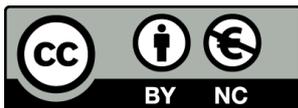


LA EVALUACIÓN COMPETENCIAL DE LA
MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LAS
DIFERENTES ETAPAS EDUCATIVAS

Ximena Patricia Toalongo Guamba



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.ca>

Aquesta obra està subjecta a una llicència Creative Commons Reconeixement-NoComercial

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial licence



TESIS DOCTORAL

LA EVALUACIÓN COMPETENCIAL
DE LA MODELIZACIÓN
MATEMÁTICA EN LAS DIFERENTES
ETAPAS EDUCATIVAS

XIMENA PATRICIA TOALONGO GUAMBA

2024



LA EVALUACIÓN COMPETENCIAL DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LAS DIFERENTES ETAPAS EDUCATIVAS © 2024 by Ximena Patricia Toalongo Guamba is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



TESIS DOCTORAL

**LA EVALUACIÓN COMPETENCIAL DE LA
MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LAS
DIFERENTES ETAPAS EDUCATIVAS**

XIMENA PATRICIA TOALONGOGUAMBA

2024

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Dirigida por:

Dr. Àngel Alsina Pastells

Tutor:

Dr. Àngel Alsina Pastells

Memoria presentada para optar al título de Doctora por la
Universidad de Girona



Dr. Àngel Alsina Pastells, Profesor Catedrático en la Facultad de Psicología y Educación de la Universidad de Girona.

Declara:

Que la tesis titulada "LA EVALUACIÓN COMPETENCIAL DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LAS DIFERENTES ETAPAS EDUCATIVAS", presentada por Ximena Patricia Toalongo Guamba para obtener el grado de Doctora en Educación por la Universidad de Girona ha sido realizada bajo mi supervisión y que cumple los requisitos para poder optar a Mención Internacional.

Para todos los efectos, firmo este documento.

Dr. Àngel Alsina Pastells

Girona, 2024

RECONOCIMIENTO

El trabajo realizado en esta investigación fue financiado por la Universidad de Girona a través de la Oficina d'Investigació i Transferència Tecnològica del programa de Ajut l'Investigador en Formació IFUdG 2018, número 401.

DEDICATORIA

Siento que no serán suficientes estos párrafos para dedicar este trabajo a quienes son mi principal razón para mejorar día a día como mujer, hija, hermana, madre, esposa, tía y profesional, esto es para ustedes:

Para César, mi Cesitar, cada día fue un reto por cumplir con esta ansiada meta personal, su apoyo incondicional, sus constantes palabras y muestras de amor, me dieron la pauta para cumplir este sueño que aún lo veíamos lejano y en algunos momentos impensado por muchas razones; sin embargo, siempre estuvo ahí, dándome lo que necesitaba, creyendo en mí cuando a veces yo misma no lo hacía.

Para mi Davis, por toda la capacidad que tiene para solucionar las cosas más simples, por ser un niño dulce a pesar de que está cada vez más joven, por brindarme ese tiempo que a veces me resultaba esquivo, por su amor y por siempre decirme que soy la mejor.

Para mi Dome, por su amor y por cada vez recordarme que somos unas niñas rebeldes y que todo lo podemos conseguir cuando nos lo proponemos, por entender que mamá no puede dejar de prepararse así ya sea maestra, aunque eso nos quite tiempo de chicas.

A mis Papis: Manuel y Ana María, por hacer de mí quien soy en este momento, por ser un ejemplo a seguir, por apoyarme y acompañarme en mis etapas de estudio y nunca dejar de velar por mí y por mi familia.

A mis hermanos y amigos de toda mi vida: Pablo, Zoily, Margoth, Ignacio, Iván y Mauricio porque a pesar de esta distancia temporal me hicieron sentir siempre como en casa, porque me ayudaron en todo lo que estuvo a su alcance, por estar pendientes de mí y de los míos.

A mis sobrinos: Erifer, Tatiana, Renata, Ignacio, Alejandra, Emilia, Dayanna y Sofía por ser parte de mi vida, quiero que recuerden que los sueños se pueden cumplir y no permitan que nadie les diga que no pueden hacer lo que les gusta, sepan que el límite es el cielo y todo, absolutamente todo, a pesar de las adversidades lo pueden lograr si se lo proponen, los quiero mucho.

Para todos ustedes va dedicado este trabajo con mucho amor, porque sé que este no es solamente mi logro sino el de cada uno de ustedes, porque ustedes son parte de esta inspiración.

Con amor,

Xime

AGRADECIMIENTOS

Después de pensar por mucho tiempo cómo agradecer a aquellas personas que me acompañaron en este proceso de estudios lo que se me viene a la cabeza es mi humilde reconocimiento en esta tesis.

Estimado Àngel, sin lugar a duda sin ti esta aspiración a conseguir el grado de Doctor no hubiese sido posible, agradezco infinitamente todos tus conocimientos, tu confianza, tu tiempo, tu paciencia, tus consejos, tu apoyo desinteresado y por hacerme mirar que a pesar de las adversidades (cuando fue rechazado mi primer artículo) no debo dejarme vencer y que ello sólo me da pautas para continuar con el camino, de verdad, gracias por todo lo que me has brindado, sé que te lo he dicho algunas veces pero aprovecho para dejarlo por escrito: la vida nos pone en el camino personas que nos transforman y tú eres una de ellas, tú nombre lo dice todo, Àngel, un ángel que acompañó no sólo mi camino profesional sino personal y porque no decirlo familiar, porque estuviste pendiente de nosotros en muchos momentos y tus palabras me ayudaron siempre a mejorar, gracias miles de gracias por ser quién eres.

Sin duda, mi agradecimiento especial a mi Cesitar, no basta con dedicarle este trabajo sino también le agradezco por el apoyo que me ha brindado en todo momento y sé que siempre lo hará, gracias por tolerarme en cada momento de mis inseguridades, por velar en cada momento por nosotros, por brindarnos la seguridad que necesitábamos cuando nos sentíamos lejos de nuestro país, por hacer que me sienta bien cuando sentía que ya no podía más, por acompañarme

y entender mis tristezas y por ser esa persona que nunca me soltó la mano, con quien siempre pude contar sin importar lo que estuviese pasando, gracias mi vida por todo, de verdad muchas gracias.

A quienes son mi vida, mis peques: David y Doménica, ustedes han sido parte muy importante en mis estudios, no solamente por comprender que en ocasiones mis estudios se llevaban parte de compartir tiempo con ustedes, sino porque entendían que todo lo que hacíamos era por el bienestar de la familia, porque entendieron que todo lo que realmente vale la pena requiere de sacrificios de diferente tipo y ustedes jamás desvalorizaron eso, al contrario sus palabras y muestras de afecto en el momento apropiado me dieron la fuerza para continuar y cumplir esta meta familiar, los amo mucho.

A mis papis: Manuel y Ana María, a mi papi por su constante ejemplo de superación e incentivar en cada uno de sus hijos que siempre podemos mejorar en nuestros estudios y que la edad no tiene límite cuando de nuestra educación se trata, y a mi mami, mi Anis, gracias por ser la muestra viva de soporte del hogar, por ser mi ejemplo de amiga, mujer y madre, por su ejemplo de fortaleza tanto en los buenos como malos momentos, por ser el corazón y la unión de nuestra familia, por mostrarme siempre el lado bueno de las cosas y animarme a continuar con mis sueños y decirme que todo lo puedo lograr. Mis papitos les agradezco por todo lo que han hecho por mí en cada uno de los momentos de mi vida.

A Pablo, Zoily, Nena, Nacho, Chicho y Mauri, mis Ñañitos, gracias por ser esos amigos con los que uno puede contar y confiar siempre, gracias por estar preocupados y alentarme a continuar en todo momento, gracias por hacerme reír día a día con alguna cosa, gracias por sus mensajes y palabras, gracias por enseñarme que no necesitamos estar cerca para saber que puedo contar con ustedes en cualquier momento y hacerme sentir querida y extrañada a pesar de que no lo expresen continuamente, gracias porque a través de sus hijitos Erifer, Taty, Ignacio, Alejandra, Dayanna y Sofy me hacen sentir muy afortunada de ser tía, gracias porque han permitido que cada uno de los pequeños y no tan pequeños me conozcan y me quieran a pesar de esta distancia que nos separa.

A mis suegros: Faby y Édgar por sus constantes muestras de afecto y preocupación en mis estudios académicos.

A mi cuñada Cris por sus palabras de apoyo en diferentes situaciones, por su alegría en todo momento y por hacerme ver que hasta los momentos más complicados pueden ser sencillos si se lo toma con calma.

A cada uno de mis profesores del Máster en Atención a la Diversidad en una Escuela Inclusiva, por brindarme la oportunidad de conocerlos y aprender de ellos e incentivarme a cursar estos estudios doctorales.

A Maria Pallisera, quien no sólo fue mi maestra en el máster sino también me alentó a cursar el doctorado, por su apoyo en todo momento durante las

diferentes etapas del doctorado y por sus palabras de aliento y comprensión porque ella entendía lo que significaba estar lejos de casa por los estudios.

A Àngels Coma, secretaria del Departamento de Didácticas Específicas de la Universidad de Girona por sus palabras de aliento en cada momento, por sus constantes correos de apoyo y preocupación hacia nosotros, por estar pendiente de algún requerimiento tanto personal como familiar sobre todo en la época de confinamiento.

A cada uno de los miembros del GRECA (Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental) por permitirme ser parte del grupo y darme la oportunidad de conocerlos y aprender sobre cada una de las líneas de investigación del que somos parte y a quienes formamos la línea de investigación matemática, porque no solo éramos compañeros del programa de doctorado sino porque me brindaron su amistad y cada uno de los momentos que compartimos fue muy gratificante, gracias por esas risas, debates, salidas, palabras de aliento y apoyo cuando lo necesitaba.

A mis compañeros del máster, en particular a Marta, Judit, Nerea, Miriam y Ana porque fueron no solo mis compañeras sino mis amigas y porque no decirlo amigas de mi familia, gracias porque entendían que no era fácil para nosotros adaptarnos a un nuevo mundo y ellas lo hicieron más llevadero, gracias por apoyarme en aquellas tareas escolares de mis hijos que me resultaban complicadas y por sus muestras de afecto y preocupación en todo momento.

A Wladimir, Oksana, Sofía y Maria por ser nuestra segunda familia, porque formaron parte importante de nuestras vidas, porque en medida de sus posibilidades estuvieron pendientes de nosotros en todo momento y nos apoyaron en todo momento, hasta el último minuto de nuestra estancia en Girona.

Gracias a todos a quienes a lo mejor en estos momentos no recuerdo pero que sumaron de alguna manera a mi desarrollo profesional y personal, gracias y miles de gracias a mi querida Girona porque me dio mucho y sin pensar fue mi hogar durante estos años y es el lugar al que sin dudarlo dos veces quisiera regresar.

Per tot això, vull agrair a tots vosaltres, perquè sens dubte la seva presència a la meva vida no podria ser d'una altra manera, gràcies, milers de gràcies per tot.

ABREVIATURAS

Abreviatura	Significado
AA	Alcanzar los aprendizajes
CCSSM	Common Core State Standards for Mathematics
CIBEM	Congreso Iberoamericano de Educación Matemática
COMAP	Consortium for Mathematics and its Applications
CVR	Content Validity Ratio
CVR'	Content Validity Ratio Index
DA	Dominio de los aprendizajes
ECTALMAT	Evaluación competencial del talento matemático
ESTALMAT	Estímulo al Talento Matemático
ICME	International Congress on Mathematical Education
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction
ICTMA	International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications
MEA's	Modeling Eliciting Activities
MSC	Mathematics subject classification
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OECD	Organisation for Economic Co-operation and Development
PISA	Programme for International Student Assessment
RELME	Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa
REMMP	Rubric for <i>the</i> (sic) Evaluating <i>of</i> (sic) Mathematical Modelling Processes
SIAM	Society for Industrial and Applied Mathematics

ÍNDICE

RECONOCIMIENTO	vii
DEDICATORIA.....	ix
AGRADECIMIENTOS	xi
ABREVIATURAS.....	xvii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xxi
ÍNDICE DE TABLAS.....	xxii
RESUM	1
RESUMEN	4
ABSTRACT	7
LISTA DE PUBLICACIONES	11
ARTÍCULOS PUBLICADOS	11
ARTÍCULOS SOMETIDOS A REVISIÓN	12
1. INTRODUCCIÓN.....	15
2. ANTECEDENTES TEÓRICOS.....	27
2.1. La evaluación de los aprendizajes.....	27
2.2. Competencia matemática.....	29
2.3. Modelización matemática: conceptualización y perspectivas.....	32
2.3.1 El ciclo de Modelización.....	34
2.3.2 La modelización matemática en los documentos curriculares	37
2.3.3. La modelización matemática en las primeras etapas educativas.....	39
2.3.4. Las model-eliciting activities (MEA's).....	41
2.4. Los problemas de Fermi.....	42
3. METODOLOGÍA.....	46

4. RESULTADOS.....	55
4.1. Artículos publicados.....	55
4.1.1. Artículo 1	55
4.1.2. Artículo 2	80
4.1.3. Artículo 3:	107
4.2 Artículos sometidos a revisión.....	128
4.2.1. Artículo 4:	128
5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	164
5.1. Discusión.....	164
5.1.1. Conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial del alumnado con talento matemático.....	164
5.1.2. Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil.....	166
5.1.3. Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education.....	168
5.1.4. La modelización matemática y los problemas de Fermi aplicados a estudiantes de Educación Primaria.....	170
5.2. Conclusiones.....	174
5.3. Limitaciones del estudio y futuros trabajos de investigación	179
6. REFERENCIAS.....	183

ÍNDICE DE FIGURAS

ARTÍCULO 1

Figura 1. Concepto de evaluación por parte del profesorado	65
Figura 2. Relación de las Competencias Básicas con su respectiva dimensión	66
Figura 3. Momento preferido por el profesorado para evaluar la competencia matemática	67
Figura 4. Profesorado en activo que ha trabajado con estudiantes con talento matemático	67
Figura 5. Técnicas para evaluar la competencia matemática del alumnado con talento matemático	68
Figura 6. Instrumentos para evaluar la competencia matemática del alumnado con talento matemático	69
Apéndice A. Cuestionario: Evaluación competencial del talento matemático 6-12, ECTALMAT 6-12	76

ARTÍCULO 2

Figura 1. Ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß	84
Anexo 1. Actividad de modelización (Extractos de los episodios)	99

ARTÍCULO 3

Figure 1. Mathematical modelling cycle proposed by Blum y Leiß	110
Figure 2. Adapted from Ärlebäck	119
Figure 3. Original letter produced by the students and English translation ...	121

ARTÍCULO 4

Figura 1. Ciclo de modelización matemática (Blum y Leiß, 2007)	134
Figura 2. Actividad de Modelización Matemática	139
Figura 3. Representación de la ciudadela de la niña N1	148
Figura 4. Representación de la ciudadela de la niña N2	148
Figura 5. Carta redactada por las niñas	148

ÍNDICE DE TABLAS

ARTÍCULO 2

Tabla 1. Indicadores del instrumento REMMP para la Educación Infantil	88
Tabla 2. Correspondencia de los episodios con los componentes e indicadores del instrumento REMMP	89
Tabla 3. Análisis cualitativo del Episodio 12	91

ARTICULO 3

Table 1. Comments on “Understanding”	115
Table 2. Comments on “Structuring”	115
Table 3. Comments on “Mathematization”	115
Table 4. Comments on “Mathematical work”	116
Table 5. Comments on “Interpretation”	116
Table 6. Comments on “Validation”	116
Table 7. Comments on “Presentation”	117
Table 8. Final version of the REMMP	117
Table 9. Extract from the analysis of the modelling activity in early childhood education with the REMMP instrument	119
Table 10. Extract from the analysis of the modelling activity in compulsory secondary education with the REMMP instrument	120
Table 11. Extract from the analysis of the modelling phases presented in the chart with the REMMP instrument	121
Appendix A. Table A1. CVR' indices for instruments items	123

ARTÍCULO 4

Tabla 1. Indicadores del instrumento REMMP para educación primaria	140
Tabla 2. Análisis de los datos generados por las alumnas (primer momento)	142
Tabla 3. Análisis de los datos generados por las alumnas (segundo	

momento).....	143
Tabla 4. Análisis de los datos generados por las alumnas (tercer momento).....	146
Tabla 5. Cuantificación de las fases del ciclo de modelización presentes en el desarrollo de la actividad	149

RESUM

La modelització matemàtica, així com la competència matemàtica tenen cada vegada més presència en la literatura científica en l'àmbit de l'Educació Matemàtica, consegüentment diverses organitzacions a nivell internacional com ara l'Organització for Economic Cooperation and Development (OECD), el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), l'International Congress on Mathematical Education (ICME), entre d'altres, han dedicat espais específics per investigar i discutir sobre aquests temes.

Tot i això, encara són escassos els estudis que aborden l'avaluació competencial de la modelització matemàtica, per aquesta raó aquesta tesi té per objectiu contribuir al desenvolupament de la competència matemàtica dels estudiants a través de processos de modelització matemàtica i la seva avaluació respectiva.

Per complir aquest objectiu, com a primer punt d'aproximació, es realitza un estudi del coneixement del professorat sobre l'avaluació competencial matemàtica de l'alumnat amb talent matemàtic. Els resultats mostren que hi ha conflictes conceptuals en l'ús de la terminologia d'avaluació dels aprenentatges per part del professorat, així com desconeixement sobre la forma d'avaluar la competència matemàtica.

Adicionalment, considerant que la modelització matemàtica ha de ser treballada des de les primeres edats, s'analitza un cicle de modelització a partir

d'un problema real en Educació Infantil. Els resultats mostren que els nens d'aquestes edats són capaços d'elaborar uns primers models basats en els coneixements matemàtics que mobilitzen. Una altra de les troballes és que el procés de modelització matemàtica és complex, ja que l'alumnat dels primers nivells escolars transita de forma no ordenada per les diferents fases del cicle de modelització, les mateixes que són treballades en diferent mesura, sent la interpretació i validació algunes de les fases que requereixen més atenció.

Seguidament, es descriu el disseny, la construcció i la validació d'una rúbrica per avaluar els processos de modelització matemàtica, sobretot aquells que estan orientats per cicles de modelització, al llarg de l'escolaritat (3-18 anys). Es conclou que la rúbrica la pot utilitzar tant investigadors com professors de diferents nivells educatius des d'educació infantil fins a batxillerat.

Finalment, es presenta un estudi on s'exposa els resultats principals d'una activitat de modelització matemàtica, elaborada sota els plantejaments teòrics de les Modelling Eliciting Activities (MEA's) en combinació amb els problemes de Fermi i aplicada a estudiants equatorians de sisè grau d'Educació Primària (10-11 anys).

