



Universitat de Girona

**CONTRIBUCIÓ AL POSICIONAMENT
DINÀMIC DE ROBOTS MÒBILS PER MITJÀ
D'UN SISTEMA LÀSER**

Josep M. FONT LLAGUNES

ISBN: 978-84-690-7805-1
Dipòsit legal: GI-I076-2007



Universitat de Girona

Escola Politècnica Superior

Departament d'Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial

**Contribució al posicionament
dinàmic de robots mòbils
per mitjà d'un sistema làser**

Memòria presentada per Josep Maria Font Llagunes,
per a optar al grau de Doctor per la Universitat de Girona.

Girona, 2007

Director: Dr. Joaquim Agulló Batlle

JOAQUIM AGULLÓ BATLLE i JOAQUIM DE CIURANA,
Professors del Departament d'Enginyeria Mecànica de la Universitat Politècnica de Catalunya i del Departament d'Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial de la Universitat de Girona respectivament,

CERTIFIQUEM que la memòria que porta per títol “*Contribució al posicionament dinàmic de robots mòbils per mitjà d'un sistema làser*” recull el treball realitzat, sota la nostra direcció i tutoria, per en Josep Maria Font Llagunes, Enginyer Industrial, i que constitueix la seva Tesi per a optar al grau de Doctor per la Universitat de Girona.

I per a que en prengueu coneixement i tingui els efectes que correspongui, signem el present certificat.

Girona, maig de 2007

Director: Dr. Joaquim Agulló Batlle
Dept. d'Enginyeria Mecànica, UPC

Tutor: Dr. Joaquim de Ciurana
Dept. d'Enginyeria Mecànica
i de la Construcció Industrial, UdG

Als meus pares

Agraïments

Des d'aquestes línies vull fer explícit el meu agraïment a totes les persones que m'han ajudat i m'han recolzat durant la realització de la tesi. En especial:

- Al director, Dr. Joaquim Agulló Batlle, per la confiança que sempre m'ha mostrat i per fer possible aquest treball amb el seu suport constant. Els seus suggeriments i totes les hores dedicades han estat fonamentals.
- Als companys del Departament d'Enginyeria Mecànica de la UPC pel seu recolzament i pels bons moments.
- Als companys del Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial de la UPC pel seu assessorament i ajut en la realització dels experiments que han servit per a validar la tesi.
- Als companys del Departament d'Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial de la UdG per la gestió acadèmica de la tesi.
- Als revisors de la tesi pels seus suggeriments i comentaris.

També expresso el meu agraïment al Centre de Referència de R+D en Tècniques Avançades de Producció (CeRTAP) de la Generalitat de Catalunya perquè el tema de la tesi es deriva de projectes promoguts per aquest centre, i perquè en la fase experimental del treball s'han utilitzat elements –com el robot mòbil SPHERIK-3x3– desenvolupats en el seu marc d'activitat.

Finalment, també vull agrair el suport d'aquells que sempre han estat al meu costat: La meva família, els amics i la Maite.

Índex

Resum	xiii
Abstract	xvii
Resumen	xxi
Nomenclatura.....	xxv
1 Introducció.....	1
1.1 Introducció i justificació de la tesi.....	1
1.2 El posicionament de robots mòbils.....	3
1.3 Objectius i abast de la tesi	5
1.4 Contingut de la tesi i publicacions associades.....	7
2 Estat de l'art del posicionament de robots mòbils.....	11
2.1 Posicionament per filoguiatge	12
2.2 Mètodes de posicionament relatiu	12
2.2.1 Hodometria	13
2.2.2 Navegació inercial	15
2.2.3 Resum	15
2.3 Mètodes de posicionament absolut.....	16
2.3.1 Posicionament mitjançant marques artificials	17
2.3.2 Posicionament per reconeixement de l'entorn.....	27
2.3.3 SLAM: <i>Simultaneous Localization And Mapping</i>	38
3 Model cinemàtic dels robots considerats. Posicionament hodomètric.....	41
3.1 Cinemàtica diferencial.....	41
3.2 Cinemàtica de tricicle	43
3.3 Cinemàtica omnidireccional amb rodes de lliscament direccional	45

4	Posicionament de robots mòbils per triangulació angular	53
4.1	Triangulació basada en intersecció d'arcs capaços	56
4.1.1	Determinació analítica del posicionament	56
4.1.2	Propagació de l'error en les mesures angulars en el posicionament estàtic del robot. Zona d'incertesa de posició	62
4.1.3	Propagació de l'error en les mesures angulars en el posicionament estàtic del robot. Incertesa en l'orientació.....	67
4.1.4	Estudi estadístic del posicionament dinàmic considerant errors gaussians en l'estat angular	69
4.1.5	Conclusions	87
4.2	Triangulació per intersecció de rectes	88
4.2.1	Mètode geomètric per a la determinació de l'orientació utilitzant la intersecció de rectes	89
4.2.2	Propagació de l'error en les mesures angulars en el posicionament	97
4.2.3	Conclusions	101
5	Posicionament dinàmic de robots mòbils per mitjà d'un sistema làser ...	103
5.1	El filtre de Kalman	105
5.1.1	Filtre de Kalman lineal.....	106
5.1.2	Filtre de Kalman estès (EKF, <i>Extended Kalman Filter</i>)	110
5.2	Estimació dinàmica del posicionament per mitjà d'un EKF	112
5.3	Estimació dels angles relatius associats als reflectors per mitjà d'un EKF.....	117
5.3.1	Hodometria angular	118
5.3.2	Descripció de l'algorisme.....	119
5.3.3	Formulació del mètode per a la cinemàtica diferencial.....	123
5.3.4	Formulació del mètode per a la cinemàtica de tricicle.....	125
5.3.5	Formulació del mètode per a la cinemàtica omnidireccional amb rodes de corrons esfèrics	126
5.3.6	Validesa de l'aproximació lineal de l'equació de transició d'estat del EKF angular	127
5.4	Integració de les mesures angulars en l'etapa d'actualització del EKF. Comparació dels dos mètodes	131
6	Simulacions informàtiques	137
6.1	Descripció del procés de simulació	137
6.1.1	Primera etapa: Emulació de la cinemàtica del robot i del sistema de posicionament.....	138
6.1.2	Segona etapa: Simulació estadística dels mètodes dinàmics d'estimació del posicionament	142
6.1.3	Càlcul dels errors de posicionament.....	145
6.2	Resultats de les simulacions	147
6.2.1	Trajectòries simulades i velocitats generalitzades	147
6.2.2	Inicialització dels algorismes	150
6.2.3	Resultats	151
6.3	Valoració dels resultats obtinguts	160

7 Validació experimental.....	163
7.1 Descripció del muntatge d'experimentació	163
7.1.1 Robot mòbil SPHERIK-3x3	164
7.1.2 Sistema de posicionament làser.....	166
7.1.3 Sistema metrològic de validació del posicionament dinàmic.....	167
7.1.4 Sistema de control i adquisició de dades	172
7.2 Formulació dels algorismes d'estimació dinàmica basats en el EKF per al muntatge real	177
7.2.1 Estimació dinàmica del posicionament: EKF posicional	179
7.2.2 Estimació dels angles relatius associats als reflectors: EKF angular ...	180
7.2.3 Modelització de l'error en les mesures hodomètriques de velocitat motoritzada	182
7.3 Resultats dels experiments.....	184
7.3.1 Entorn d'experimentació i posició dels reflectors	184
7.3.2 Trajectòries realitzades i velocitats generalitzades.....	186
7.3.3 Inicialització dels algorismes	190
7.3.4 Paràmetres dels algorismes.....	191
7.3.5 Resultats	192
7.4 Valoració dels resultats obtinguts.....	197
8 Conclusions i extensions	199
8.1 Conclusions	199
8.2 Extensions.....	203
Annex A: Derivades de la posició i l'orientació respecte a l'estat angular ...	207
Annex B: Estimació dinàmica del posicionament per mitjà d'un EKF. Cinemàtica diferencial i de tricicle	211
Annex C: Sistema de posicionament làser	215
Recerca bibliogràfica.....	223

Resum

Aquesta tesi tracta el problema del *posicionament dinàmic* de robots mòbils quan en el decurs del seu moviment es realitzen mesures angulars de l'orientació, relativa al robot, de la recta entre un dels seus punts i punts de posició coneguda de l'entorn de treball. El posicionament dinàmic d'un robot mòbil té com a objectiu el càlcul, al llarg del temps i mentre aquest està en moviment, de la posició d'un punt del robot i de l'orientació d'aquest en l'entorn de treball. Es considera que les mesures angulars –relatives al robot– són fetes per un *sistema de posicionament làser*. Aquest sistema està format per un capçal làser giratori –d'estator fix al robot– que mesura angles, i un conjunt de reflectors catadiòptrics situats sobre les parets de l'entorn de treball.

El capçal emet un feix làser que escombra horitzontalment l'entorn i que es reflecteix en la mateixa direcció quan incideix sobre un reflector. El raig reflectit és detectat per un sensor òptic, i l'angle d'aquest –relatiu al robot– és mesurat per un *encoder* d'alta resolució. A partir d'un mínim de tres mesures angulars i de la posició dels reflectors corresponents és possible calcular la posició i l'orientació del robot utilitzant els mètodes geomètrics de triangulació, sempre i quan les mesures corresponguin a la mateixa configuració del robot.

La condició que les mesures corresponguin a la mateixa configuració es compleix quan el robot es troba en repòs (*posicionament estàtic*). No obstant, quan el robot es mou les mesures corresponen a configuracions diferents del vehicle, perquè aquestes es realitzen en instants de temps diferents. Això planteja el que es coneix com a “problema del *posicionament dinàmic*”. En aquestes condicions, els mètodes geomètrics de triangulació no es poden utilitzar de forma consistent directament a partir de les mesures que realitza el sensor.

La contribució principal de la tesi és el desenvolupament d'un algorisme dinàmic basat en un filtre de Kalman estès (EKF, *Extended Kalman Filter*) que estima a cada instant de temps l'estat format pels angles associats als reflectors emprats, encara que no hi hagi mesura directa del sensor. D'aquesta manera s'obté una simulació de l'evolució de cada angle entre mesures directes del sensor. L'equació que regeix l'evolució angular –que és l'equació de transició d'estat del EKF– té com a entrades les mesures hodomètriques dels girs de les rodes del robot, i depèn de la cinemàtica particular del robot. En aquesta tesi es consideren tres cinemàtiques molt utilitzades en robòtica mòbil: la cinemàtica diferencial, la cinemàtica de tricicle, i la cinemàtica omnidireccional amb rodes de lliscament direccional.

Mitjançant la utilització del EKF d'estat angular que es presenta, els angles es coneixen per a la mateixa configuració del robot en tot instant, i per tant es garanteix l'ús consistent de les equacions geomètriques de triangulació per al càlcul de la posició i l'orientació del robot. El mètode de posicionament dinàmic que es proposa té una primera etapa d'*estimació dinàmica angular*, i una segona etapa de *càlcul geomètric del posicionament* per triangulació. Com es fa palès al llarg de la tesi, el fet que el EKF angular tingui l'equació de mesura lineal –perquè les components del vector d'estat són directament mesurades pel sensor– millora la convergència del filtre comparat amb altres versions del EKF que tenen una equació de mesura no lineal.

Pel que fa al posicionament per triangulació, si es disposa de tres mesures angulars –relatives al robot– corresponents a tres punts de posició coneguda de l'entorn, a la tesi es consideren dos mètodes: la triangulació basada en intersecció d'*arcs capaços*, i la triangulació per intersecció de *rectes*.

En la triangulació basada en arcs capaços es determina en primer lloc la posició del vehicle per mitjà de la intersecció de les circumferències que defineixen els arcs capaços, i un cop coneguda la posició es pot calcular l'orientació. En aquest treball, es formulen les equacions del mètode i s'estudia la propagació de l'error en el càlcul del posicionament si les mesures angulars són imprecises. Es considera, en primera aproximació, la propagació d'un error angular acotat. I posteriorment, com que el EKF d'estat angular que es presenta determina a cada instant l'estimació dels angles de cada reflector i de l'error considerat *gaussià*, es realitza un estudi estadístic del posicionament considerant errors gaussians en els angles. Per a aquest últim cas, es justifica –per mitjà de la generació de mapes d'error de biaix– l'ús de l'aproximació de primer ordre de les equacions de triangulació per a determinar la millor estimació del posicionament i per al càlcul de la propagació de l'error.

Per a aplicar la triangulació per intersecció de rectes, cal disposar d'una estimació de l'orientació del robot prèviament al càlcul de la seva posició. A la tesi es millora un mètode geomètric present a la literatura en el que es determina l'orientació del robot –partint d'una aproximació d'aquesta– per mitjà d'un mètode iteratiu que minimitza el perímetre d'un triangle. La contribució de la tesi en aquest problema consisteix a demostrar que hi ha una relació analítica entre la geometria d'aquest triangle i l'orientació del robot. De manera que l'orientació es pot calcular directament sense recórrer al mètode iteratiu. Un cop determinada l'orientació es pot calcular la posició intersecant dues de les tres rectes disponibles.

Finalment, a la tesi es realitzen simulacions informàtiques i experiments amb un prototip real per a validar la precisió del mètode dinàmic d'estimació del posicionament desenvolupat. Les simulacions per ordinador es realitzen amb el software matemàtic MATLAB v7.1. Es simula el funcionament del mètode en set trajectòries diferents, i es realitzen 500 simulacions de cada trajectòria amb errors diferents en les mesures –hodomètriques i del sensor làser– per a obtenir la mitjana i la desviació estàndard dels errors de posicionament. Els resultats es comparen amb els obtinguts per mitjà del EKF d'estat posicional –mètode àmpliament utilitzat– que estima directament el posicionament a partir de cadascuna de les mesures angulars. S'observa que el mètode desenvolupat condueix a millors resultats perquè l'error inicial de posicionament disminueix de forma més ràpida.

En la validació experimental s'utilitza un robot mòbil ideat i dissenyat al Departament d'Enginyeria Mecànica de la UPC: el robot mòbil SPHERIK-3x3, que té una cinemàtica omnidireccional (de 3 graus de llibertat) i utilitza tres rodes de lliscament direccional de corrons esfèrics amb un disseny que garanteix la invariància del Jacobià. El robot incorpora els sensors hodomètrics i el sensor làser, i s'utilitza un sistema metrollògic (basat en dos encoders i un potenciòmetre lineal) per a mesurar de forma precisa el posicionament del robot en el decurs del seu moviment. El posicionament determinat per mitjà del mètode dinàmic desenvolupat es compara amb el que mesura el sistema metrollògic per a determinar els errors de posicionament. Els errors del mètode també es comparen amb els que s'obtenen si s'utilitza el EKF clàssic d'estat posicional.

El treball que es presenta en aquesta tesi proposa una nova tècnica per al posicionament dinàmic de robots mòbils, i es relaciona amb diferents àrees de la robòtica, com són l'enginyeria mecànica, l'automàtica i la informàtica industrial. Les contribucions principals són la presentació d'un mètode dinàmic d'estimació angular que garanteix l'ús consistent de les equacions geomètriques de triangulació; la millora del mètode de triangulació basat en intersecció de rectes present a la bibliografia; i el disseny i posada a punt d'un sistema metrollògic experimental per a determinar la precisió de diferents mètodes dinàmics de posicionament per a robots mòbils.

Abstract

This thesis focuses on mobile robot *dynamic positioning methods* based on the angular measurements of the orientation –relative to the robot frame– of the straight lines between one of its points and known artificial landmarks, made during the robot motion. The goal of mobile robot dynamic positioning is the calculation of the robot pose (position and orientation) in the workspace along the time when the robot moves. In this work, the angular measurements are assumed to be done by means of a *laser positioning system*. This system consists of a rotating laser scanner –whose stator is attached to the robot– that measures angles, and a group of catadioptric landmarks placed on the workspace.

The scanner emits a rotating laser beam that horizontally sweeps the environment and reflects back in the same direction when detects a landmark. Then the angle of the reflected beam –relative to the vehicle frame– is measured by means of a high resolution encoder. From a minimum of three angular measurements and the position of the corresponding landmarks it is possible to determine the robot position and orientation by using the geometric triangulation methods, provided that the measurements correspond to the same robot configuration.

This requirement is obviously fulfilled when the robot is stopped (*static positioning*). However, when the robot moves the measurements correspond to different vehicle configurations, because each of the landmarks is detected at a different time. This fact leads to the problem known as the “*dynamic positioning problem*”. Under this condition, the triangulation methods cannot be consistently applied directly from the laser scanner measurements.

The main contribution of this thesis is the development of a dynamic positioning method based on an extended Kalman filter (EKF) that estimates at any time the state-vector composed of the landmark relative angles. By using this algorithm, a simulation of the evolution of each landmark angle between actual sensor measurements is obtained. The angular evolution equation –which is the state transition equation of the EKF– has the robot odometric measurements as inputs, and therefore depends upon the robot specific kinematics. In the thesis three widely used mobile robot kinematics are considered: differential kinematics, tricycle kinematics, and omnidirectional kinematics with directionally sliding wheels.

By means of the presented angular-state EKF, the angles are known at any time for the corresponding robot configuration, and therefore the triangulation geometric equations can be consistently applied to calculate the robot position and orientation. The proposed dynamic positioning method has two steps: the first one determines the *angular dynamic estimation*, while the second one –the *positioning geometric calculation*– determines the robot pose by means of triangulation. As it is mentioned along the thesis, the developed angular-state EKF has a linear measurement equation –because the components of the state vector are directly measured by the sensor– and this fact improves the convergence of the filter compared with other EKF versions with a non-linear measurement model.

Concerning the triangulation positioning by means of three angular measurements –relative to the robot frame– corresponding to three landmarks whose position is known, two methods are considered in the thesis: triangulation based on *circumferences* intersection, and triangulation based on *straight lines* intersection.

In the first method, the robot position is determined first by intersecting two circumferences, and once the position is known the robot orientation can be easily determined. In this work, the equations of the method are formulated and the angular error propagation in the positioning determination is studied. As a first approximation, the error propagation is studied considering bounded angular errors. And then, as the presented angular-state EKF assumes the errors to be *gaussian*, a statistical study of the positioning considering gaussian angular errors is made. The use of the first order approximation of triangulation equations to determine the best positioning estimation and to calculate the error propagation is validated by means of second-order *bias error* maps.

In order to use straight lines intersection as a triangulation positioning method, an estimation of the robot orientation angle is required previous to the robot position determination. Concerning the orientation, this thesis improves a geometrical method –published in the literature– that determines the robot orientation by means of an iterative algorithm that minimizes the perimeter of a triangle. It has been found that a direct analytical relationship exists between the geometry of this triangle and the robot orientation. Therefore, the orientation can be directly calculated from the triangle geometry, no iterations are needed. Once the orientation has been determined, the robot position can be calculated by intersecting two of the three available straight lines.

Finally, computer simulations and experiments with a real robot prototype have been carried out in order to validate the accuracy of the developed dynamic positioning estimator. The simulations have been made using the mathematical software MATLAB v7.1. The performance of the method is checked defining 7 different trajectories, and 500 simulations of each trajectory with different –odometric and laser– measurement errors are run in order to obtain the mean and the standard deviation of the positioning errors. The results are compared with the ones obtained by means of the widely used pose-state EKF, which directly estimates the robot pose from each angular measurement. The results show that the developed method performs better, because the initial error decreases faster.

In the experiments, a mobile robot developed in the Department of Mechanical Engineering of the Technical University of Catalonia (UPC) has been used: the robot SPHERIK-3x3, which has an omnidirectional kinematics (with 3 degrees of freedom) and is based on three directionally sliding wheels –composed of two spherical rollers– with a design that guarantees the invariance of the Jacobian. The robot is equipped with the

odometric sensors and the laser scanner. A metrological system (based on two encoders and a linear potentiometer) has been implemented and used to accurately measure the robot pose during the robot motion. The positioning determined by means of the developed method is compared with the one measured by the metrological sensors in order to determine the positioning errors. These errors are also compared with the ones obtained using the widespread pose-state EKF.

The work presented in this thesis proposes a novel mobile robot positioning technique, and involves several areas related to robotics: mechanical engineering, automatic theory and industrial informatics. The main contributions have been the development of an angular dynamic estimation method that guarantees the consistent use of the triangulation equations while the robot moves; the enhancement of the triangulation method based on straight lines intersection; and the design and set-up of a metrological experimental rig to measure the accuracy of different dynamic positioning methods for mobile robots.

Resumen

Esta tesis aborda el problema del *posicionamiento dinámico* de robots móviles cuando en el curso de su movimiento se realizan mediciones angulares de la orientación, relativa al robot, de la recta entre uno de sus puntos y puntos de posición conocida del entorno. El posicionamiento dinámico de un robot móvil tiene por objetivo el cálculo, en cada instante y mientras éste se encuentra en movimiento, de la posición de un punto del robot y de su orientación en el entorno de trabajo. Se considera que las mediciones angulares –relativas al robot– se realizan mediante un *sistema de posicionamiento láser*. Este sistema está formado por un cabezal láser rotativo –con su estator fijo al robot– que mide ángulos, y un conjunto de reflectores catadióptricos instalados sobre las paredes del entorno de trabajo.

El cabezal emite un haz láser que barre horizontalmente el entorno y que se refleja en la misma dirección cuando incide sobre un reflector. El haz reflejado se detecta mediante un sensor óptico, y un *encoder* de alta resolución mide su ángulo relativo al robot. A partir de un mínimo de tres mediciones angulares y de la posición de los reflectores asociados es posible calcular la posición y la orientación del robot utilizando los métodos geométricos de triangulación, siempre que las mediciones correspondan a la misma configuración del robot.

La condición anterior se cumple cuando el robot se encuentra en reposo (*posicionamiento estático*). Sin embargo, cuando el robot se mueve las mediciones corresponden a configuraciones distintas del vehículo, porque éstas se realizan en instantes de tiempo diferentes. Esto plantea lo que se conoce como “problema del *posicionamiento dinámico*”. En estas condiciones, los métodos geométricos de triangulación no se pueden aplicar de forma consistente directamente a partir de las mediciones que realiza el sensor.

La contribución principal de la tesis es el desarrollo de un algoritmo dinámico basado en un filtro de Kalman extendido (EKF, *Extended Kalman Filter*) que estima en cada instante el estado formado por los ángulos asociados a los reflectores empleados, aunque no haya medición directa del sensor. De este modo se obtiene una simulación de la evolución de cada ángulo entre mediciones directas del sensor. La ecuación que rige la evolución angular –que es la ecuación de transición de estado del EKF– tiene como entradas las medidas hodométricas de los giros de las ruedas del robot, y depende de la cinemática particular del robot. En esta tesis se consideran tres cinemáticas muy utilizadas en robótica móvil: La cinemática diferencial, la cinemática de triciclo, y la cinemática omnidireccional con ruedas de deslizamiento direccional.

Mediante la utilización del EKF de estado angular que se presenta, los ángulos se conocen para la misma configuración del robot en cualquier instante, y en consecuencia se garantiza el uso consistente de las ecuaciones geométricas de triangulación para el cálculo de la posición y la orientación del robot. El método de posicionamiento dinámico que se propone tiene una primera etapa de *estimación dinámica angular*, y una segunda etapa de *cálculo geométrico del posicionamiento* por triangulación. Como se pone de manifiesto a lo largo de la tesis, el hecho que el EKF angular tenga la ecuación de medida lineal –porqué las componentes del vector de estado son directamente medidas por el sensor– mejora la convergencia del filtro comparado con otras versiones del EKF que tienen una ecuación de medida no lineal.

En referencia al posicionamiento por triangulación, si se dispone de tres mediciones angulares –relativas al robot– correspondientes a tres puntos de posición conocida del entorno, en la tesis se consideran dos métodos: la triangulación basada en intersección de *arcos capaces*, y la triangulación por intersección de *rectas*.

En la triangulación basada en arcos capaces se determina en primer lugar la posición del vehículo mediante la intersección de las circunferencias que definen los arcos capaces, y una vez se conoce la posición se puede calcular la orientación. En este trabajo, se formulan las ecuaciones del método y se estudia la propagación del error en el cálculo del posicionamiento si las medidas angulares son imprecisas. Se considera, en primera aproximación, la propagación de un error angular acotado. Y posteriormente, como el EKF de estado angular que se presenta determina en cada instante la estimación de los ángulos de cada reflector y del error considerado *gaussiano*, se realiza un estudio estadístico del posicionamiento considerando errores normales en los ángulos. Para este último caso, se justifica –mediante la generación de mapas de error de sesgo– el uso de la aproximación de primer orden de las ecuaciones de triangulación para determinar la estimación óptima del posicionamiento y para el cálculo de la propagación del error.

Para aplicar la triangulación por intersección de rectas, se necesita una estimación de la orientación del robot previamente al cálculo de su posición. En la tesis se mejora un método geométrico presente en la literatura en el que se determina la orientación del robot –partiendo de una aproximación de la misma– mediante un método iterativo que minimiza el perímetro de un triángulo. La contribución de la tesis en este problema consiste en demostrar que existe una relación analítica entre la geometría de este triángulo y la orientación del robot. De modo que la orientación se puede calcular directamente sin necesidad de recorrer al método iterativo, una vez determinada la orientación se puede calcular la posición intersecando dos de las tres rectas disponibles.

Finalmente, en la tesis se realizan simulaciones informáticas y experimentos con un prototipo real para validar la precisión del método dinámico de estimación del posicionamiento que se ha desarrollado. Las simulaciones por ordenador se realizan con el software matemático MATLAB v7.1. Se simula el funcionamiento del método en siete trayectorias distintas, y se realizan 500 simulaciones de cada trayectoria con errores diferentes en las mediciones –hodométricas y del sensor láser– para obtener la media y la desviación tipo de los errores de posicionamiento. Los resultados se comparan con los obtenidos mediante el EKF de estado posicional –método ampliamente utilizado– que estima directamente el posicionamiento a partir de cada una de las mediciones angulares. Se observa que el método desarrollado conduce a mejores resultados porqué el error inicial de posicionamiento disminuye de forma más rápida.

En la validación experimental se utiliza un robot móvil ideado y diseñado en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la UPC: el robot móvil SPHERIK-3x3, que tiene una cinemática omnidireccional (de 3 grados de libertad) y utiliza tres ruedas de deslizamiento direccional de rodillos esféricos con un diseño que garantiza la invariancia del Jacobiano. El robot incorpora los sensores odométricos y el sensor láser, y se utiliza un sistema metrológico (formado por dos encoders y un potenciómetro lineal) para medir de forma precisa el posicionamiento del robot en el curso de su movimiento. El posicionamiento determinado por el método dinámico desarrollado se compara con el que mide el sistema metrológico para determinar los errores de posicionamiento. Los errores del método también se comparan con los que se obtienen si se utiliza el EKF clásico de estado posicional.

El trabajo que se presenta en esta tesis propone una nueva técnica para el posicionamiento dinámico de robots móviles, y abarca diferentes áreas relacionadas con la robótica como son la ingeniería mecánica, la automática y la informática industrial. Las contribuciones principales son la presentación de un método dinámico de estimación angular que garantiza el uso consistente de las ecuaciones geométricas de triangulación; la mejora del método de triangulación basado en intersección de rectas presente en la bibliografía; y el diseño y puesta a punto de un sistema metrológico experimental para determinar la precisión de diferentes métodos dinámicos de posicionamiento para robots móviles.

Nomenclatura

Capítol 3

Model cinemàtic dels robots considerats. Posicionament hodomètric

J_ω	matriu jacobiana que relaciona les velocitats angulars motrius de les rodes amb les velocitats generalitzades del robot [cinemàtica omnidireccional]
L, L_P, p, r	paràmetres geomètrics d'un robot amb cinemàtica de tricicle
L, r, s, α	paràmetres geomètrics del robot mòbil SPHERIK-3x3
r, s	paràmetres geomètrics d'un robot amb cinemàtica diferencial
t	variable temporal
v, ω, φ	velocitat del centre de la roda motriu-directriu, velocitat angular d'aquesta respecte al seu eix, i angle d'orientació de la roda relatiu al xassís [cinemàtica de tricicle]
v_1, v_2	velocitats del centre de les rodes ($v_i \equiv r\omega_i; i = 1, 2$) [cinemàtica diferencial]
v_1, v_2, v_3	velocitats motoritzades de les rodes de corrons esfèrics ($v_i \equiv r\omega_i; i = 1, 2, 3$) [cinemàtica omnidireccional amb rodes de corrons esfèrics]
$v_L, v_T, \dot{\psi}$	components longitudinal i transversal de la velocitat de P, i velocitat angular de canvi d'orientació del robot. S'anomenen també <i>velocitats generalitzades</i> del robot
$\{x_0, y_0, \psi_0\}^T$	posicionament inicial del robot mòbil
$\{x_k, y_k, \psi_k\}^T$	posicionament del robot mòbil a l'instant t_k
ω_1, ω_2	velocitats angulars de les rodes respecte al seu eix [cinemàtica diferencial]
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	velocitats angulars motrius de les rodes [cinemàtica omnidireccional amb rodes de corrons esfèrics]

Capítol 4

Posicionament de robots mòbils per triangulació angular

A_C, A_O	àrea del triangle de centres, i àrea del triangle del triangle d'error
A_E	àrea de l'el·lipse d'incertesa
$\tilde{\mathbf{a}}$	$\equiv E[\mathbf{a}]$, valor esperat d'una variable aleatòria genèrica \mathbf{a}
C	matriu de covariància de l'error en el càlcul de la posició \mathbf{p}
C_{ij}	centre de l'arc capaç del segment R_iR_j d'angle α_{ij} ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$)
$C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$	centres dels arcs capaços definits pels angles α , β i γ
$d_\alpha, d_\beta, d_\gamma$	meitat de la longitud dels segments R_1R_2 , R_2R_3 , i R_1R_3 respectivament
$f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$	equacions que compleixen els punts dels arcs capaços definits per α , β i γ
I	matriu identitat
K	paràmetre associat a la probabilitat que una mesura de posició \mathbf{p} estigui continguda a l'el·lipse d'incertesa
O_{ij}	vèrtex del triangle d'error determinat per intersecció de les rectes per R_i i R_j ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$)
P	punt del robot on es troba el centre del capçal làser
P_x	matriu de covariància de l'error en l'estimació de l'estat angular \mathbf{x}
\mathbf{p}	$\equiv \{x, y\}^T$, posició del punt P del robot en el SRT
\mathbf{p}_{ij}	posició del punt P del robot en el SRT determinada per intersecció de les rectes que passen per R_i i R_j ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$)
\mathbf{P}	$\equiv \{X, Y\}^T$, posició del punt P del robot en el SRF
q	distància de Mahalanobis
r	relació de semblança entre el triangle d'error i el triangle de centres
$\vec{r}(Q)$	$\equiv \{x_Q, y_Q\}^T$, vector de posició d'un punt genèric Q en el SRT
$\vec{R}(Q)$	$\equiv \{X_Q, Y_Q\}^T$, vector de posició d'un punt genèric Q en el SRF
R_1, R_2, R_3	triplet de reflectors utilitzat en el posicionament per triangulació. R_i designa l'extrem de posició coneguda del reflector corresponent
$R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$	radis dels arcs capaços definits per α , β i γ
SRF	Sistema de Referència Fix, d'origen O i eixos $\{X, Y\}$
SRT	Sistema de Referència Triplet, d'origen R_2 i eixos $\{x, y\}$
S_φ	matriu de canvi de base, del SRT al SRF
$\{x_i, y_i\}^T$	vector de posició del reflector R_i en el SRT ($i = 1, 2, 3$)

$\{X_i, Y_i\}^T$	vector de posició del reflector R_i en el SRF ($i=1,2,3$)
\mathbf{x}	$\equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$, vector d'estat angular
\mathbf{Z}_P	zona d'incertesa per a la posició de P
$\mathbf{Z}_\alpha, \mathbf{Z}_\beta, \mathbf{Z}_\gamma$	zones d'incertesa per a la posició de P associada als angles α , β i γ
α	$\equiv \alpha_{12}$, angle entre els segments PR_1 i PR_2
α_{ij}	$\equiv \theta_j - \theta_i$, angle entre els segments PR_i i PR_j ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$)
β	$\equiv \alpha_{23}$, angle entre els segments PR_2 i PR_3
γ	$\equiv \alpha_{13}$, angle entre els segments PR_1 i PR_3
$\delta \mathbf{a}$	error en la mesura o en l'estimació d'una variable aleatòria genèrica \mathbf{a}
$\Delta \theta_m$	error màxim en les mesures angulars $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
$\Delta^2 \mathbf{p}$	terme quadràtic del desenvolupament de Taylor de la funció $\mathbf{p}(\mathbf{x})$
$\Delta^2 \psi$	terme quadràtic del desenvolupament de Taylor de la funció $\psi(\mathbf{x})$
ε	paràmetre d'error, distància màxima entre la posició real de P i un punt de \mathbf{Z}_P
η	paràmetre utilitzat en el càlcul de la posició per triangulació
θ_i	angle, relatiu a l'eix longitudinal del robot, de la recta entre P i R_i ($i=1,2,3$)
λ_1, λ_2	valors propis de la matriu de covariància C
\vec{v}_i	versor de la recta que passa per R_i d'angle $\theta_i + \psi$ respecte a l'eix x del SRT ($i=1,2,3$)
ρ_C, ρ_O	longitud de costats homòlegs del triangle de centres i del triangle d'error
$\sigma_{\theta_i}^2$	variància de l'error en l'estimació dinàmica de la variable angular θ_i ($i=1,2,3$)
$\sigma_{\theta_m}^2$	variància de l'error en una mesura angular qualsevol del sensor làser
σ_ψ^2	variància de l'error en el càlcul de l'orientació ψ
φ	angle d'orientació dels eixos del SRT respecte als del SRF
φ_w	angle del semieix llarg de l'el·lipse d'incertesa respecte a l'eix x del SRT
ϕ_i	angle de la recta entre P i R_i respecte a l'eix x del SRT ($i=1,2,3$)
ψ	angle d'orientació de l'eix longitudinal del robot respecte a l'eix x del SRT
ψ_e, ε_ψ	aproximació de l'orientació del robot i error en l'aproximació de l'orientació [mètode geomètric d'intersecció de rectes]
Ψ	angle d'orientació de l'eix longitudinal del robot respecte a l'eix X del SRF
$\nabla \mathbf{p}_x$	matriu jacobiana de les derivades del vector de posició \mathbf{p} respecte a l'estat angular \mathbf{x}
$\nabla \psi_x$	matriu jacobiana de les derivades de l'orientació ψ respecte a l'estat angular \mathbf{x}

Capítol 5

Posicionament dinàmic de robots mòbils per mitjà d'un sistema làser

A_k, B_k	matrius de l'equació de transició d'estat del filtre de Kalman lineal
$\mathbf{a}_{k \bar{k}}$	estimació de la variable genèrica \mathbf{a} a l'instant t_k amb mesures fins a l'instant $t_{\bar{k}}$
$\bar{\mathbf{a}}_k$	$\equiv \mathbf{a}_{k k-1}$, estimació <i>a priori</i> (predicció) de la variable genèrica \mathbf{a} a l'instant t_k
$\tilde{\mathbf{a}}_k$	$\equiv \mathbf{a}_{k k}$, estimació <i>a posteriori</i> (actualització) de la variable genèrica \mathbf{a} a l'instant t_k
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i> , o filtre de Kalman estès
\mathbf{e}_k	error en l'estimació del vector d'estat
f	funció de transició d'estat del EKF
h	funció de mesura o d'observació del EKF
H_k	matriu de l'equació de mesura del filtre de Kalman lineal
k	subíndex que designa l'instant de temps $t_k \equiv k\Delta t$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
k_d	constant de proporcionalitat entre la variància $\sigma_{d_i,k}^2$ i $ \Delta d_{i,k} $
k_φ	constant de proporcionalitat entre la variància $\sigma_{\varphi,k}^2$ i $ \Delta d_{i,k} $
K_k	matriu de guany de Kalman
$P_{x,k}$	matriu de covariància de l'error en l'estimació de l'estat angular \mathbf{x}_k
$P_{y,k}$	matriu de covariància de l'error en l'estimació del posicionament \mathbf{y}_k
\mathbf{p}_k	$\equiv \{x_k, y_k\}^T$, posició del punt P del robot a l'instant t_k en el SRT
Q_k	matriu de covariància de l'error en el vector d'entrada
R_k	matriu de covariància de l'error en les mesures externes o observacions
S_k	matriu de covariància de l'error en el procés d'innovació
t	variable temporal
\mathbf{u}_k	vector d'entrada
v_k, φ_k	variables del vector d'entrada en la cinemàtica de tricicle
$v_{1,k}, v_{2,k}$	variables del vector d'entrada en la cinemàtica diferencial
$v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}$	variables del vector d'entrada en la cinemàtica omnidireccional amb rodes de corrons esfèrics
$v_{L,k}, v_{T,k}, \dot{\psi}_k$	velocitats generalitzades del robot
\mathbf{v}_k	vector d'error en les mesures externes o observacions
\mathbf{w}_k	vector d'error en l'equació de transició d'estat del filtre de Kalman

\mathbf{x}_k	$\equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$, vector d'estat angular
$\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{P}_{x,0}$	estimació inicial (predicció) de l'estat angular i de la matriu de covariància d'error
\mathbf{y}_k	$\equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$, vector d'estat posicional. Posicionament del robot a l'instant t_k
$\bar{\mathbf{y}}_0, \bar{P}_{y,0}$	estimació inicial (predicció) del posicionament i de la matriu de covariància d'error
\mathbf{z}_k	vector de mesures externes o observacions
$\delta\theta_m$	error en una mesura –o observació– angular qualsevol del sensor làser
$\Delta d_{i,k}$	distància recorreguda per un punt de velocitat $v_{i,k}$ durant l'interval de temps Δt
Δt	$\equiv t_k - t_{k-1}$, temps transcorregut entre passos consecutius de l'algorisme dinàmic
$\theta_{i,k}$	mesura angular externa associada al reflector R_i realitzada pel sensor làser ($i = 1, 2, 3$)
$\rho_{i,k}$	distància entre P i R_i ($i = 1, 2, 3$)
$\sigma_{d_{i,k}}^2$	variància en la mesura hodomètrica de distància $\Delta d_{i,k}$
$\sigma_{v_{i,k}}^2$	variància en la mesura hodomètrica de velocitat $v_{i,k}$
$\sigma_{\varphi,k}^2$	variància en la mesura hodomètrica angular φ_k
\mathbf{v}_k	vector d'innovació
ψ_k	orientació del robot a l'instant t_k en el SRT
$\nabla f_{\mathbf{w}}$	matriu jacobiana de la funció de transició d'estat f respecte a l'error \mathbf{w}
$\nabla f_{\mathbf{x}}$	matriu jacobiana de la funció de transició d'estat f respecte a l'estat \mathbf{x}
$\nabla h_{\mathbf{x}}$	matriu jacobiana de la funció de mesura h respecte a l'estat \mathbf{x}
$\nabla \mathbf{y}_{\mathbf{x}}$	matriu jacobiana de les derivades de l'estat posicional \mathbf{y} respecte a l'estat angular \mathbf{x} , es calcula a partir de les equacions de triangulació

Capítols 6 i 7

Simulacions informàtiques i validació experimental

DSP	<i>Digital Signal Processor</i> , o processador digital de senyal
$e_{lat,k}$	error lateral de posició a l'instant t_k
$e_{O,max}, e_{P,max}$	error màxim d'orientació i de posició en les mesures fetes pel sistema metrològic
$e_{\psi,k}$	error d'orientació a l'instant t_k
$E(e_{lat,k})$	valor esperat de l'error lateral
$E(e_{\psi,k})$	valor esperat de l'error d'orientació
g	funció que relaciona l'estat angular \mathbf{x} amb l'estat posicional \mathbf{y}

J_ω	matriu jacobiana que relaciona les velocitats angulars motrius de les rodes amb les velocitats generalitzades del robot [cinemàtica omnidireccional]
l_k	mesura de longitud del potenciòmetre
$L, L', r, s, d, \alpha, \beta$	paràmetres geomètrics del robot mòbil SPHERIK-3x3
N_P	nombre total de polsos de l'encoder del sensor làser
N_{θ_i}	nombre de polsos en la mesura angular θ_i ($i = 1,2,3$) del sensor làser
PWM	<i>Pulse-Width Modulation</i> , o modulació per amplada de pols
R	$\equiv \sigma_{\theta_m}^2$, variància de l'error en una mesura angular qualsevol del sensor làser
$\text{RMS}(e)$	arrel del valor quadràtic mitjà del paràmetre d'error e
t	variable temporal
$\{v_L, v_T, \dot{\psi}\}^T$	vector de velocitats generalitzades del robot mòbil
$\{x_k^r, y_k^r, \psi_k^r\}^T$	posicionament emulat (o real) del robot a l'instant t_k en el SRT [simulacions informàtiques]
$\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{\psi}_k\}^T$	posicionament estimat del robot a l'instant t_k en el SRT
$\{X_k^m, Y_k^m, \Psi_k^m\}^T$	posicionament del robot mesurat metrològicament a l'instant t_k en el SRF [validació experimental]
$\{\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k, \tilde{\Psi}_k\}^T$	posicionament estimat del robot a l'instant t_k en el SRF
δl_{\max}	error màxim en la mesura del potenciòmetre
$\delta\theta_r, \delta\theta_d, \delta\theta_m$	error de resolució, error de detecció, i error total en una mesura del sensor làser
$\delta\varphi_{1,\max}, \delta\varphi_{2,\max}$	error màxim en les mesures dels encoders de metrologia (1) i (2)
Δt	pas de l'algorisme dinàmic d'estimació
Δt_{int}	pas de les integracions temporals en l'emulació
$\Delta\theta$	resolució angular de l'encoder del sensor làser
$\sigma(e_{lat,k})$	desviació estàndard de l'error lateral de posició
$\sigma(e_{\psi,k})$	desviació estàndard de l'error d'orientació
$\sigma_{\theta_d}^2, \sigma_{\theta_m}^2$	variància de l'error de detecció, i variància de l'error total de mesura
$\varphi_{1,k}, \varphi_{2,k}$	mesures dels encoders de metrologia (1) i (2)

Capítol 1

Introducció

1.1 Introducció i justificació de la tesi

Aquesta tesi, “*Contribució al posicionament dinàmic de robots mòbils per mitjà d’un sistema làser*”, estudia el problema del posicionament de robots mòbils a partir de mesures angulars de l’orientació –relativa al robot– de la recta entre un dels seus punts i punts de posició coneguda de l’entorn de treball. Aquestes mesures angulars són fetes, en el decurs del moviment del robot, per un *sistema de posicionament làser*. El *posicionament dinàmic* d’un robot mòbil té com a objectiu el càlcul, al llarg del temps i mentre aquest està en moviment, de la posició d’un punt del robot i de l’orientació d’aquest en l’entorn de treball.

La tesi neix com a conseqüència de la recerca realitzada pel Departament d’Enginyeria Mecànica de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) en els projectes *Robot Mòbil* i *Sistema de Posicionament i Guiatge Làser per a Robots Mòbils* del Centre de Referència de R+D en Tècniques Avançades de Producció (CeRTAP) de la Generalitat de Catalunya.

En el primer projecte, es van dissenyar dos robots mòbils omnidireccionals, l’STAFF –amb rodes convencionals– i l’SFERIK-3x3 –amb rodes omnidireccionals de corrons esfèrics–. Aquest segon robot s’estudia en profunditat al llarg de la tesi, i és la plataforma amb la que es realitzen les proves experimentals. L’objectiu del segon projecte del CeRTAP era aprofundir en el posicionament dinàmic d’un robot mòbil apilador autònom per a magatzems mitjançant un sistema de posicionament làser que mesura angles. La present tesi doctoral és fruit de la investigació portada a terme en aquesta etapa.

Els robots mòbils són cada vegada més utilitzats tant en entorns productius flexibles, com en entorns de serveis com per exemple hospitals. Els avantatges principals d’aquests vehicles són la seva elevada mobilitat, fet que els diferencia clarament dels robots manipuladors presents en les cadenes automatitzades de fabricació, i la seva autonomia. Les funcions principals que desenvolupen els robots mòbils dins un entorn productiu industrial són: L’*emmagatzematge*, és a dir, la càrrega i descàrrega de material del magatzem. I la *manutenció*, que es refereix al transport intern de material, ja sigui entre el magatzem i la planta de producció o entre estacions de treball de la planta.

La Figura 1.1 mostra robots mòbils destinats a entorns industrials. El primer és un robot mòbil comercial desenvolupat per l'empresa *AGV Products*, i el segon és el transpalet apilador autònom que es va estudiar en el projecte *Sistema de Posicionament i Guiatge Làser per a Robots Mòbils* del CeRTAP.



(a)



(b)

Figura 1.1 Exemples de robots mòbils per a entorns industrials: (a) Robot mòbil desenvolupat per l'empresa *AGV Products*, i (b) Transpalet apilador autònom (CeRTAP)

Els principals avantatges que resulten de la implantació de la robòtica mòbil dins els processos productius són:

- Augment de la flexibilitat del procés productiu, ja que no cal instal·lar infraestructures de transport fixes a la planta. Interacció automatitzada amb altres sistemes de producció.
- Planificació i gestió més eficient de les tasques de manteniment i emmagatzematge, gràcies a la controlabilitat del cicle de treball d'aquests vehicles.
- Disminució a llarg termini dels costos de producció associats al transport intern.
- Capacitat per a suportar grans càrregues, no assumibles pels treballadors. Augment de la seguretat i reducció dels riscos en la manipulació de la càrrega.
- Augment de la fiabilitat en el transport de la càrrega, disminució de danys.

A més d'aplicacions industrials, actualment hi ha també molts exemples de robòtica mòbil aplicada a entorns de serveis. En el mercat es troben robots mòbils per a entorns hospitalaris, cadires de rodes intel·ligents per a discapacitats que afavoreixen la seva inserció laboral, o fins i tot robots per a repartir documents dins d'una oficina.

Pel que fa al posicionament, objecte d'estudi de la tesi, els robots per a entorns de serveis i els robots per a entorns industrials són molt diferents. Els robots per a entorns de serveis es caracteritzen per operar dins espais de treball molt canviants i amb la presència de persones

al seu voltant, que dificulten el càlcul del posicionament del robot dins l'entorn. A més, pot ser que el robot hagi de funcionar en entorns molt diversos i realitzar diferents trajectòries.

En aquestes aplicacions el que es pretén és que el sistema de posicionament sigui robust a la presència de persones o obstacles que puguin interferir en la trajectòria del robot, i a la vegada sigui capaç de reconèixer l'entorn per on circula. En canvi, no es dona tanta importància a la precisió obtinguda en el càlcul del posicionament, ja que no representa un factor crític.

La tècnica anomenada SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*) –sobre la que s'està realitzant molta recerca en els últims anys– està enfocada a aquest tipus d'aplicació. Aquesta tècnica requereix que el robot explori autònomament l'entorn mitjançant els seus sensors, interpreti les dades, construeixi un mapa adequat de l'entorn i es localitzi de forma adequada al seu interior [Martinelli *et al.* 2004].

Ben diferent és el cas dels robots mòbils que s'utilitzen a la indústria. L'espai de treball d'aquests robots no canvia, i normalment realitzen una sèrie de trajectòries prèviament establertes. A més, no és usual la presència d'obstacles en la trajectòria del robot, ja que normalment –per motius de seguretat– l'espai per on circulen aquests robots està senyalitzat i no s'hi permet la presència permanent de persones i objectes.

En el cas de robots mòbils dissenyats per a la indústria normalment es disposa d'un model en CAD ben amidat de l'entorn de treball, i els robots van equipats amb sistemes de posicionament que garanteixen un càlcul precís de la posició i l'orientació dins l'entorn. La *precisió* d'aquest càlcul és un requisit important perquè els robots transporten càrregues elevades que requereixen una manipulació precisa per a evitar possibles accidents i com a conseqüència aturades del procés productiu.

En aquesta tesi s'estudia el posicionament –mitjançant un *sistema làser* que s'explicarà més endavant– de robots mòbils destinats a processos industrials. Per tant, l'objectiu fonamental que es planteja és com obtenir una millor precisió, comparada amb la d'altres mètodes existents, en el càlcul de la posició i l'orientació del robot en condicions dinàmiques mitjançant un sistema d'aquest tipus.

1.2 El posicionament de robots mòbils

Un robot mòbil es caracteritza per funcionar autònomament dins el seu entorn de treball. El *sistema de navegació* que incorpora el robot és qui s'encarrega d'aquest funcionament autònom [Arkin i Murphy 1990, Leondes 2000]. Leonard i Durrant-Whyte (1991) resumeixen el problema de la navegació d'un robot amb aquestes tres preguntes: “on sóc?”, “cap on vaig?” i “com puc arribar-hi?”.

La primera pregunta és la que fa referència al *posicionament* –o localització– del robot mòbil (*robot positioning*). És a dir, com es pot saber on és el robot dins un entorn de treball determinat, a partir de la informació rebuda dels diferents sensors. La segona i tercera preguntes estan relacionades amb la *planificació* de trajectòries (*path planning*) i el *guiatge* del robot (*robot guidance*) respectivament.

S'entén per planificació el fet de definir una trajectòria des d'un punt de partida fins un determinat objectiu o punt d'arribada. Una vegada el robot és capaç de saber on es troba dins l'entorn de treball –posicionament– i per on ha de circular –trajectòria planificada–, el sistema de guiatge és qui s'encarrega de corregir els errors de posició i orientació que puguin aparèixer durant el moviment del robot de manera que aquests tendeixin a zero de manera asimptòticament estable.

L'estudi de la tesi es centrarà en el *posicionament* de robots mòbils, entès com la mesura de la configuració del robot mòbil, és a dir, de la posició d'un dels seus punts i del seu angle d'orientació en l'entorn de treball. En els estudis es suposarà que el vehicle es mou per un terra pla i horitzontal. La planificació i el guiatge del robot queden al marge de l'abast de la tesi, tot i que se'n farà ús en la validació experimental.

En un principi es podria pensar que n'hi ha prou amb l'hodometria –posicionament a partir de l'angle de rotació de rodes del robot i, si cal, de l'angle de guiatge de rodes directrius– per saber la posició i orientació del robot a partir d'una certa configuració inicial coneguda. Aquest mètode és barat i ràpid, i ofereix una precisió raonable a curt termini. No obstant, l'acumulació d'errors de posicionament amb la distància recorreguda pel vehicle [Borenstein *et al.* 1996 i 1997, Kelly 2004] en desaconsella la seva utilització com a mètode únic de localització.

Per aquest motiu cal que el vehicle incorpori també un sistema de posicionament absolut que permeti determinar la localització del robot dins l'entorn de forma més acurada. Aquests sistemes acostumen a utilitzar sensors més fiables –però que a la vegada també són més lents o d'actuació discontinua– que detecten característiques de l'entorn de treball del robot. A partir de les dades d'aquestes sensors s'utilitzen algorismes matemàtics per a determinar la posició absoluta del robot amb la màxima precisió possible. Aquests algorismes poden ser molt diferents segons les dades disponibles, i segons com es tractin els errors en les mesures dels sensors.

Els mètodes que, com l'hodometria, només utilitzen mesures internes del robot per a determinar el posicionament s'anomenen mètodes de *posicionament relatiu*. En canvi, els mètodes que detecten característiques de l'entorn del robot –externes– s'anomenen mètodes de *posicionament absolut*. En el Capítol 2, corresponent a l'estat de l'art dels mètodes de posicionament, s'aprofundeix en els mètodes existents d'un i altre tipus.

En la tesi que es presenta s'utilitza un *sistema de posicionament làser* per a determinar la configuració absoluta del robot dins l'entorn de treball. Aquest sistema està format per un capçal làser giratori –d'estator fix al bastidor del robot– que mesura angles, i un conjunt de reflectors catadiòptrics situats sobre les parets de l'entorn de treball. La Figura 1.2 mostra el muntatge utilitzat en les proves experimentals, es tracta del robot mòbil SPHERIK-3x3 equipat amb el capçal làser. A la figura també s'observen dos dels reflectors instal·lats al laboratori, i el sistema metrològic que s'ha dissenyat per a mesurar la precisió en el càlcul del posicionament.

El capçal emet un feix làser que escombra horitzontalment l'entorn i que es reflecteix en la mateixa direcció quan incideix sobre un reflector. El raig reflectit és detectat per un sensor òptic instal·lat en el sensor, i l'angle d'aquest –relatiu al bastidor del robot– és mesurat per un *encoder* incremental d'alta resolució. A partir d'un mínim de tres mesures angulars i de la posició dels reflectors associats és possible calcular la posició i l'orientació del robot

utilitzant els mètodes geomètrics de triangulació, sempre i quan les mesures corresponguin a la mateixa configuració del robot. Això és així quan el robot es troba en repòs (*posicionament estàtic*).

El problema apareix quan el vehicle es mou, ja que les mesures angulars del sensor es realitzen en instants de temps diferents i en conseqüència cadascuna d'elles correspon a una configuració del robot també diferent. Aquest problema és l'anomenat "problema del posicionament dinàmic" (*dynamic positioning problem*). En aquestes condicions, els mètodes geomètrics de triangulació no es poden utilitzar de forma consistent directament a partir de les mesures que realitza el sensor.

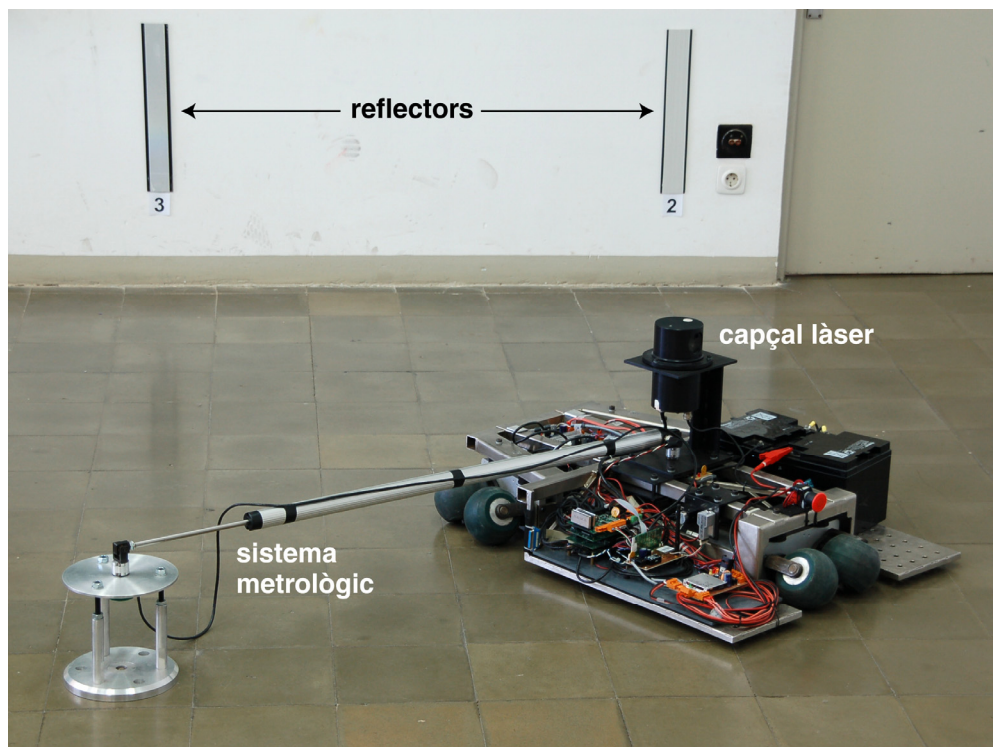


Figura 1.2 Muntatge d'experimentació: Robot mòbil SPHERIK-3x3 equipat amb el sistema de posicionament làser

Aquesta és la principal contribució de la tesi, la presentació d'un mètode que simula en cada instant de temps l'angle corresponent a cada reflector que mesuraria el sensor si es produís la reflexió. A partir d'aquests angles simulats, pot utilitzar-se de forma consistent la triangulació angular per a calcular el posicionament del robot.

1.3 Objectius i abast de la tesi

L'objectiu principal de la tesi consisteix a desenvolupar un mètode que en condicions dinàmiques –robot en moviment– determini amb precisió el posicionament d'un robot mòbil si s'utilitza un sistema de posicionament làser com el que s'ha descrit. Com que les mesures directes del sensor làser no es realitzen en una mateixa configuració del robot, en aquesta tesi es planteja com a objectiu més rellevant desenvolupar un algorisme dinàmic que estimi en cada instant de temps els angles relatius associats a cada reflector encara que no es disposi d'una mesura directa.

L'algorisme tindrà com a entrades les mesures angulars del propi sensor làser, i les mesures dels girs de les rodes del robot obtingudes a partir de sensors hodomètrics –com poden ser encoders–. El mètode que es presenta ha de tenir en compte l'error en les mesures dels sensors –que es modelitzaran com a gaussians– i es desenvoluparà per a les cinemàtiques més habituals en robòtica mòbil: cinemàtica diferencial, de tricicle i vehicles amb rodes omnidireccionals. En el treball es modelitzarà l'error de mesura d'un sensor làser comercial, adquirit en el marc del projecte *Sistema de Posicionament i Guiatge Làser per a Robots Mòbils* del CeRTAP.

La utilització de l'algorisme dinàmic anterior garanteix l'ús consistent dels mètodes geomètrics de triangulació angular, que s'utilitzaran per a determinar la posició d'un dels punts del robot i la seva orientació. Per tant, el mètode de posicionament constarà de dos passos, un primer pas d'estimació dinàmica angular, i un segon pas de càlcul del posicionament per triangulació geomètrica. Es pretén que mitjançant el mètode global de posicionament, utilitzant el sensor làser comercial que es presenta a l'Annex C, s'assoleixin precisions adequades per al funcionament del robot en aplicacions industrials. Es considera que l'error en el càlcul de la posició ha de ser de l'ordre de *mil·límetres*, i que l'error en el càlcul de l'orientació ha de ser de l'ordre del *mil·liradian*.

A continuació es citen altres objectius de caire més específic que també s'han d'assolir en la realització de la tesi. Pel que fa als mètodes geomètrics de posicionament per triangulació angular, cal formular matemàticament el càlcul de la posició i l'orientació del robot a partir dels angles relatius associats als tres reflectors utilitzats. També s'ha d'estudiar la propagació de l'error en l'estimació dels angles, en el càlcul del posicionament. Es pretén també obtenir mapes de l'error en el càlcul del posicionament en funció de la configuració del robot per a diferents disposicions de reflectors.

Com a pas previ al desenvolupament de l'algorisme dinàmic d'estimació dels angles, basat en la simulació de l'evolució d'aquests entre mesures consecutives del sensor, es modelitza la cinemàtica de les tipologies de robots més habituals en robòtica mòbil –cinemàtica diferencial, de tricicle i vehicles amb rodes omnidireccionals– incloent la cinemàtica, relativa al robot, de les rectes definides per un punt del robot i cadascun dels reflectors.

L'últim objectiu consisteix a validar el mètode de posicionament que es planteja. Es pretén realitzar una primera fase de validació virtual mitjançant simulacions informàtiques per a comparar la precisió obtinguda amb el mètode que es presenta amb la d'altres mètodes ja presents a la bibliografia. La segona fase serà experimental, i s'utilitzarà un muntatge de mesura del posicionament d'alta precisió per a validar la precisió obtinguda amb el mètode proposat. En els experiments s'utilitzarà el robot mòbil SPHERIK-3x3, dissenyat i construït al Departament d'Enginyeria Mecànica de la UPC.

Pel que fa a l'abast de la tesi, cal remarcar que en l'estudi de la triangulació angular es considerarà la utilització de tres reflectors –és a dir, de tres mesures angulars–, que són els mínims necessaris per a determinar el posicionament. La utilització de més de tres mesures condueix a una sobredeterminació del problema, l'anàlisi de la qual queda fora de l'abast de la tesi. També es considera que inicialment es disposa d'una estimació aproximada del posicionament del robot, a partir de la qual el robot pot identificar la correspondència de cada mesura angular amb el reflector del qual prové. Per tant, el problema de la identificació de reflectors sense estimació inicial del posicionament també queda fora de l'abast del treball.

Finalment, cal assenyalar que tampoc és un objectiu de la tesi l'estudi del comportament dels errors provinents del condicionament numèric quan el punt que es posiciona s'aproxima a les configuracions singulars –en les quals el càlcul geomètric del posicionament per triangulació és *indeterminat*–. En aquest treball es considera que en el decurs del moviment del robot sempre serà possible seleccionar tres reflectors de l'entorn, de manera que el punt que es posiciona quedi prou lluny de les singularitats. En aquestes condicions, l'error de posicionament provinent del condicionament numèric és d'un ordre de magnitud inferior a l'error obtingut per causa dels errors de mesura.

1.4 Contingut de la tesi i publicacions associades

En aquest apartat es fa un resum del contingut dels diferents capítols de la tesi, juntament amb una llista de les publicacions realitzades que s'hi relacionen.

Capítol 2

En aquest capítol es presenta i s'analitza l'estat de l'art corresponent al posicionament de robots mòbils. Els mètodes que es presenten es classifiquen en dos grans grups: mètodes de *posicionament relatiu*, i mètodes de *posicionament absolut*. La diferència entre ells es troba en l'origen de les mesures utilitzades per al càlcul del posicionament. En els primers aquestes són internes al robot, mentre que en els segons es realitzen mesures de l'entorn –mesures externes–. En el capítol es presenta també el funcionament del *posicionament per filoguiatge* perquè és un mètode molt utilitzat a la indústria, tot i la seva limitada flexibilitat.

Capítol 3

En aquest capítol es presenten els models cinemàtics dels robots que s'estudien: cinemàtica diferencial, cinemàtica de tricicle i cinemàtica omnidireccional amb rodes de lliscament direccional. S'introdueixen les equacions que relacionen la velocitat angular del robot i la velocitat d'un dels seus punts amb les velocitats angulars de les rodes del vehicle. La integració temporal d'aquestes equacions permet el càlcul *hodomètric* del posicionament del robot.

Posteriorment, al Capítol 5 de la tesi, s'utilitzen les expressions obtingudes en aquest capítol per a determinar les equacions que regeixen l'evolució temporal dels angles associats a cadascun dels reflectors en funció de les velocitats angulars de les rodes del vehicle. D'aquesta manera es pot simular el valor dels angles mentre no es té mesura directa del sensor làser.

Capítol 4

En el Capítol 4 s'estudia el posicionament geomètric de robots mòbils per *triangulació* si es disposa de tres mesures angulars –relatives al robot– de l'orientació de la recta entre un punt del robot i tres punts del seu entorn de posició coneguda, corresponents a una mateixa configuració del robot.

En la primera part del capítol s'estudia la triangulació basada en *intersecció d'arcs capaços*, així com la propagació de l'error en el càlcul de la posició i l'orientació si les mesures angulars són imprecises. Es consideren en primer lloc errors en les mesures angulars acotats dins un cert interval, i en segon lloc errors que segueixen una distribució normal de probabilitat –errors gaussians–. En el cas de tenir errors gaussians en les mesures angulars es justifica l'aproximació de primer ordre de les equacions de triangulació per a determinar la millor estimació del posicionament.

En la segona part s'estudia la triangulació per *intersecció de rectes*. En aquesta triangulació cal disposar d'una estimació de l'orientació del robot prèviament al càlcul de la posició. En aquest apartat es parteix del treball [Cohen i Koss 1992] en el que l'orientació es determina mitjançant un mètode *iteratiu* que minimitza el perímetre d'un triangle. En aquesta tesi es demostra que hi ha una relació analítica entre la geometria d'aquest triangle i l'orientació del vehicle, de manera que l'orientació es pot calcular directament sense la necessitat de recórrer a un mètode iteratiu.

Són publicacions i ponències relacionades amb el contingut d'aquest capítol fetes durant la realització de la tesi:

- Font, J.M. i Batlle, J.A. (2006). “Mobile robot localization. Revisiting the triangulation methods”. *Proc. of the 8th International IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO-06)*, Bologna.
- Font, J.M. i Batlle, J.A. (2006), “Posicionamiento dinámico y guiado de un robot móvil con cinemática de triciclo”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, Vol. 10(1), pp. 3–13.
- Font, J.M. i Batlle, J.A. (2004). “Posicionamiento láser dinámico de robots móviles mediante ángulos absolutos”. *Anales de Ingeniería Mecánica. Actas del XVI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, León, Vol. 15(4), pp. 3003–3008.

Capítol 5

En aquest capítol es resol el *problema del posicionament dinàmic*. Aquest problema apareix quan el robot es mou, perquè les mesures angulars del sensor corresponen a configuracions diferents del robot, i la triangulació angular no pot aplicar-se de forma consistent directament a partir d'aquestes mesures.

Per a resoldre-ho es presenta un algorisme dinàmic basat en el filtre de Kalman estès (EKF, *Extended Kalman Filter*) que dóna la millor estimació en cada instant de temps de l'angle associat a cadascun dels reflectors utilitzats, tenint en compte l'error en les mesures hodomètriques i del sensor làser. S'anomena *vector d'estat angular* al vector format per aquests angles, que és estimat a cada instant de temps pel EKF. L'algorisme es formula per a les tres cinemàtiques considerades.

Un cop estimat aquest vector d'estat angular, els mètodes de triangulació introduïts al Capítol 4 es poden utilitzar de forma consistent. En aquest apartat també es planteja l'algorisme present a la bibliografia basat en l'ús del EKF per a estimar directament el posicionament a partir de les mesures angulars externes sense utilitzar la triangulació (EKF posicional). En aquest darrer mètode es fa la fusió de l'estimació hodomètrica del

posicionament amb cadascuna de les mesures angulars a mida que es van realitzant. En capítols posteriors es compararà el funcionament d'ambdós mètodes, el que es presenta (EKF angular i triangulació) i el clàssic o EKF posicional.

Són publicacions i ponències relacionades amb el contingut d'aquest capítol fetes durant la realització de la tesi:

- Font, J.M. i Batlle, J.A. (2006). "Localization of a mobile robot with omnidirectional wheels using angular Kalman filtering and triangulation". *Proc. of the 8th Biennial ASME Conf. on Engineering Systems Design and Analysis (ESDA-06)*, Torino.
- Font, J.M. i Batlle, J.A. (2006), "Posicionamiento de robots móviles mediante un filtro de Kalman angular y triangulación", *Revista Internacional Información Tecnológica*, Vol. 17(5), pp. 9–15.
- Font, J.M. i Batlle, J.A. (2005). "Dynamic triangulation for mobile robot localization using an angular state Kalman filter". *Proc. of the 2nd European Conference on Mobile Robots (ECMR-05)*, Ancona, pp. 20–25.
- Batlle, J.A., Font, J.M. and Escoda, J. (2004). "Dynamic positioning of a mobile robot using a laser-based goniometer", *Proc. of the 5th IFAC International Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles (IAV-04)*, Lisboa [publicat per Elsevier].

Capítol 6

En aquest capítol es realitzen simulacions informàtiques on es compara el funcionament del mètode de posicionament presentat (EKF angular i triangulació) amb l'alternatiu (EKF posicional) en termes de precisió de posicionament.

Com a paràmetres d'error de posicionament s'utilitza l'*error lateral* de posició entre la trajectòria calculada pels mètodes de posicionament i la real, i l'*error d'orientació* entre l'orientació calculada i la real. Aquesta simulació s'ha realitzat amb el programa matemàtic de simulació numèrica MATLAB v7.1 (Release 14), i dins d'aquest s'ha utilitzat també el software de simulació SIMULINK.

Capítol 7

En el Capítol 7 de la tesi es presenten els resultats de la validació experimental del mètode de posicionament que s'ha desenvolupat en aquesta tesi. Per a realitzar aquesta validació s'ha dissenyat un muntatge d'experimentació que utilitza una plataforma robotitzada real: el robot mòbil SPHERIK-3x3. El muntatge incorpora un *sistema metrològic de validació*, format per un potenciòmetre lineal i dos encoders d'altres prestacions, per a mesurar el posicionament del robot amb precisió. A partir d'aquesta mesura precisa del posicionament es pot determinar l'error comès, en el càlcul de la posició i l'orientació, mitjançant el mètode que es presenta.

Capítol 8

En aquest capítol es presenten les conclusions de la tesi, i es proposen extensions i futures línies d'investigació.

Annex A

Aquest és un annex de formulació matemàtica on es determinen les expressions analítiques de les derivades primeres i segones de les equacions per al càlcul de la posició i l'orientació –mitjançant la triangulació angular– respecte a les variables del vector d'estat angular. Aquestes expressions s'utilitzen en l'estudi estadístic de la propagació d'un error gaussià en les variables angulars, en el càlcul del posicionament per triangulació.

Annex B

En aquest annex es determinen les expressions necessàries per a l'aplicació del EKF per a estimar el posicionament de robots amb cinemàtica diferencial i de tricicle, a partir del seu model hodomètric posicional i de les mesures angulars del sensor làser. Aquest annex complementa l'apartat 5.2 de la tesi on s'introdueixen les expressions per a la cinemàtica omnidireccional amb rodes esfèriques de lliscament direccional.

Annex C

En aquest annex es presenta el sistema de posicionament làser que s'estudia en aquesta tesi. Aquest es va adquirir en el marc del projecte *Sistema de Posicionament i Guiatge Làser per a Robots Mòbils* del CeRTAP, que ha motivat la present tesi. Aquest sensor és el que s'utilitza en la fase de validació experimental del mètode dinàmic d'estimació del posicionament que es presenta, i també el que s'ha modelitzat en les simulacions informàtiques. En aquest annex es fa èmfasi en la modelització de l'error en les mesures del sensor làser, necessària en l'aplicació del EKF.

Finalment, aquestes són altres ponències presentades fruit de la investigació associada a la tesi, però que no tenen una relació directa amb el seu contingut. En la primera es presenta un mètode basat en fotogrametria per a la validació experimental de la precisió obtinguda mitjançant mètodes dinàmics de posicionament. I en la segona es presenten les equacions per al guiatge d'un transpalet apilador autònom amb cinemàtica de tricicle, així com proves experimentals que certifiquen el seu bon funcionament.

- Escoda, J., Martínez, A.B., Benedico, A. i Font, J.M. (2005). “Photogrammetry based error analysis of indoor mobile robot localization”. *Proc. of the 2nd European Conference on Mobile Robots (ECMR-05)*, Ancona, pp. 80–85.
- Batlle, J.A., Font, J.M. and Escoda, J. (2004). “Guiado de un robot móvil con cinemática de triciclo”. *Anales de Ingeniería Mecánica. Actas del XVI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, León, Vol. 15(4), pp. 2981–2986.

Capítol 2

Estat de l'art del posicionament de robots mòbils

En aquest capítol es presenta l'estat de l'art dels mètodes de posicionament de robots mòbils que s'apliquen a l'actualitat. Aquests mètodes es divideixen en dos grans grups [Borenstein *et al.* 1996, 1997]:

- Mètodes de *posicionament relatiu*, els quals determinen la posició i l'orientació del robot mòbil a partir d'una configuració inicial donada i de mesures internes del robot, és a dir, sense tenir en compte l'entorn de treball.
- Mètodes de *posicionament absolut*, els quals determinen la posició i l'orientació del mòbil dins l'entorn de treball detectant una sèrie de característiques d'aquest, és a dir, a partir de mesures externes al vehicle.

Els mètodes relatius permeten un càlcul del posicionament més ràpid, pel fet que els sensors utilitzats són més senzills i el volum de dades a tractar en general menor, però tenen l'inconvenient d'acumular errors amb la distància recorreguda pel vehicle. Els mètodes absoluts en canvi són en general més lents, perquè solen emprar observacions discontinües i algorismes de càlcul més complicats, però permeten un càlcul més precís de la configuració del robot mòbil en detectar referències conegudes de l'entorn del robot. És habitual la utilització simultània dels dos mètodes de posicionament, els primers per a determinar a curt termini el posicionament del vehicle, i els segons per a corregir periòdicament els errors acumulats pel mètode relatiu.

Mitjançant els mètodes anteriors el robot mòbil pot circular per qualsevol trajectòria planificada dins l'entorn. Un mètode que també es comentarà en aquest apartat, però que no té gaire interès per la seva manca de flexibilitat a canvis de trajectòria, és la navegació de robots per *filoguiatge*. Amb aquest mètode el robot segueix una trajectòria marcada en el terra de la nau per mitjà d'un conductor elèctric soterrat.

2.1 Posicionament per filoguiatge

Tot i que no és un mètode de posicionament pròpiament dit, ja que no es calcula la posició i l'orientació del vehicle, té interès parlar d'aquest sistema en ser un dels més emprats actualment per a solucionar el problema integral de la navegació –planificació, posicionament i guiatge– de robots mòbils a la indústria.

Els *vehicles filoguiats* segueixen una trajectòria marcada al terra de la nau mitjançant un conductor elèctric soterrat que genera un camp magnètic quan hi circula corrent. Segons la intensitat de camp magnètic, que el vehicle detecta mitjançant dues bobines, aquest coneix la seva posició relativa a la trajectòria i realitza les correccions necessàries per a seguir adequadament la trajectòria marcada.

Apart del filoguiatge o guiatge electromagnètic hi ha altres mètodes que segueixen la mateixa idea:

- Guiatge *òptic*: S'utilitzen bandes d'alt contrast pintades a terra de manera que el robot les pugui detectar mitjançant sensors òptics.
- Guiatge per *imants*: En aquest cas el camp magnètic és produït per una sèrie d'imants soterrats al sòl de la nau que marquen punts de la trajectòria per on s'ha de moure el vehicle.

Els robots mòbils que utilitzen aquestes tècniques de guiatge també s'anomenen vehicles autoguiats o AGV (*AGV, Automatic Guided Vehicle*). Deixant el terme robot mòbil per als robots autònoms que no tenen prefixada cap trajectòria.

Aquesta metodologia és poc adequada per als processos de producció actuals per causa de la seva manca de flexibilitat a canvis de trajectòria del vehicle dins la nau, i també perquè cal modificar sensiblement la infraestructura de la planta industrial per utilitzar aquest mètode. A més, aquest mètode no permet determinar el posicionament exacte del robot, ja que la funció de la trajectòria marcada és únicament de guia.

2.2 Mètodes de posicionament relatiu

Com ja s'ha comentat, aquests mètodes determinen la posició i l'orientació del robot a partir d'una configuració inicial coneguda del robot dins l'entorn i de mesures internes al vehicle. Dins el posicionament relatiu s'utilitzen fonamentalment dues tècniques: l'*hodometria* i la *navegació inercial*.

En l'hodometria es mesuren els girs –al voltant de l'eix de la roda, o de guiatge d'aquesta– d'una o més rodes del robot mitjançant encoders òptics, potenciòmetres o resolvers. En tant que en la navegació inercial es mesuren acceleracions i velocitats angulars mitjançant acceleròmetres i giroscopis respectivament. Borenstein *et al.* (1996) i Nebot (1999) fan una descripció del fonament teòric d'aquests sensors.

2.2.1 Hodometria

L'hodometria és un mètode de posicionament que parteix de la mesura dels girs de rodes del vehicle –mitjançant encoders òptics, potenciòmetres o resolvers– per a determinar els increments de posició i d'orientació del vehicle al llarg del temps a partir d'una configuració coneguda. Aquest mètode és segons Borenstein *et al.* (1996) el més utilitzat en la robòtica mòbil pel seu baix cost, elevada freqüència de càlcul i bona precisió a curt termini.

No obstant, el gran inconvenient de l'hodometria és l'acumulació d'errors durant la integració temporal, que produeixen uns errors de posicionament que augmenten amb la distància recorreguda pel robot [Kelly 2004]. Per a reduir aquesta acumulació d'errors de l'hodometria, s'utilitzen mètodes absoluts que actualitzen el posicionament del robot en determinats instants.

Les fonts d'error de l'hodometria es classifiquen en dos grups: els errors *sistemàtics*, que són aquells errors deterministes que es poden reduir amb un calibratge del model cinemàtic del robot, i els errors *no sistemàtics*, que són aquells errors aleatoris i intractables sense l'ajut d'altres sensors.

Alguns errors sistemàtics són els següents:

- Diàmetre de rodes o cotes del robot mal amidades.
- Desalineació de les rodes del vehicle.
- Desgast de les rodes.
- Error associat a la resolució de l'encoder òptic.

En canvi, són exemples d'errors no sistemàtics (o aleatoris) els deguts a:

- Irregularitats o solcs en el terra.
- Lliscaments de les rodes, etc.

El primer grup d'errors incrementen la zona d'incertesa en el posicionament del vehicle al llarg de la trajectòria. Wang (1988) i Tonouchi *et al.* (1994) representen aquesta zona d'incertesa en el posicionament mitjançant el·lipses. Es pot observar en aquests articles com l'el·lipse d'incertesa es va fent cada vegada més gran al llarg de la trajectòria del robot, Figura 2.1. Tonouchi *et al.* presenten un mètode probabilístic que permet reduir l'el·lipse d'incertesa de posició a partir del coneixement dels límits de l'entorn per on es mou el robot.

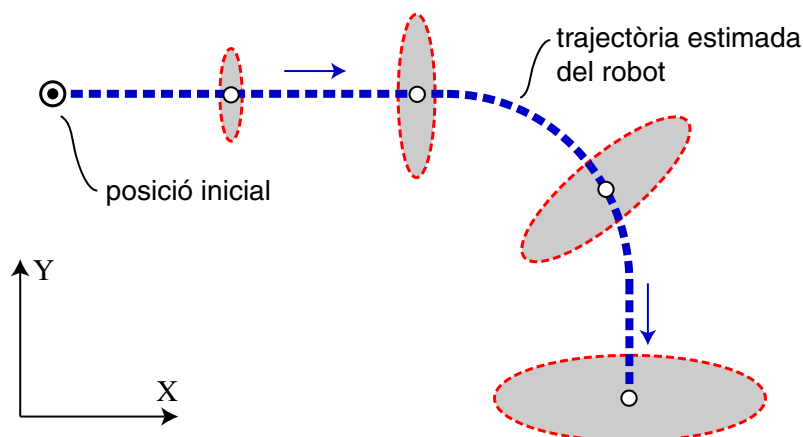


Figura 2.1 Augment de l'el·lipse d'incertesa amb la distància recorreguda pel robot

Borenstein i Feng (1996a) presenten un mètode per a reduir els errors sistemàtics de l'hodometria. Es tracta d'un test –conegut com UMBmark, *University of Michigan Benchmark*– que determina l'error entre la posició inicial i final del robot quan aquest intenta realitzar una trajectòria preprogramada en forma de quadrat. A partir de diferents experiments i del valor mitjà dels errors en la posició i l'orientació obtinguts en cadascun d'ells es calculen uns factors de calibratge que milloren la precisió del posicionament hodomètric. Els autors justifiquen el mètode perquè mitjançant aquest calibratge es pot disminuir la freqüència d'actualització del mètode de posicionament absolut, i per tant el cost computacional del mètode global disminueix. Una restricció del mètode presentat és que únicament és vàlid per a vehicles amb cinemàtica diferencial.

Borenstein i Feng (1996b) també proposen un mètode per a reduir els errors no sistemàtics. Aquest mètode, anomenat *Gyrodometry*, combina mesures hodomètriques amb mesures provinents d'un giroscopi d'estat sòlid per a disminuir l'efecte no sistemàtic d'irregularitats en el terreny, sotracs, etc. Aquests efectes tenen lloc durant períodes de temps curts, i fan que l'error d'orientació hodomètric sigui més gran que l'error de deriva del giroscopi. El mètode presentat passa d'un model a l'altre si es detecta que es produeix un impacte com els que s'han descrit. Les experimentacions demostren que mitjançant el mètode s'aconsegueix mantenir l'error d'orientació per sota els $0,5^\circ$ durant dos minuts al llarg d'una trajectòria amb sotracs.

També és interessant el treball de Solda *et al.* (2004) en el qual s'utilitza un filtre de Kalman [Kalman 1960] per a fusionar mesures hodomètriques amb mesures provinents d'un giroscopi MEMS molt barat (40 €) produït en sèrie per la indústria de l'automòbil. Mitjançant aquest estimador els errors de posicionament que s'acumulen amb l'hodometria es veuen fortament disminuïts com es pot apreciar en els resultats experimentals que s'inclouen en el treball citat.

En el treball de Martinelli i Siegwart (2003) s'exposen dos models matemàtics per a estimar els errors sistemàtics i no sistemàtics associats a l'hodometria durant la navegació d'un robot mòbil. Els models es determinen per a un robot mòbil amb conducció diferencial i per a un altre amb conducció síncrona (en el que cada roda té el grau de llibertat motriu i directriu). Per a estimar aquestes dues components d'error el robot va equipat amb sensors làser de profunditat. Mitjançant la determinació d'aquests errors és possible un posicionament hodomètric més precís durant més temps.

2.2.2 Navegació inercial

La navegació inercial també és un sistema de posicionament relatiu que s'utilitza en la robòtica mòbil. Aquest mètode utilitza com a sensors acceleròmetres i giroscopis per a determinar la posició i l'orientació del robot mòbil a partir d'una configuració de partida coneguda. Com s'ha vist anteriorment, els giroscopis també s'utilitzen com a complement per a corregir errors no sistemàtics de l'hodometria.

Els acceleròmetres són sensors que mesuren la component d'acceleració en una direcció. Aleshores, amb dues mesures d'acceleració en dos eixos ortogonals del robot n'hi ha prou per a determinar la velocitat i la posició d'aquest mitjançant integracions successives. Els giroscopis, en canvi, són sensors que mesuren la velocitat angular al voltant d'un d'eix. Si aquest eix és el de canvi d'orientació del vehicle, la integració de la seva mesura determina l'increment de l'angle d'orientació.

Mitjançant els sistemes de navegació inercials es pot mesurar directament posició i orientació sense tenir en compte cap dada de l'entorn. A més, aquests sistemes són ràpids i molt compactes. No obstant, presenten com a inconvenient el fet que les mesures dels sensors s'han d'integrar –una vegada en el cas dels giroscopis i dos en el dels acceleròmetres–, i petits errors en les mesures provoquen derives en les mesures integrades de posició i orientació.

Cal destacar els treballs pioners de Barshan i Durrant-Whyte (1994 i 1995) on desenvolupen un sistema de navegació inercial de baix cost per al posicionament de robots mòbils, format per tres acceleròmetres i tres giroscopis d'estat sòlid. En aquests articles s'analitzen i es modelitzen els errors associats als diferents sensors i s'aplica un filtre de Kalman estès (EKF) per a estimar la mesura òptima d'acceleració i de velocitat angular. El vector d'estat del filtre està format per les sis mesures dels sensors inercials.

Els autors aconsegueixen demostrar que la precisió dels giroscopis d'estat sòlid augmenta considerablement mitjançant l'aplicació del filtre de Kalman que té en compte els errors associats al sensor. No passa el mateix amb les mesures dels acceleròmetres en les que la precisió no millora tant. Finalment conclouen que aquest sistema és adequat per a les aplicacions amb robots ràpids en entorns exteriors, ja que en entorns industrials interiors aquest mètode no aportaria cap millora significativa si se'l compara amb l'hodometria que és, per altra banda, més barata.

2.2.3 Resum

Com a resum es poden citar les següents idees sobre els mètodes de posicionament relatiu:

- L'hodometria és un mètode de posicionament ràpid i barat que ofereix una bona precisió a curt termini, i que apareix en la majoria dels sistemes de posicionament actuals.
- Malgrat s'hagin desenvolupat moltes tècniques per a corregir els errors associats a l'hodometria, cal un mètode de posicionament absolut que redueixi periòdicament

l'error de posicionament acumulat. Si el mètode hodomètric és més acurat –si es compensen els errors–, la freqüència d'actualització podrà ser més baixa.

- Els sistemes de navegació inercials per si sols no són adequats per a la majoria d'aplicacions de robòtica mòbil, són molt cars si han de ser precisos i acumulen errors d'integració. S'utilitzen en aplicacions en les que l'hodometria no dona bons resultats, per exemple en robots que es mouen en entorns exteriors.
- No obstant, hi ha estudis que utilitzen giroscopis per a millorar la precisió de l'hodometria quan hi ha canvis sobtats d'orientació del robot. La precisió de les mesures dels giroscopis es pot millorar modelitzant el seu error i aplicant filtres de Kalman [Kalman 1960].

2.3 Mètodes de posicionament absolut

Els mètodes de posicionament absolut determinen la posició i l'orientació del robot mòbil detectant característiques de l'entorn de treball. Aquests mètodes es classifiquen en tres grups:

- Posicionament mitjançant marques o *landmarks* artificials.
- Posicionament per reconeixement de l'entorn.
- Posicionament i identificació de l'entorn simultanis (SLAM, *Simultaneous Localization and Mapping*).

La diferència fonamental entre aquests tres mètodes es troba en el fet que en els dos primers es coneix *a priori* el mapa de l'entorn on es mourà el robot, en tant que en el tercer no es coneix l'entorn i de manera simultània es crea un mapa de l'entorn i es calcula el posicionament en el seu interior.

La utilitat de l'SLAM es dona en casos en què l'entorn del robot sigui canviant. Aquest no és el cas dels robots mòbils per a aplicacions industrials, en els quals l'espai de treball del robot és, en bona part, invariant. Aquest mètode es caracteritza per ser menys precís, ja que no es té informació prèvia sobre l'entorn, i per tant no és vàlid per a l'aplicació que es desenvolupa a la tesi. No obstant, es comenta en aquest estat de l'art perquè és objecte d'una de les línies d'investigació més importants dins el camp de la robòtica mòbil en l'actualitat.

En els dos primers mètodes es detecten una sèrie de característiques d'un entorn de treball conegut. Els mètodes de posicionament amb marques *artificials* (*artificial landmarks*) utilitzen característiques de l'entorn que tenen com a única finalitat contribuir al posicionament del vehicle.

En canvi, els mètodes que es basen en el reconeixement de l'entorn detecten característiques *naturals* de l'entorn del robot, com poden ser parets o cantonades, que s'utilitzen per a determinar la posició del mòbil dins l'entorn de treball. Els primers acostumen a ser més precisos. No obstant, els segons aporten flexibilitat a l'aplicació ja que no requereixen la preparació de l'entorn on treballa el robot.

Per dur a terme aquestes tècniques s'utilitzen una gran diversitat de sensors, que reben la denominació d'exteroceptors. Alguns exemples són: goniòmetres làser –com és el cas del sistema de posicionament que s'estudia a la tesi–, sistemes de visió per computador, sensors d'ultrasons, sensors GPS (*Global Positioning System*), i altres [Nebot 1999].

2.3.1 Posicionament mitjançant marques artificials

Aquests mètodes utilitzen marques artificials situades estratègicament en llocs coneguts de l'entorn del robot. L'avantatge de l'ús de marques artificials és que es poden dissenyar de manera que la seva detecció sigui senzilla fins i tot en condicions ambientals adverses. A partir de la detecció de tres o més marques, existeixen algorismes geomètrics que determinen de forma absoluta la posició i l'orientació del vehicle.

Les marques artificials poden ser *actives* o *passives*. Les marques passives no emeten cap senyal i són detectades per mitjà de sensors emissors instal·lats al vehicle. Les marques actives en canvi, emeten senyals –generalment llum o ones electromagnètiques– i la senyal es detecta amb un receptor fix al vehicle.

El Sistema de Posicionament Global (GPS)

Un exemple de sistema de posicionament basat en marques actives és el conegut GPS (*Global Positioning System*), que serveix per a posicionar vehicles que es mouen en entorns oberts (*outdoor*). Aquest sistema utilitza com a referències conegudes 24 satèl·lits que circulen en 6 òrbites diferents al voltant de la Terra [Getting 1993]. Els satèl·lits emeten un senyal electromagnètic que és rebut pel receptor fix al vehicle. La posició del vehicle a l'espai es determina per *trilateració*, coneguda la distància entre el receptor i tres d'aquests satèl·lits. Aquesta distància es determina a partir del temps transcorregut des de l'emissió del senyal fins a la recepció, el qual es pot determinar perquè emissor i receptor es troben sincronitzats.

Tot i que amb la distància a tres satèl·lits n'hi hauria prou per a posicionar el vehicle, el GPS convencional utilitza un quart satèl·lit per a millorar la precisió de posicionament. Borenstein *et al.* (1997) mostren els resultats d'un experiment on es mesurava l'error de posicionament d'un sistema GPS convencional, els resultats que es van obtenir van ser una mitjana de l'error de 22 m i una desviació estàndard de 16 m. Aquests errors són deguts al moviment dels satèl·lits entre l'emissió i la recepció del senyal electromagnètic, a l'error en la mesura del temps de propagació de l'ona, i als retards provinents del pas del senyal per l'atmosfera, entre d'altres.

Per a millorar la precisió de posicionament del GPS convencional s'utilitza l'anomenat DGPS, GPS Diferencial o Cinemàtic [Ashkenazi *et al.* 2000, Nebot 1999]. Aquest sistema es basa en el coneixement precís de la posició real d'una sèrie de referències que estan situades prop de la zona de funcionament del vehicle. Aquestes referències reben el senyal dels satèl·lits i es determina l'error entre la posició que determina el GPS i la real. Aquest error es transmet per ràdio al receptor del vehicle, que l'utilitza per a millorar la precisió de la mesura de posició, Figura 2.2.

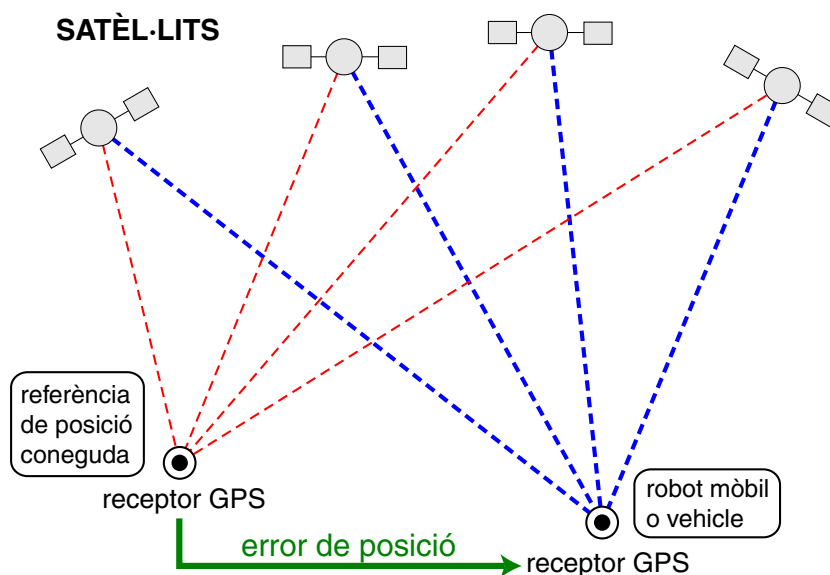


Figura 2.2 Funcionament del GPS Diferencial o Cinemàtic

En el treball de Thuilot *et al.* (2004) s'utilitza un sistema GPS Diferencial per a la navegació autònoma d'un vehicle elèctric urbà. Mitjançant el sistema utilitzat s'aconsegueix una precisió de posicionament de l'ordre de centímetres amb una freqüència de mostreig de 10 Hz.

Com a conclusió sobre els sistemes basats en GPS cal dir que s'allunyen clarament de l'aplicació que s'estudia en la tesi que es proposa. En primer lloc perquè aquests sistemes s'utilitzen per a posicionar vehicles que circulen a l'exterior dels edificis. I en segon lloc perquè els errors de posicionament que s'obtenen són massa elevats si es comparen amb els que es pretenen obtenir, que són de l'ordre de mil·límetres.

Mètodes de posicionament per a condicions estàtiques

A continuació s'analitzen treballs en els que es posiciona un robot mòbil que circula per l'interior d'un espai de treball tancat –com és el cas dels entorns industrials– mitjançant marques artificials, actives o passives, de posició coneguda. Els mètodes de posicionament basats en marques artificials que apareixen a la bibliografia es classifiquen en dos grups: mètodes per a *condicions estàtiques*, que són consistents per a observacions fetes des d'una mateixa configuració del robot mòbil, i en mètodes per a *condicions dinàmiques*, en els quals es té en compte el moviment del robot per a determinar el seu posicionament. En aquest subapartat es comenten els primers.

Diversos autors utilitzen els mètodes de *triangulació* per a determinar la localització del robot en condicions estàtiques, Figura 2.3(a). Aquests mètodes parteixen de la posició coneguda de tres marques de referència R_i ($i = 1,2,3$) i de la mesura dels angles relatius θ_i de les rectes visuals d'un punt P a cadascuna de les marques, per a calcular la posició de P $\{x, y\}^T$ i l'orientació del robot ψ .

McGille i Rappaport (1989) presenten un sistema basat en marques actives que posiciona un robot mòbil mitjançant triangulació geomètrica. En el sistema experimental que proposen, les marques són tres díodes emissors de llum infraroja a 890 nm. El vehicle

disposa d'un receptor òptic rotatiu que mesura els angles relatius al vehicle de la recta visual als díodes. Les marques s'identifiquen mitjançant un circuit que modula la freqüència d'emissió de cada díode, i la precisió de les mesures angulars és de $\pm 2^\circ$.

A partir de la mesura dels angles –relatius al vehicle– de les visuals als tres díodes, els autors determinen la posició i l'orientació del vehicle mitjançant un mètode de triangulació basat en la intersecció de dues circumferències. Aquest mètode, Figura 2.3(b), parteix dels angles α i β entre marques consecutives, per a determinar la posició de P a partir de la intersecció dels arcs capaços definits per aquests angles i les marques corresponents. Un cop coneguda la posició del robot, la seva orientació es determina fàcilment a partir de l'angle absolut respecte a l'eix X d'una de les rectes visuals.

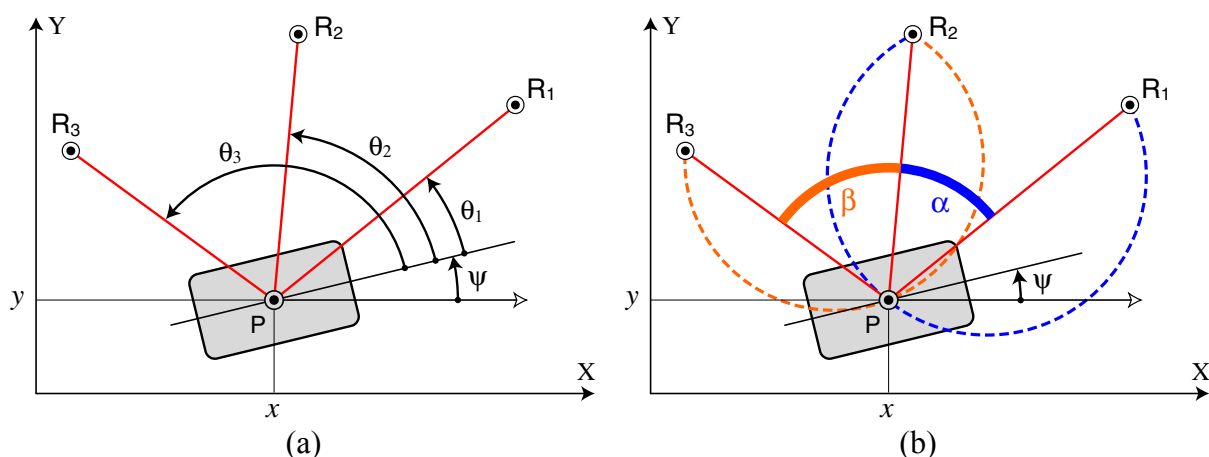


Figura 2.3 Mètodes geomètrics de posicionament per triangulació

En el mateix treball també s'estudia la sensibilitat de l'error de posicionament –degut a la resolució de l'instrument de mesura– en funció de la posició del punt d'observació i de les tres marques utilitzades. S'observa com l'error de posicionament augmenta quan el punt d'observació s'apropa a la circumferència que passa per les tres marques. Quan el robot es troba sobre aquesta *circumferència crítica*, Figura 2.4, el mètode de triangulació exposat resulta indeterminat perquè les dues circumferències passen a coincidir.

