Àngel Alsina, Marta Domingo

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UN PROTOCOLO SOCIOCULTURAL DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

DIDACTICAL SUITABILITY OF A SOCIOCULTURAL MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING PROTOCOL

RESUMEN. En este estudio se evalúa la adecuación de un protocolo para la enseñanza del concepto de poliedro regular, destinado a alumnos de 14 y 15 años. Este protocolo se ha diseñado desde una perspectiva sociocultural y su evaluación se basa en la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica que ofrece el enfoque ontosemiótico. La idoneidad se estudia con la revisión de sus diferentes dimensiones: matemática, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. El análisis ha permitido detectar algunos factores que favorecen la validez del protocolo y la adecuación para su empleo en el aula, como el tipo de discurso, el uso de material manipulable o el trabajo cooperativo.

PALABRAS CLAVE: Perspectiva sociocultural, enseñanza de la geometría, idoneidad didáctica, material manipulativo, prácticas matemáticas.

ABSTRACT. This study evaluates the suitability of a protocol for teaching the concept of regular polyhedra to students of 14 and 15 years of age. The protocol has been designed from a sociocultural angle and its evaluation is based on the application of didactical suitability criteria which offers an ontosemiotic approach. Suitability is studied by looking at its different dimensions: mathematical, cognitive, interactional, mediational, emotional and ecological. The analysis has enabled some factors to be identified which support the validity of the protocol and its suitability for use in the classroom, namely, the type of discourse, use of manipulable materials and cooperative work.

KEY WORDS: Sociocultural perspective, geometry teaching, didactical suitability, manipulative material, mathematics practices.

RESUMO. Neste estudo avalia-se a adequação de um protocolo para o ensino do conceito de poliedro regular, para alunos entre 14 e 15 anos. Este protocolo foi concebido a partir de uma perspectiva sociocultural e a sua avaliação assenta na aplicação de critérios de adequação didática segundo o enfoque ontosemiótico. A adequação é estudada por uma revisão das suas várias dimensões: matemática, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional e ecológica. A análise permitiu detectar alguns fatores que favorecem a validade do protocolo e a adequação para a sua utilização em sala de aula, como o tipo de discurso, o uso de material manipulável ou o trabalho cooperativo.

PALAVRAS CHAVE: Perspectiva sociocultural, ensino da geometria, adequação didáctica, material manipulativo, práticas matemáticas.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 7-32.
Recepción: Septiembre 8, 2009 / Aceptación: Febrero 1º, 2010.

RÉSUMÉ. Cette étude a pour sujet l'évaluation d'un protocole pour l'enseignement du concept de polyèdre régulier à des élèves de 14 et 15 ans. Ce protocole a été conçu à partir d'une perspective socioculturelle et son évaluation, grâce à une approche onto-sémiotique, a pu être basée sur l'application des critères propres à l'adéquation didactique. Quant à l'adéquation, on a pu procéder à son étude en examinant ses différentes dimensions : mathématique, cognitive, interrelationnelle, médiationnelle, émotionnelle et écologique. L'analyse nous a permis de détecter quelques facteurs comme le type de discours, l'emploi de matériel manipulable ou le travail en groupe_ favorisant la validité du protocole et l'adéquation pour qu'ils soient utilisés dans la salle de classe.

MOTS CLÉS: Perspective socioculturelle, enseignement de la géométrie, adéquation didactique, matériel manipulatif, stages pratiques en mathématiques.

1. Introducción

Este trabajo parte de la base de que en España existe un desequilibrio entre las orientaciones internacionales y nacionales respecto al currículum de matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y lo que ocurre en las aulas. A pesar de estos referentes, el profesorado de matemáticas continúa tendiendo a impartir clases expositivas, con ejemplos y ejercicios, y dejan poco espacio para que los estudiantes construyan de manera colectiva e individual el significado matemático, como señalan Planas (2002) y Reeuwijk (1997), entre otros.

La perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, que se fundamenta en las aportaciones de Vygostky (1978) y en las reinterpretaciones de su obra que han hecho otros autores, tanto desde el ámbito de la psicología del aprendizaje (Ivic, 1994; Wertsch, 1985, 1991) como desde el campo de la educación matemática (Lerman, 2000; 2001; Schmittau, 2004), permite abordar la problemática expuesta con el objeto de hallar posibles soluciones. Los rasgos más característicos de esta perspectiva del aprendizaje son, de forma muy sintética, que el aprendiz construye y comprende sus conocimientos en un contexto social y cultural a través de la interacción, la negociación y el diálogo; que el pensamiento intelectual depende de la construcción autorregulada del conocimiento, y que va de un proceso interpsicológico a un proceso más intrapsicológico (Alsina y Escalada, 2008).

Domingo (2004) elaboró diversos protocolos para la enseñanza de contenidos matemáticos, apegándose a los parámetros de la perspectiva sociocultural. Estos protocolos se implementaron a un grupo de estudiantes de 3º y 4º de ESO (14 a 16 años) y se analizó su grado de eficacia. Los resultados demostraron que los alumnos que aprendieron matemáticas con los protocolos aumentaban significativamente el grado de motivación y la memoria comprensiva en comparación con los que aprendían los mismos contenidos de manera tradicional. Sin embargo, en esta investigación no se obtuvieron datos que permitieran determinar los factores que incentivan la motivación y la memoria comprensiva.

Por este motivo, la presente investigación analiza la idoneidad didáctica de un único protocolo, a partir del marco conceptual que proporciona el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Desde esta perspectiva, los objetivos concretos del trabajo son analizar el grado de idoneidad matemática, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

2. El EOS: una herramienta para evaluar un método de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Varios trabajos realizados en el marco del EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático: 1) los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos); 2) las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) las trayectorias e interacciones didácticas; 4) el sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa); 5) la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los cuatro primeros niveles son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa; es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta *¿qué está pasando aquí y por qué?* El quinto nivel se basa en los cuatro niveles previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de estudio en nuevas implementaciones; este es el objeto de nuestro trabajo, por lo cual se profundiza en él.

Godino y su equipo exponen que la idoneidad didáctica de un método para la enseñanza de las matemáticas se define en función del grado con el que resulta adecuado para su puesta en práctica en el aula. La idoneidad se estudia a través de la reflexión sobre sus diferentes componentes: *epistémico*, *cognitivo*, *interaccional*, *mediacional*, *afectivo* y *ecológico* (Godino, Batanero y Font, 2007). A continuación, se describe el objeto de análisis de cada uno de los componentes, según el EOS; en algunos casos se usan aportaciones concretas de otros autores para estudiar e interpretar los grados de idoneidad de los diferentes componentes.

2.1. *Idoneidad epistémica*

La idoneidad epistémica es el grado de representatividad que tienen los significados institucionales implementados o pretendidos respecto a un significado de referencia. Desde el punto de vista de las matemáticas y su aprendizaje es necesario analizar qué contenidos matemáticos aparecen y con qué frecuencia; asimismo, cuál es el modelo implícito que se asume en una actividad o pequeño grupo de actividades.