Les dades van ser analitzades mitjançant la rúbrica descrita anteriorment. Els resultats mostren que els estudiants, tot i no tenir experiència en activitats de modelització matemàtica, són capaços de comprendre el problema, establir conjectures i suposicions i proposar idees de solució; addicionalment, són capaços també de transitar per les diferents fases del cicle de modelització, encara

que amb certa dificultat en algunes. Es conclou que aquestes activitats presenten grans avantatges per al desenvolupament de la competència matemàtica dels estudiants i les seves habilitats de modelització; no obstant això, es recomana al professorat incorporar-les a la seva pràctica docent.

RESUMEN

La modelización matemática, así como la competencia matemática tienen cada vez mayor presencia en la literatura científica en el ámbito de la Educación Matemática, consecuentemente varias organizaciones a nivel internacional como por ejemplo la Organization for Economic Cooperation and Development (OECD), el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), el International Congress on Mathematical Education (ICME), entre otras, han dedicado espacios específicos para investigar y discutir acerca de estos temas.

No obstante, aún son escasos los estudios que aborden la evaluación competencial de la modelización matemática, por esta razón esta tesis tiene por objetivo, contribuir al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes a través de procesos de modelización matemática y su respectiva evaluación.

Para cumplir con este objetivo, como un primer punto de aproximación, se realiza un estudio del conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial matemática del alumnado con talento matemático. Los resultados muestran que existen conflictos conceptuales en el uso de la terminología de evaluación de los aprendizajes por parte del profesorado, así como desconocimiento acerca de la forma de evaluar la competencia matemática.

Adicionalmente, considerando que la modelización matemática debe ser trabajada desde las primeras edades, se analiza un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. Los resultados muestran que los niños

de estas edades son capaces de elaborar unos primeros modelos con base en los conocimientos matemáticos que movilizan. Otro de los hallazgos es que el proceso de modelización matemática es complejo, pues el alumnado de los primeros niveles escolares transita de forma no ordenada por las diferentes fases del ciclo de modelización, las mismas que son trabajadas en diferente medida, siendo la interpretación y validación algunas de las fases que requieren más atención.

Seguidamente, se describe el diseño, construcción y validación de una rúbrica para evaluar los procesos de modelización matemática, sobre todo aquellos que están orientados por ciclos de modelización, a lo largo de la escolaridad (3-18 años). Se concluye que la rúbrica puede ser utilizada tanto por investigadores como por profesores de diferentes niveles educativos desde educación infantil hasta bachillerato.

Finalmente, se presenta un estudio en donde se expone los principales resultados de una actividad de modelización matemática, elaborada bajo los planteamientos teóricos de las Modelling Eliciting Activities (MEA's) en combinación con los problemas de Fermi y aplicada a estudiantes ecuatorianos de sexto grado de Educación Primaria (10-11 años).

Los datos fueron analizados mediante la rúbrica descrita anteriormente. Los resultados muestran que los estudiantes, a pesar de no tener experiencia en actividades de modelización matemática, son capaces de comprender el problema, establecer conjeturas y suposiciones y proponer ideas de solución;

adicionalmente, son capaces también de transitar por las diferentes fases del ciclo de modelización, aunque con cierta dificultad en algunas de ellas. Se concluye que estas actividades presentan grandes ventajas para el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes y sus habilidades de modelización; sin embargo, se recomienda al profesorado incorporarlas en su práctica docente.

ABSTRACT

Mathematical modelling and mathematical competence are increasingly present in the scientific literature in the field of Mathematics Education, consequently several international organizations such as the Organization for Economic Cooperation and Development (OECD), the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), the International Congress on Mathematical Education (ICME), among others, have dedicated specific spaces to investigate and discuss these issues.

However, there are still few studies that address the competency assessment of mathematical modelling, for this reason this thesis aims to contribute to the development of mathematical competence of students through mathematical modelling processes and their respective evaluation.

In order to fulfil this objective, as a first point of approach, a study of teachers' knowledge about the mathematical competence assessment of mathematically talented students is carried out. The results show that there are conceptual conflicts in the use of learning assessment terminology by teachers, as well as a lack of knowledge about how to assess mathematical competence.

In addition, considering that mathematical modelling should be worked on from the earliest ages, a modelling cycle is analysed based on a real problem in infant education. The results show that children of these ages are capable of elaborating their first models based on the mathematical knowledge they

mobilise. Another of the findings is that the process of mathematical modelling is complex, as pupils in the first school levels go through the different phases of the modelling cycle in an unordered way, which are worked on to different extents, with interpretation and validation being some of the phases that require more attention.

Next, we describe the design, construction and validation of a rubric for assessing mathematical modelling processes, especially those oriented by modelling cycles, throughout schooling (3-18 years). It is concluded that the rubric can be used by both researchers and teachers at different educational levels from kindergarten to high school.

Finally, a study is presented in which the main results of a mathematical modelling activity, elaborated under the theoretical approaches of the Modelling Eliciting Activities (MEA's) in combination with Fermi problems and applied to Ecuadorian students in the sixth grade of Primary Education (10-11 years old), are presented.

The data were analysed using the rubric described above. The results show that students, despite having no experience in mathematical modelling activities, are able to understand the problem, establish conjectures and assumptions and propose solution ideas; additionally, they are also able to go through the different phases of the modelling cycle, although with some difficulty in some of them. It is concluded that these activities present great advantages for the development of students' mathematical competence and

modelling skills; however, it is recommended that teachers incorporate them into their teaching practice.

LISTA DE PUBLICACIONES

Esta tesis se presenta como un compendio de tres artículos de investigación, los mismos que se encuentran publicados. Adicionalmente, se presenta un cuarto artículo el mismo que está sometido a revisión. El correspondiente detalle de los artículos se presenta a continuación:

ARTÍCULOS PUBLICADOS

Artículo 1:

Toalongo-Guamba, X.; Alsina, Á.; Trelles-Zambrano, C. y Acosta, Y. (2021). Conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial del alumnado con talento matemático. *Educare Electronic Journal*. 25(1), 1-23. <http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

Índices de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,237 en SJR. Cuartil 3 (2022).
- Se encuentra indizada también en Web of Science (ESCI), Scielo, Redalyc, DOAJ, Latindex Catálogo (38 de 38 características cumplidas).

Artículo 2:

Toalongo-Guamba, X.; Alsina, Á., Trelles-Zambrano, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO*(1), 81-98 <http://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>

Índices de calidad:

- Revista indexada en Web of Science (JCR). Índice 0.154 en SSCI. Cuartil 4 (2022).
- Revista indexada en Scopus. Índice 0.108 en SJR. Cuartil 3 (2022).

Artículo 3:

Toalongo, X.; Trelles, C. y Alsina, Á. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics*(10), 4662. <https://doi.org/10.3390/math10244662>

Índices de calidad:

- Revista indexada en Web of Science (JCR). Índice 2.4 en SCIE. Cuartil 1 (2022).
- Revista indexada en Scopus. Índice 0.446 en SJR. Cuartil 2 (2022).

ARTÍCULOS SOMETIDOS A REVISIÓN

Artículo 4:

Toalongo, X.; Trelles, C. y Alsina, Á. (en revisión). La modelización matemática y los problemas de Fermi aplicados a estudiantes de Educación Primaria

Revista: Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia.

Índices de calidad:

- Revista indexada en Web of Sciences (Emerging Sources Citation Index (ESCI)), Dialnet, LatinREV, REDIB, Redalyc, Latindex.

La única forma de aprender matemáticas es hacer matemáticas.

-Paul Halmos-

1. INTRODUCCIÓN

Esta tesis doctoral se enmarca en el formato de tesis por compendio, en ella se presentan tres artículos publicados y un artículo sometido a revisión, estos artículos se derivan de las investigaciones realizadas durante el tiempo de estudios.

Para todos quienes somos parte del sistema educativo no nos resulta extraño encontrarnos con situaciones preocupantes referentes a la evaluación de los aprendizajes, sin importar el área de conocimiento, tornándose frecuentemente como una simple forma de obtener una calificación para promover o no de un nivel a otro al alumnado.

En la actualidad, este tema toma cada vez más fuerza e importancia y nos encontramos con que la forma en la que fueron impartidos los conocimientos respecto a la evaluación en nuestra formación profesional a veces no se apega a la realidad que se vive día a día en el aula, esto requiere indudablemente nuestra atención, más aún si las técnicas e instrumentos utilizados por el profesorado para la evaluación se constituyen en un aspecto clave para la consecución de los aprendizajes.

En este sentido, Díaz Barriga y Hernández Rojas (2000) consideran que:

La evaluación del proceso de aprendizaje y enseñanza es una tarea necesaria, en tanto que aporta al profesor un mecanismo de autocontrol que la regula y le permite conocer las causas de los problemas u obstáculos que se suscitan y la perturban. (p. 124)

Asimismo, durante las últimas décadas las investigaciones de Llinares y Krainer (2006), Niss (1993), Sánchez (2011), entre otros, evidencian que existe cada vez más preocupación por cómo se debe enseñar y aprender matemáticas; sin embargo, a pesar de que el profesorado y los investigadores coinciden en que la evaluación es un pilar fundamental para lograr la consecución de los objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje aún son escasas las investigaciones en torno a las prácticas evaluativas del aprendizaje de esta asignatura, tal como lo indica Niss (1993), y más escasas aún las investigaciones que relacionen la evaluación de la competencia matemática a través de procesos de modelización.

En este sentido, documentos curriculares como el NCTM (2000), National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers (2010), ponen de manifiesto la importancia de una adecuada adquisición de la competencia matemática y su correcta evaluación, a su vez un aspecto que despierta nuestro interés es el uso de la modelización matemática, esto debido a los muchos puntos en común que tienen estos dos conceptos.

Por ejemplo, para Niss (2004) la competencia matemática se puede definir como la capacidad de comprender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra matemáticos. Además, según la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico, OCDE, (2021), la competencia matemática se entiende como la capacidad que tiene un individuo para razonar matemáticamente y para formular, emplear e interpretar la Matemática para resolver problemas en una variedad de contextos del mundo.

Incluye utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a conocer el papel que la Matemática juega en el mundo además de colaborar en la elaboración de juicios bien fundados y en la toma de decisiones que necesita un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo del siglo XXI.

En lo que concierne a la modelización matemática, son varios los autores que aportan importantes definiciones. Por ejemplo, Blum (2015) afirma que la modelización matemática puede entenderse de forma simplificada como un proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones. Bliss y Libertini (2019) consideran que la modelización matemática se trata de un proceso que hace uso de la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas.

Por lo expuesto se puede observar fácilmente que los conceptos de competencia matemática y modelización matemática tienen muchos aspectos en común, de hecho Niss (2004) plantea que la competencia matemática involucra ocho componentes: 1) pensar matemáticamente, 2) plantear y resolver problemas matemáticos, 3) modelizar matemáticamente, 4) razonamiento matemático, 5) representar entidades matemáticas, 6) manejar símbolos y formalismos matemáticos, 7) comunicarse en, con y sobre las matemáticas y 8) Hacer uso de ayudas de instrumentos (incluidas las tecnologías de la información). Como se puede notar, modelizar matemáticamente forma parte de los componentes de la

competencia matemática. De manera complementaria, el concepto de modelización matemática y concretamente las fases del ciclo de modelización (Blum y Leib, 2007) que se asumen en este estudio involucran varios de los ocho elementos que se plantean en la definición de competencia matemática.

A pesar de la necesidad e importancia que tienen estos dos conceptos en la Educación Matemática, consideramos que aún falta diseñar más investigaciones que permitan proporcionar al profesorado orientaciones claras de cómo evaluar los procesos de modelización matemática en el aula, tal como lo indica Trelles-Zambrano y Alsina (2017) y que consecuentemente contribuyan a la evaluación de la competencia matemática de los estudiantes. Por lo expuesto, la problemática objeto de nuestro estudio es la escasez de investigaciones que relacionen el desarrollo de la competencia matemática a través de procesos de modelización con la correspondiente orientación al profesorado para evaluar estos procesos. Consecuentemente, la pregunta de investigación a la que se pretende dar respuesta con esta tesis doctoral es: ¿cómo se evalúa la competencia matemática a través de la modelización matemática en las diferentes etapas educativas?

El objetivo general de esta tesis es: Contribuir al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes a través de procesos de modelización matemática y su respectiva evaluación. Además. Los objetivos específicos que orientan esta investigación son:

1. Analizar los conocimientos del profesorado respecto al proceso de evaluación de los aprendizajes.
2. Analizar a través del ciclo de modelización matemática los conocimientos que moviliza el alumnado de educación infantil al resolver un problema de la vida real.
3. Diseñar una rúbrica para evaluar los procesos de modelización matemática desarrollados por estudiantes de los diferentes niveles educativos.
4. Describir y comprender la producción de alumnos de educación primaria al enfrentarse a una actividad de modelización matemática.

Como ya se dijo anteriormente, esta tesis se presenta en formato de compendio de publicaciones. A continuación, se describen brevemente cada uno de los artículos, así como su correspondiente interrelación.

El artículo denominado: **“Conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial matemática del alumnado con talento matemático”**, responde al objetivo específico número uno, este artículo nos permite realizar un acercamiento a través de una rúbrica sobre los conocimientos del profesorado en temas de evaluación de los aprendizajes y además sobre cómo el profesorado utiliza estos conocimientos al momento de trabajar con estudiantes con talento matemático. Este aspecto nos permite tener en cuenta que el profesorado requiere de herramientas para evaluar adecuadamente la competencia matemática, tal como lo indica Niss (2004) que es permitir que el alumnado

pueda entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en diferentes contextos, sean estos intra o extra matemáticos, en los cuales su aplicación cumple un rol fundamental. A partir de los resultados obtenidos, se evidencia la necesidad de trabajar con la Modelización Matemática que es un tema muy relevante y vigente no solo en la matemática pura, sino también en el ámbito de la matemática educativa, pues permite que los estudiantes utilicen el conocimiento matemático para la resolución de problemas reales, y viceversa que a partir de situaciones reales, generen conocimiento matemático; además, como ya se dijo anteriormente tiene una estrecha relación con la competencia matemática. Sin embargo, se puede decir que la Modelización Matemática aún es poca conocida y utilizada por el profesorado de los diferentes niveles educativos.

Por ello, a partir del artículo: **“Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil”**, el cual responde al objetivo específico número dos, se analiza a través del ciclo de modelización de Blum y Leib (2007), cómo niños en edades tempranas solucionan un problema de la vida real. A su vez, se proporciona al profesorado de este nivel educativo una rúbrica como una herramienta de apoyo para la evaluación durante todo el proceso de generación de un modelo. Consideramos importante este artículo porque se debe propender a que estos conocimientos y habilidades sean tratados desde los niveles de Educación Infantil y Primaria, pues es en donde se construyen los primeros saberes, sobre todo porque estos conocimientos y habilidades se fundamentan en

lo concreto, partiendo de esta manera desde el entorno de los alumnos y su realidad, aspectos que son característicos de los procesos de modelización y que a su vez generan un espacio propicio para que los estudiantes alcancen la competencia matemática.

Además, con este trabajo pretendemos incrementar la literatura en el trabajo de modelización matemática desde edades tempranas como ya lo han iniciado autores como English (1996, 1997, 2004, 2006, 2010), Ruiz-Higueras y García (2011) y Ruiz-Higueras, García y Lendínez (2013), entre otros, ya que estos trabajos evidencian que los problemas de modelización a más de fomentar el razonamiento en los niños revelan el pensamiento matemático, pues dichos problemas al ser planteados desde situaciones de la vida real pueden resultar complejos; sin embargo, pueden ser desarrollados desde edades tempranas, brindando de esta forma oportunidades al alumnado para generar nuevos conocimientos matemáticos que en varias ocasiones no son considerados en el currículo de acuerdo con su edad; así pues, la modelización matemática se convierte en una herramienta que facilita la interpretación, obtención, organización y operación de datos y a su vez les permite identificar las fortalezas y limitaciones que puede presentar la solución de un problema determinado al momento de evaluarlo en el contexto real.

Por lo expuesto, este trabajo brinda un aporte a la comunidad científica, así como al alumnado y al profesorado de estos niveles educativos, pues ejemplifica como se pueden llevar a cabo actividades de modelización

matemática. De esta forma se pretende persuadir al profesorado para realizar innovaciones didácticas en sus aulas a través de actividades de modelización matemática y la forma en que deben ser evaluadas, para así contribuir al desarrollo de la competencia matemática del alumnado.

En consonancia con lo anterior, el tercer artículo: **“Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education”**, responde al objetivo específico número tres, aquí se presenta una rúbrica que el profesorado de distintos niveles educativos puede utilizar al momento de trabajar con actividades de modelización matemática, pues concordamos con Andrade (2000) en el sentido que las rúbricas no solamente son una guía o contienen escalas de valoración, sino además establecen niveles de dominio respecto a un proceso determinado, así las rúbricas sirven tanto a la persona que aprende, así como a la persona que enseña, por ello se las denomina instructional rubrics.

La rúbrica REMMP está diseñada para aplicarla en las distintas etapas educativas, excepto en la educación universitaria, es decir: en la educación preescolar, educación primaria y educación secundaria, pretende identificar como los estudiantes transitan por las distintas fases del ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007) al momento de trabajar con actividades de modelización matemática.

Como se ha mencionado anteriormente existe literatura referente a modelización matemática en cuanto a su implementación en el aula; sin embargo,

al referirnos a la evaluación de la modelización matemática esta es aún limitada, tal como lo menciona Frejd (2013) quien en su investigación al analizar 700 artículos referentes a modelización matemática concluyó que tan solo el 10% de los trabajos hacían referencia al cómo evaluarla.

Por ello, esta herramienta pretende ayudar al profesorado e investigadores a identificar las diferentes fases que puede desarrollar el alumnado al momento de realizar una actividad de modelización matemática y evaluar el grado de adquisición de esta competencia. Inclusive puede ser también utilizada por profesores e investigadores noveles como una herramienta propedéutica para diseñar, implementar y facilitar sus primeras actividades de modelización.

El artículo **“La modelización matemática y los problemas de Fermi aplicados a estudiantes de Educación Primaria”**, responde al objetivo específico número cuatro, en este artículo se presenta el diseño y desarrollo de una actividad de modelización matemática basada en las Modeling Eliciting Activities en combinación con los problemas de Fermi, en este trabajo se pone en evidencia la aplicabilidad de la Rubric to Evaluate Mathematical Modeling Processes (REMMP) para evaluar los procesos de modelización matemática desarrollados por estudiantes de educación primaria.

Consecuentemente, este artículo describe con minuciosidad el proceso de elaboración de un modelo por parte de alumnos de educación primaria y a su vez identifica con detalle qué fases del ciclo de modelización matemática son más o menos transitadas por los alumnos. En este sentido, se pretende contribuir a la

literatura con mayor evidencia científica respecto a cuáles son los puntos fuertes y débiles del trabajo de los alumnos frente a una actividad de modelización matemática.

