



Pinzellades de mosaics i frisos amb programació

**Treball de Recerca
2n de Batxillerat
Soukaina El Messaoudi
Tutor: Josep Vall
Curs 2018/19**

ÍNDIX

1. INTRODUCCIÓ	4
1.1. El tema del treball	4
1.2. La motivació	5
1.3. La rellevància.....	6
1.4. La metodologia.....	7
1.4.1. Dificultats	8
1.5. Presentació	9
2. MARC TÈORIC	11
2.1. Moviments al pla	11
2.2. Patrons.....	13
2.2.1. Notacions	14
2.3. Mosaics periòdics	16
2.3.1. Classificació de mosaics.....	17
2.4. Frisos	26
2.4.1. Classificació de frisos.....	26
2.5. Mosaics hidràulics.....	29
2.5.1. Paviments anteriors al mosaic hidràulic.....	30
2.5.2. Implementació del mosaic hidràulic.....	32
2.5.3. Evolució del Disseny.....	34

2.6.	Programació	35
2.6.1.	Processing 3	36
3.	CREACIÓ DE MOSAICS PERIÒDICS I FRISOS.....	42
3.1.	Mosaics periòdics	42
3.2.	Frisos	51
4.	CONCLUSIÓ	53
5.	ANNEXOS	55
5.1.	John Conway	55
5.2.	Maurits Escher	56
5.3.	Taula de mosaics	57
5.4.	Taula de frisos	59
6.	BIBLIOGRAFIA	60
	Figures	61

1. INTRODUCCIÓ

1.1. El tema del treball

El treball de recerca que reposa en les vostres mans recull l'estudi de mosaics periòdics i frisos, i la tècnica de pavimentació, coneguda com a mosaic hidràulic, la qual integra els dos tipus de patrons. A més de l'assoliment del coneixement bàsic del llenguatge de programació Java, base del programa *Processing 3*. Finalment, l'aprenentatge adquirit amb els tres estudis fan possible la confecció de mosaics i frisos inèdits.

El recorregut cap aquest últim fi es divideix en tres seccions, basades en els tres estudis. L'objectiu del primer bloc, dedicat als mosaics periòdics i frisos, és comprendre els moviments del pla que constitueixen els fonaments per construir-los, i descriure els 17 grups de mosaics i 7 grups de frisos que en deriven. Tanmateix també aprendre'n el mètode de classificació i la doble nomenclatura utilitzada per denominar-los.

Els objectius del segon bloc són l'estudi de les diferents pavimentacions, recorrerem la línia temporal dels mosaics hidràulics, observarem la seva evolució conjunta amb els mosaics periòdics i els frisos.

Un cop assolits els dos primers objectius que conformen el marc teòric, passarem a la meta final que correspon a la part pràctica. La finalitat última del treball és realitzar programes per confeccionar dissenys originals per a cada tipus de mosaic periòdic i fris. Per aquesta secció del treball també cal fixar objectius:

- Aprendrem el llenguatge de programació del *Processing 3* per la creació de programes per a cada grup de mosaic periòdic i fris. Un cop obtingudes les plantilles digitals, passarem a analitzar-les i corregir-les i, si detectem errors, modificarem els programes.
- Posteriorment, elaborarem rajoles originals que seran utilitzades pels mateixos programes per elaborar els mosaics i frisos originals, alguns basats en mosaics hidràulics.

1.2. La motivació

Aquesta investigació neix de l'observació de les obres magistrals de Maurits Cornelis Escher¹, un artista i matemàtic que en múltiples ocasions creava combinant les dues disciplines. Concretament, la idea primitiva del treball es troba copsada en una guspira que va saltar en veure l'obra *Dia i nit* (1939). Després d'admirar una llarga estona els seus gravats i temptejar el terreny dels mosaics, el tutor em va recomanar encaminar el treball al camp dels mosaics hidràulics on són freqüents els mosaics, amb l'acceptació d'aquesta proposta vaig canviar el rumb de la meva recerca.

Inicialment, no tenia clar el terme *mosaic hidràulic*, després vaig descobrir que hi estava més familiaritzada del que em pensava. Són el paviment amb els que he conviscut gran període de la meva vida. En múltiples ocasions m'han despertat la curiositat, principalment pel fet que, com les obres impressionistes, requereixen de distància per apreciar-los. Aquesta coincidència m'ha empès a indagar més aquest art industrial.

Per un altra banda, la motivació per aquest treball es el meu interès per l'art, que m'ha conduit a crear i dissenyar mosaics inèdits. A més a més, m'ha semblat interessant que l'art treballi de la mà de les matemàtiques, una ciència que s'ha encarregat d'estudiar les regularitats dels patrons que ens envolten, concretament des de la teoria de grups, una branca de les matemàtiques. Aquest àmbit, el tema del treball m'ha presentat a John Horton Conway², un matemàtic de renom, i la seva metòdica i admirable obra.

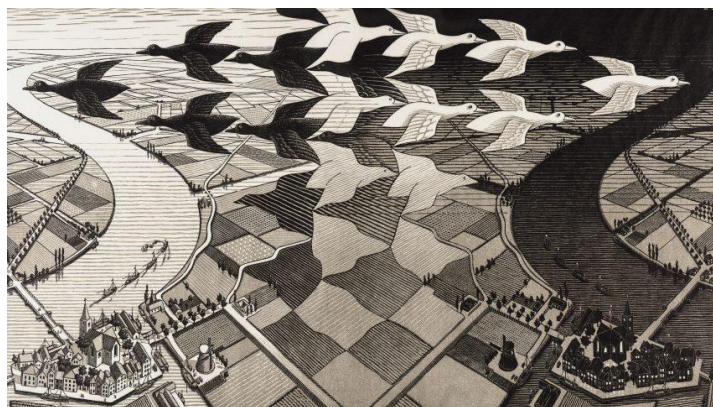


Fig. 1 *Dia i nit*, M. C. Escher (1939)

¹ Biografia de M. C. Escher a l'annex 6.2

² Biografia de J. H. Conway a l'annex 6.1

1.3. La rellevància

Les repeticions s'utilitzen en l'arquitectura perquè, a part d'embellir, permeten l'estalvi de plànols, gràcies als dissenys repetitius. Els patrons tenen una àmplia presència en diferents elements arquitectònics de diferents èpoques, moviments artístics i cultures. L'edifici que més rellevància té en relació als mosaics periòdics, és l'Alhambra (Granada). Es tracta d'un edifici els ornaments del qual són un mostrari complet de tots els grups en què es classifiquen aquests patrons. També podem identificar patrons en les obres arquitectòniques més recents.



Fig. 2 *Catedral de Milà (Milà, Itàlia), presenta elements repetitius.*

Els mosaics tenen un valor històric, per reconèixer-ho no cal anar gaire lluny en l'espai però sí en el temps, només fixem-nos en l'evolució de la pavimentació catalana. El mosaic hidràulic ha adquirit un valor cultural i/o històric, perquè fou la principal pavimentació i marca del modernisme català. Barcelona, on trobem tantes cases d'estil modernista, és el bressol de les companyies fabricants de mosaics hidràulics més importants.

Els mosaics també s'apliquen al disseny i fabricació de productes, amb el seu ús es guanya eficiència, repetir el mateix motiu implica un estalvi de temps i diners. Els podem trobar també en esferes, com és el cas d'una pilota de futbol o de bàsquet, però nosaltres ens centrarem en l'estudi dels patrons plans.

Els patrons, en l'actualitat, segueixen posseint la funció decorativa però la seva aplicació no es limita a l'arquitectura, els solem reconèixer en mosaics de paper que revesteixen parets o en voreres. A més, ara és cada vegada més freqüent la utilització d'elements simètrics i mosaics periòdics bàsics en disseny gràfic, podem trobar-los en portades de llibres, cartells, etc.

El valor de la recerca també rau en el lligam del tema amb les matemàtiques, veurem que la disciplina ha contribuït a l'hora de definir moviments al pla i classificar els patrons, després de buscar les múltiples possibilitats de mosaics i frisos que es poden efectuar en dues dimensions. Per explicar perquè hi ha només 17 grups de mosaics periòdics, Conway va idear el Teorema Màgic que també l'adapta als frisos.

1.4. La metodologia

En un primer apropament m'he documentat sobre els mosaics i un cop fixats els objectius, he iniciat el procés de realització del treball, compost per diferents etapes caracteritzades pels objectius que pretenc aconseguir.



Fig. 4 Logotip de Processing 3

Primer, he començat aprenent el llenguatge de programació propi del *Processing 3* amb l'ajuda del tutor del treball. Amb aquest mateix programa he anat fent, després, les plantilles dels mosaics periòdics de frisos a mesura que avançava l'estudi de cada grup de mosaic i fris. Un cop finalitzades les he analitzades per comprovar que compleixen amb totes les característiques del grup determinat.

La recerca i explicació que he realitzat, simultàniament amb l'aprenentatge de programació, sobre els mosaics periòdics i els frisos, l'he feta partint de la identificació dels moviments al pla que combinats els conformen. Aquesta teoria està



Fig. 3 proposta de cartell per la Festa Major de Vic, 2012, hi ha una simetria.

basada en el llibre *The Symmetries of Things* de John H. Conway, aquesta font recolzada amb recursos d'Internet.

A continuació, he procedit a estudiar l'art industrial, la seva composició, metodologia, tècnica, etc. Centrant-me en la tècnica utilitzada en els dissenys. Tot plegat, partint del llibre *L'art del mosaic hidràulic a Catalunya* de Jordi Grisè.

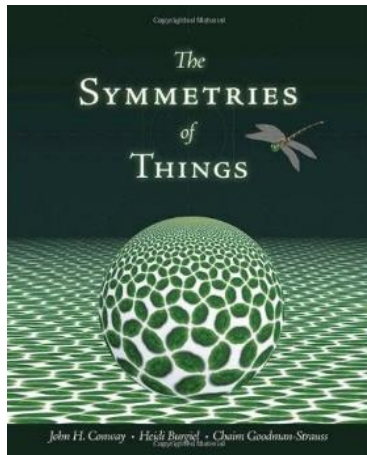


Fig. 5: The symmetries of things, J. H. Conway (2008)

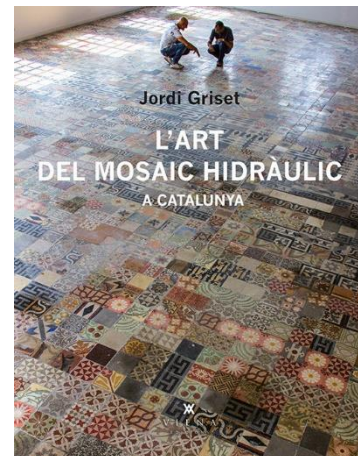


Fig. 6: L'art del mosaic hidràulic a Catalunya, Jordi Grisè (2015)

També he analitzat alguns dels mosaics més característics d'aquest tipus de pavimentació. Seguidament, he dissenyat les rajoles originals i les he introduït al programa, que seguint la programació de cada plantilla, ha fet de mosaïcista que distribueix les rajoles de manera que les simetries siguin les correctes i conformin els grups de mosaics i els frisos.

1.4.1. Dificultats

Durant el treball m'he trobat amb alguns obstacles, sobretot en la primera etapa. L'aprenentatge del llenguatge de programació ha sigut un repte que he pogut assolir amb el treball finalitzat. A mesura que avançava per les llistes de tipus de mosaics i frisos anava augmentant la dificultat de programar, perquè incorporava noves funcions necessàries no només per obtenir les plantilles guia, sinó també per obtenir unes obres de bona qualitat.

Malgrat això, he trobat alguns errors en les plantilles i he hagut de modificar els programes i fins i tot en algun cas canviar la rajola inicial. Per tant, l'anàlisi de totes les plantilles ha permès que els mosaics i frisos resultants siguin correctes i fiables.

A més, m'ha permès adonar-me que alguns grups es poden confeccionar amb rajoles tant triangulars com quadrades.

1.5. Presentació

La base dels mosaics o els frisos la trobem als moviments al pla, permeten transformar una rajola o dibuix, n'hi ha quatre: la **translació**, el desplaçament d'una imatge; **simetria axial**, crea la imatge que s'obté en col·locar un mirall en un lateral de la rajola; **simetria de lliscament**, és una simetria axial combinada amb la translació; **rotació**, els punts de la imatge descriuen una trajectòria circular d'un cert angle.

Aquests moviments es combinen i formen patrons, repeticions d'un motiu o dibuix. A més a més, ens ajuden a classificar-los en grups i també posar-los nom, per a això existeixen múltiples nomenclatures, utilitzarem la **notació d'orbifold** de John Conway. En aquest treball estudiarem els frisos, patrons que s'estenen en una direcció, i els mosaics periòdics que s'estenen en dues direccions. Tots els tipus es poden trobar a les parets de l'Alhambra (Granada).

Per una banda, els mosaics periòdics es classifiquen en 17 grups i Conway els divideix en tres subgrups, basant-se en els moviments que s'hi identifiquen: **els cinc blaus (veritables)**, hi trobem cinc grups que només contenen girs; **els cinc vermells (reflectors)**, són cinc en què hi participen solament reflexions, simetries axials i de lliscament; **els set verds (híbrids)**, en aquesta àmplia categoria hi trobem els grups més complexos que combinen tant reflexions com girs.

Per una altra banda, els frisos, a diferència dels mosaics, són patrons restringits que resulten en una tira. En trobem 7 grups que es diferencien per la complexitat dels moviments al pla. Conway els exemplifica amb les petjades que deixarien els nostres peus si saltem, distingim entre: **salts simples**, inclou quatre grups amb moviments al pla de cada tipus; **salts complexos**, els últims tres grups involucren més d'una simetria i gir i la seva combinació.

Reunits, els dos patrons es solen trobar en pavimentacions de sòl i de parets. La més emblemàtica a Catalunya és el **mosaic hidràulic**, vestigi de l'art industrial català. El que caracteritza aquest mosaic és la complexitat del seu disseny i les propietats del material que compon les rajoles hidràuliques.

Trobem els orígens de la pavimentació a la Grècia i Roma antigues. La millora dels materials de construcció ha permès l'evolució dels dissenys que s'empraven. Al mosaic hidràulic s'abandona l'ús de colors neutres i s'introdueixen més gammes, i els motius senzills i geomètrics d'abans són substituïts per motius florals i més complexos. Hi trobem composicions on conflueixen frisos, sanefes que emmarquen, amb els mosaics, al centre.

Seguidament, encetarem la segona etapa. L'aprenentatge del **llenguatge de programació**, una manera de donar instruccions a un sistema de manera específica, per a poder elaborar programes que generin patrons partint d'una rajola. Per a aquesta finalitat, he utilitzat l'aplicació **Processing 3**, destinada a utilitzar la programació per a projectes creatius, utilitza el llenguatge d'alt nivell **Java**, aquest utilitza construccions en anglès per donar instruccions. Aquest aprenentatge es reflecteix als resultats, les plantilles per a cada patró.

Finalment, ambdues investigacions conflueixen en l'elaboració de dissenys de mosaics hidràulics contemporanis, que he obtingut substituint als programes les rajoles de referència per unes altres inèdites. Les creacions són productes d'un procés laboriós de programació i de disseny de rajoles originals.

Per acabar d'arrodonir el treball, he analitzat les plantilles elaborades per identificar els components de cada grup de mosaic i de fris, per assegurar la seva correcció abans d'aplicar-hi les rajoles inèdites. També he analitzat mosaics hidràulics per identificar usos de diferents grups de frisos i mosaics periòdics.

2. MARC TÈORIC

2.1. Moviments al pla

La gran maquinària on habitem té imatges transformades o mogudes, el humans també en som productes. Només cal identificar les fulles d'una planta, si en partim una podem veure que les dues parts són similars però no idèntiques una és la transformació de l'altra, és com si hi hagués un mirall entre les dues.

Aquest fenomen copsat per la ment humana es veu plasmat en edificis antics. Els romans van adaptar els ordres arquitectònics clàssics dòric, jònic i corinti de les columnes gregues i els van usar als temples romans. Si els partíssim verticalment semblaria que hi hagués un mirall entre les dues parts resultants.

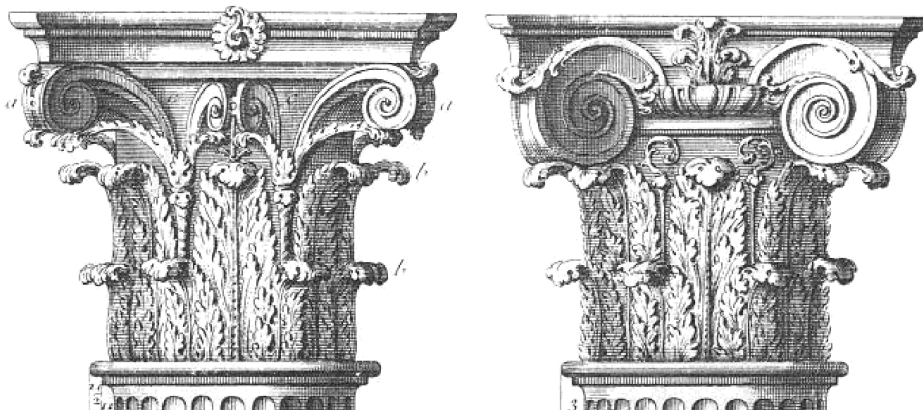


Fig. 7 capitell d'estil corinti

a. Translació

La translació és un moviment que forma per si sol un patró, repetint una imatge al costat de l'altra, així es crea el fris més simple.