El documento de referencia para analizar los contenidos matemáticos que aparecen en el protocolo para la enseñanza del concepto de poliedro regular ha sido el currículum oficial de matemáticas de ESO en Cataluña, debido a su solidez teórica y práctica. Respecto al modelo implícito, se parte de los cuatro enfoques posibles que expone Baroody (2003): el de *destrezas*, centrado en la memorización de las habilidades básicas a través de la repetición; el *conceptual*, que se basa en el aprendizaje de procedimientos con comprensión; el de *resolución de problemas*, que enfatiza en el razonamiento y la resolución de problemas, y el *investigativo*, donde se considera que los estudiantes son capaces de construir activamente su conocimiento mediante actividades previamente planificadas y experiencias de investigación que surgen durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.2. *Idoneidad cognitiva*

Vygotsky (1978) señala que la idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. Vygotsky distinguió la zona de desarrollo real de la zona de desarrollo potencial, y llamó *zona de desarrollo próximo* a la distancia entre ambas. Para este autor, el papel del profesor consiste en proporcionar la ayuda ajustada y contingente al alumno dentro de la zona de desarrollo próxima para que pueda alcanzar la zona de desarrollo potencial.

Tanto Castro (2007) como Godino, Font y Wilhelmi (2006) han llevado a cabo análisis de métodos y lecciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes edades de escolarización; con el fin de valorar la idoneidad cognitiva se han centrado, sobre todo, en determinar si el grado de dificultad de las tareas es adecuado o no a los estudiantes.

2.3. *Idoneidad interaccional*

En el marco conceptual del EOS, un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori); por otra, resolver los problemas que surgen durante el proceso de instrucción.

Planas e Iranzo (2009) señalan que uno de los principios fundamentales para la enseñanza de las matemáticas consiste en promover la interacción entre el alumnado durante la clase de matemáticas. Si se identifica la práctica matemática con hacer cálculos o aprender procedimientos de memoria en un entorno individualizado será muy difícil comprender en qué consiste el aspecto comunicativo de las matemáticas. En cambio, si se conciben las matemáticas como una actividad de planteamiento y resolución de problemas que propicie la comunicación, discusión y validación de sus soluciones, la situación cambia. La comunicación adquiere un papel central en la adquisición de conocimientos.

2.4. *Idoneidad mediacional*

La idoneidad mediacional alude al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Sobre el uso de recursos materiales, Baroody (1989) advierte que lo importante no es que los estudiantes manipulen activamente objetos concretos y reflexionen sobre sus acciones físicas, sino que toquen algo que les resulte familiar y mediten sobre sus acciones físicas o mentales. Y en relación con los recursos temporales, Domingo (2009) indica que hay que tener en cuenta que cuando una actividad consume la mayor parte del horario es muy probable que otra no se realice. Así, los momentos de exploración deben codearse con los de aprendizaje sobre contenidos específicos.

2.5. *Idoneidad emocional*

La idoneidad emocional concierne al grado de implicación (interés o motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Está relacionada con los factores que dependen de la institución y con los que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

Hay diversos trabajos que han centrado su objeto de estudio en la idoneidad emocional. Por ejemplo, en España los estudios de Gómez-Chacón (1998, 2000) señalan que las matemáticas producen ansiedad a muchos alumnos. Con frecuencia, este componente emocional negativo tiene su origen en la forma de enseñar matemáticas, por lo cual es necesario valorar los aspectos que van más allá de lo cognitivo al evaluar la adecuación de un método, especialmente si va dirigido a estudiantes de ESO. En esta misma línea, otros elementos a considerar son el autoconcepto del alumno y su confianza respecto a las matemáticas.

2.6. *Idoneidad ecológica*

La idoneidad ecológica pone de manifiesto el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad, así como a los condicionamientos del entorno donde se desarrolla. En términos generales, alude al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado en el entorno donde se utiliza; el entorno incluye a todos los factores —tanto los de dentro como los de fuera del aula— que determinan la actividad que allí se lleva a cabo.

Este grado de idoneidad mantiene vínculos, desde nuestro punto de vista, con la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1991), que se caracteriza por utilizar situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. De manera progresiva, estas situaciones son matematizadas a través de modelos —que median entre lo abstracto y lo concreto— para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002). En términos más generales, Chevallard (1992) establece diferentes niveles de determinación didáctica cuando explica los factores que condicionan el tipo de actividad matemática que es posible vivir en una institución:

Sociedad→Escuela→Pedagogía→Disciplina→Área→Sector→Tema→Cuestión

Los criterios de idoneidad didáctica que ofrece el EOS dan un marco adecuado para valorar cualquier proceso de estudio de las matemáticas (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). Por ello, en este estudio se usan dichos parámetros con el objetivo de valorar el grado de validez de un protocolo sociocultural para la enseñanza y aprendizaje del concepto de poliedro regular a estudiantes de 3º de ESO (14 a 15 años) y, a la vez, encontrar datos cualitativos que permitan establecer algunos factores que incentivan la motivación y la memoria comprensiva en la clase de matemáticas.

3. Metodología

Nuestro estudio se enmarca en un paradigma de investigación sociocrítico (Godino, 1993), que va orientado a conectar la investigación con la práctica, a fin de transformar la práctica. Se parte de la base, de acuerdo con Kilpatrick (1988), que no es suficiente entrar en una clase y observar el encuentro educacional, sino también es necesario guiar directamente la práctica; esto precisa una mayor colaboración entre el profesor y el investigador.

Una de las investigadoras del estudio se desempeña también como profesora del grupo de estudiantes de 3º de ESO al que se aplica el protocolo, por lo cual se usa la investigación-acción como metodología (Carr y Kemmis, 1988; Denzin y Lincoln, 2003; Elliott, 1978). De acuerdo con estos autores, la finalidad última de la investigación-acción es mejorar la práctica, al tiempo que permite una mayor comprensión de ella y de los contextos en que se realiza. Denzin y Lincoln (2003) exponen que esta metodología analiza problemáticas de la práctica educativa con el objeto de transformarlas y solucionarlas; de ahí que implique diálogo colaborativo, toma de decisiones participativa, deliberación democrática y máxima participación de todos los agentes implicados.

Sin embargo, como algunas de las críticas más importantes a esta metodología han sido su falta de objetividad (por la implicación en la situación investigada) y las dificultades de generalización, se han triangulado las conclusiones de los procesos de investigación-acción con expertos ajenos al estudio para controlar la objetividad.

