sistema de  $m$  ecuaciones.

### 3.6. Daño distribuido y daño localizado

Los modelos que mantienen la relación constitutiva tangente ( $\mathbf{C}^T$ ) entre el incremento de deformaciones y tensiones definida positiva se llaman de endurecimiento y los que, a partir de cierto instante, pasa a ser definida negativa, de ablandamiento. El comportamiento del material según el modelo sea de endurecimiento o ablandamiento es completamente distinto. Los modelos con endurecimiento son incapaces de modelar la fractura pues la región del material que entra en régimen no-lineal tiende a ocupar todo el volumen de la pieza. Estos modelos son apropiados para el tratamiento de daño (o plasticidad) distribuido. Por otro lado, los modelos con ablandamiento sirven para simular la aparición de grietas a lo largo del material, un modelo definido en el continuo y cuasi-estático con una ley constitutiva con ablandamiento produce la localización de las deformaciones en un plano, conocido como el plano de falla. La aparición de modelos constitutivos con ablandamiento, los cuales no cumplen el criterio de estabilidad de Drucker, fueron severamente criticados

durante décadas por la corriente dominante en la mecánica de los medios continuos [70].

Ciertamente la modelización del comportamiento de un material con ablandamiento es más crítica que el de los materiales con endurecimiento por la inestabilidad y la fuerte sensibilidad a las perturbaciones que exhibe la respuesta. No obstante, cualquier material debe tener una región de ablandamiento pues si se aplica una deformación creciente en un punto del material con un modelo con endurecimiento las tensiones que este sustentará crecerán indefinidamente y también la densidad de energía disipada. Un modelo con ablandamiento restringe la densidad de energía que cada punto del material puede disipar.

Cuando se considera un problema de fractura mediante un modelo constitutivo con ablandamiento en el continuo la solución tiende, de una manera natural, a la formación de un plano de falla. Considérese una probeta uniaxial sin entalla con una ley constitutiva compuesta por dos fases, una lineal elástica y otra de ablandamiento una vez alcanzada cierta tensión umbral. Si se somete la probeta a un ensayo a tracción con desplazamiento controlado el material se encontrará cargado con una tensión uniforme. Una vez la tensión está a punto de alcanzar el valor umbral considérese la presencia de un pequeño defecto en el material. Este, por pequeño que sea, producirá que un punto del material alcance el valor umbral y empiece la región de ablandamiento. Una vez alcanzado, en este punto las tensiones bajarán, el equilibrio de fuerzas exige que las tensiones en cualquier sección de la probeta sean iguales, con lo cual los puntos que no hayan sobrepasado la tensión umbral se descargarán elásticamente. El resultado será un punto (una línea en dos dimensiones y un plano en tres) donde el material se habrá dañado y el resto de la probeta se descargará elásticamente.

Teniendo en cuenta que la energía total disipada en el continuo se puede determinar mediante la integración de la densidad de energía disipada por el volumen de la región dañada:  $\left(\int_{\partial V} \int_{t_0}^{t_c} \Xi dt dV \approx g_c V\right)$ . Si el volumen tiende a cero la energía disipada también, pero esta debe ser igual a la energía crítica de fractura por el área fracturada:  $(G_c A)$ . El resultado es que la definición de modelos constitutivos con ablandamiento no puede realizarse en el continuo sin algún procedimiento que regularice la energía disipada a un valor que se considera finito y constante llamado energía crítica de fractura. Básicamente existen dos estrategias para regularizar la

energía disipada, la introducción de algún tipo de limitador de la localización que impida que el daño se localice en un plano de cero volumen o escribir la ley de apertura de la grieta mediante una función cohesiva que relaciona las tracciones con la apertura de la grieta:  $\sigma(\mathbf{w})$ .

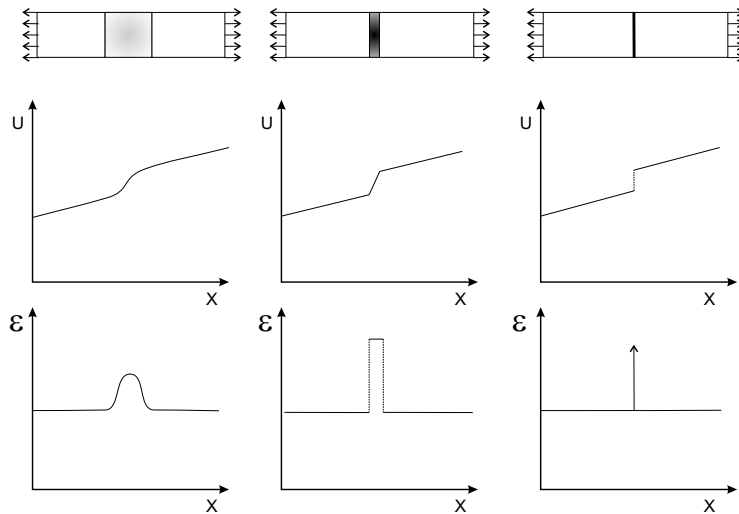


Figura 3.5: Las distintas representaciones cinemáticas para describir una grieta. Descripción cinemática de la zona de fallo, continua, discontinuidad débil y discontinuidad fuerte.

La formación de una grieta a lo largo del medio continuo puede, desde una perspectiva cinemática, dividirse en tres fases como se muestra en la figura 3.5. En la primera fase el material empieza a dañarse, los campos de desplazamientos son continuos y también sus derivadas. Al evolucionar el daño la región dañada se va delimitando de modo que los desplazamientos son continuos pero no su derivada, esta región se llama discontinuidad débil. Finalmente se forma una discontinuidad fuerte, aparece un salto en el campo de desplazamientos.

Los modelos cohesivos o de grieta ficticia iniciados por Hillerborg [26], sección 2.5, consideran la grieta como una discontinuidad fuerte. Estos escriben la ley de separación mediante las tracciones y la apertura de la grieta,  $\sigma(\mathbf{w})$ . La energía disipada por unidad de superficie equivale a la integración de la ley constitutiva. Bajo un ensayo uniaxial a tracción esta equivale a la energía crítica de fractura en modo I del material:

$$G_{Ic} = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (3.43)$$

Los modelos de grieta ficticia no son capaces de modelar el material que presenta una zona inelástica distribuida, producto de una ley con endurecimiento, estos elementos deben tener una relación tangente negativa entre las tracción transferidas y la apertura de la grieta. La zona inelástica no localizada debe ser incluida en la ley continua [71]. La implementación de estos modelos en un código de elementos finitos se realiza mediante la definición de elementos planos con los nodos doblados de tal modo que pueden separarse una vez se activa la ley cohesiva [72][73].

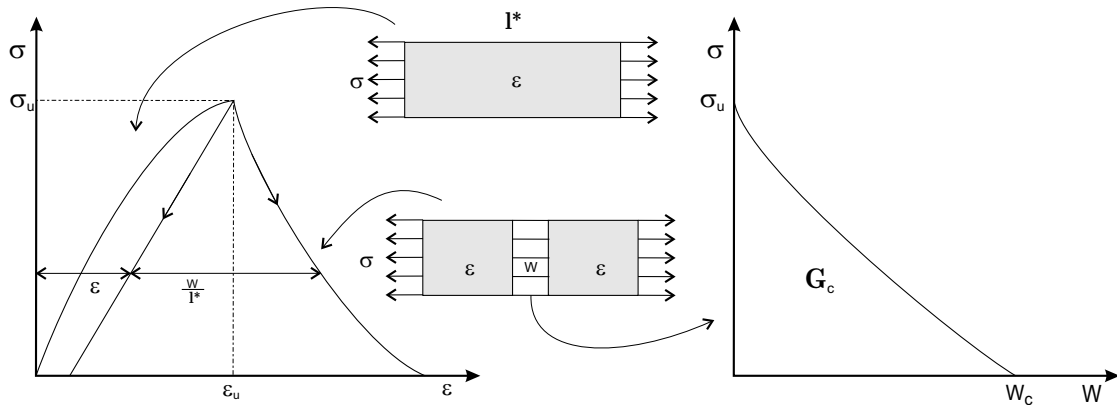


Figura 3.6: Respuesta tensión deformación con una ley cohesiva.

Cuando se quiere implementar un modelo continuo con ablandamiento en un elemento finito estándar a partir de el momento de la localización se puede relacionar la apertura de la fisura con la deformación mediante la expresión:  $dw = l^*d\varepsilon$  donde  $l^*$  (figura 3.6) es una medida del tamaño del elemento finito, luego la expresión de la disipación, ecuación (3.43), puede escribirse:

$$G_{Ic} = l^* \left( \int_0^{\varepsilon_c} \sigma(w) d\varepsilon - g_d \right) = l^* \int_{t_u}^{t_c} \Xi dt \quad (3.44)$$

siendo  $\varepsilon_u$  la deformación, en el instante  $t_u$ , en que el daño se localiza y  $\varepsilon_c$  las deformaciones, en el instante  $t_c$ , en que las tensiones residuales que transfieren las caras de la grieta son nulas.  $g_d$  es la densidad de energía disipada antes de la localización en un plano.

Esta aproximación, sugerida por Bažant y Oh [74], es conocida como el "crack band model" y es el procedimiento más utilizado para garantizar una disipación de energía correcta e independiente del mallado. Si, mediante una relación tangente negativa, se fuerza la localización del daño al iniciarse el régimen no lineal el modelo

es equivalente a la zona cohesiva ficticia de Hillerborg [26], al forzar la localización de las deformaciones una vez iniciado el daño es posible asociar el valor bajo un ensayo uniaxial con la energía crítica de fractura del material. La implementación de un modelo constitutivo con ablandamiento requiere que la ley se ajuste en función del tamaño de la discretización ( $l^*$ ). Esta considera que la grieta se presenta distribuida a lo ancho de todo el elemento finito. Nótese que si el tamaño del elemento finito es muy grande la relación tensión deformación (figura 3.6), puede producir "snap-back". Es decir que la respuesta vuelva atrás con lo que es imposible de implementar pues a una deformación dada le corresponden dos soluciones. La deformación máxima antes de la localización vale:  $\varepsilon_u$  y después:  $\varepsilon + w/l^*$  para evitar el "snap-back" una vez localizado el daño se debe cumplir:  $\varepsilon_u < \varepsilon + w/l^*$ , esta condición se puede especificar con energías de la siguiente manera: La densidad de energía elástica en el momento de la localización vale  $\Psi$ , si el comportamiento es lineal elástico:  $\Psi = \sigma_u^2/(2E)$ . En el momento de la fractura la energía elástica total almacenada en un elemento finito es proporcional al volumen según:  $\Psi(l^*)^3$ , y la energía que debe disipar el elemento al área según:  $G_c(l^*)^2$ , en el caso límite, que corresponde a una ley de ablandamiento vertical:  $\Psi l^* = G_c$ , si se considera una ley elástica hasta la fractura el tamaño máximo del elemento finito es:  $l^* = 2EG_c/\sigma_u^2$ .

El método de los elementos finitos tiene dificultad para la correcta descripción cinemática de una grieta. Se han detectado varios problemas al describir una función de apertura mediante el procedimiento del "Crack Band Model". 1) El tamaño característico del elemento finito depende de su orientación 2) Existe una tendencia de la grieta a progresar por las líneas del mallado pues corresponde con la fractura más frágil. 3) Existe un tamaño máximo para cada elemento finito obligando, a veces, al refinamiento excesivo del mallado y 4) los modelos de daño no escalares producen el bloqueo de algunos elementos, estando completamente dañados son capaces de transferir tensiones [55]. La descripción cinemática de una fractura modelada a partir de elementos continuos no son capaces de detectar una discontinuidad fuerte en el material. En el mejor de los casos esta será débil.

Para describir una grieta en el continuo es necesario reformular los elementos finitos para que estos sean capaces de describir con precisión una discontinuidad fuerte en el medio, los elementos finitos fueron pensados y desarrollados para la integración de ecuaciones diferenciales continuas y una grieta produce severas discontinuidades

en el material.

Los modelos cohesivos ofrecen una buena descripción cinemática del medio desde el momento que se definen elementos finitos especiales, su problema reside en que estos deben ser insertados previamente en el mallado en un conjunto de posiciones y orientaciones predefinidas por donde progresará la grieta. Algunos autores [75]–[77] han aprovechado el desarrollo de potentes malladores para redefinir la posición de los elementos de cohesión según la evolución de los estados tensionales. Una vez detectada la posición de la aparición y progresión de una grieta se vuelve a mallar la pieza y se sitúa un elemento de interfase en la posición apropiada. No obstante el remallar no es una solución rápida pues requiere solucionar el problema dos veces cada vez que se produce un avance de la grieta.

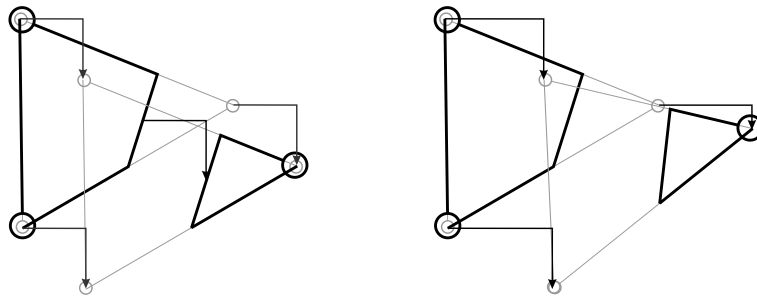


Figura 3.7: Elemento triangular de tres nodos con una discontinuidad fuerte, según EED, el salto se define igual para todos los nodos, y XFEM, el desplazamiento de los nodos es independiente.

La principal línea de investigación en la modelización de la fractura es el mejorar la mala descripción cinemática de los elementos finitos mediante el enriquecimiento de las funciones de forma con la adición de grados de libertad. Estos modelos consideran una ley entre las tensiones y las deformaciones hasta el instante que es detectada la localización del daño en un plano, luego reescriben la función mediante las tensiones y la apertura de la grieta. En este sentido destaca el "*Elements with Embedded Discontinuities*" (EED) [78]–[84] basado en el "*Enhanced assumed strain*" (EAS) [85] y el "*Extended Finite Elements*" (XFEM) [86]–[88] basado en el "*Partition of Unity Method*" (PUM) [89]. El EED añade un nodo para cada elemento finito mientras el XFEM dobla los nodos que se encuentran a los lados de la grieta. En la figura 3.7 se muestra la cinemática de un elemento triangular plano roto por el avance de una grieta según el EED y el XFEM, en el primer caso se muestra que



el grado de libertad se encuentra en el elemento y la forma del elemento deformado es igual en ambos lados de la grieta. No obstante, en el XFEM el desplazamiento de los tres nodos es independiente y las dos partes del elemento roto no tienen porque encajar. En el EED los elementos fracturados no dejan de estar acoplados mientras que el XFEM consigue, con mayor coste computacional, desacoplar las dos partes del elemento [90].

Durante los primeros estadios inelástico la relación tangente es positiva. A partir de cierto instante las deformaciones se localizan, para determinar este instante es necesario estudiar el determinante del tensor acústico ( $Q_{jk}$ ) [81], si este es definido positivo el daño aumenta a lo largo de todo el volumen, cuando deja de ser definido positivo se genera un plano donde se localiza el daño:

$$\det(Q_{jk}) = \det(n_i C_{ijkl}^T n_l) = 0 \quad (3.45)$$

donde  $C_{ijkl}^T$  es el tensor de rigidez tangente y  $n_i$  el vector normal al plano de fallo. Si por un vector  $n_i$  el determinante del tensor acústico no es definido positivo se genera un plano de fallo con normal  $n_i$ .

Una vez el tensor acústico deja de ser definido positivo las deformaciones y el daño se localizaran en un plano, de volumen nulo, y es necesario ajustar la ley en función de la apertura de la grieta, o en función del tamaño de la discretización.

Existen modelos que atacan el problema de la disipación nula en leyes tensión deformación definiendo limitadores de la localización de modo que la región dañada no se limita a un plano sino a un volumen de dimensiones finitas. Existen varios procedimientos para evitar que el daño se localice en un plano de cero volumen. Los modelos no locales abandonan la hipótesis de estado local, es decir el comportamiento de un punto deja de estar relacionado exclusivamente con su historia y también depende de la historia de los puntos adyacentes. Los modelos no locales introducen en la formulación un nuevo parámetro con dimensión de longitud, este realiza la función de limitador de la localización. La macrogrieta no tiende a localizarse en un plano de longitud nula, sino en un cierto volumen. Los calculistas consideran, para el hormigón, una longitud de zona de fallo aproximadamente tres veces mayor al diámetro máximo del agregado, aunque esta puede cambiar pues no sólo es función del material virgen sino del estado microestructural en cada instante [91].

Los modelos no locales se pueden diferenciar entre los de tipo integrativo [92]–[94]

y los gradiente [95]–[97], entre estos últimos están los explícitos y los implícitos. Para ilustrar estos modelos se define un simple modelo de daño escalar mediante un potencial de energía libre:  $\Psi = (1-d)\Psi_0$ , donde  $\Psi_0$  es la energía libre almacenada en un material virgen sometido a la misma deformación y  $d$  una variable escalar de daño. La relación constitutiva se puede escribir en función de la relación secante del material virgen ( $\mathbf{C}_0$ ) como:  $\sigma = (1-d)\mathbf{C}_0 : \varepsilon$ . La frontera entre el comportamiento elástico e inelástico la marca el criterio de activación:  $f(\varepsilon) - r(d) \leq 0$ . Este puede ser integrado explícitamente aplicando la condición de consistencia:  $r = \max_{s=0,t}(r_0, \max(f^s(\varepsilon)))$ . El daño,  $d(r)$ , se encuentra relacionado con la variable interna,  $r$  mediante una función monótonamente creciente entre 0 y 1.

**Modelos no locales de tipo integrativo** Los modelos no locales de tipo integrativo sustituyen algunas variables del modelo por su valor no local que tiene en cuenta el valor de la variable en cierto volumen. Dada una variable local  $f(\mathbf{x})$  en el punto  $\mathbf{x}$ , su componente no local  $\bar{f}(\mathbf{x})$  en el mismo punto se determina:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.46)$$

donde la función peso  $\alpha$  se encuentra definida alrededor del punto  $\mathbf{x}$  y se ajusta con un parámetro que considera la longitud de influencia no local, en materiales isotropos esta no depende de la orientación con lo que  $\alpha$  es función de la norma  $r = \|\mathbf{x} - \xi\|$  y está normalizada, esto es  $\int_V \alpha(\mathbf{x}, \xi) d\xi = 1$ . Si sólo una parte de  $\alpha$  se encuentra dentro del dominio esta debe ser normalizada para evitar valores demasiado bajos en los puntos cercanos al contorno. Según el parámetro de ajuste y la función peso elegida se modifica la distribución de las deformaciones en una zona de fallo continua, figura 3.5.a.

Es habitual en modelos de daño no locales el considerar como local la respuesta elástica y determinar las funciones de activación mediante medidas no locales. El modelo constitutivo no-local se reescribe modificando la función de activación mediante las variables no locales:  $\bar{f}(\varepsilon) - r(d) \leq 0$ . Evidentemente existen muchas otras posibilidades para definir el modelo no local. Por ejemplo:  $\bar{f}(\bar{\varepsilon}) - r(d) \leq 0$  o  $f(\bar{\varepsilon}) - r(d) \leq 0$ .

Para la implementación de un modelo integrativo no local debe realizarse una integración a lo largo del volumen del material lo que resulta difícil en códigos

de elementos finitos. Otra fuerte limitación de los modelos no locales es la alta densidad de la discretización requerida para detectar correctamente el perfil de las deformaciones en la zona de fallo.

**Modelos no locales de tipo gradiente explícitos** Los modelos no locales de tipo gradiente consideran las interacciones no locales en el espacio a partir del gradiente de las variables internas en un punto. Si se considera que el campo de variables internas es continuo y lo suficientemente derivable el valor de las variables puede ser expandido alrededor de un punto mediante series de Taylor:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_i - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y_i - x_i)(y_j - x_j) + \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k) + \dots \end{aligned} \quad (3.47)$$

Substituyendo la expansión de Taylor en la integral no local, ecuación (3.46), resulta:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + c_2 \nabla^2 f(\mathbf{x}) + c_4 \nabla^4 f(\mathbf{x}) + \dots \approx f(\mathbf{x}) + c_2 \nabla^2 f(\mathbf{x}) \quad (3.48)$$

si se considera que el punto  $\mathbf{x}$  se encuentra lo suficientemente alejado del contorno los términos impares se anulan debido a la simetría de la función  $\alpha$ . Las constantes  $c_i$  se relacionan con la longitud característica del material,  $c_2 = \frac{1}{2}\ell^2$ ,  $c_4 = \frac{1}{8}\ell^4 \dots$

Al añadir términos diferenciales en la ecuación constitutiva, normalmente sólo el término de segundo orden, se requiere de condiciones de contorno adicionales para que el sistema quede bien condicionado. Si el efecto no local es tenido en cuenta sólo en la parte inelástica las condiciones de contorno deben imponerse en la frontera que marca el volumen de material bajo régimen elástico e inelástico [94][95].

Para implementar el modelo es necesario que el campo de variables sea lo suficientemente derivable para mantener el laplaciano definido. Si sólo se consideran los dos primeros términos de la expresión (3.48) su implementación en elementos finitos debe realizarse mediante funciones de forma con continuidad  $C^1$ .

**Modelos no locales de tipo gradiente implícitos** Otra aproximación de la integral no local, ecuación (3.46), se puede derivar [95]–[97]:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) + c\nabla^2\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (3.49)$$

La variable no local ( $\bar{f}$ ) resulta de la solución de la ecuación diferencial de Helmholtz, por lo que estos modelos se conocen como implícitos. Contrariamente a los modelos cuya variable no local ( $\bar{f}$ ) se define explícitamente mediante la variable local ( $f$ ) y sus derivadas.

La solución de la ecuación (3.49) puede escribirse [95]:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.50)$$

siendo  $G(\mathbf{x}, \xi)$  la función de Green. Esta es la misma expresión que la integral no local, ecuación (3.46), con una función peso ( $\alpha$ ) determinada.

Los modelos de daño gradiente implícitos son un tipo concreto de modelo integrativo que proporciona ciertas ventajas al ser implementado en elementos finitos, pues no se requiere la integración de las variables internas en el volumen y puede utilizarse la solución de la ecuación (3.49).

**Regularización viscosa** Otra manera de limitar la localización de las deformaciones en un plano es introduciendo un parámetro viscoso en la formulación del modelo. Cuando un punto del material empieza a dañarse las deformaciones tienden a aumentar rápidamente con lo que la viscosidad entra en juego rigidizando el punto dañado, luego el crecimiento del daño se produce a lo largo de un volumen y se evita la disipación nula. Añadir viscosidad en un modelo constitutivo resulta relativamente fácil, no obstante obliga a la resolución de un problema dinámico. Además los parámetros referentes a la viscosidad no son propiedades intrínsecas del material y deben ser ajustados en cada simulación. Los modelos con viscosidad disipan una cantidad constante de energía en un estrecho margen, fuera de este los resultados no son independientes del mallado.



# Capítulo 4

## Modelización de los materiales compuestos

### 4.1. Introducción

El desarrollo de los materiales compuestos y su rápida mejora de prestaciones mecánicas y químicas esta provocando un aumento de su utilización en aplicaciones con requisitos estructurales. El objetivo del desarrollo de materiales compuestos es el de mejorar las prestaciones de los materiales de uso habitual, básicamente los metales, por su elevada densidad, su poca estabilidad a altas temperaturas y su mal comportamiento a fatiga.

La industria aeronáutica y aeroespacial tiene el reto de mejorar las prestaciones de los aviones y al mismo tiempo reducir los costes de certificación, emisión y peso. Estos objetivos pueden ser alcanzados mediante el aumento de la utilización de los materiales compuestos. Los materiales formados por fibras cerámicas y matriz polimérica son los mejores candidatos para la fabricación de fuselajes. La próxima generación de aviones civiles representan un importante reto para la fabricación y diseño de estructuras hechas en compuestos.

El procedimiento utilizado para el diseño de estructuras de materiales compuestos de altas prestaciones estructurales es un tema de enorme interés. La complejidad de la respuesta estructural de estos materiales y los distintos modos de fallo ocasionan la necesidad de definir un extenso programa de experimentación. La práctica recomendada para disminuir los riesgos tecnológicos asociados al uso de estos mate-

riales reside en probar las prestaciones y garantizar la durabilidad del diseño en una secuencia de pasos conocido como el "*Building Block Approach*" [2]. Éste verifica la consecución de los requisitos estructurales mediante la experimentación de un gran número de especímenes pequeños y baratos, una vez se ha llegado a un grado suficiente de conocimiento del comportamiento y a un diseño óptimo se utiliza este conocimiento adquirido para el diseño de piezas o estructuras más complejas. Ensayar directamente las estructuras sin haber adquirido este conocimiento previo de los distintos subcomponentes sería económicamente prohibitivo debido a la gran cantidad de subcomponentes y de casos de cargas a que debería someterse la estructura.

La aplicación de modelos analíticos o numéricos para predecir el comportamiento mecánico de las estructuras puede reemplazar parte de los ensayos experimentales requeridos por la estrategia del "*Building Block Approach*". Reduciendo los costes de diseño y proporcionando a los ingenieros la información necesaria para optimizarlos.

La mecánica del daño continuo con variables internas se presenta como la herramienta más prometedora para el análisis de estos nuevos materiales. La definición de modelos constitutivos para materiales anisótropos, como son la mayoría de compuestos, ofrece nuevas dificultades a las propias de cualquier definición constitutiva. La morfología del material induce una direccionalidad en el crecimiento de las grietas, es decir la orientación de las grietas no sólo depende de las cargas, la geometría y las condiciones de contorno sino también la naturaleza del material. La interfase entre las distintas fases, por ejemplo, entre fibra y matriz, acostumbra a ser la parte más débil del material, el daño empieza por la separación entre agregado y matriz. Además el proceso de fabricación de estos materiales requiere saltos térmicos, por ejemplo el curado de los polímeros, que inducen a un estado de tensiones residuales en el material. Ya sea a nivel de fibra y matriz (tensiones térmicas residuales micromecánicas) o a nivel de las distintas láminas en materiales laminados (tensiones térmicas residuales macromecánicas).

Debido a la clara diferencia de escalas y observando que los procesos inelásticos se encuentran regidos por procesos en los materiales componentes, una importante línea de investigación son los modelos en dos escalas. Estos definen una relación entre la mesoescala, donde el material es considerado homogéneo y se realiza el mallado de elementos finitos, y la microescala, la escala de los constituyentes, donde

se desarrollan los modelos constitutivos. Los campos de variables entre ambas escalas deben ser relacionados mediante un proceso de homogeneización [47][64][98][99]. Para reducir la enorme cantidad de cálculos se asume la periodicidad de la estructura del material.

Una alternativa para definir modelos constitutivos es el "mesomodeling". Los mesomodelos tratan la lámina [100]–[109] o el sublaminado [110] de compuesto como un solo material, el proceso de homogeneización se hace antes de definir el modelo. Estos modelos son muy útiles para la determinación de la falla total de la estructura, cuando el daño distribuido se localiza en un plano y se convierte en una macrogrieta la respuesta del material esta dominada por ésta y su capacidad de disipar energía, luego la morfología del material, el punto fuerte de las técnicas en dos escalas, pierde su decisiva importancia debido a la pérdida de periodicidad. En esas estructuras con capacidad de tener regiones con ablandamiento antes de perder la estabilidad estructural, es decir, estructuras con campos de tensiones no uniformes, los mesomodelos permiten un mejor tratamiento del daño.

## 4.2. Modos de daño en laminados multicapa

Se considera un material compuesto formado por fibras largas cerámicas unidireccionales (por ejemplo, de vidrio o carbono) en una matriz de un polímero termoestable (por ejemplo, epoxy). Si se ensaya una lámina unidireccional sin ninguna entalla bajo distintos estados de carga en el plano ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{12}$ ) el material falla de un modo y bajo unas tensiones determinadas. La unión de todos los puntos en que el material falla bajo distintos estados de tensión generan una superficie en el dominio de las tensiones conocida como criterio de fallo. En el interior de esta superficie están todos los estados tensionales que el material es capaz de sustentar sin perder su integridad estructural y fuera los que no. Existen diversos modos de fallo en los materiales compuestos, entiéndase como modo de fallo un conjunto de mecanismos de degradación que producen que el material se rompa de una u otra manera.

Considérese una lámina con las fibras orientadas en la dirección 1 (figura 4.1). Debido a la geometría del material existen cinco ensayos uniaxiales posibles, tracción y compresión en la dirección de las fibras ( $\sigma_{11}$ ) y en su dirección perpendicular ( $\sigma_{22}$ ), y ensayo a cortante puro ( $\sigma_{12}$ ). Bajo estos ensayos cada una de las tensiones de fallo



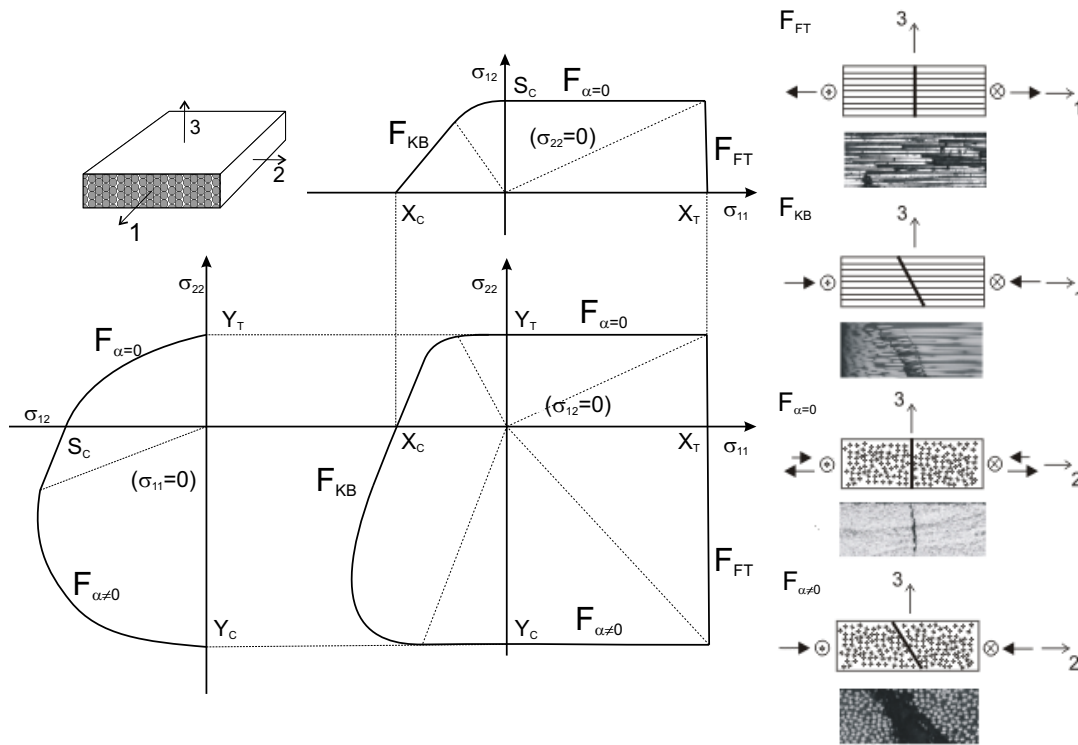


Figura 4.1: Superficie de daño para estados planos de tensiones. Se muestran los cuatro modos de fallo principales.

se representa;  $X_T$ ,  $X_C$ ,  $Y_T$ ,  $Y_C$  y  $S_L$  respectivamente. Las respectivas deformaciones de fallo se obtienen a partir de la ecuación constitutiva del material. Es razonable considerar que el comportamiento es lineal elástico hasta el fallo excepto cuando las cargas son cortantes ( $\sigma_{12}$ ) o a compresión transversal ( $\sigma_{22} < 0$ ) pues el material muestra una amplia región no lineal antes del fallo.

Existen, en las capas unidireccionales bajo tensiones en el plano, como mínimo cuatro modos de fallo claramente diferenciados. Estos se muestran en la figura 4.1, donde también se muestran, aproximadamente, los estados tensionales que activan cada uno de los modos,  $F_{\alpha=0}$ ,  $F_{\alpha \neq 0}$ ,  $F_{FT}$  y  $F_{KB}$ , en los planos  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{22}$ - $\sigma_{12}$ .  $F_{\alpha=0}$  y  $F_{\alpha \neq 0}$  son modos de fallo transversales o de la matriz mientras  $F_{FT}$  y  $F_{KB}$  longitudinales o de la fibra.

- **Modo de fallo  $F_{\alpha=0}$ :**

Bajo tracción transversal y cortante en el plano ( $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{12}$ ) el fallo se produce transversal a la lámina, ésta ocupa todo el espesor del laminado. Según el sistema de referencia de la figura 4.1 el vector normal del plano de fallo se escribe:  $\mathbf{e}_{F_{\alpha=0}} = (0, 1, 0)$ . Este modo de fallo ocurre con tracciones transversales y cortante en el plano, estados con elevados cortantes y valores moderados de compresión transversal producen un fallo con la misma orientación. Las compresiones transversales provocan un efecto beneficioso en la resistencia a cortante como muestran los resultados experimentales de Swanson [111][112].

- **Modo de fallo  $F_{\alpha \neq 0}$**

Aumentando la compresión transversal el ángulo de fallo  $\alpha$ , respecto a la perpendicular del laminado, deja de ser cero. Según Puck [113]–[115] bajo un ensayo a compresión puro el ángulo  $\alpha$  es aproximadamente de  $53^\circ \pm 3^\circ$ , si se aplica al mismo tiempo tensión cortante en el plano el ángulo disminuye progresivamente hasta aproximadamente  $40^\circ$ . Si el cortante en el plano es más importante el ángulo cambia a  $\alpha = 0^\circ$ . El vector normal al plano de fallo equivale a:  $\mathbf{e}_{F_{\alpha \neq 0}} = (0, \cos \alpha, \sin \alpha)$ .

Los mecanismos envueltos en el proceso de fallo a compresión puede ser explicado mediante el mismo modelo que Coulomb desarrolló en el siglo XVIII para geomateriales. El fallo viene promovido por el cortante en el plano de fallo y por la fricción producida por la tensión normal al plano de fallo, con la particularidad que la fricción en la dirección de las fibras es distinta que la fricción en la dirección perpendicular.

- **Modo de fallo  $F_{FT}$**

En los compuestos reforzados con fibras la mayor parte de las cargas son transferidas por éstas. Cuando fallan las cargas deben distribuirse hacia otras áreas de la estructura y pueden ocasionar el colapso estructural.

En compuestos con alta fracción volumétrica de fibras o que presenten una deformación última de la resina mayor que la de las fibras, como los compuestos carbon-epoxy, el fallo longitudinal empieza con fallos aislados de fibras en regiones donde estas presentan defectos. Estos fallos ocasionan el incremento

de carga de las fibras cercanas, estas tensiones son transferidas mediante tensiones cortantes entre la interfase y la matriz provocando el agrietamiento de la matriz, el deslizamiento entre fibra y matriz ("*debonding*") y, en matrices dúctiles, bandas plásticas a cortante. Incrementando más las cargas se dañan más fibras hasta alcanzar el colapso final.

El fallo longitudinal ocurre en ambos constituyentes, el daño ocurre en un plano cuya normal viene definida por el vector  $\mathbf{e}_{FFT} = (1, 0, 0)$ . Utilizar un simple criterio de máxima tensión o máxima deformación a lo largo de la dirección de la fibra para predecir el fallo ofrece una medida apropiada para el daño a tracción longitudinal.

■ **Modo de fallo  $F_{KB}$**

Cuando las tensiones dominantes son de compresión en la dirección de la fibra la capa acostumbra a fallar por la generación de una "*kink band*" como se muestra en la figura 4.2.b y c. Sin duda la fallo producido bajo compresión en dirección de las fibras es el modo de fallo más complejo que experimentan las capas unidireccionales [129]. La generación de una "*kink band*" es el modo más común en compuestos con fibras de vidrio o carbono pero no es el único modo de fallo. Pueden estos materiales fallar por otros motivos como por el pandeo de las fibras dentro la matriz ("*microbuckling*") o el fallo por aplastamiento de las fibras. Lo habitual es que todos estos mecanismos se encuentren secuencialmente presentes en el fallo del material.

Cuando las fibras se encuentran altamente confinadas por una matriz lo suficientemente rígida y su diámetro es lo suficientemente grande las fibras pueden romper por aplastamiento. Las fibras de aramida tienen una baja resistencia a compresión y son candidatas a romper por aplastamiento. No obstante, éste no es el modo de fallo habitual en compuestos unidireccionales.

El micropandeo de las fibras (o "*microbuckling*") consiste en la inestabilización geométrica de las fibras esbeltas dentro de una matriz elástica. Ésta parte del problema de la carga crítica de Euler que determina el momento en que el equilibrio de una barra sometida a compresión uniaxial pierde el equilibrio estable y se inestabiliza ante una perturbación.

Rosen [117] estudió el micropandeo de las fibras y consideró dos posibles inestabilizaciones, en fase, propios de compuestos con alta fracción volumétrica de fibras, y en desfase, propias de baja fracción volumétrica de fibras, en la figura 4.2.a se muestran los modos de pandeo identificados por Rosen. Éste propuso un criterio de fallo para el modo en fase:  $X_C = G_m/v_m \approx G_{12}$ , donde  $G_m$  es el módulo a cortante de la matriz,  $v_m$  la fracción volumétrica de la matriz,  $G_{12}$  es la rigidez cortante en el plano. Han aparecido muchas modificaciones para mejorar el ajuste experimental del modelo de Rosen, añadir plasticidad perfecta al comportamiento de la matriz y defectos de producción, desalineación de las fibras, para obtener mejores ajustes experimentales.

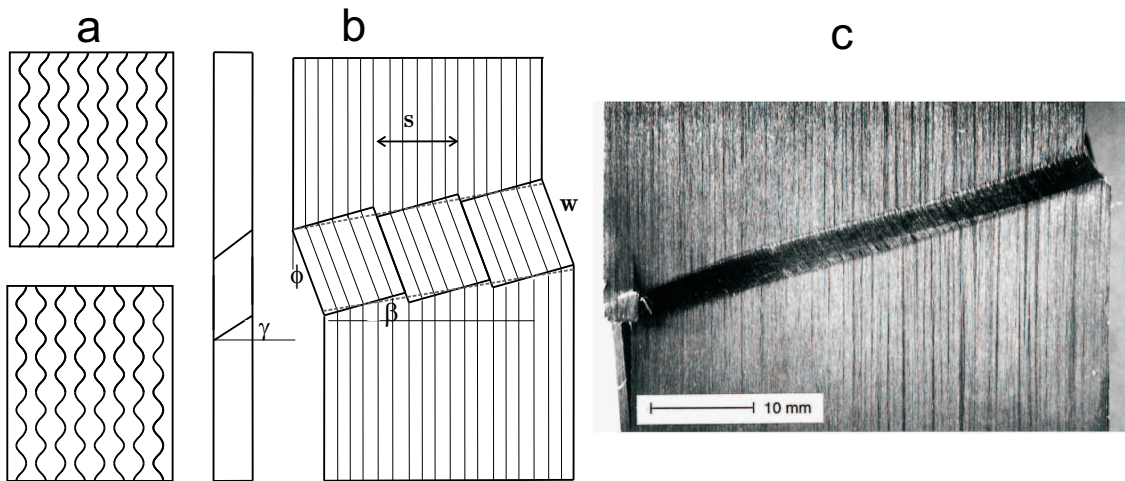


Figura 4.2: a) Micropandeo de las fibras dentro la matriz en fase o "shear" y en desfase o extensional, b) Geometría de una "kink band", c) Imagen de Vogler [122]

Una "kink band" (figura 4.2.b y c) corresponde al último estadio de daño longitudinal a compresión. Hahn [118] estudió experimentalmente el ángulo y el grosor de una "kink band" en compuestos con fibras de carbono, vidrio y aramida. A temperatura ambiente las fibras de carbono rompían a un ángulo  $\beta \approx 20^\circ$  y  $w \approx 0,07 - 0,2$  mm. En las probetas de vidrio no se distinguía, a temperatura ambiente, una "kink band" pero aumentando la temperatura a  $100^\circ\text{C}$  se formaba una con  $\beta \approx 30^\circ$  y  $w \approx 1,2$  mm. En las fibras de aramida se formaba, a temperatura ambiente, a un ángulo  $\beta \approx 40^\circ$  y con un espesor de  $w \approx 0,45$  mm. Una característica geométrica importante, como notó Chaplin [119], es que se mantiene la relación (figura 4.2.b),  $2\beta = \phi$  con lo que no

se produce cambio volumétrico al generarse una "kink band". La dirección normal a la banda puede representarse mediante el vector director  $\mathbf{e}_{FKB} = (\cos \beta \cos \gamma, \sin \beta \cos \gamma, \cos \beta \sin \gamma)$ , cómo se muestra en la figura 4.2.

Existe cierta polémica sobre si la formación de una "kink band" es un mecanismo de fallo por si solo o el último estadio del micropandeo [120][121]. Si se considera que la "kink band" es promovido por un estado de micropandeo como muestran la figura 4.2.a, se debería esperar que el plano de fallo fuera normal a la dirección de las fibras ( $\beta = 0^0$ ) pues es donde se encuentra el flector máximo sobre la fibra, análisis experimentales de Potter (1984) indican que si la matriz es capaz de experimentar ablandamiento se puede provocar este fallo, el lo hizo analizando materiales a altas temperaturas. Por otro lado el fallo a cortante, como la propuesta de Coulomb, debería ser a un ángulo, como mínimo de  $\beta = 45^0$  o más si se considera la fricción entre las caras. No obstante la geometría de una "kink band" no se parece a ninguna de las dos opciones, el proceso de fallo es más complejo [121]-[124].

Los tres mecanismos básicos de fallo que se presentan las bandas son: fractura de las fibras provocadas por una excesiva rotación. En los dos planos descrito por  $\beta$  y separados una distancia  $w$  se produce un fallo, la normal de este plano determina la inclinación global de la "kink band". Además, a lo largo de la banda, en dirección perpendicular a las fibras, normal a  $\phi$  la matriz se agrieta cada cierta distancia  $s$  [125].

Probablemente el proceso de formación de una "kink band" se inicie por la desestabilización o excesiva rotación de una fibra inicialmente desalineada. Esto produce que la interfase y la matriz deban transferir grandes tensiones cortantes que promueven el daño [126][127], la separación de componentes y la fracturación de la matriz. Este agrietamiento crece a lo largo de dos bandas inclinadas un ángulo  $\beta$ . En estas bandas las fibras experimentan elevadas rotaciones y muchas rompen. No obstante son las fibras las que impiden que las caras de la grieta deslicen a cortante y fuerzan la rotación, esto provoca que cada cierta distancia  $s$  aparezcan grietas en la matriz, figura 4.2.b.

Argon [128] fue el primero en considerar que el daño era promovido por cierta desalineación inicial ( $\varphi^0$ ) de las fibras. Luego sometido a compresión longitu-

dinal aparece una tensión cortante entre la fibra y la matriz que promueve el fallo. Argon considera la relación:

$$X_C = \frac{S_L}{\varphi^0} \quad (4.1)$$

donde  $S_L$  es la resistencia cortante en el plano. Budinasky [129] extendió el modelo de Argon:

$$X_C = \frac{S_L}{\varphi^0 + \gamma^u} \quad (4.2)$$

donde  $\gamma^u$  es la deformación cortante última, cuando la desalineación es nula la propuesta corresponde al modelo de micropandeo de Rosen. El criterio de fallo LaRC04 [124] utiliza esta misma idea para determinar el inicio del fallo, con la mejora que considera que el ángulo de desalineación inicial varía según las cargas.

### 4.2.1. Criterios de fallo para láminas

Los criterios de fallo para láminas determinan mediante un conjunto de funciones todos los puntos que definen la falla de la lámina. Los criterios utilizan una o varias funciones para describir la superficie de fallo, los criterios con una sola función acostumbra a ser ajustes polinomiales a un conjunto de datos experimentales como los criterios de Tsai-Hill o Tsai-Wu [130]. Cuando se utiliza más de una función se está describiendo un conjunto de modos de fallo y asignando una función a cada uno de estos modos. Estos criterios, conocidos como de fallo combinado, acostumbra a considerar, en menor o mayor grado, la micromecánica de los distintos modos de fallo, entre ellos destacan los criterios de Puck [113]–[115], Hashin [131][132], el LARC03/4 [123][124] y los más simples de máxima tensión o deformación.

- **Criterio de Tsai-Wu**

El criterio de Tsai-Wu [130] representa el criterio de activación polinómico más general para un material ortótropo y consta de 12 parámetros independientes, en caso de anisotropía general de 27, éste se puede expresar mediante un tensor de segundo orden simétrico y uno de cuarto con simetría mayor y menor,

en notación ingenieril se pueden representar como un vector y una matriz simétrica:

$$f(\sigma) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} < 1 \quad (4.3)$$

si se asume que el material es transversalmente isótropo los coeficientes  $f_2 = f_3$ ,  $F_{12} = F_{13}$ ,  $F_{22} = F_{33}$ ,  $F_{55} = F_{66}$  y  $F_{44} = (F_{22} - F_{23})/2$  resultando 7 parámetros independientes. Conociendo los cinco límites uniaxiales estos parámetros se ajustan:

$$f_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}; \quad f_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}; \quad F_{11} = \frac{1}{X_T X_C}; \quad F_{22} = \frac{1}{Y_T Y_C}; \quad F_{66} = \frac{1}{S_L^2}$$

restando  $F_{12}$  y  $F_{23}$  que modifican la forma de la superficie, se acostumbra a considerar  $F_{12} = -0,5/X_T^2$  o  $F_{12} = -0,5/\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}$ ,  $F_{23}$  no interviene en problemas planos. Bajo esta misma expresión polinomial otros autores han definido distintos criterios Tsai-Hill [133][134], Azzi-Tsai [135], Hoffman [136], Chamis [137], etc.

El criterio de Tsai-Wu se define con una sola superficie sin considerar los distintos, y evidentes, modos de fallo que presenta un material compuesto, resulta un ejercicio de ajuste polinomial más que la deducción micromecánica de la activación de un conjunto de procesos inelásticos. Otros modelos denominados genéricamente de fallo combinado se han desarrollado para la determinación del fallo de láminas en compuestos. Éstos definen una o varias superficies de daño para cada mecanismo considerado.

- **Criterio de máxima tensión y criterio de máxima deformación**

Considera que el material falla cuando la deformación o la tensión máxima en una dirección alcanza su valor umbral. Estos criterios no consideran interacción entre los distintos términos de las deformaciones o las tensiones. En un material con el coeficiente de poisson nulo ambos criterios serían coincidentes.

Estos criterios se parametriza mediante cinco valores calculados mediante ensayos uniaxiales:  $X_T$ ,  $X_C$ ,  $Y_T$ ,  $Y_C$  y  $S_L$  o las respectivas deformaciones.

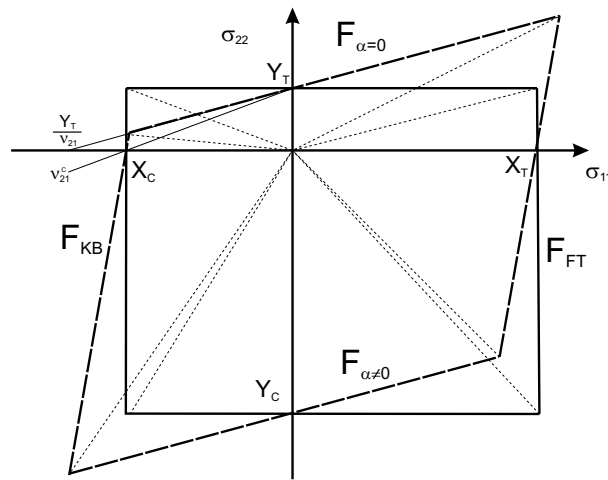


Figura 4.3: Criterio de máxima tensión y máxima deformación en el plano  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ . Se muestra el coeficiente de Poisson crítico  $\nu_{12}^C$  a partir del cual el criterio de máxima deformación es inconsistente.

Hart-Smith [138] notó que el criterio de máxima deformación puede ser inconsistente en algunos casos. Considere que aplicamos a una lámina unidireccional una tensión longitudinal a compresión tal que el material esté a punto de romper:  $\sigma_{11} = -X_C$ . Esto provoca una expansión transversal debido al coeficiente de Poisson:  $\varepsilon_{22} = \nu_{21}X_C/E_2$ . Según el criterio de máxima deformación la matriz estará rota si:  $\varepsilon_{22} \geq Y_T/E_2$ . Luego si las propiedades de la lámina cumplen la siguiente desigualdad:  $\nu_{21} > Y_T/X_C$  el criterio indicará que en un ensayo uniaxial a compresión longitudinal el material fallará a tracción de la matriz, y que los propios resultados experimentales no son bien representados. En la Figura 4.3 se muestra el valor del coeficiente de Poisson crítico:  $\nu_{21}^C = Y_T/X_C$ . Debido a su simplicidad estos dos criterios, máxima tensión y máxima de-



formación, junto con los polinomiales, son los más utilizados en la industria [139].

■ **Criterio de Hashin-Rotem**

El criterio de Hashin-Rotem [131] desarrollado inicialmente para laminados UD bajo cargas cíclicas a tracción considera que el material no fallará mientras se cumplan las siguientes desigualdades:

$$\frac{|\sigma_{11}|}{X_T} < 1 \quad ; \quad \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_L}\right)^2 < 1 \quad (4.4)$$

este criterio determina el fallo de la fibra ( $F_{FT}$ ) y de la matriz ( $F_{\alpha=0}$ ) a tracción mediante dos funciones independientes.

Posteriormente Hashin [132] amplió el criterio para tener en cuenta los modos de fallo a compresión ( $F_{KB}$  y  $F_{\alpha \neq 0}$ ) y las componentes de las tensiones fuera del plano. Bajo tensiones en el plano este criterio se puede escribir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_L}\right)^2 < 1 & \quad \text{si } \sigma_{11} > 0 \\ -\sigma_{11} < X_C & \quad \text{si } \sigma_{11} < 0 \\ \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_L}\right)^2 < 1 & \quad \text{si } \sigma_{22} > 0 \\ \left(\frac{\sigma_{22}}{S_T}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_L}\right)^2 < 1 & \quad \text{si } \sigma_{22} < 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

siendo  $S_T$  la resistencia a cortante en el plano 23. Esta última aproximación es capaz de describir los mecanismos básicos de fallo, exceptuando la formación de una "kink band". Los complejos mecanismos que inducen al fallo longitudinal a compresión dependen de las tensiones cortantes así como el confinamiento de las tensiones transversales.

■ **Criterio de Puck**

La principal introducción del planteamiento de Puck [113]–[115] se encuentra en la manera de tratar el fallo transversal a compresión. Partiendo de la idea de Coulomb introduce el concepto del "action plane" para determinar el fallo

a compresión transversal, determinando el ángulo ( $\alpha$ ) en que romperán. Al mismo tiempo justifica el hecho que este provoque un fallo catastrófico en el compuesto, ya que promueve la delaminación y el pandeo de las láminas adyacentes.

Puck incorpora leyes no lineales en el comportamiento del material para la determinación de la respuesta del laminado.

#### ■ Criterio LaRC03/04

Como el criterio de Puck, el LaRC03 [123] y el LaRC04 [124] parten de un profundo estudio micromecánico de los distintos procesos envueltos en cada mecanismo de fallo.

Sus principales novedades residen en la incorporación de propiedades *"in-situ"* (la resistencia transversal de una lámina varía en función de las características elásticas de todo el laminado), este efecto puede ser tratado mediante la mecánica de la fractura.

Otra mejora respecto a los modelos existentes es el tratamiento del fallo longitudinal a compresión. El criterio considera que el fallo es promovido por la matriz y la interfase fibra-matriz provocando el pandeo de las fibras. Parte de la idea propuesta por Argon [128] según la cual el fallo es promovido por una desalineación inicial de las fibra. Este ángulo inicial se ve variado por las cargas. El criterio se escribe con las tensiones escritas en el sistema de coordenadas definido por las fibras desalineadas.

El LaRC03 [123] sólo tiene en cuenta las tensiones en el plano mientras la versión LaRC04 [124] permite tener en cuenta estados tridimensionales de tensiones.

Existen un sinnúmero de criterios para la determinación del fallo de láminas unidireccionales, Christensen [140][141], Cuntze [142][143], Hart-Smith [138][144][145]. Un estudio más exhaustivo puede encontrarse en [146]–[148].

Debido al gran número de criterios de fallo M.J. Hinton, A.S. Kaddour y P.D. Soden realizaron un ambicioso proyecto para evaluar los distintos criterios de daño mediante un conjunto de ensayos y comparaciones. Éste se conoce como el *"World*

*Wide Failure Exercise (WWFE)*” expuestos en [149]–[152] y cuya participación se resume en las publicaciones [153] y [154].

#### 4.2.2. Fallo del laminado

Es un procedimiento habitual considerar el fallo del laminado a partir del conocimiento del comportamiento de láminas unidireccionales. No obstante la aparición de algunos modos de daño es función del conjunto de capas del laminado, además una vez iniciado el daño en una lámina se produce un fenómeno de reordenación de tensiones entre las distintas capas. La determinación del fallo del laminado no es sólo cuestión de las propiedades de las distintas capas, éstas interaccionan, a veces evitando la propagación de modos de fallo, otras provocándolos. Además existe un modo propio de daño de laminados como la separación de las distintas capas.

La delaminación es un modo de daño propio de los laminados multicapa. La interfase entre capas con distinta orientación deben transferir importantes cortantes que provocan la separación de las láminas. Los modelos cohesivos [72][73] son idóneos para su tratamiento numérico pues el plano de la grieta se encuentra perfectamente definido.

Si se ensaya una probeta casi-isótropa sin ninguna entalla a tracción se observarán grietas en la matriz, en primer lugar de las láminas perpendiculares a las tensiones principales, luego a las oblicuas, se presenta de manera distribuida, posteriormente las capas se separan. No obstante, la máxima fuerza se alcanza en el momento que fallan las fibras. Si se ensaya el mismo material a compresión al iniciarse el primer modo de fallo acostumbra a ser el momento de máxima fuerza que sustenta la lámina.

Es común considerar que el único modo de fallo no catastrófico es el agrietamiento de la matriz bajo tensiones o cortante en el plano ( $F_{\alpha=0}$ ) y que, en una probeta con distribución uniforme de tensiones, al activarse uno de los otros criterios ( $F_{FT}$ ,  $F_{KB}$  o  $F_{\alpha \neq 0}$ ), el material pierde la estabilidad bajo carga constante.

Es un fenómeno bien conocido que la aparición del agrietamiento de la matriz ( $F_{\alpha=0}$ ) es función del laminado en que se encuentra embebido. Este hecho se conoce como resistencia *”in-situ”* y algunos criterios como el LaRC03 [123] ya incorporan la dependencia de la resistencia de la capa en función de su espesor y ubicación en el laminado. Los valores de las resistencias *”in-situ”* ( $Y_T^{is}$  y  $S_L^{is}$ ) son mayores que la de los laminados unidireccionales, su determinación se tratará en el siguiente capítulo.

Al agrietarse la matriz las cargas que anteriormente eran sustentadas por esta deben ser transferidas a cortante por la interfase donde se inicia la delaminación. El campo de tensiones en las otras capas que deben sustentar las cargas de la capa fracturada presenta una elevada concentración de tensiones que promueven el daño de las otras capas, como muestra la figura 4.4.

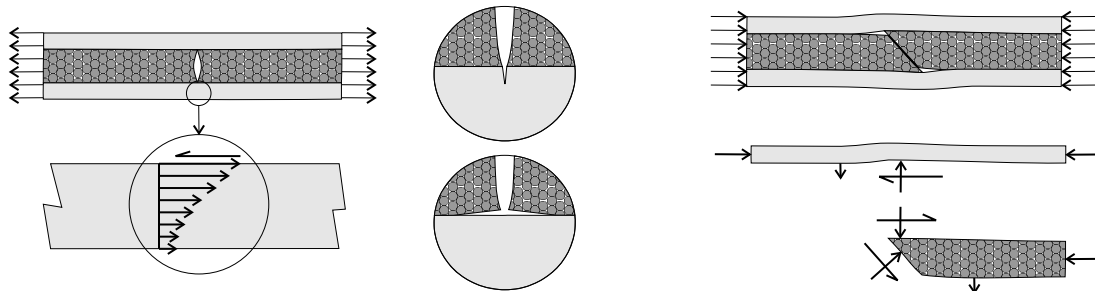


Figura 4.4: Un laminado multicapa sometido a tracción con la matriz agrietada ( $F_{\alpha=0}$ ), el campo de tensiones provoca delaminación y promueve el daño de las capas adyacentes. Si se somete a compresión el daño transversal a compresión ( $F_{\alpha \neq 0}$ ) promueve la pérdida de estabilidad de todo el laminado.

Bajo cargas a compresión la matriz se agrieta a cierto ángulo de las tensiones principales, como indican el criterio de Puck y el LaRC03 desarrollados a partir de la idea de Coulomb. No obstante, en la Figura 4.4 se puede observar que, 1) el fallo de la matriz provoca el fallo de todo el laminado, y 2) el deslizamiento de las caras de la grieta depende del confinamiento de las láminas externas, con lo cual el criterio de daño de la matriz a compresión debe tener en cuenta las propiedades de todo el laminado.

Hart-Smith [138][144][145] considera que las capas embebidas aumentan la resistencia transversal, tanto a compresión como a tracción. Por otro lado, Puck [113]–[115] indica que el fallo a compresión de la matriz provoca el fallo catastrófico de todo el laminado debido a la delaminación y al pandeo de las capas adyacentes.

La utilización de un criterio de fallo definido para una lámina unidireccional no tiene porque ser un indicador preciso para la determinación de la progresión del daño debido al fuerte acoplamiento entre el daño de distintas capas. Por otro lado es necesario tener herramientas y modelos que permitan predecir el comportamiento mecánico del laminado a partir de las propiedades de una lámina unidireccional, evitando así el ensayo del material cada vez que se modifica la secuencia de apilamiento

de las distintas capas.

### 4.3. Mesomodelos

Como mesomodelos entendemos esos modelos que tratan la lámina como un sólo material homogéneo y definen la relación constitutiva y las variables internas sobre todo el espesor de cada capa. En la definición de estos modelos se realiza un proceso de homogeneización del comportamiento de las distintas fases en un volumen que ocupa todo el espesor de la capa. Se acostumbra a considerar un conjunto de mecanismos de fallo del compuesto y a definir las variables de estado que describan estos fenómenos. Las láminas unidireccionales acostumbran a fallar en dos planos bien determinados, fallo transversal, o de la matriz y fallo longitudinal o de las fibras, lo que permite una descripción del daño relativamente simple con un conjunto de variables escalares asociadas a cada dirección. Todos ellos consideran una variable escalar de daño para las fibras ( $d_1$ ) y otra para la matriz ( $d_2$ ), para tratar el cortante algunos autores prefieren definir una variable interna nueva desacoplada con las otras, opción si bien numéricamente más simple físicamente poco razonable, y otros definen el daño a corte a partir de una combinación de las dos anteriores, mediante las expresiones propuestas en la ecuación (3.8) u otras. Se considera que las variables internas adquieren un valor constante a lo largo del espesor de cada capa. Todos estos modelos están desarrollados para ser implementados con la cinemática de la teoría de cáscaras.

Los mesomodelos utilizan criterios de activación del daño descritos para determinar el fallo de capas unidireccionales. A pesar de la amplia bibliografía sobre criterios de fallo en láminas, algunos presentados en la sección anterior, el reciente ejercicio WWFE ("*World Wide Failure Exercise*") [149]–[154] pone de relevancia la incapacidad de los criterios desarrollados hasta el momento para determinar la carga de fallo. Además estos criterios muestran una inmensa variabilidad, en parte debido a que muchos modos de fallo aún no son lo suficientemente bien entendidos.

Para que un mesomodelo sea capaz de determinar la capacidad estructural debe considerar unos requisitos mínimos, estos pueden resumirse en:

- Seleccionar un conjunto de variables internas que determinen con precisión los distintos mecanismos de daño que sufrirá la estructura bajo su historia de

cargas.

- Considerar como los distintos modos de fallo afectan el tensor de rigidez y el posible cierre de grietas bajo cargas a compresión.
- Determinar con precisión el inicio del daño mediante un acurado criterio de fallo que determine el inicio de cada mecanismo de daño.
- Garantizar una disipación no negativa bajo cualquier ciclo de cargas. La termodinámica de los procesos irreversibles ofrece un marco para garantizar la consistencia termodinámica.
- Tener en cuenta las tensiones residuales térmicas a que se encuentran sometidos los laminados multicapa en el proceso de fabricación.
- El modelo debe ajustarse mediante propiedades estándares obtenidas mediante experimentos estandarizados, como por ejemplo la resistencia y energía crítica de fractura de los estándares ASTM (*American Society for Testing and Materials*) [155]–[158].
- Las propiedades deben ser obtenidas de análisis en capas unidireccionales para evitar ajustar el modelo cada vez que se cambia la secuencia de apilamiento. El modelo debe incluir el efecto entre la interacción de las distintas capas, éstas deben ser deducidas a partir del estudio micromecánico.
- El modelo constitutivo debe tener en cuenta la correcta disipación de energía y la independencia del resultado frente la malla de elementos finitos utilizada. Este problema, inducido por la localización, es complejo al utilizar la cinemática de los elementos cáscara.

A pesar de las restricciones termodinámicas la definición de modelos de daño para láminas permite bastante flexibilidad con lo que se encuentran varios modelos constitutivos que, a pesar de describir el mismo fenómeno en los mismos materiales, poco se parecen.

Los mesomodelos tienen en común que fueron desarrollados para la modelización numérica del daño de materiales compuestos laminados. Algunos de ellos incorporan

plasticidad para modelar las deformaciones permanentes que aparecen en estos materiales sobretodo bajo cargas a cortante en el plano. No se pretende aquí hacer una lista exhaustiva de todos los modelos para la predicción de la respuesta no lineal de estos materiales sino comentar los que se consideran más destacados o utilizados.

### 4.3.1. Método del "*Ply discount*"

El "*Ply discount method*" [159][160] consiste en una primera aproximación al tratamiento del daño, más que un modelo constitutivo en si mismo consiste en un conjunto de recetas a partir de las cuales describir el comportamiento no lineal del material.

Tomando un criterio de fallo combinado, por ejemplo, el de máxima tensión o deformación, que describan un conjunto de mecanismos de daño como los determinados anteriormente, esto es  $F_{FT}$ ,  $F_{KB}$ ,  $F_{\alpha=0}$  y  $F_{\alpha\neq 0}$ . Estos modos de daño producen una fractura cuya normal, en el plano del laminado, puede ser representada mediante los vectores directores:  $e_{F_{FT}} = (1, 0)$ ,  $e_{F_{KB}} \approx (1, 0)$ ,  $e_{F_{\alpha=0}} = (0, 1)$  y  $e_{F_{\alpha\neq 0}} = (0, 1)$ . Se puede considerar que estas grietas producirán una disminución de las propiedades elásticas relacionadas con las direcciones de fallo. Así, los modos de fallo propios de la fibra,  $F_{FT}$  y  $F_{KB}$ , producirán una disminución de la rigidez de las propiedades  $E_1$  y  $G_{12}$ , mientras los modos de fallo de la matriz,  $F_{\alpha=0}$  y  $F_{\alpha\neq 0}$ , de las propiedades  $E_2$  y  $G_{12}$ .