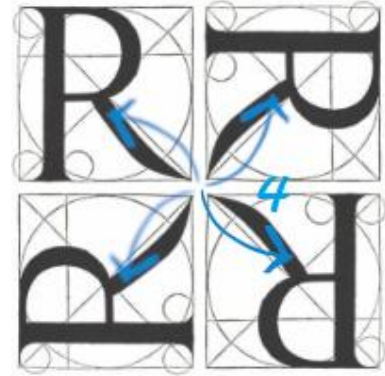


La translació d'una figura es compleix en desplaçar, per mitjà d'un vector, tots els punts de la figura de manera que recorrin la mateixa distància, amb direcció i sentit idèntics, al pla.

b. *Rotació*

Els girs o rotacions són moviments amb els quals tots els punts d'una imatge es desplacen descrivint un mateix angle. Les rotacions divideixen un angle complet en el nombre de repeticions, en angles del mateix grau.

Per exemple, una figura amb 4 girs divideix un angle complet en tres de 90° , repetint la mateixa imatge a cada angle sense transformar-la.



c. *Simetria axial*

La simetria axial denota la presència d'un mirall, l'eix, que genera una imatge nova simètrica a l'original. Les distàncies de cada punt i el seu simètric respecte l'eix són idèntiques, però els punts simètrics tenen una coordenada negativa.

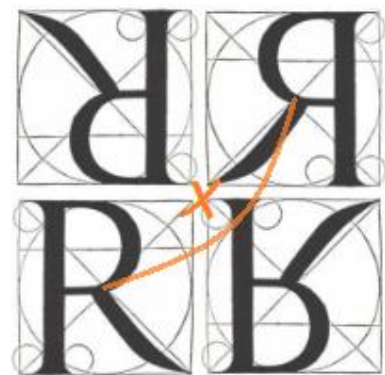
A més, quan els eixos es creuen, al centre de simetria, es dobla el nombre de simetries. Per exemple, 2 simetries creuades divideixen l'angle complet en quatre de 90° .



d. *Simetria de lliscament*

Aquesta es presenta per combinació de moviments de simetria axial i translació, la figura es trasllada fent un gir de dreta a esquerra o viceversa, això un mirall és incapaç d'explicar-lo.

Per realitzar el moviment, primer apliquem una simetria axial de la figura i després aquesta es trasllada pel vector de translació.



2.2. Patrons

La repetició d'un objecte, imatge o tema... forma un patró o tessellat. En altres termes, definim un patró com un conjunt de dades on reconeixem una sèrie de variables constants. Si una plantilla o regió forma, per moviments al pla, un model recurrent podem dir que ens trobem davant d'un únic patró fonamental.



Fig. 8: exemple de fris

Hi ha patrons que es basen en la periodicitat; és a dir, la translació sempre és present i s'encarrega de repetir el model pel pla infinitament. Per una banda trobem els mosaics periòdics que es repeteixen en dues direccions. Per una altra banda, la translació dels frisos es produeix en una direcció però en dos sentits contraris, cap a davant i darrere.

A més a més, els patrons no es limiten al pla, també els podem trobar en cossos esfèrics. Però són menys comuns, perquè la complexitat dels patrons condiciona la seva abundància.

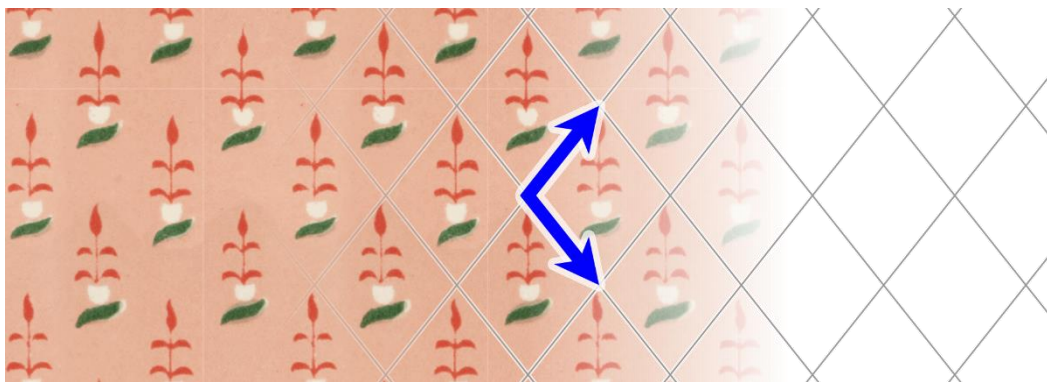


Fig. 9 exemple de patró

Aquells patrons que no presenten periodicitat, als quals el model que forma la rajola no passa per translació sinó només per girs o simetries, resulten en patrons finits. Per exemple, la Tessellació de Penrose, utilitza simetries amb un centre fix. Les rosasses, un altre cas, combinen simetries i rotacions al voltant d'un centre fix.

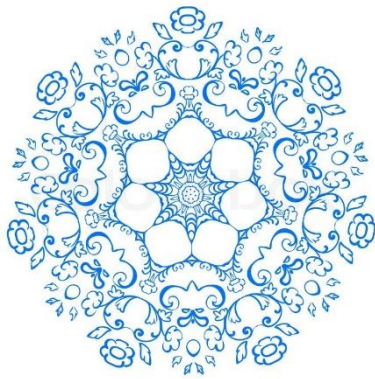


Fig. 10 Rosette Pattern

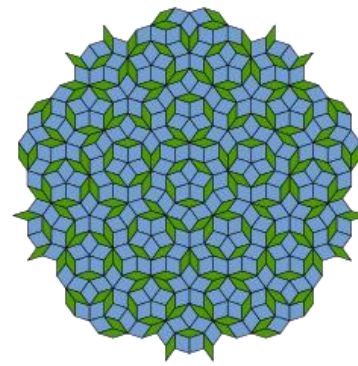


Fig. 11 Tessel·lació de Penrose

2.2.1. Notacions

Per identificar un patró hem de reconèixer els moviments al pla que efectua la rajola o cel·la del mosaic periòdic o fris. Es poden utilitzar diferents notacions: la cristal·logràfica i la d'*orbifold*. Utilitzarem l'última perquè descriu millor els moviments que tenen lloc als patrons.

a. Notació cristal·logràfica (IUCr)

La notació cristal·logràfica, de Hermann-Mauguin és una nomenclatura que va adoptar la Unió Internacional de Cristal·lografia (IUCr, en anglès) per assignar un nom de fins a quatre caràcters als grups periòdics plans, basant-se en les simetries.

Es comença definint primer amb una lletra **p** o **c**, si el reticle o la rajola és primitiva o centrada. Els patrons primitius són els que tenen una regió mínima que es va repetint per translació on les rajoles que la componen no es repeteixen, la regió centrada inclou rajoles repetides i és més gran que la primitiva.

A continuació, un número ens indica les simetries de primer ordre que poden ser verticals o horitzontals, poden haver-hi fins a 6. Després, si identifiquem una simetria axial afegim **m**, una **g** (m) pels lliscaments i **1** en cas de no haver-hi reflexions.

Per exemple, el grup $p31m$ ens indica que té una regió primitiva ($p31m$); 3 rotacions, un moviment sense simetria per tant 1 ($p31m$); i una simetria de tres miralls ($p31m$). Un grup de mosaic més senzill és el $p6m$, la regió és primitiva ($p6m$) i té una simetria de 6 miralls ($p6m$).

b. Notació d'orbifold (de Conway)

Per acabar, farem referència a la notació d'*orbifold*, impulsada per John H. Conway al seu llibre *The Symmetries of Things*. A l'hora d'elaborar el llenguatge matemàtic per nomenar als mosaics i frisos John Conway i William Thurston van adaptar la nomenclatura que va idear Murray MacBeath. És la que seguirem, però no partirem dels *orbifold*, les abstraccions de les rajoles originals, sinó de l'observació directa dels patrons.

La nomenclatura es basa en topologia i no en fenòmens cristal·logràfics. Es parteix plegant el patró fins a obtenir-ne l'essència, l'*orbifold*, i es descriu amb símbols i números el plegament del tessellat.

Per una banda, l'asterisc (*) indica reflexions dels límits de l'*orbifold*. El nombre anterior al símbol, ens indica un o més centres de rotacions, i, correspon a una punta cònica de l'*orbifold*. El posterior, indica un o més centres de simetries que coincideixen amb les arestes de l'*orbifold*, la forma que agafen aquestes en l'*orbifold* determinen el nombre de reflexions. La cristal·lografia restringeix els nombres a 2, 3, 4 o 6.

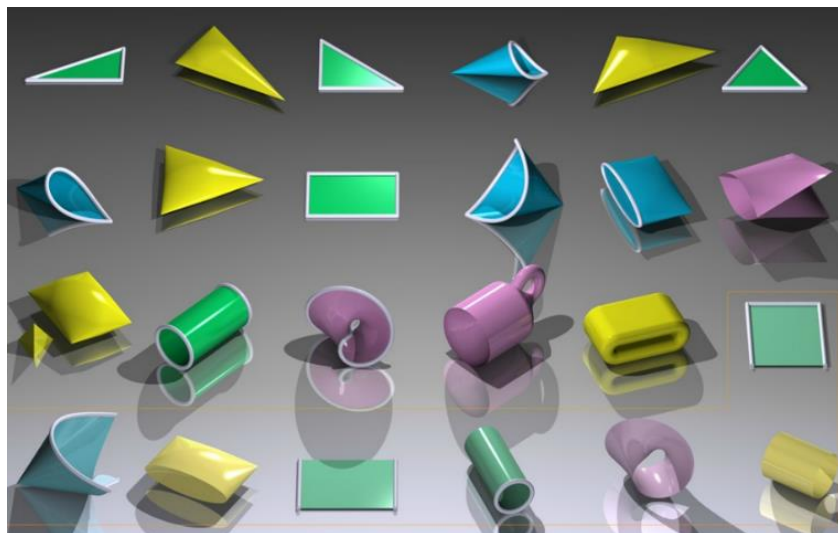


Fig. 12 orbifold dels grups de mosaics periòdics i dels grups de frisos

Per una altra banda, la creu (x) indica una simetria de lliscament, a l'*orbifold* es manifesta amb una sobreposició. Per exemple, l'*orbifold* del fris ∞x és una banda de Möbius. En canvi, l'absència de simetries i rotacions se simbolitza amb un anell (o), la translació de la regió, que a l'*orbifold* es manifesta amb forma de rosquilla.

2.3. Mosaics periòdics

Els mosaics periòdics, mencionats anteriorment, són patrons amb periodicitat, que s'estenen infinitament malgrat no podem observar-ho. Perquè el patró sigui un mosaic periòdic s'han de complir les premisses següents: les distàncies entre les diferents figures que componen la regió, el motiu mínim que conforma l'*orbifold*, no poden ser alterades en cap repetició, almenys dos moviments bidimensionals de translació han d'efectuar-se en diferents direccions per conformar el mosaic.

La classificació dels mosaics prové, primerament, de mosaics ja produïts, buscant i estudiant regularitats entre els diferents patrons que ens roden, com teles, pavimentacions, etc. També, els que la humanitat ha elaborat des de les primeres civilitzacions, sovint són components distintius del seu art.

Després que fossin analitzats matemàticament, s'han establert els tipus que es poden formar i s'han descrit les seves característiques. En quant a complexitat o dimensió, els mosaics periòdics s'estenen en dues dimensions, són més complexos que els frisos d'una dimensió però, comparats amb els grups espacials de tres dimensions, com els esfèrics, són senzills.

Molts matemàtics han investigat les propietats dels mosaics, però va ser Eygraf Fedorov qui, el 1891, va concretar que hi havia 17 grups cristal·logràfics possibles. El 1924, George Pólya va arribar a la mateixa conclusió independentment. Durant la segona meitat del segle XX, se'n van començar a identificar alguns tipus a l'Alhambra. Després de identificar al mateix palau els 17 grups possibles, la geometria de mosaics i frisos va arribar al seu punt àlgid.

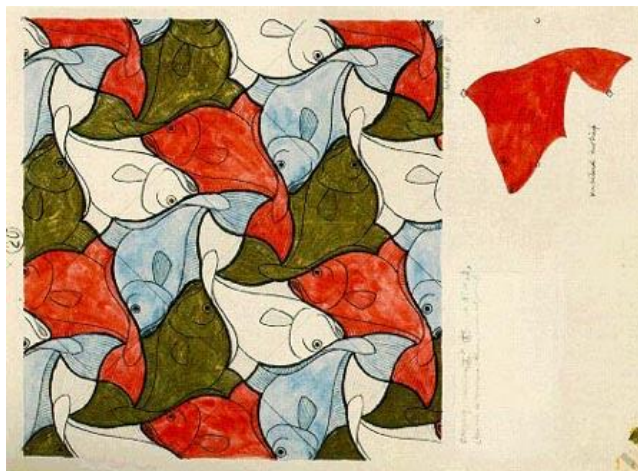


Fig. 13 Peixos n.20, Escher (1938)

2.3.1. Classificació de mosaics

S'obtenen 17 patrons utilitzant moviments de gir i translació i moviments simètrics per separat i mesclats. Senzillament, combinem regions de diferents formes, quadrada, romboide, rectangular o de paral·lelogram; i de múltiples maneres i analitzem quines accions hem realitzat.

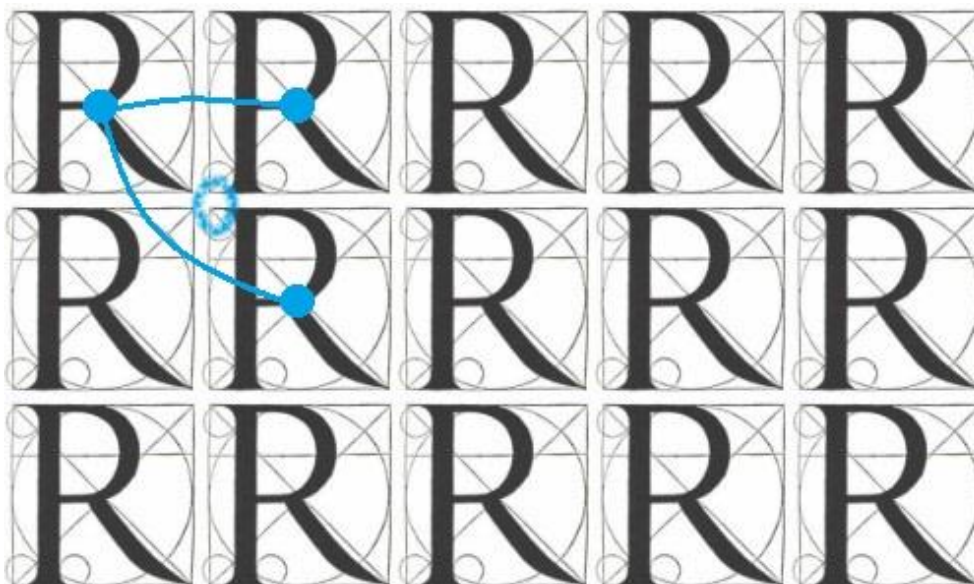
Cada grup de mosaic periòdic té unes determinades característiques que permeten diferenciar-los, a vegades petits canvis poden classificar dos patrons similars en diferents grups, mentre que alguns patrons molt diferents respecte l'estil, color³ o orientació pertanyen al mateix grup. Seguint la notació d'orbifold els cataloguem en: *Els cinc blaus (veritables)*, *Els cinc vermells (reflectors)* i els set híbrids verds.

a. Els cinc blaus (veritables)

Hi pertanyen els grups que utilitzen només simbologia blava, corresponent als moviments al pla de gir i translació, exclouen simetries axials i de lliscament.

o (p1)

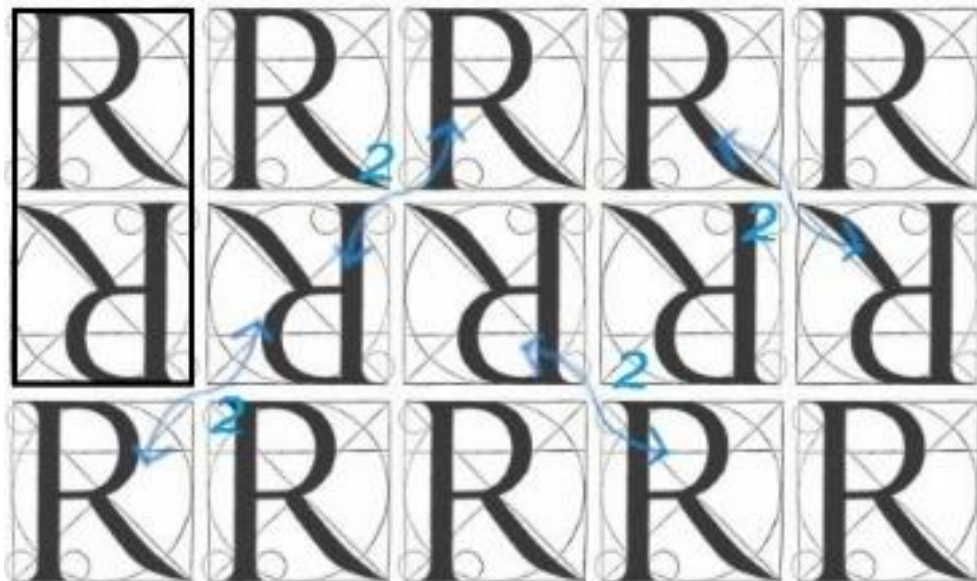
Aquest grup no presenta ni simetries ni girs, la seva notació d'orbifold és l'anell, només hi identifiquem la translació. Són dues les translacions que componen el patró. La regió (quadrat, rectangle, rombe o paral·lelogram) es repeteix als costats dret i esquerre i als costats inferior i superior.