Los resultados y conclusiones presentados en este artículo pueden ser utilizados por el profesorado para poner mayor atención en las fases del ciclo de modelización en las que se requiere más atención, pueden también ser utilizados por los investigadores para diseñar nuevas investigaciones que permitan corroborar o refutar estos resultados y de esta forma contribuir a la mejora de los procesos de modelización matemática de los alumnos, así como por los organismos que elaboran la política pública en lo concerniente a educación con el objetivo de tomar decisiones en lo referente a los lineamientos curriculares respecto a la educación matemática.

*Una pregunta ben formulada suposa més de la meitat de la recerca (...). Un
objectiu/pregunta ben formulat comporta bona part de l'aprenentatge.*

-Neus Sanmartí-

2. ANTECEDENTES TEÓRICOS

A continuación, se presenta de forma resumida la fundamentación teórica que orienta esta tesis, esto debido a que cada uno de los artículos de investigación que forman parte del compendio explican de forma detallada los respectivos antecedentes teóricos.

2.1. La evaluación de los aprendizajes

Los estudios realizados desde las diversas agendas de investigación en educación matemática (Alsina, 2019; Llinares, 2008) han contribuido significativamente a comprender todos los factores que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, en términos generales, los estudios centrados en la evaluación de los aprendizajes son todavía escasos, sobre todo los relativos a la evaluación formativa que considera que evaluar no consiste únicamente en conocer resultados de aprendizaje, sino en identificar y comprender las dificultades y debilidades que se presentan para poder brindar herramientas adecuadas para superarlas.

Existen diversas acepciones acerca de la evaluación que han ido evolucionando a lo largo del tiempo. Así, por ejemplo, para Mateo (2000), la evaluación es un proceso de reflexión sistemático cuya misión es mejorar la calidad del personal docente a través del alumnado. Castillo Arredondo y Cabrerizo Diago (2003) indican que la evaluación se realiza durante un período

de tiempo determinado, presenta un carácter flexible y continuo; pero no resulta sencillo definirla por la multiplicidad de factores que intervienen y que, a su vez, forman un proceso dinámico, abierto y contextualizado.

Con el propósito de unificar criterios, Prieto y Contreras (2008) señalan que es fundamental desarrollar investigaciones sobre las concepciones de la evaluación que permitan informar acerca de las prácticas del personal docente de matemáticas para develar las disonancias, contradicciones y repercusiones posteriores en su alumnado. Gómez Meléndez et al. (2018) indican que existe un vacío de conocimientos sobre estos aspectos debido a la escasez de investigaciones centradas en la evaluación del aprendizaje desde enfoques de investigación cualitativos o bien integrando cualitativos y cuantitativos que aporten una visión integral de los procesos de aprendizaje del alumnado.

En relación con las técnicas e instrumentos usados, Hamodi et al. (2015) encontraron una gran dispersión, ambigüedad y confusión en la terminología utilizada en la literatura. En esta tesis, asumimos, el planteamiento de estos autores:

las técnicas de evaluación son las estrategias que el profesorado utiliza para recoger información acerca de las producciones y evidencias creadas por el alumnado (de los medios). Las técnicas a utilizar son diferentes en función de si el alumnado participa o no en el proceso de evaluación... . Los instrumentos de evaluación son las herramientas que tanto el profesorado como el alumnado utilizan para plasmar de manera

organizada la información recogida mediante una determinada técnica de evaluación. (p.155-156)

2.2. Competencia matemática

El término competencia, haciendo alusión al campo educativo, se concibe como el conjunto de acciones y estrategias que una persona puede tomar en un determinado momento para utilizar ese saber y conseguir la consecución de una tarea específica. Así, pues, no es simplemente algo que aprender, sino que se refiere a la información que se recibe y se adquiere para saberlo hacer (Moya Otero y Luengo Horcajo, 2011).

En cuanto a la competencia matemática, Niss (2004) la define como la capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra matemáticas, en las cuales la matemática desempeña un importante papel.

Goñi Zabala (2008) indica que la competencia matemática se vincula con: “el uso [del] conocimiento matemático en contextos de relevancia social, utilizando en cada caso la tecnología más eficiente” (p. 90).

En el marco de PISA, se considera:

La competencia matemática es la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las

decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD], 2016, p. 74).

Además, Azcárate Goded y Cardeñoso Domingo (2012) manifiestan que la competencia matemática se logra cuando los conocimientos matemáticos se aplican espontáneamente en varias situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana, lo que supondrá que el alumnado, al enfrentarse a situaciones reales, estará en condición de activar las competencias matemáticas pertinentes para solucionar problemas.

Adicionalmente, con base en las aportaciones del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) acerca de los procesos matemáticos, la Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament (2013), categoriza la competencia matemática en cuatro dimensiones (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y, comunicación y representación) y ha establecido 10 competencias que deben ser evaluadas por el profesorado:

- 1) Traducir un problema a una representación matemática y emplear conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverlo;
- 2) dar y comprobar la solución de un problema de acuerdo con las preguntas planteadas;
- 3) hacer preguntas y generar problemas de carácter matemático;
- 4) hacer conjeturas matemáticas adecuadas en situaciones cotidianas y comprobarlas;
- 5) argumentar las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos;
- 6) establecer relaciones entre diferentes conceptos, así como entre los diversos significados de un mismo concepto;
- 7) identificar las matemáticas implicadas en situaciones

cotidianas y escolares y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas; 8) expresar ideas y procesos matemáticos de manera comprensible empleando el lenguaje verbal (oral y escrito); 9) usar las diversas representaciones de los conceptos y relaciones para expresar matemáticamente una situación; y, 10) usar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación, e interpretar las representaciones matemáticas que ofrecen. (p. 8)

Considerando estas competencias matemáticas, Alsina (2018) ha publicado un decálogo con diez ideas clave acerca de la evaluación de la competencia matemática:

- 1) forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas;
- 2) sólo tiene sentido si se trabaja en la línea de desarrollar la competencia matemática;
- 3) implica evaluar los procesos matemáticos, más que los contenidos;
- 4) requiere, a menudo, el uso de rúbricas o bases de orientación; e implica, además:
- 5) evaluar el grado de riqueza competencial de las actividades;
- 6) analizar la práctica docente del profesorado;
- 7) plantear claramente los aspectos que se quieren evaluar;
- 8) analizar si se han trabajado todas las competencias;
- 9) aportar evidencias;
- y, finalmente, 10) establecer niveles de adquisición. (p. 7)

Posteriormente, Alsina et al. (2019) proponen un modelo que consta de cinco fases para incorporar la evaluación de la competencia matemática en el aula: 1) organización de la enseñanza de las matemáticas; 2) búsqueda de actividades matemáticas competenciales ricas; 3) concreción de las dimensiones y competencias del conocimiento matemático que deben evaluarse; 4) selección

de las dimensiones y competencias que se evalúan en cada actividad; 5) diseño de instrumentos específicos de evaluación, especialmente rúbricas.

2.3. Modelización matemática: conceptualización y perspectivas

Si bien en la comunidad científica no existe todavía unicidad de criterio para definir la modelización matemática, algunos autores brindan aportes significativos. Así, por ejemplo, Alsina, C. et al. (2007) exponen que la modelización matemática se refiere al proceso de construcción de un modelo que sirve para explicar o estudiar un fenómeno real o matemático lo que requiere traducciones constantes entre la realidad y las matemáticas. Villa-Ochoa (2007) entiende la modelización matemática como la actividad cuya naturaleza se deriva de la acción científica de modelación matemática y que, más que una herramienta para construir nuevos objetos matemáticos se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un “micromundo” que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntar y abordar los problemas del contexto real. En este sentido, Borba y Villarreal (2005) señalan que la modelización matemática puede ayudar a que las matemáticas sean más comprensibles al traer situaciones contextualizadas al aula y de esta forma dar significado a las matemáticas que se enseñan y aprenden. Bajo esta misma idea, Bliss y Libertini (2019) y Blum y Borromeo (2009) conceptualizan la modelización matemática como un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un

proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas. Además, Blum y Borromeo (2009) señalan que, a través de la modelización, los estudiantes pueden comprender mejor los contextos en los cuales se desenvuelven; se apoya el aprendizaje de las matemáticas y se promueve el desarrollo de algunas competencias, actitudes y visiones adecuadas hacia las mismas. Esta idea a su vez es complementada por Trigueros (2009) para quien los resultados de la investigación muestran que, cuando se aprenden directamente los conceptos de las matemáticas no es fácil aplicarlos a la solución de problemas.

Además, es importante indicar que la modelización matemática muestra una variedad de perspectivas en el debate internacional. Por ejemplo, Kaiser y Sriraman (2006) plantean seis perspectivas de modelización: 1) la perspectiva realista, cuyo objetivo principal tiene un enfoque pragmático utilitario hacia la resolución de problemas del mundo real; 2) la perspectiva contextual, que se centra en los objetivos psicológicos, otorgando mucha importancia a la resolución de problemas de palabras; 3) la perspectiva educacional, que es la perspectiva en la que nos situamos, y que persigue objetivos pedagógicos y disciplinares tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos; 4) la perspectiva sociocrítica, que busca la comprensión crítica del mundo circundante, 5) la perspectiva epistemológica que se centra en los desarrollos teóricos del proceso de modelado; y 6) la perspectiva cognitiva, que tiene las características más bien de una metaperspectiva, ya que se centra en objetivos de investigación a través del análisis y comprensión de los procesos

cognitivos que ocurren durante el modelado, así como en objetivos psicológicos mediante la promoción de los procesos de pensamiento matemático utilizando modelos como imágenes mentales o incluso como imágenes físicas, enfatizando a la modelización como un proceso mental tanto de abstracción como de generalización

Si bien esta clasificación se constituye en un aporte importante, Trigueros (2009) manifiesta que en los actuales estudios en torno a la modelización es difícil encontrar ejemplos que caigan en una única categoría. Para este autor, aun cuando sea posible clasificarlos dentro de una de estas perspectivas, siempre estarán presentes elementos que pueden considerarse como pertenecientes a otras.

2.3.1. El ciclo de Modelización

Uno de los consensos existentes en la literatura respecto a este tema es que la modelización matemática es un proceso no lineal e iterativo, por lo que son varios los autores que plantean que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos (Carreira, Amado y Lecoq, 2011; Geiger, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Greefrath, 2011; Kaiser, 1995). Si bien estos planteamientos tienen características en común, en esta tesis asumimos el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007) (figura 1).

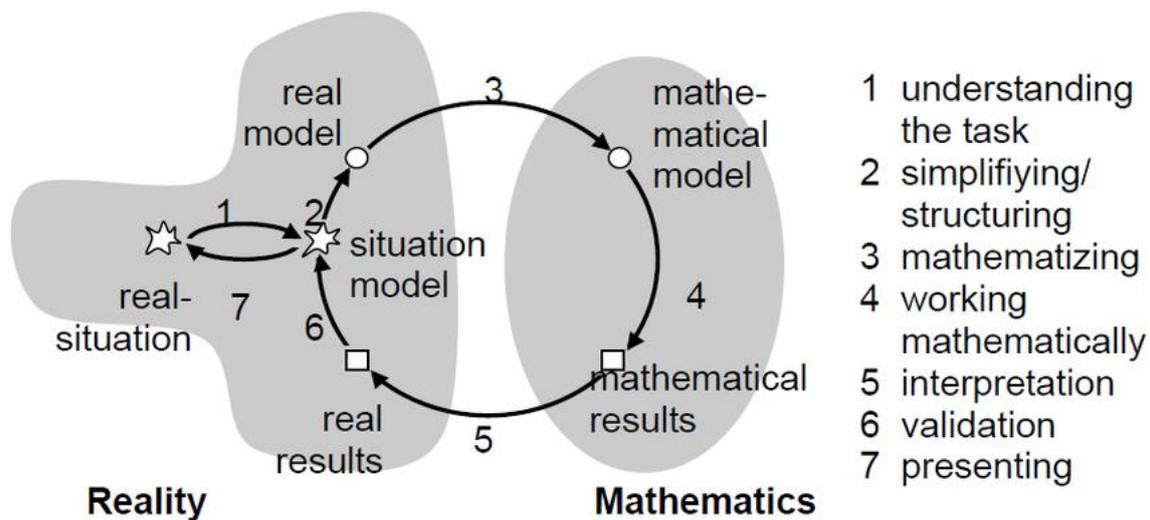


Figura 1. Ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß (2007)

Los alumnos pueden ir de un punto a otro del ciclo sin necesidad de seguir un orden establecido, y es precisamente ese camino de ida y vuelta e iterativo el que les va a permitir ir perfeccionando el modelo buscado. Como puede apreciarse en la figura 1, en la fase final es importante que los estudiantes socialicen el modelo con sus compañeros, recojan las observaciones pertinentes y realicen los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar cada vez más el modelo. En esta etapa es clave el papel que juega el profesor para que los estudiantes alcancen los objetivos propuestos.

“Students can observe how their teacher continues to embrace new questions and actively question and seek answers Teachers can demonstrate curiosity and persistence. This learning together of new facts, conventions, and approaches can be one of the most fun and rewarding parts of teaching mathematical modeling”.

(Consortium for Mathematics and Its Applications, [COMAP] & Society for Industrial and Applied Mathematics, [SIAM], 2019, p. 57).

Pero ¿cómo conseguimos que los alumnos estén en condición de generar modelos matemáticos? De acuerdo con Colwell y Enderson (2016), para que puedan usar diferentes herramientas que les ayuden a solucionar problemas en base al raciocinio, la modelación y la comunicación de sus ideas, es necesario que la formación inicial proporcione conocimientos a los futuros profesores que permitan empoderar dichas habilidades. Para estos autores, el maestro es el elemento clave ya que no solamente propone tareas, sino que además es quien debe poseer el conocimiento y la competencia profesional para apoyar a los alumnos. En un estudio preliminar, Ortiz, Rico, y Castro (2007) inciden también en la importancia de que la modelización matemática sea promovida desde la formación inicial de maestros, ya que es en este momento cuando se adquieren conceptos y procedimientos matemáticos que permitirán más adelante encontrar solución a problemas cotidianos a través del desarrollo de destrezas que el maestro pueda originar en el aula.

Sin embargo, a pesar de los beneficios de la modelización matemática tanto para la enseñanza como para el aprendizaje, existen varios estudios que evidencian las dificultades que presentan los maestros para su implementación. En este sentido, Aydin y Özgeldi (2017) y Sáenz (2009) coinciden en que los maestros en formación presentan dificultades al trabajar con modelos matemáticos para la resolución de problemas reales, en el sentido de establecer

conexiones entre el contexto y el conocimiento matemático para su resolución. Así mismo Olande (2014) concluye que, al resolver ítems de PISA 2003, las actividades que generan mayor dificultad para los maestros en formación son las que requieren reflexión y conexión entre los contenidos y el contexto, lo cual evidencia dificultades en los niveles de competencia matemática.

En síntesis, la modelización matemática requiere conocimientos, destrezas y tiempo, puesto que representa un reto tanto para los maestros en ejercicio como para los maestros en formación, por lo que es de vital importancia que se generen estrategias que favorezcan la adquisición de competencias profesionales durante la formación del profesorado (Wess y Greefrath, 2019).

2.3.2. La modelización matemática en los documentos curriculares

La modelización matemática está cada vez más presente en los planes de estudio de diferentes países. Sin embargo, son muy diversos los tratamientos que se dan en cada uno de ellos. En este sentido, Blum y Niss (1991) identificaron seis tipos de enfoques para incorporar la modelización matemática dentro de los planes de estudio. El espectro de enfoques abarca desde incorporar la modelización matemática en otras materias que no sean matemáticas, hasta no enseñar matemáticas como una materia independiente sino integrarla en otras materias o cursos para facilitar la modelización matemática.

De acuerdo con Borromeo (2013), en Alemania, Holanda, Reino Unido y los países escandinavos, por ejemplo, prima el enfoque contextual y realista, mientras que en Francia, Italia, Portugal y España tiene más presencia el enfoque

epistemológico o teórico. Trelles y Alsina, Á. (2017) en su revisión de documentos curriculares de EEUU, España y Ecuador, manifiestan que un punto en común en los currículos de estos países es la implementación gradual de los procesos de modelización, en donde los modelos concretos y los modelos gráficos visuales son utilizados predominantemente en los primeros niveles escolares (3 a 11 años); la utilización de modelos previamente establecidos de carácter un poco más formal son utilizados con más frecuencia en los niveles escolares intermedios (12 a 14 años); y, finalmente, la creación de modelos con su respectivo análisis, interpretación y juzgamiento del proceso de modelización es casi único en los últimos niveles educativos estudiados (15-18 años).

En este sentido, consideran importante que las actividades que generen importantes procesos de criticidad y reflexión se deberían comenzar a plantear desde las primeras edades. Además, estos autores encontraron que en Estados Unidos -cuyas orientaciones sirven de orientación para el diseño de los currículos de matemáticas de muchos países- es una fortaleza que los estándares emitidos desde el NCTM (2000) propongan trabajar la modelización matemática desde tempranas edades; sin embargo, en los niveles superiores los estándares para trabajar la modelización no son explícitos.

Por su parte, señalan también que los CCSSM (National Governors Asociation Center for Best Practices; Council of Chief State School Officers, 2010) permiten observar una mayor incorporación de la modelización matemática a lo largo de los diferentes niveles, aunque se puede notar un cierto

nivel de desarticulación, ya que existen algunos dominios en algunos niveles educativos en los cuales no se trabaja la modelización matemática. En el caso de España, los autores encontraron que a pesar de que en Educación Primaria se otorga mucha importancia a la resolución de problemas, es un inconveniente que la modelización matemática no esté incorporada de forma explícita en el currículo oficial, mientras que en el currículo ecuatoriano sí que aparece, aunque de forma desarticulada en los distintos niveles.

Esta situación mejora mucho en la Educación Secundaria y Bachillerato de ambos países, donde se puede notar un tratamiento importante a lo largo de los diferentes bloques de estudio. En términos generales, pues, se evidencia un progreso gradual de la modelización en los currículos, pero con algunos problemas de desarticulación en las primeras etapas que pueden ocasionar que el profesorado no sepa muy bien qué debe hacer en el aula.

2.3.3. La modelización matemática en las primeras etapas educativas

Tradicionalmente la modelización matemática ha sido implementada en los procesos de enseñanza-aprendizaje de niveles educativos superiores, fundamentalmente en la educación secundaria y universitaria (Barquero et al., 2014; Hernández-Martínez y Vos, 2018; Sol et al., 2011 y Trelles et al., 2019); en consecuencia, son aún escasas las investigaciones que abordan el uso de la modelización matemática en las primeras etapas educativas, a pesar de que, documentos elaborados por importantes organizaciones como el NCTM (2000) y la National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief

State School Officers (2010) recomiendan implementarla en las aulas desde los primeros niveles escolares.