Para cualquier evolución los coeficiente de Poisson deben mantener la igualdad:  $\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1$ . Una solución utilizada es que ambos coeficientes tengan un valor nulo al activarse cualquier criterio, otra posibilidad es considerar que  $\nu_{12}$  depende del daño en la fibra y  $\nu_{21}$  en la matriz.

Cuando se activa un criterio de fallo el método del "*ply discount*" varia el valor de la rigidez asociada a cada modo de fallo a un valor nulo o muy pequeño. Este procedimiento produce una ley constitutiva lineal elástica hasta el fallo momento en que se produce una caída repentina de las tensiones.

Si la energía libre complementaria en un material ortótropo bajo cargas en el plano y condiciones isoterma puede expresarse mediante la expresión:

$$G = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{2E_2} - \frac{\nu_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}}{E_1} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} \quad (4.6)$$

Para garantizar la disipación positiva de energía considérese que en un momento determinado se activa cualquier de los criterios, a deformación constante, la energía disipada para cada proceso equivale a:

$$\Delta G_{FT,KB} = (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} \quad ; \quad \Delta G_{\alpha} = (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{\sigma_{22}^2}{2E_2} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} \quad (4.7)$$

Estas expresiones corresponden a la densidad de energía disipada en el proceso de daño, se considera que el coeficiente de Poisson menor ( $\nu_{12}$ ) depende del daño en la fibra y el mayor ( $\nu_{21}$ ) del daño en la matriz. Las expresiones siempre son definidas positivas con lo que se garantiza una disipación positiva de energía.

Si se activa un modo de fallo no catastrófico, como el agrietamiento transversal  $F_{\alpha=0}$ , el método del "ply discount" resulta en una excesiva disminución de las propiedades elásticas. A partir del análisis micromecánico del agrietamiento puede relacionarse el daño con la densidad de grietas y éstas con los estados tensionales que provocan su aparición, estos modelos, así como los resultados experimentales muestran una disminución progresiva y no brusca de la rigidez, este tema se tratará en el capítulo siguiente. Si, por otro lado, se activa un modo de fallo catastrófico las deformaciones se localizaran en una línea de elementos finitos definiendo una grieta en todo el espesor. Esto produce que la solución no sea objetiva, es decir la solución depende de la discretización. Si se iguala la variación de energía elástica almacenada un elemento finito en el momento de activarse un modo de fallo,  $\Delta G_i V_{\text{elemento}}$ , con la correspondiente energía crítica de fractura del material por el área fracturada del elemento,  $G_C A_{\text{fracturada}}$ .

$$\Delta G_i l^* = G_C \quad (4.8)$$

donde  $l^*$  es la longitud del elemento finito en la dirección normal de la grieta  $\mathbf{e}_i$ . La tenacidad de la estructura sólo será correctamente determinada cuando el tamaño característico del elemento finito mantenga la igualdad (4.8). Si el tamaño de los elementos finitos es mayor el modelo disipará una energía excesiva resultando en un comportamiento más dúctil y si el tamaño es más pequeño la estructura modelada resultará más frágil.



### 4.3.2. Modelo de Matzenmiller *et al.*

Matzenmiller *et al.* [100] define la energía libre complementaria mediante la expresión:

$$G = \frac{1}{2E_1} \left( \frac{\langle \sigma_{11} \rangle^2}{1 - d_{1+}} + \frac{\langle -\sigma_{11} \rangle^2}{1 - d_{1-}} \right) - \frac{\nu_{12} \sigma_{22} \sigma_{11}}{E_1} + \frac{1}{2E_2} \left( \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{1 - d_{2+}} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle^2}{1 - d_{2-}} \right) + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}(1 - d_6)} \quad (4.9)$$

donde las variables internas que representan el daño son,  $d_{1\pm}$  para la fibra y  $d_{2\pm}$  y  $d_6$  para la matriz. El signo  $\pm$  hace referencia al daño a tracción o compresión.

La relación de flexibilidad secante se escribe:

$$H = \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1 - d_1) E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{(1 - d_2) E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1 - d_6) G_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La disipación puede escribirse mediante la expresión:

$$\Xi = Y_1 \dot{d}_1 + Y_2 \dot{d}_2 + Y_6 \dot{d}_6 \geq 0 \quad (4.11)$$

donde ( $Y_i$ ) son las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño ( $Y_i = \partial G / \partial d_i$ ). Una particularidad de estas fuerzas termodinámicas es que éstas siempre son definidas positivas, luego si la variable de daño es monótonamente creciente la disipación nunca es negativa.

$$Y_{1\pm} = \frac{\sigma_{11}^2}{2(1 - d_{1\pm})^2 E_1} \quad ; \quad Y_{2\pm} = \frac{\sigma_{22}^2}{2(1 - d_{2\pm})^2 E_2} \quad ; \quad Y_6 = \frac{\sigma_{12}^2}{2(1 - d_6)^2 G_{12}} \quad (4.12)$$

Como superficie de activación del daño el modelo utiliza el criterio de Hashin, éste se puede escribir en función de las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño como:

$$F_{f\pm} = 2 \frac{E_1}{X_{C,T}^2} Y_{1\pm} - r_{1\pm} \leq 0 \quad ; \quad F_m = 2 \frac{E_2}{Y_{C,T}^2} Y_{2\pm} + 2 \frac{G_{12}}{S_L^2} Y_6 - r_2 \leq 0 \quad (4.13)$$

donde  $r_{1\pm}$  y  $r_2$  son tres variables internas que determinan la evolución del dominio elástico, éstas tienen el valor 1 para el material virgen y aumentan con las cargas. En el fallo transversal ( $r_2$ ) el dominio elástico crece de igual modo a tracción que a compresión para evitar que aparezca un salto en la superficie de activación.

Para determinar la evolución de las variables de daño es necesario definir una función de crecimiento ( $\bar{\gamma}_i$ ) y determinar la dirección mediante un potencial de evolución ( $Q_i$ ). En el artículo [100] proponen dos, uno de lineal y otro de cuadrático respecto a las fuerzas termodinámicas conjugadas ( $Y_i$ ). Este potencial mantiene convexidad respecto al origen. Es decir, cualquier línea recta que una el origen con un punto cualquiera de la superficie no la cruza. La evolución del daño se puede escribir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{d}_{1\pm} \\ \dot{d}_{2\pm} \\ \dot{d}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{1\pm} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial Y_{1\pm}} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial Y_{2\pm}} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial Y_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial F_f}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial F_f}{\partial \varepsilon_{12}} \end{bmatrix} + \\ &+ \bar{\gamma}_{2\pm} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_2}{\partial Y_{1\pm}} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial Y_{2\pm}} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial Y_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial F_m}{\partial \varepsilon_{12}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde las funciones de crecimiento deben ser elegidas. Matzenmiller [100] propone:  $\bar{\gamma}_{1\pm} = \alpha_{11\pm} Y_{1\pm}^{n_{11\pm}}$  y  $\bar{\gamma}_{2\pm} = \alpha_{22\pm} Y_{2\pm}^{n_{22\pm}} + \alpha_{12} Y_6^{n_{12}}$ . Los valores de  $n_i$  y  $\alpha_i$  deben ser ajustados a partir de ensayos experimentales sobre el material a modelar. Para determinar el crecimiento de las variables pasivas el modelo escala el crecimiento de las activas, es decir, si evoluciona la variable a tracción ( $d_{i+}$ ), la evolución de la variable a compresión se puede determinar  $\dot{d}_{i-} = q_{\pm} \dot{d}_{i+}$ , siendo  $q_{\pm}$  un parámetro entre 0, cuando la recuperación de la rigidez es total al dañar a tracción, y 1 cuando no existe recuperación de rigidez al comprimir.

Las variables de daño se encuentran definidas entre 0 y 1. Una vez activado el daño, ecuaciones (4.13), éste evoluciona siguiendo las leyes de evolución, ecuación (4.14), hasta alcanzar el valor de uno. Para que el daño tienda asintóticamente

a éste valor puede definirse el valor de  $\alpha$  de las funciones de crecimiento como:  
 $\alpha = (1 - d)\alpha_0$ .

Este modelo se desarrolla en un riguroso marco termodinámico. No obstante, la identificación del modelo no es simple, la cualitativa, la selección de potenciales de evolución es un tema complejo que debería definirse a partir de modelos micro-mecánicos o experimentos, y la cuantitativa, el ajuste de estas leyes no se realiza a partir de ensayos estandarizados. Para terminar el trabajo no se plantea el tema de la localización de las deformaciones y no se garantiza la subjetividad de la solución en función del mallado.

### 4.3.3. Modelo de Ladevèze *et al.*

Ladevèze ha definido un conjunto de modelos constitutivos [101]–[105][161] para el tratamiento no lineal de laminados multicapa. En distintos artículos propone modificaciones en la elección de la energía libre. Se comentarán algunas de ellas. En [102] y [161] utiliza como expresión de la energía libre complementaria:

$$G = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle^2}{2E_1(1-d_1)} + \frac{\langle -\sigma_{11} \rangle^2}{2E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_{22}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{2E_2(1-d_2)} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle^2}{2E_2} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}(1-d_6)} \quad (4.15)$$

ésta coincide con la propuesta por Matzenmiller, ecuación (4.9), si se considera que el daño a compresión es nulo. Consecuentemente la relación secante es equivalente a la ecuación (4.10).

Para determinar el inicio y la evolución del daño Ladevèze utiliza funciones de daño con las siguientes relaciones:

$$d_1(\hat{Y}_1) \quad ; \quad d_2(\hat{Y}_2) \quad ; \quad d_6(\hat{Y}_2) \quad (4.16)$$

siendo  $\hat{Y}_1$  y  $\hat{Y}_2$  las variables internas del modelo, estas se definen mediante una combinación lineal de las fuerzas termodinámicas asociadas al daño:

$$\hat{Y}_1 = \max_{s=0,t} \{Y_1^s\} \quad ; \quad \hat{Y}_2 = \max_{s=0,t} \{Y_6^s + bY_2^s\} \quad (4.17)$$

donde  $b$  es una constante del material y  $Y_i$  las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño. Estas son iguales que las ecuaciones (4.12). Las variables de

daño son nulas hasta llegar a un umbral a partir del cual crecerán hasta alcanzar el valor de 1.

Para determinar las leyes de daño, y comprobar la bondad de la relación secante elegida Ladevèze utiliza el concepto de los "scenarios" de daño. Considera un conjunto de mecanismos de fallo, por ejemplo en la matriz considera daño difuso o microdaño, producido por la separación entre fibra y matriz, agrietamiento a lo largo de todo el espesor de la capa y delaminación entre las capas. Definiendo micromodelos de elementos finitos con este daño puede determinar el valor de la pérdida de rigidez del laminado al generarse cada modo de daño.

Las leyes de daño determinadas mediante las funciones (4.16) son la clave para ajustar el modelo de daño. Éstas deben ser monótonamente crecientes y ajustar a la respuesta del material. Ladevèze utiliza una ley lineal entre las fuerzas conjugadas ( $\hat{Y}_i$ ) y las variables de daño  $d_i$ , mientras el daño es distribuido (no localizado) y, una vez se localiza las variables de daño toman el valor de uno, es decir, daño completo.

Para garantizar una disipación constante al localizarse el daño utiliza un modelo viscoso [101]. Como se nota en la referencia [93] la capacidad de los parámetros viscosos como limitadores de la localización es función del tiempo de aplicación de las cargas. Para cargas mucho más lentas que el tiempo de relajación de la viscosidad, el modelo no es completamente objetivo. La utilización de la viscosidad solo pueden ser valido en un rango pequeño de velocidades de aplicación de las cargas. Fuera de éstas los parámetros de ajuste deben variar.

Para considerar las tensiones fuera el plano del laminado Ladevèze [101][103] propone utilizar como definición de energía libre:

$$G = \frac{1}{2(1-d_1)} \left( \frac{\langle \sigma_{11} \rangle^2 + \phi \langle -\sigma_{11} \rangle^2 - 2\nu_{12}\sigma_{22}\sigma_{11} - 2\nu_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} - 2\frac{\nu_{23}\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_2}}{E_1} \right) + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2 + \langle \sigma_{33} \rangle^2}{2E_2(1-d_2)} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle^2 + \langle -\sigma_{33} \rangle^2}{2E_2} + \frac{1}{2(1-d_6)} \left( \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{G_{12}} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}} \right) \quad (4.18)$$

esta definición no coincide, bajo estados en el plano, a la anteriormente propuesta en la ecuación (4.15). La función  $\phi$  tiene en cuenta el comportamiento no lineal bajo cargas longitudinales a compresión. Su elección no es trivial y debe garantizar, a parte de una disipación positiva, la relación de flexibilidad secante definida positiva:

$\det(H) = \det\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma}\right) > 0$ , lo que implica que deba garantizarse para cualquier estado del modelo:  $\phi > \frac{\nu_{12}\nu_{21}}{1-d_1}$ .

Las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño se pueden determinar derivando la función potencial, ecuación (4.18), respecto las variables internas;  $Y_i = \frac{\partial G}{\partial d_i}$ . Resulta evidente que el uso del potencial propuesto puede provocar que el valor de las fuerzas termodinámicas conjugadas al daño tomen valores negativos. Es necesario impedir que el daño asociado a una fuerza termodinámica conjugada negativa aumente, pues produciría energía, o disminuya ya que es físicamente imposible en un proceso de daño.

Otra alternativa propuesta por Ladevèze es definir la energía libre de Helmholtz [104][105]:

$$\begin{aligned} \Psi = & (1 - d_1) \left( \frac{\langle \tilde{\sigma}_{11} \rangle^2 + \phi \langle -\tilde{\sigma}_{11} \rangle^2 - 2\nu_{12}\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22} - 2\nu_{12}\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{33} - \frac{\nu_{23}\tilde{\sigma}_{22}\tilde{\sigma}_{33}}{E_2}}{2E_1} \right) + \\ & + (1 - d_2) \frac{\langle \tilde{\sigma}_{22} \rangle^2 + \langle \tilde{\sigma}_{33} \rangle^2}{2E_2} + \frac{\langle -\tilde{\sigma}_{22} \rangle^2 + \langle -\tilde{\sigma}_{33} \rangle^2}{2E_2} + \\ & + (1 - d_6) \left( \frac{\tilde{\sigma}_{12}^2 + \tilde{\sigma}_{13}^2}{2G_{12}} + \frac{\tilde{\sigma}_{23}^2}{2G_{23}} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde las tensiones efectivas ( $\tilde{\sigma}$ ) se determinan mediante el tensor de rigidez del material virgen según:  $\tilde{\sigma} = \mathbf{C}_0 : \varepsilon$ . Esta alternativa de definición no coincide con la energía libre expresada en (4.18) como se comprueba mediante la transformada de Legendre:  $\Psi = \sigma : \varepsilon - G$ .

Si se analiza la relación de rigidez secante ésta debe ser definida positiva para cualquier estado del sistema,  $\det(C) = \det\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \otimes \partial \varepsilon}\right) > 0$ , lo que implica que se cumpla, para cualquier ciclo, la desigualdad:  $(1 - d_1)((1 - d_2) - \nu_{12}\nu_{21}(1 - d_1)) > 0$ . Una relación secante definida negativa es completamente inadmisibles ya que indica que la definición de energía libre no es un potencial termodinámico.

Las distintas propuestas de Ladevèze no tienen en consideración el daño a compresión de la matriz, como muestra la Figura 4.4 bajo cargas a compresión transversal aparecen grietas orientadas en el plano 2-3. En algunas propuestas tampoco considera daño a compresión de las fibras.

Ladevèze considera la aparición de deformaciones permanentes en el material y el modelo permite considerar las deformaciones plásticas.

#### 4.3.4. Modelo de Linde *et al.*

Linde [106] presenta un modelo de daño en el cual directamente postula la relación de rigidez secante, ésta se puede expresar:

$$C = \begin{bmatrix} (1 - d_f) C_{11} & (1 - d_{mf}) C_{12} & (1 - d_f) C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ (1 - d_{mf}) C_{12} & (1 - d_m) C_{22} & (1 - d_{mf}) C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ (1 - d_f) C_{13} & (1 - d_{mf}) C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - d_{mf}) G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

siendo la dirección 3 perpendicular al laminado.  $d_f$  la variable de daño de la fibra,  $d_m$  de la matriz y  $(1 - d_{mf}) = (1 - d_f)(1 - d_m)$ . Si se considera que el material es transversalmente isótropo existen las relaciones:  $C_{13} = C_{12}$ ,  $G_{13} = G_{12}$  y  $G_{23} = (C_{22} - C_{23})/2$ .

El modelo considera que el daño se describe mediante dos variables internas, una que hace referencia al daño longitudinal y otra al transversal. No considera la posibilidad de recuperación de la rigidez al cerrarse las grietas. Si bien el tensor secante se describe para tensiones en las tres direcciones debe entenderse que sirve para modelar láminas delgadas y no existe la posibilidad que aparezcan grietas normales al espesor del laminado. La aparición de éstas, normalmente conocido como delaminación, es tratado, como Ladevèze, mediante modelos de interfase.

Para determinar el inicio y la evolución del daño se utilizan dos criterios, uno para determinar la aparición de grietas longitudinales y otra para grietas transversales:

$$F_f = \phi_1 - \varepsilon_{11}^{th} \leq 0 \quad ; \quad \phi_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^t}{\varepsilon_{11}^c} \varepsilon_{11}^2 + \left( \varepsilon_{11}^t - \frac{(\varepsilon_{11}^t)^2}{\varepsilon_{11}^c} \right) \varepsilon_{11}} \quad (4.21)$$

$$F_m = \phi_2 - \varepsilon_{22}^{th} \leq 0 \quad ; \quad \phi_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{22}^t}{\varepsilon_{22}^c} \varepsilon_{22}^2 + \left( \varepsilon_{22}^t - \frac{(\varepsilon_{22}^t)^2}{\varepsilon_{22}^c} \right) \varepsilon_{22} + \left( \frac{\varepsilon_{22}^t}{\varepsilon_{12}^s} \right)^2 \varepsilon_{12}^2}$$

donde  $\varepsilon_{11}^t$ ,  $\varepsilon_{11}^c$ ,  $\varepsilon_{22}^t$ ,  $\varepsilon_{22}^c$  y  $\varepsilon_{12}^s$  son las propiedades de resistencia última del material y  $\varepsilon_{11}^{th}$  y  $\varepsilon_{22}^{th}$  son las variables internas del modelo, éstas toman el valor inicial de  $\varepsilon_{11}^t$  y

$\varepsilon_{22}^t$  respectivamente e incrementan con la historia de deformaciones. En el trabajo de Linde no se presenta la base física de la derivación de estos criterios ni el buen ajuste a los experimentos ni tampoco se referencia a publicación alguna, no obstante este criterio puede ser relacionado con el trabajo de Christensen [140].

De la aplicación de la condición de consistencia a las funciones de daño, ecuaciones (4.21), se obtiene una integración explícita de las variables internas:

$$\varepsilon_{11}^{\text{th}} = \max \left\{ \varepsilon_{11}^t, \max_{s=0,t} \{ \phi_1^s \} \right\} \quad ; \quad \varepsilon_{22}^{\text{th}} = \max \left\{ \varepsilon_{22}^t, \max_{s=0,t} \{ \phi_2^s \} \right\} \quad (4.22)$$

Las leyes de daño son función de las variables internas:

$$d_f = 1 - \frac{\varepsilon_{11}^t}{\varepsilon_{11}^{\text{th}}} \exp \left( \frac{-C_{11} \varepsilon_{11}^t (\varepsilon_{11}^{\text{th}} - \varepsilon_{11}^t)}{G_f} \right) \quad ; \quad d_m = 1 - \frac{\varepsilon_{22}^t}{\varepsilon_{22}^{\text{th}}} \exp \left( \frac{-C_{22} \varepsilon_{22}^t (\varepsilon_{22}^{\text{th}} - \varepsilon_{22}^t)}{G_m} \right) \quad (4.23)$$

donde  $G_f$  y  $G_m$  es la energía crítica de fractura para una grieta longitudinal y transversal respectivamente. No considera que la energía de fractura de una grieta transversal es diferente según se haya generado por cargas normales o cortantes, es decir en modo I o II. Éstas leyes de daño deberían estar relacionadas con el tamaño de la discretización si la energía disipada por el modelo debe ser independiente del mallado.

A pesar que el modelo no se haya derivado a partir de un potencial termodinámico la energía libre de Helmholtz almacenada puede determinarse mediante la expresión:  $\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon$ , descrita la energía libre la disipación puede evaluarse:

$$\Xi = - \frac{\partial \Psi}{\partial d_m} \dot{d}_m - \frac{\partial \Psi}{\partial d_f} \dot{d}_f \geq 0 \quad (4.24)$$

debido a que la variable de daño debe crecer ( $\dot{d}_{f,m} \geq 0$ ) para garantizar una disipación positiva debe garantizarse que el daño sólo aumente cuando su fuerza termodinámica asociada sea positiva:  $-\frac{\partial \Psi}{\partial d_{f,m}} > 0$ , condición no garantizada en el modelo.

El modelo de Linde [106] no ha sido derivado a partir de la termodinámica de los procesos irreversibles y, bajo ciertas condiciones, puede no tener una disipación positiva. Para ajustar el modelo se necesitan las energías de fractura en modo I de la fibra y de la matriz, la energía de fractura en modo II de la matriz, la energía disipada bajo un ensayo a corte puro no se considera como propiedad independiente. Si bien utiliza la energía de fractura no presenta ningún remedio para evitar la dependencia de la respuesta al tamaño de la malla una vez localizado el daño.

### 4.3.5. Modelo de Barbero *et al.*

El modelo de Barbero [107][108] presenta ciertas diferencias con los presentados anteriormente. Como el modelo de Ladevèze también tiene en cuenta las deformaciones permanentes residuales al descargar el material en un modelo de daño y plasticidad desacoplados.

El daño se describe mediante dos variables,  $d_1$  y  $d_2$  que hacen referencia al estado de la fibra y la matriz respectivamente, el modelo no tiene en cuenta la recuperación de la rigidez al cerrarse las grietas. Para determinar el tensor de rigidez aplica la hipótesis de equivalencia de energía. La relación entre tensiones efectivas ( $\tilde{\sigma}$ ) y nominales ( $\sigma$ ) y entre las deformaciones efectivas ( $\tilde{\varepsilon}$ ) y nominales ( $\varepsilon$ ) se realiza mediante las relaciones:  $\sigma = \mathbf{M} : \tilde{\sigma}$  y  $\tilde{\varepsilon} = \mathbf{M} : \varepsilon$ , donde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 - d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(1 - d_1)(1 - d_2)} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Considerando la hipótesis de equivalencia de energía resulta una relación secante:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{M} : \mathbf{C}_0 : \mathbf{M} = \\ &= \begin{bmatrix} (1 - d_1)^2 C_{11} & (1 - d_1)(1 - d_2) C_{12} & 0 \\ (1 - d_1)(1 - d_2) C_{12} & (1 - d_2)^2 C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - d_1)(1 - d_2) G_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

La energía libre del sistema se puede escribir en función de las deformaciones:

$$\Psi = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) : \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \pi \quad (4.27)$$

donde  $\varepsilon - \varepsilon^p$  es la deformación elástica y  $\pi$  hace referencia a la energía almacenada en el proceso de endurecimiento.

Para determinar la superficie de activación se utiliza el criterio de Tsai-Wu [130]. Este criterio tiene la particularidad que determina todos los modos de fallo mediante una sola superficie de activación. Para definir la evolución considera la parte cuadrática del criterio de Tsai-Wu como potencial de evolución. La superficie de activación del daño se escribe en función de las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño ( $\mathbf{Y} = \partial\Psi/\partial\mathbf{d}$ ), correspondiendo a la superficie de Tsai-Wu en



el inicio del daño. No obstante, tanto respecto a las tensiones como a las deformaciones nominales, su forma varia al evolucionar el daño. Considera que al alcanzar un valor crítico el material se inestabiliza, lo que es cierto si la estructura se encuentra sometida a un estado uniformemente de tensiones. La energía disipada por el material una vez se localizan las deformaciones no es independiente de la discretización utilizada.

El modelo considera la aparición de deformaciones permanentes, como criterio de activación utiliza el de Tsai-Wu y, la misma función, como potencial de evolución resultando un flujo plástico asociado. La integración del modelo constitutivo no es simple pues sus reglas de evolución requieren buscar dos factores de consistencia, el plástico  $\dot{\lambda}^p$  y el del daño,  $\dot{\lambda}^d$ . Esta manera de definir el modelo, aunque compleja, garantiza la correcta evolución termodinámica de las variables internas.

El ajuste del modelo no es simple debido a que no utiliza propiedades estándares del material. No obstante, su ajuste se detalla en los artículos [107][108].

#### 4.3.6. Modelo de Williams *et al.*

Williams [110] considera que la entidad básica, la mesoescala, sobre la que se describe el daño no es una capa sino un conjunto de capas llamada sublaminado. Esta definición del modelo sobre un conjunto de capas se justifica con la habitual estrategia de fabricación de muchos laminados, éstos están formados mediante la repetición de un conjunto de secuencias iguales, el sublaminado. Los sublaminados acostumbran a tener fibras orientadas en varias direcciones, a veces formando un laminado con propiedades cuasi-isótropas en el plano.

Si se considera que los sublaminados mantienen simetría ortótropa cuyas direcciones principales en el plano 1 y 2 definen las direcciones principales del sublaminado es posible describir el daño mediante tres variables ( $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_6$ ) dependientes de la variable interna escalar del modelo,  $r$ .

Para determinar la activación del daño utiliza una sola función:

$$F = f(\varepsilon) - r \leq 0$$

$$f(\varepsilon) = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}}{K}\right)^2 - \frac{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}{KL} + \left(\frac{\varepsilon_{22}}{L}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{12}}{S}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{13}}{T}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{23}}{U}\right)^2} \quad (4.28)$$

donde  $K$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $T$  y  $U$  son constantes del material, éstas dependen del sublaminao elegido. En materiales con ciertas simetrías estos valores no son independientes. Si, por ejemplo se considera un sublaminao formado por igual número de capas a cero y noventa grados,  $[0, 90]_s$ , deben mantenerse las igualdades:  $K = L$  y  $T = U$ . Si el sublaminao considerado es  $[0, \pm 45, 90]_s$  se deben mantener las relaciones:  $K = L = S/2$  y  $T = U$ , lo que corresponde a un comportamiento cuasi-isótropo en el plano.

La función de activación, ecuación (4.28), detecta todos los mecanismos de daño y la almacena en la única variable interna del modelo,  $r$ . Las variables de daño son función de ella. Mediante las habituales condiciones de carga/descarga y la aplicación de la condición de consistencia del daño ( $\dot{F} = 0$ ) el modelo puede ser integrado explícitamente:

$$r = \text{máx} \left\{ 1, \text{máx}_{s=0,t} \{ f(\varepsilon)^s \} \right\} \quad (4.29)$$

Las leyes de daño son funciones monótonamente crecientes de la variable interna  $r$ . Pueden escribirse:

$$d_i = \begin{cases} 0 & 0 < r \leq F_i^I \\ d_i^{II} \left( \frac{r - F_i^I}{F_i^{II} - F_i^I} \right) & F_i^I < r \leq F_i^{II} \\ d_i^{II} + (1 - d_i^{II}) \left( \frac{r - F_i^{II}}{F_i^{III} - F_i^{II}} \right) & F_i^{II} < r \leq F_i^{III} \\ 1 & F_i^{III} < r \end{cases} \quad (4.30)$$

para  $i = 1, 2$  el daño a cortante se considera:  $d_6 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} - d_1 d_2$ . Los valores de ajuste  $F_i^I$ ,  $F_i^{II}$  y  $F_i^{III}$  indican el inicio del daño de la matriz, de la fibra y del daño total. La variable  $d_i^{II}$  indica el nivel de daño producido por la matriz al empezar el daño en la fibra. Si el sublaminao tiene como mínimo simetría cúbica, por ejemplo,  $[0, 90]_s$  existen las relaciones:  $F_1^I = F_2^I$ ,  $F_1^{II} = F_2^{II}$  y  $F_1^{III} = F_2^{III}$ . En este caso el daño  $d_1 = d_2 = d_6$  con lo que resulta un modelo de daño escalar.

Williams considera que el daño y la pérdida de rigidez del sublaminao no mantienen una relación lineal sino a través de unas funciones. Considera que la función  $R_{E_1}(d_1)$  influye al módulo de rigidez longitudinal ( $E_1$ ) y al coeficiente de Poisson

menor ( $\nu_{12}$ ),  $R_{E_2}(d_2)$  al módulo de rigidez transversal ( $E_2$ ) y al coeficiente de Poisson mayor ( $\nu_{21}$ ), finalmente  $R_{G_{12}}(d_6)$  relaciona la variable de daño a cortante con el módulo de rigidez a cortante ( $G_{12}$ ).

Si se considera una relación bilineal entre el daño y la pérdida de rigidez según el daño sea dominado por la fibra o la matriz:

$$R_{E_i} = \begin{cases} 1 + (E_i^{\text{II}} - 1) \frac{d_i}{d_i^{\text{II}}} & 0 < d_i \leq d_i^{\text{II}} \\ E_i^{\text{II}} \left( \frac{1 - d_i}{1 - d_i^{\text{II}}} \right) & d_i^{\text{II}} < d_i \leq 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

$E_i^{\text{II}}$  es el porcentaje de pérdida de rigidez producido por la matriz. Estas funciones  $R_{E_i}$  son distintas según si las cargas son a compresión o a tracción. El daño se describe mediante una sola variable no obstante ésta produce más o menos pérdida de rigidez según el signo de las cargas.

La relación de flexibilidad secante bajo estados de tensión en el plano se escribe:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{E_1} E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{R_{E_2} E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_{G_{12}} G_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

La densidad de energía libre en el campo complementario del sublaminado puede expresarse mediante la expresión:

$$G = \frac{\sigma_{11}^2}{2R_{E_1} E_1} - \frac{\nu_{12} \sigma_{22} \sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{2R_{E_2} E_2} + \frac{\sigma_{12}^2}{2R_{G_{12}} G_{12}} \quad (4.33)$$

La disipación mecánica resulta:

$$\Xi = \frac{\partial G}{\partial r} \dot{r} = \left( \frac{\partial G}{\partial R_{E_1}} \frac{\partial R_{E_1}}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial R_{E_2}} \frac{\partial R_{E_2}}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial R_{G_{12}}} \frac{\partial R_{G_{12}}}{\partial d_6} \frac{\partial d_6}{\partial r} \right) \dot{r} \geq 0 \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta:  $\frac{\partial G}{\partial R_{E_i}} = \frac{-\sigma_{ij}^2}{2R_{E_i}^2 E_i} \leq 0$  la disipación del modelo no es negativa si  $\frac{\partial R_{E_i}}{\partial d_i} \leq 0$ ,  $\frac{\partial d_i}{\partial r} \geq 0$  y  $\dot{r} \geq 0$ . Es decir, que la rigidez disminuya con el aumento del daño y que el daño aumente con las deformaciones.

La principal introducción del modelo de Williams reside en considerar el sublaminao como unidad básica. Muchos de los experimentos mecánicos sobre laminados multicapa se realizan sobre sublaminados y no sobre láminas unidireccionales con lo que es interesante definir los modelos sobre el espécimen ensayado. Este procedimiento permite reducir el número de puntos de integración a lo largo del espesor de la capa facilitando el tratamiento de elementos estructurales de gran tamaño, al mismo tiempo todo el modelo resulta en una estructura explícita. Por otro lado el tratamiento mediante sublamindos resulta en una gran simplificación en la descripción del daño. Si el sublaminao es cuasi-isótropo el modelo resulta de daño escalar.

El modelo no considera la dependencia de la disipación con el tamaño del elemento finito a partir del momento que el daño se localiza. Williams [110] refiere el tratamiento de este problema a futuros trabajos.

#### 4.3.7. Comentarios finales sobre los mesomodelos

Los mesomodelos utilizan como unidad básica o mesoescala una (o varias) capa del laminado. Para determinar los campos de deformaciones de cada capa se considera la teoría de laminados. Esta consideración ocasiona severas limitaciones a los mesomodelos. Los modelos continuos de daño requieren que la descripción del campo de deformaciones en la mesoescala sea completo, en otro caso la determinación de las leyes de daño es función de todo el espesor del laminado, donde las deformaciones son bien representadas.

La aparición del daño en unas capas produce una redistribución de los campos de tensiones que no son bien representadas mediante la teoría de laminados. Lo que resulta que los parámetros de ajuste de cada una de las capas dependen de todo el laminado. Una estrategia para un ajuste razonable es considerar unos determinados mecanismos de daño y, mediante modelos micromecánicos, desarrollar una ley que relacione las deformaciones medias de la lámina, determinadas mediante la teoría de laminados, y el valor de daño, como se realiza en el siguiente capítulo para el agrietamiento transversal. La estrategia de los "scenarios" propuesta por Ladevèze realiza ésta misma función.

Se ha comentado en el capítulo anterior la localización de las deformaciones y del daño causados por modelos con una relación constitutiva con ablandamiento.

Ésto producía una respuesta patológica de la solución en función del tamaño de la discretización, la tenacidad de la estructura aumenta con el tamaño de los elementos finitos. El "crack band model" es la solución más simple para regular la energía disipada y obtener una respuesta independiente del mallado. Si mediante una ley con ablandamiento se consigue la localización del daño en una línea (o plano en tres dimensiones) de elementos finitos la curva de ablandamiento se ajusta teniendo en cuenta el tamaño del elemento finito.

Según la teoría de laminados la deformación a lo largo del espesor puede ser representado mediante dos tensores,  $\varepsilon_0$  y  $\kappa$  que representan las deformaciones de la línea central y las curvaturas respectivamente. Mediante la relación constitutiva se pueden determinar las fuerzas y momentos por unidad de longitud a que se encuentra sometido la lámina,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{M}$ . La relación secante del material se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

donde las matrices de rigidez se determinan:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \mathbf{C}_i \quad ; \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i^2 - z_{i-1}^2) \mathbf{C}_i \quad ; \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (z_i^3 - z_{i-1}^3) \mathbf{C}_i \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde  $\mathbf{C}_i$  es la matriz de rigidez de cada una de las láminas y  $z_i$  la posición que ocupa a lo largo del espesor siendo  $z = 0$  la línea central.

La determinación del momento de la localización del daño se realiza según la relación tangente a lo largo de todo el espesor.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{F}} \\ \dot{\mathbf{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_0 \\ \dot{\kappa} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

conociendo la relación tangente de cada lámina resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \mathbf{C}_i^T \quad ; \\ \mathbf{B}^T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i^2 - z_{i-1}^2) \mathbf{C}_i^T \quad ; \\ \mathbf{D}^T &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (z_i^3 - z_{i-1}^3) \mathbf{C}_i^T \end{aligned} \quad (4.38)$$

La condición de localización de las deformaciones formando un plano de fallo o una rótula debe encontrarse en el estudio de las matrices:  $\mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{B}^T$  y  $\mathbf{D}^T$ . Si bien existen trabajos que determinan el comportamiento de vigas fallando bajo fuerzas axiales y momentos flectores [162], no existe, en conocimiento del autor, ningún trabajo estudiando las condiciones de localización en un plano de fallo o una rótula de cáscaras.

Los dos regímenes de daño, el distribuido, inducido por una relación tangente positiva, y el localizado, una vez el tensor tangente deja de ser definido positivo, se diferencian según el comportamiento de todo el laminado. Los mesomodelos pueden ser entendidos como una clase de modelos de daño de dos escalas. Donde la microescala es la lámina y la mesoescala el laminado, la definición de mesomodelo debe considerarse, pues, poco apropiada.

Una vez el daño se localiza aparece un plano de fallo o una rótula en el material. A partir de este instante aparece una discontinuidad fuerte en el medio. El enriquecimiento de éste para modelar estas discontinuidades fuertes requieren la adición de nuevos grados de libertad, ya sea a nivel de elemento [163] o de nodo [164]-[166].

## 4.4. Modelos en dos escalas

Estas técnicas se basan en descomponer el problema en las dos escalas, una macroscópica, o global, donde el material se considera homogéneo y se determinará el equilibrio global del problema y una microescala, o escala local, donde se resolverá una celda unidad, o unidad representativa de volumen, donde están definidos los distintos modelos constitutivos para cada material constituyente. Los modelos en dos escalas son, más que modelos constitutivos en si mismos, procedimientos para, a partir de las deformaciones y variables internas homogéneas en la escala global encontrar el campo de deformaciones y variables internas en la escala local, donde se considera la microestructura del material. Conocidos estos campos se pueden solucionar los distintos modelos constitutivos de cada fase y luego con la actualización del campo de variables internas y conocido el campo de tensiones determinar sus valores homogéneos. La ventaja de este procedimiento reside en que los modelos constitutivos se encuentran definidos en cada material con lo que no dependen de la configuración de las distintas fases. Además, se pueden aprovechar los numerosos

modelos constitutivos desarrollados para los materiales constituyentes.

Para modelar en dos escalas se requiere una correcta definición de la estructura del material mediante la celda unidad y un correcto procedimiento para determinar la relación entre las distintas escalas.

■ **Celda unidad:**

Los modelos en dos escalas acostumbran a considerar que la microestructura del material sigue algún patrón característico. Si se considera una estructura perfectamente periódica como las mostradas en la Figura 4.5 una celda unidad es el volumen mínimo de material representativo de la microestructura del material. Es decir, la repetición de celdas unidades reproduce la totalidad del material.

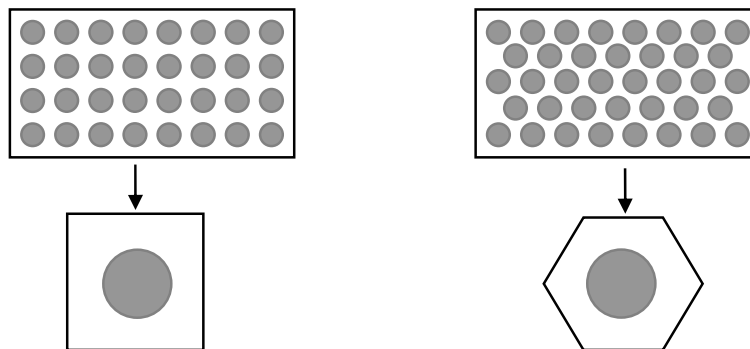


Figura 4.5: Distribuciones idealizadas de la distribución de la fibra dentro de la matriz, a) cuadrada y b) hexagonal.

Evidentemente la estructura del material dista mucho de ser periódica, como se muestra en la figura 4.6. Mediante simulaciones y análisis estadísticos se puede determinar el tamaño del elemento representativo de volumen en el cuál las propiedades, elásticas como mínimo, se pueden promediar [167]–[170]. Bajo estas consideraciones el tamaño de la celda unidad aumenta considerablemente, y consecuentemente, los requerimientos de cálculo.

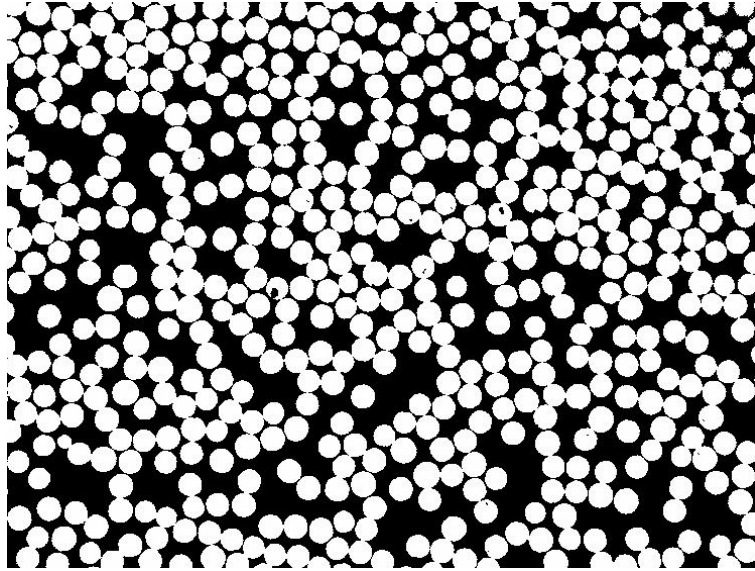


Figura 4.6: Imagen de la ordenación de las fibras en un compuesto epoxy fibras de vidrio real obtenidos por D. Trias *et al.* [168] en el plano transversal.

- **Hipótesis de periodicidad local**

Debido a la gran diferencia de escala entre la macroestructura y la microestructura es posible considerar que los desplazamientos a que se encuentran sometidos dos celdas cercanas son los mismos. Esta diferencia de escala se encuentra relacionada con la diferencia entre el tamaño de la celda unidad y el gradiente de deformaciones homogeneizadas, si el cálculo se realiza con elementos finitos ésta viene marcada por la diferencia entre el tamaño de los elementos finitos y el de la celda unidad.

Esta hipótesis, la cuál permite solucionar una celda unidad y considerar que las celdas lo suficientemente cercanas se encontrarán en el mismo estado, es aplicable siempre que las deformaciones homogeneizadas no se localicen. Una vez aparezca una grieta en la macroescala la periodicidad del medio se pierde y, a partir de este momento, la ley constitutiva debe escribirse entre las tracciones y la apertura de la grieta.

La hipótesis de periodicidad local implica que, en la microestructura, la ecuación de equilibrio a garantizar por cada celda unidad cercana es:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \tag{4.39}$$



donde no interviene el vector de fuerzas locales ( $\rho \mathbf{b}$ ) porque la celda unidad es lo suficiente pequeña en comparación con la escala de la estructura. Este vector tendrá influencia en las celdas lo suficientemente alejadas y se tendrá en cuenta en la macroescala, en los distintos puntos de Gauss de la malla de elementos finitos de la estructura.

La hipótesis de periodicidad implica que las tracciones a cada cara de la celda unidad sean antiperiódicas por mantener el equilibrio de fuerzas. El material, que sin estar deformado, puede ser representado mediante la repetición de celdas unidades debe, una vez deformado, poder representar la estructura mediante la repetición de celdas unidades deformadas. Según la hipótesis de periodicidad el campo de deformaciones en celdas cercanas debe ser periódico, es decir, caras opuestas de la celda deben estar sometidos a la misma deformación.

Los modelos constitutivos basados en deformaciones tienen como entrada del problema las deformaciones y el conjunto de variables de estado en el instante actual. Para tratar problemas en las dos escalas es necesario definir una estrategia para, a partir de las deformaciones medias, encontrar el campo de deformaciones en cada material constituyente para poder solucionar los distintos modelos constitutivos. Luego con las tensiones y el tensor constitutivo tangente de cada material es necesario encontrar otra estrategia para determinar las tensiones medias y el tensor constitutivo homogeneizado en la macroescala.

Existen varias estrategias para relacionar la escala homogeneizada y la microestructura del material. La técnica de los desarrollos asintóticos [171]–[175] aproxima la distribución macroscópica de deformaciones y tensiones a partir del desarrollo asintótico. Otros métodos utilizan los valores promedios (*"mean field method"*) [176]–[178]. Existen técnicas donde la solución de la celda unidad se encuentra mediante elementos finitos y donde las condiciones de equilibrio y periodicidad son claramente garantizadas [98][99][179]. Está demostrado [176][177], que en problemas no lineales la respuesta en la macroescala es función del campo completo de variables internas en la microescala. Esto supone una gran limitación para este método. No obstante, si se soluciona la celda unidad mediante elementos finitos los grados de libertad de la celda unidad depende de la discretización elegida.

Un problema que presentan los modelos en dos escalas es el comportamiento en régimen de ablandamiento. Cuando la relación constitutiva tangente en el material homogeneizado deja de ser definido positivo el daño se localiza en un plano y no es posible considerar la hipótesis de periodicidad. Considérese un punto de Gauss en la macroescala que ocupa un volumen en la que caben  $n^3$  celdas unidades. Mediante la hipótesis de periodicidad local se puede considerar que solucionando una celda unidad las otras  $n^3 - 1$  restantes se comportaran igual debido a su proximidad. No obstante al localizarse en un plano sólo  $n^2$  de las celdas unidades se dañaran mientras las otras  $(n - 1)n^2$  celdas se descargarán elásticamente. Si se considera que la disipación de una celda unidad hasta el fallo total es:  $V_c g_c$ , siendo  $V_c$  el volumen de la celda unidad y  $g_c$  la densidad de energía disipada. La energía disipada total aplicando la hipótesis de periodicidad equivale a:  $V_c g_c n^3$ . No obstante si el modelo es de ablandamiento éste localizará el daño en un plano y la disipación valdrá:  $V_c g_c n^2$ . Resulta, pues que una vez el daño se localiza la disipación en la macroescala es función de la discretización. Los métodos en dos escalas son excelentes para el tratamiento de materiales compuestos bajo régimen lineal y apropiados en régimen no lineal con endurecimiento como pueden ser compuestos de matriz metálica, pero cuando se aplica en zona de ablandamiento no se conoce ningún procedimiento para garantizar una disipación constante al refinar el mallado en la macroescala.

#### 4.4.1. Ley de mezclas

La ley de mezclas determina los campos de deformaciones en cada fase del material mediante tensores de transformación, asumiendo que en cada punto material de la macroescala hay presencia de cada uno de los constituyentes en su fracción volumétrica, es decir, la relación de escalas, macro-micromecánica será lo suficientemente grande. Se considera que cada una de las fases influye en el comportamiento del material en función de su participación volumétrica ( $v^N$ ).

La ley de mezclas es un modelo de campo promedio ("*mean field method*"). Éstos asumen que los valores promedios de los campos de deformaciones y variables internas es suficiente para determinar el comportamiento de cada fase. Tanto los modelos derivados del trabajo de Eshelby [180][181], donde dedujo un método para calcular el estado de tensiones de una inclusión embebida en una matriz infinita, como el método de Mori-Tanaka [182][183] y los modelos auto-consistentes ("*self-*

*consistent method*”) iniciados por Kröner [184] y desarrollados por varios autores [178][185]–[190] también corresponden a métodos del campo promedio.

La primera aplicación de la ley de mezclas en materiales compuestos se remontan a la determinación de las constantes elásticas de Voigt [191] y de Reuss [192] para elementos distribuidos en paralelo y en serie, respectivamente. Conocidos como regla de mezclas y regla de mezclas inversa. En los años 60 se desarrollo la teoría de mezclas clásica [193], para materiales con una distribución paralela, de isodeformación en todos los componentes, y recientemente [178][194] se ha incorporado la posibilidad de trabajar en serie, bajo estados de isotensión.

Consideremos que un material formado por  $N$  fases, cada una con un campo de deformaciones  $\varepsilon^N$  y un conjunto de variables internas  $\mathbf{r}^N$  que describen el estado del material. Las deformaciones de cada fase pueden ser determinadas mediante los tensores de cuarto orden:  $\mathbf{L}^N(\mathbf{r}^M)$ , éstos pueden considerarse constantes o dependientes de las variables internas ( $\mathbf{r}^M$ ), de todas las fases, éstos tienen información de la morfología del material. Es decir, indican si en una dirección los materiales se encuentran en serie, en paralelo o en una combinación intermedia.

Para determinar los parámetros de los tensores de influencia se acostumbra a considerar los dos casos extremos, si los distintos constituyentes se encuentran en paralelo estarán sometidos a la misma deformación. No obstante, si se encuentran en serie tendrán la misma tensión. Ésta última consideración implica que la deformación de cada constituyente será función de la matriz de rigidez global del problema, es decir, de las variables internas.

La determinación del campo de deformaciones de cada fase se puede expresar:

$$\varepsilon^N = \mathbf{L}^N(\mathbf{r}^M) : \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon = \sum v^N \varepsilon^N \quad ; \quad \mathbf{I}_d = \sum v^N \mathbf{L}^N(\mathbf{r}^M) \quad (4.40)$$

debido a que el sumatorio de las deformaciones de cada fase por su fracción volumétrica debe dar la deformación media, el sumatorio de los tensores de transformación por la fracción volumétrica debe dar el tensor identidad ( $\mathbf{I}_d$ ).

La densidad de energía libre global puede determinarse:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon = \sum v^N \Psi^N(\mathbf{r}^M) = \frac{1}{2} \sum v^N \varepsilon^N : \mathbf{C}^N(\mathbf{r}^N) : \varepsilon^N = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon : \left[ \sum v^N \mathbf{L}^N(\mathbf{r}^M) : \mathbf{C}^N(\mathbf{r}^N) : \mathbf{L}^N(\mathbf{r}^M) \right] : \varepsilon \end{aligned} \quad (4.41)$$

La relación constitutiva global:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = \sum v^N \mathbf{L}^N(\mathbf{r}^M) : \mathbf{C}^N(\mathbf{r}^N) : \mathbf{L}^N(\mathbf{r}^M) : \varepsilon \quad (4.42)$$

La disipación global debe ser definida positiva y también la ocasionada por las variables internas de cada fase:

$$\Xi = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}^M} \dot{\mathbf{r}}^M = \sum v^N \frac{\partial \Psi^N}{\partial \mathbf{r}^M} \dot{\mathbf{r}}^M \geq 0 \quad ; \quad \Xi^N = \left. \frac{\partial \Psi^N}{\partial \mathbf{r}^N} \right|_{\varepsilon^N} \dot{\mathbf{r}}^N \geq 0 \quad (4.43)$$

En la forma general presentada es necesario una doble iteración para solucionar el modelo constitutivo. Una para determinar las deformaciones de cada fase, pues dependen de las variables internas. Otra para solucionar los distintos modelos de cada fase, además del esquema global para determinar el equilibrio estructural. Es común considerar los tensores  $\mathbf{L}^N$  constantes e independientes de las variables internas.

#### 4.4.2. Método de los elementos finitos en dos escalas

El método de los elementos finitos en dos escalas [98][99][179] solucionan una celda unidad mediante elementos finitos en la microescala. A cada punto de Gauss de la macroestructura le corresponde una celda unidad que se resuelve mediante elementos finitos.

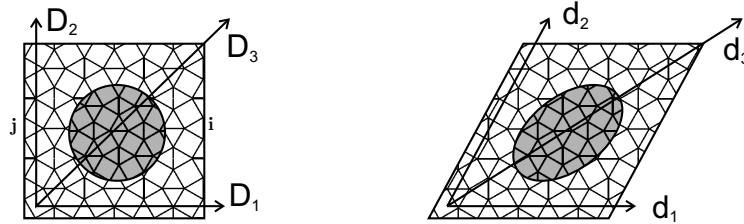


Figura 4.7: Celda unidad con vectores de periodicidad

Si se define una celda unidad como la de la figura 4.7 se pueden definir unos vectores de periodicidad que relacionan puntos iguales en celdas vecinas. Éstos en la configuración inicial valen  $\mathbf{D}$ . La evolución de estos vectores ( $\mathbf{d}$ ) se relaciona con la deformación homogeneizada:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{d}^T}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{D}} - \mathbf{I} \right] \quad (4.44)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la relación identidad. Si se consideran pequeños desplazamientos puede relacionarse el tensor de deformación homogeneizado los vectores de periodicidad mediante [179]:

$$\mathbf{d} \approx \bar{\varepsilon}(\mathbf{I} + \mathbf{D}) \quad (4.45)$$

Las condiciones de contorno en la celda unidad deben garantizar las condiciones de compatibilidad, la deformación debe ser periódica, los puntos  $i$  y  $j$ , de la figura 4.7, son puntos iguales de dos celdas vecinas por lo que sus deformaciones deben ser iguales. Al mismo tiempo el vector de tracciones a través de la superficie debe ser antiperiódico.

Para relacionar el campo de tensiones en la celda unidad con las tensiones medias del laminado se puede utilizar la media a lo largo del volumen de la celda unidad (V):

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma dV \quad (4.46)$$

también se puede utilizar el valor de las tracciones en las caras de la celda unidad.

Dada la deformación homogeneizada en la macroescala pueden determinarse el valor de los vectores de periodicidad ( $\mathbf{d}$ ) mediante la relación (4.45). Conocido el valor de los vectores  $\mathbf{d}$  aplicando las condiciones de contorno, periodicidad de las deformaciones y entiperiodicidad de las tracciones puede determinarse el campo completo de variables internas en la celda unidad. Mediante la expresión (4.46) se puede determinar el tensor de tensiones homogeneizadas.

Para obtener una buena convergencia numérica es necesario la determinación del tensor constitutivo tangente, este relaciona el incremento de deformaciones homogeneizadas con el incremento de tensiones homogeneizadas:  $\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{C}^T : \dot{\bar{\varepsilon}}$ . Para determinar todos los componentes del tensor constitutivo tangente se puede utilizar el método de la perturbación. Aplicando una perturbación a un miembro del tensor de deformaciones, y manteniendo los otros constantes, puede determinarse el incremento del tensor de tensiones, mediante este proceder se obtienen seis componentes independientes del tensor de rigidez tangente. Repitiendo este procedimiento por todos los componentes independientes del tensor de deformación homogeneizado se pueden determinar todo el tensor de rigidez tangente.

# Capítulo 5

## Agrietamiento de la matriz y delaminación

### 5.1. Introducción

Los materiales compuestos laminados de matriz polimérica (por ejemplo, epoxy) y refuerzo unidireccional de fibras cerámicas largas (por ejemplo, carbono o vidrio) son ampliamente utilizados en los fuselajes y elementos estructurales de la industria aeronáutica debido a su elevada resistencia y rigidez específica así como su buen comportamiento a fatiga. Los laminados se fabrican a partir de la unión de distintas capas. Las propiedades elásticas y la resistencia del laminado depende del espesor, posición y dirección de apilamiento de las distintas capas.

Una vez unidas las distintas láminas unidireccionales es necesario curar el material, esto se realiza a altas temperaturas y presiones mediante un autoclave, al ser un material con coeficientes de dilatación ortótropos al volver a la temperatura ambiente aparecen unas tensiones térmicas residuales. Es decir los laminados multidireccionales presentan un estado tensional no nulo sin cargas externas aplicadas. En algunos casos los laminados se dañan en el proceso de fabricación.

Debido a su naturaleza los tipos de daño que sufren estos materiales son múltiples y complejos. El primer modo de fallo que se observa en elementos que trabajan a tracción es el agrietamiento de la matriz, como muestra la figura 5.1. Las grietas evolucionan paralelas a las fibras en cada lámina hasta que son retenidas por otras láminas de distinta orientación. Las grietas en la matriz inducen otros mo-

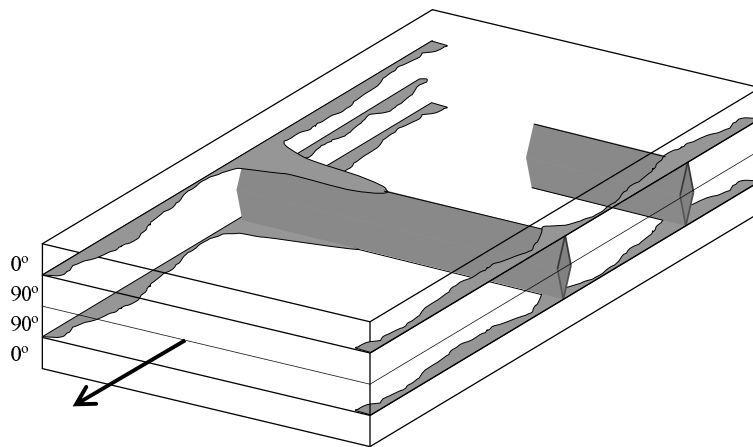


Figura 5.1: Mecanismos de daño no catastrófico en un laminado  $[0,90]_s$  donde se ven delaminaciones y grietas transversales

dos de daño, ya sea la delaminación o el fallo de las capas adyacentes debido a la concentración de tensiones que provocan. Otra fuente de delaminaciones son los cantos libres (*"free edge effect"*) debido a los cortantes que deben ser transmitidos por la interfase. Al mismo tiempo las grietas en la matriz son utilizados por agentes corrosivos para penetrar en el material.

Si se observa con detenimiento el material antes de la aparición de grietas transversales se ha producido daño entre las fibras y la matriz. La interfase de ambas se separa y sigue hasta que el ángulo entre las tensiones principales y la interfase es demasiado grande (entre  $60^\circ$  y  $70^\circ$  según París [195]) la grieta crece uniendo dos fibras. Este tipo de daño ocurre antes de la presencia de las grietas y al aparecer estas sigue aumentando en los lugares lo suficientemente alejados de éstas. Este tipo de daño es importante cuando las capas son delgadas pero es prácticamente inapreciable, en la respuesta tensión deformación, en laminados uniaxiales o capas gruesas.

Al no ocasionar un fallo estructural catastrófico muchas aplicaciones toleran la presencia de daño difuso, agrietamiento transversal y delaminaciones en su rango de trabajo, otras, como depósitos a presión, no. Los ingenieros tienen el reto de predecir el inicio del agrietamiento, la evolución de la densidad de grietas, la posible delaminación y la variación de las propiedades termomecánicas del laminado.

A pesar de el gran esfuerzo de numerosos investigadores y de la enorme publicación generada no es posible encontrar en la bibliografía un tratamiento general de este problema, los estudios se limitan a laminados muy simples ( $[0_n, 90_m]_s$ ,  $[\pm\theta_n, 90_m]_s$ )

con cargas uniaxiales, tracción transversal o corte en el plano [196], algunos trabajos consideran la delaminación [197]. Parece difícil el análisis analítico de estos materiales cuando el histórico de cargas o la secuencia del laminado es compleja.

En la primera parte del capítulo se realizará un resumen del problema y se plantearán problemas analíticos simples que permitirán comprender ciertos aspectos sobre el agrietamiento de la matriz. En una segunda parte se tratará el problema numéricamente, con tal finalidad se desarrolla un modelo de daño tridimensional para un material transversalmente isótropo.

## 5.2. Tratamiento analítico

Existen dos enfoques para determinar el inicio del daño, unos basados en tensiones los otros en energía. Los criterios basados en tensiones consideran que existe una función escalar  $f(\sigma_{ij})$ , tal que al alcanzar, en cualquier punto del material, el valor umbral ( $Y_u$ ) una grieta se genera.

Los criterios energéticos se basan en la mecánica de la fractura. La aplicación de la mecánica de la fractura clásica exige la inclusión de una grieta inicial en el material virgen, ésta se entiende como una grieta equivalente que está relacionada con los microdefectos o zonas ricas en fibra presentes en el material.

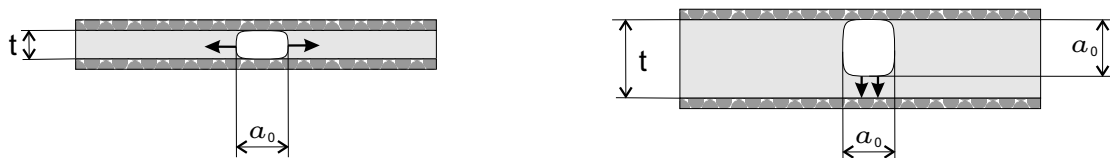


Figura 5.2: Crecimiento de un defecto de longitud característica  $a_0$  en una lámina delgada ( $t \leq a_0$ ) donde crece en dirección longitudinal y en una capa  $t > a_0$  donde primero crece transversalmente.

Dvorak [198] aplicó la mecánica de la fractura para determinar el inicio del agrietamiento de la matriz. Conociendo la resistencia de una lámina unidireccional se puede determinar cuál es el tamaño del defecto que se ha desestabilizado mediante la aplicación la mecánica de la fractura. Considerando el tamaño del defecto como una propiedad del material se puede determinar la desestabilización de esta misma grieta en una lámina embebida en un laminado.



En la figura 5.2 se muestra una grieta, de tamaño característico  $a_0$ , en una lámina delgada y en una lámina gruesa. En el primer caso  $t \leq a_0$  con lo que la grieta sólo puede crecer longitudinalmente. En el segundo caso  $t < a_0$ , la grieta primero crece transversalmente y luego longitudinalmente. Si la grieta crece transversalmente debe ir bordeando las distintas fibras mientras si esta crece longitudinalmente la grieta avanza alineada con las fibras. Esto produce una zona distinta de proceso de fallo en el extremo de la grieta y, consecuentemente, una cantidad distinta de disipación energética resultando dos energías críticas de fractura según la dirección de crecimiento, longitudinal  $G_{Ic}^L$  y transversal  $G_{Ic}^T$ , como notó Dvorak [198]. Para la determinación de estas energías críticas de fractura ver el trabajo de Pinho [121].

Otro acercamiento al problema es la mecánica de la fractura finita, como la bautizó Hashin [199]. La mecánica de la fractura finita considera que aparecerá una grieta a lo largo de todo el espesor de una lámina si la energía elástica descargada es superior a la energía crítica de fractura. Este acercamiento considera que entre dos instantes la grieta ha crecido una cantidad finita.

La mecánica de la fractura finita no se corresponde con la termodinámica clásica, ésta trata de estados de equilibrio infinitamente cercanos. La mecánica de la fractura finita considera que el área fracturada ocupa todo el espesor de la lámina siendo un aumento de área fracturada finita. Contrariamente la mecánica de la fractura, tal y como fue definida por Griffith, considera un incremento infinitesimal de área fracturada. A pesar de esto, la mecánica de la fractura finita se corresponde con la mecánica de la fractura clásica si la grieta progresa en dirección longitudinal a lo largo de todo el espesor. Resulta, pues, un caso particular del criterio de agrietamiento propuesto por Dvorak [198].

En un laminado con un campo de desplazamientos uniformes la mecánica de la fractura finita da resultados satisfactorios cuando el espesor de la lámina es pequeño, no obstante cuando el espesor de la lámina es grande la mecánica de la fractura finita subestima la resistencia de la lámina debido a que el equilibrio de energías que plantea no es correcto, ya que al agrietarse un laminado grueso hay una cierta cantidad de energía cinética envuelta en el proceso. Esta energía cinética se acostumbra a considerar constante en función del número de grietas pero cuando la lámina es gruesa depende del espesor. No obstante los laminados utilizados en las aplicaciones industriales están formados por capas delgadas en las cuáles la mecánica de

la fractura finita es apropiada. Al mismo tiempo el tratamiento de la mecánica de la fractura finita es lo suficientemente sencillo como para plantearse modelos que permiten determinar la densidad de grietas, como el trabajo de Nairn [199], y en algunos casos tener en cuenta la delaminación [197].

### 5.2.1. Inicio del agrietamiento y de la delaminación bajo esfuerzos transversales

#### Crecimiento de una grieta en un laminado unidireccional y en una capa embebida

Se consideran las condiciones de agrietamiento de una capa sometida a un campo uniforme de tensiones, estando embebida en un laminado o formando parte de un laminado unidireccional.



Figura 5.3: Crecimiento de un defecto en una lámina unidireccional (izquierda) y en una lámina embebida (derecha), ambas con una grieta inicial  $a_0$ , se muestra la zona dónde las tensiones se descargan  $\sigma = 0$ .

La imagen de la izquierda de la figura 5.3 muestra la solución aproximada del campo de tensiones de una capa unidireccional con una grieta de tamaño  $a_0$ . Se puede considerar que las tensiones se recuperan al cabo de cierta distancia de la grieta. Se considera el pendiente de recuperación como constante ( $k_2$ ). Si  $\Psi_2^{\text{UD}}$  es una función escalar que mide la densidad de energía almacenada en cada punto material en el momento del fallo, la energía elástica almacenada en una lámina unidireccional que contiene una grieta ficticia de longitud  $a_0$  se puede determinar:

$$U_2^{\text{UD}} = \Psi_2^{\text{UD}} g(tL - k_2 a_0^2) \quad (5.1)$$

donde  $g$ ,  $t$  y  $L$  representan el ancho, espesor y longitud de la probeta respectivamente, y  $k_2$  es un parámetro relacionado con la solución de un problema de elasticidad. Si el material sigue una ley lineal elástica hasta el fallo la densidad de energía se relaciona con la resistencia de la lámina:

$$\Psi_2^{\text{UD}} = \frac{(Y_T^{\text{UD}})^2}{2E_2} \quad (5.2)$$

donde  $Y_T^{\text{UD}}$  es la resistencia uniaxial y  $E_2$  el módulo de rigidez transversal.