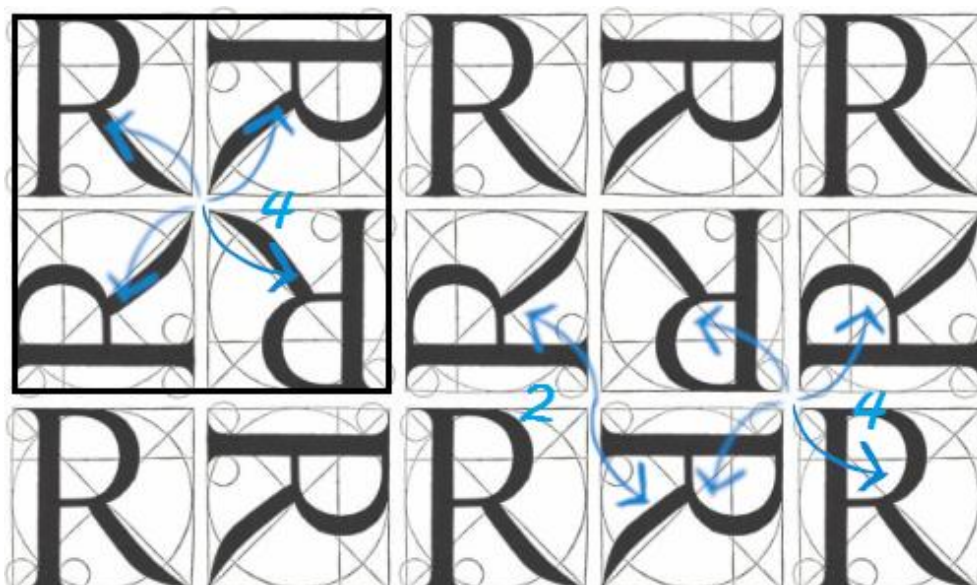
³ Si tenim en compte la simetria dels colors, un mosaic podria passar a pertànyer a un altre grup.

2222 (p2)

El segon grup està compost per quatre punts de gir d'ordre 2, se'n desprenen dues rotacions. En detall, cada rotació està distanciada de l'altre per un angle pla, 180° . Si agafem la rajola original i la seva invertida obtenim el motiu mínim i per translació obtenim el mosaic. La regió és un rombe, rectangle, paral·lelogram o un quadrat.

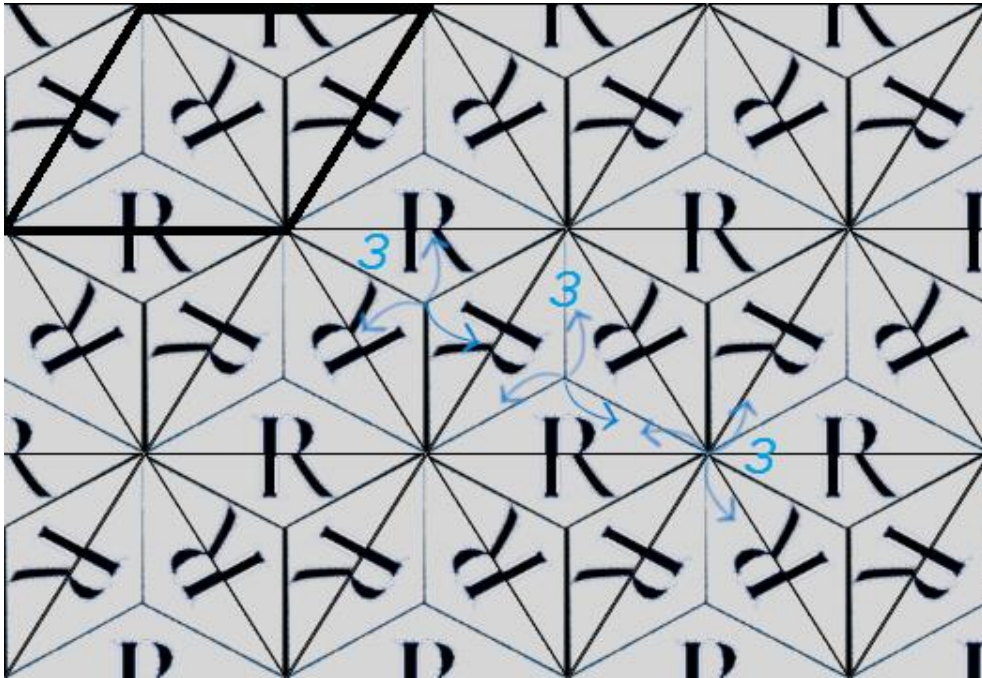
**442 (p4)**

El tercer grup de nomenclatura blava té tres centres de gir, dos d'aquests són de quatre rotacions per tant els girs estan distanciats per angles de 90° , el tercer centre de gir hi trobem dues rotacions a 180° una de l'altra. La regió és quadrada, la formen quatre rotacions de la cel·la original, també quadrada.



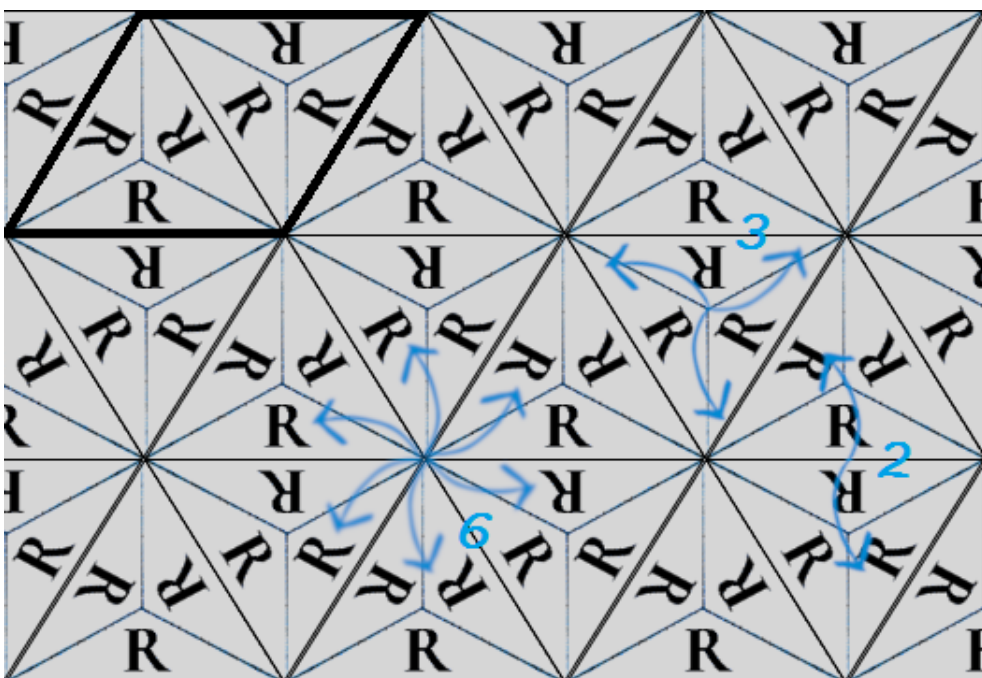
333 (p3)

Els tres centres de gir són d'ordre 3, la cel·la efectua 3 rotacions cada 120° . La regió és un paral·lelogram hexagonal, format per cel·les de triangles obtusos isòsceles.



632 (p6)

El mosaic p6 té tres centres de gir, el primer de 6 rotacions cada 60° , el segon amb 3 rotacions cada 120° i el tercer té 2 rotacions a 180° . La regió que elaborem amb les cel·les triangulars obtuses isòsceles és un paral·lelogram hexagonal.

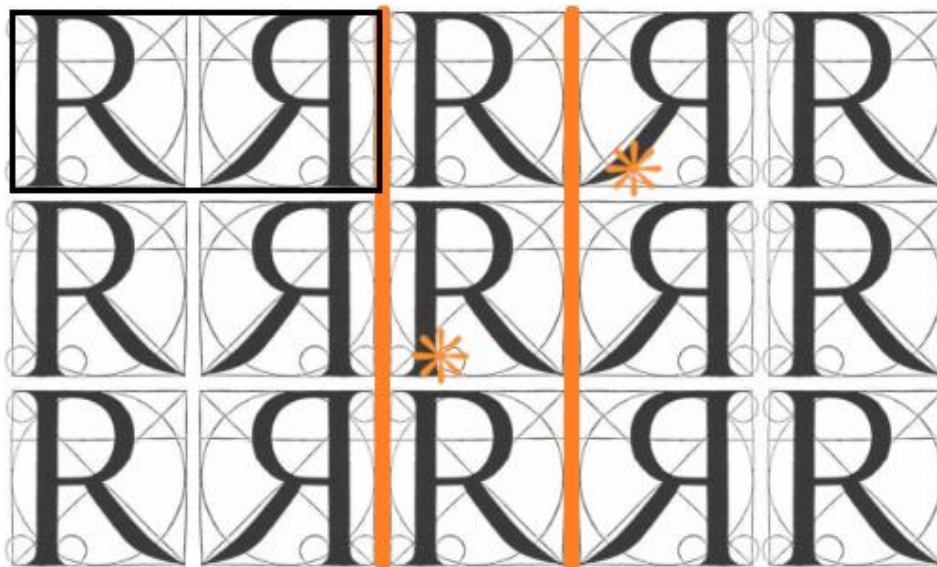


b. Els cinc vermells (reflectors)

Aquesta categoria només inclou moviments simètrics, les reflexions axials. Les cinc signatures es corresponen amb les de categoria blava.

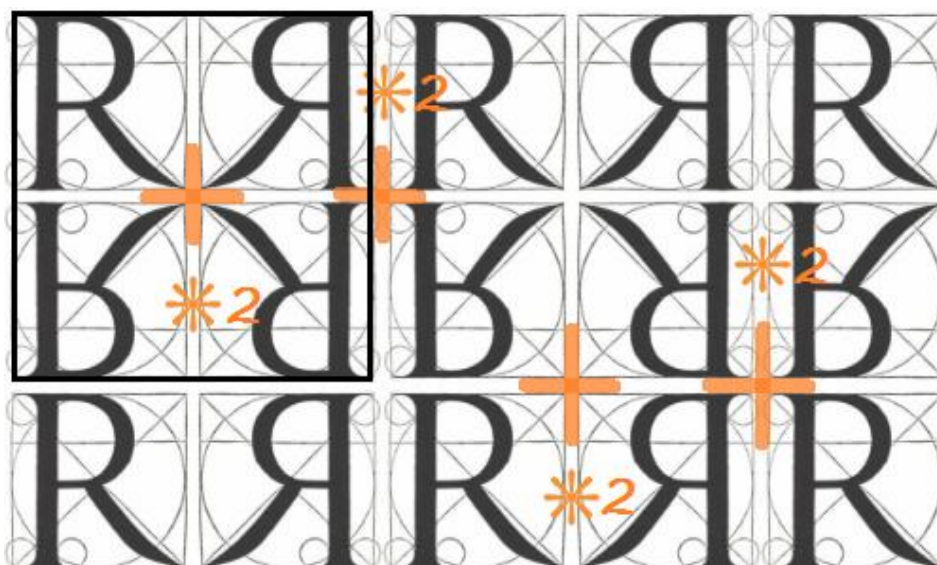
**** (pm)**

En el mosaic identifiquem dos miralls paral·lels, verticals o horitzontals. La regió, rectangular, està formada per la cel·la original i la seva simètrica.



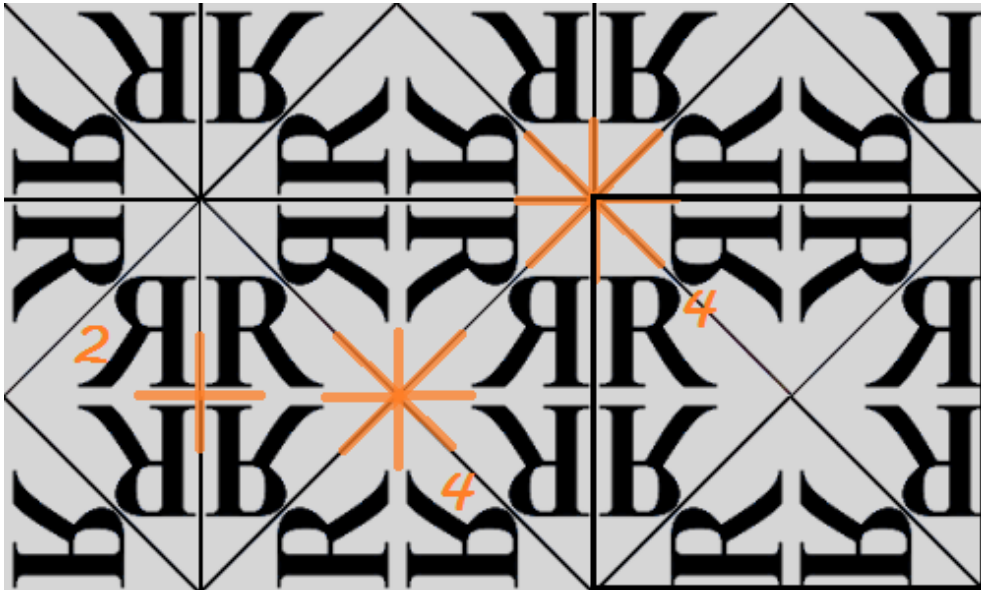
***2222 (pmm)**

Té quatre centres de simetries d'ordre 2, en aquest mosaic la rajola es reflecteix als quatre costats. La regió, quadrada o rectangular, l'aconsegum fent la simetria axial als costats de la cel·la original, està composta per quatre cel·les.

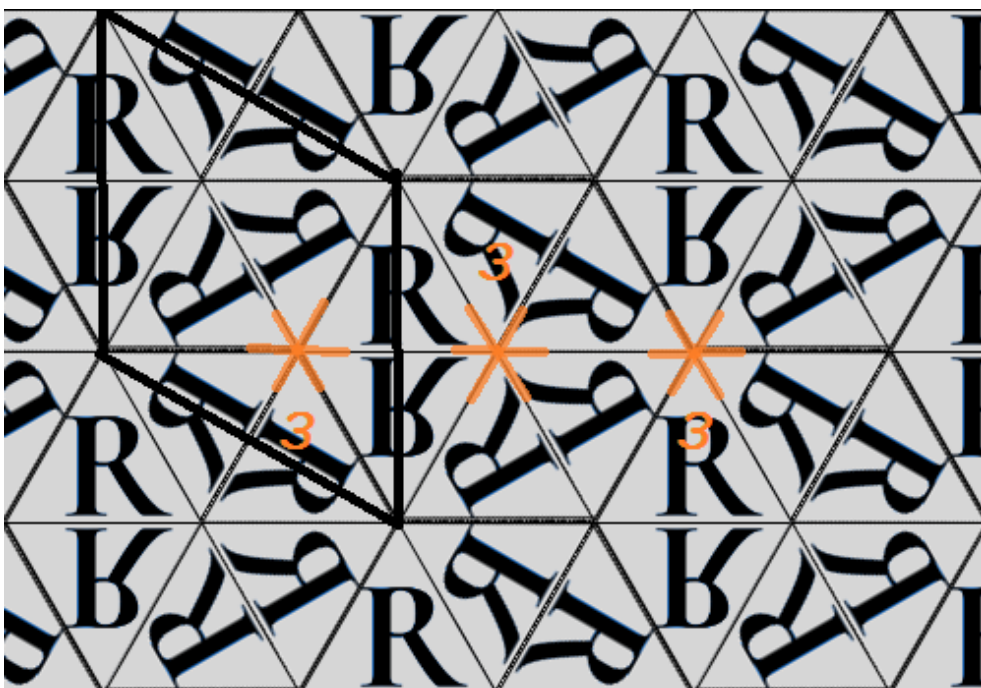


***442 (p4m)**

El grup p4m l'obtenim gràcies a tres centres de simetria dos d'ordre 4 i un de 2; similar al mosaic p4 que efectua amb els mateixos centres, però de girs. La cel·la és un triangle rectangle, vuit d'aquestes conformen la regió quadrada.