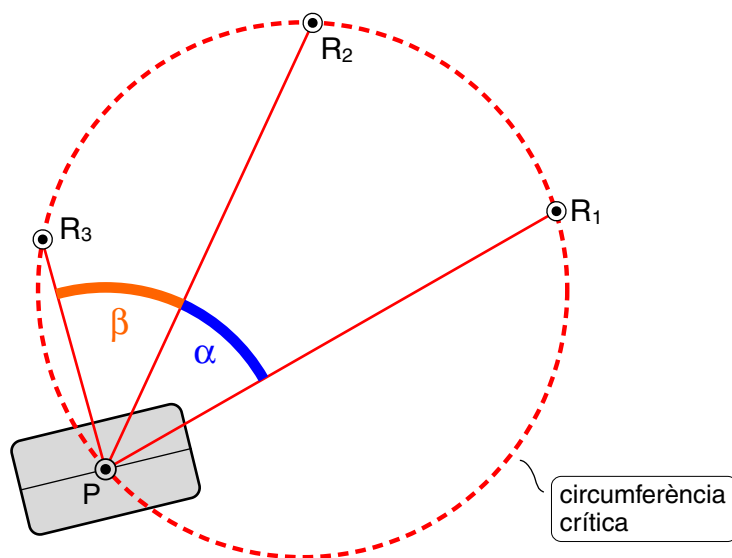


Figura 2.4 Indeterminació de posició sobre la circumferència que passa per les 3 marques

Els errors de posició obtinguts mitjançant aquest sistema experimental oscil·len entre 1 i 7 cm dins una sala de 25 m². L'inconvenient del mètode presentat per McGillem i Rappaport és que només es pot utilitzar correctament quan el robot es troba aturat, és a dir, en condicions estàtiques. Quan el vehicle es mou, les mesures dels angles θ_i de les rectes visuals corresponen a diferents posicions i orientacions del robot mòbil, Figura 2.5, i per tant el mètode geomètric de triangulació no pot aplicar-se de forma consistent. Això planteja l'anomenat *problema del posicionament dinàmic*.

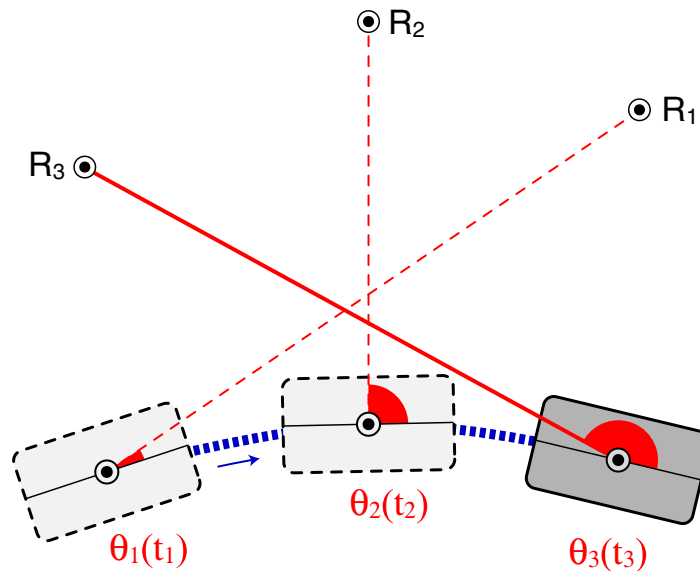


Figura 2.5 El problema del posicionament dinàmic

Cohen i Koss (1992) presenten un estudi exhaustiu i complet dels mètodes de triangulació que s'utilitzen en robòtica mòbil, tant des del punt de vista de la precisió com del cost computacional. El primer mètode que analitzen és el d'intersecció de circumferències presentat per McGillem i Rappaport (1989). Com a conclusió s'exposa que és un mètode ràpid i que dona bons resultats, tret del cas en què el punt del robot que es posiciona s'apropa a la circumferència crítica que passa per les tres marques.

El segon mètode que analitzen parteix del fet que si es coneix l'orientació ψ del robot, es poden determinar els angles absoluts $\Phi_i \equiv \psi + \theta_i$ ($i = 1,2,3$) de les rectes de P a cadascuna de les marques R_i , Figura 2.6(a). I per tant, la posició de P es pot determinar per intersecció de rectes. De fet, n'hi hauria prou amb només dues marques per a determinar la posició del robot, sempre i quan P no estigués alineat amb elles. Si s'utilitzen tres marques no alineades s'evita aquest problema.

Si l'orientació del vehicle no es coneix amb precisió –com passa abans d'un posicionament absolut– i s'utilitzen les tres marques, les posicions determinades mitjançant cada parella de reflectors (T_{12} , T_{13} i T_{23}) no coincideixen, Figura 2.6(b). En aquesta figura, δ representa l'error entre l'estimació de l'orientació del vehicle i el seu valor real: $\delta = \psi_{est} - \psi_{real}$.

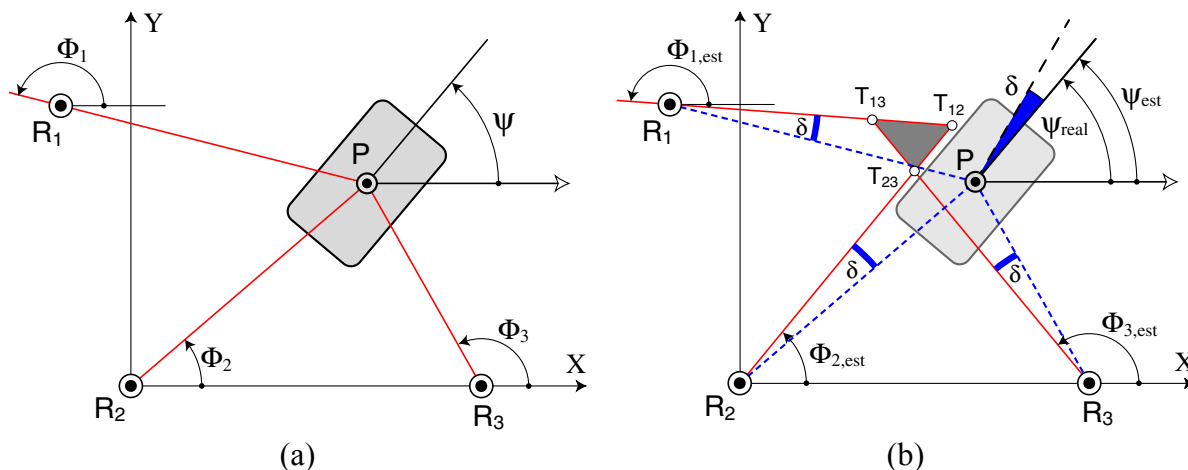


Figura 2.6 Triangulació per intersecció de rectes quan la mesura de l'orientació és correcta (a), o incorrecta (b)

Quan es dona aquest cas, Cohen i Koss proposen un *mètode iteratiu* per a determinar l'orientació real del vehicle. Aquest cerca l'orientació del robot entre -90° i 90° amb increments de $0,1^\circ$, i pren com a solució l'angle que minimitza el perímetre del triangle que formen T_{12} , T_{13} i T_{23} , Figura 2.6(b). En aquest algorisme, temps i precisió són factors antagònics, ja que si es vol més precisió en l'orientació, aleshores augmenta el temps de càlcul de l'algorisme. En els resultats de les simulacions que es presenten al treball, l'algorisme tarda una mitjana de 3 segons en calcular el posicionament, i per tant no és adequat per a controlar en temps real la trajectòria d'un robot mòbil.

S'analitza un últim mètode de triangulació basat en l'algorisme iteratiu de Newton-Raphson per a calcular la posició del robot a partir d'una estimació inicial –determinada hodomètricament–. Aquest mètode convergeix ràpidament a la solució del problema si l'estimació inicial és prou bona, no obstant si no ho és pot divergir ràpidament. Per tant, no es tracta d'un mètode robust, i a la pràctica no s'utilitza. Els temps de càlcul emprats també fan que aquest algorisme no sigui idoni per al guiatge en temps real de robots.

En el treball de Betke i Gurfvits (1997) es presenta un mètode de posicionament estàtic que utilitza un nombre n general de marques ($n > 3$) de posició coneguda que representa mitjançant nombres complexos. L'algorisme parteix de la identificació de les marques i de la mesura –amb un cert error– dels $n-1$ angles relatius entre elles, per a determinar la posició i l'orientació del robot mòbil. Els avantatges del mètode que proposen Betke i Gurfvits comparat amb els altres mètodes de triangulació exposats són els següents:

- L'algorisme proposat és lineal.
- El seu temps de càlcul és proporcional al nombre n de marques utilitzat, $O(n)$, i per tant pot utilitzar-se en temps real encara que n sigui elevat. El cost computacional seria molt més gran si s'utilitzessin les $\binom{n}{3}$ combinacions de triplets de marques i s'amitjanessin els resultats obtinguts per a cada triplet.
- Donat que l'algorisme utilitza un nombre n de marques que pot ser superior a 3, és menys sensible al soroll present en les mesures.

- L'algorisme detecta les mesures inadequades a causa del seu error gran, i també detecta si s'ha identificat un *landmark* erroni (*outlier*).

En el treball s'inclouen una sèrie de simulacions per a validar l'algorisme. Mitjançant l'ús d'onze marques situades a l'entorn d'una sala de $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ i un sensor que mesura els angles relatius amb una precisió de $\pm 1^\circ$ s'obté un error màxim en la posició del robot de 19 cm.

El mètode és robust als errors en les mesures, disminueix l'error de posicionament mitjançant l'ús de moltes mesures, però no té en compte la seva distribució. El mètode tampoc té en compte el moviment del robot i per tant no aporta una solució al problema del posicionament dinàmic. Els autors indiquen com a treball futur la incorporació del mètode en un algorisme dinàmic de seguiment de la posició, com per exemple un filtre de Kalman.

Briechle i Hanebeck (2004) presenten un mètode de localització basat en la mesura dels angles relatius a tres marques i en l'ús de la triangulació per intersecció de circumferències. El mètode té en compte els errors associats a la mesura angular, dels quals no se'n coneix la seva distribució però que es troben acotats en amplitud. Mitjançant aquest mètode s'aconsegueix trobar una expressió analítica de la frontera d'un conjunt que conté totes les posicions possibles del robot, Figura 2.7, tenint en compte els errors en les mesures angulars. Aquesta expressió s'aconsegueix mitjançant una transformació no lineal de l'equació de les mesures en un espai d'estats de dimensió superior.

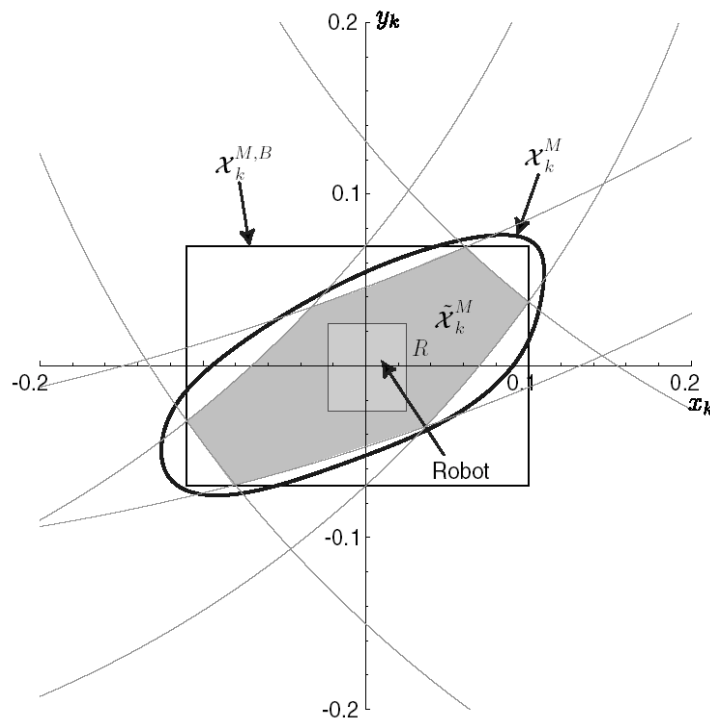


Figura 2.7 Aproximació analítica del conjunt que engloba totes les posicions possibles del robot mòbil [Briechle i Hanebeck 2004]

Com es pot veure a la figura anterior, l'aproximació del conjunt de posicions possibles (\tilde{x}_k^M) amb una conjunt rectangular de costats paral·lels als eixos ($x_k^{M,B}$) és més conservadora. El mètode presentat és vàlid per a condicions estàtiques del robot, els autors deixen com a treball futur la implementació d'un filtre que vagi actualitzant la posició del

robot mòbil quan aquest es mou. Els autors del treball comenten que el mètode presenta un elevat cost computacional, sobretot en el càlcul de la transformació inversa, tot i que no parlen de temps de càlcul concrets de l'algorisme.

El treball de Shimshoni (2001) resol el problema del posicionament a partir de tres o més mesures angulars que presenten un cert soroll. La qüestió principal que es planteja l'autor és com utilitzar aquestes mesures de manera que l'estimació del posicionament sigui la més precisa possible de forma eficient, és a dir, amb un cost computacional baix.

Cada mesura de cada angle relatiu entre marques es relaciona amb la posició i l'orientació del robot mitjançant una equació lineal. Si s'utilitza un nombre general n ($n > 3$) de marques, aleshores s'obté un sistema d'equacions sobredeterminat que es soluciona mitjançant la Descomposició en Valors Singulars (SVD) de la matriu del sistema d'equacions. El mètode que exposa Shimshoni no troba el posicionament que minimitza l'error entre les mesures angulars estimades i les correctes, però troba una aproximació prou bona del posicionament amb un cost computacional molt reduït. En les simulacions per ordinador que s'inclouen a l'article el mètode presentat és 100 vegades més ràpid que el mètode d'optimització no lineal.

Els mètodes anteriors, tenen en compte els errors associats a les mesures després que aquests es produeixin. Sutherland i Thompson (1993 i 1994) introdueixen el fet que una tria acurada de les marques a utilitzar pot disminuir l'error del posicionament *a priori*. En el treball d'aquests autors es determina el posicionament d'un robot mòbil a partir dels angles relatius entre marques.

En el treball es mostra com per a un mateix error en les mesures angulars, la precisió del posicionament pot variar de forma significativa segons la disposició –relativa al robot– del subconjunt de marques utilitzat. Els autors demostren com l'ús d'un algorisme que tria el millor subgrup de landmarks per a posicionar el vehicle disminueix considerablement l'error de posicionament comparat amb un algorisme que tria aleatòriament el subgrup de marques utilitzat.

Un treball semblant que apareix a la bibliografia és el que presenten Madsen i Andersen (1998). En aquest el sistema de posicionament és per visió, mitjançant una càmera i una sèrie de marques visuals distribuïdes per l'entorn de treball. La càmera pot girar respecte al robot per mitjà d'un motor que incorpora un encoder per a determinar l'angle de gir. A partir d'aquest sistema es pot determinar l'angle entre marques i per tant el posicionament del vehicle per triangulació.

L'error total en la mesura angular prové de dues fonts d'incertesa: una associada a la resolució de la càmera digital –nombre de píxels–, i l'altra a l'error en la mesura de l'encoder. L'algorisme funciona de la següent manera: a partir de l'últim posicionament absolut es determina una predicció de la posició del robot mitjançant l'hodometria. Com que se sap on es troben les marques, el robot pot determinar quines marques té visibles. Aleshores es determina l'àrea d'incertesa associada a cada triplet de marques per a la posició determinada. Finalment s'aplica triangulació amb el triplet que ofereix menys sensibilitat a l'error present en les mesures angulars, és a dir, el de menor àrea d'incertesa.

Greiner i Isukapalli (1996) aborden el mateix problema: seleccionar el grup de marques que minimitzi l'error de posicionament. Els autors proposen un algorisme mitjançant el

qual el robot va aprenent –a partir de les experiències prèvies– una *funció de selecció*, mitjançant la qual a partir de les marques visibles es retorna un subgrup de marques que permet determinar el posicionament del robot amb precisió. En l'article es demostra mitjançant tècniques estadístiques que la funció de selecció escollida és, amb molta probabilitat, l'òptima dins l'espai de les funcions d'aquest tipus. La validació experimental demostra l'efectivitat d'aquest mètode, mitjançant el qual s'aconsegueix en alguns casos una reducció de l'error de l'ordre del 50%.

Mètodes de posicionament per a condicions dinàmiques

Skewis i Lumelsky (1994) presenten un sistema de posicionament absolut basat en un goniòmetre d'infraroigs d'estàtor fix al robot que emet un raig rotatiu que escombra horitzontalment l'entorn. Aquest detecta un triplet de marques reflectores situades sobre les parets de la zona de treball. Els autors presenten un nou mètode de triangulació per a determinar la posició i l'orientació del robot a partir de la mesura dels angles relatius θ_1 , θ_2 i θ_3 a tres marques. Es tracta d'un mètode analític diferent dels anteriors en el qual es resol una equació cúbica per a trobar la tangent de l'angle ψ d'orientació del vehicle. Aquest mètode inclou una gran quantitat d'operacions, la qual cosa fa que la seva sensibilitat als errors presents en les mesures del goniòmetre sigui molt gran.

En aquest treball Skewis i Lumelsky resolen el problema del posicionament dinàmic, Figura 2.5. Els autors proposen un algorisme que realitza una translació virtual de les marques reflectores, d'acord amb la trajectòria hodomètrica recorreguda pel robot entre l'instant de reflexió (t_k) i l'instant de posicionament absolut ($t_k + \Delta t$). Aleshores s'aplica la triangulació estàtica utilitzant aquestes *marques virtuals* R_i' ($i = 1, 2, 3$) i els angles $\theta_i' = \theta_i + \Delta\psi$, Figura 2.8.

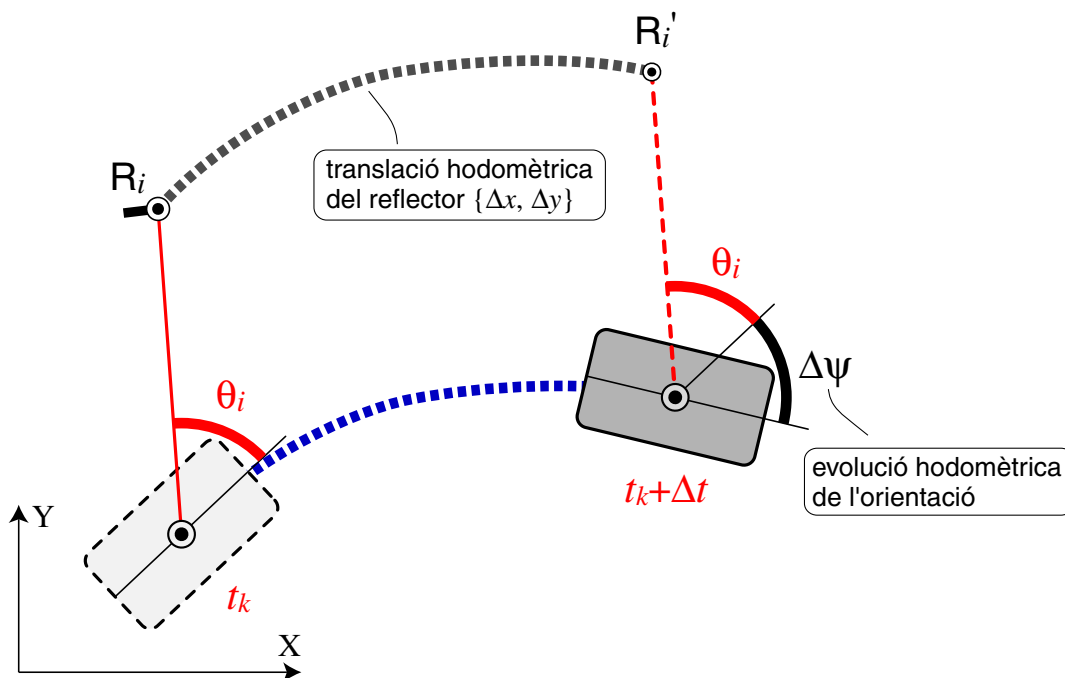


Figura 2.8 Desplaçament hodomètric *virtual* dels reflectors [Skewis i Lumelsky 1994]

Algunes observacions d'aquest mètode són les següents:

- Els errors en l'hodometria posicional del robot –sistemàtics i no sistemàtics– són presents en els desplaçaments virtuals dels reflectors, i per tant no es corregeixen.
- El mètode no té en compte l'error present en les mesures dels hodòmetres i del goniòmetre.
- Si en una volta del goniòmetre no es detecta algun dels reflectors no es pot realitzar el posicionament absolut.

A Hu i Gu (2000) es presenta un sistema de posicionament làser que utilitza sis reflectors catadiòptrics idèntics. El mètode que presenten els autors utilitza un filtre de Kalman estès (EKF) per a fusionar les dades provinents dels encoders instal·lats al robot amb les mesures del goniòmetre làser. D'aquesta manera es té en compte el soroll present en les mesures dels sensors i en el model cinemàtic del robot, el qual és considerat gaussià. El vector d'estat del sistema en el filtre de Kalman ve donat per la posició del centre del goniòmetre i l'orientació del robot. El robot que modelitzen presenta una cinemàtica amb dos rodes no directrius d'eix comú i dues rodes directrius.

En el mètode també s'utilitza una xarxa neuronal de Kohonen per a identificar els reflectors associats a cada mesura angular en el cas que el robot perdi el coneixement del seu posicionament (*getting lost problem*). Aquest problema pot aparèixer a causa d'una fallida elèctrica del robot, o per acumulació d'errors de posicionament. L'avantatge del mètode de Hu i Gu respecte els algorismes de posicionament anteriors és que tracta els errors presents en les mesures dels sensors. Respecte a la precisió del mètode, en el treball no s'ofereixen dades numèriques, però a partir dels gràfics que es mostren s'observa un error de posicionament de l'ordre de centímetres.

Wiklund *et al.* (1988) també proposen un filtre de Kalman per a fer el seguiment de la trajectòria d'un robot mòbil, en aquest cas amb cinemàtica de tricicle. El sistema de posicionament és el mateix. Tal com passava en el cas anterior les marques –en aquest cas reflectors catadiòptrics– són idèntiques. El mètode identifica la marca associada a cada reflexió mitjançant una finestra angular, a partir de la previsió hodomètrica del posicionament del robot i d'una certa tolerància angular.

En aquest article els autors també enuncien el problema de l'arrencada en fred (*cold start-up*). Si tots els reflectors són idèntics, el vehicle no pot associar les reflexions amb les marques si inicialment no coneix una aproximació de la seva configuració. Per a resoldre aquest problema s'utilitza la tècnica següent: Es trien tres landmarks i s'associen a tres reflexions, aleshores per triangulació es pot determinar la posició del vehicle, per a comprovar que aquesta associació és la correcta, es comproven els angles provinents dels altres landmarks. Es van provant totes les combinacions fins que es troba la posició en què es pot associar totes les mesures amb els reflectors. El problema d'aquest algorisme és que en determinades condicions pot ser que no doni una solució unívoca, a més consumeix molt temps si el nombre de marques visibles és gran.

Alguns autors com Hanebeck i Schmidt (1996a i 1996b) afirmen que els errors presents en el model cinemàtic i a les mesures durant el funcionament real del robot no són gaussians i que, a més, apareixen una sèrie d'errors no sistemàtics imprevisibles, hipòtesis sota les

quals no és vàlida l'aplicació d'un filtre de Kalman. En els seus treballs, Hanebeck i Schmidt utilitzen un filtre recursiu de disseny propi que permet treballar amb qualsevol distribució d'error i amb errors deterministes.

Aquest mètode utilitza l'hodometria per a obtenir una predicció contínua del posicionament del robot, i utilitza les mesures discontinües del goniòmetre per a actualitzar aquestes prediccions. Per a fusionar les prediccions hodomètriques amb els posicionaments absoluts el mètode fa una intersecció d'el·lipsoides que representen les incerteses provinents de l'hodometria i de les mesures del goniòmetre. En la validació experimental del mètode, en la que s'utilitza un robot diferencial circulant a 1 m/s, s'obtenen errors de posició de ± 5 cm i errors d'orientació de $\pm 1^\circ$ entre posicionaments reals i estimats.

Altres autors com Boley *et al.* (1996) també desaconsellen l'ús dels filtres de Kalman degut a la seva divergència sota determinades circumstàncies. En aquest cas els autors desenvolupen un algorisme recursiu basat en mínims quadrats (RTLS, *Recursive Total Least Squares*). Per a validar l'algorisme s'utilitza un robot equipat amb una càmera que visualitza una sèrie de bombetes d'alta intensitat –que s'utilitzen com a marques–. L'angle relatiu de la visual a la marca es mesura per mitjà de la imatge captada per la càmera.

En els resultats del treball de Boley *et al.* s'aprecia com el mètode presentat convergeix més ràpidament que un mètode basat en el filtre de Kalman. Aquest fet es deu, tal com comenten els autors, al fet que els errors en les mesures angulars i de la velocitat del robot, així com dels temps en què es prenen les imatges, no són gaussians (condició en la qual es basa l'ús correcte del filtre del Kalman).

Nishizawa *et al.* (1995) presenten un altre mètode, diferent als considerats fins ara, per a localitzar un vehicle mitjançant marques situades en l'entorn. El mètode utilitza un filtre del Kalman estès (EKF) per a fusionar l'hodometria amb les mesures d'un sensor làser que emet un raig a un determinat angle α respecte a l'eix longitudinal del vehicle, Figura 2.9. Aquest raig es reflecteix quan incideix sobre un dels reflectors semicilíndrics situats sobre les parets de l'entorn (R_i) i un fotodiode detecta quan es produeix aquesta reflexió. Aleshores, en conèixer la posició del reflector i l'angle α del raig làser es pot actualitzar la predicció del posicionament del robot determinat mitjançant l'hodometria.

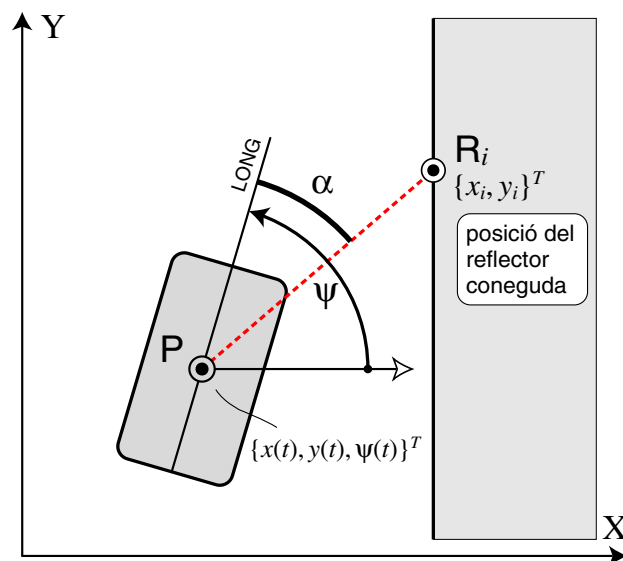


Figura 2.9 Relació geomètrica entre el robot i el reflector R_i [Nishizawa *et al.* 1995]

Els errors del mètode són considerats gaussians, condició necessària per a l'aplicació correcta del EKF, però en l'article no es cita la seva variància. Els autors validen experimentalment el mètode amb un robot de cinemàtica diferencial i s'obtenen errors de posició de fins a 5 cm.

Consideracions conclusives a propòsit del posicionament amb marques artificials

De la recerca bibliogràfica relacionada amb el posicionament amb marques artificials se'n deriven les següents consideracions conclusives:

- Els sistemes de posicionament amb GPS no són recomanables per a aplicacions industrials per causa de la seva baixa precisió, millorable amb un GPS Diferencial. Un altre factor restrictiu és que només es poden utilitzar en entorns a l'aire lliure.
- Els mètodes de posicionament purament geomètrics només són vàlids en condicions estàtiques del robot mòbil. La seva aplicació en condicions dinàmiques –quan el robot es mou– resulta inconsistent, això es coneix com a *problema del posicionament dinàmic*. Cal incorporar algorismes dinàmics que permetin fer un seguiment de la trajectòria i l'orientació del robot. Aquests algorismes depenen de la cinemàtica del robot. Hi ha dues tendències: l'ús de filtres recursius (de Kalman o altres) o bé realitzar una integració hodomètrica entre mesures.
- Un problema de posicionament important és l'arrencada en fred (*cold start-up*), és a dir, com es pot saber on es troba el robot si no es té coneixement previ de la seva posició i orientació. Alguns autors solucionen aquest problema amb marques distingibles l'una de l'altra, altres utilitzen marques idèntiques i algorismes per a associar cada mesura amb la marca corresponent. La solució a l'arrencada en fred també soluciona l'anomenat problema de pèrdua per fallida (*getting lost problem*), que es dona quan el robot perd tota la informació del seu posicionament per causa, per exemple, d'una fallida elèctrica.
- Els mètodes de posicionament han de ser robusts als errors en les mesures. En els mètodes purament geomètrics –estàtics– això s'aconsegueix utilitzant més mesures de les necessàries, és a dir, amb redundància de mesures. D'aquesta manera es disminueix la variància associada al posicionament. Els mètodes de seguiment dinàmic de la trajectòria basats en filtres de Kalman tenen en compte la distribució de probabilitat d'aquests errors de les mesures i del model cinemàtic, que són considerats gaussians.

2.3.2 Posicionament per reconeixement de l'entorn

En el posicionament per reconeixement de l'entorn, una sèrie de sensors instal·lats al vehicle capten informació sobre l'espai de treball del robot mòbil i la comparen amb un mapa o model de l'entorn. Si el mapa obtingut pels sensors i el model coincideixen, aleshores el sistema és capaç de determinar la localització del robot.

Hi ha una gran quantitat de mètodes a la bibliografia que es basen en aquest concepte, aquests s'han classificat en els següents grups:

- Mètodes que utilitzen l'anàlisi intervalar per a determinar el posicionament del vehicle a partir de les mesures de molts sensors que capten l'entorn natural del vehicle.
- Mètodes que construeixen un mapa de l'entorn a partir de les mesures i que determinen la localització del vehicle comparant aquest mapa amb el mapa de l'entorn conegut *a priori*, aquesta tècnica es coneix com a *model-matching*.
- Mètodes probabilístics que determinen el posicionament assignant probabilitats a diferents configuracions possibles del robot dins l'entorn de treball.
- Mètodes que detecten marques o *landmarks* naturals, com ara portes, cantonades, etc. a l'entorn i determinen la posició del robot mitjançant mètodes geomètrics com els presentats a l'apartat anterior.

Mètodes basats en l'anàlisi intervalar

Els mètodes que es descriuen a continuació es basen en el càlcul mitjançant intervals [Jaulin *et al.* 2001]. Un treball important dins aquest camp és el que presenten Kieffer *et al.* (2000). En aquest treball s'utilitza un robot mòbil amb cinemàtica diferencial i un conjunt de 18 sensors d'ultrasons, barats però imprecisos, instal·lats al vehicle.

Un sensor qualsevol i emet el senyal d'ultrasons caracteritzat per un con de vèrtex s_i , orientació θ_i respecte al robot, i semiobertura γ_i , Figura 2.10. Aquests sensors mesuren la distància d_i a partir del temps transcorregut entre l'emissió i la recepció de l'ona reflectida o refractada per algun obstacle o paret de l'entorn (*landmark* natural). Com que la mesura presenta una incertesa α_i , es té en compte l'interval $[d_i] = [d_i(1 - \alpha_i), d_i(1 + \alpha_i)]$, que conté la distància real a l'obstacle més proper de l'entorn.

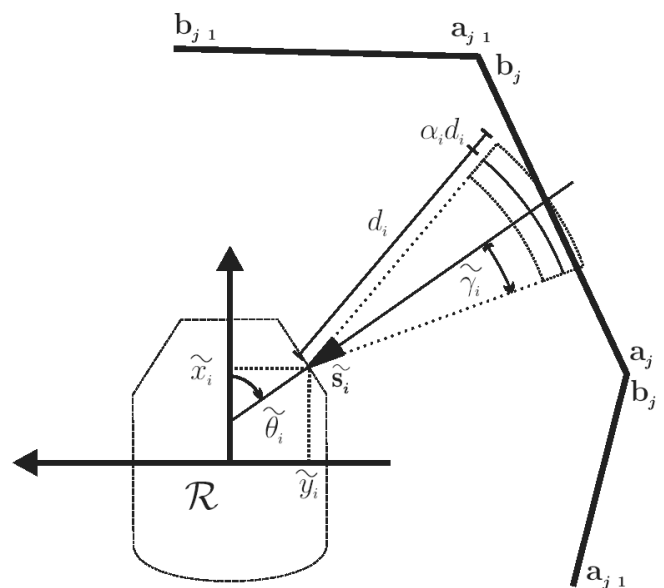


Figura 2.10 Mesura d'un sensor d'ultrasons [Kieffer *et al.* 2000]

A partir d'aquests intervals associats a cada sensor, s'utilitza l'aritmètica intervalar per a trobar el conjunt de posicions i orientacions del robot que compleixen les restriccions imposades pels intervals mesurats. L'algorisme que resol aquest problema s'anomena SIVIA (*Set Inversion Via Interval Analysis*). Els avantatges que aporta el mètode de Kieffer *et al.* són els següents:

- El mètode permet la localització absoluta o global del robot sense associar cada mesura amb la marca natural corresponent. Resol el problema de l'arrencada en fred i de la pèrdua per fallida del robot.
- El mètode és robust als errors presents en les mesures, i als possibles *outliers* –mesures errònies per mal funcionament del sensor o per l'existència d'obstacles a l'entorn–.
- El mètode tracta el problema de forma no lineal, i per tant no té el problema de la divergència que presenten els mètodes locals –com el filtre de Kalman estès– que es basen en una sèrie de linealitzacions.

El mètode presenta com a inconvenients principals els següents: el cost computacional de l'algorisme SIVIA és elevat –tarda un temps de l'ordre de segons per a calcular el posicionament del robot– i per tant és massa gran per fer el control de la trajectòria d'un robot mòbil en temps real, la precisió màxima del mètode és de 4 cm (quan s'arriba a aquest ordre de precisió s'aturen les iteracions de l'algorisme) i, a més, l'algorisme pot presentar ambigüïtat de configuració, és a dir, dues configuracions del robot dins el mateix entorn poden portar a les mateixes mesures, Figura 2.11.

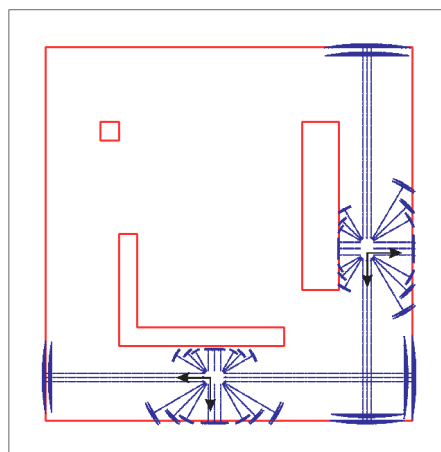


Figura 2.11 Ambigüïtat de posicions

Delafosse *et al.* (2004) també utilitzen l'anàlisi intervalar, en aquest cas però s'utilitzen dos tipus de sensors, un sensor de distància làser i dos encoders òptics. Es modelitza la seva imprecisió mitjançant intervals i les dades es fusionen tenint en compte les restriccions que han de satisfer els intervals corresponents a les diferents mesures. En aquest mètode les dades dels encoders permeten determinar el posicionament del robot a curt termini mitjançant l'hodometria. Els autors parlen d'errors de posició de 10 cm i d'orientació d'1°.

Mètodes basats en “*model-matching*”

Els mètodes que es presenten a continuació creen un mapa local de l'entorn a partir de les mesures dels sensors exteroceptors instal·lats al robot, i el comparen amb el mapa global que és conegut *a priori*. A partir d'aquesta correspondència entre el mapa local i el mapa global conegut es determina la localització del robot. Aquesta tècnica és la precursora de l'SLAM, que es comentarà a l'apartat següent, en la qual el robot no coneix l'entorn i es posiciona sobre aquest mapa construït a partir dels sensors.

El treball de Crowley (1989) és un dels primers en aquest camp. S'estudia el posicionament d'un robot mòbil que incorpora 24 sensors d'ultrasons. L'article presenta un mètode per a extreure segments de línia de l'entorn a partir de les mesures de distància dels sensors d'ultrasons. El mètode obté una estimació d'aquest segment amb una certa imprecisió (posicional i angular) coneguda, ja que està relacionada amb la resolució dels sensors. Un algorisme compara aquests segments del mapa local del robot amb els del mapa global conegut *a priori*. Un cop fet aquest *matching* es coneix la posició del vehicle.

El mètode que proposa Crowley utilitza un filtre de Kalman per a fer un seguiment dinàmic de la trajectòria del robot. L'estat del robot (posició i orientació) es determina a curt termini hodomètricament, i discontinuament es va corregint aquest estat a partir de l'associació dels segments mesurats amb el mapa global de l'entorn. El filtre de Kalman té en compte la imprecisió en l'extracció dels segments, els errors són considerats gaussians. Les precisions de posicionament aconseguides amb aquest mètode són de l'ordre de 10 cm.

En el treball de Cox (1991) es presenta tant el sistema de posicionament com el guiatge del robot *Blanche*. Pel que fa al sistema de posicionament el robot utilitza un sensor d'infraroigs rotatiu que mesura distàncies a les parets o obstacles de l'entorn, el robot també incorpora encoders òptics als eixos de les rodes. Les mesures d'aquest sensor d'infraroigs s'utilitzen per a establir la correspondència entre el mapa local detectat i el mapa global, en aquest cas però no s'extreuen segments de les mesures (com en el cas de Crowley) sinó que es fa una correspondència entre el punt mesurat i el mapa de segments global de l'entorn, Figura 2.12.

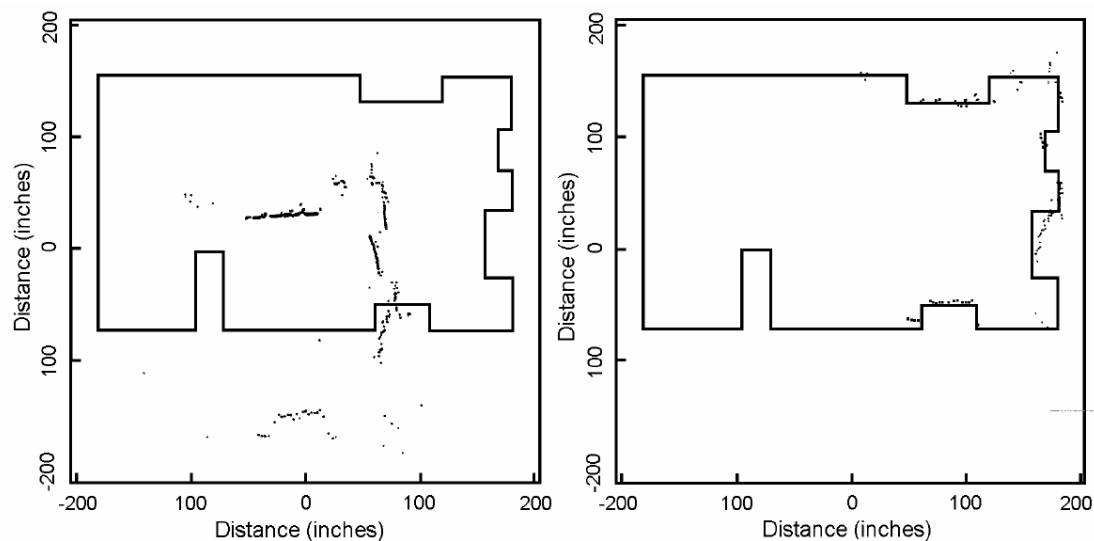


Figura 2.12 Punts locals mesurats abans i després de fer la correspondència [Cox 1991]

Per a fusionar les dades dels encoders amb el posicionament absolut per identificació de l'entorn, el treball presenta un algorisme que té en compte els errors en les mesures, assumint que aquests són gaussians. En una trajectòria on el robot circulava a una velocitat de l'ordre de 5 cm/s, es va obtenir un error de posició màxim de 15 cm.

Borthwick i Durrant-Whyte (1994) presenten una millora dels mètodes anteriors que es basa en un sistema de posicionament anàleg al del treball [Cox 1991]. Aquest mètode presenta com a millora més significativa el fet que es pot utilitzar per a posicionar en temps real el robot quan aquest es mou a la seva velocitat nominal d'1 m/s. Aquesta operació en temps real s'obté reduint el temps de càlcul de l'algorisme d'associació de mapes –local i global– a partir d'una divisió *a priori* del mapa global en una *matriu de submapes*. D'aquesta manera el volum de dades a comparar és menor i l'algorisme té un cost computacional més baix.

El mètode de Borthwick i Durrant-Whyte també presenta una millor distribució del processament associat al posicionament que es dona al llarg de tot el cicle de rotació del sensor. En el cas anterior, aquest càlcul s'iniciava al final de cada volta completa. Per a fer el seguiment dinàmic de la trajectòria el mètode fa ús d'un filtre de Kalman estès (EKF).

Els treballs de Jensfelt i Christensen (1999 i 2001) tenen com a objectiu el seguiment dinàmic de la trajectòria d'un robot a partir d'un model minimalista de l'entorn del robot que garanteixi però una certa precisió de posicionament. El model de l'entorn està format per un conjunt de rectes, de les que se'n coneixen els punts extrems.

El sistema de posicionament està format per un sensor làser de profunditat (*laser range scanner*) que fa un escanrat de 180° i encoders situats als eixos de les rodes. Els encoders serveixen per a tenir una informació a curt termini de la variació del posicionament del robot. El sensor làser s'utilitza per a extreure informació de l'entorn que es compara amb el mapa conegut *a priori*, actualitzant d'aquesta manera el posicionament hodomètric relatiu. L'eina que s'utilitza per a fusionar les mesures hodomètriques i del sensor làser és també un EKF, Figura 2.13. Es van fer diverses proves experimentals per a garantir la robustesa del mètode. Entre d'altres, el treball presenta un experiment de 90 minuts de durada durant el qual el robot no va perdre el coneixement de la seva configuració en cap moment.

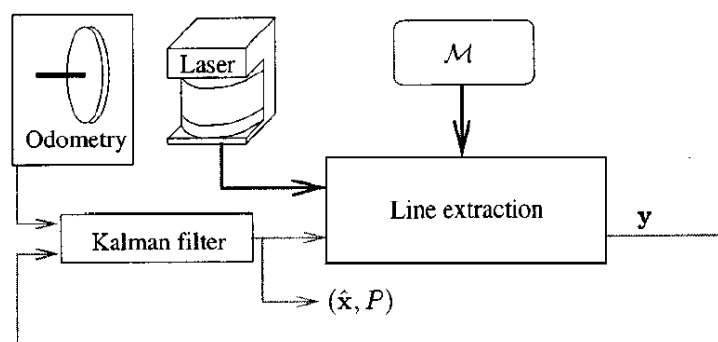


Figura 2.13 Fusió de les dades hodomètriques i del làser per mitjà d'un EKF [Jensfelt i Christensen 2001]

El mètode d'Arras *et al.* (2001) és semblant a l'anterior ja que també es basa en un sensor làser de profunditat –a partir del qual s'extreuen les línies corresponents a les parets del

mapa de l'entorn— i en un algorisme recursiu EKF. Aquest però incorpora a més una càmera CCD i un algorisme que extreu línies verticals de les imatges que corresponen a les cantonades. Aquesta càmera fa que es disminueixi tant l'error de posició com el d'orientació respecte a utilitzar únicament el làser. No obstant, el temps de càlcul és molt elevat: 0,411 s, set vegades més gran que el temps necessari quan s'utilitzen únicament les dades provinents del làser *scanner*.

En el treball que presenten Neira *et al.* (1999), el sistema de posicionament es basa en un sensor làser de profunditat com en els treballs comentats anteriorment. A partir d'aquest sensor s'obtenen dos tipus d'imatges: de *profunditat* i d'*intensitat*. Les primeres permeten determinar els punts de les parets de l'entorn, i les segones serveixen per a identificar cantonades. Aquesta informació es fusiona amb l'hodometria del robot per mitjà d'un filtre de Kalman estès.

En aquest treball es presenten els resultats experimentals obtinguts en tres condicions diferents: utilitzant únicament les imatges de profunditat o les d'intensitat, i utilitzant tota la informació provinent dels dos tipus d'imatges. S'observa en els resultats que les el·lipses d'incertesa de posició són més petites quan s'utilitzen els dos tipus d'imatges. Les precisions són de l'ordre de 10 cm en posició i $0,15^\circ$ en orientació. Un inconvenient d'aquest mètode és el temps de càlcul, de l'ordre del segon, en ser el processament d'imatges computacionalment costós.

Sasiadek i Hartana (2001) presenten un mètode de posicionament basat en hodometria i sensors d'ultrasons que mesuren distàncies entre el sensor i les parets de l'entorn. La majoria de mètodes presentats utilitzen un filtre de Kalman estès per a actualitzar el posicionament relatiu determinat hodomètricament. Aquest filtre, com ja s'ha dit, parteix d'una sèrie d'hipòtesis pel que fa als errors en les mesures, que són considerats gaussians i independents entre ells. Segons els autors, en la realitat els errors associats a les mesures no presenten aquesta distribució i a més les matrius de covariància d'aquests errors són complicades de determinar per a una aplicació real. Tot això, junt amb les linealitzacions locals que realitza el filtre fan que aquest mètode pugui divergir.

Sasiadek i Hartana proposen un mètode que combina un filtre de Kalman i un sistema adaptatiu de lògica difusa (AFLS, *Adaptive Fuzzy Logic System*) per a evitar la seva divergència. Aquest sistema *fuzzy* està basat en unes normes que determinen un factor de guany (entre 0 i 1) a partir de la matriu d'innovació del EKF i de la seva covariància. Aquest factor assigna un pes a l'etapa d'actualització del filtre. Per tant, el resultat és un filtre de Kalman que s'adapta en temps real en funció de la matriu d'innovació. Els autors presenten unes simulacions on demostren un millor funcionament del seu mètode respecte al filtre de Kalman, no es presenten, però, experimentacions sobre prototips reals.

Mètodes probabilístics o bayesians

En aquest apartat es descriuen mètodes que determinen la posició i l'orientació del robot assignant probabilitats a diferents configuracions possibles a partir de les mesures dels sensors i de la distribució del seu error. La propietat fonamental d'aquests mètodes és la seva robustesa a errors, no obstant la seva precisió és limitada.

El mètode que presenten Burgard *et al.* (1996) utilitza un mallat (*grid*) de l'espai de treball per a trobar la posició del vehicle. Aquest mètode està dissenyat per treballar amb sensors d'ultrasons –que mesuren distàncies– a partir dels quals es van actualitzant les probabilitats associades a cada casella del mallat. La casella amb probabilitat més gran determina el posicionament del robot. El mètode no depèn del coneixement de la configuració inicial del robot, per tant és possible l'arrencada en fred del vehicle sense informació posicional. Els principals avantatges d'aquest mètode són els següents:

- No cal que es conegui la configuració inicial del robot. En cas de fallida del sistema de posicionament –si el robot es perd–, aquest es recupera sense cap algorisme addicional.
- El mètode és robust a models imprecisos de l'entorn i a sensors també imprecisos.
- El mètode és robust a situacions ambigües, com per exemple quan hi ha presència d'obstacles al voltant del robot.

En el treball es mostren experiments reals de navegació d'un robot mòbil per un espai de 600 m². El robot comptava amb 24 sensors d'ultrasons i encoders a les rodes per a fer el seguiment dinàmic. En el treball no es parla de precisions, però aquest no és un tema important per a aquest tipus de sistemes, és més important la robustesa del mètode i el fet de permetre la navegació per entorns ambigus, per exemple amb la presència de persones.

En aquest camp són importants els treballs de Gutmann *et al.* (1998) i de Gutmann (2002). En el primer d'aquests treballs es comparen dos mètodes de posicionament: *Localització de Markov*, el qual determina una distribució de probabilitats en el mallat de posicions possibles del vehicle, i un mètode basat en un *filtre de Kalman* que fa correspondència entre el mapa de l'entorn i el mapa local (*model-matching*).

A partir de les proves experimentals realitzades mitjançant un robot mòbil de cinemàtica diferencial equipat amb dos sensors làser de profunditat (que escombren els 360°), 24 sensors d'ultrasons i encoders a les rodes, s'arriba a les següents conclusions pel que fa als dos mètodes comparats:

- Quan es té suficient informació dels sensors instal·lats al vehicle, el mètode basat en el filtre de Kalman és més precís –un ordre de magnitud– que el mètode bayesià.
- El mètode de Markov és més robust a imprecisions del sistema, tant pel que fa a les mesures dels sensors com pel que fa a la modelització de l'entorn. És més robust també a ambigüitats que puguin aparèixer durant el seu funcionament.

L'autor introdueix com a treball futur un mètode únic que aprofiti els avantatges dels dos mètodes anteriors: la precisió i eficiència del filtre de Kalman amb la robustesa del mètode bayesià de Markov. Aquest mètode híbrid *Markov-Kalman* es presenta a [Gutmann 2002], els resultats obtinguts demostren la més gran precisió i robustesa, però té l'inconvenient de ser un mètode computacionalment costós, ja que s'han de fer els càlculs corresponents als dos mètodes.

Pel que fa al mètode de posicionament de Markov, és important el treball de Fox *et al.* (1999). Aquest article és interessant perquè estén el posicionament markovià a entorns

dinàmics amb objectes en moviment mitjançant una tècnica de filtratge. El mètode és validat experimentalment en entorns amb moltes persones en moviment que poden bloquejar la mesura dels sensors del robot. Al mateix treball també es pot comprovar com afecta la resolució del mallat –és a dir, la grandària de les cel·les– en la precisió i el temps computacional del mètode.

El treball de Gutmann *et al.* (1998) es complementa amb el de Gutmann i Fox (2002), en el que es comparen els tres algorismes anteriors (EKF, Markov, i Markov-Kalman) amb una sèrie d'algorismes de posicionament probabilístics anomenats de Monte Carlo (MCL, *Monte Carlo Localization*). Aquests algorismes són presentats de forma àmplia a [Thrun *et al.* 2001].

El mètode probabilístic de Monte Carlo es diferencia del de Markov en el fet que no discretitza l'espai de treball del robot, és a dir, no treballen amb un mallat i per tant no requereixen tanta memòria i són més ràpids. Els mètodes de Monte Carlo parteixen d'un conjunt de mostres de l'estat del robot –posició i orientació– a les quals assignen una probabilitat p . La posició estimada del robot és la mostra que té una probabilitat més elevada. A partir d'aquí es van generant aleatòriament noves mostres a cada posicionament absolut, la nova probabilitat es determina a partir del posicionament anterior i de les mesures dels sensors absoluts d'ultrasons i de l'hodometria.

En el treball comparatiu de Gutmann i Fox (2002) s'arriba a les següents conclusions:

- El mètode basat únicament en l'EKF és el més eficient i precís quan els errors en les mesures són baixos i no es presenten ambigüitats en la captació de l'entorn.
- Els mètodes probabilístics Markov i Monte Carlo són més robusts als errors i a entorns canviants per la presència d'obstacles.
- Els mètodes probabilístics permeten retrobar ràpidament el posicionament del robot en cas de fallida. El mètode combinat Markov-Kalman permet fer ús de l'eficiència de l'EKF i de la robustesa de la localització de Markov.
- El mètode de Markov-Kalman té un comportament semblant al del mètode de Monte Carlo, pel que fa a precisió i robustesa. La versió adaptativa del mètode de Monte Carlo –anomenat a l'article com A-MCL– és el millor en termes de robustesa, precisió i temps de relocalització després d'una fallida.

Mètodes basats en *landmarks* naturals

A continuació s'exposen una sèrie de mètodes que detecten característiques *naturals* discontinües de l'entorn del robot –com poden ser cantonades, parets, columnes, etc–. Un treball interessant i pioner és el que presenten Leonard i Durrant-Whyte (1991). En aquest es defineix el terme de “*geometric beacon*” com aquella característica observable de l'entorn del robot en mesures successives dels sensors, que pot ser paramentritzada geomètricament. L'algorisme que presenten els autors està basat en un filtre de Kalman (EKF) que utilitza les mesures relatives al robot de la posició d'aquestes característiques naturals i un mapa *a priori* de la posició d'aquestes per a actualitzar el posicionament hodomètric del vehicle.

En el treball, aquest sistema de posicionament s'implementa en dos robots diferents, un utilitza sis sensors d'ultrasons estàtics al vehicle i l'altre incorpora un únic sensor d'ultrasons rotatiu. En el treball no es parla de precisions del mètode, únicament es comenta que pot ser utilitzat en temps real i que una línia de recerca per a millorar el mètode consisteix en poder prescindir del mapa, conegut *a priori*, de l'entorn per a realitzar la navegació del vehicle. S'introdueix doncs la necessitat d'aquesta nova tècnica anomenada SLAM que es comentarà posteriorment a l'apartat 2.3.3 d'aquest capítol.

Madhavan i Durrant-Whyte (2004) presenten un treball per a posicionar un vehicle convencional autònom en un entorn exterior, Figura 2.14. El vehicle circula per un entorn conegut *a priori* i utilitza un sensor làser de profunditat (*laser range scanner*) per a mesurar la distància dels límits de l'entorn. A partir d'aquesta mesura s'extreuen els punts de màxima curvatura de les superfícies que limiten l'entorn, dels quals se'n coneix la seva posició absoluta *a priori*.



Figura 2.14 Vehicle estudiat al treball [Madhavan i Durrant-Whyte 2004]

Un cop detectats aquests punts de màxima curvatura, que fan el paper de *landmarks* naturals, s'utilitza un filtre de Kalman per a fusionar aquestes mesures amb l'evolució hodomètrica del sistema. En el treball es realitzen uns experiments per a determinar la precisió d'aquest mètode. Com a mesura de referència es fa servir un sensor GPS Diferencial. L'error de posició es manté per sota de 25 cm i el d'orientació per sota de 2° en una trajectòria de 160 m recorreguda a una velocitat nominal de 20 km/h.

Els autors comenten que el mètode és ràpid i robust a errors, no obstant durant els experiments no hi havia obstacles dinàmics a l'entorn que introduïssin errors no sistemàtics en les mesures dels sensors (considerats com a gaussians). Un altre punt crític seria validar la no divergència del filtre per a trajectòries més llargues a la considerada.

Adam *et al.* (1999) presenten un mètode on es fusionen les dades hodomètriques amb la informació d'un sistema de visió per a obtenir el posicionament del robot. La càmera que incorpora el vehicle té 2 graus de llibertat de rotació gràcies als quals pot fixar el seu eix òptic a qualsevol punt de l'entorn mentre el vehicle està en moviment. Mitjançant aquesta fixació amb un punt de l'entorn es corregeixen els errors –sistemàtics i no sistemàtics– associats a l'hodometria, encara que la posició d'aquest punt no sigui coneguda.

Segons els autors, l'algorisme de fixació té un cost computacional baix i per tant pot tenir un bon funcionament en temps real mentre el vehicle es mou. Aquesta informació provinent de la càmera es fusiona amb l'hodometria mitjançant un EKF. D'aquesta manera s'obté una precisió de posicionament més gran que si s'utilitza únicament l'hodometria, tal com mostren les simulacions del mètode incloses al treball. L'avantatge d'aquest mètode és que només cal identificar un únic punt de l'entorn per fer el seguiment de trajectòria, en altres mètodes geomètrics cal utilitzar-ne un mínim de tres, els quals, a més, s'han d'identificar. La precisió d'aquest mètode de fixació és, però, baixa (13 cm).

Rizzi i Cassinis (2001) presenten un mètode de posicionament que utilitza una càmera i una superfície cònica reflectant per a captar imatges omnidireccionals d'un entorn conegut *a priori*. L'estructura del sistema de posicionament és el que apareix a la Figura 2.15. La càmera i el mirall cònic capten la imatge de l'entorn, i aquesta es transforma de coordenades polars a cartesianes tal com es pot veure a la figura. A continuació un subsistema d'aprenentatge transforma aquesta segona imatge en la localització del robot mòbil dins l'entorn conegut.

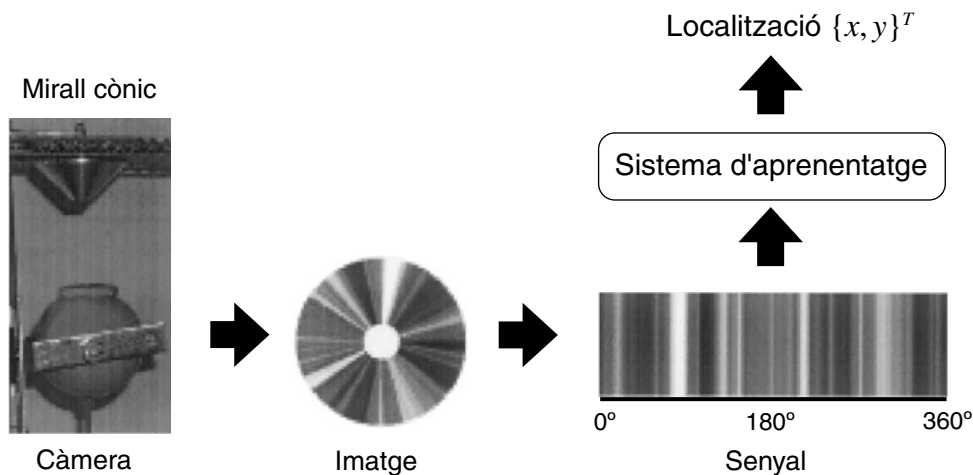


Figura 2.15 Estructura del sistema de posicionament a [Rizzi i Cassinis 2001]

En el treball s'implementen i es comparen dos tipus de subsistemes d'aprenentatge. Un basat en xarxes neuronals i un altre basat en regressions estadístiques. Els autors utilitzen dues xarxes neuronals. La primera, anomenada STD3BP, té una capa d'entrada (*input layer*) de 360x3 unitats (valors RGB associats a cada valor angular, resolució d'1°), dues capes intermèdies (*hidden layers*) de 36 i 20 neurones respectivament i una capa de sortida (*output layer*) de dues unitats, les coordenades x i y de posició del robot. La segona xarxa neuronal, BIONET, té les mateixes capes d'entrada i sortida, però té tres capes intermèdies de 108, 36 i 36 neurones respectivament. Les dues xarxes anteriors s'entrenen amb una base de dades d'imatges corresponents a diferents posicions del vehicle, un cop entrenades ja es poden utilitzar per a posicionar el robot en temps real.

El subsistema d'aprenentatge basat en regressions utilitza la mateixa base de dades per a crear unes relacions estadístiques lineals entre les característiques de la imatge enregistrada –variables independents– i la localització del robot –variables dependents–. A partir de les experimentacions mitjançant ambdós mètodes, s'arriba a la conclusió que són semblants pel que fa a precisió, de l'ordre de centímetres, però el mètode estadístic és millor pel que fa al cost computacional i a la memòria requerida.

El treball d'Alenyà *et al.* (2005) és interessant perquè combina un sistema de posicionament làser com el que s'estudia a la tesi, basat en reflectors artificials, amb un mètode de posicionament basat en visió per computador. El mètode de posicionament làser utilitza la triangulació per intersecció d'arcs capaços introduïda a l'apartat 2.3.1 per a calcular la posició i l'orientació del robot amb una precisió de posicionament elevada. En canvi, el mètode de visió per computador determina el posicionament del robot d'una manera menys precisa a partir de la identificació de contorns coneguts de l'entorn i de la seva deformació en moure's el robot.

En el treball aquest mètode s'utilitza per a posicionar un transpalet apilador de magatzem. El sistema de posicionament per làser s'utilitza quan es requereix més precisió que és en la càrrega i descàrrega de palets. En canvi, en la marxa de llarg recorregut del vehicle el sistema de posicionament utilitzat és el de visió, menys precís però més flexible perquè no requereix la modificació de l'entorn del robot. En el treball es presenten resultats fruit de l'experimentació del mètode en una empresa.

En el treball de Rupp i Levi (2000) també es combina l'ús de marques naturals –en aquest cas cantonades– i marques artificials. El mètode que proposen utilitza marques artificials en les zones on l'error de posicionament associat a l'ús de marques naturals de l'entorn és elevat. L'algorisme utilitza un factor de confiança (*confidence level*) que és inversament proporcional a l'error màxim de posicionament –per a una determinada posició– tenint en compte el nombre de marques visibles i la seva distribució. En el treball, Rupp i Levi presenten unes proves experimentals en les que s'afegeixen estratègicament tres marques artificials a un entorn amb vuit marques naturals, afegint aquestes marques aconseguen una millora en la precisió de posicionament del 46,5%.

Consideracions conclusives a propòsit del posicionament per reconeixement de l'entorn

A partir de la recerca bibliogràfica en l'àmbit dels mètodes de posicionament absolut que es basen en el reconeixement de l'entorn del robot, se'n deriven les següents consideracions conclusives:

- Els mètodes que utilitzen l'àlgebra intervalar per a obtenir el conjunt de posicionaments que verifiquen els intervals de mesura dels diferents sensors del robot permeten realitzar l'arrencada en fred del vehicle, i són molt robusts al soroll present a les mesures i als *outliers*. No obstant, són algorismes que requereixen temps de càlcul elevats i que poden presentar ambigüitats de posició.
- Els sistemes de posicionament que identifiquen l'entorn i fan una correspondència (*matching*) amb el mapa del model són més ràpids que els anteriors. La majoria d'ells es basen en el EKF per a fusionar les dades hodomètriques amb les mesures externes, per tant s'assumeix que tots els errors presents són gaussians. Les precisions que s'obtenen amb aquests mètodes són de l'ordre de centímetres.
- Els mètodes de posicionament probabilístics o bayesians assignen probabilitats a les diferents configuracions possibles del robot, la configuració estimada és la que presenta una probabilitat més gran. Alguns mètodes, com el de Markov, utilitzen un mallat de l'entorn del vehicle en el qual cada casella representa una posició

possible del robot, en tant que d'altres, com el de Monte Carlo, parteixen d'una mostra de totes les possibles posicions que es va actualitzant. Aquests mètodes són en general robusts a errors i a la presència d'obstacles a l'entorn, però tenen una precisió limitada i temps de càlcul elevats que dificulten la seva aplicació en temps real.

- Finalment, els mètodes basats en marques naturals distingeixen característiques, de posició coneguda, de l'entorn del robot. Aquests mètodes són en general menys precisos que els basats en marques artificials (introduïts a l'apartat 2.3.1), però són més flexibles ja que no requereixen de cap instal·lació addicional. Hi ha treballs en els que es millora la precisió del mètode utilitzant marques artificials en algunes condicions, ja sigui perquè l'aplicació del vehicle ho requereix o perquè hi ha zones on la precisió obtinguda utilitzant només marques naturals és molt baixa.

2.3.3 SLAM: *Simultaneous Localization And Mapping*

Una tècnica que en els últims cinc anys ha pres molta importància dins l'àmbit de la robòtica mòbil és l'SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*), també anomenada CML (*Concurrent Mapping and Localization*). Aquesta tècnica requereix que el robot explori autònomament l'entorn mitjançant els seus sensors, interpreti les dades, construeixi un mapa adequat de l'entorn i es localitzi de forma adequada al seu interior [Martinelli *et al.* 2004].

Aquesta tècnica és útil per a robots que actuïn en entorns que poden ser canviants, aquest és el cas dels robots per a entorns domèstics, o robots que actuïn a l'exterior o fins i tot sota l'aigua com és el cas dels UAVs (UAV, *Underwater Autonomous Vehicle*). Es tracta d'un mètode de posicionament molt flexible, ja que no requereix cap tipus de coneixement de l'entorn del vehicle, però que actualment encara no és adequat per a aplicacions que requereixin una precisió de posicionament gran.

El primer treball basat en aquesta tècnica va ser presentat per Smith *et al.* (1988). En aquest treball es presenta una implementació de l'SLAM basada en un filtre de Kalman estàt. En aquest algorisme EKF-SLAM el vector d'estat conté informació de la localització del vehicle i d'una sèrie de característiques detectades a l'entorn del robot. D'aquesta manera es té coneixement en temps real de la posició del vehicle i de les característiques de l'entorn detectades mitjançant els sensors. Aquest mètode EKF-SLAM s'ha implementat amb resultats satisfactoris tant en vehicles en entorns interiors [Castellanos *et al.* 1999], com en vehicles que actuen a l'exterior [Guivant i Nebot 2001].

Tot i que el mètode anterior s'ha comprovat de forma satisfactòria en diverses realitzacions experimentals, és conegut que les aproximacions inherents al filtre de Kalman en la linealització del sistema i de les equacions de les mesures poden fer que aquest divergeixi [Bar-Shalom *et al.* 2001]. Els objectius principals dels investigadors que treballen en aquest camp és buscar algorismes cada vegada més estables, eficients, i robusts a errors no sistemàtics i *outliers*.

Castellanos *et al.* (2004) proposen en el seu treball un nou mètode EKF-SLAM (*robotcentric mapping*) que redueix els errors originats en les linealitzacions del mètode fent ús de mapes locals de dimensió més reduïda. Com s'ha dit, l'acumulació d'aquests

errors provoca la divergència del mètode al cap d'un cert nombre d'iteracions, esdevenint aleshores inconsistent. El nombre d'iteracions per a les quals es presenta la divergència es redueix quan el vehicle actua en entorns de dimensions grans. L'algorisme que presenten Castellanos *et al.* redueix aquests errors garantint una major estabilitat i consistència del filtre, fins i tot quan el vehicle actua dins entorns grans. Els autors deixen com a treball futur la implementació de mètodes no lineals i no gaussians alternatius que siguin més estables i computacionalment eficients.

Martinelli *et al.* (2004) presenten un mètode per a un robot que circula en un entorn tancat. L'avantatge del mètode és que genera un mapa relatiu al vehicle, l'estat del qual és representat mitjançant quantitats invariants a la translació i orientació del robot. D'aquesta manera l'estimació de l'estat dels *landmarks* detectats a l'entorn no depèn del moviment del robot i per tant no es veu afectat pels errors hodomètrics sistemàtics. Els *landmarks* o característiques de l'entorn detectades en el mètode són interseccions entre segments extrems de l'entorn, és a dir, cantonades.

En aquest mètode es mesura l'error màxim de posició –relatiu al vehicle– del *landmark*, i només s'utilitzen aquells en què l'error es troba per sota un cert llindar (2 cm). Mitjançant aquest mètode s'assegura una major estabilitat del filtre de Kalman estès utilitzat per a fer el seguiment del posicionament i del mapa de l'entorn. En el treball es presenten experiments reals en els que s'utilitza un robot mòbil equipat amb un sensor làser de profunditat de 360°.

Folkesson i Christensen (2004) introdueixen una nova metodologia per al problema de l'SLAM que els autors anomenen *Graphical SLAM*. En aquest el mapa del model es representa mitjançant un graf, en el qual alguns nodes representen l'estat del model –posicionament del robot i mapa de l'entorn– i altres les mesures dels sensors. Les estimacions i actualitzacions de l'estat es realitzen mitjançant operacions sobre el graf.

El principal avantatge del mètode proposat, respecte la metodologia clàssica basada en un EKF, és que no està limitat a variables d'estat amb distribució d'error gaussiana. El mètode pot tractar amb qualsevol distribució de probabilitat de les variables d'estat. A més, el mètode és no lineal i no pateix els efectes no desitjables de divergència presents al EKF. En el treball es presenten resultats experimentals realitzats amb un robot mòbil equipat amb un sensor làser de profunditat (SICK *laser range scanner*) que navega en entorns oberts. L'algorisme desenvolupat funciona en temps real (20-25 ms per iteració), i s'observa en l'experimentació com els mapes de l'entorn obtinguts són més precisos que els obtinguts mitjançant EKF-SLAM.

Capítol 3

Model cinemàtic dels robots considerats. Posicionament hodomètric

En aquest apartat es presenten els models cinemàtics dels robots que s'estudien en aquesta tesi: cinemàtica diferencial, cinemàtica de tricicle i cinemàtica omnidireccional amb rodes de lliscament direccional. S'introdueixen les equacions que relacionen la velocitat angular del robot i la velocitat d'un dels seus punts amb les velocitats angulars de les rodes del vehicle. La integració temporal d'aquestes equacions permet el càlcul dinàmic de la posició i l'orientació del robot, aquest procés es coneix com a *posicionament hodomètric*.

Aquest model hodomètric és l'emprat pels mètodes de posicionament dinàmic basats en el filtre de Kalman estès que fusionen l'hodometria amb mesures absolutes de l'entorn del robot per a fer en cada instant de temps una estimació òptima del posicionament del robot. Aquests mètodes s'exposen amb detall al Capítol 5. El motiu d'integrar mesures absolutes de l'entorn del robot en el càlcul del posicionament es deu al fet que utilitzar únicament l'hodometria no és adequat perquè s'acumulen errors sistemàtics i aleatoris com ja s'ha comentat a l'apartat 2.2.1.

En aquest apartat, per a l'estudi de la cinemàtica dels robots considerats es parteix de les equacions de la cinemàtica del sòlid rígid [Agulló Batlle 2002]. Les rodes són considerades com a sòlids rígids que no llisquen en el seu punt de contacte amb el terra.

3.1 Cinemàtica diferencial

Un vehicle amb cinemàtica diferencial consta de dues rodes coaxials d'igual radi que tenen velocitats angulars de rotació ω_1 i ω_2 imposades per dos motors independents. Aquests vehicles tenen dos graus de llibertat –imposats pels dos motors– que es poden descriure per mitjà de la velocitat longitudinal v_L del punt P –punt mig de l'eix de les rodes– i de la velocitat angular $\dot{\psi}$ de canvi d'orientació del xassís, tal com es mostra a la Figura 3.1.

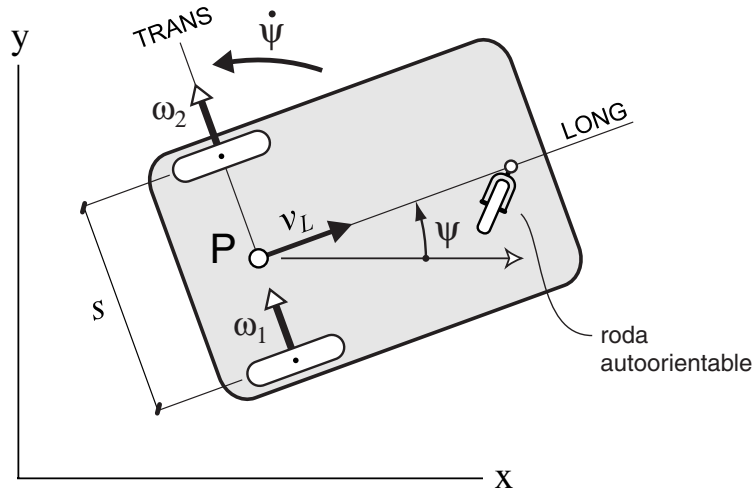


Figura 3.1 Robot mòbil amb cinemàtica diferencial

A partir de les variables cinemàtiques de la figura, i fent ús de la cinemàtica del sòlid rígid, s'arriba a les següents equacions que relacionen la velocitat de P i la velocitat angular de canvi d'orientació del xassís amb les velocitats de rotació de les rodes ω_1 i ω_2 –positives en el sentit indicat a la figura–:

$$v_L = \frac{r}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (3.1)$$

$$\dot{\psi} = \frac{r}{s}(\omega_1 - \omega_2), \quad (3.2)$$

on r representa el radi de les rodes motrius del vehicle i s la distància entre rodes. A partir d'aquestes variables, l'evolució hodomètrica de la posició de P $\{x, y\}^T$ i de l'orientació del robot ψ –definida com l'angle de l'eix longitudinal del robot respecte a l'eix x del sistema de referència utilitzat, Figura 3.1– s'obté mitjançant les integracions temporals següents:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_L(t) \cos \psi(t) dt, \quad (3.3)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_L(t) \sin \psi(t) dt, \quad (3.4)$$

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi}(t) dt, \quad (3.5)$$

on $\{x_0, y_0\}^T$ i ψ_0 són la posició inicial de P i l'orientació inicial del robot respectivament. Cal notar que les integrals (3.3) i (3.4) no tenen una solució analítica per a un moviment general del robot. A més, els errors que es cometen en la determinació de les variables v_L i $\dot{\psi}$ –ja siguin del tipus sistemàtic o bé aleatori–, es propaguen de forma no lineal a través de les integracions temporals anteriors generant un error acumulatiu en les variables del posicionament x, y, ψ [Kelly 2004]. En aquest últim treball es dona una descripció general linealitzada de la propagació d'aquests errors en l'hodometria.

Els errors presents a l'hodometria es poden reduir a partir d'una bona modelització i calibratge, però a la llarga sempre produiran un efecte acumulatiu no desitjat. Cal doncs incorporar un sistema que detecti característiques de l'entorn per a corregir l'error periòdicament. El filtratge de Kalman és l'eina que permet fusionar aquestes mesures externes amb el model hodomètric, tal com s'exposa al Capítol 5.

En ser el filtratge de Kalman un algorisme recursiu que opera en temps discret, les integrals (3.3)-(3.5) s'utilitzen discretitzades, així entre dos instants de temps consecutius t_{k-1} i t_k ($\Delta t = t_k - t_{k-1}$) es té:

$$x_k = x_{k-1} + v_{L,k-1} \cos \psi_{k-1} \Delta t = x_{k-1} + \frac{r \Delta t}{2} (\omega_{1,k-1} + \omega_{2,k-1}) \cos \psi_{k-1}, \quad (3.6)$$

$$y_k = y_{k-1} + v_{k-1} \sin \psi_{k-1} \Delta t = y_{k-1} + \frac{r \Delta t}{2} (\omega_{1,k-1} + \omega_{2,k-1}) \sin \psi_{k-1}, \quad (3.7)$$

$$\psi_k = \psi_{k-1} + \dot{\psi}_{k-1} \Delta t = \psi_{k-1} + \frac{r \Delta t}{s} (\omega_{1,k-1} - \omega_{2,k-1}). \quad (3.8)$$

Seguint la notació que s'utilitza en l'algorisme de Kalman, en el que es pren com a vector d'estat el posicionament (o configuració) del robot $\{x_k, y_k, \psi_k\}^T$, es té:

$$\begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{Bmatrix} + \frac{r \Delta t}{2s} \begin{Bmatrix} s(\omega_{1,k-1} + \omega_{2,k-1}) \cos \psi_{k-1} \\ s(\omega_{1,k-1} + \omega_{2,k-1}) \sin \psi_{k-1} \\ 2(\omega_{1,k-1} - \omega_{2,k-1}) \end{Bmatrix}. \quad (3.9)$$

Aquesta equació vectorial és, com es veurà al Capítol 5, l'equació de transició d'estat del filtre de Kalman estès.

3.2 Cinemàtica de tricicle

Una altra cinemàtica usual en l'àmbit de la robòtica mòbil és la de tricicle. De fet un dels robots utilitzats en una fase prèvia del projecte en el qual s'inscriu aquesta tesi va ser un transpalet autònom amb aquest tipus de cinemàtica. La Figura 3.2 mostra l'esquema d'un vehicle amb cinemàtica de tricicle. El vehicle consta de dues rodes coaxials d'eix fix, i d'una roda motriu i directriu amb la que es controlen els dos graus de llibertat de la plataforma mòbil. S'anomena ω la velocitat angular de la roda respecte al seu eix i φ l'angle de direcció de la roda respecte a l'eix longitudinal del robot. Per tant, la velocitat del centre de la roda motriu i directriu és:

$$v = r\omega, \quad (3.10)$$

on r és el radi de la roda motriu i directriu.

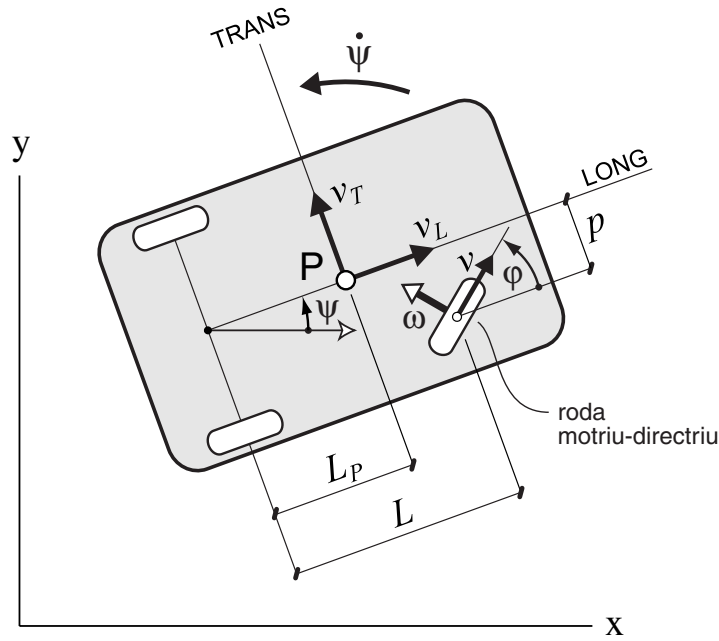


Figura 3.2 Robot mòbil amb cinemàtica de tricicle

A partir de les variables cinemàtiques i geomètriques de la figura, la cinemàtica del sòlid rígid condueix a l'equació d'evolució de l'orientació del robot:

$$\dot{\psi} = \frac{v}{L} \sin \varphi, \quad (3.11)$$

on L representa la distància entre eixos del vehicle. L'evolució hodomètrica de la posició d'un punt P sobre l'eix longitudinal del robot –Figura 3.2– dependrà de les seves components de velocitat longitudinal (v_L) i transversal (v_T):

$$\{\vec{v}(P)\} = \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \end{Bmatrix} = \frac{v}{L} \begin{Bmatrix} L \cos \varphi - p \sin \varphi \\ L_P \sin \varphi \end{Bmatrix}. \quad (3.12)$$

A partir d'aquesta velocitat i de la velocitat angular del robot –equació (3.11)–, l'evolució de la posició de P $\{x, y\}^T$ i de l'orientació del robot ψ s'obté per mitjà de les integrals temporals següents:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_L(t) \cos \psi(t) - v_T(t) \sin \psi(t) dt, \quad (3.13)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_L(t) \sin \psi(t) + v_T(t) \cos \psi(t) dt, \quad (3.14)$$

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi}(t) dt, \quad (3.15)$$

on $\{x_0, y_0\}^T$ i ψ_0 són la posició inicial de P i l'orientació inicial del robot. Emprant la mateixa operativa que per al cas del robot diferencial, s'obté la següent expressió que

modelitza l'evolució hodomètrica en temps discret del posicionament que s'empra en el filtratge de Kalman:

$$\begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{Bmatrix} + \frac{v_{k-1} \Delta t}{L} \begin{Bmatrix} (L \cos \varphi_{k-1} - p \sin \varphi_{k-1}) \cos \psi_{k-1} - (L_P \sin \varphi_{k-1}) \sin \psi_{k-1} \\ (L \cos \varphi_{k-1} - p \sin \varphi_{k-1}) \sin \psi_{k-1} + (L_P \sin \varphi_{k-1}) \cos \psi_{k-1} \\ \sin \varphi_{k-1} \end{Bmatrix}. \quad (3.16)$$

3.3 Cinemàtica omnidireccional amb rodes de lliscament direccional

En aquest apartat s'analitza la cinemàtica de robots basada en un tipus de rodes –les rodes omnidireccionals– que confereixen més maniobrabilitat, ja que un robot que utilitzi aquestes rodes pot disposar dels tres graus de llibertat del seu moviment pla. En concret s'estudia la plataforma robotitzada SPHERIK-3x3, que és la que s'utilitzarà en les simulacions informàtiques i en l'experimentació per a validar els algorismes proposats a la tesi.

En una roda omnidireccional que no llisca sobre el terra, la velocitat del centre és superposició de dos vectors velocitat, Figura 3.3(a), que tenen direccions fixes respecte al bastidor del vehicle –cap d'aquestes rodes pot ser qualificada de directriu–. Un dels vectors correspon al moviment motoritzat, el seu valor és $v_m = r\omega$ i està controlat pel motor de la roda, en tant que el valor v_{ll} de l'altre vector és lliure i s'adapta a la cinemàtica imposada pel conjunt de motors. L'angle α entre aquestes dues velocitats és constant. Aquestes rodes omnidireccionals són anomenades *rodes de lliscament direccional*, denominació provinent del caràcter lliure del moviment de velocitat v_{ll} , que ve a jugar el paper d'un lliscament del centre de la roda.

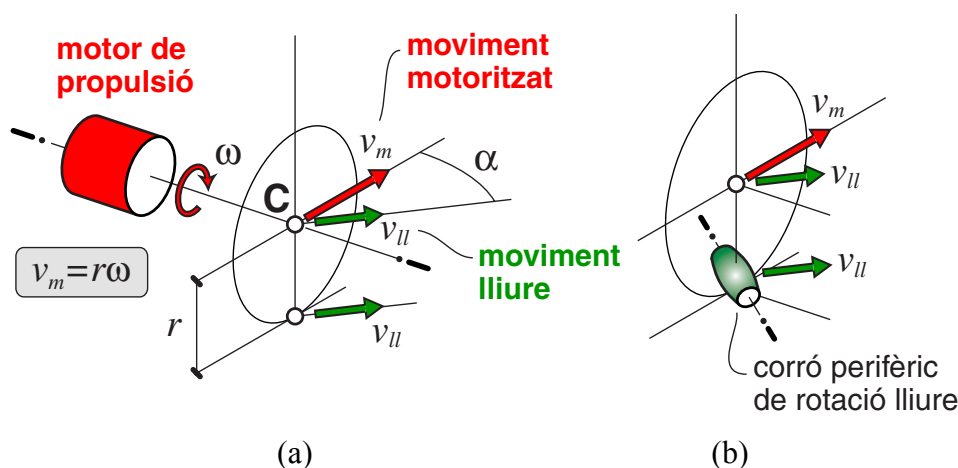


Figura 3.3 La roda omnidireccional de *lliscament direccional*

Amb tres d'aquestes rodes convenientment situades en el vehicle es poden controlar els tres graus de llibertat del moviment pla del bastidor del vehicle sense que cap de les rodes sigui directriu [Agulló Batlle 2004]. Les velocitats de lliscament dels centres de les rodes queden determinades pel moviment que cal introduir en el vehicle. El nombre de motors

implicat, 3, és el mínim necessari per a controlar els tres graus de llibertat del moviment pla del bastidor del vehicle.

La velocitat de lliscament del centre de la roda no implica que hi hagi lliscament entre el terra i l'element de la roda que hi està en contacte, ans al contrari el correcte funcionament cinemàtic d'aquestes rodes requereix l'absència d'aquest lliscament. Un procediment usual, però no únic, per aconseguir-ho és la utilització de corrons perifèrics a la roda, que poden girar lliurement al voltant dels seus eixos, Figura 3.3(b). Així, la rotació lliure del corró en contacte amb el terra permet la introducció de la velocitat "de lliscament" v_{ll} .

Sigui el cas d'un vehicle amb n rodes motrius de lliscament direccional, els centres de les quals tenen les direccions del moviment motoritzat i del lliscament fixes al bastidor, Figura 3.4. Per al centre C_i de la roda i , el moviment motoritzat té l'orientació β_i respecte al bastidor i està impulsat pel motor que fa girar la roda amb la velocitat angular ω_i . La direcció del moviment de lliscament forma l'angle α_i amb la del moviment motoritzat. La roda i té el centre C_i en la posició $\{p_i, q_i\}^T$ relativa al bastidor i el seu radi és r_i .

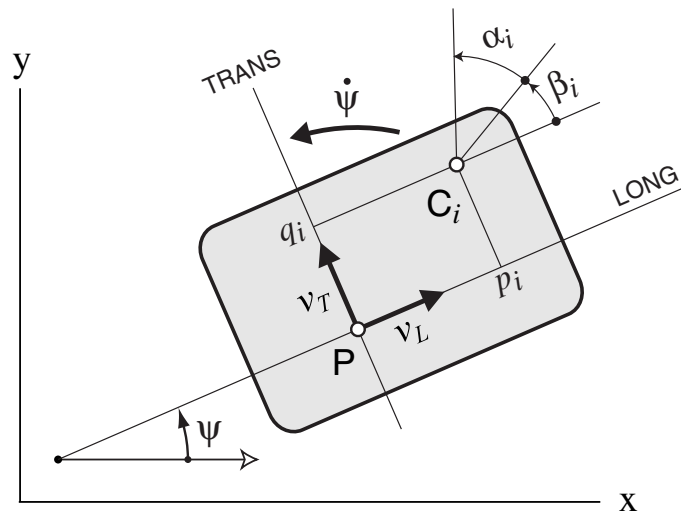


Figura 3.4 Vehicle amb rodes omnidireccionals de lliscament direccional

L'expressió següent relaciona la velocitat angular ω_i de la roda i amb les components longitudinal (v_L) i transversal (v_T) de la velocitat del punt P del bastidor, i la velocitat angular $\dot{\psi}$ de canvi d'orientació d'aquest:

$$\omega_i = \begin{Bmatrix} A_i & B_i & C_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

on A_i , B_i i C_i estan determinades per les expressions:

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i)}{r_i \sin \alpha_i}, \\
B_i &= \frac{-\cos(\alpha_i + \beta_i)}{r_i \sin \alpha_i}, \\
C_i &= \frac{-(q_i \sin(\alpha_i + \beta_i) + p_i \cos(\alpha_i + \beta_i))}{r_i \sin \alpha_i}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Aleshores, per al conjunt de les n rodes s'obté la relació matricial:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \equiv J_\omega \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}, \tag{3.19}$$

on J_ω és el jacobià relatiu a les rotacions dels motors del vehicle. La condició de controlabilitat dels tres graus de llibertat del moviment pla del vehicle –descrits per les variables v_L , v_T i $\dot{\psi}$ – per mitjà de les n rodes és: rang $[J_\omega] = 3$.

Si el menor format per les files a , b , c del jacobià té determinant no nul,

$$\begin{Bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a & C_a \\ A_b & B_b & C_b \\ A_c & B_c & C_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \equiv J_{abc} \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}, \tag{3.20}$$

els tres graus de llibertat del bastidor queden controlats per les velocitats angulars ω_i de les tres rodes,

$$\begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = J_{abc}^{-1} \begin{Bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{Bmatrix}. \tag{3.21}$$

Aleshores, l'evolució hodomètrica de la posició de P i de l'orientació del robot es pot obtenir –si es coneix el posicionament inicial del robot $\{x_0, y_0, \psi_0\}^T$ – per mitjà de les equacions (3.13)-(3.15). Les variables $v_L(t)$, $v_T(t)$ i $\dot{\psi}(t)$ depenen de les mesures de les velocitats angulars ω_i –segons l'equació (3.21)– a través d'un simple producte per un jacobià que és invariant, en dependre exclusivament de paràmetres constants del vehicle.

Un dels dissenys de robot mòbil amb rodes omnidireccionals més comú correspon al de quatre rodes amb corrns perifèrics a 45° , Figura 3.5(a), situades de la mateixa manera que les rodes d'un automòbil que es mou en moviment rectilini, Figura 3.5(b). Per a aquestes rodes, el punt representatiu del centre de la roda així com l'angle α del lliscament fluctuen lleugerament en funció de la posició angular de la roda al voltant del seu eix per causa de la seva amplària finita. Aquest fet no li resta omnidireccionalitat però fa que el jacobià deixi de ser rigorosament invariant. A continuació es presenta l'estudi cinemàtic per al cas

idealitzat de roda de gruix negligible, per al qual el jacobità sí que és invariant. En les realitzacions d'aquest disseny el control es basa en aquest jacobità invariant, malgrat el gruix finit de les rodes, per la seva gran simplicitat.

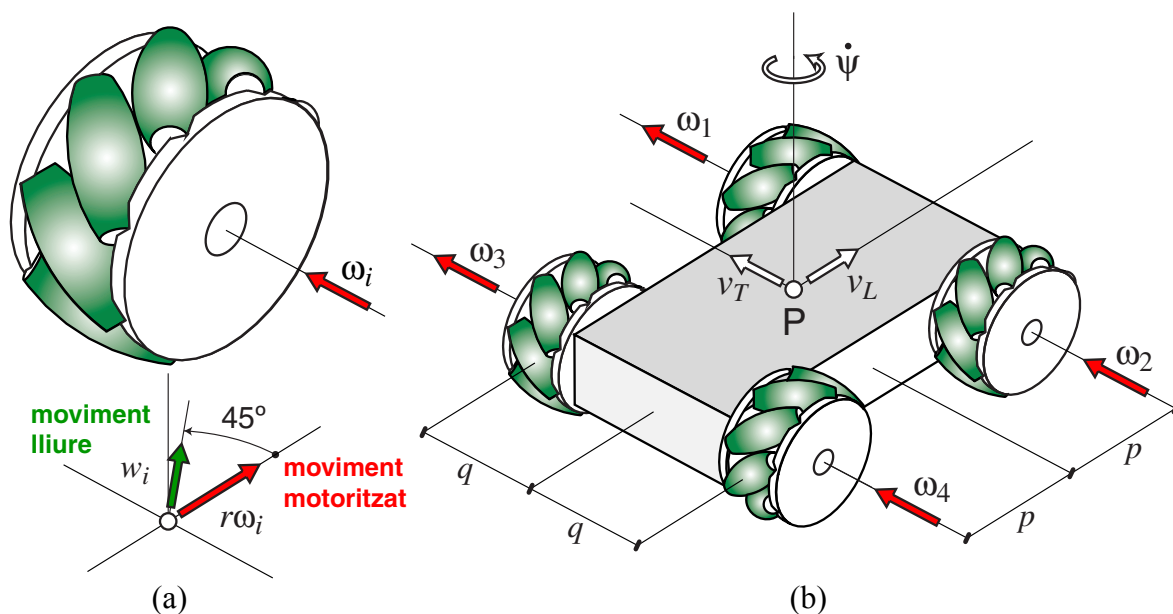


Figura 3.5 Roda amb corrons perifèrics de rotació lliure a 45°

Per a les velocitats descrites a la Figura 3.5(b) –prototip analitzat a [Agulló *et al.* 1987 i 1989]– i adoptant la idealització de roda prima amb nombre infinit de corrons, el jacobità té l'expressió:

$$J_{\omega} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(p+q) \\ 1 & 1 & (p+q) \\ 1 & 1 & -(p+q) \\ 1 & -1 & (p+q) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

La primera columna del jacobità posa de manifest que per al moviment rectilini longitudinal –velocitat v_L exclusivament– les quatre rodes giren a la mateixa velocitat (igual com ho farien les d'un automòbil amb tracció a les quatre rodes) i en el mateix sentit. En canvi, per al moviment rectilini transversal –velocitat v_T exclusivament– i per al moviment de canvi d'orientació totes les rodes giren amb la mateixa velocitat però dos en un sentit i dos en l'altre.

Tots els menors de dimensió 3 de la matriu jacobiana (3.22) són no nuls. La velocitat de P i la velocitat angular del xassís es poden expressar en funció de les velocitats de rotació de 3 rodes qualssevol. Així,

$$\begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = J_{123}^{-1} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/(p+q) & -1/(p+q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

Un altre disseny clàssic que ha tingut una notable difusió per causa de la simplicitat constructiva i la simplicitat del càlcul cinemàtic implicat en la seva aplicació, és el de les rodes amb lliscament a 90° , és a dir, amb lliscament en la direcció de l'eix de la roda. De manera necessària aquestes rodes han de tenir dos conjunts de corròs, usualment en plans paral·lels, que es troben decalats de mig pas angular dels corròs emprats. Sovint en cadascun d'aquests plans només hi ha tres corròs, Figura 3.6(a).

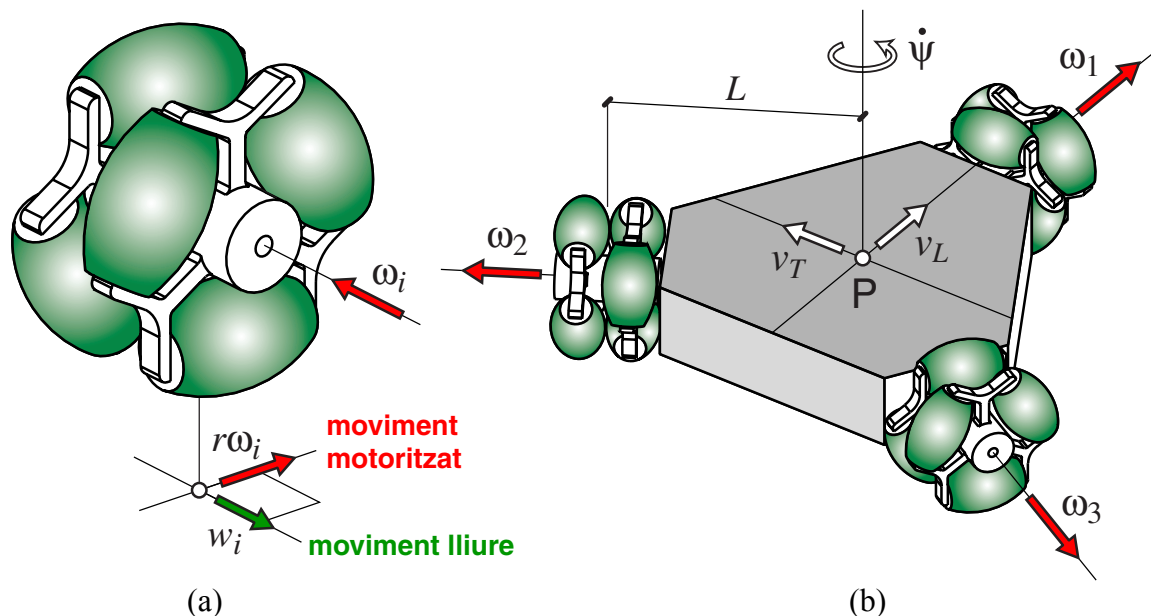


Figura 3.6 Roda amb corròs perifèrics de rotació lliure a 90°

Per al vehicle amb simetria estrellada esquematitzat a la Figura 3.6(b), i amb la idealització de roda prima, el jacobini té l'expressió:

$$J_\omega = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & L \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & L \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

En aquest cas la relació entre la velocitat del punt P i les velocitats angulars ω_1 , ω_2 i ω_3 ve donada per l'expressió:

$$\begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = J_\omega^{-1} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \frac{r}{3} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1/L & 1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.25)$$

El gruix finit de roda presenta l'inconvenient de la variació del paràmetre geomètric L segons que el corró de contacte sigui d'un pla o de l'altre. Això fa inevitables les situacions de lliscament si hi ha solapament en el contacte dels corròs dels dos plans amb el terra, i de marxa irregular si –per senzillesa– el control es basa en el jacobini corresponent al cas idealitzat. En els dos casos analitzats, el disseny queda justificat per la seva gran senzillesa i les aplicacions es limiten a casos poc exigents pel que fa a la precisió.

Històricament la roda de lliscament axial amb $\alpha = 90^\circ$ va donar lloc a un nou disseny constructivament més simple perquè els diversos corrns de cada pla eren substituïts per un únic corró, que en aquest cas esdevé esfèric –per bé que amb els pols escapçats–. En aquest cas els dos corrns esfèrics quedaven disposats en la forma indicada en la Figura 3.7(a) [Killough i Pin 1992]. L'avantatge de la seva senzillesa i robustesa no arriba a compensar, però, l'inconvenient derivat de la més gran separació dels dos plans, que agreuja els inconvenients de la variabilitat del jacobiana que relaciona els graus de llibertat del bastidor amb la rotació de les rodes.