Si bien en estas edades las investigaciones aún son limitadas, los trabajos pioneros de English (1996, 1997, 2004, 2006, 2010) permiten tener evidencia acerca del desarrollo de los procesos de modelización del alumnado de estos niveles, concretamente plantean que la modelización matemática propicia que los niños desarrollen ideas propias y procesos matemáticos en el marco de la resolución de problemas reales. Por su parte, investigaciones más recientes como las de Alsina et al. (2021), English (2014), English y Watson (2018); Ruiz-Higueras y García (2011); Ruiz-Higueras et al. (2013), Toalongo et al. (2022), Trelles et al. (2022a, 2022b) permiten comprender los procesos de modelización matemática desde diferentes enfoques, como por ejemplo desde el punto de vista numérico, algebraico, geométrico y estadístico. A su vez, investigaciones más recientes como la de Toalongo et al. (2021) sugieren que los procesos de modelización matemática pueden ser desarrollados incluso por alumnado de Educación Infantil, logrando una verdadera conexión de significados de los objetos matemáticos y su utilidad en la vida cotidiana.

En lo que concierne al tratamiento que se da a la modelización matemática en los documentos curriculares dirigidos a estos niveles educativos, Trelles y Alsina (2017) al realizar un estudio de estos documentos a nivel de España, Ecuador y Estados Unidos, encontraron que la modelización matemática sí está presente en estos documentos, y que uno de los aspectos comunes es la implementación

progresiva de los procesos de modelización, siendo los modelos concretos y los modelos gráfico visuales los que predominan en los currículos de estas edades.

2.3.4. Las model-eliciting activities (MEA's)

Son varias las propuestas existentes para implementar la modelización matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje, por ejemplo, Albarracín (2017), Ferrando y Navarro (2015), Gallart et al. (2019), Trelles et al. (2019), entre otras. En nuestro estudio, asumimos las Model-eliciting activities (MEA's), propuestas por Lesh et al. (2000) y Lesh y Doerr (2003). Estas actividades están fundamentadas en seis principios: 1) construcción, 2) realidad, 3) autoevaluación, 4) documentación, 5) prototipo efectivo y 6) generalización. Además, estas actividades se caracterizan por ser abiertas, lo que implica que no existen respuestas únicas, ni siquiera respuestas incorrectas, tan solo unas más eficaces que otras de acuerdo a las condiciones iniciales del problema y a los supuestos planteados por el alumnado; otra característica es que se trabajan normalmente en grupos reducidos de máximo cuatro alumnos, su duración es de aproximadamente dos o tres sesiones de clase, y normalmente se pide al alumnado que mediante una carta asesore a las personas o instituciones que tienen interés en conocer la solución del problema, aquí explicarán detalladamente los procesos utilizados para la solución.

2.4. Los problemas de Fermi

De acuerdo con Ärlebäck (2009), los problemas de Fermi son enunciados que proponen problemas de situaciones abiertas y no estandarizadas. Estas situaciones pretenden que los estudiantes, a través de sus conocimientos previos, estructuren ideas y den respuesta a las necesidades de esa situación en particular. Para ello, se usa la estimación de cantidades como estrategia que permite dar respuestas mediante cálculos sencillos, de acuerdo con su nivel de escolaridad.

En este sentido, para Sriraman y Knott (2009), los problemas de Fermi deben ser considerados como problemas que permitan a los estudiantes estimar cantidades ante una situación particular, de tal manera que, de forma didáctica, se inicie con ideas iniciales a través de operaciones sencillas hasta concluir con cálculos que requieren más fundamentación en cuanto a cantidades y variables para dar respuesta al problema.

Finalmente, es importante mencionar que se pueden realizar actividades de modelización matemática recogiendo algunos de los planteamientos de los problemas de Fermi. Así, por ejemplo, según Ärlebäck (2011) la utilización de problemas de Fermi en las aulas contribuye a que los estudiantes se acerquen a actividades de modelización matemática, por las siguientes razones: a) pueden ser desarrolladas por los estudiantes en cualquier etapa escolar sin poseer un conocimiento específico en matemáticas, b) desarrollan la capacidad de estructurar y seleccionar información importante para la resolución del problema, c) desarrollan estrategias específicas de acuerdo al problema que se

presenta, d) los estudiantes están en capacidad de estimar cantidades sin que posean datos numéricos específicos y, f) fomenta el pensamiento crítico, reflexión y argumentación frente al punto de vista de otros estudiantes.

Para que el aprendizaje sea más efectivo, debemos conseguir que los alumnos reflexionen sobre aquello que están aprendiendo.

-Héctor Ruiz-

3. METODOLOGÍA

Al hablar de la metodología que guía el presente trabajo podemos indicar que nos enmarcamos bajo el paradigma pragmático que según Creswell y Garret (2008) es un enfoque filosófico en donde las preguntas de investigación son el componente principal del trabajo investigativo, consecuentemente se pueden utilizar diferentes métodos con el propósito de responderlas. De este modo, hemos asumido un enfoque metodológico mixto, específicamente el método cualitativo mixto, el cual en palabras de Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) se caracteriza por tener un predominio del enfoque cualitativo frente al cuantitativo.

De esta manera, para cumplir con el objetivo de analizar los conocimientos del profesorado respecto al proceso de evaluación de los aprendizajes se utilizó un diseño metodológico mixto, pues a través del uso de datos cuantitativos y cualitativos se busca el estado de la cuestión. Según Hernández-Sampieri et al. (2014) la mayoría de los problemas de investigación se constituyen por dos realidades: una objetiva y otra subjetiva lo que justifica la pertinencia de la utilización de métodos mixtos.

De aquí que, en concordancia con los planteamientos de García (2004) se elaboró un cuestionario con preguntas abiertas, cerradas y semi-cerradas para obtener datos de fuentes primarias, en nuestro caso profesorado en activo. El cuestionario fue validado mediante juicio de expertos en la temática, quienes aportaron significativamente para obtener la versión final del mismo. Los

participantes del estudio fueron seleccionados a través de un muestreo no probabilístico por conveniencia (Otzcen y Manterola, 2017). En este caso, se contó con la participación voluntaria de 32 profesores en activo de la provincia de Girona-España, de quienes 26 eran mujeres y 6 eran varones.

Para el análisis de datos se consideraron los planteamientos de Miles y Huberman (1994) para encontrar semejanzas y diferencias entre lo que aporta la literatura sobre el tema y los conocimientos del profesorado participante. Para ello se consideraron los siguientes componentes: 1) reducción de datos: se establecieron categorías para identificar de forma ágil y rápida la esencia de las respuestas obtenidas a través del cuestionario; 2) disposición de datos: una vez con los datos reducidos y categorizados se examinan las unidades de análisis para interrelacionar la información y extraer conclusiones; 3) elaboración y verificación de conclusiones: se contrastan y corroboran semejanzas y diferencias para consolidar las conclusiones.

En cuanto al objetivo de analizar a través del ciclo de modelización matemática los conocimientos que moviliza el alumnado de educación infantil al resolver un problema de la vida real se ha considerado utilizar un estudio cualitativo de tipo exploratorio de acuerdo con McMillan y Schumacher (2005). Para ello se planteó una actividad de modelización a un grupo de 19 niños de 5-6 años de acuerdo con los lineamientos teóricos de las Model-eliciting activities propuestos por Lesh et al. (2000). Para esta actividad no se conformaron grupos de trabajo tal como lo recomienda la literatura al momento de desarrollar

actividades de modelización por las siguientes razones: la edad de los niños, el número de alumnos y por ser la primera vez que tanto los alumnos como la maestra trabajaban con una actividad de este tipo. La actividad de modelización fue desarrollada durante seis sesiones y grabada en audio y video para posteriormente ser transcrita y codificada, el análisis se realizó a través de la rúbrica REMMP (Toalongo et al., 2022), la misma que permitió describir y analizar el proceso de modelado desarrollado por el alumnado de estas edades.

En lo concerniente al objetivo de diseñar una rúbrica para evaluar los procesos de modelización matemática desarrollados por estudiantes de los diferentes niveles educativos, se concibió el diseño de la rúbrica REMMP como una ayuda tanto para el profesorado como para los investigadores, ya que los documentos curriculares de muchos países fomentan la utilización de la modelización matemática en los diferentes niveles escolares; sin embargo, no explican la forma de ponerla en práctica en el aula y la forma de evaluarla.

Para la rúbrica se desarrollaron 4 fases, en la primera fase se realizó la revisión de literatura en las principales bases de datos como Web of Science, Scopus y Dialnet con los siguientes criterios: 1) publicaciones entre los años 2005 y 2022; 2) los documentos debían ser artículos, libros o capítulos de libros, y 3) en el título o resumen debían constar las palabras clave: *assessment*, *mathematical* y *modelling*; los documentos más relevantes fueron considerados como un punto de partida para la elaboración de la rúbrica.

En la segunda fase se realizó un primer diseño de la rúbrica considerando las fases de modelización propuestas por Blum y Leiß (2007). En este sentido, con base en los procesos de modelización matemática establecimos los “elementos de la rúbrica” ya que de acuerdo con Sanmartí y Mas (2016) estos elementos son los componentes más relevantes del conocimiento que se pretende analizar. Luego se determinó y planificó el orden de los criterios de rendimiento a los cuales se los denominó “ítems” que según Osterlind (1989) son unidades de medida compuestas por un estímulo y una forma de respuesta que a su vez proporciona información del elemento que se quiere analizar considerando que a más de cubrir el significado de referencia total del elemento a evaluar se debe garantizar una validez satisfactoria tal como lo indican Millman y Greene (1989).

La Fase 3 fue la validación mediante juicio de expertos, para lo cual se envió una carta de invitación por correo electrónico a 12 expertos con experiencia en investigación en modelización matemática en educación en algún nivel escolar, de quienes cuatro eran de Estados Unidos y ocho de España. De ahí que se tuviera la colaboración de tres revisores de Estados Unidos de los cuales dos tenían experiencia en educación secundaria y universitaria y uno en educación primaria; y cinco de España de los cuales dos tenían experiencia en educación infantil, dos en educación primaria y uno en educación universitaria. Dichos resultados fueron analizados a través del coeficiente de validez de contenido (CVR) propuesto en un inicio por Lawshe (1975) y posteriormente modificado por Tristán-López (2008), en donde una vez aplicada la fórmula de CVR' ésta

debe tener un índice mayor o igual a 0,58 para que un ítem sea validado. Asimismo, para conocer el índice de validez de todo el instrumento se aplicó la fórmula:

$$CVI = \frac{\sum_{i=1}^M CVR_i}{M}$$

Donde CVR_i = ratio de validez de contenido de los ítems aceptables según los criterios de Lawshe; y M = total de ítems aceptables del instrumento.

Finalmente, en la Fase 4 se codificaron a cada uno de los expertos como R1, R2,... R8 y se incorporaron, eliminaron o reformularon los ítems de la versión inicial de la rúbrica, además se consideró unificar los niveles educativos de 12-16 años y 16-18 años en un solo nivel por la similitud de contenido de los ítems, obteniendo la versión final de la rúbrica REMMP con tres niveles educativos ya que al igual que Wess y Greefrath (2019) consideramos que la modelización matemática requiere de conocimientos, habilidades y tiempo, por ello es necesario generar estrategias que favorezcan la adquisición de competencias profesionales tanto para los profesores en activo como para aquellos profesores en formación.

En el objetivo de describir y comprender la producción de estudiantes ecuatorianos de educación primaria al enfrentarse a una actividad de modelización matemática se utilizó un paradigma interpretativo, con un enfoque metodológico de diseño mixto, específicamente cualitativo-cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018) en donde predomina lo cualitativo. A

partir de esto, el enfoque cualitativo nos permitió diseñar un estudio de caso descriptivo (Coller, 2005; Yin, 2018) para identificar y describir los elementos claves del objeto de estudio. En cuanto al enfoque cuantitativo se realizó un análisis de contenido cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018; Krippendorff, 2018), para identificar qué fase del ciclo de modelización tiene mayor presencia en el desarrollo de la actividad presentada a los estudiantes.

La actividad de modelización matemática se realizó en dos momentos, la primera parte se desarrolló con 24 estudiantes de sexto grado de Educación General Básica, y para la segunda parte de la actividad se seleccionó a dos niñas quienes presentaron la mejor propuesta en la primera parte de la actividad.

El desarrollo de la actividad fue videograbada y tuvo una duración de 123 minutos con pequeñas pausas, posterior a esto, se realizó la debida transcripción del desarrollo de la actividad y a partir de estos datos se realizó un análisis de contenido de carácter cualitativo de forma separada por los autores para luego llegar a un consenso a través de un proceso de triangulación, se optó por un análisis inductivo considerando los indicadores del instrumento REMMP (Toalongo et al., 2022) para educación primaria.

Las unidades de análisis fueron los 882 diálogos y producciones realizados por los participantes de la investigación, las categorías guardan relación con la fundamentación teórica del estudio y están formadas por cada fase del ciclo de modelización.

Finalmente, consideramos que, a partir de una revisión minuciosa de la literatura previa se ha podido asumir algunos referentes teóricos como punto de partida para el desarrollo de esta investigación, como por ejemplo lo referente a técnicas e instrumentos de evaluación propuesto por Hamodi et al. (2015), la perspectiva educacional de la modelización matemática de Kaiser y Sriraman (2006), el ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007), las Model-eliciting activities (MEA's), propuestas por Lesh et al. (2000) y Lesh y Doerr (2003). Estos planteamientos teóricos han incidido en varios aspectos de la investigación, como por ejemplo en la formulación de la pregunta de investigación, el procedimiento para la recolección de los datos empíricos, la selección de las unidades de análisis, etc., consecuentemente nos llevaron a seleccionar el método cualitativo mixto como el más idóneo para alcanzar los objetivos de la investigación.

El trabajo del maestro no consiste tanto en enseñar todo lo aprendible, sino en producir en el alumno amor y estima por el conocimiento.

-Jhon Locke-

4. RESULTADOS

4.1. Artículos publicados

4.1.1. Artículo 1

Toalongo-Guamba, X.; Alsina, Á.; Trelles-Zambrano, C. y Acosta, Y. (2021). Conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial del alumnado con talento matemático. *Educare Electronic Journal*. 25(1), 1-23. <http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

Índices de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,237 en SJR. Cuartil 3 (2022).
- Se encuentra indizada también en Web of Science (ESCI), Scielo, Redalyc, DOAJ, Latindex Catálogo (38 de 38 características cumplidas).

Conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial del alumnado con talento matemático

Teachers' Knowledge on the Competence Evaluation of Students with Mathematical Talent

Conhecimento dos professores sobre a avaliação de competências de alunos com talento matemático



Ximena Toalongo-Guamba

Universidad de Girona
Girona, España

ximena.toalongo@udg.edu



<https://orcid.org/0000-0001-6163-4574>

Ángel Alsina

Universidad de Girona
Girona, España

angel.alsina@udg.edu



<https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

César Trelles-Zambrano

Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador

cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec



<https://orcid.org/0000-0002-4096-8353>

Yeni Acosta

Universidad de Girona
Girona, España

yeni.acosta@udg.edu



<https://orcid.org/0000-0001-9873-2127>

Recibido • Received • Recebido: 27 / 03 / 2019

Corregido • Revised • Revisado: 08 / 08 / 2020

Aceptado • Accepted • Aprovado: 23 / 11 / 2020

Resumen: El alumnado con talento matemático recibe generalmente pocas ayudas para guiar eficazmente su proceso de enseñanza-aprendizaje, incluida la evaluación. Para empezar a transformar esta situación, en este estudio de carácter exploratorio se realiza un primer análisis sobre los conocimientos del profesorado en torno a la evaluación de la competencia matemática de este alumnado. Para obtener los datos, se ha administrado un cuestionario previamente validado mediante juicio experto a 32 profesores y profesoras en activo, quienes se seleccionaron a través de un muestreo no probabilístico por conveniencia. Los resultados muestran que existen conflictos conceptuales en el uso de la terminología de evaluación de los aprendizajes por parte del profesorado, así como desconocimiento acerca de la forma de

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

de evaluar la competencia matemática. A partir de estos datos se presentan unas primeras recomendaciones sobre la evaluación de la competencia matemática, en general, y del alumnado con talento matemático, en particular, para contribuir al desarrollo profesional del profesorado.

Palabras claves: Talento matemático; competencia matemática; evaluación de la competencia matemática; educación inclusiva; desarrollo profesional del profesorado.

Abstract: Students with mathematical talents generally receive little support to effectively guide their teaching-learning process, including assessment. This exploratory study analyzes the teachers' knowledge about assessing these students' mathematical competence to begin to transform this situation. A questionnaire previously validated by an expert judgment was administered to 32 in-service teachers to obtain the information; the teachers were selected through a non-probabilistic convenience sampling. The results show that there are conceptual conflicts in the use of assessment terminology by teachers and ignorance about assessing mathematical competence. Based on the information collected, some first recommendations on the evaluation of mathematical competence in general and of students with mathematical talent, in particular, are presented to contribute to the professional development of teachers.

Keywords: Mathematical talent; mathematical competence; assessment of the mathematical competence; inclusive education; teacher professional development.

Resumo: Estudantes com talentos matemáticos geralmente recebem pouca ajuda para orientar com eficácia seu processo de ensino-aprendizagem, incluindo a avaliação. Para começar a transformar esta situação, neste estudo exploratório, é realizada uma primeira análise sobre o conhecimento do corpo docente quanto à avaliação da competência matemática destes estudantes. Para a obtenção dos dados, foi aplicado um questionário previamente validado por julgamento de especialistas a 32 professores ativos, selecionados por meio de amostra não probabilística de conveniência. Os resultados mostram que existem conflitos conceituais no uso da terminologia de avaliação da aprendizagem, pelos professores, bem como desconhecimento sobre como avaliar a competência matemática. Com base nestes dados, são apresentadas algumas recomendações sobre a avaliação da competência matemática em geral e de estudantes com talento matemático em particular, para contribuir ao desenvolvimento profissional do corpo docente.

Palavras-chave: Talento matemático; competência matemática; avaliação da competência matemática; educação inclusiva; desenvolvimento profissional de professores.

Introducción

Una de las responsabilidades de la escuela contemporánea es afrontar los retos que surgen en el aula con base en las realidades y necesidades del alumnado, lo que requiere atender las diferentes situaciones que se presentan desde una perspectiva inclusiva.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>
<http://una.ac.cr/educare>
educare@una.ac.cr

Desde este prisma, uno de los colectivos que necesita atención urgente y prioritaria es el alumnado con altas capacidades, puesto que tradicionalmente se ha considerado que, al estar por encima de la media, no necesitan ningún tipo de atención para prosperar en los aprendizajes. Aunque ya se han dado pasos al respecto, fundamentalmente en las diferentes políticas y actividades encaminadas a su detección, hace falta todavía aportar conocimientos que permitan al personal docente en activo orientar eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos alumnos y alumnas, incluyendo la evaluación. En este sentido, se asume que no basta solo con identificar al alumnado con talento matemático, sino que es necesario, además, plantear y desarrollar una serie de adaptaciones curriculares para atenderlo de acuerdo con sus necesidades particulares (Benavides y Maz-Machado, 2012).