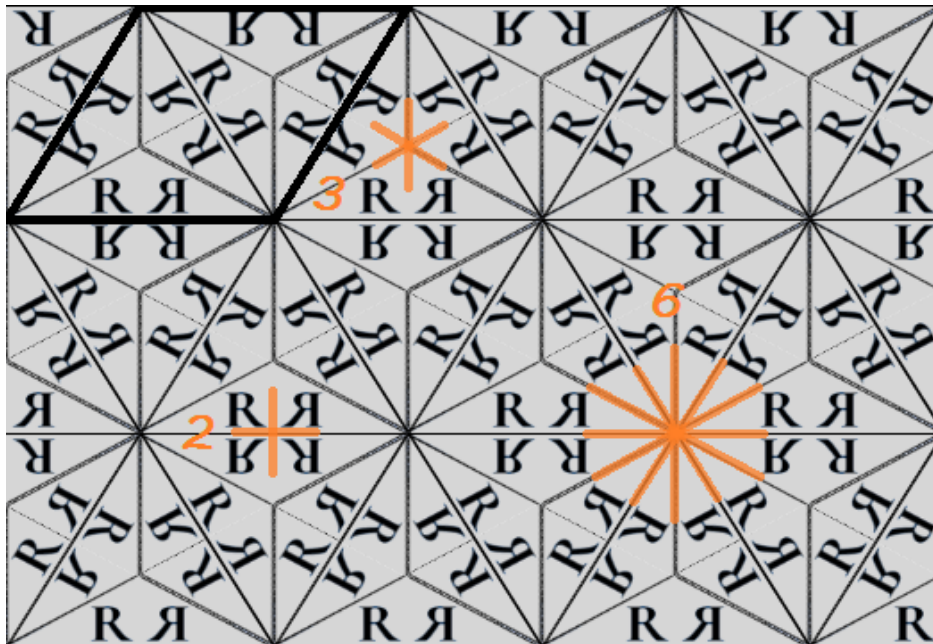
***333 (p3m1)**

Els tres centres de girs del p3 en aquest grup s'han convertit en tres centres de simetria, són d'ordre 3 amb eixos axials cada 60°. La rajola són dotze cel·les, triangle equilàter, amb forma de paral·lelogram hexagonal.



***632 (p6m)**

Té tres centres de simetries, d'ordre 6,3 i 2; el primer cada 30°, el segon cada 60° i l'últim cada 90°. La regió, un paral·lelogram, té dotze cel·les de triangle rectangle.

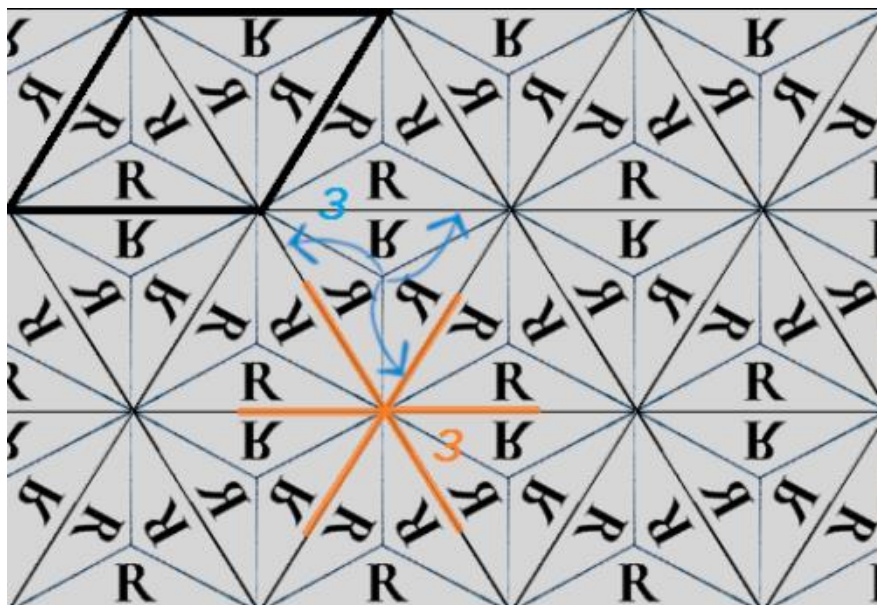


c. Els set verds (híbrids)

Els tipus de mosaics romanents, els que pertanyent a aquest grup, són mescles híbrides de les categories anteriors i també acullen les simetries de lliscament.

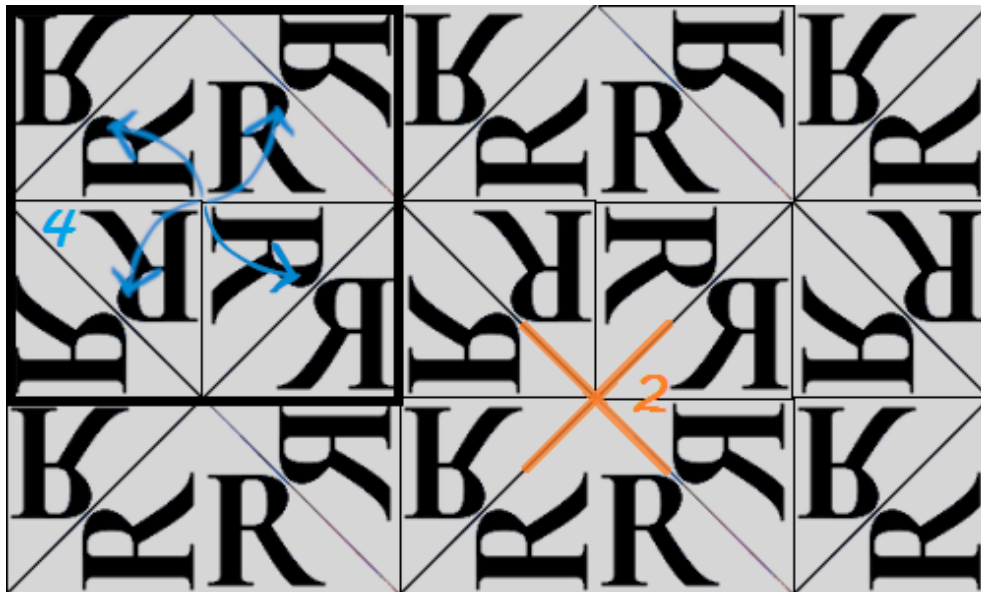
3*3 (p31m)

Troblem un centre de gir, amb rotacions cada 120°, i un de simetria d'ordre 3, amb miralls cada 60°. Sis cel·les, triangle isòsceles, formen la regió, un paral·lelogram.



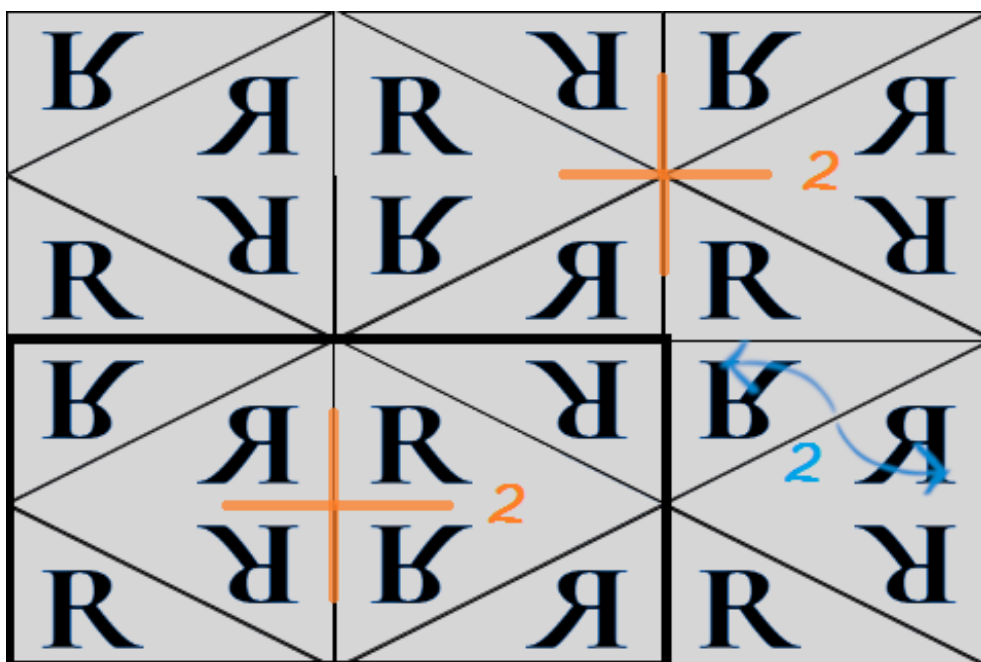
4*2 (p4g)

Aquest mosaic, de regió quadrada, té un centre de gir amb 4 rotacions cada 90° i té un centre de simetria d'ordre 2. Les cel·les que conformen la regió són vuit triangles, meitats d'un quadrat.



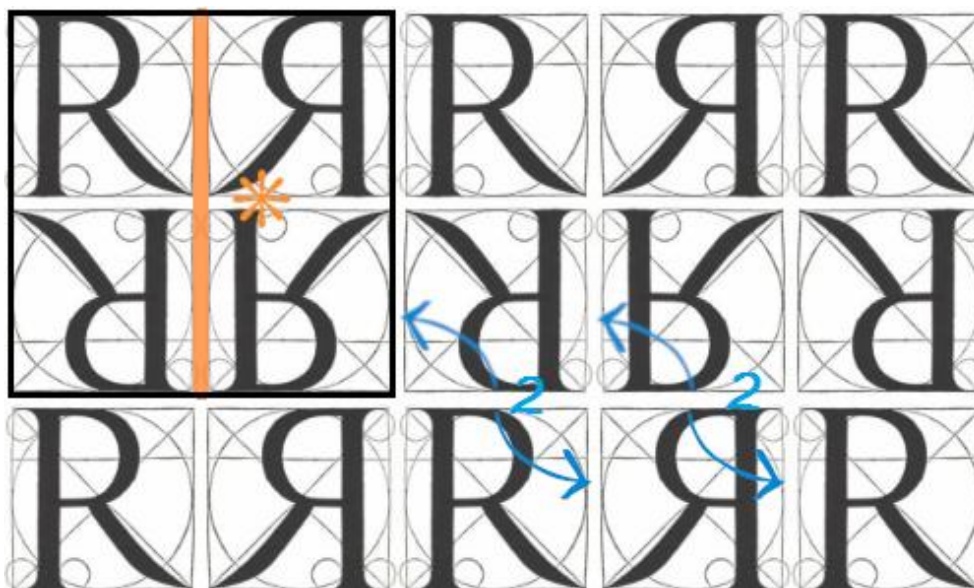
2*22 (cmm)

Utilitza una rajola triangular que descriu 2 rotacions en un centre de gir i 2 reflexions axials en dos centres de simetria. Per translació podem crear el mosaic periòdic a partir de la regió rectangular, constituïda per vuit cel·les.



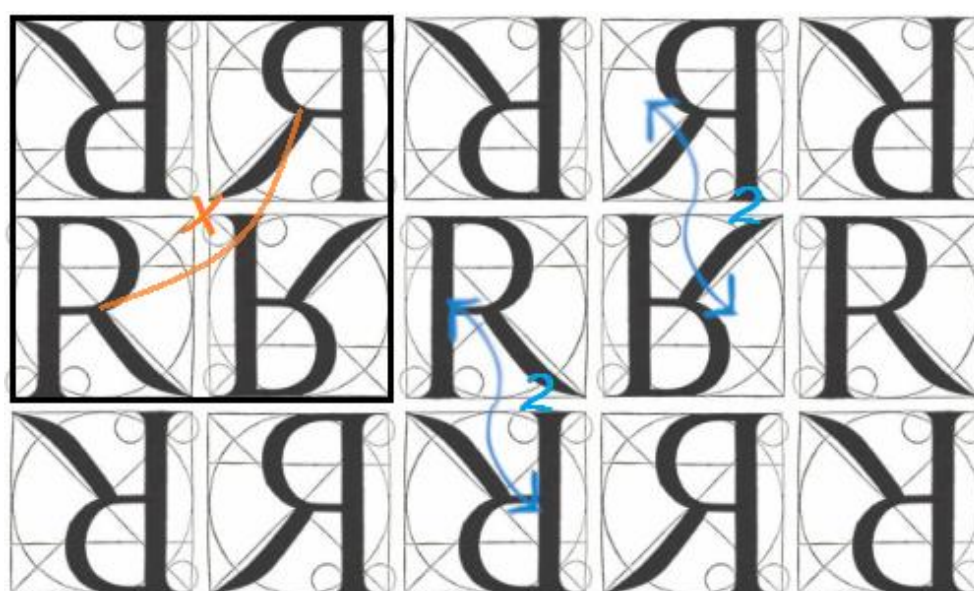
22* (pmg)

Aquest grup té dos centres de gir d'ordre 2, inclou una simetria axial. Tant el motiu mínim com les cel·les poden ser quadrades o rectangulars i està format per quatre rajoles, la original i la seva simètrica i la rotació i la seva simètrica.



22x (pgg)

Per elaborar aquest mosaic, la cel·la inicial passa per 2 rotacions en dos centres de gir i per una simetria de lliscament. La regió que utilitzem per estendre el patró, composta per quatre rajoles, pot ser rectangular o quadrada, igual que la cel·la.



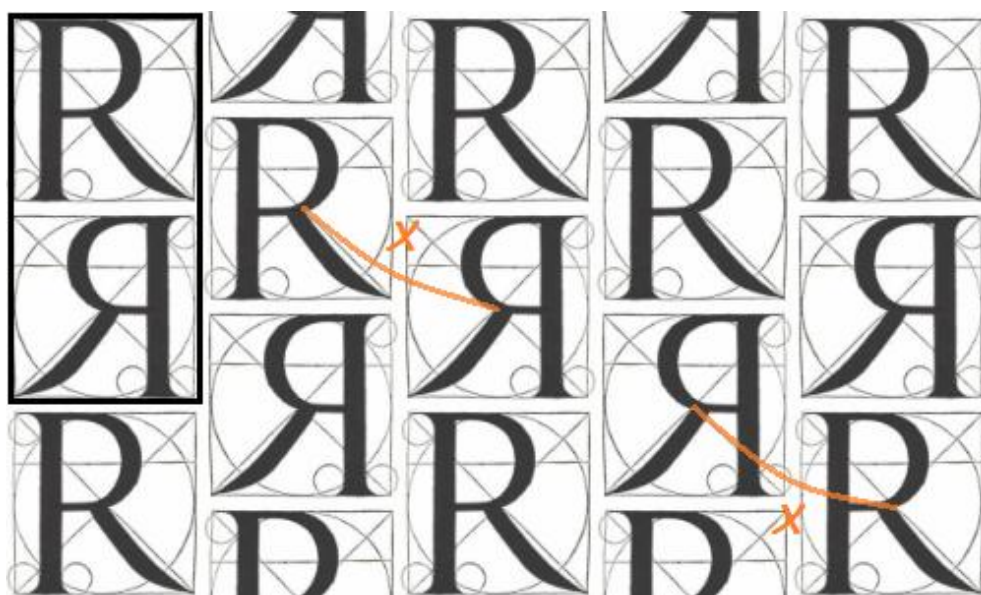
***x (cm)**

Identifiquem una simetria axial i una simetria de lliscament. El motiu està format per dues cel·les triangulars isòsceles simètriques.



xx (pg)

Aquest grup hi trobem dues simetries de lliscament, la cel·la original passa per una simetria axial i llisca avançant mitja cel·la. Com succeeix al grup pm, quan una cel·la passa per dues simetries de lliscament tornem a obtenir la inicial. La regió és un rectangle que inclou dues cel·les: l'original i la simètrica, quadrades.



2.4. Frisos

Matemàticament, un fris és una altra classe de patró al pla que s'expandeix per una superfície en una sola direcció i es pot repetir infinitament en aquesta, a diferència dels mosaics periòdics, que ho fan mitjançant dos vectors de translació. Per això, la nomenclatura utilitza el signe infinit (∞), un nou símbol de la notació d'*orbifold*.

Però, igual que els mosaics, utilitzen els mateixos moviments al pla: la translació, les simetries axials i de lliscament i els girs. Són patrons subjectes a la línia de translació, el qual minimitza el desenvolupament de moviments simètrics, només podem utilitzar fins a dos miralls i tan sols rotacions de dos girs.