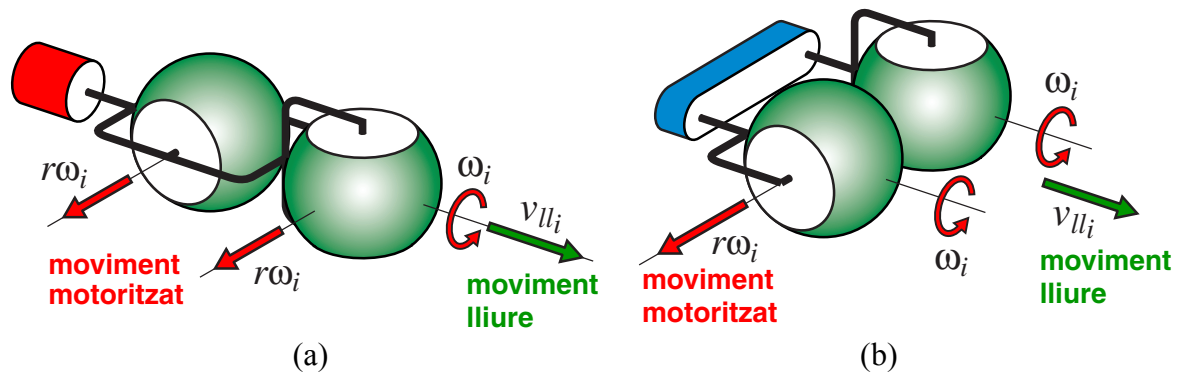


Figura 3.7 Roda amb corrns esfèrics de rotació lliure de forma esfèrica

Aquest disseny, però, va ser el punt de partida per al disseny de la primera roda omnidireccional amb corrns de rotació lliure que garantia la invariància del jacobiana corresponent a les velocitats de rotació de les rodes. N'hi ha prou a col·locar els corrns esfèrics en la posició mostrada en la Figura 3.7(b) per a garantir que la velocitat angular dels dos suports dels corrns hagi de ser la mateixa, tota vegada que els dos centres es troben sobre una recta paral·lela a la direcció del moviment motoritzat [Agulló i Fortuny 1998]. La invariància del jacobiana s'obté a costa d'una més gran complexitat mecànica, en haver-hi dos eixos motrius en paral·lel i per ser necessària una transmissió que comuniqui als dos corrns la mateixa velocitat angular.

Aquest disseny és l'emprat en el vehicle SPHERIK-3x3, Figura 3.8, desenvolupat en el segon període del projecte *Robot Mòbil* del CeRTAP (Centre de Referència de R+D en Tècniques Avançades de Producció). Aquesta plataforma robotitzada s'utilitzarà per a validar el mètode de posicionament dinàmic proposat, per mitjà de simulacions informàtiques i d'experimentació en el laboratori (Capítols 6 i 7).

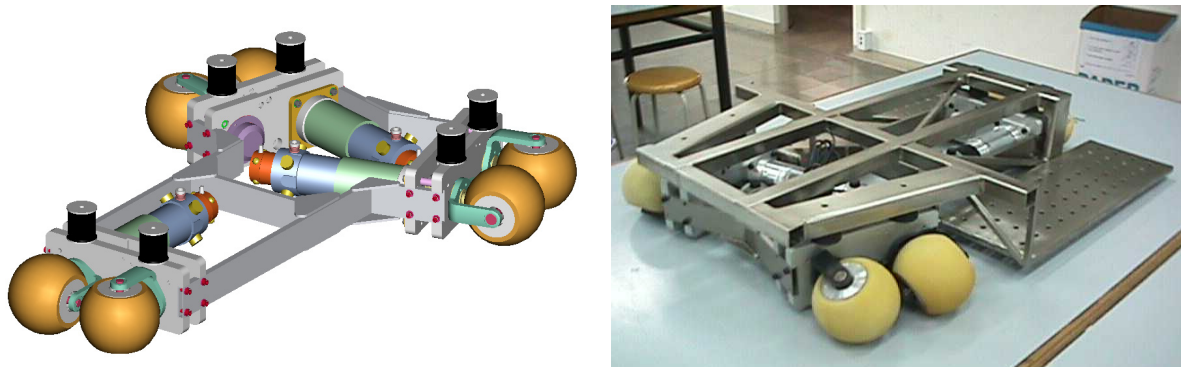


Figura 3.8 El robot mòbil SPHERIK-3x3

La Figura 3.8 mostra el mòdul motriu del robot mòbil, al damunt del qual es poden situar mòduls de servei diversos segons quina sigui l'aplicació. Aquest robot ha estat anomenat SPHERIK-3x3 per la forma esfèrica dels corròns de les rodes i pel fet de disposar de tres rodes i de tres graus de llibertat.

La Figura 3.9 en mostra els paràmetres geomètrics i cinemàtics. L'anàlisi cinemàtica del vehicle condueix a la següent relació, de jacobiana invariant, entre les velocitats dels motors i les velocitats generalitzades del vehicle:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = J_\omega \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -L \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -s \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}. \quad (3.26)$$

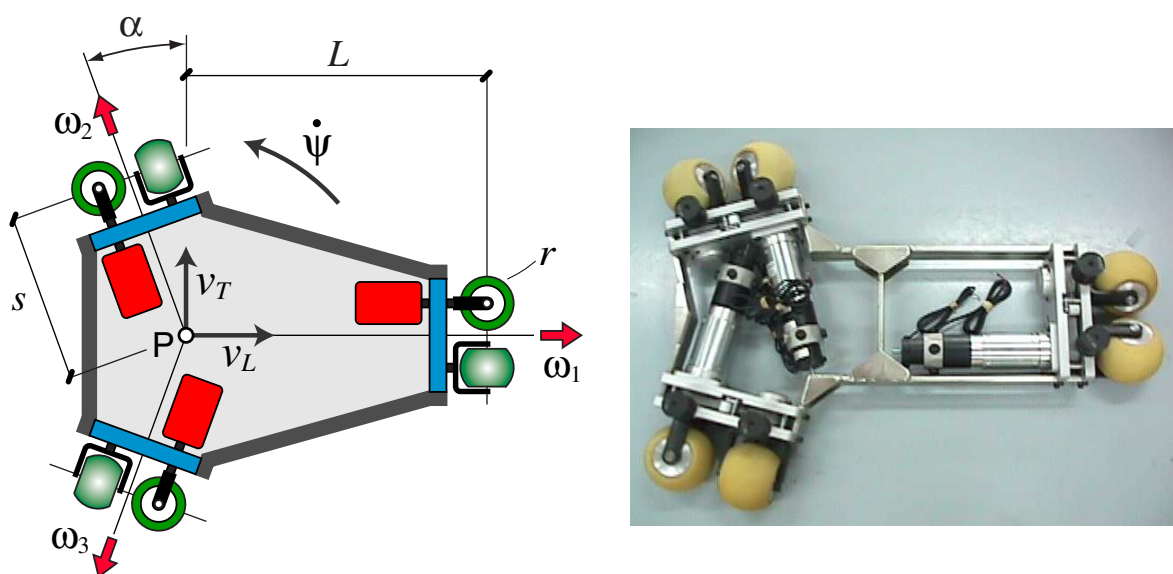


Figura 3.9 Paràmetres geomètrics i cinemàtics del robot

Fent la inversa de la matriu jacobiana J_ω s'arriba a la següent relació que permet trobar les velocitats v_L , v_T i $\dot{\psi}$ funció de les rotacions motoritzades de les esferes:

$$\begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{r}{s + L \sin \alpha} \begin{bmatrix} 0 & \frac{s + L \sin \alpha}{2 \cos \alpha} & -\frac{s + L \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \\ -s & \frac{L}{2} & \frac{L}{2} \\ -\sin \alpha & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{J_\omega^{-1}} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.27)$$

i a partir d'aquestes és possible calcular l'evolució hodomètrica de les variables de posicionament del robot per mitjà de les integracions temporals (3.13)-(3.15). La següent expressió modelitza l'evolució hodomètrica en temps discret del posicionament que s'utilitza en el filtre de Kalman estès:

$$\begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \frac{v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{\cos \alpha} \cos \psi_{k-1} - \frac{Lv_{2,k-1} + Lv_{3,k-1} - 2sv_{1,k-1}}{s + L \sin \alpha} \sin \psi_{k-1} \\ \frac{v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{\cos \alpha} \sin \psi_{k-1} + \frac{Lv_{2,k-1} + Lv_{3,k-1} - 2sv_{1,k-1}}{s + L \sin \alpha} \cos \psi_{k-1} \\ \frac{-2v_{1,k-1} \sin \alpha - v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{s + L \sin \alpha} \end{Bmatrix}, \quad (3.28)$$

on $v_{i,k} \equiv r\omega_{i,k}$ ($i = 1,2,3$) és la *velocitat motoritzada* de la roda i . És la velocitat motoritzada dels centres dels dos corrns i de tots els punts de la recta que els uneix.

La característica cinemàtica més important d'aquest disseny és la invariància del seu jacobià. A més, com tots els vehicles de rodes omnidireccionals de jacobià invariant, té la propietat de poder tenir un comportament holònom si s'introdueixen restriccions cinemàtiques adequades [Agulló Batlle 2004]. Aquest caràcter holònom facilita el posicionament hodomètric ja que no cal un procés integratiu. Les dues coordenades de posició queden determinades per dues formes lineals dels angles girats per les tres rodes, es tracta doncs d'una hometria algebàrica lineal.

Capítol 4

Posicionament de robots mòbils per triangulació angular

Sovint a la literatura, per manca d'un terme més adequat, s'utilitza el terme *triangulació* per referir-se a qualsevol procés que soluciona un sistema d'equacions algèbriques simultànies i sovint transcendents que determinen una posició –encara que no es puguin associar a un problema equivalent basat en triangles– [Kelly 2003].

En robòtica mòbil –i assumint que pel que fa al posicionament el robot està representat per un bastidor rígid amb moviment pla– la triangulació sovint apareix en el context de marques artificials, de les quals se'n mesura la distància a un punt del robot o bé l'angle –relatiu al vehicle– de les rectes entre aquestes i un punt del robot. Aquest últim és el cas de la *triangulació angular*. No obstant, qualsevol característica coneguda de l'entorn que sigui detectada i amidada per un sensor, la mesura de la qual depengui de la seva posició relativa al sensor, estableix un context de triangulació. La relació entre la posició de les marques o característiques, les mesures fetes pel sensor i la configuració –posició i orientació– del robot determina un sistema d'equacions que defineixen el problema de triangulació [Dudek i Jenkin 2000].

El terme *triangulació angular* –emprat en l'àmbit de la robòtica mòbil– resol el que en topografia es coneix com el *problema de Pothenot* o d'*intersecció inversa*. La solució geomètrica d'aquest problema va ser donada per Euclides fa més de 2000 anys, però no va ser fins l'any 1624 que Snellius va resoldre per primera vegada el problema tant geomètricament com per càlcul trigonomètric. Des d'aleshores molts autors han plantejat diferents mètodes geomètrics i analítics que resolen aquest mateix problema: Collins, Pothenot, Gauss, etc.

En robòtica mòbil, el posicionament per *triangulació* difereix en gran mesura del posicionament *relatiu*, ja sigui a partir de mesures inercials o de mesures hodomètriques, en el fet que en aquests últims els errors es propaguen d'acord amb les equacions diferencials que relacionen l'evolució de la posició amb les mesures. L'error de posicionament en l'instant actual depèn de tota la història de mesures anteriors. En canvi, els errors en la triangulació depenen únicament de l'error en les mesures realitzades –o avaluades– en una mateixa configuració del robot [Kelly 2003].

En el cas que s'estudia en aquesta tesi, un goniòmetre làser rotatiu fa les mesures angulars –relatives al robot– de les rectes entre el seu centre i tres reflectors catadiòptrics fixos a l'entorn. Amb aquest tipus de sensor les mesures angulars es realitzen en instants de temps diferents. Per tant, quan el robot es mou aquestes mesures corresponen a diferents configuracions del robot, i en conseqüència no es poden emprar directament en els mètodes de triangulació convencionals perquè aquests pressuposen que les mesures angulars han estat fetes des d'una mateixa configuració. Això es coneix com el *problema del posicionament dinàmic* [Skewis i Lumelsky 1994]. L'algorisme dinàmic que es proposa al Capítol 5 de la tesi resol aquest problema a partir del càlcul de l'evolució dels valors angulars entre mesures reals del sensor làser. Aquest algorisme, basat en el filtre de Kalman estès (EKF), genera una estimació de les tres mesures angulars per a cada configuració del robot amb una previsió de l'error en cada mesura.

En aquest apartat s'estudien dos mètodes de triangulació que utilitzen mesures angulars relatives al robot. El primer es basa en la *intersecció d'arcs capaços* per a trobar la posició del robot, a partir de la qual es determina posteriorment l'orientació. El segon, en canvi, es basa en la *intersecció de rectes* per a trobar l'orientació del vehicle i posteriorment, a partir d'aquesta orientació, es determina la posició. Són dos mètodes alternatius que condueixen al mateix resultat del posicionament –posició i orientació– si es parteix de les mateixes mesures angulars. En ambdós casos s'estudia com el càlcul del posicionament es veu afectat per la presència d'errors en les mesures angulars.

Abans d'entrar en la formulació matemàtica dels dos mètodes de triangulació que s'estudien, es citen els treballs de referència que s'han consultat per a l'elaboració d'aquest capítol. S'han consultat els treballs [McGillem i Rappaport 1988 i 1989, Cohen i Koss 1992, Skewis i Lumelsky 1994] en ser aquests els primers que tracten l'aplicació de la triangulació angular en el posicionament de robots mòbils. El treball de Cohen i Koss (1992), a més, planteja un mètode iteratiu per a resoldre el posicionament estàtic aplicant la triangulació basada en intersecció de rectes. En aquesta tesi es demostra que aquest mètode té solució analítica. Betke i Gurvits (1997) plantegen una nova solució al problema que es basa en l'ús de nombres complexos, i introdueixen un algorisme d'optimització del càlcul del posicionament si s'utilitzen més de tres punts de l'entorn –reflectors en el cas del sistema làser–.

Altres treballs importants són [Garulli i Vicino 2001, Briechle i Hanebeck 2004], que tracten la propagació de l'error en el càlcul de la posició quan les mesures angulars relatives presenten un error acotat. Finalment, els treballs [Kelly 2003, Thomas i Ros 2005] –tot i que aquest últim estudia el posicionament de robots per trilateració– s'han utilitzat com a referència per a l'estudi estadístic de la triangulació si les variables angulars presenten errors que segueixen una distribució de probabilitat gaussiana.

A continuació es formula el problema que resol la triangulació angular. Sigui P un punt del robot mòbil i siguin θ_1 , θ_2 i θ_3 els angles, relatius a l'eix longitudinal del robot, de les rectes entre P i tres punts de l'entorn R_1 , R_2 i R_3 de posició coneguda $\{X_i, Y_i\}^T$ en el sistema de referència fix (SRF). A partir d'aquestes dades es pretén trobar la posició de P $\{X, Y\}^T$ i l'orientació del robot ψ en el mateix sistema de referència, Figura 4.1. La posició d'un punt –en aquest cas de P – i l'orientació determinen el *posicionament* o *configuració* del robot mòbil. En el sistema de posicionament làser considerat, P és el centre del capçal làser; R_1 , R_2 i R_3 els reflectors catadiòptrics utilitzats; i θ_1 , θ_2 i θ_3 els angles relatius al bastidor del robot que mesura el sensor làser.

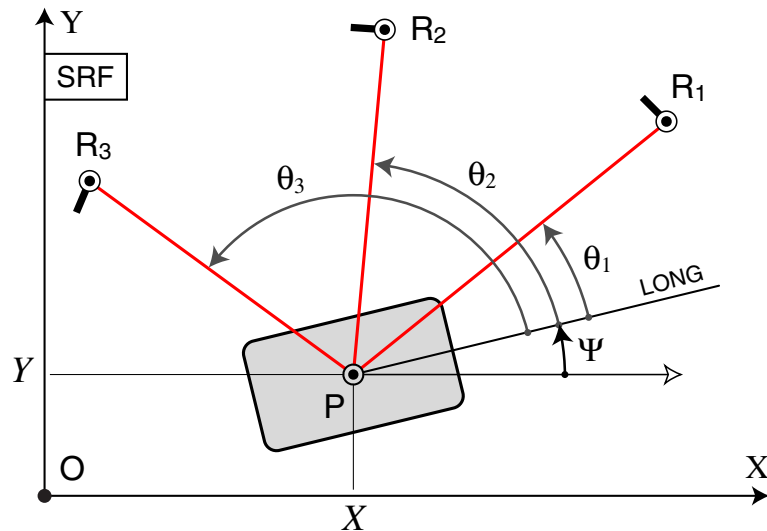


Figura 4.1 Posició i orientació es determinen a partir de θ_1 , θ_2 i θ_3 per triangulació angular

La numeració dels reflectors utilitzats en el càlcul del posicionament per triangulació s'ha de realitzar de manera que es respecti l'ordre en què són detectats durant la volta del sensor làser. Tal com es fa palès a la Figura 4.2, hi ha tres numeracions equivalents per als reflectors R_i , R_j i R_k –depenent de quin d'ells es detecti en primer lloc– si es té en compte que el sentit de rotació del feix làser que emet el sensor és antihorari.

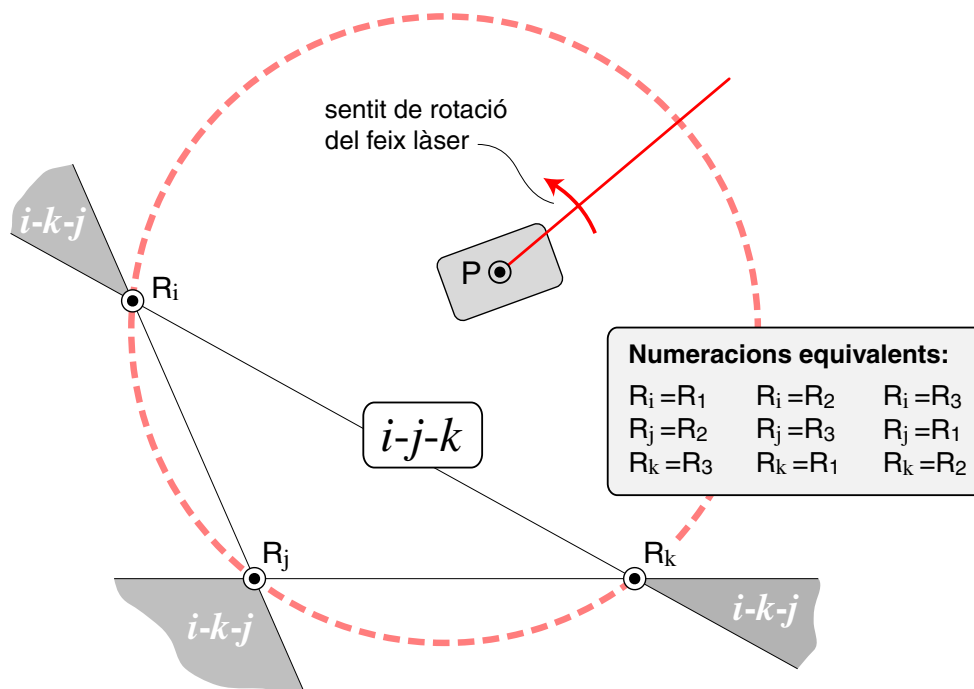


Figura 4.2 Zona de validesa (en blanc) de la numeració de reflectors escollida

Cal remarcar que l'ordre en la detecció dels reflectors és el mateix per a tots els punts del pla (ordre $i-j-k$), excepte per als punts de les zones ombrejades de la Figura 4.2 on l'ordre de detecció és $i-k-j$. Com s'aprecia a la figura l'ordre es manté per a totes les posicions dins de la circumferència que passa pels tres reflectors que, com es veurà més endavant, és la zona on funciona bé el posicionament per triangulació angular.

4.1 Triangulació basada en intersecció d'arcs capaços

El mètode de triangulació basat en intersecció d'arcs capaços parteix de la mesura dels angles entre dues rectes des d'un punt P del robot a dos punts de l'entorn –o reflectors si es tracta d'un sistema làser–. Si es coneix la posició de dos reflectors qualssevol R_i i R_j , i l'angle α_{ij} entre les rectes corresponents, la posició de P s'ha de trobar sobre l'arc capaç del segment R_iR_j d'angle α_{ij} , Figura 4.3(a).

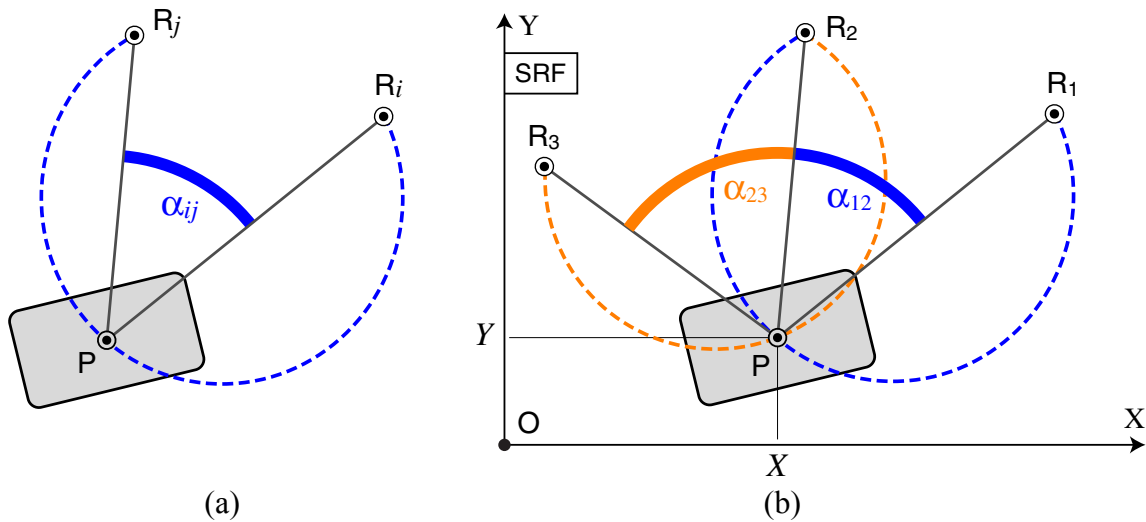


Figura 4.3 Triangulació per intersecció d'arcs capaços

Si es tenen dues mesures angulars –com ara α_{12} i α_{23} – corresponents a dues parelles de reflectors, aleshores la intersecció dels dos arcs capaços definits per cadascun dels angles determina la posició de P , Figura 4.3(b). Un cop determinada la posició $\{X, Y\}^T$ del punt P del robot, l'orientació Ψ del vehicle pot ser calculada a partir de l'angle respecte a l'eix X de la recta que passa per P i un reflector qualsevol.

4.1.1 Determinació analítica del posicionament

En aquest apartat es justifiquen les expressions que permeten determinar la posició i l'orientació del robot en funció de les mesures angulars θ_1 , θ_2 i θ_3 mitjançant el mètode basat en intersecció d'arcs capaços. Les tres parelles possibles de rectes defineixen tres angles relatius entre reflectors que s'anomenen α , β i γ :

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &\equiv \alpha(\theta_1, \theta_2) = \theta_2 - \theta_1, \\ \alpha_{23} &\equiv \beta(\theta_2, \theta_3) = \theta_3 - \theta_2, \\ \alpha_{13} &\equiv \gamma(\theta_1, \theta_3) = \theta_3 - \theta_1 = \alpha + \beta.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Cadascun d'aquests tres angles defineix un arc de circumferència sobre el qual s'ha de trobar el punt P del robot. A continuació es determina l'expressió de les tres circumferències associades a cadascun dels angles. La intersecció d'una parella qualsevol d'aquestes circumferències condueix a la posició de P .

Per a facilitar la manipulació algebraica de les equacions geomètriques dels arcs de circumferència, s'utilitza un sistema de referència associat al triplet de reflectors $\{R_1, R_2, R_3\}$ utilitzat per al posicionament que s'anomena *sistema de referència triplet* (SRT). L'origen de coordenades del SRT és el reflector detectat en segon lloc R_2 , i els seus eixos $\{x, y\}$ es prenen aplicant un gir als eixos $\{X, Y\}$ del *sistema de referència fix* (SRF) de manera que el reflector R_3 es trobi sobre l'eix x del SRT, Figura 4.4.

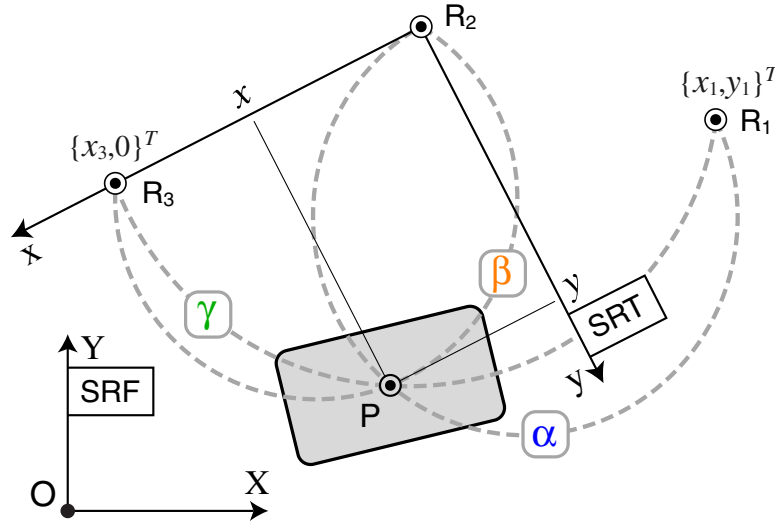


Figura 4.4 Sistema de referència associat al triplet de reflectors $\{R_1, R_2, R_3\}$, i arcs capaços que defineixen els angles α, β i γ

El sistema de referència fix (o SRF) és aquell que s'associa a l'entorn on circula el robot mòbil, en el qual s'hi poden instal·lar més de tres reflectors. Cada reflector R_i tindrà una posició absoluta coneguda $\{X_i, Y_i\}^T$ en el SRF. El sistema de referència triplet (o SRT) serà aquell associat als tres reflectors que s'utilitzin per a determinar el posicionament en una certa configuració del robot, i podrà variar segons els reflectors que s'utilitzin en cada cas. Els vectors que determinen la posició de cadascun dels reflectors en el SRT són:

$$\vec{r}(R_1) \equiv \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{r}(R_2) \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{r}(R_3) \equiv \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Les components de posició de R_1 i R_3 en el SRT s'obtenen a partir de la posició dels reflectors en el SRF $\vec{R}(R_i) \equiv \{X_i, Y_i\}^T$ ($i = 1, 2, 3$) mitjançant les equacions següents:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = S_\varphi^{-1} [\vec{R}(R_1) - \vec{R}(R_2)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 - X_2 \\ Y_1 - Y_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$x_3 = (X_3 - X_2) \cos \varphi + (Y_3 - Y_2) \sin \varphi, \quad (4.4)$$

on S_φ és la matriu de canvi de base, del SRT al SRF. L'angle de gir φ entre els eixos de les dues bases es troba mitjançant l'expressió:

$$\varphi = \arctan \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2}. \quad (4.5)$$

A continuació es determinen les equacions f_α , f_β i f_γ que compleixen els punts dels arcs capaços d'angle α , β i γ respectivament. Aquestes equacions s'expressen en el SRT.

Arc capaç del segment R_1R_2 d'angle α

La Figura 4.5 mostra l'arc capaç corresponent a l'angle α que passa pels reflectors R_1 i R_2 . A la figura, la variable d_α representa la meitat de la longitud del segment R_1R_2 , i R_α el radi de la circumferència que defineix l'arc capaç.

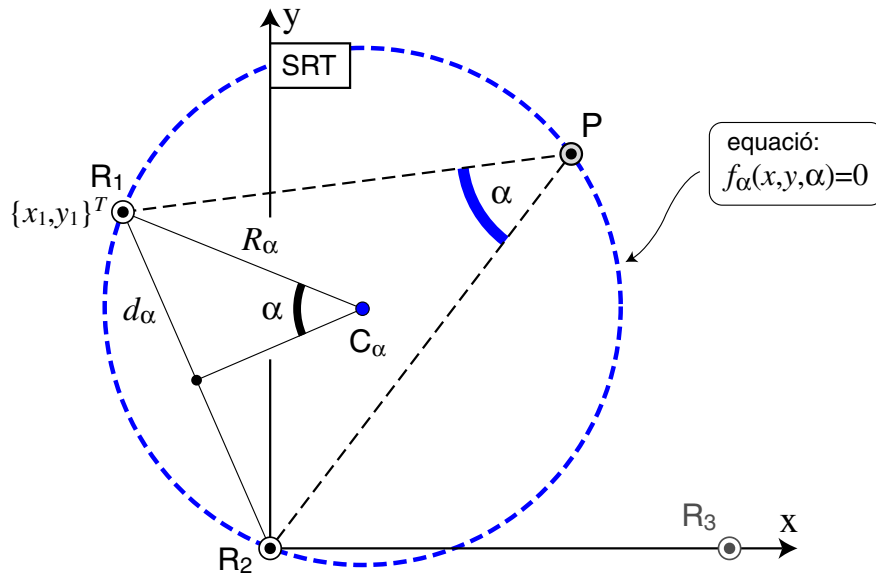


Figura 4.5 Arc capaç del segment R_1R_2 d'angle α

El valor d'aquestes variables en funció de l'angle α i de la posició dels reflectors és:

$$d_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad (4.6)$$

$$R_\alpha = \frac{d_\alpha}{\sin \alpha}. \quad (4.7)$$

La posició del centre C_α de la circumferència en el SRT és:

$$\vec{r}(C_\alpha) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_1 + y_1 \cot \alpha \\ y_1 - x_1 \cot \alpha \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

Un cop es coneix la posició del centre de la circumferència i el seu radi, es pot determinar l'equació de la circumferència associada a l'angle α . L'equació f_α que relaciona els punts $\{x, y\}^T$ que pertanyen a la circumferència amb l'angle α és:

$$f_\alpha(x, y, \alpha) = x^2 + y^2 - (x_1 + y_1 \cot \alpha)x - (y_1 - x_1 \cot \alpha)y = 0. \quad (4.9)$$

Arc capaç del segment R_2R_3 d'angle β

L'arc capaç corresponent a l'angle β que passa pels reflectors R_2 i R_3 és el representat a la Figura 4.6.

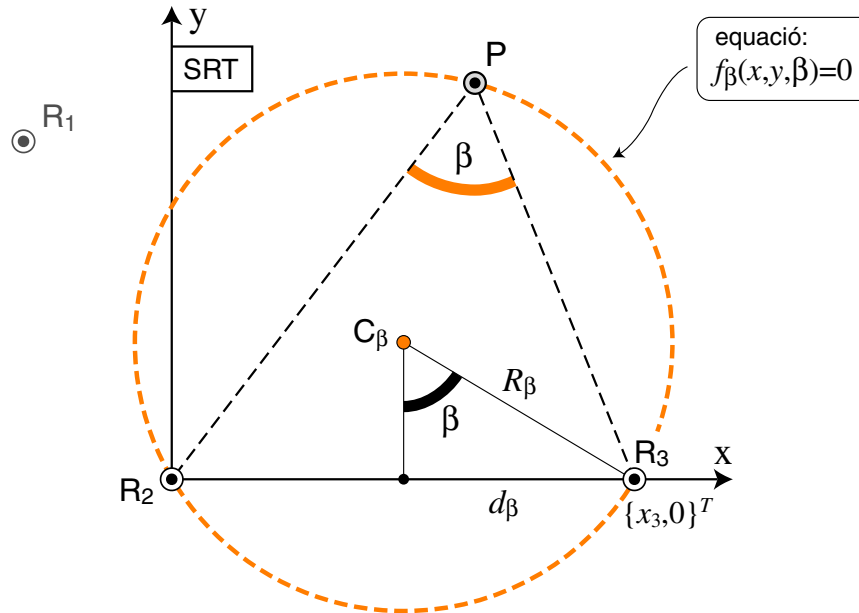


Figura 4.6 Arc capaç del segment R_2R_3 d'angle β

A partir de la geometria del problema, el radi R_β de la circumferència descrita, i la posició del seu centre C_β en el sistema de referència associat al triplet valen respectivament:

$$R_\beta = \frac{d_\beta}{\sin \beta} = \frac{x_3}{2 \sin \beta}, \quad (4.10)$$

$$\vec{r}(C_\beta) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_3 \cot \beta \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Aleshores, la funció f_β que relaciona la posició $\{x, y\}^T$ dels punts de la circumferència amb l'angle β és:

$$f_\beta(x, y, \beta) = x^2 + y^2 - x_3x - x_3 \cot \beta y = 0. \quad (4.12)$$

Arc capaç del segment R_1R_3 d'angle γ

Finalment, l'angle relatiu $\gamma = \alpha + \beta$ entre les rectes visuals associades als reflectors R_1 i R_3 defineix un tercer arc capaç que passarà pels dos reflectors i per la intersecció entre els arcs capaços d'angle α i β . Aquest arc capaç no aporta informació addicional pel que fa a la determinació analítica del posicionament –amb mesures sense error–. Però en canvi, tal com es veurà, cal considerar l'equació de la circumferència que defineix perquè aporta informació pel que fa a l'àrea d'incertesa de posició quan les mesures presenten *errors acotats*. La Figura 4.7 mostra aquest arc capaç.

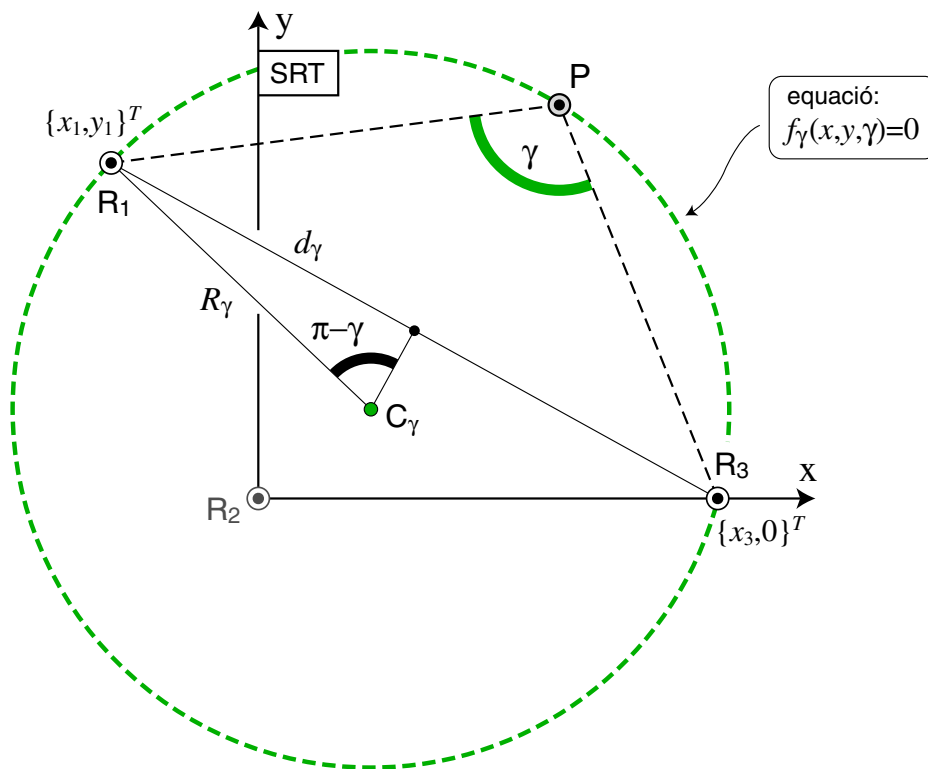


Figura 4.7 Arc capaç del segment R_1R_3 d'angle $\gamma = \alpha + \beta$

En aquest cas, la meitat de la longitud del segment R_1R_3 , el radi de l'arc i la posició del seu centre valen respectivament:

$$d_\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + y_1^2}, \quad (4.13)$$

$$R_\gamma = \frac{d_\gamma}{\sin \gamma}, \quad (4.14)$$

$$\vec{r}(C_\gamma) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_3 + x_1 + y_1 \cot \gamma \\ y_1 + (x_3 - x_1) \cot \gamma \end{Bmatrix}. \quad (4.15)$$

A la Figura 4.7 $\gamma > \pi/2$ rad, no obstant les equacions (4.13), (4.14) i (4.15) són vàlides per a qualsevol valor de γ . L'equació f_γ que compleixen els punts de la circumferència associada a l'angle γ és:

$$f_\gamma(x, y, \gamma) = x^2 + y^2 - [x_3 + x_1 + y_1 \cot \gamma]x - [y_1 + (x_3 - x_1) \cot \gamma]y + x_3(x_1 + y_1 \cot \gamma) = 0. \quad (4.16)$$

Determinació de la posició i l'orientació

La intersecció de qualsevol parella de circumferències condueix a la posició $\mathbf{p} \equiv \{x, y\}^T$ del centre del capçal làser P. Per simplicitat s'utilitzen les equacions (4.9) i (4.12). Restant aquestes expressions, s'obté la següent equació d'una recta que ha de contenir el punt P:

$$f_\alpha - f_\beta = [x_3 - x_1 - y_1 \cot \alpha]x + [x_3 \cot \beta - y_1 + x_1 \cot \alpha]y = 0, \quad (4.17)$$

i per tant,

$$y = - \underbrace{\left[\frac{x_3 - x_1 - y_1 \cot \alpha}{x_3 \cot \beta - y_1 + x_1 \cot \alpha} \right]}_{\eta} x \equiv -\eta x. \quad (4.18)$$

Substituint y a l'equació (4.12) es troben dues solucions per a la x , la solució trivial $x = 0$ –que no és vàlida perquè correspon a la posició del segon reflector– i la solució correcta per a x :

$$x = x_3 \frac{1 - \eta \cot \beta}{1 + \eta^2}. \quad (4.19)$$

Aleshores, la posició del punt P del robot en el SRT, tenint en compte que $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ i $\beta = \theta_3 - \theta_2$, és:

$$\mathbf{p}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \equiv \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = x_3 \frac{1 - \eta \cot(\theta_3 - \theta_2)}{1 + \eta^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\eta \end{Bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\eta \equiv \frac{x_3 - x_1 - y_1 \cot(\theta_2 - \theta_1)}{x_3 \cot(\theta_3 - \theta_2) - y_1 + x_1 \cot(\theta_2 - \theta_1)}; \quad \alpha, \beta \neq \pi \text{ rad.}$$

Es comprova que la solució anterior verifica l'equació (4.16) corresponent a la circumferència γ :

$$f_\gamma(\mathbf{p}, \alpha + \beta) = 0. \quad (4.21)$$

Es pot concloure doncs que aquesta equació no aporta informació en la determinació del posicionament. Per als punts situats sobre el segment R_1R_2 , $\alpha = \pi$ rad i per tant $\cot \alpha \rightarrow \infty$, però la solució està definida. Els problemes numèrics prop d'aquest segment s'obvien multiplicant l'equació (4.18) per $\tan \alpha \rightarrow 0$:

$$\mathbf{p}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \Big|_{\alpha \rightarrow \pi} = x_3 \frac{1 + (y_1/x_1) \cot \beta}{1 + (y_1/x_1)^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ y_1/x_1 \end{Bmatrix}; \quad \eta = -\frac{y_1}{x_1}. \quad (4.22)$$

Per als punts situats sobre el segment R_2R_3 , $\beta = \pi$ rad i per tant $\cot \beta \rightarrow \infty$, però com en el cas anterior, la solució està definida. Els problemes numèrics prop d'aquest segment s'obvien multiplicant les equacions (4.18) i (4.19) per $\tan \beta \rightarrow 0$:

$$\mathbf{p}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \Big|_{\beta \rightarrow \pi} = x_1 + y_1 \cot \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \eta = 0. \quad (4.23)$$

Si es desitja conèixer la posició de P en el SRF, $\mathbf{P} \equiv \{X, Y\}^T$, cal aplicar una translació i un canvi de base d'acord amb l'expressió:

$$\mathbf{P} \equiv \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \bar{R}(\mathbf{R}_2) + S_\varphi \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

L'orientació del robot es determina a partir de la mesura de la posició de P i de l'angle θ_i relatiu al vehicle associat a un reflector R_i qualsevol ($i = 1,2,3$). A continuació es donen les expressions per a determinar l'orientació en el SRT i en el SRF respectivament:

$$\psi(\mathbf{p}, \theta_i) = \arctan \frac{y_i - y}{x_i - x} - \theta_i, \quad (4.25)$$

$$\Psi(\mathbf{P}, \theta_i) = \arctan \frac{Y_i - Y}{X_i - X} - \theta_i = \psi + \varphi. \quad (4.26)$$

L'avantatge que presenta aquest mètode de posicionament és la independència en la determinació de la posició del robot respecte a l'orientació del vehicle. En el mètode de triangulació per intersecció de rectes, tal com es veurà en l'apartat 4.2, el càlcul de la posició depèn de l'orientació del vehicle.

4.1.2 Propagació de l'error en les mesures angulars en el posicionament estàtic del robot. Zona d'incertesa de posició

Per tal d'estudiar la influència dels errors en les mesures angulars en el posicionament, en aquest apartat i en el següent es considera la triangulació per arcs capaços en condicions de repòs del robot.

A la pràctica no es coneix el valor real θ_i^r dels angles relatius associats a cadascun dels reflectors θ_i ($i = 1,2,3$), per causa de l'error en la mesura feta pel sensor làser. Si es suposa, en primera aproximació, que el mòdul de l'error en la mesura del sensor $\delta\theta_i$ és acotat –per bé que desconegut– per sota d'un llimitar d'error màxim ($|\delta\theta_i| \leq \Delta\theta_m$), aleshores la mesura θ_i del sensor làser es troba dins l'interval:

$$\theta_i = \theta_i^r + \delta\theta_i \in [\theta_i^r - \Delta\theta_m, \theta_i^r + \Delta\theta_m]. \quad (4.27)$$

Aquest error en la mesura dels angles relatius de les rectes visuals al reflectors fa que en les mesures dels angles α , β i γ s'acumuli un cert error respecte al seu valor real, també desconegut però acotat dins els següents intervals:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^r + \delta\alpha \in [\alpha^r - 2\Delta\theta_m, \alpha^r + 2\Delta\theta_m]; \quad \delta\alpha = \delta\theta_2 - \delta\theta_1, \\ \beta &= \beta^r + \delta\beta \in [\beta^r - 2\Delta\theta_m, \beta^r + 2\Delta\theta_m]; \quad \delta\beta = \delta\theta_3 - \delta\theta_2, \\ \gamma &= \gamma^r + \delta\gamma \in [\gamma^r - 2\Delta\theta_m, \gamma^r + 2\Delta\theta_m]; \quad \delta\gamma = \delta\theta_3 - \delta\theta_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

La incertesa en l'angle α determina una zona d'incertesa Z_α de punts del pla x-y per als quals la mesura d'aquest angle es trobaria dins l'interval expressat en l'equació (4.28). Aquesta zona d'incertesa es troba delimitada per les circumferències definides pels arcs capaços d'angles $\alpha^- \equiv \alpha^r - 2\Delta\theta_m$ i $\alpha^+ \equiv \alpha^r + 2\Delta\theta_m$ de segment R_1R_2 respectivament, tal

com es pot veure a la Figura 4.8. En aquesta figura el reflector R_1 es troba a la posició $\vec{r}(R_1) = \{-4, 10\}^T$ m en el SRT, i la posició real de P –a partir de la qual es determinen el valors reals d' α i β – és $\mathbf{p} = \{6, 8\}^T$ m. S'ha considerat un error màxim $\Delta\theta_m = 2^\circ$ en les mesures per a facilitar la visualització gràfica de les circumferències i de la zona Z_α .

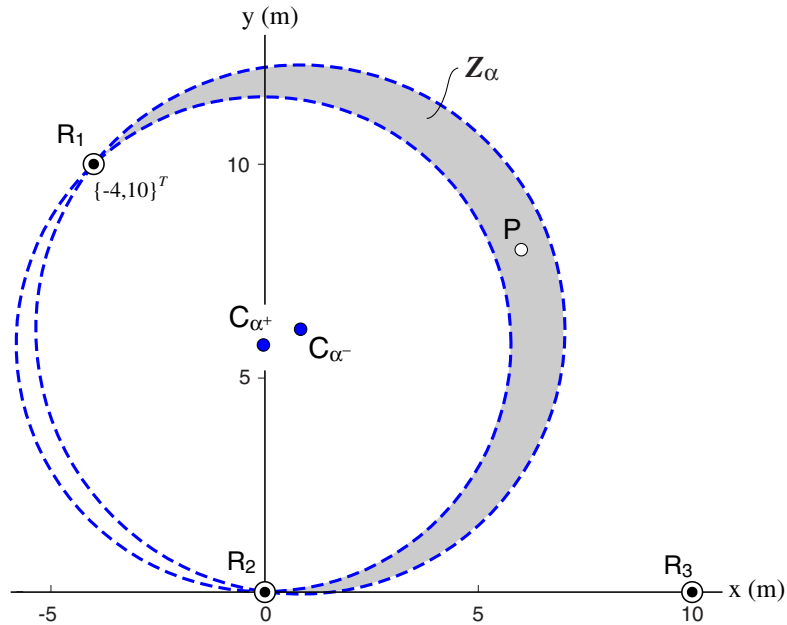


Figura 4.8 Zona d'incertesa Z_α per a la posició de P, per a un error màxim $\Delta\theta_m = 2^\circ$

De la mateixa manera que per a l'angle α , l'interval d'incertesa per a l'angle β defineix una nova zona d'incertesa Z_β . Com que s'han de complir les dues restriccions geomètriques, el punt P s'ha de trobar dins la intersecció d'aquestes dues zones, Figura 4.9.

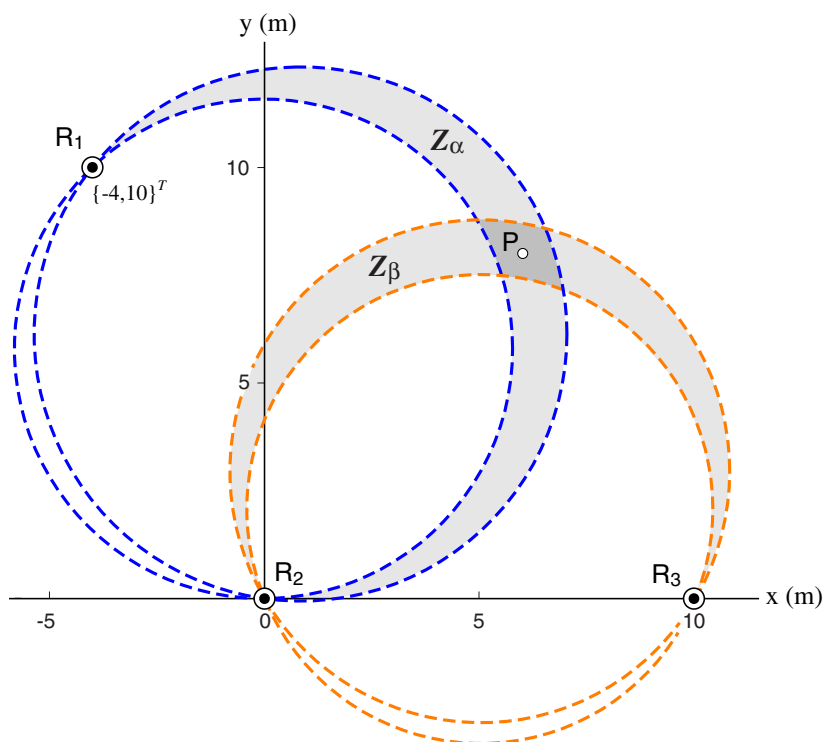


Figura 4.9 Zones d'incertesa Z_α i Z_β per a la posició de P, per a un error màxim $\Delta\theta_m = 2^\circ$

Cal tenir en compte però, que no tots els punts de la zona remarcada a la Figura 4.9 són assolibles. De fet hi ha una relació de dependència entre els angles α i β que no s'ha tingut en compte, és a dir, les variables aleatòries associades a α i β no són independents. Aquesta relació de dependència és la següent:

$$\alpha + \beta = (\theta_2 - \theta_1) + (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 - \theta_1 = \gamma \in [\gamma^r - 2\Delta\theta_m, \gamma^r + 2\Delta\theta_m]. \quad (4.29)$$

I per tant, de la relació anterior se'n dedueix que la suma dels angles α i β està acotada dins un cert interval definit per l'angle relatiu γ . De fet, aquesta restricció la imposa la zona d'incertesa Z_γ definida per l'arc capaç d'angle γ . Per tant, tal com es fa palès en els treballs de Garulli i Vicino (2001) i de Briechle i Hanebeck (2004) la intersecció de les tres zones d'incertesa Z_α , Z_β i Z_γ condueix a la zona d'incertesa Z_P per a la posició de P a partir de les mesures incertes α , β i γ :

$$Z_P = \bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 Z_{\alpha_{ij}} = Z_\alpha \cap Z_\beta \cap Z_\gamma. \quad (4.30)$$

Aquesta zona d'incertesa s'observa a la Figura 4.10 i representa el lloc geomètric de punts del pla en què pot trobar-se el punt P del robot –centre del capçal làser–, si s'utilitza el mètode de triangulació basat en intersecció d'arcs capaçs, a partir de les mesures imprecises dels angles relatius θ_1 , θ_2 i θ_3 conegudes amb un cert error acotat ($|\delta\theta_i| \leq \Delta\theta_m$) respecte al seu valor real. A la figura, $\Delta\theta_m = 2^\circ$ per a cadascun dels angles.

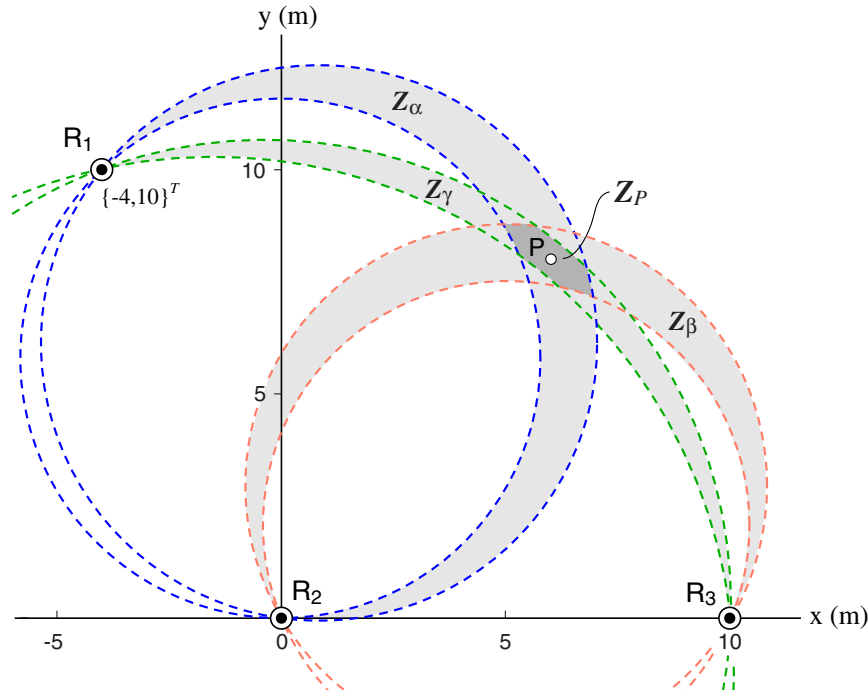


Figura 4.10 Zona d'incertesa Z_P per a la posició de P, per a un error màxim $\Delta\theta_m = 2^\circ$

Per a demostrar la validesa de la zona d'incertesa Z_P s'ha fet una simulació de Monte Carlo, considerant la posició de P i dels reflectors R_1 , R_2 , R_3 de les Figures 4.8-4.10. S'han generat $N = 1000$ valors per a cada mesura angular θ_i ($i = 1, 2, 3$), afegint al seu valor real un error aleatori que segueix una funció de densitat de probabilitat *uniforme* dins l'interval

$[-2^\circ, 2^\circ]$. A partir d'aquests valors angulars, s'han calculat les $N = 1000$ posicions corresponents mitjançant l'expressió (4.20) per al càlcul de la posició de P. Els punts de la Figura 4.11 representen aquestes posicions. Com es comprova, els punts es distribueixen a l'interior de la zona d'incertesa considerada Z_P .

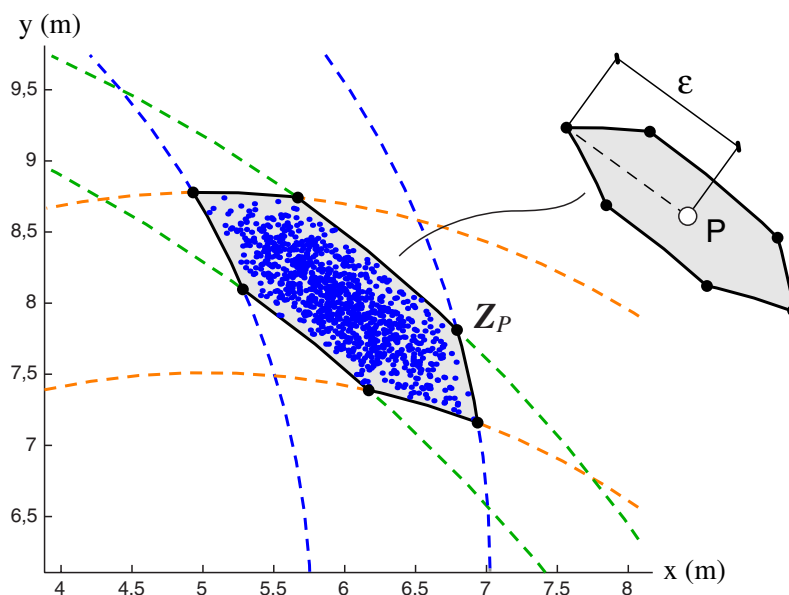


Figura 4.11 Simulació de Monte Carlo del càlcul de la posició de P, a partir de mesures angulars amb un error aleatori de distribució uniforme afegit ($N = 1000$ valors)

L'àrea d'aquesta zona d'incertesa Z_P depèn de la posició del punt P relativa als reflectors utilitzats, així com de l'error màxim $\Delta\theta_m$ present en les mesures angulars [McGillem i Rappaport 1989]. Per a un mateix error màxim $\Delta\theta_m$ s'observa com l'error en la determinació de la posició creix quan aquest punt s'apropa a la circumferència que passa pels reflectors utilitzats –*circumferència crítica*–, sobre la qual, a més, el mètode és indeterminat perquè les tres circumferències d'equacions f_α, f_β i f_γ passen a coincidir.

Com a *paràmetre d'error* en el càlcul de la posició es pren la distància ε entre la posició real de P i el punt de la zona d'incertesa Z_P més allunyat d'aquesta posició, Figura 4.11. Aquest paràmetre representa l'error màxim que es pot cometre en el càlcul de la posició si l'error en les mesures angulars $\delta\theta_i$ és acotat.

Els gràfics de la Figura 4.12 mostren el valor d'aquest paràmetre d'error de posició ε en funció de la posició real del punt P per a un error màxim $\Delta\theta_m = 3\sigma_{\theta_m} \approx 0,2$ mrad –on σ_{θ_m} és la desviació estàndard de l'error en la mesura del sensor làser (Annex C)–, i per a quatre disposicions diferents dels reflectors (punts blancs dels gràfics). S'han seleccionat aquestes quatre disposicions perquè són les més utilitzades per al posicionament de robots: (a) en un passadís amb els reflectors alternats a banda i banda; (b) i (c) prop d'una cantonada de l'entorn de treball; i (d) si tots els reflectors es troben alineats damunt una mateixa paret.

En els gràfics (a), (b) i (c) s'aprecia com la triangulació per intersecció d'arcs capaçs ofereix una bona precisió en una zona interior de la circumferència que passa pels tres reflectors (color blau fosc), i com l'error augmenta a mesura que el punt s'apropa a aquesta circumferència crítica (color vermell). En aquests gràfics, un valor del paràmetre ε superior o igual a 20 mm es representa amb el mateix color vermell. L'escala del gràfic va de 0 mm (blau fosc) a 20 mm (vermell).

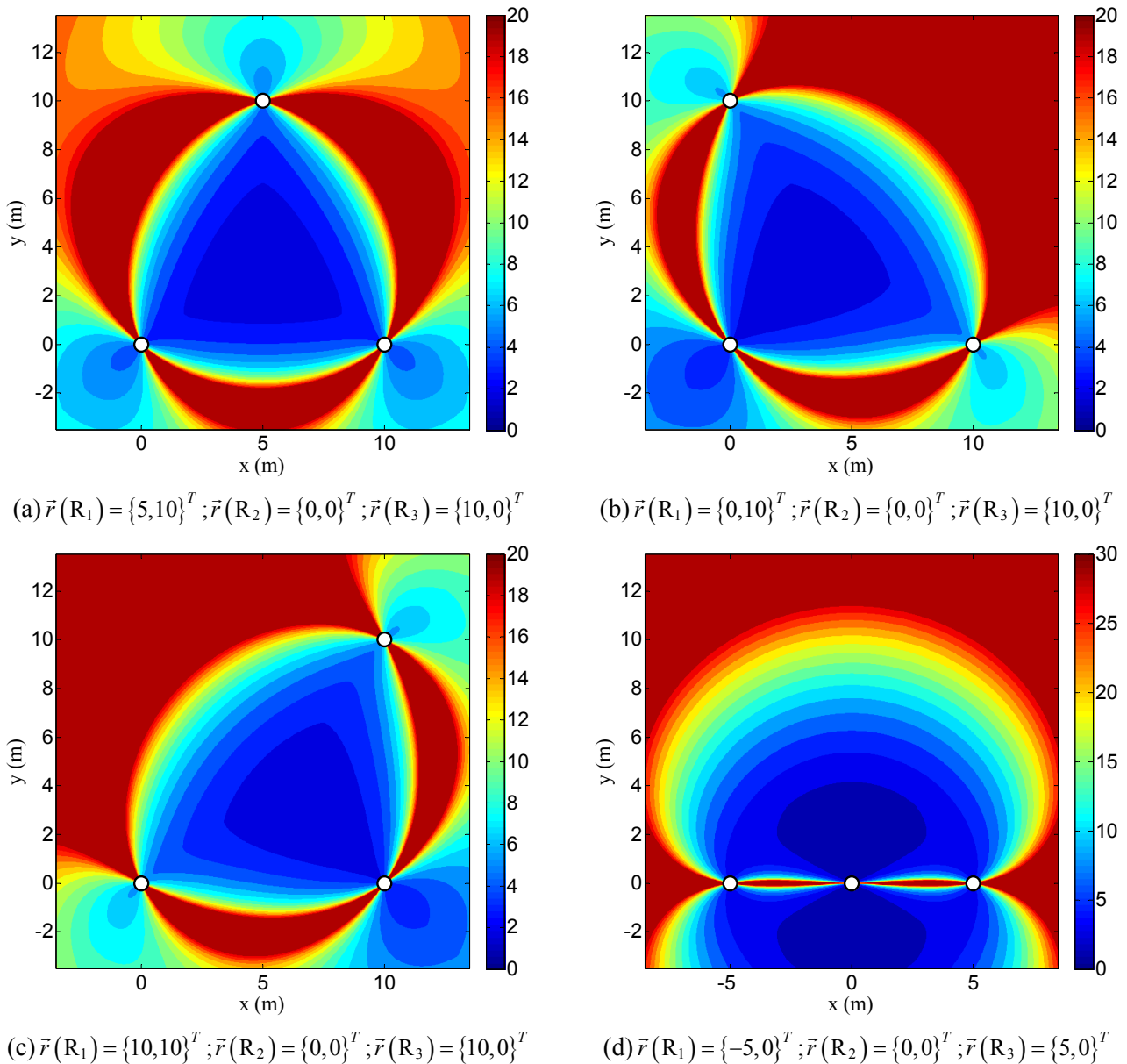


Figura 4.12 Magnitud del paràmetre d'error ε (mm) en funció de la posició real de P i per a diferents disposicions de reflectors ($\Delta\theta_m = 0,2$ mrad)

En el gràfic (d), en el que els reflectors estan alineats, es fa palesa la indeterminació del mètode sobre la recta que passa pels tres reflectors. S'observa també que l'error de posició creix de forma molt sobtada quan P s'apropa a aquesta recta. En la resta de punts de l'espai de treball, s'aprecia com l'error augmenta quan el punt P que es posiciona s'allunya del triplet de reflectors utilitzat (color vermell). La màxima precisió (color blau fosc) s'obté en una zona pròxima al reflector R_2 . En aquest gràfic l'escala d'error arriba fins a 30 mm, per al mateix error angular màxim $\Delta\theta_m = 0,2$ mrad. Tot paràmetre ε superior a 30 mm es representa amb el mateix color vermell.

4.1.3 Propagació de l'error en les mesures angulars en el posicionament estàtic del robot. Incertesa en l'orientació

A partir de la posició \mathbf{p} i d'un angle relatiu qualsevol θ_i es pot conèixer l'orientació del robot a partir de l'orientació absoluta de la recta entre P i el reflector R_i :

$$\psi_i(\mathbf{p}, \theta_i) = \arctan \frac{y_i - y}{x_i - x} - \theta_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.31)$$

on $\{x_i, y_i\}^T$ és la posició del reflector R_i en el sistema de referència triplet (SRT) i θ_i l'angle relatiu corresponent a aquest reflector. Per tant, es disposa de tres equacions ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 per a determinar l'orientació del robot, cadascuna d'elles associada a un reflector diferent. Donat que les coordenades de posició x i y són funció dels angles θ_1 , θ_2 i θ_3 –equació (4.20)– ψ_i és també funció d'aquests angles:

$$\psi_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \arctan \frac{y_i - y(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{x_i - x(\theta_1, \theta_2, \theta_3)} - \theta_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.32)$$

A continuació s'observa com, tot i la presència d'errors $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ i $\delta\theta_3$ en les mesures angulars, pel que fa a l'error en l'orientació determinada és indiferent el reflector R_i que es triï per al seu càlcul. Si es defineix amb la variable ϕ_i l'angle absolut respecte a l'eix x de la recta entre el centre del capçal làser P i el reflector R_i :

$$\phi_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \arctan \frac{y_i - y(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{x_i - x(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.33)$$

resulta la següent relació lineal entre les variables ψ_i , ϕ_i i θ_i :

$$\psi_i = \phi_i - \theta_i. \quad (4.34)$$

Si es considera que aquestes variables són aleatòries, i que per tant poden incorporar un cert error respecte al seu valor real, llavors:

$$\psi_i^r + \delta\psi_i = (\phi_i^r + \delta\phi_i) - (\theta_i^r + \delta\theta_i), \quad (4.35)$$

on el superíndex r indica el valor real de la variable. Com que els valors reals de les variables compleixen l'equació (4.34), es té que els errors han de verificar:

$$\delta\psi_i = \delta\phi_i - \delta\theta_i, \quad (4.36)$$

i per tant per a dos reflectors R_i i R_j qualssevol s'obté:

$$\delta\psi_j - \delta\psi_i = (\delta\phi_j - \delta\phi_i) - (\delta\theta_j - \delta\theta_i) = (\delta\phi_j - \delta\phi_i) - \delta\alpha_{ij}; \quad \forall i, j, \quad (4.37)$$

on $\alpha_{ij} \equiv \theta_j - \theta_i$ és l'angle relatiu entre les rectes corresponents als reflectors R_i i R_j (Figura 4.3). La Figura 4.13 mostra el punt P^r on es troba realment el robot –intersecció dels arcs

capaços grisos associats als angles reals α_{ij}^r i α_{jk}^r , i el punt P' determinat mitjançant la intersecció dels arcs capaços de color blau i taronja, associats als angles entre reflectors calculats a partir de les mesures *amb errors* $\alpha_{ij}^r + \delta\alpha_{ij}$ i $\alpha_{jk}^r + \delta\alpha_{jk}$ respectivament.

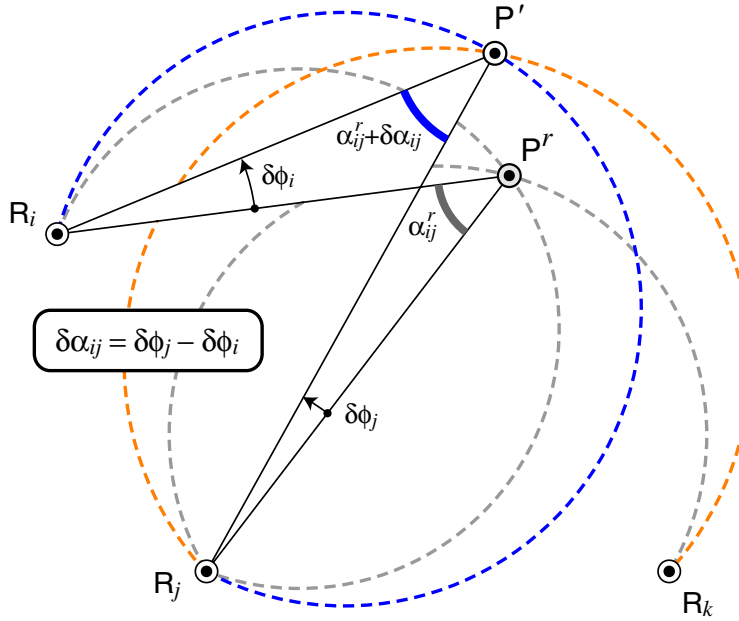


Figura 4.13 Relació entre els errors angulars

Com es pot observar, els errors corresponents als angles absoluts de les rectes PR_i i $PR_j - \delta\phi_i$ i $\delta\phi_j$ respectivament— estan relacionats geomètricament i la seva diferència val:

$$\delta\alpha_{ij} = \delta\phi_j - \delta\phi_i; \quad \forall i, j. \quad (4.38)$$

Aleshores, per mitjà de l'equació (4.37), es dedueix que els errors d'orientació $\delta\psi_i$ i $\delta\psi_j$ que s'obtenen si s'utilitzen ψ_i i ψ_j ($i \neq j$) són iguals, i per tant es conclou que és indiferent el reflector que s'utilitzi per al càlcul de l'orientació, ja que qualsevol d'ells conduirà al mateix resultat. Per simplicitat es pot escollir el reflector R_2 , ja que les seves coordenades en el sistema de referència utilitzat en el posicionament (SRT) són nul·les, i per tant:

$$\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \arctan \frac{-y(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{-x(\theta_1, \theta_2, \theta_3)} - \theta_2. \quad (4.39)$$

A partir de l'equació (4.36), s'observa que hi ha una part de l'error en el càlcul de l'orientació que prové de l'error angular de la recta entre la posició de P —determinada pel mètode de triangulació— i el reflector ($\delta\phi_i$), i una altra part que prové de l'error en la mesura angular associada al mateix reflector ($\delta\theta_i$).

En el primer terme ($\delta\phi_i$) hi influeix l'error en el càlcul de la posició per intersecció dels arcs capaços que depèn, com s'ha vist en l'apartat anterior, dels errors $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ i $\delta\theta_3$. De fet, l'error $\delta\phi_i$ és el més important —ja que $\delta\theta_i$ és l'error de mesura i és en principi petit— i com que depèn de l'error en la posició calculada creixerà quan P s'apropi a la circumferència que passa pels tres reflectors. El càlcul de l'orientació és indeterminat sobre aquesta circumferència, ja que també ho és el càlcul de la posició p .

4.1.4 Estudi estadístic del posicionament dinàmic considerant errors gaussians en l'estat angular

En aquesta tesi es presenta un algorisme dinàmic d'estimació dels angles relatiu al robot de les rectes visuals als reflectors θ_1 , θ_2 i θ_3 –s'exposarà al Capítol 5–. Mitjançant aquest algorisme, basat en el filtre de Kalman [Kalman 1960, Kalman i Bucy 1961] per a sistemes no lineals, es calcula a cada instant de temps l'estimació d'aquests angles –és a dir, el seu valor esperat– i la matriu de covariància de l'error comès en l'estimació, en funció de l'evolució hodomètrica dels angles, de les mesures externes que realitza el sensor làser, i dels errors presents en les mesures hodomètriques i del sensor làser.

En aquest algorisme els errors es modelitzen com a gaussians, és a dir, tots segueixen distribucions de probabilitat normals de mitjana 0 i variància σ^2 . Seguint la nomenclatura del Capítol 5, s'anomena \mathbf{x}^1 al vector d'estat angular format pels tres angles mesurats pel sistema làser $\mathbf{x} \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$, i $\tilde{\mathbf{x}} \equiv E[\mathbf{x}]$ al seu valor esperat, que com s'ha dit es determina en qualsevol instant per mitjà de l'algorisme de Kalman. Es defineix el vector d'error en l'estimació de l'estat $\delta\mathbf{x}$ com:

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}; \quad \begin{Bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

on els errors $\delta\theta_i$ segueixen una funció de densitat de probabilitat normal –o gaussiana– amb mitjana 0 i variància $\sigma_{\theta_i}^2$. Si es té en compte l'expressió (4.40), una mesura angular qualsevol θ_i és també una variable aleatòria que segueix una distribució gaussiana centrada en el seu valor esperat $\tilde{\theta}_i$ i amb la mateixa variància $\sigma_{\theta_i}^2$. La matriu de covariància P_x de l'error comès en l'estimació de l'estat angular:

$$P_x \equiv E[\delta\mathbf{x} \delta\mathbf{x}^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta_1}^2 & \sigma_{\theta_1\theta_2} & \sigma_{\theta_1\theta_3} \\ \sigma_{\theta_1\theta_2} & \sigma_{\theta_2}^2 & \sigma_{\theta_2\theta_3} \\ \sigma_{\theta_1\theta_3} & \sigma_{\theta_2\theta_3} & \sigma_{\theta_3}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

es determina a cada instant de temps per mitjà del filtre de Kalman proposat tenint en compte la propagació dinàmica de l'error en les mesures hodomètriques del robot, i l'error present en cada mesura feta pel sensor làser. A partir de les equacions utilitzades en els diferents passos de l'algorisme, la matriu de covariància P_x pot tenir termes no nuls fora de la diagonal, o el que és el mateix, pot ser que dues variables angulars d'estat θ_i i θ_j estiguin correlacionades. La covariància entre aquestes dues variables és el terme corresponent a la fila i i columna j de la matriu P_x :

$$\sigma_{\theta_i\theta_j} = \text{cov}(\delta\theta_i, \delta\theta_j) = \text{cov}(\theta_i, \theta_j) \equiv E\left[(\theta_i - \tilde{\theta}_i)(\theta_j - \tilde{\theta}_j)\right]. \quad (4.42)$$

¹ En aquest apartat s'obvia el subíndex k , que s'utilitza al Capítol 5 per a designar que la variable correspon a l'instant de temps t_k . Per exemple, \mathbf{x}_k o $P_{x,k}$.

Per a tenir una mesura de la precisió obtinguda en el posicionament mitjançant intersecció d'arcs capaços, cal veure com es propaguen els errors en l'estimació de l'estat angular a través de les equacions (4.20) i (4.39) que determinen la posició \mathbf{p} i l'orientació ψ a partir dels angles θ_i . La propagació d'errors es pot entendre intuïtivament imaginant com les petites perturbacions en les variables angulars θ_i afecten al càlcul del posicionament.

Per a simplificar els estudis estadístics del càlcul de *posició* i d'*orientació*, que es realitzen a continuació, es suposarà que les tres variables de l'estat angular $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$ són independents –és a dir, que la covariància $\sigma_{\theta_i \theta_j} = 0$; $i \neq j$ –, i que totes elles tenen la mateixa variància σ_θ^2 . Sota aquestes condicions, la matriu de covariància P_x resulta:

$$P_x \equiv E[\delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}^T] = \sigma_\theta^2 I. \quad (4.43)$$

Aquesta variància σ_θ^2 no correspon a la variància de l'error en les mesures *estàtiques* del sensor làser $\sigma_{\theta_m}^2$ –que és aproximadament $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ mrad}^2$, tal com es fa palès a l'estudi de la modelització d'aquest error en l'Annex C–, sinó que correspon a la variància de les variables d'estat angular que s'estimen a cada instant de temps en *condicions dinàmiques* –robot en moviment– mitjançant l'algorisme que es presentarà al Capítol 5. Aquesta *variància dinàmica* σ_θ^2 serà superior a la de les mesures *estàtiques*, perquè entre mesures directes del sensor es calcula hodomètricament l'evolució dels angles de l'estat i per tant s'acumula error en la integració temporal. Mitjançant el sistema emprat, s'arriba a variàncies de l'ordre de $0,01 \text{ mrad}^2$ (desviació estàndard $\sigma_\theta = 0,1 \text{ mrad}$).

En els estudis estadístics següents, s'utilitzaran com a valors de desviació estàndard de l'error en les variables d'estat: $\sigma_\theta = 0,1 \text{ mrad}$, i $\sigma_\theta = 1 \text{ mrad}$. El primer valor representa l'ordre de magnitud de l'error que s'assoleix en les variables θ_i en condicions dinàmiques. El segon representa una cota superior de la desviació estàndard d'aquest error i s'utilitzarà per a realitzar els gràfics de l'error de biaix (*bias error*) de posició i orientació.

Estudi estadístic del càlcul de posició

La funció (4.20) relaciona la posició \mathbf{p} amb el vector d'estat angular \mathbf{x} . Com s'ha dit, en cada instant de temps es disposa d'una estimació $\tilde{\mathbf{x}}$ dels angles, així com de la matriu P_x de covariància de l'error en l'estimació. Cal veure en primer lloc quina és la millor estimació de la posició, és a dir, el seu valor esperat, a partir de les variables angulars conegudes amb un cert error –modelitzat com a gaussià–. Si es pren el desenvolupament de Taylor fins a termes de segon ordre de la funció 2-dimensional \mathbf{p} resulta:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta_i} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \delta \theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \delta \theta_i \delta \theta_j + O^3. \quad (4.44)$$

I per tant, el valor esperat per a la posició \mathbf{p} és:

$$E[\mathbf{p}] \equiv \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} E[\delta \theta_i \delta \theta_j]. \quad (4.45)$$

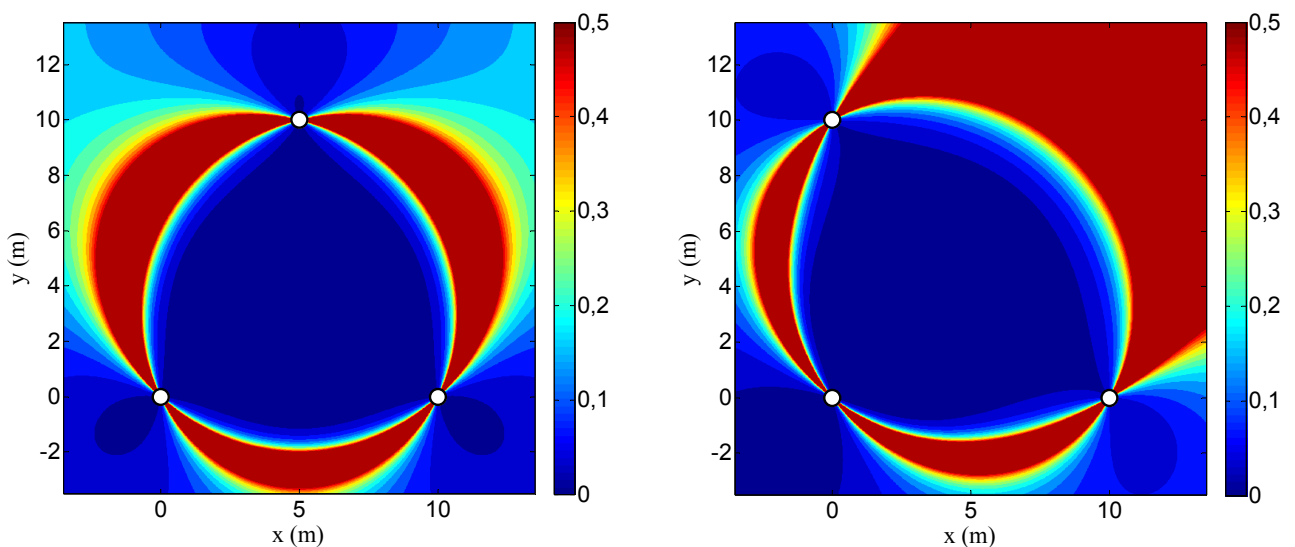
Si es suposa, tal com s'ha dit, que les variables angulars d'estat θ_i són independents, i que totes elles tenen la mateixa variància σ_θ^2 , l'expressió anterior pren la forma:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}) + \underbrace{\frac{\sigma_\theta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \theta_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \theta_3^2} \right)}_{\Delta^2 \mathbf{p}} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \equiv \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}) + \Delta^2 \mathbf{p}, \quad (4.46)$$

on el terme $\Delta^2 \mathbf{p} \equiv \{\Delta^2 x, \Delta^2 y\}^T$ representa la diferència entre el valor esperat $\tilde{\mathbf{p}}$ i el valor de \mathbf{p} calculat a partir de l'estimació de l'estat angular $\tilde{\mathbf{x}}$. El seu mòdul s'anomena sovint a la literatura *error de biaix*. A l'Annex A es donen les expressions de les primeres i segones derivades parcials del vector de posició \mathbf{p} respecte a l'estat angular, requerides en el càlcul d'aquest terme.

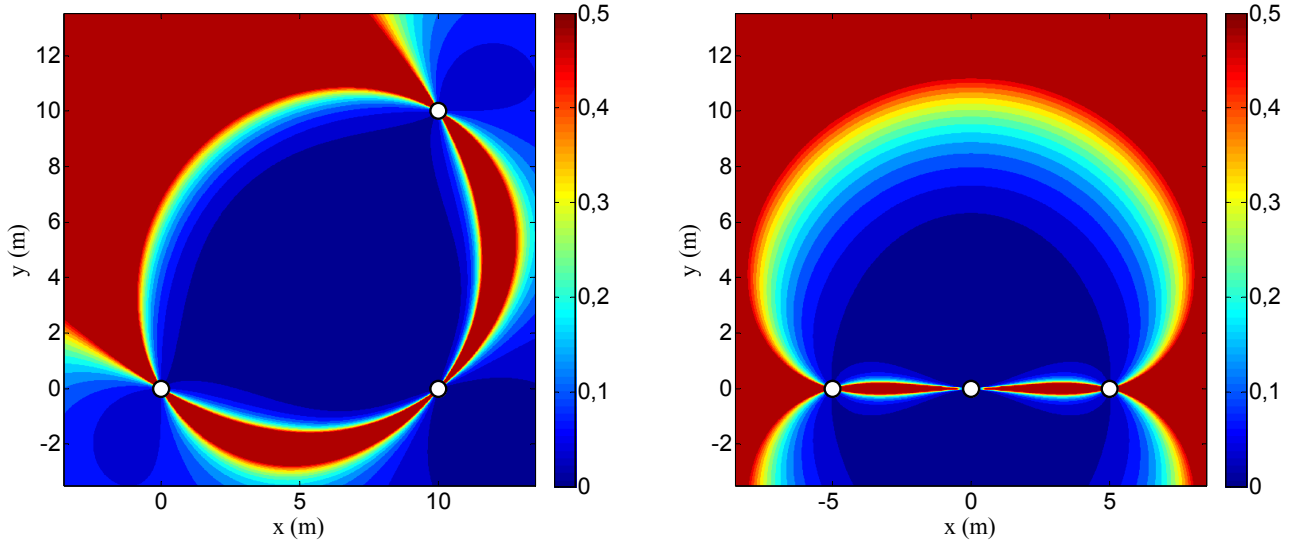
A continuació s'avalua el mòdul del terme quadràtic $\Delta^2 \mathbf{p}$ en funció de la posició de P i per a una desviació estàndard $\sigma_\theta = 1$ mrad en les variables d'estat. Els gràfics de la Figura 4.14 mostren el valor d'aquest terme per a les distribucions de reflectors que es consideren al llarg de la tesi. S'ha escollit $\sigma_\theta = 1$ mrad per a realitzar els gràfics següents perquè és d'un ordre de magnitud superior a la desviació estàndard de l'error en l'estimació de les variables d'estat angular si s'utilitza el sensor làser emprat. D'aquesta manera es pot determinar una cota màxima de l'error de biaix en funció de la posició del punt P.

Com s'observa en els gràfics (a), (b) i (c) de la Figura 4.14, l'error de biaix és inferior a 0,1 mm a la major part de l'àrea de la circumferència que passa pels tres reflectors (zona de color blau fosc). L'error de biaix mínim es troba prop del centre d'aquesta circumferència crítica, que és a més el lloc on s'obté la millor precisió en el càlcul de la posició. En ser aquesta quantitat negligible si es té en compte la precisió que es pretén obtenir –de l'ordre de mil·límetres en condició dinàmica–, es pot concloure que el desenvolupament de Taylor de primer ordre de la funció \mathbf{p} aproxima de forma suficientment precisa la funció a l'interior d'aquesta circumferència.



(a) $\vec{r}(R_1) = \{5, 10\}^T$; $\vec{r}(R_2) = \{0, 0\}^T$; $\vec{r}(R_3) = \{10, 0\}^T$

(b) $\vec{r}(R_1) = \{0, 10\}^T$; $\vec{r}(R_2) = \{0, 0\}^T$; $\vec{r}(R_3) = \{10, 0\}^T$



(c) $\vec{r}(R_1) = \{10, 10\}^T$; $\vec{r}(R_2) = \{0, 0\}^T$; $\vec{r}(R_3) = \{10, 0\}^T$ (d) $\vec{r}(R_1) = \{-5, 0\}^T$; $\vec{r}(R_2) = \{0, 0\}^T$; $\vec{r}(R_3) = \{5, 0\}^T$

Figura 4.14 Mòdul del terme quadràtic $\Delta^2 p$ (mm) en funció de la posició de P i per a diferents disposicions de reflectors ($\sigma_\theta = 1$ mrad)

Pel que fa a la disposició de reflectors alineats –gràfic (d) de la figura–, el terme de biaix és inferior a 0,1 mm a l'interior d'una zona prou àmplia (color blau fosc), dins la qual també s'accepta l'aproximació de primer ordre de la funció vectorial \mathbf{p} . Els resultats dels gràfics s'han obtingut per a una desviació estàndard en l'error de les variables d'estat de 1 mrad. Amb errors més petits –com els que s'obtenen amb l'equipament estudiat en aquesta tesi, de l'ordre de la dècima de mrad–, el terme de biaix serà encara menys important, i l'aproximació lineal de la funció serà acceptable dins una zona encara més gran.

Per tant, dins la zona on el terme $\Delta^2 \mathbf{p}$ sigui negligible, el valor esperat de posició en funció del vector d'estat angular –que segueix una distribució gaussiana– s'obtindrà directament utilitzant l'equació (4.20) per al valor esperat de l'estat angular $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$E[\mathbf{p}] \approx \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3). \quad (4.47)$$

Una vegada s'ha justificat la utilització de l'aproximació lineal de primer ordre de \mathbf{p} , s'estudia la propagació lineal de primer ordre de l'error en l'estat angular $\delta \mathbf{x}$. A partir de l'equació (4.44) i negligint el terme de segon ordre s'obté:

$$\mathbf{p} \approx E[\mathbf{p}] + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta_i} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \delta \theta_i}_{\delta \mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}} + \delta \mathbf{p}. \quad (4.48)$$

Per tant, l'error en el vector d'estat angular $\delta \mathbf{x}$ i l'error en la determinació de la posició $\delta \mathbf{p}$ estan relacionats linealment en la forma:

$$\delta \mathbf{p} = \nabla \mathbf{p}_x \delta \mathbf{x}; \quad \nabla \mathbf{p}_x \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\tilde{\mathbf{x}}}, \quad (4.49)$$

on $\nabla \mathbf{p}_x$ és la matriu jacobiana de les derivades parcials del vector de posició respecte a l'estat angular avaluada en l'estat angular estimat $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\nabla \mathbf{p}_x \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}_{\tilde{\mathbf{x}}}. \quad (4.50)$$

Les expressions de les derivades parcials anteriors es troben a l'Annex A. A partir de la relació (4.49) s'arriba fàcilment a la següent expressió:

$$\delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p}^T = \nabla \mathbf{p}_x \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}^T \nabla \mathbf{p}_x^T. \quad (4.51)$$

L'expressió anterior permet relacionar la matriu de covariància C de l'error comès en el càlcul de la posició \mathbf{p} amb la matriu de covariància P_x de l'error en l'estimació angular \mathbf{x} , coneguda en cada pas de l'algorisme recursiu d'estimació basat en el filtre de Kalman estès:

$$C \equiv E[\delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p}^T] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{p}_x P_x \nabla \mathbf{p}_x^T. \quad (4.52)$$

Els termes de la diagonal d'aquesta matriu són la variància de les variables de posició x i y respectivament, i el terme de fora de la diagonal σ_{xy} és la covariància entre x i y i indica la seva correlació:

$$\sigma_{xy} = \text{cov}(x, y) \equiv E[(x - \tilde{x})(y - \tilde{y})]. \quad (4.53)$$

L'estimació del posicionament $\tilde{\mathbf{p}}$ a partir de la triangulació per arcs capaços, i la matriu de covariància obtinguda C determinen una funció 2-dimensional de densitat de probabilitat normal per a la variable aleatòria de posició \mathbf{p} . Aquesta modelització de la distribució de probabilitat per a la variable \mathbf{p} té validesa dins la zona on s'accepta l'aproximació lineal d'aquesta funció –és a dir, a la zona on l'error de biaix $\Delta^2 \mathbf{p}$ és negligible–.

En robòtica mòbil, per representar gràficament aquesta densitat de probabilitat s'utilitza una *el·lipse d'incertesa*, o també el·lipsoide d'error, que s'obté a partir del concepte de *distància de Mahalanobis* [Bar-Shalom *et al.* 2001, Castellanos i Tardós 1999]. En ser \mathbf{p} un vector 2-dimensional la distribució de probabilitat del qual es considera gaussiana, centrada en l'estimació $\tilde{\mathbf{p}}$ i amb matriu de covariància C , es demostra que la variable escalar q obtinguda mitjançant la forma quadràtica:

$$q \equiv (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}})^T C^{-1} (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}) = \delta \mathbf{p}^T C^{-1} \delta \mathbf{p}, \quad (4.54)$$

es pot obtenir com a suma de quadrats de dues variables aleatòries gaussianes, independents, de mitjana nul·la i variància unitària, i que per tant segueix una distribució de probabilitat χ^2 de dos graus de llibertat [Bar-Shalom *et al.* 2001]. A aquesta forma quadràtica q se l'anomena *distància de Mahalanobis*.

Com que la variable de posició \mathbf{p} segueix una distribució de probabilitat normal, es demostra que els punts del pla x - y que compleixen l'equació:

$$q \equiv (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}})^T C^{-1} (\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}) \leq K, \quad (4.55)$$

es troben dins l'el·lipse centrada a $\tilde{\mathbf{p}}$ de semieixos $\sqrt{K\lambda_1}$ i $\sqrt{K\lambda_2}$, Figura 4.15, on λ_1 i λ_2 són els valors propis de la matriu de covariància C [Ribeiro 2004]:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + (2\sigma_{xy})^2} \right), \quad (4.56)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + (2\sigma_{xy})^2} \right). \quad (4.57)$$

Els vectors propis associats a λ_1 i λ_2 defineixen les direccions dels eixos d'aquesta el·lipse. Si w_1 i w_2 són les coordenades associades a aquests eixos, Figura 4.15, l'equació de l'el·lipse definida pren la forma:

$$\frac{w_1^2}{K\lambda_1} + \frac{w_2^2}{K\lambda_2} \leq 1. \quad (4.58)$$

L'angle φ_w de rotació entre els eixos $\{w_1, w_2\}$ del sistema de referència associat als eixos de l'el·lipse, i els eixos $\{x, y\}$ del sistema de referència triplet (SRT) –que s'utilitza en la triangulació– es determina a partir de l'expressió:

$$\varphi_w = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_w < \frac{\pi}{2}. \quad (4.59)$$

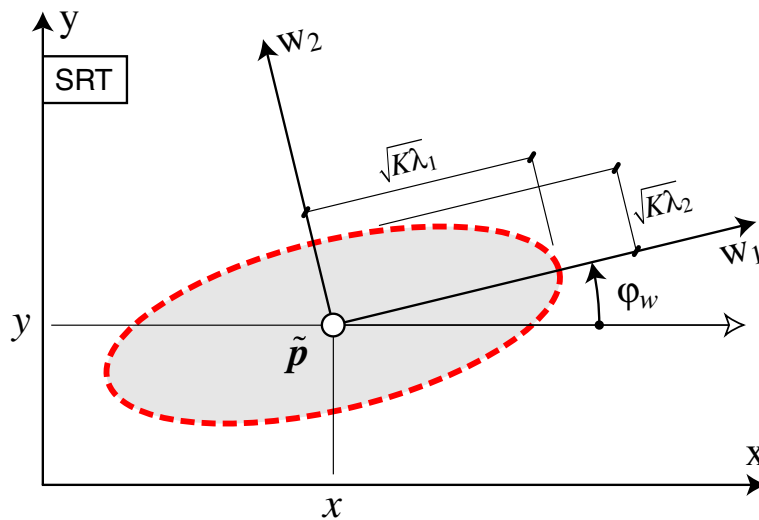


Figura 4.15 Geometria de l'el·lipse d'incertesa

L'àrea A_E d'aquesta el·lipse d'incertesa:

$$A_E = \pi K \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (4.60)$$

està associada al paràmetre K . Quan més gran és K més gran és l'el·lipse, i per tant més gran és la probabilitat que una mesura de posició \mathbf{p} estigui continguda dins l'el·lipse definida. Com que la variable q segueix una distribució de probabilitat χ^2 de 2 graus de llibertat, i l'el·lipse ve definida per $q \leq K$ —equació (4.55)—, el valor de K s'escollirà en funció de la probabilitat μ que una mesura de posició qualsevol \mathbf{p} estigui dins l'el·lipse d'incertesa E :

$$\Pr\{\mathbf{p} \subset E\} = \Pr\{q \leq K\} = \mu. \quad (4.61)$$

La Taula 4.1 dona els valors de K que s'han d'utilitzar, si es té en compte que la variable aleatòria q segueix una distribució de probabilitat χ^2 de 2 graus de llibertat. Els valors de K verifiquen:

$$\Pr\{q \leq K\} = \int_0^K f_\chi(q) dq = \mu, \quad (4.62)$$

on $f_\chi(q)$ representa la funció de densitat de probabilitat de la variable q , Figura 4.16.

Taula 4.1 Valors de la variable K per a diferents probabilitats μ

$\mu = 0,99$	$\mu = 0,95$	$\mu = 0,90$	$\mu = 0,75$	$\mu = 0,50$	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,10$	$\mu = 0,05$
9,21	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103

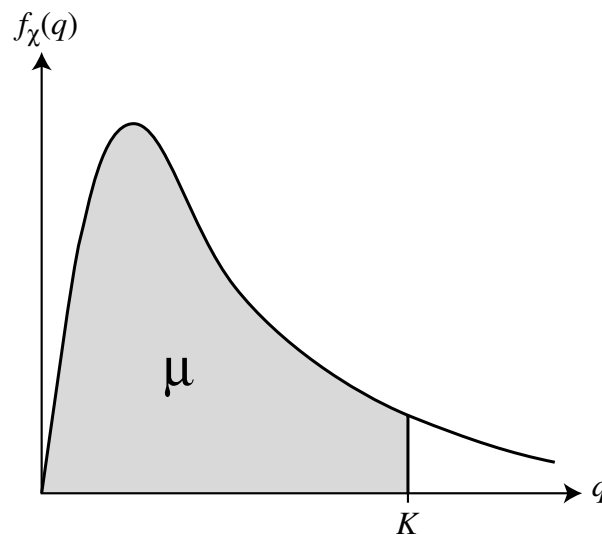


Figura 4.16 La probabilitat que q sigui inferior o igual a K és μ , àrea per sota la funció de densitat de probabilitat $f_\chi(q)$

Per tant, a partir de la Taula 4.1 un valor de $K = 5,99$ definiria una el·lipse que inclou el conjunt de punts del pla x - y dins el qual es troba la mesura real de posició amb una probabilitat de 0,95:

$$\Pr\{q \leq 5,99\} = \Pr\{\delta \mathbf{p}^T C^{-1} \delta \mathbf{p} \leq 5,99\} = 0,95. \quad (4.63)$$

La Figura 4.17 mostra l'el·lipse d'error associada a una probabilitat de 0,95 ($K=5,99$) per a la mateixa posició de P i disposició de reflectors que en la Figura 4.10. En aquest cas, s'ha considerat que es coneix l'estimació $\tilde{\theta}_i$ de les variables angulars d'estat, que aquestes variables no estan correlacionades —és a dir, que $\sigma_{\theta_i \theta_j} = 0; i \neq j$ —, i que la seva desviació estàndard és la mateixa per a totes i igual a 1° ($\sigma_\theta = \pi/180$ rad). Per tant, la matriu de covariància P_x és en aquest cas:

$$P_x = (\pi/180)^2 I \text{ rad}^2. \quad (4.64)$$

La desviació estàndard que es considera és aproximadament dos ordres de magnitud superior a l'error obtingut mitjançant el sistema experimental. Tanmateix, s'utilitza aquest valor per a facilitar la visualització de l'el·lipse. A la figura també s'hi representen les circumferències que delimitarien la zona d'incertesa si els errors $\delta\theta$ fossin acotats dins l'interval $[-2\sigma_\theta, 2\sigma_\theta] = [-2^\circ, 2^\circ]$. S'observa com l'el·lipse d'incertesa determinada mitjançant la propagació de primer ordre dels errors s'ajusta a la forma de la zona d'incertesa de posició Z_P que s'obtidria si els errors fossin acotats dins l'interval definit.

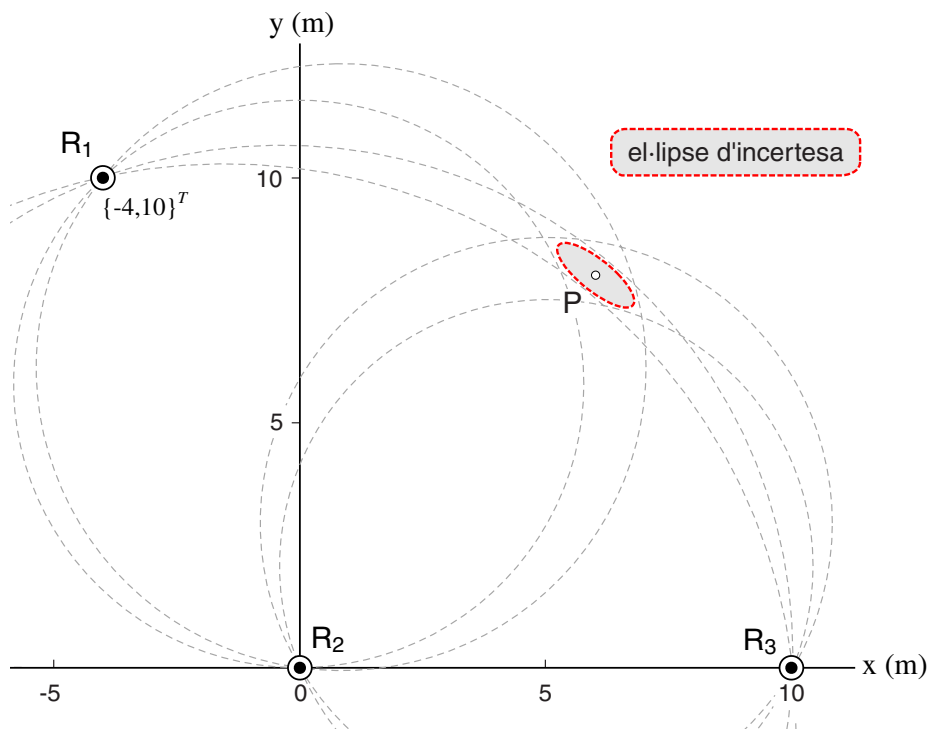


Figura 4.17 El·lipse d'incertesa en el càlcul de la posició de P ($\sigma_\theta = 1^\circ$)

Per tal de comprovar la validesa de l'aproximació lineal en la propagació dels errors s'han realitzat diferents simulacions de Monte Carlo. S'ha considerat la disposició de reflectors següent: $\vec{r}(R_1) = \{0, 10\}^T$ m, $\vec{r}(R_2) = \{0, 0\}^T$ m, i $\vec{r}(R_3) = \{10, 0\}^T$ m, i s'han realitzat

simulacions de la propagació dels errors en diferents posicions de P i per a diferents desviacions estàndard en les mesures. Les posicions del punt P són $\{5,5\}^T$ m –centre de la *circumferència crítica*–, $\{5,9\}^T$ m i $\{5,11,5\}^T$ m –prop de la *circumferència crítica*–, Figura 4.18. Les desviacions estàndard que s’han considerat per a les variables d’estat angular –la mateixa per a les tres variables θ_1 , θ_2 i θ_3 – són $\sigma_\theta = 0,1$ mrad i $\sigma_\theta = 1$ mrad.