En efecto, nadie que tenga familiaridad con el contexto educativo desconoce que la evaluación de los aprendizajes es un aspecto crítico del proceso enseñanza-aprendizaje y, por lo tanto, un tema no siempre bien tratado. En consecuencia, el objetivo de la presente investigación es analizar el conocimiento del personal docente en activo acerca del proceso de evaluación de la competencia matemática del alumnado con talento matemático. A partir de los datos obtenidos, se van a proporcionar unas primeras orientaciones que permitan el fortalecimiento de la formación inicial y permanente del personal docente en torno a la competencia matemática y su evaluación.

Con este propósito, se ha realizado un estudio exploratorio a través de un cuestionario previamente validado, denominado Evaluación competencial del talento matemático 6-12, ECTALMAT 6-12.

La evaluación de la competencia matemática de estudiantes con talento matemático

Para fundamentar teóricamente nuestro estudio se conceptualizan tres elementos interrelacionados: 1) la evaluación de los aprendizajes; 2) la competencia matemática; y 3) el talento matemático.

La evaluación de los aprendizajes

Los estudios realizados desde las diversas agendas de investigación en educación matemática (Alsina, 2019; Llinares, 2008) han contribuido significativamente a comprender todos los factores que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, en términos generales, los estudios centrados en la evaluación de los aprendizajes son todavía escasos, sobre todo los relativos a la evaluación formativa que considera que evaluar no consiste únicamente en conocer resultados de aprendizaje, sino en identificar y comprender las dificultades y debilidades que se presentan para poder brindar herramientas adecuadas para superarlas.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

Existen diversas acepciones acerca de la evaluación que han ido evolucionando a lo largo del tiempo. Así, por ejemplo, para [Mateo \(2000\)](#), la evaluación es un proceso de reflexión sistemático cuya misión es mejorar la calidad del personal docente a través del alumnado. [Castillo Arredondo y Cabrerizo Diago \(2003\)](#) indican que la evaluación se realiza durante un período de tiempo determinado, presenta un carácter flexible y continuo; pero no resulta sencillo definirla por la multiplicidad de factores que intervienen y que, a su vez, forman un proceso dinámico, abierto y contextualizado.

Con el propósito de unificar criterios, [Prieto y Contreras \(2008\)](#) señalan que es fundamental desarrollar investigaciones sobre las concepciones de la evaluación que permitan informar acerca de las prácticas del personal docente de matemáticas para develar las disonancias, contradicciones y repercusiones posteriores en su alumnado. [Gómez Meléndez et al. \(2018\)](#) indican que existe un vacío de conocimientos sobre estos aspectos debido a la escasez de investigaciones centradas en la evaluación del aprendizaje desde enfoques de investigación cualitativos o bien integrando cualitativos y cuantitativos que aporten una visión integral de los procesos de aprendizaje del alumnado.

En relación con las técnicas e instrumentos usados, [Hamodi et al. \(2015\)](#) encontraron una gran dispersión, ambigüedad y confusión en la terminología utilizada en la literatura. Asumimos, pues, el planteamiento de estos autores y autoras:

Las técnicas de evaluación son las estrategias que el profesorado utiliza para recoger información acerca de las producciones y evidencias creadas por el alumnado (de los medios). Las técnicas a utilizar son diferentes en función de si el alumnado participa o no en el proceso de evaluación... Los instrumentos de evaluación son las herramientas que tanto el profesorado como el alumnado utilizan para plasmar de manera organizada la información recogida mediante una determinada técnica de evaluación. (p.155-156)

En términos generales, tanto el personal docente como los diferentes documentos curriculares han prestado especial atención al alumnado que presenta dificultades de aprendizaje; sin embargo, ¿qué ocurre con quienes están en el otro extremo?, ¿de qué manera las políticas educativas se han preocupado del alumnado que demuestra que tiene una gran facilidad para el aprendizaje de las matemáticas? En este aspecto, [Godino y Batanero \(1994, p. 21\)](#) plantean:

La consideración del significado de los objetos matemáticos como sistemas y la distinción entre distintos tipos de significados (personal e institucional), implica la introducción en la problemática didáctica del estudio de la estructura y caracterización de esta clase de entidades teóricas. Permite, asimismo, poner de manifiesto el carácter muestral del proceso de selección de situaciones de enseñanza y evaluación, así como de las manifestaciones o comportamientos de los alumnos, ayudando a superar la ilusión de transparencia determinista que con frecuencia se adopta al considerar estos problemas.

Competencia matemática

El término competencia, haciendo alusión al campo educativo, se concibe como el conjunto de acciones y estrategias que una persona puede tomar en un determinado momento para utilizar ese saber y conseguir la consecución de una tarea específica. Así, pues, no es simplemente algo que aprender, sino que se refiere a la información que se recibe y se adquiere para saberlo hacer (Moya Otero y Luengo Horcajo, 2011).

En cuanto a la competencia matemática, Niss (2004) la define como la capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticas, en las cuales la matemática desempeña un importante papel.

Goñi Zabala (2008) indica que la competencia matemática se vincula con: "el uso [del] conocimiento matemático en contextos de relevancia social, utilizando en cada caso la tecnología más eficiente" (p. 90).

En el marco de PISA, se considera:

La competencia matemática es la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD], 2016, p. 74)

Además, Azcárate Goded y Cardeñoso Domingo (2012) manifiestan que la competencia matemática se logra cuando los conocimientos matemáticos se aplican espontáneamente en varias situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana, lo que supondrá que el alumnado, al enfrentarse a situaciones reales, estará en condición de activar las competencias matemáticas pertinentes para solucionar problemas.

Con base en las aportaciones del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) acerca de los procesos matemáticos, la Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament (2013), categoriza la competencia matemática en cuatro dimensiones (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y, comunicación y representación) y ha establecido 10 competencias que deben ser evaluadas por el profesorado:

- 1) Traducir un problema a una representación matemática y emplear conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverlo;
- 2) dar y comprobar la solución de un problema de acuerdo con las preguntas planteadas;
- 3) hacer preguntas y generar

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

problemas de carácter matemático; 4) hacer conjeturas matemáticas adecuadas en situaciones cotidianas y comprobarlas; 5) argumentar las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos; 6) establecer relaciones entre diferentes conceptos, así como entre los diversos significados de un mismo concepto; 7) identificar las matemáticas implicadas en situaciones cotidianas y escolares y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas; 8) expresar ideas y procesos matemáticos de manera comprensible empleando el lenguaje verbal (oral y escrito); 9) usar las diversas representaciones de los conceptos y relaciones para expresar matemáticamente una situación; y, 10) usar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación, e interpretar las representaciones matemáticas que ofrecen. (p. 8)

Considerando estas competencias matemáticas, [Alsina \(2018\)](#) ha publicado un decálogo con diez ideas clave acerca de la evaluación de la competencia matemática:

1) forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; 2) sólo tiene sentido si se trabaja en la línea de desarrollar la competencia matemática; 3) implica evaluar los procesos matemáticos, más que los contenidos; 4) requiere, a menudo, el uso de rúbricas o bases de orientación; e implica, además: 5) evaluar el grado de riqueza competencial de las actividades; 6) analizar la práctica docente del profesorado; 7) plantear claramente los aspectos que se quieren evaluar; 8) analizar si se han trabajado todas las competencias; 9) aportar evidencias; y, finalmente, 10) establecer niveles de adquisición. (p. 7)

Posteriormente, [Alsina et al. \(2019\)](#) proponen un modelo que consta de cinco fases para incorporar la evaluación de la competencia matemática en el aula: 1) organización de la enseñanza de las matemáticas; 2) búsqueda de actividades matemáticas competenciales ricas; 3) concreción de las dimensiones y competencias del conocimiento matemático que deben evaluarse; 4) selección de las dimensiones y competencias que se evalúan en cada actividad; 5) diseño de instrumentos específicos de evaluación, especialmente rúbricas.

Talento matemático

Diversos estudios señalan que el talento matemático se refiere al conjunto de aptitudes, capacidades o habilidades que se sitúan significativamente por encima de la media ([Johnsen, 2004](#); [Sternberg y Kaufman, 2018](#); [Tannenbaum, 2003](#); [Werdelin, 1958](#)). En otros se identifican algunas características que presenta el alumnado con talento matemático ([de Guzmán Ozámiz, 2004](#); [Greenes, 1981](#); [Krutetskii, 1976](#)); sin embargo, estas características no difieren esencialmente de las indicadas por [Freiman \(2006\)](#), para quien el alumnado con talento matemático hace preguntas que van más allá de una tarea matemática, busca patrones y

relaciones, construye enlaces y estructuras matemáticas, produce ideas originales y profundas, pone atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, piensa críticamente y persiste en el logro de los objetivos.

Para [Benavides y Maz-Machado \(2012\)](#), tradicionalmente, las acciones realizadas sobre el talento matemático estaban centradas en identificar al alumnado con este tipo de talento. Tan solo en los últimos años la cuestión se enfoca en determinar cómo atender a estos grupos de estudiantes. En este sentido, actualmente se está considerando lo planteado por [Krutetskii \(1976\)](#) acerca de la importancia de la resolución de problemas, tanto en la detección como en el desarrollo del talento matemático.

Consecuentemente, [Pasarín Vázquez et al. \(2004\)](#) advierten que los vacíos existentes en el currículo pueden ocasionar que el alumnado se centre únicamente en el dominio de resolución de operaciones y algoritmos, al dejar de lado aquellas destrezas y habilidades que le permiten desarrollar su talento matemático.

Ante esta realidad, uno de los grandes desafíos es llevar a la práctica los planteamientos de la educación inclusiva. Para la [Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament \(2015\)](#), la inclusión implica un cambio en las expectativas de aprendizaje del alumnado, reconocer las posibilidades de aprender unas personas de otras y un trabajo interactivo de profesionales para dar respuestas adecuadas a las necesidades del alumnado, a fin de que la totalidad tenga la oportunidad de participar, de ser valorada y de alcanzar los fines de la educación.

Para [Castro et al. \(2015\)](#); acelerar a estudiantes con talento matemático a cursos superiores es una de las formas de atender sus necesidades, otro mecanismo es proporcionarles frecuentemente tareas desafiantes que estimulen su talento.

Resulta, entonces, indudablemente necesario, contar con profesorado capacitado para atender a diversos colectivos, tanto al que presenta dificultades de aprendizaje, como a aquellos que presentan determinados talentos, entre estos el matemático. Por lo tanto, coincidimos con el NCTM (2000) en el sentido que no se debe entender la igualdad como un proceso de enseñanza-aprendizaje idéntico y estandarizado para todas las personas, sino al contrario, exige adaptaciones razonables de acuerdo con sus capacidades.

Con base en los antecedentes expuestos, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo evalúa el profesorado al alumnado con talento matemático?

De esta pregunta se derivan dos objetivos: 1) analizar el conocimiento del personal docente en activo acerca del proceso de evaluación de la competencia matemática del alumnado con talento matemático; 2) ofrecer unas primeras orientaciones para fortalecer la formación inicial y permanente del personal docente en torno a la evaluación de la competencia matemática.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

Método

El presente estudio es de carácter exploratorio, debido a la escasa investigación en el tema de la evaluación de los aprendizajes del alumnado con talento matemático, por tanto, no se formulan hipótesis; sin embargo, durante el proceso investigativo se pretenden formular algunas, así como nuevas perspectivas que sienten las bases de futuras investigaciones.

El estudio se sitúa dentro del paradigma interpretativo con un diseño metodológico mixto, pues a través de una combinación de datos cuantitativos y cualitativos se pretende conocer el estado de la cuestión. Coincidimos con [Hernández Sampieri et al. \(2014\)](#) en el sentido de que la naturaleza compleja de la gran mayoría de fenómenos o problemas de investigación están constituidos por dos realidades: una objetiva y otra subjetiva, lo que hace que la utilización de métodos mixtos sea muy pertinente.

Diseño y procedimiento

Para indagar acerca del conocimiento del personal docente en torno a la evaluación de los aprendizajes del alumnado con talento matemático, se ha diseñado el cuestionario *ESTALMAT 6-12* con preguntas abiertas, cerradas y semi-cerradas. [García Córdoba \(2004\)](#) manifiesta que el cuestionario permite la recolección de datos provenientes de fuentes primarias, es decir, de personas que poseen información relevante para los objetivos de la investigación. Para el diseño, construcción y validación del cuestionario se tomaron como referencia algunas de las fases de la investigación de [Alsina y Coronata \(2014\)](#), esto es: 1) estudio de investigaciones sobre evaluación y talento matemático en las prácticas docentes del personal docente de Educación Primaria, 2) análisis del tratamiento otorgado a la evaluación de los aprendizajes y al talento matemático en la legislación vigente, 3) construcción de la versión piloto del cuestionario, considerando las competencias básicas del ámbito matemático emitidas por la [Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament \(2013\)](#), 4) revisión mediante el juicio de expertos y, 5) construcción de la versión final del cuestionario. Las fases 1 y 2 nos han permitido ubicar lo trabajado al momento en torno a la temática, estableciendo un punto de partida teórico que ha contribuido a sustentar las preguntas del cuestionario, en tanto que las fases 3, 4 y 5 se centran específicamente en la construcción y validación del instrumento.

La fase de validación del cuestionario se realizó con 7 investigadores expertos en la temática que forman parte del Grupo de Trabajo "Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Para ello, se les entregó una primera versión y se les pidió que valoraran los siguientes aspectos: 1) determinar si las preguntas permitían obtener los datos suficientes para cumplir con los objetivos de la investigación, 2) la formulación, fundamentalmente con relación al lenguaje que se utiliza en cada una de las preguntas y 3) aspectos adicionales a ser considerados.

La valoración del cuestionario por parte del juicio de expertos contribuyó a: 1) reformular algunas de las preguntas, 2) incluir preguntas relacionadas con el conocimiento por parte del personal docente sobre las competencias matemáticas a ser alcanzadas por el alumnado, 3) establecer un equilibrio entre preguntas relacionadas con evaluación de los aprendizajes, talento matemático y competencia matemática y, 4) clarificar la terminología utilizada con el objetivo de evitar conflictos conceptuales. Luego de este proceso se consiguió la versión final del cuestionario ([Apéndice A](#)).

Participantes

La selección de la muestra se llevó a cabo mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia ([Otzen y Manterola, 2017](#)), con la participación voluntaria del personal docente en activo de diferentes instituciones educativas de la provincia de Girona-España, a las cuales tenía acceso el equipo investigador. La muestra estuvo conformada por 32 profesores, 26 mujeres y 6 hombres.

Análisis de datos

Para el análisis de los datos se ha seguido los planteamientos de [Miles y Huberman\(1994\)](#) con el objetivo de encontrar semejanzas y diferencias entre lo que aporta la literatura sobre el tema y los conocimientos del personal docente participante en la investigación. Específicamente se han considerado los siguientes componentes de análisis: 1) reducción de datos: establecimiento de categorías que permitan identificar fácil y rápidamente la esencia de las respuestas recogidas a través del cuestionario; 2) disposición de datos: a partir de los datos reducidos y categorizados se examinan las unidades de análisis con el fin de interrelacionar la información y extraer conclusiones; 3) elaboración y verificación de conclusiones: se buscan semejanzas y diferencias para contrastar y corroborar las conclusiones que se van consolidando.

El análisis cuantitativo de los datos ha sido realizado a través de un análisis estadístico con el programa informático Excel 2016 de Microsoft Office, mientras que los datos cualitativos han sido analizados, con el programa Atlas.ti V8.

Resultados

A continuación, se exponen las respuestas obtenidas a partir del cuestionario Evaluación Competencial del Talento Matemático 6-12, ECTALMAT 6-12.

Evaluación de la competencia matemática

A la pregunta ¿qué entiende por evaluación?, ver [Figura 1](#), un 37.5% del personal docente conceptualiza la evaluación como un proceso que controla y regula el proceso de enseñanza-aprendizaje. A modo de ejemplo, una de las participantes, indica:

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

La evaluación es un método para controlar y modificar todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. (Respuesta de una profesora a la pregunta 1 del cuestionario ECTALMAT 6-12, 2018)

El 34.4% manifiesta que es un proceso para evidenciar y comprobar los aprendizajes del alumnado, por ejemplo, una profesora contestó:

Proceso para ver cómo va el aprendizaje de un alumno. (Respuesta de una profesora a la pregunta 1 del cuestionario ECTALMAT 6-12, 2018)

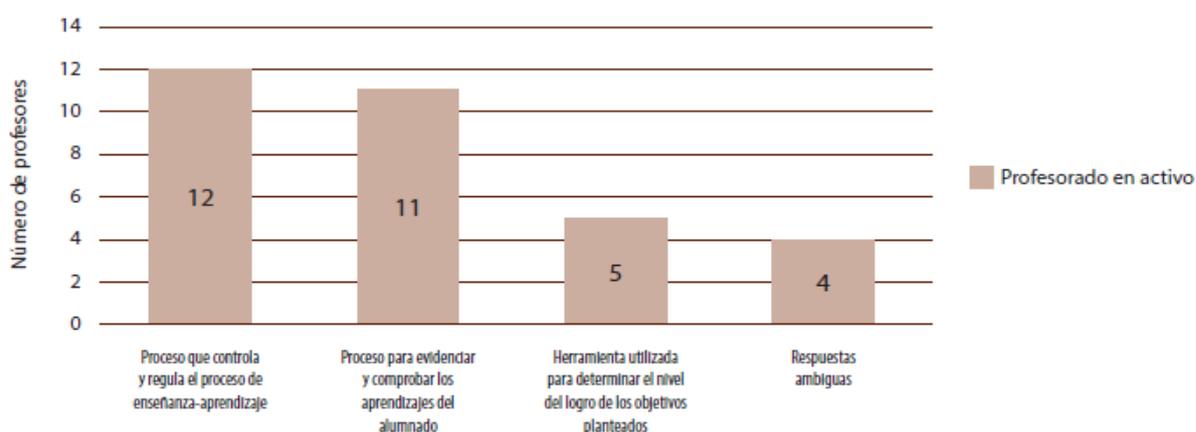
Un 15.6% responden que es una herramienta utilizada para determinar el nivel del logro de los objetivos planteados, una profesora contesta:

La comprobación de que los alumnos han adquirido los objetivos que nos habíamos planteado. (Respuesta de una profesora a la pregunta 1 del cuestionario ECTALMAT 6-12, 2018)

Y el 12.5% da respuestas ambiguas referentes al concepto de evaluación, en este caso como ejemplo una profesora responde:

Evaluar su aprendizaje. (Respuesta de una profesora a la pregunta 1 del cuestionario ECTALMAT 6-12, 2018)

Figura 1: Concepto de evaluación por parte del profesorado



Nota: Elaboración propia con base en los resultados del cuestionario ECTALMAT 6-12.