Esta progresará, en dirección transversal, si se cumple la condición que establece la mecánica de la fractura:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial U_2^{\text{UD}}}{\partial a_0} = 2\Psi_2^{\text{UD}} k_2 a_0 = G_{Ic}^T \quad (5.3)$$

Conociendo la resistencia uniaxial, la energía crítica de fractura, el módulo de Young y el parámetro  $k_2$  de una lámina unidireccional se puede determinar el tamaño de su grieta equivalente:

$$a_0 = \frac{G_{Ic}^T}{2\Psi_2^{\text{UD}} k_2} \quad (5.4)$$

Si la misma lámina se encuentra embebida en un laminado el volumen de material descargado es menor que en el caso unidireccional como se muestra en la imagen de la derecha de la figura 5.3. Bajo tensiones transversales ésta equivale a:

$$U_2 = \Psi_2 g \left( tL - \frac{k_2 a_0^2}{2} \right) \quad (5.5)$$

La variación de la energía elástica al aumentar la grieta debe ser igual a la energía crítica de fractura:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial U_2}{\partial a_0} = \Psi_2 k_2 a_0 = G_{Ic}^T \quad (5.6)$$

donde la densidad de energía libre ( $\Psi_2$ ) es determinada mediante la ley constitutiva del material y tiene en cuenta el estado tensional de cada punto material provocado tanto por las cargas externas como por las tensiones térmicas residuales.

Teniendo en cuenta que la longitud de la grieta se puede determinar mediante la ecuación (5.4) la relación de energía elástica almacenada en el momento del fallo en una lámina embebida y en una unidireccional es:

$$\Psi_2 = 2\Psi_2^{\text{UD}} \quad (5.7)$$

asumiendo una ley elástica lineal y sin considerar los efectos del confinamiento lateral debido a los coeficientes de Poisson, la resistencia de una capa embebida es  $\sqrt{2}$  veces

superior a una lámina unidireccional, la resistencia es independiente del espesor de la capa.

Siguiendo el mismo proceso que aquí explicado Dvorak [198] dedujo una relación para la resistencia *"in-situ"*. Para determinar la energía descargada consideró en el caso unidireccional una grieta situada en la esquina y en el caso embebido una grieta central, la relación de factores de intensidad de tensiones es igual a la relación de resistencias de las dos láminas.

$$Y_T = Y_T^{\text{UD}} \frac{K_I(a_0^{\text{esquina}})}{K_I(a_0^{\text{centro}})} \approx 1,12\sqrt{2}Y_T^{\text{UD}} \quad (5.8)$$

La tensión última de la lámina será un valor constante y mayor a la de una lamina unidireccional. No obstante, cuando el espesor de la lámina es muy pequeño el tamaño característico de la grieta ficticia es mayor que el espesor,  $a_0 > t$ . El planteamiento de Dvorak consiste en considerar que existe una grieta inicial cuya longitud ocupa todo el espesor ( $t$ ), por tanto la grieta solo puede crecer en dirección longitudinal. En realidad el material dista mucho de seguir la mecánica de la fractura lineal, no existe una grieta bien definida, el material no es elástico y existe una zona de proceso de fallo de tamaño considerable. La longitud de la grieta ficticia o equivalente ( $a_0$ ) puede ser considerada como el tamaño de la zona de proceso de fallo antes que una grieta ficticia, en el mismo sentido que lo considero Irwin al plantearse la mecánica de la fractura no lineal. Notase que tomando el valor  $k_2 = \pi$ , la expresión (5.4) coincide con la longitud de Irwin, ecuación (2.31).



Figura 5.4: Grieta en la matriz si la capa es interior o exterior.

La mecánica de la fractura finita no considera que las grietas avanzan a partir de una pregrieta inicial. Se limita a realizar un balance de energía entre dos estados del material, cuando este no se encuentra dañado y cuando ha aparecido una grieta a lo largo de todo el espesor (figura 5.4). Si la energía elástica descargada para generar una grieta a lo largo de todo el espesor ( $\Psi_2 t^2 k_2 / 2$ ) es igual o superior a la energía de fractura crítica por el espesor de la capa ( $tG_{Ic}^L$ ) esta aparecerá.

La mecánica de la fractura finita corresponde al criterio de la mecánica de la fractura si se considera que la grieta crece en dirección longitudinal. Si una grieta tiene que progresar en dirección longitudinal la variación de energía al crecer la grieta se puede escribir:

$$-\frac{\partial U_2}{\partial a_0} = \Psi_2 \frac{t^2 k_2}{2} = t G_{Ic}^L \quad (5.9)$$

Lo que resulta una densidad de energía elástica en el momento que la grieta avance en dirección longitudinal o transversal de:

$$\Psi_2 = \text{máx} \left\{ \frac{2G_{Ic}^L}{tk_2}, 2\Psi_2^{\text{UD}} \right\} \quad (5.10)$$

Cuando la capa que se agrieta es exterior el efecto de la grieta en el campo de tensiones es parecido al mostrado en la figura 5.4. El volumen de material descargado elásticamente es el doble que en el caso de una capa interior. El criterio de agrietamiento puede escribirse:

$$\Psi_2 \leq N \text{máx} \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{tk_2}, \Psi_2^{\text{UD}} \right\} \quad \begin{cases} N = 1 & \text{Capa exterior} \\ N = 2 & \text{Capa interior} \end{cases} \quad (5.11)$$

Existe un espesor a partir del cual se considera que la lámina es delgada o gruesa. Cuando el espesor de la capa es pequeño el criterio de propagación de una grieta en dirección longitudinal es más restrictivo que el de propagación transversal y a partir del espesor crítico es al revés. De la intersección de ambos criterios, mediante la ecuación (5.11), resulta un espesor:

$$t_2^{\text{cr}} = \frac{G_{Ic}^L}{k_2 \Psi_2^{\text{UD}}} \quad (5.12)$$

El espesor crítico corresponde al límite en que la grieta inicial ( $a_0$ ) o la longitud de la zona de proceso de fallo es del mismo tamaño que el espesor de la lámina. Si se igualan las expresiones (5.12) y (5.4) resulta una relación entre la energía crítica de fractura para la desestabilización transversal y longitudinal de  $G_{Ic}^L = \frac{1}{2} G_{Ic}^T$ . Si se mantiene esta igualdad se está asumiendo que el inicio de la desestabilización longitudinal y transversal ocurre simultáneamente. No obstante, observaciones experimentales indican que primero se desestabilizan transversalmente y luego longitudinalmente con lo que debe mantenerse la desigualdad:

$$G_{Ic}^L \geq \frac{1}{2} G_{Ic}^T$$

Resultados experimentales [198][200] consideran que la energía crítica de avance longitudinal se encuentra entre 0.6 a 0.8 el valor de la energía crítica de avance transversal.

En laminados menores que el del espesor crítico la energía disipada para la aparición de una grieta es igual a la energía elástica descargada en la probeta. No obstante en capas gruesas la grieta crece en dirección transversal y, una vez alcanza todo el espesor, continua creciendo de manera inestable en dirección longitudinal. Esta energía cinética se puede determinar mediante el balance de energía total en el proceso de agrietamiento. La energía descargada al evolucionar la grieta en dirección longitudinal viene dada por la ecuación (5.9). Esta energía es igual a la energía requerida para que la grieta avance más la energía sobrante en el proceso de agrietamiento:

$$\Psi_2 \frac{t^2 k_2}{N} = t G_{Ic}^L + \frac{\partial K}{\partial a_0^L} \quad (5.13)$$

siendo  $K$  la energía cinética que aparece en capas lo suficientemente gruesas. La densidad de energía almacenada en el momento que una grieta avanza viene dada por la expresión (5.11). Sustituyéndola en (5.13) resulta:

$$\frac{\partial K}{\partial a_0^L} = \langle \Psi_2^{\text{UD}} t k_2 - G_{Ic}^L \rangle t \quad (5.14)$$

### Delaminación

Una vez el material se a agrietado es posible que este delamine. Bajo esfuerzos transversales la progresión de la delaminación se produce en modo II. La variación de energía elástica descargada al crecer la delaminación se muestra en la figura 5.5. Las capas se delaminarán cuando esta energía sea igual a la energía crítica de fractura:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial U_2}{\partial l} = \Psi_2 t = N G_{IIc}^i \quad \begin{cases} N = 1 & \text{Capa exterior} \\ N = 2 & \text{Capa interior} \end{cases} \quad (5.15)$$

siendo  $l$  la longitud de la delaminación y  $G_{IIc}^i$  la energía de fractura en modo II de la interfase.



Figura 5.5: Grieta en la matriz y delaminación en una capa interior y en una exterior

El criterio de delaminación bajo esfuerzos transversales se puede escribir:

$$\Psi_2 \leq N \frac{G_{IIc}^i}{t} \quad \begin{cases} N = 1 & \text{Capa exterior} \\ N = 2 & \text{Capa interior} \end{cases} \quad (5.16)$$

En el caso de láminas gruesas es posible que al aparecer una grieta el material delamine de una manera inestable. El espesor crítico se determina igualando la densidad de energía libre para delaminar con la necesaria para provocar una grieta.

$$t_2^{\text{del}} = \frac{G_{IIc}^i}{\Psi_2^{\text{UD}}} \quad (5.17)$$

La energía descargada en el proceso de delaminación viene determinada por la expresión (5.15), teniendo en cuenta que la densidad de energía almacenada en el material en el momento de la delaminación viene determinada por el máximo de las expresiones (5.16) y (5.11), la cantidad de energía cinética descargada al aumentar la longitud de delaminación viene determinada por:

$$\frac{\partial K}{\partial l} = \langle \Psi_2^{\text{UD}} t - G_{IIc}^i \rangle N g \quad (5.18)$$

### Energía elástica descargada: $\Psi_2$

Según la teoría de laminados el campo de deformaciones en una capa  $i$  ocasionados por la variación de la temperatura ( $\Delta T$ ) y la aplicación de fuerzas ( $\mathbf{F}$ ) y momentos ( $\mathbf{M}$ ) externos sobre el laminado se puede determinar:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^T &= (\mathbf{I} - z_i \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}) (\bar{\alpha} - \alpha_i) \Delta T \\ \varepsilon_i^F &= (\mathbf{I} - z_i \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}) (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}) + z_i \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde los coeficientes de dilatación térmica ( $\bar{\alpha}$ ) de todo el laminado se pueden escribir:

$$\bar{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{C}_i \alpha_i$$

las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  se pueden determinar mediante la teoría de laminados utilizando la ecuación (4.36),  $\mathbf{C}$  es la matriz de rigidez en el plano de una capa e  $\mathbf{I}$  la matriz identidad.

Si se considera un laminado sometido a un ensayo uniaxial a tracción y se considera que el laminado mantiene las simetrías tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  y  $A_{12} = A_{13} = 0$ . La capa a  $90^\circ$  de la fuerza aplicada no sustenta cortantes en el plano, sólo tensiones transversales y longitudinales. La energía elástica almacenada antes de aparecer una grieta es  $\frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22})$ , la relación entre las deformaciones y tensiones viene determinada por la rigidez inicial de la capa. Al aparecer una grieta la tensión transversal en las regiones cercanas a ésta (en blanco en las figuras 5.4 y 5.5) es nula ( $\sigma_{22} = 0$ ) y la deformación transversal ( $\varepsilon_{22} = -\nu_{12}\varepsilon_{11}$ ). Debido a que la tensión transversal es nula la densidad de energía libre una vez aparecida la grieta se puede determinar:  $\frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11}$  y debido a la relación de deformaciones la ley constitutiva es  $\sigma_{11} = E_1\varepsilon_{11}$ . La densidad de energía descargada al aumentar la grieta resulta:

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & E_1\nu_{21} \\ E_2\nu_{12} & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}E_1\varepsilon_{11}^2 = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{2E_2}\sigma_{22}^2 \quad (5.20)$$

La tensión de inicio de agrietamiento se puede determinar mediante las expresiones (5.11) y (5.20):

$$Y_T^{\text{is}} = \sqrt{\frac{2NE_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \text{máx} \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{tk_2}, \Psi_2^{\text{UD}} \right\}} \quad \begin{cases} N = 1 & \text{Capa exterior} \\ N = 2 & \text{Capa interior} \end{cases} \quad (5.21)$$

La tensión de delaminación se determina mediante las ecuaciones (5.16) y (5.20):

$$Y_T^{\text{del}} = \sqrt{\frac{2NE_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \frac{G_{IIc}^i}{t}} \quad \begin{cases} N = 1 & \text{Capa exterior} \\ N = 2 & \text{Capa interior} \end{cases} \quad (5.22)$$



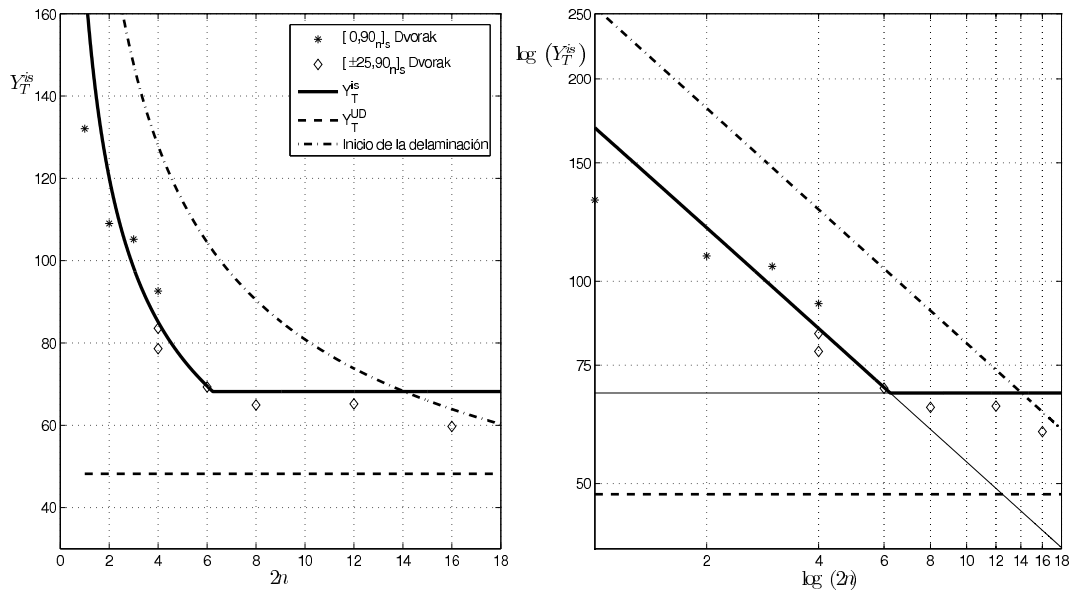


Figura 5.6: Representación de la tensión "in-situ" en función del espesor de la lámina central, en escala lineal y logarítmica. Los resultados experimentales son de Dvorak [198]. Se muestra la tensión de inicio de la delaminación, ésta es importante para láminas gruesas



Figura 5.7: Fallo de dos piezas fabricadas con el mismo material y orientación pero con distintos espesores de láminas. La imagen de la izquierda corresponde a láminas de espesor pequeño mientras en la de la derecha las láminas son más gruesas y permiten la delaminación. Imagen de Green et al. [201]

En la figura 5.6 se muestra, en escala lineal y logarítmica, la tensión de fractura, obtenida a partir de la expresión (5.21), y de delaminación, obtenida a partir de la expresión (5.22), en función del espesor de la capa, la respuesta se ajusta a partir de experimentos realizados por Dvorak [198]. Las propiedades utilizadas se encuentran en el cuadro 5.1. El parámetro  $k_2 = 3$  y el espesor de una capa es  $t = 0,127$  mm.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}\nu_{21}$	$Y_T^{\text{UD}}$ (MPa)	$G_{Ic}$ (N/mm)	$G_{IIc}^i$ (N/mm)
168.2	12.5	0.009	48.22	0.22	0.22*

Cuadro 5.1: Propiedades del material ensayado por Dvorak [198]. \* valor aproximado.

En la figura 5.7 se muestran dos imágenes de la serie de ensayos que Green et al. [201]–[203] realizaron aumentando el espesor de las láminas en el laminado o aumentando el número de sub-laminados. Se observa en la imagen de la derecha que la delaminación predomina cuando el espesor de las capas aumenta.

### 5.2.2. Evolución de la densidad de grietas bajo esfuerzos transversales

Debido a que la lámina se encuentra embebida en un laminado más rígido el agrietamiento no es un modo de fallo catastrófico con lo que al aumentar las cargas aparecen más grietas. Para determinar la relación existente entre las propiedades del laminado y el agrietamiento se considera que el campo de tensiones puede describirse como muestra la figura 5.8, a la izquierda para una densidad de grietas baja y a la derecha para una densidad elevada. La variable densidad de grietas ( $\rho$ ) se define como el inverso de la distancia media entre grietas:  $\rho = n_{cr}/L$  donde  $L$  es la longitud del laminado y  $n_{cr}$  el número total de grietas.

Se considera que la densidad de grietas es baja cuando la perturbación en el campo elástico que produce su presencia no afecta al campo elástico de otra grieta como muestra la imagen de la izquierda de la figura 5.8 (la distancia entre grietas es lo suficientemente grande como para considerar aplicable el principio de Saint-Venant). En la imagen de la derecha de la figura 5.8 se muestra una lámina con una elevada densidad de grietas, el campo elástico de una influye el campo elástico de la siguiente. El límite entre un caso y el otro se considera cuando la densidad de

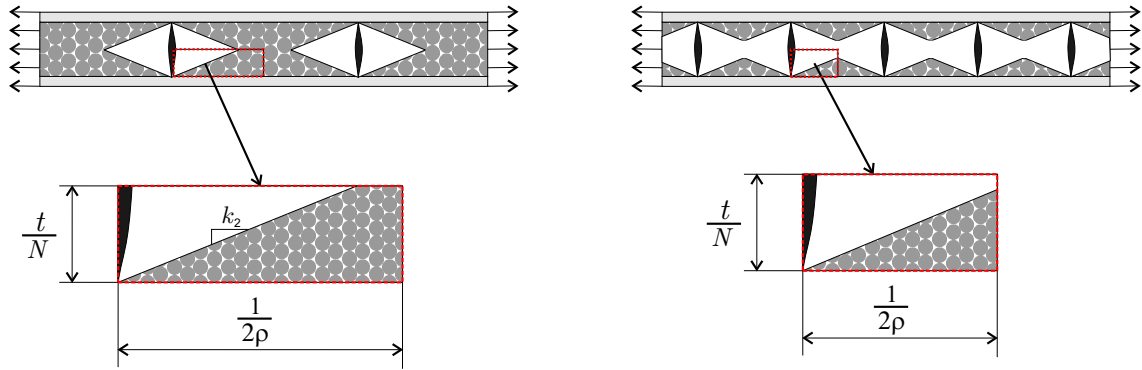


Figura 5.8: Grietas en la matriz, en la izquierda para una densidad de grietas baja, el campo elástico de una grieta no interacciona con las otras y en la derecha, densidad elevada de grietas. En la parte inferior se muestra la unidad básica y sus dimensiones.

grietas equivale a:

$$\rho_{\text{lim}} = \frac{N}{2k_2t} \quad (5.23)$$

Es necesario definir una relación entre las propiedades elásticas del material agrietado y la disminución de rigidez de la lamina. Se considera que la variación de rigidez depende de la relación de volumen entre la región que no sustenta cargas y el volumen total:  $d_2 = V_{\sigma=0}/V_T$ :

$$d_2 = \frac{1}{N}\rho k_2t \quad \text{si } \rho < \rho_{\text{lim}} \quad (5.24)$$

$$d_2 = 1 - \frac{N}{4\rho k_2t} \quad \text{si } \rho > \rho_{\text{lim}}$$

El criterio de propagación longitudinal de una grieta, válido para capas delgadas, corresponde a un balance energético global. Es decir, la variación de energía elástica almacenada en el material corresponde a la energía requerida para la generación de la grieta. Cuando las capas son gruesas, mayor al espesor crítico, ecuación (5.12), al agrietarse descargan una cantidad de energía elástica mayor a la energía de fractura requerida, como se muestra en la ecuación (5.14). El criterio de agrietamiento debe considerar ambas posibilidades, las grietas progresarán si se cumplen las condiciones:

$$\Psi_2 \frac{\partial V_{\sigma=0}}{\partial n_{\text{cracks}}} \geq G_{Ic}^L t b \quad \text{y} \quad \Psi_2 \geq N \Psi_2^{\text{UD}} \quad (5.25)$$

donde la variación de volumen:  $\frac{\partial V_{\sigma=0}}{\partial n_{\text{cracks}}} = \frac{\partial V_{\sigma=0}}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n_{\text{cracks}}}$ , teniendo en cuenta las relaciones:  $\partial V_{\sigma=0}/\partial d_2 = V_T$  y  $\partial \rho/\partial n_{\text{cracks}} = 1/L$ . Resulta un criterio de agrietamiento:

$$\Psi_2 \leq \text{máx} \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{\partial d_2/\partial \rho}, N\Psi_2^{\text{UD}} \right\} \quad \begin{cases} N = 1 & \text{Capa exterior} \\ N = 2 & \text{Capa interior} \end{cases} \quad (5.26)$$

donde la condición tiene en cuenta que la variación de energía elástica sea mayor o igual a la energía de fractura disipada y que la tensión sea suficiente para provocar el crecimiento en dirección transversal de la grieta. En capas delgadas la primera condición será la que regirá todo el proceso de daño, en capas gruesas, con una baja densidad de grietas romperá de manera inestable pero cuando la densidad sea grande el criterio de desestabilización longitudinal prevalecerá.

Es necesario determinar el valor de la energía elástica que se descargará en función de la densidad de grietas,  $\Psi_2$ . Es posible definir la tensión ( $\tilde{\sigma}$ ) y deformación efectiva ( $\tilde{\varepsilon}$ ) como el estado tensional de la matriz en las zonas lejanas de las grietas, relacionadas mediante la teoría de la elasticidad ( $\tilde{\sigma} = \mathbf{C} : \tilde{\varepsilon}$ ) y las tensiones ( $\sigma$ ) y deformaciones nominales ( $\varepsilon$ ) del laminado según la teoría de laminados, relacionadas a partir de la ley constitutiva de toda la lámina mediante la ley de daño ( $\sigma = \mathbf{C}(d) : \varepsilon$ ).

Según la consideración tomada en la ecuación (5.20), el material se descarga en dirección transversal y trabaja en carga uniaxial en dirección longitudinal la relación de rigidez secante de la lámina ( $\mathbf{C}(d)$ ) se ve afectado en el coeficiente de Poisson mayor  $\nu_{21}$ , la rigidez transversal  $E_2$  y la rigidez a cortante  $G_{12}$ .

$$\mathbf{C}(d) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{(1-d_2)E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_6)G_{12}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.27)$$

donde  $d_6$  hace referencia a la disminución de rigidez bajo cargas cortantes en el plano producida por una grieta transversal. Este tema se tratará en el apartado 5.2.7.

Para relacionar la deformación efectiva y la nominal se realiza el siguiente equilibrio de fuerzas: considérese un laminado con baja densidad de grietas como se muestra en la imagen de la izquierda de la figura 5.8, si se realiza el sumatorio de

fuerzas en un lugar no influenciado por ninguna grieta la fuerza por unidad de longitud se puede expresar:  $\mathbf{F} = \mathbf{A} : \tilde{\varepsilon}$ . Si se realiza la misma operación pero considerando la deformación media de todo el laminado, es decir la deformación nominal, la fuerza puede expresarse:  $\mathbf{F} = (\mathbf{A} - h\mathbf{C} + h\mathbf{C}(d)) : \varepsilon$ , igualando la fuerza, pues el equilibrio lo exige, resulta una relación entre la deformación efectiva y la nominal:

$$\tilde{\varepsilon} = \{\mathbf{I} + h\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{C} - \mathbf{C}(d)]\} : \varepsilon \quad (5.28)$$

Es habitual que la rigidez global de todo el laminado sea muy superior a la rigidez de una capa:  $\mathbf{A} \gg h\mathbf{C}$ , con lo que es posible considerar un estado de equivalencia de deformaciones:  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ . En caso contrario, es decir  $\mathbf{A} \approx h\mathbf{C}$ , es posible considerar la equivalencia de tensiones  $\tilde{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}(d)\varepsilon$ .

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{d_2\nu_{12}}{1 - (1 - d_2)\nu_{12}\nu_{21}} & (1 - d_2)\frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{1 - (1 - d_2)\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - d_6 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Teniendo en cuenta que el criterio de agrietamiento, ecuación (5.26), debe escribirse con las tensiones efectivas:

$$\begin{aligned} \Psi_2 = \frac{\tilde{\sigma}_{22}^2}{2C_{22}} &\leq N \max \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}, \Psi_2^{\text{UD}} \right\} && \text{si } \max_{s=0,t} \{\rho^s\} < \rho_{\text{lim}} \\ \Psi_2 = \frac{\tilde{\sigma}_{22}^2}{2C_{22}} &\leq \max \left\{ \frac{1}{N} 4\rho^2 k_2 t G_{Ic}^L, N\Psi_2^{\text{UD}} \right\} && \text{si } \max_{s=0,t} \{\rho^s\} > \rho_{\text{lim}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \mathbf{C} : \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\varepsilon} &= \{\mathbf{I} + h\mathbf{A}^{-1} : [\mathbf{C} - \mathbf{C}(d)]\} : \varepsilon \end{aligned}$$

En la figura 5.9 se muestra la relación constitutiva de la lámina y de todo el laminado considerando la condición de equilibrio, la cuál es correcta siempre y cuando la densidad de grietas sea lo suficientemente baja, la equivalencia de deformaciones y la de tensiones. Al aumentar la densidad de grietas, cuando no se puede asumir que el campo de tensiones de una grieta no afecta a las otras, el comportamiento tiende hacia la equivalencia de deformaciones.

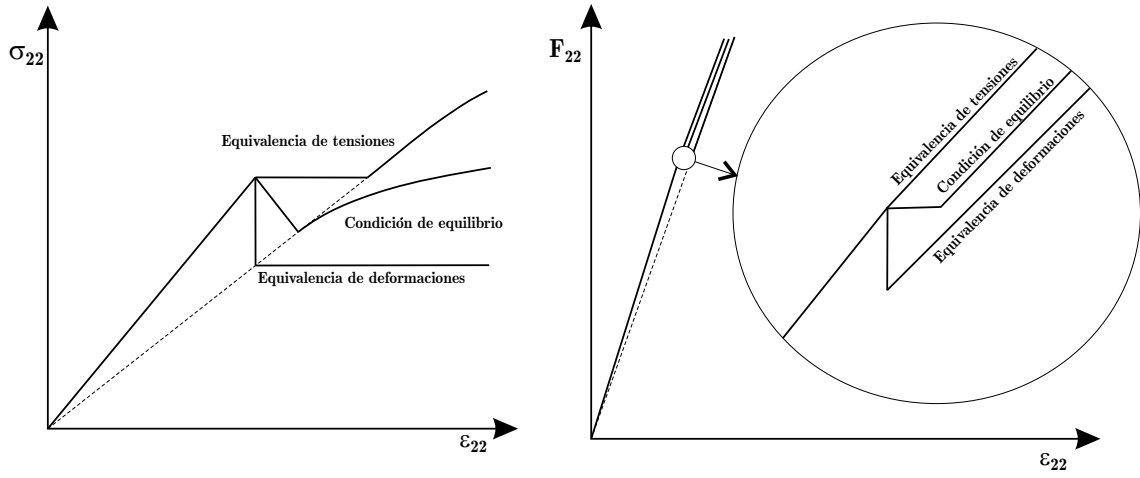


Figura 5.9: En la izquierda se muestra la relación constitutiva de una lámina, según el tipo de equivalencia que se aplique y en la derecha relación constitutiva de todo el laminado.

Si se considera la equivalencia de deformaciones ( $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ ), la cual es válida cuando la capa se encuentra en un medio elástico mucho más rígido, el modelo expuesto en las expresiones (5.30) puede ser resuelto explícitamente según muestra el cuadro 5.2.

$\text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < N \max \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}, \Psi_2^{UD} \right\} \quad \rho = 0$
$\text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} \geq N \max \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}, \Psi_2^{UD} \right\} \quad \rho = \sqrt{\frac{N}{4k_2 t G_{Ic}^L} \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}}$

Cuadro 5.2: Evolución de la densidad de grietas bajo esfuerzos transversales asumiendo equivalencia de deformaciones.

En la figura 5.10 se muestra la evolución de la densidad de grietas, del daño y de las tensiones nominales de una lámina. En la figura 5.11 se representan las isolíneas de daño y de agrietamiento en función del espesor de la lámina embebida y de la deformación nominal aplicada al laminado según la condición de equilibrio.

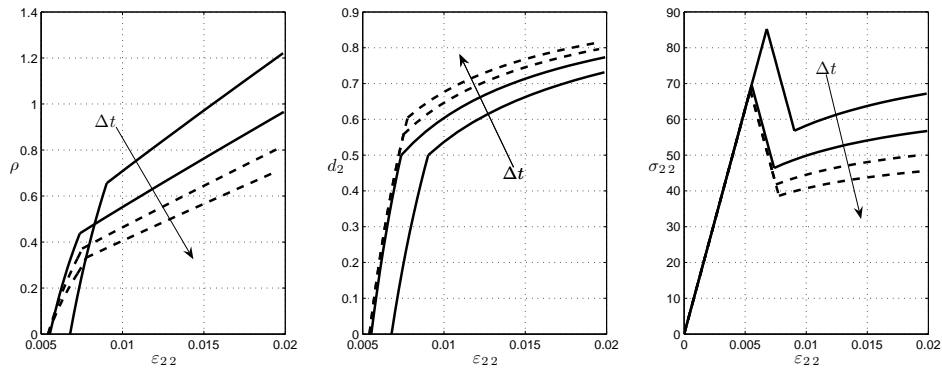


Figura 5.10: Daño y densidad de grietas en función de la deformación aplicada, se muestra la tendencia al aumentar el espesor ( $t$ ) de la lámina central. Las líneas discontinuas representan láminas gruesas mientras las continuas láminas delgadas.

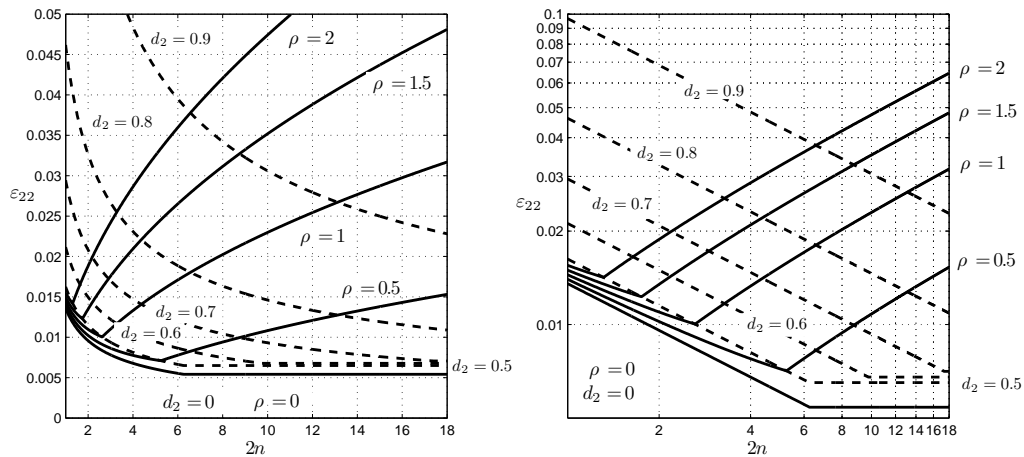


Figura 5.11: Líneas de iso-daño (líneas discontinuas) y de iso-agrietamiento (líneas continuas) en función del espesor de la lámina central y la deformación nominal aplicada al laminado. No se considera la delaminación. En la izquierda en escala lineal y en la derecha en escala logarítmica.

### Limitaciones del modelo

- Al pasar de la ecuación (5.25) a la ecuación (5.26) se considera que la función densidad de grietas ( $\rho$ ) es continua. Esta falsa consideración implica que las grietas aparecerán con tal distribución que maximicen la función densidad de grietas.

Se considera que la modificación del campo elástico provocado por una grieta

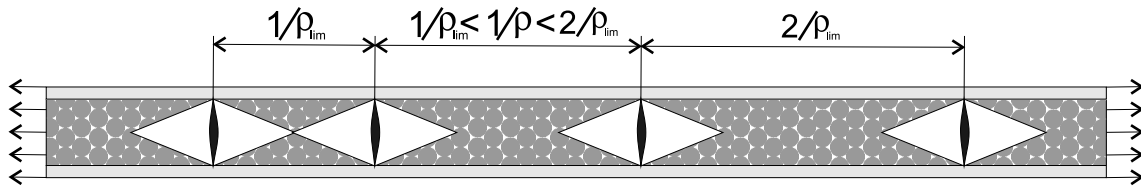


Figura 5.12: Si con una densidad de grietas baja éstas se generan aleatoriamente la densidad de grietas media para que los campos de tensiones no interaccionen se encuentra entre  $1/\rho_{lim}$  y  $2/\rho_{lim}$ .

no afecta a la distribución de tensiones en lugares lo suficientemente alejados. Se considera que la densidad de grietas a la que ocurre es  $\rho_{lim}$ . No obstante, en la figura 5.12 se muestra una capa con una distribución de grietas con una densidad  $\rho_{lim}/2 < \rho < \rho_{lim}$ . Si en este momento aparece una nueva grieta el volumen de material descargado será menor ya que la modificación del campo elástico de una grieta afectará a las otras. Si se considera que las grietas pueden aparecer en cualquier lugar debe esperarse que la primera fase del agrietamiento durará hasta que la densidad de grietas tome el valor:

$$\rho_m = \frac{3}{4}\rho_{lim} = \frac{3N}{8k_2t}$$

Se considera que la primera fase, en la que las distintas grietas no interaccionan llega hasta que la densidad equivale a  $\rho_m$ , y el daño:  $d_2 = 3/8$ . Esto no tiene en cuenta que las propiedades del material no son uniformes en todo el volumen. Parte de considerar que existen lugares donde apareceran las grietas, no por ser finitamente más débiles sino en el sentido de una perturbación, es decir, de una variación infinitesimal de las propiedades.

La función densidad de grietas al aumentar la deformación se divide en dos tramos, como se puede observar en la figura 5.10. El modelo presentado muestra una respuesta apropiada cuando la densidad de grietas es muy baja y cuando es muy elevada. No obstante, existe un régimen de transición entre los dos tramos. En cierto intervalo de densidad de grietas coexisten regiones con una densidad de grietas baja con otras regiones con una densidad de grietas elevada. Esto produce que la función densidad de grietas al aumentar la deformación sea suave y pase por debajo de la mostrada en la figura 5.10.



- Considera que la resistencia y la energía de fractura son homogéneas. Existen puntos débiles en el material donde se iniciará el daño. Además las primeras grietas aparecerán en los lugares más débiles. Cuando el laminado este altamente agrietado los lugares geométricos donde aparecerán más grietas se encuentran previamente determinados por la posición de las grietas existentes. Los defectos del material tendrán gran influencia en los primeros en estados de baja densidad de grietas.
- La equivalencia de deformaciones considera que la capa se encuentra embebida en un medio elástico de rigidez infinita.
- No se ha solucionado el problema elástico. Si considerar que la primera grieta se puede expresar con una constante  $k_2$  no es así la determinación de la densidad límite a partir de la cual los campos elásticos de las distintas grietas interaccionan.

### 5.2.3. Evolución del agrietamiento y la delaminación bajo esfuerzos transversales

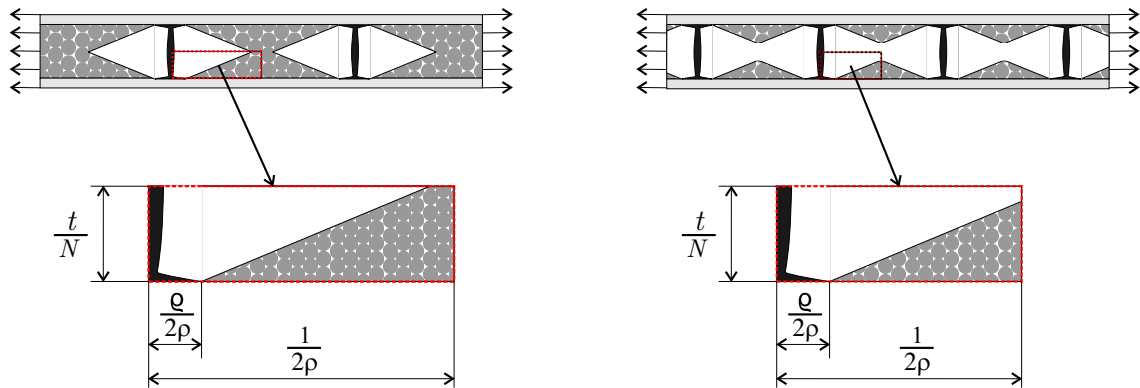


Figura 5.13: Grietas en la matriz con delaminaciones, en la izquierda para una densidad de grietas baja, el campo elástico de una grieta no interacciona con las otras y en la derecha, densidad elevada de grietas. En la parte inferior se muestran las unidades básicas y sus dimensiones.

El agrietamiento provoca que la interfase entre la capa agrietada y sus adyacentes deban transferir las tensiones a cortante. Estas tensiones pueden provocar la

delaminación de las distintas capas. En el apartado 5.2.1 se ha determinado cuál es la tensión que provoca que el material delamine a partir de la presencia de una grieta. Es posible definir una variable llamada proporción de delaminación ( $\varrho$ ):

$$\varrho = \frac{l}{L} \quad (5.31)$$

donde  $l$  es la longitud de delaminación y  $L$  la longitud total de la probeta. En la figura 5.13 se muestra un laminado "cross ply" con grietas transversales en la capa central y delaminación en el extremo de las grietas. En el esquema de la izquierda la densidad de daño es baja y en la derecha elevada. En blanco se muestra las zonas del material que no sustentan cargas. En la parte inferior se muestran las unidades básicas y sus dimensiones.

Se puede determinar la pérdida de rigidez del laminado teniendo en cuenta la misma expresión que anteriormente:  $d_2 = V_{\sigma=0}/V_T$  siendo  $V_{\sigma=0}$  el volumen de material con tensiones nulas y  $V_T$  el volumen total de la capa, resultando:

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{N} \rho k_2 t + \varrho & \text{si } \frac{2}{N} k_2 t \rho + \varrho < 1 \\ d_2 &= 1 - \frac{N}{4k_2 t \rho} (1 - \varrho)^2 & \text{si } \frac{2}{N} k_2 t \rho + \varrho > 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Los criterios energéticos de propagación de las variables densidad de grietas y proporción de delaminación se pueden escribir, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{Agrietamiento: } \Psi_2 \frac{\partial V_{\sigma=0}}{\partial n_{\text{cracks}}} &\geq G_{Ic}^L t b \quad \text{y} \quad \Psi_2 \geq N \Psi_2^{\text{UD}} \\ \text{Delaminación: } \Psi_2 \frac{t}{N} \frac{\partial d_2}{\partial \varrho} &\geq G_{IIc}^i \end{aligned} \quad (5.33)$$

Para que las variables no progresen deben cumplirse las desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{Agrietamiento: } \Psi_2 &\leq N \max \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}, \Psi_2^{\text{UD}} \right\} \\ \text{Delaminación: } \Psi_2 &\leq \frac{N G_{IIc}^i}{t} & \text{si } \frac{2}{N} k_2 t \rho + \varrho < 1 \\ \\ \text{Agrietamiento: } \Psi_2 &\leq \max \left\{ 4k_2 t G_{Ic}^L \frac{\rho^2}{N (1 - \varrho)^2}, N \Psi_2^{\text{UD}} \right\} \\ \text{Delaminación: } \Psi_2 &\leq 2k_2 G_{IIc}^i \frac{\rho}{1 - \varrho} & \text{si } \frac{2}{N} k_2 t \rho + \varrho > 1 \end{aligned} \quad (5.34)$$

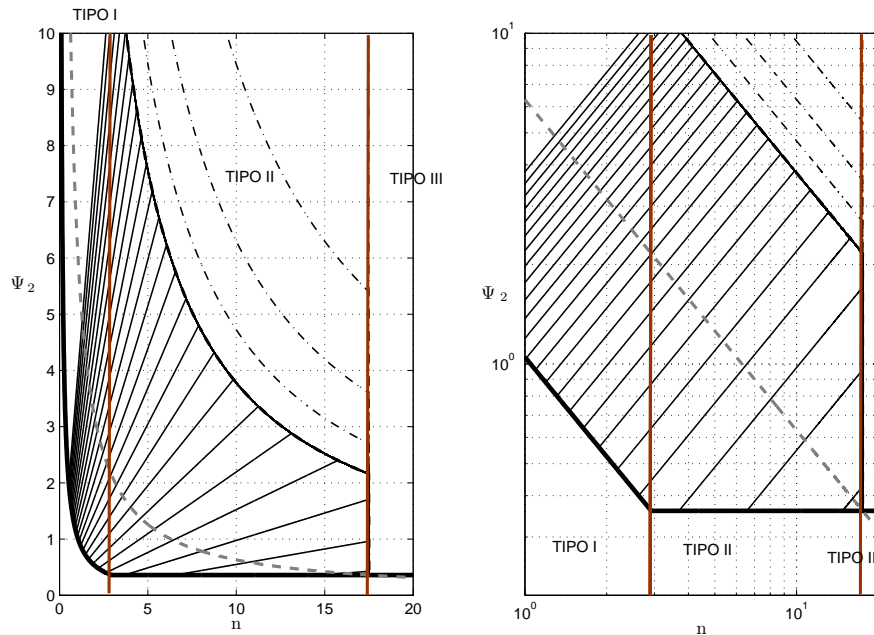


Figura 5.14: Curvas de isoagrietamiento, continuas, e isodelaminación, discontinuas, en función de la energía elástica y del espesor de la capa para los tres tipos de capas. En la izquierda en escala lineal y en la derecha en escala logarítmica.

Pueden considerarse tres clases de comportamiento, llamados capas de tipo I, II y III respectivamente, como se muestra en la figura 5.14. Se consideran capas del tipo I corresponde a las capas delgadas, es decir, con un espesor menor al espesor crítico mostrado en la ecuación (5.12). El tipo II corresponde a capas de espesor mayor al crítico y menor al descrito en la ecuación (5.17). Las capas de tipo III son lo suficientemente gruesas como para que las láminas delaminen de manera inestable al aparecer la primera grieta. En la figura 5.14 se muestran las curvas de isoagrietamiento, continuas, e isodelaminación, discontinuas, en una capa según los tres tipos de láminas, en gris discontinua se dibuja la curva de delaminación con una densidad de grietas baja, una vez superada esta línea siempre aparecerá cierta delaminación en los lugares donde la densidad de grietas sea lo suficientemente baja.

Existe la posibilidad que la energía crítica de delaminación en modo II sea mucho menor que la energía de agrietamiento en modo I. Esto ocurriría cuando el laminado tuviera unas interfaces muy frágiles. Si se satisficiera la desigualdad:  $G_{Ic}^L > k_2 G_{IIc}^i$ , el comportamiento sería del tipo III independientemente del espesor de la capa.

$\text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < N \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}$	$\rho = 0, \varrho = 0$
$\text{si } N \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t} < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < \frac{k_2 N}{t G_{Ic}^L} (G_{IIc}^i)^2$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\frac{N}{4k_2 t G_{Ic}^L} \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}} \\ \varrho = 0 \end{array} \right.$
$\text{si } \frac{k_2 N}{t G_{Ic}^L} (G_{IIc}^i)^2 < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{N G_{IIc}^i}{2 t G_{Ic}^L} \\ \varrho = 1 - \frac{k_2 N (G_{IIc}^i)^2}{t G_{Ic}^L \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}} \end{array} \right.$

Cuadro 5.3: Evolución de la densidad de grietas y la proporción de delaminación para capas de tipo I bajo esfuerzos transversales.

$\text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < N \Psi_2^{UD}$	$\rho = 0, \varrho = 0$
$\text{si } N \Psi_2^{UD} < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < \frac{k_2 N}{t G_{Ic}^L} (G_{IIc}^i)^2$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\frac{N}{4k_2 t G_{Ic}^L} \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}} \\ \varrho = 0 \end{array} \right.$
$\text{si } \frac{k_2 N}{t G_{Ic}^L} (G_{IIc}^i)^2 < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{N G_{IIc}^i}{2 t G_{Ic}^L} \\ \varrho = 1 - \frac{k_2 N (G_{IIc}^i)^2}{t G_{Ic}^L \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}} \end{array} \right.$

Cuadro 5.4: Evolución de la densidad de grietas y la proporción de delaminación para capas de tipo II bajo esfuerzos transversales.

Suponiendo la hipótesis de equivalencia de deformaciones, la cuál equivale a una capa fuertemente embebida en un laminado, la densidad de grietas y la proporción de delaminación expuestas en las expresiones (5.34) pueden ser integradas explícitamente. Si las capas son delgadas, del tipo I, la evolución de las variables internas se muestra en el cuadro 5.3. Las capas de tipo II se muestra en el cuadro 5.4. En el caso de capas muy gruesas la respuesta se muestra en el cuadro 5.5.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < N \max \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}, \Psi_2^{UD} \right\} \quad \rho = 0, \varrho = 0 \\ \text{si } N \max \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}, \Psi_2^{UD} \right\} < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} \quad \rho \approx 0, \varrho = 1 \end{array}}$$

Cuadro 5.5: Evolución de la densidad de grietas y la proporción de delaminación para capas de tipo III bajo esfuerzos transversales.

Es posible determinar la densidad de energía disipada en el proceso de agrietamiento y delaminación mediante la expresión:

$$\int_{t=0}^t \Xi dt = G_{Ic}^L \rho + G_{IIc}^i \frac{N}{t} \varrho \quad (5.35)$$

La densidad de energía disipada es proporcional al agrietamiento y a la delaminación. Considerando las gráficas 5.11 o 5.14 se observa que el daño ocurre a deformaciones mucho más bajas en laminados delgados y la densidad de agrietamiento es mucho mayor para la misma pérdida de rigidez. Como más delgadas sean las capas más difícil será su agrietamiento y una vez ocurra tendrá mayor capacidad de disipar energía resultando un comportamiento mecánico más eficiente.

En el caso que la capa sea gruesa se perderá una cantidad de energía cinética debido a la progresión inestable de las grietas. Ésta se puede escribir en función de la densidad de agrietamiento y la proporción de delaminación. Si las capas son de tipo II la energía descargada en función de la densidad de grietas y el valor de la variable de daño se puede expresar:

$$\frac{K}{V} = d_2 N \Psi_2^{UD} - \rho G_{Ic}^L \quad \text{si } \rho \leq N \sqrt{\frac{\Psi_2^{UD}}{4t k_2 G_{Ic}^L}} \quad (5.36)$$

a partir de cierta densidad de grietas el crecimiento de éstas resulta estable.

Si la capa es de tipo III se delaminará de manera inestable resultando una energía sobrante en función de la variable de delaminación y de daño:

$$\frac{K}{V} = d_2 N \Psi_2^{UD} - \varrho G_{IIc}^i \frac{N}{t} \quad (5.37)$$

donde  $V$  es el volumen de la probeta.

Esta cantidad de energía cinética desarrollada se propagará en forma de ondas provocando la vibración de la probeta y, probablemente, generando más daño en el material. Este fenómeno debe evitarse formando laminados con capas lo suficientemente delgadas.

Debe tenerse en cuenta que la delaminación aquí tratada sólo considera la disminución de rigidez axial del laminado. La delaminación produce una severa pérdida de rigidez flexural que aquí no se considera porque a nivel de laminado se considera la cinemática de la teoría de cáscaras.

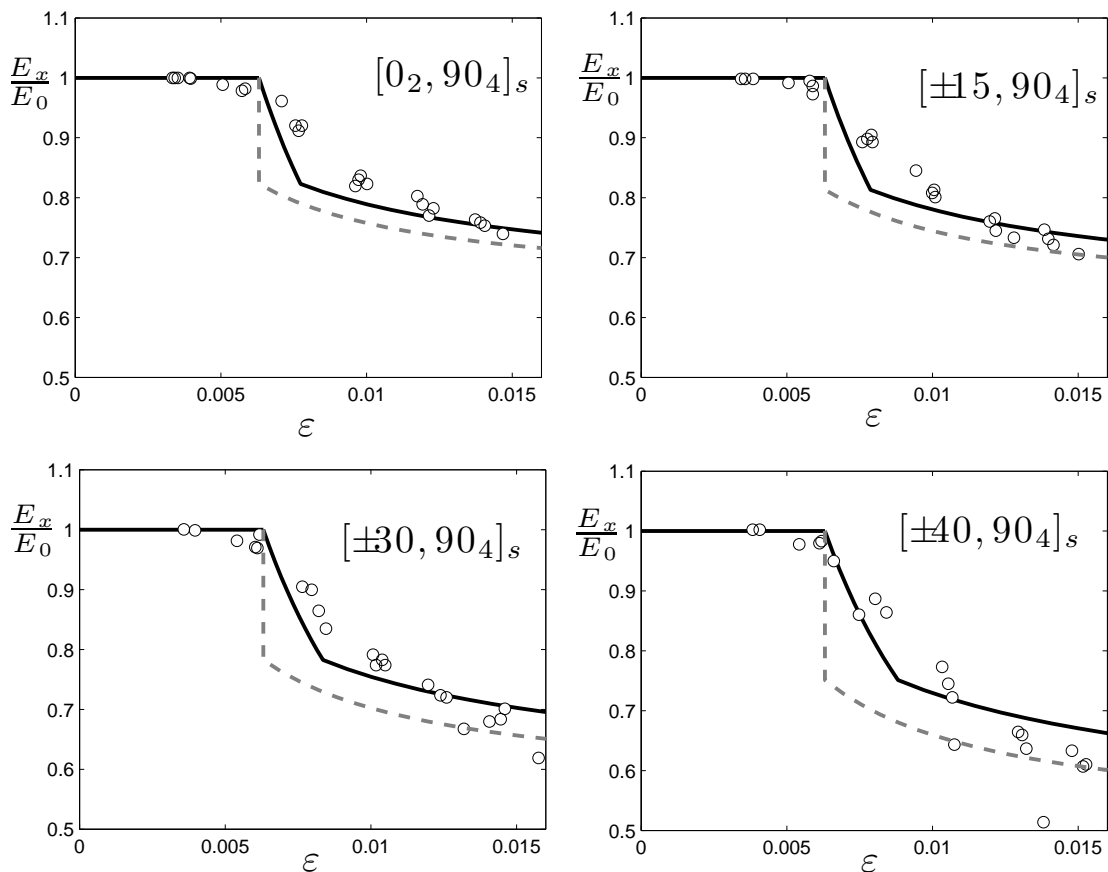


Figura 5.15: Disminución de la rigidez global del laminado al aumentar la deformación media. El modelo se compara con los resultados experimentales de Varna [204]-[206]. La línea negra corresponde a la condición de equilibrio y en gris la condición de equivalencia de deformaciones (ver figura 5.9).

Varna *et al.* [204]-[206] realizaron un conjunto de ensayos con un laminado de

fibra de vidrio con matriz de epoxy con una secuencia  $[\pm\theta, 90_4]_2$  con  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$  y  $40^\circ$ . Las propiedades del material se encuentran en el cuadro 5.6. Las deformaciones térmicas residuales presentes en la capa transversal debido al proceso de fabricación son  $\varepsilon = 0.862 \times 10^{-3}, 0.818 \times 10^{-3}, 0.672 \times 10^{-3}$  y  $0.514 \times 10^{-3}$  para  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$  y  $40^\circ$  respectivamente. En la figura 5.15 se comparan los resultados experimentales con los obtenidos por el modelo con  $k_2 = 2$ . Se muestra la pérdida de rigidez de todo el laminado al aumentar las deformaciones. En línea negra se considera la condición de equilibrio y en gris rallado la equivalencia de deformaciones. Debe observarse que cuanto más rígidas son las capas externas más se parecen ambas soluciones.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$G_{Ic}$ (N/mm)	$Y_T^{\text{UD}}$ (MPa)
44.73	12.76	5.80	0.297	0.3*	31

Cuadro 5.6: Propiedades elásticas, energía crítica de fractura en modo I y resistencia transversal de la capa. \* Propiedad estimada.

#### 5.2.4. Variabilidad de la energía crítica de fractura. Consideraciones estadísticas

La energía de fractura de la matriz y la distribución de defectos que ésta contiene producen que las propiedades del material no sean homogéneas en los distintos puntos del material. Como las grietas en la matriz aparecen en serie debe esperarse que la distribución siga una ley de Weibull. Bajo un campo determinado de energía disponible para la fractura dada por la función  $G(\mathbf{x})$  la probabilidad que aparezca una grieta resulta:

$$P = 1 - \exp\left(\frac{-1}{L_r} \int \left(\frac{G(\mathbf{x})}{G_{Ic}^L}\right)^m dx\right) \quad (5.38)$$

donde  $G$  es la energía disponible para la fractura en una posición  $\mathbf{x}$  determinada,  $L_r$  es la longitud de referencia y  $m$  es un parámetro de ajuste.

En el caso que no exista ninguna grieta en el material la energía disponible para la fractura es constante a lo largo del volumen:

$$P = 1 - \exp\left(\frac{L}{L_r} \left(\frac{-\Psi_2 k_2 t}{N G_{Ic}^L}\right)^m\right) \quad (5.39)$$

Al aparecer grietas la función que describe la energía disponible para la fractura deja de ser constante. En el lugar geométrico donde se encuentra una grieta la energía disponible para la fractura es cero, en los lugares alejados más de  $2k_2t/N$  de cualquier grieta la energía disponible para la fractura es máxima (ver figura 5.16).

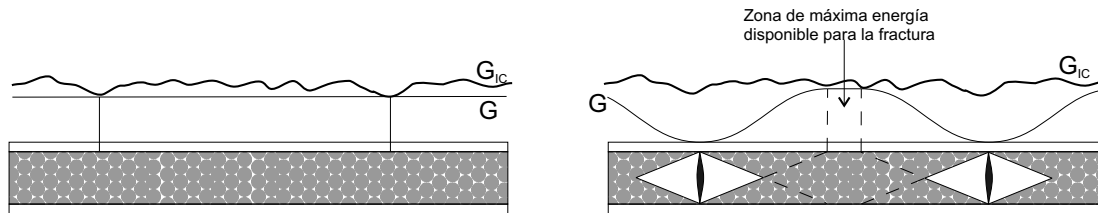


Figura 5.16: Función energía crítica de fractura y energía disponible para la fractura en un laminado.

Vinogradov *et al.* [207] genera una distribución aleatoria de energía crítica de fractura a lo largo del laminado y aplican la mecánica de la fractura finita para determinar la evolución de la densidad de grietas. Este procedimiento resulta en una buena modelización del fenómeno del agrietamiento pero requiere una elevada capacidad computacional. En la figura 5.16 se muestra una probeta virgen donde la energía crítica de fractura,  $G_{Ic}$ , que ha sido generada mediante una función de probabilidad y la energía disponible para la fractura  $G = \Psi_2 k_2 t / N$ . Mientras  $G < G_{Ic} \forall x$  el material no se agrieta, cuando en una posición  $G = G_{Ic}$  aparecerá una grieta. A partir de este momento la energía disponible para la fractura no es constante.

El planteamiento realizado en este trabajo sólo pretende considerar la tendencia que tendrá la energía de fractura crítica al evolucionar la densidad de grietas en la capa. Si se considera que existen una distribución de las propiedades de resistencia ( $G_{Ic}$ ) la aparición de la primera grieta viene marcado por el lugar geométrico donde estas son mínimas. La influencia de la variabilidad de las propiedades es especialmente importante cuando la densidad de grietas es muy baja. No obstante, cuando la densidad de grietas es elevada, el volumen del material donde puede aparecer una grieta, según el criterio energético, es cada vez menor con lo cuál la estadística cada vez tendrá menos importancia. En los estados iniciales la energía de fractura a considerar es el mínimo en cualquier punto, cuando la densidad de grietas es elevada el lugar geométrico donde aparecen las grietas está previamente fijado por la función  $G$  y uno debe esperar que la energía crítica de fractura en ese punto sea el valor



$\text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < \Psi_2^{\text{is}} \left(1 - \frac{\Delta G_{Ic}^L}{G_{Ic}^L}\right)$	$\rho = 0, \varrho = 0$
$\text{si } \Psi_2^{\text{is}} \left(1 - \frac{\Delta G_{Ic}^L}{G_{Ic}^L}\right) < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < \Psi_2^{\text{is}}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_{\text{lim}} - \left(\Psi_2^{\text{is}} - \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}\right) \frac{G_{Ic}^L \rho_{\text{lim}}}{\Psi_2^{\text{is}} \Delta G_{Ic}^L} \\ \varrho = 0 \end{array} \right.$
$\text{si } \Psi_2^{\text{is}} < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\} < \frac{k_2 N}{t G_{Ic}^L} (G_{IIc}^i)^2$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\frac{N}{4k_2 t G_{Ic}^L} \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}} \\ \varrho = 0 \end{array} \right.$
$\text{si } \frac{k_2 N}{t G_{Ic}^L} (G_{IIc}^i)^2 < \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{N G_{IIc}^i}{2t G_{Ic}^L} \\ \varrho = 1 - \frac{k_2 N (G_{IIc}^i)^2}{t G_{Ic}^L \max_{s=0,t} \{\Psi_2^s\}} \end{array} \right.$

Cuadro 5.7: Evolución de la densidad de grietas y la proporción de delaminación para capas de tipo I bajo esfuerzos transversales considerando variabilidad en la energía crítica de fractura.

medio.

Se postula la existencia de una función que relaciona la energía de fractura con la densidad de grietas, esta tiene un valor mínimo y crece con la densidad de grietas hasta alcanzar su valor medio. Esta función tiene en cuenta la presencia de puntos débiles en el material, estos serán los primeros en romperse, al aumentar la densidad de grietas quedarán las regiones menos débiles.

$$G_{Ic}^L(\rho) = G_{Ic}^L + \Delta G_{Ic}^L \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{lim}}} - 1 \right) \quad \text{si } \rho < \rho_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{N}{4k_2 t G_{Ic}^L} \Psi_2^{\text{is}}} \quad (5.40)$$

$$G_{Ic}^L(\rho) = G_{Ic}^L \quad \text{si } \rho > \rho_{\text{lim}}$$

donde:

$$\Psi_2^{\text{is}} = N \max \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 t}, \Psi_2^{\text{UD}} \right\} \quad (5.41)$$

Aplicando el principio de equivalencia de deformaciones, el cuál es óptimo cuando la lámina se encuentra confinada por un medio elástico mucho más rígido, y mediante los criterios de agrietamiento expresados en la ecuación (5.34), resulta una evolución

de la densidad de grietas respecto a la densidad de energía libre como se muestra en el cuadro 5.7 para capas del tipo I y II. El efecto en la respuesta del material de la variabilidad de la energía crítica de fractura se muestra en la figura 5.17.

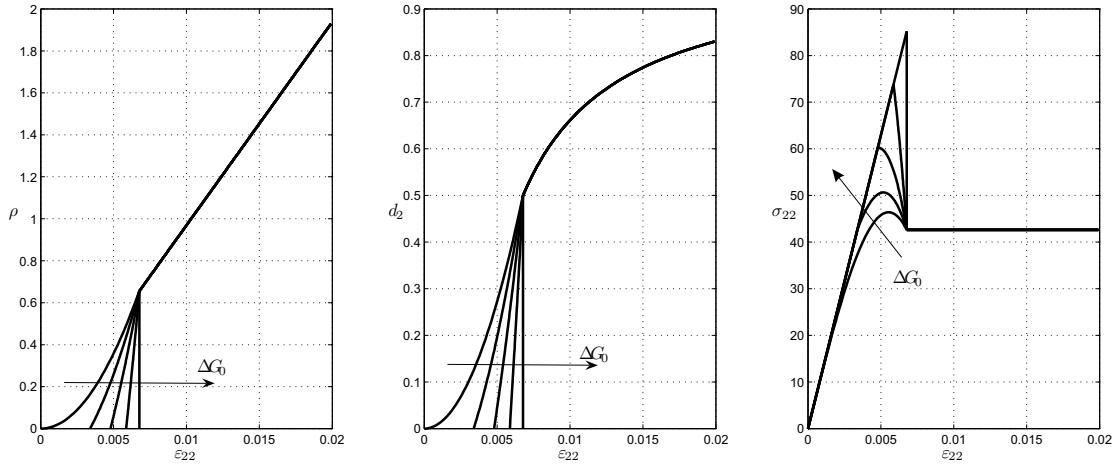


Figura 5.17: Densidad de agrietamiento, daño y tensión en función de la deformación transversal aplicada al laminado bajo equivalencia de deformaciones. Con  $G_{Ic}^0 = 0$ ,  $G_{Ic}^0 = 0,25G_{Ic}^{m\acute{a}x}$ ,  $G_{Ic}^0 = 0,5G_{Ic}^{m\acute{a}x}$ ,  $G_{Ic}^0 = 0,75G_{Ic}^{m\acute{a}x}$  y  $G_{Ic}^0 = G_{Ic}^{m\acute{a}x}$

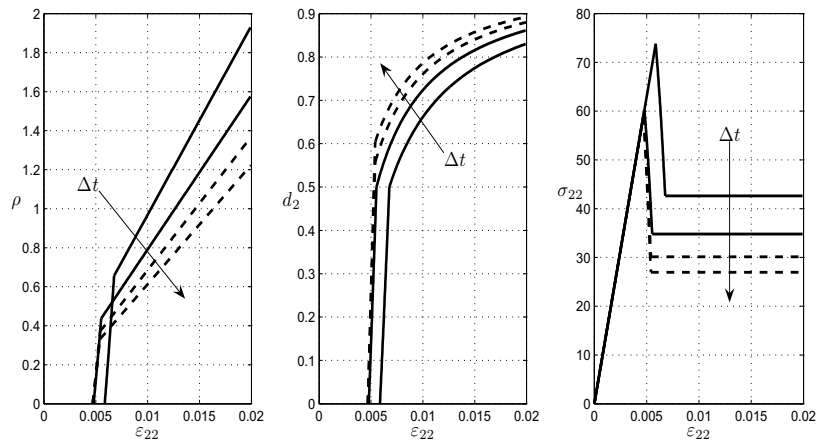


Figura 5.18: Daño y densidad de grietas en función de la deformación aplicada, se muestra la tendencia al aumentar el espesor ( $t$ ) de la lámina central. Las líneas discontinuas representan láminas gruesas mientras las continuas láminas delgadas.

La variable de daño se expresa mediante las ecuación (5.24). La figura 5.18 muestra la relación de la densidad de agrietamiento, daño y tensiones al aumentar

las deformaciones. La figura 5.19 muestra las isolíneas densidad de agrietamiento y daño al aumentar el espesor, en escala lineal y logarítmica.