2.4.1. Classificació de frisos

Aquests dissenys que usualment són usats com a elements arquitectònics, són la conjunt de moviments al pla més limitats que els utilitzats pels mosaics, l'estudi matemàtic ens demostra que es poden classificar en 7 grups. Tots els grups tenen la regió amb forma quadrada que inclou, com als mosaics periòdic, el paral·lelogram i el rectangle.

Conway els exemplifica clarament, mostra els set tipus a partir de rastres que deixem saltant amb els peus. Depenent de la dificultat dels salts podem dividir els grups de frisos en dues categories: els exercicis simples i el complexos.

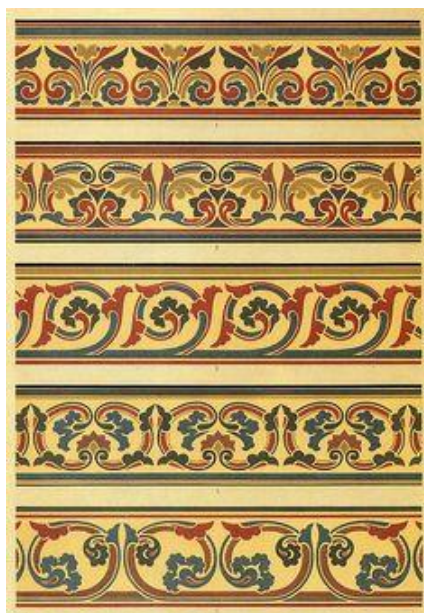


Fig. 14

a. Salts simples

 $\infty\infty$ (p1)

El moviment més simple el podem exemplificar-lo amb el salt repetitiu a peu coix (hop), generat per un sol moviment al pla: la translació.

 ∞x (p11g)

El segon tipus de fris representar el caminar amb dos peus (*step*). Combina dos generadors simètrics diferents: la simetria de lliscament, el peu dret, simètric a l'esquerre, avança mitja cel·la, i la translació de les dues petjades simètriques, és a dir, les que conformen la regió rectangular.

 ∞^* (p11m)

Aquest és el resultat de fer salts amb els dos peus (*jump*). Aquí, el nou generador és la simetria axial, que en aquest cas es tracta dels peus dret i esquerre, els quals són simètrics naturalment. I la translació de la regió rectangular.



***∞∞ (p1m1)**

Ens trobem amb dues simetries axials verticals, es tracta d'un salt lateral amb els dos peus (*sidle*). La primera la trobem al primer salt, entre el peu esquerre i dret, i la segona simetria està entre el peu dret del salt inicial i l'esquerre del segon salt.

*b. Salts complexos***22∞ (p2)**

El primer té dos centres de girs amb dues rotacions de 180°, seguint l'exemple, s'efectua saltant amb un peu fent mitja volta després de cada salt (*dizzyhop*).

***22∞ (p2mm)**

És una alteració del fris p11m. En una rajola quadrada o rectangular s'efectua un salt amb dos peus i un segon fent mitja volta (*dizzyjump*). Identifiquem dues simetries axials: un mirall infinit horitzontal creuat perpendicularment per miralls verticals.

**2*∞ (p2mg)**

El setè grup és derivat del p1m1. Amb l'exemple dels salts, es tracta d'un salt lateral i un salt lateral invertit, amb els dos peus (*dizzysidle*). És generat per simetria axial i un gir de dues rotacions de peus.



2.5. Mosaics hidràulics

Entrant en definició, és un tipus de rajola artesanal amb una cara llisa decorada amb dibuixos varis, monocolors o no, de mides usuals 20x20x0'25cm, que en col·locar-les correctament formen un mosaic, similar a la il·lusió òptica d'una catifa.

El mosaic constitueix un art industrial que era la matèria primera de la pavimentació, el revestiment de rajoles per cobrir el sòl d'una habitació per embellir-lo i donar-li fermesa. Els seus dissenys complexos creats meticulosament desafiaven elements decoratius precedents com els metalls forjats o els sostres enguixats, des del terra. Però, ha sigut enderrocat per l'estètica moderna, la qual suggereix motius menys agosarats.



Fig. 15

Culturalment, tot i existir per ser trepitjat, el mosaic hidràulic ha arribat a ser un dels elements claus per identificar edificis dels segles XIX i XX a Catalunya. Però, la categoria d'objecte artístic li ha estat atorgada poques vegades; el seu valor, que rau en la complexitat de la seva fabricació i el seu disseny, es consolida ara i es mereix exposicions amb lloc als museus catalans.

És un producte de gran vàlua que va commocionar per la seva qualitat material, la qual es deu a l'ús de morter de ciment pòrtland, un material que s'endureix quan entra en contacte amb l'aigua. També en destaquen els dibuixos innovadors que creen efectes òptics atractius.

2.5.1. Paviments anteriors al mosaic hidràulic

El camí fins a aquests mosaics espectaculars ha sigut una evolució gradual. Com que ja es van crear amb l'objectiu de decoració, les rajoles s'anaven desenvolupant i la complexitat de les figures inscrites augmentava al mateix pas. Els paviments primitius els situem a Sicília, al segle VII aC, fets de pedres tallades (Fig.17). Paviments similars van sorgir a Roma, conformats per tesselles, cubs de vidre o ceràmica que els artistes aglomeraven amb ciment formant l'*opus tessellatum* (Fig.16), un trencaclosques.



Fig. 16 *opus tessellatum*, amb centre de simetria d'ordre 4 i fris $p2$, de dues rotacions

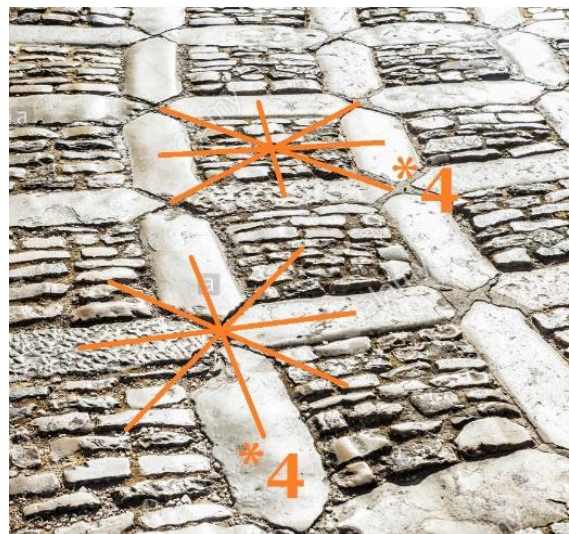


Fig. 17 Carrer de Sicília (Itàlia), amb centres de simetria d'ordre 4

A l'edat mitjana, la pavimentació a la península s'enriquí de mosaics amb la incorporació de motius ornamentals fets d'argila cuita, gràcies a la fundació del Al-Àndalus (Fig. 19 i 22). A França i Anglaterra (Fig. 21) durant el segle XIX les famílies benestants feien pavimentar els seus salons amb mosaics ceràmics policromats. Durant el mateix període, a Catalunya es va popularitzar el gres ceràmic, producte d'una pòcima ideada per *Mosaics Nolla*, amb la diversitat de formes i tonalitats per un moment el terra estava al punt de mira (Fig. 20).

Però aviat el mosaic hidràulic, establert a La Bisbal d'Empordà, va acaparar la venda de mosaics de gres ceràmic. Es va potenciar amb el modernisme i el noucentisme. L'empresa *Pujol i Bausis* (Fig. 18) permetia als arquitectes més notables dissenyar les rajoles per als seus propis projectes. Així completaven la construcció dels edificis amb mosaics.



Fig. 22 mosaic de l'Alhambra, Granada.
Del grup $p3$, amb centres de gir d'ordre 3



Fig. 19 mosaic de l'Alhambra, Granada. Del grup cm amb simetria axial i de lliscament

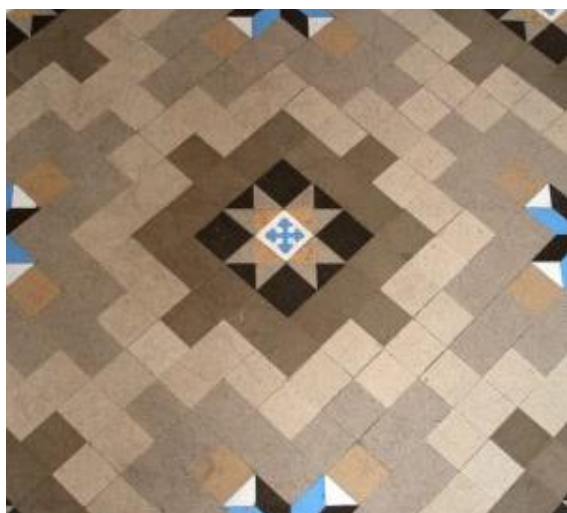


Fig. 20 mosaic de Nolla, amb centre de simetria d'ordre 4



Fig. 18 mosaic de Pujol i Bausis, del grup $p4m$, amb centres de simetria d'ordre 4 i 2

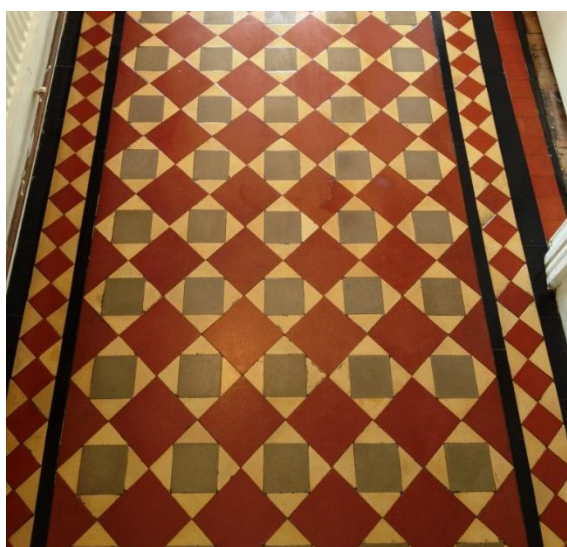


Fig. 21 mosaic victorià, Anglaterra. Del grup $p4m$.
El fris del grup $p11m$ tenen una simetria axial.

2.5.2. Implementació del mosaic hidràulic

Una peça irregular i fràgil sembla ser la llavor de l'art del mosaic hidràulic, una nova rajola de Viviers (França), el 1851, mostra les aptituds del ciment de pòrtland per crear una rajola vistosa amb una producció senzilla que la fa barata. Auguste Lachave en confeccionà el motlle: una trepa per repartir els colors i decorar la cara vista. Al 1860, la fabricació dels mosaics hidràulics esclata arreu de França.

Mentrestant, a Espanya el ciment va reemplaçar el fang, per conseqüència, la rajola hidràulica i el marbre artificial van substituir la terra cuita i les pedres naturals, resultant més econòmics, elegants, durables, impermeables i higiènics. Segons els primers catàlegs, al principi s'imitaven paviments anteriors: la fusta o el marbre però, aviat es consolidà al mercat gràcies a les seves decoracions que en fan unes catifes inimitables.



Fig. 24

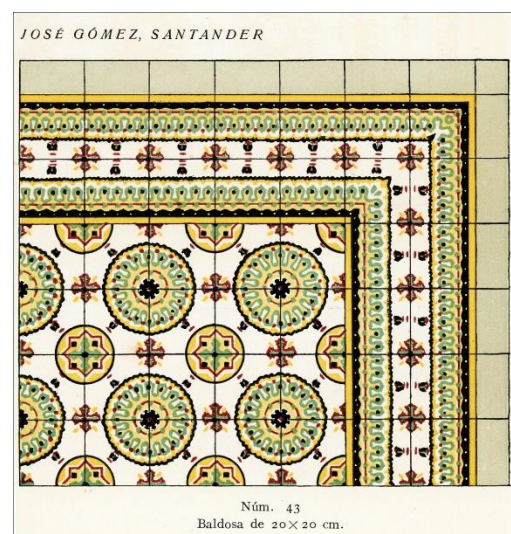


Fig. 23

Al principi, incorporaven motius geomètrics centrats o disposats diagonalment. Posteriorment, s'estableix el model catifa, compost per tres elements: el fons amb un dibuix central, la sanefa, corresponent als frisos, que emmarca el dibuix i la faixa que omple el sòl fins la paret amb rajoles llises. A vegades el mosaic està format per rajoles amb el dibuix ja complet, però també pot ser que amb altres rajoles formin el motiu.

2.5.2.1. Cases de Barcelona

A la capital de Catalunya, on es va desenvolupar més el mosaic hidràulic a Espanya, van destacar 7 fàbriques en competència, que es venien assegurant tant la qualitat de producció com la singularitat dels seus dissenys fets per artistes reconeguts.

La primera en confeccionar rajoles hidràuliques a partir del ciment va ser *Garreta, Rivet i Cia*. La van seguir *Serrat i Cia*. i *M.C. Butsems* que van explorar nous estils i productes de decoració especialitzant-se en faixes, sanefes i panots.

La fàbrica que li concedí el títol d'art industrial al mosaic hidràulic va ser *Orsola i Solà i Cia*. Aquesta oferia rajoles fetes de la mà d'artistes que les signaven com una obra d'art. Amb això es va marcar un espai al mercat d'arreu d'Espanya.

Escofet, la cinquena fàbrica, segueix la mateixa línia col·laborant amb artistes i arquitectes, sent mereixedora d'un alt reconeixement que perdura fins el segle XX. *Teòtim Fortuny*, desvinculada d'*Escofet*, destaca per millorar amb enginyers els materials de producció.

Les fàbriques esmentades fins ara van ser tancades abans del nou mil·lenni, la que va ser represa després és *Mosaics Martí*, avui dia, els néts del fundador reviu l'art del mosaic hidràulic modernista combinant-lo amb elements contemporanis. Juntament amb *Mosaics Girona* són les dues romanents a Catalunya.



Fig. 26: làmina del catàleg de la casa Butsems

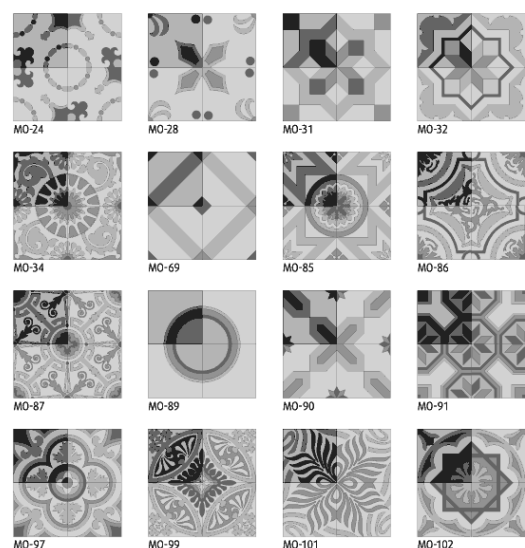


Fig. 25: rajoles del catàleg de Mosaics Martí

2.5.3. Evolució del Disseny

El mosaic hidràulic pateix un canvi en aquesta època quan arquitectes i artistes col·laboren amb les companyies més importants enterbolint els dissenys. El porten a la seva esplendor el 1900, però aviat se saturen. Per exemple, *Escofet* fabrica el 1907 panots hexagonals per a la casa Batlló, dissenyats per Antoni Gaudí.

El catàleg n.6 de la casa *Escofet*, aconsegueix innovar les rajoles hidràuliques; involucrant nous artistes que incorporen corrents artístics vigents. De la seva mà se simplifiquen els dissenys hidràulics i obren les portes de la casa a noves generacions. La majoria dels mosaics del catàleg són firmats per Antoni Rigalt, Puig i Cadafalch, Domènech i Muntaner.



Fig. 27 Mosaic del catàleg núm. 6
firmat per *Enric Moya*



Fig. 28 Panots hexagonals dissenyats
per *Antoni Gaudí*

2.6. Programació

Programar és l'ús d'un llenguatge diferent de l'usual per escriure una sèrie d'instruccions, un algorisme, que l'ordinador seguirà, és a dir, executarà els passos descrits amb l'objectiu de resoldre un problema. De vegades, els passos els executa segons una condició que també la indiquem nosaltres.

El llenguatge de programació difereix del llenguatge i comunicació humanes perquè és més denotatiu i la seva estructura és inflexible. L'ordinador, a diferència dels humans, es comunica amb informació detallada, precisa i específica, el que en anglès és *syntax*, la manera d'escriure que l'ordinador pot llegir i entendre. Però ambdós llenguatges estan relacionats, un ens facilita l'aprenentatge de l'altre.

Hi ha diferents llenguatges de programació, de diferents graus de dificultat, cada un defineix el *syntax* amb què escriure el codi del programa. Els d'alt nivell, com el Java o el C, utilitzen construccions en anglès que l'ordinador interpreta i, posteriorment, executa. En canvi, amb l'Assembly Language, de baix nivell, accedim directament a la memòria de l'ordinador, a mesura que s'escriu el programa aquest s'executa, això ho permet el *syntax* binari que alterna dígit de 0 i 1.