Otro aspecto considerado en el cuestionario tiene que ver con las técnicas e instrumentos de evaluación utilizados por el personal docente.

Al respecto, existe diversidad de técnicas utilizadas por el personal docente, siendo la observación (56.3%) la técnica predominante, otras que se mencionan son autoevaluación,

observación, coevaluación, análisis de producción de alumnos, sin embargo, se evidencia un considerable porcentaje del personal docente (28.1%) que no mencionan ninguna técnica en sus respuestas.

Situación similar sucede con los instrumentos de evaluación, la tercera parte del personal docente (31.3 %) utilizan la rúbrica, seguida de listas de cotejo, registro de tareas, tablas de registros, en contraparte, la mayoría del profesorado (59.4 %) no mencionan ningún instrumento de evaluación en sus respuestas.

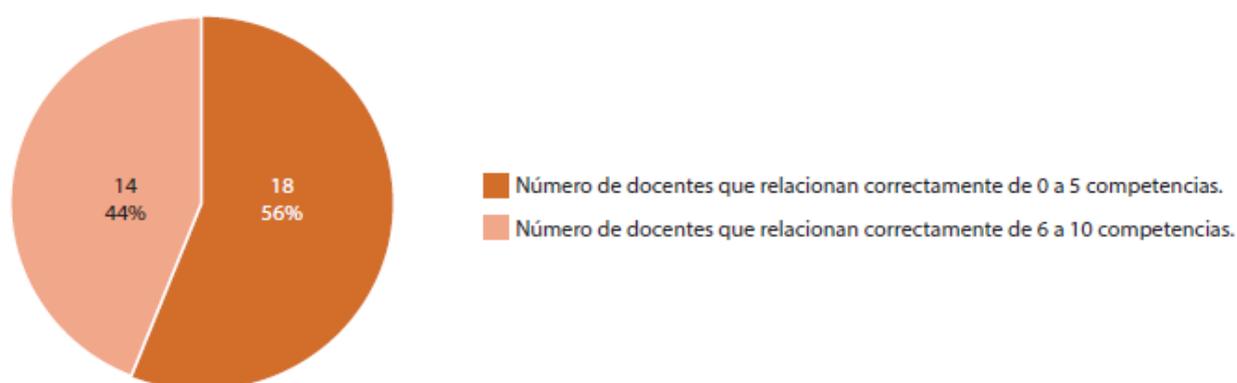
Además, 25 profesores (78.1 %) en sus respuestas mencionan al menos un medio para la evaluación, tales como: exámenes, materiales, dianas, ejercicios, resolución de problemas, etc. Este aspecto deja en evidencia que existen dificultades por parte del personal docente en el uso de la terminología adecuada relacionada con la evaluación de los aprendizajes.

En lo referente a los criterios valorativos para evaluar la competencia matemática, 2 docentes (6.3 %) indican que se debe evaluar de forma cuantitativa, 12 (37.5 %) de forma cualitativa y 18 (56.3 %) consideran la utilización simultánea de ambos criterios.

Las dos personas que se inclinan por el criterio valorativo cuantitativo es porque se evalúa de forma rápida; por otro lado, 12 optan por el criterio valorativo cualitativo porque es de mejor calidad y evidencia si el alumnado es competente, para este grupo tiene mayor importancia el interés y motivación que los resultados. Y para los 18 que optaron por los dos criterios valorativos indican que los dos son importantes y se complementan entre sí, porque permiten identificar de dónde se parte y hacia dónde se quiere llegar, en su criterio, es una manera de personalizar el aprendizaje.

La **Figura 2** muestra las respuestas del profesorado al situar las 10 competencias matemáticas en la dimensión correspondiente. Los resultados evidencian que la mayoría del profesorado presenta dificultades para relacionarlas adecuadamente.

Figura 2: Relación de las Competencias Básicas con su respectiva dimensión



Nota: Elaboración propia con base en los resultados del cuestionario ECTALMAT 6-12.

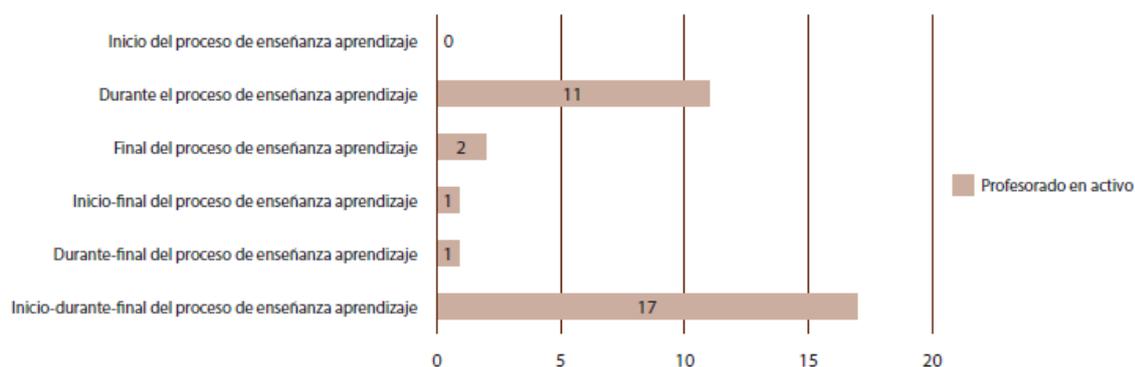
<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

La **Figura 3** muestra los resultados respecto al momento ideal para la evaluación.

Figura 3: Momento preferido por el profesorado para evaluar la competencia matemática

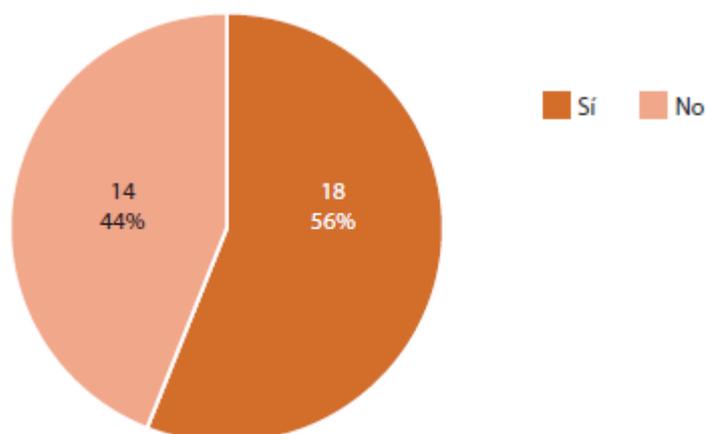


Nota: Elaboración propia con base en los resultados del cuestionario ECTALMAT 6-12.

Evaluación de estudiantes con talento matemático

La **Figura 4** presenta el número y porcentaje de docentes que han trabajado con estudiantes con talento matemático durante su ejercicio profesional.

Figura 4: Profesorado en activo que ha trabajado con estudiantes con talento matemático



Nota: Elaboración propia con base en los resultados del cuestionario ECTALMAT 6-12.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

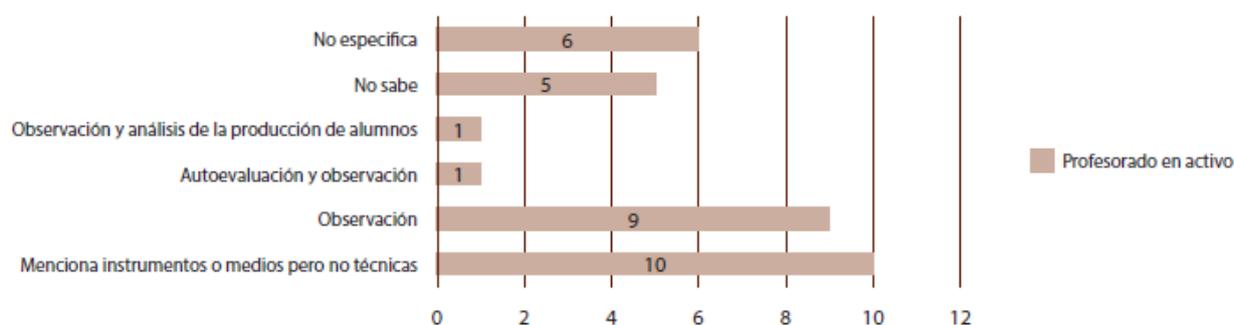
Ahora, de 18 docentes que han tenido estudiantes con talento matemático en los últimos cinco años de su ejercicio profesional, seis (33 %) han trabajado con 1 estudiante, dos (11 %) han tenido 2, cinco (28 %) han tenido 3 y cinco (28 %) indican que han trabajado con más de 3; además, el profesorado indica que no ha tenido ningún tipo de capacitación previo al trabajo en el aula con este colectivo, salvo una profesora que manifiesta que ha recibido una capacitación previa, como ejemplo dice lo siguiente:

Sí, cada verano cursos semanales con profesionales de la materia e implicación en proyectos extracurriculares (Respuesta de una profesora a la pregunta 8 del cuestionario ECTALMAT 6-12, 2018)

Respecto a la pregunta ¿qué tipo de criterios valorativos emplearía para evaluar el logro de la competencia matemática del alumnado con talento matemático? se tiene: 5 (15.6 %) consideran adecuado utilizar únicamente criterios valorativos cuantitativos, justifican su elección principalmente porque en su opinión son más rápidos de utilizar; en contraposición 26 docentes (81.3 %) optan por utilizar criterios valorativos únicamente cualitativos, sus argumentos están relacionados con los razonamientos y las explicaciones que surgen al resolver las cuestiones matemáticas por parte de este tipo de alumnado; y apenas 1 docente (3.1 %) considera que los dos criterios valorativos son válidos porque se complementan entre sí.

Por su parte, en la **Figura 5** se muestran las técnicas que utilizaría el profesorado para evaluar al alumnado con talento matemático, donde, el 31.2 % no menciona técnicas y la observación con un 28.1 %, sería la elección preferida.

Figura 5: Técnicas para evaluar la competencia matemática del alumnado con talento matemático



Nota: Elaboración propia con base en los resultados del cuestionario ECTALMAT 6-12.

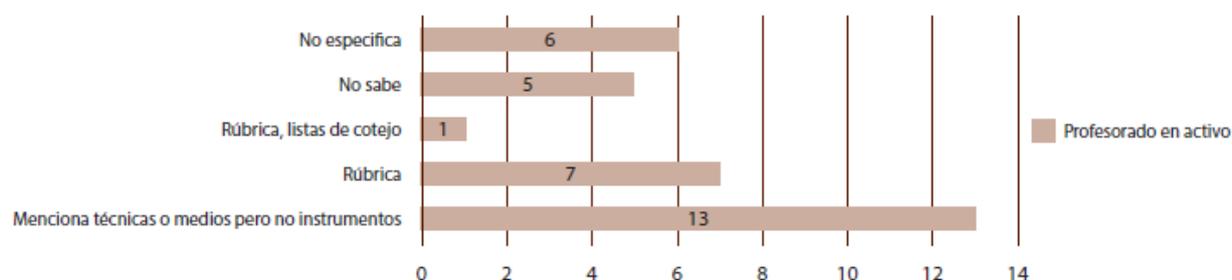
La **Figura 6** muestra que el profesorado, en un porcentaje de 40.6 %, no menciona instrumentos, y que la rúbrica, con un 21.9 %, sería el instrumento más utilizado.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

Figura 6: Instrumentos para evaluar la competencia matemática del alumnado con talento matemático



Nota: Elaboración propia con base en los resultados del cuestionario ECTALMAT 6-12.

Discusión y conclusiones

Tradicionalmente, el alumnado con talento matemático ha recibido poco apoyo desde la escuela para guiar eficazmente su proceso de enseñanza-aprendizaje, incluyendo la evaluación. Así pues, los conocimientos que tenga el personal docente para atender las necesidades de este colectivo son fundamentales. Por esta razón, se han analizado los conocimientos del personal docente sobre evaluación de la competencia matemática de este colectivo estudiantil, estos resultados permiten brindar orientaciones para mejorar la práctica profesional docente.

Los datos obtenidos han revelado una falta de conocimiento del personal docente en aspectos relacionados con la evaluación de la competencia matemática que dé respuesta a todo el alumnado, incluido el que tiene talento matemático. Una de las razones, probablemente, es la manifestada por [Hamodi et al. \(2015\)](#), quienes, después de una revisión de la literatura especializada, encontraron que existe confusión en el uso de la terminología relacionada con la evaluación de los aprendizajes.

En torno al concepto de evaluación, apenas el 37.5 % del personal docente expresa un concepto cercano a lo que se entiende en la literatura por evaluación de los aprendizajes, lo que incide de manera directa en el alumnado. Para [Prieto \(2008\)](#), las creencias del personal docente sobre la evaluación tienen efectos que acarrear profundas consecuencias en el alumnado, algunas de las cuales pueden ser bastante críticas y desfavorables. Por su parte, [Quinquer Vilamitjana \(1999\)](#) considera que la forma en cómo se aborda la evaluación de los aprendizajes tiene relación directa con las concepciones que tiene el personal docente sobre la enseñanza- aprendizaje.

Además, preocupa el hecho de que el 56% del personal docente no relaciona correctamente las competencias matemáticas a evaluarse con sus respectivas dimensiones, pues esta situación incide de manera directa en el proceso de evaluación. Tal como indican [Pérez Ferra y Gonçalves \(2013\)](#), el personal docente además de situar a sus estudiantes en

las mejores condiciones de aprender, debe también definir los criterios e instrumentos que permitan valorar el nivel de dominio de las competencias a ser adquiridas por sus grupos. En este sentido, si el personal docente no relaciona adecuadamente las competencias matemáticas y sus dimensiones, es muy probable que este proceso descrito anteriormente no sea adecuado.

En relación con los conocimientos del personal docente acerca de la evaluación de los aprendizajes del alumnado con talento matemático, los resultados muestran que existe una falta de conocimiento importante en torno a este tema, que es una de las principales evidencias obtenidas en este estudio. Este dato se vincula con los hallazgos de [Acosta y Alsina \(2017\)](#), quienes identificaron una falta de conocimiento del profesorado para detectar al alumnado con talento matemático y para llevar a cabo una intervención educativa eficaz e inclusiva, aunque en su estudio no analizaron los conocimientos acerca de la evaluación.

Asimismo, [Jaime y Gutiérrez \(2014\)](#) manifiestan que uno de los problemas actuales en las clases de matemáticas es que se consideran los grupos de clase como si fueran homogéneos, salvo para el alumnado con dificultades de aprendizaje, como consecuencia de ello, las necesidades de quienes poseen talento matemático no son atendidas.

Además, los datos evidencian que la mayoría del profesorado utiliza únicamente la observación y la rúbrica como técnica e instrumento de evaluación, y desaprovecha otras técnicas muy valiosas, por ejemplo: el análisis documental y de producciones, la autoevaluación, la evaluación entre pares, la evaluación compartida; así como algunos instrumentos como: fichas de observación, listas de control, fichas de autoevaluación, entre otros. Estos resultados corroboran los encontrados por [Rochera et al. \(2002\)](#) en el sentido de que el profesorado de educación primaria emplea mayoritariamente la observación en sus prácticas evaluativas. Al respecto, estamos de acuerdo con [Trelles-Zambrano et al. \(2017\)](#), para quienes son muchas las técnicas que se pueden aprovechar para evaluar los aprendizajes en la asignatura de Matemáticas y que la utilización de estas dependerá del conocimiento y de la experiencia del profesorado para poder usarlas en la particularidad de los contextos que se presentan en el proceso educativo.

Asimismo, la mayoría del personal docente (53.1 %) considera que la evaluación debe ser realizada al inicio, durante y al final del proceso de enseñanza-aprendizaje, datos que igual coinciden con la investigación de [Rochera et al. \(2002\)](#).

Un aspecto importante es que el 56 % del personal docente dice haber tenido en sus aulas estudiantes con talento matemático; sin embargo, solo una profesora (3.1 %) ha recibido formación específica para trabajar con este tipo de alumnado. Esto evidencia la urgencia de intervenir en la formación inicial y continua del profesorado en estos temas.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

Considerando las lagunas de conocimiento detectadas en nuestro estudio acerca de la evaluación de la competencia matemática en general y del alumnado con talento matemático en particular, se proporcionan unas primeras recomendaciones para contribuir al desarrollo profesional docente:

- Incorporar en la formación inicial de los maestros y las maestras conocimientos que permitan evaluar correctamente la competencia matemática de este colectivo de alumnado.
- Atender la formación continua del personal docente con temáticas relacionadas con la evaluación competencial del alumnado con talento matemático.
- Poner al alcance del personal docente diversas actividades que permitan utilizar diferentes técnicas e instrumentos para evaluar los aprendizajes de este alumnado.

Para ello, pueden ser de ayuda tanto las ideas expuestas en el decálogo sobre evaluación de la competencia matemática de [Alsina \(2018\)](#), como las fases para la incorporación de esta evaluación en el aula ([Alsina et al., 2019](#)). En este sentido, es imprescindible que el personal docente comprenda que evaluar la competencia matemática del alumnado, también del que presenta talento matemático, implica ir más allá de la evaluación de los contenidos para focalizarse en la evaluación de los procesos matemáticos o dimensiones, como, por ejemplo, la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. Para que ello sea posible, debe substituirse, paulatinamente, una evaluación sumativa a partir de exámenes, por una evaluación formativa y formadora que, a partir de técnicas e instrumentos diversos, ayude a todo el alumnado, incluido el que tiene talento matemático, a guiar su proceso de enseñanza-aprendizaje, incluida la evaluación ([Sanmartí, 2007](#)).

Además, consideramos importante apoyar y desarrollar iniciativas específicas que promuevan el desarrollo y la evaluación de la competencia matemática del alumnado con talento matemático, como, por ejemplo, el Proyecto de Estímulo al Talento Matemático impulsado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España, conocido como ESTALMAT, que compensa las limitaciones del actual sistema educativo en lo que se refiere a la atención del alumnado con talento matemático.