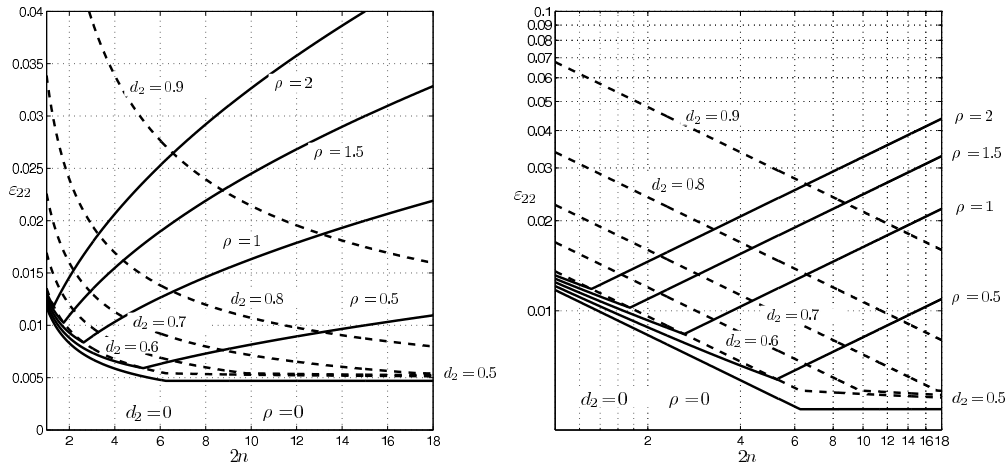


Figura 5.19: Líneas de iso-daño (líneas discontinuas) y de iso-agrietamiento (líneas continuas) en función del espesor de la lámina central y la deformación nominal aplicada a un laminado  $[0, 90_n]_s$ . No se considera la delaminación. En la izquierda en escala lineal y en la derecha en escala logarítmica.

### 5.2.5. Respuesta bajo tensiones cortantes en el plano

Una lámina unidireccional bajo esfuerzos transversales tiene un comportamiento prácticamente lineal elástico hasta el instante del fallo. En el caso que la lámina se encuentre embebida el agrietamiento es posterior y, en láminas muy delgadas, el régimen no lineal puede ser considerable. Cuando se ensaya una capa a cortante la respuesta no lineal es importante incluso en laminados uniaxiales, en láminas embebidas, que permiten una mayor deformación antes de agrietarse, este fenómeno se acentúa.

En la figura 5.20 se muestra la respuesta tensión deformación típica de un laminado unidireccional sometido a cortante en el plano. Seguido de una breve fase de respuesta lineal elástica el material sigue una ley no lineal. La rigidez tangente sigue siendo definida positiva pero con un pendiente mucho menor al inicial. Esta respuesta, en carga, puede ser aproximada mediante el modelo hiperelástico propuesto por Hahn y Tsai [208]:

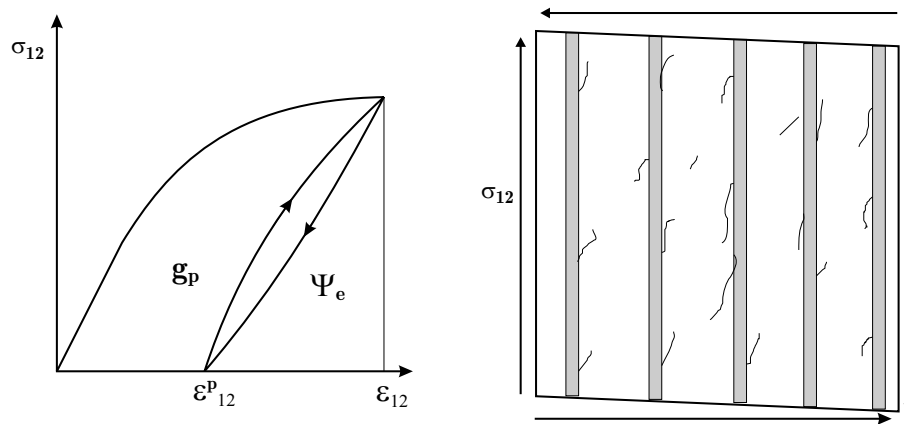


Figura 5.20: Típica respuesta tensión deformación bajo cortante en el plano. Antes de la aparición de una fisura el material ha disipado una cierta cantidad de energía ( $g_p$ ) debido al microdaño

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12} + \beta\sigma_{12}^3 \quad (5.42)$$

No obstante, los modelos hiperelásticos son completamente inapropiados para modelar procesos en que existan cambios internos en el material. Deben ser definidas un conjunto de variables internas que describan el estado del material y tengan en cuenta el histórico de deformaciones a que éste ha sido sometido.

Al descargar un material cuyas tensiones hayan sobrepasado la breve fase lineal elástica el material no descarga por el mismo camino que siguió en la carga, como asumen los modelos hiperelásticos. La rama de descarga pasa muy por debajo de la de carga con un pendiente ligeramente inferior al inicial elástico, si las tensiones llegan a cero quedan unas deformaciones permanentes ( $\gamma_{12}^p$ ). La fase de descarga y recarga produce ciclos de histéresis.

La explicación de este comportamiento debe buscarse en los procesos que tienen lugar a una escala muy menor a la macroscópica. La morfología del material compuesto con fibras orientadas, matriz frágil y una interfase entre ambos determina el comportamiento global del compuesto. Bajo cargas a cortante la tensión principal máxima se encuentra a un ángulo de  $45^\circ$  respecto la dirección de la fibra. Aparecen pequeñas grietas en la matriz y en la interfase. Ésta, más débil, tiende a direccionar las grietas provocando la separación entre la fibra y la matriz. El resultado de tener unas grietas cuya normal no coincida con la dirección de las tensiones principales

provoca la fricción y el deslizamiento de las dos caras de éstas. La presencia de estas grietas entre fibra y matriz provoca una ligera disminución de la rigidez del material, este daño se presenta distribuido a lo largo del volumen. La fricción entre las distintas grietas y el comportamiento viscoelástico de la matriz explican las deformaciones permanentes así como los ciclos de histéresis. Este proceso de daño y deslizamiento provoca una disipación de energía ( $g_p$ , en la figura 5.20).

Para modelar el comportamiento a cortante se define un modelo de plasticidad. El modelo no considera la disminución de la rigidez provocada por la microfisuración. La descarga se asume lineal elástica no disipando energía por histéresis.

### **Modelo friccional para modelar el comportamiento a cortante**

Consideremos un modelo de plasticidad clásico [209]–[211] para tratar las deformaciones permanentes en el material. La única componente que presentará deformaciones permanentes es el cortante en el plano, ( $\gamma_{12}$ ).

El modelo reológico de la figura 5.21 consta de un sistema elástico de rigidez  $G_{12}$  y un sistemas elasto-friccional conectados en serie. El modelo elasto-friccional consta de un sistema elástico de rigidez  $H'$  conectado en paralelo a un sistema friccional con endurecimiento con una tensión umbral  $\sigma_{12}^0(\gamma_{12}^i, \varepsilon_{22})$ . El modelo friccional no se deforma mientras la tensión aplicada sea menor al valor umbral;  $|\sigma_{12}^{(1)}| < \sigma_{12}^0(\gamma_{12}^i, \varepsilon_{22})$ . Se mantienen las relaciones cinemáticas  $\gamma_{12} = \gamma_{12}^e + \gamma_{12}^p$  y de equilibrio  $\sigma_{12} = \sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{12}^{(2)}$ . Los elementos elásticos tienen una relación constitutiva:  $\sigma_{12} = G_{12}\gamma_{12}^e$  y  $\sigma_{12}^{(2)} = H'\gamma_{12}^p$ .

Según estas consideraciones el sistema puede comportarse elásticamente o elasto-plásticamente según:

$$\begin{array}{ll} \text{Comportamiento elástico:} & |\sigma_{12} - H'\gamma_{12}^p| < \sigma_{12}^0(\gamma_{12}^i, \varepsilon_{22}) \\ & (5.43) \end{array}$$

$$\text{Comportamiento elasto-plástico:} \quad |\sigma_{12} - H'\gamma_{12}^p| = \sigma_{12}^0(\gamma_{12}^i, \varepsilon_{22})$$

donde la tensión umbral  $\sigma_{12}^0(\gamma_{12}^i, \varepsilon_{22})$  depende de la tensión transversal aplicada al laminado ( $\varepsilon_{22}$ ) y de la variable interna de endurecimiento plástico ( $\gamma_{12}^i$ ). Se considera la función:

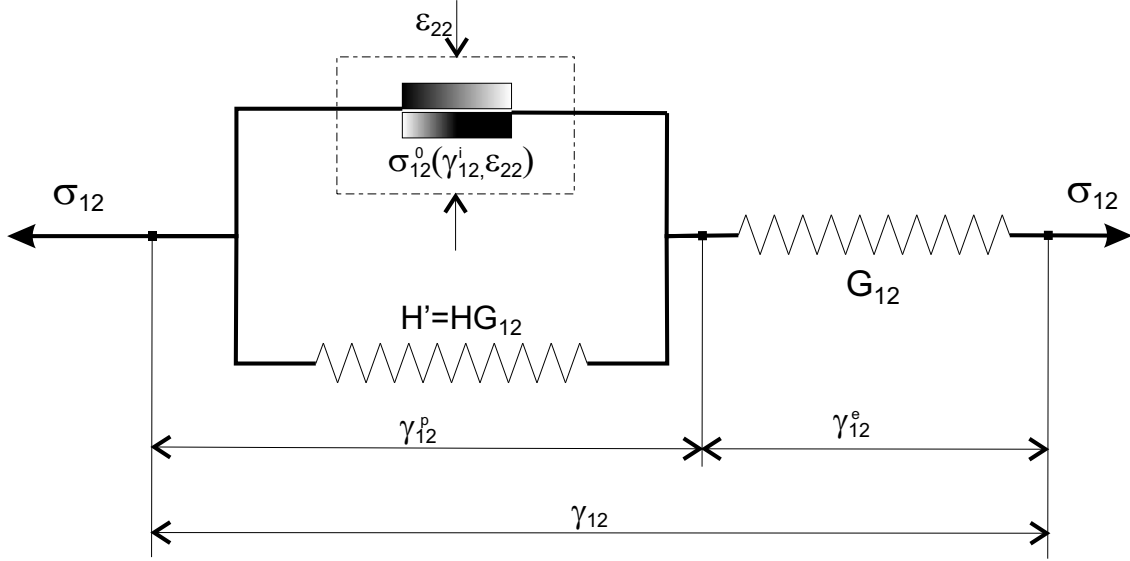


Figura 5.21: Modelo reológico elástico-friccional con endurecimiento.

$$\sigma_{12}^0(\gamma_{12}^i, \varepsilon_{22}) = \sigma_{12}^0 \frac{\log(1 + \exp(-\mu\varepsilon_{22}))}{\log(2)} + K'\gamma_{12}^i \quad (5.44)$$

Definiendo las relaciones,  $H' = G_{12}H$  y  $K' = G_{12}K$  se puede escribir una ecuación que describa el espacio de comportamiento elástico del material:

$$F_p = |\gamma_{12}^e - H\gamma_{12}^p| - \left( \gamma_{12}^0 \frac{\log(1 + \exp(-\mu\varepsilon_{22}))}{\log(2)} + K\gamma_{12}^i \right) \leq 0 \quad (5.45)$$

las constantes  $\mu$  y  $\gamma_{12}^0$  ajustan la superficie.  $\gamma_{12}^0$  es la deformación de inicio de los procesos plásticos en un ensayo a cortante puro y  $\mu \geq 0$  tiene en cuenta el efecto de las deformaciones transversales. El pendiente de la superficie para  $\varepsilon_{22} \rightarrow -\infty$  vale  $-\mu\gamma_{12}^0/\log(2)$  (figura 5.22). Los parámetros  $H$  y  $K$  regulan el endurecimiento cinemático e isótropo, respectivamente. La variable endurecimiento isótropo produce un aumento del dominio elástico mientras el endurecimiento cinemático produce un desplazamiento del dominio elástico. En la figura 5.22 se muestra el efecto que tiene en el dominio elástico al pasar de un estado de deformación 0 a A si sólo existe endurecimiento cinemático o isótropo.

Las variable de deformaciones plásticas ( $\gamma_{12}^p$ ) y de endurecimiento isótropo ( $\gamma_{12}^i$ ) son las variables internas del modelo. La ley de evolución de la variable de endurecimiento isótropo se escribe:

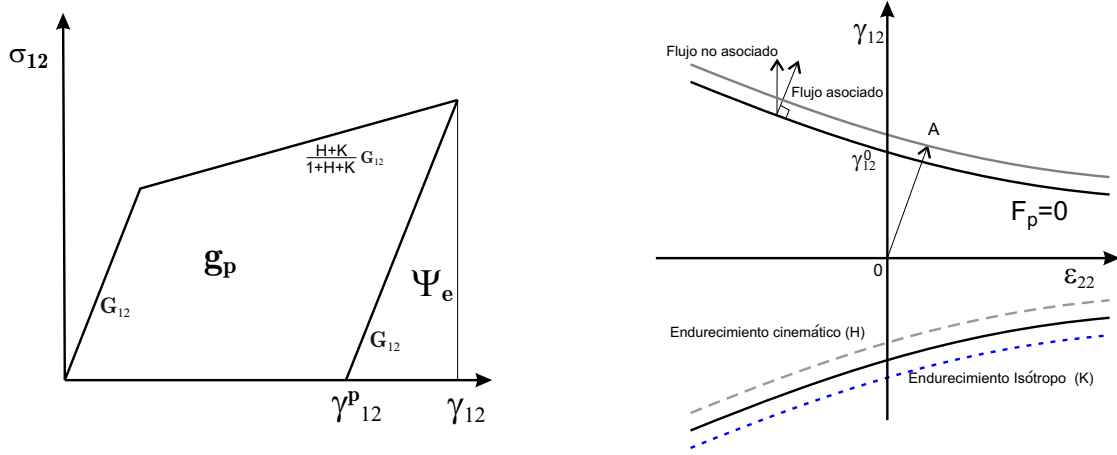


Figura 5.22: Respuesta tensión deformación del modelo y superficie de activación del proceso plástico.

$$\dot{\gamma}_{12}^i = |\dot{\gamma}_{12}^p| \quad (5.46)$$

La naturaleza irreversible del proceso plástico es expresado mediante las condiciones de carga-descarga de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\gamma}_{12}^i \geq 0 \quad ; \quad F_p \leq 0 \quad ; \quad \dot{\gamma}_{12}^i F_p = 0 \quad (5.47)$$

La determinación de la evolución de las deformaciones plásticas viene determinada por la condición de consistencia:  $\dot{F}_p = 0$ .

Al considerar que sólo existe una variables escalar plástica y no aparecen deformaciones permanentes en la dirección 22 ( $\varepsilon_{22}^p = 0$ ) no es necesario definir un potencial de evolución. La condición de consistencia es suficiente para definir el estado del sistema. No obstante, en el caso que se considerase un potencial de evolución ( $\Upsilon$ ), para que el modelo fuera equivalente debería cumplir:  $\partial\Upsilon/\partial\varepsilon_{22} = 0$ . En el caso que se considerara un modelo de plasticidad asociado como potencial de evolución debería utilizarse la superficie de activación del daño:  $\Upsilon \propto F_p$ . En este caso, si aparecerían deformaciones transversales permanentes ( $\varepsilon_{22}^p \neq 0$ ), como se representa en la figura 5.22.

**Termodinámica del modelo plástico** Si se considera el modelo reológico representado en la figura 5.21, la energía elástica almacenada se puede escribir:

$$\Psi = \frac{1}{2}G_{12}(\gamma_{12}^e)^2 + \frac{1}{2}HG_{12}(\gamma_{12}^p)^2 \quad (5.48)$$

resultando una disipación mecánica:

$$\Xi = \sigma_{12}\dot{\gamma}_{12} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (5.49)$$

Desarrollando las derivadas temporales y teniendo en cuenta:  $\dot{\gamma}_{12} = \dot{\gamma}_{12}^e + \dot{\gamma}_{12}^p$ .

$$\Xi = \left( \sigma_{12} - \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{12}^e} \right) \dot{\gamma}_{12}^e + \left( \sigma_{12} - \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{12}^p} \right) \dot{\gamma}_{12}^p = G_{12}(\gamma_{12}^e - H\gamma_{12}^p) \dot{\gamma}_{12}^p \geq 0 \quad (5.50)$$

Para garantizar una disipación positiva es necesario:

$$\dot{\gamma}_{12}^p = \dot{\gamma}_{12}^i \text{sign}(\gamma_{12}^e - H\gamma_{12}^p) \quad (5.51)$$

Resultando:

$$\Xi = G_{12} |\gamma_{12}^e - H\gamma_{12}^p| \dot{\gamma}_{12}^i \geq 0 \quad (5.52)$$

**Integración del modelo y algoritmo** Si en un paso temporal las deformaciones superan la superficie de fluencia, ecuación (5.45), indicará que las variables plásticas incrementan. Para determinar el incremento debe aplicarse la condición de consistencia ( $\dot{F}_p = 0$ ), se realiza de la siguiente manera:

$$F_p \left( (\gamma_{12}^i)_{n+1}, (\gamma_{12}^p)_{n+1} \right) = 0 \quad (5.53)$$

Las deformaciones plásticas y de endurecimiento plástico en el paso  $n + 1$  se pueden determinar:

$$\begin{aligned} (\gamma_{12}^i)_{n+1} &= (\gamma_{12}^i)_n + \Delta (\gamma_{12}^i)_{n+1} \\ (\gamma_{12}^p)_{n+1} &= (\gamma_{12}^p)_n + \Delta (\gamma_{12}^p)_{n+1} \\ &= (\gamma_{12}^p)_n + \Delta (\gamma_{12}^i)_{n+1} \text{sign} \{ (\gamma_{12})_{n+1} - (1 + H) (\gamma_{12}^p)_n \} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Resultando un incremento de la variable interna de endurecimiento:



**Algoritmo computacional**

1 - Teniendo el estado del sistema en el instante  $n$ :

$$\{(\gamma_{12}^p)_n, (\gamma_{12}^i)_n\}$$

2 - Dadas las deformaciones totales de cada punto en el paso  $n + 1$ :

$$\{(\gamma_{12})_{n+1}, (\varepsilon_{22})_{n+1}\}$$

3 - Determinar los predictores

$$\begin{aligned} (\gamma_{12}^p)_{n+1}^{\text{trial}} &= (\gamma_{12}^p)_n, \quad (\gamma_{12}^i)_{n+1}^{\text{trial}} = (\gamma_{12}^i)_n, \quad (\gamma_{12}^e)_{n+1}^{\text{trial}} = (\gamma_{12})_{n+1} - (\gamma_{12}^p)_n \\ (F_p)_{n+1}^{\text{trial}} &= \left| (\gamma_{12}^e)_{n+1}^{\text{trial}} - H (\gamma_{12}^p)_{n+1}^{\text{trial}} \right| - \\ &\quad - \left[ \gamma_{12}^0 \log(1 + \exp(-\mu(\varepsilon_{22})_{n+1})) / \log(2) + K (\gamma_{12}^i)_{n+1}^{\text{trial}} \right] \end{aligned}$$

4 - Si  $(F_p)_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$  , Respuesta elástica:       $(o)_{n+1} = (o)_{n+1}^{\text{trial}}$

En caso contrario  $(F_p)_{n+1}^{\text{trial}} > 0$  , Respuesta elasto-plástica:

$$\Delta(\gamma_{12}^i)_{n+1} = \frac{(F_p)_{n+1}^{\text{trial}}}{1 + K + H}$$

$$(\gamma_{12}^i)_{n+1} = (\gamma_{12}^i)_n + \Delta(\gamma_{12}^i)_{n+1}$$

$$(\gamma_{12}^p)_{n+1} = (\gamma_{12}^p)_n + \Delta(\gamma_{12}^i)_{n+1} \text{sign}((\gamma_{12})_{n+1} - (1 + H)(\gamma_{12}^p)_n)$$

$$(\gamma_{12}^e)_{n+1} = (\gamma_{12})_{n+1} - (\gamma_{12}^p)_{n+1}$$

5 - Determinar las tensiones y el tensor constitutivo tangente:

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^e \quad , \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C} - \mathbf{C}^p$$

Cuadro 5.8: Algoritmo para la solución del modelo elastoplástico

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_{12}^i)_{n+1} &= \frac{|(\gamma_{12})_{n+1} - (1 + H)(\gamma_{12}^p)_n|}{1 + K + H} - \\ &\quad - \frac{(\gamma_{12}^0 \log(1 + \exp(-\mu(\varepsilon_{22})_{n+1})) / \log(2) + K(\gamma_{12}^i)_n)}{1 + K + H} \end{aligned} \quad (5.55)$$

El proceso de integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante el algoritmo representado en el cuadro 5.8.

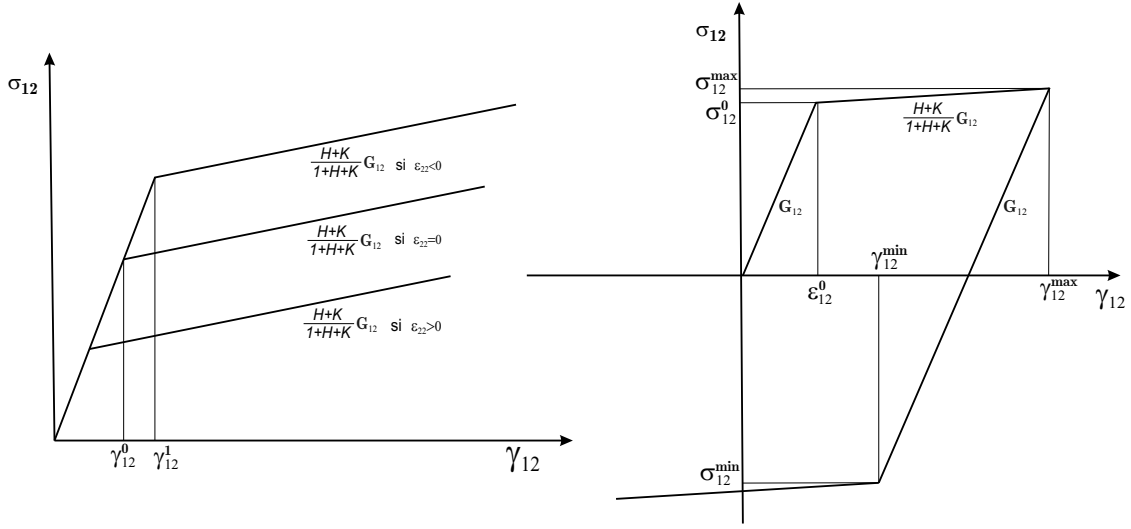


Figura 5.23: Respuesta tensión deformación variando la tensión transversal ( $\sigma_{22}$ ), y ciclo carga y descarga.

**Ajuste** Los parámetros de ajuste necesarios para el modelo elasto-plástico son, más allá de los elásticos, dos para determinar la superficie inicial de fluencia y dos más para determinar su evolución:  $\gamma_{12}^0$  es la deformación cortante en el inicio del comportamiento no lineal bajo un ensayo a cortante puro y  $\mu$ , que tiene en cuenta la influencia de las tensiones transversales ( $\sigma_{22}$ ) en el inicio del comportamiento no lineal. Si se realiza un ensayo con una tensión transversal constante y se determina el inicio de la no linealidad ( $\gamma_{12}^1$  en la figura 5.23) se puede determinar el parámetro  $\mu$ .

$$\mu = -\frac{E_2}{\sigma_{22}} \log \left( \exp \left( \log(2) \frac{\gamma_{12}^1}{\gamma_{12}^0} \right) - 1 \right) \quad (5.56)$$

Los parámetros  $H$  y  $K$  se pueden determinar mediante un ensayo con descarga (figura 5.23). Considerase se carga el material hasta que alcance el régimen no lineal, la relación tangente equivale a:  $G_{12}^T = \frac{\sigma_{12}^{\max} - G_{12}\gamma_{12}^0}{\gamma_{12}^{\max} - \gamma_{12}^0} = G_{12} \frac{H+K}{1+H+K}$ . Una vez se alcanza una deformación máxima ( $\gamma_{12}^{\max}$ ) se invierten las cargas. La descarga se considera elástica hasta que vuelve el proceso plástico, ya con cargas negativas. Si la deformación a que empiezan los procesos plásticos se denomina,  $\gamma_{12}^{\min}$ . Existe la relación:  $1 + H - K = \frac{\gamma_{12}^{\min} - \gamma_{12}^0}{\gamma_{12}^{\max} - \sigma_{12}^{\max}/G_{12}} = R$ .

$$K = \frac{1 - (G_{12}^T - 1)R}{2(G_{12} - G_{12}^T)} \quad ; \quad H = R + K - 1 \quad (5.57)$$

Si  $\sigma_{12}^{\text{máx}} = \sigma_{12}^{\text{mín}}$  el modelo es de endurecimiento isótropo, resultando  $H = 0$ .

**Relación constitutiva tangente** Para garantizar una buena convergencia numérica es necesario encontrar la relación tangente:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^T : \dot{\varepsilon} \quad ; \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C} - \mathbf{C}^p \quad (5.58)$$

Siendo  $\mathbf{C}$  la relación tangente debido a las deformaciones elásticas y  $\mathbf{C}^p$  para un caso de tensiones plana puede escribirse:

$$\mathbf{C}^p = G_{12} \frac{1}{1 + H + K} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu \gamma_{12}^0 \exp(-\mu \varepsilon_{22})}{\log(2)(1 + \exp(-\mu \varepsilon_{22}))} \text{sign}(\gamma_{12}^e - H \gamma_{12}^p) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

### 5.2.6. Inicio del agrietamiento y de la delaminación bajo esfuerzos cortantes en el plano

Si una capa cargada bajo esfuerzos cortantes se encuentra lo suficientemente confinada por un medio de elevada rigidez como un laminado multidireccional las capas se agrietan sin producir el fallo catastrófico del laminado. La geometría de la grieta resultante es igual que la provocada por las tensiones transversales. Para determinar la aparición de grietas por cortante el planteamiento es equivalente al utilizado cuando las cargas son transversales. No obstante, considerar un comportamiento lineal elástico del material produce una sobreestimación de la tensión de fallo. Camanho *et al.* [212] considera la relación hiperelástica de Hahn y Tsai [208] para determinar el inicio del agrietamiento mediante la aplicación de la mecánica de la fractura.

Tal y como ocurre bajo tensiones transversales, la aparición de una grieta a lo largo del espesor debe cumplir dos requisitos. La energía descargada debe ser lo suficiente como para desestabilizar las grietas en dirección transversal y en dirección longitudinal. El primer criterio es el crítico en láminas gruesas mientras el segundo

lo es en láminas delgadas y coincide con el tratamiento de la mecánica de la fractura finita.

Cuando las láminas son gruesas se puede aceptar la aproximación propuesta por Dvorak [198]. La mecánica de la fractura no lineal considera que la zona de proceso de fallo, la zona del material a que estará sometido a una relación no lineal, es muy pequeña y se encuentra en el extremo de la grieta. Cuando en el material se encuentra una grieta claramente definida que provoca una fuerte concentración de tensiones esta consideración es cierta. No obstante, aquí se realiza un planteamiento un poco distinto porqué se considera que existe una grieta equivalente que se define a partir de una zona con las propiedades un poco más débiles, debido a una elevada concentración de fibras o a un conjunto de defectos. Razón por la cuál se considera que el factor de concentración de tensiones es cercano a uno y todo el material se encuentra en régimen no lineal.

Antes de la aparición de una grieta a lo largo del espesor de una capa, el material ha experimentado daño a una escala inferior, se han generado microporos, desprendimiento entre la fibra y la matriz, etc. conocido como daño distribuido. Estas microgrietas producen una disipación de energía, las grietas no se direccionan en la dirección de máxima tensión con lo que los labios de las grietas friccionan disipando más energía e impidiendo la recuperación total de la deformación aplicada. La densidad de energía disipada ( $g_p$  en las figuras 5.20 y 5.22) no contribuirá al criterio de aparición de una grieta de la mecánica de la fractura, pero si debe afectar a la energía de fractura necesaria para que esta grieta aparezca debido a que en el momento de la aparición de la grieta el material se encuentra previamente dañado. El criterio de la mecánica de la fractura finita, o de la progresión longitudinal de una grieta según la mecánica de la fractura clásica, se debe escribir:

$$\Psi_6 \frac{tk_6}{N} = G_{IIc}^L(g_p) \quad (5.60)$$

donde  $t$  es el espesor y  $k_6$  un parámetro que depende de la solución del campo de tensiones y deformaciones,  $G_{IIc}^L$  es la energía de fractura crítica en modo II, la cuál es función monotónamente decreciente de la densidad de energía disipada en el material ( $g_p$ ).

Es posible considerar el efecto que tiene una grieta transversal en el campo de tensiones cortantes mediante un sólo parámetro  $k_6$ . Éste es equivalente al parámetro

$k_2$  cuando la lámina se encuentra sometida a tensiones transversales como muestra la figura 5.3. Estos parámetros se encuentran relacionados con la energía disponible para la fractura y, en el caso de considerar una ley constitutiva lineal elástica, con el factor de intensidad de tensiones. La energía almacenada en un laminado uniaxial y en una lámina embebida puede ser descrita por las funciones:

$$U_6^{\text{UD}} = \Psi_6^{\text{UD}} g (tL - k_6 a_0^2) \quad ; \quad U_6 = \Psi_6 g \left( tL - \frac{1}{N} k_6 a_0^2 \right) \quad (5.61)$$

La variación de la energía almacenada al aumentar la grieta en dirección transversal:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U_6^{\text{UD}}}{\partial a_0} = 2\Psi_6^{\text{UD}} k_6 a_0 = G_{IIIc}^{\text{T}}(g_p^{\text{UD}}) \quad ; \quad \frac{1}{g} \frac{\partial U_6}{\partial a_0} = \frac{2}{N} \Psi_6 k_6 a_0 = G_{IIIc}^{\text{T}}(g_p) \quad (5.62)$$

como el tamaño de la grieta ficticia ( $a_0$ ) es una propiedad del material, igualando las dos expresiones resulta la relación de densidad energía elástica en el momento del agrietamiento en una lámina unidireccional y en otra embebida.

$$\Psi_6 = N \Psi_6^{\text{UD}} \frac{G_{IIIc}^{\text{T}}(g_p)}{G_{IIIc}^{\text{T}}(g_p^{\text{UD}})} \quad (5.63)$$

Si se considera que la densidad de disipación previa al agrietamiento no influencia la energía de fractura se reduce a:

$$\Psi_6 = N \Psi_6^{\text{UD}} \quad (5.64)$$

La densidad de energía elástica antes de la falla se puede expresar

$$\Psi_6 = N \text{máx} \left\{ \frac{G_{IIIc}^{\text{L}}}{tk_6}, \Psi_6^{\text{UD}} \right\} \quad (5.65)$$

La densidad de energía elástica depende de la ecuación constitutiva considerada. Mediante la ley hiperelástica de Hahn y Tsai, ecuación (5.42), como se realiza en el trabajo de Camanho *et al.* [212] la densidad de energía elástica almacenada en el material se determina:

$$\Psi_6^{\text{HT}} = \int_0^{\gamma_{12}} \sigma_{12} d\gamma_{12} = \sigma_{12} \gamma_{12} - \int_0^{\sigma_{12}} \gamma_{12} d\sigma_{12} = \frac{3\beta}{4} \sigma_{12}^4 + \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12}^2 \quad (5.66)$$

las tensiones se relacionan con las deformaciones a través de la expresión (5.42).

Si se considera la relación constitutiva elasto-plástica desarrollada anteriormente la energía libre se describe con la ecuación (5.48).

$$\Psi_6^{\text{EP}} = \Psi_6^{\text{eEP}} + \Psi_6^{\text{pEP}} \quad \text{donde} \quad \Psi_6^{\text{eEP}} = \frac{1}{2}G_{12}(\gamma_{12}^e)^2 \quad \text{y} \quad \Psi_6^{\text{pEP}} = \frac{1}{2}G_{12}H(\gamma_{12}^p)^2 \quad (5.67)$$

Las dos componentes de la energía elástica del modelo elastoplástico quedan claramente explicadas mediante el modelo reológico de la figura 5.21. Teniendo en cuenta que bajo un ensayo uniaxial la deformación elástica y la plástica pueden relacionarse con las expresiones:

$$\gamma_{12}^e = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \quad \text{y} \quad \gamma_{12}^p = \frac{\langle |\sigma_{12}| - \sigma_{12}^0 \rangle}{G_{12}(H + K)} \quad (5.68)$$

Las energías se pueden escribir:

$$\Psi_6^{\text{eEP}} = \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} \quad \text{y} \quad \Psi_6^{\text{pEP}} = \frac{H}{2G_{12}} \left( \frac{\langle \sigma_{12} - \sigma_{12}^0 \rangle}{H + K} \right)^2 \quad (5.69)$$

La cuestión reside en cuál de esta energía debe considerarse en el momento de determinar el fallo de la lamina. Se consideran las energías:  $\Psi_6^{\text{EP}}$  y  $\Psi_6^{\text{eEP}}$ , además de la de Hahn y Tsai:  $\Psi_6^{\text{HT}}$ .

### Delaminación bajo cortante en el plano

Una vez generado una grieta transversal es posible que las láminas delaminen. Bajo cortante en el plano la grieta evoluciona en modo III. Para determinar la progresión de esta grieta se realiza el siguiente análisis energético

$$-\frac{\partial U_6}{\partial l} = \Psi_6 t = NG_{IIIc}^i \quad (5.70)$$

La energía elástica necesaria almacenada en el momento de la delaminación se puede determinar:

$$\Psi_6 = N \frac{G_{IIIc}^i}{t} \quad (5.71)$$

Es difícil encontrar en la bibliografía resultados experimentales que traten el agrietamiento y la delaminación bajo tensiones cortantes en el plano. A saber del

autor sólo existen trabajos que analizan el inicio del agrietamiento, no existiendo resultados que determinen la densidad de agrietamiento ni la pérdida de rigidez asociada. Chang *et al.* [213] realizó un conjunto de ensayos para determinar la resistencia a cortante "in-situ" de capas de distinto espesor embebidas en un laminado multiaxial.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
168.2	12.5	6.184	0.3
$G_{Ic}^L$ (N/mm)	$G_{IIc}^L$ (N/mm)	$S_L^{UD}$ (MPa)	
0.228	0.44	45	

Cuadro 5.9: Propiedades elásticas, energías críticas de fractura y resistencia a cortante de la capa.

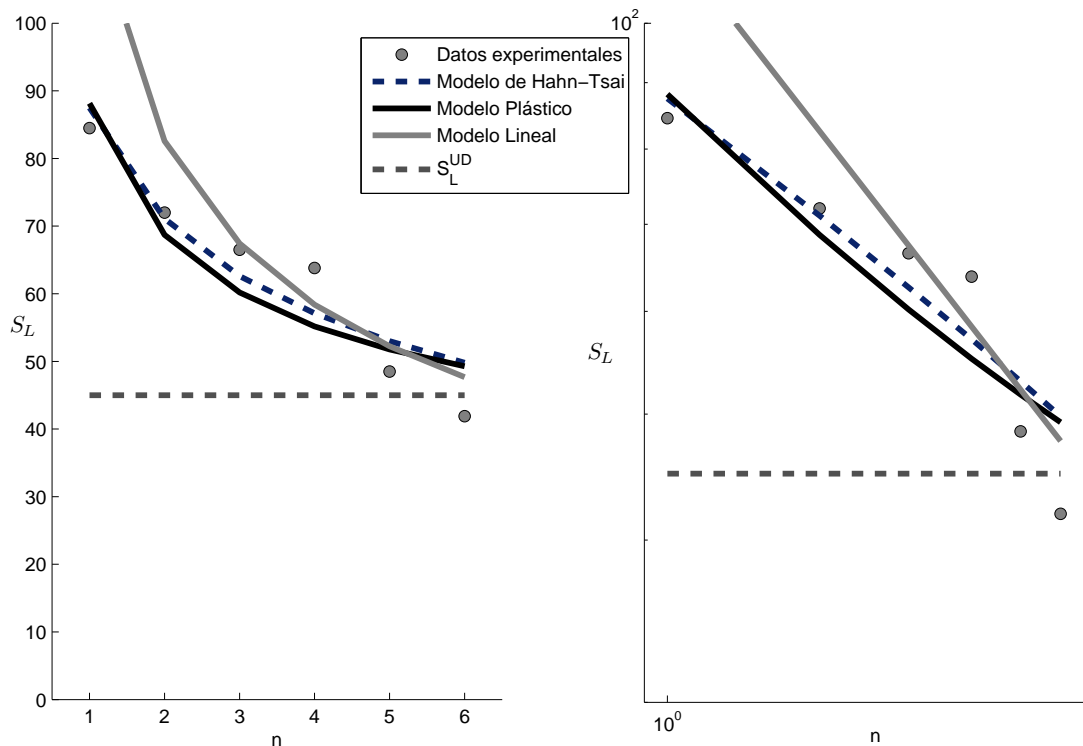


Figura 5.24: Resistencia a cortante "in-situ" según el espesor de la capa central, en escala lineal y logarítmica. Comparación de los modelos analíticos con los resultados experimentales de Chang *et al.* [213].

Chang [213] ensayó laminados  $[0_n, 90_n]_s$ ,  $n = 1, \dots, 6$  de CFRP T300/1034. Las propiedades del material se obtienen de [213] y [214] y se muestra en el cuadro 5.9. El espesor de una capa es  $t = 0,127$  mm, para ajustar el criterio de agrietamiento se considera  $k_6 = \pi$  en la ecuación (5.65).

La figura 5.24 muestra la resistencia a cortante "*in-situ*" al aumentar el número de capas del laminado. Los resultados experimentales se comparan con el modelo descrito con una ley constitutiva lineal elástica, la ley propuesta por Tsai y Hahn, cuya densidad de energía ( $\Psi_6^{\text{EP}}$ ) viene dada por la ecuación (5.66), y el modelo plástico anteriormente expuesto una densidad de energía expresada mediante la ecuación (5.67).

El ajuste de la ley de Tsai y Hahn requiere ajustar el parámetro  $\beta$ , se utiliza  $\beta = 2.44 \times 10^{-8} \text{ MPa}^{-3}$  obtenido de la referencia [212]. Para el modelo plástico se considera  $\sigma_{12}^0 = 30 \text{ MPa}$ ,  $H=0.5$  y  $K=0$ .

### 5.2.7. Evolución de la densidad de grietas y la delaminación bajo esfuerzos cortantes en el plano

El agrietamiento de la matriz no es un modo de fallo catastrófico, al aumentar las cargas se produce un aumento de la densidad de grietas. Estas grietas producen una pérdida de rigidez del laminado. Para determinar la respuesta estructural a lo largo del proceso de agrietamiento es preciso definir una variable de daño a cortante. Se asume que el comportamiento del material sigue la ley constitutiva del material mientras no se agrieta, ya sea la propuesta por Hahn y Tsai, o el modelo elastoplástico definido anteriormente. La presencia de grietas produce que en ciertas zonas del material la tensión sea nula. La variable de daño tiene en cuenta la proporción de área descargada por cada grieta y la ley constitutiva del material influencia según la proporción de la capa que sigue sustentando esfuerzos.

Para relacionar la variable de daño a cortante ( $d_6$ ) con las variables internas del modelo, densidad de grietas ( $\rho$ ) y proporción de delaminación ( $\varrho$ ), se realiza el mismo proceso anteriormente expuesto para determinar la variable de daño transversal,



ecuación (5.32), resultando:

$$\begin{aligned} d_6 &= \frac{1}{N} \rho k_6 t + \varrho & \text{si } \frac{2}{N} k_6 t \rho + \varrho < 1 \\ d_6 &= 1 - \frac{N}{4 \rho k_6 t} (1 - \varrho)^2 & \text{si } \frac{2}{N} k_6 t \rho + \varrho > 1 \end{aligned} \quad (5.72)$$

El criterio de agrietamiento puede escribirse:

$$\begin{aligned} \text{Arietamiento: } \Psi_6 &\leq \max \left\{ \frac{G_{IIc}^L}{\partial d_6 / \partial \rho}, N \Psi_6^{\text{UD}} \right\} \\ \text{Delaminación: } \Psi_6 &\leq \frac{N}{t} \frac{G_{IIIc}^i}{\partial d_6 / \partial \varrho} \end{aligned} \quad (5.73)$$

para cada una de las leyes de daño resulta:

$$\begin{aligned} \text{Arietamiento: } \Psi_6 &\leq N \max \left\{ \frac{G_{IIc}^L}{k_6 t}, \Psi_6^{\text{UD}} \right\} & \text{si } \frac{2}{N} k_6 t \rho + \varrho < 1 \\ \text{Delaminación: } \Psi_6 &\leq \frac{N G_{IIIc}^i}{t} \\ \text{Arietamiento: } \Psi_6 &\leq \max \left\{ 4 k_6 t \frac{G_{IIc}^L}{N (1 - \varrho)^2}, N \Psi_6^{\text{UD}} \right\} & \text{si } \frac{2}{N} k_6 t \rho + \varrho > 1 \\ \text{Delaminación: } \Psi_6 &\leq 2 k_6 \frac{G_{IIIc}^i}{1 - \varrho} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Bajo las mismas consideraciones de equivalencia de deformaciones, es decir, la deformación total del laminado es independiente del estado de agrietamiento pueden determinarse la densidad de agrietamiento de la lámina tal y como se ha realizado anteriormente bajo cargas transversales. Se pueden diferenciar, como anteriormente, tres tipos de laminados según el espesor de la lámina, los de tipo I con  $t < t_6^{\text{cr}}$ , los de tipo II,  $t_6^{\text{cr}} < t < t_6^{\text{del}}$  y finalmente los de tipo III, con un espesor mayor al espesor de delaminación ( $t > t_6^{\text{del}}$ ).

$$t_6^{\text{cr}} = \frac{G_{IIc}^L}{k_6 \Psi_6^{\text{UD}}} \quad ; \quad t_6^{\text{del}} = \frac{G_{IIIc}^i}{\Psi_6^{\text{UD}}} \quad (5.75)$$

La integración de la expresión (5.74) se puede expresar como muestra el cuadro 5.10 para capas de tipo I, el cuadro 5.11 para capas de tipo II y para capas muy gruesas, del tipo III, el cuadro 5.12.

$\text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\} < N \frac{G_{IIc}^L}{k_6 t}$	$\rho = 0, \varrho = 0$
$\text{si } N \frac{G_{IIc}^L}{k_6 t} < \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\} < \frac{k_6 N}{t G_{IIc}^L} (G_{IIIc}^i)^2$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\frac{N}{4k_6 t G_{IIc}^L} \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\}} \\ \varrho = 0 \end{array} \right.$
$\text{si } \frac{k_6 N}{t G_{IIc}^L} (G_{IIIc}^i)^2 < \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{N G_{IIIc}^i}{2t G_{IIc}^L} \\ \varrho = 1 - \frac{k_6 N (G_{IIIc}^i)^2}{t G_{IIc}^L \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\}} \end{array} \right.$

Cuadro 5.10: Evolución de la densidad de grietas y la proporción de delaminación para capas de tipo I bajo cargas a cortante.

$\text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\} < N \Psi_6^{UD}$	$\rho = 0, \varrho = 0$
$\text{si } N \Psi_6^{UD} < \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\} < \frac{k_6 N}{t G_{IIc}^L} (G_{IIIc}^i)^2$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\frac{N}{4k_6 t G_{IIc}^L} \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\}} \\ \varrho = 0 \end{array} \right.$
$\text{si } \frac{k_6 N}{t G_{IIc}^L} (G_{IIIc}^i)^2 < \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{N G_{IIIc}^i}{2t G_{IIc}^L} \\ \varrho = 1 - \frac{k_6 N (G_{IIIc}^i)^2}{t G_{IIc}^L \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\}} \end{array} \right.$

Cuadro 5.11: Evolución de la densidad de grietas y la proporción de delaminación para capas de tipo II bajo cargas a cortante.

$$\begin{array}{l}
 \text{si } \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\} < N \max \left\{ \frac{G_{IIc}^L}{k_6 t}, \Psi_6^{\text{UD}} \right\} \quad \rho = 0, \varrho = 0 \\
 \text{si } N \max \left\{ \frac{G_{IIc}^L}{k_6 t}, \Psi_6^{\text{UD}} \right\} < \max_{s=0,t} \{\Psi_6^s\} \quad \rho \approx 0, \varrho = 1
 \end{array}$$

Cuadro 5.12: Evolución de la densidad de grietas y la proporción de delaminación para capas de tipo III bajo cargas a cortante.

En la figura 5.25 se muestra la respuesta tensión deformación a cortante puro utilizando la ley constitutiva de Hahn-Tsai, expresión (5.66) y el modelo plástico. El modelo plástico 1 considera como energía libre  $\Psi_6^{\text{EP}}$  y el modelo plástico 2 utiliza  $\Psi_6^{e\text{EP}}$  tal y como se encuentran definidas en la expresión (5.67) y siguientes.

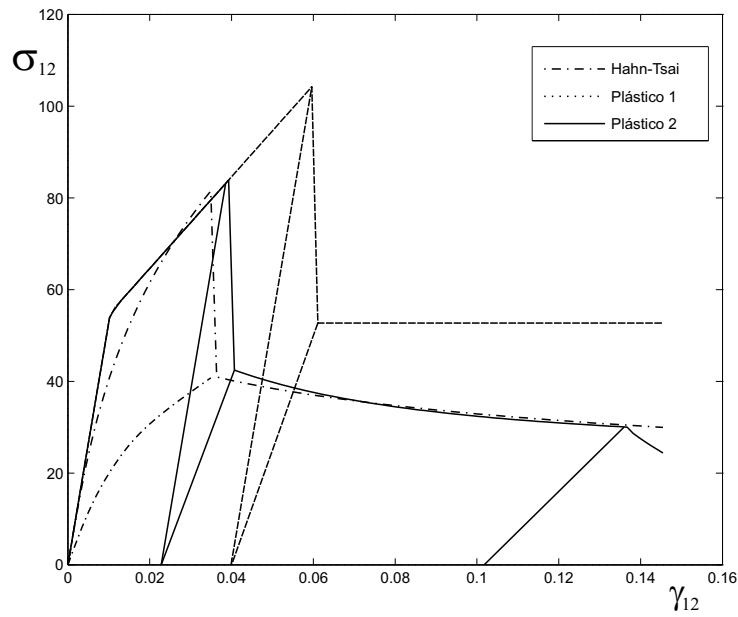


Figura 5.25: Respuesta tensión deformación a cortante con agrietamiento y delaminación ( $\sigma_{12}$ ) según el modelo constitutivo utilizado.

### 5.2.8. Determinación de los parámetros elásticos $k_2$ y $k_6$

Los parámetros de ajuste del modelo  $k_2$  y  $k_6$  dependen de la solución de un problema de elasticidad, o elastoplasticidad, según la ley constitutiva utilizada. Éste se encuentra relacionada con el factor de intensidad de tensiones y la energía disponible para la fractura.

Según las consideraciones de Dvorak [198] éste equivale a  $k_2 = k_6 = \pi$  lo que corresponde a una grieta en un cuerpo elástico. Cuando la grieta se encuentra en el extremo el valor equivale a  $k_2 = 1,12^2\pi$  y  $k_6 = \pi$ . Estos valores coinciden con los que se pueden encontrar en las tablas de factores de intensidad de tensiones en cualquier libro de mecánica de la fractura [215]. No obstante, los problemas tabulados corresponden a la solución de una grieta central en una placa isótropa de dimensión infinita o una grieta en una esquina de una placa semi-infinita.

No obstante el valor  $k_6$  pierde cierto significado cuando se utiliza una ley no lineal, ya sea la propuesta por Hahn y Tsai, ecuación (5.42), o la ley elastoplástica propuesta, en estos casos la respuesta deja de ser proporcional y  $k_6$  deja de ser constante.

Existen varias alternativas para ajustar estos valores. En la figura 5.26 se comparan distintas soluciones propuestas en la bibliografía [216] para determinar la longitud de recuperación de las tensiones al alejarse de la grieta. Ajustando el parámetro  $k_i$  que minimize el error de las distintas soluciones se puede determinar una aproximación de este parámetro.

Otra alternativa para la determinación de los parámetros  $k_i$  resulta de ajustar a partir del conocimiento de la aparición de la primera grieta en capas embebidas en un medio elástico de distinto espesor, es decir, a partir de la figura 5.6.

Se puede determinar los parámetros  $k_i$  mediante el método de los elementos finitos. El modelo mostrado en la figura 5.27 representa una grieta en el laminado sometido a tracción transversal. Si la longitud de la grieta se encuentra lo suficientemente alejada puede considerarse que la densidad de grietas es baja ( $\rho = 1/L$ ), menor a la densidad límite de la ecuación (5.23), en este caso se puede relacionar la densidad de grietas, el daño y el parámetro  $k_i$  mediante la expresión (5.24) resultando:

$$k_i = \frac{Nd_i}{\rho t} \quad (5.76)$$

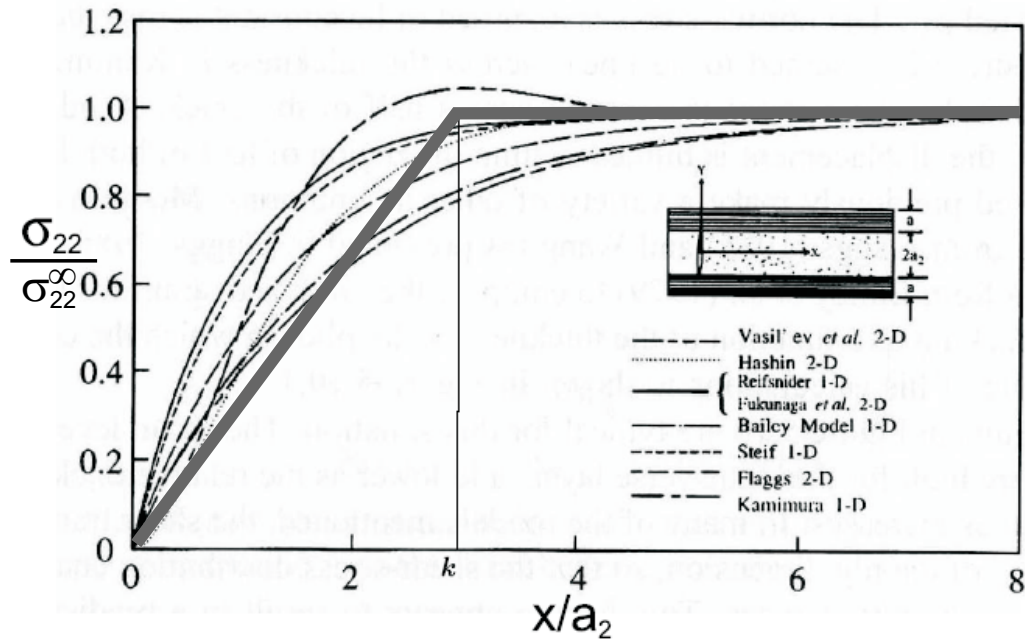


Figura 5.26: Distancia de recuperación de las tensiones transversales con la presencia de una grieta, según varios modelos, gráfico de Reifsnider [216] donde se le ha sobrepuesto la ley propuesta en esta tesis, línea gris gruesa, con el parámetro de ajuste  $k$ .

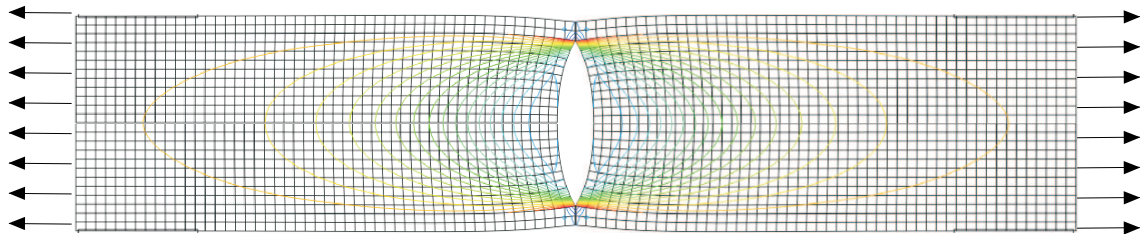


Figura 5.27: Efecto en el campo de tensiones transversales ( $\sigma_{22}$ ) de una grieta embebida en un laminado.

Para determinar la variable de daño se puede realizar mediante la relación de densidades de energía almacenadas en la lámina dañada y la no dañada:

$$d_i = 1 - \Psi_i^d / \Psi_i \quad (5.77)$$

donde  $\Psi_i^d$  es la media de la densidad de energía elástica almacenada en el modelo del dañado (figura 5.27) y  $\Psi_i$  la densidad de energía elástica que tendría el laminado sometido al mismo desplazamiento sin la grieta.

También es posible determinar el daño comparando la respuesta global del modelo con la grieta y con la de un modelo sin ninguna grieta.

$$d_i = 1 - \frac{N_i^d}{N_i} + \frac{E_1 h_1}{E_2 h_2} \left( 1 - \frac{N_i^d}{N_i} \right) \quad (5.78)$$

donde  $N_i^d$  es la fuerza por unidad de longitud de todo el laminado con una grieta y  $N_i$  la fuerza por unidad de longitud de el laminado sin la grieta.  $E_1$  y  $E_2$  es la rigidez de las láminas externas y de la lámina grietada respectivamente,  $h_i$  son los respectivos espesores.

Si se realiza un modelo de elementos finitos como el mostrado en la figura 5.27 con los parámetros elásticos:

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$h_1$ (mm)	$h_2$ (mm)
147.3	12.76	4.4	0.0	0.1	1.0

La densidad de grietas equivale a  $\rho = 1/(2L) = 1/5$ . El valor de la variable de daño:  $d = 1 - \Psi_2^d/\Psi_2 = 0,2633$  y  $d_2 = 1 - \frac{N_2^d}{N_2} + \frac{E_1 h_1}{E_2 h_2} \left( 1 - \frac{N_2^d}{N_2} \right) = 0,2425$ . Lo que, utilizando la expresión (5.76) resulta:  $k_2 = 2,6327$  y  $k_2 = 2,4252$  respectivamente.

Si se aumenta el módulo de Young de la capa exterior hasta  $E_1 = 14730$  GPa, los resultados del parámetro resultan:  $k_2 = 2,2982$  y  $k_2 = 2,2192$  respectivamente.

### 5.2.9. Agrietamiento bajo estados de tensión no uniformes

El tratamiento anterior es útil para determinar el agrietamiento de la matriz en en probetas sometidas a un estado uniforme de tensiones. No obstante, este es un problema de interés académico pero poco interés industrial pues las piezas utilizadas en la construcción presentan discontinuidades geométricas que producen una distribución no uniforme del campo de tensiones. En la modelización estructural se utiliza la cinemática de la teoría de cáscaras y modelos constitutivos desarrollados a nivel de capa, conocidos como mesomodelos. Es interesante determinar si el modelo de agrietamiento puede ser utilizado como ley de evolución del daño de un mesomodelo.

La aparición de una grieta en la matriz se determina según el espesor de la capa. Si ésta es gruesa la aparición de una grieta requiere primero que se propague transversalmente y luego longitudinalmente. Una vez generada una grieta a lo largo

de todo el espesor de la capa la tensión necesaria para que esta avance disminuye. Contrariamente cuando el grosor de la capa es lo suficientemente pequeño el criterio de iniciación de la grieta es el mismo que el de progresión.

Si se considera una lámina con un agujero (figura 5.28) el agrietamiento de la matriz empieza, lógicamente, en el lugar donde las tensiones son mayores. Si se asume que ésta se encuentra confinada por un medio elástico mucho más rígido se puede admitir que el campo de deformaciones permanece prácticamente inalterado al aumentar el agrietamiento.

En la figura 5.28 se muestra el campo de tensiones alrededor del agujero. La primera grieta aparece cuando la tensión máxima llega a la resistencia "in-situ" de la capa, líneas  $\sigma_{22}^{(a)}(\mathbf{x})$ . En el caso de capas delgadas la resistencia es regida por el criterio de propagación longitudinal, su resistencia es independiente de la existencia de una grieta inicial, en este caso la propagación es estable. Si la capa es gruesa una grieta aparece cuando se satisface el criterio de propagación transversal. No obstante, una vez generada una grieta a través de todo el espesor la resistencia viene determinada por el criterio de propagación longitudinal y la resistencia disminuye. Esta grieta crece de manera inestable hasta alcanzar una región con las tensiones menores a las requeridas para la propagación longitudinal de la grieta. A partir de este momento la grieta progresa de una manera estable al incrementar las cargas según la forma de la curva de tensiones  $\sigma_{22}^{(b)}(\mathbf{x})$ .

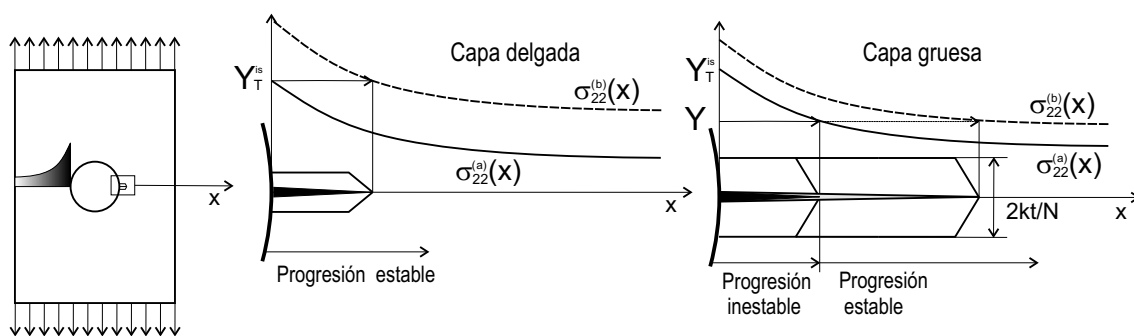


Figura 5.28: Progresión de una grieta en la matriz en una probeta con una distribución de tensiones no uniforme. Para una capa delgada y para una gruesa.

Este análisis considera que en dirección normal a la grieta el campo de tensiones global puede considerarse aproximadamente constante una distancia  $2kt/N$ , ya que así se ha determinado la tensión de propagación de la grieta. Evidentemente al

disminuir el espesor de la capa esta hipótesis es más cierta.

En definitiva, es posible utilizar el modelo de de daño en elementos estructurales siempre y cuando las capas sean lo suficientemente delgadas, de tipo I. Afortunadamente las capas delgadas son las más interesantes para la fabricación pues ofrecen ciertas ventajas. 1) La resistencia *"in-situ"* es mayor, 2) La delaminación es más difícil. 3) Permite una mayor disipación de energía y una densidad de agrietamiento mayor. Por estas razones es práctica de buen diseño mecánico [2] el utilizar capas delgadas.

Cuando la capa es más gruesa, del tipo II o III, la resistencia de la capa es función del estado de los puntos adyacentes. Si la capa es de tipo II la tensión de progresión de una grieta es distinta según si existe una grieta o no. Evidentemente si las propiedades de un punto material dependen del estado de puntos cercanos el modelo debe ser no local.

### 5.2.10. Agrietamiento y delaminación bajo tensiones combinadas en el plano

Hasta el momento se ha considerado el agrietamiento de láminas sometidas a ensayos uniaxiales. Cuando el agrietamiento se produce por una combinación de tensiones transversales y cortantes el agrietamiento y la delaminación se producen en modo mixto. Conocidos los valores de energía crítica de fractura en modo I y II de la matriz, o en modo II y III de la interfase es necesario determinar la energía crítica de fractura cuando las cargas no son uniaxiales. Se proponen varias soluciones según la interacción que se considere, se estudian tres casos: sin interacción, lo que corresponde a un criterio de máxima tensión, el criterio propuesto por Hahn y el criterio cuadrático propuesto por Hashin.

En esta sección sólo se consideraran las capas de tipo I que son las que el proceso de iniciación y crecimiento de las grietas viene regido por el criterio de progresión longitudinal. Éstas corresponden a las capas delgadas con un espesor menor a:

$$t \leq \min \left\{ \frac{G_{Ic}^L}{k_2 \Psi_2^{UD}}, \frac{G_{IIc}^L}{k_6 \Psi_6^{UD}} \right\} \quad (5.79)$$

En la sección anterior se ha mostrado que estas capas son las únicas que pueden ser tratadas de forma consistente con la teoría de laminados cuando los campos de tensiones no son uniformes.



**Criterio de máxima tensión**

La solución más simple, y poco realista, es considerar que los distintos modos de agrietamiento, en modo I y II, y de delaminación, en modo II y III, se encuentran desacoplados. El resultado es el criterio de máxima tensión y se puede escribir:

$$\text{Arietamiento: } \Psi_2 \leq \frac{G_{Ic}^L}{\partial d_2 / \partial \rho} \quad \text{y} \quad \Psi_6 \leq \frac{G_{IIc}^L}{\partial d_6 / \partial \rho} \quad (5.80)$$

$$\text{Delaminación: } \Psi_2 \leq \frac{N}{t} \frac{G_{IIc}^i}{\partial d_2 / \partial \rho} \quad \text{y} \quad \Psi_6 \leq \frac{N}{t} \frac{G_{IIIc}^i}{\partial d_6 / \partial \rho}$$

La energía crítica de fractura en modo mixto, I-II de la matriz se puede obtener mediante la expresión:

$$G_c^L = \Psi_2 \frac{\partial d_2}{\partial \rho} + \Psi_6 \frac{\partial d_6}{\partial \rho} \quad (5.81)$$

para cualquier combinación de energías libres ( $\Psi_2$ ,  $\Psi_6$ ) que produzcan agrietamiento. La energía crítica de fractura en modo mixto con el criterio de agrietamiento propuesto en la expresión (5.80) resulta:

$$\begin{aligned} G_c^L &= G_{Ic}^L \left( 1 + \frac{a}{1-a} \frac{k_6}{k_2} \right) \quad \text{si} \quad a < \frac{k_2 G_{IIc}^L}{k_6 G_{Ic}^L + k_2 G_{IIc}^L} \\ G_c^L &= G_{IIc}^L \left( 1 + \frac{1-a}{a} \frac{k_2}{k_6} \right) \quad \text{si} \quad a > \frac{k_2 G_{IIc}^L}{k_6 G_{Ic}^L + k_2 G_{IIc}^L} \end{aligned} \quad (5.82)$$

donde:  $a = \frac{\Psi_6}{\Psi_6 + \Psi_2}$ .