En el estudio se parte de un protocolo sobre la enseñanza-aprendizaje de los poliedros regulares en 3º de ESO, diseñado por Domingo (2004), que se mejora a partir de la auto-observación (Domingo, 2009). En este protocolo se describen los aspectos siguientes:

- *Conocimientos previos:* Curriculares y de la vida cotidiana.
- *Objetivo del protocolo:* Realizar un aprendizaje significativo del concepto de poliedro regular.
- *Propuesta de material:* Poliedros construidos, ficha y solucionario.
- *Cuadro de fases del protocolo:* Se adjunta un cuadro de fases para que la persona que tiene que llevarlo a cabo sepa los pasos que se seguirán a priori:

Fase 1	Aproximación al concepto de figura *en el espacio*, con elementos cercanos del contexto del aula.
Fase 2	Presentación de los poliedros y diferenciación respecto al conjunto total de figuras *en el espacio*.
Fase 3	Toma de conciencia de que existen 5 poliedros especiales.
Fase 4	Entrega del material y trabajo de experimentación-investigación en grupo.
Fase 5	Puesta en común de toda la clase.
Fase 6	Reflexión por escrito y consolidación (ficha).

- *Propuesta de protocolo:* Se describe una posible manera de llevar a cabo la práctica matemática en el aula.
- *Propuesta de actividad escrita*.

El protocolo se aplica a un grupo de 15 estudiantes de 3º de ESO (14 y 15 años) y se graba la práctica matemática en video (ver transcripción en el Anexo 1). Se realiza una observación a partir de la grabación, por lo cual los investigadores no interactúan con los participantes, de ahí que no se pueda calificar como observación participante.

Antes y después de la grabación se pasan cuestionarios a los estudiantes y a un grupo de profesores de matemáticas de 3º de ESO. Se usan cuestionarios semiestructurados que pueden considerarse como entrevistas por escrito, ya que las preguntas dan pie a que los colaboradores expresen lo que desean.

4. Resultados y discusión

En este apartado se presentan los resultados que obtuvimos a partir de los objetivos planteados. A medida que se muestran los datos sobre el análisis de los diferentes grados de idoneidad didáctica, surgen algunos elementos que los definen. El proceso de exposición de resultados está inspirado en Castro (2007), y se considera un buen ejemplo extrapolable al estudio de cualquier otro proceso de enseñanza-aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos.

4.1. *Idoneidad epistémica*

Para determinar el grado de idoneidad epistémica de nuestro protocolo, se toman como referencia las competencias matemáticas que aparecen en el currículum de matemáticas de ESO en Cataluña.

TABLA I

Competencias matemáticas que incluye el currículum de matemáticas de ESO en Cataluña.

Pensar matemáticamente. Construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones donde tenga sentido; experimentar, intuir, formular, comprobar y modificar conjeturas; relacionar conceptos y hacer abstracciones.
Razonar matemáticamente. Realizar inducción y deducción; particularizar y generalizar; identificar conceptos matemáticos en situaciones concretas; argumentar las decisiones tomadas, así como elegir los procesos seguidos y las técnicas utilizadas.
Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
Comunicar a los otros el trabajo y los descubrimientos realizados, tanto oralmente como por escrito, utilizando el lenguaje matemático.

Niss (2002) dice que lograr la competencia matemática implica construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones donde tenga sentido; por ejemplo, experimentar, relacionar conceptos y conjeturar. Por otro lado, señala que una actividad es rica competencialmente cuando cumple tres principios transversales básicos: *la contextualización*, *la globalización* y *la personalización de la práctica matemática*.

En este sentido, el protocolo trabaja de manera plena la competencia matemática, dado que se parte de un contexto (el aula) para descubrir las figuras: *"¿Me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?"* (2, 0:23). Parte también de la globalización, en el sentido que los estudiantes son capaces de resolver un problema mediante la integración de experiencias y conocimientos: *"Todos [los poliedros regulares] tienen las caras iguales y las aristas a cada vértice y el número de caras a cada vértice valen igual"* (100, 29:40). Y también se fundamenta en la personalización, ya que se tiene acceso a los procesos individuales de los estudiantes al plantear buenas preguntas.

De igual manera, se analiza el modelo implícito que asume el protocolo a partir de los cuatro posibles enfoques que propone Baroody (2003). Para estudiar dicho aspecto, en la página siguiente (Tabla II), se estudian varias intervenciones de la trascripción del video (Anexo 1).

En estas trascripciones se pone de manifiesto que la práctica matemática puede situarse en el enfoque investigativo, según la clasificación de Baroody (2003), ya que la construcción es bastante mediada por la profesora y, a su vez, el alumno elabora de manera activa su conocimiento. La mediación que hace la profesora consiste básicamente en plantear buenas preguntas que fomenten la participación y la interacción. Algunos ejemplos son los siguientes: *"¿me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?"* (2, 0:23); *"las* *caras son cuadrados, pero ¿qué es un cuadrado?"* (19, 1:32); *"habéis localizado todos los poliedros regulares. ¿En qué os habéis basado para decir que éstos son los cinco poliedros regulares?"* (99, 28:18). Este acompañamiento permite que los alumnos avancen desde unos primeros *niveles de concienciación* sobre lo que ya saben o son capaces de hacer a niveles superiores donde van entreviendo la manera de avanzar mejor en el aprendizaje.

TABLA II
Intervenciones en la sesión para analizar al modelo implícito del protocolo.

Intervención	Trascripción
Pautas que da la profesora en el momento de la introducción	2, 10, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 38, 40, 41, 42
Acompañamiento que hace la profesora en el trabajo en grupo, la investigación y experimentación por parte del estudiante	42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 57, 58, 59
Acompañamiento y guía que hace en el momento de la puesta en común: intervenciones	67, 68, 69, 70, 72, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 93, 96, 98, 99, 101, 102, 104, 106

Romero y Rico (1999) llevaron a cabo una investigación con estudiantes de 13 y 14 años en la que destacaban el papel que ejercía el profesor en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. En su trabajo concluían que dicho conocimiento es guiado y mediado por el profesor a través de actividades previamente planificadas, lo cual desde nuestro enfoque implica que el profesorado debe estar suficientemente formado desde el punto de vista didáctico para que pueda diseñar y efectuar actividades con un grado de idoneidad epistémica alto.

4.2. *Idoneidad cognitiva*

El análisis sobre el grado de idoneidad cognitiva requiere que se determine si el grado de dificultad propuesto es adecuado para el grupo de edad al que va dirigido el protocolo. De entrada, en el Primer Nivel de Concreción del Currículum de Matemáticas de ESO (Tabla III) se indica que uno de los bloques de contenido es la geometría, el cual se tiene que aprender manipulando, y dar prioridad a la geometría espacial por encima de la plana.

El protocolo implementado considera los aspectos anteriores, y enfatiza sobre todo el uso de materiales manipulables para favorecer la comprensión de las propiedades geométricas de los poliedros, como sus regularidades, un aspecto que se analiza con mayor detalle en la idoneidad mediacional.

TABLA III
Fragmentos del Primer Nivel de Concreción del Currículum de Matemáticas de ESO.