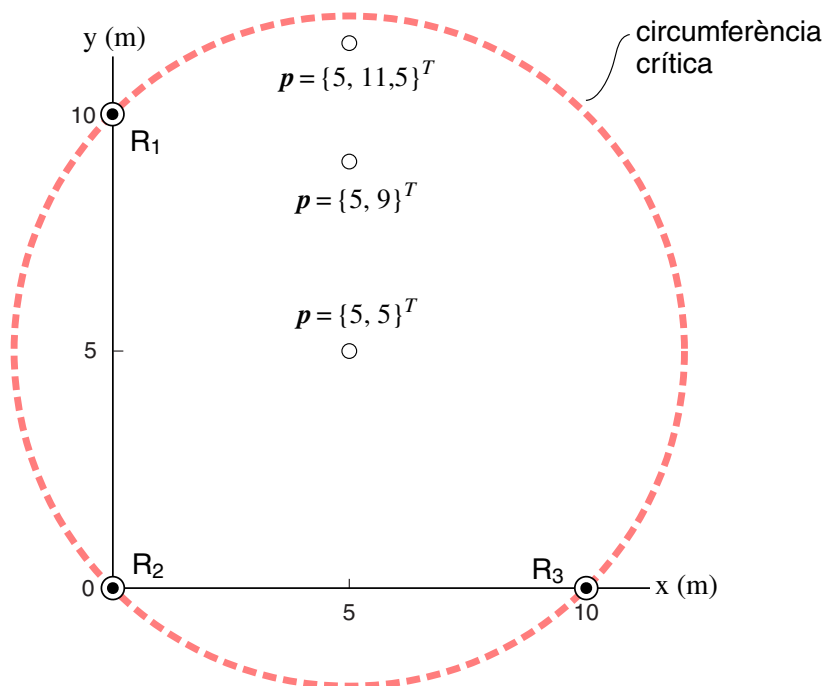


Figura 4.18 Posicions considerades en les simulacions de Monte Carlo

La metodologia seguida en les simulacions és la següent. A partir de la posició de P considerada en cada cas es calculen els angles reals θ_1 , θ_2 i θ_3 que corresponen a aquella posició –suposant que l’orientació del robot és 0–. Aleshores es calculen $N = 1000$ valors per a cada angle θ_i afegint al seu valor real un error gaussià de variància σ_θ^2 –amb errors angulars independents–.

A continuació es calcula la posició associada a cada triplet de mesures –amb errors– mitjançant l’equació (4.20). Els gràfics de la Figura 4.19 mostren les $N = 1000$ posicions obtingudes, i l’el·lipse d’incertesa de probabilitat 0,95 determinada mitjançant el mètode de propagació lineal de l’error definit en aquest apartat per a les tres posicions indicades. Es considera $\sigma_\theta = 0,1$ mrad (columna de l’esquerra de la figura) i $\sigma_\theta = 1$ mrad (columna de la dreta de la figura).

En els gràfics de la Figura 4.19 s’observa com en la majoria de casos la dispersió de punts s’ajusta correctament a l’el·lipse determinada assumint una propagació lineal dels errors. L’únic gràfic en el qual s’aprecia que els punts calculats no s’ajusten a l’el·lipse és el que correspon a la posició $\{5,11,5\}^T$ m per a $\sigma_\theta = 1$ mrad. Això es deu a la manca de validesa de l’aproximació lineal prop de la circumferència crítica com es fa palès als gràfics de la Figura 4.14 –terme quadràtic $\Delta^2 p$ no negligible–.

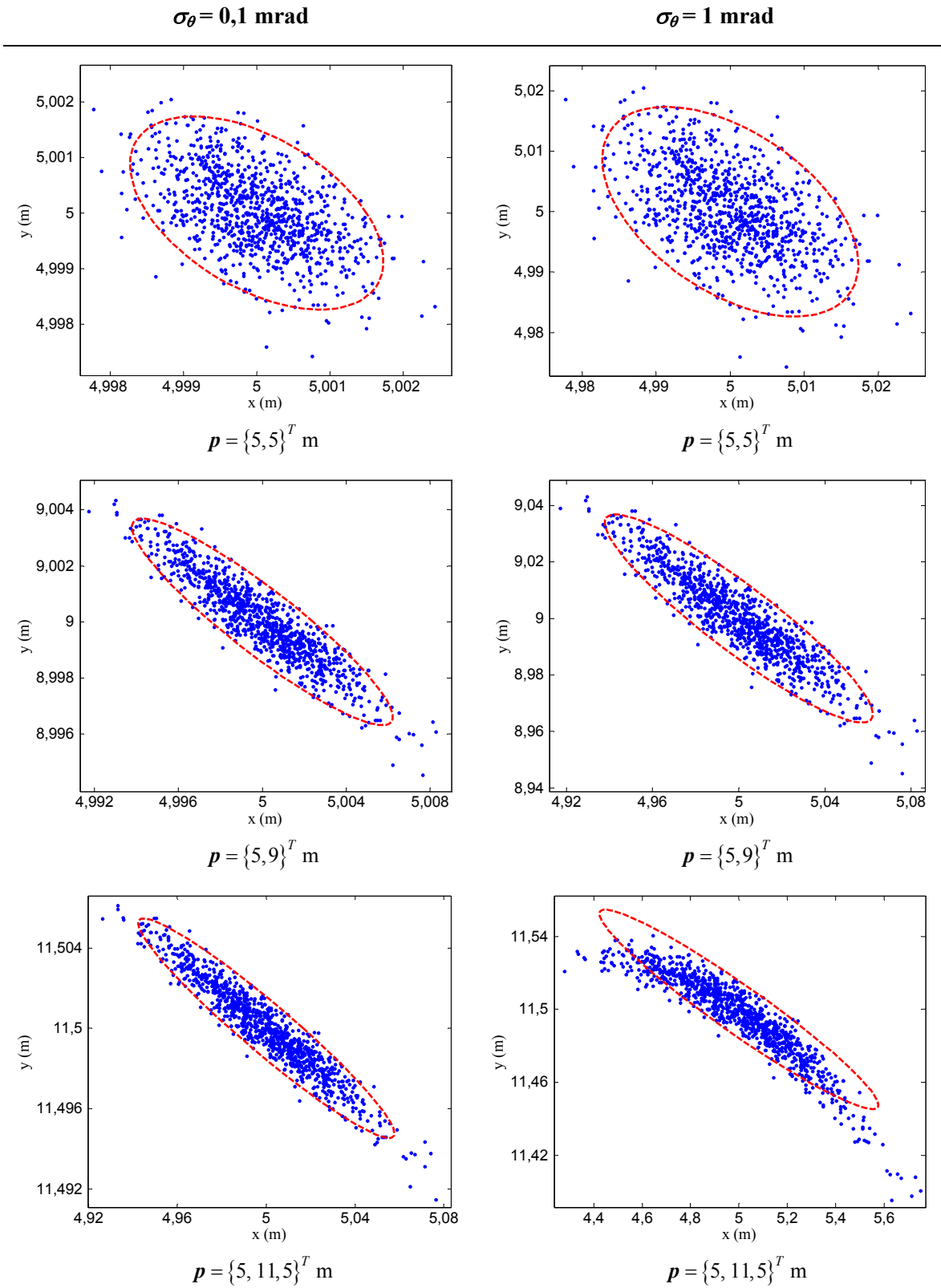


Figura 4.19 Simulacions de Monte Carlo de la propagació de l'error en el càlcul de la posició. Dispersió de punts i el-lipse d'incertesa per a cada posició

En els gràfics també s'observa com per a una mateixa desviació estàndard de l'error en els angles θ , l'error de posicionament augmenta quan el robot s'aproxima a la circumferència que passa pels tres reflectors. La Taula 4.2 mostra els paràmetres estadístics que

determinen l'el·lipse d'incertesa a partir de l'aproximació lineal de la funció \mathbf{p} i els paràmetres estadístics calculats a partir de la dispersió de punts, per a les diferents posicions que s'han considerat i per a $\sigma_\theta = 1$ mrad.

Taula 4.2 Paràmetres estadístics corresponents a l'el·lipse d'incertesa (aproximació lineal) i paràmetres estadístics calculats a partir de la dispersió de punts amb $\sigma_\theta = 1$ mrad

El·lipse d'incertesa (aprox. lineal)		Dispersió de punts	
$\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}})$ (m)	$C = \nabla \mathbf{p}_x P_x \nabla \mathbf{p}_x^T$ (mm ²)	$E[\mathbf{p}]$ (m)	$E[\delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p}^T]$ (mm ²)
$\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 & -25 \\ -25 & 50 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4,9999 \\ 5,0002 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 53,76 & -27,85 \\ -27,85 & 52,15 \end{bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} 5 \\ 9 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 644,61 & -350,30 \\ -350,30 & 224,72 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4,9992 \\ 9,0005 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 691,14 & -371,42 \\ -371,42 & 234,26 \end{bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} 5 \\ 11,5 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 55487 & -5017 \\ -5017 & 495 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4,9933 \\ 11,4965 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 59054 & -5229 \\ -5229 & 537 \end{bmatrix}$

Com s'observa, la discrepància entre el valor esperat de posició a partir de l'aproximació lineal i el valor esperat corresponent als punts calculats sense aproximar augmenta a mesura que el punt s'apropa a la circumferència crítica. Per a les dues primeres posicions $-\{5,5\}^T$ m i $\{5,9\}^T$ m– la discrepància entre aquests valors és de l'ordre de dècimes de mil·límetre, negligible per a la precisió que es pretén obtenir. La discrepància entre les matrius de covariància de l'error en cada cas també s'accentua quan el punt s'aproxima a l'esmentada circumferència.

Els gràfics de la Figura 4.20 mostren la longitud del semieix gran de l'el·lipsoide d'error ($\sqrt{K\lambda_1}$ per a $K = 5,99$) en mm en funció de la posició de P per a les disposicions de reflectors que es consideren en la tesi. Aquest semieix és indicatiu de l'error comès en l'estimació de la posició. Per a la realització dels gràfics s'ha considerat la desviació estàndard $\sigma_\theta = 0,1$ mrad.

Aquest valor de σ_θ és del mateix ordre de magnitud que el que s'obté, en *condicions dinàmiques*, mitjançant el sistema làser estudiat i l'algorisme dinàmic d'estimació angular que es presenta en aquesta tesi. Com s'aprecia, les gràfiques obtingudes són molt semblants a les de la Figura 4.12, en les que l'error angular es considera acotat amb una desviació màxima $\Delta\theta_m = 0,2$ mrad. El semieix gran de l'el·lipse és més petit que 5 mm dins una zona àmplia de la circumferència crítica en les distribucions de reflectors (a), (b) i (c); i prop del reflector central si els reflectors estan alineats (d).

A partir de les simulacions anteriors es conclou en primer lloc que l'el·lipse d'incertesa ajusta de manera correcta la propagació de l'error angular en el càlcul de la posició per triangulació d'arcs capaços. Aquesta el·lipse, fruit de l'aproximació lineal de la funció \mathbf{p} , perd validesa quan el punt P és prop de la circumferència crítica que passa pels tres reflectors –sobre la qual el mètode de triangulació és indeterminat–.

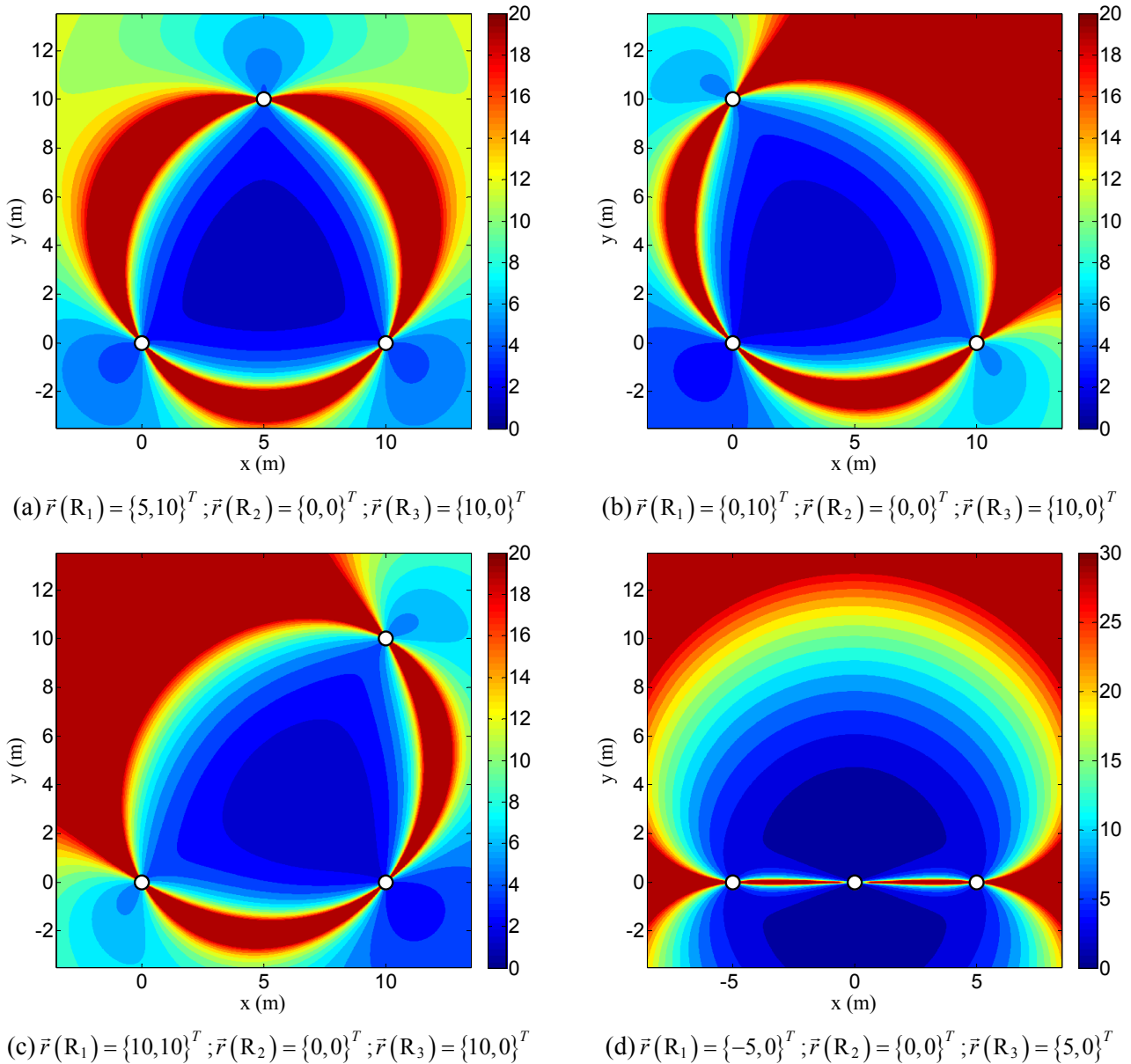


Figura 4.20 Magnitud del semieix gran de l'el·lipse d'error (mm) en funció de la posició de P i per a diferents disposicions de reflectors ($\sigma_\theta = 0,1$ mrad)

Dins la circumferència crítica, es pot utilitzar doncs la longitud del semieix gran de l'el·lipsoide d'error com a paràmetre indicatiu de l'error comès en la triangulació a partir de l'estimació errònia de l'estat angular:

$$\sqrt{\frac{K}{2} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + (2\sigma_{xy})^2} \right)}, \text{ amb } \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{p}_x P_x \nabla \mathbf{p}_x^T, \quad (4.65)$$

on el valor de K es tria en funció de la probabilitat μ (Taula 4.1), i $\tilde{\mathbf{x}}$ i P_x es determinen a cada instant de temps per mitjà de l'algorisme dinàmic d'estimació basat en el filtre de Kalman, com es farà palès en el Capítol 5 d'aquest treball.

Estudi estadístic del càlcul d'orientació

L'equació (4.39) per al càlcul de l'orientació és no lineal, i de forma anàloga al càlcul de la posició, es pren el desenvolupament de Taylor fins a termes d'ordre quadràtic d'aquesta per a determinar el seu valor esperat i estudiar la propagació dels errors:

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\tilde{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}) = \psi(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\psi}{\partial\theta_i} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \delta\theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \delta\theta_i\delta\theta_j + O^3. \quad (4.66)$$

A partir del desenvolupament anterior, el valor esperat per al càlcul de l'orientació ψ del robot és:

$$E[\psi] \equiv \tilde{\psi} = \psi(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} E[\delta\theta_i\delta\theta_j]. \quad (4.67)$$

Si es suposa –tal com s'ha fet anteriorment en l'equació (4.45)– que la variància de θ_1 , θ_2 i θ_3 és la mateixa σ_θ^2 , i que la covariància entre dues d'elles és negligible ($\sigma_{\theta_i\theta_j} \approx 0$; $i \neq j$), l'expressió (4.67) resulta:

$$\tilde{\psi} = \psi(\tilde{\mathbf{x}}) + \underbrace{\frac{\sigma_\theta^2}{2} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_3^2} \right)}_{\Delta^2\psi} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \equiv \psi(\tilde{\mathbf{x}}) + \Delta^2\psi, \quad (4.68)$$

on el terme $\Delta^2\psi$ representa la diferència entre el valor esperat $\tilde{\psi}$ i el valor d'orientació calculat a partir de l'estimació de l'estat angular $\psi(\tilde{\mathbf{x}})$. El seu valor absolut és l'*error de biaix* d'orientació. A l'Annex A es donen les expressions de les primeres i segones derivades parcials de l'orientació ψ respecte a l'estat angular.

A continuació s'avalua el valor absolut d'aquest terme $\Delta^2\psi$ en funció de la posició i per a una orientació real del vehicle de 0 rad respecte a l'eix x del SRT. La desviació estàndard considerada en les mesures angulars relatives al robot és $\sigma_\theta = 1$ mrad, tal com s'ha fet en l'estudi corresponent a l'error de biaix de posició. Els gràfics de la Figura 4.21 mostren el seu valor per a les distribucions de reflectors considerades al llarg d'aquest capítol.

Com s'observa en els gràfics d'aquesta figura, el terme quadràtic del desenvolupament en sèrie de Taylor de l'orientació és inferior a 0,01 mrad en la major part de l'interior de la circumferència que passa pels tres reflectors (zona de color blau fosc). Prop i sobre aquesta circumferència aquest terme es fa important per causa de la forta no linealitat quan es calcula la posició \mathbf{p} en funció de l'estat angular.

Es pot concloure doncs que en ser la magnitud d'aquest terme quadràtic de Taylor negligible a l'interior de la circumferència crítica, l'aproximació lineal de ψ és suficientment precisa dins aquesta zona. Per tant, en aquestes condicions el valor esperat per a l'orientació del robot es calcula directament a partir de l'estat angular estimat $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$E[\psi] \approx \psi(\tilde{\mathbf{x}}) = \psi(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3). \quad (4.69)$$

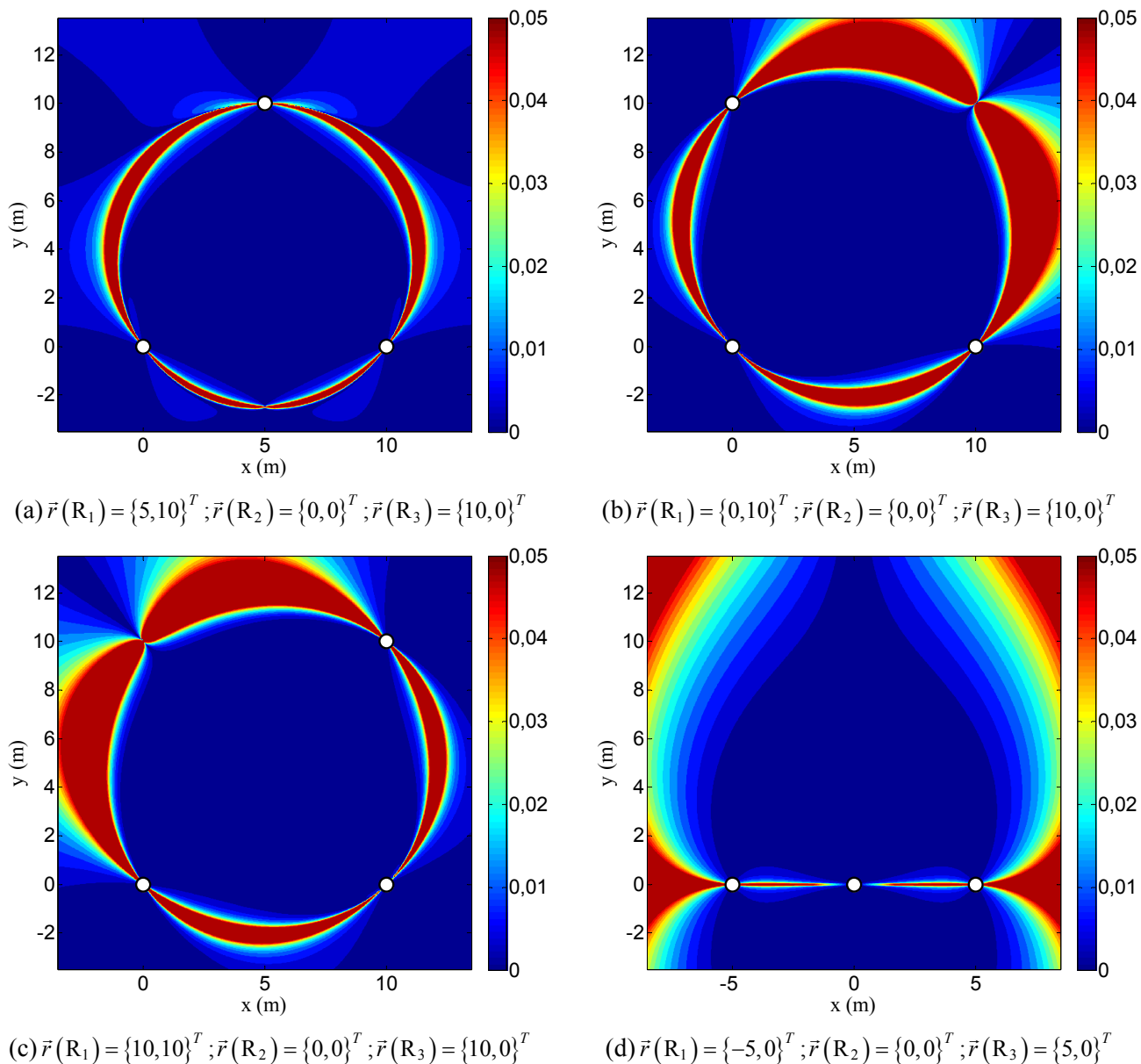


Figura 4.21 Mòdul del terme quadràtic $\Delta^2\psi$ (mrad) en funció de la posició de P i per a diferents disposicions de reflectors ($\sigma_\theta = 1$ mrad)

Una vegada s'ha justificat la utilització de l'aproximació lineal per al càlcul de ψ , s'estudia la propagació lineal de primer ordre de l'error comès en l'estimació de l'estat angular. A partir de l'equació (4.66) i negligint el terme d'ordre quadràtic resulta:

$$\psi \approx E[\psi] + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial \theta_i} \Big|_{\bar{x}}}_{\delta\psi} \delta\theta_i = E[\psi] + \delta\psi. \quad (4.70)$$

I per tant, la relació entre l'error d'estat angular δx i l'error en la determinació de l'orientació $\delta\psi$ és:

$$\delta\psi = \nabla \psi_x \delta \mathbf{x}; \quad \nabla \psi_x \equiv \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta_3} \right]_{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (4.71)$$

De forma anàloga al cas de la propagació de l'error en la determinació de la posició, s'arriba a la següent expressió que permet determinar la variància de l'error en l'orientació, considerant vàlida l'aproximació lineal de la funció (4.39):

$$\sigma_\psi^2 \equiv E[\delta\psi^2] \approx \nabla \psi_x P_x \nabla \psi_x^T. \quad (4.72)$$

Les derivades parcials de l'orientació respecte a l'estat angular es formulen a l'Annex A. L'acceptació de la hipòtesi de linealitat de la funció $\psi(\mathbf{x})$ respecte a l'estat angular dins la circumferència crítica permet considerar la variable d'orientació calculada com una variable aleatòria que segueix una distribució de probabilitat normal de mitjana el seu valor esperat $\tilde{\psi}$ i variància σ_ψ^2 .

Per tal de comprovar la validesa de l'aproximació lineal en la propagació dels errors d'orientació s'han realitzat diferents simulacions de Monte Carlo. S'ha considerat la disposició de reflectors: $\vec{r}(R_1) = \{0, 10\}^T$ m, $\vec{r}(R_2) = \{0, 0\}^T$ m, i $\vec{r}(R_3) = \{10, 0\}^T$ m, i s'han realitzat simulacions de la propagació dels errors en diferents posicions i per a diferents desviacions estàndard en les mesures angulars. Les posicions considerades són les que apareixen a la Figura 4.18, i les desviacions estàndard per a les variables d'estat angular són $\sigma_\theta = 0,1$ mrad i $\sigma_\theta = 1$ mrad.

La metodologia seguida en les simulacions és la següent. A partir de la posició de P considerada en cada cas es calculen els angles θ_1 , θ_2 i θ_3 que corresponen a aquella posició –suposant que l'orientació del robot és 0–. Aleshores es calculen $N = 1000$ valors per a cada angle θ_i afegint al valor calculat un error gaussià de variància σ_θ^2 . A continuació es calcula l'orientació associada a cada triplet de mesures –amb errors– mitjançant l'equació (4.39). Els gràfics de la Figura 4.22 mostren, en paper probabilístic normal, els $N = 1000$ valors d'orientació determinats en cadascuna de les tres posicions mostrades a la Figura 4.18 per a $\sigma_\theta = 0,1$ mrad (columna de l'esquerra de la figura) i $\sigma_\theta = 1$ mrad (columna de la dreta de la figura).

En els gràfics d'aquesta figura s'observa com els valors d'orientació simulats s'aproximen de forma correcta a una distribució de probabilitat normal, ja que els punts representats en paper probabilístic normal s'ajusten a la recta discontinua vermella. A més, per a les dues desviacions estàndard d'error en les mesures angulars θ_i considerades, es pot acceptar aquesta hipòtesi de normalitat.

També es pot veure com per a una mateixa σ_θ l'error en l'orientació –associat a la dispersió de dades entorn el valor real d'aquesta– augmenta quan el punt que es posiciona s'aproxima a la circumferència crítica. Això ve del fet que el càlcul de l'orientació depèn de la posició p determinada per intersecció d'arcs capaços.

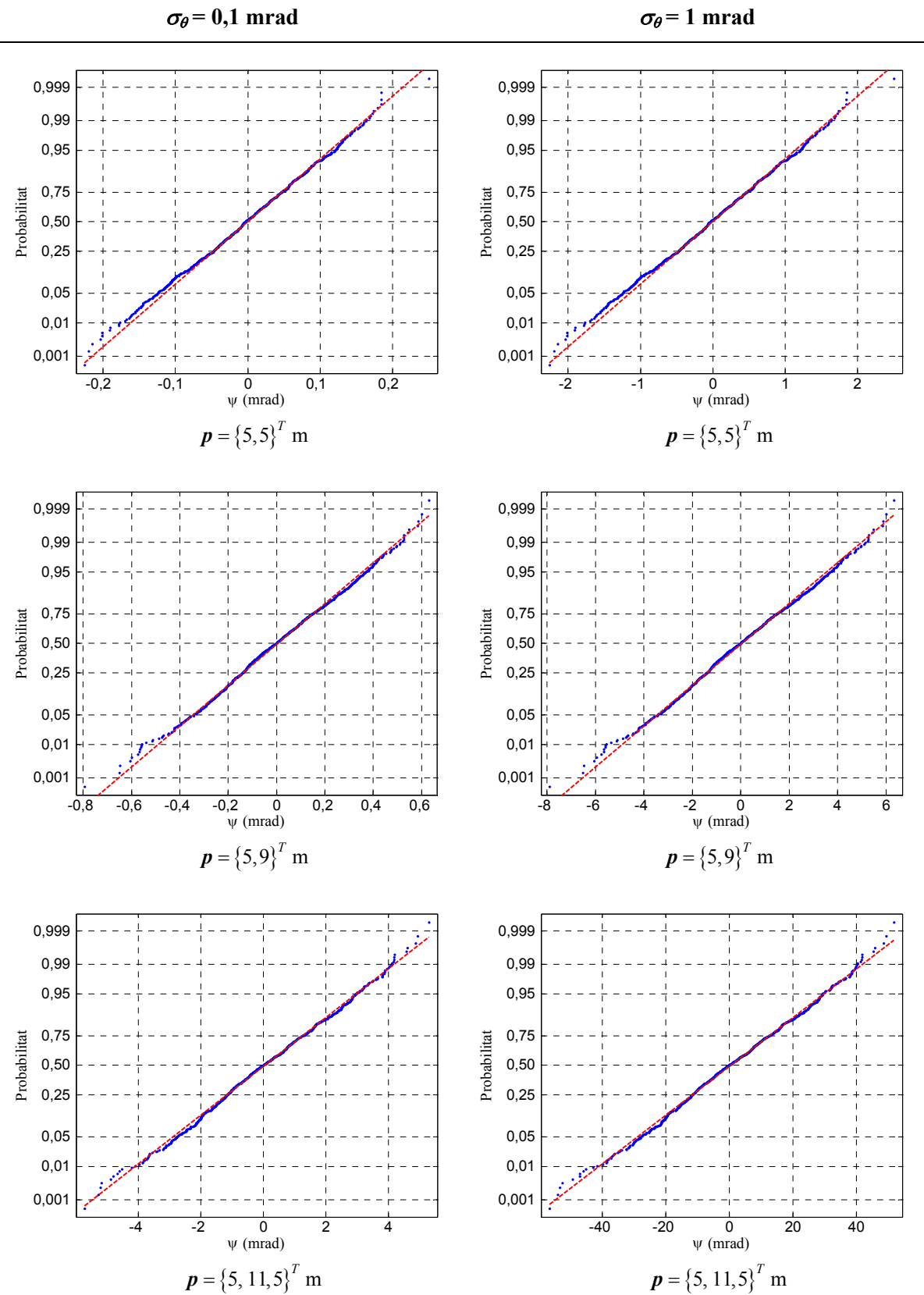


Figura 4.22 Simulacions de Monte Carlo de la propagació de l'error en el càlcul de l'orientació. Dispersió de punts en paper probabilístic normal

La Taula 4.3 mostra els paràmetres estadístics $\psi(\tilde{\mathbf{x}})$ i σ_ψ^2 obtinguts a partir de l'aproximació lineal de la funció orientació i els paràmetres estadístics calculats amb els $N = 1000$ valors d'orientació simulats, per a les diferents posicions que s'han considerat ($\{5,5\}^T$ m primera fila de la taula; $\{5,9\}^T$ m segona fila; i $\{5, 11,5\}^T$ m tercera fila) i per a $\sigma_\theta = 1$ mrad.

Taula 4.3 Paràmetres estadístics corresponents a l'aproximació lineal i paràmetres estadístics calculats a partir de la dispersió de punts amb $\sigma_\theta = 1$ mrad

$p(\tilde{\mathbf{x}})$ (m)	Aproximació lineal		Dispersió de punts	
	$\psi(\tilde{\mathbf{x}})$ (mrad)	$\sigma_\psi^2 = \nabla \psi_x P_x \nabla \psi_x^T$ (mrad ²)	$E[\psi]$ (mrad)	$E[\delta\psi^2]$ (mrad ²)
$\{5,5\}^T$	0	0,50	-0,025	0,53
$\{5,9\}^T$	0	4,46	0,029	4,78
$\{5, 11,5\}^T$	0	293,22	0,431	312,45

S'observa com la diferència entre l'estimació de l'orientació a partir dels $N = 1000$ valors d'orientació calculats i la que s'obté assumint la hipòtesi de linealitat –error de biaix– es troba en tots els casos per sota de 0,5 mrad. Aquesta diferència creix a mesura que el punt que es posiciona s'aproxima a la circumferència crítica que passa pels tres reflectors. Per als punts $\{5,5\}^T$ m i $\{5,9\}^T$ m l'error de biaix és de l'ordre de centèsimes de mrad, quantitat negligible tenint en compte la precisió en l'orientació que es pretén assolir.

A partir dels resultats de la Taula 4.3 també s'observa com l'estimació de la variància en la determinació de l'orientació –assumint la hipòtesi de linealitat– s'aproxima més a la que s'obté en les simulacions quan el punt que es posiciona està lluny de la circumferència crítica. En els gràfics de la Figura 4.21 ja s'ha justificat que la hipòtesi de linealitat de l'orientació deixa de ser vàlida quan el punt que es posiciona s'apropa a la circumferència crítica.

A continuació es representa el valor de $2\sigma_\psi$ en funció de la posició, per a les disposicions de reflectors estudiades en aquest capítol i per a una desviació estàndard de l'error en les variables de l'estat angular $\sigma_\theta = 0,1$ mrad –és a dir, del mateix ordre de magnitud que el que s'obté en condicions dinàmiques mitjançant el sistema làser emprat–.

El valor $2\sigma_\psi$ representat a la Figura 4.23 indica la magnitud d'error que es pot cometre en la determinació de l'orientació ψ en triangular mitjançant arcs capaços. Amb una probabilitat de 0,95, l'orientació real del vehicle es trobarà dins l'interval $[\tilde{\psi} - 2\sigma_\psi, \tilde{\psi} + 2\sigma_\psi]$. Aquesta aproximació lineal en la propagació de l'error és vàlida dins la zona d'error de biaix petit, tal com s'ha raonat a partir dels gràfics de la Figura 4.21.

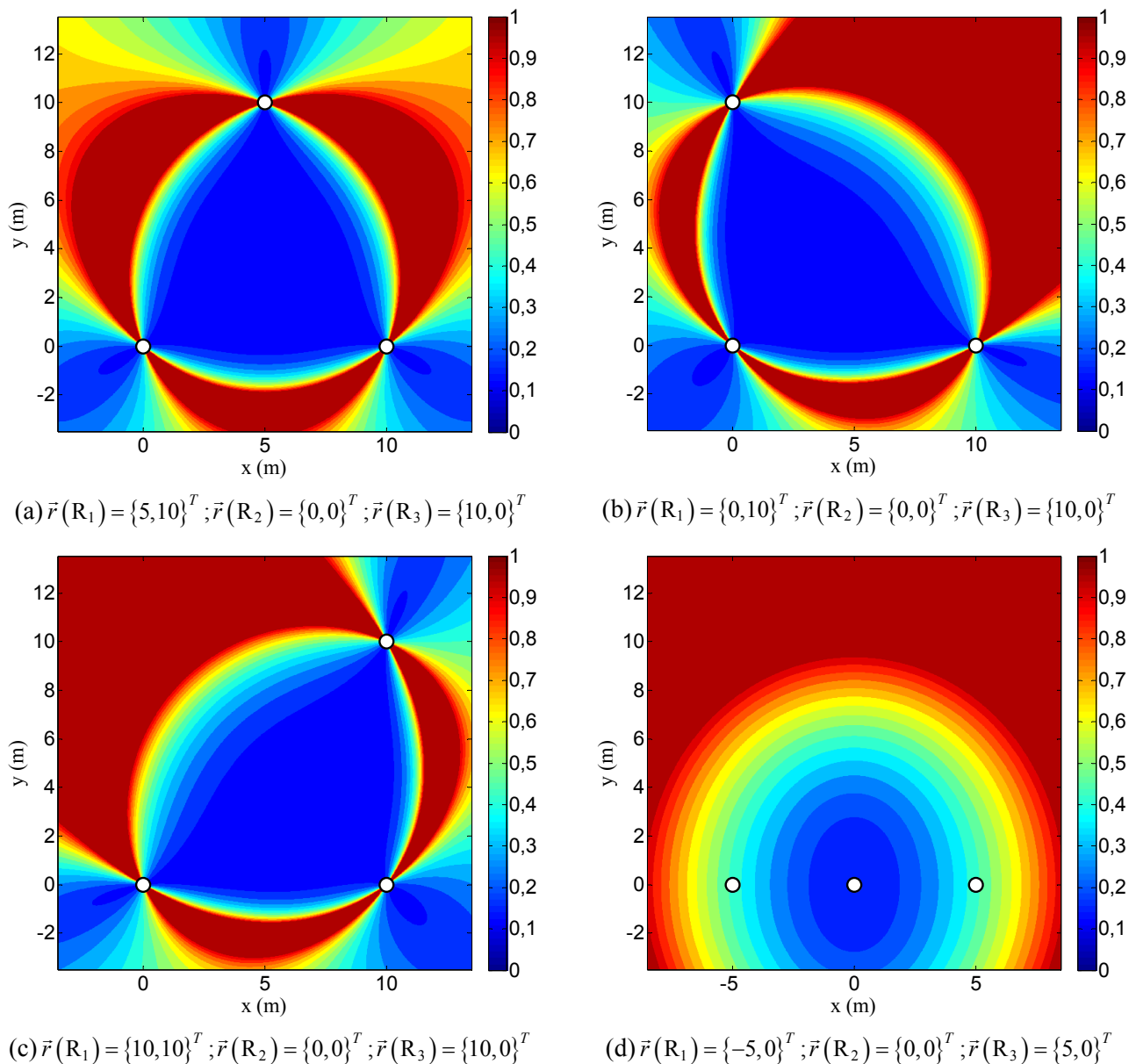


Figura 4.23 Magnitud de $2\sigma_\psi$ (mrad) en funció de la posició de P i per a diferents disposicions de reflectors ($\sigma_\theta = 0,1$ mrad)

Per a les configuracions de reflectors (a), (b) i (c) el valor $2\sigma_\psi$ es troba per sota els 0,3 mrad dins una zona àmplia de l'interior de la circumferència que passa pels tres reflectors. Quan el punt posicionat s'apropa a la circumferència crítica aquest valor augmenta. Per a la configuració (d) la millor precisió en l'orientació es troba prop del reflector R_2 (situat sobre el punt $\{0, 0\}^T$ del pla). La zona vermella dels gràfics indica els punts del pla on l'error $2\sigma_\psi$ és superior a 1 mrad. Cal notar que en el gràfic (d) el valor de σ_ψ no creix prop de la recta que passa pels tres reflectors perquè tot i tenir indeterminació en la posició, l'orientació és determinada sobre aquesta recta.

4.1.5 Conclusions

En aquest apartat 4.1 s'ha determinat analíticament el posicionament d'un robot mòbil –posició $\mathbf{p} \equiv \{x, y\}^T$ i orientació ψ – a partir de l'estat angular $\mathbf{x} \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$, conegut per a una configuració del robot, mitjançant la triangulació per intersecció d'arcs capaços. El mètode proposat, com s'ha vist, és indeterminat quan el punt que es posiciona està sobre la circumferència que passa pels tres reflectors utilitzats.

S'ha estudiat també com afecta l'error en l'estat angular $\delta\mathbf{x}$ a la mesura de la posició i l'orientació. Pel que fa a l'error de posició, s'ha observat que aquest augmenta quan P s'apropa a la circumferència que passa pels tres reflectors utilitzats si els reflectors no estan alineats i considerant el mateix error en els tres angles θ_i . L'error mínim es presenta prop del centre del triangle que determinen els reflectors. Quant a l'orientació, en dependre el seu càlcul de la posició determinada, s'ha trobat que l'error també és gran prop d'aquesta circumferència.

En aquest apartat també s'ha justificat que la linealització de les funcions del posicionament \mathbf{p} i ψ –equacions (4.20) i (4.39) respectivament– és vàlida a l'interior d'aquesta circumferència –ja que l'error de biaix corresponent al terme quadràtic del desenvolupament de Taylor és negligible– i per tant s'accepta que en aquestes condicions:

$$E[\mathbf{p}(\mathbf{x})] \approx \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}); \quad E[\psi(\mathbf{x})] \approx \psi(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (4.73)$$

on $\tilde{\mathbf{x}}$ és el valor esperat de les variables angulars d'estat que segueixen distribucions de probabilitat normals amb matriu de covariància P_x . A l'interior de la circumferència també s'accepta la propagació de primer ordre dels errors en l'estat angular. La matriu de covariància per a les variables de posició $\{x, y\}^T$ així com la variància de l'orientació ψ es determinen segons:

$$C \equiv E[\delta\mathbf{p}\delta\mathbf{p}^T] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \approx \nabla\mathbf{p}_x P_x \nabla\mathbf{p}_x^T, \quad (4.74)$$

$$\sigma_\psi^2 \equiv E[\delta\psi^2] \approx \nabla\psi_x P_x \nabla\psi_x^T. \quad (4.75)$$

Per mitjà de la matriu de covariància de l'error de posició C s'ha trobat una el·lipse d'incertesa que conté el seu valor real amb una certa probabilitat, a partir del concepte de *distància de Mahalanobis*.

4.2 Triangulació per intersecció de rectes

El mètode de triangulació per intersecció de rectes requereix el coneixement de l'orientació ψ del robot per a determinar la seva posició $\mathbf{p} \equiv \{x, y\}^T$ a partir d'un mínim de dos dels angles relatius θ_1 , θ_2 i θ_3 . Novament, per a facilitar la manipulació algebraica de les equacions, s'utilitza el sistema de referència associat al triplet de reflectors (SRT), Figura 4.4, per a la formulació analítica d'aquest mètode.

Si es coneix l'angle ψ d'orientació i els angles relatius θ_i ($i = 1, 2, 3$), el centre P del capçal làser verifica l'equació de les rectes que passen per cadascun dels reflectors R_i ($i = 1, 2, 3$) d'angle $\theta_i + \psi$ respecte a l'eix x del SRT:

$$\mathbf{p} = \vec{r}(R_i) + \lambda_i \vec{v}_i \rightarrow \begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{cases} x_i \\ y_i \end{cases} + \lambda_i \begin{cases} \cos(\theta_i + \psi) \\ \sin(\theta_i + \psi) \end{cases}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.76)$$

on $\vec{r}(R_i)$ és la posició coneguda del reflector R_i en el sistema de referència triplet (SRT), λ_i és una constant i \vec{v}_i és el versor de la recta. Per tant, si es coneix ψ es pot determinar la posició de P intersecant les dues rectes associades a dos reflectors qualssevol R_i i R_j –sempre i quan P no estigui alineat amb aquests reflectors, Figura 4.24(a)–. Un tercer reflector R_k no alineat amb els altres permetria desfer aquesta indeterminació, tal com mostra la Figura 4.24(b).

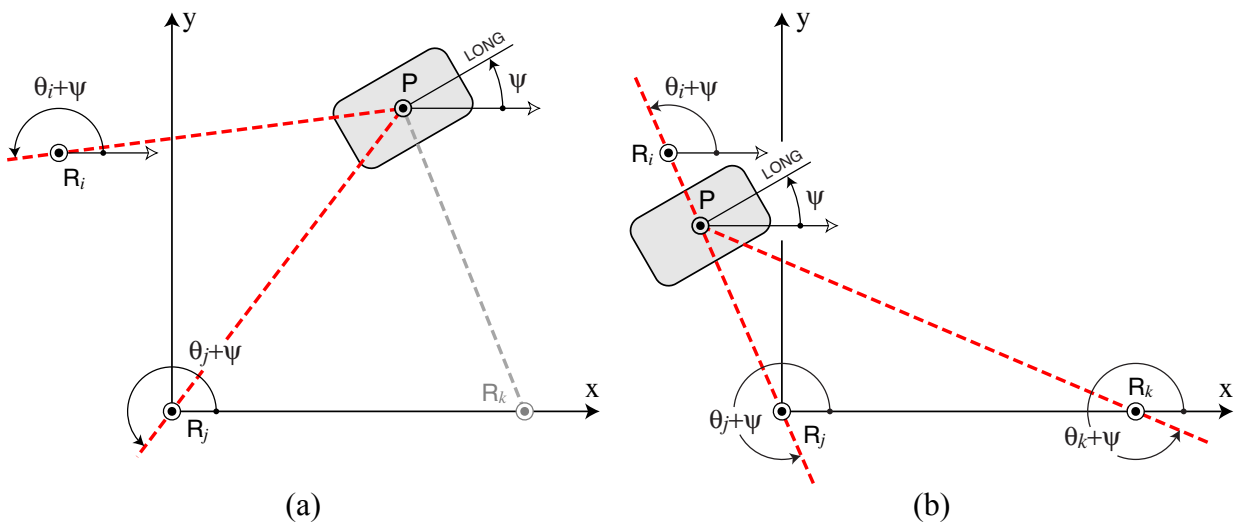


Figura 4.24 Intersecció de rectes per a la determinació de la posició de P: (a) P no alineat amb els reflectors R_i i R_j , i (b) P alineat amb els reflectors R_i i R_j , cal un tercer reflector R_k

A continuació es formula el càlcul de la posició de P a partir de la intersecció de les rectes corresponents a les parelles de reflectors 1-2, 2-3 i 1-3 respectivament – \mathbf{p}_{ij} indica la posició de P calculada intersecant les rectes que passen pels reflectors R_i i R_j –. Si s'utilitza el sistema de referència triplet i a partir de la posició dels reflectors en aquest sistema de referència –tal com s'ha definit a l'equació (4.2)– es té:

$$\mathbf{p}_{12}(\theta_1, \theta_2, \psi) = \frac{-x_1 \sin(\theta_1 + \psi) + y_1 \cos(\theta_1 + \psi)}{\sin \alpha} \begin{cases} \cos(\theta_2 + \psi) \\ \sin(\theta_2 + \psi) \end{cases}, \quad \alpha \neq \pi \text{ rad}, \quad (4.77)$$

$$\mathbf{p}_{23}(\theta_2, \theta_3, \psi) = \frac{x_3 \sin(\theta_3 + \psi)}{\sin \beta} \begin{Bmatrix} \cos(\theta_2 + \psi) \\ \sin(\theta_2 + \psi) \end{Bmatrix}, \quad \beta \neq \pi \text{ rad}, \quad (4.78)$$

$$\mathbf{p}_{13}(\theta_1, \theta_3, \psi) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \frac{(x_3 - x_1) \sin(\theta_3 + \psi) + y_1 \cos(\theta_3 + \psi)}{\sin \gamma} \begin{Bmatrix} \cos(\theta_1 + \psi) \\ \sin(\theta_1 + \psi) \end{Bmatrix}, \quad (4.79)$$

$\gamma \neq \pi \text{ rad}.$

Les equacions (4.77)-(4.79) són vàlides per a tots els punts del pla x-y tret dels de la recta que passa pels dos reflectors utilitzats –angle relatiu entre reflectors igual a π rad–, on el posicionament és indeterminat. La utilització de tres reflectors no alineats obvia aquesta indeterminació. En absència d'errors en els angles relatius θ_i i en l'orientació, els tres punts \mathbf{p}_{12} , \mathbf{p}_{23} i \mathbf{p}_{13} coincideixen. És a dir, les tres rectes associades a cada reflector es tallen en un mateix punt, Figura 4.24.

Ja s'ha comentat que les equacions anteriors per al càlcul de la posició de P només són aplicables si es coneix *a priori* –abans d'aplicar la triangulació– l'orientació del robot mòbil. Per a utilitzar el mètode de triangulació que s'ha introduït es podria partir del valor d'orientació estimat per integració hodomètrica o per integració de la mesura d'un giròscop. No obstant, com s'ha justificat al Capítol 2 de la tesi, aquests mètodes de posicionament integratius pateixen l'acumulació inevitable d'errors –ja siguin sistemàtics o no sistemàtics–, i en conseqüència l'error afectaria el càlcul de la posició.

És preferible doncs un mètode en el que es determini l'orientació de forma absoluta sense la presència d'integracions temporals. A continuació es presenta un mètode geomètric que utilitza les equacions (4.77)-(4.79) i les propietats geomètriques dels arcs capaços α , β i γ definits a l'apartat 4.1.1 per a determinar l'orientació del robot. Un cop es coneix l'orientació del robot, la posició del vehicle es determina intersecant qualsevol parella de rectes –punts \mathbf{p}_{12} , \mathbf{p}_{23} o \mathbf{p}_{13} –.

4.2.1 Mètode geomètric per a la determinació de l'orientació utilitzant la intersecció de rectes

El mètode que es presenta s'inspira en el treball presentat per Cohen i Koss (1992). Aquest treball mostra que si es desconeix l'orientació real ψ del robot, però en canvi es disposa d'una aproximació ψ_e del seu valor ($\psi_e \equiv \psi + \varepsilon_\psi$), les tres rectes que passen per cadascun dels reflectors d'angle $\theta_i + \psi_e$ respecte a l'eix x no es tallen en un mateix punt sinó que determinen un triangle –que s'anomenarà *triangle d'error*–, Figura 4.25.

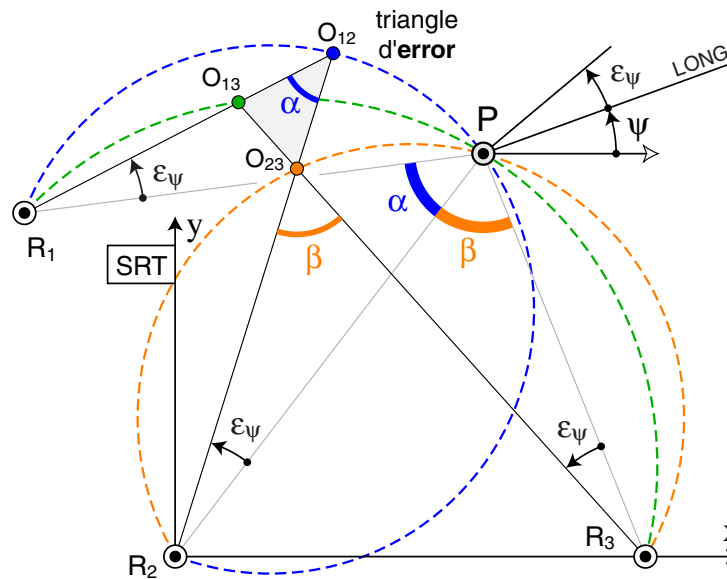


Figura 4.26 Triangle d'error format pels vèrtexs O_{12} , O_{23} i O_{13}

En particular, O_{12} pertany a l'arc capaç del segment R_1R_2 d'angle $\alpha (\equiv \alpha_{12})$, O_{23} a l'arc capaç del segment R_2R_3 d'angle $\beta (\equiv \alpha_{23})$, i O_{13} a l'arc capaç del segment R_1R_3 d'angle $\gamma (\equiv \alpha_{13})$. Les equacions f_α , f_β i f_γ dels arcs capaços s'han determinat analíticament a l'apartat 4.1.1.

Si s'analiza la geometria dels arcs capaços, es demostra que el triangle que determinen els centres dels arcs capaços –que s'anomenarà *triangle de centres*– és geomètricament semblant al triangle d'error. Un centre qualsevol C_{ij} –associat a la circumferència que passa per P i els reflectors R_i i R_j – es troba intersecant les mediatrises dels segments PR_i i PR_j , Figura 4.27(a). L'angle entre les dues mediatrises és $\alpha_{ij} = \theta_j - \theta_i$. El triangle de centres es trobarà intersecant les tres mediatrises dels segments entre P i cadascun dels reflectors dos a dos. Tal com s'observa a la Figura 4.27(b), com que els angles del triangle de centres i els del triangle d'error –Figura 4.26– són iguals es conclou que són triangles *semblants*.

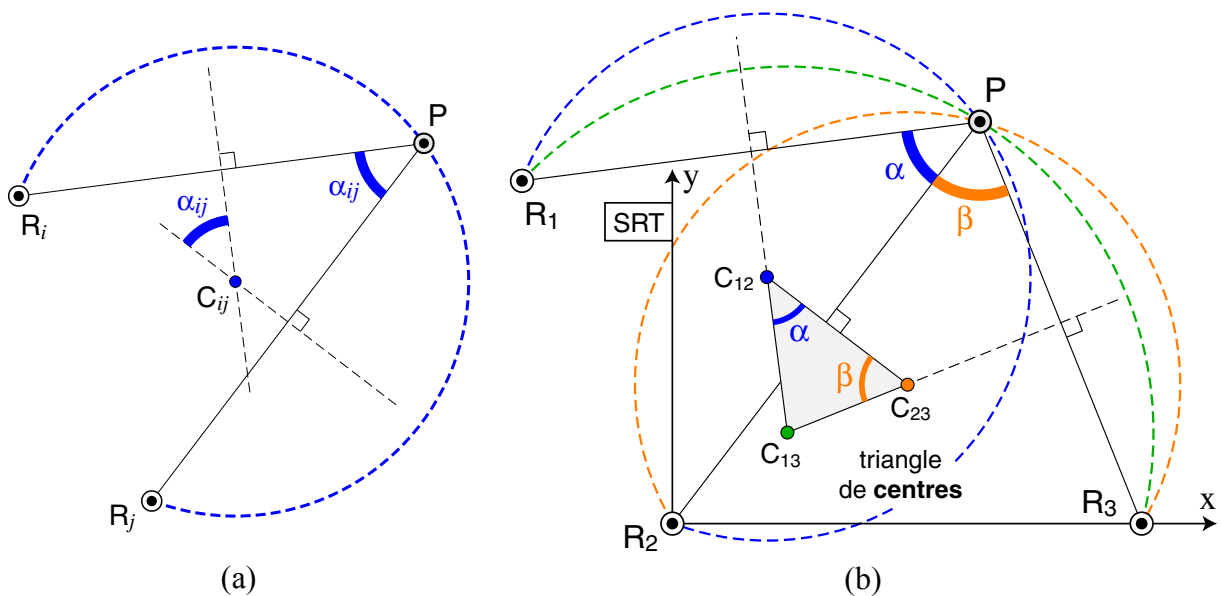


Figura 4.27 (a) Determinació del centre C_{ij} de l'arc capaç del segment R_iR_j d'angle α_{ij} , i (b) Determinació del triangle de centres (vèrtexs C_{12} , C_{23} i C_{13})

Es demostra a continuació que la relació de semblança entre els dos triangles –el d'error i el de centres– depèn de l'error ε_ψ entre l'aproximació ψ_e de l'orientació del vehicle i el seu valor real. La Figura 4.28 mostra el triangle isòsceles de vèrtexs P, C_{12} i O_{12} . Si es té en compte que l'angle entre els costats iguals $C_{12}P$ i $C_{12}O_{12}$ és $2\varepsilon_\psi$ –de fet, qualsevol parella de segments $C_{ij}P$ i $C_{ij}O_{ij}$ inscriu el mateix angle–, i que la seva longitud és el radi R_α de l'arc capaç f_α –determinable mitjançant l'equació (4.7)–, la longitud del costat restant és:

$$|\overline{PO_{12}}| = 2 \sin \varepsilon_\psi |\overline{PC_{12}}| = 2R_\alpha \sin \varepsilon_\psi. \quad (4.81)$$

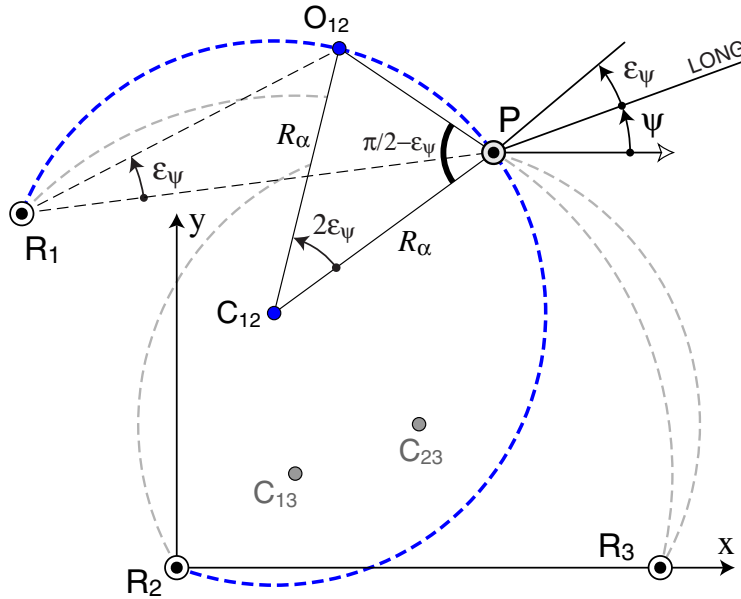


Figura 4.28 Triangle isòsceles de vèrtexs C_{12} , P i O_{12}

Amb un raonament anàleg, s'arriba als següents resultats per a la longitud dels segments PO_{23} i PO_{13} :

$$|\overline{PO_{23}}| = 2 \sin \varepsilon_\psi |\overline{PC_{23}}| = 2R_\beta \sin \varepsilon_\psi, \quad (4.82)$$

$$|\overline{PO_{13}}| = 2 \sin \varepsilon_\psi |\overline{PC_{13}}| = 2R_\gamma \sin \varepsilon_\psi. \quad (4.83)$$

A la Figura 4.29 es mostra el triangle de vèrtexs C_{12} , P i C_{23} ; i el de vèrtexs O_{12} , P i O_{23} . Els costats PO_{12} i PO_{23} del segon triangle guarden una relació de proporcionalitat $2\sin\varepsilon_\psi$ amb els costats PC_{12} i PC_{23} del primer –segons les equacions (4.81) i (4.82)–. A més, l'angle que inscriuen les parelles de costats anteriors és el mateix, ja que:

$$\left(\angle C_{ij}PO_{ij} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_\psi \right) \cap \left(\angle C_{jk}PO_{jk} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_\psi \right) \Rightarrow \angle C_{ij}PC_{jk} = \angle O_{ij}PO_{jk}, \quad (4.84)$$

i es conclou que aquests dos triangles són semblants –Figura 4.29–. Per tant el tercer costat de cada triangle també ha de guardar la mateixa relació de proporcionalitat:

$$\rho_O \equiv |\overline{O_{12}O_{23}}| = 2 \sin \varepsilon_\psi \underbrace{|\overline{C_{12}C_{23}}|}_{\rho_C} = 2 \sin \varepsilon_\psi \rho_C. \quad (4.85)$$

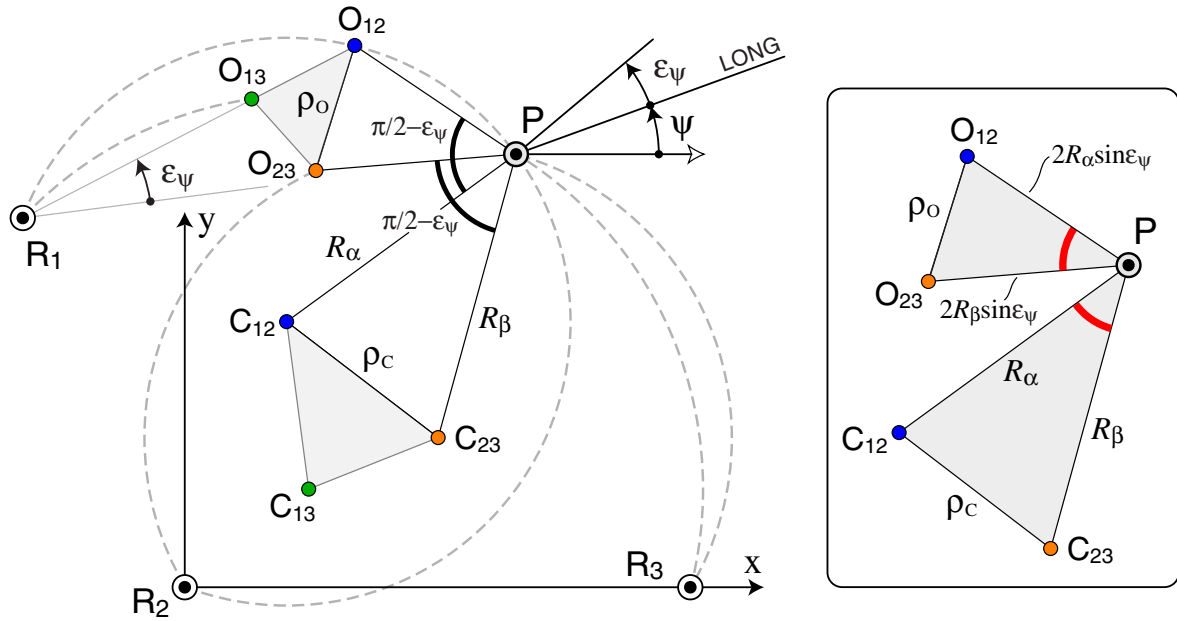


Figura 4.29 Triangles semblants de vèrtexs C_{12}, P, C_{23} ; i O_{12}, P, O_{23}

Com que $O_{12}O_{23}$ i $C_{12}C_{23}$ són costats homòlegs del triangle d'error i del triangle de centres respectivament –que ja s'ha demostrat que també són semblants– la relació de semblança r entre aquests triangles és:

$$r \equiv \frac{\rho_0}{\rho_c} = 2 \sin \varepsilon_\psi. \quad (4.86)$$

L'expressió anterior relaciona el terme d'error ε_ψ en l'aproximació ψ_e amb la relació de semblança r entre els triangles d'error i de centres. La relació de semblança és funció dels angles θ_1 , θ_2 i θ_3 , i s'obté a partir de la relació entre longituds de costats homòlegs d'ambdós triangles, o bé a partir de la relació entre les seves àrees:

$$r(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{|\vec{r}(O_{ij}) - \vec{r}(O_{ik})|}{|\vec{r}(C_{ij}) - \vec{r}(C_{ik})|} \quad \forall i \neq j \neq k, \quad (4.87)$$

$$r(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sqrt{\frac{A_0}{A_c}}, \quad (4.88)$$

on A_0 representa l'àrea del triangle d'error i A_c la del triangle de centres, que es calculen per mitjà dels següents determinants:

$$A_0(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{r}(O_{12})^T & 1 \\ \vec{r}(O_{23})^T & 1 \\ \vec{r}(O_{13})^T & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{O_{12}} & y_{O_{12}} & 1 \\ x_{O_{23}} & y_{O_{23}} & 1 \\ x_{O_{13}} & y_{O_{13}} & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.89)$$

$$A_C(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{r}(C_{12})^T & 1 \\ \vec{r}(C_{23})^T & 1 \\ \vec{r}(C_{13})^T & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{C_{12}} & y_{C_{12}} & 1 \\ x_{C_{23}} & y_{C_{23}} & 1 \\ x_{C_{13}} & y_{C_{13}} & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.90)$$

El signe es selecciona de manera que l'àrea sigui positiva. Per al càlcul de la posició $\vec{r}(C_{ij})$ dels centres en el SRT s'utilitzen les expressions (4.8), (4.11) i (4.15) ($C_{12} \equiv C_\alpha$, $C_{23} \equiv C_\beta$ i $C_{13} \equiv C_\gamma$). Per al càlcul dels vèrtexs del triangle d'error s'utilitzen les equacions (4.77)-(4.79) prenent l'aproximació ψ_e de l'orientació.

Si el vehicle es troba alineat amb dos reflectors qualssevol R_i i R_j , Figura 4.30, els vèrtexs O_{ij} i C_{ij} dels triangles d'error i de centres corresponents a aquesta parella de reflectors no es poden determinar (perquè $\alpha_{ij} = \pi$ rad). En aquest cas, la relació de semblança r es calcula mitjançant la relació de longitud entre l'únic costat finit de cada triangle:

$$r(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{|\vec{r}(O_{ik}) - \vec{r}(O_{jk})|}{|\vec{r}(C_{ik}) - \vec{r}(C_{jk})|}. \quad (4.91)$$

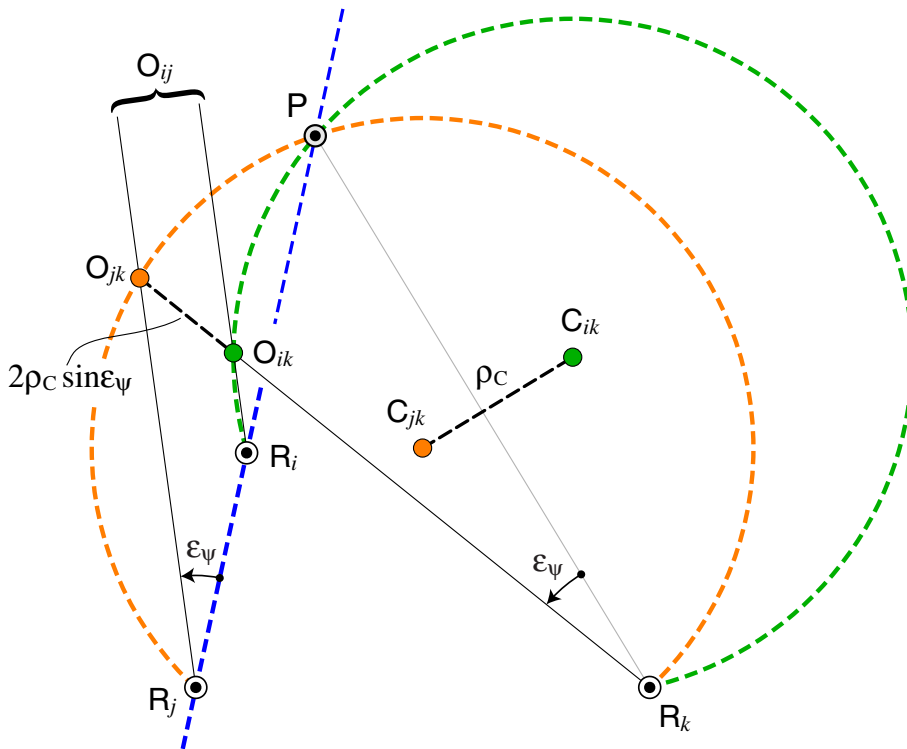


Figura 4.30 Cas en què P es troba alineat amb dos reflectors R_i i R_j

A partir de les equacions (4.86)-(4.88), es tenen les següents equacions per a determinar l'error ε_ψ en l'orientació aproximada dins l'interval $[0, \pi/2]$ rad perquè la relació de semblança r és sempre positiva:

$$\varepsilon_\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \arcsin \frac{r}{2} = \arcsin \frac{|\vec{r}(O_{ij}) - \vec{r}(O_{ik})|}{2|\vec{r}(C_{ij}) - \vec{r}(C_{ik})|}, \quad (4.92)$$

$$\varepsilon_\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \arcsin \frac{r}{2} = \arcsin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_0}{A_C}} \right). \quad (4.93)$$

Com s'observa a la Figura 4.31, la relació de semblança entre els triangles d'error i de centres no depèn del signe del terme ε_ψ . Un error positiu i un de negatiu –iguals en magnitud– conduiran a la mateixa relació de semblança r . Per tant, les equacions (4.92) i (4.93) determinen únicament la magnitud d'aquest error $|\varepsilon_\psi|$.

El signe de ε_ψ es pot trobar a partir de l'orientació relativa del triangle d'error respecte al triangle de centres. Com es fa palès a la Figura 4.31, l'orientació d'un costat del triangle d'error respecte al costat corresponent del triangle de centres és $\pi/2 - |\varepsilon_\psi|$ rad en sentit horari si $\varepsilon_\psi > 0$, i el mateix valor en sentit antihorari si $\varepsilon_\psi < 0$. Així doncs, el signe de ε_ψ coincideix amb el de la component z del producte vectorial d'un costat del triangle d'error per l'homòleg del triangle de centres:

$$\begin{aligned} \text{sign}(\varepsilon_\psi) &= \text{sign} \left(\overrightarrow{O_{ij}O_{ik}} \wedge \overrightarrow{C_{ij}C_{ik}} \right) \Big|_z \\ &= \text{sign} \left[(x_{O_{ik}} - x_{O_{ij}})(y_{C_{ik}} - y_{C_{ij}}) - (x_{C_{ik}} - x_{C_{ij}})(y_{O_{ik}} - y_{O_{ij}}) \right]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

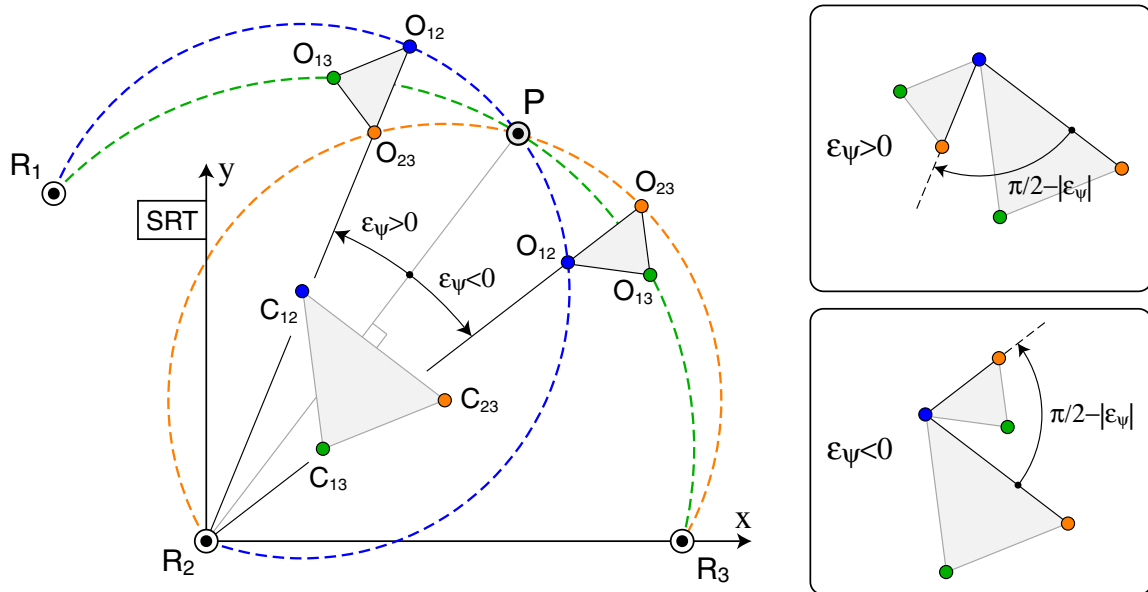


Figura 4.31 Orientació relativa del triangle d'error respecte al triangle de centres

El mètode exposat permet determinar el terme ε_ψ dins l'interval $[-\pi/2, \pi/2]$ rad. Aquest valor serà sempre determinable, perquè la diferència entre el valor aproximat ψ_e del que es parteix –per exemple, l'orientació en l'últim posicionament absolut– i l'orientació real del vehicle no pot ser superior, en valor absolut, a un valor màxim $\varepsilon_{\psi \max} \ll \pi/2$ rad. Aquesta diferència màxima serà funció del temps transcorregut Δt entre posicionaments i de les prestacions cinemàtiques del robot. Un cop es coneix l'error en l'aproximació ε_ψ , en mòdul i signe, l'orientació real del vehicle és:

$$\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \psi_e - \varepsilon_\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \psi_e - \text{sign}(\varepsilon_\psi) \cdot |\varepsilon_\psi|. \quad (4.95)$$

Un cop es coneix l'orientació ψ del robot en funció dels angles relatius θ_i , ja es pot determinar la posició de P per intersecció de rectes. Les tres rectes que passen per cadascun dels reflectors d'angle $\theta_i + \psi$ respecte a l'eix x es tallen en el punt P, per tant pot agafar-se qualsevol parella de rectes per a trobar la posició de P –equacions (4.77)-(4.79)–. En el cas que P estigui alineat amb dos dels reflectors –per exemple amb R_i i R_j –, només es poden utilitzar les expressions p_{ik} o bé p_{jk} .

El mètode de triangulació presentat només és aplicable –tal com passa en el cas de la triangulació per intersecció d'arcs capaços– quan el centre del capçal làser P no es troba sobre la circumferència que passa pels tres reflectors. Si P està sobre aquesta circumferència el triangle d'error i el triangle de centres degeneren en un punt, Figura 4.32, no pot determinar-se el terme ε_ψ , i per tant tampoc l'orientació real del vehicle ni la posició per intersecció de rectes.

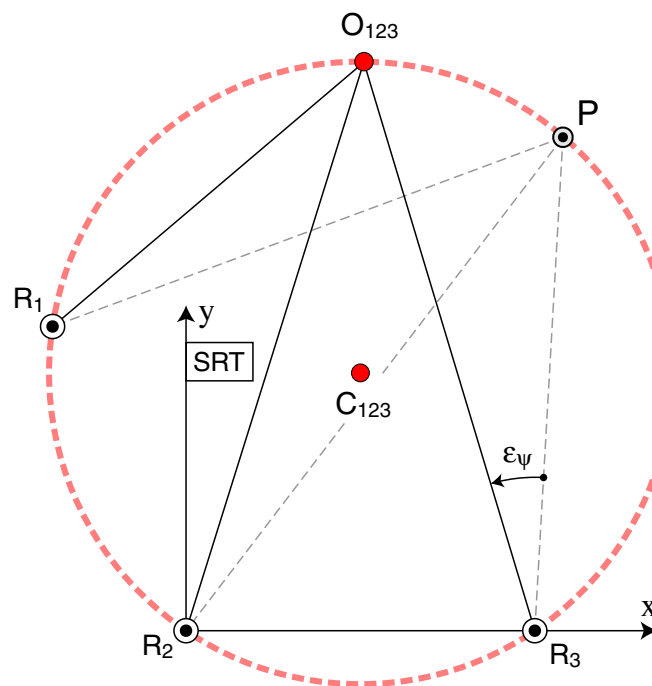


Figura 4.32 Quan P està sobre la circumferència que passa pels tres reflectors no es pot determinar el terme ε_ψ perquè els dos triangles degeneren en un punt

Sobre la circumferència que passa pels tres reflectors, la indeterminació del càlcul de l'orientació quan s'utilitzen rectes, i del càlcul de la posició en la triangulació per intersecció d'arcs capaços (apartat 4.1) prové del fet que en ambdós casos s'utilitza la propietat geomètrica de l'arc capaç. En el primer cas per a la posició dels vèrtexs O_{ij} del triangle d'error i C_{ij} del triangle de centres, i en el segon per a la posició de P. Quan P es troba sobre la circumferència que passa pels tres reflectors els tres arcs capaços α , β i γ passen a ser el mateix i es produeix aquesta indeterminació.

Tot i la presència d'indeterminació sobre el mateix lloc geomètric de l'entorn, el mètode de triangulació per intersecció de rectes permet determinar la posició si s'utilitzen les equacions (4.77)-(4.79) amb una estimació dinàmica ψ_{din} de l'orientació del robot. Per exemple, a partir de la integració de la velocitat angular $\dot{\psi}$ del vehicle mesurada per mitjà d'un giròscop o bé a partir de mesures hodomètriques –velocitats angulars de les rodes–:

$$\psi_{din}(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\psi} dt. \quad (4.96)$$

Els mètodes integratius no són aconsellables per la seva acumulació d'errors sistemàtics –tot i que aquests es poden calibrar– i aleatoris al llarg del temps. No obstant, com que la presència del robot damunt la circumferència que passa pels tres reflectors s'hauria de donar de forma transitòria en una aplicació real, l'acumulació d'errors no és crítica. La utilització d'un *quart reflector* també resoldria aquesta indeterminació, però aquest és un tema que queda fora de l'abast de la tesi, en la que l'estudi es centra en l'ús de tres reflectors, que és el nombre mínim necessari.

4.2.2 Propagació de l'error en les mesures angulars en el posicionament

En aquest apartat s'investiga com es propaga un error $\delta\theta_i$ ($i = 1,2,3$) en les mesures angulars en el càlcul del posicionament –posició \mathbf{p} i orientació ψ – mitjançant el mètode basat en intersecció de rectes que s'ha presentat. En aquest apartat s'anomena $\delta\mathbf{p} \equiv \{\delta x, \delta y\}^T$ i $\delta\psi$ l'error de posició i d'orientació respectivament respecte al seu valor real:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^r + \delta\mathbf{p}, \quad \begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{cases} x^r + \delta x \\ y^r + \delta y \end{cases}, \quad (4.97)$$

$$\psi = \psi^r + \delta\psi.$$

Per fer més entenedora la propagació dels errors, en les representacions gràfiques següents es suposa que en l'estimació de l'estat angular només un angle θ_i conté error, per exemple l'angle θ_2 corresponent al reflector R_2 –que es troba a l'origen de coordenades del SRT–. Per tant, en aquest cas es disposaria del següent vector de mesures angulars:

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{cases} = \begin{cases} \theta_1^r \\ \theta_2^r + \delta\theta_2 \\ \theta_3^r \end{cases}. \quad (4.98)$$

Com s'observa a la Figura 4.33, aquest error afecta la determinació dels vèrtexs O_{12} i O_{23} del triangle d'error, i C_{12} i C_{23} del triangle de centres, ja que es té: $\alpha = \alpha^r + \delta\theta_2$ i $\beta = \beta^r - \delta\theta_2$. En canvi, els vèrtexs O_{13} i C_{13} que es determinen són els reals perquè no hi ha error en la determinació de l'arc capaç associat a l'angle γ ($\gamma = \alpha + \beta = \gamma^r$).

A la figura, els arcs capaços blau i taronja són els que determinen els angles α i β , mentre que els arcs capaços reals associats a α^r i β^r es representen en línies grises discontinües. En aquestes condicions la variable ε_ψ ($\varepsilon_\psi = \varepsilon_\psi^r + \delta\varepsilon_\psi$) és la que es trobaria a partir de la relació de semblança entre els triangles calculats amb l'error $\delta\theta_2$ (de color blau), i ε_ψ^r a partir de la relació de semblança entre els triangles reals (de color gris amb línia discontinüa) –requadres a la part dreta de la Figura 4.33–.

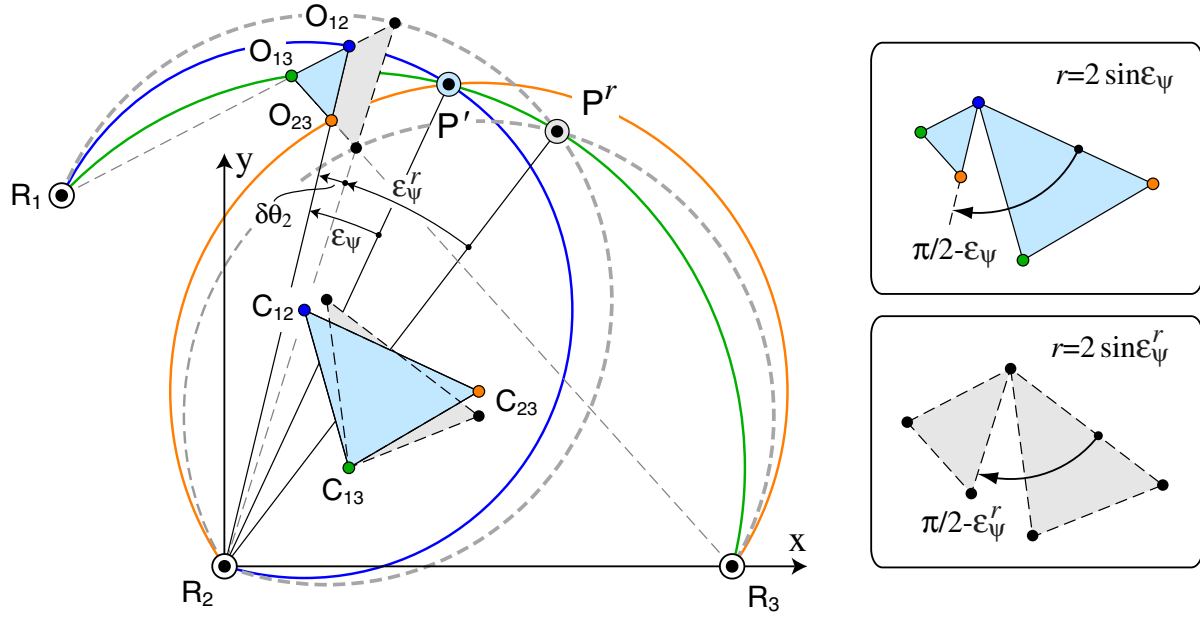


Figura 4.33 Anàlisi de la propagació d'un error $\delta\theta_2$ en el mètode geomètric de determinació de l'orientació basat en els triangles d'error i de centres

Els termes ε_ψ i ε_ψ^r compleixen la següent relació amb l'orientació del vehicle:

$$\varepsilon_\psi^r - \varepsilon_\psi = (\psi_e - \psi^r) - (\psi_e - \psi) = \psi - \psi^r = \delta\psi, \quad (4.99)$$

on ψ és l'orientació que determinaria el mètode considerant $\delta\theta_2$ i ψ^r l'orientació real del robot. A partir de la geometria de la Figura 4.33 es troba la següent relació entre els angles ε_ψ i ε_ψ^r :

$$\varepsilon_\psi^r + \delta\theta_2 = \varepsilon_\psi + \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) - \arctan\left(\frac{y^r}{x^r}\right), \quad (4.100)$$

on $\{x', y'\}^T$ és la posició P' (Figura 4.33) que correspon a la intersecció dels arcs capaços associats als angles entre reflectors $\alpha^r + \delta\theta_2$ i $\beta^r - \delta\theta_2$, i $\{x^r, y^r\}^T$ és la posició real del punt P del robot (Pʳ). Si s'utilitza la variable ϕ_i , que indica l'angle respecte a l'eix x de la recta entre la posició de P determinada per intersecció d'arcs capaços i R_i –veure l'equació (4.33)–, s'obté:

$$\arctan\left(\frac{-y'}{-x'}\right) - \arctan\left(\frac{-y^r}{-x^r}\right) = \phi_2 - \phi_2^r = \delta\phi_2. \quad (4.101)$$

Finalment, combinant les expressions (4.99), (4.100) i (4.101) s'arriba al següent resultat per a l'error en la determinació de l'orientació si s'utilitza el mètode geomètric proposat:

$$\delta\psi = \varepsilon_\psi^r - \varepsilon_\psi = \delta\phi_2 - \delta\theta_2, \quad (4.102)$$

resultat que coincideix amb el que s'ha trobat en l'estudi de la propagació d'errors en el càlcul de l'orientació si s'utilitza el mètode de triangulació per intersecció d'arcs capaços, equació (4.36). Un raonament anàleg a l'anterior permetria relacionar l'error en la determinació de l'orientació $\delta\psi$ mitjançant el mètode proposat amb un error qualsevol $\delta\theta_i$ ($i = 1,2,3$) en l'estat angular:

$$\delta\psi = \varepsilon_{\psi}^r - \varepsilon_{\psi} = \underbrace{\arctan\left(\frac{y_i - y'}{x_i - x'}\right) - \arctan\left(\frac{y_i - y^r}{x_i - x^r}\right)}_{\delta\phi_i} - \delta\theta_i = \delta\phi_i - \delta\theta_i. \quad (4.103)$$

L'expressió anterior demostra de forma general que el mètode geomètric presentat per a calcular l'orientació del robot a partir de la geometria dels triangles d'error i de centres condueix –tot i la presència d'errors en l'estimació del vector d'estat angular– al mateix resultat que el mètode de triangulació presentat a l'apartat 4.1, que parteix de la posició calculada per intersecció d'arcs capaços per a determinar l'orientació del robot.

Un cop determinada l'orientació $\psi = \psi_e - \varepsilon_{\psi} = \psi^r + \delta\psi$, es pot calcular la posició p_{ij} com a intersecció de la recta que passa per R_i d'angle $\theta_i + \psi$ respecte a l'eix x, i la recta que passa per R_j d'angle $\theta_j + \psi$. Els punts de la recta associada a un reflector qualsevol R_i compleixen l'equació:

$$\mathbf{p} = \vec{r}(R_i) + \lambda_i \vec{v}_i \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \lambda_i \begin{Bmatrix} \cos(\theta_i + \psi) \\ \sin(\theta_i + \psi) \end{Bmatrix}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.104)$$

L'angle respecte a l'eix x d'una d'aquestes rectes és:

$$\theta_i + \psi = (\theta_i^r + \delta\theta_i) + (\psi^r + \delta\psi) = (\theta_i^r + \psi^r) + (\delta\theta_i + \delta\psi), \quad (4.105)$$

i com que a l'apartat anterior s'ha demostrat que $\delta\theta_i + \delta\psi = \delta\phi_i$ és l'angle entre la recta que passa pel reflector R_i i la posició real de P, i la recta entre R_i i el punt on es tallen els tres arcs capaços mesurats P' (Figura 4.13), es conclou que les tres rectes associades a cadascun dels reflectors es tallen en el mateix punt on es tallen els tres arcs capaços mesurats $\alpha^r + \delta\alpha$, $\beta^r + \delta\beta$ i $\gamma^r + \delta\gamma$.

La Figura 4.34 mostra les rectes que es determinarien mitjançant el mètode proposat a partir del terme ε_{ψ} calculat mitjançant els triangles blaus –amb errors– de la Figura 4.33. En aquest cas només es té un error $\delta\theta_2$ en les mesures. S'observa com les tres rectes es tallen en el punt P' on es tallen els tres arcs capaços mesurats.

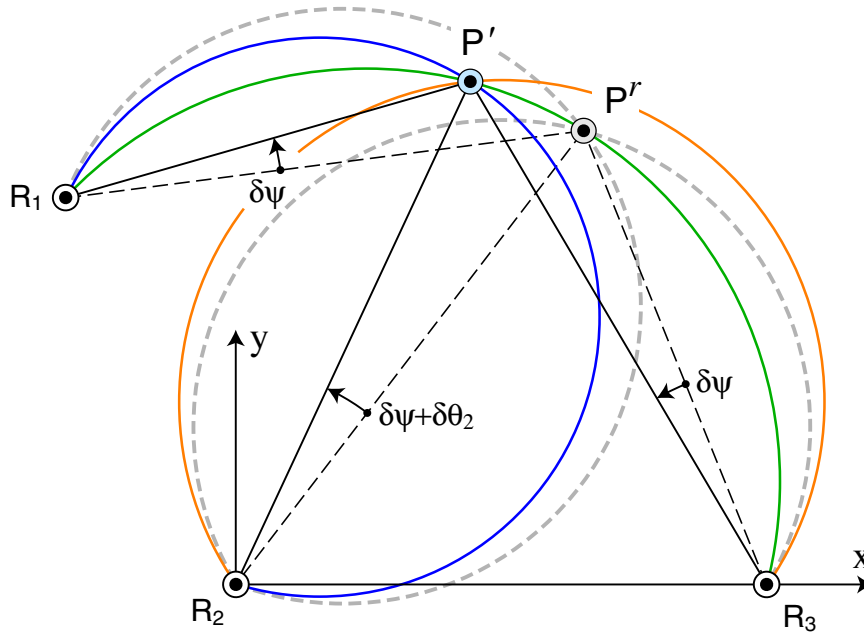


Figura 4.34 Rectes per cadascun dels reflectors R_i ($i = 1,2,3$) si només es té error $\delta\theta_2$ en l'estimació de l'estat angular

S'ha demostrat que l'aplicació dels dos mètodes de triangulació presentats:

- i) Determinació de la posició \mathbf{p} per intersecció d'arcs capaços i càlcul de l'orientació ψ a partir de la posició calculada (apartat 4.1).
- ii) Càlcul de l'orientació ψ a partir de la relació de semblança entre el triangle d'error i el triangle de centres, i determinació de la posició \mathbf{p} per intersecció de rectes,

condueix als mateixos errors de posicionament $\delta\mathbf{p}$ i $\delta\psi$ a partir d'un mateix error en els angles relatius: $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ i $\delta\theta_3$. Això es deu al fet que en ambdós casos s'utilitza la restricció geomètrica que imposen els *arcs capaços* que passen per dos reflectors, en un cas per a determinar la posició –triangulació per intersecció d'arcs capaços– i en l'altre per determinar l'orientació comparant els triangles d'error i de centres –triangulació per intersecció de rectes–.

Per tant, l'anàlisi de la propagació de l'error, des de la mesura dels angles relatius al posicionament, conclou que els dos mètodes de triangulació són equivalents. En conseqüència, l'estudi que s'ha fet a l'apartat 4.1.4 de la *propagació lineal de l'error* en l'estimació del vector d'estat angular $\delta\mathbf{x} \equiv \{\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3\}^T$ –considerat gaussià– en el càlcul del posicionament $\{\mathbf{p}(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})\}^T$ és vàlid també per a aquest mètode.

Pel que fa als errors, l'única diferència que es podria trobar entre els dos mètodes provindria dels errors numèrics de truncament, que en els ordinadors actuals són negligibles comparats amb els errors considerats que són els associats als angles θ_i .

4.2.3 Conclusions

En aquest apartat s'ha presentat un mètode per a determinar l'orientació del vehicle a partir de les equacions de la triangulació per intersecció de rectes. El mètode geomètric que es presenta parteix d'una *aproximació* de l'orientació del robot per a calcular les rectes, la intersecció de les quals determina el *triangle d'error*. La relació de semblança entre aquest triangle i el que determinen els centres dels arcs capaços α , β i γ –*triangle de centres*– permet corregir l'error en l'aproximació de l'orientació. Aquest mètode suposa un avenç respecte l'anterior [Cohen i Koss 1992] en el qual es corregia l'error d'orientació mitjançant un càlcul iteratiu. Un cop es coneix l'orientació ja pot determinar-se la posició intersecant les rectes des de dos reflectors qualssevol.

De la mateixa manera que el mètode presentat a l'apartat 4.1, basat en la intersecció d'arcs capaços per a calcular la posició, el mètode que es presenta en aquest apartat és *indeterminat* quan el punt que es posiciona es troba sobre la circumferència que passa pels tres reflectors. En aquest cas no es pot corregir l'aproximació de l'orientació perquè els triangles d'error i de centres degeneren en un punt.

Tanmateix, a sobre i prop d'aquesta circumferència, on l'error del mètode és elevat, es pot utilitzar un mètode integratiu –basat en l'hodometria del vehicle o en un giròscop– que estimi l'orientació del vehicle en aquestes condicions transitòries. Amb aquesta estimació de l'orientació es podria utilitzar la intersecció de rectes, escollint els dos reflectors que ofereixin menys error de posicionament. En aquest cas el mètode no presentaria posicions indeterminades si s'utilitzen tres reflectors no alineats.

Si l'estimació anterior de l'orientació es fa a partir de mesures *hodomètriques*, les cinemàtiques amb canvi d'orientació ψ lineal respecte a aquestes mesures –com ara la cinemàtica *diferencial* i la cinemàtica *omnidireccional amb rodes de corrons esfèrics*– presenten l'avantatge d'un càlcul integratiu més simple en el que l'evolució de l'orientació $\psi(t)$ s'obté com a forma algebraica lineal dels increments finits de la rotació de les rodes del robot.

En aquest apartat també s'ha estudiat la propagació de l'error en les variables angulars d'estat $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$ en el càlcul del posicionament (\mathbf{p} i ψ) i s'ha demostrat que els errors es propaguen de la mateixa forma que en el mètode basat en arcs capaços. És així perquè en ambdós mètodes s'utilitza la mateixa restricció geomètrica associada als tres arcs capaços α , β i γ .

Per acabar cal comentar que com que els dos mètodes de triangulació que s'han exposat –el d'intersecció d'*arcs capaços* i el d'intersecció de *rectes*– condueixen al mateix càlcul del posicionament, en apartats posteriors s'utilitzarà el procediment de càlcul de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ i $\psi(\mathbf{x})$ del primer perquè aquest és computacionalment més senzill, equacions (4.20) i (4.39). Aquestes equacions són vàlides sempre i quan no s'accedeixi a la circumferència que passa pels tres reflectors emprats o a la seva zona propera.

Capítol 5

Posicionament dinàmic de robots mòbils per mitjà d'un sistema làser

El sistema de posicionament làser que es considera en aquesta tesi té l'inconvenient que les mesures angulars de cada reflector corresponen a configuracions diferents del robot si aquest es troba en moviment, Figura 5.1. En aquestes condicions la triangulació angular no pot aplicar-se de forma consistent a partir de les mesures directes realitzades pel sensor. Aquest inconvenient, enunciat per Skewis i Lumelsky (1994) es coneix dins l'àmbit de la robòtica mòbil com el *problema del posicionament dinàmic*.

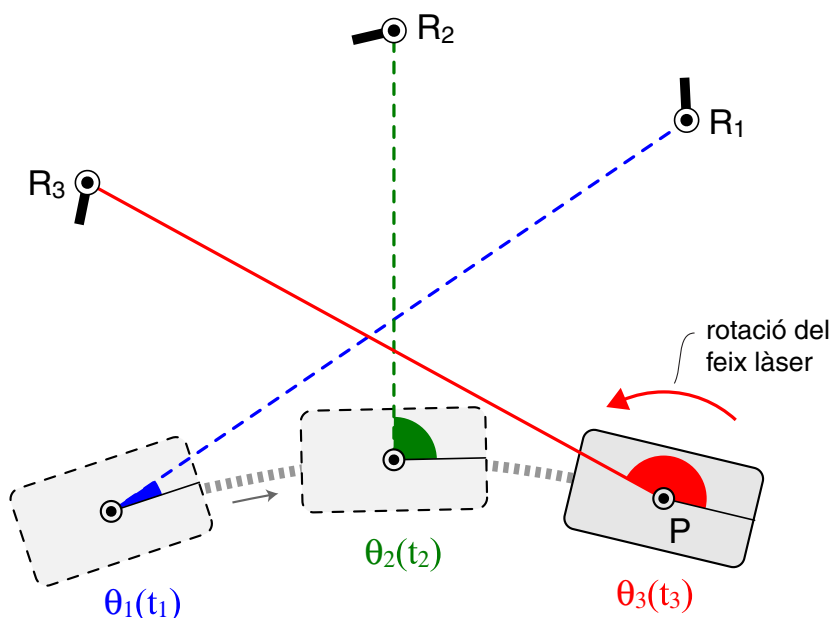


Figura 5.1 Quan el robot es mou els angles corresponents als diferents reflectors són mesurats en diferents configuracions del robot, *problema del posicionament dinàmic*

Com ja s'ha comentat en capítols anteriors l'ús únic de l'*hodometria* no és una bona solució a aquest problema perquè té com a inconvenient principal i inevitable l'acumulació d'errors al llarg de la trajectòria del vehicle [Borenstein *et al.* 1996, Kelly 2004]. Mitjançant un bon calibratge es poden atenuar els errors sistemàtics, però sempre hi haurà

errors no sistemàtics que s'acumularan en les integracions temporals associades al càlcul hodomètric del posicionament.

L'eina que s'utilitza en robòtica mòbil per a fusionar el posicionament hodomètric amb mesures externes al robot és el *filtre de Kalman estès* [Andrade-Cetto 2002 i 2003, Bar-Shalom *et al.* 2001, Castellanos i Tardós 1999, Jensfelt 2001, Thrun *et al.* 2005, Welch i Bishop 2004], el qual és una generalització del filtre de Kalman clàssic lineal [Kalman 1960, Kalman i Bucy 1961] per a sistemes dinàmics *no lineals*. En l'àmbit de la robòtica les mesures externes poden ser molt diverses, des de sensors d'ultrasons que detecten les característiques naturals de l'entorn (parets, cantonades, etc.), fins a sistemes de visió artificial, o bé també sistemes de mesura angular basats en làser com el que s'estudia en la present tesi.

A l'apartat següent s'exposen els fonaments teòrics, així com la formulació del filtre de Kalman. En primer lloc s'exposa la versió clàssica per a sistemes dinàmics lineals [Kalman 1960, Kalman i Bucy 1961]. Aquest algorisme produeix una estimació òptima de l'estat del sistema, la que minimitza el valor esperat de l'error quadràtic en l'estimació de l'estat, si els errors presents en el model són gaussians.