La energía en modo mixto, II-III de la interfase se puede obtener mediante la expresión:

$$G_c^i = \left( \Psi_2 \frac{\partial d_2}{\partial \rho} + \Psi_6 \frac{\partial d_6}{\partial \rho} \right) \frac{t}{N} \quad (5.83)$$

para cualquier combinación de energías libres ( $\Psi_2$ ,  $\Psi_6$ ) que produzcan delaminación. Si se considera el criterio de no interacción resulta una energía crítica en modo mixto:

$$\begin{aligned} G_c^i &= G_{IIc}^i \left( 1 + \frac{a}{1-a} \right) \quad \text{si} \quad a < \frac{G_{IIIc}^i}{G_{IIc}^i + G_{IIIc}^i} \\ G_c^i &= G_{IIIc}^i \left( 1 + \frac{1-a}{a} \right) \quad \text{si} \quad a > \frac{G_{IIIc}^i}{G_{IIc}^i + G_{IIIc}^i} \end{aligned} \quad (5.84)$$

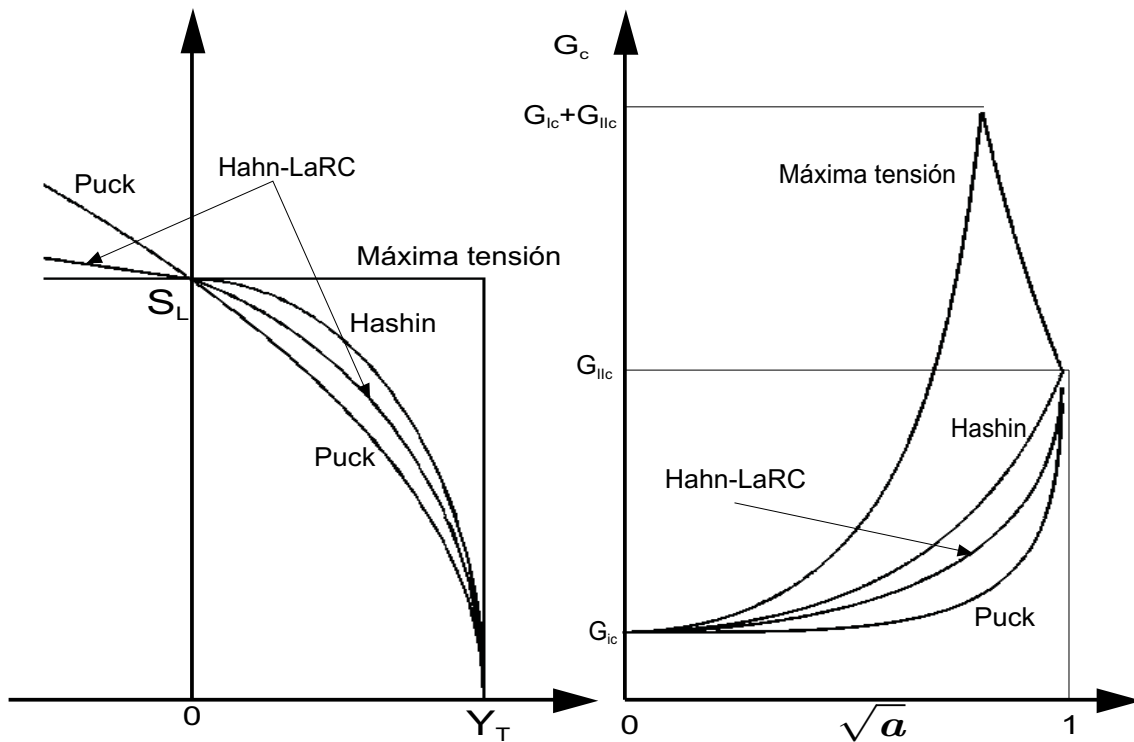


Figura 5.29: Superficie de agrietamiento bajo tensiones transversales y cortantes en el plano. Energía crítica de fractura en modo mixto. Considerando  $k_6 = k_2$

En la figura 5.29 se muestra la superficie de agrietamiento en el espacio de tensiones y la energía crítica de fractura en modo mixto.

Para garantizar el cumplimiento de los criterios de agrietamiento y de delaminación expresados por las ecuaciones (5.80) es necesario solucionar los algoritmos presentados en los cuadros 5.3 y 5.10, las variables de agrietamiento y de delaminación resultantes serán el máximo de ambos algoritmos. Conocidos los valores de las variables internas ( $\rho$  y  $\varrho$ ) el daño transversal y a cortante puede ser determinado mediante las expresiones (5.32) y (5.72).

### Criterio cuadrático o de Hashin

El criterio de iniciación de Hashin-Rotem [131][132] considera que la matriz se romperá para cualquier estado de tensiones que no cumpla la desigualdad:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_L}\right)^2 \leq 1 \quad (5.85)$$

siendo  $Y_T$  y  $S_L$  la resistencia a tracción transversal y a cortante en el plano respectivamente. Como se ha mostrado anteriormente el valor de estas resistencias dependen del espesor de la capa.

Teniendo en cuenta que la energía elástica almacenada es proporcional al cuadrado de la tensión el criterio de interacción tanto de agrietamiento como de delaminación se pueden escribir:

$$\text{Arietamiento: } \frac{\Psi_2}{G_{Ic}^L} \frac{\partial d_2}{\partial \rho} + \frac{\Psi_6}{G_{IIc}^L} \frac{\partial d_6}{\partial \rho} \leq 1 \quad (5.86)$$

$$\text{Delaminación: } \frac{t\Psi_2}{NG_{IIc}^i} \frac{\partial d_2}{\partial \varrho} + \frac{t\Psi_6}{NG_{IIIc}^i} \frac{\partial d_6}{\partial \varrho} \leq 1$$

La energía crítica de fractura en modo mixto se determina aplicando la expresión (5.81) para todas las combinaciones de densidades de energía libre que satisfagan el criterio de agrietamiento de la expresión (5.86):

$$G_c^L = G_{Ic}^L G_{IIc}^L \frac{ak_6 + (1-a)k_2}{(1-a)G_{IIc}^L k_2 + aG_{Ic}^L k_6} \quad (5.87)$$

donde:  $a = \frac{\Psi_6}{\Psi_6 + \Psi_2}$

La energía crítica de delaminación en modo mixto II-III se determina aplicando la expresión (5.83) para todas las combinaciones de densidades de energía libre que satisfagan el criterio de delaminación de la expresión (5.86):

$$G_c^i = \frac{G_{IIc}^i G_{IIIc}^i}{aG_{IIc}^i + (1-a)G_{IIIc}^i} \quad (5.88)$$

En la figura 5.29 se muestra la superficie de agrietamiento en el espacio de tensiones y la energía crítica de fractura en modo mixto.

El criterio de agrietamiento y delaminación expresado en la ecuación (5.86) debe ser integrada teniendo en cuenta las distintas leyes de daño, éstas relacionan la densidad de grietas y la proporción de delaminación con la variación de rigidez. Estas leyes se expresan mediante dos funciones una para una densidad de grietas elevada y otra para una densidad baja. Para diferenciar el régimen de cada ley se definen las variables  $\chi_2 = \frac{2}{N}k_2t\rho + \varrho$  y  $\chi_6 = \frac{2}{N}k_6t\rho + \varrho$ . Bajo esfuerzos transversales la densidad de grietas es baja si  $\chi_2 < 1$  y elevada en caso contrario. Bajo esfuerzos a cortante la densidad de grietas es baja si  $\chi_6 < 1$  y elevada en caso contrario.

si $\chi_2 < 1$ y $\chi_6 < 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Agrietamiento : } \left( \frac{k_2}{G_{Ic}^L} \Psi_2 + \frac{k_6}{G_{IIc}^L} \Psi_6 \right) \frac{t}{N} \leq 1 \\ \text{Delaminación : } \left( \frac{1}{G_{IIIc}^i} \Psi_2 + \frac{1}{G_{IIIc}^i} \Psi_6 \right) \frac{t}{N} \leq 1 \end{array} \right.$
si $\chi_2 < 1$ y $\chi_6 > 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Agrietamiento : } \frac{tk_2}{NG_{Ic}^L} \Psi_2 + \frac{N(1-\varrho)^2}{4tk_6G_{IIc}^L\rho^2} \Psi_6 \leq 1 \\ \text{Delaminación : } \frac{t}{NG_{IIIc}^i} \Psi_2 + \frac{1-\varrho}{2k_6G_{IIIc}^i\rho} \Psi_6 \leq 1 \end{array} \right.$
si $\chi_2 > 1$ y $\chi_6 < 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Agrietamiento : } \frac{N(1-\varrho)^2}{4tk_2G_{Ic}^L\rho^2} \Psi_2 + \frac{tk_2}{NG_{IIc}^L} \Psi_6 \leq 1 \\ \text{Delaminación : } \frac{1-\varrho}{2k_2G_{IIIc}^i\rho} \Psi_2 + \frac{t}{NG_{IIIc}^i} \Psi_6 \leq 1 \end{array} \right.$
si $\chi_2 > 1$ y $\chi_6 > 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Agrietamiento : } \frac{N(1-\varrho)^2}{4t\rho^2} \left( \frac{1}{k_2G_{Ic}^L} \Psi_2 + \frac{1}{k_6G_{IIc}^L} \Psi_6 \right) \leq 1 \\ \text{Delaminación : } \frac{1-\varrho}{2\rho} \left( \frac{1}{k_2G_{IIIc}^i} \Psi_2 + \frac{1}{k_6G_{IIIc}^i} \Psi_6 \right) \leq 1 \end{array} \right.$

Cuadro 5.13: Condiciones de evolución de la densidad de grietas y proporción de la delaminación para el criterio de interacción cuadrático.

Según la densidad de grietas y delaminación los distintos criterios de avance de las variables se puede escribir como muestra el cuadro 5.13. En el caso que  $k_2 = k_6$  se tiene  $\chi_2 = \chi_6$ .

### Superficie de Hahn

Wu y Reuter [217] realizaron un conjunto de experimentos ensayando especímenes en modo I, modo II y modo mixto. Basándose en estos experimentos Hahn [218] propuso un criterio en modo mixto que se puede escribir mediante los factores de intensidad de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$ :

$$(1 - g^L) \frac{K_I}{K_{Ic}} + g^L \left( \frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^2 + \left( \frac{K_{II}}{K_{IIc}} \right)^2 \leq 1 \quad (5.89)$$

donde  $g^L = \frac{G_{Ic}^L}{G_{IIc}^L}$ .

Este criterio puede ser reescrito en función de la energía almacenada, la energía crítica de fractura y las leyes de daño como:

$$\text{Agrietamiento: } (1 - g^L) \sqrt{\frac{\Psi_2}{G_{Ic}^L} \frac{\partial d_2}{\partial \rho}} + g^L \frac{\Psi_2}{G_{Ic}^L} \frac{\partial d_2}{\partial \rho} + \frac{\Psi_6}{G_{IIc}^L} \frac{\partial d_6}{\partial \rho} \leq 1 \quad (5.90)$$

$$\text{Delaminación: } (1 - g^i) \sqrt{\frac{t\Psi_2}{NG_{IIc}^i} \frac{\partial d_2}{\partial \varrho}} + g^i \frac{t\Psi_2}{NG_{IIc}^i} \frac{\partial d_2}{\partial \varrho} + \frac{t\Psi_6}{NG_{IIIc}^i} \frac{\partial d_6}{\partial \varrho} \leq 1$$

La energía crítica de fractura en modo mixto resultante del criterio de Hahn se determina aplicando la expresión (5.81) para todas las combinaciones de densidades de energía libre que satisfagan el criterio de agrietamiento de la expresión (5.90):

$$G_c^L = \frac{g^N G_{IIc}^L (1 + r)}{2(g^L + r g^N)^2} \left( 1 + (g^L)^2 + 2r g^N - (1 - g^L) \sqrt{(1 + g^L)^2 + 4r g^N} \right) \quad (5.91)$$

donde  $r = \frac{a}{1-a} \frac{k_6}{k_2}$ ,  $a = \frac{\Psi_6}{\Psi_6 + \Psi_2}$  y  $g^N = g^L$ .

La energía crítica de delaminación en modo mixto II-III se determina aplicando la expresión (5.83) para todas las combinaciones de densidades de energía libre que satisfagan el criterio de delaminación de la expresión (5.90):

$$G_c^i = \frac{g^N G_{IIIc}^i (1 + r)}{2(g^i + r g^N)^2} \left( 1 + (g^i)^2 + 2r g^N - (1 - g^i) \sqrt{(1 + g^i)^2 + 4r g^N} \right) \quad (5.92)$$

donde  $g^i = g^N = \frac{G_{IIc}^i}{G_{IIIc}^i}$ ,  $r = \frac{a}{1-a}$  y  $a = \frac{\Psi_6}{\Psi_6 + \Psi_2}$ .

En la figura 5.29 se muestra la superficie de agrietamiento en el espacio de tensiones y la energía crítica de fractura en modo mixto. Según el régimen de daño el criterio de avance de las variables internas ( $\rho$  y  $\varrho$ ) se puede expresar según se muestra en el cuadro 5.14.

Las distintas posibilidades de interacción entre las tensiones transversales y cortantes producen distintas superficies de fallo. Es bien conocido [111][112] que pequeñas tensiones a compresión transversal produce un efecto beneficioso en la resistencia a cortante de la matriz. Existen criterios de fallo, como el LaRC03/04 [123][124] o el criterio de Puck [113]–[115] que incorporan esta tendencia en el incremento de la resistencia, bien explicada mediante modelos que consideran la fricción en el plano de fallo. Para tratar este efecto es necesario considerar el efecto que esta

si	$\chi_2 < 1$	y	$\chi_6 < 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{A: } (1 - g^L) \sqrt{\frac{k_2 t}{NG_{Ic}^L}} \Psi_2 + g^L \frac{k_2 t}{NG_{Ic}^L} \Psi_2 + \frac{k_6 t}{NG_{IIIc}^L} \Psi_6 \leq 1 \\ \text{D: } (1 - g^i) \sqrt{\frac{t}{NG_{IIIc}^i}} \Psi_2 + g^i \frac{t}{NG_{IIIc}^i} \Psi_2 + \frac{t}{NG_{IIIc}^i} \Psi_6 \leq 1 \end{array} \right.$
si	$\chi_2 < 1$	y	$\chi_6 > 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{A: } (1 - g^L) \sqrt{\frac{N(1-\rho)^2}{4k_2 t G_{Ic}^L \rho^2}} \Psi_2 + g^L \frac{N(1-\rho)^2}{4k_2 t G_{Ic}^L \rho^2} \Psi_2 + \frac{tk_6}{NG_{Ic}^L} \Psi_6 \leq 1 \\ \text{D: } (1 - g^i) \sqrt{\frac{1-\rho}{4k_2 G_{IIIc}^i \rho}} \Psi_2 + g^i \frac{1-\rho}{4k_2 G_{IIIc}^i \rho} \Psi_2 + \frac{t}{NG_{IIIc}^i} \Psi_6 \leq 1 \end{array} \right.$
si	$\chi_2 > 1$	y	$\chi_6 < 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{A: } (1 - g^L) \sqrt{\frac{k_2 t}{NG_{Ic}^L}} \Psi_2 + g^L \frac{k_2 t}{NG_{Ic}^L} \Psi_2 + \frac{N(1-\rho)^2}{4k_6 t G_{Ic}^L \rho^2} \Psi_6 \leq 1 \\ \text{D: } (1 - g^i) \sqrt{\frac{t}{NG_{IIIc}^i}} \Psi_2 + g^i \frac{t}{NG_{IIIc}^i} \Psi_2 + \frac{1-\rho}{4k_2 G_{IIIc}^i \rho} \Psi_6 \leq 1 \end{array} \right.$
si	$\chi_2 > 1$	y	$\chi_6 > 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{A: } (1 - g^L) \sqrt{\frac{N(1-\rho)^2}{4k_2 t G_{Ic}^L \rho^2}} \Psi_2 + g^L \frac{N(1-\rho)^2}{4k_2 t G_{Ic}^L \rho^2} \Psi_2 + \frac{N(1-\rho)^2}{4k_6 t G_{Ic}^L \rho^2} \Psi_6 \leq 1 \\ \text{D: } (1 - g^i) \sqrt{\frac{1-\rho}{4k_2 G_{IIIc}^i \rho}} \Psi_2 + g^i \frac{1-\rho}{4k_2 G_{IIIc}^i \rho} \Psi_2 + \frac{1-\rho}{4k_2 G_{IIIc}^i \rho} \Psi_6 \leq 1 \end{array} \right.$

Cuadro 5.14: Condiciones de evolución de la densidad de grietas y proporción de la delaminación para el criterio de interacción de Hahn.

compresión produce en la densidad de energía libre a cortante ( $\Psi_6^m$ ), una posible modificación es:

$$\Psi_6^m = \left( \Psi_6 + \eta_L \langle -\tilde{\sigma}_{22} \rangle \left( \eta_L \langle -\tilde{\sigma}_{22} \rangle \frac{\tilde{\gamma}_{12}}{2\tilde{\sigma}_{12}} - |\tilde{\gamma}_{12}| \right) \right) \frac{\langle |\tilde{\sigma}_{12}| - \eta_L \langle -\tilde{\sigma}_{22} \rangle \rangle}{\langle |\tilde{\sigma}_{12}| - \eta_L \langle -\tilde{\sigma}_{22} \rangle \rangle} \quad (5.93)$$

En el caso de utilizar una ley a cortante lineal resulta:

$$\Psi_6^m = \frac{1}{2G_{12}} \langle |\tilde{\sigma}_{12}| - \eta_L \langle -\tilde{\sigma}_{22} \rangle \rangle^2 \quad (5.94)$$

donde  $\eta_L$  es el coeficiente de fricción longitudinal [123][124]. Combinada con la ecuación (5.90) resulta el criterio LaRC03.

**Criterio de Puck**

El criterio de Puck [113]–[115] considera que el fallo transversal se puede dividir en tres modos: A, B y C. El modo A corresponde al agrietamiento de la matriz bajo tensiones transversales a tracción y cortantes en el plano, el resultado es una grieta con una normal perpendicular al laminado y a las fibras. Si no se consideran tensiones en dirección de las fibras ( $\sigma_{11} = 0$ ) el criterio de fallo se puede expresar:

$$\frac{\sigma_{12}^2}{S_L^2} + \left( \frac{1}{Y_T^2} - \frac{2p_{\perp\parallel}^{(+)}}{Y_T S_L} \right) \sigma_{22}^2 + \frac{2p_{\perp\parallel}^{(+)}}{S_L} \sigma_{22} = 1 \quad (5.95)$$

Lo que resulta la expresión (5.90) con  $g^L = 1 - 2p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{Y_T}{S_L}$ , siendo el modelo equivalente al de Hahn. Para determinar la energía crítica de fractura debe utilizarse la expresión (5.91) con  $g^N = \frac{G_{Ic}^L}{G_{IIc}^L}$ .

El modo B corresponde al agrietamiento bajo tensiones transversales a compresión y elevados esfuerzos a cortante. El resultado es una grieta con la misma geometría que en el modo A. El criterio se escribe:

$$\frac{\sigma_{12}^2}{S_L^2} + \frac{2p_{\perp\parallel}^{(-)}}{S_L} \sigma_{22} = 1 \quad (5.96)$$

Utilizando como medida de la energía libre a cortante la expresión:

$$\Psi_6^m = \Psi_6 - p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{S_L}{G_{12}} \langle -\tilde{\sigma}_{22} \rangle \quad (5.97)$$

resulta el criterio de Puck. Las constantes de ajuste  $p_{\perp\parallel}^{(+)}$  y  $p_{\perp\parallel}^{(-)}$  se determinan para garantizar la continuidad y derivabilidad de la superficie de fallo y se encuentran en las referencias [113]–[115].  $S_L$  es la resistencia a cortante en un ensayo uniaxial.

En la figura 5.29 se muestra la superficie de agrietamiento en el espacio de tensiones y la energía crítica de fractura en modo mixto. El gráfico muestra  $g^L = 0$ , al aumentar este valor tiende hacia la superficie de Hashin, tanto en la superficie de fallo como en la energía crítica de fractura.

### 5.2.11. Ejemplos numéricos

El modelo se ha implementado en una rutina UMAT de ABAQUS [219], el modelo se define en tensión plana para ser utilizado con elementos cáscara (S4 shell elements). Se considera que la deformación es constante a lo largo del espesor de cada capa.

La probeta estudiada contiene un agujero central de diámetro  $d=12$  mm y ancho de  $w = 72$  mm, la geometría y malla utilizada se muestra en la figura 5.30. El laminado esta formado por la secuencia  $[0, 90, \pm 45, (90, 0, \pm 45)_2]_s$ , donde cada capa tiene un espesor de 0.125 mm. El material es fibra de carbono reforzado con epoxy Hexcel IM7-8552 CFRP cuyas propiedades elásticas, de resistencia y energías de fractura son presentadas en el cuadro 5.15. El salto térmico debido a la fabricación del laminado es de  $\Delta T = -155$  °C.

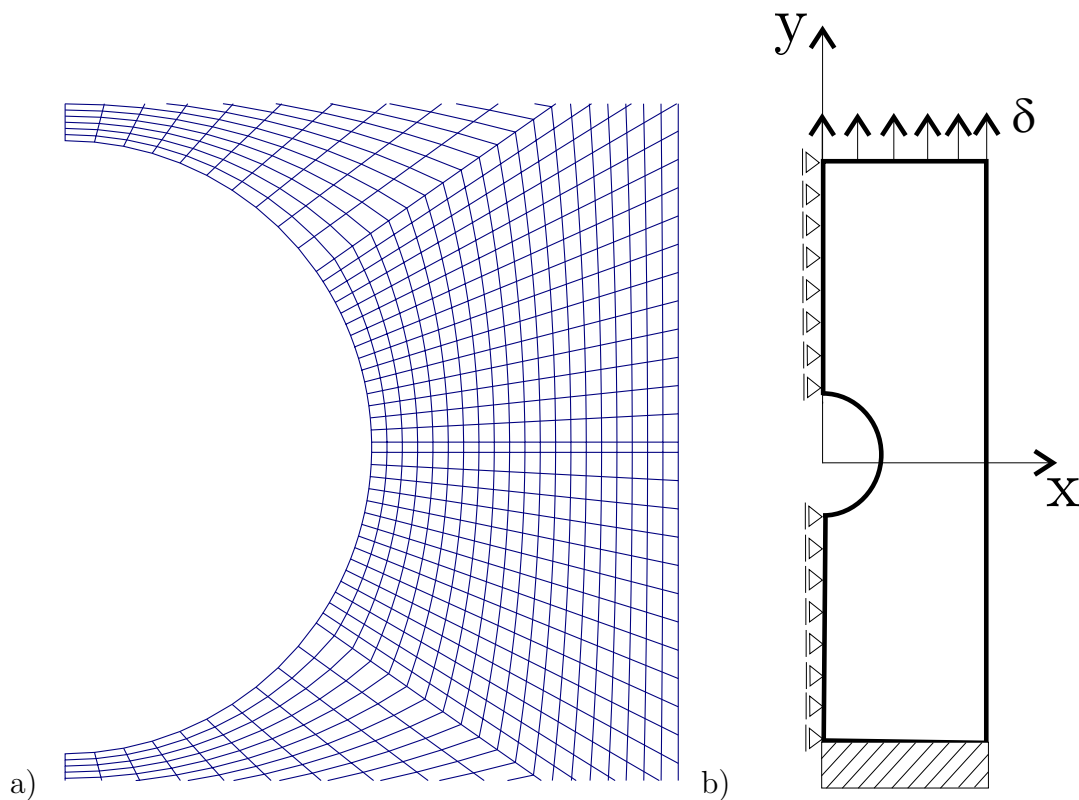


Figura 5.30: a) Detalle de la malla alrededor del agujero; b) Geometría y condiciones de contorno del modelo.

Además, por falta de datos experimentales se asume, para el modelo plástico a



$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\alpha_{11}$ ( $/^{\circ}C$ )	$\alpha_{22}$ ( $/^{\circ}C$ )
171.42	9.08	5.39	0.32	0.5	$-5.5 \times 10^{-6}$	$25.8 \times 10^{-6}$
$Y_T$ (MPa)	$S_L$ (MPa)	$G_{Ic}^L$ (N/mm)	$G_{IIc}^L$	$G_{IIc}^i$	$G_{IIIc}^i$	
62.3	92.3	0.2774	0.7879	0.7879	0.7879	

Cuadro 5.15: Propiedades elásticas, coeficientes de dilatación térmica, resistencias y energías críticas de fractura del material.

cortante  $\gamma_{12}^0 = 55/G_{12}$ ,  $\mu = 0$ ,  $H = 0,2331$  y  $K = 0$ . Lo que corresponde, bajo carga uniaxial a cortante la respuesta plástica 2 de la figura 5.25. Se considera que los parámetros de agrietamiento  $k_2 = k_6 = 3$ . La interacción entre cargas transversales y cortantes se realiza mediante la teoría cuadrática de Hashin mostrada en el cuadro 5.13.

En las imágenes de la izquierda de figura 5.31 se muestra la variable de daño determinada a partir de las expresiones (5.72) en las capas orientadas a  $0^{\circ}$ , a  $90^{\circ}$  y  $45^{\circ}$  en un laminado cuasi-isótropo. En la columna de la derecha se muestra la densidad de agrietamiento en las mismas capas. La carga exterior corresponde a la carga de rotura determinada en el capítulo 6. La deformada se muestra 14 veces superior a la real.

Con la cinemática elegida para la determinación de la respuesta estructural el daño en la matriz resulta un modo de daño distribuido, la zona que se daña tiende a ocupar todo el volumen, como se muestra en la figura 5.31. En problemas de este tipo la respuesta estructural no se encuentra influenciada por la malla de elementos finitos utilizada siempre y cuando esta sea lo suficientemente densa como para describir correctamente el campo de tensiones.

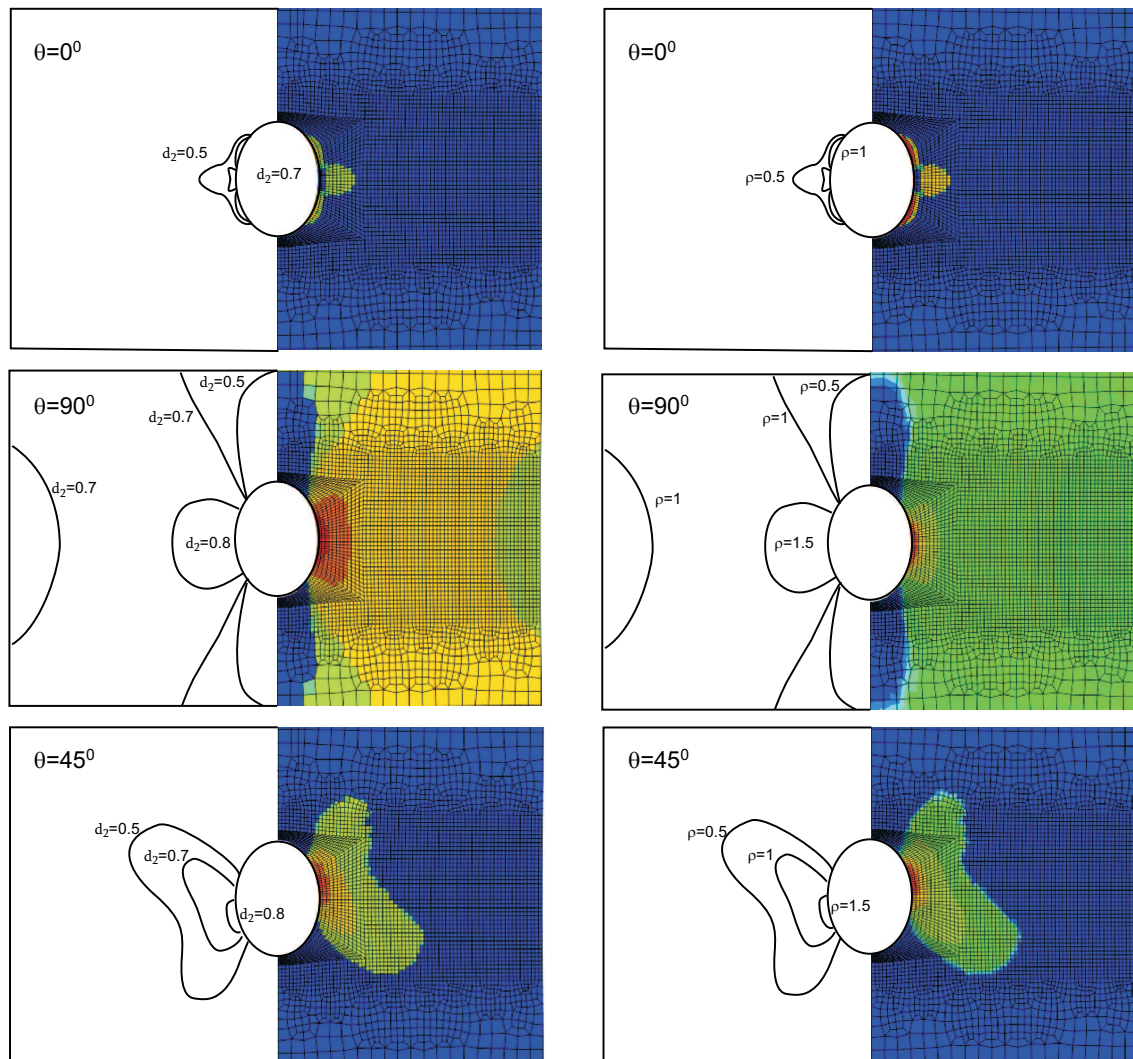


Figura 5.31: Variable de daño y densidad de agrietamiento en capas orientadas a  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $45^\circ$ . El comportamiento a cortante es plástico como muestra la línea continua de la figura 5.25.

### 5.3. Modelo de daño transversalmente isótropo

Debido a la elevada complejidad del tratamiento analítico, sólo es posible determinar el agrietamiento y la delaminación de elementos trabajando bajo estados de tensión en el plano y asumiendo ciertas simplificaciones. Para obtener una herramienta más versátil para el tratamiento del comportamiento de laminados complejos bajo cualquier ciclo de cargas se define un modelo de daño para materiales transversalmente isótropos. Éste permite solucionar el campo elástico del problema mediante el método de los elementos finitos, no hacer hipótesis sobre como será el daño a nivel de la capa. Este modelo permite el análisis numérico de solapes, uniones y otras discontinuidades geométricas donde el campo tridimensional de tensiones es importante.

#### 5.3.1. Características del modelo: descripción del daño y cierre de grietas

Se considera un material transversalmente isótropo cuya dirección preferencial (la orientación de la fibra) es descrita mediante el vector director  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$ . En el plano transversalmente isótropo, perpendicular a  $\mathbf{e}_1$ , existe un conjunto de dos vectores ortogonales ( $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) que anulan el cortante en el plano ( $\gamma_{23} = 0$ ), estos vectores variarán con la historia de deformaciones. Con la finalidad de detectar correctamente el cierre de grietas bajo estados de compresión transversal el modelo constitutivo se define en este sistema ortonormal de vectores ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ).

Si  $\epsilon = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23}]^T$  es el vector de deformaciones en el sistema de coordenadas global puede ser rotado según la transformación:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\epsilon \quad (5.98)$$

Donde la matriz de transformación  $\mathbf{T}$  relaciona las deformaciones en el sistema de coordenadas global con el sistema de coordenadas definido por los vectores ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) y pueden ser expresadas mediante el vector  $\epsilon = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}]$ . Sin pérdida de generalidad se considera que una dirección del sistema de coordenadas globales coincide con el vector  $\mathbf{e}_1$ . Luego resulta una matriz de transformación:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & \cos \theta \sin \theta \\ 0 & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Donde el ángulo  $\theta$  se determina forzando que la deformación cortante en el plano  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  sea nula:

$$\tan(-2\theta) = \frac{-2\epsilon_{23}}{\epsilon_{22} - \epsilon_{33}} \quad (5.100)$$

El tensor de flexibilidad ( $\mathbf{H}$ ) relaciona las deformaciones y las tensiones mediante la expresión:

$$\varepsilon = \mathbf{H} : \sigma \quad (5.101)$$

El modelo considera que todos los procesos de daño pueden ser satisfactoriamente descritos mediante un conjunto de variables de daño escalares  $(d_{1\pm}, d_{2\pm}, d_6)$ . Donde el símbolo  $\pm$  hace referencia al cierre de las grietas bajo cargas a compresión.  $d_{1\pm}$  se refiere a las grietas cuya normal coincide con el vector  $\mathbf{e}_1$ ,  $d_{2\pm}$  almacena el daño en el plano transversalmente isótropo y  $d_6$  el daño a cortante 12 y 13. La descripción del daño en el plano transversalmente isótropo no es capaz de detectar el direccionamiento del daño a un nivel constitutivo pero si es detectado a un nivel macroscópico a partir de la unión de puntos isotropamente dañados [220]. La matriz de flexibilidad se escribe en función de las variables de daño:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_1)E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{(1-d_2)E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{(1-d_3)E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_6)G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_6)G_{12}} \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

El cierre de las grietas es detectado mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_{1+} \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{|\sigma_{11}|} + d_{1-} \frac{\langle -\sigma_{11} \rangle}{|\sigma_{11}|} \\ d_2 &= d_{2+} \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{|\sigma_{22}|} + d_{2-} \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle}{|\sigma_{22}|} \\ d_3 &= d_{3+} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle}{|\sigma_{33}|} + d_{3-} \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle}{|\sigma_{33}|} \end{aligned} \quad (5.103)$$

Debe tenerse en cuenta que las condiciones de cierre de grietas afectan a cada componente normal del tensor de tensiones independientemente lo que provoca que bajo estados de tensión desviadores en el plano 2-3 el material se comporta ortotropamente.

Si se fuerza la coaxialidad de las tensiones y deformaciones en el plano transversalmente isótropo el módulo de rigidez cortante debe evaluarse:

$$G_{23} = \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22})} \quad (5.104)$$

Si las tensiones principales en el plano transversalmente isótropo tienen el mismo signo las variables de daño asociadas al plano transversal tienen en mismo valor ( $d_2 = d_3$ ) resultando un módulo a cortante:

$$G_{23} = \frac{E_2 (1 - d_2)}{2 [1 + \nu_{23} (1 - d_2)]} \quad (5.105)$$

Una observación importante es que el modelo nunca exhibe un módulo a cortante negativo como sucede en muchos de los modelos tipificados como "*rotating crack models*" [55]. Una relación de rigidez secante negativa es completamente inadmisibles, aquí se evita pues el daño transversal es isótropo cuando las tensiones tienen el mismo signo.

Para determinar las tensiones en el sistema de coordenadas global ( $\varsigma$ ) hay que rotarlas según:

$$\varsigma = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

### 5.3.2. Energía libre complementaria y disipación mecánica

Para garantizar la admisibilidad termodinámica del modelo la evolución de la densidad de la energía elástica almacenada en el material debe respetar los principios de la termodinámica. Se propone la siguiente expresión para describir la densidad de energía complementaria del material:

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{\sigma_{11}^2}{2(1-d_1)E_1} + \frac{1}{2E_2} \left( \frac{\sigma_{22}^2}{1-d_2} + \frac{\sigma_{33}^2}{1-d_3} \right) - \frac{\nu_{12}}{E_{11}} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \sigma_{11} - \\
 & - \frac{\nu_{23}}{E_{22}} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{2(1-d_6)G_{12}} + (\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{22}(\sigma_{22} + \sigma_{33})) \Delta T + \\
 & + (\beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{22}(\sigma_{22} + \sigma_{33})) \Delta M
 \end{aligned} \quad (5.107)$$

donde  $\alpha_{11}$  y  $\alpha_{22}$  son los coeficientes de dilatación térmica longitudinal y transversal.  $\beta_{11}$  y  $\beta_{22}$  son los coeficientes de expansión higroscópica longitudinal y transversal.  $\Delta T$  y  $\Delta M$  es el incremento de temperatura y humedad respecto los valores de referencia.

Para satisfacer el segundo principio de la termodinámica es necesario garantizar una disipación mecánica positiva. Ésta se puede expresar:

$$\Xi = \left( \frac{\partial G}{\partial \sigma} - \varepsilon \right) : \dot{\sigma} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}} \geq 0 \quad (5.108)$$

La variación de energía complementaria al evolucionar el daño, o fuerzas termodinámicas conjugadas a las variables de daño, se determinan:

$$\begin{aligned}
 Y_1 = \frac{\partial G}{\partial d_1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11}^2}{(1-d_1)^2 E_1} \quad ; \quad Y_3 = \frac{\partial G}{\partial d_3} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{33}^2}{(1-d_3)^2 E_2} \\
 Y_2 = \frac{\partial G}{\partial d_2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{22}^2}{(1-d_2)^2 E_2} \quad ; \quad Y_6 = \frac{\partial G}{\partial d_6} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{(1-d_6)^2 G_{12}}
 \end{aligned} \quad (5.109)$$

Debido a la particular elección de la energía complementaria las fuerzas termodinámicas conjugadas a las variables de daño son siempre positivas, luego si las variables de daño son monótonamente crecientes se garantiza automáticamente una disipación positiva:

$$\Xi = Y_1 \dot{d}_1 + Y_2 \dot{d}_2 + Y_3 \dot{d}_3 + Y_6 \dot{d}_6 \geq 0$$

### 5.3.3. Funciones de activación del daño ( $F_N$ )

Existe un espacio de deformaciones donde el material responde según la ley de Hooke. Este espacio se encuentra cerrado por tres superficies definidas con las funciones de activación del daño. Cada función de activación del daño está asociada a un mecanismo de daño, éstas pueden expresarse:

$$F_{L+} = \phi_{L+} - r_{L+} \leq 0 \quad ; \quad F_{L-} = \phi_{L-} - r_{L-} \leq 0 \quad ; \quad F_T = \phi_T - r_T \leq 0 \quad (5.110)$$

Donde las funciones de carga ( $\phi_N$ ;  $N = L+, L-, T$ ) dependen de las deformaciones y del conjunto de constantes elásticas y de resistencia del material. Los umbrales de daño ( $r_N$ ) toman el valor de 1 cuando el material no está dañado y aumentan con el daño. Los umbrales de daño forman el conjunto de variables internas del modelo y se relacionan con las variables de daño ( $d_M$ ;  $M = 1+, 1-, 2+, 2-, 6$ ) mediante las leyes de daño. Los umbrales de daño definen el valor máximo que pueden alcanzar las funciones de carga antes que el daño aumente.

### 5.3.4. Funciones de carga ( $\phi_N$ )

Las funciones de carga determinan el inicio del daño bajo cualquier estado de cargas. Una apropiada elección es esencial para obtener resultados precisos. Éstas hacen la función de criterio de fallo.

En materiales compuestos unidireccionales, utilizar una función de carga a tracción longitudinal ( $\phi_{L+}$ ), dependiente exclusivamente de la deformación o la tracción normal a las fibras ofrece una buena aproximación a los resultados experimentales [123][124]. Aquí se considera el primer caso:

$$\phi_{L+} = E_1 \frac{\langle \varepsilon_{11} \rangle}{X_T} \quad (5.111)$$

El daño ocasionado en dirección longitudinal por cargas a compresión es el proceso más complejo de todos los involucrados en el fallo de los compuestos. La función de carga a compresión longitudinal ( $\phi_{L-}$ ) depende básicamente de la deformación longitudinal ( $\varepsilon_{11}$ ) pero el cortante influye en el fallo ( $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{13}$ ) así como la compresión producida por las cargas transversales ( $\varepsilon_{22}$  y  $\varepsilon_{33}$ ). La determinación de una función de carga precisa se dejará para más adelante, en ese caso se considera la función más simple capaz de ajustar a un ensayo uniaxial a compresión longitudinal:

$$\phi_{L-} = E_1 \frac{\langle -\varepsilon_{11} \rangle}{X_C} \quad (5.112)$$

La función de carga transversal ( $\phi_T$ ) determina el daño transversal producido bajo tensiones transversales y cortantes. Se considera una función que coincide con las tres resistencias obtenidas de ensayos uniaxiales ( $Y_T$ ,  $Y_C$  y  $S_L$ ), la función se escribe.

$$\phi_T = \sqrt{\left\langle \frac{Y_C - Y_T}{Y_C Y_T} (\tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33}) + \frac{1}{Y_C Y_T} (\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{33})^2 + \frac{\tilde{\sigma}_{12}^2 + \tilde{\sigma}_{13}^2}{S_L^2} \right\rangle} \quad (5.113)$$

Donde el tensor  $\tilde{\sigma}$  representan las tensiones efectivas calculadas con la expresión  $\tilde{\sigma} = \mathbf{H}_0^{-1} : \varepsilon$  siendo  $\mathbf{H}_0$  el tensor de flexibilidad no dañado, ecuación (5.102) con  $d_M = 0$ .

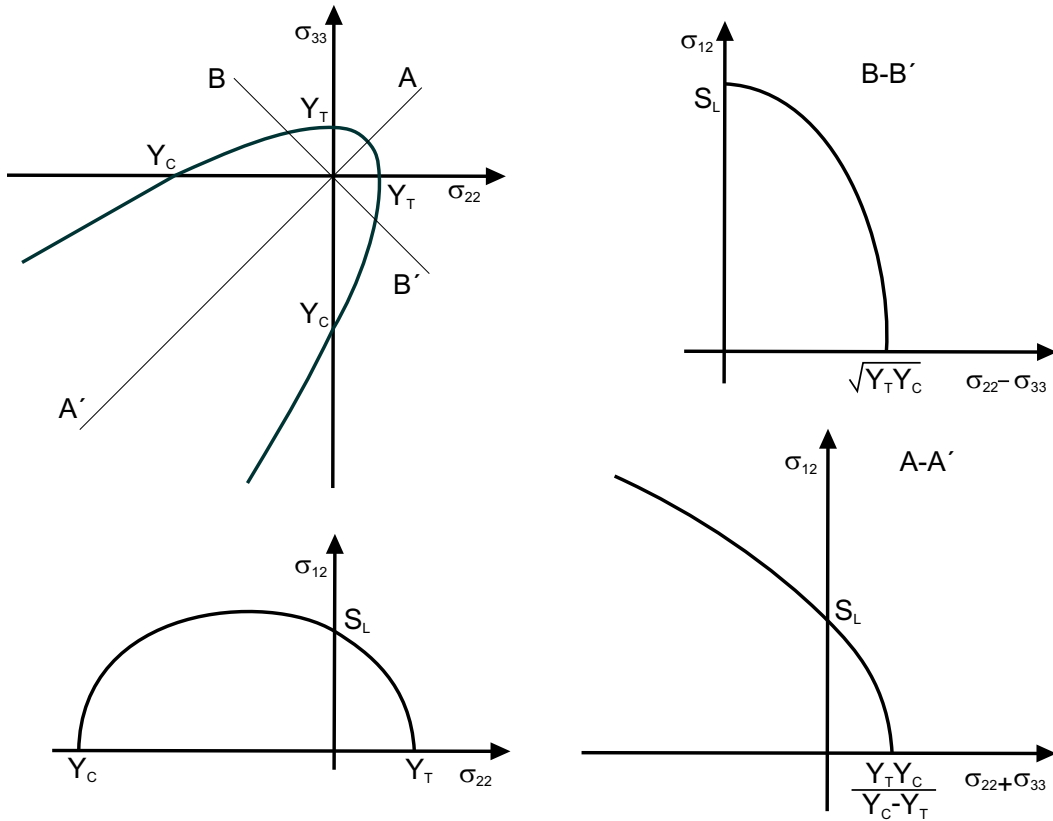


Figura 5.32: Superficie de activación del daño transversal  $F_T$ .

En la figura 5.32 se muestra la función de daño transversal ( $F_T$ ) con la función de carga propuesta anteriormente ( $\phi_T$ ). La imagen superior de la derecha corresponde



a la superficie con tensiones en el plano 1-2, se observa como valores moderados de compresión transversal producen un efecto beneficioso en la resistencia a cortante, de acuerdo con los resultados experimentales.

### 5.3.5. Evolución de los umbrales de daño ( $r_N$ )

La evolución de los umbrales de daño ( $r_N$ ) deben respetar las condiciones de "Kuhn-Tucker".

$$\dot{r}_N \geq 0 \quad ; \quad F_N \leq 0 \quad ; \quad \dot{r}_N F_N = 0 \quad (5.114)$$

En un problema casi-estático las funciones de activación del daño, ecuación (5.110), deben ser no positivas. Cuando las funciones de activación del daño  $F_N$  son negativas la respuesta del material es elástica. Cuando una función de carga activa un criterio,  $F_N = 0$ , es necesario evaluar el gradiente  $\dot{\phi}_N$ . Si este es no positivo, el estado del sistema es de descarga o carga neutra y el daño no evoluciona. Si el gradiente  $\dot{\phi}_N$  es positivo el daño evoluciona y debe garantizarse la *condición de consistencia del daño*:

$$\dot{F}_N = \dot{\phi}_N - \dot{r}_N = 0 \quad (5.115)$$

Debido a que los valores de las funciones de carga solo dependen de las deformaciones y que los umbrales de daño del daño es posible integrar explícitamente el modelo constitutivo [221][222].

La evolución de los dominios elásticos activos viene definido por la condición de consistencia. No obstante en la definición del modelo constitutivo es necesario definir la relación existente entre la evolución de los dominios elásticos inactivos frente a los activos. Se asume que el daño longitudinal y el transversal no se encuentran acoplados no obstante si lo están el daño longitudinal a tracción y a compresión.

### Evolución del umbral de daño transversal ( $r_T$ )

La variable interna  $r_T$  indica el nivel de daño transversal del material. Su evolución viene marcada por la condición de consistencia;  $\dot{\phi}_T = \dot{r}_T$ , ecuación (5.115), su integración temporal se obtiene de forma explícita:

$$r_T = \max \left\{ 1, \max_{s=0,t} \{ \phi_T^s \} \right\} \quad (5.116)$$

**Evolución de los umbrales de daño longitudinal ( $r_{L\pm}$ )**

Bajo cargas a tracción longitudinal se genera un plano de fallo perpendicular a la dirección de las fibras. Si se invierten las cargas el material dañado es capaz de sustentar tensiones debido al cierre de las grietas. La rigidez será menor pues las fibras rotas pierden su alineación inicial y son incapaces de transferir la misma tensión. No obstante, el inicio del daño a compresión viene determinado por la degradación de la matriz, provocando la pérdida de confinamiento de las fibras y su desestabilización [123][124]. Se asume que las deformaciones necesarias para inicial el daño a compresión permanecen inalteradas por daño generado previamente a tracción.

Bajo cargas longitudinales a compresión el daño generado produce una "kink band", se dañan las fibras y la matriz en una sección de dimensiones determinadas. Si se invierten las cargas el límite elástico aumentará pues ya se habrá generado un plano de falla. Con estas suposiciones se considera que la evolución de las variables internas pueden escribirse:

$$\begin{array}{ll} \text{Tracción} & \dot{r}_{L+} = \dot{\phi}_{L+} \quad \text{y} \quad \dot{r}_{L-} = 0 \\ \text{Compresión} & \dot{r}_{L-} = \dot{\phi}_{L-} \quad \text{y} \quad \dot{r}_{L+} = \begin{cases} \dot{\phi}_{L-} & \text{si } r_{L+} \leq r_{L-} \\ 0 & \text{si } r_{L+} > r_{L-} \end{cases} \end{array}$$

La integración de los umbrales de daño resulta en relaciones explícitas:

$$\begin{aligned} r_{L+} &= \max \left\{ 1, \max_{s=0,t} \{ \phi_{L+}^s \}, \max_{s=0,t} \{ \phi_{L-}^s \} \right\} ; \\ r_{L-} &= \max \left\{ 1, \max_{s=0,t} \{ \phi_{L-}^s \} \right\} \end{aligned} \quad (5.117)$$

**5.3.6. Leyes de daño ( $d_M$ )**

Las leyes de daño relacionan los umbrales de daño con el valor del daño:  $d_M(r_N)$  donde  $M = 1+, 1-, 2+, 2-, 6$  y  $N = L+, L-, T$ . Se considera que bajo cargas a tracción (leyes  $d_{1+}$  y  $d_{2+}$ ), compresión de la fibra ( $d_{1-}$ ), y cortante fibra-matriz ( $d_6$ ) el daño se localizará en un plano justo después de finalizar el régimen lineal elástico. A pesar de ser un fenómeno bien conocido que el cortante entre fibra y matriz tiene un comportamiento no lineal de daño difuso y deformaciones permanentes

antes de la localización, como se ha modelado en el plano en la sección 5.2.5, se dejará la definición de estas leyes más precisas para trabajos futuros. Bajo cargas a compresión transversal la ley de daño produce una respuesta tensión deformación con endurecimiento, como se muestra en la figura 5.33.

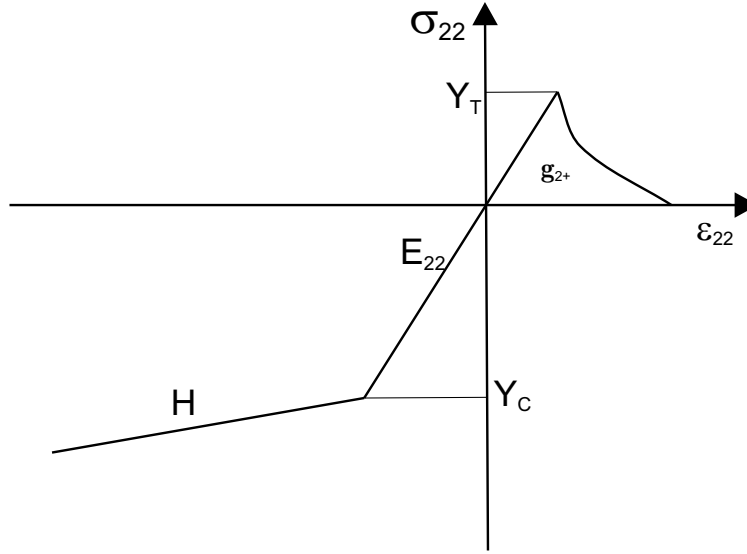


Figura 5.33: Respuesta tensión deformación en el plano transversal.

Las leyes de daño  $d_M$  con  $M = 1+, 1-, 2+, 6$  provocan la localización de las deformaciones en un plano de fallo y, para su ajuste, se utiliza el "Crack band model". Este requiere que la ley de daño provoque una relación tangente negativa y la regularización de la energía disipada en función del tamaño del elemento finito según la relación:

$$g_M = \frac{G_M}{l^*} \quad (5.118)$$

donde  $G_M$  es la energía de fractura,  $l^*$  la longitud característica del elemento finito y  $g_M$  la densidad de energía de fractura en un ensayo uniaxial determinada:

$$g_M = \int_0^\infty Y_M \dot{d}_M dt = \int_1^\infty Y_M \frac{d_M}{r_N} dr_N \quad (5.119)$$

Existe un tamaño de elemento finito a partir del cuál es imposible garantizar la igualdad (5.118) sin que la respuesta tensión-deformación exhiba "snap-back". Este tamaño límite corresponde:

$$l^* = \frac{2E_M G_M}{X_M^2} \quad (5.120)$$

Si la discretización resulta en elementos finitos con un tamaño característico mayor se puede garantizar una disipación de energía correcta disminuyendo la resistencia del material según:

$$X_M = \sqrt{\frac{2E_M G_M}{l^*}} \quad (5.121)$$

Esta solución no es aplicable en aquellos elementos situados en lugares donde empieza el daño ya que la resistencia es un parámetro importante. No obstante, es una buena solución en aquellos elementos finitos donde se produce la evolución de una grieta ya que la energía de fractura es el parámetro crítico.

### Tracción transversal ( $d_{2+}$ )

Se considera que el daño a tracción transversal se encuentra relacionado únicamente con el umbral de daño transversal ( $r_T$ ) no dependiendo de los umbrales de daño longitudinal ( $r_{L\pm}$ ).

El comportamiento del material es lineal elástico antes de la localización de las deformaciones. Por esta razón la ley de daño ( $d_{2+}(r_T)$ ) produce una respuesta tensión deformación con ablandamiento. El perfil de la ley de daño se encuentra relacionada con la ley cohesiva del material, su determinación experimental es difícil. Aquí se asume que una ley exponencial es apropiada para describir las tensiones cohesivas presentes en el proceso de apertura de la grieta.

$$d_{2+} = 1 - \frac{1}{f(r_T)} \exp(A_{2+}(1 - f(r_T))) \quad (5.122)$$

donde la función  $f(r_T)$  es del mismo orden de la función de carga para garantizar que no existe endurecimiento. Esta se escribe:

$$f(r_T) = \frac{Y_T - Y_C + \sqrt{(Y_C - Y_T)^2 + 4Y_C Y_T r_T^2}}{2Y_T} \quad (5.123)$$

La densidad de disipación en un ensayo uniaxial a tracción transversal se obtiene aplicando la relación (5.119). Esta se encuentra relacionada con la energía crítica de fractura transversal en modo I ( $G_{2+}$ ) y el tamaño característico del elemento finito

( $l^*$ ) con la igualdad (5.118). De estas relaciones se obtiene el parámetro de ajuste de la ley  $A_{2+}$ , como este no puede ser obtenido explícitamente debe realizarse mediante los algoritmos numéricos presentados en los apéndices A.1 y A.2.

Si el tamaño del elemento finito es mayor al presentado en la ecuación (5.120) se puede disminuir la resistencia transversal ( $Y_T$ ) según la expresión (5.121). Luego, una vez alcanzada la resistencia última la tensión transversal se reduce a cero.

### Compresión transversal ( $d_{2-}$ )

Como en el caso de tracción transversal se considera que la variable de daño transversal a compresión sólo depende del umbral de daño transversal ( $r_T$ ).

Si se ensaya una lámina unidireccional a compresión se observa que esta rompe a un ángulo de aproximadamente  $53^\circ$  respecto la normal del laminado. La localización del daño no se produce en las direcciones principales de las tensiones. Para evitar que el daño evolucione perpendicular al laminado se impide que el daño se localice en un ensayo uniaxial a compresión mediante una ley con endurecimiento.

Si se considera que una vez alcanzado el  $Y_C$  el material empieza a dañarse y la respuesta tensión deformación sigue lineal pero con un pendiente  $H$ . La relación constitutiva en un ensayo uniaxial se puede expresar:  $\sigma_{22} = H\varepsilon_{22} + Y = (1 - d_{2-}) E_{22}\varepsilon_{22}$ . Aislado la variable de daño y determinando la relación del umbral de daño ( $r_T$ ) con las deformaciones transversales, ecuaciones (5.101), (5.113) y (5.116), en un ensayo uniaxial resulta:

$$d_{2-} = 1 - \frac{H}{E_2} + \frac{2A(E_2 - H)Y_C}{E_2^2 \left( -B - \sqrt{B^2 - 4A(C - r_T^2)} \right)} \quad (5.124)$$

siendo  $H$  la relación tangente en un ensayo uniaxial a compresión como se muestra en la figura 5.33. Las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  se determinan:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(E_2 + \nu_{23}H)^2}{(1 + \nu_{23})^2 Y_C Y_T} \\ B &= \frac{(Y_C - Y_T)(E_2 - H(\nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21}))}{Y_C Y_T (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})} - 2 \frac{(E_2 - H)\nu_{23}(E_2 + \nu_{23}H)}{E_2(1 + \nu_{23})^2 Y_T} \\ C &= \frac{(E_2 - H)^2 \nu_{23}^2 Y_C}{E_2^2 (1 + \nu_{23})^2 Y_T} + \frac{(Y_C - Y_T)(E_2 - H)(\nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21})}{E_2 Y_T (1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})} \end{aligned}$$

**Tracción longitudinal ( $d_{1+}$ )**

El daño longitudinal a tracción se encuentra relacionado con el daño longitudinal generado a tracción y, también, por el generado bajo cargas a compresión. El umbral de daño ( $r_{L+}$ ) detecta ambos tipos de daño. Se considera que el valor del umbral de daño transversal ( $r_T$ ) no afecta al daño longitudinal. Cuando el material daña bajo cargas de tracción longitudinal el daño se localiza en un plano de fallo siendo la región no lineal con endurecimiento despreciable.

Si se considera la ley de daño exponencial:

$$d_{1+} = 1 - \frac{1}{r_{L+}} \exp(A_{1+}(1 - r_{L+})) \quad (5.125)$$

donde el parámetro de ajuste  $A_{1+}$  se obtiene a partir de la regularización de energía expresada en (5.118), resultando:

$$A_{1+} = \frac{2l^* X_T^2}{2E_1 G_{1+} - l^* X_T^2} \quad (5.126)$$

donde  $G_{1+}$  es la energía crítica de fractura longitudinal en modo I. Si el tamaño del elemento finito no cumple la expresión (5.120) puede reducirse la resistencia según la expresión (5.121) y tomar  $A_{1+}$  como infinito.

La ley exponencial no es muy adecuada para determinar la respuesta a tracción longitudinal [16]. El proceso de fallo empieza con una brusca caída de la tensión longitudinal que corresponde con el fallo de las fibras y la matriz. Después aparecen tensiones que corresponden a las fuerzas de "pull-out" necesarias para sacar las fibras de la matriz. En esta segunda fase las tensiones disminuyen lentamente al abrir la grieta. En el capítulo 6, así como en las referencias [224][225], se propone una ley constitutiva con una fase lineal y otra exponencial para modelar ambos procesos. La aplicación de la ley lineal-exponencial en este modelo no requiere ninguna modificación a la presentada en el capítulo 6.

**Compresión longitudinal ( $d_{1-}$ )**

El daño a compresión longitudinal es función del umbral de daño longitudinal a compresión ( $r_{L-}$ ). Si previamente se ha generado daño a tracción la recuperación de la rigidez al cerrarse las grietas no es total debido a que las fibras rotas pierden su alineación y son incapaces de transmitir las cargas. Este efecto se tratará en el

siguiente capítulo. El umbral de daño transversal ( $r_T$ ) no se considera importante en la disminución de la rigidez longitudinal.

Se asume una ley exponencial que produzca ablandamiento en la relación constitutiva:

$$d_{1-} = 1 - \frac{1}{r_{L-}} \exp(A_{1-}(1 - r_{L-})) \quad (5.127)$$

donde el parámetro de ajuste  $A_{1-}$  se obtiene a partir de la regularización de energía expresada en (5.118), resultando:

$$A_{1-} = \frac{2l^* X_C^2}{2E_1 G_{1-} - l^* X_C^2} \quad (5.128)$$

donde  $G_{1-}$  es la energía disipada al generarse una "kink band" por unidad de superficie. Si el tamaño del elemento finito no cumple la expresión (5.120) puede reducirse la resistencia según la expresión (5.121) y tomar  $A_{1+}$  como infinito.

Esta ley puede ser mejorada utilizando la propuesta presentada en el capítulo 6, donde se tiene en cuenta la posible pérdida de rigidez a compresión debido al daño generado a tracción. Cuando en un ciclo se ha generado daño a tracción y luego se invierten las cargas las grietas generadas a tracción se cierran y parte de la rigidez se recupera. No obstante las fibras rotas pierden su alineación y se produce una pérdida de resistencia.

### **Cortante ( $d_6$ )**

La rigidez cortante se ve afectada por las grietas longitudinales y transversales independientemente de su orientación. La pérdida de rigidez a cortante es función de los umbrales  $r_T$  y  $r_{L+}$ . La variable de daño a cortante  $d_6$  se puede expresar:

$$d_6 = 1 - [1 - d_6^*(r_T)](1 - d_{1+}) \quad (5.129)$$

Cuando se realiza un ensayo uniaxial a cortante sólo evolucionará el umbral de daño transversal y, consecuentemente la variable  $d_6^*$ . Si se asume que el daño localiza se puede utilizar una ley exponencial:

$$d_6^* = 1 - \frac{1}{r_T} \exp(A_6(1 - r_T)) \quad (5.130)$$

El parámetro de ajuste  $A_6$  se obtiene a partir de la aproximación propuesta en la expresión (5.118) con la energía de fractura en modo II. El parámetro de ajuste  $A_6$  resulta:

$$A_6 = \frac{2l^* S_L^2}{2G_{12}G_6 - l^* S_L^2} \quad (5.131)$$

donde  $G_6$  es la energía crítica de fractura transversal en modo II. Si el tamaño característico del elemento finito es mayor al que resulta de la expresión (5.120), la resistencia se puede reducir según la expresión (5.121).

### 5.3.7. Algoritmo y tensor constitutivo tangente

El modelo constitutivo se implementa mediante el algoritmo que se presenta en el cuadro 5.16 . Todas las relaciones son explícitas con lo que el proceso de cálculo es rápido.

1	- Leer el tensor de deformaciones en el instante t	$\epsilon^t$
2	- Determinar la dirección transversal principal:	$\theta^t$
3	- Rotar las deformaciones	$\begin{bmatrix} \epsilon^t \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^t \epsilon^t$
4	- Calcular el tensor de tensiones efectivas	$\tilde{\sigma}^t = \mathbf{H}_0^{-1} \epsilon^t$
5	- Calcular las funciones de carga	$\phi_M^t(\tilde{\sigma}^t)$
6	- Calcular las variables internas	$r_M^t(r_M^{t-1}, \phi_M^t)$
7	- Calcular las variables de daño	$d_M^t(r_M^t)$
8	- Determinar el tensor de tensiones nominales	$\sigma^t = (\mathbf{H}^t)^{-1} \epsilon^t$
9	- Rotar las tensiones	$\zeta^t = (\mathbf{T}^t)^T \begin{bmatrix} \sigma^t \\ 0 \end{bmatrix}$
10	- Calcular el tensor constitutivo tangente	$\mathbf{C}_T^t = (\mathbf{T}^t)^T \hat{\mathbf{C}}^t \mathbf{T}^t$

Cuadro 5.16: Algoritmo de integración del modelo constitutivo.



**Tensor constitutivo tangente**

Para obtener una buena convergencia es necesario determinar la relación tangente.

$$\dot{\zeta} = \mathbf{C}_T : \dot{\epsilon} \quad (5.132)$$

En primer lugar se determina el tensor constitutivo tangente en el sistema de coordenadas del modelo,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . La variación temporal de la relación secante descrita por la ecuación (5.101) se escribe:

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{H} : \dot{\sigma} + \dot{\mathbf{H}} : \sigma = \mathbf{H} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial d} \cdot \dot{d} : \sigma$$

desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$\dot{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}} : \dot{\epsilon} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{H}^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (5.133)$$

donde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \gamma_{13}} \\ \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \gamma_{13}} \\ \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \gamma_{13}} \\ \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{13}} \\ \frac{\sigma_{13}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{13}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{13}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{13}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\sigma_{13}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{13}} \end{bmatrix}$$

los componentes escalares del tensor  $\mathbf{M}$  se encuentran desarrollados en el apéndice A.3.

El sistema de coordenadas  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  varía con las deformaciones. La variación temporal de las relaciones de transformación (5.98) y (5.106) se pueden expresar:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{T}} \epsilon + \mathbf{T} \dot{\epsilon} \quad \text{y} \quad \dot{\zeta} = \dot{\mathbf{T}}^T \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

Mediante las ecuaciones (5.133) y (5.134) la relación tangente en el sistema de coordenadas global se expresa:

$$\dot{\zeta} = \dot{\mathbf{T}}^T \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{T}} \epsilon + \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T} \dot{\epsilon} \quad (5.135)$$

Consideremos ahora un sistema de coordenadas fijo que coincida, en el instante actual, con el sistema de coordenadas móvil ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ). En este sistema de coordenadas la matriz de rotación coincide con la matriz identidad  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  y su derivada temporal:  $\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \epsilon_{23}} \Big|_{\epsilon_{23}=0} \dot{\epsilon}_{23} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \frac{\partial \theta}{\partial \epsilon_{23}} \Big|_{\epsilon_{23}=0} \dot{\epsilon}_{23}$ .

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\dot{\epsilon}_{23}}{\epsilon_{22} - \epsilon_{33}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz constitutiva tangente en este sistema de coordenadas fijo se expresa:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2(\epsilon_{22} - \epsilon_{33})} \end{bmatrix} \quad (5.136)$$

donde

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\epsilon_{22} - \epsilon_{33}} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{15}\epsilon_{12} - \tilde{C}_{14}\epsilon_{13} \\ \tilde{C}_{25}\epsilon_{12} - \tilde{C}_{24}\epsilon_{13} \\ \tilde{C}_{35}\epsilon_{12} - \tilde{C}_{34}\epsilon_{13} \\ \tilde{C}_{45}\epsilon_{12} - \tilde{C}_{44}\epsilon_{13} + \sigma_{13}/2 \\ \tilde{C}_{55}\epsilon_{12} - \tilde{C}_{54}\epsilon_{13} - \sigma_{12}/2 \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

Para determinar la matriz constitutiva tangente en el sistema de coordenadas global ( $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{C}_T : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ ) sólo se requiere rotar un ángulo  $\theta$  la matriz  $\hat{\mathbf{C}}$ .

$$\mathbf{C}_T = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{T} \quad (5.138)$$

### 5.3.8. Ejemplos numéricos

El modelo constitutivo se ha implementado como una subrutina UMAT de ABAQUS [219]. Se utilizan elementos tridimensionales de 8 nodos C3D8 de la librería del programa. Para validar el modelo presentado se realizan un conjunto de experimentos numéricos para analizar el proceso de agrietamiento transversal de laminados "cross-ply".