2.6.1. Processing 3

Per començar a aprendre a programar utilitzarem l'aplicació Processing 3, un programa gratuït creat el 2001 per Casey Reas amb l'objectiu de realitzar projectes creatius, és a dir, que està destinat a fer un ús de la programació artística, amb ús d'imatges i sons. El llenguatge d'alt nivell que utilitza és el Java, ideal per començar a programar perquè ens permet fer el codi de manera senzilla i executar-lo fàcilment. L'aplicació inclou una referència que és de molta utilitat a l'hora de buscar i entendre els conceptes.

L'aplicació consta d'una finestra, on escrivim el nostre codi o programa i on ens informen d'errors de *syntax*, una altra finestra ens mostra la interpretació que ha fet l'ordinador del codi a la pantalla quan executem el programa.

Per a la programació dels mosaics i frisos, hem preparat prèviament certes instruccions per comprovar que els passos que executem són correctes i en cas de detectar errors, poder-los corregir a temps. Després, els resultats d'aquestes seccions dels programes interaccionen seguint altres instruccions i donen el resultat final, el patró en pantalla.

Per exemple, al programa que trobem més endavant el codi es troba repartit en dos blocs, aquests contenen altres funcions entre {}, que n'indiquen l'inici i el final. Es tracta de dues funcions acompanyades amb `void`, aquesta paraula ens indica que un cop executades les línies de codi declarades a continuació, no ens retornen cap resultat o dada. Les funcions dels blocs són `setup()` i `draw()`, aquestes contenen més instruccions a les línies de codi, les més recurrents en aquest programa són les següents:

- **PImage nomfoto;** Ens serveix per guardar la imatge de la rajola inicial, i les que crearem a partir d'aquesta, sota uns noms i les fem servir nomenant-les als `void`. Acompanya a la funció `loadImage()` del `void setup()`. Aquesta funció la fem servir al principi del programa fora dels `void`.
- **Int nom = valor;** Ens permet declarar una variable de valor natural, un nombre sense decimals, amb un nom. Així, enlloc d'utilitzar el valor, farem servir el seu nom. D'aquesta manera si necessitem canviar de valor només l'haurem de

canviar aquí. Els nombres que fixarem abans de les funcions `setup()` i `draw()`, seran les mides de les imatges.

- **Float nom = valor;** De la mateixa manera que a `Int` podem nomenar una variable amb un nom, però en aquest cas el valor té decimals.
- **setup()** És una funció que constitueix el primer bloc de codi, només n'hi ha una per programa. S'hi defineix el que s'executa una vegada, les condicions inicials, o la càrrega de fitxers multimèdia.
 - **size();** Defineix les dimensions de la finestra que mostra el codi interpretat en píxels, és la primera línia de codi del `setup()`. El nombre el limita la mida de la pantalla de l'ordinador. Amb això decidirem la mida dels patrons.
 - **loadImage();** amb aquesta funció carreguem una imatge, de la carpeta del mateix programa, a la variable que hem creat inicialment. Farem servir aquesta funció per carregar les rajoles dels patrons. Entre `()` indiquem el nom corresponent a l'arxiu, el declarem prèviament amb un `String`, per facilitar el canvi d'imatge.
- **draw()** És la funció que correspon al segon bloc del programa, el codi que hi escrivim pot crear moviments si hi fem servir la funció `loop()`. Per a crear una imatge fixa utilitzem la funció de `noLoop()`.

Primera part: la dedicarem a preparar les rajoles necessàries per elaborar el patró, implica la manipulació i transformació de la primera imatge.

- **Image(nomfoto, x, y);** Aquesta funció exposa una imatge, a les coordenades que li assignem.
- **nomfoto.resize(a, b);** Amb això modifiquem les mides de la imatge per ajustar-la a les mides a x b que volem.
- **pushMatrix();** i **popMatrix();** les línies de codi entre aquestes dues funcions transformen imatges: primer, es canvia l'origen de coordenades

adequadament fent servir `translate(x, y)`, realitzem les transformacions i mostrem la imatge alterada `image()`.

- **scale(x, y)**; Utilitzem aquesta funció dintre del conjunt `pushMatrix()` i `popMatrix()` quan volem sotmetre la rajola a un moviment de simetria axial, horitzontal $(-1, 1)$ o vertical $(1, -1)$; també per modificar-ne les mides.
- **rotate(angle)**; Dins del mateix conjunt, aquesta funció ens permet girar la rajola un angle amb valors que van de 0 a $2 \cdot \text{PI}$ (radians). La utilitzarem per fer moviments de rotació.
- **PGraphics** Ens serveix per aplicar una capa a una imatge, comencem construint el gràfic amb `createGraphics()` i entre `beginDraw()` i `endDraw()` dibuixem la capa. Al final l'apliquem a la imatge que ens interessa amb `nomfoto.mask(nomgràfic);`. Utilitzarem aquesta funció per aplicar transparències a les imatges, a l'hora de treballar amb rajoles triangulars.
- **nomfoto = get()**; Amb això retallarem una secció del que mostra el programa i ho guardarem en una `PImage`. Ens servirà per guardar les rajoles simètriques o amb girs.
- **background()**; S'utilitza per netejar el contingut de la finestra i evitar que s'acumulin, així només apareix el que segueix aquesta funció.

Segona part: amb les rajoles obtingudes o la regió fonamental de cada patró.

- **for** aquesta funció ens permet distribuir les imatges i repetir-les per formar el patró, comencem dividint l'espai en columnes i files de la mida de les imatges i inserim la imatge amb `image()`.
- **keyPressed()**
 - **If** Establim una condició, aquesta és la de prémer una tecla. Als programes dels patrons si es compleix la condició es guarda la imatge en un arxiu, amb el `save()`, amb el que també designem el nom i l'extensió de l'arxiu.

El següent programa és un exemple dels 24 creats, conté les instruccions que hem comentat anteriorment. Aquest programa, partint de la rajola “p31m.png” crea un mosaic seguint les instruccions que li he escrit, el resultat és un mosaic del tipus p31m.

```
//SOUKAINA EL MESSAOUDI
//01-10-2018
//MOSAIC p31m

String nomrajola = "p31m.png";
PImage R1;      //Triangle inicial
PImage R11;     //1a rotació
PImage R12;     //2a rotació
PImage RG;      //Regió
PImage RGS;     //Regió simètrica
PGraphics mask; //Màscara-transp.

int a=200, b=58;
int ht = 115;
int h = 173 ;
int x= 150 ;    //reducció mida a
int y= 120 ;    //reducció mida h

void setup() {
  size(975, 600);

  //Carregar la rajola
  R1 = loadImage (nomrajola);
  R1.resize(a, b);

  background (0);
  noLoop();
}

void draw () {
  //Preparar les rajoles
  //R1
  image(R1, 0, ht);

  //R11
  pushMatrix();
  translate(a+150, 28);
  rotate(2*PI/3);
  image(R1, 0, 0);
  popMatrix();

  R11=get(a, 0, a/2, h);

  //R12
  pushMatrix();
  translate(a+50, 2*h+27);
```

```

rotate(4*PI/3);
image(R1, 0, 0);
popMatrix();

R12=get(a, h, a/2, h);

background(0);

//RG
image(R11, 0, 0);
image(R12, 98, 0);
image(R1, 0, ht+1);

RG =get (0, 0, a, h);
RG.resize(x, y);

mask = createGraphics(x, y);
mask.beginDraw();
mask.triangle(x/2, 0, 0, y, x, y);
mask.endDraw();

RG.mask(mask);

//RGS
pushMatrix();
translate(0, 2*y);
scale(1, -1);
image(RG, 0, 0);
popMatrix();
RGS = get (0, y, x, y);
RGS.resize(x, y);

mask = createGraphics(x, y);
mask.beginDraw();
mask.triangle(0, 0, x/2, y, x, 0);
mask.endDraw();

RGS.mask(mask);

background(0);

//Dibuixar el mosaic
//RG
for (int j=0; j*y<height; j=j+2) {
  for (int i=0; i*x<width; i=i+1) {
    image(RG, i*x, j*y);
  }
}

for (int j=1; j*y<height; j=j+2) {
  for (float i=-0.5; i*x<width; i=i+1) {
    image(RG, i*x, j*y);
  }
}

```



```
//RGS
for (int j=0; j*y<height; j=j+2) {
  for (float i=-0.5; i*x<width; i=i+1) {
    image(RGS, i*x, j*y);
  }
}

for (int j=1; j*y<height; j=j+2) {
  for (int i=0; i*x<width; i=i+1) {
    image(RGS, i*x, j*y);
  }
}
}

void keyPressed() {
  if (key == 'g' || key == 'G') {
    save("wp31mP"+"-"+minute()+second()+".png");
  }
}
```

3. CREACIÓ DE MOSAICS PERIÒDICS I FRISOS

Per a la creació dels mosaics i frisos he optat per no carregar els dissenys i intentar que siguin senzills i agradables de veure a distància. En alguns l'efecte minimalista està més aconseguit que en altres, però en algun cas el fet de deixar a part la senzillesa afavoreix el mosaic o fris.

Com a font d'inspiració es troba en primer lloc Maurits Escher, principalment, per la seva tècnica característica, el gravat. També, s'entreveu la influència de les rajoles portugueses, he imitat la predominança d'un color al mosaic com aquestes usen el color blau. A més, m'he inspirat en mosaics hidràulics, per tenir en compte com influeix al distància a l'hora d'observar-los.

En últim terme m'he inspirat en artistes que segueixo i he imitat l'aparença de tècniques per a dibuixos específics: Matisse, Kim Rose, Hokusai i la xil·lografia, John Waterhouse...