Tot seguit, es formula la generalització del filtre per a sistemes no lineals: el filtre de Kalman estès (EKF). Aquest algorisme utilitza aproximacions linealitzades de les equacions del filtre, *equació de transició d'estat* i *equació de mesura*, i per tant no es garanteix la convergència a l'estimació òptima de l'estat. No obstant això, són molts els casos en què la utilització d'aquest algorisme dona resultats suficientment satisfactoris, entre ells en el posicionament de robots mòbils.

A continuació, s'exposa l'aplicació usual en robòtica mòbil del EKF per a estimar en cada instant de temps el posicionament del robot –posició i orientació–, a partir de la seva evolució hodomètrica i de les mesures angulars que realitza el sistema làser. L'algorisme té en compte els errors en les diferents mesures, considerats gaussians, per a determinar la millor estimació del posicionament. Al llarg de la tesi s'anomena aquesta versió de l'algorisme de Kalman com *EKF posicional*, perquè s'utilitza com a vector d'estat $\mathbf{y}_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$ –el subíndex k designa l'instant de temps t_k –.

Com a alternativa a aquest mètode i com a aportació més innovadora i fonamental, en aquesta tesi es proposa l'aplicació del filtratge de Kalman per a estimar en cada instant de temps l'angle relatiu θ_i ($i=1,2,3$) associat als diferents reflectors, encara que no hi hagi mesura directa del sistema làser. En aquest cas, el vector d'estat de l'algorisme està format pels tres angles utilitzats en la triangulació angular: $\mathbf{x}_k \equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$. A aquest algorisme se l'anomena *EKF angular*.

Cal remarcar que el mètode dinàmic d'estimació angular basat en el EKF que es proposa garanteix l'ús consistent dels algorismes de triangulació en condicions de moviment perquè els tres angles estimats en cada instant corresponen a la mateixa configuració del robot. Per tant, a partir de l'estimació angular \mathbf{x}_k , el posicionament $\mathbf{y}_k \equiv \{\mathbf{p}_k, \psi_k\}^T$ es pot determinar per *triangulació angular* mitjançant les expressions (4.20) i (4.39) introduïdes al Capítol 4:

$$\mathbf{y}_k \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k(\mathbf{x}_k) \\ \psi_k(\mathbf{x}_k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_3 \frac{1 - \eta_k \cot(\theta_{3,k} - \theta_{2,k})}{1 + \eta_k^2} \\ x_3 \frac{\eta_k^2 \cot(\theta_{3,k} - \theta_{2,k}) - \eta_k}{1 + \eta_k^2} \\ \arctan \frac{-y_k}{-x_k} - \theta_{2,k} \end{Bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\eta_k \equiv \frac{x_3 - x_1 - y_1 \cot(\theta_{2,k} - \theta_{1,k})}{x_3 \cot(\theta_{3,k} - \theta_{2,k}) - y_1 + x_1 \cot(\theta_{2,k} - \theta_{1,k})},$$

on $\{x_i, y_i\}^T$ és la posició del reflector R_i en el SRT. S'utilitzen les equacions de la triangulació basada en intersecció d'arcs capaços perquè, tal com s'ha demostrat al capítol anterior, el mètode d'intersecció de rectes presentat condueix al mateix resultat.

Mitjançant la utilització del vector \mathbf{x}_k per a descriure l'estat del sistema dinàmic s'aconsegueix que l'equació de mesura del EKF –la que relaciona el vector d'estat amb les mesures externes– sigui lineal, perquè l'estat del sistema és directament mesurat pel sensor extern –en aquest cas el sensor làser–.

D'aquesta manera totes les no linealitats del sistema es troben a l'equació de transició d'estat, i per tant s'elimina la necessitat de linealitzar l'equació de mesura. Tal com fa palès Huster (2003) en la seva tesi doctoral, una descripció del sistema dinàmic d'aquest tipus –amb un vector d'estat relacionat linealment amb les mesures externes– millora el funcionament de l'algorisme en termes de precisió en l'estimació.

La justificació d'aquest fet es pot trobar en els treballs sobre l'estimador òptim de dos passos [Haupt *et al.* 1996, Kasdin i Haupt 1997, Kasdin 2000a i 2000b]. En aquests treballs els autors comparen mitjançant simulacions dos mètodes alternatius per a estimar l'estat d'un sistema dinàmic. Un d'ells basat en la utilització directa d'un EKF amb equacions de transició d'estat i de mesura no lineals. I l'altre, que els autors anomenen estimador òptim de dos passos, en el qual s'utilitza una descripció alternativa de l'estat per a garantir la linealitat de l'equació de mesura de l'estimador dinàmic. En les simulacions es fa palès que l'error en l'estimació de l'estat del sistema disminueix si s'utilitza aquesta descripció alternativa.

5.1 El filtre de Kalman

El filtre de Kalman és un algorisme recursiu que estima l'estat d'un sistema o procés dinàmic, a partir de mesures o observacions que segueixen processos estocàstics. L'algorisme de Kalman és un estimador òptim de l'estat del sistema –minimitza el valor esperat de l'error quadràtic en l'estimació de l'estat– sempre i quan es verifiquin les tres hipòtesis següents: El sistema ha de ser *lineal*, i el soroll associat al model del procés i a les mesures (o observacions externes) ha de ser *blanc* i *gaussià*. El soroll blanc no està correlacionat en el temps i té la mateixa potència per totes les freqüències. En la realitat un senyal d'aquest tipus no existeix, però és usual assumir que aquesta potència és constant dins l'ample de banda de funcionament del sistema.

En la realitat, els errors (o sorolls) corresponents al model del procés i a les mesures poden no ser estrictament gaussians. No obstant, com que aquests errors solen provenir de diferents fonts d'incertesa independents, el *teorema central del límit* estableix que la funció de distribució de probabilitat de la seva suma tendirà a una gaussiana [Bar-Shalom *et al.* 2001]. Pel que fa a la linealitat, per als sistemes no lineals es pot procedir a un procés de linealització que condueix a l'anomenat filtre de Kalman estès (EKF, *extended Kalman filter*), el qual no garanteix però la convergència a l'estimació òptima. Aquest és el cas de la robòtica mòbil, ja que les equacions que regeixen l'evolució del posicionament són usualment no lineals, tot i això el EKF s'utilitza en una gran quantitat d'aplicacions amb molt bons resultats.

5.1.1 Filtre de Kalman lineal

Kalman adreça el problema d'estimar el vector d'estat \mathbf{x} ($\in \mathbb{R}^n$) d'un procés lineal, discret, estocàstic i no estacionari² governat per la següent equació d'evolució:

$$\mathbf{x}_k = A_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + B_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (5.2)$$

donada una mesura \mathbf{z} ($\in \mathbb{R}^m$) relacionada amb l'estat segons:

$$\mathbf{z}_k = H_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (5.3)$$

Aquestes equacions s'anomenen *equació de transició d'estat* i *equació de mesura* –o *d'observació*– respectivament, i les variables \mathbf{w} i \mathbf{v} representen l'error associat al procés i a les mesures. S'assumeix que aquestes variables són independents entre elles i que segueixen funcions de densitat de probabilitat normals (error gaussià). Les característiques que compleixen aquestes variables són les següents:

$$E[\mathbf{w}_k] = 0, \quad E[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T] = Q_k, \quad \text{i} \quad E[\mathbf{w}_i\mathbf{w}_j^T] = 0, \quad \forall i \neq j, \quad (5.4)$$

$$E[\mathbf{v}_k] = 0, \quad E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T] = R_k, \quad \text{i} \quad E[\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j^T] = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (5.5)$$

Les matrius Q_k i R_k són les matrius de covariància de l'error en el procés i de l'error en les mesures respectivament. Aquestes matrius poden variar amb el temps, per aquest motiu s'utilitza el subíndex k per a indicar l'instant de temps al qual corresponen.

La matriu A_{k-1} ($n \times n$) de l'equació (5.2) relaciona l'estat \mathbf{x}_k amb l'estat a l'instant anterior t_{k-1} quan hi ha absència d'entrada \mathbf{u}_{k-1} ($\in \mathbb{R}^l$) i d'error \mathbf{w}_{k-1} . La matriu B_{k-1} ($n \times l$) relaciona l'entrada \mathbf{u}_{k-1} amb l'estat a l'instant t_k . Finalment, la matriu H_k ($m \times n$) de l'equació (5.3) estableix una relació entre les mesures –o observacions– \mathbf{z}_k i l'estat del sistema.

Es defineixen l'error d'estimació de l'estat *a priori* i *a posteriori*, respectivament, segons les expressions:

$$\mathbf{e}_{k|k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1}, \quad (5.6)$$

² Representa una evolució del *filtre de Wiener*, el qual és vàlid únicament per a processos estacionaris

$$\mathbf{e}_{k|k} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}. \quad (5.7)$$

S'anomena $\mathbf{x}_{k|k-1}$ a l'estimació *a priori* de l'estat \mathbf{x}_k calculada considerant nul l'error \mathbf{w} present a l'equació (5.2), i a partir de l'estimació *a posteriori* de l'estat a l'instant anterior $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$ i de l'entrada \mathbf{u}_{k-1} :

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\mathbf{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}. \quad (5.8)$$

Per tant, l'error d'estimació *a priori* de l'estat segueix l'evolució:

$$\mathbf{e}_{k|k-1} = A_{k-1}\mathbf{e}_{k-1|k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (5.9)$$

la matriu de covariància del qual es determina mitjançant l'expressió següent:

$$P_{k|k-1} \equiv E[\mathbf{e}_{k|k-1}\mathbf{e}_{k|k-1}^T] = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1}. \quad (5.10)$$

Un cop determinada l'estimació *a priori* de l'estat i la matriu de covariància *a priori* de l'error comès en l'estimació —etapa de **predicció** del filtre— s'incorpora una mesura \mathbf{z}_k del sistema per a corregir l'estimació de l'estat —etapa de **correcció** o **d'actualització**—. S'anomena innovació al terme \mathbf{v}_k , que representa la diferència entre la mesura real \mathbf{z}_k i la seva estimació a partir de la predicció de l'estat segons (5.3):

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k|k-1} = \mathbf{z}_k - H_k\mathbf{x}_{k|k-1}. \quad (5.11)$$

A partir d'aquest terme d'innovació, l'algorisme del filtre de Kalman determina l'actualització de l'estat (estimació *a posteriori*) per mitjà de les expressions següents:

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k, \quad (5.12)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1} + K_k \mathbf{v}_k, \quad (5.14)$$

on K_k és la matriu de guany del filtre i es determina imposant el criteri d'optimització basat en la minimització del valor esperat de l'error quadràtic en l'estimació $\mathbf{x}_{k|k}$, i S_k és la matriu de covariància de l'error en el terme d'innovació \mathbf{v}_k . L'últim pas de l'algorisme de filtratge de Kalman per a sistemes lineals és el càlcul de la matriu de covariància de l'error d'estimació de l'estat *a posteriori* $\mathbf{e}_{k|k}$. L'evolució d'aquest error i la seva matriu de covariància són:

$$\mathbf{e}_{k|k} = \mathbf{e}_{k|k-1} - K_k (H_k \mathbf{e}_{k|k-1} + \mathbf{v}_k), \quad (5.15)$$

$$P_{k|k} \equiv E[\mathbf{e}_{k|k}\mathbf{e}_{k|k}^T] = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T. \quad (5.16)$$

Substituint l'expressió de la matriu de guany K_k –equació (5.13)– a l'equació (5.16) i reorganitzant els termes, s'arriba a la següent expressió computacionalment més eficient per al càlcul de la matriu de covariància $P_{k|k}$:

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}. \quad (5.17)$$

L'observació de les equacions del filtre de Kalman proporciona les següents consideracions pel que fa al seu funcionament. La matriu de guany K_k és proporcional a la incertesa en l'estimació inicial de l'estat i inversament proporcional a la incertesa en les mesures. Si les mesures z_k del sensor tenen incertesa gran, i en canvi l'estimació de l'estat *a priori* és precisa llavors la matriu de guany té poc pes en l'actualització de l'estat de l'equació (5.14). En aquest cas el sistema creu més en la informació provinent de l'equació d'evolució (5.2). Si es porta a l'extrem es té que:

$$\lim_{P_{k|k-1} \rightarrow 0} K_k = 0, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1}. \quad (5.19)$$

En canvi, si la incertesa de les mesures del sensor és baixa i la de l'estimació de l'estat és elevada, aleshores el guany K_k és tal que en l'actualització de l'estat té més pes la informació provinent de les mesures –equació (5.3)– que la de l'evolució del model. Portant aquest concepte a l'extrem es té el següent:

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H_k^{-1}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{x}_{k|k} = H_k^{-1} z_k. \quad (5.21)$$

Si es té en compte l'equació (5.17), s'observa com quan la mesura del sensor és incerta es redueix poc la covariància de l'error. En canvi, unes mesures precises contribueixen a reduir la matriu de covariància de l'error després de l'actualització de l'estat.

Determinació de la matriu de guany del filtre

La tria de la matriu K_k de guany del filtre es realitza en funció del criteri d'optimització de l'estimació de l'estat que es vulgui seguir. En el cas del filtre de Kalman, es pretén minimitzar el valor esperat de l'error quadràtic en l'estimació de l'estat *a posteriori* $\mathbf{x}_{k|k}$. És a dir, es pretén minimitzar el valor esperat del mòdul al quadrat del vector d'error $\mathbf{e}_{k|k}$:

$$E \left[\left| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k} \right|^2 \right] \equiv E \left[\left| \mathbf{e}_{k|k} \right|^2 \right]. \quad (5.22)$$

Minimitzar aquest terme equival a minimitzar la traça de la matriu de covariància d'error *a posteriori* $P_{k|k}$, equació (5.16). Per tant, cal trobar la matriu de guany K_k que faci zero la derivada de la traça de $P_{k|k}$ respecte a K_k [Bar-Shalom *et al.* 2001, Welch i Bishop 2004]:

$$\partial \text{tr}(P_{k|k}) / \partial K_k = 0. \quad (5.23)$$

Si es parteix de l'equació (5.16) i es reorganitza els seus termes s'obté:

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^T K_k^T + K_k \left(H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \right) K_k^T \\ &= P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^T K_k^T + K_k S_k K_k^T \end{aligned}, \quad (5.24)$$

i aleshores, si s'imposa que la derivada de la traça d'aquesta matriu respecte a la matriu de guany del filtre K_k ha de ser zero –equació (5.23)– s'arriba a l'expressió:

$$\frac{\partial \text{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} = -2(H_k P_{k|k-1})^T + 2K_k S_k = 0, \quad (5.25)$$

on per al càlcul anterior s'utilitzen les següents expressions: $\partial \text{tr}(ABA^T)/\partial A = 2AB$ (amb B simètrica), i $\partial \text{tr}(AB)/\partial A = B^T$ (amb B que no és simètrica) [Bar-Shalom *et al.* 2001].

A partir de l'equació (5.25), si s'aïlla la matriu de guany K_k s'obté l'expressió (5.13) que garanteix que el càlcul de l'estimació de l'estat $\mathbf{x}_{k|k}$ –equació (5.14)– sigui òptim; és a dir, que es minimitzi el valor esperat de l'error quadràtic.

Formulació del filtre de Kalman lineal

A continuació es presenta un resum de les equacions que s'utilitzen en l'aplicació recursiva del filtre de Kalman. Per a simplificar la notació, $\bar{\mathbf{x}}_k$ i \bar{P}_k representen l'estimació *a priori* de l'estat i de la matriu de covariància d'error ($\mathbf{x}_{k|k-1}$ i $P_{k|k-1}$). Les estimacions *a posteriori* ($\mathbf{x}_{k|k}$ i $P_{k|k}$) es denotaran per $\tilde{\mathbf{x}}_k$ i \tilde{P}_k . L'algorisme parteix d'una estimació inicial *aproximada* de l'estat $\bar{\mathbf{x}}_0$ i de la matriu de covariància de l'error en aquesta estimació \bar{P}_0 . A partir d'aquestes dades, el filtre consta de dues fases que es duen a terme iterativament:

- Fase de **predicció** de l'estat, de la covariància de l'error i de les observacions o mesures:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = A_{k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + B_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \quad (5.26)$$

$$\bar{P}_k = A_{k-1} \tilde{P}_{k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1}, \quad (5.27)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_k = H_k \bar{\mathbf{x}}_k. \quad (5.28)$$

- Fase d'**actualització** o **correcció** de l'estat i de la matriu de covariància de l'error en l'estimació de l'estat:

$$K_k = \bar{P}_k H_k^T (H_k \bar{P}_k H_k^T + R_k)^{-1}, \quad (5.29)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + K_k (\mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_k), \quad (5.30)$$

$$\tilde{P}_k = (I - K_k H_k) \bar{P}_k. \quad (5.31)$$

5.1.2 Filtre de Kalman estès (EKF, *Extended Kalman Filter*)

Durrant-Whyte (1994) i Crowley (1995) introdueixen l'aplicació del filtre de Kalman per a estimar la configuració d'un robot mòbil a partir de mesures externes al robot –detecció de característiques de posició coneguda del seu entorn–. En aquest cas:

- El vector d'estat del sistema correspon a la configuració del robot mòbil, posició d'un dels seus punts i orientació.
- L'equació (5.2) de transició d'estat –o equació del model– es determina a partir de l'hodometria del vehicle concret i depèn, per tant, de la cinemàtica particular del vehicle. Les variables mesurades pels hodòmetres (com ara encoders) del vehicle són les entrades del sistema.
- L'equació (5.3) d'observació relaciona l'estat que es vol estimar amb les mesures del sensor absolut instal·lat al vehicle (escàner làser, sensor d'ultrasons, sensor làser de profunditat, etc.).

L'algorisme de Kalman, a més de ser un estimador òptim d'una variable d'estat, representa dins l'àmbit de la robòtica mòbil una eina molt eficaç per a realitzar la *fusió sensorial* de dades provinents de diferents sensors instal·lats al vehicle (hodòmetres i sensors absoluts).

Com que l'hodometria dels vehicles és en general *no lineal* –tret d'algunes excepcions com és el cas de vehicles amb rodes omnidireccionals realitzant trajectòries holònomes [Agulló Batlle 2004]–, el filtratge de Kalman lineal no és vàlid i s'ha de recórrer al filtre de Kalman estès (EKF, *Extended Kalman Filter*). Aquest és una generalització del filtre de Kalman per a processos no lineals, en la que es linealitzava el model al voltant de l'estimació de l'estat actual i es linealitzava la mesura al voltant de la predicció de l'observació [Andrade-Cetto 2002, Welch i Bishop 2004].

Es considera que el procés és governat per la funció *no lineal* de transició d'estat f que relaciona l'evolució del vector d'estat entre dos instants de temps consecutius, i que h és la funció, també *no lineal* en el cas general, que relaciona l'estat amb la mesura z en un instant qualsevol:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}), \quad (5.32)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (5.33)$$

Aquest problema d'estimació es pot solucionar utilitzant les equacions del filtre de Kalman clàssic si es construeix un sistema lineal que approximi el sistema real prop de la millor estimació de l'estat en cada cas ($\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}$ en la fase de predicció i $\bar{\mathbf{x}}_k$ en la fase de correcció). Si les funcions f i h són diferenciables i els errors \mathbf{w} i \mathbf{v} gaussians, llavors es pot calcular l'expansió de primer ordre en sèrie de Taylor de les equacions (5.32) i (5.33):

$$\mathbf{x}_k \approx f(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0) + \nabla f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k-1} - \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}) + \nabla f_{\mathbf{w}} \mathbf{w}_{k-1}, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{z}_k \approx h(\bar{\mathbf{x}}_k) + \nabla h_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (5.35)$$

on les matrius jacobianes de la funció f respecte a l'estat \mathbf{x} i a l'error en el procés \mathbf{w} es calculen segons:

$$\nabla f_{\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0)}{\partial \mathbf{x}} \right], \quad (5.36)$$

$$\nabla f_{\mathbf{w}} = \left[\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0)}{\partial \mathbf{w}} \right], \quad (5.37)$$

i la matriu jacobiana de la funció d'observació h respecte a l'estat és:

$$\nabla h_{\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial h(\bar{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right]. \quad (5.38)$$

Aleshores, considerant vàlida aquesta aproximació lineal del sistema dins l'interval de temps $[t_{k-1}, t_k]$, les equacions de la fase de **predicció** de l'estat del EKF són les següents:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = f(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0), \quad (5.39)$$

$$\bar{P}_k = \nabla f_{\mathbf{x}} \tilde{P}_{k-1} \nabla f_{\mathbf{x}}^T + \nabla f_{\mathbf{w}} Q_{k-1} \nabla f_{\mathbf{w}}^T, \quad (5.40)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_k = h(\bar{\mathbf{x}}_k). \quad (5.41)$$

Pel que fa a la fase d'**actualització** o **correcció** quan arriba una mesura externa \mathbf{z}_k , les equacions del filtre de Kalman estès són:

$$S_k = \nabla h_{\mathbf{x}} \bar{P}_k \nabla h_{\mathbf{x}}^T + R_k, \quad (5.42)$$

$$K_k = \bar{P}_k \nabla h_{\mathbf{x}}^T S_k^{-1}, \quad (5.43)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + K_k (\mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_k), \quad (5.44)$$

$$\tilde{P}_k = (I - K_k \nabla h_{\mathbf{x}}) \bar{P}_k. \quad (5.45)$$

Pel que fa al filtre de Kalman estès, s'ha de dir que la linealització dels models del procés i de la mesura, no manté les distribucions normals dels errors \mathbf{w} associats a l'evolució del procés i dels errors \mathbf{v} associats a les mesures. Aquest fet restringeix la utilització de l'algorisme a sistemes que es poden considerar lineals dins l'interval de temps $[t_{k-1}, t_k]$. Caldrà doncs, abans d'utilitzar aquest mètode, comprovar mitjançant simulacions de Monte Carlo si és vàlida la hipòtesi de linealitat del sistema dins l'interval de temps escollit.

Cal dir, tal com s'ha anticipat anteriorment, que en vehicles de rodes omnidireccionals es pot aconseguir que la funció d'evolució f del model (associada a l'hodometria del vehicle) sigui lineal en trajectòries holònomes. D'aquesta manera es redueix l'error associat a la

linealització local de la funció f que és inherent a l'algorisme del filtre de Kalman està. En aquesta tesi no s'aprofundirà en aquest aspecte, deixant-se com un possible treball futur.

Associació de dades o “*matching*”

En l'etapa d'actualització del filtre de Kalman, pot passar que es realitzi una mesura errònia z_k (*outlier*) que suposaria una divergència de l'algorisme. És a dir, es corregiria la predicció de l'estat amb una mesura errònia i això podria empitjorar la predicció inicial. Per a evitar aquest problema en l'associació de dades s'utilitza el concepte de *distància de Mahalanobis* (q_k), que representa una distància normalitzada amb una matriu de covariància. Es defineix per mitjà de l'expressió:

$$q_k \equiv (z_k - \bar{z}_k)^T S_k^{-1} (z_k - \bar{z}_k), \quad (5.46)$$

on S_k és la matriu de covariància del procés d'innovació, definida en l'equació (5.42). La distància de Mahalanobis q_k és una variable aleatòria que segueix una distribució de probabilitat χ^2 de tants graus de llibertat com la dimensió del vector de mesures z . Per a acceptar la mesura que es realitza a l'instant t_k s'ha de verificar:

$$q_k \equiv (z_k - \bar{z}_k)^T S_k^{-1} (z_k - \bar{z}_k) \leq K, \quad (5.47)$$

on K representa el tamany de la finestra de validació (*validation gate*). El valor de K es selecciona en funció de la dimensió de z (graus de llibertat de la distribució χ^2) i de la probabilitat que una mesura correcta s'accepti com a tal [Bar-Shalom *et al.* 2001, Castellanos i Tardós 1999]. A partir de les equacions (5.42) i (5.46), s'arriba a la conclusió que la distància de Mahalanobis q_k disminueix en augmentar \bar{P}_k i R_k (dispersió elevada en el procés d'innovació), i per tant en aquestes condicions és més difícil rebutjar una mesura.

5.2 Estimació dinàmica del posicionament per mitjà d'un EKF

En aquest apartat s'explica de forma breu l'aplicació del filtre de Kalman està en el problema dinàmic d'estimació del posicionament d'un robot mòbil equipat amb els sensors hodomètrics necessaris i un sistema de posicionament làser que mesura angles. Aquesta metodologia de posicionament, molt usual en l'àmbit de la robòtica mòbil, s'utilitza en els següents treballs: [Wiklund *et al.* 1988, Durrant-Whyte 1994, Hu i Gu 2000, Sgorbissa 2000, Piaggio *et al.* 2001].

Com ja s'ha introduït a l'apartat 5.1.2 el vector d'estat del filtre està format per les variables *posicionals*: posició $\{x, y\}^T$ i orientació ψ . En aquest cas es defineix aquest vector com $y_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$, per no confondre's amb $x_k \equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$ que representa el vector d'estat *angular*. El vector d'entrada u_k són les *mesures hodomètriques* dels diferents sensors instal·lats al robot, i l'error w_k està associat a l'error en aquestes mesures (a causa dels lliscaments de les rodes, irregularitats del terreny, etc.).

A continuació es dona la formulació del mètode per al robot mòbil SPHERIK-3x3, que és el que s'utilitzarà en les simulacions informàtiques i en l'experimentació. A l'Annex B es poden trobar les equacions equivalents per a la cinemàtica diferencial i la de tricicle.

Sigui P, Figura 5.2, el punt del robot on es troba situat l'escàner làser del sistema de posicionament. A partir de l'equació matricial (3.27) que s'ha introduït a l'apartat 3.3 es té que la velocitat d'aquest punt –en la base d'eixos longitudinal i transversal fixa al robot– i la velocitat de canvi d'orientació de la plataforma en un cert instant t_k s'obtenen segons:

$$\{\vec{v}_k(\mathbf{P})\} = \begin{Bmatrix} v_{L,k} \\ v_{T,k} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{v_{2,k} - v_{3,k}}{\cos \alpha} \\ \frac{Lv_{2,k} + Lv_{3,k} - 2sv_{1,k}}{s + L \sin \alpha} \end{Bmatrix}, \quad (5.48)$$

$$\dot{\psi}_k = \frac{-2v_{1,k} \sin \alpha - v_{2,k} - v_{3,k}}{2(s + L \sin \alpha)}, \quad (5.49)$$

on les variables $v_{i,k}$ ($i = 1,2,3$) són per definició: $v_{i,k} \equiv r\omega_{i,k}$ ($\omega_{i,k}$ és la velocitat angular motoritzada del grup motriu i , Figura 5.2), i les variables geomètriques s , L , r i α es defineixen a la Figura 3.9.

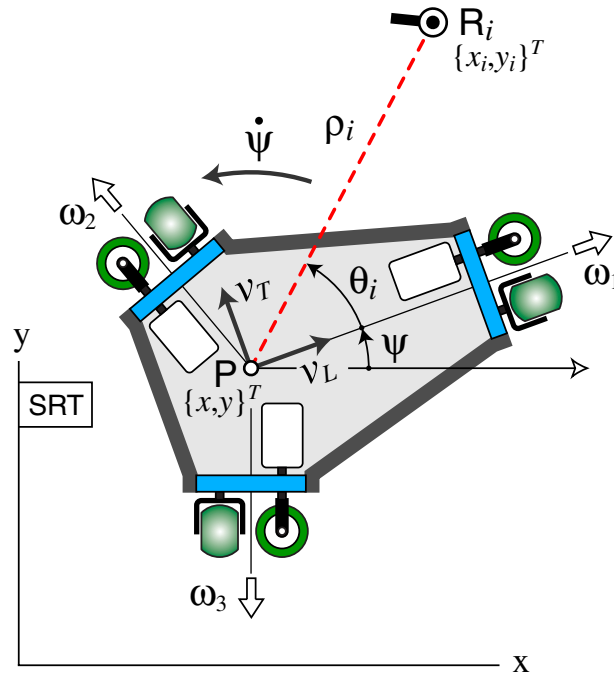


Figura 5.2 Variables cinemàtiques del robot SPHERIK-3x3, i variables geomètriques (ρ_i i θ_i) associades al reflector R_i ($i = 1,2,3$)

Les variables v_i , que representen la *velocitat motoritzada* de cadascuna de les rodes omnidireccionals de corrons esfèrics, es poden determinar a partir de les mesures dels encoders dels tres motors i formen el vector d'entrada \mathbf{u}_k del EKF:

$$\mathbf{u}_k = \{v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}\}^T. \quad (5.50)$$

Cadascuna d'aquestes mesures tindrà un cert error δv_i acumulat com a conseqüència de diferents fonts d'errors no sistemàtics: lliscaments de les rodes, irregularitats del terra, etc. L'error associat a cadascuna d'aquestes variables es modelitza com a gaussià, ja que pel *teorema central del límit* la suma de diferents fonts d'error independents es pot aproximar per una distribució gaussiana, i per tant el vector d'error \mathbf{w} associat al procés i la seva matriu de covariància són:

$$\mathbf{w}_k = \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \delta v_{3,k}\}^T, \quad (5.51)$$

$$Q_k \equiv E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{v_{1,k}}^2 & & \\ & \sigma_{v_{2,k}}^2 & \\ & & \sigma_{v_{3,k}}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Es considera que els errors en les mesures hodomètriques són independents entre ells, amb variància $\sigma_{v_i,k}^2$ ($i = 1,2,3$). Per a la determinació d'aquesta variància, es pren la hipòtesi que la variable $\Delta d_{i,k} \equiv v_{i,k} \Delta t$ té una variància $\sigma_{d_{i,k}}^2$ que creix proporcionalment amb aquesta distància [Chong i Kleeman 1997, Arras *et al.* 2001, Martinelli *et al.* 2006]:

$$\sigma_{d_{i,k}}^2 = k_d |\Delta d_{i,k}| \Rightarrow \sigma_{v_{i,k}}^2 = \frac{k_d}{\Delta t} |v_{i,k}|. \quad (5.53)$$

La justificació d'aquesta hipòtesi, introduïda per Chong i Kleeman (1997), té la base en el fet que l'error hodomètric posicional augmenta amb la distància recorreguda pel mòbil. La constant de proporcionalitat k_d depèn de les característiques del contacte roda-terra, i s'ha de determinar experimentalment. En el treball d'Arras *et al.* (2001) es determina aquesta constant per a un robot diferencial que es mou dins un entorn interior de laboratori, en aquest cas els autors proposen $k_d \approx 5 \cdot 10^{-6}$ m.

A continuació s'expressa l'equació no lineal de transició d'estat en funció de l'estat a l'instant anterior i de les entrades hodomètriques:

$$\mathbf{y}_k = f(\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}),$$

$$\begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{Bmatrix} \frac{v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{\cos \alpha} \cos \psi_{k-1} - \frac{Lv_{2,k-1} + Lv_{3,k-1} - 2sv_{1,k-1}}{s + L \sin \alpha} \sin \psi_{k-1} \\ \frac{v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{\cos \alpha} \sin \psi_{k-1} + \frac{Lv_{2,k-1} + Lv_{3,k-1} - 2sv_{1,k-1}}{s + L \sin \alpha} \cos \psi_{k-1} \\ \frac{-2v_{1,k-1} \sin \alpha - v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{s + L \sin \alpha} \end{Bmatrix}. \quad (5.54)$$

Com s'ha comentat el vector d'error \mathbf{w} en l'equació anterior està associat a l'error de mesura de les variables hodomètriques v_i . A partir de la funció anterior es poden calcular les matrius jacobianes de les derivades de la funció vectorial f respecte a l'estat \mathbf{y} i a l'error \mathbf{w} respectivament:

$$\nabla f_y = \left[\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{y}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0)}{\partial \mathbf{y}} \right],$$

$$\nabla f_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{\cos \alpha} \sin \tilde{\psi}_{k-1} - \frac{Lv_{2,k-1} + Lv_{3,k-1} - 2sv_{1,k-1}}{s + L \sin \alpha} \cos \tilde{\psi}_{k-1} \right) \\ 0 & 1 & \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{v_{2,k-1} - v_{3,k-1}}{\cos \alpha} \cos \tilde{\psi}_{k-1} - \frac{Lv_{2,k-1} + Lv_{3,k-1} - 2sv_{1,k-1}}{s + L \sin \alpha} \sin \tilde{\psi}_{k-1} \right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

$$\nabla f_w = \left[\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{y}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0)}{\partial \mathbf{w}} \right],$$

$$\nabla f_w = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \frac{2s \sin \tilde{\psi}_{k-1}}{s + L \sin \alpha} & \frac{\cos \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} - \frac{L \sin \tilde{\psi}_{k-1}}{s + L \sin \alpha} & -\frac{\cos \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} - \frac{L \sin \tilde{\psi}_{k-1}}{s + L \sin \alpha} \\ \frac{-2s \cos \tilde{\psi}_{k-1}}{s + L \sin \alpha} & \frac{\sin \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} + \frac{L \cos \tilde{\psi}_{k-1}}{s + L \sin \alpha} & \frac{-\sin \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} + \frac{L \cos \tilde{\psi}_{k-1}}{s + L \sin \alpha} \\ \frac{-2 \sin \alpha}{s + L \sin \alpha} & \frac{-1}{s + L \sin \alpha} & \frac{-1}{s + L \sin \alpha} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

L'equació de mesura relaciona una determinada mesura angular $\theta_{i,k}$ (associada al reflector R_i) feta pel sensor làser a l'instant t_k amb l'estat en aquell mateix instant, Figura 5.2. La funció de mesura h^i (el superíndex i indica el reflector detectat) és doncs la següent:

$$z_k^i \equiv \theta_{i,k} = \underbrace{\arctan\left(\frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}\right)}_{h^i(\mathbf{y}_k)} - \psi_k + \delta\theta_m; \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.57)$$

on $\{x_i, y_i\}^T$ és la posició del reflector R_i en el sistema de referència SRT, i $\delta\theta_m$ és l'error en la mesura del sensor làser. Per tant, la variància R de l'error en l'observació del sensor làser –la qual es considera constant per a totes les observacions– és:

$$R = \sigma_{\theta_m}^2 \equiv E[\delta\theta_m^2], \quad (5.58)$$

i dependrà de les característiques tècniques del sensor que s'utilitzi. A l'Annex C s'estudia l'error en les mesures angulars del sensor làser que s'utilitza en l'experimentació. A partir de la funció (5.57), la matriu jacobiana ∇h_y^i necessària en la fase de correcció del EKF és:

$$\nabla h_y^i = \left[\frac{\partial h^i(\bar{\mathbf{y}}_k)}{\partial \mathbf{y}} \right], \quad (5.59)$$

$$\nabla h_y^i = \begin{bmatrix} \frac{(y_i - \bar{y}_k)}{(x_i - \bar{x}_k)^2 + (y_i - \bar{y}_k)^2} & \frac{(\bar{x}_k - x_i)}{(x_i - \bar{x}_k)^2 + (y_i - \bar{y}_k)^2} & -1 \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, 3.$$

A partir de les funcions de transició d'estat i d'observació definides anteriorment i de les seves matrius jacobianes i matrius de covariància d'error, es poden utilitzar les equacions (5.39)-(5.45) a cada instant de temps per trobar la millor estimació del posicionament i de la matriu de covariància de l'error associat a l'estimació: $\tilde{\mathbf{y}}_k$ i $\tilde{\mathbf{P}}_{y,k}$. En resum, aquestes són les equacions que s'utilitzen en cadascuna de les fases del EKF posicional:

- **Fase de predicció:**

$$\bar{\mathbf{y}}_k = f(\tilde{\mathbf{y}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0), \quad (5.60)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{y,k} = \nabla f_y \tilde{\mathbf{P}}_{y,k-1} \nabla f_y^T + \nabla f_w \mathbf{Q}_{k-1} \nabla f_w^T, \quad (5.61)$$

$$\bar{\theta}_{j,k} = h^j(\bar{\mathbf{y}}_k) \quad j = 1, 2 \text{ i } 3. \quad (5.62)$$

- **Fase d'actualització o correcció (el sensor làser realitza una mesura qualsevol $\theta_{i,k}$):**

$$\mathbf{S}_k = \nabla h_y^i \bar{\mathbf{P}}_{y,k} \nabla h_y^{iT} + \mathbf{R}, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}}_{y,k} \nabla h_y^{iT} \mathbf{S}_k^{-1}, \quad (5.64)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \bar{\mathbf{y}}_k + \mathbf{K}_k (\theta_{i,k} - \bar{\theta}_{i,k}), \quad (5.65)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{y,k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \nabla h_y^i) \bar{\mathbf{P}}_{y,k}. \quad (5.66)$$

Cal tenir en compte que la fase d'actualització no es dona a cada pas de l'algorisme perquè les mesures del sensor làser es realitzen de forma discontinua. Mentre no hi ha mesura del sensor làser s'itera la fase de predicció. El diagrama de blocs de la Figura 5.3 il·lustra el funcionament recursiu de les diferents etapes del filtre: predicció i actualització. Es parteix d'una predicció inicial del posicionament $\bar{\mathbf{y}}_0$ i de la matriu de covariància de l'error en la predicció $\bar{\mathbf{P}}_{y,0}$:

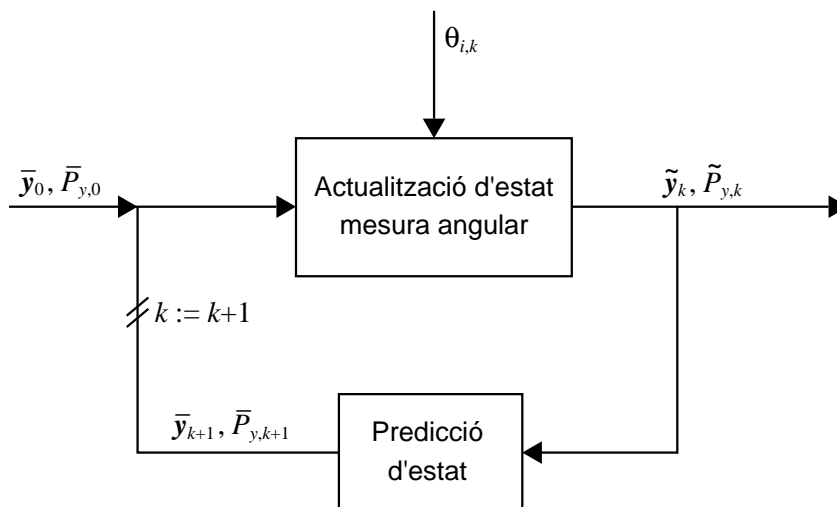


Figura 5.3 Esquema del funcionament recursiu del filtre de Kalman estàs per a estimar el posicionament del robot (EKF posicional)

5.3 Estimació dels angles relatius associats als reflectors per mitjà d'un EKF

En aquest apartat es planteja la solució alternativa –al mètode presentat en l'apartat 5.2– que es proposa en aquesta tesi per a resoldre el problema del posicionament dinàmic. La nova solució es basa en un canvi de l'espai d'estat del sistema dinàmic, en aquest cas s'utilitza com a vector d'estat del filtre el definit pels tres angles relatius associats al triplet de reflectors que s'utilitzen en la triangulació: $\mathbf{x}_k \equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$.

Per tant, en aquest cas l'algorisme d'estimació dinàmica per a sistemes no lineals s'utilitza per a estimar en cada instant de temps –és a dir, per a una configuració del robot concreta– el valor de l'angle, relatiu a l'eix longitudinal del robot, de la recta entre el centre del sensor làser i cadascun dels reflectors. La realització d'aquest canvi de vector d'estat del sistema aporta una sèrie d'avantatges:

- L'algorisme d'estimació dinàmica dels angles θ_i ($i = 1,2,3$) garanteix l'ús consistent dels mètodes de triangulació presentats al Capítol 4, perquè els tres angles *estimats* corresponen a la mateixa *configuració* del robot. A partir d'aquests angles i del seu error, es pot calcular l'estimació del posicionament del robot i de l'error comès en aquest càlcul per mitjà de les equacions introduïdes a l'apartat 4.1.
- En l'algorisme proposat, les mesures externes són directament cadascuna de les components del vector d'estat. Per tant, la funció h d'observació és *lineal*. Aquest fet fa que es redueixin els errors associats a l'ús de l'aproximació linealitzada de l'equació de mesura del EKF. Tal com es fa palès als treballs [Haupt *et al.* 1996, Kasdin i Haupt 1997, Kasdin 2000a i 2000b] sobre l'estimador òptim de dos passos, quan s'utilitza un EKF és prioritari evitar les no linealitats a l'equació de mesura per a obtenir un funcionament més precís de l'algorisme i per a evitar que aquest divergeixi. En la tesi de Huster (2003) també s'arriba a la mateixa conclusió a partir dels resultats de diferents simulacions.
- El fet que l'equació de mesura sigui lineal i senzilla, fa que la matriu jacobiana ∇h_x^i tingui un 1 a la component i (corresponent al reflector R_i detectat), i zeros a la resta de components. Aquest fet comporta una simplificació de les equacions de l'algorisme.
- Un altre aspecte avantatjós té a veure amb l'ús dels angles per a determinar el posicionament. En el mètode usual presentat a l'apartat anterior, les mesures angulars actuen independentment i cadascuna d'elles corregeix l'error en la *predicció* del posicionament només en la direcció perpendicular a la recta entre P i el reflector corresponent –un error en la mateixa direcció en què és vist el reflector no pot ser corregit–. En canvi, en el mètode que es proposa, en cada instant s'utilitza el conjunt dels tres angles que determinen l'estat del sistema per a calcular el posicionament per triangulació. Per tant, en aquest cas no es tenen direccions en les que no es pugui corregir un error de posicionament perquè els tres angles s'utilitzen conjuntament.
- Finalment, un últim avantatge de l'algorisme és que la simulació *contínua* de cada angle entre deteccions consecutives del reflector permet disposar de l'estimació de l'instant de rebuda de cada reflexió. D'aquesta manera és fàcil detectar si una reflexió no es rep, o bé si una reflexió rebuda és errònia (*outlier*).

5.3.1 Hodometria angular

L'algorisme d'estimació dinàmica dels angles relatius θ_i associats als reflectors es basa en la seva evolució temporal que estableix la funció f de transició d'estat del EKF. En aquest cas, el vector d'entrada \mathbf{u}_k també està associat a les mesures hodomètriques del robot mòbil –equació (5.50) en el cas del robot mòbil SPHERIK-3x3–. Així doncs, en el mètode proposat l'hodometria angular associada als angles θ_i substitueix l'hodometria posicional que s'utilitza habitualment.

Per a definir l'equació de transició d'estat del filtre, cal trobar quina és l'evolució temporal d'una variable angular qualsevol $\dot{\theta}_i$ en funció de la cinemàtica particular del robot. A la Figura 5.4, P representa el centre del sensor làser, v_L i v_T les components de la seva velocitat en les direccions longitudinal i transversal del robot respectivament, i $\dot{\psi}$ la velocitat de canvi d'orientació del robot.

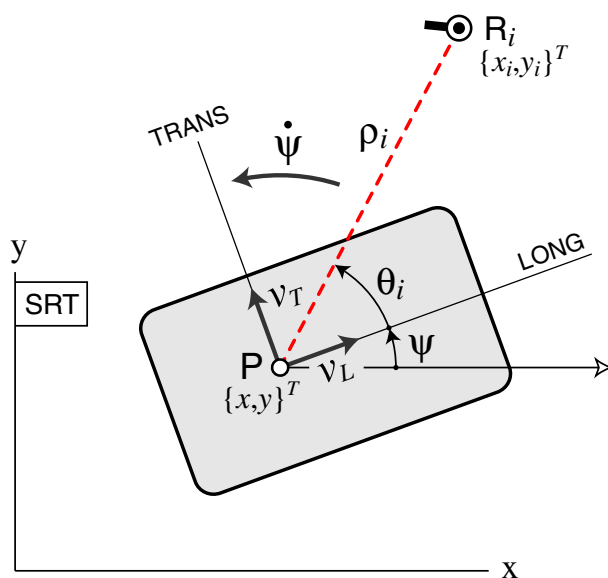


Figura 5.4 Variables cinemàtiques del robot v_L , v_T , $\dot{\psi}$ i variables geomètriques θ_i i ρ_i associades al reflector R_i ($i = 1,2,3$)

A partir d'aquestes variables l'evolució de l'angle absolut (respecte a l'eix x del SRT) de la recta entre P i el reflector R_i és:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi + \theta_i) = \frac{v_L \sin \theta_i - v_T \cos \theta_i}{\rho_i}; \quad \text{amb } \rho_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}. \quad (5.67)$$

I per tant, a partir de l'expressió anterior, l'equació de transició d'estat associada a l'angle θ_i ($i = 1,2,3$) és:

$$\theta_{i,k} = \theta_{i,k-1} + \Delta t \left(\frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{i,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{i,k-1}}{\rho_{i,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \right), \quad (5.68)$$

equació on les variables $v_{L,k-1}$, $v_{T,k-1}$ i $\dot{\psi}_{k-1}$ depenen de la cinemàtica particular del robot, i són determinables per mitjà de les mesures hodomètriques. Les equacions (3.1) i (3.2)

determinen aquestes variables per a la cinemàtica diferencial (en aquest cas $v_T = 0$, perquè P està sobre l'eix de les rodes motrius del robot); les equacions (3.11) i (3.12) per a la cinemàtica de tricicle; i l'equació matricial (3.27) per a la cinemàtica omnidireccional en què es basa el robot SPHERIK-3x3.

Quant a la variable $\rho_{i,k-1}$ —que representa la distància entre P i el reflector R_i a l' instant de temps t_{k-1} , Figura 5.4—, aquesta depèn de l'estat angular $\mathbf{x}_{k-1} \equiv \{\theta_{1,k-1}, \theta_{2,k-1}, \theta_{3,k-1}\}^T$. Ja que es determina a partir de la posició $\mathbf{p}_{k-1} \equiv \{x_{k-1}, y_{k-1}\}^T$, que es calcula a partir dels angles relatius que defineixen l'estat per mitjà de les equacions de la triangulació.

5.3.2 Descripció de l'algorisme

L'algorisme que es presenta, basat en el filtre de Kalman estès, té com a funció de transició d'estat f una funció vectorial de tres components —una per a cada angle θ_i — no lineal. Cada component es basa en l'equació (5.68) que s'ha justificat anteriorment:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}),$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{1,k} \\ \theta_{2,k} \\ \theta_{3,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{1,k-1} \\ \theta_{2,k-1} \\ \theta_{3,k-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{1,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{1,k-1}}{\rho_{1,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \\ \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{2,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{2,k-1}}{\rho_{2,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \\ \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{3,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{3,k-1}}{\rho_{3,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \end{Bmatrix}. \quad (5.69)$$

En l'equació anterior les variables $v_{L,k-1}$, $v_{T,k-1}$ i $\dot{\psi}_{k-1}$ depenen de la cinemàtica del robot mòbil i són funció de les mesures hodomètriques particulars de cada tipus de cinemàtica, que defineixen el vector d'entrada \mathbf{u} del filtre. En els apartats 5.3.3, 5.3.4 i 5.3.5 es definiran aquestes variables per a cadascuna de les cinemàtiques estudiades. El vector d'error en la transició d'estat \mathbf{w} està associat a l'error en les mesures de les variables hodomètriques que defineixen el vector \mathbf{u} .

Les matriu jacobiana de la funció de transició d'estat respecte a l'estat del sistema és en aquest cas:

$$\nabla f_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}, \text{ on} \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} = 1 + \Delta t \left[\cos \tilde{\theta}_{i,k-1} \left(\frac{v_{L,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} + \frac{v_{T,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_i} \right) + \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} \left(\frac{v_{T,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} - \frac{v_{L,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_i} \right) \right], \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} = - \left[\frac{\Delta t (v_{L,k-1} \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} - v_{T,k-1} \cos \tilde{\theta}_{i,k-1})}{\tilde{\rho}_{i,k-1}^2} \right] \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_j}; \quad i \neq j. \quad (5.72)$$

En les equacions anteriors, les derivades de la variable ρ_i es calculen segons l'expressió:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_j} = \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[(\tilde{x}_{k-1} - x_i) \frac{\partial x(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \theta_j} + (\tilde{y}_{k-1} - y_i) \frac{\partial y(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \theta_j} \right]; \quad i = j \text{ o } i \neq j. \quad (5.73)$$

Les derivades de les variables de posició $\{x, y\}^T$ respecte a cadascun dels angles θ_1, θ_2 i θ_3 –a partir de la relació establerta per les equacions de la triangulació, Capítol 4– es poden trobar a l'annex A: equacions (A.2)-(A.8).

La matriu jacobiana de la funció de transició f respecte a l'error en les mesures hodomètriques \mathbf{w} dependrà de les mesures que s'utilitzin en cada cinemàtica. Sigui $\mathbf{u}_k \equiv \{u_{1,k}, \dots, u_{N,k}\}^T$ un vector genèric de mesures hodomètriques ($N=2$ en el cas de cinemàtica diferencial i de tricicle, i $N=3$ en el cas de la cinemàtica omnidireccional amb rodes de lliscament direccional) i $\mathbf{w}_k \equiv \{w_{1,k}, \dots, w_{N,k}\}^T$; $w_{j,k} = \delta u_{j,k}$ ($j=1, \dots, N$) el vector d'error associat a aquestes mesures, aleshores la matriu jacobiana es calcularà segons:

$$\nabla f_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_N} \\ \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_N} \\ \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_N} \end{bmatrix}, \quad \text{on} \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_j} = \frac{\Delta t}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[\frac{\partial v_L}{\partial w_j} \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} - \frac{\partial v_T}{\partial w_j} \cos \tilde{\theta}_{i,k-1} \right] - \Delta t \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial w_j}; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.75)$$

Les derivades de les velocitats v_L i v_T , i de la velocitat angular $\dot{\psi}$ respecte als errors en les mesures hodomètriques \mathbf{w}_k s'explicitaran en els apartats 5.3.3, 5.3.4 i 5.3.5 per a cadascuna de les cinemàtiques que es consideren a la tesi.

L'equació de mesura relaciona una determinada mesura angular $\theta_{i,k}$ (associada al reflector R_i) realitzada pel sensor làser a l'instant t_k amb l'estat en aquell mateix instant. En aquest cas quan es realitza una mesura angular, aquesta es relaciona directament amb la component corresponent del vector d'estat \mathbf{x}_k . La funció d'observació h^i (el superíndex i indica el reflector detectat) és doncs la següent:

$$z_k^i \equiv \theta_{i,k} = \underbrace{\theta_{i,k}}_{h^i(\mathbf{x}_k)} + \delta \theta_m; \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.76)$$

on $\delta\theta_m$ és l'error en la mesura del sensor làser, i la variància R de l'error en l'observació del sensor làser és la mateixa que s'ha definit a l'expressió (5.58) i dependrà de les característiques tècniques del sensor utilitzat (Annex C). A partir de la funció (5.76), la matriu jacobiana ∇h_x^i necessària en la fase de correcció del filtratge de Kalman està formada per tot de zeros i un 1 a la component i :

$$\nabla h_x^1 = [1 \ 0 \ 0]; \quad \nabla h_x^2 = [0 \ 1 \ 0]; \quad \nabla h_x^3 = [0 \ 0 \ 1]. \quad (5.77)$$

A partir de les funcions de transició d'estat i d'observació definides anteriorment, i de les seves matrius jacobianes i matrius de covariància d'error, es poden utilitzar les equacions (5.39)-(5.45) a cada instant de temps per a trobar la millor estimació de l'estat angular i la covariància de l'error associat a l'estimació: $\tilde{\mathbf{x}}_k$ i $\tilde{P}_{x,k}$.

En resum, aquestes són les equacions que s'utilitzen en cada fase d'aquesta aplicació del EKF per a estimar l'estat format pels angles relatius al robot de les rectes visuals a cadascun dels reflectors (EKF angular):

- **Fase de predicció:**

$$\bar{\mathbf{x}}_k = f(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0), \quad (5.78)$$

$$\bar{P}_{x,k} = \nabla f_x \tilde{P}_{x,k-1} \nabla f_x^T + \nabla f_w Q_{k-1} \nabla f_w^T, \quad (5.79)$$

$$\bar{\theta}_{j,k} = \bar{\mathbf{x}}_k|_j \quad j = 1, 2 \text{ i } 3. \quad (5.80)$$

- **Fase d'actualització o correcció (el sensor làser realitza una mesura qualsevol $\theta_{i,k}$):**

$$S_k = \nabla h_x^i \bar{P}_{x,k} \nabla h_x^{iT} + R = \bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2 + R, \quad (5.81)$$

$$K_k = \bar{P}_{x,k} \nabla h_x^{iT} S_k^{-1} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2 + R} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{\theta_1,k} \\ \bar{\sigma}_{\theta_2,k} \\ \bar{\sigma}_{\theta_3,k} \end{Bmatrix}, \quad (5.82)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + K_k (\theta_{i,k} - \bar{\theta}_{i,k}), \quad (5.83)$$

$$\tilde{P}_{x,k} = (I - K_k \nabla h_x^i) \bar{P}_{x,k}. \quad (5.84)$$

A partir de l'equació (5.82) s'observa com la fila i (on i és l'índex de l'angle θ_i mesurat a l'instant t_k) de la matriu de guany del filtre K_k té com a component (s'obvia el subíndex k):

$$K|_i = \frac{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2}{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2 + R}. \quad (5.85)$$

Aleshores, les equacions (5.83) i (5.84) condueixen al següent resultat pel que fa a l'estimació d'aquest angle i a la variància d'aquesta estimació:

$$\tilde{\theta}_i = \bar{\theta}_i + \frac{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2}{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2 + R} (\theta_i - \bar{\theta}_i), \quad (5.86)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta_i}^2 = \bar{\sigma}_{\theta_i}^2 \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2}{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2 + R} \right). \quad (5.87)$$

Les expressions (5.86) i (5.87) posen de manifest que si l'error en les observacions del sensor és nul ($R = 0$), aleshores l'estimació angular $\tilde{\theta}_i$ és igual a la mesura realitzada θ_i i la variància de l'error en aquesta estimació és nul:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \tilde{\theta}_i = \theta_i; \quad \lim_{R \rightarrow 0} \tilde{\sigma}_{\theta_i}^2 = 0. \quad (5.88)$$

Pel que fa a l'actualització d'un angle no mesurat directament (θ_j ; $j \neq i$), a partir de les equacions (5.83) i (5.84) s'arriba a les següents expressions pel que fa a la seva estimació i a la variància de l'error:

$$\tilde{\theta}_j = \bar{\theta}_j + \frac{\bar{\sigma}_{\theta_i \theta_j}}{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2 + R} (\theta_i - \bar{\theta}_i), \quad (5.89)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta_j}^2 = \bar{\sigma}_{\theta_j}^2 - \frac{(\bar{\sigma}_{\theta_i \theta_j})^2}{\bar{\sigma}_{\theta_i}^2 + R}. \quad (5.90)$$

Un cop es coneix l'estimació de l'estat angular en un instant qualsevol t_k ($\tilde{\mathbf{x}}_k$) així com la matriu de covariància de l'error en l'estimació ($\tilde{P}_{x,k}$), l'estudi estadístic de la propagació de l'error angular en el càlcul del posicionament per triangulació –exposat a l'apartat 4.1.4 del Capítol 4– permet determinar l'estimació del posicionament $\tilde{\mathbf{y}}_k$ i la matriu de covariància de l'error $\tilde{P}_{y,k}$ en funció de $\tilde{\mathbf{x}}_k$ i $\tilde{P}_{x,k}$ per mitjà de les expressions:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k \equiv \{ \tilde{\mathbf{p}}_k, \tilde{\psi}_k \}^T \simeq \{ \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}_k), \psi(\tilde{\mathbf{x}}_k) \}^T, \quad (5.91)$$

$$\tilde{P}_{y,k} \simeq \nabla \mathbf{y}_x \tilde{P}_{x,k} \nabla \mathbf{y}_x^T; \quad \nabla \mathbf{y}_x \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\tilde{\mathbf{x}}_k}. \quad (5.92)$$

Les funcions $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ i $\psi(\mathbf{x})$ de l'equació (5.91), són les de càlcul de posició i d'orientació mitjançant triangulació angular i es troben definides al Capítol 4, equacions (4.20) i (4.39). Com s'ha justificat a l'apartat 4.1.4 del mateix capítol, a l'interior de la circumferència crítica que passa pels tres reflectors utilitzats, i no massa a prop d'aquesta, l'error comès en l'aproximació lineal de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ i $\psi(\mathbf{x})$ és negligible enfront la magnitud de l'error de posicionament. Per tant, en aquestes condicions són vàlides les expressions (5.91) i (5.92) basades en aquesta aproximació de primer ordre.

El diagrama de blocs de la Figura 5.5 il·lustra el funcionament del mètode d'estimació dinàmic del posicionament proposat que es basa en l'ús del vector d'estat angular \mathbf{x}_k en l'algorisme de filtrat de Kalman. El mètode parteix de la predicció inicial de l'estat angular $\bar{\mathbf{x}}_0$ i de la matriu de covariància $\bar{P}_{x,0}$ i consta de dos passos. Un primer pas d'estimació dinàmica basat en el EKF –amb les seves etapes de predicció i actualització–, i un segon

pas on s'apliquen les equacions de la triangulació angular per a generar l'estimació del posicionament $\tilde{\mathbf{y}}_k$ i la matriu de covariància de l'error en l'estimació $\tilde{\mathbf{P}}_{y,k}$.

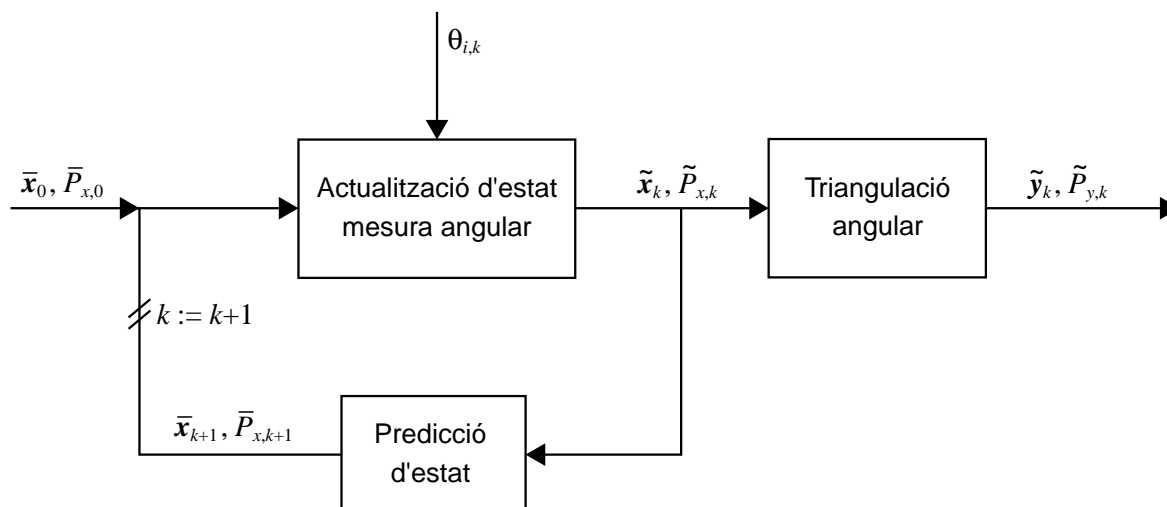


Figura 5.5 Esquema del funcionament del mètode d'estimació del posicionament proposat

A continuació, en els apartats següents es dona la formulació necessària per a aplicar aquest mètode a les cinemàtiques de robot mòbil considerades: diferencial, de tricicle i omnidireccional amb rodes esfèriques de lliscament direccional.

5.3.3 Formulació del mètode per a la cinemàtica diferencial

Tal com s'ha vist a l'apartat 3.1, un robot mòbil de cinemàtica diferencial té 2 graus de llibertat que es poden associar als girs independents ω_1 i ω_2 de les seves rodes, Figura 5.6. En aquest cas es considera que el centre P del sensor làser es troba al punt mig entre els centres de les rodes motrius.

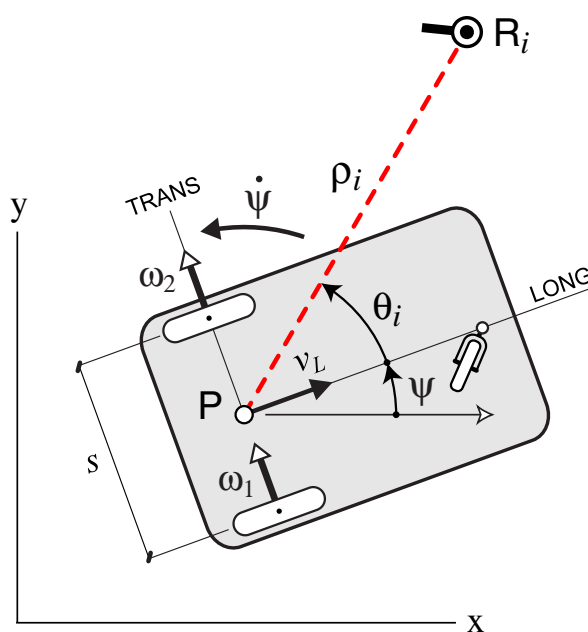


Figura 5.6 Variables geomètriques i cinemàtiques considerades en la cinemàtica diferencial

Per a aquesta cinemàtica, es defineix el següent vector d'entrada \mathbf{u}_k definit per la velocitat del centre de cadascuna de les rodes del robot:

$$\mathbf{u}_k = \{v_{1,k}, v_{2,k}\}^T, \quad (5.93)$$

on $v_i \equiv r\omega_i$, essent r el radi de les rodes. Cadascuna d'aquestes mesures tindrà un cert error δv_i acumulat com a conseqüència de diferents fonts d'error no sistemàtic –els errors sistemàtics poden ser prèviament calibrats–. L'error associat a aquestes variables es modelitza com a gaussià, ja que prové de diferents fonts d'error, i es considera que aquests no estan correlats entre ells. El vector d'error \mathbf{w} associat al procés i la seva matriu de covariància són:

$$\mathbf{w}_k = \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}\}^T, \quad (5.94)$$

$$Q_k \equiv E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{v_{1,k}}^2 & \\ & \sigma_{v_{2,k}}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.95)$$

Per al càlcul de la variància associada a la velocitat del centre de la roda i $\sigma_{v_{i,k}}^2$ es pren la hipòtesi que la variable $\Delta d_{i,k} \equiv v_{i,k} \Delta t$ –distància recorreguda pel centre de la roda durant l'interval de temps Δt – té una variància que creix proporcionalment amb la distància recorreguda [Chong i Kleeman 1997, Arras *et al.* 2001, Martinelli *et al.* 2006], equació (5.53).

A partir de la definició anterior dels vectors \mathbf{u} i \mathbf{w} , les variables v_L i $\dot{\psi}$ –que es necessiten per a aplicar l'equació (5.69) de l'algorisme proposat– en funció del vector d'entrada \mathbf{u}_k es calculen segons:

$$v_{L,k} = \frac{v_{1,k} + v_{2,k}}{2}, \quad (5.96)$$

$$\dot{\psi}_k = \frac{v_{1,k} - v_{2,k}}{s}. \quad (5.97)$$

Noteu que en aquest cas $v_T = 0$. A partir d'aquesta definició, les components de la matriu jacobiana de derivades parcials de la funció f de transició d'estat respecte al vector d'error considerat –tenint en compte l'equació (5.75)– seran:

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_1} = \Delta t \left(\frac{\sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2\tilde{\rho}_{i,k-1}} - \frac{1}{s} \right); \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.98)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_2} = \Delta t \left(\frac{\sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2\tilde{\rho}_{i,k-1}} + \frac{1}{s} \right); \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.99)$$

5.3.4 Formulació del mètode per a la cinemàtica de tricicle

La cinemàtica de tricicle s'ha definit a l'apartat 3.2. Aquesta cinemàtica també té 2 graus de llibertat que són governats per la roda motriu i directriu davantera –les dos rodes posteriors coaxials són passives–. Totes les expressions cinemàtiques d'aquest tipus de vehicle es poden posar com a funció de l'angle φ de direcció de la roda i de la velocitat del seu centre v , Figura 5.7. De fet, aquestes dues variables defineixen el vector d'entrada \mathbf{u}_k del EKF que es basa en les mesures hodomètriques:

$$\mathbf{u}_k = \{v_k, \varphi_k\}^T. \quad (5.100)$$

Aquestes variables són mesurables a partir d'encoders muntats sobre l'eix de tracció i l'eix de direcció respectivament. El vector d'error \mathbf{w}_k s'associa als errors en les mesures d'aquests sensors, modelitzats com a gaussians i independents. A continuació es defineix aquest vector d'error i la seva matriu de covariància:

$$\mathbf{w}_k = \{\delta v_k, \delta \varphi_k\}^T, \quad (5.101)$$

$$Q \equiv E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{v,k}^2 & \\ & \sigma_{\varphi,k}^2 \end{bmatrix}, \quad (5.102)$$

on per a la variància de l'error de mesura de la velocitat σ_v^2 s'utilitza la modelització dels treballs [Chong i Kleeman 1997, Arras *et al.* 2001, Martinelli *et al.* 2006] en els que es fa la hipòtesi que la distància recorreguda pel centre de la roda $\Delta d_k \equiv v_k \Delta t$ té una variància que creix proporcionalment amb la distància recorreguda, equació (5.53).

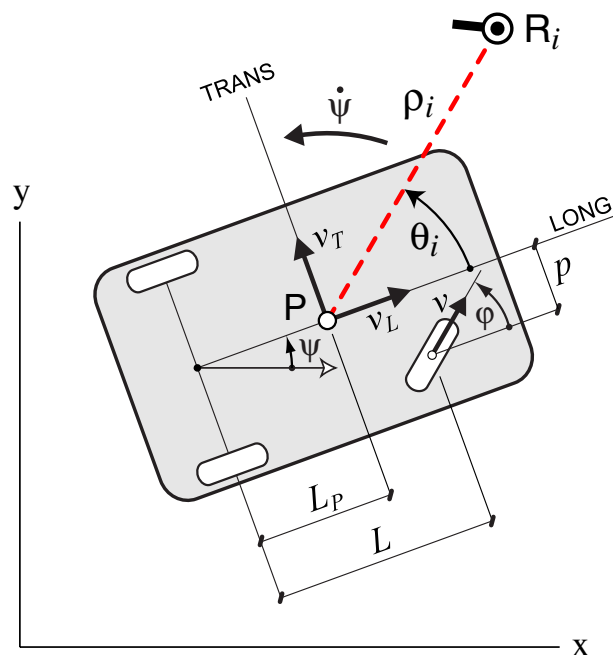


Figura 5.7 Variables geomètriques i cinemàtiques considerades en la cinemàtica de tricicle

Pel que fa a l'error en la mesura de l'angle φ de direcció de la roda, Martinelli *et al.* (2006) modelitzen la seva variància segons l'equació:

$$\sigma_{\varphi,k}^2 = k_{\varphi} |\Delta d_k| = k_{\varphi} |v_k| \Delta t, \quad (5.103)$$

on en l'equació anterior la constant k_{φ} dependrà bàsicament de la resolució de l'encoder utilitzat, així com d'angles de deriva que puguin aparèixer dependent de la flexibilitat de la roda que s'utilitzi en cada cas i de les condicions del terreny.

A continuació es donen les expressions de les variables v_L , v_T i $\dot{\psi}$, que es necessiten per aplicar l'equació (5.69) de l'algorisme presentat, en funció del vector d'entrada \mathbf{u}_k considerat:

$$\{\tilde{\mathbf{v}}_k(\mathbf{P})\} = \begin{Bmatrix} v_{L,k} \\ v_{T,k} \end{Bmatrix} = \frac{v_k}{L} \begin{Bmatrix} L \cos \varphi_k - p \sin \varphi_k \\ L_P \sin \varphi_k \end{Bmatrix}. \quad (5.104)$$

$$\dot{\psi}_k = \frac{v_k}{L} \sin \varphi_k. \quad (5.105)$$

A partir d'aquesta definició, les components de la matriu jacobiana de derivades parcials de la funció f de transició d'estat respecte al vector d'error considerat –tenint en compte l'equació (5.75)– seran:

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_v} = \frac{\Delta t}{L} \left[\frac{L \cos \varphi_{k-1} \sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} - \sin \varphi_{k-1} \left(\frac{p \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} + L_P \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} + 1 \right) \right], \quad (5.106)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_{\varphi}} = \frac{-v_{k-1} \Delta t}{L} \left[\frac{L \sin \varphi_{k-1} \sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} + \cos \varphi_{k-1} \left(\frac{p \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} + L_P \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} + 1 \right) \right], \quad (5.107)$$

ambdues per a $i = 1, 2, 3$.

5.3.5 Formulació del mètode per a la cinemàtica omnidireccional amb rodes de corrons esfèrics

Finalment, en aquest apartat es donen les expressions necessàries per a aplicar l'algorisme d'estimació dinàmica de l'estat angular a vehicles amb cinemàtica omnidireccional basada en rodes de corrons esfèrics, en concret per a la cinemàtica del robot mòbil SPHERIK-3x3, Figura 5.2.

La definició del vector d'entrada \mathbf{u}_k i del vector d'error \mathbf{w}_k és la mateixa que s'ha definit a l'apartat 5.2 on s'aplicava el EKF posicional, equacions (5.50) i (5.51). La matriu de covariància \mathbf{Q}_k de l'error en el vector d'entrada es defineix a (5.52).

Les expressions (5.48) i (5.49) relacionen les variables v_L , v_T i $\dot{\psi}$ amb el vector d'entrada del filtre basat en les mesures hodomètriques. A partir d'aquesta definició, les components

de la matriu jacobiana de derivades parcials de la funció f de transició d'estat respecte al vector d'error \mathbf{w}_k —segons l'equació (5.75)— seran:

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_1} = \frac{\Delta t}{s + L \sin \alpha} \left[\frac{s \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} + \sin \alpha \right]; \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.108)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_2} = \frac{\Delta t}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[\frac{\sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2 \cos \alpha} - \frac{L \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2(s + L \sin \alpha)} \right] + \frac{\Delta t}{2(s + L \sin \alpha)}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.109)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_3} = \frac{\Delta t}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[-\frac{\sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2 \cos \alpha} - \frac{L \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2(s + L \sin \alpha)} \right] + \frac{\Delta t}{2(s + L \sin \alpha)}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.110)$$

5.3.6 Validesa de l'aproximació lineal de l'equació de transició d'estat del EKF angular

En aquest apartat 5.3 s'ha presentat un mètode alternatiu per a l'estimació dinàmica del posicionament d'un robot mòbil, si es realitzen mesures angulars relatives al robot de punts de l'entorn de posició coneguda—reflectors en el cas d'un sistema de posicionament làser—. Aquest mètode presenta com a característica principal la utilització d'un EKF que estima en cada instant de temps el valor dels angles relatius associats a cadascun dels reflectors, encara que no se'n realitzi una mesura directa. D'aquesta manera es garanteix l'ús consistent de les equacions de la triangulació angular.

Com s'ha comentat en apartats anteriors la utilització d'aquest vector d'estat té l'avantatge que les seves components corresponen directament a les mesures del sensor làser, i per tant l'equació de mesura del EKF és lineal i senzilla. Per tant, no cal linealitzar aquesta equació en l'aplicació de l'algorisme i, en conseqüència, es redueix l'error en el càlcul de la matriu de guany del filtre K_k , equació (5.43). Aquest fet millora la precisió en l'estimació del filtre respecte a la utilització d'altres vectors d'estat relacionats no linealment amb les mesures, amb els quals es pot tenir problemes de divergència del EKF [Huster 2003].

Tanmateix, l'equació de transició d'estat del EKF amb vector d'estat $\mathbf{x}_k \equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$ és no lineal respecte a l'estat i s'ha de comprovar la validesa de la seva aproximació lineal dins l'interval de temps $\Delta t = t_k - t_{k-1}$. L'equació, que s'ha introduït a l'apartat 5.3.2, és la següent:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}),$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{1,k} \\ \theta_{2,k} \\ \theta_{3,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{1,k-1} \\ \theta_{2,k-1} \\ \theta_{3,k-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{1,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{1,k-1}}{\rho_{1,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \\ \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{2,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{2,k-1}}{\rho_{2,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \\ \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{3,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{3,k-1}}{\rho_{3,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \end{Bmatrix}. \quad (5.111)$$

Per a comprovar la validesa de l'aproximació lineal de l'equació dins l'interval de temps Δt s'han fet simulacions de Monte Carlo, amb $N = 1000$ valors de les variables d'estat angular a l'instant t_{k-1} , per a un robot mòbil en les configuracions a), b) i c) de la Figura 5.8. En les tres configuracions l'orientació del robot és $\psi = 0$, i els reflectors es troben a les posicions: $\vec{r}(R_1) = \{5, 10\}^T$ m, $\vec{r}(R_2) = \{0, 0\}^T$ m, i $\vec{r}(R_3) = \{10, 0\}^T$ m en el SRT.

S'han estudiat aquestes configuracions per veure si el fet que el robot estigui prop de la *circumferència crítica* que passa pels tres reflectors, on el posicionament per triangulació és indeterminat, té influència en la validesa de l'aproximació lineal de l'equació.

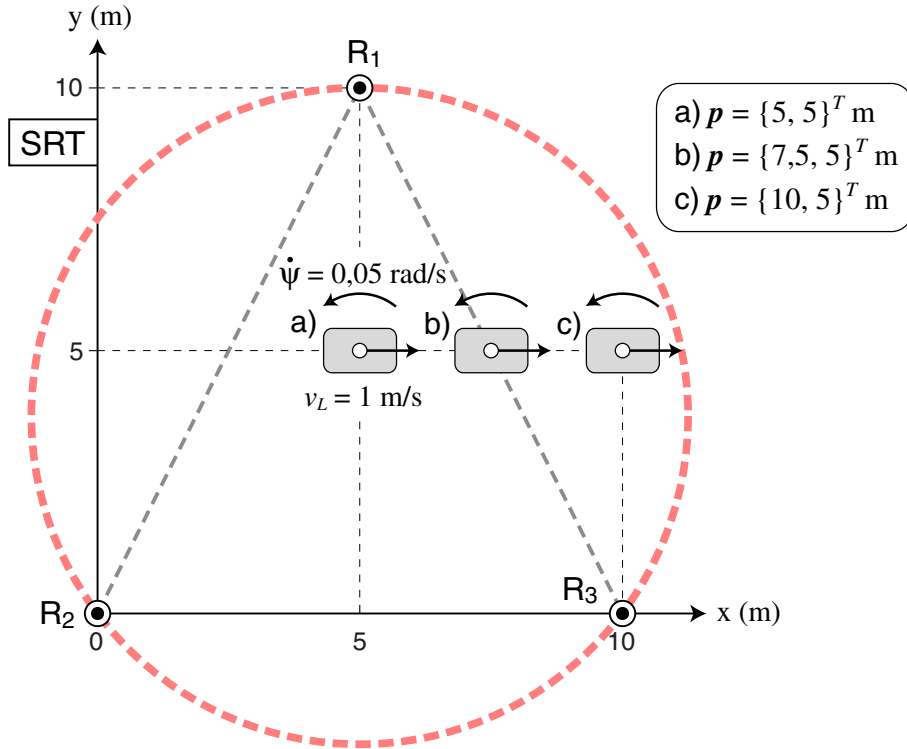


Figura 5.8 Configuracions i velocitats generalitzades del robot que es consideren en les simulacions de Monte Carlo

Els $N = 1000$ valors dels angles $\theta_{i,k-1}$ ($i = 1, 2, 3$) a l'instant t_{k-1} es generen de manera que segueixen una distribució de probabilitat normal centrada en el seu valor estimat $\tilde{\theta}_{i,k-1}$, determinable a partir de la configuració del robot i de la posició dels reflectors, amb la següent matriu de covariància:

$$\tilde{P}_{x,k-1} \equiv E \left[(\mathbf{x}_{k-1} - \tilde{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \tilde{\mathbf{x}}_{k-1})^T \right] = \sigma_\theta^2 I, \quad \text{amb } \sigma_\theta = 1 \text{ mrad}. \quad (5.112)$$

A partir d'aquests valors angulars generats, i tenint en compte que la velocitat del punt P del robot i la seva velocitat angular són per a totes les configuracions estudiades:

$$\{\vec{v}_{k-1}(P)\} = \begin{Bmatrix} v_{L,k-1} \\ v_{T,k-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ms}^{-1}; \quad \dot{\psi}_{k-1} = 0,05 \text{ rad s}^{-1}, \quad (5.113)$$

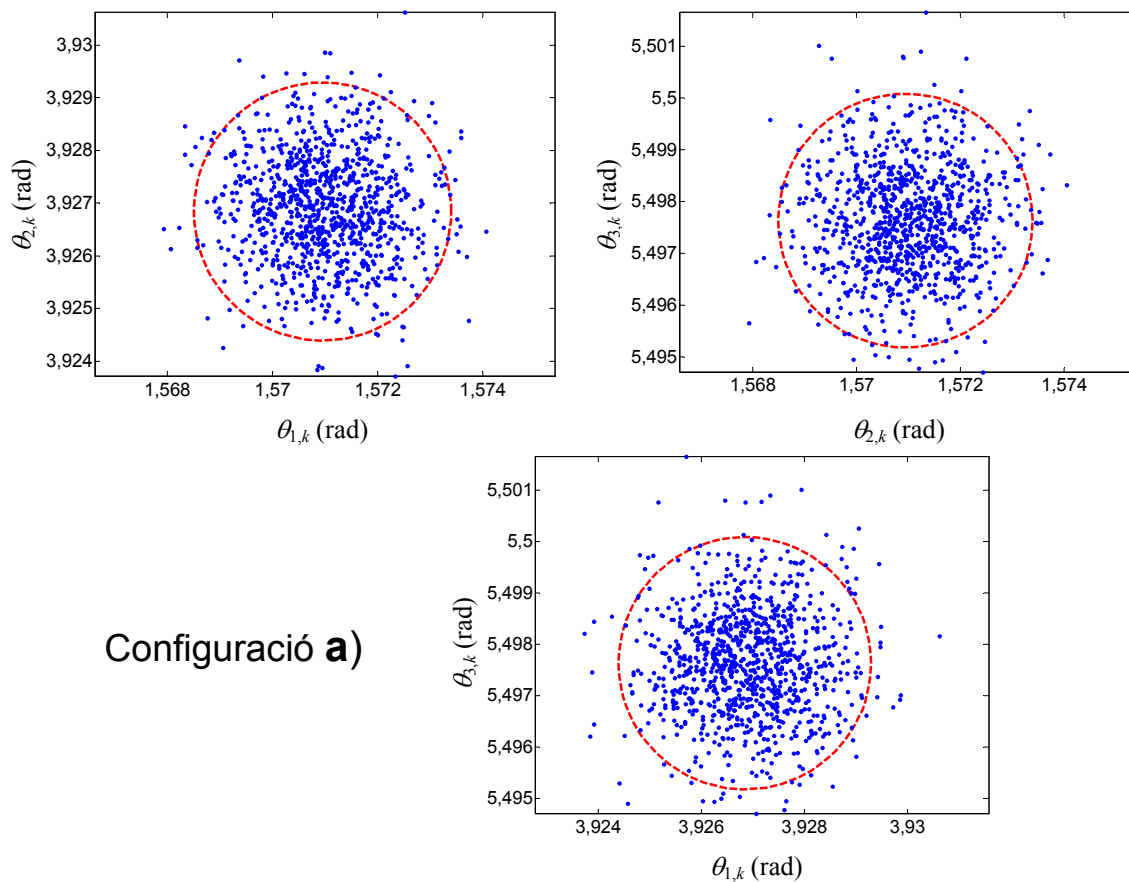
es calculen els $N = 1000$ valors de *predicció* del vector d'estat angular a l'instant t_k , $\bar{\mathbf{x}}_k \equiv \{\bar{\theta}_{1,k}, \bar{\theta}_{2,k}, \bar{\theta}_{3,k}\}^T$, mitjançant l'equació de transició d'estat (5.111). En aplicar l'equació s'utilitza $\Delta t = 0,001$ s, interval de temps utilitzat en l'experimentació real i en les simulacions informàtiques.

Per altra banda, per a comprovar la validesa es calcula la matriu de covariància obtinguda mitjançant la linealització de l'equació de transició (5.79). En aquest cas, com que es vol validar la hipòtesi de linealitat de l'equació respecte a l'estat es considera que l'error en les mesures hodomètriques és nul ($Q_k = [0]$), i per tant l'equació anterior resulta:

$$\bar{P}_{x,k} = \nabla f_x \tilde{P}_{x,k-1} \nabla f_x^T, \quad (5.114)$$

on ∇f_x es calcula mitjançant les expressions (5.70)-(5.73). En els gràfics de la Figura 5.9 es representen els $N = 1000$ valors calculats de l'estat angular previst $\bar{\mathbf{x}}_k$ per a cadascuna de les configuracions a), b) i c) del robot (Figura 5.8). S'han realitzat tres representacions planes d'eixos $\{\theta_i, \theta_j\}$ ($i \neq j$) enlloc d'una única representació tridimensional per a facilitar la visualització de la dispersió de les dades.

Als gràfics també hi apareixen superposats els *el·lipsoides d'error* associats a la matriu de covariància calculada mitjançant l'equació (5.114), a partir de la linealització de l'equació de transició d'estat. Els el·lipsoides envolten els punts del pla $\theta_i - \theta_j$ amb una probabilitat de 0,95 de contenir l'estat angular real del sistema.



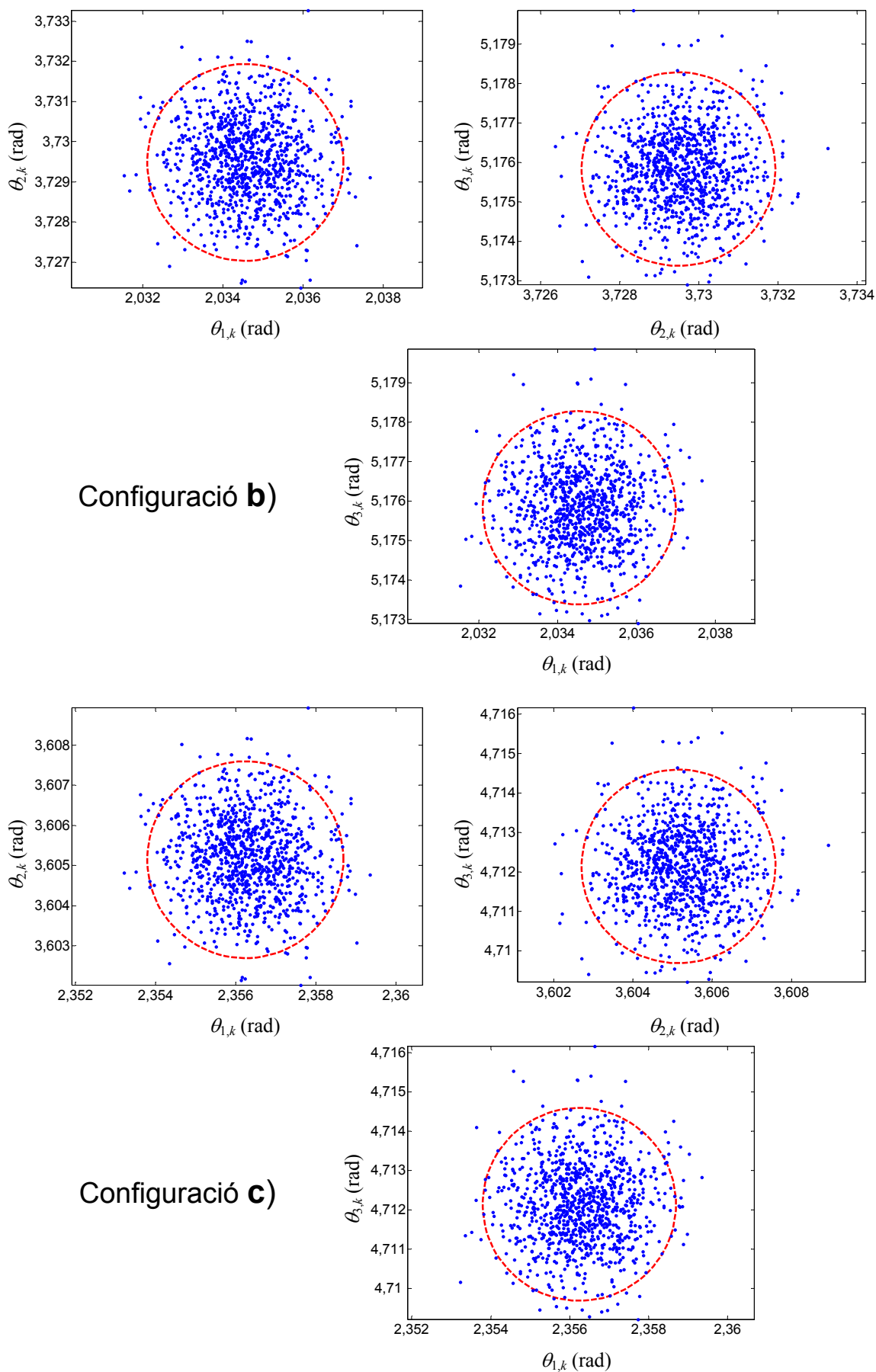


Figura 5.9 Simulacions de Monte Carlo de la propagació de l'error en l'estat angular

S'observa que la dispersió dels punts calculats mitjançant les simulacions de Monte Carlo s'ajusten als el·lipsoides d'error determinats mitjançant la propagació de primer ordre de l'error en l'estat angular. Això permet concloure que en un pas Δt del filtre de Kalman estàès es pot acceptar l'aproximació lineal de la funció de transició d'estat. S'observa també que la hipòtesi segueix sent vàlida quan el robot s'apropa a la circumferència que passa pels tres reflectors, ja que per a qualsevol configuració del robot –a), b) o c) de la Figura 5.8– la dispersió de punts s'ajusta correctament a l'el·lipsoide d'error corresponent.

Cal tenir en compte que la simulació s'ha fet per a una desviació estàndard $\sigma_\theta = 1\text{mrad}$, superior a la que s'assoleix en *condicions dinàmiques* –robot en moviment– mitjançant l'algorisme d'estimació presentat i el sistema làser que s'estudia. Per a valors més petits d'aquesta desviació estàndard, l'error comès en la linealització encara és més petit.

Aquest estudi ha estat motivat pel treball d'Andrade-Cetto *et al.* (2005) on es realitza una simulació d'aquest tipus per a verificar si és vàlida la hipòtesi de linealitat de l'equació de transició d'estat del sistema entre instants successius. Els autors observen que en el seu sistema, la dispersió dels punts calculats mitjançant la simulació de Monte Carlo no s'ajusta a l'el·lipsoide d'error. Els autors conclouen que l'ús d'un EKF no és vàlid per a la seva aplicació per causa de l'error que es comet en les aproximacions de primer ordre.

5.4 Integració de les mesures angulars en l'etapa d'actualització del EKF. Comparació dels dos mètodes

En aquest apartat es comparen els dos mètodes presentats per a l'estimació dinàmica del posicionament si es tenen mesures externes angulars de punts coneguts de l'entorn: l'usual basat en el *EKF posicional* d'estat $\mathbf{y}_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$, i l'alternatiu que es proposa en aquesta tesi. Aquest últim consta de dos passos, un primer basat en un *EKF angular* per a estimar dinàmicament l'evolució dels angles θ_i –s'utilitza com a vector d'estat $\mathbf{x}_k \equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$ – i un segon pas on s'utilitzen les equacions de la *triangulació angular* per a determinar el posicionament \mathbf{y}_k .

En el EKF posicional, quan es realitza una mesura angular a l'instant t_k ($\theta_{i,k}$), aquesta es compara amb la predicció de la mesura $\bar{\theta}_{i,k}$ que es calcula a partir de la predicció hodomètrica de l'estat $\bar{\mathbf{y}}_k \equiv \{\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{\psi}_k\}^T$ en aquell instant segons:

$$\bar{\theta}_{i,k} = h^i(\bar{\mathbf{y}}_k) = \arctan\left(\frac{y_i - \bar{y}_k}{x_i - \bar{x}_k}\right) - \bar{\psi}_k. \quad (5.115)$$

A partir de la predicció $\bar{\theta}_{i,k}$ i de la mesura realitzada $\theta_{i,k}$, la predicció de l'estat es corregeix mitjançant l'expressió següent –combinació de les equacions (5.63)-(5.65)–:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \bar{\mathbf{y}}_k + \underbrace{\bar{P}_{y,k} \nabla h_y^{iT} (\nabla h_y^i \bar{P}_{y,k} \nabla h_y^{iT} + R)^{-1}}_{K_k} (\theta_{i,k} - \bar{\theta}_{i,k}), \quad (5.116)$$

on K_k és la matriu de guany del filtre. Aquesta matriu, com ja s'ha comentat en apartats anteriors, pondera la predicció hodomètrica de l'estat i la informació que aporta la mesura realitzada –en funció de l'error en la predicció hodomètrica $\bar{P}_{y,k}$ i en la mesura R – per a

generar una estimació de l'estat que minimitzi el seu error quadràtic. Si s'analitza el cas ideal que el sensor extern fos infinitament precís ($R = 0$), aleshores operant l'equació (5.116) s'arriba al següent resultat:

$$\nabla h_y^i(\tilde{\mathbf{y}}_k - \bar{\mathbf{y}}_k) = \theta_{i,k} - \bar{\theta}_{i,k}. \quad (5.117)$$

El resultat anterior és l'aproximació de primer ordre per sèries de Taylor de l'equació de mesura del EKF al voltant de la predicció de l'estat:

$$\theta_{i,k} = \bar{\theta}_{i,k} + \left. \frac{\partial h^i}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\bar{\mathbf{y}}_k} (\tilde{\mathbf{y}}_k - \bar{\mathbf{y}}_k) + O^2, \quad (5.118)$$

i per tant, l'equació d'estimació del posicionament (5.116) només conduirà a resultats acceptables en el cas que els termes d'ordre quadràtic i superiors de l'equació anterior siguin negligibles. O dit d'una altra manera, si és vàlida la hipòtesi de linealitat de l'equació de mesura respecte a l'estat dins l'interval de temps $\Delta t = t_k - t_{k-1}$.

En la utilització d'aquesta versió del filtre de Kalman s'ha de tenir en compte que si l'error en la predicció hodomètrica del posicionament $\bar{\mathbf{y}}_k$ és gran, els termes d'ordre quadràtic o superior de l'equació (5.118) poden no ser negligibles i fer més imprecisa l'etapa d'actualització del filtre –ja que creix l'error associat a l'aproximació de primer ordre–. Quan això passa pot produir-se la divergència de l'algorisme de Kalman.

La Figura 5.10 esquematitza aquesta actualització de l'estat considerant que la mesura $\theta_{i,k}$ del sensor làser no conté error. A la figura s'indica amb el superíndex r el posicionament real $\mathbf{y}_k^r \equiv \{x_k^r, y_k^r, \psi_k^r\}^T$ del robot, i $\tilde{\mathbf{y}}_k \equiv \{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{\psi}_k\}^T$ és l'estimació del posicionament després de l'etapa d'actualització d'aquest EKF.

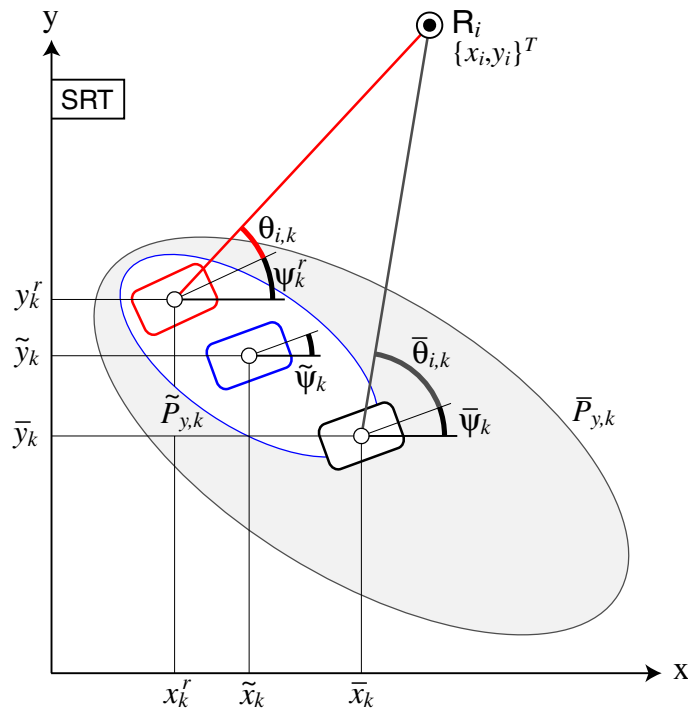


Figura 5.10 Etapa d'actualització del EKF d'estat posicional

Com s'observa a la figura el posicionament estimat després de l'actualització de la mesura no té perquè coincidir amb el real, com a conseqüència de l'error en la linealització de l'equació de mesura. Aquesta diferència serà més important si l'error en la predicció del posicionament és gran; és a dir, si els termes de la matriu de covariància $\bar{P}_{y,k}$ –que es representa a la figura per mitjà de l'el·lipse grisa– són importants. En aquest cas ($R = 0$) la matriu de covariància de l'estimació de l'estat $\tilde{P}_{y,k}$ –el·lipse blanca– es calcularia segons:

$$\tilde{P}_{y,k} = \left(I - \underbrace{\bar{P}_{y,k} \nabla h_y^i T (\nabla h_y^i \bar{P}_{y,k} \nabla h_y^i T)^{-1}}_{K_k} \nabla h_y^i \right) \bar{P}_{y,k}. \quad (5.119)$$

Mitjançant el mètode que es proposa en aquesta tesi, el posicionament del robot s'estima per triangulació angular a partir de l'estimació dinàmica dels angles θ_i ($i = 1, 2, 3$) que es realitza mitjançant un filtre de Kalman estès. En la primera fase d'aquest algorisme es calcula la predicció del vector d'estat angular $\bar{x}_k \equiv \{\bar{\theta}_{1,k}, \bar{\theta}_{2,k}, \bar{\theta}_{3,k}\}^T$, que s'obté per mitjà de l'equació (5.78) a partir de les mesures hodomètriques del robot corresponent. Quan el sensor làser realitza una mesura $\theta_{i,k}$, l'estat angular es corregeix mitjançant l'expressió següent –combinació de les equacions (5.81)-(5.83)–:

$$\tilde{x}_k = \bar{x}_k + \underbrace{\frac{1}{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2 + R} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{\theta_1 \theta_i,k} \\ \bar{\sigma}_{\theta_2 \theta_i,k} \\ \bar{\sigma}_{\theta_3 \theta_i,k} \end{Bmatrix}}_{K_k} (\theta_{i,k} - \bar{\theta}_{i,k}). \quad (5.120)$$

Tal com s'ha fet anteriorment, si s'estudia el cas ideal en què la mesura del sensor làser no presenta error ($R = 0$) l'expressió anterior esdevé:

$$\tilde{\theta}_{i,k} = \theta_{i,k}, \quad (5.121)$$

$$\tilde{\theta}_{j,k} = \bar{\theta}_{j,k} + \frac{\bar{\sigma}_{\theta_j \theta_i,k}}{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2} (\theta_{i,k} - \bar{\theta}_{i,k}); \quad j \neq i. \quad (5.122)$$

Així doncs, en la fase d'actualització d'aquest EKF angular no es cometen errors d'aproximació de l'equació de mesura perquè aquesta és lineal. La Figura 5.11 representa l'etapa d'actualització de l'estat considerant que la mesura $\theta_{i,k}$ del sensor làser no conté error. A la figura es representa en l'eix d'abscisses l'angle θ_i –angle que es mesura a l'instant t_k^- , i en l'eix d'ordenades un dels altres angles d'estat θ_j . Amb el superíndex r s'indica l'estat angular real $x_k^r \equiv \{\theta_{1,k}^r, \theta_{2,k}^r, \theta_{3,k}^r\}^T$ del robot, i $\tilde{x}_k \equiv \{\tilde{\theta}_{1,k}, \tilde{\theta}_{2,k}, \tilde{\theta}_{3,k}\}^T$ és l'estimació d'aquest després de l'actualització de la mesura.

$$\tilde{P}_{x,k} = \left(I - \frac{1}{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{\theta_i,k} \\ \bar{\sigma}_{\theta_j,k} \\ \bar{\sigma}_{\theta_i,k} \end{Bmatrix} \nabla h_x^i \right) \bar{P}_{x,k}, \quad (5.123)$$

i s'obtidrien els següents termes relacionats amb els angles θ_i (angle mesurat) i θ_j (angle d'estat no mesurat qualsevol):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\theta_i,k}^2 &= \bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2 \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2}{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2} \right) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{\theta_j,k}^2 &= \bar{\sigma}_{\theta_j,k}^2 - \frac{(\bar{\sigma}_{\theta_i,k})^2}{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2} \neq 0, \\ \tilde{\sigma}_{\theta_i\theta_j,k} &= \bar{\sigma}_{\theta_i\theta_j,k} \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2}{\bar{\sigma}_{\theta_i,k}^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Aquests termes de la matriu de covariància de l'estimació de l'estat venen representats per la línia blava de la figura, que representa la zona d'incertesa per a l'angle θ_j –variància $\tilde{\sigma}_{\theta_j,k}^2$, equació (5.124)– que és en principi no nul·la. De fet, es pot interpretar aquesta zona d'incertesa com una el·lipse amb un dels semieixos de longitud nul·la.