"La geometría, como conjunto ordenado de conocimientos, siempre ha tenido una presencia en los currículos escolares para los estudiantes de estas edades"(p. 51)

"... si el estudiante no ha desarrollado determinadas capacidades de percepción geométrica, le será mucho más difícil emplear, de una manera ágil, los instrumentos que la geometría analítica le pondrá al alcance en el momento adecuado" (p.51-52)

"... no sólo tiene que hacerse geometría, sino que tiene que hacerse de una manera que ayude al estudiante a desarrollar las capacidades mencionadas anteriormente. Y ésta tiene que ser una geometría experimental, que coloque a los estudiantes en situación de dibujar, construir y manipular" (p. 52)

Otro elemento significativo es que, cuando se pide la opinión de los estudiantes sobre la práctica matemática realizada, todos aseguran que a partir de ahora recordarán las propiedades de los poliedros regulares. Esto indica que han desarrollado una memoria comprensiva y, por tanto, un aprendizaje significativo ajustado a sus capacidades, como manifiesta un estudiante: *"Un trabajo así está muy bien porque te lo pasas bien y además aprendes"* (62, 22:11). Aunque este tipo de afirmaciones no son una evidencia de que se mejora la capacidad de recuerdo, inducen a pensar que para conseguir que los estudiantes hagan un aprendizaje realmente significativo, en el que se respete su zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1978), es necesario que el profesorado se aproxime a su realidad, y que el proceso de enseñanza-aprendizaje se base, por lo menos en sus fases iniciales, en fenómenos concretos que ya se matematizarán y escribirán de manera abstracta en etapas posteriores (Freudenthal, 1991). Parece imprescindible que los estudiantes –también los de ESO– estén en contacto con los hechos matemáticos antes de poderlos escribir para que entiendan aquello que se está formulando.

En resumen, se puede afirmar que el método empleado en el protocolo, su grado de dificultad y los contenidos que trata son adecuados para el grupo de edad al que va dirigido. Por lo tanto, existe un alto grado de idoneidad cognitiva.

4.3. *Idoneidad interaccional*

Para estudiar el grado de idoneidad interaccional es necesario determinar si el protocolo promueve o no la interacción entre el alumnado, o entre la profesora y el alumnado. El análisis de este aspecto se hizo en diferentes momentos de la trascripción del video (Anexo 1), que contiene la Tabla IV.

TABLA IV
Interacciones durante la sesión para estudiar la idoneidad interaccional.

Intervención	Trascripción
Alumno / Alumno (A / A)	51, 56, 57
Alumno / Profesor (A / P)	3, 5, 7, 9, 12, 16, 23, 29, 36, 44, 46, 48, 71, 73, 75, 77, 83, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 105
Profesor / Alumno (P / A)	2, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 28, 34, 35, 43, 58, 59, 70, 72, 74, 79, 80, 82, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 104

En la Tabla IV se nota que, a lo largo de las 106 intervenciones registradas, hay muchas interacciones. Debido a las circunstancias en que se hizo la grabación, se deduce que el número de interacciones A/A queda poco reflejado en la filmación, ya que la cámara no pudo grabar de forma constante a todos los grupos durante la experimentación. Ahora bien, si se analiza la trascripción con detalle se podría decir que la sesión fue un éxito en cuanto a participación, dado que intervinieron los quince estudiantes que tomaron parte en el estudio. A modo de ejemplo, la Tabla V expone un fragmento de la transcripción donde diversos estudiantes interactúan con la profesora para definir las propiedades de un poliedro:

TABLA V
Fragmento de transcripción en que se nota la interacción entre alumnos y profesora.

43, 9:33	A12: Ésta, por ejemplo, ¿qué sería?
44, 9:39	A13: En esta figura hemos contado como aristas también a éstas. ¿Lo hemos hecho bien?
45, 9:45	P: Sí, son aristas. Las tienes que contar todas.
46, 10:00	A13: O sea, dieciocho, ¿no?
47, 10:04	P: Sí, seis más seis doce, más seis dieciocho.
48, 10:08	A13: ¿Entonces el número de aristas a cada vértice son éstas?
49, 10:36	P: ¿Cuántas hay en cada vértice?
50, 10:42	A14: Una, dos y tres…

La cantidad de interacciones que ocurrieron durante la práctica matemática analizada favoreció un clima emocional positivo. En este sentido, Lerman (2000, 2001) y Schmittau (2004), entre otros, afirman que la presencia de la conversación en las clases de matemáticas está relacionada con el ambiente del aula, ya que para promover el diálogo es preciso que los estudiantes puedan actuar con cierta autonomía.

Otros estudios recientes apuntan en el mismo sentido. Planas e Iranzo (2009) resaltan la importancia de la comunicación profesor-estudiante dentro del aula de matemáticas para asegurar que los alumnos atribuyan el significado que el profesor les ha intentado enseñar y no otro; si no hay este diálogo, el estudiante puede arrastrar significados erróneos y extraer falsas conclusiones en la construcción de su aprendizaje. La mala interpretación no detectada de una norma puede conducir al fracaso del proceso de aprendizaje. Desde este punto de vista, parece necesario que el profesor interactúe con el estudiante e intente anticipar y aclarar sus dudas continuamente, lo cual exige una buena formación no sólo disciplinar, sino también didáctica de las personas que imparten matemáticas en la ESO.

4.4. *Idoneidad mediacional*

Para analizar el grado de idoneidad mediacional se centra la atención en tres aspectos: el uso de material manipulable, el efecto sobre el grado de motivación del alumnado y la incidencia en su aprendizaje. En un estudio preliminar con estudiantes de 12 a 14 años, Domingo (2004) puso de manifiesto que el hecho de utilizar material manipulable en algunos protocolos y trabajar en grupo aumentaba significativamente la motivación del alumnado. Sin embargo, lo que se pretende ahora es obtener datos cualitativos más precisos.

El protocolo usado en este estudio, como ya hemos dicho, considera el uso de materiales manipulables como un aspecto fundamental para favorecer la comprensión de los estudiantes. En la práctica matemática que se analiza, la profesora llega a clase con una bolsa de poliedros para cada grupo de estudiantes (Anexo 1: de 42, 6:29 a 66, 22:46). Durante más de quince minutos, los grupos exploran libremente los poliedros proporcionados y llenan la siguiente tabla:

Como puede apreciarse en la Tabla VI, la exploración con los materiales permite que todos los estudiantes observen las diferentes propiedades geométricas de los poliedros. Además, la regularidad entre el número de vértices, las aristas y las caras permite que se comprenda una propiedad elemental de los poliedros: la fórmula de Euler.

Piaget e Inhelder (1975) establecieron que el uso de material manipulable para desarrollar la inteligencia en general, y el conocimiento matemático en particular, era adecuado hasta la finalización de la etapa de las operaciones concretas (12 años, aproximadamente). Hoy día, este argumento ya está muy superado. Alsina y Planas (2008), por ejemplo, señalan que el material se tiene que usar siempre que los estudiantes lo necesiten.