#### Modelización del agrietamiento de la matriz

Para utilizar el modelo transversalmente isótropo es necesario realizar una discretización lo suficientemente densa capaz de describir con precisión la cinemática de una grieta. En la figura 5.34 se muestra la malla deformada en dos instantes diferentes de agrietamiento, se puede observar la correcta descripción de la localización de las deformaciones. También aparecen delaminaciones en el proceso de daño. En la figura 5.35 se muestran las tensiones principales de una capa central de un laminado "cross-ply", se puede observar la presencia de una grieta y el efecto que esta produce en el campo de tensiones.

Si se considera un laminado multicapa sin daño el campo de tensiones en el laminado es uniforme, exceptuando las regiones cercanas a los cantos libres donde aparecen estados de tensión tridimensionales debido al cortante que debe transferir la interfase [161]. Estas tensiones son constantes a lo largo de todo el canto libre. La aplicación de un modelo de daño con ablandamiento en estos casos produce que el criterio de daño se active en el mismo instante en todos los elementos sometidos al mismo estado tensional. Para provocar la localización de las deformaciones formando grietas es necesario introducir algún tipo de perturbación o aleatoriedad en las propiedades del material.

La introducción de la estadística en la mecánica computacional es un tema de gran complejidad que no pretende ser tratado en este trabajo. Para una mayor profundización se puede consultar [34]–[36]. No obstante, para solucionar el problema de la localización en un plano se opta por generar una distribución aleatoria de la resistencia transversal ( $Y_T$ ). Se genera un campo de resistencias aleatorias definidas a nivel de cada elemento finito mediante una distribución uniforme, cuya resistencia mínima es la que se obtiene en un ensayo uniaxial y la máxima varias veces superior.

Se considera que la única propiedad del material con una distribución aleatoria es la resistencia transversal aunque, en realidad, también deberían considerarse los módulos de rigidez y las energías de fractura.

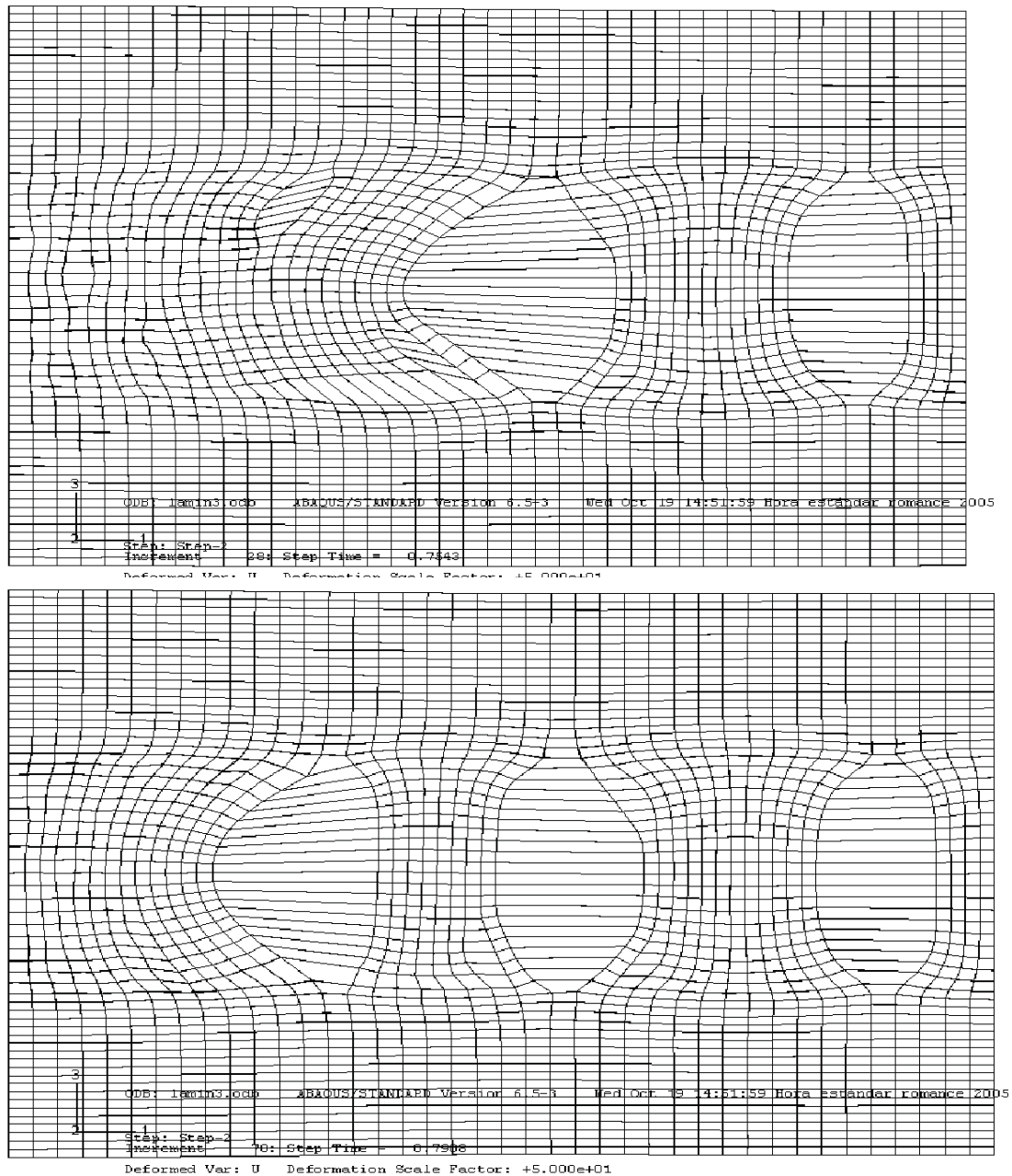


Figura 5.34: Secuencia del agrietamiento transversal y la delaminación en un material  $[0, 90]_s$ . Ampliación de la deformada 50 veces.

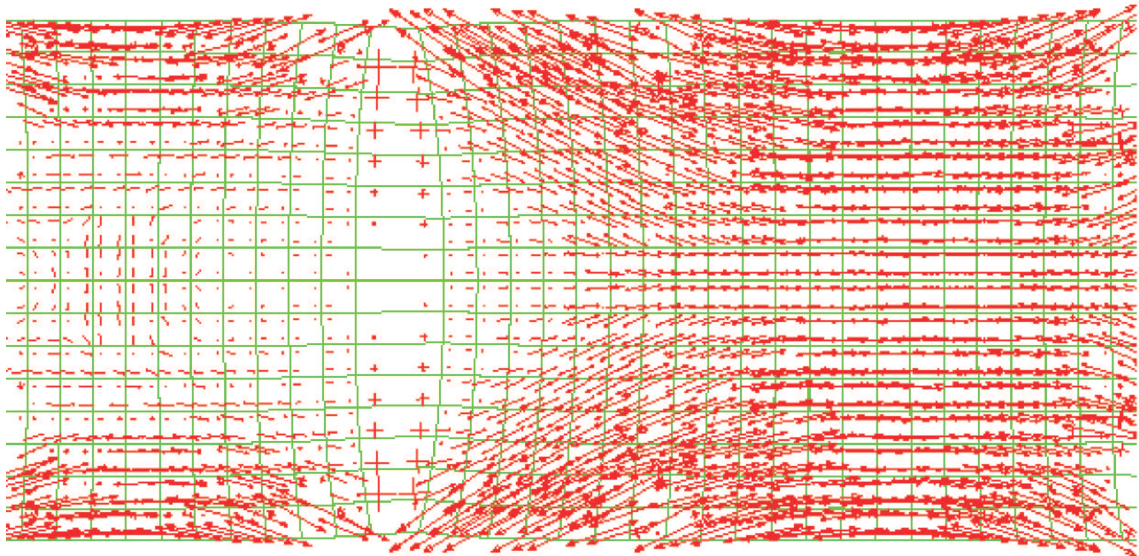


Figura 5.35: Tensión principal en una capa embebida en un laminado con la presencia de grietas.

Es necesario decir que esta distribución de resistencias debería tener en cuenta la resistencia teórica del material y también el tamaño del elemento finito considerado, lo cuál modificará, no sólo los parámetros de resistencia media y varianza, sino también la propia función de distribución. Al mismo tiempo los campos de las variables se encuentran altamente correlacionadas.

Considérese, a modo de ejemplo, un elemento finito cuyas dimensiones son varias veces superiores al tamaño de la zona de proceso de fallo. En este caso es probable que las propiedades de resistencia y energía crítica de fractura sigan una distribución de Weibull (ambas o una variable que las considere). No obstante, si el tamaño del elemento finito es más pequeño que la zona de proceso de fallo, la distribución de Weibull no es aplicable, pues antes que se genere una grieta a lo largo del espesor se producirá una significativa reordenación de las tensiones.

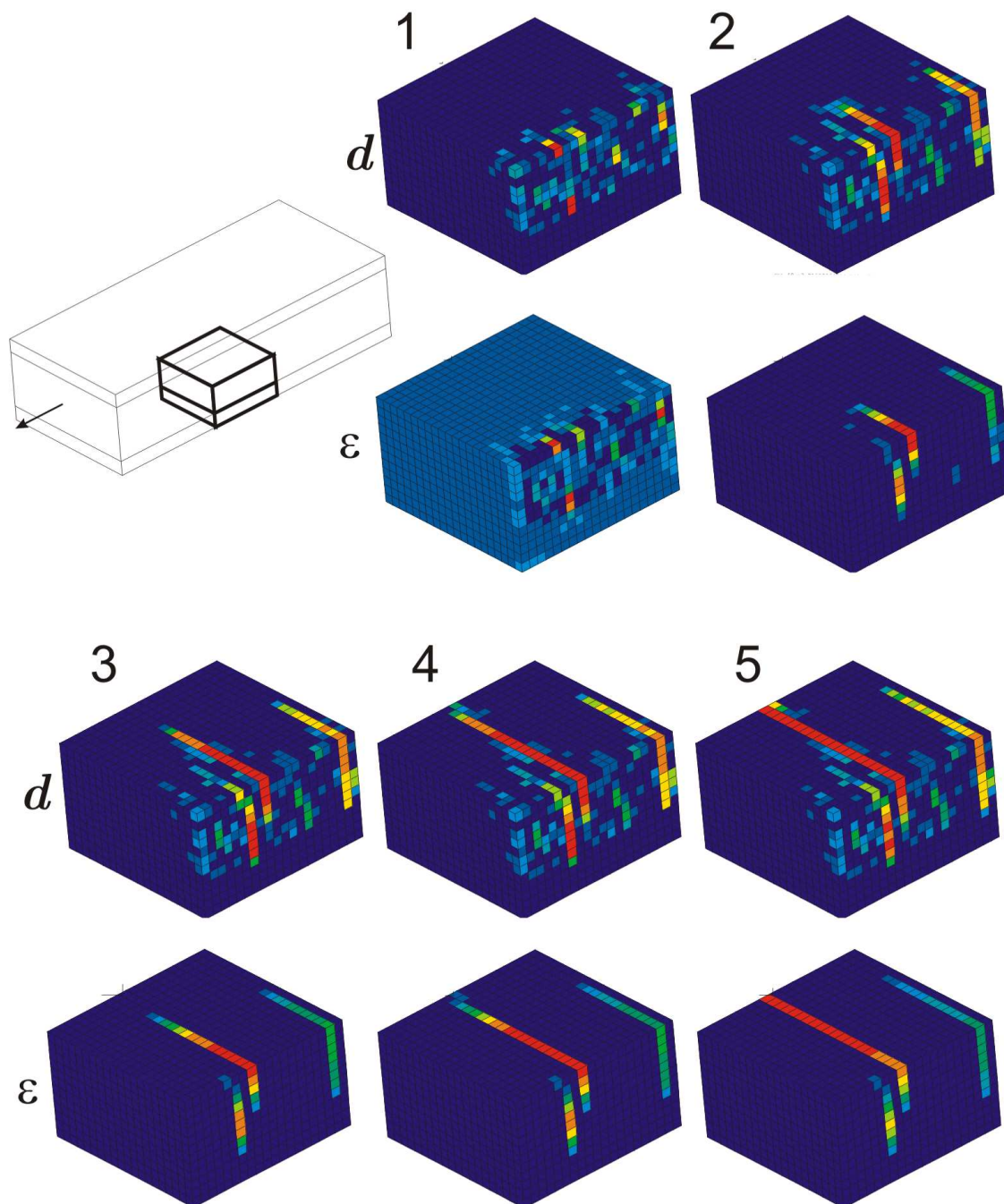


Figura 5.36: Secuencia del crecimiento de una grieta en una lámina embebida. Variable de daño de la matriz y deformación principal máxima.

**Crecimiento de una grieta en la matriz**

Parvizi [3] observó que las grietas en laminados multicapa se generan en una esquina y progresan hacia el interior de la capa. En la figura 5.36 se muestra un fragmento de laminado donde se ha modelado la mitad de su espesor. Se observa que la grieta empieza en el canto libre y progresa hacia el interior del laminado. Antes de la aparición de la grieta empieza a dañarse el canto libre formándose pequeñas grietas, a partir de cierto instante la mayoría de grietas dejan de crecer y una de ellas progresa a lo largo del ancho de la probeta. Las tensiones producidas en el canto libre [161] son la causa de la formación de estas grietas, así como de posibles delaminaciones.

En la figura 5.37 se muestra como el crecimiento de la grieta no evoluciona en dirección longitudinal, formando una recta, sino que en el centro de la capa la grieta se encuentra más avanzada.

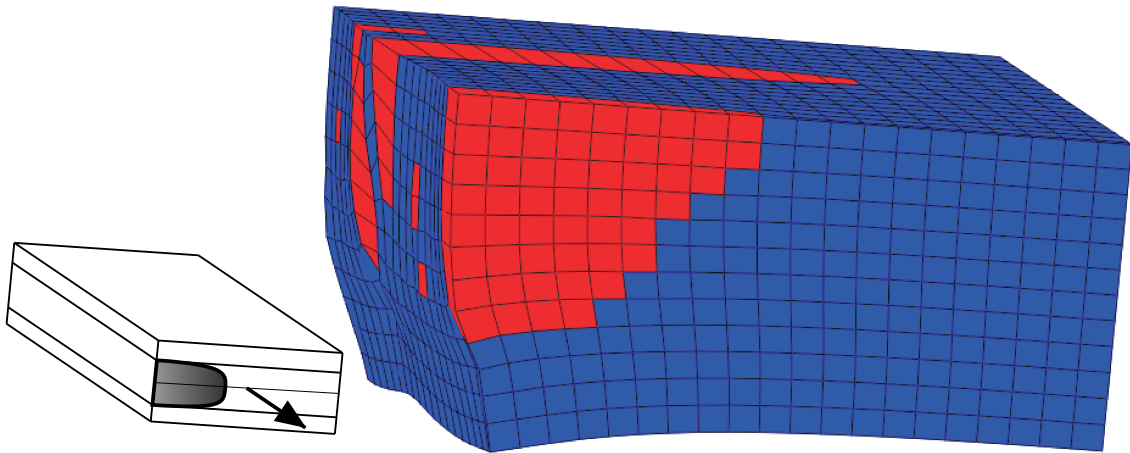


Figura 5.37: Crecimiento de una grieta desde el extremo libre de una capa central hacia el interior del laminado. Los cuatro elementos inferiores forman una capa a  $0^0$  y los otros a  $90^0$  formando un laminado  $[0, 90_2]_s$ , donde sólo se modela medio espesor.

### Patrón de agrietamiento de la matriz

Nairn [199] dibujó el patrón que siguen los laminados en el proceso de agrietamiento. Si en un laminado "cross ply",  $[0, 90]_s$  se aplican cargas en la dirección a  $90^\circ$  las grietas en la matriz aparecen en las capas externas. Estas no se encuentran en el mismo plano sino desfasadas, como se muestra en la figura 5.38.



Figura 5.38: Agrietamiento de un laminado  $[90, 0]_s$ . Se muestra la deformación principal máxima. Deformada aumentada 30 veces.

Este agrietamiento asimétrico, cuando las láminas son externas, es fácilmente explicable si se tiene en cuenta el proceso de agrietamiento esquematizado en la figura 5.39. Considérese que aparece una grieta en la capa exterior, provocando la descarga elástica en cierta región a su alrededor. El efecto resultante de este proceso es que el laminado deja de ser balanceado en la zona de influencia de la grieta. En la imagen de la izquierda se muestra la línea neutra del laminado con la presencia de una grieta, la cuál se ha desplazado dejando de coincidir con la línea central del laminado. Al aplicar cargas externas esta línea tiende a enderezarse, cómo se muestra en la imagen central de la figura 5.39. Este proceso produce que aparezcan flectores en el laminado, produciendo que en el extremo opuesto a la grieta las tensiones disminuyan, marcado con cuadrados en la figura y a cierta distancia aumenten, con círculos en la figura.

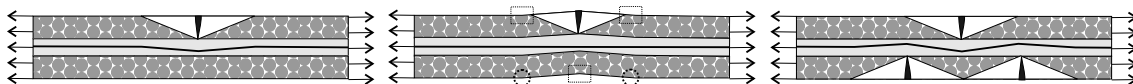


Figura 5.39: Agrietamiento en desfase de un laminado  $[90, 0, 90]$  debido a que el laminado deja de ser balanceado al aparecer la primera grieta.

En la figura 5.40 se muestra la evolución de las grietas externas en un laminado "cross-ply". Esta corresponde a un detalle de la figura 5.38, simulado mediante el modelo constitutivo para un material transversalmente isótropo presentado en este capítulo. En la imagen superior el laminado sólo presenta una grieta. A cierta



distancia, en el plano donde aparecerá la siguiente grieta, se muestra la deformación principal máxima. Se observa que el material se encuentra mucho más cargado en la capa inferior que en la superior. Este mismo proceso se repite en la formación de la siguiente grieta.

Este proceso de agrietamiento asimétrico aumenta al disminuir la inercia de la capa central y aumentar la inercia de las capas externas. Evidentemente, una buena manera de mitigar este efecto es reduciendo el espesor de las capas externas.

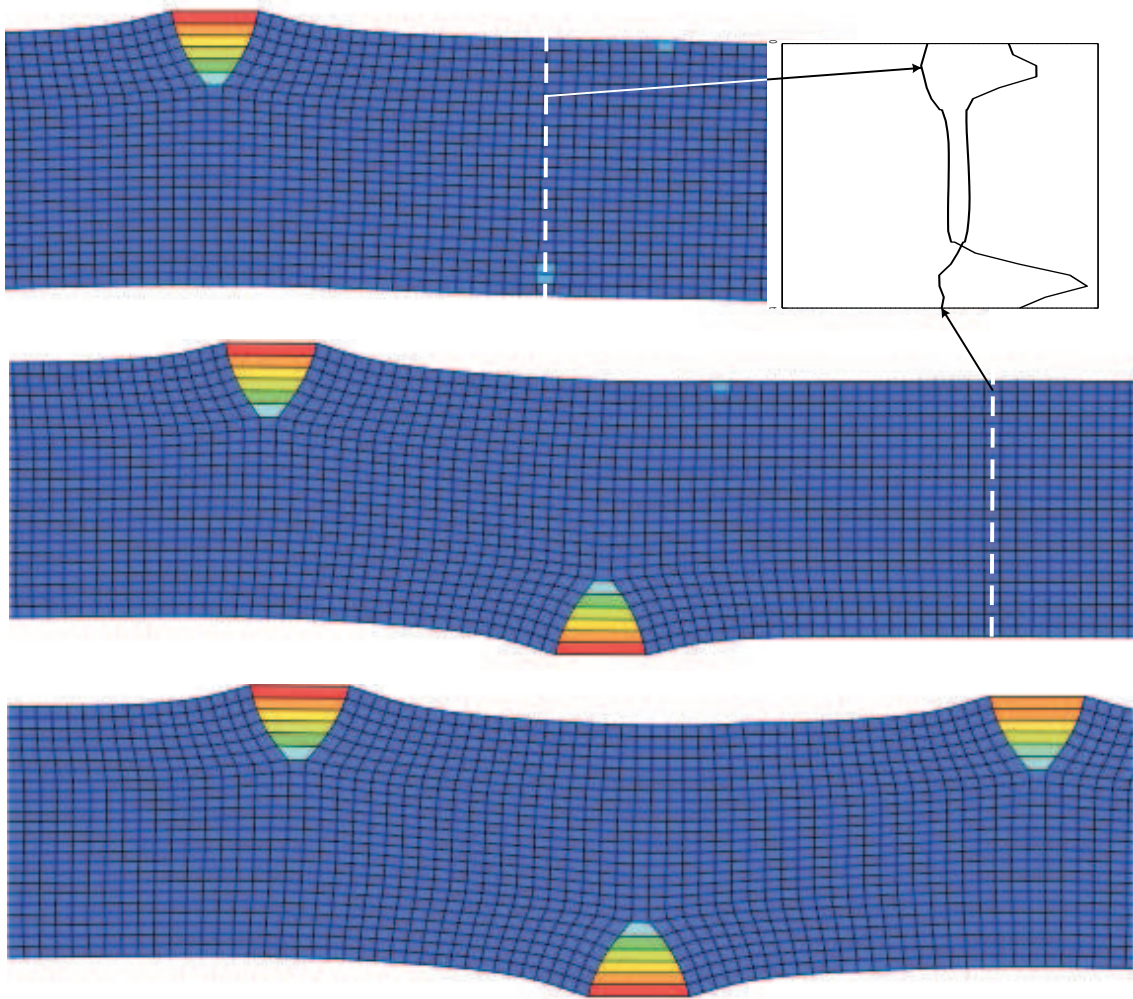


Figura 5.40: Proceso de agrietamiento en un laminado  $[90, 0]_s$ . Se muestra la deformación principal máxima a lo largo del espesor en el lugar donde aparecerá la siguiente grieta. Deformada aumentada 30 veces.

### Respuesta tensión deformación

Se realiza un estudio numérico para determinar la respuesta tensión deformación de la matriz en el proceso de agrietamiento. El material elegido es Hexcel IM7-8552 CFRP cuyas propiedades elásticas, de resistencia y energías de fractura son presentadas en el cuadro 5.17.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\alpha_{11}$ ( $^{\circ}C$ )	$\alpha_{22}$ ( $^{\circ}C$ )			
171.42	9.08	5.39	0.32	0.5	$-5.5 \times 10^{-6}$	$25.8 \times 10^{-6}$			
$X_T$	$X_C$	$Y_T$	$Y_C$	$\alpha_0$ ( $^{\circ}$ )	$S_L$	$G_{2+}$	$G_6$	$G_{1+}$	$G_{1-}$
2323.5	1200.1	62.3	199.8	53	92.3	0.2774	0.7879	81.5	106.3

Cuadro 5.17: Propiedades elásticas, coeficientes de dilatación, resistencias de una capa unidireccional (MPa) y energías de fractura (N/mm).

Se realizan un conjunto de ensayos numéricos donde se presenta la tensión media en la capa central en distintos laminados:  $[0_n, 90_n]_s$  con  $n = 2, 6, 10, 14$  y  $18$  al aumentar la deformación. El espesor de cada capa es de  $0.05$  mm. Las capas de tipo I corresponden a las que tienen un espesor menor a la determinada por la ecuación (5.12). Considerando  $k_2 = 2$ , resulta un espesor crítico de  $0.649$  mm lo que corresponde a  $12.98$  capas, es decir  $n = 6.49$ . Las capas más gruesas corresponden a capas de tipo II.

Aprovechando la simetría del laminado se modela medio espesor con 8 elementos por capa y un elemento de ancho. Se considera un estado plano de deformaciones en dirección transversal. Esta es una aproximación aceptable en el interior del laminado. La longitud de la probeta es veinte veces el espesor. No se consideran las tensiones térmicas residuales provocadas en el proceso de fabricación del laminado.

Para generar el campo aleatorio de resistencias transversales se utiliza una distribución uniforme con una resistencia mínima de  $Y_T^{\min} = Y_T^{\text{UD}}$  y una máxima de  $Y_T^{\max} = MY_T^{\text{UD}}$  con  $M=2$  y  $3$ . Se asume que esta distribución es independiente del tamaño del elemento finito.

Se aplica un desplazamiento uniforme en el extremo de la probeta, la deformación normal media del laminado se determina  $\varepsilon_0 = u/L$ , debido a las simetrías la curvatura del laminado es nula:  $\kappa = 0$ . Para determinar la tensión homogeneizada

de la capa central a  $90^0$  se utiliza la expresión:

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{V} \int \sigma_{22} dV \quad (5.139)$$

No se considera daño en la fibra para poder determinar un mayor rango de respuesta en el proceso de daño transversal. No obstante, con las propiedades del cuadro 5.17 la fibra rompe a una deformación de 0.0136.

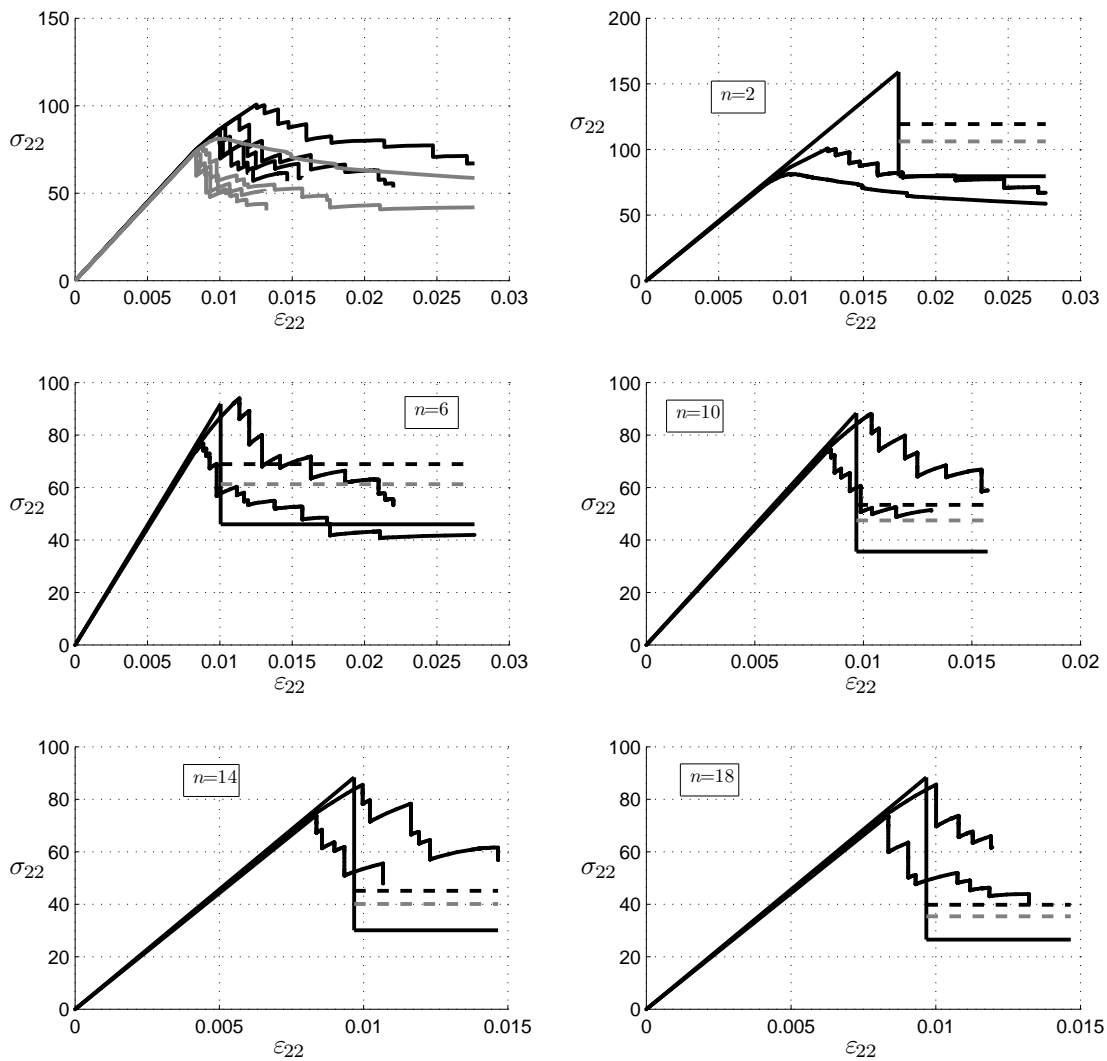


Figura 5.41: Respuesta tensión deformación transversal en la capa central de un laminado multiaxial. (Tensiones en MPa)

En la imagen superior izquierda de la figura 5.41 se muestra la respuesta tensión deformación ( $\bar{\sigma}_{22} - \varepsilon_0$ ) de las distintas probetas analizadas. Las líneas en gris corresponden a  $M = 2$  y las negras a  $M = 3$ . Se muestra la respuesta para  $n = 2, 6, 10, 14$  y  $18$ . Al aumentar el número de capas juntas la respuesta tensión deformación disminuye detectando de una manera cualitativa el efecto tamaño.

En las otras imágenes de la figura 5.41 se muestra la respuesta para cada tipo de laminado y se compara con las predicciones del modelo analítico desarrollado en la primera parte del capítulo. En la página 126 se ha comentado que el modelo analítico maximiza la densidad de agrietamiento (ver la figura 5.12), por este motivo se dibujan las líneas discontinuas en la figura 5.41 las cuales corresponden al agrietamiento mínimo (línea superior), y medio.

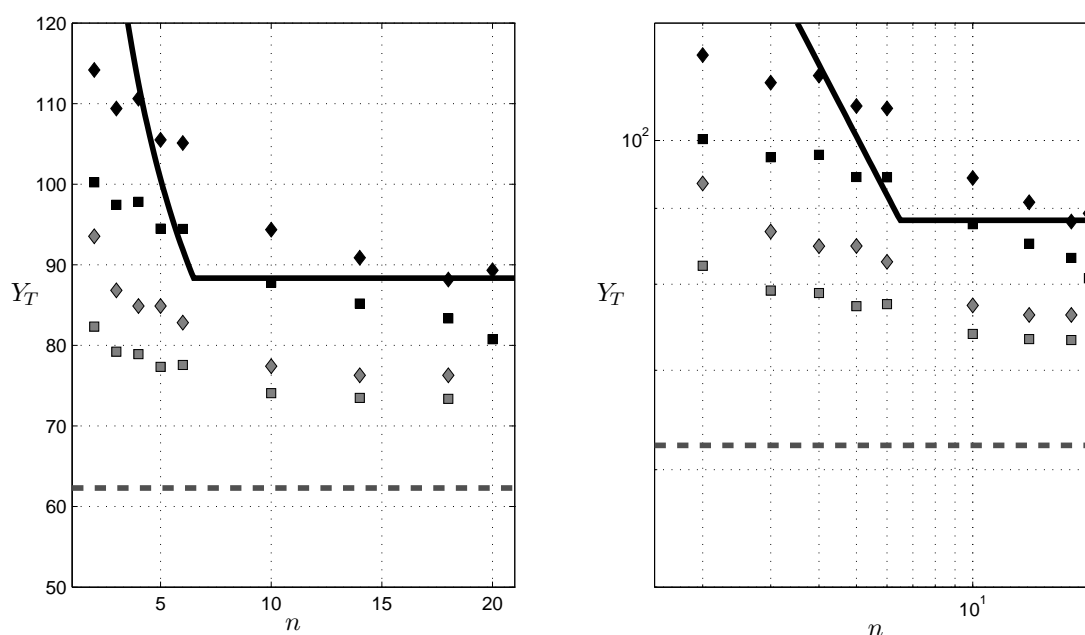


Figura 5.42: Tensión transversal máxima en la capa central de un laminado multi-axial. Izquierda en escala lineal, derecha logarítmica. (Tensiones en MPa)

En la figura 5.42 se muestra la máxima tensión transversal media que alcanza el laminado. Esta corresponde a la tensión en que aparece la primera grieta a lo largo de todo el espesor, según el modelo analítico y también el numérico si no existe un lugar extremadamente debilitado en el proceso de generación aleatoria de resistencias. La línea continua corresponde al resultado del modelo analítico y la discontinua la resistencia de una capa unidireccional. En gris se muestran los

resultados para  $M = 2$  y en negro por  $M = 3$ . Los cuadrados corresponden a la tensión máxima mientras los rombos se han determinado aplicando la ley lineal elástica a la deformación de la tensión máxima.

La diferencia entre la tensión alcanzada asumiendo una ley lineal elástica y la tensión media obtenida con la expresión (5.139) se debe al daño que experimenta el material sin localizarse en una grieta. Este efecto aumenta en las capas delgadas que son capaces de sustentar mayores esfuerzos antes de agrietarse.

# Capítulo 6

## Análisis estructural

### 6.1. Introducción

Debido a la geometría de las piezas laminadas, un espesor relativamente pequeño comparado con el tamaño estructural, es necesario su tratamiento mediante la teoría de cáscaras. Esta ofrece una pobre descripción cinemática ya que considera que el estado de deformación de todas las capas puede ser descrito mediante dos tensores, uno que almacena la deformación media y otro la curvatura. Las consecuencias de utilizar elementos cáscara es que la ley constitutiva de cada capa depende de todas las capas que forman el laminado, como se comenta en la sección 4.3.7.

### 6.2. Modelo constitutivo para compuestos laminados

El modelo constitutivo se escribe a nivel de cada capa, se considera que el estado de la capa es constante en todo el espesor. El modelo se describe en la misma escala que los anteriormente tratados en el apartado sobre mesomodelos 4.3.

La termodinámica de los procesos irreversibles ofrece un marco general para la formulación de modelos constitutivos. En este formalismo pueden incorporarse observaciones, resultados experimentales y un conjunto de reglas para asegurar el cumplimiento de las leyes de la termodinámica.

### 6.2.1. Energía libre complementaria y descripción del daño

Se define una energía libre en el campo complementario mediante la expresión [223]-[225]:

$$G = \frac{\sigma_{11}^2}{2(1-d_1)E_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{2(1-d_2)E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}\sigma_{22} + \Upsilon_e(\sigma_{12}, d_6) + \Upsilon_p(\sigma_{12}, \gamma_{12}^p) + (\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{22}\sigma_{22})\Delta T + (\beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{22}\sigma_{22})\Delta M \quad (6.1)$$

donde  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\nu_{12}$  son las propiedades elásticas de una lamina unidireccional en el plano. El subíndice 1 indica dirección longitudinal (fibra), y 2 transversal (matriz). La variable de daño  $d_1$  se refiere al fallo en dirección longitudinal mientras  $d_2$  se encuentra relacionada con el daño transversal y  $d_6$  a la pérdida de rigidez bajo cargas a cortante. La variable interna  $\gamma_{12}^p$  indica la deformación cortante no recuperable.  $\alpha_{11}$  y  $\alpha_{22}$  son los coeficientes de expansión térmica en dirección longitudinal y transversal respectivamente.  $\beta_{11}$  y  $\beta_{22}$  son los coeficientes de expansión higroscópica en la dirección longitudinal y transversal.  $\Delta T$  y  $\Delta M$  son las diferencias de temperatura y humedad respecto a los valores de referencia.

$\Upsilon_e(\sigma_{12}, d_6)$  y  $\Upsilon_p(\sigma_{12}, \gamma_{12}^p)$  son funciones escalares que determinan la densidad de energía elástica a cortante y de energía elasto-plástica (ver figura 5.21), respectivamente. Se consideran tres tipos de comportamiento a cortante:

$$\begin{aligned} \text{Elástico:} \quad & \Upsilon_e = \frac{\sigma_{12}^2}{2(1-d_6)G_{12}} & \text{y} \quad \Upsilon_p = 0 \\ \text{Hahn-Tsai:} \quad & \Upsilon_e = \frac{\beta\sigma_{12}^4}{4(1-d_6)^3} + \frac{\sigma_{12}^2}{2(1-d_6)G_{12}} & \text{y} \quad \Upsilon_p = 0 \\ \text{Elasto-plástico:} \quad & \Upsilon_e = \frac{\sigma_{12}^2}{2(1-d_6)G_{12}} & \text{y} \quad \Upsilon_p = \sigma_{12}\gamma_{12}^p - \frac{G_{12}H(\gamma_{12}^p)^2}{2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Donde  $\beta$  y  $H$  son parámetros de ajuste de la ley de Hahn-Tsai y de la ley plástica respectivamente. Su función es explicada en la sección 5.2.5.

Para garantizar la irreversibilidad termodinámica de los procesos disipativos, el daño y la plasticidad, el incremento de energía libre complementaria  $\dot{G}$  menos el incremento de trabajo externo suministrado al sólido  $\dot{\sigma} : \varepsilon$  a deformación constante, no debe ser negativa:

$$\dot{G} - \dot{\sigma} : \varepsilon \geq 0 \tag{6.3}$$

Esta inecuación corresponde al segundo principio de la termodinámica y debe ser garantizado por cualquier modelo constitutivo [65]. Expandiendo la expresión en función del tensor de tensiones y de las variables internas resulta:

$$\left( \frac{\partial G}{\partial \sigma} - \varepsilon \right) : \dot{\sigma} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}} + \frac{\partial G}{\partial \gamma_{12}^p} \cdot \dot{\varepsilon}_{12}^p \geq 0 \tag{6.4}$$

Las tensiones son las variables libres del problema y como tal pueden variar libremente. La expansión del paréntesis debe ser nula para garantizar la disipación positiva de la energía elástica. Luego, las deformaciones elásticas pueden determinarse a partir de la derivada de la energía libre complementaria respecto las tensiones:

$$\varepsilon = \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \mathbf{H} : \sigma + \alpha \Delta T + \beta \Delta M \tag{6.5}$$

Si el régimen elástico es lineal, ecuación (6.2.a y c) el tensor de flexibilidad  $\mathbf{H}$  de la capa puede escribirse en notación de Voigt:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_1)E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{(1-d_2)E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_6)G_{12}} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

si se utiliza la expresión de Hahn-Tsai la relación a cortante resulta  $H_{33} = \frac{\beta \sigma_{12}^2}{(1-d_6)^3} + \frac{1}{(1-d_6)G_{12}}$ .

El cierre de las grietas al invertir el signo de las cargas, también conocido como unilateralidad del daño, se tiene en consideración definiendo dos variables de daño asociadas con el daño transversal y dos más con el longitudinal. Para determinar las variables activas en cada situación es necesario tener en cuenta el signo de las correspondientes tensiones normales al plano de las grietas:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_{1+} \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{|\sigma_{11}|} + d_{1-} \frac{\langle -\sigma_{11} \rangle}{|\sigma_{11}|} \\ d_2 &= d_{2+} \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{|\sigma_{22}|} + d_{2-} \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle}{|\sigma_{22}|} \end{aligned} \tag{6.7}$$



donde  $\langle x \rangle$  es el operador de McCauley definido  $\langle x \rangle := (x + |x|) / 2$ .

El modelo asume que la variable de daño a cortante ( $d_6$ ) no es influenciada por el cierre de las grietas. El daño a cortante es producido por grietas longitudinales y transversales, estas no se cierran bajo tensiones cortantes ( $\sigma_{12}$ ). Las grietas transversales son cerradas bajo tensiones transversales ( $\sigma_{22}$ ) produciendo el cierre de las grietas y la fricción de estas. Las grietas longitudinales producen un efecto parecido bajo tensiones longitudinales ( $\sigma_{11}$ ) [51]. Este efecto de la fricción se tiene parcialmente en cuenta con el modelo friccional.

### 6.2.2. Funciones de activación del daño y la plasticidad

La determinación del dominio elástico bajo estados complejos de tensiones es una parte esencial de cualquier modelo de daño. Basado en los mecanismos de daño descritos en la sección 4.2 se define un espacio de deformaciones donde el comportamiento del material es elástico.

En el presente modelo se asume que el dominio elástico se encuentra definido por cinco superficies. Una destinada a determinar la evolución de la variable plástica y cuatro para el daño, una para cada mecanismo de daño, longitudinal y transversal bajo cargas a tracción y a compresión. Las superficies de activación del daño se basan en los criterios LaRC03 y LaRC04. Estos criterios son capaces de representar con la suficiente precisión los mecanismos físicos que inducen el daño en los compuestos laminados. El criterio LaRC04 representa una evolución del criterio LaRC03, algunos mecanismos son tratados con mayor precisión, como el "*fiber kinking*", además de considerar estados triaxiales de tensión. No obstante este incremento de la precisión viene asociado con un significativo aumento de la complejidad computacional. El modelo presentado utiliza una combinación y simplificación de ambos criterios para alcanzar un compromiso entre precisión y eficiencia computacional. Los detalles completos de la derivación y validación de los criterios LaRC03-04 pueden encontrarse en las referencias [123] y [124].

Las cuatro funciones de activación del daño,  $F_N$ , asociadas al daño longitudinal ( $N = L+, L-$ ) y transversal ( $N = T+, T-$ ) se definen como:

$$\begin{aligned} F_{L+} = \phi_{L+} - r_{L+} \leq 0 \quad ; \quad F_{L-} = \phi_{L-} - r_{L-} \leq 0 \\ F_{T+} = \phi_{T+} - r_{T+} \leq 0 \quad ; \quad F_{T-} = \phi_{T-} - r_{T-} \leq 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

donde las funciones de carga  $\phi_N$  ( $N = L+, L-, T+, T-$ ) dependen del tensor de deformaciones elásticas y de constantes materiales (propiedades elásticas y de resistencia). Los umbrales del dominio elástico  $r_N$  ( $N = L+, L-, T+, T-$ ) toman el valor inicial de 1 cuando el material no se encuentra dañado e incrementan con el daño. Los umbrales del dominio elástico son las variables internas que describen el daño en el presente modelo constitutivo, y se encuentran relacionados con las variables de daño  $d_M$  ( $M = 1+, 1-, 2+, 2-, 6$ ) a través de las leyes de evolución del daño. Los umbrales del dominio elástico indican, en cualquier instante, el valor máximo que pueden alcanzar las deformaciones elásticas antes que el daño aumente.

La función de activación de los procesos plásticos se puede escribir según el modelo desarrollado en la sección 5.2.5:

$$F_p = |\gamma_{12}^e - H\gamma_{12}^p| - \left( \gamma_{12}^0 \frac{\log(1 + \exp(-\mu\varepsilon_{22}))}{\log(2)} + K\gamma_{12}^i \right) \leq 0 \quad (6.9)$$

donde  $\gamma_{12}^p$  y  $\gamma_{12}^i$  forman el conjunto de variables internas plásticas.  $\gamma_{12}^0$ ,  $H$ ,  $K$  y  $\mu$  son los parámetros de ajuste del modelo. La superficie de activación de las variables plásticas se puede observar en la figura 5.22.

### Daño longitudinal a tracción

La función de carga a tracción longitudinal es función lineal de la deformación longitudinal:

$$\phi_{L+} = \frac{E_1}{X_T} \varepsilon_{11} = \frac{\tilde{\sigma}_{11} - \nu_{12}\tilde{\sigma}_{22}}{X_T} \quad (6.10)$$

donde el tensor de tensiones efectivas  $\tilde{\sigma}$  se determina  $\tilde{\sigma} = \mathbf{H}_0^{-1} : \varepsilon$ .  $\mathbf{H}_0$  es el tensor de flexibilidad virgen obtenido de la ecuación (6.6) con  $d_1 = d_2 = d_6 = 0$ .

### Daño longitudinal a compresión

El criterio de fallo LaRC03 postula que una "kink band" está inducida por el daño en la matriz. Bajo estas circunstancias las fibras pierden su confinamiento lateral y fallan bajo el efecto de los esfuerzos a compresión. El desalineamiento inicial de las fibras y las rotaciones debidas a las tensiones son consideradas en el modelo para determinar su inestabilización.

La función de activación del daño utilizada para predecir la formación de una "kink band" bajo cargas longitudinales a compresión ( $\tilde{\sigma}_{11} < 0$ ) y cortantes en el plano se establece a partir de las componentes del tensor de tensiones  $\tilde{\sigma}^{(m)}$  en el sistema de coordenadas ( $m$ ) que representan la desalineación de las fibras.

$$\phi_{L-} = \frac{\langle |\tilde{\sigma}_{12}^m| + \eta^L \tilde{\sigma}_{22}^m \rangle}{S_L} \quad (6.11)$$

donde el coeficiente de fricción longitudinal puede ser aproximado [123]:

$$\eta^L \approx -\frac{S_L \cos(2\alpha_0)}{Y_C \cos^2 \alpha_0} \quad (6.12)$$

Las componentes del tensor de tensiones efectivas asociadas al sistema de coordenadas de las fibras desalineadas pueden determinarse:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{22}^m &= \tilde{\sigma}_{11} \sin^2 \varphi^C + \tilde{\sigma}_{22} \cos^2 \varphi^C - 2 |\tilde{\sigma}_{12}| \sin \varphi^C \cos \varphi^C \\ \tilde{\sigma}_{12}^m &= (\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{11}) \sin \varphi^C \cos \varphi^C + |\tilde{\sigma}_{12}| (\cos^2 \varphi^C - \sin^2 \varphi^C) \end{aligned} \quad (6.13)$$

se toma el valor absoluto de las tensiones cortantes porque la desalineación puede ser positiva o negativa.

El ángulo de desalineación ( $\varphi^C$ ) se determina utilizando la tensión límite a cortante y a compresión longitudinal,  $S_L$  y  $X_C$  [123]:

$$\varphi^C = \arctan \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{S_L}{X_C} + \eta^L \right) \frac{S_L}{X_C}}}{2 \left( \frac{S_L}{X_C} + \eta^L \right)} \right) \quad (6.14)$$

Debe mencionarse que el criterio LaRC03 determina el ángulo de desalineación de las fibras en función de las tensiones aplicadas. El criterio se modifica asumiendo que el ángulo de desalineación inicial no se ve modificado por las cargas externas. Esta simplificación del criterio asegura que  $\phi_{L-}$  es una función monótonamente creciente bajo un estado proporcional de cargas.

El criterio LaRC03 consta de otra función para determinar la formación de una "kink band". La ecuación (6.11) para  $\tilde{\sigma}_{22}^m \leq 0$  y una segunda ecuación para  $\tilde{\sigma}_{22}^m \geq 0$ . La omisión de esta segunda ecuación provoca en una pequeña pérdida de precisión en el modelo, esta ecuación es la misma que (6.15.a) con las tensiones rotadas al sistema de coordenadas de las fibras desalineadas.

**Daño transversal a tracción**

Las grietas en la matriz perpendiculares al plano de la capa, con  $\alpha_0 = 0^\circ$ , son generadas por una combinación de tensiones cortantes en el plano y tracciones en dirección transversal, o bajo cortantes en el plano y moderados valores de tensiones a compresión en dirección transversal. Estas condiciones son representadas en el criterio LaRC04:

$$\phi_{T+} = \begin{cases} \sqrt{(1-g) \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y_T} + g \left( \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y_T} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{\sigma}_{12}}{S_L} \right)^2} & \text{if } \tilde{\sigma}_{22} \geq 0 \\ \frac{1}{S_L} \langle |\tilde{\sigma}_{12}| + \eta^L \tilde{\sigma}_{22} \rangle & \text{if } \tilde{\sigma}_{22} < 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

donde  $g$  es la relación de energías críticas de fractura definido como:  $g = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}}$ .

**Daño transversal a compresión**

El criterio LaRC04 para el daño transversal a compresión consiste en una interacción cuadrática entre las tensiones cortantes efectivas actuando, en dirección transversal y longitudinal, al plano de fallo:

$$\phi_{T-} = \sqrt{\left( \frac{\tilde{\tau}_{\text{eff}}^T}{S_T} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{\tau}_{\text{eff}}^L}{S_L} \right)^2} \quad \text{if } \tilde{\sigma}_{22} < 0 \quad (6.16)$$

donde las tensiones efectivas  $\tilde{\tau}_{\text{eff}}^T$  y  $\tilde{\tau}_{\text{eff}}^L$  se determinan [124]:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{\text{eff}}^T &= \langle -\tilde{\sigma}_{22} \cos(\alpha_0) (\sin(\alpha_0) - \eta^T \cos(\alpha_0) \cos(\theta)) \rangle \\ \tilde{\tau}_{\text{eff}}^L &= \langle \cos(\alpha_0) (|\tilde{\sigma}_{12}| + \eta^L \tilde{\sigma}_{22} \cos(\alpha_0) \sin(\theta)) \rangle \end{aligned} \quad (6.17)$$

El ángulo de fricción  $\theta$  se determina [124]:

$$\theta = \arctan \left( \frac{-|\tilde{\sigma}_{12}|}{\tilde{\sigma}_{22} \sin(\alpha_0)} \right) \quad (6.18)$$

La resistencia a cortante transversal y el coeficiente de fricción pueden aproximarse:

$$\begin{aligned} S_T &= Y_C \cos(\alpha_0) \left[ \sin(\alpha_0) + \frac{\cos(\alpha_0)}{\tan(2\alpha_0)} \right] \\ \eta^T &= \frac{-1}{\tan(2\alpha_0)} \end{aligned} \quad (6.19)$$

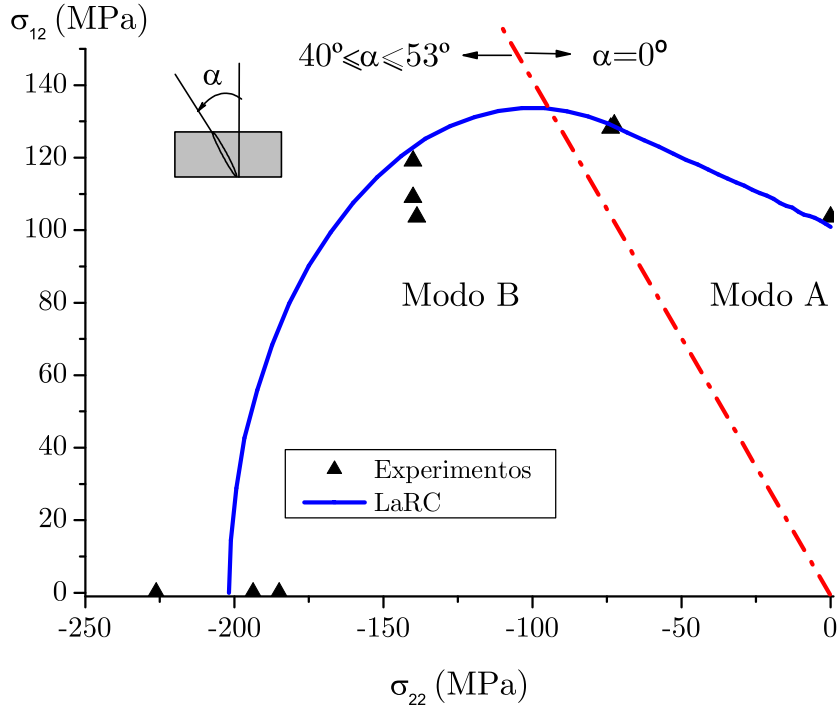


Figura 6.1: Envolvente de la resistencia transversal bajo compresión y cortante en el plano. Valores experimentales obtenidos por Swanson [111].

El ángulo de fractura  $\alpha_0$  es aproximadamente  $53^\circ$  en un ensayo uniaxial a compresión. Aumentando las tensiones cortantes en el plano el ángulo disminuye hasta alrededor de  $40^\circ$  (Modo B en la figura 6.1) y luego cambia a  $0^\circ$  (Modo A en la figura 6.1). Para obtener el ángulo de fractura correcto es necesario maximizar el índice de fallo en función de  $\alpha$ . No obstante, para obtener una mayor eficiencia en el modelo se asume que el ángulo de fractura solo puede obtener los valores  $0^\circ$  o  $53^\circ$ .

El dominio elástico en el espacio de las tensiones efectivas  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$ ,  $\tilde{\sigma}_{12}$  resultante de las anteriores funciones de carga son representadas en la figura 6.2.

### 6.2.3. Disipación

La energía disipada por unidad de volumen al evolucionar las variables internas resulta de la expresión (6.4):

$$\Xi = \frac{\partial G}{\partial d_1} \dot{d}_1 + \frac{\partial G}{\partial d_2} \dot{d}_2 + \frac{\partial G}{\partial d_6} \dot{d}_6 + \frac{\partial G}{\partial \gamma_{12}^p} \dot{\gamma}_{12}^p = Y_1 \dot{d}_1 + Y_2 \dot{d}_2 + Y_6 \dot{d}_6 + Y_p \dot{\gamma}_{12}^p \geq 0 \quad (6.20)$$

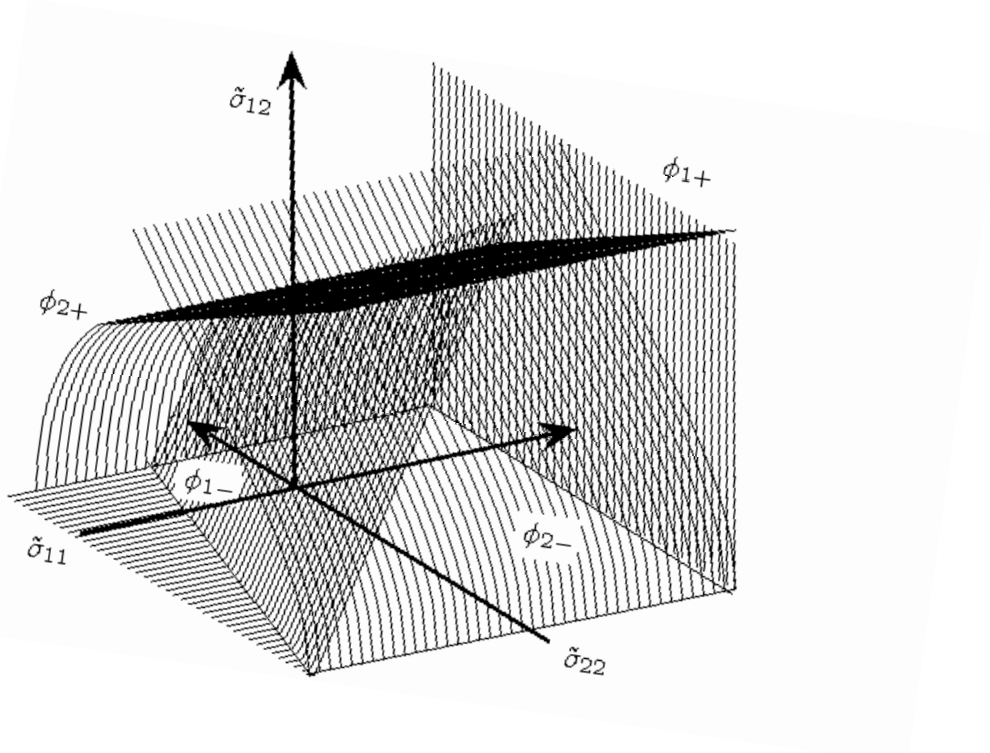


Figura 6.2: Dominio elástico en el espacio de tensiones efectivas:  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$ ,  $\tilde{\sigma}_{12}$ .

donde las fuerzas termodinámicas conjugadas a las variables de daño longitudinal y transversal se pueden escribir:

$$Y_1 = \frac{\partial G}{\partial d_1} = \frac{\sigma_{11}^2}{2(1-d_1)^2 E_1} \geq 0$$

$$Y_2 = \frac{\partial G}{\partial d_2} = \frac{\sigma_{22}^2}{2(1-d_2)^2 E_2} \geq 0$$
(6.21)

a cortante las fuerzas termodinámicas conjugadas depende de la ley constitutiva utilizada según:

Elástico:  $Y_6 = \frac{\partial G}{\partial d_6} = \frac{\sigma_{12}^2}{2(1-d_6)^2 G_{12}} \geq 0$  y  $Y_p = 0$

Hahn-Tsai:  $Y_6 = \frac{\partial G}{\partial d_6} = \frac{3\beta\sigma_{12}^4}{4(1-d_6)^4} + \frac{\sigma_{12}^2}{2(1-d_6)^2 G_{12}} \geq 0$  y  $Y_p = 0$

Elasto-plástico:  $Y_6 = \frac{\partial G}{\partial d_6} = \frac{\sigma_{12}^2}{2(1-d_6)^2 G_{12}} \geq 0$  y  $Y_p = \frac{\partial G}{\partial \gamma_{12}^p} = \sigma_{12} - G_{12} H \gamma_{12}^p$

(6.22)

Las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño ( $Y_M$ ) son siempre positivas, luego garantizando una evolución positiva de las variables de daño ( $\dot{d}_M \geq 0$ ) el segundo principio de la termodinámica queda automáticamente garantizado.

Por lo que se refiere a las variables plásticas, considerando la ley de evolución de las variables plásticas definida en el capítulo 5 ( $\dot{\gamma}_{12}^p = \dot{\gamma}_{12}^i \text{sign}(\gamma_{12}^e - H\gamma_{12}^p)$ ) resulta:

$$\Xi_p = Y_p \dot{\gamma}_{12}^p = (\sigma_{12} - G_{12} H \gamma_{12}^p) \dot{\gamma}_{12}^p = G_{12} |\gamma_{12}^e - H \gamma_{12}^p| \dot{\gamma}_{12}^i \geq 0 \quad (6.23)$$

Teniendo en cuenta que la variable de endurecimiento isótropo es siempre definido positivo,  $\dot{\gamma}_{12}^i \geq 0$ , la disipación debida a los procesos plásticos es positiva.

Debe notarse que cuando las variables activas de daño pasan de tracción a compresión, o viceversa, no se genera disipación espuria, generación o pérdida de energía mecánica al abrirse o cerrarse las grietas. Al invertir las cargas la derivada temporal de las variables de daño no es nula ( $\dot{d}_M \neq 0$ ). Considerando la ecuación (6.20), las fuerzas termodinámicas ( $Y_M$ ) asociadas a las variables de daño ( $d_M$ ), deben ser nulas para evitar la generación de energía espuria al invertir las cargas [63]. Esta condición es trivialmente satisfecha en el presente modelo, como muestra la ecuación (6.21).

La evolución del daño sin disipación de energía es físicamente inadmisibles. Por lo tanto, es necesario evitar la evolución del daño cuando su correspondiente fuerza termodinámica asociada sea nula. Si se considera la historia de cargas representada en la figura 6.3: El material es cargado con tensiones transversales y cortantes hasta  $t_1$  y posteriormente hasta  $t_2$ . En el momento  $t_2$ , la variable de daño  $d_2$  evoluciona porque la correspondiente función de daño se activa,  $r_{T-}$ . No obstante, la correspondiente fuerza termodinámica asociada es nula ( $\sigma_{22} = 0$ ,  $Y_2 = 0$ ).

Esta respuesta físicamente inconsistente es evitada modificando las funciones de daño longitudinal y transversal a compresión. La función de daño transversal se modifica mediante la expresión:

$$\phi_{T-} = \text{mín} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}_{\text{eff}}^T}{S_T}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\gamma}_{\text{eff}}^L}{S_L}\right)^2}, \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\Omega} \right\}$$

donde la constante  $\Omega$  es igual a  $\tilde{\sigma}_{22}$  cuando  $\phi_{T-} = \phi_{T+}$  (Figura 6.3).

La función de daño longitudinal se modifica teniendo en cuenta que bajo tensiones cortantes la matriz es la primera en dañarse. Una vez dañada la matriz las fibras rotan con mayor libertad hasta un ángulo de desalineación  $\varphi$  de  $\pi/4$ . Bajo

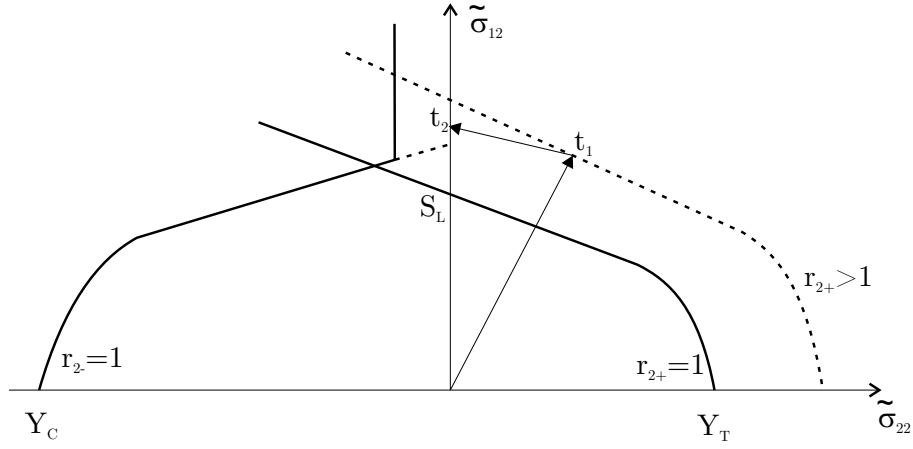


Figura 6.3: Evolución del dominio elástico-plástico en el espacio  $\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{12}$ .

estas circunstancias, el criterio de formación de una "kink band", ecuación (6.11), resulta:

$$\phi_{L-} = \text{mín} \left\{ \frac{\langle |\tilde{\sigma}_{12}^m| + \eta^L \tilde{\sigma}_{22}^m \rangle}{S_L}, \frac{\eta^L - 1}{2S_L} \tilde{\sigma}_{11} \right\} \quad (6.24)$$

#### 6.2.4. Evolución del daño y la plasticidad

La evolución de los umbrales de daño  $r_N$  se expresan matemáticamente mediante las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{r}_N \geq 0 \quad ; \quad F_N \leq 0 \quad ; \quad \dot{r}_N F_N = 0 \quad (6.25)$$

Para el modelo plástico estas condiciones se expresan mediante las ecuaciones (5.47).

Sin considerar efectos viscosos las funciones de activación, ecuaciones (6.8), deben ser siempre no positivas. Mientras las funciones de activación  $F_N$  son negativas, la respuesta del material es elástica. Cuando un estado de deformación activa un criterio ( $F_N = 0$ ), es necesario determinar el gradiente  $\dot{\phi}_N$ . Si no es positivo, la respuesta es de descarga o carga neutra. Si el gradiente  $\dot{\phi}_N$  es positivo, las variables internas evolucionan, y la condición de consistencia debe ser satisfecha:

$$\dot{F}_N = \dot{\phi}_N - \dot{r}_N = 0 \quad (6.26)$$



Teniendo en cuenta que los umbrales de daño dependen exclusivamente de las variables de daño y las funciones de carga dependen de las deformaciones el modelo constitutivo puede ser integrado explícitamente [221][222].

En la definición del modelo constitutivo es necesario definir la evolución de los dominios elásticos activos e inactivos. La evolución de los dominios elásticos activos resulta de la aplicación de la condición de consistencia, ecuación (6.26). Es decir de su correspondiente función de activación del daño. No obstante, también es necesario definir la evolución de los umbrales de daño no activos. Se asume que los umbrales de daño asociados al daño longitudinal y transversal no se encuentran acoplados. Por otro lado, los umbrales de daño a tracción y a compresión se encuentran acoplados como se explica en las siguientes secciones.

### Carga transversal

Las grietas en la matriz tienen distinta orientación según se generen bajo cargas a tracción y cortante o a compresión. Las primeras, representadas por la función de activación  $F_{T+}$ , producen grietas perpendiculares al plano del laminado. Bajo cargas a compresión éstas se cierran y no afectan a la respuesta: ni al umbral de daño  $r_{T-}$  ni a la variable de daño  $d_{2-}$ .

Por otro lado, las grietas en la matriz inclinadas un ángulo  $\alpha_0 = 53^\circ$  ocasionadas por cargas a compresión tienen el mismo efecto que las grietas perpendiculares ( $\alpha = 0^\circ$ ) bajo cargas a tracción. Por esta razón la evolución del umbral de daño a tracción ( $r_{T+}$ ) depende de ambos mecanismos de daño.