El següent pas del mètode consisteix a calcular l'estimació del posicionament per mitjà de les equacions de la triangulació angular. A l'apartat 4.1.4 de la tesi s'ha realitzat un estudi estadístic del posicionament dinàmic per triangulació angular. S'ha justificat la utilització de l'aproximació lineal de les equacions de la triangulació angular $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ i $\psi(\mathbf{x})$ –equacions (4.20) i (4.39) respectivament– per al càlcul de l'estimació del posicionament i per a l'estudi de la propagació de l'error a l'interior de la circumferència que passa pels tres reflectors utilitzats:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k \equiv E[\mathbf{y}_k] \simeq \{ \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}_k), \psi(\tilde{\mathbf{x}}_k) \}^T, \quad (5.125)$$

$$\tilde{P}_{y,k} \equiv E[\delta \mathbf{y}_k \delta \mathbf{y}_k^T] \simeq \nabla \mathbf{y}_x \tilde{P}_{x,k} \nabla \mathbf{y}_x^T; \quad \nabla \mathbf{y}_x \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\tilde{\mathbf{x}}_k}. \quad (5.126)$$

Capítol 6

Simulacions informàtiques

En aquest capítol es comprova la precisió del mètode que s'ha presentat per a estimar el posicionament d'un robot mòbil en condicions dinàmiques. Aquest mètode, que utilitza mesures hodomètriques i mesures angulars de la recta entre un punt del robot i tres punts de l'entorn de posició coneguda, s'ha exposat al Capítol 5 i consta de dos passos. En el primer s'estimen les mesures angulars en cada instant de temps t_k mitjançant un *filtre de Kalman estès* (EKF) d'estat angular. En el segon pas, s'utilitzen les equacions de la *triangulació angular* per a determinar el posicionament del robot a partir dels angles estimats.

Els resultats que s'obtenen mitjançant el mètode que es presenta es comparen amb els que proporciona l'algorisme utilitzat usualment basat en un EKF d'estat posicional –s'ha formulat a l'apartat 5.2–. En aquest capítol es simula el funcionament d'ambdós mètodes amb la cinemàtica omnidireccional del robot mòbil SPHERIK-3x3, l'estudi cinemàtic d'aquest robot s'ha presentat a l'apartat 3.3. Aquest robot també és el que s'utilitzarà en la validació experimental.

6.1 Descripció del procés de simulació

Per a simular i comparar la precisió dels dos mètodes de posicionament que es consideren s'ha utilitzat el programari matemàtic MATLAB, programari utilitzat àmpliament en l'àmbit de l'enginyeria per a la simulació numèrica de sistemes dinàmics. El procés de simulació que s'ha realitzat consta de les dues etapes següents:

- **Primera etapa:** En aquesta etapa s'emula el comportament cinemàtic del robot mòbil SPHERIK-3x3, i el funcionament del sistema de posicionament làser considerat. Es generen les mesures hodomètriques \mathbf{u}_k i del sensor làser $\theta_{i,k}$ ($i = 1,2,3$) per a una trajectòria determinada del robot.
- **Segona etapa:** En aquesta etapa s'executen els dos mètodes de posicionament dinàmic: El que es presenta en aquesta tesi –basat en el EKF d'estat angular i triangulació–, i l'usual basat en el EKF d'estat posicional. Per a simular el comportament real dels sensors s'afegeix un error a les mesures hodomètriques de velocitat (\mathbf{w}_k) i un error a la

mesura angular del sensor làser ($\delta\theta_d$). Els algorismes s'executen $N = 500$ vegades per a comparar *estadísticament* els resultats obtinguts. En cada simulació els errors que s'afegeixen a les mesures –hodomètriques i angulars– són els mateixos per als dos mètodes, tanmateix aquests varien d'una simulació a l'altra.

Un cop realitzades aquestes dues etapes es comparen els resultats obtinguts mitjançant els dos mètodes de posicionament. S'utilitzen com a paràmetres indicatius de la precisió de posicionament l'*error lateral* (e_{lat}) entre la trajectòria de P –centre del capçal làser– calculada per cadascun dels mètodes i la trajectòria emulada que s'obté a la primera etapa, i l'*error d'orientació* (e_ψ) també entre l'orientació calculada i l'emulada. Per a comparar la precisió dels algorismes, s'utilitzen els valors amittjanats per a les N simulacions dels paràmetres d'error e_{lat} i e_ψ .

El diagrama de blocs de la Figura 6.1 il·lustra les etapes d'aquest procés de simulació. Al llarg dels següents apartats, on s'explica amb més detall cada etapa, s'anirà fent referència a aquest diagrama.

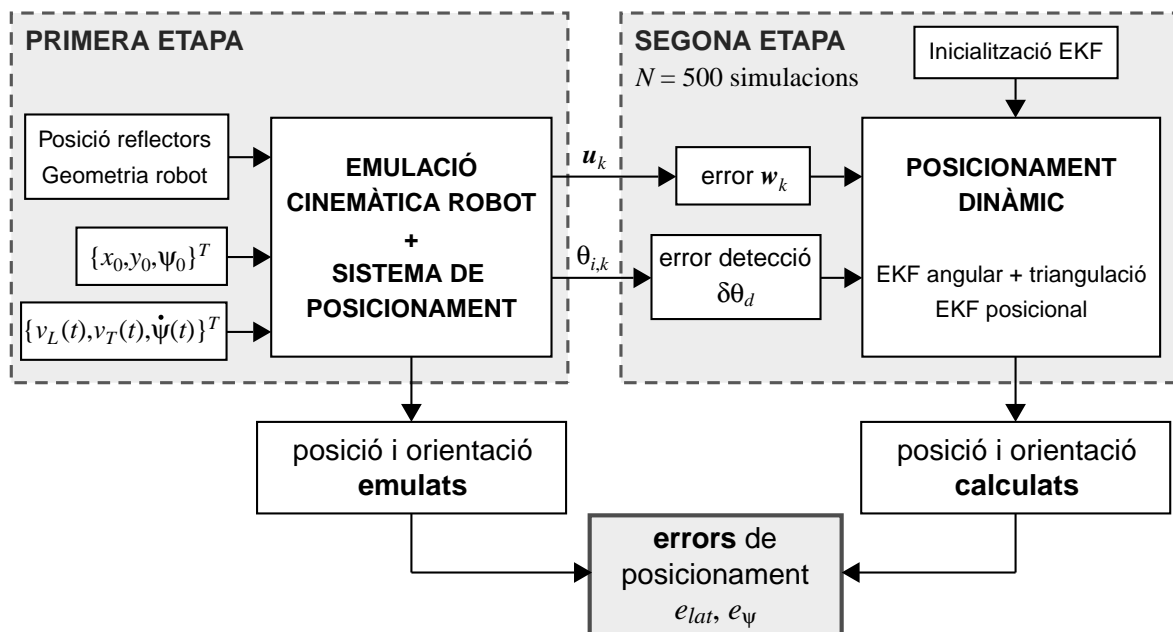


Figura 6.1 Diagrama de blocs del procediment seguit en el procés de simulació estadística dels mètodes de posicionament

6.1.1 Primera etapa: Emulació de la cinemàtica del robot i del sistema de posicionament

En la primera etapa de la simulació s'utilitza l'eina SIMULINK (integrada al programari MATLAB) per a emular la cinemàtica del robot mòbil SPHERIK-3x3 i el funcionament del sistema de posicionament làser. SIMULINK és una eina de simulació numèrica per a sistemes que evolucionen en el temps, que es programa de forma senzilla mitjançant diagrames de blocs.

Les *dades d'entrada* d'aquesta primera etapa de la simulació –veure Figura 6.1– són:

- La condició inicial del posicionament del robot mòbil $\mathbf{y}_0 \equiv \{x_0, y_0, \psi_0\}^T$, en el sistema de referència que defineix el triplet de reflectors (SRT).
- L'evolució al llarg del temps de les velocitats generalitzades del robot SPHERIK-3x3 $\{v_L(t), v_T(t), \dot{\psi}(t)\}^T, \forall t$.
- La posició dels tres reflectors que hi ha a l'entorn del robot $\vec{r}(R_i) \equiv \{x_i, y_i\}^T, i = 1, 2, 3$.
- Els paràmetres geomètrics α, L, s i r del robot SPHERIK-3x3 (definita a la Figura 3.9) necessaris per al càlcul de la seva matriu jacobiana J_ω , equació (3.26). El seu valor numèric és el que es dona a la Taula 6.1:

Taula 6.1 Paràmetres geomètrics del robot mòbil SPHERIK-3x3

Paràmetre	Magnitud
α	15°
L	0,644 m
s	0,282 m
r	0,06 m

A partir de les dades d'entrada que s'especifiquen, en aquesta etapa d'emulació es determinen les *dades de sortida* següents –veure Figura 6.1–:

- L'evolució del posicionament emulat del robot mòbil: $\mathbf{y}(t) \equiv \{x(t), y(t), \psi(t)\}^T, \forall t$. És a dir, la trajectòria que segueix el punt P i l'evolució de l'orientació del robot.
- La mesura hodomètrica $\mathbf{u}_k = \{v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}\}^T$, on el subíndex k indica a l'instant $t_k \equiv k\Delta t$ ($\Delta t = 0,001$ s és el pas dels algorismes dinàmics de posicionament). Aquesta mesura és la velocitat motoritzada de cada roda del robot.
- Les mesures angulars del sensor làser quan detecta els diferents reflectors que hi ha a l'entorn simulat del robot: $\theta_{i,k}$, que indica l'angle entre la recta que passa per P i el reflector R_i ($i = 1, 2, 3$) i l'eix longitudinal del robot a l'instant de temps t_k .

La Figura 6.2 esquematitza aquesta etapa d'emulació. Es simula el moviment del robot per un entorn virtual amb tres reflectors i es generen les dades que s'han descrit anteriorment: posició i orientació del robot, mesures hodomètriques cada $\Delta t = 0,001$ s i mesura del sensor làser –en cas que es detecti algun dels reflectors–.

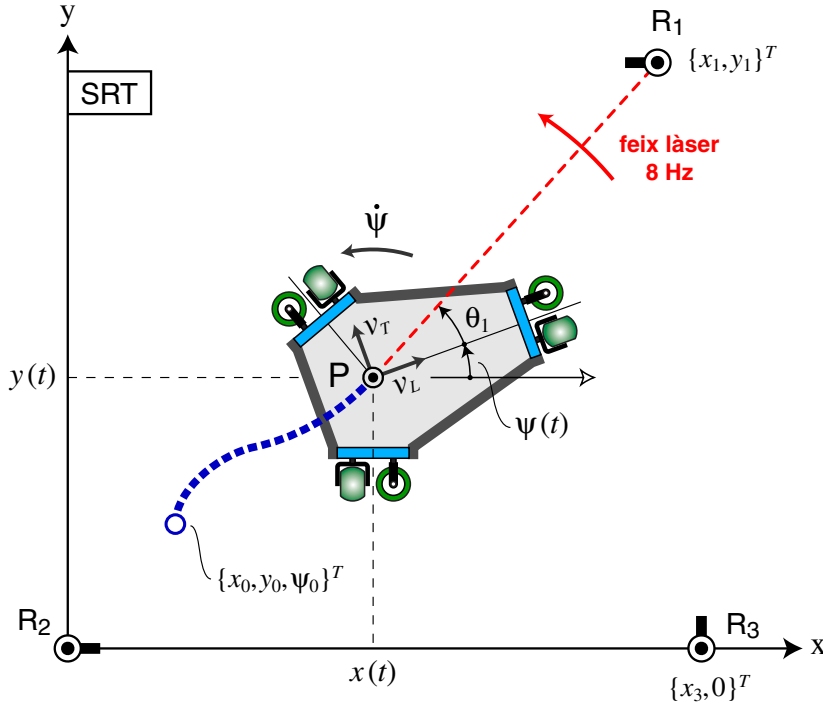


Figura 6.2 Entorn del robot considerat en l'emulació del sistema robot-sensor làser

Per a calcular l'evolució del posicionament real del robot es parteix de la condició inicial definida $\{x_0, y_0, \psi_0\}^T$, i de l'evolució al llarg del temps de les velocitats generalitzades del robot $\{v_L(t), v_T(t), \dot{\psi}(t)\}^T$, $\forall t$. A partir d'aquestes dades el programa determina la trajectòria que segueix el punt P del robot –centre del sensor làser– i l'orientació del robot en cada instant de temps per mitjà de les següents integrals temporals:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_L(t) \cos \psi(t) - v_T(t) \sin \psi(t) dt, \quad (6.1)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_L(t) \sin \psi(t) + v_T(t) \cos \psi(t) dt, \quad (6.2)$$

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi}(t) dt. \quad (6.3)$$

Les integrals anteriors –equacions (6.1)-(6.3)– es resolten numèricament mitjançant un algorisme integratiu de Runge-Kutta de quart ordre, amb un pas temporal d'integració $\Delta t_{\text{int}} = 2 \cdot 10^{-6}$ s. D'aquesta manera l'error numèric comès en cada pas d'integració és d'ordre Δt_{int}^5 , mentre que l'error total acumulat és d'ordre Δt_{int}^4 [Hairer *et al.* 2000]. Com es pot comprovar aquest error és negligible comparat amb els errors de posicionament que es determinen en les simulacions.

Cal comentar que en tractar-se d'un robot de jacobiana invariant, la integral (6.3) es pot expressar sempre com una forma lineal de l'angle girat per les rodes. A la realitat, aquest fet simplifica el càlcul anterior perquè es disposa de la mesura de l'angle girat per les rodes a partir dels *encoders* dels motors.

La mesura hodomètrica u_k , corresponent a la velocitat motoritzada de cada roda, es calcula per a cada instant t_k mitjançant l'expressió matricial:

$$\mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ v_{3,k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -L \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -s \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_L(t_k) \\ v_T(t_k) \\ \dot{\psi}(t_k) \end{Bmatrix}, \quad (6.4)$$

on les variables α , L i s són paràmetres geomètrics del robot SPHERIK-3x3, i el seu valor es dona a la Taula 6.1. La mesura hodomètrica anterior es determina en aquesta primera etapa sense error. L'error blanc i gaussià de mitjana zero en les mesures hodomètriques, $\mathbf{w}_k = \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \delta v_{3,k}\}^T$, s'afegeix a la segona etapa de la simulació tal com es mostra al diagrama de la Figura 6.1.

Pel que fa al sistema de posicionament làser, el model en SIMULINK emula el funcionament real del sensor que s'utilitza en la validació experimental. El sensor és el model LS6 del fabricant *Guidance Control Systems Ltd.* (GCS). Aquest sensor té un estator fix al bastidor del robot, i un capçal que gira en sentit antihorari al voltant de l'eix vertical a una freqüència de 8 voltes per segon (8 Hz) relativa a l'estator. El capçal emet un feix làser que es reflecteix quan detecta un dels reflectors catadiòptrics de l'entorn del robot, Figura 6.2.

La reflexió és detectada per un fotoreceptor incorporat al mateix sensor, i un encoder de 65536 polsos per volta mesura l'angle –relatiu al robot– del feix làser quan es produeix aquesta reflexió. D'aquesta manera la resolució angular en la mesura del sensor és:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi \text{ rad}}{65536 \text{ polsos}} = 0,096 \cdot 10^{-3} \text{ rad}. \quad (6.5)$$

La mesura del sensor làser té dues components independents d'error: L'*error de resolució* ($\delta\theta_r$), conseqüència de la discretització de l'encoder que realitza la mesura –segueix una distribució de probabilitat uniforme–, i un *error de detecció* ($\delta\theta_d$) afegit que es modelitza mitjançant una funció de densitat de probabilitat gaussiana de variable discreta. A l'Annex C es justifiquen aquestes components d'error, i s'explica més detalladament la seva modelització.

En aquesta primera etapa d'emulació es genera la mesura discreta $\theta_{i,k}$ de l'encoder del sensor làser, mesura que ja inclou l'error de resolució del sensor. L'error de detecció addicional s'afegeix, de la mateixa manera que l'error hodomètric, en la segona etapa del procés de simulació, Figura 6.1.

L'emulació del sistema de posicionament làser determina el pas temporal Δt_{int} de la simulació dinàmica que es realitza en aquesta primera etapa. Aquest interval de temps s'associa al temps transcorregut entre polsos de l'encoder. Per tant, tenint en compte que una volta del capçal es produeix cada 125 ms (8 voltes cada segon) es té:

$$\Delta t_{\text{int}} = \Delta\theta \cdot \frac{125 \text{ ms}}{2\pi \text{ rad}} = 0,002 \text{ ms} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}. \quad (6.6)$$

En cada pas de la simulació dinàmica (cada $2 \cdot 10^{-6}$ s) es comprova si el feix que emet el sensor làser interseca amb algun dels tres reflectors de l'entorn del robot.

6.1.2 Segona etapa: Simulació estadística dels mètodes dinàmics d'estimació del posicionament

La segona etapa de la simulació consisteix en la simulació estadística dels dos mètodes dinàmics d'estimació del posicionament següents:

- El mètode que es presenta a la tesi, basat en un EKF d'estat $\mathbf{x}_k \equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$ i en la triangulació angular per al càlcul del posicionament: "EKF angular + triangulació".
- L'algorisme utilitzat usualment que es basa en un EKF d'estat $\mathbf{y}_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$: "EKF posicional".

En aquesta etapa s'afegeix l'error $\mathbf{w}_k = \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \delta v_{3,k}\}^T$ a la mesura hodomètrica i l'error de detecció $\delta\theta_d$ a la mesura del sensor làser, Figura 6.1. La Figura 6.3 mostra els diagrames de blocs dels dos algorismes que es simulen.

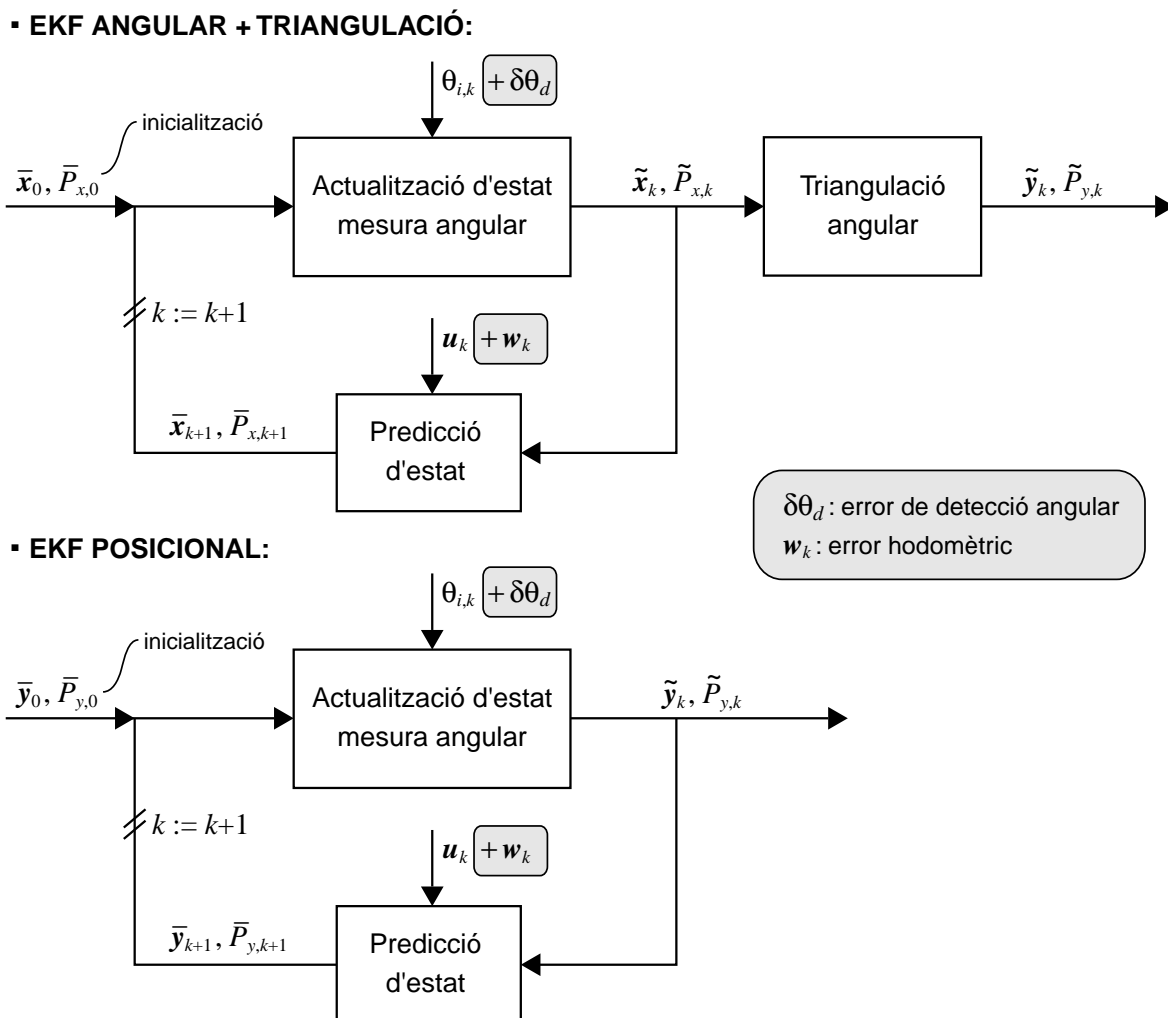


Figura 6.3 Diagrames de blocs dels dos mètodes que es simulen

Pel que fa a l'error aleatori \mathbf{w}_k en la mesura hodomètrica s'utilitza la modelització introduïda per Chong i Kleeman (1997). L'error en la mesura de la velocitat motoritzada

d'una de les rodes omnidireccionals del robot $\delta v_{i,k}$ ($i = 1,2,3$) es modelitza com gaussià amb mitjana zero, i s'arriba a la següent expressió per a la seva variància:

$$\sigma_{v_{i,k}}^2 \equiv E[\delta v_{i,k}^2] = \frac{k_d}{\Delta t} |v_{i,k}|, \quad i = 1,2,3, \quad (6.7)$$

on $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ és el temps entre posicionaments successius dels algorismes, i la constant k_d depèn de les característiques del contacte roda-terra. A la simulació es pren $k_d = 5 \cdot 10^{-6}$ m, valor proposat per Arras *et al.* (2001) per a un robot que es mou en un entorn de laboratori.

Quant a l'error de detecció $\delta\theta_d$ que s'afegeix a la mesura del sensor làser, aquest segueix una distribució de probabilitat normal de variable discreta de mitjana zero i variància:

$$\sigma_{\theta_d}^2 \equiv E[\delta\theta_d^2] = (0,6\Delta\theta)^2 = 3,32 \cdot 10^{-9} \text{ rad}^2, \quad (6.8)$$

tal com es justifica en l'estudi de l'Annex C. Els errors w_k i $\delta\theta_d$ que s'afegeixen a les mesures hodomètriques i angulars respectivament, es generen aleatòriament per mitjà del programa MATLAB imposant la mitjana i variància de la distribució de probabilitat gaussiana de la que procedeixen.

Donat el caràcter estadístic de les variables que es calculen, cada algorisme es simula $N = 500$ vegades –amb uns errors diferents en cada simulació–, i s'utilitzen els valors mitjans de l'error lateral de posició i d'orientació al llarg del temps per a comparar la precisió dels dos algorismes. Cal remarcar que en una mateixa simulació els dos algorismes de posicionament s'executen amb els mateixos errors per a garantir la seva comparació amb igualtat de condicions d'error.

Inicialització dels algorismes d'estimació

Com s'observa als diagrames de la Figura 6.3, els algorismes parteixen d'una estimació inicial de l'estat i de la covariància de l'error d'aquesta estimació: \bar{x}_0 i $\bar{P}_{x,0}$ en el cas del EKF d'estat angular; i \bar{y}_0 i $\bar{P}_{y,0}$ en el cas del EKF d'estat posicional. En les aplicacions en les que s'utilitza un filtre de Kalman, els termes de la matriu de covariància inicial són elevats si hi ha incertesa en l'estimació inicial de l'estat, i per contra són petits si l'estat inicial es coneix amb precisió. Cal remarcar que de vegades s'utilitza també el terme “*predicció* inicial de l'estat” per a designar l'esmentada “estimació inicial”, ja que aquesta es *prediu* abans que es faci cap mesura.

Tal com s'afirma als treballs [Kasdin 2000b, Kasdin i Haupt 1997], el funcionament de l'algorisme de Kalman és molt sensible a la selecció de les condicions inicials de l'estat del sistema. Per aquest motiu, tal com es proposa en els treballs que es citen, cal establir una relació entre les condicions inicials que s'utilitzen per a comparar els dos mètodes amb igualtat de condicions. L'equació vectorial següent relaciona el vector d'estat angular x_k amb el de posicionament y_k :

$$\mathbf{x}_k = g(\mathbf{y}_k),$$

$$\begin{cases} \theta_{1,k} \\ \theta_{2,k} \\ \theta_{3,k} \end{cases} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y_1 - y_k}{x_1 - x_k}\right) - \psi_k \\ \arctan\left(\frac{-y_k}{-x_k}\right) - \psi_k \\ \arctan\left(\frac{-y_k}{x_3 - x_k}\right) - \psi_k \end{cases}, \quad (6.9)$$

on $\{x_1, y_1\}^T$ és la posició del reflector R_1 en el SRT, i $\{x_3, 0\}^T$ la del reflector R_3 , el reflector R_2 es troba a l'origen de coordenades del sistema de referència.

Kasdin (2000b) exposa la següent tècnica per a generar les condicions inicials angulars $(\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{P}_{x,0})$ a partir de les condicions inicials de posicionament $(\bar{\mathbf{y}}_0, \bar{P}_{y,0})$ que són les que es coneixen usualment. El vector d'estat angular inicial $\bar{\mathbf{x}}_0 \equiv \{\bar{\theta}_{1,0}, \bar{\theta}_{2,0}, \bar{\theta}_{3,0}\}^T$ es genera a partir de $\bar{\mathbf{y}}_0 \equiv \{\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{\psi}_0\}^T$ mitjançant l'equació (6.9):

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = g(\bar{\mathbf{y}}_0),$$

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{1,0} \\ \bar{\theta}_{2,0} \\ \bar{\theta}_{3,0} \end{cases} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y_1 - \bar{y}_0}{x_1 - \bar{x}_0}\right) - \bar{\psi}_0 \\ \arctan\left(\frac{-\bar{y}_0}{-\bar{x}_0}\right) - \bar{\psi}_0 \\ \arctan\left(\frac{-\bar{y}_0}{x_3 - \bar{x}_0}\right) - \bar{\psi}_0 \end{cases}. \quad (6.10)$$

Per trobar la matriu de covariància $\bar{P}_{x,0}$ es genera una mostra aleatòria d' N' elements d'una distribució normal de tres variables de mitjana $\bar{\mathbf{y}}_0$ i matriu de covariància $\bar{P}_{y,0}$ —es denota amb $\bar{\mathbf{y}}_0^m$ cadascun dels elements d'aquesta mostra; $m = 1, \dots, N' - 1$ — i es calculen els N' vectors d'estat angular mitjançant:

$$\bar{\mathbf{x}}_0^m = g(\bar{\mathbf{y}}_0^m); \quad m = 1, \dots, N'. \quad (6.11)$$

A partir de la mostra anterior de vectors d'estat angular, es calcula la matriu de covariància $\bar{P}_{x,0}$ mitjançant la següent expressió:

$$\bar{P}_{x,0} = \frac{1}{N'} \sum_{m=1}^{N'} (\bar{\mathbf{x}}_0^m - \bar{\mathbf{x}}_0)(\bar{\mathbf{x}}_0^m - \bar{\mathbf{x}}_0)^T. \quad (6.12)$$

El nombre d'elements de la mostra N' , ha de ser gran per garantir una bona estimació de la matriu de covariància inicial $\bar{P}_{x,0}$. Kasdin (2000b) pren $N' = 50000$ en les simulacions del seu treball, en les simulacions d'aquesta tesi s'utilitza també aquest valor.

Paràmetres dels algorismes d'estimació

A la Taula 6.2 es donen els paràmetres que utilitzen els filtres de Kalman que es simulen:

Taula 6.2 Paràmetres dels algorismes dinàmics basats en el EKF

Paràmetre	Magnitud	Descripció
$Q_k =$	$\begin{bmatrix} \sigma_{v1,k}^2 & & \\ & \sigma_{v2,k}^2 & \\ & & \sigma_{v3,k}^2 \end{bmatrix}, \sigma_{v_i,k}^2 = 0,005 v_{i,k} $	Variància de l'error en les mesures hodomètriques de velocitat
$R =$	$4,2 \cdot 10^{-9} \text{ rad}^2$	Variància de l'error en les observacions angulars del sensor
$\Delta t = t_k - t_{k-1} =$	$0,001 \text{ s}$	Interval de temps entre posicionaments (pas de l'algorisme)

El valor del paràmetre R de variància de les observacions angulars és diferent de la variància de l'error de detecció afegit –equació (6.8)– perquè cal afegir-hi l'error de resolució que incorpora la mesura. A l'Annex C es realitza una simulació de Monte Carlo on es sumen els dos errors i es justifica el valor de la Taula 6.2 per a la variància de l'error total en les observacions angulars del sensor.

6.1.3 Càlcul dels errors de posicionament

Per a cada simulació j ($j=1, \dots, N=500$) dels dos mètodes s'obté l'estimació del posicionament del robot en qualsevol instant: $\tilde{\mathbf{y}}_k^j \equiv \{\tilde{x}_k^j, \tilde{y}_k^j, \tilde{\psi}_k^j\}^T, \forall t_k$. És a dir, la successió de posicions del centre del sensor làser P –trajectòria del punt P–, i l'evolució de l'orientació del vehicle.

Els paràmetres estadístics que s'utilitzen per a comparar la precisió del mètode que es presenta amb la del mètode usual són l'error lateral ($e_{lat,k}^j$) entre la trajectòria calculada i la trajectòria emulada del robot; i l'error d'orientació ($e_{\psi,k}^j$) entre l'orientació calculada i l'emulada.

Si $\{x_k^r, y_k^r, \psi_k^r\}^T$ és el posicionament emulat del robot a l'instant t_k –el superíndex r és indicatiu del fet que aquest posicionament emula el *real*– i $\{\tilde{x}_k^j, \tilde{y}_k^j, \tilde{\psi}_k^j\}^T$ és el posicionament calculat per un dels mètodes de posicionament a la simulació j , l'error lateral i l'error d'orientació a l'instant t_k per a aquesta simulació es determinen segons:

$$e_{lat,k}^j = \frac{\left\{ \begin{array}{l} x_k^r - x_{k-1}^r \\ y_k^r - y_{k-1}^r \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_k^j - x_{k-1}^r \\ \tilde{y}_k^j - y_{k-1}^r \end{array} \right\}}{\left\| \left\{ \begin{array}{l} x_k^r - x_{k-1}^r \\ y_k^r - y_{k-1}^r \end{array} \right\} \right\|} \quad (6.13)$$

$$= \frac{(x_k^r - x_{k-1}^r)(\tilde{y}_k^j - y_{k-1}^r) - (\tilde{x}_k^j - x_{k-1}^r)(y_k^r - y_{k-1}^r)}{\sqrt{(x_k^r - x_{k-1}^r)^2 + (y_k^r - y_{k-1}^r)^2}},$$

$$e_{\psi,k}^j = \tilde{\psi}_k^j - \psi_k^r. \quad (6.14)$$

El valor de l'error lateral $e_{lat,k}^j$ és positiu si el punt calculat es troba a l'esquerra de la trajectòria real, en el sentit de la marxa, i negatiu en cas contrari. La Figura 6.4 il·lustra el càlcul d'aquest error lateral. S'utilitza l'error lateral entre punt calculat i trajectòria emulada, perquè és l'error important que es vol minimitzar quan es controla la trajectòria d'un robot mòbil. Per tant, un bon mètode de posicionament serà aquell que estimi de la manera més precisa possible aquest terme.

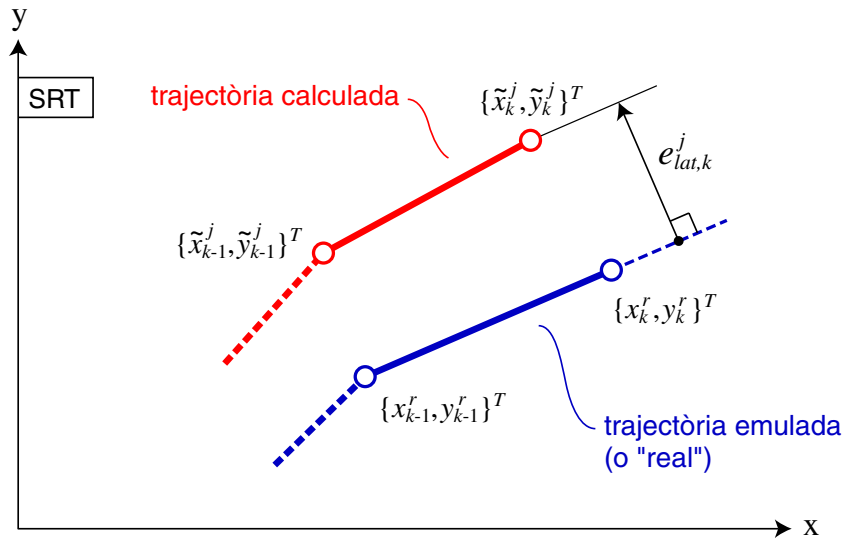


Figura 6.4 Error lateral entre la trajectòria calculada pels mètodes de posicionament i la trajectòria emulada del robot

A l'apartat següent es representaran els valors mitjans d'aquests errors per a les N simulacions dels algorismes $E(e_{lat,k})$ i $E(e_{\psi,k})$, així com la seva desviació estàndard $\sigma(e_{lat,k})$ i $\sigma(e_{\psi,k})$. Els seus valors per a un instant qualsevol t_k es calculen segons:

$$E(e_{lat,k}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_{lat,k}^j, \quad \sigma(e_{lat,k}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (e_{lat,k}^j - E(e_{lat,k}))^2}, \quad (6.15)$$

$$E(e_{\psi,k}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_{\psi,k}^j, \quad \sigma(e_{\psi,k}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (e_{\psi,k}^j - E(e_{\psi,k}))^2}. \quad (6.16)$$

6.2 Resultats de les simulacions

En aquest apartat es donen els resultats obtinguts en les simulacions dels dos mètodes. Es simulen diferents trajectòries del punt P, i per a cada trajectòria s'utilitza una disposició dels reflectors determinada. Les trajectòries i les disposicions de reflectors que es simulen corresponen a situacions realistes, tal com es justifica a l'apartat que segueix.

6.2.1 Trajectòries simulades i velocitats generalitzades

S'han simulat les 7 trajectòries –definides per al punt P del robot mòbil– que es mostren a les Figures 6.5-6.7. En aquestes figures també es mostra el triplet de reflectors que s'utilitza en cada cas per a determinar el posicionament dinàmic. El sistema de referència associat a cada triplet (SRT) es determina tal com s'ha definit a l'apartat 4.1 de la tesi: El reflector R_2 es situa a l'origen i el semieix x positiu passa pel reflector R_3 .

Les trajectòries i el conjunt de reflectors que s'utilitzen en cada cas són representatius de situacions reals. La situació de la Figura 6.5 és la d'un passadís on es tenen reflectors alternats a banda i banda. Les trajectòries (1), (2) i (3) representen desplaçaments del robot al llarg d'aquest passadís. D'aquestes trajectòries se'n simula la part en color blau, en la que s'utilitza el conjunt de reflectors $\{R_1, R_2, R_3\}$ per a calcular el posicionament (ja que la triangulació angular dona bona precisió a l'interior del triangle que determinen els tres reflectors, tal com s'ha vist al Capítol 4).

Quan el robot creua la recta R_1R_3 –trajectòria en gris a la figura–, el conjunt de reflectors escollits per al posicionament seria $\{R_1, R_2, R^*\}$. Els trams grisos de les trajectòries no es simulen perquè la posició dels seus punts relativa als tres reflectors que s'emprarien és equivalent a la dels trams simulats –en color blau–. També es simula dins l'entorn de la Figura 6.5 la trajectòria vertical (4) que surt del punt inicial de la trajectòria (1) fins al punt inicial de la trajectòria (3). Les quatre trajectòries de la figura són rectes i es realitzen sense canvi d'orientació del robot, amb el seu eix longitudinal paral·lel a la trajectòria.

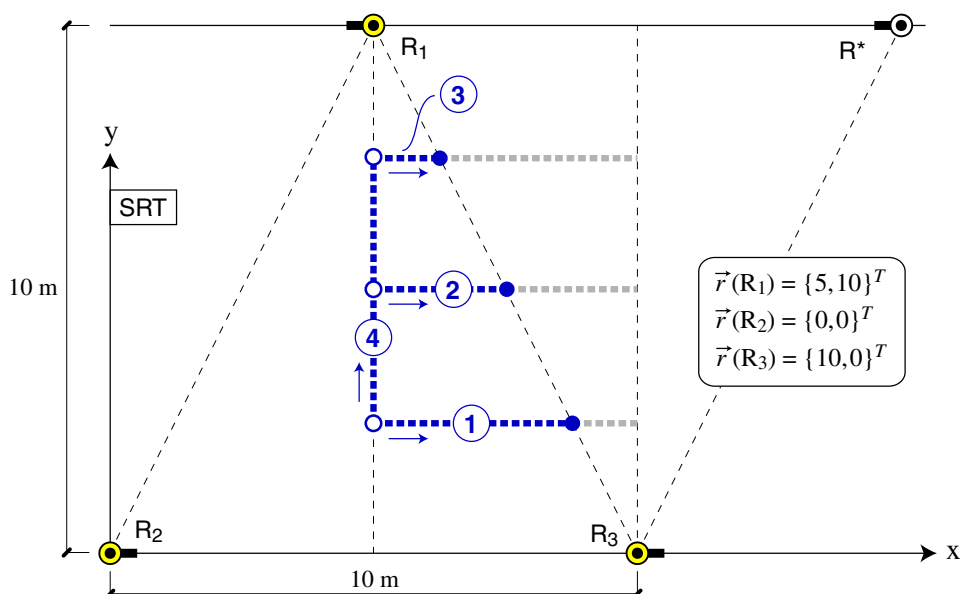


Figura 6.5 Trajectòries simulades (1), (2), (3) i (4), i disposició dels reflectors

La disposició de reflectors que es mostra a la Figura 6.6 és representativa de la que es podria tenir en una cantonada de l'espai de treball del robot. Les trajectòries corresponents, (5) i (6), representen girs del robot prop d'aquesta cantonada.

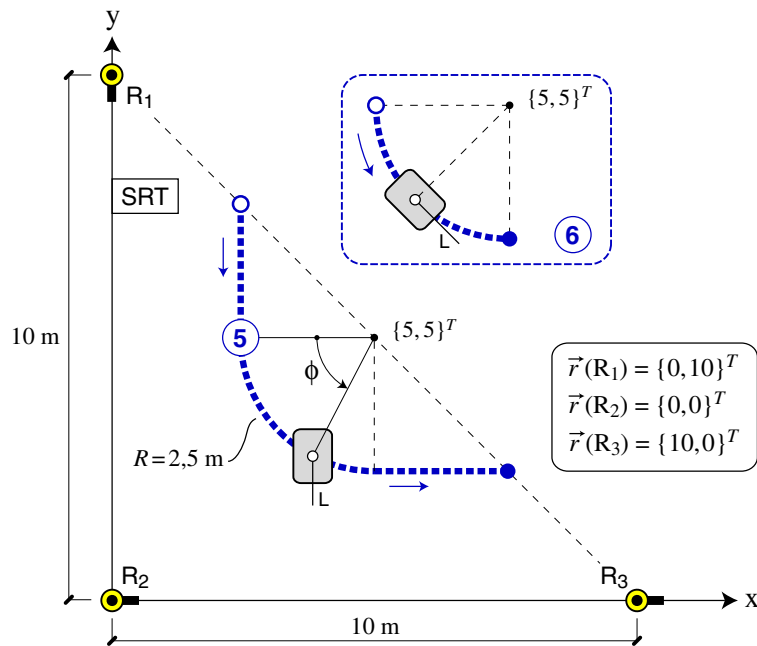


Figura 6.6 Trajectòries simulades (5) i (6) i disposició dels reflectors

La trajectòria (5) consta de dos trams rectes de 2,5 m i un tram circular de radi $R = 2,5$ m. Aquesta trajectòria es realitza sense canvi d'orientació del robot ($\dot{\psi} = 0$) amb una orientació constant: $\psi = 3\pi/2$ rad. Com es veu a la figura l'eix longitudinal del robot (indicat amb la lletra L) es manté paral·lel a l'eix y. La trajectòria (6) es correspon amb el tram circular de radi 2,5 m de la trajectòria (5). En aquest cas la trajectòria es simula amb canvi d'orientació del robot, de manera que el seu eix longitudinal (indicat a la figura amb la lletra L) és paral·lel a la trajectòria en tot moment.

Finalment, la trajectòria (7) –Figura 6.7– representa el cas d'un robot que circula paral·lel a una de les parets de l'entorn de treball i que només detecta reflectors situats sobre d'aquesta paret. La trajectòria simulada és rectilínia, i també es realitza sense canvi d'orientació del robot amb el seu eix longitudinal paral·lel a la trajectòria.

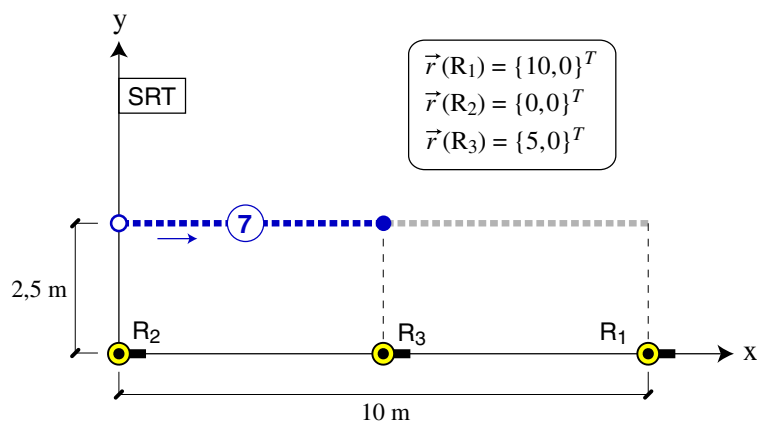


Figura 6.7 Trajectòria simulada (7) i disposició dels reflectors

De la trajectòria que es mostra a la Figura 6.7 se'n simula únicament el tram blau perquè, per raons de simetria, el tram de color gris és equivalent al blau pel que fa a la posició relativa al bastidor del robot del triplet de reflectors utilitzat.

Per a cada trajectòria es defineix la configuració inicial $\{x_0, y_0, \psi_0\}^T$, i l'evolució del vector de velocitats generalitzades $\{v_L(t), v_T(t), \dot{\psi}(t)\}^T$ al llarg del temps t de l'emulació. La Taula 6.3 dóna el valor de la configuració inicial del robot –en el SRT corresponent– per a les 7 trajectòries que s'han simulat, així com el temps total de simulació en cada trajectòria. La posició inicial del punt P del robot s'il·lustra a les Figures 6.5-6.7 per mitjà del punt blanc, el punt blau representa el punt final del tram simulat.

Taula 6.3 Configuració inicial del robot mòbil i temps total de simulació per a les diferents trajectòries

Trajectòria	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$\{x_0, y_0\}^T$ (m)	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2,5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 7,5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2,5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2,5 \\ 7,5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2,5 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{Bmatrix}$
ψ_0 (rad)	0	0	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	$3\pi/2$	0
t (s)	4,25	3	1,75	5,5	9,43	4,43	5,5

Velocitats generalitzades. Trajectòries (1), (2), (3), (4) i (7)

Les trajectòries (1), (2), (3), (4) i (7) són rectilínies i es recorren sense canvi d'orientació del vehicle ($\dot{\psi}(t) = 0$), amb el seu eix longitudinal paral·lel a la trajectòria. Per tant, el punt P només té component longitudinal de velocitat. En totes aquestes trajectòries la velocitat d'aquest punt evoluciona des de 0 fins a 1 ms^{-1} durant el primer segon, i a partir d'aquest instant es manté constant i igual a 1 ms^{-1} fins al final de la trajectòria. Les equacions següents defineixen la velocitat de P durant el transitori d'acceleració i després d'aquest transitori respectivament:

$$\{\bar{v}(P)\} = \begin{Bmatrix} v_L(t) \\ v_T(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2t^3 + 3t^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ ms}^{-1}; \quad 0 \leq t < 1 \text{ s}, \quad (6.17)$$

$$\{\bar{v}(P)\} = \begin{Bmatrix} v_L(t) \\ v_T(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ ms}^{-1}; \quad t \geq 1 \text{ s}. \quad (6.18)$$

Velocitats generalitzades. Trajectòries (5) i (6)

La trajectòria (5) també és recorreguda sense canvi d'orientació –cosa permesa per la cinemàtica omnidireccional de les rodes– que en aquest cas es manté constant al llarg del temps: $\psi(t) = 3\pi/2$ rad. En el primer tram rectilini de la trajectòria, que dura 3 s,

l'evolució de la velocitat de P ve regida per les equacions (6.17) i (6.18). En el tram circular la velocitat de P es manté igual a 1 ms^{-1} en mòdul. Com que la trajectòria (5) es realitza sense canvi d'orientació, la velocitat de P durant aquest tram és:

$$\{\bar{v}(P)\} = \begin{Bmatrix} v_L(t) \\ v_T(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \text{ ms}^{-1}; \quad 3 \leq t < 6,93 \text{ s}. \quad (6.19)$$

En l'equació (6.19), ϕ representa l'angle corresponent a l'arc de circumferència recorregut (Figura 6.6), i evoluciona al llarg del temps segons:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\|\bar{v}(P)\|}{R} = \frac{1}{R}, \quad \phi(t=3\text{s}) = 0; \quad 3 \leq t < 6,93 \text{ s}, \quad (6.20)$$

on $R = 2,5 \text{ m}$ és el radi de curvatura del tram. En l'últim tram rectilini de la trajectòria (5) la velocitat de P només té component transversal. Per tant, el vector és el següent:

$$\{\bar{v}(P)\} = \begin{Bmatrix} v_L(t) \\ v_T(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ ms}^{-1}; \quad 6,93 \leq t < 9,43 \text{ s}. \quad (6.21)$$

La trajectòria (6) és circular i es realitza amb l'eix longitudinal del robot tangent a la trajectòria en tot instant. Per tant, el punt P té només velocitat longitudinal i la seva evolució ve regida per les equacions (6.17) i (6.18). La velocitat angular de canvi d'orientació del robot, si R és el radi de curvatura d'aquest tram, s'obté segons:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{v_L(t)}{R}; \quad \forall t. \quad (6.22)$$

6.2.2 Inicialització dels algorismes

Com s'ha comentat, en cada simulació j ($j = 1, \dots, N = 500$) es parteix d'unes estimacions inicials diferents de l'estat del sistema: $\bar{y}_0^j \equiv \{\bar{x}_0^j, \bar{y}_0^j, \bar{\psi}_0^j\}^T$ en el EKF posicional i $\bar{x}_0^j \equiv \{\bar{\theta}_{1,0}^j, \bar{\theta}_{2,0}^j, \bar{\theta}_{3,0}^j\}^T$ en el EKF d'estat angular. Com que el problema que es tracta és el de determinació del posicionament, en cada simulació j s'imposa una estimació inicial de posicionament \bar{y}_0^j que s'obté d'una distribució de probabilitat gaussiana de mitjana $E[\bar{y}_0]$ i matriu de covariància $\bar{P}_{y,0}$.

En les simulacions es suposarà un cert error de biaix Δy_0 entre el posicionament inicial emulat (o "real") $y_0 \equiv \{x_0, y_0, \psi_0\}^T$, i la mitjana de l'estimació inicial del posicionament $E[\bar{y}_0]$. Aquest biaix representa la *incertesa* que es té inicialment quan el sistema làser encara no ha realitzat cap mesura. D'aquesta manera es comprovarà que els algorismes siguin capaços de corregir l'error inicial en l'estimació del posicionament.

En totes les trajectòries que es simulen es pren:

$$E[\bar{\mathbf{y}}_0] = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \psi_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,2 \text{ m} \\ 0,2 \text{ m} \\ 0,05 \text{ rad} \end{Bmatrix}, \quad (6.23)$$

amb la següent estimació de la matriu de covariància de l'error inicial de posicionament:

$$\bar{P}_{y,0} = \begin{bmatrix} 0,3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1^2 \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

A partir de l'estimació inicial *aproximada* del posicionament $\bar{\mathbf{y}}_0^j$, generada aleatòriament en la simulació j , s'obté l'estimació inicial de l'estat angular per mitjà de l'equació (6.10). Quant a la matriu de covariància $\bar{P}_{x,0}$ de l'error en l'estimació inicial de l'estat angular, es determina mitjançant l'expressió (6.12) a partir d'una simulació de Monte Carlo que genera $N' = 50000$ mostres de condicions inicials angulars, tal com s'ha exposat a l'apartat 6.1.2.

6.2.3 Resultats

Els gràfics de les Figures 6.8-6.14 representen, per a les set trajectòries simulades, l'evolució al llarg del temps dels valors mitjans dels errors de posicionament $E(e_{lat,k})$ i $E(e_{\psi,k})$, i l'evolució de les seves desviacions estàndard $\sigma(e_{lat,k})$ i $\sigma(e_{\psi,k})$. Aquests valors es calculen a partir de les $N = 500$ simulacions de cada algorisme mitjançant les equacions (6.15) i (6.16). En cada gràfic la corba blava és la que s'obté si s'utilitza el mètode de posicionament que es presenta, "EKF angular + triangulació"; i la vermella és la que s'obté mitjançant l'aplicació del "EKF posicional".

Com s'observa, per a cada paràmetre que es representa, el gràfic de l'esquerra és per a valors de temps entre 0 i 0,5 s, i el de la dreta és per a valors de temps entre 0,125 s –temps en què es completa la primera volta del sensor làser– i el temps final de la trajectòria. D'aquesta manera els gràfics de l'esquerra representen l'evolució dels paràmetres durant el transitori en el que es corregeix l'error inicial de posicionament. Els gràfics de la dreta mostren l'evolució dels mateixos paràmetres des del moment en què ja s'han realitzat tres mesures angulars ($t = 0,125$ s) i s'ha pogut fer la primera triangulació amb dades mesurades fins al final de la trajectòria.

La Taula 6.4 mostra l'arrel del valor quadràtic mitjà (valor RMS) de $E(e_{lat,k})$ i $E(e_{\psi,k})$ al llarg del temps, per a cadascun dels mètodes i per a cada trajectòria simulada. Es calculen per mitjà de les següents equacions:

$$\text{RMS}(e_{lat}) = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_k E(e_{lat,k})^2}, \quad (6.25)$$

$$\text{RMS}(e_{\psi}) = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_k E(e_{\psi,k})^2}. \quad (6.26)$$

Les expressions anteriors són molt sensibles als errors inicials, que són elevats perquè l'estimació inicial del posicionament és imprecisa. Per aquesta raó, el valor quadràtic mitjà que es dona a la Taula 6.4 s'obté amitjanant l'error quadràtic a partir de la primera volta del sensor làser. És a dir, des de $t = 0,125$ s fins al final de la trajectòria.

Taula 6.4 Valor RMS de l'error lateral i l'error d'orientació al llarg del temps de simulació (des de $t = 0,125$ s fins al final de la simulació)

Trajectòria	EKF angular + triangulació		EKF posicional	
	RMS(e_{lat}) (mm)	RMS(e_{ψ}) (mrad)	RMS(e_{lat}) (mm)	RMS(e_{ψ}) (mrad)
(1)	0,2023	0,0601	1,1438	0,1990
(2)	0,1068	0,0559	4,2370	0,3259
(3)	0,1237	0,0566	3,9577	0,9376
(4)	0,2555	0,0424	2,7086	0,3609
(5)	0,0838	0,0450	1,0299	0,0984
(6)	0,2501	0,1932	1,3757	0,2554
(7)	0,2480	0,0627	3,2896	0,5247

La Taula 6.5 dona els valors mitjans de l'error lateral i de l'error d'orientació –per a cada algorisme– per a $t = 0,125$ s. És a dir, quan el sensor làser ja ha realitzat una volta sencera. Aquesta dada informa de la capacitat que té l'algorisme de corregir l'error en l'estimació inicial del posicionament únicament amb tres mesures angulars.

Taula 6.5 Mitjana de l'error lateral i de l'error d'orientació a $t = 0,125$ s

Trajectòria	EKF angular + triangulació		EKF posicional	
	$E(e_{lat})$ (mm)	$E(e_{\psi})$ (mrad)	$E(e_{lat})$ (mm)	$E(e_{\psi})$ (mrad)
(1)	0,0281	0,0054	-2,2848	0,0423
(2)	0,1174	-0,0399	-7,5719	-1,0434
(3)	0,2847	0,0135	-8,5636	-1,3047
(4)	-0,2692	-0,0106	-5,7465	0,0553
(5)	0,2120	-0,0007	4,6236	-0,0652
(6)	-0,0501	-0,0559	4,5945	0,1076
(7)	0,1358	0,0125	-9,1489	1,7040

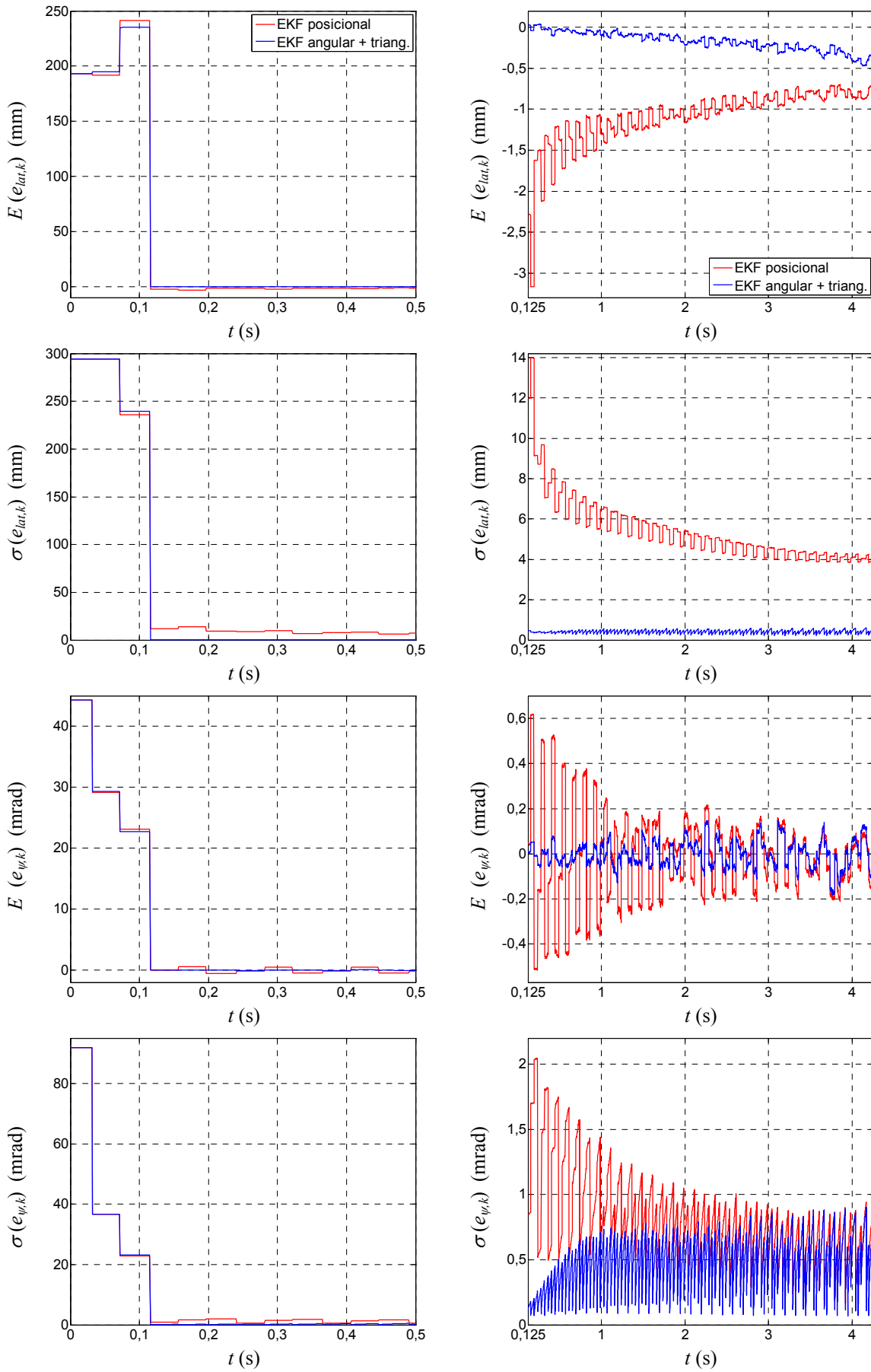


Figura 6.8 Resultats per a la trajectòria (1)

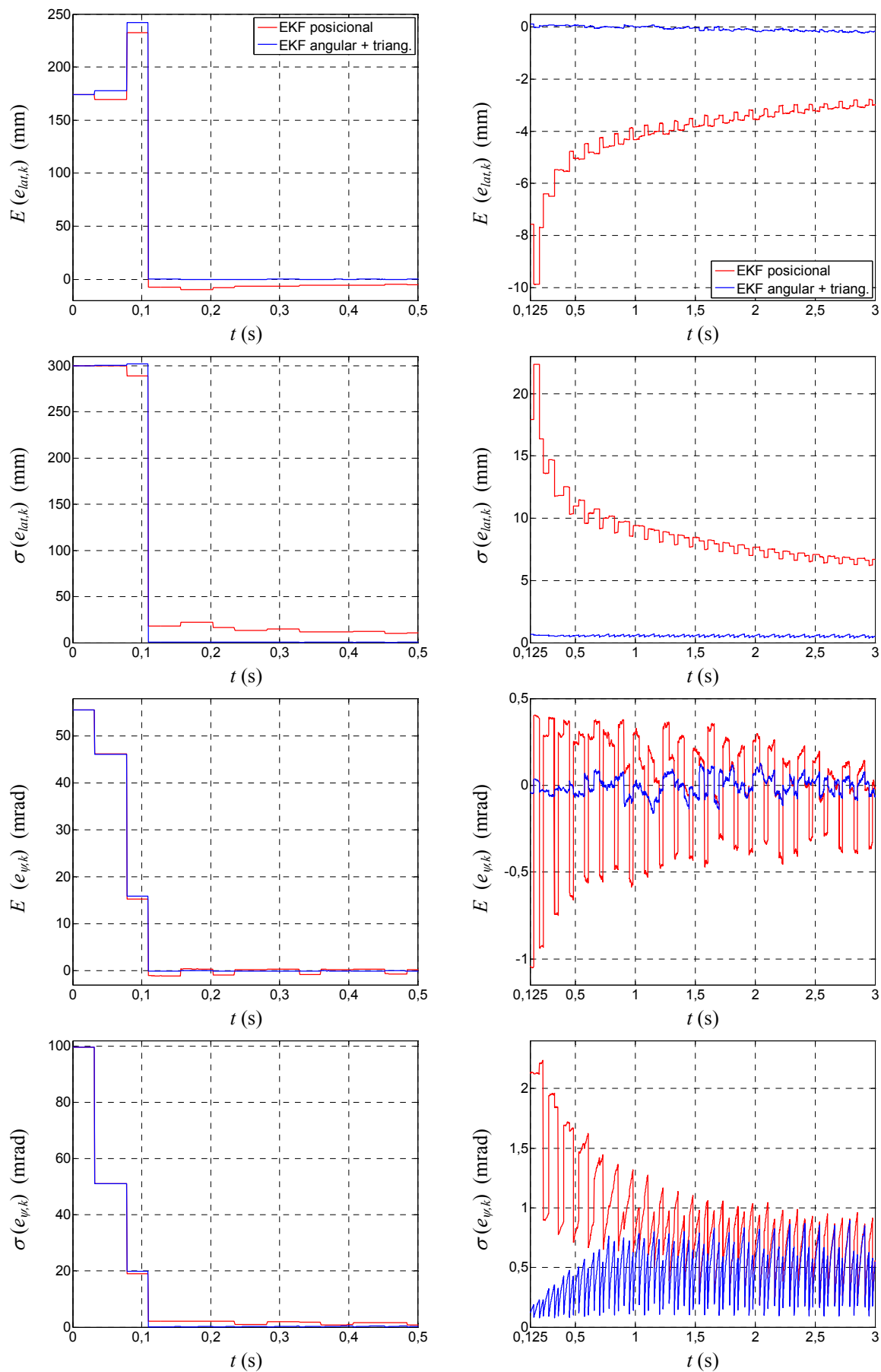


Figura 6.9 Resultats per a la trajectòria (2)

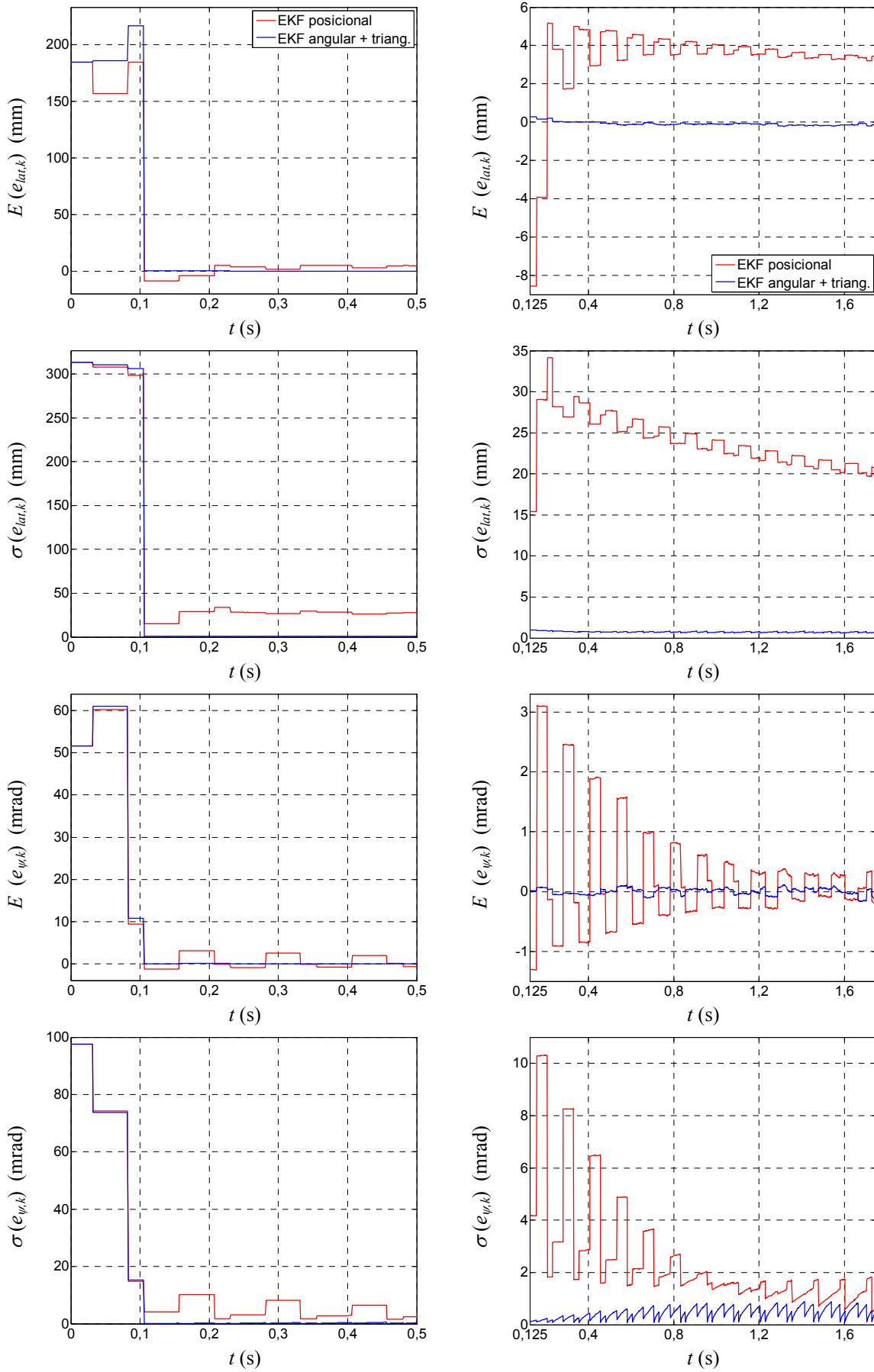


Figura 6.10 Resultats per a la trajectòria (3)

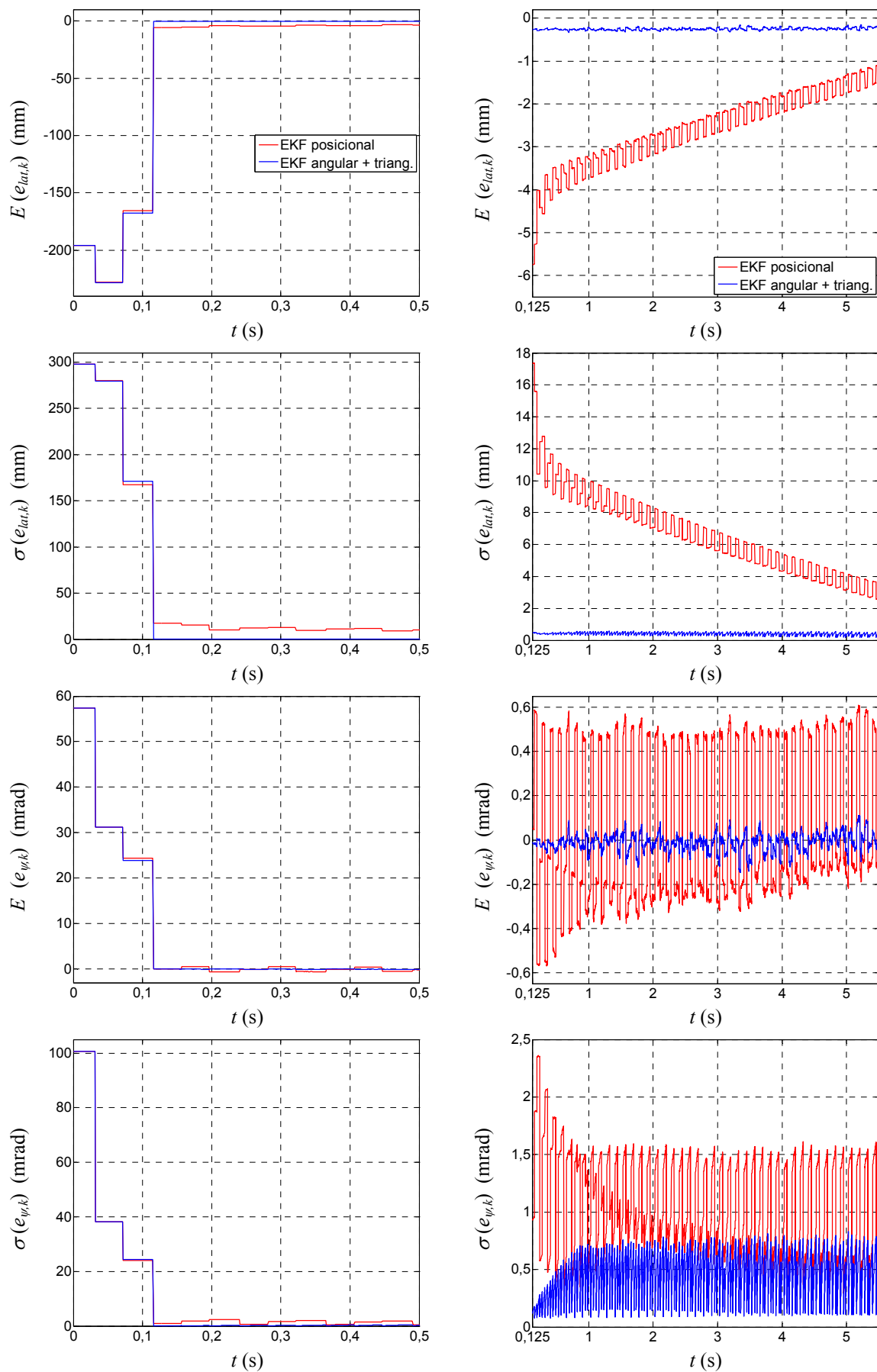


Figura 6.11 Resultats per a la trajectòria (4)

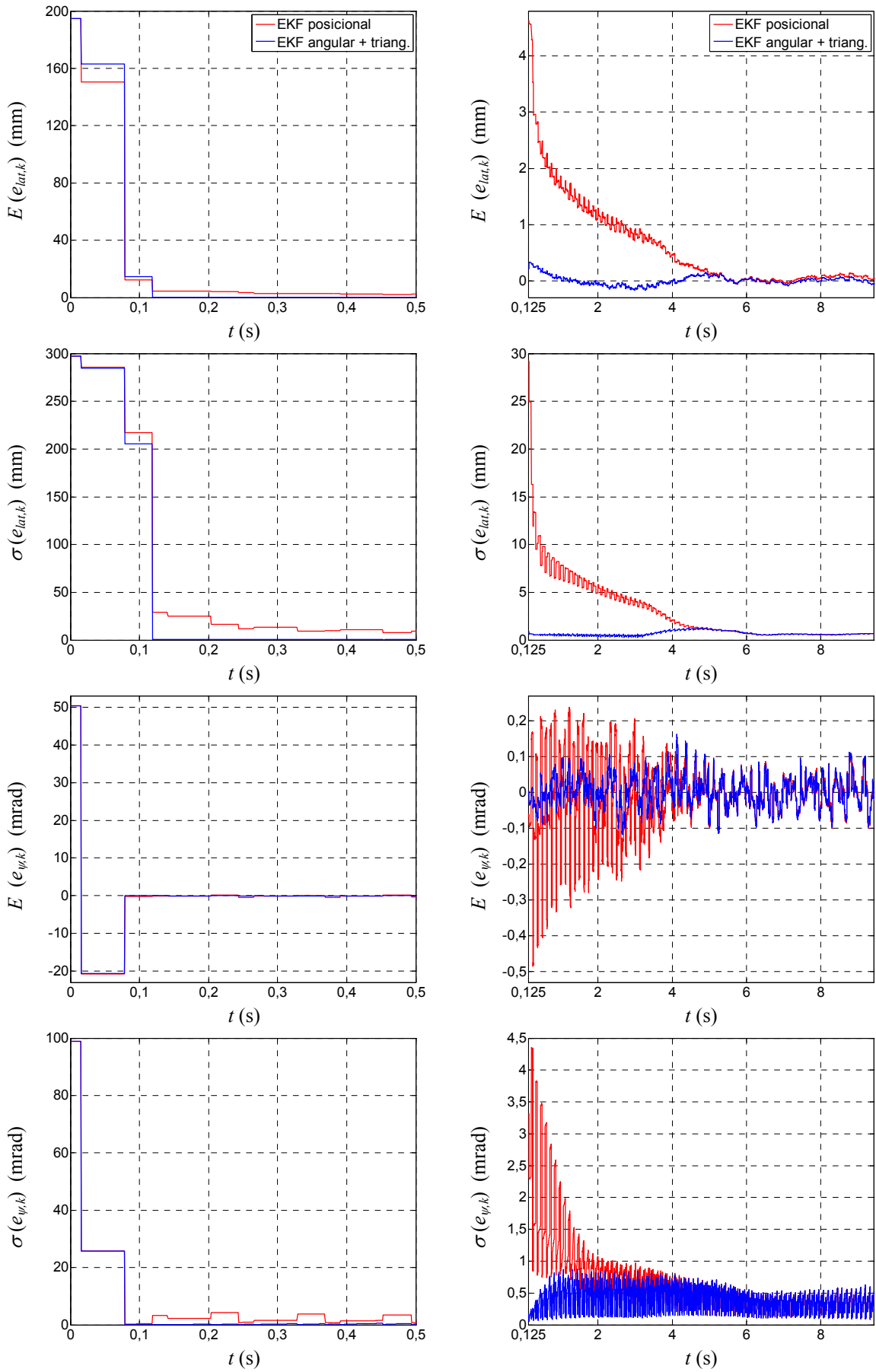


Figura 6.12 Resultats per a la trajectòria (5)

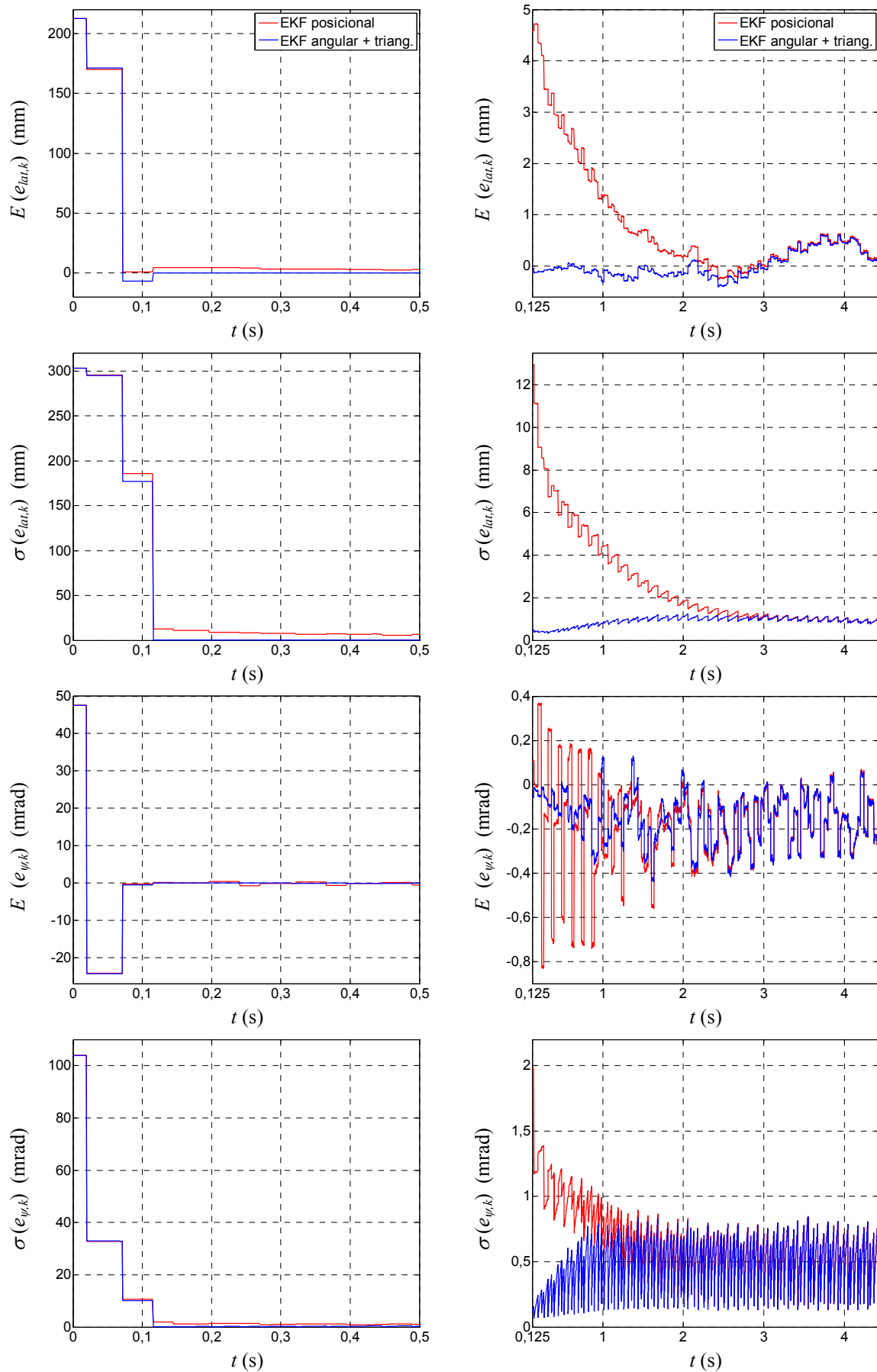


Figura 6.13 Resultats per a la trajectòria (6)

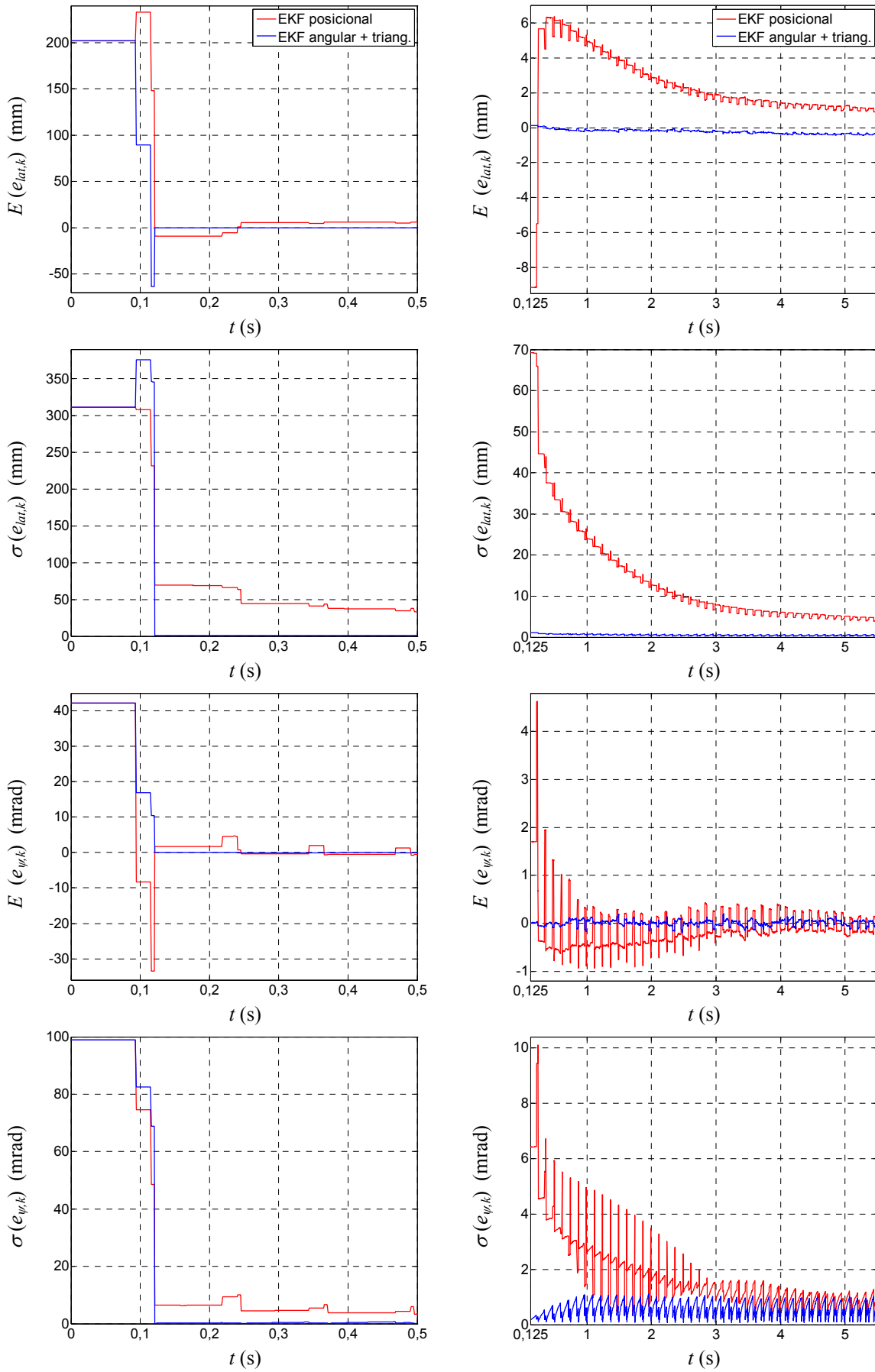


Figura 6.14 Resultats per a la trajectòria (7)

6.3 Valoració dels resultats obtinguts

A continuació es valoren els resultats que s'han obtingut en les simulacions de les diferents trajectòries. Els resultats que es mostren a la Taula 6.4 posen de manifest que el valor RMS de l'error lateral de posició i de l'error d'orientació al llarg del temps de simulació, a partir de la primera volta del sensor làser ($t = 0,125$ s) és inferior si s'utilitza el mètode de posicionament que es presenta en aquest treball. A més, aquesta afirmació es compleix en totes les trajectòries simulades. Els valors RMS de l'error lateral de posició i de l'error d'orientació que s'obtenen si s'utilitza el mètode de posicionament presentat són aproximadament un ordre de magnitud inferiors als obtinguts aplicant el mètode usual basat en el EKF d'estat posicional.

La diferència més gran entre els valors RMS de l'error lateral s'han trobat en la simulació de la trajectòria (2), en aquest cas el valor obtingut mitjançant el mètode presentat a la tesi és de 0,11 mm, mentre que el que s'obté amb el mètode alternatiu és de 4,24 mm. La diferència més gran entre els valors RMS de l'error d'orientació es troben en la simulació de la trajectòria (3), en la que amb l'aplicació del mètode presentat s'obté 0,057 mrad, mentre que amb el filtre de Kalman d'estat posicional el valor és de 0,938 mrad.

Una altra conclusió que s'extreu dels resultats que apareixen a la Taula 6.4 té a veure amb la variabilitat del valor RMS dels errors de posicionament d'una trajectòria a l'altra. S'observa com aquest valor té menys variabilitat d'una trajectòria a l'altra si s'aplica el mètode presentat d'estimació dinàmica angular (EKF angular) i triangulació.

La Taula 6.5 mostra els valors mitjans de l'error lateral i de l'error d'orientació per a $t = 0,125$ s, és a dir, quan el sensor angular làser ha realitzat una volta sencera –i per tant ha mesurat l'angle corresponent als tres reflectors–. La principal conclusió que s'extreu d'aquests resultats és que l'algorisme presentat és molt més ràpid reduint els errors inicials de posicionament ($E(e_{lat,0}) \approx 200$ mm i $E(e_{\psi,0}) \approx 50$ mrad). Mitjançant l'estimació dinàmica angular i el posicionament per triangulació s'aconsegueix reduir la mitjana de l'error lateral per sota els 0,3 mm i la de l'error de l'orientació per sota els 0,04 mrad –en totes les trajectòries– després d'una volta del sensor. En canvi, mitjançant el EKF posicional no es redueixen tant els errors després d'incorporar les tres primeres mesures angulars (primera volta del sensor). S'observa com l'error lateral mitjà oscil·la entre 2 i 9 mm depenent de la trajectòria, i l'error d'orientació mitjà entre 0,05 i 2 mrad.

La raó per la qual la correcció de l'error inicial de posicionament es realitza de forma més ràpida amb el mètode que es presenta és perquè l'equació de mesura del EKF angular que s'utilitza és *lineal*, i per tant no es comet error de linealització en l'etapa d'actualització de l'estat, tal com s'ha exposat a l'apartat 5.4 que fa referència a la integració de les mesures angulars en l'etapa d'actualització del filtre.

En canvi, en el EKF d'estat posicional l'equació que relaciona l'estat amb les mesures angulars és *no lineal*, i en l'etapa d'actualització es comet un error associat a la utilització de l'aproximació lineal d'aquesta equació. Aquest error és important si la diferència entre la predicció del posicionament $\bar{\mathbf{y}}_k$ i l'actualització $\tilde{\mathbf{y}}_k$ és gran –tal com s'explica a l'apartat 5.4–, i per aquest motiu l'algorisme no corregeix tan ràpidament l'error en la predicció inicial del posicionament $\bar{\mathbf{y}}_0$. Aquest fet es fa palès en els gràfics de l'evolució dels paràmetres d'error $E(e_{lat,k})$ i $E(e_{\psi,k})$ per a les diferents trajectòries (Figures 6.8–

6.14), s'observa clarament com la correcció de l'error inicial és molt més ràpida si s'utilitza el mètode que es presenta (corbes blaves) que si s'utilitza el mètode alternatiu (corbes vermelles).

S'observa també –a partir dels resultats de la Taula 6.5– com el valor mitjà de l'error lateral de posició a $t = 0,125$ s varia molt d'una trajectòria a l'altra si s'utilitza el mètode alternatiu (EKF posicional). Aquest error és, en canvi, més homogeni si es calcula el posicionament per triangulació després d'estimar dinàmicament els angles. Per tant, es pot concloure que el mètode basat en el EKF posicional és més sensible a la disposició, relativa al vehicle, dels reflectors emprats en el posicionament que el mètode presentat. En el EKF posicional, segons el tipus de trajectòria i els reflectors que s'utilitzin es corregeix d'una forma més ràpida o més lenta l'error inicial de posicionament.

El mètode que es presenta, en canvi, corregeix l'error en la predicció angular inicial \bar{x}_0 de forma adequada en tots els casos, i l'error de posicionament –de posició i d'orientació– és semblant per a totes les trajectòries després d'incorporar les tres primeres mesures angulars. Per tant, és un mètode menys sensible a la disposició dels reflectors relativa al vehicle. L'única precaució que s'ha de tenir en aplicar aquest mètode és que la trajectòria de P no s'apropi a la circumferència “crítica” que passa pels tres reflectors, on el mètode de triangulació és *indeterminat* com s'ha justificat al Capítol 4. Aquest fet podria provocar un error important en el càlcul del posicionament, durant aquestes condicions transitòries.

A continuació es passen a comentar amb més deteniment els gràfics que es mostren en les Figures 6.8-6.14. S'observen característiques similars en els gràfics obtinguts per a les diferents trajectòries.

Una primera característica que es veu ràpidament si s'observa els gràfics de la part esquerra, és com la correcció més acurada de l'error inicial de posicionament no es realitza fins que es detecta el tercer reflector. S'observa com en aquesta fase inicial ($t < 0,125$ s, temps que dura la primera volta del sensor) els paràmetres $E(e_{lat,k})$ i $E(e_{\psi,k})$ tenen un comportament similar al dels paràmetres de dispersió $\sigma(e_{lat,k})$ i $\sigma(e_{\psi,k})$. Per tant, es pot concloure que fins que no es detecta el tercer reflector els dos mètodes de posicionament no són precisos (valors mitjans d'error elevats), i a més la desviació estàndard de les variables de posicionament calculades és elevada.

Els dos algorismes passen a comportar-se de forma diferent després d'aquesta tercera reflexió ($t > 0,125$ s). Com s'ha vist i comentat a partir dels valors de la Taula 6.5, els errors de posicionament a $t = 0,125$ s són aproximadament un ordre de magnitud més baixos si s'utilitza el mètode que es presenta. En aquesta fase s'observa com la corba blava d'error lateral $E(e_{lat,k})$ i d'error d'orientació $E(e_{\psi,k})$ es manté propera al zero, mentre que les corbes vermelles de les mateixes variables s'hi van aproximant poc a poc. A més els paràmetres de dispersió $\sigma(e_{lat,k})$ i $\sigma(e_{\psi,k})$ també tenen aquesta tendència.

Un altre aspecte interessant és el que s'observa en el gràfic de l'evolució de $E(e_{lat,k})$ de la Figura 6.8 –trajectòria (1)– si s'utilitza el mètode presentat (corba blava). Es pot veure com la mitjana de l'error lateral creix al llarg del temps –encara que sempre es manté per sota de 0,5 mm–, perquè la trajectòria simulada cada vegada s'apropa més al triangle que determinen els tres reflectors (Figura 6.5) i en aquest cas l'error en el càlcul de la posició mitjançant triangulació augmenta. Cal dir que aquest error lateral disminuirà quan continuï

la trajectòria i s'utilitzi un nou conjunt de reflectors més adequat per a triangular. Aquesta situació també s'observa als gràfics corresponents a les trajectòries (2) i (3).

Un aspecte que crida l'atenció, i s'ho val de ser comentat, és el que s'observa en l'evolució de $\sigma(e_{\psi,k})$ quan s'aplica el mètode presentat (corba blava). S'observa en totes les trajectòries com aquest paràmetre augmenta entre 0,125 s i 1 s, i s'estabilitza a partir d'aquest instant. Això és així perquè entre 0 i 1 s el vehicle està *accelerant*, les velocitats motoritzades de les rodes del robot $v_{i,k}$ ($i = 1,2,3$) creixen progressivament i per tant també creix la desviació estàndard de l'error hodomètric $\sigma_{v_i,k}$, equació (6.7).

Com que l'etapa de transició d'estat del filtre depèn de les mesures hodomètriques, quan més gran sigui la dispersió del seu error més gran serà també la dispersió de l'error en l'estat angular. I en conseqüència, també serà més gran la dispersió de les variables de posicionament calculades. Aquest aspecte també s'observa, però en menor mesura, en l'evolució de $\sigma(e_{lat,k})$.

Un altre fet remarcable és el que s'observa en la simulació de les trajectòries (5) i (6). En aquests casos, la correcció dels errors inicials de posició i d'orientació quan s'utilitza el EKF posicional es realitza de forma més ràpida que en les altres trajectòries simulades. Al final de la simulació el comportament dels dos algorismes és molt similar perquè en aquests instants l'error en l'estimació de l'estat és molt petit, i per tant l'error de linealització comès en l'etapa d'actualització del EKF posicional és d'un ordre de magnitud negligible. Tot i aquesta millora en la precisió del EKF posicional en els instants finals d'aquestes trajectòries –(5) i (6)–, s'observa com en els instants inicials l'algorisme presentat a la tesi és sensiblement superior en termes de precisió.

Finalment, cal comentar un últim aspecte que s'aprecia en la simulació de la trajectòria (4) i que té a veure amb l'error d'orientació. S'observa com el valor de $E(e_{\psi,k})$ oscil·la al llarg del temps amb un clar biaix respecte a l'error nul si s'empra el EKF posicional (corba vermella), a més, aquest error es corregeix de forma molt lenta. La desviació estàndard $\sigma(e_{\psi,k})$ també és elevada en aquest cas. Aquest fet no s'observa si s'utilitza el mètode de posicionament presentat basat en la triangulació (corba blava) que presenta un error baix al llarg de tota la simulació.

Capítol 7

Validació experimental

En aquest capítol es comprova experimentalment la precisió del mètode dinàmic de posicionament objecte de la tesi. Tal com s'ha fet en el Capítol 6, la precisió del mètode es compara amb la que s'obté per mitjà del EKF d'estat posicional. Per a fer les proves experimentals s'utilitzarà el robot mòbil SPHERIK-3x3 equipat amb el sistema de posicionament làser GCS LS6 –que s'ha descrit a l'apartat anterior– i els sensors hodomètrics integrats en cadascun dels grups motrius del robot. Aquests sensors realitzen, respectivament, les mesures angulars externes $\theta_{i,k}$ i les hodomètriques u_k , que són utilitzades pels algorismes de Kalman.

Per a comprovar la precisió del mètode de posicionament, cal un sistema que en tot instant determini la posició del centre del capçal làser i l'orientació del robot mòbil amb una precisió d'un ordre de magnitud més gran que el mètode que es pretén validar. El sistema de validació utilitzat consta de dos encoders incrementals d'alta precisió (mesures angulars φ_1 i φ_2) i un potenciòmetre lineal (mesura de longitud l). Mitjançant aquest sistema es mesura la posició del centre del capçal en coordenades polars –angle φ_1 i distància l –, i també l'orientació del robot mitjançant les mesures dels dos encoders. Se l'anomenarà al llarg d'aquest capítol *sistema metroològic* de validació del posicionament.

Cal comentar que el *muntatge experimental* per a realitzar aquesta validació s'ha dissenyat al Departament d'Enginyeria Mecànica de la UPC, simultàniament amb la realització de la tesi. El Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial (ESAI) de la UPC també ha participat en el disseny del muntatge, desenvolupant la seva part electrònica i informàtica. Les proves experimentals han estat realitzades al Laboratori de Mecànica de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB).

7.1 Descripció del muntatge d'experimentació

La validació experimental que es proposa consisteix en la comparació del posicionament determinat pels dos *mètodes dinàmics* d'estimació –el que s'ha presentat a la tesi i que es basa en una primera etapa d'*estimació angular* i una segona de posicionament per *triangulació*, i l'usual basat en el *EKF posicional*– amb el posicionament que mesura el

sistema metrològic. Aquest últim realitza una mesura més precisa de la posició i l'orientació del robot en el decurs del seu moviment.

Tal com s'il·lustra en el diagrama de blocs de la Figura 7.1, a partir de l'estimació dinàmica del posicionament (posició i orientació *calculats*) i del posicionament mesurat pel sistema metrològic (posició i orientació *metrològics*), es calculen els paràmetres indicatius de la precisió dels mètodes dinàmics –“EKF angular + triangulació” i “EKF posicional”–. Aquests paràmetres són l'*error lateral* (e_{lat}) entre la trajectòria de P calculada per cadascun dels mètodes i la metrològica, i l'*error d'orientació* (e_{ψ}) també entre l'orientació calculada i la metrològica. Més endavant es formularà el càlcul d'aquests paràmetres per a cada trajectòria.