TABLA VI
Propiedades geométricas de los poliedros analizados.

Poliedro	vértices	Aristas	Caras	aristas en cada vértice	caras en cada vértice	v- a +c	Tipo cara	¿Todas las caras son iguales?	Nombre
1	5	8	5	3 ó 4	3 ó 4	2	cuadrados, triángulos	NO	Pirámide cuadrangular
2	12	18	8	3	3	2	hexágonos, rectángulos	NO	Prisma hexagonal
3	8	12	6	3	4	2	cuadrados	SI	Cubo o hexaedro
4	8	12	6	3	3	2	rectángulos	NO	Ortoedro
5	6	9	5	3	3	2	rectángulos y triángulos	NO	Prisma triangular
6	18	36	20	5	5	2	triángulos equiláteros	SI	Icosaedro
7	4	6	4	3	3	2	triángulos diferentes	NO	Pirámide triangular
8	6	9	5	3	3	2	rectángulos y triángulos	NO	Prisma triangular
9	6	10	6	3 ó 5	3 ó 5	2	pentágonos y triángulos	NO	Pirámide pentagonal
10	4	6	4	3	3	2	triángulos equiláteros	SI	Tetraedro
11	6	12	8	4	4	2	triángulos equiláteros	SI	Octaedro
12	10	15	7	3	3	2	rectángulos y pentágonos	NO	Prisma pentagonal
13	20	30	12	3	3	2	pentágonos regulares	SI	Dodecaedro

En esta línea, Corbalán y Deulofeu (1996) presentan una investigación en el ciclo comprendido entre los 12 y 16 años para determinar los procedimientos que utiliza el alumnado para ganar en un reto matemático o juego. Los autores ponen de manifiesto que el hecho de recurrir a materiales manipulables y de introducir juegos recreativos en el aula aumentan la motivación del alumnado, y permiten realizar mejor los procesos inductivos; es decir, una matemática "de abajo hacia arriba". Domingo (2004) concluye también que el uso de material manipulable en la clase de matemáticas favorece el grado de motivación de los estudiantes.

Respecto al trabajo en grupo como recurso didáctico, se ha optado por organizar a los alumnos en grupos de 3 ó 4 para contar, anotar, comentar y llegar a conclusiones en equipo. Esta gestión de la actividad se debe a dos criterios: en primer lugar, porque el protocolo parte de un marco teórico sociocultural, donde la interacción es un elemento imprescindible; en segundo lugar, porque, como ya se ha indicado, Domingo (2004) confirmó que el hecho de trabajar en grupo mejoraba la motivación de los estudiantes.

Finalmente, se ha analizado también el uso del tiempo como recurso didáctico. En este sentido, de acuerdo con Castro (2007), se ha estudiado si se ha dedicado un tiempo excesivo a la manipulación, el diálogo, la negociación, etc., ya que se podría pensar que es mucho más rápido, por ejemplo, apuntar las propiedades de los poliedros regulares en la pizarra y hacer que los estudiantes las aprendan de memoria.

Sin embargo, cuando lo que se pretende es la significatividad del aprendizaje, esta forma memorística de abordar los aprendizajes no resulta la más eficaz. En este sentido, Macnab y Cuminne (1992), entre otros, apuestan por no introducir conceptos matemáticos nuevos de manera excesivamente rápida, sino por seguir un currículum en espiral que retome los conceptos presentados con anterioridad y profundice de manera progresiva en los que haya más dificultad.

4.5. *Idoneidad emocional*

Para analizar el grado de idoneidad emocional, se ha valorado la mejora del autoconcepto del estudiante y su confianza en las matemáticas, así como el grado de motivación, cuyas causas se han buscado en aquellos elementos del protocolo que lo pudieran generar.

En el estudio de tales aspectos, se parte de los resultados cuantitativos y cualitativos obtenidos por Domingo (2004) y, sobre todo, de la trascripción del video para poder lograr datos más precisos. Así, aunque esta autora corroboró que los estudiantes que habían aprendido con el programa de protocolos en el que está integrado el de poliedros regulares (grupo experimental) obtenían un grado significativamente más alto que los que no lo habían hecho (grupo control), tanto la observación del video como su trascripción permiten comprobar que los alumnos están absortos por la tarea, de forma que si la profesora no dijera *"ha llegado la hora de realizar la puesta en común"*, algunos continuarían contando y manipulando durante más tiempo, como indican Katz y Chard (2000) para referirse al interés por las tareas en función de su gestión. En el siguiente fragmento puede notarse dicho aspecto:

TABLA VII
Fragmento de transcripción.

59, 20:25	P: Encontraréis unas características comunes, buscadlas. ¿Os gusta esta manera de hacer mates?
60, 22:01	A14: Sí, porque es una manera diferente de aprender
61, 22:09	C: ¿Y tú, qué dirías?
62, 22:11	A15: No, que un trabajo así está muy bien, porque te lo pasas bien, y además aprendes.
63, 22:17	C: ¿Crees que se podría hacer así con todos los contenidos de matemáticas?
64, 22:36	A14: Sí, se podría intentar...
65, 22:42	C: Crees que si todas las clases fueran así acabaríais aprendiendo, ¿o sería mejor combinar esto con las clases tradicionales?
66, 22:46	A14: Es mejor así

En la trascripción de la Tabla VII se pone de manifiesto el alto grado de implicación de los estudiantes en la práctica matemática, lo cual permite confirmar que su motivación para aprender la noción de poliedro regular es adecuada.

Abrantes, Serrazina y Oliveira (1999) exponen que la motivación intrínseca es uno de los aspectos básicos en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, consideramos que este tipo de motivación no se da de manera natural en la mayoría de estudiantes, de ahí que se intente provocarla a través del diseño y la gestión adecuada de protocolos que respondan a las necesidades de los alumnos para aprender matemáticas (Domingo, 2004; Alsina y Domingo, 2007).

Como el alto grado de motivación implica que también lo sea el grado de idoneidad emocional, destacamos algunos elementos proporcionados por la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano que pueden haber favorecido este tipo de idoneidad, citados por Esteve (2009): el discurso proléptico y la interacción contingente. Esta autora lleva a cabo una fuerte relación entre el discurso proléptico y el clima emocional cuando argumenta que este tipo de discurso se basa en "el tacto" necesario para favorecer un clima emocional que fomente la participación activa y, por tanto, el aprendizaje.