Una de las principales limitaciones del estudio es que se ha trabajado con una muestra reducida de 32 docentes, por lo que los resultados obtenidos no se pueden generalizar. En el futuro, será necesario diseñar otros estudios con muestras mayores que permitan analizar, de forma más profunda, los conocimientos del personal docente acerca de la evaluación de la competencia matemática de todo el alumnado. Estos datos contribuirán a diseñar programas formativos orientados a mejorar la evaluación competencial de las matemáticas en el aula.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>
<http://una.ac.cr/educare>
educare@una.ac.cr

Referencias

- Acosta, Y. y Alsina, Á. (2017). Conocimientos del profesorado sobre las altas capacidades y el talento matemático desde una perspectiva inclusiva. *Números*, 94, 71-92. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/94/Articulos_04.pdf
- Alsina, Á. y Coronata, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: Diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 23-36. <https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/392015>
- Alsina, Á. (2018). La evaluación de la competencia matemática: Ideas clave y recursos para el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 98, 7-23. <https://thales.cica.es/epsilon/?q=node/4720>
- Alsina, Á., García, M. y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(55), 85-108. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6943980>
- Alsina, Á. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿Qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 187-192. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=53356>
- Azcárate Goded, P. y Cardeñoso Domingo, J. M. (2012). Evaluación de la competencia matemática. *Investigación en la Escuela*, 78, 31-42. <https://revistascientificas.us.es/index.php/IE/article/view/6934/6123>
- Benavides, M. y Maz-Machado, A. (2012). ¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre el talento matemático? *Ideación*, 32, 167-179. http://www.uco.es/~ma1mamaa/publicaciones/Que%20deben%20conocer%20porfesores_talento_REV_IDEACCION.pdf
- Castillo Arredondo, S. y Cabrerizo Diago, J. (2003). *Evaluación educativa y promoción escolar*. Pearson.
- Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula*, 21, 85-104. <https://doi.org/10.14201/aula20152185104>
- de Guzmán Ozámiz, M. (2004). Tratamiento del talento matemático precoz. En C. Jiménez Fernández (Ed.) y Rivero Otero, A. (Coord.), *Diagnóstico y atención a los alumnos con necesidades educativas específicas Alumnos intelectualmente superdotados* (pp. 119-135). Secretaría General Técnica. https://books.google.co.cr/books?id=VHA4EF2HBh0C&prints=ec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>
<http://una.ac.cr/educare>
educare@una.ac.cr

- Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Servei de Comunicació i Publicacions. <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/primaria/prim-matematic.pdf>
- Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. (2015). *De l'escola inclusiva al sistema inclusiu. Una escola per a tothom, un projecte per a cadascú*. Servei de Comunicació i Publicacions. <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/inclusio/escola-inclusiva.pdf>
- Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Mathematics Enthusiast*, 3(1), 51-75. <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol3/iss1/3/>
- García Córdoba, F. (2004). *Recomendaciones metodológicas para el diseño de un cuestionario*. El cuestionario. Limusa.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-emioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf
- Gómez Meléndez, L. E., Cáceres Mesa, M. L. y Zúñiga Rodríguez, C. M. (2018). La evaluación del aprendizaje en la educación preescolar. Aproximación al estado del conocimiento. *Revista Conrado*, 14(62), 242-250. <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/712>
- Goñi Zabala, J. M. (2008). *3² - 2 Ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 28(6), 14-17. https://www.jstor.org/stable/41191796?seq=1#page_scan_tab_contents
- Hamodi, C., López Pastor, V. M. y López Pastor, A. T. (2015). Medios, técnicas e instrumentos de evaluación formativa y compartida del aprendizaje en educación superior. *Perfiles educativos*, 37(147), 146-161. <https://doi.org/10.22201/iissue.24486167e.2015.147.47271>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6a ed.). McGraw-Hill. <file:///Users/FAMPENABADCAMACHO/Downloads/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Universidad de València.

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>
<http://una.ac.cr/educare>
educare@una.ac.cr

- Johnsen, S. K. (2004). *Definitions, models, and characteristics of gifted students*. En S. K. Johnsen (Ed.), *Identifying gifted students: A practical guide* (pp. 1-21). Prufrock Press.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. University of Chicago Press.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 25-54). SEIEM.
- Mateo, J. (2000). *La evaluación educativa, su práctica y otras metáforas*. Horsori Editorial.
- Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2.a ed.). Sage.
- Moya Otero, J. y Luengo Horcajo, F. (2011). Las competencias básicas como poderes para la ciudadanía. En J. Moya Otero, y F. Luengo Horcajo (Coords.), *Teoría y Práctica de las competencias básicas* (pp. 29-48). Graó.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. An overview. NCTM.
- Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project.
<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf>
- Organisation for Economic Co-Operation and Development. (2016). *Pisa 2015. Assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy and collaborative problem solving*. Autor. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- Otzen, T. y Manterola, C. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *International Journal of Morphology*, 35(1), 227-232. <http://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022017000100037>
- Pasarín Vázquez, M. J., Feijoo Díaz, M., Díaz Fernández, O. y Rodríguez Cao, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Fáisca*, 11, 83-102. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2476416>
- Pérez Ferrá, M. y Gonçalves, S. (2013). Formación del profesorado en competencias. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 17(3), 3-10. <https://recyt.fecyt.es/index.php/profesorado/issue/view/2342>

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

- Prieto, M. (2008). Creencias de los profesores sobre evaluación y efectos incidentales. *Revista de Pedagogía*, 29(84), 123-144. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_issuetoc&pid=0798-979220080001&lng=es&nrm=iso
- Prieto, M. y Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: Un problema a develar. *Estudios Pedagógicos*, 34(2), 245-262. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052008000200015>
- Quinquer Vilamitjana, D. (1999). Modelos y enfoques sobre la evaluación: El modelo comunicativo. *Aula de Innovación Educativa*, 80, 54-57.
- Rochera, M. J., Remesal, A. y Barberá, E. (2002). El punto de vista del profesorado de educación primaria y educación secundaria obligatoria sobre las prácticas de evaluación del aprendizaje matemático: Un análisis comparativo. *Revista de Educación*, 327, 249-265.
- Sanmartí, N. (2007). 10 ideas clave. *Evaluar para aprender*. Graó.
- Sternberg, R. J. y Kaufman, S. B. (2018). Theories and conceptions of giftedness. En S. I. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children. Psycho-educational theory, research and best practices* (2.a ed., pp. 29-48). https://doi.org/10.1007/978-3-319-77004-8_3
- Tannenbaum, A. J. (2003). Nature and nurture of giftedness. En N. Colangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (3.a ed., pp. 45-59). Allyn and Bacon.
- Trelles-Zambrano, C. A., Bravo Guerrero, F. E. y Barrazueta Samaniego, J. F. (2017) ¿Cómo evaluar los aprendizajes en matemáticas? *Innova Research Journal*, 2(6), 35-51. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183>
- Werdelin, I. (1958). *The mathematical ability: Experimental and factorial studies*. C. W. K. Glerups.

Apéndice A: Cuestionario: Evaluación competencial del talento matemático 6-12, ECTALMAT 6-12

DATOS GENERALES

- Mujer
- Hombre

Edad _____

Título universitario _____

Años de experiencia docente _____

Actualmente, en qué curso imparte clases _____

Tipo de escuela en la que trabaja

- Pública
- Concertada
- Privada

EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

1. ¿Qué entiende por evaluación?

2. ¿Qué instrumentos y técnicas utiliza para la evaluación de la competencia matemática?

3. Según su criterio, ¿los instrumentos y técnicas usadas le permiten evaluar adecuadamente la competencia matemática?

4. ¿Qué tipo de criterios valorativos emplea para evaluar el logro de la competencia matemática?

- Cuantitativos
- Cualitativos

¿Por qué?

<http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>

<http://una.ac.cr/educare>

educare@una.ac.cr

5. Sitúe cada una de las 10 competencias matemáticas en la dimensión correspondiente

Competencias*	Dimensión Resolución de problemas	Dimensión Razonamiento y prueba	Dimensión Conexiones	Dimensión Comunicación y representación
Traducir un problema a una representación matemática y emplear conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverlo.				
Dar y comprobar la solución de un problema de acuerdo con las preguntas planteadas.				
Hacer preguntas y generar problemas de carácter matemático.				
Hacer conjeturas matemáticas adecuadas en situaciones cotidianas y comprobarlas.				
Argumentar las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos.				
Establecer relaciones entre diferentes conceptos, así como entre los diversos significados de un mismo concepto.				
Identificar las matemáticas implicadas en situaciones cotidianas y escolares y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas.				
Expresar ideas y procesos matemáticos de manera comprensible empleando el lenguaje verbal (oral y escrito).				
Usar las diversas representaciones de los conceptos y relaciones para expresar matemáticamente una situación.				
Usar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación, e interpretar las representaciones matemáticas que ofrecen.				

* Según [Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament \(2013\)](#).

6. ¿Cuál considera que es el momento ideal para evaluar la competencia matemática?

- En el inicio del proceso enseñanza-aprendizaje
- Durante el proceso enseñanza-aprendizaje
- Al final del proceso enseñanza-aprendizaje

EVALUACIÓN DE ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO

7. Durante su ejercicio profesional, ¿ha trabajado con estudiantes con talento matemático? Señale con una X.

Si su respuesta es afirmativa, por favor, pase a la siguiente pregunta. En caso de ser negativa continúe en la pregunta 9.

- Sí
- No

8. ¿Cuántos estudiantes con talento matemático ha tenido en los últimos cinco años

- 1
- 2
- 3
- Otra _____

¿Ha recibido algún tipo de formación específica para trabajar de forma inclusiva con este alumnado? En caso afirmativo, indique brevemente en qué consistió dicha formación.

9. ¿Qué tipo de criterios valorativos emplearía para evaluar el logro de la competencia matemática de estudiantes con talento matemático?

- Cuantitativos
- Cualitativos

¿Por qué?

10. ¿Qué instrumentos y técnicas utilizaría para evaluar la competencia matemática de estudiantes con talento matemático?

4.1.2. Artículo 2

Toalongo-Guamba, X.; Alsina, Á., Trelles-Zambrano, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO(1)*, 81-98
<http://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>

Índices de calidad:

- Revista indexada en Web of Science (JCR). Índice 0.154 en SSCI. Cuartil 4 (2022).
- Revista indexada en Scopus. Índice 0.108 en SJR. Cuartil 3 (2022).

4.1.3. Artículo 3

Toalongo, X.; Trelles, C. y Alsina, Á. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics*(10), 4662. <https://doi.org/10.3390/math10244662>

Índices de calidad:

- Revista indexada en Web of Science (JCR). Índice 2.4 en SCIE. Cuartil 1 (2022).
- Revista indexada en Scopus. Índice 0.446 en SJR. Cuartil 2 (2022).

Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education

Ximena Toalongo ^{1,*}  César Trelles ²  and Ángel Alsina ¹ 

¹ Department of Subject-Specific Didactics, Faculty of Education and Psychology, University of Girona, Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona, Spain

² Faculty of Philosophy, University of Cuenca, Cda. Universitaria. Av. 12 de Abril, Cuenca 010202, Ecuador

* Correspondence: ximena.toalongo@udg.edu

Abstract: This study describes the design, construction and validation of a rubric for assessing mathematical modelling processes throughout schooling (3–18 years), especially those oriented by modelling cycles. The final version of the “Rubric for Evaluating Mathematical Modelling Processes” (REMMP) consists of seven elements with their respective performance criteria or items, corresponding to the different phases of a modelling cycle. We concluded that REMMP can be used by both researchers and teachers at different educational levels from kindergarten to high school. The rubric is designed to assess group work developed by students; however, it can eventually be used individually.

Keywords: mathematical modelling; mathematical practice; modelling cycle; modelling evaluation; rubric

MSC: 97D60; 97M10



Citation: Toalongo, X.; Trelles, C.; Alsina, Á. Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics* **2022**, *10*, 4662. <https://doi.org/10.3390/math10244662>

Academic Editors: Raquel Fernández-Cézar, Natalia Solano-Pinto and Margarida Rodrigues

Received: 17 November 2022

Accepted: 7 December 2022

Published: 8 December 2022

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Mathematical modelling, along with the introduction of information and communication technology, is probably one of the most prominent common features in maths curricula around the world in recent decades (Kaiser, Blomhøj and Sririman [1]). The progressive incorporation of mathematical modelling in the Common Core State Standards Mathematics (CCSSM) of the United States (National Governors Association for Best Practices and Council of Chief State School Officers [2]), the importance attached to this issue by documents from the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM [3–5]) and the varied literature produced by international organizations and communities, such as the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), the International Community of Teachers of Mathematical Modeling and Applications (ICTMA) or the Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Latin American Meeting of Educational Mathematics) (RELME), among others, are all examples of this.

This increase in the presence of mathematical modelling, both in various internationally renowned organizations and in specialized literature, is largely due to the importance of mathematical modelling both in real-life applications and in mathematical education itself. This has resulted in the ever-increasing use of mathematical modelling in contemporary curricular documents and in the language used by teachers. Despite the existence of an increasing number of studies that allow us to investigate and learn about the mathematical modelling process (Albarracín and Gorgorió [6]; Alsina, Á., Toalongo, Trelles and Salgado [7]; Bliss and Libertini [8]; Blum and Borromeo [9]; Carreira, Amado, Lecoq [10]; Ortiz, Rico and Castro [11]; Toalongo, Alsina, Á., Trelles and Salgado [12]; Trelles, Toalongo and Alsina, Á. [13]; Trelles, Toalongo and Alsina, Á. [14]; Wess and Greefrath [15]), it is also true that the curricula in many countries do not offer clear guidelines that allow teachers to implement mathematical modelling in the classroom and outline how it should be evaluated (Trelles and Alsina, Á. [16]).

This situation is accentuated in preschool and primary education levels, as the literature has focused mainly on the educational levels of secondary education, baccalaureate and higher education. In addition, it should be noted that the work of researchers has been mainly focused on aspects of the implementation of mathematical modelling rather than its evaluation. In this regard, it is demonstrated in the literature that the production of research in evaluation is very limited. For example, after studying 700 articles related to mathematical modelling, Frejd [17] found that only 10% were related to evaluation processes.

From this perspective, the aim of this study is to design, build and validate an instrument that serves teachers both in terms of guidance and evaluation. It allows us, on the one hand, to discover how mathematical modelling develops throughout the different educational stages, and on the other hand, to assess the degree of acquisition of this skill by students. To achieve this dual purpose, we opted for the design of an instructional rubric in the sense proposed by Andrade [18].

2. Theoretical Background

In accordance with the final purpose of our study, a review of the literature on two interrelated aspects was undertaken: (1) definition of mathematical modelling and (2) the presence of mathematical modelling in the main curricular documents.

2.1. Mathematical Modelling: Conceptualization and Perspectives

Although there is no single criterion in the scientific community to define mathematical modelling, some authors provide significant contributions. For example, Alsina, C., García-Raffi, Gómez and Romero [19] state that mathematical modelling refers to the process of building a model that can be used to explain or study a real or mathematical phenomenon, which requires constant translations between reality and mathematics. Villa [20] understands mathematical modelling as an activity, the nature of which is derived from the scientific action of mathematical modelling and which becomes, rather than a tool for building new mathematical objects, a strategy that enables the understanding of a mathematical concept immersed in a “microworld” that prepares the student to develop a different attitude towards asking about and addressing the problems of the real context. In this sense, Borba and Villarreal [21] point out that mathematical modelling can help make mathematics more understandable by bringing contextualized situations to the classroom and giving meaning to the mathematics that are taught and learned.

Accordingly, Bliss and Libertini [8] and Blum and Borromeo [9] conceptualize mathematical modelling as a process that uses mathematics to represent, analyse, make predictions or provide information about real-world phenomena and perform a process of translation between this world and mathematics. This is the definition of modelling that was assumed in this study. Additionally, Blum and Borromeo [9] point out that, through modelling, students can better understand the contexts in which they operate; mathematics learning is supported, and the development of some appropriate competencies, attitudes and visions towards them is promoted. This idea, in turn, is complemented by Trigueros [22], for whom the results of research show that when the concepts of mathematics are directly learned, it is not easy to apply them to problem solving.

In addition, it is important to indicate that a variety of perspectives is represented in the international debate with respect to mathematical modelling. For example, Kaiser and Sriraman [23] propose six modelling perspectives:

(1) Realistic or applied modelling (pragmatic–utilitarian goals, i.e., solving real-world problems, understanding the real world and promotion of modelling competencies); (2) contextual modelling (subject-related and psychological goals, i.e., solving word problems); (3) educational modelling (pedagogical and subject - related goals, (a) structuring of learning processes and promotion thereof, (b) concept introduction and development); (4) sociocritical modelling (pedagogical goals such as critical understanding of the surrounding world); (5) epistemological or theoretical modelling (theory-oriented goals, i.e., promotion of theory development); and (6) cognitive modelling (research aims: (a) analysis

of cognitive processes taking place during modelling processes and understanding of these cognitive processes; psychological goals: (b) promotion of mathematical thinking processes by using models as mental images or even physical pictures or by emphasizing modelling as mental process such as abstraction or generalization). (p. 304)

Although this classification is an important contribution, Trigueros [22] states that in current studies on modelling, it is difficult to find examples that fall into a single category. For this author, even when it is possible to classify them within one of these perspectives, elements that can be considered to belong to other elements will always be present. This idea is corroborated by Blomhøj [24] and Abassian, Safi, Bush and Bostic [25], who state that the perspectives share commonalities and therefore overlap.

2.2. The Modelling Cycle

One of the consensuses in literature regarding this issue is that mathematical modelling is a non-linear and iterative process. In fact, there are several authors who propose that mathematical modelling processes develop through cycles (Carreira, Amado and Lecoq [10]; Geiger [26]; Girmat and Eichler [27]; Greefrath [28]; Kaiser [29]). Although these approaches have characteristics in common, in this study, we adopted the cycle proposed by Blum and Leiß [30] (Figure 1).

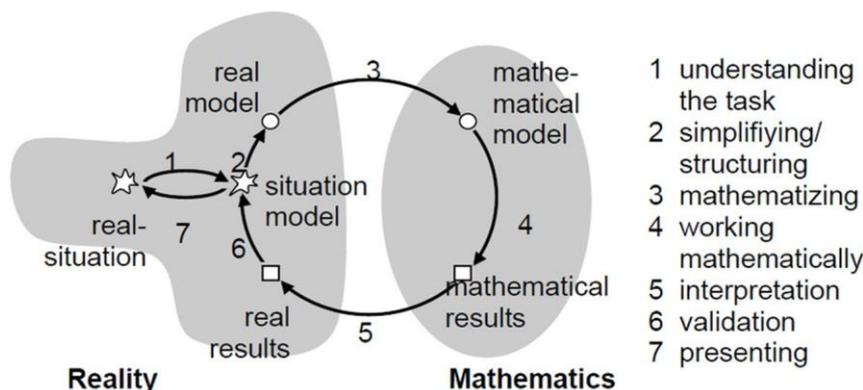


Figure 1. Mathematical modelling cycle proposed by Blum and Leiß [30].

For Czocher [31], in this modelling cycle, the real situation occurs in the real world. Working to understand the problem produces a situation model, i.e., a conceptual model in the mind of the modeller. Simplifying/structuring refers to identifying, introducing and specifying variables and conditions. This specifies the real model (which likely has internal and external components). Through mathematization, the modeller represents the real model mathematically. The mathematical model itself is an expression, in formal mathematics, of relationships among key variables. Working mathematically or performing analysis produces mathematical results, which can then be interpreted in terms of the real model in order to obtain real results. These results are then validated by checking them against the situation model. Lastly, the student exposes or shares his model with others.

Students can go from one point to another of the cycle without having to follow an established order, and it is precisely this roundabout and iterative path that allows them to refine the desired model. As can be seen in Figure 1, in the final phase, it is important for students to share the model with their classmates, collect relevant observations and make the necessary adjustments in order to continue improving the model. In this stage, the role played by the teacher is essential for students to achieve the proposed objectives.