Basado en las consideraciones previamente expuestas la evolución de los umbrales de daño transversales se puede escribir:

$$\begin{aligned} \text{Tracción:} \quad & \dot{r}_{T+} = \dot{\phi}_{T+} \quad \text{y} \quad \dot{r}_{T-} = 0 \\ \text{Compresión:} \quad & \dot{r}_{T-} = \dot{\phi}_{T-} \quad \text{y} \quad \dot{r}_{T+} = \begin{cases} \dot{\phi}_{T-} & \text{si } r_{T+} \leq r_{T-} \\ 0 & \text{si } r_{T+} > r_{T-} \end{cases} \end{aligned}$$

Su integración se realiza explícitamente resultando:

$$\begin{aligned} r_{T+} &= \max \left\{ 1, \max_{s=0,t} \{ \phi_{T+}^s \}, \max_{s=0,t} \{ \phi_{T-}^s \} \right\} \\ r_{T-} &= \max \left\{ 1, \max_{s=0,t} \{ \phi_{T-}^s \} \right\} \end{aligned} \tag{6.27}$$

### Carga longitudinal

Bajo cargas a tracción longitudinal se genera un plano de fallo perpendicular a la dirección de las fibras. Si se invierten las cargas el material dañado es capaz de sustentar tensiones debido al cierre de las grietas. La rigidez será menor pues las fibras rotas pierden su alineación inicial y son incapaces de transferir la misma tensión. No obstante, el inicio del daño a compresión viene determinado por la degradación de la matriz, provocando la pérdida de confinamiento de las fibras y su desestabilización [123][124]. Se asume que las deformaciones necesarias para inicial el daño a compresión permanecen inalteradas por daño generado previamente a tracción.

Bajo cargas longitudinales a compresión se producen grietas en la matriz y rotura de fibras formando una "kink band" y no existe una orientación única del daño. Cuando las cargas se invierten el daño generado a compresión sigue activo y el dominio elástico aumenta.

La evolución de los umbrales de daño longitudinales se define:

$$\begin{aligned} \text{Tracción:} \quad & \dot{r}_{L+} = \dot{\phi}_{L+} \quad \text{y} \quad \dot{r}_{L-} = 0 \\ \text{Compresión:} \quad & \dot{r}_{L-} = \dot{\phi}_{L-} \quad \text{y} \quad \dot{r}_{L+} = \begin{cases} \dot{\phi}_{L-} & \text{si } r_{L+} \leq r_{L-} \\ 0 & \text{si } r_{L+} > r_{L-} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Su integración se realiza explícitamente resultando:

$$\begin{aligned} r_{L+} &= \text{máx} \left\{ 1, \text{máx}_{s=0,t} \{ \phi_{L+}^s \}, \text{máx}_{s=0,t} \{ \phi_{L-}^s \} \right\} \\ r_{L-} &= \text{máx} \left\{ 1, \text{máx}_{s=0,t} \{ \phi_{L-}^s \} \right\} \end{aligned} \quad (6.29)$$

#### 6.2.5. Leyes de daño

Las leyes de daño relacionan el valor de las variables daño  $d_M$  ( $M = 1+, 1-, 2+, 2-, 6$ ) con el de las variables internas  $r_N$  ( $N = L+, L-, T+, T-$ ). Más allá de la forma específica de cada una de las leyes la disipación de energía mecánica es independientemente del mallado cuando el daño es distribuido y depende del tamaño de la discretización cuando el daño es localizado. Según la aproximación del "Crack band model" propuesta por Bažant [74] la relación entre la densidad de disipación ( $g_M$ ),

la energía crítica de fractura ( $G_M$ ) y la longitud característica del elemento finito ( $l^*$ ) se expresa:

$$g_M = \frac{G_M}{l^*}, \quad M = 1+, 1-, 2+, 2-, 6 \quad (6.30)$$

Para elementos de cuatro nodos, con una relación de aspecto cercana a uno, el tamaño característico del elemento puede ser aproximado [74] con la expresión:

$$l^* = \frac{\sqrt{A_{IP}}}{\cos(\gamma)} \quad (6.31)$$

donde  $|\gamma| \leq 45^\circ$  es el ángulo que forman las líneas de los elementos finitos con la dirección de la grieta y  $A_{IP}$  es la área asociada a cada punto de integración. Si se desconoce la dirección de propagación de la grieta se puede utilizar el valor medio de esta expresión  $\bar{l}^* = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} l^* d\gamma = 1,12\sqrt{A_{IP}}$ .

Cuando la trayectoria de la grieta puede ser aproximada a priori, es altamente recomendable alinear la malla con la línea de propagación de la grieta, porque las grietas tienden a avanzar en la dirección de los elementos. En este caso la longitud característica es la raíz cuadrada de la área asociada a cada punto de integración, es decir  $\gamma = 0$ .

Para elementos triangulares la distancia característica se puede determinar:

$$l^* = 2\sqrt{\frac{A_{IP}}{\sqrt{3}}} \quad (6.32)$$

Una medida más apropiada de la longitud característica se obtiene a partir de determinar las proyecciones de las dos posibles orientaciones de las grietas, longitudinal y transversal.

La densidad de energía disipada por cada ley de daño bajo cargas uniaxiales se determinan integrando:

$$g_M = \int_0^\infty Y_M \dot{d}_M dt = \int_1^\infty Y_M \frac{\partial d_M}{\partial r_N} dr_N \quad (6.33)$$

Existe un tamaño de elemento finito límite a partir del cual es imposible regularizar la energía disipada sin que la respuesta tensión deformación exhiba "snap-back", éste se puede determinar:

$$l^* \leq \frac{2E_M G_M}{X_M^2} \quad (6.34)$$

En el caso que el tamaño del elemento finito sea mayor el modelo disipará más energía produciendo un fallo más dúctil del debido. La solución apropiada es remallar la pieza para garantizar una disipación correcta. Otra posibilidad es disminuir la resistencia de fallo según:

$$X_M = \sqrt{\frac{2E_M G_M}{l^*}} \quad (6.35)$$

y utilizar una ley de daño con ablandamiento instantáneo, es decir una vez se alcance la tensión de fallo la variable de daño toma el valor de uno.

Esta solución no debe aplicarse donde empieza el daño ya que la resistencia es crítica pero puede aplicarse una vez la grieta se ha generado pues la energía de fractura es el parámetro determinante en su avance.

Cuando se utiliza la teoría de cáscaras para obtener la respuesta estructural de un laminado multicapa el criterio de localización debe definirse a lo largo de todo el espesor del laminado, como se ha comentado en la sección 4.3.7.

En el caso que se trate de un laminado unidireccional se considera que la activación de cualquiera de las leyes de daño provoca la localización de las deformaciones en una banda. En este caso se utilizan leyes de daño exponenciales.

Si se estudia el comportamiento de un laminado multicapa con fibras orientadas en varias direcciones. La activación de los criterios de daño  $F_{L+}$ ,  $F_{L-}$  o  $F_{T-}$  en una capa provoca, en una probeta con un campo de tensiones uniforme (por ejemplo en una probeta sin entalla inicial) el colapso estructural, es decir la máxima fuerza capaz de sustentar la probeta corresponde al momento que uno de esos criterios se activa. Cuando se activa  $F_{T+}$  el material puede seguir sustentando cargas, el modo de daño no es catastrófico como se comenta en el capítulo 5.

Bajo estas consideraciones, basadas en observaciones experimentales, se ajusta el modelo de daño suponiendo que las leyes  $d_{1+}$ ,  $d_{1-}$  y  $d_{2-}$  producen la localización de las deformaciones, en todo el espesor del laminado, al activarse. Por otro lado las leyes de daño  $d_{2+}$  y  $d_6$  representan leyes de daño difuso o distribuido, por esta razón se utiliza el modelo micromecánico presentado en el capítulo 5.

Se considera que el daño en la fibra ( $d_{1\pm}$ ) no depende del agrietamiento de

la matriz ( $r_{T\pm}$ ) como se muestran en los resultados experimentales obtenidos por Carlsson y Pipes [226] y en los modelos micromecánicos [227]-[230]. También se considera que la rigidez transversal se encuentra desacoplada del daño longitudinal.

### Tracción longitudinal $d_{1+}$

La presencia de una "kink band" viene almacenada en la variable interna  $r_{L-}$ . La variable interna  $r_{L+}$  depende del daño a tracción y compresión longitudinal. Cuando la tensión longitudinal es positiva la pérdida de rigidez se debe a ambos modos de daño porque las grietas se encuentran abiertas. Luego la variable de daño puede expresarse  $d_{1+}(r_{L+})$ .

Cuando el material daña bajo cargas de tracción longitudinal el daño se localiza en un plano de fallo siendo la región no lineal con endurecimiento despreciable. Se proponen dos leyes de daño, una exponencial que se ajusta con un parámetro relacionado con la energía de fractura y una ley lineal-exponencial que, a pesar de necesitar más parámetros de ajuste, obtiene una respuesta más realista [16].

**Ley de daño exponencial** Para definir la ley de daño exponencial se utiliza la expresión:

$$d_{1+} = 1 - \frac{1}{r_{L+}} \exp(A_{1+}(1 - r_{L+})) \quad (6.36)$$

donde el parámetro de ajuste  $A_{1+}$  se obtiene a partir de la regularización de energía expresada en (6.33), resultando:

$$A_{1+} = \frac{2l^* X_T^2}{2E_1 G_{1+} - l^* X_T^2} \quad (6.37)$$

Si el tamaño del elemento finito no cumple la expresión (6.34) puede reducirse la resistencia según la expresión (6.35) y tomar  $A_{1+}$  como infinito.

**Ley de daño lineal-exponencial** Bazant [16] considera que la ley de ablandamiento longitudinal puede ser bien representada mediante dos funciones. La primera produce un fuerte salto en la tensión y se atribuye al fallo de la fibra y la matriz, posteriormente el material sigue transfiriendo tensiones debido al "fiber bridging" y al "pull out", en esta fase las tensiones disminuyen lentamente al abrirse la grieta.

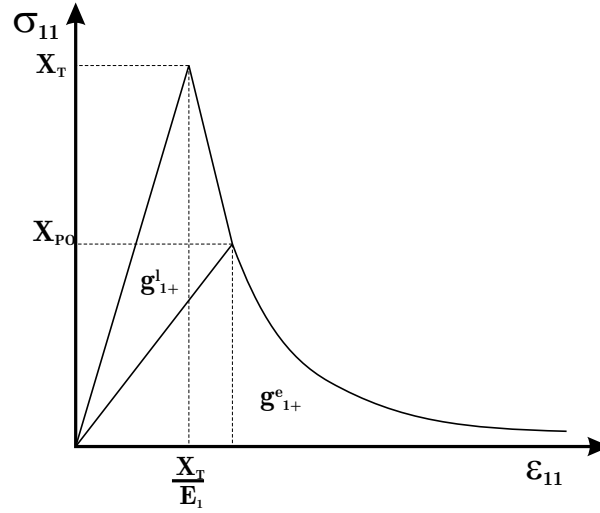


Figura 6.4: Relación constitutiva a tracción longitudinal.

La forma de la ley de ablandamiento se define mediante una región lineal y otra exponencial (ver figura 6.4). La respuesta es lineal hasta alcanzar la tensión  $X_{PO}$  y disipar una energía  $G^l_{1+}$ . Aumentando las deformaciones la respuesta es exponencial disipando una energía  $G^e_{1+}$ .

Para obtener las expresiones que describan el daño en función de los umbrales de daño, se considera que la ley lineal tiene la forma general entre tensiones y deformaciones:  $\sigma_{11} = K_1 \epsilon_{11} + n = (1 - d_{1+}) E_1 \epsilon_{11}$ . El umbral de daño puede ser determinado, en un ensayo uniaxial, mediante la función de carga longitudinal, ecuación (6.10) y la condición de consistencia, ecuación (6.29). Se puede determinar la ley de daño lineal, donde  $n$  se determina considerando que cuando el daño empieza ( $r_{L+} = 1$ ) la tensión equivale a  $\sigma_{11} = X_T$ . Cuando las tensiones valen  $X_{PO}$  la correspondiente variable de daño  $d^F_{1+}$  y el valor umbral  $r^F_{L+}$ . Después de este punto la ley de daño es exponencial. Asegurando la continuidad de la respuesta tensión deformación resultan las expresiones:

$$\begin{aligned}
 d_{1+} &= 1 + \frac{K_1}{E_1} - \frac{K_1 + E_1}{E_1 r_{L+}} & \text{si } r_{L+} \leq r^F_{L+} \\
 d_{1+} &= 1 - (1 - d^F_{1+}) \frac{r^F_{L+}}{r_{L+}} \exp \left[ A_{1+} \left( 1 - \frac{r_{L+}}{r^F_{L+}} \right) \right] & \text{si } r_{L+} > r^F_{L+}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

donde  $K_1$  es el pendiente de la respuesta tensión deformación y  $A_{1+}$  es el parámetro

de ajuste de la ley exponencial. El modelo se define mediante las propiedades materiales  $X_{PO}$ ,  $G_{1+}^l$ , y  $G_{1+}^e$ . Los parámetros  $d_{1+}^F$ ,  $r_{L+}^F$ ,  $K_1$  y  $A_{1+}$  son obtenidos mediante el proceso de regularización y son función del tamaño de cada elemento finito.

La densidad de energía disipada de cada una de las leyes en un ensayo uniaxial se puede escribir:

$$\begin{aligned} g_{1+}^l &= \frac{X_T^2}{2E_1^2} (K_1 + E_1) (r_{L+}^F - 1) = \frac{G_{1+}^l}{l^*} \\ g_{1+}^e &= \frac{2 + A_{1+}}{2(1 - d_{1+}^F) E_1 A_{1+}} X_{PO}^2 = \frac{G_{1+}^e}{l^*} \end{aligned} \quad (6.39)$$

como se asume que el daño se localiza al activarse la ley de daño la densidad de energía disipada se relaciona con las energías de fractura en proporción del tamaño característico del elemento finito ( $l^*$ ).

Para ajustar el modelo se requieren tres parámetros independientes  $X_{PO}$ ,  $G_{1+}^l$  y  $G_{1+}^e$ , que corresponden a la tensión de "pull-out", la energía de fractura de la ley de daño lineal y de la exponencial respectivamente. Los otros se relacionan mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{l^* X_T E_1 (X_T - X_{PO})}{2G_{1+}^l E_1 - l^* X_T (X_T - X_{PO})} \\ r_{L+}^F &= \frac{2G_{1+}^l E_1 + l^* X_T X_{PO}}{l^* X_T^2} \\ d_{1+}^F &= \frac{2G_{1+}^l E_1}{2G_{1+}^l E_1 + l^* X_T X_{PO}} \\ A_{1+} &= \frac{2E_1 (2G_{1+}^l E_1 - l^* X_T X_{PO})}{2E_1 (X_T G_{1+}^e - X_{PO} G_{1+}^l) - l^* X_{PO}^2 X_T} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Existe un tamaño máximo de elemento finito para evitar el "snap-back" en la respuesta tensión deformación. Si la energía elástica almacenada en el elemento finito en el momento del fallo es mayor a la energía de fractura global por el área fracturada:

$$\frac{X_T^2}{2E_1} > \frac{G_{1+}^l + G_{1+}^e}{l^*} \quad (6.41)$$

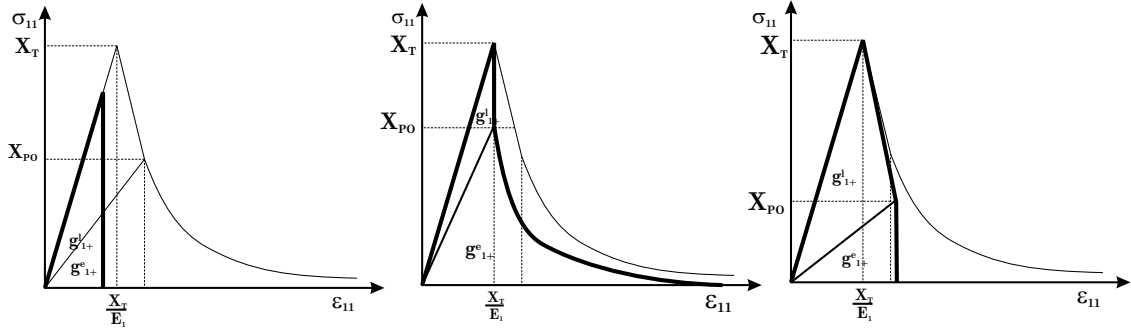


Figura 6.5: Modificaciones de las leyes de daño en elementos demasiado grandes.

Se reduce la resistencia a tracción según:

$$X_T = \sqrt{\frac{2E_1}{l^*} (G_{1+}^l + G_{1+}^e)} \tag{6.42}$$

luego la respuesta tensión deformación cae repentinamente (ver figura 6.5 izquierda).

Es posible que la ley lineal requiera, para garantizar una energía disipada correcta, que se produzca "snap-back" en la primera ley, el límite del tamaño del elemento viene marcado por:

$$l^* > \frac{2G_{1+}^l E_1}{(X_T - X_{PO}) X_T} \tag{6.43}$$

En este caso se aumenta la tensión de "pull-out":

$$X_{PO} = X_T - \frac{2G_{1+}^l E_1}{l^* X_T} \tag{6.44}$$

La respuesta de esta modificación se muestra en la imagen central de la figura 6.5.

Para finalizar es posible, aunque muy improbable, que la ley exponencial no pueda garantizar una energía disipada tan pequeña como exige la energía de fractura. Si se cumple:

$$l^* > \frac{2E_1 G_{1+}^e (1 - d_{1+}^F)}{X_{PO}^2} \tag{6.45}$$

Se disminuye la resistencia de "pull-out" según:

$$X_{PO} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{2l^* X_T^2 G_{1+}^e}{E_1 G_{1+}^l} + 1} - 1 \right] \tag{6.46}$$

La respuesta de esta modificación se muestra en la imagen de la derecha de la figura 6.5.



**Compresión longitudinal  $d_{1-}$** 

El daño a compresión longitudinal acostumbra a ser inducido por una degradación de la matriz debido al cortante existente entre fibra y matriz. Este daño produce que las fibras pierdan su confinamiento y se inestabilicen formando una "kink band". La información sobre este fenómeno se encuentra almacenada en la variable interna  $r_{L-}$ . No obstante, el daño generado a tracción también influye en la variable a compresión. Cuando una capa es completamente dañada a tracción ( $d_{1+} = 1$ ) y se aplican cargas a compresión las grietas se cierran y parte de la rigidez inicial es recuperada pues las cargas pueden ser transmitidas por las caras de las grietas. No obstante, las fibras se encuentran rotas y pierden su alineación inicial. Asumiendo que las fibras no pueden transmitir cargas, lo cuál puede ser considerado como un caso límite, la rigidez inicial puede ser aproximada mediante la teoría de mezclas clásica para elementos en paralelo como:  $(1 - d_{1-})E_1 = V_m E_m$ . La generalización de este argumento para casos intermedios de daño se puede expresar:  $d_{1-} = A_1^\pm d_{1+}$ , con:

$$A_1^\pm \approx b \frac{V_f E_f}{V_m E_m + V_f E_f} \approx b \frac{E_1 - E_2}{E_1} \quad (6.47)$$

donde  $E_f$  y  $E_m$  son los módulos de Young de la matriz y la fibra,  $V_f$  y  $V_m$  las correspondientes fracciones volumétricas, y  $b$  un parámetro de ajuste definido entre 0 y 1. Si  $b = 1$  la recuperación de rigidez sólo se debe a la aportación de la matriz. Si  $b = 0$ , la recuperación de rigidez es total asumiendo que las fibras no pierden su alineación y son capaces de transferir las mismas cargas que en el estado inicial. La variable de daño puede escribirse:

$$d_{1-} = 1 - (1 - d_{1-}^*(r_{L-})) (1 - A_1^\pm d_{1+}(r_{L+})) \quad (6.48)$$

Bajo cargas a compresión la ley de daño produce ablandamiento y la subsecuente localización de las deformaciones en un plano. Se considera que una ley exponencial es apropiada:

$$d_{1-}^* = 1 - \frac{1}{r_{L-}} \exp(A_{1-}(1 - r_{L-})) \quad (6.49)$$

El parámetro de ajuste  $A_{1-}$  se determina mediante la energía de fractura para generar una "kink band", ( $G_{1-}$ ) y la longitud característica del elemento finito.

$$g_{1-} = \int_0^{\infty} Y_1 \dot{d}_{1-} dt = \frac{G_{1-}}{l^*} \quad (6.50)$$

resultando una solución no explícita que debe resolverse numéricamente mediante los algoritmos presentados en los apéndices A.1 y A.2.

Si el tamaño del elemento finito no cumple la expresión (6.34) puede reducirse la resistencia según la expresión (6.35) y tomar  $A_{1-}$  como infinito.

### Tracción transversal $d_{2+}$

En un laminado unidireccional cuando se daña la matriz bajo cargas a tracción transversal la localización del daño es automática. Se utiliza una ley exponencial:

$$d_{2+} = 1 - \frac{1}{f(r_{T+})} \exp [A_{2+} (1 - f(r_{T+}))] \quad (6.51)$$

donde la función  $f(r_{T+})$  es del mismo orden de la función de carga para garantizar que no existe endurecimiento. Esta se escribe:

$$f(r_{T+}) = \frac{1}{2g} \left( g - 1 + \sqrt{(1 - g)^2 + 4gr_{T+}^2} \right) \quad (6.52)$$

La densidad de disipación bajo un ensayo uniaxial a tracción transversal corresponde:

$$g_{2+} = \int_0^{\infty} Y_2 \dot{d}_{2+} dt = \frac{G_{2+}}{l^*} \quad (6.53)$$

como se asume que el daño se localiza al activarse la ley de daño la densidad de energía disipada se relaciona con la energía de fractura en proporción del tamaño característico del elemento finito ( $l^*$ ).

El parámetro de ajuste  $A_{2+}$  debe obtenerse numéricamente a partir de la expresión anterior y aplicando los algoritmos presentados en los apéndices A.1 y A.2.

Si el tamaño del elemento finito no cumple la expresión (6.34) puede reducirse la resistencia según la expresión (6.35) y tomar  $A_{2+}$  como infinito.

Cuando la capa se encuentre embebida en un laminado con capas orientadas en varias direcciones el agrietamiento de la matriz será un modo de daño no catastrófico y debe emplearse el modelo de daño desarrollado en el capítulo 5. El modelo definido en el capítulo 5 emplea las variables internas, densidad de grietas ( $\rho$ ) y proporción

de delaminación ( $\rho$ ) que determinan el estado de degradación del material en vez de  $r_{T+}$ . Para tener en cuenta la pérdida de rigidez que produce el daño a compresión cuando las cargas son a tracción se utiliza la expresión:  $d_{2+} = \text{máx} \{d_{2-}, d_{2+}(\rho, \varrho)\}$ .

### Compresión transversal $d_{2-}$

La formación de una grieta inclinada, normalmente a un ángulo de  $53^0$  respecto la perpendicular del laminado provoca un fallo catastrófico del mismo. Es decir, el daño se localiza en un plano. Para forzar la localización se utiliza una ley exponencial:

$$d_{2-} = 1 - \frac{1}{r_{T-}} \exp[A_{2-}(1 - r_{T-})] \quad (6.54)$$

El parámetro de ajuste  $A_{2-}$  se obtiene aplicando la igualdad (6.33) numéricamente mediante los algoritmos presentados en los apéndices A.1 y A.2.

Si el tamaño del elemento finito no cumple la expresión (6.34) puede reducirse la resistencia según la expresión (6.35) y tomar  $A_{2-}$  como infinito.

### Cortante en el plano $d_6$

La rigidez cortante se ve afectada por las grietas longitudinales y transversales independientemente de su orientación. La variable de daño a cortante  $d_6$  se expresa:

$$d_6 = 1 - [1 - d_6^*(r_{T+})](1 - d_{1+}) \quad (6.55)$$

En un laminado unidireccional el daño se localiza al iniciarse en una grieta transversal, en este caso se aproxima una ley exponencial.

$$d_6^* = 1 - \frac{1}{r_{T+}} \exp(A_6(1 - r_{T+})) \quad (6.56)$$

El parámetro de ajuste  $A_6$  se obtiene a partir de la energía de fractura en modo II. Considerando un comportamiento lineal elástico a cortante puro la densidad de energía disipada se puede determinar aplicando la expresión (6.33), resultando un parámetro de ajuste:

$$A_6 = \frac{2l^*S_L^2}{2G_{12}G_6 - l^*S_L^2} \quad (6.57)$$

Si el tamaño del elemento finito no cumple la expresión (6.34) puede reducirse la resistencia según la expresión (6.35) y tomar  $A_{1-}$  como infinito.

Si se toma como ley a cortante la propuesta por Hahn y Tsai o la requerida para el modelo elasto-plástico el parámetro de ajuste no puede ser resuelto explícitamente y debe utilizarse un algoritmo numérico. Para determinar la densidad de energía disipada en el modelo elasto-plástico debe considerarse a partir del momento en que el daño empieza, es decir se localiza:

$$g_6 = \int_1^\infty \left( Y_6 \frac{\partial d_6}{\partial r_{T+}} + Y_p \frac{\partial \gamma_{12}^p}{\partial r_{T+}} \right) dr_{T+} = \frac{G_6}{l^*} \tag{6.58}$$

Si se utiliza la ley de Hahn y Tsai el tamaño máximo del elemento finito resulta:

$$l^* \leq \frac{4G_6G_{12}}{(\beta G_{12}S_L^2 + 2)S_L^2} \tag{6.59}$$

Si el tamaño del elemento finito es demasiado grande una solución es disminuir la resistencia a cortante según:

$$S_L = \sqrt{\frac{1}{\beta G_{12}} \left( \sqrt{1 + \frac{4\beta G_6 G_{12}^2}{l^*}} - 1 \right)} \tag{6.60}$$

En el caso que sea un laminado multicapa se debe substituir  $d_6(r_{T+})$  por el modelo micromecánico del capítulo 5 resultando  $d_6(\rho, \varrho)$ .

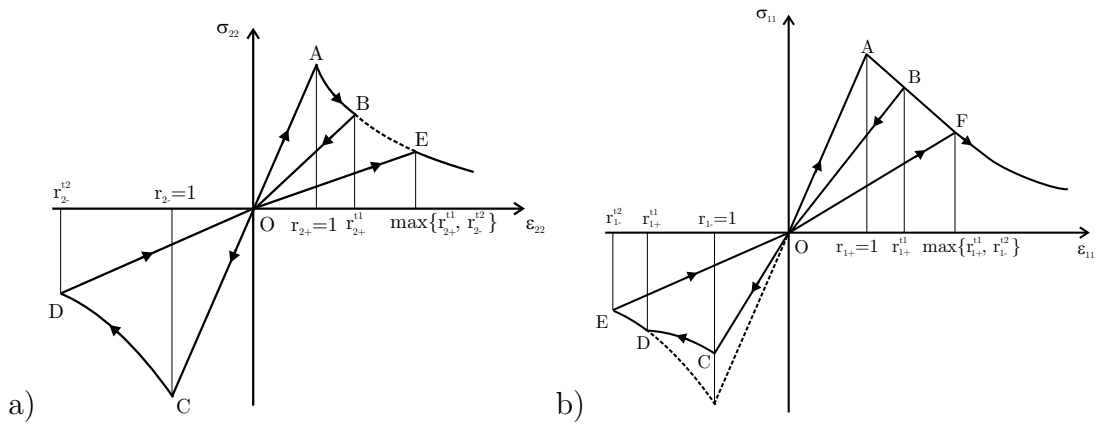


Figura 6.6: Respuesta tensión deformación del modelo para un ciclo complejo de carga, descarga y recarga de una capa a) bajo esfuerzos transversales y b) longitudinales.

### 6.2.6. Energías críticas de fractura

Cada ley de daño requiere, como mínimo, un parámetro de ajuste,  $A_M$ ,  $M = 1\pm, 2\pm, 6$ , que requiere ser calculado mediante la correspondiente energía de fractura,  $G_M$ , la cual representa la energía disipada por cada uno de los procesos de daño.

$G_{2+}$  y  $G_6$  corresponden a la energía crítica de fractura de una grieta transversal en modo I y II, respectivamente. El modo I se puede determinar mediante el ensayo de "*Double Cantilever Beam*" (DCB) [158]. Mientras para determinar la energía de fractura en modo II se puede utilizar "*Four-Point End Notched Flexure*" (4-ENF) [121].

$G_{1+}$  corresponde a la energía de fractura en modo I de una grieta longitudinal. No existe un ensayo estándar para su determinación pero se recomienda el "*Compact Tension*" (CT) propuesto por Pinho et al. [121]

La determinación de la energía disipada en un ensayo a compresión longitudinal es más compleja pues están involucrados un conjunto de mecanismos de daño, crecimiento de grietas, aplastamiento y fricción. Estos eventos ocurren secuencialmente en el proceso de fallo resultando en la formación de una "*kink band*".

Bazant et al. [125] proponen la siguiente expresión para determinar la energía requerida para la formación de una "*kink band*":

$$G_{1-} = \frac{w}{s} G_6 \quad (6.61)$$

donde  $w$  es el espesor de la "*kink band*" y  $s$  es la distancia entre dos grietas en la matriz. Esta aproximación requiere un buen conocimiento de la geometría de la "*kink band*" a priori, la cual es función de las cargas externas, la geometría de la estructura y del confinamiento aportado por las capas adyacentes [231]. Esta aproximación no tiene en consideración otros mecanismos de disipación como la fricción entre las grietas generadas. Una alternativa para obtener  $G_{1-}$  es utilizar el ensayo "*Compact compression*" (CC) propuesto por Pinho [121].

La energía disipada bajo un ensayo uniaxial a compresión transversal,  $G_{2-}$  puede ser aproximado utilizando la componente en modo II de la energía de fractura, el ángulo de fractura  $\alpha_0$  y un término que tiene en cuenta la fricción entre las caras de la grieta con la expresión:

$$G_{2-} = \frac{G_6}{\cos \alpha_0} + at\mu Y_C \cos \alpha_0 \approx \frac{G_6}{\cos \alpha_0} + at\eta^T Y_C \cos \alpha_0 \quad (6.62)$$

donde  $\alpha_0 \approx 53 \pm 3^\circ$ ,  $t$  es el espesor de la capa, y  $a$  un parámetro de ajuste definido entre 0 (en un laminado unidireccional) y 1 (en una capa fuertemente confinada).

### 6.2.7. Regularización viscosa

Es bien conocido que los modelos constitutivos con ablandamiento pueden ocasionar problemas de convergencia. Estos problemas pueden ser aliviados mediante la introducción de un parámetro viscoso en el modelo. Estos problemas de convergencia son especialmente importantes al fallar las fibras. Con la finalidad de mejorar la convergencia global del problema se añade el modelo de viscosidad de Duvaut-Lions [232]. A pesar que muchos materiales exhiben una respuesta dependiente del tiempo, la regularización aquí propuesta se realiza con el objetivo de mejorar la convergencia numérica del modelo. La variación temporal de las variables internas asociadas al daño longitudinal se definen:

$$\dot{r}_{L+} = \frac{\langle \text{máx} \{ \phi_{L+}, \phi_{L-} \} - r_{L+} \rangle}{\eta} \quad \text{y} \quad \dot{r}_{L-} = \frac{\langle \phi_{L-} - r_{L-} \rangle}{\eta} \quad (6.63)$$

donde  $\eta$  es el parámetro viscoso. Cuando  $\eta$  tiende a cero se obtiene la definición matemática de una derivada y las funciones (6.63) tienden a la evolución de los umbrales de daño definidos en las ecuaciones (6.28).

Para integrar las variables internas se utiliza el esquema de "backward-Euler". La variable interna se actualiza:

$$\begin{aligned} r_{L-}^{n+1} &= \text{máx} \left\{ r_{L-}^n, \frac{\eta}{\eta + \Delta t} r_{L-}^n + \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \phi_{L-}^{n+1} \right\} \\ r_{L+}^{n+1} &= \text{máx} \left\{ r_{L+}^n, r_{L-}^{n+1}, \frac{\eta}{\eta + \Delta t} r_{L+}^n + \frac{\Delta t}{\eta + \Delta t} \phi_{L+}^{n+1} \right\} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Existen dos consecuencias indeseables al aumentar el parámetro viscoso ( $\eta$ ). La primera resulta en una pérdida de la capacidad de ablandamiento, la respuesta no se localiza al empezar el daño debido a que la relación tangente no es negativa. La segunda consecuencia resulta en un aumento de la densidad de energía disipada por cada punto material al aumentar el parámetro viscoso.

### 6.2.8. Algoritmo y tensor constitutivo tangente

Para obtener una buena convergencia es necesario determinar el tensor constitutivo tangente,  $\mathbf{C}_T$ :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_T : \dot{\varepsilon} \quad (6.65)$$

donde:

$$\mathbf{C}_T = \mathbf{H}^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (6.66)$$

$\mathbf{H}^{-1}$  es el tensor constitutivo secante,  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad y el tensor  $\mathbf{M}$  se define:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \gamma_{12}} \\ \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \gamma_{12}} \\ \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{12}} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

Las componentes escalares del tensor  $\mathbf{M}$  se presentan en el apéndice A.4.

1	-	Entran las deformaciones en el instante actual t	$\varepsilon^t$
2	-	Cálculo de las tensiones efectivas	$\tilde{\sigma}^t = \mathbf{H}_0^{-1} : \varepsilon^t$
3	-	Cálculo de las funciones de carga	$\phi_M^t(\tilde{\sigma}^t)$
4	-	Determinación de los umbrales de daño	$r_M^t(r_M^{t-1}, \phi_M^t)$
5	-	Cálculo de las variables de daño	$d_M^t(r_M^t)$
6	-	Tensor de tensiones nominales	$\sigma^t = (\mathbf{H}^t)^{-1} : \varepsilon^t$
7	-	Tensor constitutivo tangente	$\mathbf{C}_T^t = (\mathbf{H}^t)^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{M}^t)$

Cuadro 6.1: Algoritmo computacional del modelo de daño.

La integración del modelo constitutivo se realiza según el algoritmo presentado en el cuadro 6.1. Debe notarse que los parámetros de ajuste de las leyes de daño  $A_M$

se realizan sólo una vez en el caso que en un elemento concreto empiece a dañar. Al mismo tiempo, al inicio del análisis se comprueba si el tamaño del elemento finito es demasiado grande a través de la ecuación (6.34), en este caso la resistencia se reduce según la expresión (6.35).

### 6.3. Modelo de daño para elementos sólidos

Es habitual realizar los modelos con elementos tridimensionales o elementos cáscaras que incorporen cortantes fuera del plano (placas gruesas). Si se consideran las tensiones fuera del plano se puede utilizar como función densidad de energía complementaria la expresión:

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{\sigma_{11}^2}{2(1-d_1)E_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{2(1-d_2)E_2} + \frac{\sigma_{33}^2}{2(1-d_3)E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) - \\
 & - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22}\sigma_{33} + \Upsilon_e(\sigma_{12}, d_6) + \Upsilon_p(\sigma_{12}, \gamma_{12}^p) + \frac{\sigma_{23}^2}{2(1-d_4)G_{23}} + \frac{\sigma_{13}^2}{2(1-d_5)G_{12}} + \\
 & + (\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{22}(\sigma_{22} + \sigma_{33}))\Delta T + (\beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{22}(\sigma_{22} + \sigma_{33}))\Delta M
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

donde se han introducido las variables de daño  $d_3$ ,  $d_4$  y  $d_5$  para tener en cuenta la disminución de la rigidez de las componentes fuera del plano.

A pesar de considerar estados tridimensionales fuera del plano el modelo sólo es válido para laminados formando cáscaras con lo que se asume que las componentes  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{13}$  y  $\sigma_{23}$  serán siempre muy pequeñas, de tal modo que los mecanismos de fallo no serán distintos a los planteados en el modelo plano. Por esta misma razón se considera que la relación constitutiva a cortante  $\sigma_{13}$  puede considerarse lineal elástico.

Se consideran las mismas funciones de carga expuestas anteriormente  $\phi_N$  ( $N = L+, L-, T+, T-$ ) considerándose insignificante las tensiones fuera del plano. Los esfuerzos fuera el plano tienen cierta influencia en las funciones de carga, sobretodo las tensiones cortantes en el agrietamiento de la matriz. Estas mejoras se realizarán en futuros trabajos.

Para determinar el valor de las nuevas variables de daño se considera:



$$\begin{aligned}
d_3(r_{L-}, r_{T-}) &= 1 - (1 - d_{1-}(r_{L-}))(1 - d_{2-}(r_{T-})) \\
d_4(r_{T+}) &= d_6(r_{T+}) \\
d_5(r_{L+}) &= d_1(r_{L+})
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Las deformaciones se obtienen:

$$\varepsilon = \mathbf{H} : \sigma + \alpha \Delta T + \beta \Delta M \tag{6.70}$$

y la relación secante resulta:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_1)E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{(1-d_2)E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{(1-d_3)E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_6)G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_5)G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_4)G_{23}} \end{bmatrix} \tag{6.71}$$

La disipación del modelo siempre es positiva debido a que las fuerzas termodinámicas asociadas al daño son siempre definidas positivas y las variables de daño siempre aumentan.

El tensor constitutivo tangente es equivalente a la expresión (6.66) con  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{11}}{(1-d_1)^2 E_1} \frac{\partial d_1}{\partial \gamma_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{22}}{(1-d_2)^2 E_2} \frac{\partial d_2}{\partial \gamma_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{33}}{(1-d_3)^2 E_2} \frac{\partial d_3}{\partial \gamma_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{12}}{(1-d_6)^2 G_{12}} \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{13}}{(1-d_5)^2 G_{12}} \frac{\partial d_5}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{13}}{(1-d_5)^2 G_{12}} \frac{\partial d_5}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{13}}{(1-d_5)^2 G_{12}} \frac{\partial d_5}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{13}}{(1-d_5)^2 G_{12}} \frac{\partial d_5}{\partial \gamma_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{23}}{(1-d_4)^2 G_{23}} \frac{\partial d_4}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\sigma_{23}}{(1-d_4)^2 G_{23}} \frac{\partial d_4}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\sigma_{23}}{(1-d_4)^2 G_{23}} \frac{\partial d_4}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\sigma_{23}}{(1-d_4)^2 G_{23}} \frac{\partial d_4}{\partial \gamma_{12}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.72}$$

Para determinar el tamaño característico de un elemento finito cúbico se utiliza la expresión:

$$l^* = \frac{1}{\cos(\gamma)} \sqrt{\frac{V_{IP}}{t}} \tag{6.73}$$

Siendo  $t$  la longitud del elemento finito en la dirección del espesor.

## 6.4. Ejemplos numéricos

En primer lugar se muestra un ejemplo para mostrar la objetividad de la respuesta en función de la discretización utilizada en la modelización. Posteriormente se comparan los resultados numéricos con un conjunto de ensayos, realizados en la Universidad de Porto, en probetas laminadas fabricadas mediante capas unidireccionales de CFRP IM7-8552 de Hexcel. Para conocer los detalles de los ensayos necesarios para determinar las propiedades mirar la referencia [236].

### 6.4.1. Objetividad de la respuesta

Es un fenómeno bien conocido la pérdida de objetividad de la respuesta de los modelos continuos con ablandamiento. Este tema se ha tratado en la sección 3.6, donde se han anunciado los remedios que se encuentran en la bibliografía. Para definir el modelo aquí presentado se ha utilizado el procedimiento conocido como "*Crack band model*". En la sección 4.3.7 se ha comentado los problemas asociados a la objetividad de la respuesta al utilizar la teoría de laminados. Para solucionar el problema de la localización de las deformaciones cuando se utiliza la teoría de cáscaras se asume que, para un laminado uniaxial la localización se produce en el momento que cualquiera de las leyes de daño se activa. Para determinar la localización en un laminado multiaxial se asume que ésta ocurre cuando una ley asociada a la fibra, o la ley de la matriz a compresión se activa. Esta simplificación se realiza a partir del conocimiento empírico adquirido con estos materiales. Es habitual considerar que el único modo de fallo no catastrófico en laminados multiaxiales es el agrietamiento de la matriz bajo cargas transversales a tracción y cortante.

Para ilustrar el buen funcionamiento del "*Crack band model*" se realiza un modelo en el que se simula un experimento a tracción con una probeta agujereada. Formada por un laminado unidireccional de fibras de carbono con matriz de epoxy, consta de 24 capas:  $[90^0]_{24}$ , resultando un espesor total de 3 mm. La longitud de la probeta es de 150 mm y el ancho de 12 mm el agujero tiene un diámetro de 6 mm.

Se realizan dos modelos de elementos finitos, uno con una malla fina y otro con una basta como se muestra en la figura 6.7. El modelo 1 consta de 6 elementos en el plano de falla y el modelo 2 consta de 20. Teniendo en cuenta la simetría sólo se modela media pieza (figura 6.7.c).

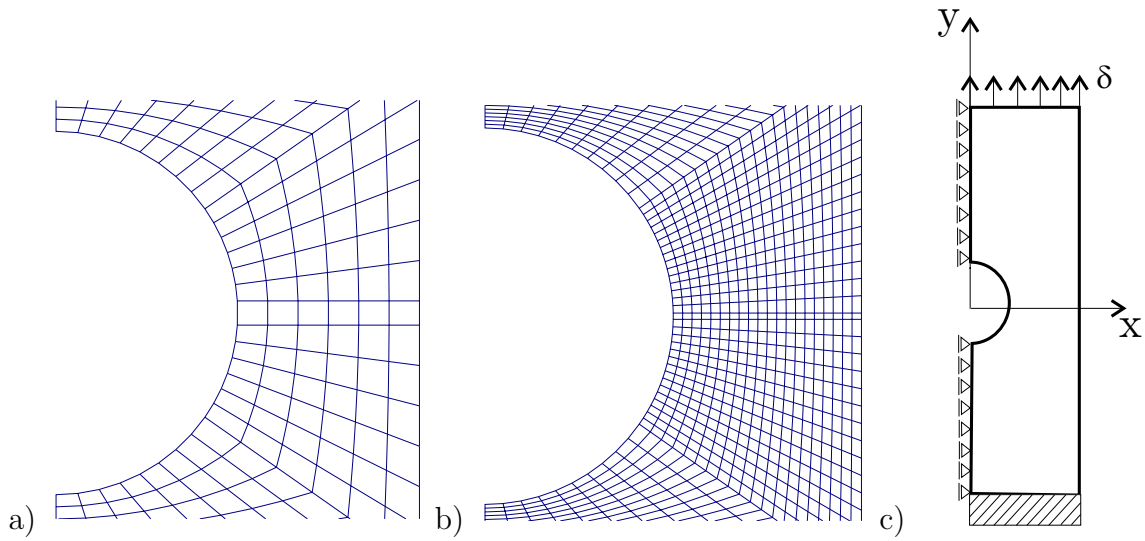


Figura 6.7: Detalle del modelo con diferentes densidades de malla: a) malla modelo 1; b) malla modelo 2; c) condiciones de contorno del modelo.

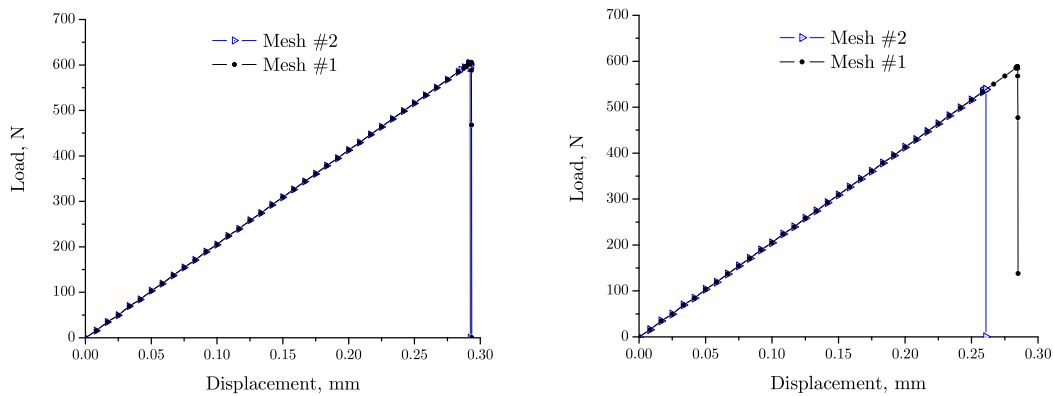


Figura 6.8: Respuesta fuerza-desplazamiento según el modelo propuesto. En la izquierda ajustando la ley en función del tamaño del elemento finito y en la derecha tomando un valor constante.

Para determinar la respuesta estructural se utiliza el modelo constitutivo descrito en este capítulo. En el gráfico de la izquierda en la figura 6.8 se muestra la respuesta tensión deformación resultante. Se puede comprobar que en ambos laminados el resultado es equivalente.

En el gráfico de la derecha de la figura 6.8 se muestra la respuesta estructural sin emplear el procedimiento propuesto por el "*Crack band model*". Es decir, no

se aplica la ecuación (6.30). Se utiliza un parámetro de ajuste constante de  $A_{2+} = 1.5$ . Se puede comprobar que la respuesta estructural no es independiente de la discretización utilizada. Al aumentar el tamaño de los elementos finitos la respuesta es más tenaz.

### 6.4.2. Sensibilidad a la entalla

Observaciones experimentales [4], [201], [202] en probetas geoméricamente similares muestran una dependencia de la resistencia nominal con el tamaño de la estructura. El factor de concentración de tensiones es constante en probetas geoméricamente similares. No obstante, el factor de sensibilidad a la entalla depende de la tenacidad del material y del tamaño de la probeta. En materiales dúctiles la sensibilidad es pequeña y en materiales frágiles elevada. No obstante, cuando el tamaño de la estructura tiende a infinito el comportamiento es frágil y el material es sensible a la entalla, por otro lado si el tamaño tiende a cero no existe sensibilidad a la entalla. La sensibilidad a la entalla, como se ha comentado en la sección 2.5, depende de la ley cohesiva, es decir de la resistencia y energía crítica de fractura, de la geometría y del tamaño de la probeta.

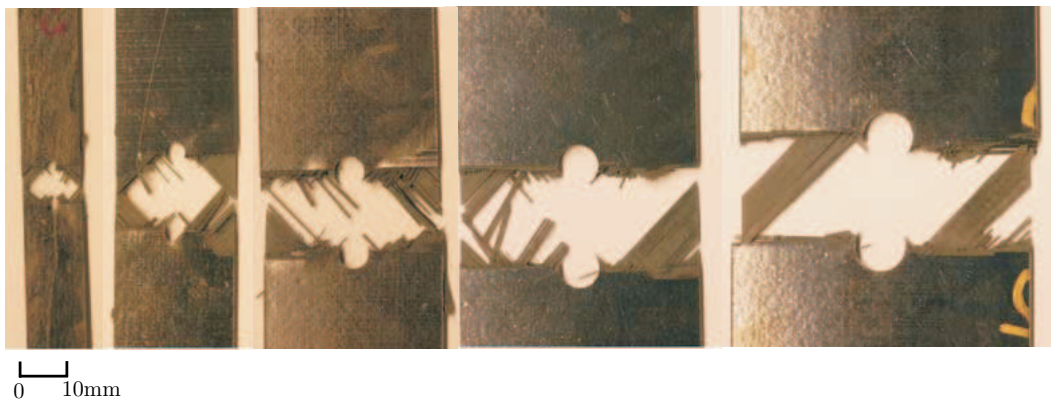


Figura 6.9: Modo de fallo de las probetas geoméricamente similares de distinto tamaño.

Si se mantiene fija la geometría de la probeta y las propiedades del material se puede analizar el efecto del tamaño en la resistencia nominal de un conjunto de probetas. Este problema es interesante pues no es detectable mediante un criterio en tensiones ni mediante el cálculo del límite plástico. Los modelos que detectan

esta tendencia requieren de un nuevo parámetro relacionado con una longitud característica, que marca la transición entre el comportamiento dúctil y el frágil. Para mostrar la capacidad de determinar el efecto tamaño del modelo presentado se ensayan las cinco probetas de distinto tamaño pero geoméricamente similares que se muestran en la figura 6.9 y se comparan con diversos modelos analíticos.

### Modelos analíticos

En la bibliografía es posible encontrar varias aproximaciones para tratar este problema. Waddoups et al. [233] consideran la presencia de una grieta ficticia de longitud  $a$  inherente en el material. La resistencia del laminado con concentración de tensiones se encuentra a partir de la resistencia de un laminado sin agujero ( $X_T^L$ ) y del tamaño de la grieta ficticia ( $a$ ).

El factor de intensidad de tensiones crítico de una probeta con un agujero de diámetro  $d$  se obtiene:

$$K_{Ic} = f(a, d) \bar{\sigma}^\infty \sqrt{\pi a} \quad (6.74)$$

donde  $f(a, d)$  es la solución de Bowie para el cálculo del factor de intensidad de tensiones de dos grietas al borde de un agujero circular [234], [235]:

$$f(a, d) = 0,5 \left( 3 - \frac{a}{d/2 + a} \right) \left[ 1 + 1,243 \left( 1 - \frac{a}{d/2 + a} \right)^3 \right] \quad (6.75)$$

Waddoups et al. [233] considera que la resistencia de una probeta sin entalla puede ser determinada cuando la relación entre la grieta inherente  $a$  y el diámetro  $d$  tiende a infinito, luego la función  $f(a, d)$  tiende a uno:

$$K_{Ic} = X_T^L \sqrt{\pi a} \quad (6.76)$$

De las ecuaciones (6.74) y (6.76) se obtiene la aproximación propuesta por Waddoups et al. [233]:

$$\bar{\sigma}^\infty = \frac{X_T^L}{f(a, d)} \quad (6.77)$$

La resistencia última se muestra en la línea IFM de la figura 6.11.

Si se considera que el tamaño del defecto presente en el material es proporcional al tamaño de la estructura la aplicación de la mecánica de la fractura [236] resulta:

$$\sigma_2^\infty = \sigma_1^\infty \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \quad (6.78)$$

donde  $\sigma_1^\infty$  es la tensión última de una probeta con un agujero de diámetro  $d_1$ . La línea LEFM de la figura 6.11 muestra como disminuye la resistencia nominal al aumentar el tamaño. El pendiente de la recta en escala logarítmica es de 1/2.

La alternativa propuesta por Whitney y Nuismer conocida como el "*Point stress method*" [237][238] considera que el colapso se produce cuando un punto situado a cierta distancia ( $r_{ot}$ ) del borde del agujero alcanza la tensión de fallo. Una propuesta parecida, el "*Average stress method*", utiliza la tensión media a lo largo de una distancia ( $\bar{r}_{ot}$ ) del borde del agujero. El ajuste del modelo se realiza mediante las distancias características ( $r_{ot}$  o  $\bar{r}_{ot}$ ) y la resistencia longitudinal ( $X_T$ ).

La tensión normal en el plano de fallo para un laminado cuasi-isótropo se puede aproximar mediante la expresión [239]:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{2 + (1 - d/w)^3}{6(1 - d/w)} \left[ 2 + \left( \frac{d}{2x} \right)^2 + 3 \left( \frac{d}{2x} \right)^4 \right] \sigma_{yy}^\infty, \quad x \geq d/2 \quad (6.79)$$

donde  $\sigma_{yy}^\infty$  es la tensión remota.

Para determinar la tensión de las capas a  $0^\circ$  se utiliza la teoría de laminados:

$$\sigma_{11} = \sigma_{yy}(x, 0)(C_{16}a_{12}^* + C_{22}a_{22}^*) \quad (6.80)$$

donde  $a_{ij}^*$  son los componentes de flexibilidad del laminado definido como [161]:

$$\mathbf{a}^* = t_L \mathbf{A}^{-1} \quad (6.81)$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  relaciona las fuerzas en el plano por unidad de longitud con las deformaciones en el plano y se puede determinar mediante la ecuación (4.36).  $C_{ij}$  son las componentes de rigidez bajo estados de tensión plana de las capas a  $0^\circ$  [240].

Utilizando las expresiones (6.80) y (6.79), la resistencia nominal se puede escribir mediante la expresión:

$$\bar{\sigma}^\infty = X_T \left\{ \frac{2 + (1 - \frac{d}{w})^3}{6(1 - \frac{d}{w})} \left[ 2 + \left( \frac{d}{d + 2r_{ot}} \right)^2 + 3 \left( \frac{d}{d + 2r_{ot}} \right)^4 \right] (C_{16}a_{12}^* + C_{22}a_{22}^*) \right\}^{-1} \quad (6.82)$$

La resistencia última al aumentar el tamaño estructural se puede ver en la figura 6.11, corresponde a la línea PSM.

Chang et al. [241] propuso un método basado en el "Point stress method" para determinar el fallo de uniones atornilladas. Éste se basa en aplicar un criterio de fallo en tensiones a una curva alrededor del agujero y se ajusta con dos parámetros, la longitud crítica a tensión ( $r_{ot}$ ) y a compresión ( $r_{oc}$ ).

Si bien los modelos de dos parámetros propuestos anteriormente son capaces de representar el aumento de sensibilidad en especímenes grandes los parámetros de ajuste del modelo, las distancias características, no son propiedad del material y deben ser determinadas experimentalmente en piezas de la misma geometría y en distintos tamaños [240].

### Resultados experimentales y numéricos

Se realizan un conjunto de tests experimentales en probetas de compuesto laminado para validar el modelo constitutivo. Los detalles de los experimentos pueden encontrarse en [236]. El laminado se fabrica con capas unidireccionales de 0.131 mm de espesor del material Hexcel IM7-8552 CFRP con una secuencia de  $[90/0/\pm 45]_{3s}$  formando un laminado cuasi-isótropo. Se analiza la resistencia uniaxial ( $X_L^T$ ) del laminado a partir de cinco ensayos uniaxiales resultando un valor medio de 845.1MPa a una deformación de 12900  $\mu\varepsilon$ .

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\alpha_{11}$ ( $^{\circ}C$ )	$\alpha_{22}$ ( $^{\circ}C$ )	$\Delta T$ ( $^{\circ}C$ )
171.42	9.08	5.39	0.32	$-5.5 \times 10^{-6}$	$25.8 \times 10^{-6}$	-180
$X_T$	$X_{PO}$	$X_C$	$Y_T$	$Y_C$	$\alpha_0$ ( $^{\circ}$ )	$S_L$
2323.5	232.3	1200.1	62.3	199.8	53	92.3
$G_{2+}$	$G_6$	$G_{2-}$	$G_{1+}^l$	$G_{1+}^e$	$G_{1-}$	
0.2774	0.7879	1.3092	31.5	50.0	106.3	

Cuadro 6.2: Propiedades elásticas, coeficientes de dilatación térmica, resistencias y energías críticas de fractura del material. (Resistencias en MPa y energías de fractura en N/mm)

Las propiedades elásticas, de resistencia y las energías de fractura se han determinado según los estándares ASTM [155]–[158], exceptuando las energías de fractura relacionadas con la fibra que se han obtenido realizando los ensayos CT y CC propuestos por Pinho [121]. Las propiedades se encuentran resumidas en el cuadro 6.2. Para determinar las resistencias *"in-situ"* se utilizan las expresiones deducidas en el capítulo 5. Se considera que antes de la activación del daño el comportamiento es lineal elástico.

Se han analizado probetas que mantienen la relación entre ancho ( $w$ ) y diámetro ( $d$ ) constante,  $w/d = 6$ . Los distintos diámetros analizados son  $d = 2, 4, 6, 8$  y  $10$  mm. Resultando distintas probetas escaladas en dos dimensiones.

Se han realizado cinco análisis con cada geometría siguiendo el estándar ASTM D-5766 [242]. En el cuadro 6.3 se muestra la resistencia remota obtenida por cada probeta, su valor medio, su desviación estándar y su correlación.

d (mm)	$\bar{\sigma}^\infty$ (MPa)	STDV (MPa)	CV(%)
2	555.7	15.3	2.8
4	480.6	21.4	4.5
6	438.7	25.3	5.8
8	375.7	15.1	4.0
10	373.7	14.1	3.8

Cuadro 6.3: Tensión máxima de los resultados experimentales.

Los modelos de elementos finitos se han realizado mediante el programa ABAQUS [219] y se han utilizado elementos cáscara de cuatro nodos (S4 shell elements) de la librería de ABAQUS. Las condiciones de contorno se muestran en la figura 6.7.c. Se ha realizado un análisis dinámico implícito con la misma velocidad de aplicación de las cargas que en el programa de ensayos. La velocidad del desplazamiento prescrito del extremo de la probeta es de  $2$  mm/min. Los modelos simulan desde el inicio del daño hasta el fallo total. En la figura 6.10 se muestra el daño en la capa de  $0^0$  y la localización de las deformaciones en un plano de fallo. Ésta corresponde con las obtenidas experimentalmente mostradas en la figura 6.9.



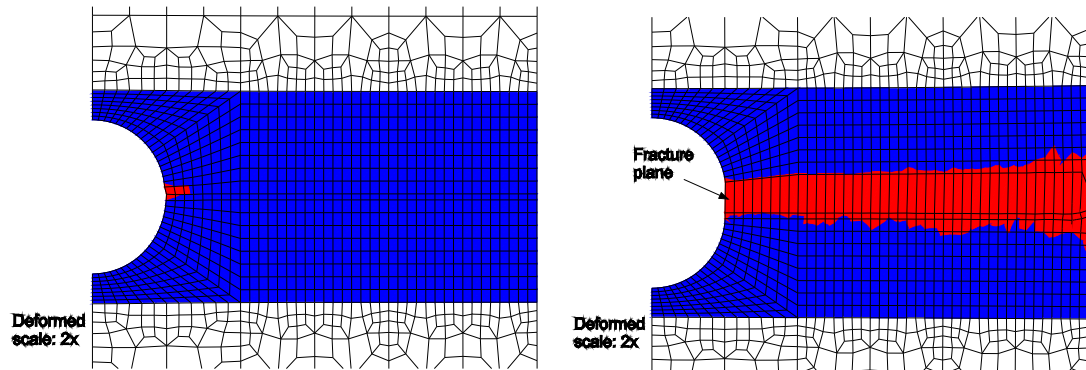


Figura 6.10: Evolución del daño en la fibra de la capa superior a  $0^\circ$ .

En el cuadro 6.4 se comparan las tensiones obtenidas en los experimentos con las obtenidas numéricamente con el modelo de daño. Se observa que el modelo es capaz de detectar el efecto tamaño mostrando una correlación excelente con los resultados experimentales. En las probetas con un diámetro de 2 a 6 mm las tensiones últimas obtenidas por el modelo son ligeramente inferiores a las obtenidas experimentalmente. En las probetas con diámetros de 8 y 10 mm el modelo sobrestima significativamente la resistencia de las probetas. Esto se puede deber a no utilizar el modelo desarrollado en el capítulo 5 para definir la ley de daño de la matriz, como corresponde a un laminado cuasi-isótropo, otra causa puede ser el mayor rol de la estadística al aumentar el tamaño de la estructura.

d (mm)	$\bar{\sigma}^\infty$ , Experimental	$\bar{\sigma}^\infty$ , Numérico	Error (%)
2	555.7	553.6	-0.4
4	480.6	463.0	-3.7
6	438.7	430.0	-2.0
8	375.7	415.0	+10.5
10	373.7	405.6	+8.5

Cuadro 6.4: Comparación entre los resultados experimentales y los numéricos.

En la figura 6.11 se muestra, en escala logarítmica, la resistencia remota en comparación con el tamaño del agujero obtenida en los ensayos de laboratorio, los análisis numéricos realizados con el modelo de daño desarrollado y los métodos analíticos presentados. Los resultados experimentales se muestran con un punto, la

media, y el intervalo de confianza obtenido con las cinco probetas de igual tamaño ensayadas. El modelo de daño desarrollado corresponde a la línea CDM. El modelo de Waddoups *et al.* asume que existe una pregrieta de dimensiones independientes al tamaño de la probeta, que se inestabiliza según el criterio de la mecánica de la fractura lineal. Este modelo corresponde a la función IFM. La función LEFM corresponde a considerar que el tamaño de la pregrieta es proporcional al tamaño de la probeta. El "Point Stress Method" (PSM) aplica un criterio en tensiones a una distancia determinada del agujero. Para ajustar estos modelos analíticos es necesario realizar un análisis con una probeta geoméricamente similar a la usada en los experimentos. Se utilizan los resultados obtenidos con un diámetro de  $d = 6$  mm para el ajuste de estos modelos.

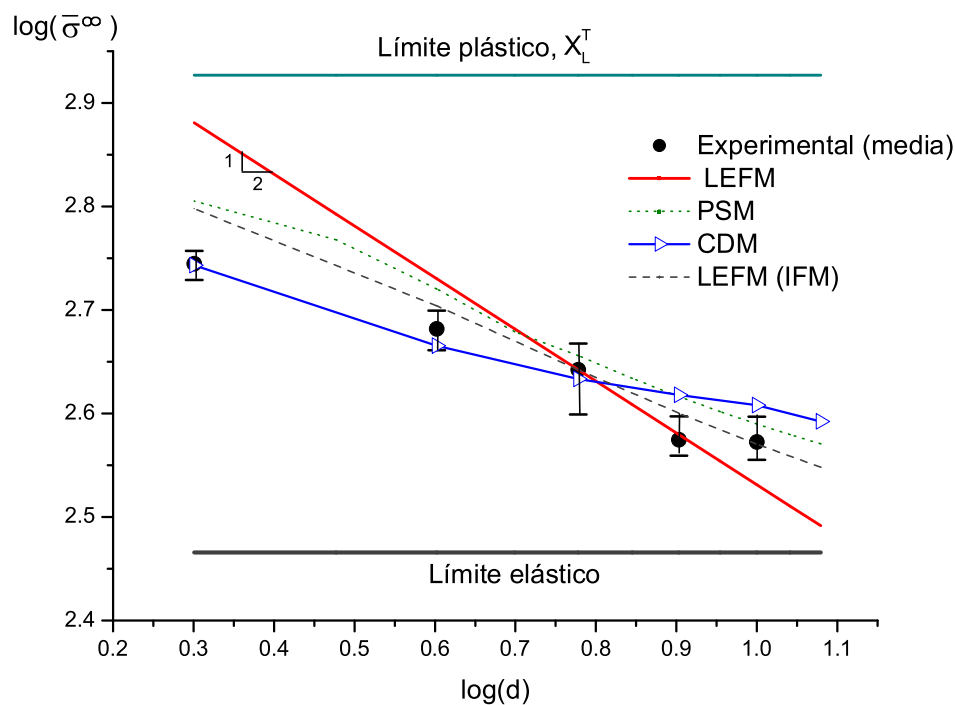


Figura 6.11: Resistencia nominal de las probetas ( $w/d=6$ ) y predicciones.

Si se considera que la sensibilidad a la entalla es independiente del tamaño de la probeta la resistencia es una recta horizontal en la figura 6.11. Si el material es insensible a la entalla la resistencia última corresponde al límite plástico. Si por

el contrario el material es sensible a la entalla la resistencia depende del factor de concentración de tensiones. El primer caso corresponde a un material con una energía de fractura infinita y el segundo con una energía de fractura nula. Cuando el tamaño de la probeta tiende a cero, la resistencia al límite plástico y cuando el tamaño de la probeta tiende a infinito al límite elástico. Estos límites sólo son rigurosamente respetados por el modelo de daño progresivo presentado en este capítulo.

# Capítulo 7

## Conclusiones y futuras líneas de trabajo

### 7.1. Conclusiones

En la presente tesis se han desarrollado herramientas para el tratamiento del daño estático de laminados multicapa. Estos son capaces de predecir desde el inicio del daño hasta la pérdida de la integridad estructural.

Los capítulos 2, 3 y 4 forman el resumen bibliográfico de la presente tesis. En el capítulo 2 se estudia el fenómeno del daño, la fractura y la pérdida de estabilidad de las estructuras. Se pone de relieve la importancia de la resistencia y de la energía crítica de fractura en el proceso del fallo. Se muestra como en probetas con una distribución uniforme de tensiones la resistencia es la propiedad clave para determinar la pérdida de estabilidad estructural, en una estructura con una entalla inicial la propiedad clave es la energía crítica de fractura, mientras en una pieza con discontinuidades geométricas ambas propiedades, así como la forma general de la ley cohesiva, son importantes para la determinación de la pérdida de estabilidad de la estructura.