Resulta muy importante que en el momento de elaborar protocolos bajo esta línea se tenga en cuenta el clima que se pretende crear, a partir del tipo de discurso del profesor, así como del tipo de respuestas y de reconducción del diálogo espontáneo que surja durante la puesta en práctica del protocolo en el aula. En tal sentido, uno de los puntos fuertes de la aplicación del protocolo fue la manera de tratar el error: al analizar las respuestas dadas en el cuestionario, todas apuntan hacia una manera de abordar el error que se ajusta perfectamente a los procedimientos que menciona Esteve cuando habla del discurso proléptico. Por otro lado, coincidimos con Gómez-Chacón (1998) cuando dice que hay que prestar atención a la dimensión afectiva del individuo y, por ende, al contexto sociocultural. Esto es lo que realizan Cuadrado y Fernández (2008) al analizar los mecanismos comunicativos que emplean los docentes para favorecer el aprendizaje de los estudiantes de ESO, los cuales promueven que se establezca un clima emocionalmente positivo.

4.6. *Idoneidad ecológica*

Por idoneidad ecológica se entiende al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado en el entorno donde se utiliza. A pesar de que "entorno" se refiere a todo lo que está dentro y fuera del aula (un hecho que condiciona su actividad), el análisis realizado se centra en cuestiones más particulares: *¿Qué valoración puede hacerse del método desde el currículum de ESO? ¿Se ajusta el método al proyecto del centro?*

Para responder a estas preguntas, en primer lugar se ha analizado si el método aprovecha o no el entorno: en el protocolo implementado, y de manera más concreta durante el estudio de los conocimientos previos de los estudiantes (Anexo 1: de 1, 0:00 a 41, 6:16), la profesora formula una pregunta abierta para que los alumnos sean conscientes de las figuras que hay en el espacio concreto del aula: *"Bien, ¿me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?"* Los estudiantes hacen referencia a diversos objetos, como un estuche, un libro, una caja que hay en el suelo, etc. Progresivamente, esas situaciones se van matematizando a través de modelos —que median entre lo abstracto y lo concreto— para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002) hasta llegar, por ejemplo, a la fórmula de Euler.

En segundo lugar, si se pretende estudiar la vinculación entre el método y las bases psicopedagógicas del currículum vigente puede notarse que el método se ajusta perfectamente a la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, debido a que hay construcción autorregulada de un significado, el de poliedro regular, a partir de la interacción entre la profesora y los estudiantes, entre los mismos estudiantes, y entre los estudiantes y las figuras geométricas.

Respecto a los vínculos del método con el Proyecto Curricular de Centro, el protocolo se ajusta a los ejes básicos de su carácter propio. Así, el análisis confirma que el protocolo es comunicativo, tiene en cuenta a la comunidad educativa (en este caso, el aula y el entorno) y fomenta la participación y el respeto.

En términos generales, se constata que el protocolo implementado tiene un elevado grado de idoneidad ecológica a causa, sobre todo, del aprovechamiento del entorno al aula (Chevallard, 1992). Tal hecho no es novedoso, pues aparece en la mayoría de libros de texto actuales, pero es necesario e intrínseco a la perspectiva sociocultural (Vygostky, 1978; Wertsch, 1985, 1991).

5. CONCLUSIONES

En este estudio se ha analizado la idoneidad didáctica de un protocolo para la enseñanza del concepto de poliedro regular, destinado a alumnos de 14 y 15 años. El protocolo se ha diseñado desde una perspectiva sociocultural, mientras que la evaluación se basó en la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica que ofrece el EOS. El análisis detallado de cada una de las dimensiones ha permitido llegar a la conclusión que el protocolo implementado tiene un alto grado de idoneidad didáctica. Además, ha hecho posible la determinación de los principales factores que contribuyen a esta elevada idoneidad, los cuales destacamos a continuación:

- Es necesario que el profesor tenga una buena formación disciplinar y didáctica para alcanzar un alto grado de idoneidad epistémica, interaccional, mediacional y emocional, así como un buen conocimiento de la realidad, del contexto del centro y de sus estudiantes para impulsar las idoneidades cognitiva y ecológica.
- La perspectiva sociocultural en que se basa el protocolo ha favorecido, entre otros aspectos, el grado de idoneidad interaccional. Como se ha descrito, dicho enfoque del aprendizaje humano se sustenta en la interacción, la negociación y el diálogo como elementos fundamentales para la construcción autorregulada del conocimiento.
- El discurso proléptico y la interacción contingente, además de fomentar la idoneidad interaccional, han propiciado la idoneidad emocional del protocolo, ya que se trata de prácticas docentes que ayudan a crear un clima de aula emocionalmente positivo.
- El uso de material manipulable y el trabajo en grupo han influido también de forma positiva en la idoneidad emocional. Esta clase de recursos continúan siendo muy útiles y necesarios en la gestión de las actividades durante la ESO porque aumentan el grado de motivación de los alumnos y favorecen su aprendizaje.
- El grado de idoneidad emocional del protocolo ha permitido que los estudiantes inicien un aprendizaje significativo del concepto de poliedro regular, principal objetivo del protocolo.

Aunque los resultados obtenidos en este estudio no son concluyentes por su carácter exploratorio (muestra reducida, poco número de actividades para interiorizar el concepto de poliedro regular al tratarse de una sesión introductoria, etc.), el diseño de nuevos protocolos con base en una perspectiva sociocultural que pretendan favorecer el aprendizaje significativo de conocimientos matemáticos en la ESO deberían considerar los siguientes aspectos:

- *El discurso proléptico*: El procedimiento proléptico sitúa a los estudiantes en un contexto en el que el profesor asume que "saben más de lo que en este momento son capaces de hacer". A partir de tal premisa, en su intervención pedagógica el profesor hace que surja el conocimiento previo de los alumnos a partir de preguntas-guía, y les ofrece ayudas para que lleguen –individual o colectivamente– a resolver la tarea. Se trata básicamente de propiciar prácticas de indagación que activen estrategias de inferencia y deducción.

- *La interacción contingente*: Concibe la educación como un proceso de reciprocidad, donde se entiende que enseñar implica conversar. En la dinámica interactiva que fundamenta una conversación destacan los deseos, intenciones y comportamientos de los participantes a lo largo de un intercambio que va conjugando las distintas aportaciones individuales en un constructo compartido.
- *El material manipulable*: La manipulación no es un valor educativo restringido a las primeras edades y propio de una educación matemática iniciática. La eficacia de la educación tiene que ver, en cualquier edad, con la satisfacción del aprendiz hacia las tareas que se le proponen. El uso de materiales, como hemos visto, beneficia tal satisfacción. Con todo, debe considerarse que, aunque se trata de una condición necesaria, no es suficiente; además, edades diferentes requieren usos distintos de los materiales.
- *El trabajo en grupo*: El aprendizaje será más rico si cada estudiante puede compartir y completar sus conclusiones con las del resto de compañeros.
- *Las inferencias inductivas y deductivas*: Hacer una matemática "desde abajo hacia arriba" permitirá partir de casos concretos y del entorno, así como realizar un proceso de abstracción a hacia hechos más generales con la mediación del profesor.