3.1. Mosaics periòdics

o - p1



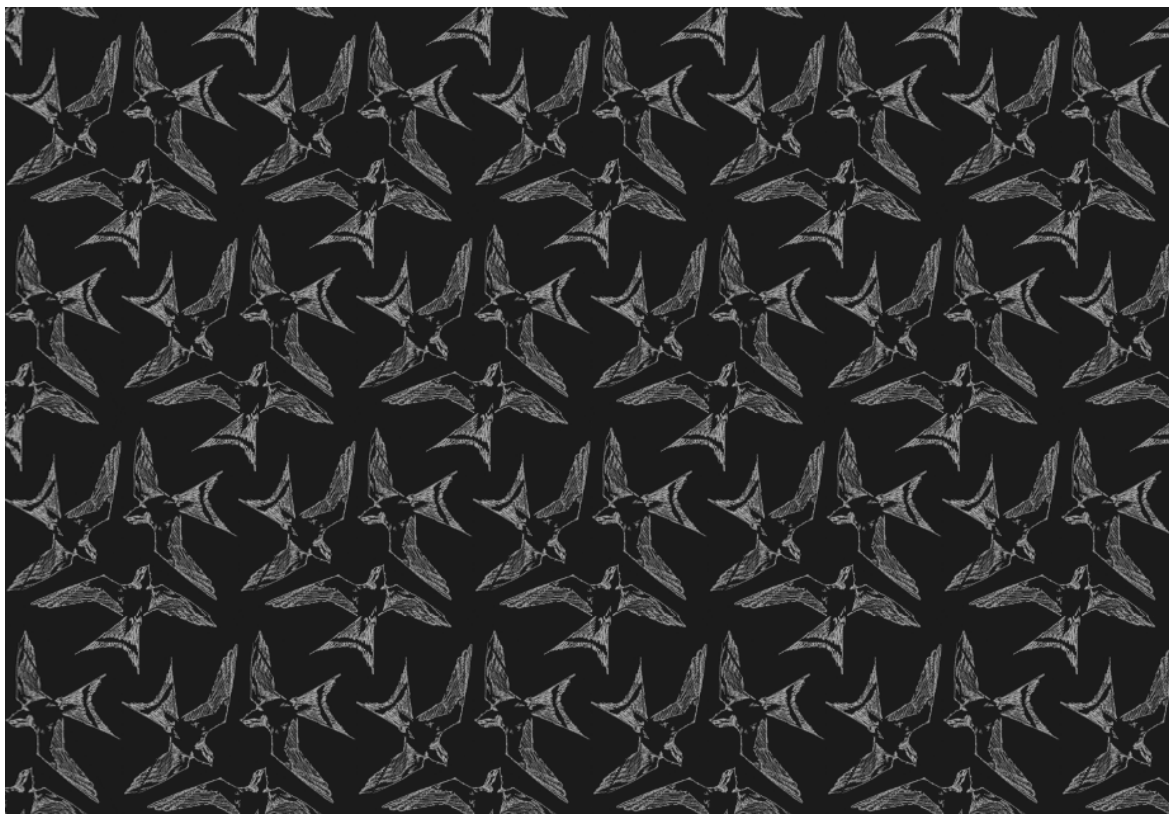
2222 - p2



442 - p4



333 - p3



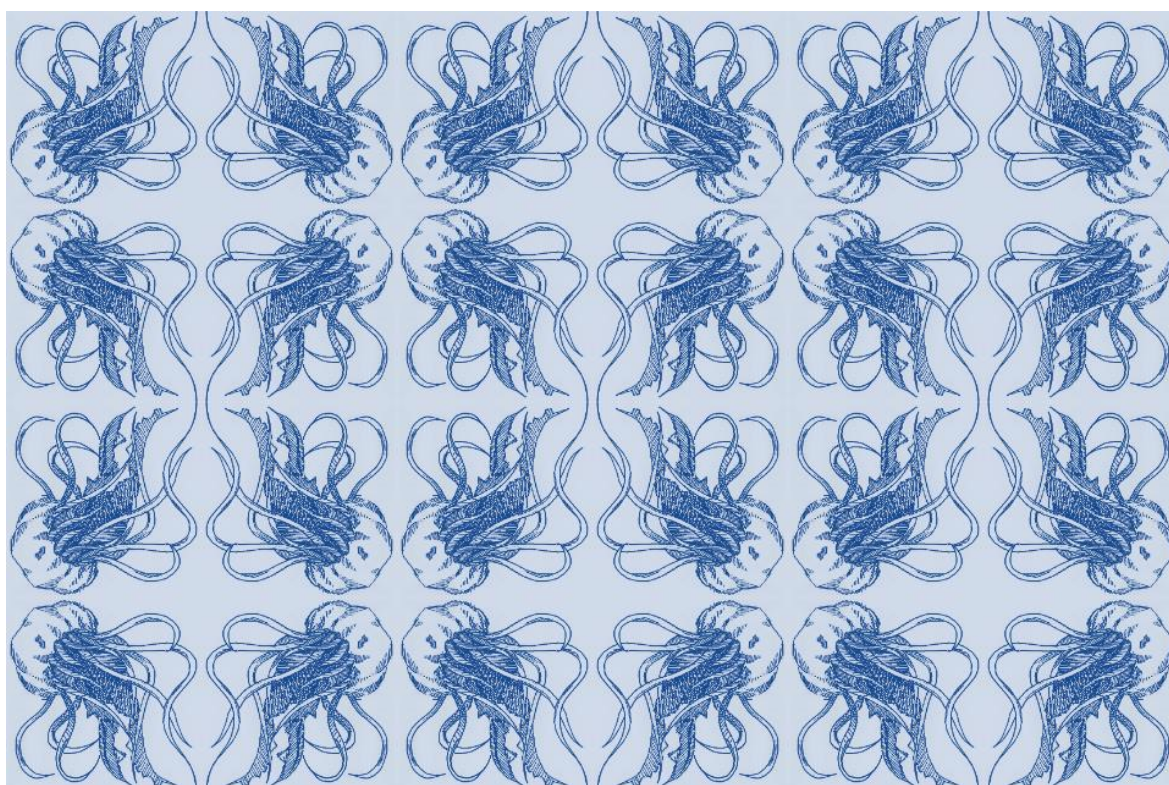
632 - p6



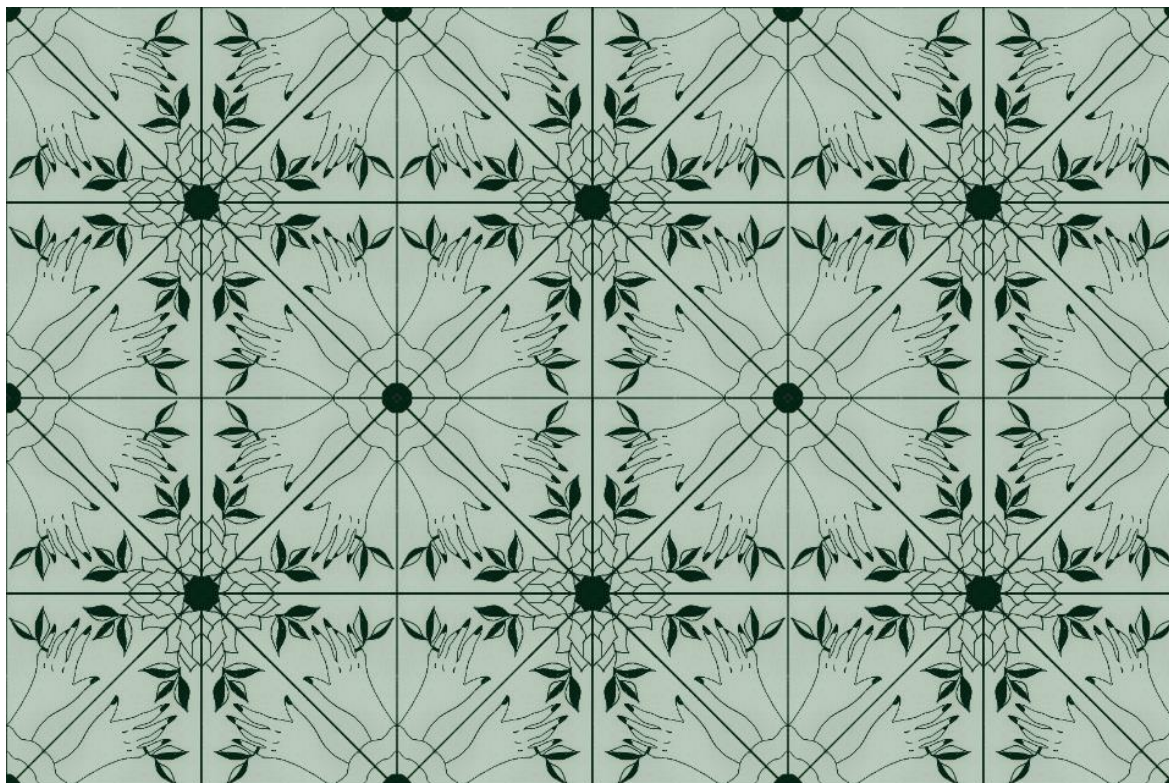
**** - pm**



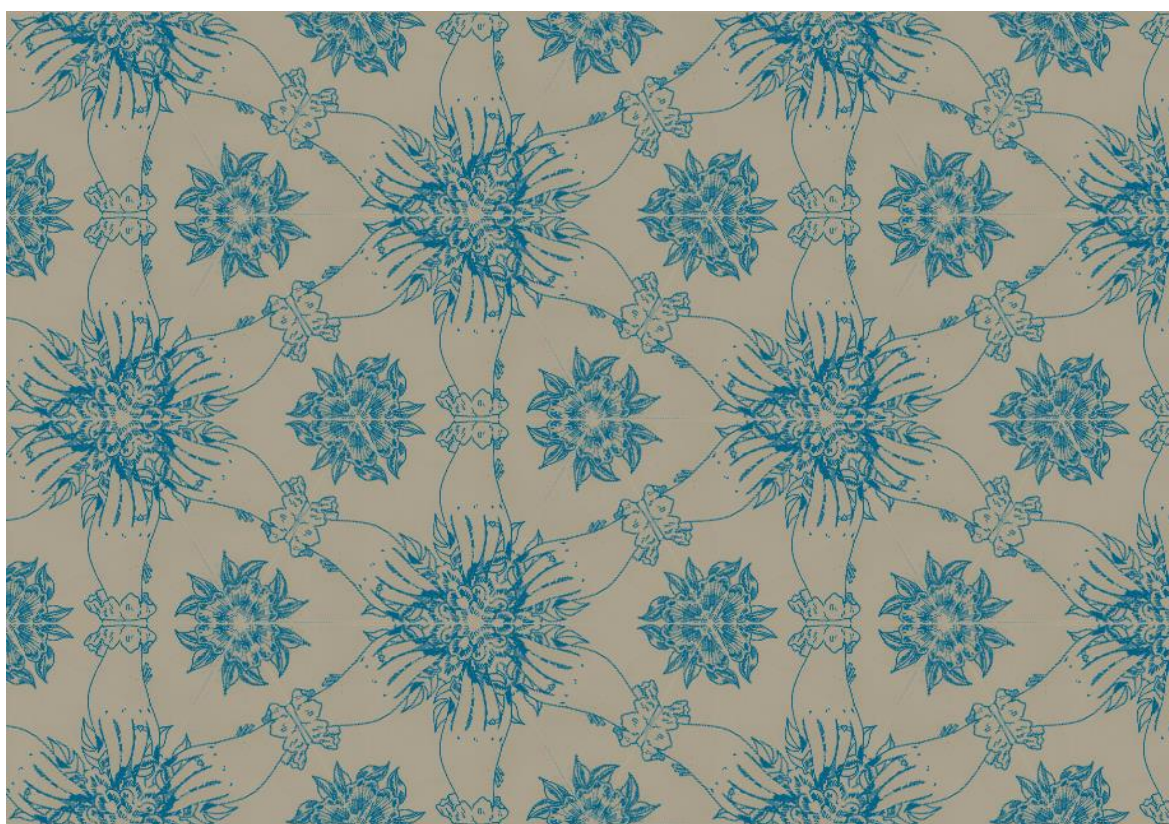
***2222 - pmm**



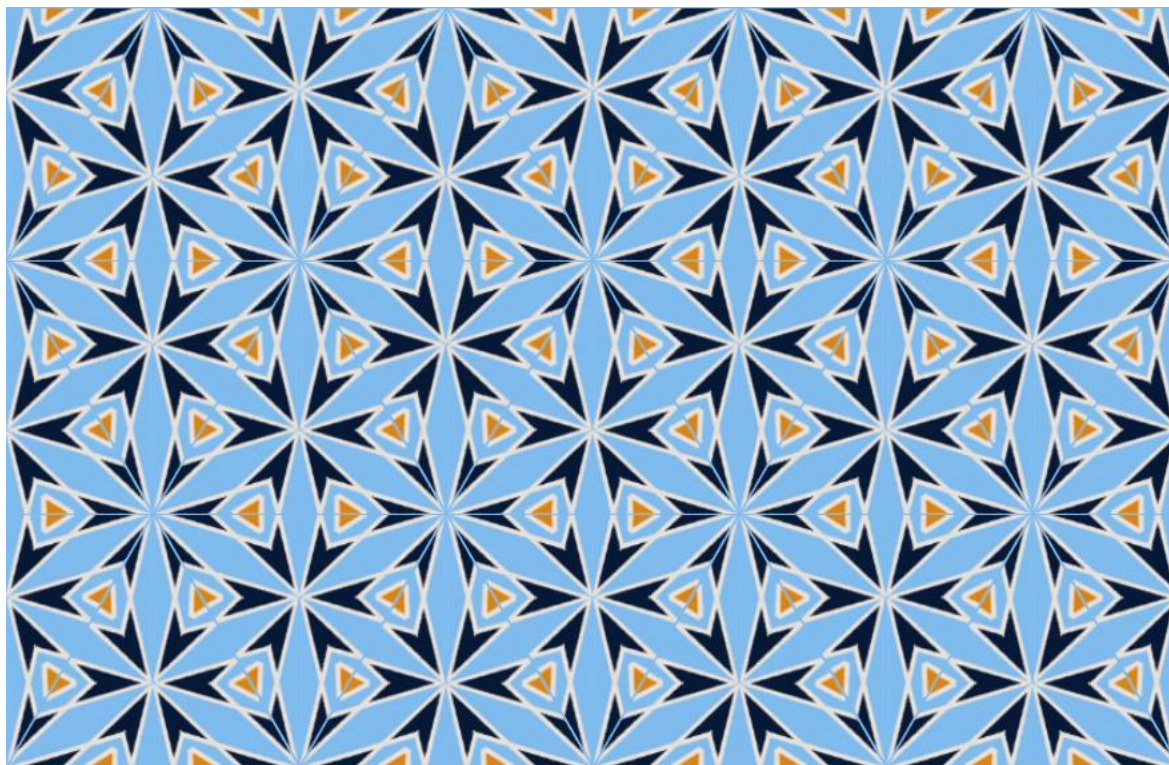
***442 - p4m**



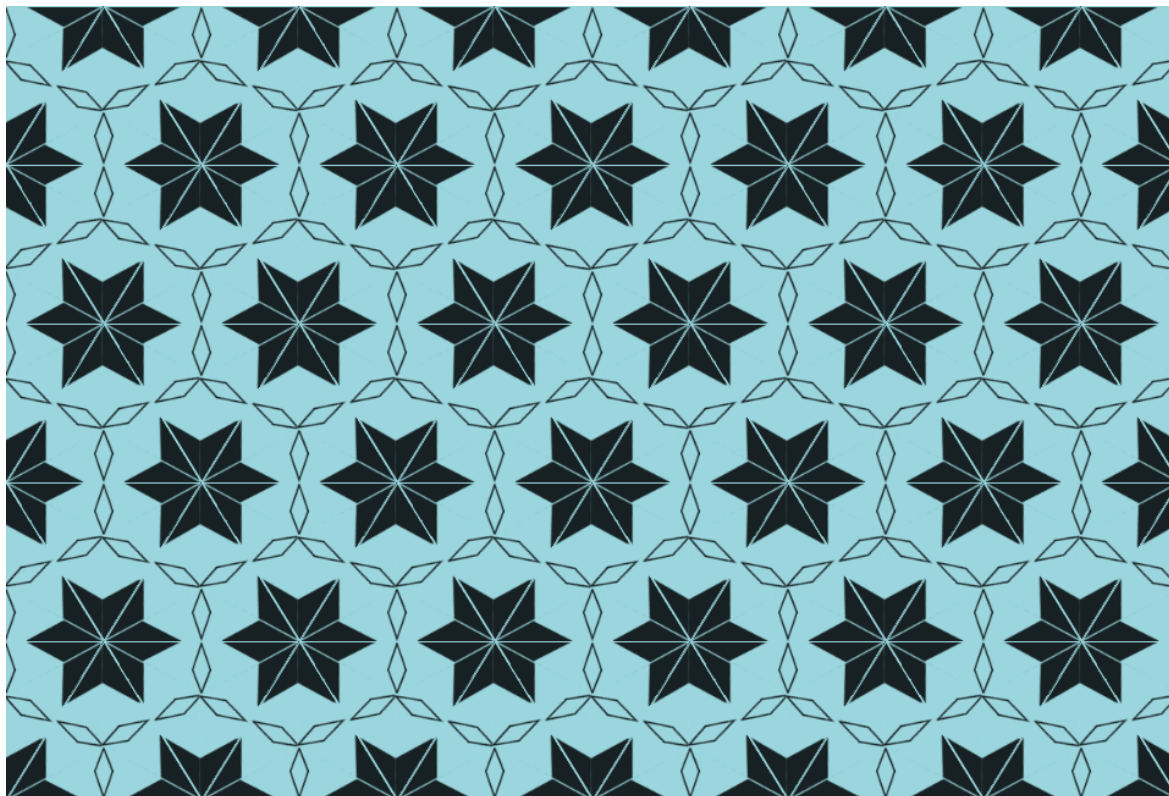
***333 p3m1**



***632 - p6m**



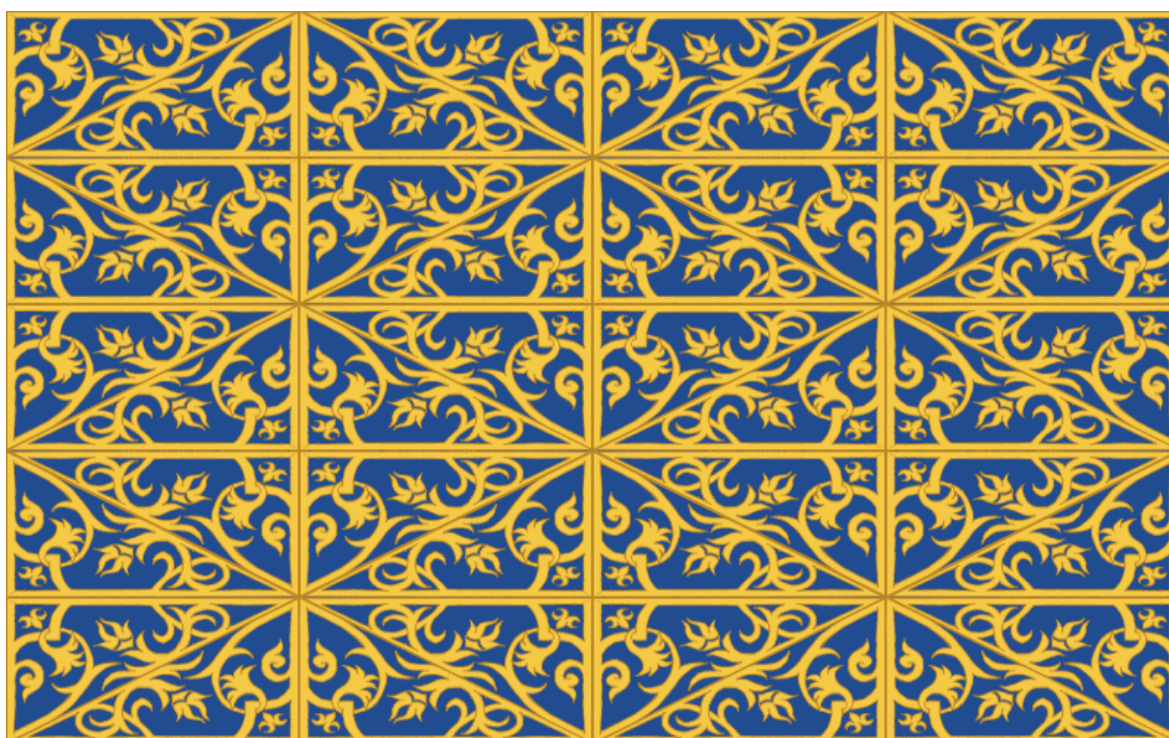
3*3 - p31m



4*2 - p4g



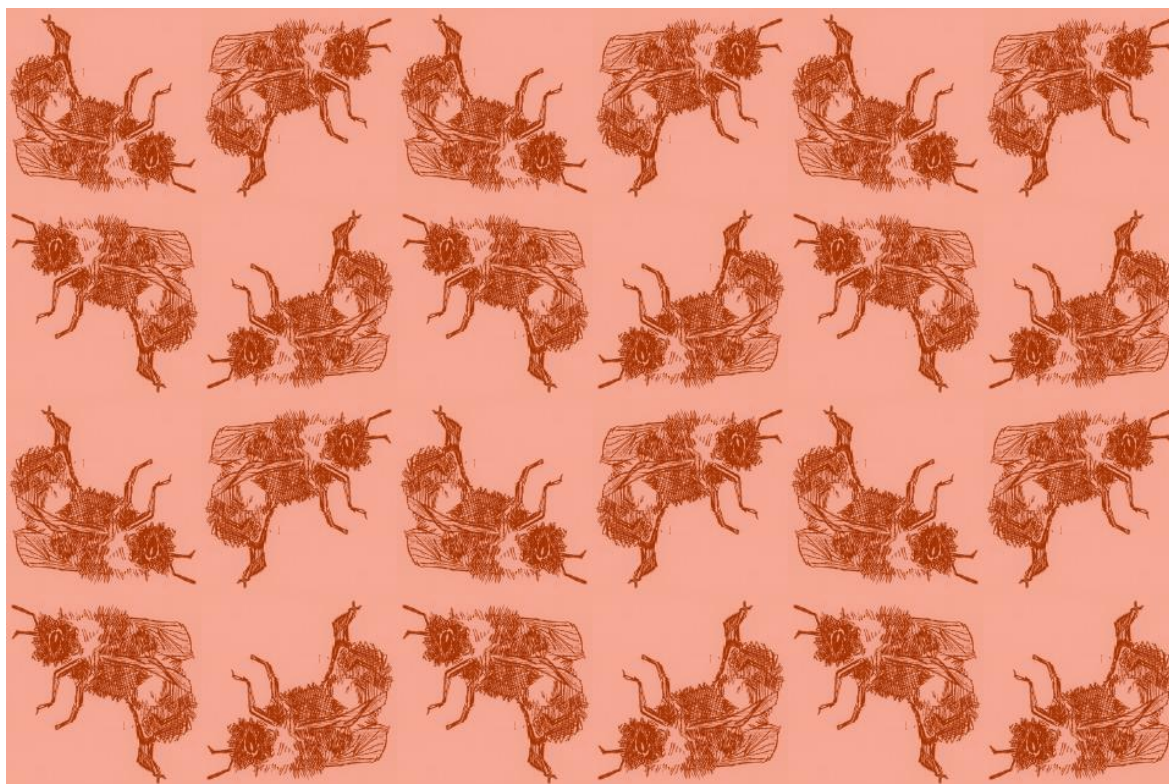
2*22 - cmm



22* - pmg



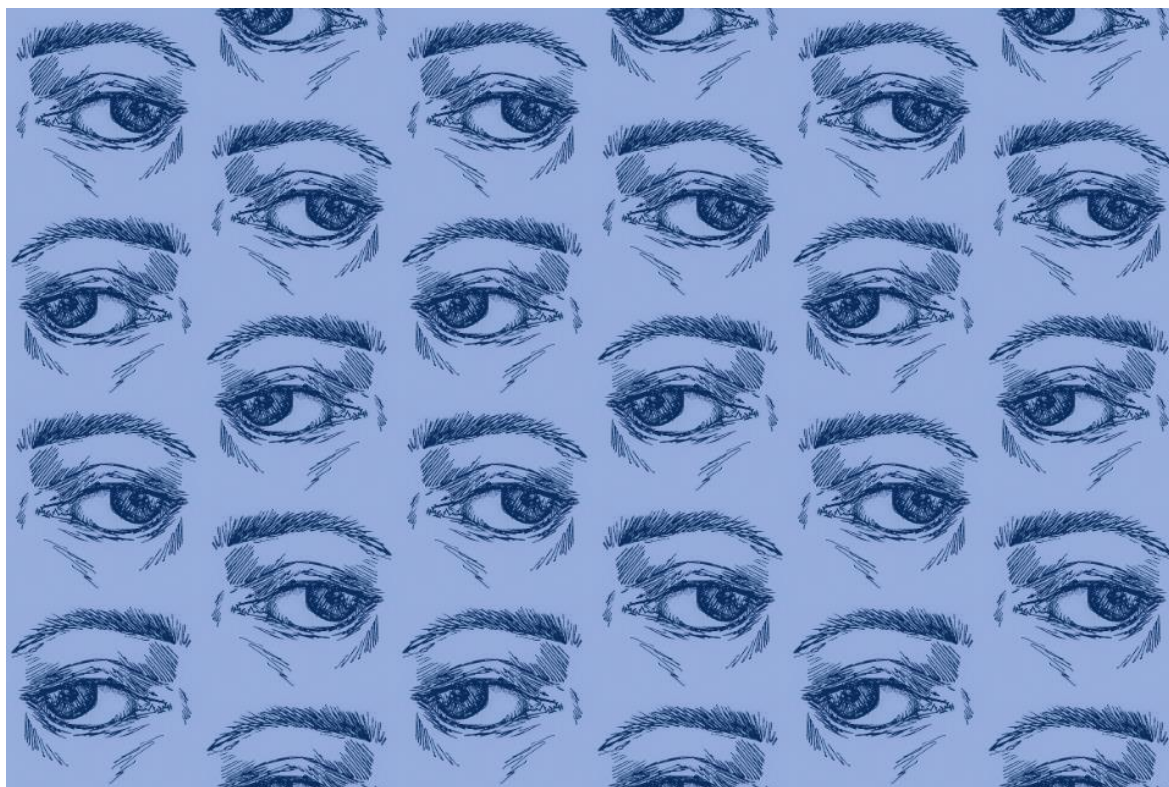
22x - pgg



***x - cm**



xx - pg



3.2. Frisos

$\infty\infty$ - p1



∞x - p11g



∞^* - p11m



$^*\infty\infty$ - p1m1



22∞ - p2



***22∞ - p2mm**



2*∞ - p2mg



4. CONCLUSIÓ

Un cop acabat aquest treball, toca fer una retrospectiva i valorar tot allò après i comprovar si tots aquells objectius fixats en un principi s'han complert. Durant el període de construcció d'aquest treball, cada vegada més s'han definit com a eix central els mosaics periòdics i els frisos, patrons periòdics. Ara finalitzat, a grans trets, el treball és un accés als patrons periòdics mitjançant la programació. La programació ha estat el lligam entre dos camps aparentment distants dels que gaudeixo, he pogut crear les meves pròpies obres partint de la base matemàtica dels mosaics periòdics.

Només endinsar-me en el treball ja he començat a identificar simetries al meu voltant. Entendre molt bé els components d'un mosaic, els moviments al pla: la simetria, el gir, la simetria de lliscament i la translació, ha sigut clau per poder portar a terme la tasca d'elaborar els programes. El llibre *The Symmetries of Things* m'ha ajudat a assolir l'objectiu d'aquest estudi, també el de conèixer la nomenclatura de Conway, autor del llibre, usada per a la classificació dels patrons. He après que es classifiquen en tres grans grups, el primer utilitza girs, el segon simetries i l'últim els combina.

També han format part de la recerca els mosaics hidràulics i, en general, la pavimentació. El llibre *L'art del mosaic hidràulic a Catalunya* m'ha ajudat a indagar sobre aquesta pavimentació que és la manifestació més quotidiana dels patrons periòdics. El seu paper al treball ha sigut facilitar la comprensió visual dels mosaics i frisos periòdics. A més, constitueixen una font d'inspiració en el dibuix i disseny de les rajoles, en la part pràctica.

El tercer objectiu fixat al principi, l'he aconseguit també, la primera part ha sigut escriure programes que partint d'una rajola construeixen un patró periòdic. Programar ha sigut un repte que ha consistit en moltes proves abans d'arribar als programes definitius. Cada un ha necessitat un procés diferent, alguns amb més edicions i treball que d'altres. Però tots els obstacles que m'he anat trobant, que obligaven a trobar-ne una solució, m'han ajudat a solidificar la base per programar amb *Processing 3*, que si no fos per aquest treball no l'hauria adquirida.

Les dificultats s'han presentat amb els grups de la última categoria, que combinen els girs i les simetries, demanaven una mica de pensament sobre paper abans

d'escriure'n els programes. És el cas dels grups $p6m$, $p3m1$ i $p31m$, són tots de cel·la triangular i no és cap coincidència, per a les regions triangulars he hagut de calcular més mides. Les anàlisis que he fet dels resultats dels programes han contribuït a corregir els programes i millorar-los.

La darrera part, ha consistit en el disseny de mosaics i frisos, aquest procés també ha sigut llarg. He intentat que no es limitessin a mostrar les característiques dels patrons sinó que es pogués apreciar el conjunt primer abans d'identificar-hi les simetries i girs corresponents a cada grup. Per a les rajoles, m'he inspirat en mosaics hidràulics, com he dit abans, rajoles portugueses i en els gravats de Maurits Escher, les obres del qual han engegat el motor d'aquest treball.

En general, ha sigut un repte pel qual he mantingut la perseverança per aconseguir els objectius de totes les seves fases. He après a identificar girs i simetries i grups de patrons, especialment al mosaic hidràulic de casa meva. A més de submergir-me al món de la programació. El treball es podria estendre agrupant a altres tipus de mosaics, els tridimensionals, les simetries de colors, els hiperbòlics...

5. ANNEXOS

5.1. John Conway



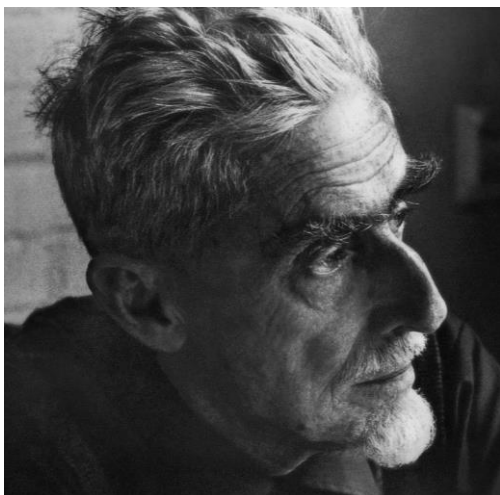
John Conway va néixer el 1937 a Liverpool, és un matemàtic que va investigar les teories de grups finits, nusos, nombres, jocs combinatoris, codificació. Va estudiar a la universitat de Cambridge i acualment és professor de matemàtiques a la Universitat de Princeton, ciutat on resideix. Ha estat premiat amb el premi Berwick, el 1971. El 1981, va ser elegit membre de la Royal Society de Londres. L'any 1987 va ser guanyar el premi Polva.

S'interessà pels jocs matemàtics des que estudiava a la universitat, fet que el va portar a contribuir a la teoria de jocs. Va coescriure el llibre *Winning Ways for your Mathematical Plays* sobre la teoria de jocs, més endavant va escriure'n les bases a *On Numbers and Games*. Arrel de ser especialista en aquest camp va analitzar molts jocs com el *Soma Cube*. És molt conegut per haver creat el joc *The Game of Life*.

Conway va descobrir una variant per calcular el polinomi d'Alexander, anomenada polinomi d'Alexander-Conway. Va treballar en la teoria de nusos per la qual va inventar la notació de Conway per tabular els nusos.

També, va investigar la classificació dels grups finits simples, amb un equip va fer les representacions corresponents als grups esporàdics. En van descobrir tres que van batejar amb el nom de grups de Conway. Amb Norton Simon van elaborar les conjetures sobre el grup monstre amb funcions modulars.

5.2. Maurits Escher



Maurits Escher (1898-1972) fou un artista neerlandès que va estudiar a l'Escola d'Arquitectura i Arts Decoratives de Haarlem. Es dedicà majoritàriament a la geometria, a més del realisme, també fou un matemàtic que va fer exhaustius estudis de patrons per a les seves obres. Estava estretament unit amb Itàlia, on es quedà a viure uns anys a Roma, després de casar-se amb Jetta Umiker.

L'any 1922 va realitzar un viatge a Espanya on els patrons de l'Alhambra el van sorprendre i es va interessar per la vessant matemàtica d'aquestes repeticions decoratives. A partir, d'aquí la tessellació va passar a formar part dels seus treballs.