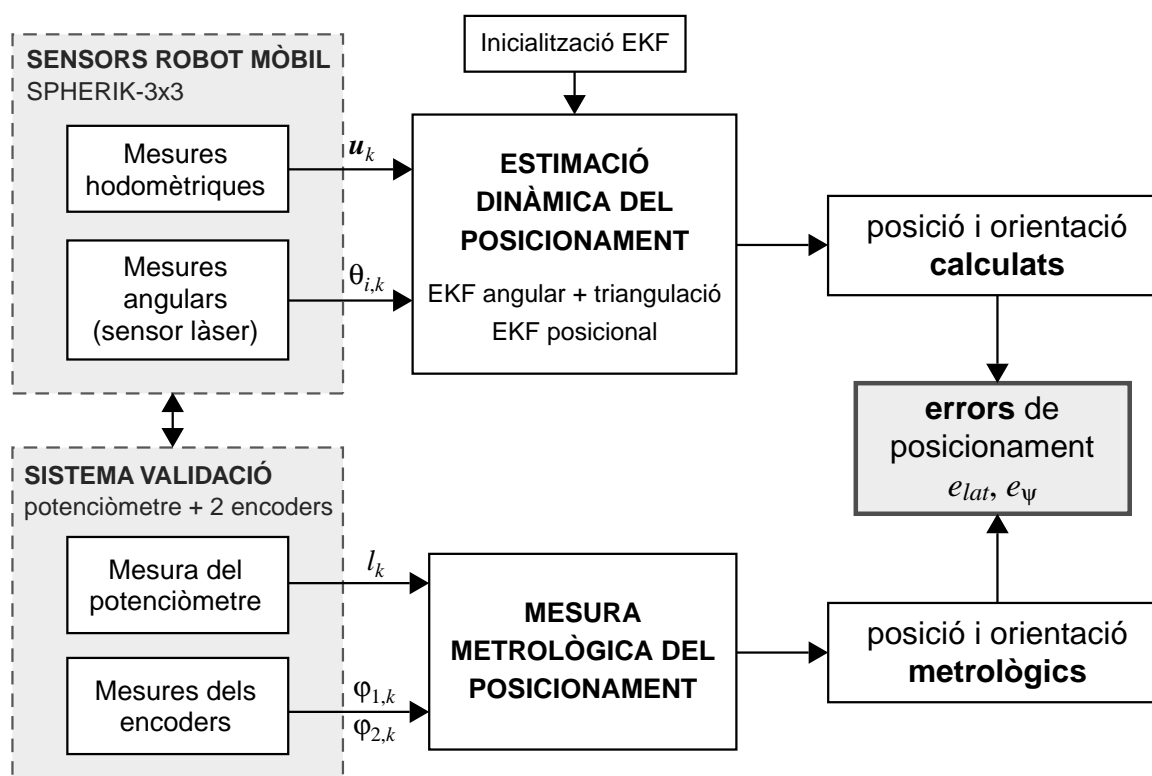


Figura 7.1 Diagrama de blocs del procediment seguit en el procés de validació experimental

A continuació es descriuen els diferents components del muntatge experimental que s'utilitza en aquesta fase de validació: el robot mòbil SPHERIK-3x3, el sistema de posicionament làser emprat, el sistema metrològic de validació que s'ha dissenyat, i finalment s'explica també el funcionament del sistema de control i d'adquisició de dades dels diferents sensors que s'utilitzen en el muntatge.

7.1.1 Robot mòbil SPHERIK-3x3

El robot mòbil SPHERIK-3x3 és una plataforma robotitzada que es va desenvolupar durant els anys 2000 i 2001 al Departament d'Enginyeria Mecànica de la UPC en el marc del projecte *Robot Mòbil* del Centre de Referència de R+D en Tècniques Avançades de la Producció (CeRTAP). La Figura 7.2(a) mostra el disseny en CAD previ a la fabricació i muntatge del prototip real, que es mostra a la Figura 7.2(b).

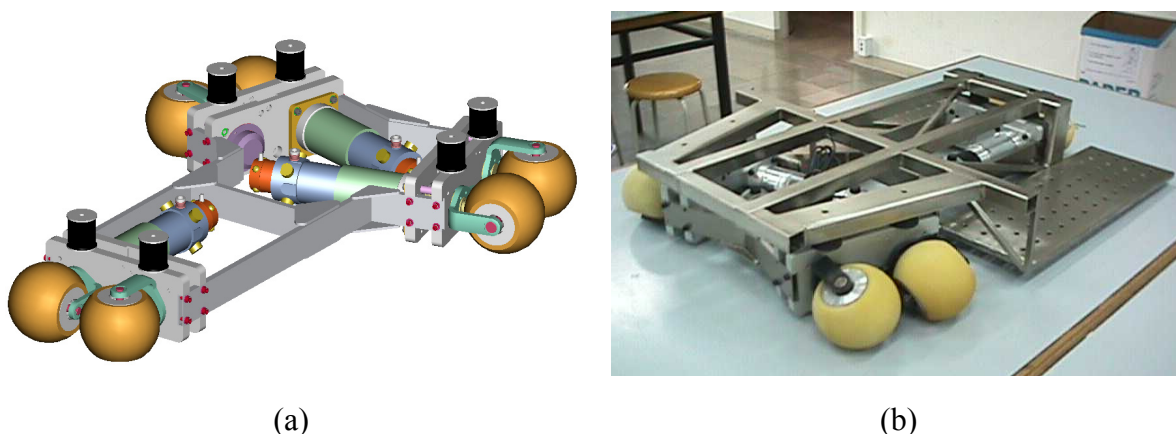


Figura 7.2 Robot mòbil SPHERIK-3x3: (a) Disseny en CAD, i (b) Prototip real

El robot mòbil està format per tres rodes omnidireccionals de corrns esfèrics [Agulló i Fortuny 1998] accionades per tres motors independents, mitjançant els quals es controlen els *tres graus de llibertat* del moviment pla del robot, Figura 7.3.

La característica més remarcable d'aquest robot –tal com ja s'ha introduït a l'apartat 3.3 d'aquest treball– és la invariància de la matriu jacobiana que relaciona les velocitats angulars de gir dels diferents motors $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^T$ amb el vector de velocitats generalitzades $\{v_L, v_T, \dot{\psi}\}^T$, que s'associen a la velocitat d'un punt del robot i a la velocitat angular de canvi d'orientació del bastidor. La matriu jacobiana referida al punt que s'assenyala a la Figura 7.3 és:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = J_\omega \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -L \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -s \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -s \end{bmatrix}}_{J_\omega} \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}, \quad (7.1)$$

on els paràmetres geomètrics L , s , α i r es defineixen a la mateixa figura.

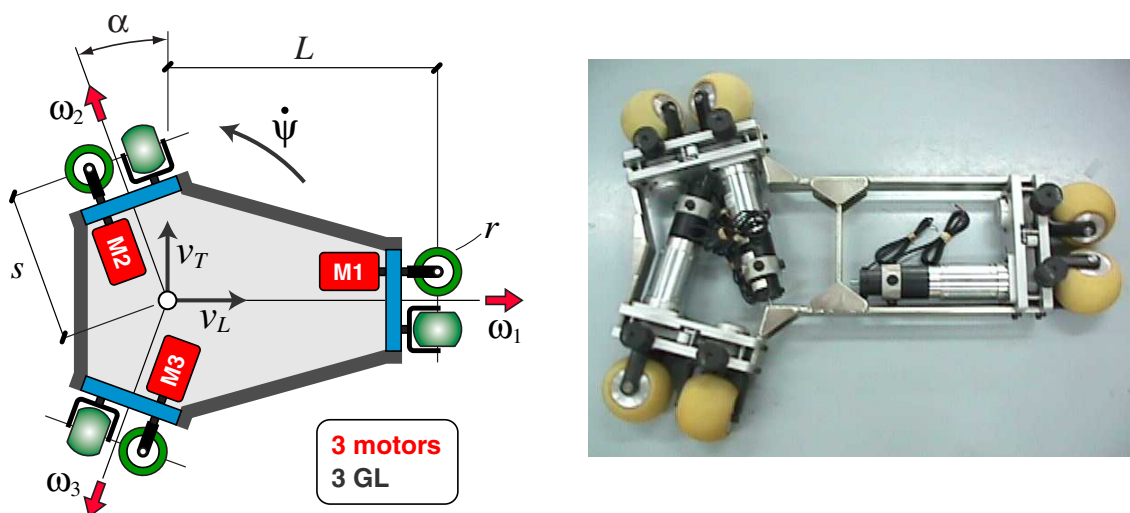


Figura 7.3 Graus de llibertat del robot mòbil SPHERIK-3x3

A partir de la relació entre aquests dos vectors, a la Figura 7.4 es mostren les velocitats de gir dels motors per als moviments *longitudinal*, *transversal* i de *rotació* al voltant del punt que s'assenyala. S'obtenen a partir de la relació introduïda per l'equació (7.1).

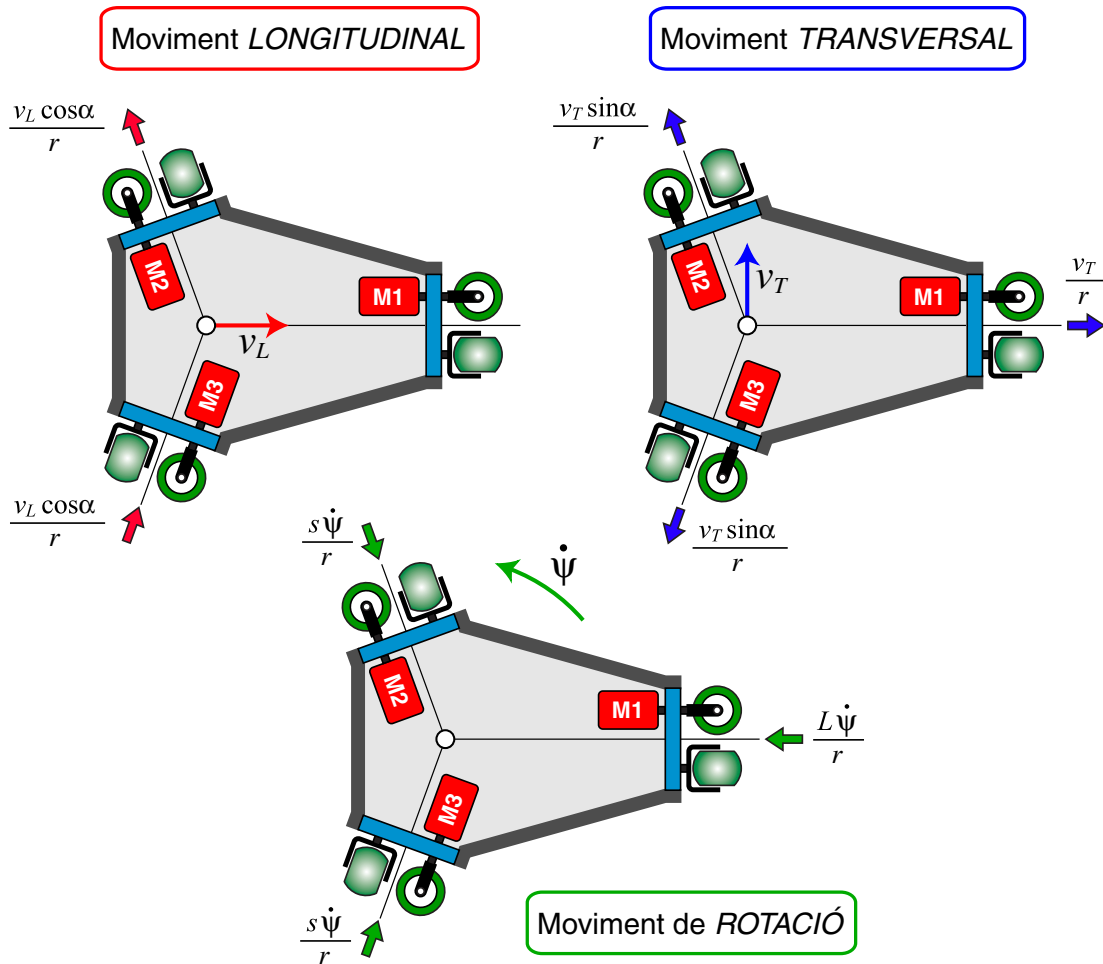


Figura 7.4 Velocitats angulars de gir dels motors en cada tipus de moviment del robot

7.1.2 Sistema de posicionament làser

El sistema de posicionament làser que es considera està format per un capçal làser i un conjunt de reflectors catadiòptrics disposats sobre les parets de l'entorn per on es mou el robot. A la Figura 7.5 es pot veure el robot mòbil SPHERIK-3x3 equipat amb el capçal làser dins el Laboratori de Mecànica de l'ETSEIB.

El capçal làser utilitzat és el model LS6 del fabricant *Guidance Control Systems Ltd.* (GCS) i s'utilitza per a mesurar l'angle, relatiu al robot, de la recta entre el centre del capçal i l'extrem del reflector que es detecta en primer lloc. Aquestes mesures, juntament amb la posició coneguda d'un mínim de 3 reflectors, permeten el càlcul precís del posicionament del robot per *triangulació* si aquest està aturat.

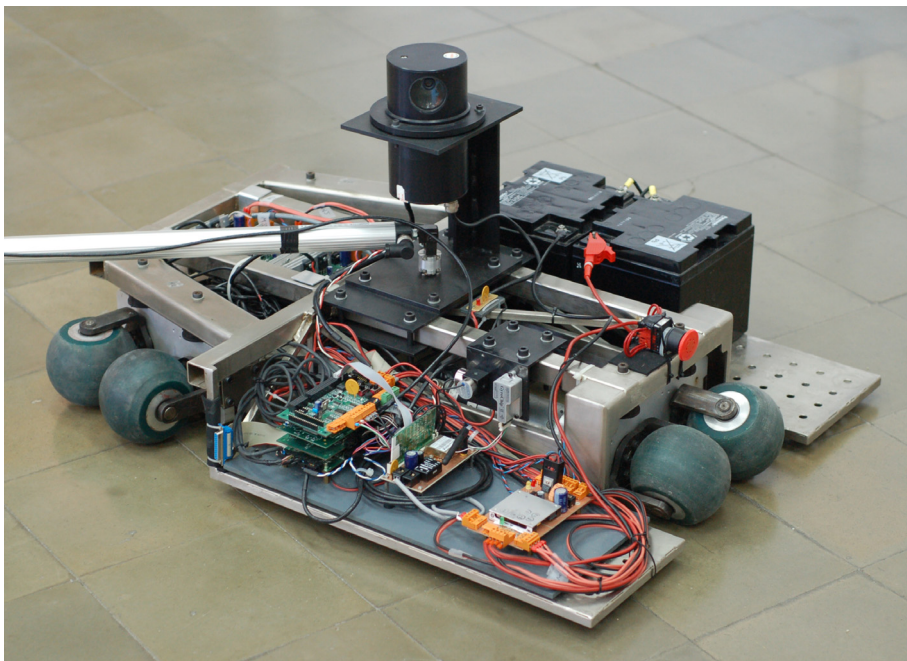


Figura 7.5 Robot SPHERIK-3x3 equipat amb el capçal làser GCS LS6

La mesura angular es realitza de la següent manera: El sensor emet un feix làser que gira al voltant de l'eix vertical del capçal a una freqüència de 8 Hz –fa 8 voltes cada segon– en sentit antihorari respecte al bastidor. El feix làser escombra l'entorn del robot i es reflecteix quan incideix en un reflector. Aquesta reflexió és detectada mitjançant un fotoreceptor que incorpora el capçal, i aleshores l'angle relatiu al robot del feix reflectit és mesurat per un encoder òptic incremental de 65536 polsos.

A l'Annex C d'aquesta tesi s'explica amb més detall com es genera aquesta mesura i es modelitza el seu error. L'error de *mesura* ($\delta\theta_m$) prové de la pròpia resolució de l'aparell (error de *resolució*, $\delta\theta_r$), i de l'error comès en la determinació de l'instant de detecció (error de *detecció*, $\delta\theta_d$) que tal com es justifica pot provenir de diferents causes. En aquest annex es calcula una estimació de la variància $R \equiv \sigma_{\theta_m}^2$ de l'error en les mesures angulars del sensor, necessària per a l'aplicació dels algorismes basats en el filtre de Kalman:

$$R \equiv E[\delta\theta_m^2] = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ rad}^2. \quad (7.2)$$

7.1.3 Sistema metrològic de validació del posicionament dinàmic

Per a validar el càlcul del posicionament realitzat mitjançant els mètodes dinàmics d'estimació que es comparen, cal un sistema que mesuri la trajectòria del centre del capçal làser i l'orientació del robot en cada instant de temps amb una precisió per sota el *mil·límetre* en el cas de la posició i per sota el *mil·liradian* en el cas de l'orientació.

El sistema dissenyat per a mesurar de forma precisa el posicionament del robot està format per dos encoders incrementals i per un potenciòmetre lineal d'elevada precisió. Els dos encoders escollits són el model 9220 de la marca *Gurley Precision Instruments* (GPI), i el potenciòmetre lineal és el model LWG-750 de la marca *Novotechnik*.

A la Figura 7.6 es mostra un esquema de la disposició dels sensors de validació del posicionament. L'encoder (1) té la part fixa unida a un suport fix al terra i l'eix que gira solidari amb el potenciòmetre, per tant, mesura l'angle φ_1 girat pel potenciòmetre respecte al terra. L'encoder (2), en canvi, té la part fixa unida al bastidor del robot i l'eix que també gira solidari amb el potenciòmetre. Aquesta mesura l'angle relatiu φ_2 entre potenciòmetre i robot.

El potenciòmetre té els extrems units als eixos dels encoders i mesura la distància l entre els punts O del terra i P del robot –que coincideix amb el centre del capçal làser–. Tal com s'observa a la Figura 7.6, en el muntatge experimental el centre del capçal làser P no coincideix amb el punt P' al qual està referida la matriu jacobiana J_o de l'equació (7.1).

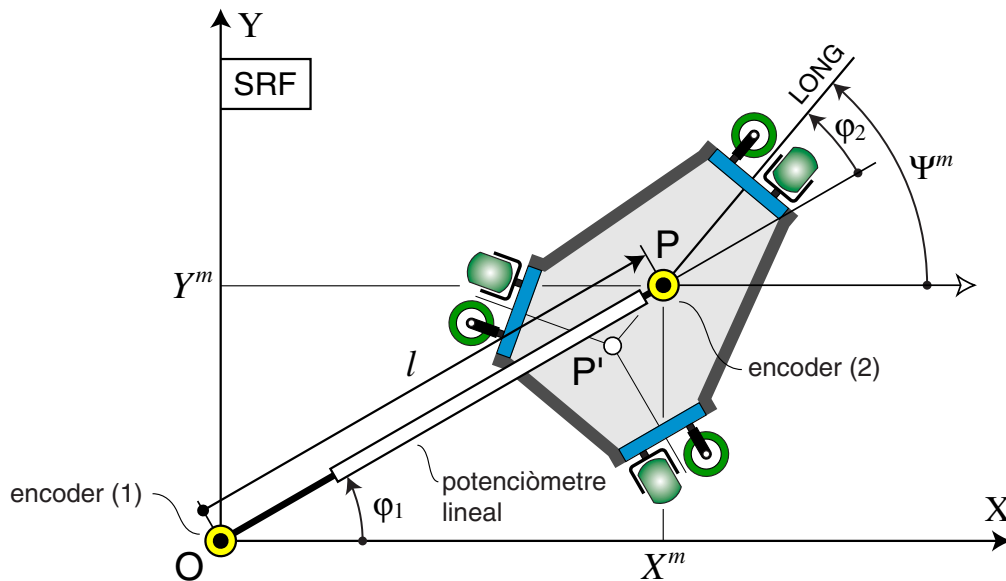


Figura 7.6 Esquema del sistema metrològic de validació del posicionament

Mitjançant la mesura $\varphi_{1,k}$ de l'encoder (1) a l'instant t_{k_2} i la mesura l_k del potenciòmetre es determina la posició del punt P del robot $\{X_k^m, Y_k^m\}^T$ (el superíndex m indica posició mesurada pel sistema *metrològic*), i mitjançant les mesures dels encoders (1) i (2) – $\varphi_{1,k}$ i $\varphi_{2,k}$ respectivament– es determina l'orientació metrològica del vehicle Ψ_k^m per mitjà de les expressions:

$$\begin{Bmatrix} X_k^m \\ Y_k^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_k \cos \varphi_{1,k} \\ l_k \sin \varphi_{1,k} \end{Bmatrix}, \quad (7.3)$$

$$\Psi_k^m = \varphi_{1,k} + \varphi_{2,k}. \quad (7.4)$$

El vector $\{X_k^m, Y_k^m, \Psi_k^m\}^T$ representa la mesura metrològica del *posicionament* del robot a l'instant t_k expressada en el sistema de referència fix (SRF). El SRF té l'origen O a l'extrem del potenciòmetre fix al terra. La Figura 7.7 mostra els elements anteriors en el muntatge experimental dissenyat.

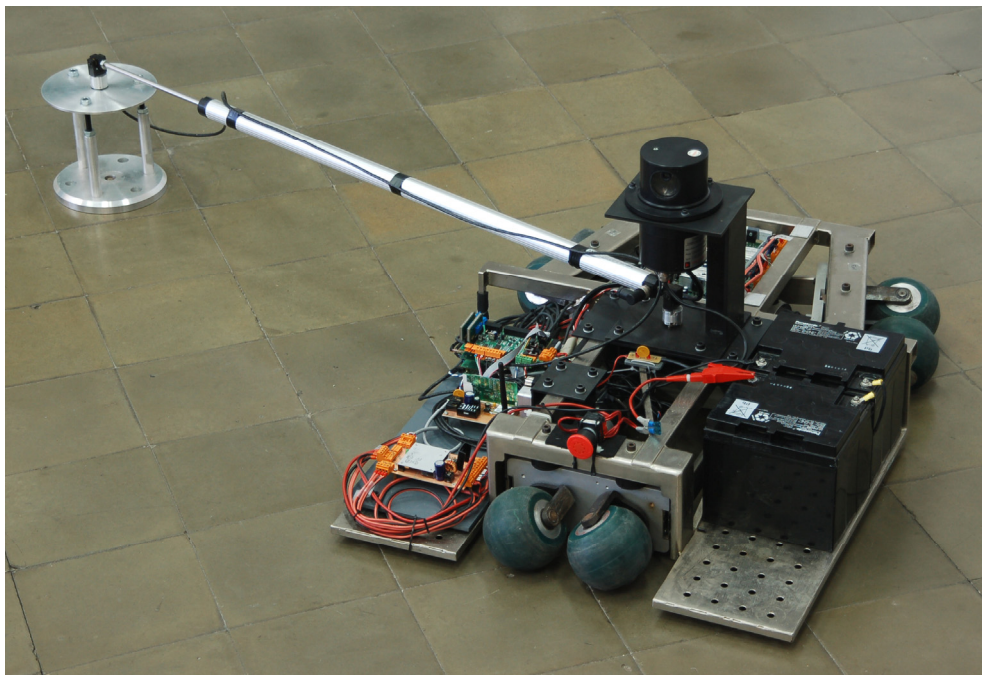


Figura 7.7 Elements del sistema metrològic en el muntatge experimental

És important assenyalar que a l'hora d'experimentar cal conèixer els valors inicials dels angles φ_1 i φ_2 , tota vegada que els encoders del sistema metrològic són incrementals i només en mesuren la seva variació. Per a determinar aquests angles inicials s'utilitza la mesura de la configuració del robot obtinguda en condició *estàtica* per mitjà del sistema làser, per a la qual aquest és molt precís. Per a determinar la configuració inicial del robot amb precisió, s'utilitzen els valors angulars θ_i ($i = 1,2,3$) obtinguts amitjanant 40 mesures (que ocupen 5 s de funcionament del sensor) de cadascun d'ells.

A les Taules 7.1 i 7.2 s'hi detallen les característiques tècniques més rellevants del potenciòmetre lineal Novotechnik LWG-750 i de l'encoder GPI 9220 respectivament. La informació que hi apareix ha estat facilitada pels fabricants d'aquests sensors.

Taula 7.1 Característiques tècniques del potenciòmetre lineal Novotechnik LWG-750

Rang de mesura	750 mm
Distància mínima entre extrems	1040 mm
Resistència nominal	10 k Ω
Tensió d'alimentació	< 42 V (CC)
Error de linealitat	< 0,04 %
Error de repetibilitat	< 0,01 mm
Força operativa horitzontal / vertical	7,5 N / 13,2 N
Vida	50·10 ⁶ curses

Taula 7.2 Característiques tècniques de l'encoder GPI 9220

Polsos per volta	36000
Polsos per volta (després de quadratura)	144000
Resolució de la mesura	9 arcsegons = 0,0436 mrad
Error màxim de la mesura ($\delta\varphi_{\max}$)	25 arcsegons = 0,121 mrad
Màxima càrrega radial	111 N
Vida dels rodaments	10^9 revolucions

Per mitjà d'aquestes característiques es determinen els errors màxims que es poden cometre en la mesura de la posició de P i de l'orientació del robot si s'utilitza el sistema metrològic. Aquest error, com s'ha dit anteriorment, ha de tenir un ordre de magnitud més petit que l'error que es pretén mesurar, que és l'*error lateral de posició* entre la trajectòria calculada mitjançant les mesures del sensor làser i la mesurada pel sistema metrològic; i l'*error d'orientació* també entre l'orientació calculada i la metrològica.

L'error màxim entre la posició real del punt P i la posició determinada mitjançant el sistema de validació, apareix quan les mesures l i φ_1 contenen un error màxim respecte al seu valor real l^r i φ_1^r respectivament:

$$l = l^r + \delta l_{\max} , \quad (7.5)$$

$$\varphi_1 = \varphi_1^r + \delta\varphi_{1,\max} . \quad (7.6)$$

L'error màxim en la mesura de l'encoder ve donat pel fabricant, i com es pot veure a la Taula 7.2 és $\delta\varphi_{1,\max} = 0,121$ mrad. Pel que fa a l'error màxim en la mesura del potenciòmetre, aquest prové de dues fonts: de l'error de repetibilitat –que com a molt és de 0,01 mm, Taula 7.1–, i de l'error associat a la conversió del senyal analògic a digital en la lectura. Com que la conversió és de 12 bits –entre 0 i el fons d'escala FE– aleshores l'error màxim que es pot cometre en aquest procés de digitalització del senyal és:

$$\delta l_{A \rightarrow D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{FE}{2^{12}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{750 \text{ mm}}{2^{12}} = 0,09 \text{ mm} . \quad (7.7)$$

L'error màxim total que es pot cometre en el cas pitjor és la suma d'aquests dos errors, i per tant $\delta l_{\max} = 0,1$ mm. En la Taula 7.1 també hi apareix l'error de linealitat de la mesura, que és com a molt un 0,04% respecte al fons d'escala. No obstant, aquest error no es considera perquè és de tipus *sistemàtic* i es pot corregir amb el calibratge del sensor. A partir dels errors màxims dels sensors $\delta\varphi_{1,\max}$ i δl_{\max} , l'error màxim que es pot cometre en la determinació de la posició de P, Figura 7.8, és:

$$e_{P,\max} \approx \sqrt{(l^r \delta\varphi_{1,\max})^2 + (\delta l_{\max})^2} . \quad (7.8)$$

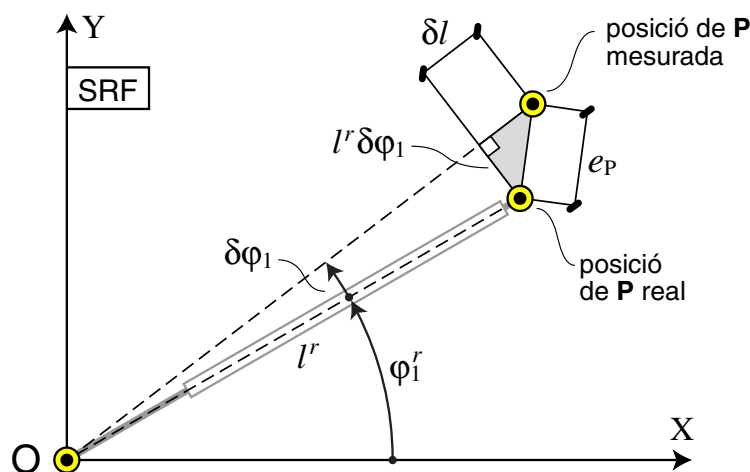


Figura 7.8 Error en la determinació de la posició mitjançant el sistema metrològic

L'expressió anterior dóna l'error màxim que es pot cometre per a un allargament l qualsevol del potenciòmetre. La cota màxima d'aquest error de posició es tindrà quan l'allargament sigui màxim ($l_{\max} = 1790 \text{ mm}$), i per tant en aquest cas l'error serà:

$$e_{P,\max} \leq \sqrt{(1790 \cdot 0,121 \cdot 10^{-3})^2 + (0,1)^2} = 0,24 \text{ mm} . \quad (7.9)$$

L'allargament mínim del potenciòmetre ($l_{\min} = 1040 \text{ mm}$) estableix la cota mínima de l'error $e_{P,\max}$:

$$e_{P,\max} \geq \sqrt{(1040 \cdot 0,121 \cdot 10^{-3})^2 + (0,1)^2} = 0,16 \text{ mm} . \quad (7.10)$$

Per tant, l'error màxim en la determinació de la posició mitjançant el sistema metrològic oscil·larà entre 0,16 mm i 0,24 mm, valor que és d'un ordre de magnitud inferior a la precisió que es vol comprovar –la del posicionament mitjançant el sensor làser en condicions dinàmiques– que és de l'ordre del mm.

Pel que fa a la determinació de l'orientació del robot, a l'equació (7.4) s'observa que és suma de les dues mesures dels encoders. Per tant, en el cas pitjor, l'error màxim que es pot cometre al mesurar l'orientació del robot és:

$$e_{O,\max} = \delta\varphi_{1,\max} + \delta\varphi_{2,\max} = 0,242 \text{ mrad} . \quad (7.11)$$

Aquesta cota màxima de l'error en la determinació de l'orientació mitjançant el sistema de validació, és també un ordre de magnitud inferior als errors d'orientació dels mètodes de posicionament dinàmic que es pretenen mesurar que són de l'ordre del mrad.

Una consideració final que cal remarcar és que les expressions (7.9) i (7.11) representen *cotes màximes* d'errors de tipus aleatori que segueixen distribucions de probabilitat que s'aproximen a una gaussiana. És així perquè provenen de diferents fonts d'incertesa independents, i el *teorema central del límit* estableix que la funció de densitat de probabilitat de la seva suma tendirà a una gaussiana [Bar-Shalom *et al.* 2001]. Per tant, serà improbable que durant l'aplicació s'arribi a aquestes cotes màximes d'error.

Càlcul dels errors de posicionament e_{lat} i e_{ψ}

En l'experimentació que es presenta es pren el posicionament metrològic $\{X_k^m, Y_k^m, \Psi_k^m\}^T$ determinat a cada instant t_k com a referència, ja que és la mesura més acurada del posicionament real del robot quan aquest es mou.

Si s'anomena $\{\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k, \tilde{\Psi}_k\}^T$ al posicionament dinàmic estimat mitjançant un dels algorismes dinàmics en el SRF, aleshores fent una analogia amb les equacions (6.13) i (6.14) introduïdes a l'apartat 6.1.3 s'obtenen les següents equacions per a determinar l'error lateral e_{lat} entre la trajectòria estimada –o calculada– i la determinada metrològicament, i l'error d'orientació e_{ψ} entre l'orientació calculada i la metrològica:

$$e_{lat,k} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} X_k^m - X_{k-1}^m \\ Y_k^m - Y_{k-1}^m \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_k - X_{k-1}^m \\ \tilde{Y}_k - Y_{k-1}^m \end{array} \right\} \Big|_Z}{\left\| \begin{array}{l} X_k^m - X_{k-1}^m \\ Y_k^m - Y_{k-1}^m \end{array} \right\|} \quad (7.12)$$

$$= \frac{(X_k^m - X_{k-1}^m)(\tilde{Y}_k - Y_{k-1}^m) - (\tilde{X}_k - X_{k-1}^m)(Y_k^m - Y_{k-1}^m)}{\sqrt{(X_k^m - X_{k-1}^m)^2 + (Y_k^m - Y_{k-1}^m)^2}},$$

$$e_{\psi,k} = \tilde{\Psi}_k - \Psi_k^m. \quad (7.13)$$

El valor de l'error lateral $e_{lat,k}$ és positiu si el punt calculat es troba a l'esquerra de la trajectòria real (en el sentit de la marxa) i negatiu en cas contrari, tal com es mostra a la Figura 6.4 del capítol anterior.

Cal esmentar que el mètode de posicionament desenvolupat utilitza un sistema de referència associat al triplet de reflectors que s'utilitza en la triangulació (SRT, Sistema de Referència Triplet). El posicionament estimat a l'instant t_k mitjançant aquest sistema de referència s'indica amb les variables en minúscula: $\{\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{\psi}_k\}^T$.

Per a convertir aquest posicionament expressat en el SRT al posicionament $\{\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k, \tilde{\Psi}_k\}^T$ en el SRF –sistema de referència en el qual s'ha expressat el posicionament metrològic de referència– s'utilitzen les equacions (4.24) i (4.26) introduïdes al Capítol 4. En el procés de canvi de sistema de referència del vector posicionament no s'acumula error, perquè depèn de la posició dels reflectors respecte al SRF que es suposa coneguda sense error. De fet, la posició dels reflectors instal·lats al laboratori ha estat mesurada per mitjà d'un teodolit amb una precisió per sota la dècima de mm.

7.1.4 Sistema de control i adquisició de dades

En aquest apartat es fa una breu descripció del *sistema de control i adquisició de dades* que incorpora el muntatge d'experimentació. En els projectes fi de carrera [Ferràs 2004, Munar 2006], desenvolupats al Departament d'ESAI de la Universitat Politècnica de Catalunya, es pot trobar informació més detallada sobre aquests sistemes.

En el primer, es dissenya i s'implementa un sistema de control digital per al robot mòbil mitjançant un DSP (*Digital Signal Processor*). En el projecte s'inclou el disseny de tots els circuits electrònics i programaris necessaris per al seu funcionament.

En el segon projecte es parteix del disseny del sistema de control del primer, i s'aprofita el DSP per a realitzar l'adquisició digital –cada $\Delta t = 1 \text{ ms}$ – de les mesures de tots els sensors: el sensor làser (mesures angulars externes $\theta_{i,k}$; $i=1,2,3$), els dos encoders i el potenciómetre del sistema metrològic (mesures $\varphi_{1,k}$, $\varphi_{2,k}$ i l_k), i els encoders dels tres motors del robot (a partir dels quals s'obtenen les mesures de velocitat motoritzada: $v_{1,k}$, $v_{2,k}$ i $v_{3,k}$). Aquestes mesures s'envien per comunicació Wi-Fi a un *PC extern* al robot que emmagatzema les dades per a cada instant de temps $t_k \equiv k\Delta t$; $k = 0,1,2,3$, etc.

El diagrama de blocs de la Figura 7.9 mostra l'esquema general dels components que integren el sistema de control i adquisició de dades del robot. Els components dins la zona grisa són els interns al robot. Aquests són el *sistema d'adquisició i comunicació* –format per les plaques d'adquisició (AD-1 i AD-2) i la placa de comunicació (COM)–, el DSP *Texas Instruments TMS320F2810*, les etapes de potència, i els *grups motrius* –que estan formats pel conjunt motor-reductor i els encoders–. El sistema s'alimenta amb dues bateries de corrent continu de 12 V en sèrie. Una placa s'encarrega d'adaptar el nivell de tensió que requereix cada component del sistema (sensors, DSP, etc.), i d'alimentar les etapes de potència dels motors.

El motor –de corrent continu– és el model RS320 ZE del fabricant *Parvex*, acoblat amb un reductor epicicloïdal de dues etapes (model *Parvex* GTL-7) de relació de reducció 1:28. L'encoder òptic del motor el subministra el mateix fabricant (model K10) i té una resolució de 500 pulsos per volta. Extern al robot hi ha el sistema metrològic de validació del posicionament, el sistema de posicionament làser –el capçal està fixat al robot però realitza mesures dels reflectors situats a l'entorn, per això es considera extern–, i el PC que és l'encarregat d'enviar la consigna de velocitat i d'emmagatzemar les mesures dels sensors.

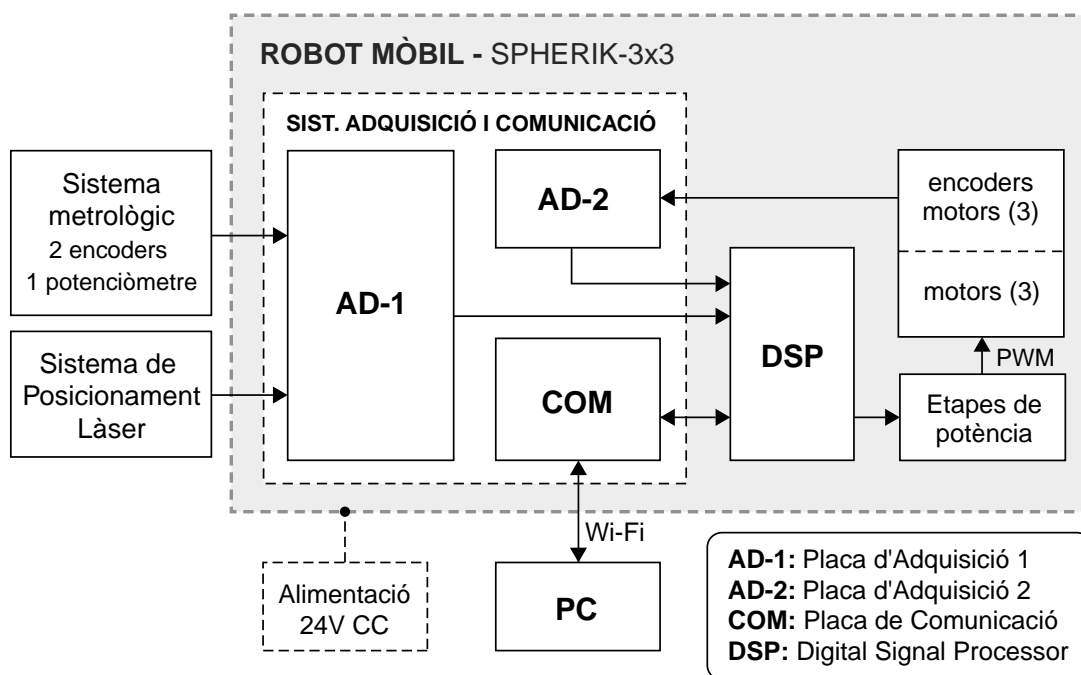
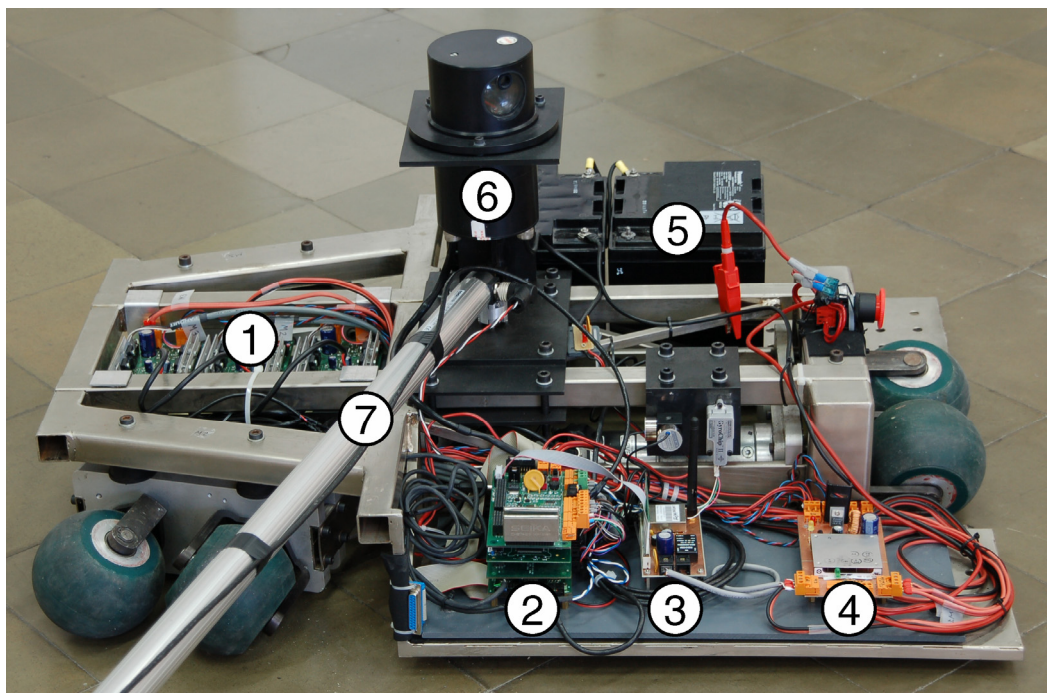


Figura 7.9 Esquema de blocs del sistema de control i d'adquisició de dades

La Figura 7.10 mostra la disposició d'alguns dels components del sistema de control i adquisició de dades en el robot mòbil. Tot seguit s'explica amb més deteniment el funcionament del control cinemàtic del robot i del sistema d'adquisició de dades dels diferents sensors. S'explica també la funció dels elements que hi intervenen en cada cas.



1. Etapes de potència
2. Plagues AD-1, AD-2 i DSP
3. Placa COM
4. Placa d'alimentació
5. 2 bateries de 12V CC
6. Capçal làser
7. Sistema metrològic

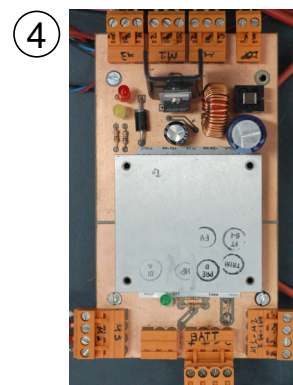
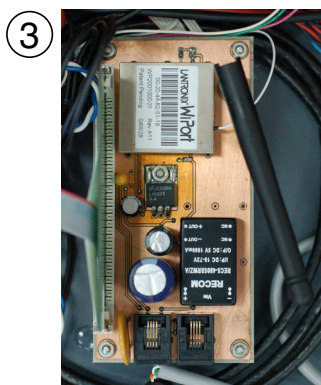
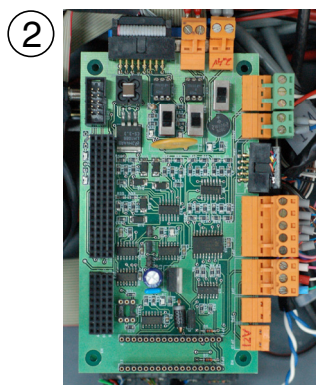
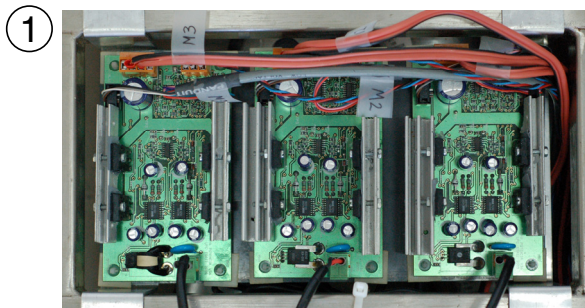


Figura 7.10 Disposició dels components del sistema de control i adquisició de dades

Sistema de control digital

La Figura 7.11 mostra remarcats en blau els components del sistema que intervenen en el control del vehicle. El PC extern és qui envia mitjançant comunicació sense fils (Wi-Fi) la consigna de velocitats generalitzades de velocitat del robot $\{v_L, v_T, \psi\}^T$ –referides al punt on està situat el sensor làser– en cada instant de temps de la trajectòria. La placa de comunicació (COM) és qui codifica aquesta informació a senyals elèctriques digitals que rep el DSP.

El processador digital de senyal (DSP) té implementada la matriu jacobiana J_ω del robot, que relaciona les velocitats generalitzades amb la velocitat de gir de cada motor –equació (7.1)–, i calcula la velocitat angular que ha de tenir cada motor: $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^T$. El DSP compara aquestes velocitats *teòriques* amb les *reals* –determinades a partir de les mesures dels tres encoders– i realitza el control de velocitat de cada grup per mitjà d'un controlador tipus PI (Proporcional Integral) implementat al mateix DSP.

En l'adquisició de les mesures dels encoders, la placa AD-2 és l'encarregada d'adaptar el nivell de tensió del senyal generat pels encoders de cada grup (5 V) al nivell de tensió del DSP (3,3 V). La metodologia de càlcul de les velocitats instantànies dels motors a partir de les mesures angulars dels encoders s'explica amb detall a [Ferràs 2004].

Finalment, el DSP envia el senyal corresponent a les etapes de potència (*drivers*) de cada motor –tres etapes independents–. Les etapes de potència són les encarregades de generar els voltatges elèctrics de potència de tipus PWM (*Pulse-Width Modulation*) que regulen la tensió mitjana amb què s'alimenta cada motor de corrent continu.

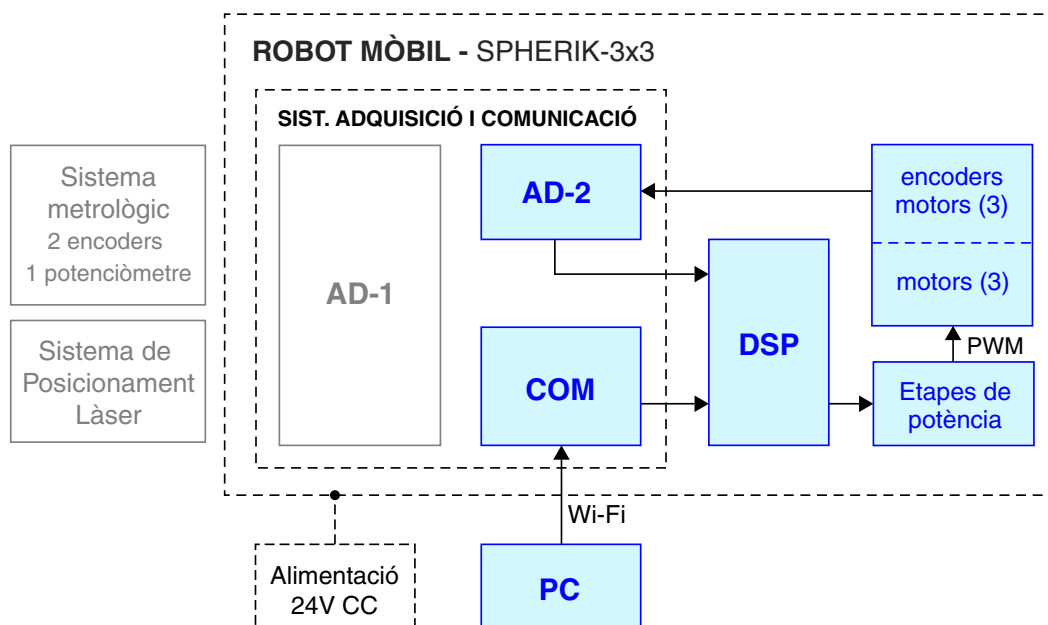


Figura 7.11 Components que intervenen en el sistema de control digital

Sistema d'adquisició de dades

La Figura 7.12 mostra els components que intervenen en l'adquisició de les mesures de tots els sensors. Les dades que es pretenen adquirir en temps real són: l'angle $\theta_{i,k}$ (associat a un reflector genèric R_i) mesurat pel *sistema de posicionament làser*, les mesures $\varphi_{1,k}$, $\varphi_{2,k}$ i l_k del *sistema metrollògic*, i les mesures de la velocitat motoritzada de les tres rodes $v_{1,k}$, $v_{2,k}$ i $v_{3,k}$ a partir dels senyals dels *encoders* dels motors.

Les mesures del sistema làser, del potenciòmetre i dels encoders del sistema de validació són adaptades per la placa d'adquisició AD-1. La missió d'aquesta placa és adaptar els senyals al nivell de tensió del DSP (3,3 V). Els senyals dels encoders i del sensor làser són digitals i per tant s'introdueixen al DSP per mitjà d'entrades digitals (*digital inputs*). En canvi, el senyal del potenciòmetre s'introdueix en una entrada analògica (*analog input*) del DSP, i internament es fa la seva conversió analògic-digital amb una resolució de 12 bits.

Un cop s'han adquirit tots els senyals dels sensors al DSP, aquest envia cada mil·lsegon el conjunt de totes les mesures $\theta_{i,k}$, $\varphi_{1,k}$, $\varphi_{2,k}$, l_k , $v_{1,k}$, $v_{2,k}$ i $v_{3,k}$ (corresponents a l'instant de temps t_k) al PC extern per a que les emmagatzemi en memòria. Cal tenir en compte que la mesura angular $\theta_{i,k}$ només s'enviarà en aquells instants de temps en els que el sensor làser detecti algun dels reflectors. La transmissió de dades del DSP al PC es realitza a través de la placa de comunicació (COM), que transforma els senyals elèctrics en un senyal de radiofreqüència Wi-Fi que és rebut pel PC.

Un cop emmagatzemades totes aquestes dades al PC ja es pot simular el funcionament dels mètodes d'estimació dinàmica del posicionament, i comparar el seu resultat amb el posicionament metrollògic –que és una mesura precisa del real–.

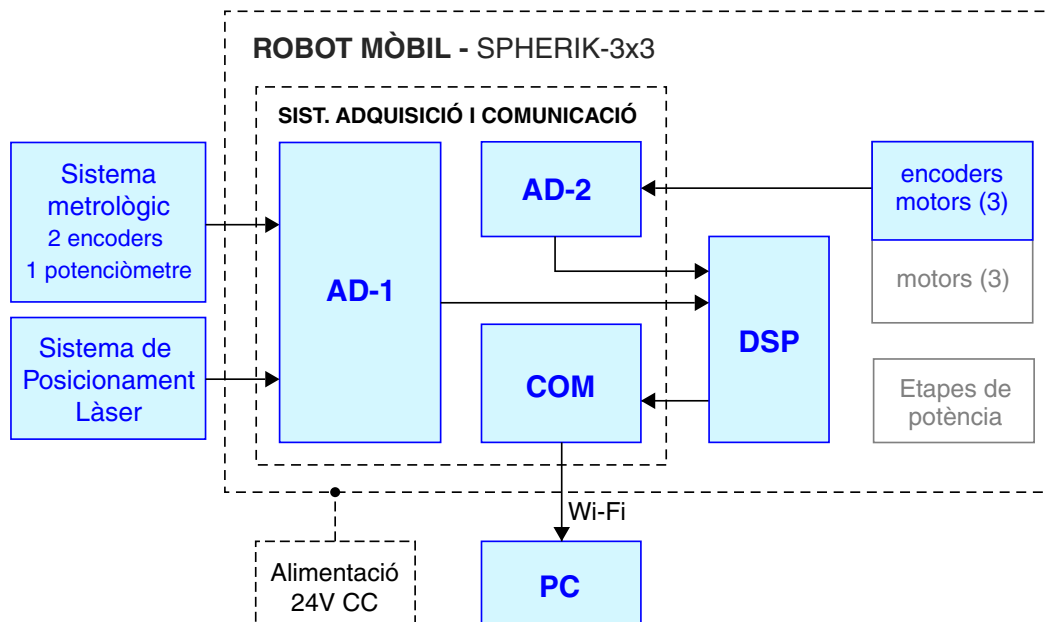


Figura 7.12 Components que intervenen en el sistema d'adquisició de dades

7.2 Formulació dels algorismes d'estimació dinàmica basats en el EKF per al muntatge real

En els apartats 7.2.1 i 7.2.2 es formulen els algorismes d'estimació dinàmica utilitzats (*EKF posicional* i *EKF angular*) per al muntatge real que s'ha dissenyat. La formulació d'aquests canvia –respecte a la que s'ha introduït al Capítol 5– perquè en el robot real el capçal làser es troba sobre el punt P que s'indica a la Figura 7.13.

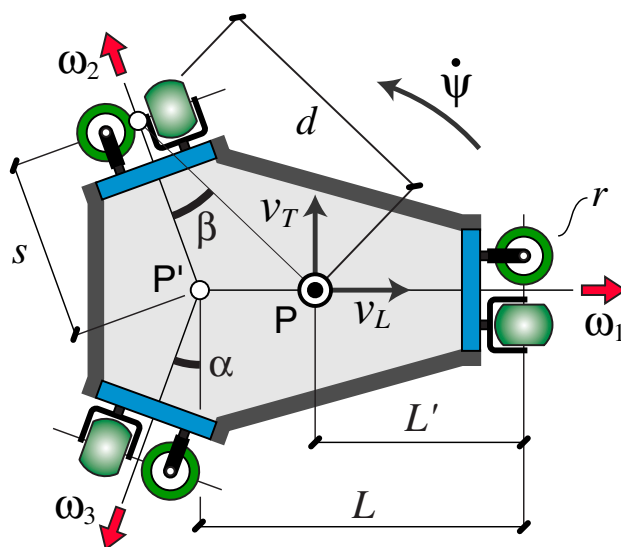


Figura 7.13 Paràmetres geomètrics del robot SPHERIK-3x3

L'anàlisi cinemàtica del robot SPHERIK-3x3 condueix a la següent relació, de jacobiana invariant J_ω , entre les velocitats dels motors ω_i ($i = 1,2,3$) i les velocitats generalitzades $\{v_L, v_T, \dot{\psi}\}^T$ del vehicle, on $\{v_L, v_T\}^T$ és el vector velocitat del centre del capçal làser P (Figura 7.13) en la base fixa al robot d'eixos longitudinal i transversal:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -L' \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -d \cos \beta \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -d \cos \beta \end{bmatrix}}_{J_\omega} \begin{Bmatrix} v_L \\ v_T \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}. \quad (7.14)$$

Cal assenyalar que la matriu de l'equació (7.14) difereix de la que s'ha introduït a (7.1), on les velocitats estan referides al punt P' de la Figura 7.13. En la notació del Capítol 5 i en les simulacions del Capítol 6 es considera que el capçal làser es troba sobre P'.

El valor dels paràmetres geomètrics L, L', s, r, d, α i β de la figura, necessaris per al càlcul de la matriu J_ω , s'han mesurat i es mostren a la Taula 7.3:

Taula 7.3 Paràmetres geomètrics del robot mòbil SPHERIK-3x3

Paràmetre	Magnitud
L	0,644 m
L'	0,415 m
s	0,282 m
r	0,06 m
d	0,4067 m
α	15°
β	32,95°

Com que en els algorismes de Kalman s'utilitza com a vector d'entrada el que té com a components la velocitat motoritzada de les rodes omnidireccionals $\mathbf{u}_k \equiv \{v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}\}^T$ ($v_{i,k} \equiv r\omega_{i,k}$; $i = 1,2,3$), es té la següent relació matricial entre aquestes velocitats i el vector de velocitats generalitzades $\{v_{L,k}, v_{T,k}, \dot{\psi}_k\}^T$ a l'instant t_k :

$$\begin{Bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ v_{3,k} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} r\omega_{1,k} \\ r\omega_{2,k} \\ r\omega_{3,k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -L' \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -d \cos \beta \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -d \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{L,k} \\ v_{T,k} \\ \dot{\psi}_k \end{Bmatrix}, \quad (7.15)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \\ v_{3,k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,415 \\ 0,9659 & 0,2588 & -0,3413 \\ -0,9659 & 0,2588 & -0,3413 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{L,k} \\ v_{T,k} \\ \dot{\psi}_k \end{Bmatrix}.$$

La inversa de la matriu anterior permet el càlcul de la velocitat de P $\{v_{L,k}, v_{T,k}\}^T$ –en la base d'eixos longitudinal i transversal fixa al robot– i la velocitat de canvi d'orientació $\dot{\psi}_k$ de la plataforma en funció de les mesures *hodomètriques* de velocitat $v_{i,k}$:

$$\{\bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{P})\} = \begin{Bmatrix} v_{L,k} \\ v_{T,k} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{v_{2,k} - v_{3,k}}{\cos \alpha} \\ \frac{L'v_{2,k} + L'v_{3,k} - 2d \cos \beta v_{1,k}}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} \end{Bmatrix}, \quad (7.16)$$

$$\dot{\psi}_k = \frac{-2v_{1,k} \sin \alpha - v_{2,k} - v_{3,k}}{2(d \cos \beta + L' \sin \alpha)}. \quad (7.17)$$

Aquestes expressions s'utilitzen en els algorismes d'estimació basats en el *filtre de Kalman estès* que es formulen en els apartats 7.2.1 i 7.2.2.

7.2.1 Estimació dinàmica del posicionament: EKF posicional

L'algorisme del EKF posicional té com a vector d'estat el posicionament del robot: $\mathbf{y}_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$. En aquest cas l'equació de transició d'estat, que determina l'estat posicional a l'instant present (t_k) funció de l'estat a l'instant anterior (t_{k-1}) i del vector de mesures hodomètriques $\mathbf{u}_k \equiv \{v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}\}^T$ és:

$$\mathbf{y}_k = f(\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}),$$

$$\begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} v_{L,k-1} \cos \psi_{k-1} - v_{T,k-1} \sin \psi_{k-1} \\ v_{L,k-1} \sin \psi_{k-1} + v_{T,k-1} \cos \psi_{k-1} \\ \dot{\psi}_{k-1} \end{Bmatrix}, \quad (7.18)$$

on les variables $v_{L,k-1}$, $v_{T,k-1}$ i $\dot{\psi}_{k-1}$ es determinen en funció de les mesures hodomètriques de velocitat \mathbf{u}_{k-1} per mitjà de les expressions (7.16) i (7.17). El vector d'error \mathbf{w} en l'equació (7.18) està associat a l'error de mesura de les variables hodomètriques de velocitat: $\mathbf{w}_k \equiv \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \delta v_{3,k}\}^T$. Les matrius jacobianes de les derivades de la funció f respecte a l'estat \mathbf{y} i a l'error \mathbf{w} –necessàries en la fase de predicció– són en aquest cas:

$$\nabla f_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t(-v_{L,k-1} \sin \tilde{\psi}_{k-1} - v_{T,k-1} \cos \tilde{\psi}_{k-1}) \\ 0 & 1 & \Delta t(v_{L,k-1} \cos \tilde{\psi}_{k-1} - v_{T,k-1} \sin \tilde{\psi}_{k-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.19)$$

$$\nabla f_{\mathbf{w}} = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \frac{2d \cos \beta \sin \tilde{\psi}_{k-1}}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \frac{\cos \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} - \frac{L' \sin \tilde{\psi}_{k-1}}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \dots \\ \frac{-2d \cos \beta \cos \tilde{\psi}_{k-1}}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \frac{\sin \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} + \frac{L' \cos \tilde{\psi}_{k-1}}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \dots \\ \frac{-2 \sin \alpha}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \frac{-1}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{-\cos \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} - \frac{L' \sin \tilde{\psi}_{k-1}}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{-\sin \tilde{\psi}_{k-1}}{\cos \alpha} + \frac{L' \cos \tilde{\psi}_{k-1}}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{-1}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} & \dots \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

L'equació de mesura, que relaciona una determinada mesura angular $\theta_{i,k}$ (associada al reflector R_i) feta pel sensor làser a l'instant t_k amb l'estat en aquell mateix instant, és la mateixa que s'ha introduït al Capítol 5:

$$\theta_{i,k} = \underbrace{\arctan\left(\frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}\right)}_{h^i(\mathbf{y}_k)} - \psi_k + \delta \theta_m; \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.21)$$

on $\{x_i, y_i\}^T$ és la posició del reflector R_i en el sistema de referència SRT, i $\delta\theta_m$ és l'error en la mesura del sensor làser. La matriu jacobiana de la funció de mesura h^i respecte a l'estat posicional ∇h_y^i , necessària en la *fase d'actualització* (o *correcció*) del filtre, es determina per mitjà de l'expressió (5.59).

A partir de les funcions de transició d'estat f i de mesura h^i definides, així com de les seves matrius jacobianes i de les covariàncies dels errors Q_k i R , es poden utilitzar les equacions (5.60)-(5.66) a cada instant de temps per a trobar la millor estimació del posicionament i de la matriu de covariància de l'error associat a l'estimació: $\tilde{\mathbf{y}}_k$ i $\tilde{P}_{y,k}$. Cal tenir en compte que la *fase d'actualització* de l'algorisme no es dona a cada pas de l'algorisme perquè les mesures del sensor làser es realitzen de forma discontinua. Mentre no hi ha mesura del sensor làser s'itera la *fase de predicció* del EKF.

7.2.2 Estimació dels angles relatius associats als reflectors: EKF angular

L'algorisme d'estimació dinàmica dels angles associats als reflectors presenta com a vector d'estat: $\mathbf{x}_k \equiv \{\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}\}^T$. L'*equació de transició d'estat*, que determina l'estat angular a l'instant present (t_k) funció de l'estat a l'instant anterior (t_{k-1}) i del vector de mesures hodomètriques $\mathbf{u}_k \equiv \{v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}\}^T$ és en aquest cas:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}),$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{1,k} \\ \theta_{2,k} \\ \theta_{3,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{1,k-1} \\ \theta_{2,k-1} \\ \theta_{3,k-1} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{1,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{1,k-1}}{\rho_{1,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \\ \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{2,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{2,k-1}}{\rho_{2,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \\ \frac{v_{L,k-1} \sin \theta_{3,k-1} - v_{T,k-1} \cos \theta_{3,k-1}}{\rho_{3,k-1}} - \dot{\psi}_{k-1} \end{Bmatrix}, \quad (7.22)$$

on les variables $v_{L,k-1}$, $v_{T,k-1}$ i $\dot{\psi}_{k-1}$ es determinen en funció de les mesures hodomètriques de velocitat \mathbf{u}_{k-1} per mitjà de les expressions (7.16) i (7.17), i el vector d'error \mathbf{w} està associat a l'error en les mesures hodomètriques $v_{i,k}$ ($i = 1, 2, 3$): $\mathbf{w}_k \equiv \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \delta v_{3,k}\}^T$. En aquest cas, la matriu jacobiana de les derivades de la funció vectorial f respecte a l'estat angular \mathbf{x} —necessària en la *fase de predicció* de l'algorisme— es determina segons:

$$\nabla f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}, \text{ amb} \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} = 1 + \Delta t \left[\cos \tilde{\theta}_{i,k-1} \left(\frac{v_{L,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} + \frac{v_{T,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_i} \right) + \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} \left(\frac{v_{T,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} - \frac{v_{L,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_i} \right) \right], \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} = - \left[\frac{\Delta t (v_{L,k-1} \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} - v_{T,k-1} \cos \tilde{\theta}_{i,k-1})}{\tilde{\rho}_{i,k-1}^2} \right] \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_j}; \quad i \neq j, \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_j} = \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[(\tilde{x}_{k-1} - x_i) \frac{\partial x(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \theta_j} + (\tilde{y}_{k-1} - y_i) \frac{\partial y(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \theta_j} \right]; \quad i = j \text{ o } i \neq j. \quad (7.26)$$

L'expressió de les derivades de les variables de posició $\{x, y\}^T$ respecte a cadascun dels angles θ_1 , θ_2 i θ_3 per al càlcul de (7.26), es troben a l'Annex A: equacions (A.2)-(A.8). La matriu jacobiana de la funció de transició f respecte a l'error en les mesures hodomètriques \mathbf{w} –també necessària en la *fase de predicció* de l'algorisme– es calcula segons:

$$\nabla f_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_2} & \frac{\partial f_1(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_3} \\ \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_2} & \frac{\partial f_2(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_3} \\ \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_2} & \frac{\partial f_3(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial w_3} \end{bmatrix}, \quad \text{amb} \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_j} = \frac{\Delta t}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[\frac{\partial v_L}{\partial w_j} \sin \tilde{\theta}_{i,k-1} - \frac{\partial v_T}{\partial w_j} \cos \tilde{\theta}_{i,k-1} \right] - \Delta t \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial w_j}; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3. \quad (7.28)$$

Les derivades de les velocitats v_L i v_T , i de la velocitat angular $\dot{\psi}$ respecte als errors en les mesures hodomètriques $w_j \equiv \delta v_j$ ($j = 1, 2, 3$) es calculen per mitjà de les expressions:

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_1} = \frac{\Delta t}{d \cos \beta + L' \sin \alpha} \left[\frac{d \cos \beta \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} + \sin \alpha \right], \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_2} = \frac{\Delta t}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[\frac{\sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2 \cos \alpha} - \frac{L' \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2(d \cos \beta + L' \sin \alpha)} \right] + \frac{\Delta t}{2(d \cos \beta + L' \sin \alpha)}, \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_3} = \frac{\Delta t}{\tilde{\rho}_{i,k-1}} \left[-\frac{\sin \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2 \cos \alpha} - \frac{L' \cos \tilde{\theta}_{i,k-1}}{2(d \cos \beta + L' \sin \alpha)} \right] + \frac{\Delta t}{2(d \cos \beta + L' \sin \alpha)}, \quad (7.31)$$

totes elles per a $i = 1, 2, 3$. L'*equació de mesura*, que relaciona una determinada mesura angular $\theta_{i,k}$ (associada al reflector R_i) feta pel sensor làser a l'instant t_k amb l'estat en aquell mateix instant, és en aquest cas *lineal* i *senzilla* perquè la mesura correspon directament a la component i del vector d'estat \mathbf{x}_k :

$$\theta_{i,k} = \underbrace{\theta_{i,k}}_{h^i(\mathbf{x}_k)} + \delta \theta_m; \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.32)$$

on $\delta\theta_m$ és l'error en la mesura del sensor làser. La matriu jacobiana ∇h_x^i , necessària en la *fase de correcció* del filtratge de Kalman està formada per zeros llevat d'un 1 a la component i :

$$\nabla h_x^1 = [1 \ 0 \ 0]; \quad \nabla h_x^2 = [0 \ 1 \ 0]; \quad \nabla h_x^3 = [0 \ 0 \ 1]. \quad (7.33)$$

A partir de les funcions de transició d'estat f i de mesura h^i definides, així com de les seves matrius jacobianes i de les covariàncies dels errors Q_k i R , es poden utilitzar les equacions (5.78)-(5.84) a cada instant de temps per a trobar la millor estimació dels angles associats al triplet de reflectors i de la matriu de covariància de l'error associat a l'estimació: $\tilde{\mathbf{x}}_k$ i $\tilde{P}_{x,k}$. En aquest cas la *fase d'actualització* de l'algorisme tampoc es dona a cada pas de l'algorisme, i mentre no hi ha mesura del sensor s'itera la *fase de predicció* del EKF.

Un cop es coneix l'estimació de l'estat angular en un instant qualsevol t_k ($\tilde{\mathbf{x}}_k$) així com la matriu de covariància de l'error en l'estimació ($\tilde{P}_{x,k}$), l'estudi estadístic de la propagació de l'error angular en el càlcul del posicionament per triangulació –exposat a l'apartat 4.1.4– permet determinar la millor estimació del posicionament $\tilde{\mathbf{y}}_k$ i la matriu de covariància de l'error comès $\tilde{P}_{y,k}$.

7.2.3 Modelització de l'error en les mesures hodomètriques de velocitat motoritzada

En aquest apartat es justifica la modelització de l'error en les mesures de velocitat *motoritzada* $v_i \equiv r\omega_i$ ($i = 1,2,3$) de cadascuna de les rodes omnidireccionals. Aquestes velocitats, que es determinen a partir dels encoders òptics de cadascun dels motors, formen el vector d'entrada \mathbf{u}_k del EKF:

$$\mathbf{u}_k = \{v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k}\}^T. \quad (7.34)$$

Cadascuna d'aquestes mesures contindrà un cert error δv_i com a conseqüència de diferents fonts d'error –no sistemàtic–: lliscaments de les rodes, presència d'irregularitats en el terreny, etc. L'error associat a aquestes variables es modelitza com a *gaussià*, ja que pel teorema central del límit la suma de diferents fonts d'error independents es pot aproximar per una distribució de probabilitat normal. El vector d'error \mathbf{w}_k i la seva matriu de covariància són:

$$\mathbf{w}_k = \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}, \delta v_{3,k}\}^T, \quad (7.35)$$

$$Q_k \equiv E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{v_{1,k}}^2 & & \\ & \sigma_{v_{2,k}}^2 & \\ & & \sigma_{v_{3,k}}^2 \end{bmatrix}. \quad (7.36)$$

Es segueix la modelització que s'introdueix a [Chong i Kleeman 1997], ja que aquest és el treball de referència en aquest camp. Altres treballs interessants com [Arras *et al.* 2001,

Martinelli *et al.* 2006] utilitzen la mateixa tècnica de modelització de l'error no sistemàtic en els seus muntatges experimentals. En aquests treballs es considera que els errors en les mesures hodomètriques són blancs i independents entre ells, amb mitjana zero i variància $\sigma_{v_{i,k}}^2$ ($i = 1,2,3$). Per a la determinació d'aquesta variància s'assumeix la hipòtesi que la variable $\Delta d_{i,k} \equiv v_{i,k} \Delta t$ té una variància $\sigma_{d_{i,k}}^2$ que creix proporcionalment amb aquesta distància:

$$\sigma_{d_{i,k}}^2 = k_d |\Delta d_{i,k}| \Rightarrow \sigma_{v_{i,k}}^2 = \frac{k_d}{\Delta t} |v_{i,k}|. \quad (7.37)$$

La justificació d'aquesta hipòtesi, introduïda per Chong i Kleeman (1997), té la base en el fet que l'error hodomètric posicional augmenta amb la distància recorreguda pel mòbil. La constant de proporcionalitat k_d depèn de les característiques del contacte roda-terra, i s'ha de determinar experimentalment per a cada aplicació concreta.

En el mateix treball de Chong i Kleeman, i en els treballs d'Arras *et al.* (2001) i de Martinelli *et al.* (2006) es determina aquesta constant k_d per a robots mòbils que es mouen en entorns interiors de laboratori semblants a l'entorn d'experimentació emprat. Els valors de k_d determinats en aquests treballs es mostren a la taula següent:

Taula 7.4 Valors de k_d en els treballs considerats

Chong i Kleeman (1997)	Arras <i>et al.</i> (2001)	Martinelli <i>et al.</i> (2006)
$k_d = (1,6 \div 3,4) \cdot 10^{-7} \text{ m}$	$k_d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$k_d = (3,6 \div 7,2) \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Cal dir que els robots que es consideren en els treballs citats anteriorment són de cinemàtica diferencial i utilitzen *rodes convencionals*. En canvi, en l'experimentació de la tesi s'utilitza el robot mòbil SPHERIK-3x3 que incorpora *rodes omnidireccionals* de corrons esfèrics.

Tot i ser rodes conceptualment diferents, la variància de l'error en la mesura de la velocitat motoritzada v_i d'una de les rodes omnidireccionals s'ha modelitzat de la mateixa manera, equació (7.37). La justificació és que l'expressió d'aquesta velocitat és equivalent a la velocitat del centre d'una roda convencional: $v_i \equiv r\omega_i$, on ω_i és la velocitat angular imposada pel motor de tracció i r el radi de la roda. Com s'ha exposat a l'apartat 3.3, una roda omnidireccional té associada –a més de la velocitat *motoritzada*– una velocitat *lliure* que s'adapta a la cinemàtica imposada pel conjunt de motors.

En aquesta tesi no es pretén fer un estudi estadístic acurat d'aquest valor k_d per al muntatge experimental. No té molt sentit fer-lo perquè només seria vàlid per a aquesta aplicació concreta. Si el mateix robot funcionés sobre un altre terreny s'hauria de repetir l'estudi per a modelitzar novament aquest error. S'ha escollit com a valor de k_d el del treball d'Arras *et al.* (2001), $k_d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, perquè les dimensions del robot i el tipus d'entorn de treball són les que coincideixen més amb les del muntatge experimental dissenyat. A més, aquest és el valor intermedi dels que apareixen a la Taula 7.4.

A la referència [Chong i Kleeman 1997] es presenta una metodologia per a determinar aquest valor de k_d . Es tracta de recórrer un nombre elevat de vegades una mateixa trajectòria (60 vegades en aquesta referència), i determinar els errors de posició (en x i en y) i d'orientació de la configuració del robot determinada hodomètricament respecte a la real. Una vegada determinats els errors per a cada trajectòria, en el treball es determina el valor de k_d ajustant un el·lipsoide d'error (de probabilitat 0,95) al núvol de punts que defineixen els errors. Aquest el·lipsoide s'obté a partir de la matriu de covariància de l'error en el posicionament hodomètric que és funció de k_d .

Martinelli *et al.* (2006) presenten una metodologia alternativa més complexa per a la determinació d'aquesta constant k_d . Aquesta tècnica es basa en un la utilització d'un EKF d'estat augmentat (*augmented Kalman filter*), que serveix per a estimar tant el posicionament del robot, com les constants associades al calibratge de l'*error sistemàtic* i a la modelització de l'*error no sistemàtic* (constant k_d) durant la navegació del robot mòbil.

Aquest mètode presenta com a avantatge, respecte al treball de Chong i Kleeman, el fet de no necessitar una etapa prèvia a la navegació del robot de calibratge i modelització de l'error hodomètric –que pot durar diverses hores–. El calibratge i la modelització dels errors es realitzen simultàniament amb el posicionament dinàmic del robot.

7.3 Resultats dels experiments

En aquest apartat es mostren i es comenten els resultats obtinguts en els experiments. Tal com s'ha fet al Capítol 6 de simulacions informàtiques, es calculen els errors de posicionament (e_{lat} i e_{ψ}) dels dos mètodes de posicionament que es comparen: “EKF angular i triangulació” –mètode desenvolupat a la tesi–, i “EKF posicional”. S'han realitzat tres trajectòries del punt P del robot, i per a cada trajectòria s'utilitza una disposició dels reflectors determinada. Les trajectòries, així com la disposició dels reflectors en l'entorn d'experimentació es defineixen en els apartats que segueixen.

7.3.1 Entorn d'experimentació i posició dels reflectors

La Figura 7.14 mostra un esquema de l'entorn d'experimentació, ubicat al Laboratori de Mecànica de l'ETSEIB (UPC), on també s'hi representen els reflectors que s'han instal·lat sobre les parets.

A la mateixa figura també s'hi representa el punt O –origen del SRF– que coincideix amb l'extrem del potenciòmetre del sistema metrològic. En gris apareix remarcada la zona accessible del punt P si es té en compte l'allargament mínim (1040 mm) i màxim (1790 mm) del potenciòmetre.

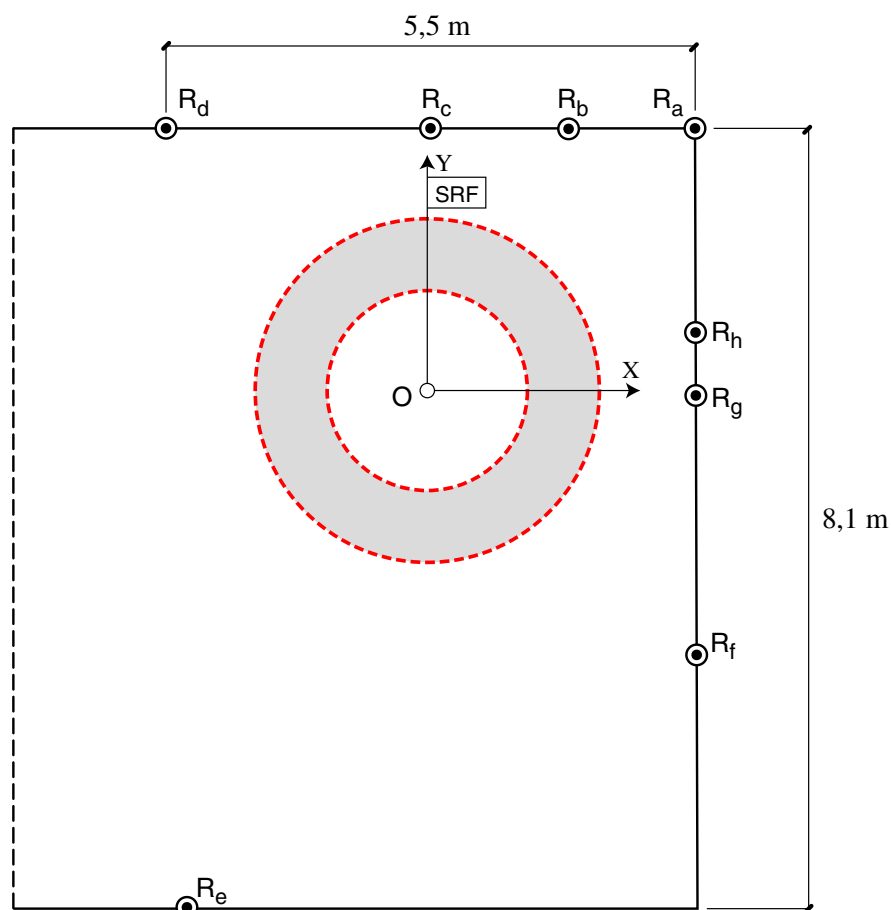


Figura 7.14 Esquema de l'entorn d'experimentació al Laboratori de Mecànica de l'ETSEIB

La posició dels reflectors que apareixen a la Figura 7.14, relativa al sistema de referència SRF, s'ha mesurat mitjançant un teodolit electrònic d'altres prestacions, Figura 7.15. Mitjançant aquest aparell, la precisió que s'assoleix en les mesures és de la dècima de mm. A la Taula 7.5 es mostren les posicions dels reflectors mesurades pels topògrafs.



Figura 7.15 Mesura de la posició dels reflectors mitjançant un teodolit electrònic

Taula 7.5 Posició dels reflectors en el SRF (m)

$\vec{R}(R_a)$	$\vec{R}(R_b)$	$\vec{R}(R_c)$	$\vec{R}(R_d)$	$\vec{R}(R_e)$	$\vec{R}(R_f)$	$\vec{R}(R_g)$	$\vec{R}(R_h)$
$\begin{Bmatrix} 2,7785 \\ 2,6425 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1,4782 \\ 2,7088 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,0379 \\ 2,7107 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -2,7214 \\ 2,7046 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -2,5015 \\ -5,4258 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2,8012 \\ -2,7879 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2,7940 \\ -0,0836 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2,7980 \\ 0,5766 \end{Bmatrix}$

7.3.2 Trajectòries realitzades i velocitats generalitzades

La Figura 7.16 mostra les 3 trajectòries –definides per al punt P del robot– que s'han realitzat en l'experimentació, i també la configuració inicial del robot en cadascuna d'elles. Les trajectòries que apareixen a la figura són les *nominals*.

Com que en els experiments no es fa control de posició (o guiatge) del robot sinó que el control és cinemàtic en anell obert –és a dir, es controlen les velocitats dels motors per a que el vehicle segueixi la trajectòria nominal definida–, la trajectòria *real* diferirà d'aquesta última. És així per causa d'errors en el model cinemàtic del robot (errors de tipus *sistemàtic*) –que es podrien atenuar amb un calibratge del jacobiana del robot–, i també per causa d'altres errors imprevisibles (errors *no sistemàtics*) com poden ser: lliscaments de les rodes, irregularitats del terra, etc.

Per a cadascuna de les trajectòries (1), (2) i (3) es remarca el triplet de reflectors $\{R_1, R_2, R_3\}$ que s'ha utilitzat per a determinar el posicionament dinàmic. El sistema de referència associat a cada triplet (SRT), que també es mostra a la figura per a cada cas, es determina tal com s'ha definit a l'apartat 4.1 de la tesi: El reflector R_2 es situa a l'origen i el semieix x positiu passa pel reflector R_3 .

Les components de posició de R_1 i R_3 en el SRT (R_2 es troba a l'origen), necessàries per a l'aplicació de les equacions de la triangulació, s'obtenen a partir de la posició dels reflectors en el SRF $\vec{R}(R_i) \equiv \{X_i, Y_i\}^T$ ($i = 1, 2, 3$) –Taula 7.5– mitjançant les equacions:

$$\vec{r}(R_1) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (X_1 - X_2) \cos \varphi + (Y_1 - Y_2) \sin \varphi \\ -(X_1 - X_2) \sin \varphi + (Y_1 - Y_2) \cos \varphi \end{Bmatrix}, \quad (7.38)$$

$$\vec{r}(R_3) = \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (X_3 - X_2) \cos \varphi + (Y_3 - Y_2) \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.39)$$

on φ és l'angle dels eixos del SRT respecte als eixos del SRF i es determina segons:

$$\varphi = \arctan \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2}. \quad (7.40)$$

Com s'observa, les trajectòries i les disposicions dels reflectors guarden semblança amb les que s'han considerat en el Capítol 6 de simulacions informàtiques i són representatives de situacions reals.

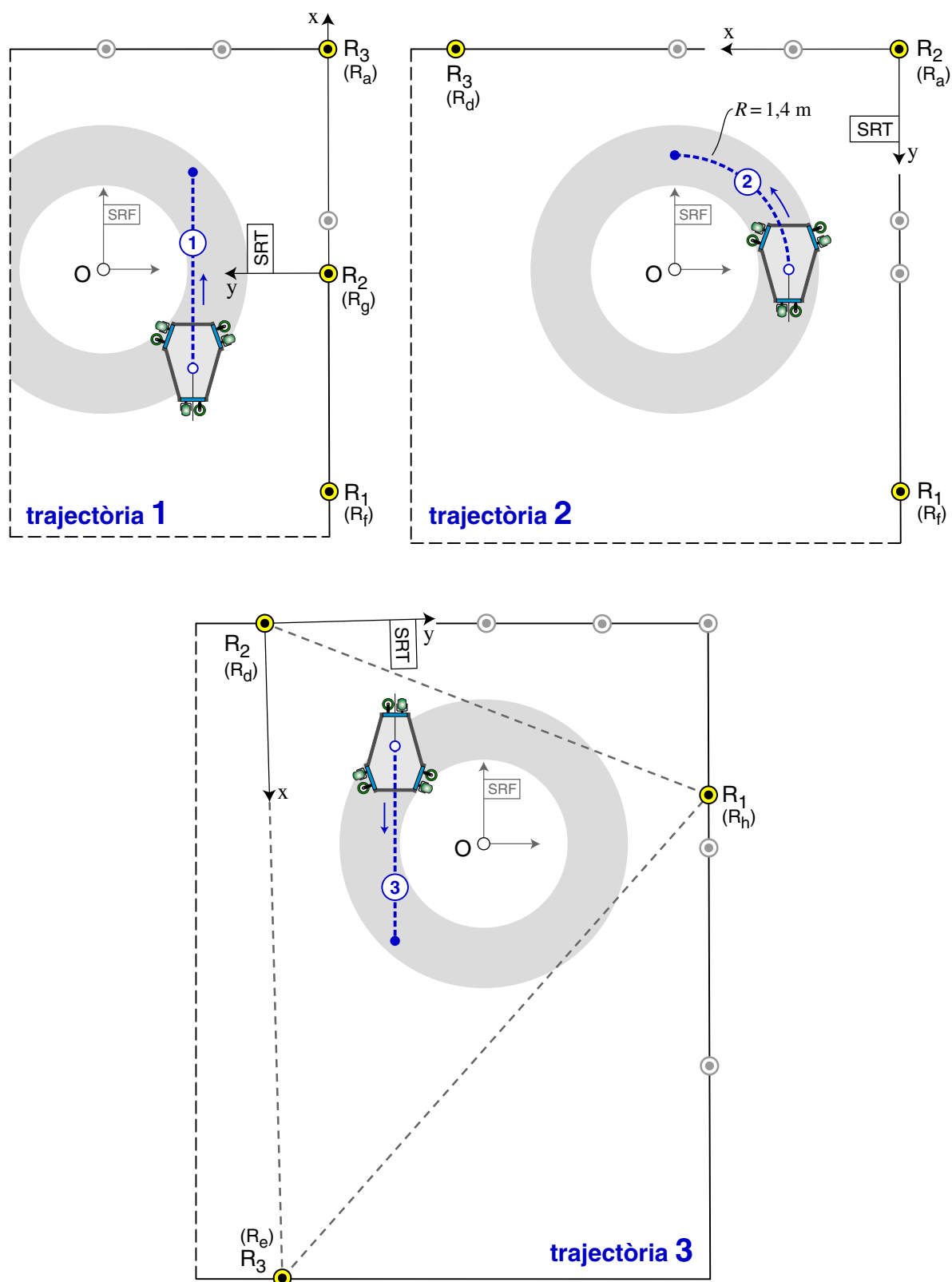


Figura 7.16 Trajectòries nominals per a la validació del mètode de posicionament desenvolupat

Velocitats generalitzades per a les trajectòries (1) i (3)

Les trajectòries (1) i (3) són nominalment rectilínies i es recorren sense canvi d'orientació del vehicle ($\dot{\psi}(t) = 0$), amb el seu eix longitudinal paral·lel a la trajectòria. La consigna de velocitat per al punt P del robot és en aquestes trajectòries:

$$\{\vec{v}(P)\} = \begin{Bmatrix} v_L(t) \\ v_T(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,3 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ ms}^{-1}. \quad (7.41)$$

Mitjançant aquesta consigna de velocitat, els motors acceleren el vehicle fins que s'arriba a aquesta velocitat de règim que passa a mantenir-se constant. El DSP que s'ha presentat anteriorment és qui realitza aquest control de velocitat, per a més detall en el funcionament del sistema de control digital es pot consultar el treball [Ferràs 2004]. En el transitori d'aturada del vehicle, els motors actuen com a fre.

Velocitats generalitzades per a la trajectòria (2)

La trajectòria (2) és nominalment circular i es realitza amb l'eix longitudinal del robot tangent a la trajectòria del punt P en tot instant. Per tant, el punt P només té velocitat longitudinal i la consigna de velocitat és la mateixa que en el cas anterior, expressió (7.41). La consigna de velocitat angular de canvi d'orientació del robot, si $R = 1,4$ m és el radi de curvatura d'aquest tram, s'obté segons:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{v_L(t)}{R} = \frac{0,3}{1,4} = 0,214 \text{ rad s}^{-1}. \quad (7.42)$$

Trajectòries reals recorregudes

Els gràfics de la Figura 7.17 mostren les trajectòries *reals* que ha recorregut el centre P del capçal làser en els experiments realitzats. Aquestes trajectòries s'han determinat a partir de les mesures fetes pel sistema metrològic, el punt blanc representa la posició inicial i el blau la final.

Als gràfics també hi apareixen les dues circumferències que delimiten la zona accessible del punt P tenint en compte l'allargament mínim i màxim admissible del potenciòmetre. En aquestes proves el sistema de control atura el robot si el punt P arriba a la frontera de la zona accessible. Com s'observa i era d'esperar, les trajectòries obtingudes no són exactament com les nominals o teòriques.

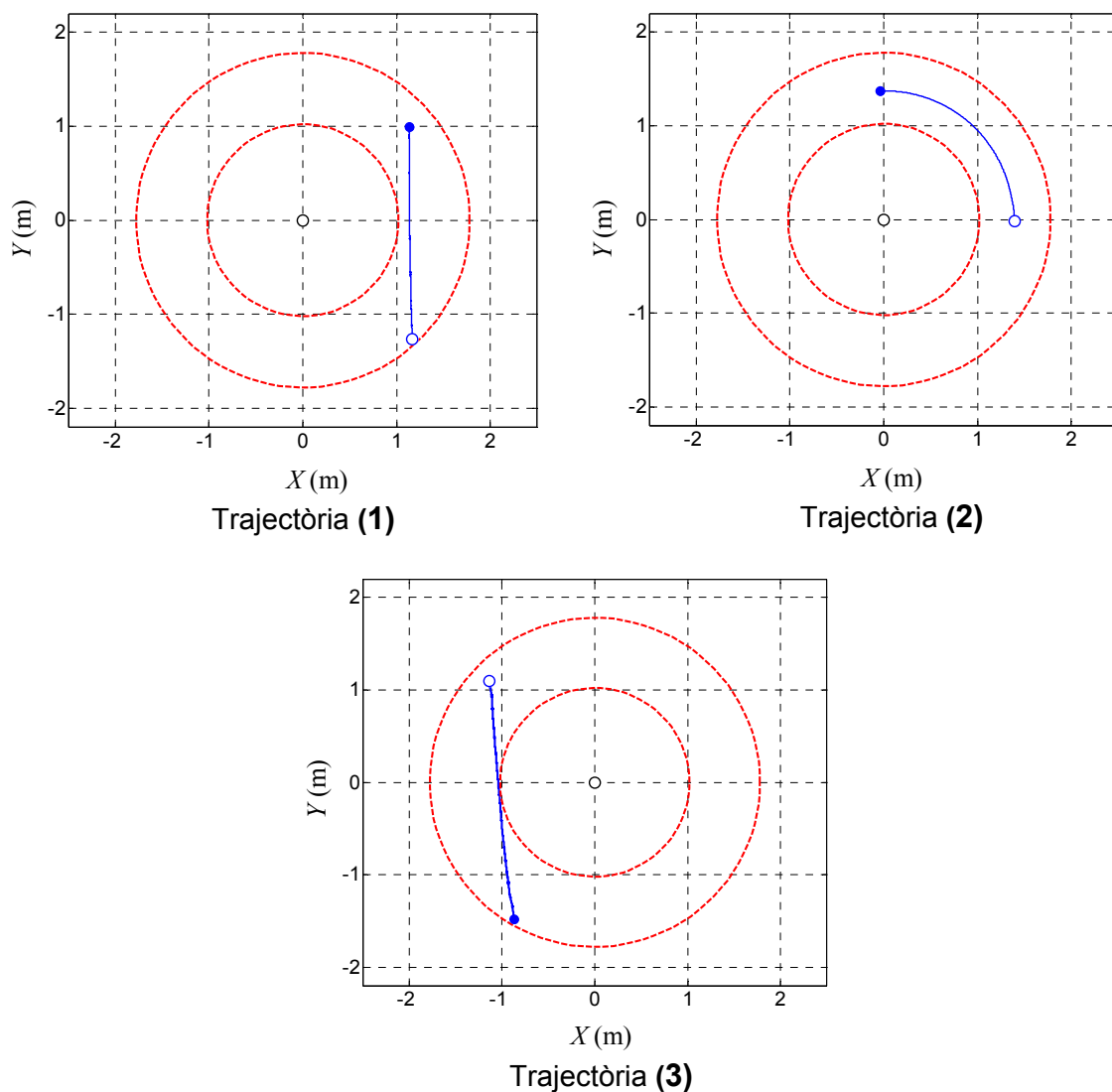


Figura 7.17 Trajectòries reals recorregudes per P en els experiments

La Taula 7.6 mostra el valor de la configuració inicial del robot en el SRF per a cada trajectòria, així com el temps total que dura cadascuna d'elles. La configuració inicial real $\{X_0, Y_0, \Psi_0\}^T$ es mesura utilitzant el sistema metrològic dissenyat.

Taula 7.6 Configuració inicial del robot i temps total en la realització de cada trajectòria

Trajectòria	(1)	(2)	(3)
$\{X_0, Y_0\}^T$ (m)	$\begin{Bmatrix} 1,1635 \\ -1,2623 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1,4014 \\ -0,0152 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1,1221 \\ 1,1001 \end{Bmatrix}$
Ψ_0 (rad)	4,7474	4,7152	1,5947
t (s)	8,124	7,983	9,471

7.3.3 Inicialització dels algorismes

Els dos mètodes de posicionament que es volen comparar parteixen d'una estimació inicial aproximada –*predicció*– del posicionament i de la covariància de l'error en la predicció: \bar{y}_0 i $\bar{P}_{y,0}$ (EKF posicional), i d'una estimació inicial de l'estat angular i de la covariància de l'error en l'estimació: \bar{x}_0 i $\bar{P}_{x,0}$ (EKF angular).

Com que el mètode a validar és el de la determinació del posicionament, en cada trajectòria s'imposa una estimació inicial de posicionament \bar{y}_0 que difereix del posicionament inicial real $y_0 \equiv \{x_0, y_0, \psi_0\}^T$ que es pot conèixer a partir de la mesura del sistema metrològic:

$$\bar{y}_0 = y_0 + \Delta y_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \psi_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,5 \text{ m} \\ 0,5 \text{ m} \\ 0,2 \text{ rad} \end{Bmatrix}. \quad (7.43)$$

S'afegeix aquesta desviació Δy_0 respecte al posicionament inicial real y_0 , perquè el mètode que es desenvolupa ha de ser *robust* i garantir la convergència del càlcul del posicionament encara que la seva predicció inicial sigui incerta. En les aplicacions reals la predicció del posicionament a l'inici és *aproximada* ja que encara no s'ha realitzat cap mesura angular.

A més, en una aplicació real es podria donar una fallida elèctrica del sistema de navegació del robot amb el vehicle en marxa, i el mètode de posicionament emprat hauria de ser capaç de fer convergir el càlcul dinàmic del posicionament a partir de la última informació d'aquest –que podria incloure una incertesa de l'ordre del *metre* en la posició i del *radian* en l'orientació–. Per aquest motiu en la validació experimental s'afegeix l'error Δy_0 considerat a l'expressió (7.43). Un problema afegit que es donaria en aquest cas és el de la identificació dels reflectors després de la fallida. Tanmateix, aquest és un problema que queda fora de l'abast de la tesi, ja que es suposa que el robot incorpora algun sistema per a identificar-los: ja sigui mitjançant una codificació de cadascun d'ells, o bé utilitzant un algorisme matemàtic a partir de les mesures.

Pel que fa a la matriu de covariància inicial $\bar{P}_{y,0}$, aquesta s'estima en:

$$\bar{P}_{y,0} = \begin{bmatrix} 0,5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2^2 \end{bmatrix}. \quad (7.44)$$

El posicionament inicial $\{x_0, y_0, \psi_0\}^T$ (en el SRT) s'obté a partir del posicionament mesurat pel sistema metrològic $\{X_0, Y_0, \Psi_0\}^T$ (en el SRF) mitjançant aquestes equacions:

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 - X_2 \\ Y_0 - Y_2 \end{Bmatrix}, \quad (7.45)$$

$$\psi_0 = \Psi_0 - \varphi, \quad (7.46)$$

on φ és l'angle de gir dels eixos del SRT respecte als del SRF i es determina per mitjà de l'equació (7.40). Per a comparar els dos mètodes sota les mateixes condicions de partida, cal generar una condició inicial per al EKF angular ($\bar{\mathbf{x}}_0$ i $\bar{P}_{x,0}$) equivalent. Per a fer-ho es segueix la mateixa metodologia que s'ha utilitzat en el capítol anterior, treta del treball [Kasdin 2000b]. La predicció inicial de l'estat angular resulta d'aplicar la següent equació:

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = g(\bar{\mathbf{y}}_0),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}_{1,0} \\ \bar{\theta}_{2,0} \\ \bar{\theta}_{3,0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \arctan\left(\frac{y_1 - \bar{y}_0}{x_1 - \bar{x}_0}\right) - \bar{\psi}_0 \\ \arctan\left(\frac{-\bar{y}_0}{-\bar{x}_0}\right) - \bar{\psi}_0 \\ \arctan\left(\frac{-\bar{y}_0}{x_3 - \bar{x}_0}\right) - \bar{\psi}_0 \end{array} \right\}. \quad (7.47)$$

Per a trobar la matriu de covariància $\bar{P}_{x,0}$ es genera una mostra aleatòria d' N' elements d'una distribució normal de tres variables de mitjana $\bar{\mathbf{y}}_0$ i matriu de covariància $\bar{P}_{y,0}$ –es denota amb $\bar{\mathbf{y}}_0^m$ cadascun dels elements d'aquesta mostra; $m = 1, \dots, N' - 1$ i es calculen els N' vectors d'estat angular mitjançant:

$$\bar{\mathbf{x}}_0^m = g(\bar{\mathbf{y}}_0^m); m = 1, \dots, N', \quad (7.48)$$

on la funció g es defineix a (7.47). A partir de la mostra anterior de vectors d'estat angular, es calcula la matriu de covariància $\bar{P}_{x,0}$ mitjançant la següent expressió:

$$\bar{P}_{x,0} = \frac{1}{N'} \sum_{m=1}^{N'} (\bar{\mathbf{x}}_0^m - \bar{\mathbf{x}}_0)(\bar{\mathbf{x}}_0^m - \bar{\mathbf{x}}_0)^T. \quad (7.49)$$

El nombre d'elements de la mostra N' , ha de ser gran per garantir una bona estimació de la matriu $\bar{P}_{x,0}$. S'utilitza el mateix valor que en el treball [Kasdin 2000b]: $N' = 50000$.

7.3.4 Paràmetres dels algorismes

A la Taula 7.7 es donen els paràmetres que utilitzen tant el EKF posicional com l'angular. La matriu de covariància Q_k de l'error en la mesura hodomètrica de velocitat s'obté a partir de la modelització de l'error no sistemàtic que s'ha justificat a l'apartat 7.2.3. Pel que fa a la variància R de les mesures angulars del sensor làser, el seu valor es justifica a l'Annex C on es realitza una modelització del seu error total –suma de l'error de *resolució* i l'error de *detecció*–.

Finalment, el pas dels algorismes de Kalman Δt és d'1 ms perquè és l'interval de temps amb el que opera el sistema de control i d'adquisició de dades implementat sobre el robot SPHERIK-3x3 –descrit a l'apartat 7.1.4–.