Para poder profundizar en las conclusiones anteriores será necesario llevar a cabo otras investigaciones que permitan, por ejemplo, estudiar la comprensividad de los protocolos y analizar qué variables habría que tener en cuenta en otros contextos sociales de aula, ya que es evidente que los resultados pueden ser diferentes en función del contexto. Todo ello, con el objeto de ofrecer herramientas de formación al profesorado de matemáticas de ESO que contribuyan a la consolidación de la teoría y de su operacionalización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L. y Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Alsina, À. y Escalada, C. (2008). Educación matemática en las primeras edades desde un enfoque sociocultural. *Aula de Infantil 44,* 26-30.

Alsina, À y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

Alsina, À. y Domingo, M. (2007). Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. *SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas 56,* 23-31.

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives Don't Come With Guarantees. *Arithmetic Teacher 37* (2), 4-5.

Baroody, A. J. (2003). *The Development of Adaptative Expertise and Flexibility: the Integration of Conceptual and Procedural Knowledge.* In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills* (pp. 1-33). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

Castro, C. de (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 11,* 59-77.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12* (1), 73-112.

Corbalán F. y Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulables en la enseñanza de las matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 7,* 71-80.

Cuadrado, I. y Fernández, I. (2008). ¿Cómo intervienen maestros y profesores para favorecer el aprendizaje en secundaria? Un estudio comparativo desde el análisis del discurso. *Infancia y Aprendizaje 31* (1), 3-24.

Denzin, N. y Lincoln, Y. S. (2003). *The Landscape of Qualitative Research. Theories and Issues.* California: Sage Publications, Inc.

Domingo, M. (2004) *Una aproximació a la construcció significativa del coneixement matemàtic a l'ESO*. Vic: Universidad de Vic.

Domingo, M. (2009) *La construcció significativa del coneixement matemàtic a l'ESO des d'una perspectiva sòciocultural*. Tesis de doctorado, Universidad de Vic.

Elliott, J. (1978). What is Action-Research in Schools? *Journal of Curriculum Studies 10*, 355-357.

Esteve, O. (2009) La interacción, un proceso que implica conversar. *Cuadernos de Pedagogía 391,* 56-59.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Ontosemiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (Número Especial), 133-156.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción matemática basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 26* (1), 39-88.

Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática. *Quadrante 2* (1), 9-22.

Godino, J. D., Font,V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias 27* (1), 59-76.

Gómez-Chacón, I. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias 16* (3), 431-450.

Gómez-Chacón, I. (2000) *Matemática emocional: los afectos del aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002): Realistic Mathematics Education as Work in Progress. In Fou-Lai Lin (Eds.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and*

Taiwan Conference on Mathematics Education (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Ivic (1994). Lev Semionovick Vygotsky (1896-1934). *Perspectivas: Revista Internacional de Educación Comparada 34* (3-4), 773-799.

Katz, L. G. y Chard, S. C. (2000). *Enganging Children's Minds: The Project Approach*. Stamford, CT: Ablex.

Kilpatrick, J. (1988). Change and Stability in Research in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5,* 202-204.

Lerman, S. (2000). The Social Turn in Mathematics Education Research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 19-44), Westport, CT: Ablex.

Lerman, S. (2001). The Function of Discourse in Teaching and Learning Mathematics. *Research Perspective. Educational Studies in Mathematics 46* (1-3), 87-113.

Macnab, D. J. y Cuminne, J.A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Niss, M. (2002). *Mathematical Competencies and The Learning of Mathematics: The Danish Kom Project.* Roskilde, Denmark: Roskilde University.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

Planas, N. (2002). Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 30,* 114-124.

Planas, N. e Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (2), 179-213.

Reeuwijk, M. Van (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 12,* 9-16.

Romero, I. y Rico, L. (1999) Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las Ciencias 17* (2), 259-272.

Schmittau, J. (2004). Vygostkian Theory and Mathematics Education: Resolving the Conceptual-Procedural Dichotomy. *European Journal of Psychology of Education 29* (1), 19-43.

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind in Society. The Development of Hogher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harward University Press.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.

Wertsch, J. V. (1991). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Autores

Àngel Alsina. Facultad de Educación y Psicología. Universidad de Girona, Girona, España; angel.alsina@udg.edu

Marta Domingo. Facultad de Educación y Psicología. Universidad de Girona, Girona, España; marta_domingo_ballart@hotmail.com

Anexo 1. Transcripción de la sesión

Introducción

1, 0:00 P: Buenos días. Vamos a empezar un nuevo tema: las figuras en el espacio.

2, 0:23 P: Bien, ¿me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?

3, 0:27 A1: Estuche.

4, 0:29 P: Un estuche, por ejemplo...

5, 0:31 A2: Un libro.

6, 0:32 P: Un libro...

7, 0:33 A3: Una maleta.

8, 034: P: Una maleta...

9. 0:35 A1: Un cubo.

10, 0:36 P: Una caja con forma de cubo, ¿no?

11, 0:46 P: ¿Qué diferencia hay entre la caja y un lápiz, un estuche, una maleta, etc.?

12, 1:02 A4: La forma.

13, 1:04 P: ¿Qué significa la forma?

14, 1:07 A5: El cubo tiene caras.

15, 1:21 P: De acuerdo, un cubo está limitado por caras. ¿Cómo se llaman? ¿Qué es cada una de las caras de un cubo?

16, 1:29 A4: Son aristas.

17, 1:30 P: No. ¿Cómo son las caras?

18, 1:31 A6: Cuadradas.

19, 1:32 P: Las caras son cuadrados, pero ¿qué es un cuadrado?

20, 1:35 A7: Un polígono.

21, 1:36 P: De acuerdo. Entonces, hay algunas figuras en el espacio que tienen caras que son polígonos y otras que no. ¿Alguien se acuerda de cómo se llaman los lados de los polígonos?

22, 2:32 P: Antes alguien lo ha dicho... aristas. O sea, un cubo tiene caras, que son polígonos, y tiene aristas, que son los lados del polígono. ¿Qué más tiene un cubo?

23, 2: 36 A8: Vértices.

24, 2: 38 P: De acuerdo. ¿Qué son los vértices?

25, 2: 41 A9: (*No se entiende qué dice*).

26, 2: 45 P: Allí donde confluyen las aristas. Por lo tanto, podemos hacer un subconjunto con las figuras en el espacio que tienen caras, aristas y vértices.

27, 3:27 P: Es el subconjunto de los poliedros.

28, 3: 42 P: ¿Alguien sabría decir alguna otra figura que tenga caras, aristas y vértices?

29, 4: 02 A10: Una pirámide.

30, 4:04 P: Una pirámide...

31, 4: 05 A10: Un cono.

32, 4: 06 P: A ver, el cono no tiene aristas porque es un cuerpo de revolución, es un cuerpo diferente.

33, 4:10 P: Ocurre lo mismo con la esfera y el cilindro.