Degut a la Segona Guerra Mundial es va haver de traslladar amb la seva dona a Itàlia i als Països Baixos, aquesta última localització va ajudar la creació de les seves obres. També, quan es traslladà a Laren a la casa Rosa Spier, una residència per a artistes, va disposar del seu propi estudi. Al cap de dos anys hi va morir.

Escher és conegut pels seus gravats i litografies on plasmava realitats imaginàries i impossibles, com és el cas de *Relativity*, on utilitza l'arquitectura per jugar amb les perspectives i els espais. Entre les seves obres també trobem peces realistes, de paisatges italians, a part de tesselles.





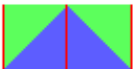

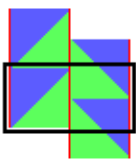



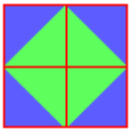







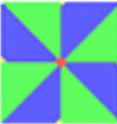



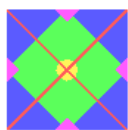

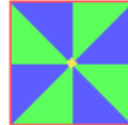







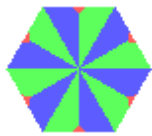



Fig. 30













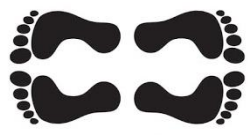



Fig. 29

5.3. Taula de mosaics

Cristal·logràfica		Conway		Regió	Cel·la	
1.	p1	o	B			Q
2.	p2	2222	B			Q
3.	pm	**	V			Q
4.	pg	xx	V			Q
5.	cm	*x	V			T
6.	pmm	*2222	V			Q
7.	pmg	22*	H			Q
8.	pgg	22x	H			Q
9.	cmm	2*22	H			T
10.	p4	442	B			Q

11.	p4m	*442	V			T
12.	p4g	4*2	H			Q
13.	p3	333	B			T
14.	p31m	3*3	H			T
15.	p3m1	*333	V			T
16.	p6	632	B			T
17.	p6m	*632	V			T

5.4. Taula de frisos

Cristal·logràfica	Conway	Regió	Rajola
p1	$\infty\infty$		
p11g	∞X		
p11m	∞^*		
p1m1	$^*\infty\infty$		
p2	22∞		
p2mm	$^*22\infty$		
p2mg	$2^*\infty$		

6. BIBLIOGRAFIA

Conway, J. H. (2008). *The Symmetries of Things*. A K Peters, Ltd.

Griset, J. (2015). *L'art del mosaic hidràulic a Catalunya*. Barcelona: Viena Edicions.

(2016). Moviments, simetria, mosaics i rosasses. Obtingut de

<https://www.geogebra.org/m/XNP5QfzH>

(s.d.). Obtingut de <http://jmora7.com/Mosaicos/4400kind3.htm>

El mosaic del meu barri. (s.d.). Obtingut de

<http://ajuntament.barcelona.cat/arqueologiabarcelona/mosaics/que-es-un-mosaic/el-mosaic-de-nolla/>

Foundation, P. (s.d.). Processing.org. Obtingut de <https://processing.org/>

Foundation, P. (s.d.). Reference. Obtingut de <https://processing.org/reference/>

Frieze group. (2018). Obtingut de https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

John Horton Conway. (s.d.). Obtingut de <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Conway.html>

Mathematics in Education and Industry. (s.d.). Obtingut de

<http://mei.org.uk/files/conference16/PHILC-K8-PDF.pdf>

Maurits Cornelius Escher. (s.d.). Obtingut de <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Escher.html>

Pixelday. (s.d.). M.C. Escher. Obtingut de <https://www.mcescher.com/gallery/>

Schattschneider, D. (s.d.). The Mathematical Side of M. C. Escher. Obtingut de

<https://www.ams.org/notices/201006/rtx100600706p.pdf>

Shiffman. (s.d.). The Coding Train. Obtingut de <https://www.youtube.com/user/shiffman>

The Alhambra and The Alcazar (Spain). (s.d.). Obtingut de

[http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/The_Alhambra_and_The_Alcazar_\(Spain\)](http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/The_Alhambra_and_The_Alcazar_(Spain))

Tiling Wallpaper. (s.d.). Obtingut de

<http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html>

Train, T. C. (2018). Code! Programming for Beginners with p5.js. Obtingut de

<https://www.youtube.com/watch?v=yPWkPOfnGsw&t=0s&list=PLRqwx-V7Uu6Zy51Q-x9tMWIv9cueOFTFA&index=2>

Unión Internacional de Cristalografía. (2017). Obtingut de

https://es.wikipedia.org/wiki/Unión_Internacional_de_Cristalografía

Wallpaper group. (s.d.). Obtingut de https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

Wallpaper Stamps. (2013). Obtingut de

https://people.math.ethz.ch/~acannas/Outreach/wallpaper_stamps_eth_21nov2013.pdf

Figures

Fig. 1: <https://www.dezeen.com/2018/04/26/escher-nendo-national-gallery-victoria-melbourne/>

Fig. 2: <https://www.duomomilano.it/en/>

Fig. 3: <http://www.ksx.cat/2012/05/cartell-festa-major-vic-2012.html>

Fig. 4: <https://processing.org/download/>

Fig. 5: <https://www.casadellibro.com/libro-l-art-del-mosaic-hidraulic-a->

Fig. 6: <https://www.crepress.com/The-Symmetries-of-Things/Conway-Burgiel-Goodman-Strauss/p/book/9781568812205>

Fig. 7: http://ca.wikipedia.org/wiki/Ordre_compost

Fig. 8: <https://www.invitinghome.com/molding-wood-frieze/img/frieze-1687lg.jpg>

Fig. 9: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/83/SymBlend_p1.svg/220px-SymBlend_p1.svg.png

Fig. 10: https://d2gg9evh47fn9z.cloudfront.net/800px_COLOURBOX11105047.jpg

Fig. 11:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1a/Penrose_Tiling_%28Rhombi%29.svg/800px-Penrose_Tiling_%28Rhombi%29.svg.png

Fig. 12: https://people.math.ethz.ch/~acannas/Outreach/wallpaper_stamps_eth_21nov2013.pdf

Fig. 13: <https://www.mcescher.com/wp-content/uploads/2013/10/E20-MC-Escher-No-20-Fish-1938.jpg>

Fig. 14: <https://i.pinimg.com/236x/09/a3/4d/09a34d060eec55fee55f246890b366fa--stone-carving-decoration-crafts.jpg?b=t>

Fig. 15: <https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/51PCnlmw5QL.jpg>

Fig. 16: <https://mosaicoslavasera.com/2011/11/17/teselas-en-un-mosaico-romano-3/>

Fig. 17: <https://www.alamy.es/imagenes/cobblestone-street-erice-sicily.html>

Fig. 18: <http://www.gaudiallengaudi.com/EDc02pujolibaasis.htm>

Fig. 19: [http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/The_Alhambra_and_The_Alcazar_\(Spain\)](http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/The_Alhambra_and_The_Alcazar_(Spain))

Fig. 20: <http://ajuntament.barcelona.cat/arqueologiabarcelona/mosaics/que-es-un-mosaic/el-mosaic-de-nolla/>

Fig. 21: <http://east-sussex.tiledoctor.biz/wp-content/uploads/sites/13/2013/10/Victorian-Tiles-in-Brighton-After-Restoration.jpg>

Fig. 22 : [http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/The_Alhambra_and_The_Alcazar_\(Spain\)](http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/The_Alhambra_and_The_Alcazar_(Spain))

Fig. 23: <https://journals.openedition.org/abe/docannexe/image/2721/img-5.jpg>

Fig. 24: <https://journals.openedition.org/abe/docannexe/image/2721/img-14.jpg>

Fig. 25: http://www.mosaicsmarti.com/html/es_hm/mosaics.htm

Fig. 26: <http://ajuntament.barcelona.cat/arqueologiabarcelona/mosaics/que-es-un-mosaic/el-mosaic-hidraulic/>

Fig. 27 <https://docplayer.es/docs-images/71/65438685/images/34-0.jpg>

Fig. 28: <https://cmans.files.wordpress.com/2013/08/13a-panot-gran-gaudc3ad.jpg>

Fig. 29: <https://www.mcescher.com/gallery/>

Fig. 30: <https://www.mcescher.com/gallery/>