Taula 7.7 Paràmetres dels algorismes dinàmics basats en el EKF

Paràmetre	Magnitud	Descripció
$Q_k =$	$\begin{bmatrix} \sigma_{v_1,k}^2 & & \\ & \sigma_{v_2,k}^2 & \\ & & \sigma_{v_3,k}^2 \end{bmatrix}, \sigma_{v_i,k}^2 = 0,005 v_{i,k} $	Variància de l'error en les mesures hodomètriques de velocitat
$R =$	$4,2 \cdot 10^{-9} \text{ rad}^2$	Variància de l'error en les observacions angulars del sensor
$\Delta t = t_k - t_{k-1} =$	$0,001 \text{ s}$	Interval de temps entre posicionaments (pas de l'algorisme)

7.3.5 Resultats

Els gràfics de les Figures 7.18-7.20 representen, per a les tres trajectòries experimentals descrites, l'evolució al llarg del temps dels errors de posicionament $e_{lat,k}$ i $e_{\psi,k}$. En cada gràfic la corba *blava* és la que s'obté utilitzant el mètode de posicionament desenvolupat a la tesi "EKF angular i triangulació", i la *vermella* és la que s'obté aplicant l'algorisme, prèviament existent, que s'ha denominat "EKF posicional".

Tal i com s'ha fet en el capítol anterior, per a cada paràmetre d'error el gràfic de l'esquerra és per a valors de temps entre 0 i 0,5 s, i el de la dreta és per a valors de temps entre 0,125 s –temps en què es completa la primera volta del sensor làser– i el temps final de la trajectòria.

D'aquesta manera, els gràfics de l'esquerra representen l'evolució dels paràmetres durant el transitori en el que es corregeix l'error en la inicialització dels algorismes. Els gràfics de la dreta mostren l'evolució dels mateixos paràmetres des del moment en què ja s'han realitzat tres mesures angulars ($t = 0,125 \text{ s}$), i s'ha pogut fer la primera *triangulació* amb dades mesurades, fins al final de la trajectòria.

A més d'aquests errors, a les Figures 7.18-7.20 també s'hi representa l'evolució de les mesures hodomètriques de velocitat motoritzada de les rodes $v_{i,k}$ ($i = 1,2,3$), i de les mesures fetes pels sensors del sistema metrològic l_k , $\varphi_{1,k}$ i $\varphi_{2,k}$.

La Taula 7.8 mostra el valor RMS –arrel del valor quadràtic mitjà– de e_{lat} i e_{ψ} al llarg del temps, per a cadascun dels algorismes i per a cada trajectòria simulada. Es calculen segons:

$$\text{RMS}(e_{lat}) = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_k e_{lat,k}^2}, \quad (7.50)$$

$$\text{RMS}(e_{\psi}) = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_k e_{\psi,k}^2}. \quad (7.51)$$

Tal com ja s'ha avançat al Capítol 6 les expressions anteriors són molt sensibles als errors inicials, que són elevats perquè l'aproximació inicial del posicionament conté un error elevat, equació (7.43). Per aquesta raó, el valor quadràtic mitjà que es dona a la Taula 7.8 s'obté amitjanant l'error quadràtic a partir de la primera volta del sensor làser. És a dir, des de $t = 0,125$ s fins al final de la trajectòria.

Taula 7.8 Valor RMS de l'error lateral i l'error d'orientació al llarg del temps (des de $t = 0,125$ s fins al final de la simulació)

Trajectòria	EKF angular + triangulació		EKF posicional	
	RMS(e_{lat}) (mm)	RMS(e_{ψ}) (mrad)	RMS(e_{lat}) (mm)	RMS(e_{ψ}) (mrad)
(1)	1,30	1,06	4,94	3,26
(2)	2,43	4,89	3,37	4,90
(3)	3,20	5,13	17,24	5,37

La Taula 7.9 mostra els valors de l'error lateral i de l'error d'orientació, per a cada algorisme, a $t = 0,125$ s. És a dir, quan el sensor làser ja ha realitzat una volta sencera. Aquesta dada informa de la capacitat que té l'algorisme de corregir l'error en l'estimació inicial del posicionament únicament amb la primera detecció dels tres reflectors.

Taula 7.9 Mitjana de l'error lateral i de l'error d'orientació a $t = 0,125$ s

Trajectòria	EKF angular + triangulació		EKF posicional	
	e_{lat} (mm)	e_{ψ} (mrad)	e_{lat} (mm)	e_{ψ} (mrad)
(1)	-4,24	-1,74	-84,31	23,28
(2)	0,56	-0,87	-25,36	-4,45
(3)	-12,52	-6,07	-129,44	6,40

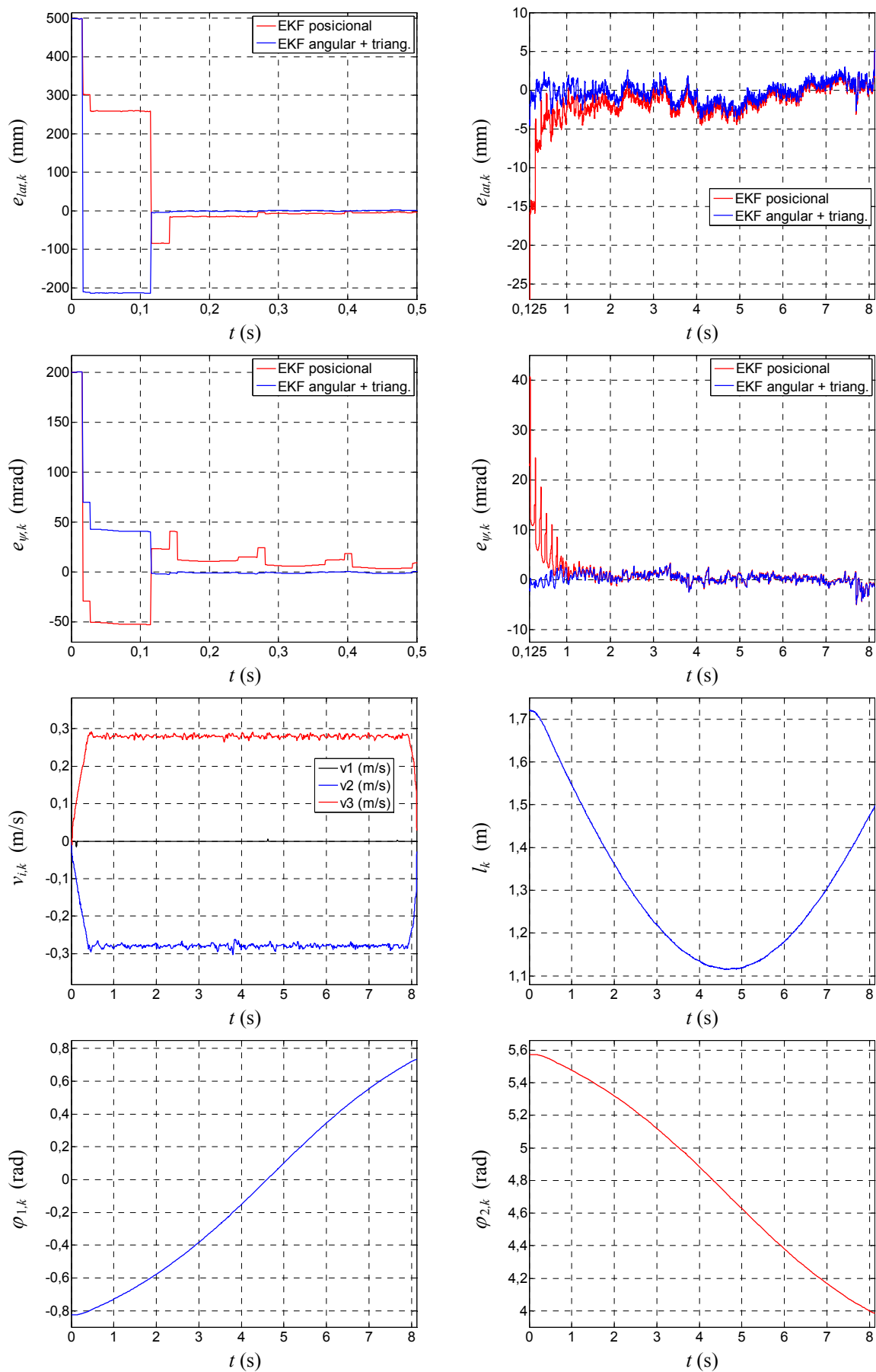


Figura 7.18 Resultats per a la trajectòria (1)

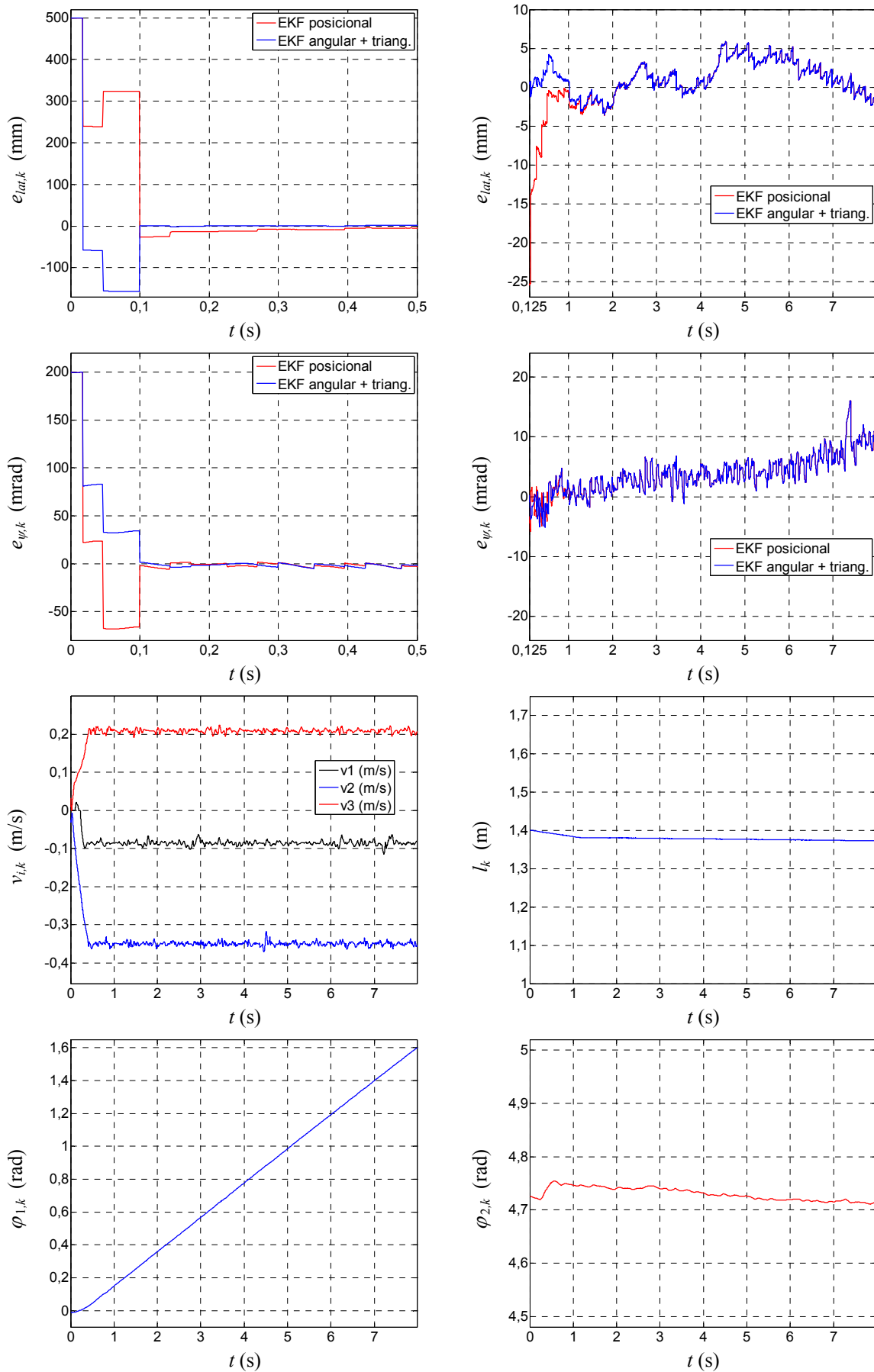


Figura 7.19 Resultats per a la trajectòria (2)

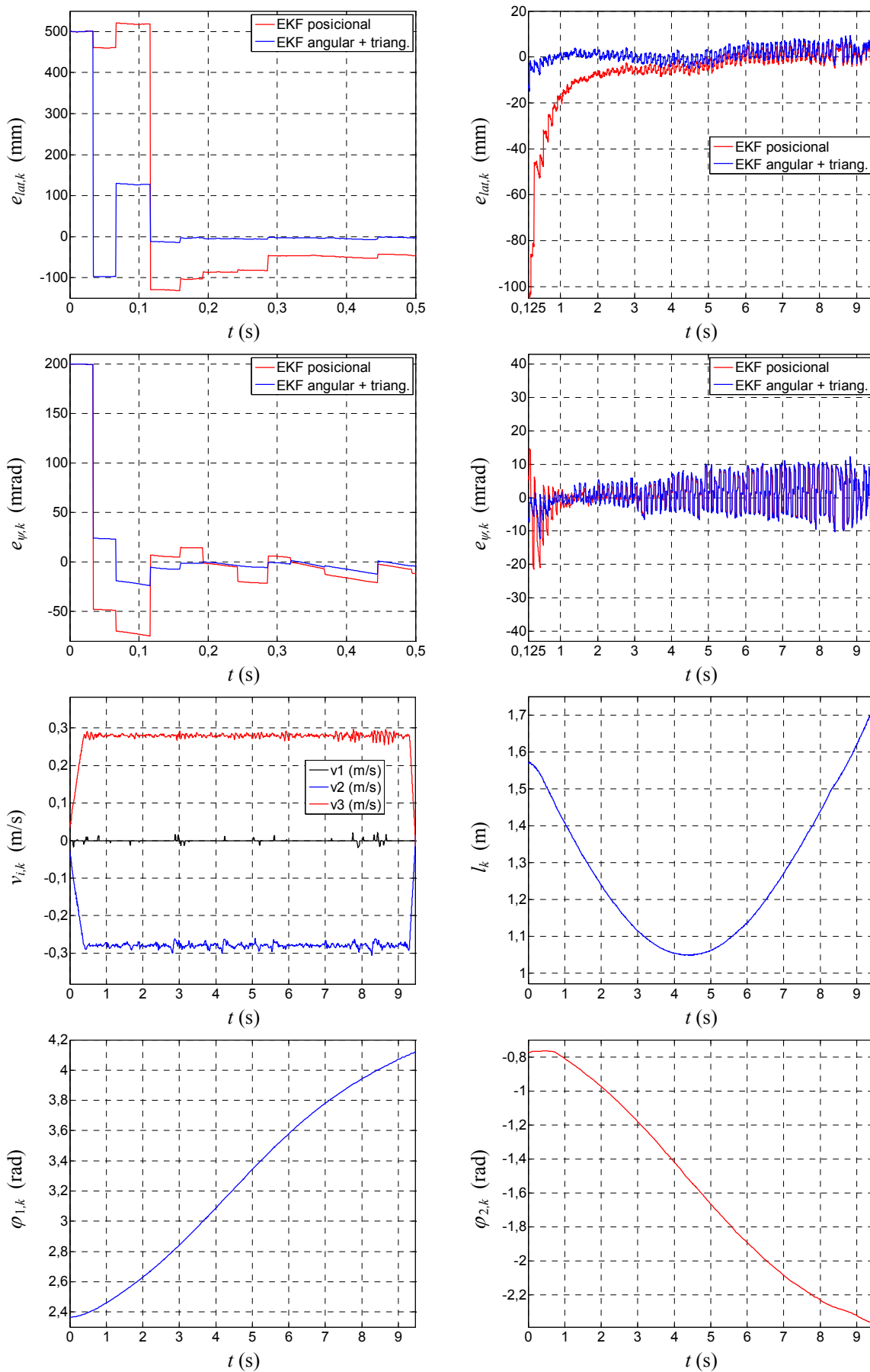


Figura 7.20 Resultats per a la trajectòria (3)

7.4 Valoració dels resultats obtinguts

A continuació es valoren els resultats que s'han obtingut en els experiments realitzats per a validar la precisió dels mètodes dinàmics de posicionament que es consideren.

Els resultats que es mostren a la Taula 7.8 posen de manifest que en les tres trajectòries el valor RMS de l'error lateral de posició i de l'error d'orientació al llarg del temps –a partir de la primera volta del sensor làser, $t = 0,125$ s– és inferior si s'utilitza el mètode de posicionament desenvolupat a la tesi.

La diferència més gran entre els valors RMS de l'error lateral s'ha trobat a la trajectòria (3), en aquest cas el valor obtingut mitjançant el mètode desenvolupat a la tesi és de 3,20 mm, mentre que el que s'obté amb el EKF posicional és de 17,24 mm. La diferència més gran entre els valors RMS de l'error d'orientació es troba en la realització de la trajectòria (1), amb el mètode desenvolupat s'obté un error de 1,06 mrad, mentre que l'aplicació de l'algorisme alternatiu condueix a un valor d'error de 3,26 mrad.

Els resultats de la mateixa taula permeten concloure que el mètode de posicionament desenvolupat compleix el requeriment de precisió plantejat en els objectius del treball –precisió de l'ordre de mm en el càlcul de posició i de l'ordre de mrad en el d'orientació–, ja que el valor RMS de l'error lateral màxim és de 3,20 mm i de l'error d'orientació 5,13 mrad –ambdós en la trajectòria (3)–.

La Taula 7.9 mostra els valors de l'error lateral i de l'error d'orientació per a $t = 0,125$ s, és a dir, quan el sensor angular làser ha realitzat una volta sencera –i per tant ha mesurat per primer cop l'angle corresponent als tres reflectors emprats–. A partir d'aquests valors, s'observa clarament que l'algorisme desenvolupat és molt més ràpid que el EKF posicional a l'hora de corregir l'error inicial de posicionament ($e_{lat,0} = 500$ mm i $e_{\psi,0} = 200$ mrad). Mitjançant l'estimació dinàmica angular i el posicionament per triangulació, l'error lateral a $t = 0,125$ s oscil·la entre 0,56 i 12,52 mm, i el d'orientació entre 0,87 i 6,07 mrad. En canvi els errors a $t = 0,125$ s si s'utilitza el EKF posicional oscil·len entre 25,36 i 129,44 mm (error lateral), i entre 4,45 i 23,28 mrad (error d'orientació).

Com s'ha anat comentant al llarg de la tesi, la raó per la qual la correcció de l'error inicial de posicionament es realitza de forma més ràpida amb el mètode que es presenta és perquè l'equació de mesura del EKF angular que s'utilitza és *lineal*, i per tant no es comet error associat a la linealització de l'equació de mesura en l'etapa d'actualització del filtre. El EKF posicional, en canvi, té una equació de mesura *no lineal* que es linealitza cada vegada que s'actualitza l'estat. Aquest error de linealització, que no és menystenible quan la incertesa en el posicionament és elevada, fa que en els primers passos l'algorisme no sigui capaç de convergir al posicionament correcte.

Aquest fet s'observa de forma clara als gràfics dels errors per a cadascuna de les trajectòries. Per exemple, si s'observen els gràfics corresponents als errors e_{lat} i e_{ψ} de la trajectòria (1) –Figura 7.18– es veu com a partir de la tercera mesura angular ($t > 0,125$ s) ambdós errors es mantenen propers a zero si s'utilitza el EKF d'estat angular (corba blava). Per contra, el EKF posicional (corba vermella) no garanteix una reducció tan ràpida de l'error inicial. L'error lateral de posició obtingut amb aquest últim mètode no és de l'ordre del que s'obté amb el mètode desenvolupat fins al cap de 3 segons (quan ja s'han realitzat

aproximadament 24 mesures de cada angle amb el sensor). L'error d'orientació convergeix de forma més ràpida perquè l'error inicial d'orientació és més petit.

La tendència anterior, que també s'observa en els gràfics d'evolució dels errors e_{lat} i e_{ψ} de la resta de trajectòries –Figures 7.19 i 7.20–, és consistent amb els resultats obtinguts en les *simulacions informàtiques* (apartats 6.2 i 6.3). En el capítol de simulació es van realitzar 500 simulacions de cada trajectòria amb prediccions inicials del posicionament i errors en les mesures diferents en cadascuna d'elles. Es va fer així perquè una única simulació no permet concloure quin dels dos mètodes té un millor comportament, ja que uns errors concrets poden afectar més un mètode o l'altre.

En cada simulació (de les 500) el funcionament de cada mètode és diferent, i el que s'observa als gràfics de les Figures 6.8-6.14 (Capítol 6) és l'evolució amitjanada dels errors –lateral i d'orientació– determinats per a cada simulació, així com la seva desviació estàndard. Aquests resultats garanteixen una *comparació estadística* més completa dels dos mètodes.

Els resultats experimentals, tal com s'ha dit, posen de manifest un comportament consistent amb els resultats de les simulacions, encara que els errors obtinguts són una mica més grans perquè en l'experimentació real els errors associats no estan tan controlats com en les simulacions per ordinador.

Per últim, cal remarcar que les trajectòries experimentals s'han fet a una velocitat baixa de $0,3 \text{ ms}^{-1}$ per la limitació d'espai imposada per l'allargament mínim i màxim del potenciómetre. Per a velocitats més elevades –com les que es tenen en aplicacions reals que s'arriba a 1 ms^{-1} – el guany de precisió mitjançant el mètode de posicionament desenvolupat respecte al EKF posicional encara seria més gran, perquè l'augment dels errors hodomètrics –que són proporcionals a la velocitat– condueix a prediccions de l'estat del filtre més *incertes* que impliquen un augment de l'error associat a l'ús de l'aproximació linealitzada de l'equació de mesura en l'etapa d'actualització. Aquest augment de la incertesa en la transició d'estat, no afecta l'etapa d'actualització del EKF angular perquè l'equació de mesura ja és *lineal*.

Capítol 8

Conclusions i extensions

L'objectiu d'aquesta tesi doctoral ha estat el desenvolupament d'un mètode que en *condicions dinàmiques* –és a dir, en el decurs del moviment del robot– determina amb precisió el posicionament d'un robot mòbil utilitzant un *sistema de posicionament làser*. Aquest sistema realitza mesures angulars de l'orientació, relativa al robot, de la recta entre un dels seus punts i reflectors de posició coneguda situats en punts de l'entorn.

El problema d'utilitzar aquest sistema és que cada angle es mesura en un instant de temps diferent i per tant, si el robot es mou, cada mesura correspon a una configuració del robot també diferent. En aquestes condicions els mètodes geomètrics de posicionament basats en triangulació angular no es poden utilitzar de forma consistent directament a partir de les mesures del sensor –“problema del posicionament dinàmic”–.

Per a resoldre aquest problema, es proposa un mètode que consta de dues etapes. Una primera etapa d'*estimació dinàmica* dels angles associats als reflectors emprats basada en un filtre de Kalman estès (EKF angular), i una segona etapa en la que a partir de l'estimació angular es determina de forma consistent el posicionament del robot per mitjà de les equacions geomètriques de *triangulació*. A continuació es presenten les principals conclusions i aportacions del treball, així com les extensions i futures línies d'investigació que es preveuen.

8.1 Conclusions

Les conclusions i aportacions més rellevants de la tesi s'expliquen tot seguit. Aquestes es classifiquen per apartats.

Posicionament geomètric per triangulació

En l'estudi dels mètodes geomètrics de triangulació, que determinen la posició i l'orientació del robot a partir de tres mesures angulars associades a punts de posició coneguda de l'entorn, s'han plantejat dos mètodes diferents: la triangulació per intersecció d'*arcs capaços*, i la triangulació per intersecció de *rectes*.

El primer mètode determina la posició del robot a partir de la intersecció de dos arcs capaços. Posteriorment, a partir de la posició es determina fàcilment l'orientació del robot. S'ha demostrat que, encara que les mesures angulars continguin un cert error, el càlcul de la posició és independent de quina parella dels tres arcs capaços –definites pels angles α , β i γ – s'intersequi, i que el càlcul de l'orientació és independent del reflector que s'utilitzi.

Per al mètode anterior, s'ha estudiat la propagació de l'error angular en el càlcul del posicionament. S'ha realitzat un primer estudi en el que es consideren errors acotats de distribució uniforme en les variables angulars. Aquest primer estudi ha fet palès que l'error màxim en el càlcul de la posició i de l'orientació creix quan el punt que es posiciona s'aproxima a la *circumferència crítica* que passa pels tres reflectors emprats. Sobre aquesta circumferència, el càlcul de posició és *indeterminat* perquè els tres arcs capaços són coincidents. Els mapes d'error generats han permès concloure que la zona on es té una precisió de posicionament més gran –per a les distribucions de reflectors considerades– és a l'interior del triangle que determinen els reflectors.

Com que l'algorisme d'estimació dinàmica angular –que es proposa per a resoldre el *problema del posicionament dinàmic*– tracta les variables d'estat com a gaussianes, s'ha estudiat també la propagació de l'error quan aquest segueix una distribució de probabilitat normal. L'estudi estadístic ha permès concloure que l'aproximació lineal en les sèries de Taylor de les equacions geomètriques de posició p i d'orientació ψ és vàlida a l'interior de la circumferència crítica. Per a justificar-ho s'han generat mapes dels *errors de biaix* de segon ordre –de posició i d'orientació–, en els que s'ha vist que aquests són d'un ordre de magnitud negligible a la zona interior de la circumferència crítica ($< 0,05$ mm el de posició i $< 0,01$ mrad el d'orientació).

La validesa de l'aproximació lineal ha permès trobar les expressions analítiques del valor esperat de la posició i l'orientació, a partir de variables angulars gaussianes, així com de la covariància de l'error en la determinació del posicionament. S'ha determinat una el·lipse d'incertesa que delimita la zona on es troba el robot amb una certa probabilitat, emprant el concepte de *distància de Mahalanobis*. Les simulacions de Monte Carlo que s'han fet han permès comprovar que l'el·lipse ajusta correctament la dispersió de punts simulats en punts situats a la zona on l'error de biaix és negligible.

El segon mètode de triangulació estudiat es basa en intersecció de rectes. Aquest requereix una *aproximació* de l'orientació del robot per a determinar les rectes que passen per cada reflector. S'ha demostrat que el triangle que determinen les tres rectes si s'empra l'aproximació de l'orientació (*triangle d'error*) i el triangle que determinen els centres dels tres arcs capaços del mètode anterior (*triangle de centres*) són *semblants*, i que la relació de semblança està relacionada analíticament amb la diferència entre l'orientació aproximada i la real. A partir d'aquesta relació es pot calcular l'orientació del robot, càlcul que també és indeterminat sobre la circumferència crítica perquè en aquest cas els dos triangles degeneren en un punt.

Un cop determinada l'orientació del robot, s'ha demostrat que qualsevol parella de rectes que s'intersequi –sempre i quan el robot no estigui alineat amb dos dels reflectors– condueix al mateix resultat de posició. S'ha estudiat també com afecta l'error present en les variables angulars el càlcul del posicionament, i s'ha vist que el resultat que s'obté coincideix amb el del mètode d'intersecció d'arcs capaços. És així perquè ambdós mètodes es basen en restriccions geomètriques equivalents. Per aquest motiu, les equacions que

s'han utilitzat al llarg de la tesi per al càlcul del posicionament són les del mètode d'intersecció d'arcs capaços, ja que són més senzilles.

El segon mètode s'ha investigat per a millorar un mètode present a la bibliografia [Cohen i Koss 1992], en el que s'obtenia l'error en l'aproximació de l'orientació, minimitzant el perímetre del triangle d'error amb un mètode *iteratiu*. L'estudi fet ha demostrat que hi ha una relació analítica directa entre aquest error i la geometria del triangle que permet trobar l'orientació sense recórrer a un procés iteratiu.

Estimació dinàmica angular

Per a garantir l'aplicació consistent dels mètodes geomètrics de triangulació quan s'empra un sistema de posicionament làser, s'ha desenvolupat un *algorisme dinàmic* que estima a cada instant de temps l'estat angular –que té com a components els angles relatius associats als tres reflectors emprats– encara que no hi hagi mesura directa del sensor làser. L'algorisme simula l'evolució de cada angle entre deteccions consecutives a partir de la seva evolució hodomètrica.

Com que l'evolució hodomètrica angular depèn de la cinemàtica particular de cada robot, s'han considerat tres cinemàtiques molt habituals en robòtica mòbil: la cinemàtica *diferencial*, la cinemàtica *de tricicle*, i la cinemàtica *omnidireccional* amb rodes de lliscament direccional. Per a cadascuna d'elles s'han trobat les expressions per al càlcul de la velocitat del centre del sensor làser i de la velocitat angular del robot en funció de les mesures hodomètriques. Expressions necessàries per a l'estudi cinemàtic –relatiu al robot– de les rectes entre el centre del capçal làser i cada reflector, que ha permès determinar l'evolució hodomètrica dels angles associats als reflectors.

L'algorisme d'estimació de l'estat angular s'ha formulat també per a les tres cinemàtiques anteriors i està basat en el *filtre de Kalman estès* (EKF) per a sistemes no lineals. L'aportació més rellevant d'aquest algorisme és la utilització d'un vector d'estat format pels angles que mesura el sensor làser durant la navegació del robot. L'avantatge d'utilitzar aquest vector d'estat és que garanteix la linealitat de l'equació de mesura del EKF. S'ha comprovat que això fa que no es cometi error –per causa de la linealització de l'equació de mesura– en l'*etapa d'actualització* del EKF.

Per a generar la millor estimació dels angles, l'algorisme té en compte la predicció de l'error en la seva evolució hodomètrica i l'error en les mesures del sensor làser. S'ha modelitzat l'error del sensor que s'ha considerat *gaussià* per provenir de diferents fonts d'error independents. Per a la modelització de l'error en les mesures hodomètriques de velocitat s'han utilitzat models i paràmetres trobats a la bibliografia.

Mètode global de posicionament dinàmic. Simulacions i experimentació

El funcionament del mètode de posicionament dinàmic desenvolupat s'ha simulat per ordinador i s'ha validat mitjançant un *muntatge experimental* –ideat i dissenyat durant la realització de la tesi– que s'ha instal·lat al Laboratori de Mecànica de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB, UPC).

Tant en les simulacions informàtiques com en l'experimentació, el mètode desenvolupat s'ha comparat amb el mètode alternatiu existent: el EKF d'estat *posicional*. En aquest mètode cada mesura realitzada pel sensor làser s'utilitza de forma independent per a actualitzar l'estimació del posicionament. Aquest mètode presenta l'inconvenient d'utilitzar una equació de mesura *no lineal*. En conseqüència, si l'error en la predicció del posicionament és gran –com passa en els primers passos de l'algorisme– la convergència al posicionament real és més lenta per causa de l'error associat a l'ús de l'aproximació lineal de l'equació de mesura.

Les simulacions informàtiques s'han fet amb el programari matemàtic MATLAB v7.1. S'han simulat set trajectòries que corresponen a diferents situacions realistes de moviment del robot i cada trajectòria té una disposició de reflectors assignada. El robot mòbil que s'ha simulat és l'SPHERIK-3x3, el mateix que s'ha utilitzat en l'etapa d'experimentació.

Cadascuna de les trajectòries s'ha simulat 500 vegades –amb prediccions inicials i errors diferents en cada simulació–, i s'ha calculat la mitjana i la desviació estàndard dels errors de posicionament (*error lateral* i *error d'orientació*) a cada instant de temps mitjançant els dos mètodes. D'aquesta manera s'ha obtingut una comparació estadística dels dos mètodes. En les simulacions s'ha considerat un error en la predicció inicial del posicionament per a verificar la robustesa del mètode proposat a aquesta incertesa inicial.

Les simulacions han posat de manifest el guany de precisió que aporta el mètode de posicionament proposat comparat amb l'existent. Aquest guany s'accentua a l'inici de la trajectòria perquè el mètode desenvolupat redueix l'error inicial de forma més ràpida. Un cop s'han realitzat les tres primeres mesures angulars ($t = 0,125$ s), l'error lateral mitjà és de l'ordre de la dècima de mm i l'error d'orientació mitjà de la dècima de mrad. Els mateixos errors mitjans utilitzant el EKF posicional són un ordre de magnitud més grans. La raó per la qual el mètode proposat funciona millor és perquè la *linealitat* de l'equació de mesura garanteix que no es cometin errors per causa de l'ús d'aproximacions de primer ordre en l'etapa d'actualització del EKF.

En l'etapa de validació experimental s'ha utilitzat un muntatge basat en el robot mòbil omnidireccional SPHERIK-3x3, equipat amb un sistema de posicionament làser comercial. La posició dels reflectors instal·lats al laboratori s'ha mesurat mitjançant un teodolit electrònic d'alta precisió. El muntatge experimental incorpora un *sistema metrològic*, format per un potenciómetre lineal i dos encoders, que mesura amb precisió la posició i l'orientació del robot en el decurs del seu moviment.

Per a validar el mètode de posicionament proposat s'han realitzat tres trajectòries que guarden semblança amb les que s'han simulat. Al llarg de cada trajectòria s'han emmagatzemat en un PC les mesures de tots els sensors del robot –sensors metrològics, hodomètrics i làser– a cada instant de temps ($\Delta t = 0,001$ s). Posteriorment, s'han executat els dos mètodes que es comparen amb les dades emmagatzemades, i s'ha determinat l'evolució dels errors de posicionament (error lateral de posició i error d'orientació) per a cadascun d'ells, prenent com a referència la trajectòria i l'orientació determinats pels sensors metrològics.

Els resultats fruit dels experiments són consistents amb els obtinguts per simulació, ja que en aquests el mètode desenvolupats ofereix una precisió més gran. De la mateixa manera que en les simulacions, el guany de precisió –comparat amb el EKF posicional– s'accentua

en els instants inicials de la trajectòria en els que es corregeix l'error inicial. A més, és important assenyalar que els errors obtinguts en els experiments –amitjanats al llarg del temps, valor RMS dels errors– tenen l'ordre de magnitud que s'havia plantejat en els objectius de la tesi: ordre de *mil·límetres* (en la posició) i ordre de *mil·liradians* (en l'orientació).

Vist el guany de precisió que aporta la utilització de l'espai d'estats *angular* –enlloc del posicional– les components del qual són directament mesures pel sensor, la investigació de la tesi permet extreure com a conclusió rellevant que en un problema d'estimació del posicionament d'un robot mòbil, és preferible procedir en dues etapes: En una primera etapa es fa l'estimació dinàmica de l'estat format per les mesures externes dels sensors del robot, i en una segona etapa s'estima el seu posicionament a partir de la relació geomètrica entre aquest i les mesures.

Una consideració final relativa al mètode de posicionament desenvolupat té a veure amb la seva precisió. És usual que en aplicacions reals l'exigència de precisió sigui més alta en les configuracions de sortida i d'arribada del robot –perquè és quan aquest interacciona amb objectes del seu entorn– que en el camí intermedi. Tanmateix, el mètode que s'ha presentat determina el posicionament amb precisió en tota circumstància.

Es podria pensar en la utilització d'un mètode menys precís i més ràpid durant el camí intermedi, per exemple la utilització directa de les mesures del sensor làser per a triangular. No obstant, és preferible utilitzar el mètode presentat en tota circumstància per les següents raons:

- Es garanteix que la precisió sigui alta en els extrems de sortida i arribada.
- L'ús d'un mètode més precís permet detectar de manera eficient mesures errònies (*outliers*) o la manca d'una reflexió, la qual cosa incrementa la robustesa del mètode.
- Es garanteix que el sistema de control o de guiatge del robot funcioni millor. Ja que es determinen amb precisió en tot moment els errors de posició i d'orientació del robot respecte a la trajectòria teòrica, que són els que el sistema de guiatge s'encarrega de corregir de forma estable.

8.2 Extensions

En aquest apartat es presenten algunes extensions i línies d'investigació obertes que es preveuen per a aprofundir en la recerca feta durant la realització d'aquesta tesi doctoral. Són extensions directes del mètode:

- Pel que fa al posicionament per *triangulació*, es proposa l'estudi de la influència dels errors en la posició dels reflectors en el càlcul de la posició i l'orientació del robot.
- Com que el mètode d'estimació dinàmica dels angles associats als reflectors és vàlid per a un nombre qualsevol de reflectors, es proposa estudiar l'ús de *més de tres reflectors* per a calcular el posicionament. Una primera tècnica pot consistir en utilitzar tots els subconjunts possibles de tres reflectors i amitjanar tots els càlculs de posició i d'orientació. Una altra tècnica –possiblement més precisa– pot consistir en seleccionar,

per a una determinada posició del robot, el triplet de reflectors que minimitzi l'error en el càlcul del posicionament.

- Un altre aspecte a aprofundir és el de l'estimació del posicionament per triangulació partint de mesures angulars amb errors gaussians. A la tesi s'ha justificat que l'aproximació lineal de les equacions de triangulació dona bons resultats a l'interior de la *circumferència crítica*, ja que l'error de biaix és dos ordres de magnitud inferior a l'error que es pretén obtenir. No obstant, seria bo investigar si l'ús d'un algorisme *iteratiu d'optimització no lineal* que minimitzés l'error quadràtic de l'estimació –com per exemple el de Gauss-Newton [Kasdin 2000a i 2000b]– milloraria significativament la precisió del mètode global. També s'hauria d'estudiar si el cost computacional del mètode seria adequat per a determinar el posicionament del robot en temps real i controlar així la seva trajectòria.
- En aquest treball sempre s'han considerat trajectòries que transcorren a l'interior de la circumferència crítica que passa pels tres reflectors, on el posicionament per triangulació és determinat. Es proposa, per a completar la recerca, analitzar el comportament dels dos mètodes de posicionament (“EKF posicional” i “EKF angular i triangulació”) sobre aquesta circumferència; en condicions transitòries i en condicions permanents. En el cas que el mètode proposat divergeixi, per causa de la indeterminació de la triangulació, seria interessant comprovar l'eficàcia d'aplicar la triangulació per intersecció de rectes amb una estimació –obtinguda per integració hodomètrica– de l'orientació del robot.
- Tot i que a la tesi s'ha vist que el EKF que es presenta per a l'estimació dinàmica de l'estat angular és suficientment precís per a les aplicacions reals, es proposa com a treball futur utilitzar un *Unscented Kalman Filter* (UKF) per a estimar l'evolució dels angles. Aquest tipus de filtre, també per a sistemes no lineals, és una extensió del EKF que té en compte la propagació *no lineal* de les matrius de covariància d'error del filtre [Andrade-Cetto 2002]. S'hauria d'investigar la millora que aporta aquest algorisme a l'*etapa de predicció* del filtre, basada en la transició hodomètrica de l'estat angular que és no lineal.
- El mètode que s'ha presentat parteix d'una *predicció inicial* de l'estat angular –que s'obté a partir d'una predicció inicial del posicionament coneguda prèviament–, a partir de la qual s'identifica cada mesura angular que realitza el sensor amb el reflector corresponent. Una possible extensió del mètode és desenvolupar un algorisme que inicialment relacioni els reflectors amb les mesures angulars del sensor si no es disposa de cap informació prèvia. Aquest algorisme resoldria el que es coneix com *arrencada en fred* (*cold start-up*), és a dir, la inicialització del posicionament sense cap informació de partida.

Finalment, aquestes són altres tasques que queden obertes en la línia de la recerca que s'ha realitzat:

- Estudiar els avantatges que aporta al posicionament dinàmic, el fet que en *trajectòries holònomes* l'hodometria posicional dels robots amb rodes omnidireccionals de corrons esfèrics sigui lineal.

-
- Investigar la possibilitat d'incorporar informació de la *dinàmica* del robot al filtratge de Kalman per a millorar la precisió del posicionament. D'aquesta manera es podrien preveure lliscaments de les rodes del robot, que afecten el càlcul hodomètric integratiu en la fase de predicció del filtre de Kalman.
 - Implementar el mètode de posicionament en el *sistema de navegació* d'un robot mòbil i comprovar que funciona de forma adequada, conjuntament amb el sistema de guiatge, per a controlar en temps real la trajectòria del robot.

Annex A

Derivades de la posició i l'orientació respecte a l'estat angular

En aquest annex es donen les expressions de les derivades de les equacions (4.20) i (4.39) respecte a l'estat angular $\mathbf{x} \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$, per al desenvolupament de Taylor fins a termes de segon ordre i per a la propagació dels errors en la determinació del posicionament –posició i orientació– per triangulació.

L'equació (A.1) representa la matriu de derivades primeres de la funció vectorial de posició $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, equació (4.20), respecte a l'estat angular \mathbf{x} :

$$\nabla \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

les components de la qual són les següents:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -\frac{x_3}{(1+\eta^2)^2} \left(2\eta + (1-\eta^2) \cot \beta \right) \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -\frac{x_3}{(1+\eta^2)^2} \left[\left(2\eta + (1-\eta^2) \cot \beta \right) \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} + \frac{\eta(1+\eta^2)}{\sin^2 \beta} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_3} = -\frac{x_3}{(1+\eta^2)^2} \left[\left(2\eta + (1-\eta^2) \cot \beta \right) \frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} - \frac{\eta(1+\eta^2)}{\sin^2 \beta} \right], \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial \eta}{\partial \theta_i} x - \eta \frac{\partial x}{\partial \theta_i}; \quad i=1,2,3. \quad (\text{A.5})$$

Les derivades primeres del terme η respecte a cadascun dels angles θ_1 , θ_2 i θ_3 són:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_1 x_3 - y_1 x_3 \cot \beta}{\sin^2 \alpha (x_3 \cot \beta - y_1 + x_1 \cot \alpha)^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} = \frac{\eta}{x_3 - x_1 - y_1 \cot \alpha} \left(\frac{y_1 + \eta x_1}{\sin^2 \alpha} - \frac{\eta x_3}{\sin^2 \beta} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} = \frac{x_3 (x_3 - x_1 - y_1 \cot \alpha)}{\sin^2 \beta (x_3 \cot \beta - y_1 + x_1 \cot \alpha)^2}. \quad (\text{A.8})$$

En totes les expressions anteriors s'ha de tenir en compte que $\alpha \equiv \theta_2 - \theta_1$ i $\beta \equiv \theta_3 - \theta_2$.

A continuació es donen les derivades segones de la funció de posició $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ respecte a l'estat angular, necessàries per a l'avaluació del terme de segon ordre del desenvolupament de Taylor, equació (4.44). Si s'anomena $a(\mathbf{x})$ i $b(\mathbf{x})$ als termes següents:

$$a(\mathbf{x}) \equiv 2\eta + (1 - \eta^2) \cot \beta, \quad (\text{A.9})$$

$$b(\mathbf{x}) \equiv \frac{\eta(1 + \eta^2)}{\sin^2 \beta}, \quad (\text{A.10})$$

aleshores les derivades segones es calculen segons:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2} = -\frac{x_3}{(1 + \eta^2)^2} \left[\frac{\partial a}{\partial \theta_1} \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} + a \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta_1^2} - \frac{4\eta a}{1 + \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \right)^2 \right], \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta_2^2} = -\frac{x_3}{(1 + \eta^2)^2} \left[\frac{\partial a}{\partial \theta_2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} + a \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta_2^2} + \frac{\partial b}{\partial \theta_2} - \frac{4\eta}{1 + \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} \left(a \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} + b \right) \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta_3^2} = -\frac{x_3}{(1 + \eta^2)^2} \left[\frac{\partial a}{\partial \theta_3} \frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} + a \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta_3^2} - \frac{\partial b}{\partial \theta_3} - \frac{4\eta}{1 + \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} \left(a \frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} - b \right) \right], \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta_i^2} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta_i^2} x - \eta \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_i^2} - 2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_i} \frac{\partial x}{\partial \theta_i}; \quad i=1,2,3, \quad (\text{A.14})$$

on, en les expressions anteriors les derivades parcials primeres de $a(\mathbf{x})$ i $b(\mathbf{x})$ respecte a l'estat angular \mathbf{x} i les derivades parcials segones de η també respecte a l'estat angular són:

$$\frac{\partial a}{\partial \theta_1} = 2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} (1 - \eta \cot \beta), \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial a}{\partial \theta_2} = 2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} (1 - \eta \cot \beta) + \frac{1 - \eta^2}{\sin^2 \beta}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial a}{\partial \theta_3} = 2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} (1 - \eta \cot \beta) - \frac{1 - \eta^2}{\sin^2 \beta}, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial b}{\partial \theta_2} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} (1 + 3\eta^2) + 2\eta(1 + \eta^2) \cot \beta}{\sin^2 \beta}, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial b}{\partial \theta_3} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} (1 + 3\eta^2) - 2\eta(1 + \eta^2) \cot \beta}{\sin^2 \beta}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta_1^2} = -2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \frac{y_1 \cot \alpha + x_1 - x_3 \cot \alpha \cot \beta}{x_3 \cot \beta - y_1 + x_1 \cot \alpha}, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta_2^2} = \frac{2}{x_3 \cot \beta - y_1 + x_1 \cot \alpha} \left[\frac{x_1 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} - \cot \alpha (y_1 + \eta x_1)}{\sin^2 \alpha} - \frac{x_3 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} + \eta x_3 \cot \beta}{\sin^2 \beta} \right], \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta_3^2} = -2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta_3} \frac{x_1 \cot \alpha \cot \beta - y_1 \cot \beta - x_3}{x_3 \cot \beta - y_1 + x_1 \cot \alpha}. \quad (\text{A.22})$$

Pel que fa a l'orientació, les derivades parcials de la funció $\psi(\mathbf{x})$ –equació (4.39)– respecte a l'estat angular \mathbf{x} , per al càlcul de la propagació de primer ordre dels errors i de l'error de biaix, són:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} = \frac{x \frac{\partial y}{\partial \theta_1} - y \frac{\partial x}{\partial \theta_1}}{x^2 + y^2}, \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_2} = \frac{x \frac{\partial y}{\partial \theta_2} - y \frac{\partial x}{\partial \theta_2}}{x^2 + y^2} - 1, \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_3} = \frac{x \frac{\partial y}{\partial \theta_3} - y \frac{\partial x}{\partial \theta_3}}{x^2 + y^2}, \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} = \frac{x \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} - y \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \left(x \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + y \frac{\partial y}{\partial \theta_1} \right)}{x^2 + y^2}, \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} = \frac{x \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_2^2} - y \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_2^2} - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_2} + 1 \right) \left(x \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + y \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \right)}{x^2 + y^2}, \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_3^2} = \frac{x \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_3^2} - y \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_3^2} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta_3} \left(x \frac{\partial x}{\partial \theta_3} + y \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \right)}{x^2 + y^2}. \quad (\text{A.28})$$

Annex B

Estimació dinàmica del posicionament per mitjà d'un EKF. Cinemàtica diferencial i de tricicle

En aquest annex es donen les expressions necessàries per a l'aplicació del filtre de Kalman estès per a estimar el posicionament $\mathbf{y}_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$ (EKF posicional) de robots amb cinemàtica diferencial i de tricicle, a partir del seu model hodomètric posicional i de les mesures angulars $\theta_{i,k}$ ($i = 1,2,3$). A l'apartat 5.2 de la tesi s'han introduït les expressions per a la cinemàtica omnidireccional amb rodes esfèriques de lliscament direccional.

Cinemàtica diferencial

De la mateixa manera que en l'algorisme presentat a l'apartat 5.3 d'aquesta tesi d'estimació dinàmica dels angles θ_i ($i = 1,2,3$) per al cas de vehicles amb cinemàtica diferencial –apartat 5.3.3–, el vector d'entrada \mathbf{u}_k que s'utilitza en aquest cas és també:

$$\mathbf{u}_k = \{v_{1,k}, v_{2,k}\}^T, \quad (\text{B.1})$$

on $v_{i,k}$ és la velocitat del centre de la roda i – $v_i \equiv r\omega_i$ essent ω_i la velocitat angular de la roda i respecte al seu eix, Figura 5.6–. El vector d'error \mathbf{w} associat al procés de transició d'estat s'associa a l'error en les mesures hodomètriques de les variables del vector d'entrada (B.1):

$$\mathbf{w}_k = \{\delta v_{1,k}, \delta v_{2,k}\}^T. \quad (\text{B.2})$$

La matriu de covariància d'aquest vector d'error és:

$$\mathbf{Q}_k \equiv E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{v_{1,k}}^2 & \\ & \sigma_{v_{2,k}}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

on per al càlcul de la variància $\sigma_{v_{i,k}}^2$ ($i = 1,2$) es pren la hipòtesi que la variable $\Delta d_{i,k} \equiv v_{i,k} \Delta t$ –que és la distància recorreguda pel centre de la roda durant l'interval de temps Δt – té una variància que creix proporcionalment amb la distància recorreguda [Chong i Kleeman 1997, Arras *et al.* 2001, Martinelli *et al.* 2006], equació (5.53).

A partir de la definició anterior dels vectors \mathbf{u} i \mathbf{w} , les variables v_L i $\dot{\psi}$ –noteu que en aquest cas $v_T = 0$ – que es necessiten per a l'equació de transició d'estat del filtre són:

$$v_{L,k} = \frac{v_{1,k} + v_{2,k}}{2}, \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\psi}_k = \frac{v_{1,k} - v_{2,k}}{s}. \quad (\text{B.5})$$

A continuació s'expressa l'equació no lineal de transició d'estat, funció de l'estat a l'instant anterior i de les entrades hodomètriques:

$$\begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2s} \begin{Bmatrix} s(v_{1,k-1} + v_{2,k-1}) \cos \psi_{k-1} \\ s(v_{1,k-1} + v_{2,k-1}) \sin \psi_{k-1} \\ 2(v_{1,k-1} - v_{2,k-1}) \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Com s'ha comentat el vector d'error \mathbf{w} en l'equació anterior està associat a l'error de mesura de les variables hodomètriques $v_{i,k}$. A partir de la funció anterior es poden calcular les matrius jacobianes de la funció vectorial f anterior respecte a l'estat i respecte a l'error \mathbf{w} respectivament:

$$\nabla f_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2}(v_{1,k-1} + v_{2,k-1}) \sin \tilde{\psi}_{k-1} \\ 0 & 1 & \frac{\Delta t}{2}(v_{1,k-1} + v_{2,k-1}) \cos \tilde{\psi}_{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla f_{\mathbf{w}} = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \cos \tilde{\psi}_{k-1} & \cos \tilde{\psi}_{k-1} \\ \sin \tilde{\psi}_{k-1} & \sin \tilde{\psi}_{k-1} \\ 2/s & -2/s \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

La funció $h^i(\mathbf{y}_k)$ que relaciona la mesura angular $\theta_{i,k}$ amb l'estat $\mathbf{y}_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$ és independent de la cinemàtica particular del robot, i per això les equacions (5.57)-(5.59) són les que s'utilitzarien en la fase d'actualització del EKF per a obtenir l'estimació de l'estat $\tilde{\mathbf{y}}_k$ i de la matriu de covariància d'error $\tilde{P}_{y,k}$.

Cinemàtica de tricicle

En el cas de robots amb cinemàtica de tricicle, el vector d'entrada \mathbf{u}_k associat a les mesures hodomètriques que es considera en l'aplicació del filtre de Kalman està per estimar el posicionament del robot és:

$$\mathbf{u}_k = \{v_k, \varphi_k\}^T, \quad (\text{B.9})$$

on v_k és la velocitat del centre de la roda motriu i directriu, i φ_k és el seu angle de direcció respecte al xassís del robot, Figura 5.7. El vector d'error \mathbf{w} associat al procés de transició d'estat s'associa a l'error en les mesures hodomètriques anteriors:

$$\mathbf{w}_k = \{\delta v_k, \delta \varphi_k\}^T. \quad (\text{B.10})$$

La matriu de covariància d'aquest vector d'error és:

$$\mathbf{Q} \equiv E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{v,k}^2 & \\ & \sigma_{\varphi,k}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

on per a la variància de l'error de mesura de la velocitat $\sigma_{v,k}^2$ s'utilitza la modelització dels treballs [Chong i Kleeman 1997, Arras *et al.* 2001, Martinelli *et al.* 2006] en els que es fa la hipòtesi que la distància recorreguda pel centre de la roda $\Delta d_k \equiv v_k \Delta t$ té una variància que creix proporcionalment amb la distància recorreguda, equació (5.53).

Pel que fa a l'error en la mesura de l'angle φ de direcció de la roda s'utilitza la modelització de Martinelli *et al.* (2006). Els autors proposen l'equació (5.103) per a descriure la variància d'aquest error en funció de la distància Δd_k .

A partir de la definició anterior dels vectors \mathbf{u} i \mathbf{w} , les variables v_L , v_T i $\dot{\psi}$ que es necessiten per a l'equació de transició d'estat del filtre són:

$$\{\bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{P})\} = \begin{Bmatrix} v_{L,k} \\ v_{T,k} \end{Bmatrix} = \frac{v_k}{L} \begin{Bmatrix} L \cos \varphi_k - p \sin \varphi_k \\ L_P \sin \varphi_k \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{\psi}_k = \frac{v_k}{L} \sin \varphi_k. \quad (\text{B.13})$$

A continuació s'expressa l'equació no lineal de transició d'estat, funció de l'estat a l'instant anterior i de les entrades hodomètriques:

$$\begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \psi_{k-1} \end{Bmatrix} + \frac{v_{k-1} \Delta t}{L} \begin{Bmatrix} (L \cos \varphi_{k-1} - p \sin \varphi_{k-1}) \cos \psi_{k-1} - (L_P \sin \varphi_{k-1}) \sin \psi_{k-1} \\ (L \cos \varphi_{k-1} - p \sin \varphi_{k-1}) \sin \psi_{k-1} + (L_P \sin \varphi_{k-1}) \cos \psi_{k-1} \\ \sin \varphi_{k-1} \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Com s'ha comentat el vector d'error \mathbf{w} en l'equació anterior està associat a l'error de mesura de les variables hodomètriques $v_{i,k}$. A partir de la funció anterior es poden calcular

les matrius jacobianes de la funció vectorial f anterior respecte a l'estat i respecte a l'error \mathbf{w} respectivament:

$$\nabla f_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-v_{k-1}\Delta t}{L} \left[(Lc\varphi_{k-1} - ps\varphi_{k-1})s\tilde{\psi}_{k-1} + (L_P s\varphi_{k-1})c\tilde{\psi}_{k-1} \right] \\ 0 & 1 & \frac{v_{k-1}\Delta t}{L} \left[(Lc\varphi_{k-1} - ps\varphi_{k-1})c\tilde{\psi}_{k-1} - (L_P s\varphi_{k-1})s\tilde{\psi}_{k-1} \right] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

$$\nabla f_{\mathbf{w}} = \frac{\Delta t}{L} \begin{bmatrix} (Lc\varphi_{k-1} - ps\varphi_{k-1})c\tilde{\psi}_{k-1} - L_P s\varphi_{k-1} s\tilde{\psi}_{k-1} & \dots \\ (Lc\varphi_{k-1} - ps\varphi_{k-1})s\tilde{\psi}_{k-1} + L_P s\varphi_{k-1} c\tilde{\psi}_{k-1} & \dots \\ s\varphi_{k-1} & \dots \\ \dots & v_{k-1} \left[(-Ls\varphi_{k-1} - pc\varphi_{k-1})c\tilde{\psi}_{k-1} - L_P c\varphi_{k-1} s\tilde{\psi}_{k-1} \right] \\ \dots & v_{k-1} \left[(-Ls\varphi_{k-1} - pc\varphi_{k-1})s\tilde{\psi}_{k-1} + L_P c\varphi_{k-1} c\tilde{\psi}_{k-1} \right] \\ \dots & v_{k-1} c\varphi_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

on en les equacions anteriors s'utilitza $s \equiv \sin$ i $c \equiv \cos$ per a alleugerir la notació.

Tal com s'ha comentat per a la cinemàtica diferencial, la funció $h^i(\mathbf{y}_k)$ que relaciona la mesura angular $\theta_{i,k}$ amb l'estat $\mathbf{y}_k \equiv \{x_k, y_k, \psi_k\}^T$ és independent de la cinemàtica del robot. Per tant, en la fase d'actualització de l'algorisme s'utilitzen les equacions (5.57)-(5.59) que ja s'han introduït a l'apartat 5.2.

Annex C

Sistema de posicionament làser

En aquest annex es presenta el sistema de posicionament làser que es va adquirir en el marc del projecte *Sistema de Posicionament i Guiatge Làser per a Robots Mòbils* del Centre de Referència de R+D en Tècniques Avançades de Producció (CeRTAP), i que ha motivat l'estudi de la tesi. Aquest sensor és el que s'utilitza en la fase de *validació experimental* del mètode dinàmic d'estimació del posicionament, i també el que s'ha modelitzat en les *simulacions informàtiques*. En els apartats que segueixen es fa èmfasi en la modelització de l'error en les mesures que realitza el sensor, ja que en la fase d'actualització del filtre de Kalman estès (EKF) s'utilitza la seva variància R .

Descripció del sistema de posicionament

El sistema de posicionament làser que es considera està format per un capçal làser i un conjunt de reflectors catadiòptrics disposats sobre les parets de l'entorn per on es mou el robot. A la Figura C.1 es pot veure el robot mòbil SPHERIK-3x3, equipat amb el capçal làser, i un dels reflectors instal·lats al Laboratori de Mecànica de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona –on s'ha realitzat l'experimentació d'aquest treball–.

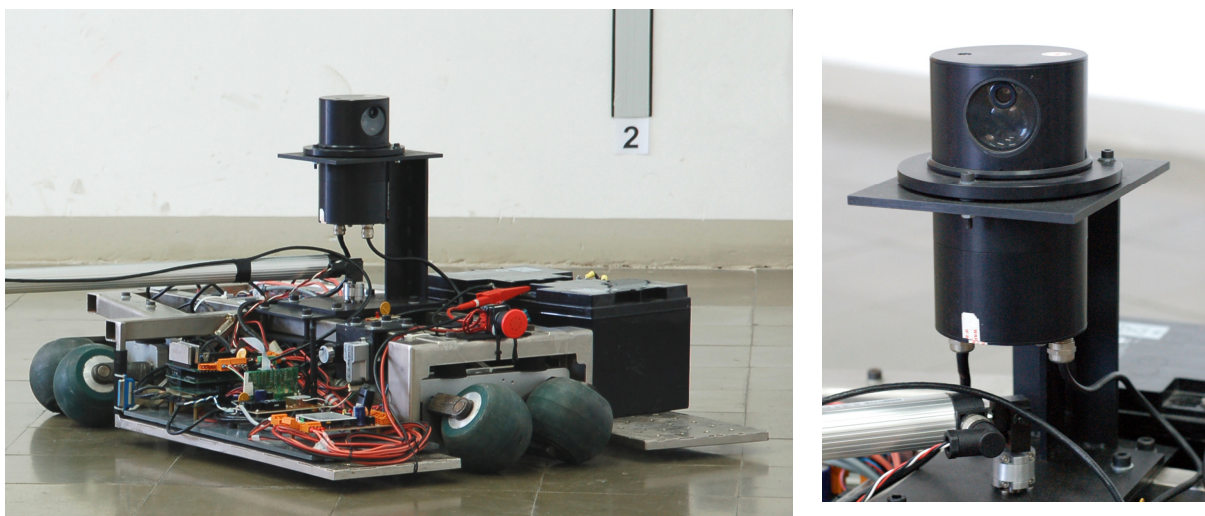


Figura C.1 Robot mòbil SPHERIK-3x3 equipat amb el capçal làser (detall a la dreta)

El capçal làser utilitzat és el model LS6 del fabricant *Guidance Control Systems Ltd.* (GCS) i s'utilitza per a mesurar l'angle, relatiu al robot, de la recta entre el centre del capçal i el primer extrem del reflector que es detecta.

La mesura angular es realitza de la següent manera: El sensor emet un feix làser que gira al voltant de l'eix vertical del capçal a una freqüència de 8 Hz, fa 8 voltes cada segon, en sentit antihorari respecte al bastidor. El feix làser escombra l'entorn del robot i es reflecteix quan incideix en un reflector. Aquesta reflexió és detectada mitjançant un fotoreceptor que incorpora el capçal, i aleshores l'angle relatiu al robot del feix reflectit és mesurat per un *encoder* òptic incremental.

Per a realitzar la mesura el sensor genera dos senyals (S1 i S2) –Figura C.2–. El senyal S1 és generat per un encoder intern del capçal, i informa del desplaçament angular del capçal en cada instant. Aquest encoder genera $N_p = 65536$ (2^{16}) polsos per cada volta, i per tant amb aquesta dada la resolució angular del sensor és:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi \text{ rad}}{N_p \text{ polsos}} = \frac{2\pi}{65536} = 0,96 \cdot 10^{-4} \text{ rad.} \quad (\text{C.1})$$

El segon senyal (S2) que genera el sensor, és el que informa de la detecció d'un reflector. Aquest senyal es posa a 1 quan es detecta reflexió del feix làser i val 0 en cas contrari. Amb aquests dos senyals i el pas per zero de l'encoder es realitza la mesura $\theta_{i,k}$ de l'angle associat al reflector R_i .

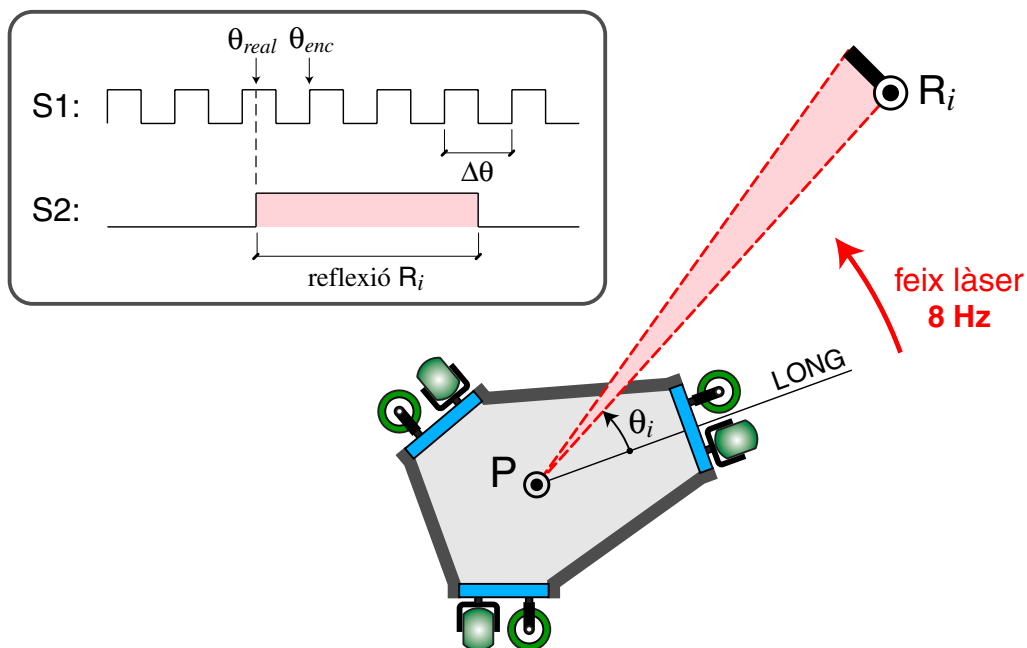


Figura C.2 Mesura angular realitzada pel sensor

Modelització de l'error en les mesures angulars del sensor

En aquest apartat es modelitza l'error respecte al valor real de la mesura del sensor làser. L'error *total* en la mesura del sensor prové de dues fonts d'error diferents:

- Error de *resolució*, $\delta\theta_r$: És l'error associat al caràcter discret de l'encoder angular del sensor.
- Error de *detecció*, $\delta\theta_d$: És l'error associat a la detecció de la reflexió del feix. S'observa que en situació estàtica del capçal, un mateix reflector no produeix sempre la mateixa mesura angular, sinó que es produeix una certa dispersió.

L'error total de la mesura serà la suma d'aquests dos errors ($\delta\theta_m \equiv \delta\theta_r + \delta\theta_d$), que en provenir de fonts diferents es consideren independents entre ells. A continuació s'estudia cadascun dels errors per separat, finalment es realitzarà una simulació de Monte Carlo de la suma d'aquests errors per a determinar la variància de l'error en les mesures del sensor.

- **Error de resolució**

Com el seu nom indica, aquest error està relacionat amb la resolució de la mesura que ofereix el sensor. La resolució $\Delta\theta$ de l'aparell es calcula mitjançant l'expressió (C.1). En aquest estudi es suposa que no hi ha error de detecció en la mesura.

Com que, tal com s'il·lustra a la Figura C.2, l'angle mesurat per l'encoder θ_{enc} quan es detecta reflexió sempre es trobarà dins l'interval $\theta_{enc} \in (\theta_{real}, \theta_{real} + \Delta\theta]$ –seguint una distribució uniforme–. Aleshores, l'esperança matemàtica d'aquesta mesura serà:

$$E[\theta_{enc}] = \theta_{real} + \frac{\Delta\theta}{2}. \quad (C.2)$$

L'angle de mesura de l'encoder θ_{enc} s'obté segons:

$$\theta_{enc} = N_\theta \Delta\theta, \quad (C.3)$$

on N_θ representa el nombre de polsos de l'encoder des del seu pas per zero fins que es detecta el reflector corresponent. Per a que no hi hagi aquest biaix entre l'esperança de la mesura de l'encoder i el valor angular real θ_{real} , s'utilitza com a mesura:

$$\theta_m \equiv \theta_{enc} - \frac{\Delta\theta}{2} = \left(N_\theta - \frac{1}{2}\right) \Delta\theta. \quad (C.4)$$

D'aquesta manera el valor esperat de la variable θ_m definida anteriorment és el real:

$$E[\theta_m] = E[\theta_{enc}] - \frac{\Delta\theta}{2} = \theta_{real}, \quad (C.5)$$

i l'error $\delta\theta_r$ respecte a aquest valor segueix una *distribució uniforme* dins l'interval:

$$\delta\theta_r \in \left[-\frac{\Delta\theta}{2}, +\frac{\Delta\theta}{2}\right]; \quad \text{on } \theta_m = \theta_{real} + \delta\theta_r. \quad (C.6)$$

- **Error de detecció**

Si no hi hagués cap més font d'error, per a una mateixa configuració $\{x, y, \psi\}^T$ del robot, és a dir per al sensor làser estàtic, s'obtidria sempre la mateixa mesura de l'encoder. No obstant, a la realitat s'observa que això no passa per causa d'una nova font d'error en la *detecció* de l'instant de reflexió.

Aquest error pot ser suma de diferents causes com per exemple una petita excentricitat del disc de l'encoder del sensor, petits retards en la senyal S2 que genera el fotoreceptor, el gruix finit del feix làser, etc.

S'ha realitzat el següent experiment per a modelitzar aquest error. Amb el robot quiet en una mateixa configuració es realitzen $N = 50$ mesures, mitjançant el sensor làser, dels angles corresponents a tres reflectors diferents del laboratori (Figura C.3). La Taula C.1 mostra les mesures obtingudes en nombre de polsos $N_{\theta,i}^j$ ($j = 1, \dots, N = 50$) de l'encoder per a cadascun dels reflectors R_i ($i = 1, 2, 3$).

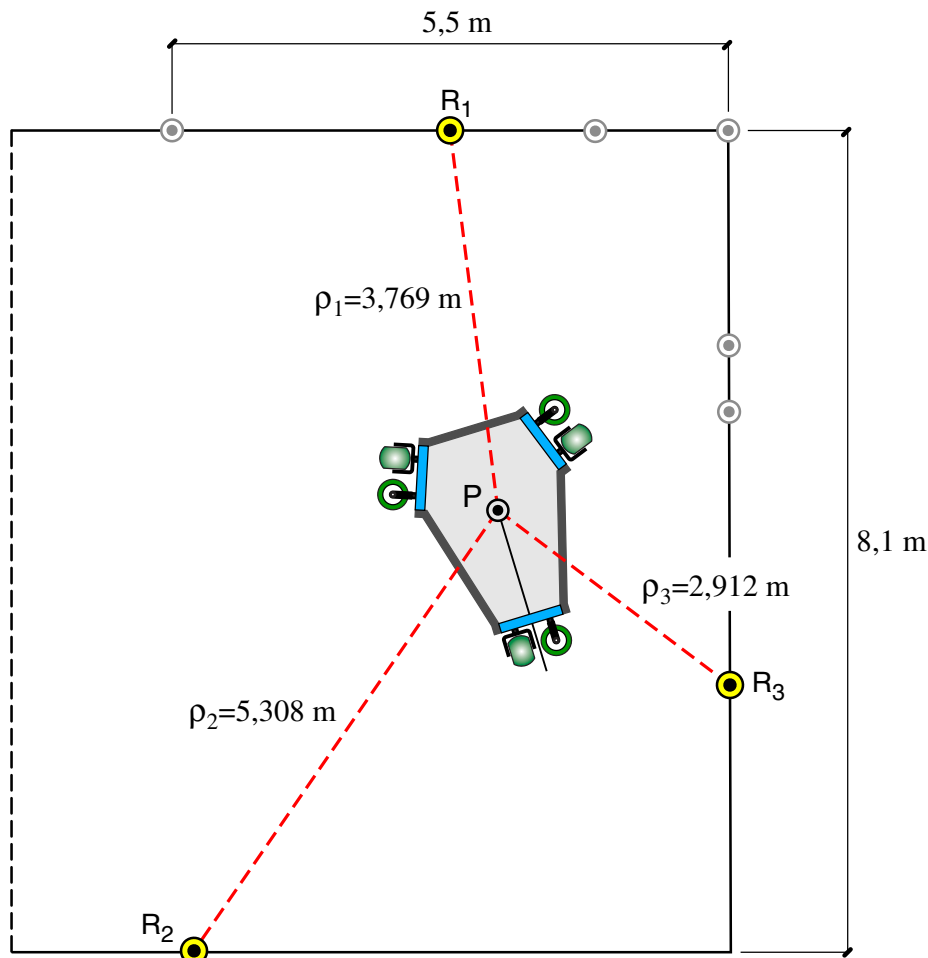


Figura C.3 Reflectors utilitzats i posició del robot en l'experiment, Laboratori de Mecànica de l'ETSEIB

Taula C.1 Mesures de l'encoder del sensor làser, en nombre de polsos $N_{\theta,i}^j$ ($i = 1,2,3$; $j = 1,\dots,N$), per als tres reflectors que es consideren

j	$N_{\theta,1}^j$	$N_{\theta,2}^j$	$N_{\theta,3}^j$	j	$N_{\theta,1}^j$	$N_{\theta,2}^j$	$N_{\theta,3}^j$
1	31500	56831	7145	26	31499	56831	7145
2	31499	56831	7145	27	31500	56829	7146
3	31499	56830	7146	28	31500	56831	7145
4	31500	56830	7146	29	31500	56831	7146
5	31500	56831	7146	30	31499	56831	7145
6	31499	56830	7146	31	31499	56829	7145
7	31499	56830	7145	32	31500	56830	7145
8	31499	56830	7145	33	31499	56831	7145
9	31499	56830	7146	34	31501	56830	7146
10	31499	56830	7145	35	31499	56830	7146
11	31499	56830	7145	36	31500	56829	7145
12	31499	56829	7145	37	31499	56831	7145
13	31499	56830	7145	38	31500	56830	7145
14	31499	56830	7145	39	31500	56830	7145
15	31499	56830	7145	40	31500	56830	7145
16	31498	56829	7145	41	31499	56830	7145
17	31500	56830	7146	42	31499	56830	7146
18	31499	56831	7146	43	31500	56829	7146
19	31499	56830	7145	44	31499	56830	7145
20	31499	56830	7146	45	31498	56830	7145
21	31499	56831	7146	46	31499	56830	7145
22	31499	56830	7146	47	31500	56830	7144
23	31499	56830	7145	48	31499	56829	7145
24	31500	56830	7146	49	31499	56830	7145
25	31500	56830	7147	$N = 50$	31499	56830	7145

S'observa a la Taula C.1 que l'angle mesurat per l'encoder –en nombre de polsos– no és sempre el mateix com a conseqüència de l'*error de detecció*, si només hi hagués error de resolució els angles mesurats en aquest experiment serien sempre els mateixos. A la Taula C.2 es dona la mitjana i la desviació estàndard dels angles mesurats calculats per a cada reflector segons:

$$E(N_{\theta,i}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N N_{\theta,i}^j \Rightarrow E(\theta_i) = E(N_{\theta,i}) \Delta\theta; \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{C.7})$$

$$\sigma(N_{\theta,i}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (N_{\theta,i}^j - E(N_{\theta,i}))^2} \Rightarrow \sigma(\theta_i) = \sigma(N_{\theta,i}) \Delta\theta; \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.8})$$

Taula C.2 Mitjana i desviació estàndard dels valors mesurats per a cada reflector

Paràmetres estadístics	Ref. R ₁	Ref. R ₂	Ref. R ₃
$E(N_{\theta,i})$	31499,32	56830,08	7145,36
$E(\theta_i)$	3,020 rad	5,448 rad	0,685 rad
$\sigma(N_{\theta,i})$	0,587	0,600	0,563
$\sigma(\theta_i)$	0,056 mrad	0,057 mrad	0,054 mrad

A partir dels resultats anteriors s'observa que la desviació estàndard de les mesures $\sigma(\theta_i)$ –que és conseqüència de l'*error de detecció*– és més gran si el reflector que es detecta està més lluny, Figura C.3. No obstant, la variació de $\sigma(\theta_i)$ d'un reflector a l'altre és molt petita, i per això en aquest estudi es considerarà independent de la distància al reflector corresponent. A partir dels valors de la Taula C.2 s'estima que la desviació estàndard de l'error de detecció σ_{θ_d} és:

$$\sigma_{\theta_d} = 0,6\Delta\theta. \quad (\text{C.9})$$

Com que l'error de detecció prové de diferents causes independents, s'assumeix que la seva distribució de probabilitat és gaussiana de variable discreta –ja que les mesures del sensor són múltiples de la resolució angular $\Delta\theta$ –, de mitjana 0 i desviació estàndard σ_{θ_d} , equació (C.8). La funció de densitat de probabilitat *gaussiana* de la variable discreta d'aquest error de detecció $\delta\theta_d \equiv k \Delta\theta$, on k representa un nombre enter, és:

$$p(k \Delta\theta) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k\Delta\theta}{\sigma_{\theta_d}}\right)^2}}{\sum_m e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m\Delta\theta}{\sigma_{\theta_d}}\right)^2}}. \quad (\text{C.10})$$

- **Modelització de l'*error total* del sensor**

Un cop es coneixen les dues fonts d'error en la mesura del sensor làser, es procedeix a fer una simulació de Monte Carlo per a trobar la variància de l'*error total* en la mesura del sensor, que serà suma dels dos errors considerats: l'error de resolució i l'error de detecció. Com que els dos errors es donen de forma independent, es generen $N' = 50000$ valors aleatoris de cadascun dels errors i es sumen per a modelitzar la distribució real de l'error del sensor.

Els $N' = 50000$ valors aleatoris de l'error de resolució es generen seguint una distribució de probabilitat *uniforme* dins l'interval $[-\Delta\theta/2, +\Delta\theta/2]$ mitjançant el programari matemàtic MATLAB amb $\Delta\theta = 0,96 \cdot 10^{-4}$ rad, equació (C.1).

Pel que fa als N' valors de l'error de detecció, no es poden generar directament amb MATLAB perquè en el programari no s'inclou la generació de variables aleatòries d'una distribució *normal discreta*. El que es farà és generar un vector de 50000 components d'error que segueixin una distribució com la que defineix la funció de densitat de probabilitat (C.10).

Per a generar aquest vector es considera l'interval $[-3\sigma_{\theta_d}, +3\sigma_{\theta_d}]$, el qual té una probabilitat superior a 0,99 de contenir un error qualsevol. Si es té en compte l'expressió (C.9), l'interval anterior esdevé $[-1,8\Delta\theta, +1,8\Delta\theta]$. Però com que l'error ha de ser un múltiple de $\Delta\theta$ –pel caràcter *discret* de la variable– es consideren els errors possibles dins de l'interval $[-2\Delta\theta, +2\Delta\theta]$.

La Taula C.3 indica de probabilitat de cadascun dels cinc valors d'error possibles dins de l'interval –a partir de l'expressió (C.10)–, així com la proporció de cada valor d'error de l'interval respecte als $N' = 50000$ valors que s'han de generar.

Taula C.3 Probabilitat de les mesures possibles dins de l'interval ($N' = 50000$)

Error, $\delta\theta_d \equiv k\Delta\theta$	Probabilitat, $p(k\Delta\theta)$	Proporció, $p(k\Delta\theta) \cdot N'$
$-2\Delta\theta, k = -2$	$2,57 \cdot 10^{-3}$	130
$-\Delta\theta, k = -1$	0,1655	8275
$0, k = 0$	0,6638	33190
$\Delta\theta, k = 1$	0,1655	8275
$2\Delta\theta, k = 2$	$2,57 \cdot 10^{-3}$	130

Aleshores, el que es fa és generar un vector de 50000 components d'error de detecció amb les proporcions que s'indiquen a la tercera columna de la Taula C.3. Aquest vector es suma amb el vector d'error de resolució, generat directament amb MATLAB, i s'obté una mostra de N' valors que simulen l'error total del sensor.

L'histograma de la Figura C.4 mostra la dispersió d'aquestes dades. A la figura també s'hi superposa la funció de densitat de probabilitat d'una distribució gaussiana de variable real amb la mateixa desviació estàndard. Com es pot comprovar l'error total del sensor ($\delta\theta_m \equiv \delta\theta_r + \delta\theta_d$) s'ajusta de forma correcta amb una gaussiana, i per tant es compleix la condició de normalitat de l'error de mesura que requereix l'aplicació del EKF.

A partir de la mostra obtinguda de l'error *total* del sensor ($\delta\theta_m^j; j=1, \dots, N' = 50000$), s'obté la següent estimació de la seva desviació estàndard:

$$\sigma_{\theta_m} = \sqrt{\frac{1}{N'-1} \sum_{j=1}^{N'} (\delta\theta_m^j - E(\delta\theta_m))^2} = 0,65 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,065 \text{ mrad},$$

$$\text{on } E(\delta\theta_m) = \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} \delta\theta_m^j \approx 0. \quad (\text{C.11})$$

Per al valor $R \equiv \sigma_{\theta_m}^2$ de la variància de les observacions angulars externes en el filtre de Kalman estès (EKF) es pren doncs:

$$R \equiv E[\delta\theta_m^2] = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ rad}^2. \quad (\text{C.12})$$

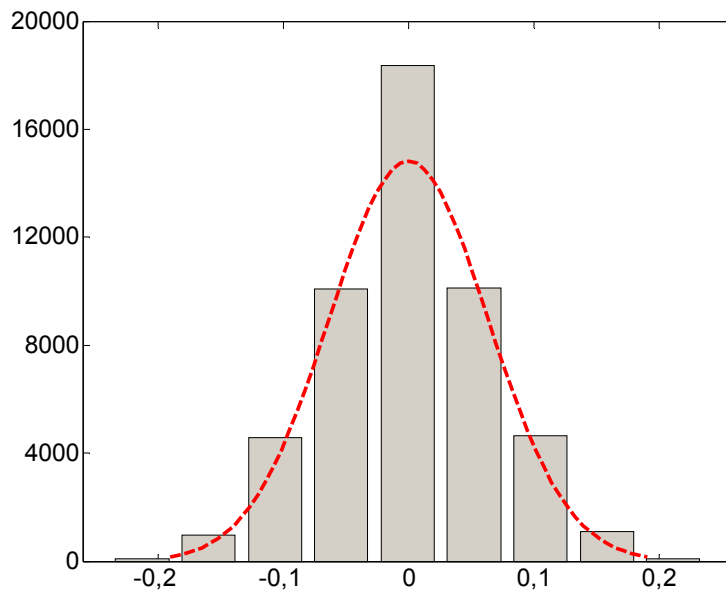


Figura C.4 Histograma de l'error del sensor a partir de la simulació de Monte Carlo (mrad)

Recerca bibliogràfica

- Adam, A., Rivlin, E. i Rotstein, H. (1999). "Fusion of fixation and odometry for vehicle navigation". *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 29(6), pp. 593–603.
- Agulló Batlle, J. (2004). "Les rodes omnidireccionals, el darrer pas evolutiu de la roda". *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona*, Tercera Època, Núm. 993, Vol. 61(7).
- Agulló Batlle, J. (2002). *Mecànica de la partícula i del sòlid rígid*. Publicacions OK Punt, Barcelona.
- Agulló, J. i Fortuny, G. (1998). "Rueda omnidireccional de doble rodillo esférico para robots móviles". *Actas del XIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Terrassa, Vol. 1, pp. 197–202.
- Agulló, J., Cardona, S. i Vivancos, J. (1989). "Dynamics of vehicles with directionally sliding wheels". *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 24(1), pp. 53–60.
- Agulló, J., Cardona, S. i Vivancos, J. (1987). "Kinematics of vehicles with directionally sliding wheels". *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 22(4), pp. 295–301.
- Alenyà, G., Escoda, J., Martínez, A.B. i Torras, C. (2005). "Using laser and vision to locate a robot in an industrial environment: A practical experience". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona.
- Andrade-Cetto, J., Vidal-Calleja, T. i Sanfeliu, A. (2005). "Unscented transformation of vehicle states in SLAM". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona.
- Andrade-Cetto, J. (2003). *Environment learning for indoor mobile robots*. Tesi Doctoral, Institut de Robòtica i Informàtica Industrial (CSIC-UPC), Barcelona.

- Andrade-Cetto, J. (2002). *The Kalman Filter*. Document Tècnic (IRI-DT-02-01), Institut de Robòtica i Informàtica Industrial (CSIC-UPC), Barcelona.
- Arkin, R.C. i Murphy, R.R. (1990). "Autonomous navigation in a manufacturing environment". *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 6(4), pp. 445–454.
- Arras, K.O., Tomatis, N., Jensen, B.T. i Siegwart, R. (2001). "Multisensor on-the-fly localization: Precision and reliability for applications". *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 34, pp. 131–143.
- Ashkenazi, V., Park, D. i Dumville, M. (2000). "Robot positioning and the global navigation satellite system". *International Journal on Industrial Robot*, Vol. 27(6), pp. 419–426.
- Bar-Shalom, Y., Rong Li, X. i Kirubarajan, T. (2001). *Estimation with applications to tracking and navigation*. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Barshan, B. i Durrant-Whyte, H.F. (1995). "Inertial navigation systems for mobile robots". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 11(3), pp. 328–342.
- Barshan, B. i Durrant-Whyte, H.F. (1994). "Evaluation of a solid-state gyroscope for robotics applications". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 44(1), pp. 61–67.
- Betke, M. i Gurvits, L. (1997). "Mobile robot localization using landmarks". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 13(2), pp. 251–263.
- Boley, D.L., Steinmetz, E.S. i Sutherland, K.T. (1996). "Robot localization from landmarks using recursive total least squares". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, pp. 1381–1386.
- Borenstein, J., Everett, H.R., Feng, L. i Wehe, D. (1997). "Mobile robot positioning – Sensors and techniques". *Journal of Robotic Systems*, Vol. 14(4), pp. 231–249.
- Borenstein, J., Everett, H.R., Feng, L. i Wehe, D. (1996). *Where am I? Sensors and methods for mobile robot positioning*. University of Michigan, Ann Arbor.
- Borenstein, J. i Feng, L. (1996a). "Measurement and correction of systematic odometry errors in mobile robots". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12(6), pp. 869–880.
- Borenstein, J. i Feng, L. (1996b). "Gyrodometry: A new method for combining data from gyros and odometry in mobile robots". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, pp. 423–428.

- Borthwick, S. i Durrant-Whyte, H. (1994). "Dynamic localisation of autonomous guided vehicles". *Proc. of the IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, Las Vegas, pp. 92–97.
- Briechle, K. i Hanebeck, U.D. (2004). "Localization of a mobile robot using relative bearing measurements". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 20(1), pp. 36–44.
- Burgard, W., Fox, D., Henning, D. i Schmidt, T. (1996). "Estimating the absolute position of a mobile robot using position probability grids". *Proc. of the 14th National Conference on Artificial Intelligence*.
- Castellanos, J.A., Neira, J. i Tardós, J.D. (2004). "Limits to the consistency of EKF-based SLAM". *Proc. of the 5th IFAC Symp. on Intelligent Autonomous Vehicles*, Lisboa.
- Castellanos, J.A. i Tardós, J.D. (1999). *Mobile robot localization and map building: A multisensor fusion approach*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Castellanos, J.A., Montiel, J.M.M., Neira, J. i Tardós, J.D. (1999). "The SPmap: A probabilistic framework for simultaneous localization and map building". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15(5), pp. 948–952.
- Chong, K.S. i Kleeman, L. (1997). "Accurate odometry and error modelling for a mobile robot". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, Vol. 4, pp. 2783–2788.
- Cohen, C. i Koss, F. (1992). "A comprehensive study of three object triangulation". *Proc. of the SPIE Conference on Mobile Robots*, Boston, pp. 95–106.
- Cox, I.J. (1991). "Blanche – An experiment in guidance and navigation of an autonomous robot vehicle". *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 7(2), pp. 193–204.
- Crowley, J.L. (1995). "Mathematical foundations of navigation and perception for an autonomous mobile robot". *Workshop on Reasoning with Uncertainty in Robotics*.
- Crowley, J.L. (1989). "World modeling and position estimation for a mobile robot using ultrasonic ranging". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Scottsdale, pp. 674–680.
- Delafosse, M., Clerentin, A., Delahoche, L., Brassart, E. i Marhic, B. (2004). "The mobile robot localization problem treated as a constraint satisfaction problem". *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*, Lisboa.
- Dudek, G. i Jenkin, M. (2000). *Computational principles of mobile robotics*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Durrant-Whyte, H. (1994). "Where am I? A tutorial on mobile vehicle localization". *Industrial Robot*, Vol. 21(2), pp. 11–16.
- Ferràs, M. (2004). *Disseny del control d'una cadira de rodes utilitzant un DSP*. Projecte Fi de Carrera, Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial (ESAI-UPC), Barcelona.
- Folkesson, J.B. i Christensen, H.I. (2004). "Robust SLAM". *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*, Lisboa.
- Fox, D., Burgard, W. i Thrun, S. (1999). "Markov localization for mobile robots in dynamic environments". *Journal of Artificial Intelligence Research*, Vol. 11, pp. 391–427.
- Garulli, A. i Vicino, A. (2001). "Set membership localization of mobile robots via angle measurements". *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 7(4), pp. 450–463.
- Getting, I.A. (1993). "The Global Positioning System". *IEEE Spectrum*, pp. 36–47.
- Greiner, R. i Isukapalli, R. (1996). "Learning to select useful landmarks". *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, Vol. 26(3), pp. 437–449.
- Guivant, J.E. i Nebot, E.M. (2001). "Optimization of the simultaneous localization and map-building algorithm for real-time implementation". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17(3), pp. 242–257.
- Gutmann, J-S. (2002). "Markov-Kalman localization for mobile robots". *Proc. of the International Conference on Pattern Recognition*, Quebec, pp. 601–604.
- Gutmann, J-S. i Fox, D. (2002). "An experimental comparison of localization methods continued". *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Lausana, pp. 454–459.
- Gutmann, J-S., Burgard, W., Fox, D. i Konolige, K. (1998). "An experimental comparison of localization methods". *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Victòria, pp. 736–743.
- Hairer, E., Norsett, S.P. i Wanner, G. (2000). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Verlag, Berlin.
- Hanebeck, U.D. i Schmidt, G. (1996a). "Localization of fast mobile robots based on an advanced angle-measurement technique". *Control Engineering Practice*, Vol. 4(8), pp. 1109–1118.

- Hanebeck, U.D. i Schmidt, G. (1996b). “Set theoretic localization of fast mobile robots using an angle measurement technique”. *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, pp. 1387–1393.
- Haupt, G.T., Kasdin, N.J., Keiser, G.M. i Parkinson, B.W. (1996). “Optimal recursive iterative algorithm for discrete nonlinear least-squares estimation”. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 19(3), pp. 643–649.
- Hu, H. i Gu, D. (2000). “Landmark-based navigation of industrial mobile robots”. *Int. Journal of Industrial Robot*, Vol. 27(6), pp. 458–467.
- Huster, A. (2003). *Relative position sensing by fusing monocular vision and inertial rate sensors*. Tesi Doctoral, Stanford University, Stanford.
- Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. i Walter, E. (2001). *Applied interval analysis*. Springer-Verlag, London.
- Jensfelt, P. (2001). *Approaches to mobile robot localization in indoor environments*. Tesi Doctoral, Royal Institute of Technology (KTH), Estocolm.
- Jensfelt, P. i Christensen, H.I. (2001). “Pose tracking using laser scanning and minimalistic environmental models”. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17(2), pp. 138–147.
- Jensfelt, P. i Christensen, H.I. (1999). “Laser based pose tracking”. *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Detroit, pp. 2994–3000.
- Kalman, R.E. i Bucy, R.S. (1961). “New results in linear filtering and prediction theory”. *Transactions of the ASME, Journal of basic engineering*, Vol. 83, pp. 95–108.
- Kalman, R.E. (1960). “A new approach to linear filtering and prediction problems”. *Transactions of the ASME, Journal of basic engineering*, Vol. 82, pp. 35–45.
- Kasdin, N.J. (2000a). “New, guaranteed positive time update for the two-step optimal estimator”. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 23(2), pp. 215–221.
- Kasdin, N.J. (2000b). “The two-step optimal estimator and example applications”. *Guidance and Control 2000* (Culp, R.D. i Dukes, E.M., Ed), Vol. 104 of *Advances in the Astronautical Sciences*, American Astronautical Society, San Diego, pp. 15–34.
- Kasdin, N.J. i Haupt, G.T. (1997). “Second-order correction and numerical considerations for the two-step optimal estimator”. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 20(2), pp. 362–369.

- Kelly, A. (2004). "Linearized error propagation in odometry". *International Journal of Robotics Research*, Vol. 23(2), pp. 179-218.
- Kelly, A. (2003). "Precision dilution in triangulation based mobile robot position estimation". *Proc. of the 8th International Conference on Intelligent Autonomous Systems*, Amsterdam.
- Kieffer, M., Jaulin, L., Walter, E. i Meizel, D. (2000). "Robust autonomous robot localization using interval analysis". *Reliable Computing*, Vol. 3(6), pp. 337-361.
- Killough, S.M. i Pin, F.G. (1992). "Design of an omnidirectional and holonomic wheeled platform prototype". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Niça, pp. 84-90.
- Leonard, J.J. i Durrant-Whyte, H.F. (1991). "Mobile robot localization by tracking geometric beacons". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 7(3), pp. 376-382.
- Leondes, C.T. (2000). *Mechatronic systems techniques and applications. Volume 2 Transportation and vehicular systems*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, pp. 332-359.
- Madhavan, R. i Durrant-Whyte, H.F. (2004). "Natural landmark-based autonomous vehicle navigation". *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 46(2), pp. 79-95.
- Madsen, C.B. i Andersen, C.S. (1998). "Optimal landmark selection for triangulation of robot position". *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 23, pp. 277-292.
- Martinelli, A., Tomatis, N. i Siegwart, R. (2006). "Simultaneous localization and odometry self calibration for mobile robot". *Autonomous Robots* [publicat online].
- Martinelli, A., Svensson, A., Tomatis, N. i Siegwart, R. (2004). "SLAM based on quantities invariant of the robot's configuration". *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*, Lisboa.
- Martinelli, A. i Siegwart, R. (2003). "Estimating the odometry error of a mobile robot during navigation". *Proc. of the European Conference on Mobile Robots*, Varsòvia.
- McGillem, C.D. i Rappaport, T.S. (1989). "A beacon navigation method for autonomous vehicles". *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 38(3), pp. 132-139.
- McGillem, C.D. i Rappaport, T.S. (1988). "Infra-red location system for navigation of autonomous vehicles". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, Vol. 2, pp. 1236-1238.

- Munar, J. (2006). *Disseny i implementació d'un sistema d'adquisició de dades de posicionament d'un mòbil utilitzant un DSP*. Projecte Fi de Carrera, Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial (ESAII-UPC), Barcelona.
- Nebot, E.M. (1999). *Sensors used for autonomous navigation*. Technical Report. The University of Sydney, Sydney.
- Neira, J., Tardós, J.D., Horn, J. i Schmidt, G. (1999). "Fusing range and intensity images for mobile robot localization". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15(1), pp. 76–84.
- Nishizawa, T., Ohya, A. i Yuta, S. (1995). "An implementation of on-board position estimation for a mobile robot". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nagoya, pp. 395–400.
- Piaggio, M., Sgorbissa, A. i Zaccaria, R. (2001). "Autonomous navigation and localization in service mobile robots". *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Maui, Hawaii, pp. 2024–2029.
- Ribeiro, M.I. (2004). *Gaussian Probability Density Functions: Properties and Error Characterization*. Institute for Systems and Robotics (ISR), Instituto Superior Tecnico, Lisboa.
- Rizzi, A. i Cassinis, R. (2001). "A robot self-localization system based on omnidirectional color images". *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 34(1), pp. 23–38.
- Rupp, T. i Levi, P. (2000). "Optimized landmark arrangement for absolute localization – A practical approach". *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Takamatsu, pp. 448–453.
- Sasiadek, J.Z. i Hartana, P. (2001). "Sensor fusion for dead-reckoning mobile robot navigation". *Proc. of the IFAC Workshop on Mobile Robot Technology*, pp. 251–256.
- Sgorbissa, A. (2000). *Towards a multi-ethnic community of humans, mobile robots, and intelligent devices*. Tesi Doctoral, Universitat de Gènova, Gènova.
- Shimshoni, I. (2001). "A fast linear method for mobile robot localization from landmark bearings". *Proc. of the IFAC Workshop on Mobile Robot Technology*, pp. 119–124.
- Skewis, T. i Lumelsky, V. (1994). "Experiments with a mobile robot operating in a cluttered unknown environment". *Journal of Robotic Systems*, Vol. 11(4), pp. 281–300.

- Smith, R., Self, M. i Cheeseman, P. (1988). "A stochastic map for uncertain spatial relationships". *The 4th International Symposium on Robotics Research*, The MIT Press, pp. 467–474.
- Solda, E., Worst, R. i Hertzberg, J. (2004). "Poor man's gyro-based localization". *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*, Lisboa.
- Sutherland, K.T. i Thompson, W.B. (1994). "Localizing in unstructured environments: dealing with the errors". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 10(6), pp. 740–754.
- Sutherland, K.T. i Thompson, W.B. (1993). "Inexact navigation". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, Vol. 1, pp. 1–7.
- Thomas, F. i Ros, L. (2005). "Revisiting trilateration for robot localization". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 21(1), pp. 93–101.
- Thrun, S., Burgard, W. i Fox, D. (2005). *Probabilistic Robotics*. The Massachusetts Institute of Technology Press (Intelligent Robotics and Autonomous Agents series), Massachusetts.
- Thrun, S., Fox, D., Burgard, W. i Dellaert, F. (2001). "Robust Monte Carlo localization for mobile robots". *Artificial Intelligence*, Vol. 128, pp. 99–141.
- Thuilot, B., Bom, J., Marmoiton, F. i Martinet, P. (2004). "Accurate automatic guidance of an urban electric vehicle relying on a kinematic GPS sensor". *Proc. of the IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*, Lisboa.
- Tonouchi, Y., Tsubouchi, T. i Arimoto, S. (1994). "Fusion of dead-reckoned positions with a workspace model for a mobile robot by bayesian inference". *Proc. of the IEEE Int. Conference on Intelligent Robots and Systems*, Munic, pp. 1347–1354.
- Wang, C.M. (1988). "Location estimation and uncertainty analysis for mobile robots". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, pp. 1230–1235.
- Welch, G. i Bishop, G. (2004). *An Introduction to the Kalman Filter*. Technical Report (TR 95-041), Department of Computer Science, University of North Carolina, Chapel Hill.
- Wiklund, U., Andersson, U. i Hyyppa, K. (1988). "AGV navigation by angle measurements". *Proc. of the International Conference on Automated Guided Vehicle Systems*, pp. 199–212.