34, 4:14 P: Y quizás recordáis otros poliedros que hemos estudiado. Aparte de las pirámides, ¿no se os ocurre?

35, 4: 17 P: Cuerpos que tienen dos bases y las caras laterales.

36, 4: 30 A11: Un pentágono hexagonal.

37, 4: 33 P: Un pentágono hexagonal no, un prisma de base hexagonal. Los prismas tienen dos bases y diversas caras laterales, que son rectángulos.

38, 4:40 P: Por lo tanto, fijaos que en el subconjunto de los poliedros podríamos ir colocando muchos objetos.

39, 4: 59 P: Aquí tenemos construidos una colección de poliedros. Fijaos (*se muestra la bolsa con todas las figuras numeradas*).

40, 5: 17 P: Tienen caras, aristas y vértices. Vamos a estudiar estas figuras a partir de una tabla que iréis rellenando. Tendréis que investigar cuántas aristas tienen, cuántas caras, y escribir de qué forma son.

41, 6: 16 P: Y después, analizando las características de cada figura tendréis que deducir cuáles son regulares.

Trabajo en grupos

42, 6: 29 P: Cada grupo puede coger una bolsa de figuras. Vigilad porque están hechas con cartulina. Cuando hayáis rellenado la tabla pondremos en común lo que habéis encontrado. ¿De acuerdo? Pues va.

43, 9: 33 A12: Esta, por ejemplo, ¿qué sería?

44, 9:39 A13: En esta figura hemos contado como aristas también a éstas. ¿Lo hemos hecho bien?

45, 9: 45 P: Sí, son aristas. Las tienes que contar todas.

46, 10:00 A13: O sea, dieciocho, ¿no?

47, 10:04 P: Sí, seis más seis doce, más seis dieciocho.

48, 10:08 A13: ¿Entonces el número de aristas a cada vértice son éstas?

49, 10: 36 P: ¿Cuántas hay en cada vértice?

50, 10: 42 A14: Una, dos y tres…

51, 12: 49 A15: Ya verás, déjame a mí… Diecinueve.

52, 13:10 C: Veinte.

53, 13:12 A15: Ah, sí, veinte.

54, 13:14 A14: Pues veinte.

55, 13:17 C: Cuesta contarlas, ¿eh?

56, 14:06 A13: No, nos hemos equivocado.

57, 19:26 A12: ¡Da 10! Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.

58, 20:18 P: Viendo todos estos números tenéis que llegar a una conclusión.

59, 20:25 P: Encontraréis unas características comunes, buscadlas. ¿Os gusta esta manera de hacer mates?

60, 22:01 A14: Sí, porque es una manera diferente de aprender.

61, 22:09 C: ¿Y tú, qué dirías?

62, 22:11 A15: No, que un trabajo así está muy bien, porque te lo pasas bien, y además aprendes.

63, 22:17 C: ¿Crees que se podría hacer así con todos los contenidos de matemáticas?

64, 22:36 A14: Sí, se podría intentar...

65, 22:42 C: Crees que si todas las clases fueran así acabaríais aprendiendo, ¿o sería mejor combinar esto con las clases tradicionales?

66, 22:46 A14: Es mejor así.

Puesta en común

67, 23:10 P: Todo el mundo al caso, por favor. Bien, vamos a comentar los resultados que hemos obtenido. A ver, teníamos una colección de figuras al espacio.

68, 23:20 P: Hemos visto un estuche, un libro, una maleta, una caja, y hemos hecho un subconjunto que son los poliedros.

69, 24:01 P: Hemos visto que los poliedros son cuerpos geométricos que tienen caras, aristas y vértices. A ver, por ejemplo, la gente de este grupo: el primer poliedro, ¿habéis descubierto qué tipo de poliedro es y qué nombre tiene?

70, 24:30 P: ¿Algún grupo sabe el nombre de este poliedro?

71, 24:36 A10: Pirámide cuadrangular.

72, 24:39 P: Vale, pirámide cuadrangular. De hecho aquí hay más de una, de pirámide... Por ejemplo, ¿algún grupo me puede decir qué otras pirámides hay?

73, 24:53 A15: Pirámide rectangular.

74, 24:57 P: Pirámide rectangular. ¿Qué número?

75, 25:00 A15: Es el número siete.

76, 25:03 P: El número siete es una pirámide, pero triangular.

77, 25:07 A9: El ocho, el ocho, el ocho.

78, 25:18 P: El ocho no es una pirámide.

79, 25:25 P: ¿Hay algún grupo que sepa qué figura es la ocho?

80, 25:40 P: Un prisma, ¿y de qué tipo?

81, 25:49 P: Es un prisma triangular. Por lo tanto, dentro los poliedros hemos encontrado pirámides y prismas.

82, 26:01 P: Aparte de estas pirámides y de estos prismas, básicamente este ejercicio estaba pensado para descubrir los poliedros regulares. A ver, ¿qué figuras habéis considerado que son poliedros regulares?

83, 26:25 A13: Ah, el número tres.

84, 26.31 P: El número tres. ¿Habéis sabido darle un nombre a esta figura?

85, 26:37 A13: El cubo.

86, 26:40 P: El cubo también se puede denominar hexaedro porque está formado por seis caras.

87, 26: 50 P: ¿Qué otro habéis encontrado?

88, 26:53 A13: El seis... el icosaedro.

89, 26:57 P: De acuerdo.

90, 27:00 P: Ya tenemos el icosaedro y el cubo. ¿Podéis decir los otros?

91, 27: 03 A7: Una pirámide... el diez.

92, 27: 10 P: El diez es una pirámide... recibe el nombre de tetraedro.

93, 27: 21 P: ¿Qué otro?

94, 27: 28 A2: El once. El octaedro.

95, 27:39 P: Muy bien.

96, 27:56 P: ¿Alguno más?

97, 27:59 A6: Sí, el trece es un dodecaedro.

98, 28:03 P: El trece, el dodecaedro.

99, 28:18 P: Habéis localizado los cinco poliedros regulares. ¿En qué os habéis basado para decir que éstos son los cinco poliedros regulares?

100, 29:40 A14: Que tienen todas las caras iguales, y que las aristas a cada vértice y el número de caras a cada vértice valen igual.

101, 29:52 P: Muy bien. O sea, estas serán las dos características a partir de las que podemos definir un poliedro como poliedro regular. El poliedro regular tiene las caras iguales, en un caso serán triángulos, en otro hexágonos, en otro caso serán cuadrados... y además en los vértices confluyen el mismo número de aristas y de caras.

102, 30:50 P: A ver, en la tabla, aparte de contar los vértices, las aristas y las caras, os hacía buscar qué número salía al restar las aristas de los vértices y sumar las caras. ¿Qué habéis observado?

103, 30:59 A13: Que todos daban igual.

104, 31:02 P: Que todos daban igual. ¿Y cuál era este número que daba igual?

105, 31:06 A13: Dos.

106, 31,08 P: Dos.