En el capítulo 3 se exponen las bases de la mecánica del daño continuo así como las leyes de la termodinámica. Uno de los principales problemas de la modelización constitutiva en el continuo es la localización de las deformaciones en un plano de fallo. A partir del instante que el daño se localiza el tratamiento mediante la mecánica del continuo es incapaz de disipar energía, debido a que el volumen en el que las variables

internas evolucionan es nulo. Se estudian las distintas posibilidades para forzar que una vez el daño se localiza la energía disipada por el modelo tienda a un valor constante, la energía crítica de fractura. Se considera que el "*Crack Band Model*" es la manera más fácil para garantizar la correcta determinación de la tenacidad estructural.

En el capítulo 4 se introducen los materiales compuestos laminados de fibra larga cerámica embebida en una matriz termoelástica. Se realiza una introducción sobre los mecanismos de fallo y se resume los criterios de fallo que se consideran más significativos. Posteriormente se realiza un estudio de las distintas metodologías para el análisis computacional del daño en estos materiales. Se comentan, básicamente, los mesomodelos, modelos definidos al nivel de capa unidireccional y se concluye que no son capaces de detectar correctamente la energía disipada en el proceso de fallo. Este problema también es común con los modelos en dos escalas analizados. Se detectan dos problemas importantes en los mesomodelos. En primer lugar existen modos de daño claramente acoplados entre las distintas capas con lo que no es posible el tratamiento preciso a nivel de capa si no se considera las interacciones a lo largo del espesor del laminado. El otro problema está relacionado con la localización de las deformaciones en un plano de falla, para determinar el instante en que se localizan las deformaciones es necesario el estudio de la relación constitutiva tangente. En el caso de utilizar la teoría de placas la localización viene determinada por la relación tangente de todo el laminado, pudiendo aparecer planos de falla a lo largo de todo el espesor así como rótulas, ambos casos deben ser estudiados.

En el capítulo 5 se estudia el agrietamiento de la matriz. Éste es un modo de fallo no catastrófico y acostumbra a ser el primer mecanismo de daño en compuestos laminados. En la primera parte del capítulo se desarrolla un modelo analítico para el tratamiento del agrietamiento y la consecuente pérdida de rigidez del laminado bajo estados de tensión transversal y cortantes. Aplicando la mecánica de la fractura se distinguen tres tipos de capas, clasificadas como I, II y III según el criterio activado para la propagación de una grieta. En las capas de tipo I la resistencia transversal y a cortante viene determinada por la progresión de una grieta en dirección longitudinal. Las capas de tipo II corresponden a capas más gruesas cuyo agrietamiento viene determinado por el criterio de progresión transversal. Para finalizar las capas muy gruesas, de tipo III, no se agrietan pues la delaminación ocurre antes que se satisfaga

cualquier criterio de agrietamiento.

Se analiza la capacidad del modelo desarrollado, y de cualquier otro que se encuentre en la bibliografía, para ser implementado como ley de evolución del daño en un mesomodelo escrito a nivel de capa para tratar el comportamiento del compuesto a partir de la teoría de cáscaras en estructuras con un campo de tensión no uniforme. Se concluye que sólo las capas de tipo I pueden ser rigurosamente tratadas considerando que el laminado en el que se encuentra embebido tiene una rigidez infinita o, como mínimo, constante a lo largo de todo el proceso de daño. Para tratar capas de tipo II y III se requiere la utilización de modelos no locales. Las capas de tipo II y III presentan un fallo inestable y existe, en el proceso de agrietamiento y delaminación, una cantidad de energía que se transformará en energía cinética. Se determina la densidad de energía cinética en función de las variables de agrietamiento y delaminación. Se justifica porqué es práctica de buen diseño el utilizar capas delgadas, de tipo I, en la fabricación de laminados.

En la segunda parte del capítulo 5 se desarrolla un modelo de daño para materiales transversalmente isótropos. Este modelo requiere una descripción cinemática completa a nivel de capa, la discretización debe realizarse con varios elementos tridimensionales a lo largo del espesor de cada capa. Debido a la elevada exigencia computacional este modelo no es aplicable para el análisis estructural pero permite el estudio detallado de uniones, solapamiento de distintas capas, impactos y todo tipo de componentes sujetos a campos tridimensionales de tensión. El modelo se implementa en elementos finitos y se analiza el proceso de agrietamiento. Se observa que las grietas aparecen en el borde libre y avanzan hacia el interior del laminado, también se detecta que el avance de la grieta no es paralelo al espesor del laminado, en el centro de la capa la grieta se encuentra más avanzada que en los extremos, como ha sido detectado por varios investigadores. Cuando se analiza el proceso de agrietamiento en un laminado  $[90_n, 0_m, 90_n]$  las grietas en las capas externas aparecen desfasadas, el modelo es capaz de detectar automáticamente esta pauta de agrietamiento gracias a la buena descripción cinemática del laminado. Para finalizar se determina el efecto "*in-situ*" y la respuesta tensión deformación en una capa embebida donde aparecen grietas transversales. El modelo es capaz de determinar el incremento de la resistencia y rigidez al disminuir el espesor de la capa.

En el capítulo 6 se define un modelo constitutivo para ser utilizado en elementos

cáscara, lo que resulta muy útil para el cálculo de estructuras laminadas. El modelo se define a nivel de lámina y detecta desde la aparición del daño hasta el colapso estructural. Este modelo puede ser utilizado tanto en laminados unidireccionales como en laminados multiaxiales. En este segundo caso se utiliza el modelo analítico definido en la primera parte del capítulo 5 para determinar la respuesta transversal a tracción y a cortante.

El modelo constitutivo desarrollado es validado mediante un conjunto de experimentos llevados a cabo en la Universidad de Porto. Se analizan numérica y experimentalmente un conjunto de probetas con un agujero central de distinto tamaño. Éstas son geoméricamente similares con lo que la respuesta elástica es proporcional, el factor de concentración de tensiones es constante. Es conocido que la sensibilidad a la entalla incrementa con el tamaño de la estructura como se explica en el capítulo 2 a través de la energía de fractura y la ley cohesiva. Los resultados numéricos obtenidos presentan una excelente correlación con los experimentales demostrando que el modelo es capaz de determinar correctamente la tenacidad estructural.

En la presente tesis doctoral se presenta una metodología para la determinación de la respuesta estructural de componentes laminados bajo estados de carga estática o cuasi-estática. Los resultados obtenidos ofrecen una excelente aproximación con los resultados experimentales. Además las herramientas desarrolladas permiten mejorar el diseño del material gracias a los estudios micromecánicos tanto analíticos como numéricos presentados en el capítulo 5.

## **7.2. Futuras líneas de trabajo**

Una de la más importante línea de investigación en modelización numérica reside en el estudio de fenómenos que ocurren a través de escalas muy dispares, ya sean temporales o espaciales. La mecánica del daño, lejos de ser una excepción, es uno de los campos donde este problema se presenta con mayor complejidad. La respuesta macroestructural, con un orden de escala de metros, depende de fenómenos que ocurren a la escala de los constituyentes, con una escala de micras.

En la bibliografía es posible encontrar modelos para la determinación de la respuesta estructural a partir de análisis en dos escalas en las que la microestructura del material se tiene en consideración. No obstante, en conocimiento del autor, es-

tos modelos no son capaces de determinar con precisión la tenacidad del material. A pesar de obtener buenos resultados mientras la respuesta local no se localiza, no es suficiente para determinar la resistencia de una estructura con un campo de tensiones no uniforme.

Otra estrategia, menos ambiciosa, para considerar las distintas escalas es el "*building block approach*". Este procedimiento es utilizado en el diseño estructural y consiste en ir analizando especímenes pequeños hasta alcanzar suficiente conocimiento del comportamiento del material, luego se procede con especímenes de mayor complejidad estructural. Mediante el "*virtual mechanical testing*" es posible realizar el mismo procedimiento con experimentos numéricos. Es posible tener en cuenta la microestructura del material con análisis micromecánicos. Utilizando modelos de elementos finitos en la microescala se pueden obtener las propiedades del material homogeneizado, módulos de rigidez, resistencias y energías de fractura. Conocidas estas propiedades pueden ser la entrada para modelos constitutivos desarrollados para el cálculo macroestructural.

Actualmente la mayoría de estructuras construidas por compuestos laminados sólo pueden ser calculadas mediante la teoría de cáscaras debido a tratarse de componentes muy esbeltos. La descripción cinemática de la teoría de cáscaras requiere ser mejorada. En los trabajos de Oliver y Belytschko, se propone un enriquecimiento del medio continuo para poder determinar la presencia de una discontinuidad fuerte. Se determina el instante de su formación y su descripción cinemática para elementos sólidos en dos y tres dimensiones. La determinación del instante en que se genera una discontinuidad fuerte es más compleja si se utiliza la teoría de cáscaras pues no sólo puede generarse un plano de fallo sino también una rótula. En este campo se requieren nuevas investigaciones.

Las leyes constitutivas que definen la relación tensión deformación deben deducirse a partir de análisis experimentales o modelos micromecánicos, ya sean numéricos o analíticos. Los numéricos a partir del análisis a una escala menor, como el modelo constitutivo para un material transversalmente isótropo del capítulo 5. Los analíticos mediante modelos como el que trata el agrietamiento de la matriz también en el capítulo 5. El modelo analítico para el tratamiento del agrietamiento y la delaminación desarrollado puede ser mejorado a través de solucionar las limitaciones del modelo comentados en el capítulo 5: a) el modelo tiende a maximizar la densidad



de grietas, no teniendo en cuenta que la pérdida de rigidez se encuentra relacionada con la densidad media y el aumento de agrietamiento con los lugares donde la densidad de grietas es menor, b) considera que las propiedades del material son homogéneas, c) asume que la capa se encuentra en un medio elástico de rigidez infinita y d) la solución del problema elástico es muy simplificada. Para finalizar el modelo presentado sólo detecta el agrietamiento y la pérdida de rigidez asociada a éste. No obstante, el comportamiento del material sin agrietarse se considera lineal bajo tensiones transversales y se proponen varias alternativas para las cargas a cortante, modelo elástico, plástico y modelo hiperelástico propuesto por Hahn y Tsai. En ningún caso se considera la pérdida de rigidez del material sin presencia de grietas, en este sentido también son necesarias futuras investigaciones para determinar el daño provocado por la separación de fibra-matriz antes de la aparición de una grieta que ocupe todo el espesor de la capa.

En la segunda parte del capítulo 5 se describe un modelo transversalmente isótropo. Éste considera que el comportamiento del material es lineal elástico hasta la aparición de una grieta. Es bien conocido que el material se daña antes de alcanzar la máxima tensión admisible, al mismo tiempo bajo tensiones a cortante y a compresión transversal el material tiene un importante comportamiento plástico. Este modelo debe ser mejorado si se quieren obtener resultados fieles bajo tensiones cortantes.

Los modelos desarrollados en este capítulo 5 deben ser validados a partir de más resultados experimentales. Los ejemplos y la validación realizados se han obtenido de la bibliografía. Es necesario diseñar experimentos que permitan la validación precisa de distintos aspectos del modelo.

# Bibliografía

- [1] *Simulation-based engineering science*. Report of the National Science Foundation. (2006).
- [2] *MIL-HDBK-17, Military Handbook, Polymer Matrix Composites*. U.S. Department of Defense. (1994).
- [3] Parvizi A., Garrett K., Bailey J., *Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates*. Journal of Material Science. **13** (1978) pp. 195-201.
- [4] Crews J. H. *A survey of strength analysis methods for laminates with holes*. Journal of Aeronautical Society of India. **36.4** (1984) pp. 287-303.
- [5] Bažant Z. P., *Is no-tension design of concrete or rock structures always safe?- fracture analysis*. Journal of Structural Engineering. **122** (1996) pp. 2-10.
- [6] Gioia G., Bažant Z. P., *Is no-tension design always safe?- a numerical study*. Dam Engineering. **3,1** (1992) pp. 23-34.
- [7] Galileo Galilei, *Two new sciences*. (1638).
- [8] D'Arcy T. W., *On growth and form*. Cambridge. University Press (1917).
- [9] Timoshenko S.P., *History of strength of materials*. Dover publications (1983).
- [10] Cauchy A.-L., *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur*. <http://gallica.bnf.fr/>. Oeuvres **2,8** pp. 196-226.
- [11] Cauchy A.-L., *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou répulsion mutuelle*. <http://gallica.bnf.fr/>. Oeuvres **2,8** pp. 227-252.

- [12] Cauchy A.-L., *Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues*. <http://gallica.bnf.fr/>. Oeuvres **2,9** pp. 342-369.
- [13] Cauchy A.-L., *De la pression ou tension dans un système de points matériels*. <http://gallica.bnf.fr/>. Oeuvres **2,8** pp. 253-277.
- [14] Lagrange, *Mécanique analytique*. (1788) <http://gallica.bnf.fr/>.
- [15] Bažant Z. P., Cedolin L. *Stability of structures*. Oxford University Press. (1991).
- [16] Bažant Z. P., Planas J. *Fracture and Size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Ed. W. F. Chen, Purdue University (1998).
- [17] Bažant Z.P., Chen E.P., *Scaling of structural failure*. Report SAND96-2998, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico (1996).
- [18] Bažant Z.P. *Scaling of quasibrittle fracture: asymptotic analysis*. International Journal of Fracture **83** (1997) pp. 19-40.
- [19] Bažant Z. P. *Size effect*. International Journal of Solids and Structures. **37** (2000) pp. 69-80.
- [20] Bažant Z. P. *Fracture energy of heterogeneous materials and similitude*. Fracture of concrete and rock, S.P.Shah and S.E.Swartz, eds. Springer Verlag, New York. (1989) pp. 229-241.
- [21] Bažant Z.P., *Scaling of Structural Strength*. Hermes Pentos Science (Kogan Page Science) 2002.
- [22] Bažant Z.P. , Vorechovský M., Novák D., *Role of deterministic and statistical length scales in size effect for quasibrittle failure at crack initiation* Proc., 9th Int. Conf.on Structural Safety and Reliability. Rome. ICOSAR 2005.
- [23] Bažant Z.P., Novák. *Proposal for Standard Test of Modulus of Rupture of Concrete with its Size Dependence*. ACI Materials Journal. V98,N1 (2001) pp.79-87.

- [24] Dudgale D. S., *Yielding of steel sheets containing slits*. Journal of Mechanics and Physics of Solids. **8** (1960) pp. 100-104.
- [25] Barenblatt G. I., *Mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Advances in Applied Mechanics. **7** (1962).
- [26] Hillerborg A., Modeer M., Paterson P. E., *Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Fracture Mechanics and Finite Elements*. Cement and Concrete Research. **6** (1976) pp. 773-782.
- [27] Rusch H., Hilsdorf H.K. *Deformation characteristics of concrete under axial tension*. Voreuntersuchungen. **44** (1963).
- [28] Hughes B.P. Chapman G.P. *The complete stress strain curves for concrete in direct tension*. RILEM Bulletin **30** (1966) pp. 95-97.
- [29] Evans R.H., Marathe M.S., *Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension*. Materials and Structures. **1** (1968) pp. 61-64.
- [30] Alfano G., *On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models*. Composite Science and Technology. (2005).
- [31] Fisher R. A., Tippett L. H. C., *Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample*. Proc. Cambridge Philosophical Society. **24** (1928) pp. 180-190.
- [32] Schütz W., *A history of fatigue*. Engineering Fracture Mechanics. **54.2** (1996) pp. 263-300.
- [33] Daniels H. E., *The statistical theory of the strength of bundles of threads*. Proceedings Royal Society, London. **183A** (1945) pp. 405-435.
- [34] Vořechovský M., *Stochastic fracture mechanics and size effect*. PhD Thesis. Institute of Structural Mechanics, Brno University of Technology. (2004).
- [35] Bažant Z.P., *Probability distribution of energetic-statistical size effect in quasibrittle fracture*. Probabilistic Engineering Mechanics. **19** (2004) pp. 307-319.

- [36] Bažant Z. P., Novák D., *Stochastic models for deformation and failure of quasi-brittle structures: Recent advances and new directions*. Fracture of concrete and rock, S.P.Shah and S.E.Swartz, eds. Computational Modelling of Concrete Structures, (2003) pp. 583-598.
- [37] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann. (2000).
- [38] Tonti E., *On the mathematical structure of a large class of physical theories*. Accademia Nazionale dei Lincei, estratto dai Rendiconti dell Classe di Scienze Fisiche. Matematiche e naturali. Serie VIII, **LII**.1 (1972).
- [39] Kachanov L. M., *Time of the rupture process under creep conditions*. Izvestia Akademii Nauk SSSR. Otdelenie Tekhnicheskich Nauk. **8** (1958) pp. 26-31.
- [40] Kachanov L. M., *Rupture time under creep conditions*. International Journal of Fracture. **37** (1999) pp. xi-xviii.
- [41] Krajcinovic D., Fonseka G.U., *The continuous damage theory of brittle materials. Part 1*. Journal of Applied Mechanics ASME. **48** (1981) pp. 809-815.
- [42] Krajcinovic D., Fonseka G.U., *The continuous damage theory of brittle materials. Part 2*. Journal of Applied Mechanics ASME. **48** (1981) pp. 816-824.
- [43] Lemaitre J. Chaboche J.-L., *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [44] Mazars J., Pijaudier-Cabot G., *Continuum damage theory - Application to concrete*. Journal of Engineering Mechanics. ASCE. **115** (1989) pp. 3457-365.
- [45] Carol I., Rizzi E., William K., *On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate*. International Journal of Solids and Structures. **38** (2001) pp. 491-518.
- [46] Carol I., Rizzi E., William K., *On the formulation of anisotropic elastic degradation. II. Generalized pseudo-Rankine model for tensile damage*. International Journal of Solids and Structures. **38** (2001) pp. 519-546.

- [47] Voyiadjis G.Z., Deliktas B., *A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering. **183** (2000) pp. 159-199.
- [48] Luccioni B., Oller S. *A directional damage model*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering. **192** (2003) pp. 1119-1145.
- [49] Ju J.W., *On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modelling and computational aspects*. International Journal of Solids and Structures. **25,7** (1989) pp. 2764-2770.
- [50] Chaboche J-L. *A continuum damage theory with anisotropic and unilateral damage*. La Recherche Aéronautique **2** (1995) pp. 139-147.
- [51] Chaboche J-L. *Developement of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage*. International Journal of Damage Mechanics. **2** (1993) pp. 311-329.
- [52] Cauvin A., Testa R. B., *Damage mechanics: basic variables in continuum theories* International Journal of Solids and Structures. **36** (1999) pp.747-761.
- [53] Lemaitre J., Desmorant R., Sauzay M., *Anisotropic damage law of evolution*. European Journal of Mechanics. A/ Solids. **19,2** (2000) pp. 187-208.
- [54] Cordebois J.P., Sidoroff F., *Anisotropie élastique induite par endommagement*. Comportement mécanique des solides anisotropes. CNRS. **295** (1979) pp. 761-774.
- [55] Jirásek M., *Numerical modeling of deformation and failure of materials*. Lecture Notes. (2000).
- [56] Taylor G. I., *Plastic strain in metals*. Journal of Inst. Metals. **62** (1938) pp. 307-324.
- [57] Batdorf S., Budianski D., *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*. Tech. Rep., National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D.C. (1949).

- [58] Bažant Z. P., Oh B.H., *Microplane model for progressive fracture of concrete and rock*. Journal of Engineering Mechanics. **111**,4 (1985) pp. 559-582.
- [59] Bažant Z. P., Prat P., *Microplane model for brittle-plastic material: I. Theory*. Journal of Engineering Mechanics. **114**,10 (1988) pp. 1672-1688.
- [60] Bažant Z. P., Prat P., *Microplane model for brittle-plastic material: II. Verification*. Journal of Engineering Mechanics. **114**,10 (1988) pp. 1689-1702.
- [61] Cormery F., Weleman H., *A critical review of some damage models with unilateral effect*. Mechanics Research Communications. **29** (2002) pp. 391-395.
- [62] Halm D., Dragon A. *A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect*. **5** International Journal of Damage Mechanics. (1996) pp. 384-402.
- [63] Carol I., William K., *Spurious dissipation/generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage*. International Journal of Solids and Structures. **33** (1996) N° 30-22 pp. 2939-2957.
- [64] Chaboche J.L., Kruch S., Maire J.F., Pottier T., *Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites*. International Journal of Plasticity **17** (2001) pp. 411-439.
- [65] Malvern L. E. *Introduction to the mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1969).
- [66] Collins I. F., *Elastic/plastic models for soils and sands*. International Journal of Mechanical Sciences. **47** (2005) pp. 493-508.
- [67] Truesdell C., Noll N., *The non-linear field theories of mechanics*. Springer-Verlag, Berlin (1965).
- [68] Houlsby G. T., Puzrin A. M., *A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials*. International Journal of Plasticity. **16** (2000) pp. 1017-1047.

- [69] Puzrin A. M., Houlsby G. T., *A thermomechanical framework for rate-independent dissipative materials with internal functions*. International Journal of Plasticity. **17** (2001) pp. 1147-1165.
- [70] Bažant Z. P. *Reminiscences on four decades of struggle and progress in softening damage and size effects*. Concrete Journal, **40**,2 (2002) pp. 16-28.
- [71] Elices M., Guinea G. V., Gómez J., Planas J., *The cohesive zone model: advantages, limitations and Challenges*. Engineering Fracture Mechanics. **69** (2002) pp. 137-163.
- [72] Turon, A., Camanho, P.P., Costa, J., Dávila, C.G., *An interface damage model for the simulation of delamination under variable-mode ratio in composite materials*. NASA-TM 213277. (2004).
- [73] Turon A., Camanho P.P., Costa J., Dávila C.G., *. A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading*. Mechanics of Materials. (2006).
- [74] Bažant Z. P., Oh B. H., *Crack band theory for fracture of concrete*. Materials and structures. **16** (1983) pp. 155-177.
- [75] De Borst R., *Numerical aspects of cohesive-zone models*. Engineering Fracture Mechanics. **70** (2003) pp. 1743-1757.
- [76] Martha L., Wawrzynek P. A., Ingraffea A. R., *Arbitrary crack propagation using solid modeling*. Engineering with Computers. **9** (1993) pp. 6382.
- [77] Carter B. J., Chen C.-S., Ingraffea A. R., Wawrzynek P. A., *A topology-based system for modeling 3d crack growth in solid and shell structures*. in Proceedings of the Ninth International Congress on Fracture ICF9, Elsevier Science Publishers, Sydney, Australia. (1997) pp. 1923-1934.
- [78] Simo J.C., Oliver J. *A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids*. Fracture and Damage in Quasibrittle Structures. E. & FN Spon, London. (1994) pp. 25-39.



- [79] Oliver J. *Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: Fundamentals*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. **39** (1996) pp. 3575-3600.
- [80] Oliver J. *Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part II: Numerical simulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. **39** (1996) pp. 3601-3623.
- [81] Oliver J., *On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations*. International Journal of Solids and Structures. **37** (2000) pp. 7207-7229.
- [82] Oliver J., Huespe A. E., Pulido M. D. G., Chaves E., *From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach*. Engineering Fracture Mechanics **69** (2002) pp. 113-136.
- [83] Oliver J., Huespe A. E., *Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **193** (2004) pp. 3195-3220.
- [84] Oliver J., Huespe A. E., *Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **193** (2004) pp. 2987-3014.
- [85] Simo J.C., Rifai M.S., *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. **29** (1990) pp. 1595-1638.
- [86] Belytschko T., Moës N., Usui S., Parimi C., *Arbitrary discontinuities in finite elements*. International Journal For Numerical Methods in Engineering. **50** (2001) pp. 993-1013.
- [87] Moës N., Dolbow J., Belytschko T., *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal For Numerical Methods in Engineering. **46** (1999) pp. 131-150.

- [88] Belytschko T., Parimi C., Moës N., Sukumar N., Usui S., *Structured extended finite element method for solids defined by implicit surfaces*. International Journal For Numerical Methods in Engineering. **56** (2003) pp. 609-635.
- [89] Babuška I., Melenk J. M., *The partition of unity method*. International Journal For Numerical Methods in Engineering. **40** (1997) pp. 727-758.
- [90] M. Jirásek M., *Comparative study on finite elements with embedded cracks*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **188** (2000) pp. 307330.
- [91] Bažant Z. P., Di Luzio G., *Nonlocal microplane model with strain-softening yield limits*. International Journal of Solids and Structures. **41** (2004) pp. 7209-7240.
- [92] Jirásek M., *Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches*. International Journal of Solids and Structures. **35**,31 (1998) pp. 4133-4145.
- [93] Bažant Z. P., Jirásek M., *Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress*. Journal of Engineering Mechanics. **128**,11 (2002) pp. 1119-1149.
- [94] Jirásek M., *Objective modeling of strain localization*. Revue Française de Génie Civil. **6**,6 (2002) pp. 1119-1132.
- [95] Peerlings R. H. J., *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. PhD Thesis , Eindhoven Technische Universiteit. (1999).
- [96] Peerlings R. H. J., Geers M. G. D., De Borst R., Brekelmans W. A. M. *A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua*. International Journal of Solids and Structures. **38** (2001) pp. 7723-7756.
- [97] Peerlings R. H. J., De Borst R., Brekelmans W. A. M., Geers M. G. D. *Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture*. European Journal of Mechanics A) Solids. **21** (2002) pp. 175-189.

- [98] Car E., Zalamea F., Oller S., Miquel J., Oñate E., *Numerical simulation of fiber reinforced composite materials — two procedures*. International Journal of Solid and Structures. **39** (2002) pp.1967-1986.
- [99] Oller S., Miquel Canet J., Zalamea F., *Composite material behavior using a homogenization double scale method*. Journal of Engineering Mechanics. **31**(1) (2005) pp.65-79.
- [100] Matzenmiller A., Lubliner J., Taylor R. L., *A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites*. Mechanics of Materials. **20** (1995) pp. 125-152.
- [101] Ladevèze P., Allix O., Deü J-F., Lévêque D., *A mesomodel for localisation and damage computation in laminates*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **183** (2000) pp.105-122.
- [102] Gasser A., Ladevèze P., Peres F., *Damage modelling for a laminated composite*. Materials Science and Engineering. **A250** (1998) pp.249-255.
- [103] Ladevèze P., Allix O., Douchin B., Lévêque D., *A computational method for damage intensity prediction in a laminated composite structure*. Computational Mechanics, new trends and applications. (1998) CIMNE.
- [104] Ladevèze P., Lubineau G., *On a damage mesomodel for laminates: micro-meso relationships, possibilities and limits*. Composites Science and Technology **61** (2001) pp. 2149-2158.
- [105] Ladevèze P., Lubineau G., *An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics*. Composites Science and Technology. **62** (2002) pp.533-541.
- [106] Linde P., Pleitner J., De Boer H., Carmone C. *Modelling and simulation of fibre metal laminates*. 2004 ABAQUS Users' Conference.
- [107] Barbero E. J., Lonetti P., *A damage model for composites defined in terms of available data*. Mechanics of Composite Materials and Structures. **8**(4) (2001) pp. 299–316.
- [108] Barbero E. J., Devivo L., *A constitutive model for elastic damage in fiber-reinforced PMC laminae*. Journal of Damage Mechanics. **10**(1) (2001) pp. 73-93.

- [109] Oller S., Botello S., Miquel J., Oñate E., *An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation*. Engineering Computations. **12** (1995) pp.245-262.
- [110] Williams K.V., Vaziri R., Poursartip A., *A physically based continuum damage mechanics model for thin laminated composite structures*. International Journal of Solids and Structures. **40** (2003) pp. 2267-2300.
- [111] Swanson S. R., Messick M. J., Tian Z., *Failure of carbon epoxy lamina under combined stresses*. Journal of Composite Materials, **21** (1987) pp. 619-630.
- [112] Swanson S. R., *A micro-mechanical model for in-situ compression strength of fiber composite laminates*. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Series H, Journal of Engineering Materials and Technology **114** (1992) pp. 8-12.
- [113] Puck A., Schürmann H., *Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models*. Composites Science and Technology. **58**, (1998), pp. 1045-1067.
- [114] Puck A., Schürmann H., *Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models*. Composites Science and Technology. **62**, (2002), pp. 1633-1662.
- [115] Puck A., Kopp J., Knops M., *Guidelines for the determination of the parameters in puck's action plane strength criterion*. Composites Science and Technology. **62** (2002) pp.371-378.
- [116] Budiansky B., Fleck N. A., Amazigos J. C., *On kink-band propagation in fiber composites*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. **46**,9 (1998), pp. 1637-1653.
- [117] Rosen V. W., *Mechanics of composite strengthening*. Fiber Composite Materials American Society of Metals, Metals Park, Ohio. (1965) pp. 37-75.
- [118] Hahn H. T., Sohi M. M., *Buckling of a fiber bundle embedded in epoxy*. Composites Science and Technology. **27**, (1986), pp. 25-41.

- [119] Chaplin C. R., *Compressive fracture in unidirectional glass-reinforced plastics*. Journal of Material Science. **12**, (1977), pp. 347-352.
- [120] Schultheisz C. R., Waas A. M., *Compressive failure of composites, Part I: Testing and micromechanical theories*. Progress in Aerospace Sciences. **32.1** (1996) pp. 1-42.
- [121] Pinho S. T., *Modelling failure of laminated composites using physically-based failure models*. PhD Thesis, Department of Aeronautics, Imperial College London, U.K. (2005).
- [122] Vogler T. J., Kyriakides S., *On the axial propagation of kink bands in fiber composites: Part I experiments*. International Journal of Solids and Structures. **36** (1999) pp. 557-574.
- [123] Dávila C. G., Camanho P. P., Rose C. A., *Failure criteria for FRP laminates*. Journal of Composite Materials. **39** (2005) pp. 323-345.
- [124] Pinho S. T., Dávila C. G., Camanho P. P., Iannucci L., Robinson P., *Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity*. NASA/TM-2003-213530 (2004).
- [125] Bažant Z. P., Kim J-J. H., Daniel I. M., Becq-Giraudon E., Zi G., *Size effect on compression strength of fiber composites failing by kink band propagation*. International Journal of Fracture. **95** (1999) pp. 103-141.
- [126] Fleck N. A., Liu D., *Microbuckle initiation from a patch of large amplitude fibre waviness in a composite under compression and bending*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 20(1) (2001) pp. 23-37.
- [127] Schultheisz C. R., Waas A. M., *Compressive failure of composites, Part 1: Testing and micromechanical theories*. Progress in Aerospace Sciences, **32** (1996) pp. 1-42.
- [128] Argon A. S., *Fracture of Composites*. Treatise of Materials Science and Technology. **1**, Academic Press, New York. (1972).
- [129] Budiansky B., *Micromechanics*. Computers and Structures. **16** (1983) pp. 3-12.

- [130] Tsai S. W., Wu M., *A general theory of strength for anisotropic materials*. Journal of Composite Materials. **5** (1970) pp. 58-80.
- [131] Hashin Z., Rotem A., *A cumulative damage theory of fatigue failure*. Materials Science and Engineering. **34** (1978) pp. 147-160.
- [132] Hashin Z., *Failure criteria for unidirectional fiber composites*. Journal of Applied Mechanics. **47** (1980) pp. 329-334.
- [133] Hill R., *A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proc. Royal Society of London, Series A. **193** (1948) pp. 281-297.
- [134] Tsai S. W., *Strength characteristics of composite materials*. NASA CR-224. (1965).
- [135] Azzi V.D., Tsai S. W., *Anisotropic strength of composites*. Experimental Mechanics. (1965) pp. 283-288.
- [136] Hoffman O., *The brittle strength of orthotropic materials*. Journal of Composite Materials. **1** (1970) pp. 200-206.
- [137] Chamis C.C., *Failure criteria for filamentary composites*. Composite Materials: Testing & Design. Philadelphia: ASTM. STP **460** (1969) pp. 336-351.
- [138] Hart-Smith L. J., *Comparison between theories and test data concerning the strength of various fibre-polymer composites*. Composites Science and Technology. **62**, (2002), pp. 1591-1618.
- [139] Sun C. T., Quinn B. J., Tao J., Oplinger D.W., *Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates*. NASA, DOT/FAA/AR-95/109, 1996.
- [140] Christensen R. M., *Stress based yield/failure criteria for fibre composites*. International Journal of Solids and Structures. **35** (1997) pp. 529-543.
- [141] Christensen R. M., DeTeresa S. J., *Failure plane orientations for transverse loading of a unidirectional fiber composite*. International Journal of Solids and Structures. **40** (2003) pp. 7055-7062.

- [142] Cuntze R. G., Freund A., *The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates*. Composite Science and Technology. **64** (2004) pp. 343-377.
- [143] Cuntze R. G., *The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates-Part B*. Composite Science and Technology. **64** (2004) pp. 487-516.
- [144] Hart-Smith L. J., *Predictions of a generalized maximum-shear-stress failure criterion for certain fibrous composite laminates*. Composites Science and Technology. **58**, (1998), pp. 1179-1208.
- [145] Hart-Smith L. J., *Expanding the capabilities of the Ten-Percent Rule for predicting the strength of fiber-polymer composites*. Composites Science and Technology. **62**, (2002), pp. 1515-1544.
- [146] París F., *A study of failure criteria of fibrous composite materials*. NASA/CR-2001-210661 (2001).
- [147] Echaabi J., Trochu F., Gauvin R., *Review of failure criteria of fibrous composite materials*. Polymer composites. **17,6** (1996), pp. 786-798.
- [148] Mayugo J. A. *Estudio comparativo de materiales compuestos laminados sometidos a cargas cíclicas*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya (2003).
- [149] Hinton M. J., Soden P. D., *Predicting of failure in composite laminates: the background to the exercise*. Composites Science and Technology. **58** No. 7, (1998) pp. 1001-1010.
- [150] M.J. Hinton, A.S. Kaddour, P.D. Soden *Evaluation of failure prediction in composite laminates: background to 'part B' of the exercise*. Composites Science and Technology. **62** (2002) pp.1481–1488.
- [151] Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S., *Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data*. Composites Science and Technology. **62** (2002) pp.1489–1514.

- [152] Soden P. D., Hinton M. J., Kaddour A. S., *A Comparison of the Predictive Capabilities of Current Failure Theories for Composite Laminates*. Composites Science and Technology. **58**, No. 7, (1998), pp. 1225-1254.
- [153] *World Wide Failure Exercise. Part A*. Composites Science and Technology. **58**, 7, (1998) pp.999-1254.
- [154] *World Wide Failure Exercise. Part B*. Composites Science and Technology. **62**, 12-13, (2002) pp.1479-1797.
- [155] *Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials*. ASTM D 3039/D 3039M-00, American Society for Testing and Materials (ASTM), West Conshohocken, PA, U.S.A.
- [156] *Standard test method for compressive properties of unidirectional or cross-ply fiber-resin composites*. ASTM D 3410-87, American Society for Testing and Materials (ASTM), West Conshohocken, PA, U.S.A.
- [157] *Standard test method for in-plane shear response of polymer matrix composite materials by test of a  $\pm 45^\circ$  laminate*. ASTM D 3518/3518M-94, American Society for Testing and Materials (ASTM), West Conshohocken, PA, U.S.A.
- [158] *Standard test methods for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites*. ASTM D 5528-01, American Society for Testing and Materials (ASTM), West Conshohocken, PA, U.S.A.
- [159] Abu-Farsakh G. A., Abdel-Jawad Y. A., *A new failure criterion for nonlinear composite materials*. Journal of Composites Technology and Research. **16**,2. (994) pp. 138-145.
- [160] Sleight D. W., *Progressive failure analysis methodology for laminated composite structures*. NASA/TP-1999-209107. (1999).
- [161] Herakovitch C. T., *Mechanics of fibrous composites*. Ed. Wiley (1998).
- [162] Jirásek M., Bažant Z. P., *Inelastic analysis of structures*. Wiley and sons. (2001).



- [163] Armero F., Ehrlich D., *Finite element method for the multi-scale modeling of softening hinge lines in plates at failure*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **195** (2006) pp. 1283-1324 .
- [164] Dolbow J., Moës N., Belytschko T., *Modeling fracture in Mindlin - Reissner plates with the extended finite element method*. International Journal of Solids and Structures **37** (2000) pp. 7161-7183.
- [165] Areias P.M.A., Song J-H., Belytschko T., *A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff-Love constraints*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. **64** (2005) pp. 1166-1206.
- [166] Areias P.M.A., Belytschko T., *Analysis of finite strain anisotropic elastoplastic fracture in thin plates and shells*. Journal of Aerospace Engineering **19,4** (2006) pp. 259-270. .
- [167] Trias D., *Analysis and simulation of tranverse random fracture of long fibre reinforced composites*. PhD Thesis. Universitat de Girona (2005).
- [168] Trias D., Costa J., Fiedler B., Hobbiebrunken T., Hurtado J.E., *A two-scale method for matrix cracking probability in fibre-reinforced composites based on a statistical representative volume element*. Composites Science and Technology. **66,11-12** (2006) pp. 1766-1777
- [169] Swaminathan S., Ghosh S., Pagano N. J., *Statistically Equivalent Representative Volume Elements for Unidirectional Composite Microstructures: Part I Without Damage*. Journal of Composite Materials. **40,7**. (2006) pp. 583-604.
- [170] Swaminathan S., Ghosh S., *Statistically Equivalent Representative Volume Elements for Unidirectional Composite Microstructures: Part I With Interfacial Debonding*. Journal of Composite Materials. **40,7**. (2006) pp. 605-621.
- [171] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland. Amsterdam (1978).
- [172] Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous media and vibration theory*. Lecture notes in physics. **127**. Springer-Verlag. Berlin. (1980).

- [173] Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E., *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson. (1992).
- [174] Fish J., Yu Q., *Two-scale damage modeling of brittle composites*. Composites Science and Technology. **61** (2001) pp. 2215-2222.
- [175] Fish J., Yu Q., Shek K., *Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. **45** (1999) pp. 1657-1679.
- [176] Suquet P., *Plasticité et homogénéisation*. Tesis doctoral. Universidad Pierre et Marie Curie. Paris 6. (1982).
- [177] Suquet P., *Homogenization techniques for composite media*. Chapter *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*. Springer-Verlag, Berlin. (1987) pp. 193-279.
- [178] Rastellini F.G., *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. (2006).
- [179] Zalamea F., *Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de la homogeneización*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. (2001).
- [180] Eshelby J. D., *The continuum theory of lattice defects*. Progress in Solid State Physics. ed. F. Seitz y D. Turnbull. (1956) pp. 79-114.
- [181] Eshelby J. D., *The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems*. Proceedings Royal Society London. A241 (1957) pp. 376-396.
- [182] Mori T., Tanaka K., *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. Acta Metallurgica. **21** (1973) pp. 571-574.
- [183] Benveniste Y., *A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials*. Mechanics of Materials. **6** (1987) pp. 147-157.
- [184] Kröner E., *Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls*. Z. Physik. **151** (1958) pp. 504-518.

- [185] Hashin Z., *The elastic moduli of heterogeneous materials*. Journal of Applied Mechanics. **29** (1962) pp. 143-150.
- [186] Hashin Z., Shtrikman S., *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. **11** (1963) pp. 127-140.
- [187] Budiansky B., *On the elastic moduli of some heterogeneous materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. **13** (1965) pp. 223-227.
- [188] Hill R., *A self-consistent mechanics of composite materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. **13** (1965) pp. 213-222.
- [189] Christensen R. M., Lo K. H., *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. **27** (1979) pp. 315-330.
- [190] Hashin Z., *Analysis of composite materials. A survey*. Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME **50.3** (1983) pp. 481-505.
- [191] Voigt W., *Über die beziehung zwischen den beiden elasticitäts-constanten isotroper körper*. Ann. Phys. **38** (1889) pp. 573-587.
- [192] Reuss A., *Berechnung der fliebgrenze von mischkristallen auf grund der plasi-tizitätsbedingung für einkristalle*. ZAMM. **9** (1929) pp. 49-58.
- [193] Truesdell C., Toupin R., *The classical field theories*. Berlin. Springer Verlag. (1960).
- [194] Rastellini F., Oller S., Salomon O., Oñate E., *Teoría de mezclas serie-paralelo avanzada para el análisis de materiales compuestos*. AEMAC-03. Zaragoza (2003) pp. 729-741.
- [195] París F., Cañas J., Correa E. *Micromechanical view of failure of the matrix in fibrous composite materials*. Composite Science and Technology. **63,5** (2002) pp. 1041-1052.

- [196] Mayugo J. A., Camanho P. P., Maimí P., Dávila C. G., *A micromechanics-based damage model for  $[\pm\theta, 90_n]_2$  composite laminates*. NASA/TM-2006-214285. (2006).
- [197] Dharani L. R., Wei J., Ji F.S., Zhao J.H., *Saturation of transverse cracking with delamination in polymer cross-ply composite laminates*. International Journal of Damage mechanics. **12** (2003) pp. 89-114.
- [198] Dvorak G. J., Laws N., *Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates II. first ply failure*. Journal of Composite Materials. **21** (1987) pp. 309-329.
- [199] Nairn J. A. *Matrix microcracking in Composites*. Comprehensive Composite Materials **2.12** (2000) pp. 403-432.
- [200] Wang A. S. D., *Fracture mechanics of sublaminar cracks in composite materials*. Composites Technology Review, 6:45 (1984).
- [201] Green B. G., Wisnom M. R., Hallet S. R., *Tensile scaling effects in notched composites*. CompTest (2004).
- [202] Green B. G., Wisnom M. R., Hallet S. R., *An experimental investigation into the tensile strength scaling of notched composites*. Composites-Part A. 2006; (in press).
- [203] Wisnom M.R., *Size effects in the testing of bre-reinforced composites*. Composites Science and Technology. 1999; 59:1937-1957.
- [204] Varna J., Joffe R., Talreja R., *Mixed micromechanics and continuum damage mechanics approach to transverse cracking in  $[S, 90_n]_s$  laminates*. Mechanics of Composite Materials. **37,2** (2001) pp.115-126.
- [205] Joffe R., Krasnikovs A., Varna J., *COD-based simulation of transverse cracking and stiffness reduction in  $[S, 90_n]_s$  laminates*. Composites Science and Technology **61** (2001) pp.637-656.
- [206] Varna J., Joffe R., Talreja R., *A synergistic damage mechanics analysis of transverse cracking in  $[\pm\theta, 90_n]_s$  laminates*. Composites Science and Technology **61** (2001) pp.657-665.

- [207] Vinogradov V., Hashin Z., *Probabilistic energy based model for prediction of transverse cracking in cross-ply laminates*. International Journal of Solids and Structures. **42** (2005) pp. 365-392.
- [208] Hahn, H. T. and Tsai, S. W., *Nonlinear elastic behaviour of unidirectional composite laminate*. Journal of Composite Materials. **7** (1973) pp. 102-110.
- [209] Lubliner J., *Plasticity theory*. Macmillan Publishing, New York. (1990).
- [210] Simo J. C., Hughes T. J. R., *Computational Inelasticity*. Mechanics and Materials, Springer - Verlag. (1997).
- [211] Oliver X., Agelet de Saracibar C., *Mecànica de medis continus per a enginyers*. Edicions UPC. (2003).
- [212] Camanho P. P., Dávila C. G., Pinho S. T., Iannucci, L., Robinson, P., *Prediction of in-situ strengths and matrix cracking in composites under transverse tension and in-plane shear*. Composites- Part A. **37** (2006) pp.165-176.
- [213] Chang F. K., Chen M. H., *The in situ ply shear distributions in graphite/epoxy laminated composites*. Journal of Composite Materials. **21** (1987) pp.708-733.
- [214] Shahid I. S., Chang F. K., *An accumulative damage model for tensile and shear failures of laminated composite plates*. Journal of Composite Materials. **29** (1995) pp.926-981.
- [215] Oller S., *Fractura mecánica. Un enfoque global* Publicaciones CIMNE. (2001).
- [216] Reifsnider K.L., Case S. W., *Damage tolerance and durability of material systems*. Wiley and Sons. NY (2002).
- [217] Wu E.M., Reuter R.C.J., *Crack Extension in Fiberglass Reinforced Plastics and a Critical Examination of the General Fracture Criterion*. University of Illinois, Theor. and Appl. Mech. Report **275** Urbana-Champaign (1965).
- [218] Hahn H.T., Johannesson T., *Fracture of Unidirectional Composites: Theory and Applications*. Mechanics of Composite Materials, G.J. Dvorak ed. AMD, (1983) pp. 135-142.

- [219] ABAQUS 6.5 *User's Manual*. ABAQUS inc., Pawtucket, RI, U.S.A. (2005).
- [220] Oliver J., Cervera M., Oller S., Lubliner J. *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*. Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures. Zell Am See, Austria. **2** (1990) pp.945-958
- [221] Simo J. C., Ju J. W., *Strain and stress-based continuum damage models-I. Formulation*. International Journal of Solids and Structures. **23**(23) (1987) pp. 821-840.
- [222] Simo J. C., Ju J. W., *Strain and stress-based continuum damage models-II. Computational aspects*. International Journal of Solids and Structures. **23**(23) (1987) pp. 841-869.
- [223] Maimí P., Camanho P. P., Mayugo J. A., Dávila C. G., *A thermodynamically consistent damage model for advanced composites*. NASA/TM-2006-214282. (2006).
- [224] Maimí P., Camanho P. P., Mayugo J. A., Dávila C. G., *A Continuum Damage Model for Composite Laminates: Part I - Constitutive Model*. Mechanics of Materials. (2006). (submitted).
- [225] Maimí P., Camanho P. P., Mayugo J. A., Dávila C. G., *A Continuum Damage Model for Composite Laminates: Part II - Computational Implementation and Validation*. Mechanics of Materials. (2006). (submitted).
- [226] Carlsson L. A., Pipes R. B., *Experimental characterization of composite materials*. Prentice-Hall (1987).
- [227] Dvorak G. J., Laws N., Hejazi M., *Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates I. thermoelastic properties of a ply with cracks*. Journal of Composite Materials. **19** (1985) pp. 216-234.
- [228] Laws N., Dvorak G. J., Hejazi M., *Stiffness changes in unidirectional composites caused by crack systems*. Mechanics of Materials. **2** (1983).
- [229] Nuismer R. J., Tan S. C., *Constitutive relations of a cracked composite lamina*. Journal of Composite Materials. **22** (1988) pp. 306-321.

- [230] Tan S. C., Nuismer R. J., *A theory for progressive matrix cracking in composite laminates*. Journal of Composite Materials. **23**(1989) pp. 1029-1047.
- [231] McGee J. D., Nemat-Nasser S., *Dynamic bi-axial testing of woven composites*. Material Science and Engineering **A317** (2001) pp. 135-139.
- [232] Duvaut G., Lions J. L., *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris (1972).
- [233] Waddoups M.E., Eisenmann J.R., Kaminski B.E., *Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials*. Journal of Composite Materials. **5** (1971) pp. 44654.
- [234] Bowie, O.L., *Analysis of an infinite plate containing radial cracks, originating at the boundaries of an internal circular hole*. Journal of Mathematics and Physics. 1956; 35:60-71.
- [235] Tada, H., Paris, P., Irwin, G.R., *The stress analysis of cracks handbook*. The American Society of Mechanical Engineers, New York. (2000).
- [236] Camanho P. P., Maimí P., Dávila C.G., *Prediction of size effect in notched laminates using continuum damage mechanics*. submitted to Composite Science and Technology. (2006).
- [237] Whitney, J.M. and Nuismer, R.J., *Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations*. Journal of Composite Materials. **8** (1974) pp. 253-265.
- [238] Nuismer R.J., Whitney J.M., *Uniaxial Failure of Composite Laminates Containing Stress Concentrations*. Fracture Mechanics of Composites. ASTM STP 593. American Society of Testing and Materials. (1975) pp. 117-142.
- [239] Tan S.C., *Stress concentrations in laminated composites*. Technomic Publishing Company, Inc., (2004).
- [240] Camanho P.P., Lambert M., *A design methodology for mechanically fastened joints in laminated composite materials*. Composites Science and Technology in press. (2006).

- [241] Chang F. K., Scott R. A., Springer G.S., *Strength of mechanically fastened composite joints*. Journal of Composite Materials. **16** (1982) pp. 470–94.
- [242] *Open hole tensile strength of polymer composite laminates*. ASTM D 5766/D 5766M-02a, American Society for Testing and Materials (ASTM), West Conshohocken, PA, U.S.A.





# Apéndices

## A.1. Algoritmo de integración numérica

Para determinar los parámetros de ajuste ( $A_M$ ) de las leyes de daño del modelo definido en el capítulo 6, es necesario integrar numéricamente la siguiente expresión:

$$g_M = \int_1^\infty Y_M \frac{\partial d_M}{\partial r_N} dr_N \quad (\text{A-1})$$

El método de Simpson aproxima la solución mediante polinomios cuadráticos. De forma general puede expresarse:

$$g_M \simeq \frac{h}{3} \left( f_M^0 + \dots + 4f_M^{\text{impar}} + 2f_M^{\text{par}} + \dots + f_M^n \right) \quad (\text{A-2})$$

donde  $h$  es el incremento de cada paso, y  $f_M^i = Y_M^i \frac{\partial d_M^i}{\partial r_N^i}$  se define entre  $r = 1$  y  $r \rightarrow \infty$ .

Teniendo en cuenta que las leyes de daño provocan que las tensiones tiendan a cero, para valores de  $r$  muy grandes la disipación mecánica es prácticamente nula, es necesario determinar el instante para detener la integración. Cuando la tensión es  $K$  veces inferior a la resistencia del material la energía restante se desprecia. El incremento  $h$  puede ser determinado en función del número de pasos  $n$  como:

$$h_i \approx -\frac{1}{nA} \ln \left( \frac{1}{K} \right) \quad (\text{A-3})$$

El algoritmo de integración se implementa siguiendo los pasos del cuadro A.1

```

1- Seleccionar      n y K
2- Inicializar     r=1 , g=0 y CONT=0
3- Determinar el paso h
4- WHILE CONT<n

      DO I=1:3
          f (I) = YM  $\frac{\partial d_M}{\partial r_N}$ 
          r=r+h
      END DO
      r=r-h
      g = g +  $\frac{h}{3}$  (f (1) + 4f (2) + f (3))
      CONT=CONT+1

END WHILE

```

Cuadro A.1: Integración numérica mediante el método de Simpson.

## A.2. Método de la secante para determinar $A_M$

Para determinar el parámetro de ajuste de las leyes de daño, es necesario integrar la respuesta tensión-deformación en términos del parámetro desconocido  $A_M$ . En el apéndice A se presenta método de Simpson para la integración de la respuesta. Para iterar el valor  $A_M$  se utiliza el método de la secante. El problema a solucionar se puede expresar:

$$g_M(A_M) - \frac{G_M}{l^*} = 0 \quad (\text{A-4})$$

Para determinar los parámetros iniciales para empezar la iteración se utilizan las aproximaciones:

$$A_M^1 = \frac{2l^* X_M^2}{2E_M G_M - l^* X_M^2} \quad \text{y} \quad A_M^0 = 0,5 A_M^1 \quad (\text{A-5})$$

Como la función densidad de energía disipada  $g_i(A_i)$  se define sólo por valores positivos de  $A_M$ . La función de minimización se puede escribir:

$$\ln(A_M^{j+1}) = \ln(A_M^j) - \left[ \ln(g_M^j) - \ln\left(\frac{G_M}{l^*}\right) \right] \frac{\ln(A_M^j) - \ln(A_M^{j-1})}{\ln(g_M^j) - \ln(g_M^{j-1})} \quad (\text{A-6})$$

### A.3. TENSOR CONSTITUTIVO TANGENTE DEL MODELO TRANS. ISÓTROP0267

1-	Inicializar	$A_M^1 = \frac{2l^* X_M^2}{2E_M G_M - l^* X_M^2}, A_M^0 = 0,5A_M^1$ y $j=1$
2-	Integrar numéricamente	$g_M^0$ , apéndice (A.2)
	WHILE $ g_M - \frac{G_M}{l^*}  \leq \text{tol.}$	
		Integrar numéricamente $g_M^j$ , (A.2)
		$A_M^{j+1} = \exp \left[ \frac{\ln(A_M^j) - [\ln(g_M^j) - \ln(\frac{G_M}{l^*})]}{\ln(g_M^j) - \ln(g_M^{j-1})} \right]$
		$g_M^{j+1} = g_M^j$
		$A_M^j = A_M^{j-1}$
		$j=j+1$
	END WHILE	

Cuadro A.2: Método de la secante

en el cuadro A.2 se propone el algoritmo de solución.

### A.3. Tensor constitutivo tangente del modelo trans. isótopo

Para determinar el tensor constitutivo tangente es necesario determinar las relaciones:

$$\begin{aligned}
 \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial d_1}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial d_1}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] &= \frac{\partial d_1}{\partial r_L} \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_L}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_L}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_L}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_L}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_L}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial d_2}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial d_2}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] &= \frac{\partial d_2}{\partial r_T} \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial d_3}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial d_3}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] &= \frac{\partial d_3}{\partial r_T} \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] &= \\
 &= (1 - d_{1+}) \frac{\partial d_6^*}{\partial r_T} \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] + \\
 &+ (1 - d_6^*) \frac{\partial d_{1+}}{\partial r_{L+}} \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

La variación de las variables de daño en función de los umbrales de daño resulta:

$$\frac{\partial d_{1+}}{\partial r_{L+}} = \frac{1 + r_{L+} A_{1+}}{r_{L+}^2} \exp [A_{1+} (1 - r_{L+})]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_{1-}}{\partial r_{L-}} &= \frac{1 + r_{L-} A_{1-}}{r_{L-}^2} \exp [A_{1-} (1 - r_{L-})] \\ \frac{\partial d_6^*}{\partial r_T} &= \frac{1 + r_T A_6}{r_T^2} \exp [A_6 (1 - r_T)] \\ \frac{\partial d_{2+}}{\partial r_T} &= \frac{2Y_C r_T}{\sqrt{(Y_C - Y_T)^2 + 4Y_C Y_T r_T^2}} \frac{1 - A_T f(r_T)}{f^2(r_T)} \exp(A_T(1 - f(r_T))) \\ \frac{\partial d_{2-}}{\partial r_T} &= \frac{8A^2(E_2 - H)Y_C r_T}{E_2^2 \left(-B - \sqrt{B^2 - 4A(C - r_T^2)}\right)^2 \sqrt{B^2 - 4A(C - r_T^2)}}\end{aligned}$$

La variación de los umbrales de daño en función de las deformaciones:

$$\begin{aligned}\left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_{L+}}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{E_1}{X_T} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_{L-}}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_{L-}}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_{L-}}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_{L-}}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_{L-}}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{E_1}{X_C} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{12}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{13}} \end{array} \right] &= \\ &= \frac{1}{r_T} \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{Y_C - Y_T}{2Y_T Y_C} + \frac{\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33}}{Y_T Y_C} & \frac{Y_C - Y_T}{2Y_T Y_C} + \frac{\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{22}}{Y_T Y_C} & \frac{\bar{\sigma}_{12}}{S_C^2} & \frac{\bar{\sigma}_{13}}{S_C^2} \end{array} \right] [\mathbf{H}_0]^{-1}\end{aligned}$$

## A.4. Tensor constitutivo tangente

Si se considera el parámetro viscoso, la variación de las leyes de daño resultan:

$$\frac{\partial d_1}{\partial r_L} = \frac{\partial d_1^{n+1}}{\partial r_L^{n+1}} \frac{\partial r_L^{n+1}}{\partial r_L^n} = \frac{\partial d_1^{n+1}}{\partial r_L^{n+1}} \left( \frac{\eta}{\Delta t + \eta} \frac{\partial r_L^n}{\partial r_L^{n-1}} + \frac{\Delta t}{\Delta t + \eta} \right) \quad (\text{B-1})$$

Aplicando la regla de la cadena, la evolución del daño puede expresarse:

$$\begin{aligned}\left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial d_1}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial d_1}{\partial \gamma_{12}} \end{array} \right] &= \frac{\partial d_1}{\partial r_L} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial r_L}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_L}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_L}{\partial \gamma_{12}} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial d_2}{\partial \gamma_{12}} \end{array} \right] &= \frac{\partial d_2}{\partial r_T} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{12}} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial d_6}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial d_6}{\partial \gamma_{12}} \end{array} \right] &= (1 - d_{1+}) \frac{\partial d_6^*}{\partial r_T} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_T}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_T}{\partial \gamma_{12}} \end{array} \right] + \\ &\quad + (1 - d_6^*) \frac{\partial d_{1+}}{\partial r_{L+}} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial r_L}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial r_L}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial r_L}{\partial \gamma_{12}} \end{array} \right]\end{aligned}$$

La derivada de las leyes de daño:

$$\frac{\partial d_N}{\partial r_M} = \frac{1 + r_M A_N}{r_M^2} \exp[A_N (1 - r_M)]$$

$$\frac{\partial d_{1-}}{\partial r_{L-}} = \begin{cases} (1 - A_1^\pm d_{1+}) \frac{\partial d_{1-}^*}{\partial r_{L-}} & \text{si } r_{L+} > r_{L-} \\ (1 - A_1^\pm d_{1+}) \frac{\partial d_{1-}^*}{\partial r_{L-}} + (1 - d_{1-}^*) A_1^\pm \frac{\partial d_{1+}}{\partial r_{L+}} & \text{si } r_{L+} = r_{L-} \end{cases}$$

$$\frac{\partial d_{2+}}{\partial r_{T+}} = 4 \frac{gr_{T+} \exp(A_{2+} (1 - K_{2+})) (g(2 + A_{2+}) - A_{2+} (1 - K_{2+}))}{K_{2+} (g - 1 + K_{2+})}$$

donde:

$$K_{2+} = \sqrt{(1 - g)^2 + 4gr_{T+}^2}$$

Si se utiliza, para la ley lineal-exponencial de daño longitudinal a tracción la derivada  $\partial d_{1+}/\partial r_{L+}$  resulta:

$$\frac{\partial d_{1+}}{\partial r_{L+}} = \frac{K_1 + E_1}{E_1 r_{L+}^2} \quad \text{si } r_{L+} \leq r_{L+}^F$$

$$\frac{\partial d_{1+}}{\partial r_{L+}} = (1 - d_{1+}^F) \frac{r_{L+}^F + r_{L+} A_{1+}}{r_{L+}^2} \exp \left[ A_{1+} \left( 1 - \frac{r_{L+}}{r_{L+}^F} \right) \right] \quad \text{si } r_{L+} > r_{L+}^F$$

La evolución de los umbrales de daño al aumentar las deformaciones:

$$\left[ \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{11}} \quad \frac{\partial r_{L+}}{\partial \varepsilon_{22}} \quad \frac{\partial r_{L+}}{\partial \gamma_{12}} \right] = \frac{E_1}{X_T} \left[ 1 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\left[ \frac{\partial r_{L-}}{\partial \varepsilon_{11}} \quad \frac{\partial r_{L-}}{\partial \varepsilon_{22}} \quad \frac{\partial r_{L-}}{\partial \gamma_{12}} \right] = \begin{cases} \frac{1}{S_L} \left[ 0 \quad \eta^L \quad \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}^m) \right] [\mathbf{R}] [\mathbf{H}_0]^{-1} & \text{si } \frac{\langle |\tilde{\sigma}_{12}^m| + \eta^L \tilde{\sigma}_{22}^m \rangle}{S_L} < \frac{-E_1}{Y_C} \varepsilon_{11} \\ \frac{E_1}{Y_C} \left[ 1 \quad 0 \quad 0 \right] & \text{si } \frac{\langle |\tilde{\sigma}_{12}^m| + \eta^L \tilde{\sigma}_{22}^m \rangle}{S_L} > \frac{-E_1}{Y_C} \varepsilon_{11} \end{cases}$$

$$\left[ \frac{\partial r_{T+}}{\partial \varepsilon_{11}} \quad \frac{\partial r_{T+}}{\partial \varepsilon_{22}} \quad \frac{\partial r_{T+}}{\partial \gamma_{12}} \right] = \begin{cases} \frac{1}{r_{T+}} \left[ 0 \quad \frac{1-g}{2Y_T} + \frac{g\tilde{\sigma}_{22}}{Y_T^2} \quad \frac{\tilde{\sigma}_{12}}{S_L^2} \right] [\mathbf{H}_0]^{-1} & \text{si } \tilde{\sigma}_{22} > 0 \\ \frac{1}{S_L} \left[ 0 \quad \eta^L \quad \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \right] [\mathbf{H}_0]^{-1} & \text{si } \tilde{\sigma}_{22} < 0 \end{cases}$$

$$\left[ \frac{\partial r_{T-}}{\partial \varepsilon_{11}} \quad \frac{\partial r_{T-}}{\partial \varepsilon_{22}} \quad \frac{\partial r_{T-}}{\partial \gamma_{12}} \right] = \begin{cases} \frac{1}{r_{T-}} \left( \frac{\tilde{\sigma}_{\text{eff}}^T}{S_T^2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{\text{eff}}^T}{\partial \varepsilon} + \frac{\tilde{\sigma}_{\text{eff}}^L}{S_L^2} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{\text{eff}}^L}{\partial \varepsilon} \right) & \text{si } \left( \frac{\tilde{\sigma}_{\text{eff}}^T}{S_T} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{\sigma}_{\text{eff}}^L}{S_L} \right)^2 < \frac{E_2}{Y_T} \varepsilon_{22} \\ \frac{E_2}{Y_T} \left[ 0 \quad 1 \quad 0 \right] & \text{si } \left( \frac{\tilde{\sigma}_{\text{eff}}^T}{S_T} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{\sigma}_{\text{eff}}^L}{S_L} \right)^2 > \frac{E_2}{Y_T} \varepsilon_{22} \end{cases}$$

donde:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi^C & \sin^2 \varphi^C & 2 \cos \varphi^C \sin \varphi^C \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \\ \sin^2 \varphi^C & \cos^2 \varphi^C & -2 \cos \varphi^C \sin \varphi^C \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \\ -\cos \varphi^C \sin \varphi^C & \cos \varphi^C \sin \varphi^C & (\cos^2 \varphi^C - \sin^2 \varphi^C) \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\text{eff}}^T}{\partial \varepsilon} = \left[ 0 \quad -\cos \alpha_0 \left( \sin \alpha_0 - \frac{\eta^T \cos \alpha_0}{K} \right) + \frac{\eta^T}{K^3} \left( \frac{\tilde{\sigma}_{12}}{\tan \alpha_0 \tilde{\sigma}_{22}} \right)^2 - \frac{\eta^T \tilde{\sigma}_{12}}{\tilde{\sigma}_{22} K^3 \tan^2 \alpha_0} \right] [\mathbf{H}_0]^{-1}$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\text{eff}}^L}{\partial \varepsilon} = \left[ 0 \quad \frac{\eta^L \cos^2 \alpha_0 |\tilde{\sigma}_{12}|^3}{K^3 \sin^3 \alpha_0 \tilde{\sigma}_{22}^3} \quad \frac{\eta^L \cos \alpha_0}{K \tan \alpha_0} + \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \cos \alpha_0 \left( 1 - \frac{\eta^L \cos \alpha_0 \tilde{\sigma}_{12}^2}{K^3 \sin^3 \alpha_0 \tilde{\sigma}_{22}^2} \right) \right] [\mathbf{H}_0]^{-1}$$

y  $K = \sqrt{1 + \frac{\tilde{\sigma}_{12}^2}{\tilde{\sigma}_{22}^2 \sin^2 \alpha_0}}$