“Students can observe how their teacher continues to embrace new questions and actively question and seek answers. Teachers can demonstrate curiosity and persistence. This learning together of new facts, conventions, and approaches can be one of the most fun and rewarding parts of teaching mathematical modeling.”

(Consortium for Mathematics and its Applications, [COMAP] & Society for Industrial and Applied Mathematics, [SIAM], [32], p. 57).

How do we make it possible for students to arrive at a position where they can generate mathematical models? According to Colwell and Enderson [33], for them to be able to use different tools that help them solve problems based on reasoning, modelling and communication of their ideas, it is necessary for initial training to provide knowledge to future teachers so they can promote those skills. For these authors, the teacher is the key, as not only does the teacher propose exercises, but it is the teacher who must also possess the knowledge and professional competence to provide support to the students. In a preliminary study, Ortiz, Rico and Castro [11] also emphasize the importance of mathematical modelling being promoted in the initial training of teachers. This is because it is at this time when mathematical concepts and procedures are acquired that will later permit the finding of solutions to everyday problems through the development of skills that the teacher can then introduce into the classroom.

Despite the benefits of mathematical modelling for both teaching and learning, several studies demonstrate the difficulties teachers encounter with its implementation. In this sense, Aydin and Özgeldi [34] and Sáenz [35] agree that teachers in training encounter difficulties when working with mathematical models to solve real problems in the sense of establishing connections between context and mathematical knowledge for their solution. Similarly, Olande [36] concludes that when solving items from PISA 2003, the activities that generate the greatest difficulty for teachers during training are those that require reflection and connection between the contents and the context, which highlights difficulties in the levels of mathematical competence.

In summary, mathematical modelling requires knowledge, skill and time, as it represents a challenge for both practising teachers and teachers in training. For this reason, it is vital to generate strategies that favour the acquisition of professional skills during teacher training (Wess and Greefrath [15]).

2.3. *Mathematical Modelling in Curricular Documents*

As indicated in the Introduction, mathematical modelling is increasingly present in the study plans of various countries. However, the approaches taken in each one of these countries are very different. In this sense, Blum and Niss [37] identified six types of approaches for the incorporation of mathematical modelling in study plans. The spectrum of approaches ranges from incorporating mathematical modelling into subjects other than mathematics to not teaching mathematics as an independent subject but rather integrating it into other subjects or courses to facilitate mathematical modelling.

According to Borromeo [38], in Germany, the Netherlands, the United Kingdom and Scandinavian countries, for example, the contextual and realistic approach prevails, whereas in France, Italy, Portugal and Spain, the epistemological or theoretical approach has a greater presence. In their review of curricular documents from the US, Spain and Ecuador, Trelles and Alsina, Á. [16] state that a common element in the study plans of these countries is the gradual implementation of the modelling processes, whereby specific models and visual graphic models are used predominantly in the earlier school levels (3 to 11 years); the use of previously established models of a slightly more formal nature are used more frequently in intermediate school levels (12 to 14 years); and finally, the creation of models with their respective analysis, interpretation and judgment of the modelling process is unique in the later educational levels studied (15–18 years).

In this sense, these authors consider it important that activities generating processes of criticism and reflection be developed from the earliest ages. In addition, these authors found that in the United States, the orientations of which serve as guidance for the design of mathematics study plans in many countries, the standards issued by the NCTM [4] propose working with mathematical modelling from an early age. However, at higher levels, the standards for working with modelling are not explicit.

They also point out that the CCSSM (National Governors Association for Best Practices and Council of Chief State School Officers [2]) suggests incorporation of mathematical modelling throughout different levels, although some level of disconnection is present, since there are some domains in some educational levels that do not work with mathematical modelling. In the case of Spain, the authors found that although in primary education, considerable importance is attached to problem solving, it is unfortunate that mathematical modelling is not explicitly incorporated into the official study plan. However, in the Ecuadorian study plan, it does appear, although disconnected between the different levels. This situation is considerably improved in Secondary and Baccalaureate Education in both countries, where the importance of mathematical modelling throughout the different study blocks can be seen. In general terms, there is gradual progress being made with modelling in study plans but with some problems of disconnection in the early stages that can cause teachers to not really know what to do in the classroom.

In summary, several authors have contributed to the conceptualization of mathematical modelling, which is commonly defined as a process that requires a constant translation—in both directions—between mathematics and reality. In addition, although curriculum documents in several countries have begun to incorporate mathematical modelling, guidelines for teachers to implement it in the classroom with its corresponding assessment are still scarce. In this sense, a rubric that initially helps teachers to identify the processes developed by students can help to fill this gap, bearing in mind that it will later be necessary to specify levels of acquisition of these processes.

3. Design, Construction and Validation of an Instrument for the Evaluation of Activities Involving Mathematical Modelling Processes

With the aim of providing teachers with resources to implement and analyse mathematical modelling processes in the classrooms, the “Rubric to Evaluate Mathematical Modelling Processes” (REMMP) was produced. Considering that the curricular documents establish the use of mathematical modelling at different educational levels, although with some disconnection in the early stages, as indicated above, the REMMP was designed to be used from the initial levels of education (3–5 years) up to the most advanced levels of preuniversity education (15–18 years). The rubric covers this wide age range so that those using it can easily relate the main features of a modelling cycle either at an earlier or later level of education. It is designed to serve the dual purpose indicated in the Introduction: both to make known how this process develops during the different educational stages and to evaluate the level of acquisition (Andrade [18]). Regarding evaluation, it should be noted that the REMMP is primarily designed to evaluate students’ group work, as one of the main characteristics of the mathematical modelling process is collaborative work. However, the possibility that it can be used individually with students is not excluded, although the latter scenario is less frequent.

3.1. Phase 1: Bibliographic Review and Analysis of Instruments That Allow the Evaluation of Mathematical Modelling

In this phase, a review of English and Spanish literature was carried out in the main databases, such as Web of Science, Scopus and Dialnet. The search criteria were that the documents (a) were published between 2005 and 2022; (b) were articles, books or book chapters; and (c) the following keywords appeared in the title or abstract: assessment, mathematical and modelling. Papers related to mathematics education were selected. Among this selection, the documents that were most relevant to our study were those cited in this section.

The literature review conducted by Frejd [17] regarding the evaluation of mathematical modelling identified the fact that written tests, projects, practical tests, portfolios and contests are the main proposals for evaluating mathematical modelling. Some of these evaluation methods, such as written tests, are based on a more atomistic vision, focusing more on the product than on the process. On the other hand, projects tend to approach evaluations from a more holistic view.

In the case of written tests, Haines and Crouch [39] state that these elements do not address the full range of modelling skills, as they still do not cover mathematical work, the refinement of a model and the presentation of reports.

Some important guidelines for evaluating mathematical modelling processes were also found in literature, specifically the Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modelling Education (COMAP & SIAM [32]). This document contains examples of assessment tools, including checklists and rubrics, that teachers might consider using when teaching with modelling.

There are also previous studies in the literature on the assessment of mathematical modelling (Leong [40] and Tekin-Dede and Bukova-Güzel [41]), which, while providing significant data, do not consider students' developmental stages.

In addition, Turner, Roth McDuffie, Benneth, Aguirre, Chen, Foote and Smith [42] and Turner, Chen, Roth McDuffie, Smith, Aguirre, Foote and Benneth [43] make interesting contributions to the evaluation of the mathematical modelling process; however, this proposal is limited to grades 3 to 5 of elementary education.

For this reason, the study of the different proposals enabled us to corroborate that mathematical modelling is a complex process that can be approached from different perspectives and that the modelling cycle is an instrument that simplifies the staging of mathematical modelling processes with their corresponding evaluation.

3.2. Phase 2: Construction of the Initial Version

Based on our literature review, an instrument was designed in the form of a rubric directed towards each of the educational stages. In this rubric, seven elements were proposed corresponding to the different phases of the modelling cycle proposed by Blum and Leiß [30] and described in Section 2.2. In the terms described by Sanmartí and Mas [44], these elements are the essential components of the knowledge that is intended to be analysed. In our case, these are the mathematical modelling processes, which we generically call the "Elements of the Rubric."

Once the seven elements of the rubric were established, the order of the performance criteria was identified and planned. These include the ideas that must be considered to successfully achieve the knowledge corresponding to each element of the rubric. These are generically called "items". Osterlind [45] defines items as units of measurement composed of a stimulus and a form of response, which provides information on the element to be analysed. Millman and Greene [46] add that in addition to covering the meaning of global reference of the element to be evaluated, they should ensure satisfactory validity.

In previous work, each dimension of a rubric generally proposes a single indicator, with different levels. For example, in Level 3 of the mathematization phase, Tekin-Dede and Bukova-Güzel [41] emphasize, "Constructing correct mathematical model(s) based on partially acceptable assumptions" (p. 54); in the mathematical operations process, Leong [40] indicates, "Analyzes relationships between variables" (p. 64); and COMAP & SIAM [32], in the ideal level of the solution, i.e., results are accessible to the audience dimension, indicate, "Clearly presents a solution that is consistent with the original problem statement. If appropriate, a useful visual aid/graphics is included" (p. 219). The purpose of some of these rubrics is to evaluate written reports of mathematical modelling activities, so it is relevant to construct a rubric that comprehensively evaluates the whole modelling process carried out by the students. Additionally, it is an added value to consider different indicators for each dimension, especially if the aim is to assess modelling at different educational levels.

3.3. Phase 3: Validation

The initial version underwent a content validation process through an expert judgment process. To this end, a letter of invitation was sent by e-mail to twelve experts—four from the United States and eight from Spain—taking into account that the main criterion for their selection was that they had research experience in mathematical modelling in education,

either at one or several school levels. The invitation letter described the context, description and purpose of the study. The definition of modelling assumed in the study was also explicitly stated, and reviewers were requested to contribute to the present work if they fully agreed with this perspective. In addition, a guide was provided to assess the relevance of each item, and a section was included in which experts could make comments and/or suggestions on each item. Eight of the invited experts responded; of these, three were from the United States, two of whom had experience in high school and university and one in primary education; of the five reviewers from Spain, two had experience in early childhood education, two had experience in primary education and one in high school and university. The obtained results were analysed using the content validity ratio (CVR) initially proposed by Lawshe [47] and later modified by Tristán-López [48] (CVR'), according to which for an item to be validated, it must have an index greater than or equal to 0.58 after applying the following formula:

$$CVR' = \frac{n_e}{N} \quad (1)$$

where n_e = Number of experts who agree on the essential category; and N = total number of experts.

In addition, the validity index of the entire instrument (CVI) was obtained using the following formula:

$$CVI = \frac{\sum_{i=1}^M CVRi}{M} \quad (2)$$

where $CVRi$ = content validity ratio of the acceptable items according to Lawshe's criteria; and M = total of acceptable items of the instrument.

This CVR index is presented in Appendix A.

3.4. Phase 4: Adjustments and Construction of the Final Version of the Rubric

In order to analyse the answers given by the experts, they were codified as Reviewer 1 (R1), Reviewer 2 (R2) and Reviewer 8 (R8). From the results obtained from the external validation process through expert judgment and subsequent internal validation through the CVR' index, the items from the initial version of the rubric were incorporated, deleted or reformulated.

First, items 1.1.c., 1.1.d., 2.1.a., 2.1.b., 2.2.b., 2.1.c., 2.2.c., 2.2.d., 3.1.a., 3.2.a., 3.1.b. and 4.1.a. were eliminated, as they did not reach the minimum value of the CVR' index needed to be classified as acceptable. In addition, as indicated, although the other items reached the necessary values, many of them were modified after taking into account the observations and suggestions made by experts on issues such as formulation. Below are some summarised comments and evaluations made by the eight experts who participated in the process.

3.4.1. Element 1: Understanding

Most evaluators suggested improving the formulation of certain items, as well as complementing others. Table 1 shows the comments received on item 1 of the REMMP.

In addition, R5 suggests incorporating an item that refers to the student being aware of the type of solution being sought, i.e., a number, a range of values, a set of values, a graph, a formula, etc.

3.4.2. Element 2: Structuring

As can be seen in Table 2, most of the reviewers' comments make reference to the reformulation of the items or their elimination, as they are aspects that do not belong to the stage.

Table 1. Comments on “Understanding”

Item	Reviewers' Comments
1.1.a. Relates the content of the problem with his or her knowledge of the environment.	R3 suggests unifying the language throughout the whole instrument. R2 considers that at no time does it stop being important for the student to use their previous knowledge; with age, that knowledge will be gradually more enriching. R7 expresses similar opinions. In addition, at the 6–12-year level, R5 proposes the reformulation of the item in terms of the student’s ability to explain the problem to classmates and the teacher, showing how he/she relates the content of the problem with his/her previous knowledge.
1.2.a. Poses questions about the problem.	R3 suggests that this item should be considered at all levels, with modifications at some levels in terms of the ability to reformulate the problem.
1.1.c./1.1.d. Understands the statement of the problem to be solved.	Most reviewers agree that the item is too general for both the 12–16-year level and for the 16–18-year level and that it could be replaced by more specifics.

Table 2. Comments on “Structuring”.

Item	Reviewers' Comments
2.2.b./2.1.c./2.1.d. Organizes ideas that contribute to the solution of the problem.	R3 suggests restructuring this item, emphasizing the identification of the relevant variables and the ability to relate them.
2.1.b./2.2.c./2.2.d. Proposes solution strategies.	R2, R3, R4, R5 and R8 consider that this item is not relevant because there is no relationship with the structuring phase. Specifically, R5 indicates that in this phase, the solution of the problem is not yet entered into. However, the reformulation in the real context is entered into and will be used to make the transition to the mathematical world.

Finally, R5 suggests incorporating an item related to identifying the data that are known, those that can be known and the unknown in the problem.

3.4.3. Element 3: Mathematization

In relation to the items of the third element of the rubric (Table 3), most experts comment on the formulation and relevance, that is, whether or not the items in question belong to the element. Furthermore, some experts also make interesting contributions about the location of the items in a certain educational stage.

Table 3. Comments on “Mathematization”.

Item	Reviewers' Comments
3.1.c./3.1.d. Correctly identifies the variables present in the problem.	R3 and R8 agree that this item belongs to the structuring phase, as in the mathematization phase, these variables are expressed with mathematical objects according to age. Complementing this item, R6 indicates that the word “correctly” should be omitted because when referring to modelling, all ideas are valid, as they allow the student to interpret the situation through various possible solutions.
3.3.d. Formulates hypotheses and conjectures related to the problem.	R7 recommends including this item in the previous educational stage (12–16 years). R5 states that being present in the mathematization phase, it should be specified that the hypotheses and conjectures must be related to mathematical objects. R1 suggests changing the word “problem” to “situation” because the initial verbal language starts from a “real situation” with “colloquial” language.
3.2.b. Uses mathematical knowledge.	R5 suggests that the item be reformulated in the sense of the student’s ability to introduce the mathematical objects as a replacement for the real elements. R4 corroborates R5, indicating that in this phase, the focus is the translation from the real world to the mathematical world.

3.4.4. Element 4: Mathematical Work

The contributions of the experts (Table 4) refer mainly to the elimination of items and/or the incorporation of items not contemplated in the initial version of the rubric.

Table 4. Comments on “Mathematical work”.

Item	Reviewers’ Comments
4.1.a. Interacts with classmates and teacher to discuss and validate possible solutions.	Reviewers R3, R5, R7 and R8 consider that the item is not relevant. For example, R7 states that this item overlaps with the presentation phase.

R5 suggests incorporating an item that considers the type of strategies used to solve the problem. In addition, the comments of R5 and R7 coincide with respect to the incorporation of an item that refers to obtaining a mathematical model.

3.4.5. Element 5: Interpretation

As can be seen in Table 5, the comments received refer to the reformulation of some of the items of the “interpretation” element or to the incorporation of other items.

Table 5. Comments on “Interpretation”.

Item	Reviewers’ Comments
5.1.a. Compares the solution with what happens in the immediate environment.	R8 suggests improving the item, indicating that the interpretation has to do with relating the results of mathematical work, that is, mathematical objects, with the reality of the context. R3 suggests similar criteria.
5.1.b./5.1.c./5.1.d. Reflects on the coherence of the mathematical results obtained.	R5 recommends improving the item, indicating that in this phase, the coherence of the mathematical solutions in the real context must be checked.

Finally, R5 suggests adding an item referring to identifying the limitations or restrictions of the mathematical solution in the real context.

3.4.6. Element 6: Validation

Regarding the items of this element, the comments received (Table 6) focus on the improvement of the manner of writing and/or the inclusion of aspects related to the validation phase of the modelling cycle not considered in the initial version of the rubric.

R5 recommends adding an item that considers whether the model is always valid or requires changes for it to be useful in new situations.

Table 6. Comments on “Validation”.

Item	Reviewers’ Comments
6.1.a. Checks the validity of the results obtained.	R3 states that the item is too general, so improvement is recommended. R5 suggests that this item should be formulated in terms of the validation of the constructed model, considering whether the initial situation is resolved completely or partially.
6.1.b./6.1.c./6.1.d. Contrasts the mathematical results with the real situation.	R5 indicates that the item can be improved and that the validation of the constructed model should be considered.

R5 recommends adding an item that considers whether the model is always valid or requires changes for it to be useful in new situations.

3.4.7. Element 7: Presentation

Table 7 shows the comments received with respect to this item.

Table 7. Comments on “Presentation”.

Item	Reviewers' Comments
7.1.a. Communicates the results obtained using language in accordance with age.	R5 recommends improving this item, taking into account that in this phase, the scope of the obtained model must be explained, in addition to suggesting that the item can be unified at all levels, as also indicated by R3.

R7 recommends incorporating an item that considers communicating the developed modelling process. Additionally, V5 emphasizes the importance of justifying the decisions made in each of the phases of the process.

R5 suggests considering an item that takes into account whether or not technology was used in any phase of the process.

Finally, R1 and R5 agree that there should be an item that involves communicating the decisions that did not lead to any solution with corresponding reflections.

The final version of the REMMP developed after this review process is presented in Table 8. It is important to indicate that based on the observations made by the experts, in addition to eliminating, incorporating or improving many of the initially proposed items, it was decided to unify the two educational levels (12–16 years) and (16–18 years) due to the almost total similarity of the content of the items.

Table 8. Final version of the REMMP.

Phases	Preschool Education	Primary Education	Middle/High School
1. UNDERSTANDING	1.1.a. The content of the problem is related to previous knowledge.	1.1.b. Explains the problem to classmates and the teacher, showing how it relates the content using previous knowledge.	1.1.c. Explains the main characteristics of the problem to classmates and the teacher, relating it to their previous knowledge.
	1.2.ab. Poses questions about the problem.		1.2.c. Able to reformulate the problem.
	1.3.a. States the type of solution that the problem would generate, for example, a pattern, a number, a graph, etc.	1.3.b. States the type of solution that the problem would generate, for example, a number, a range of values, a set of values, a graph, a formula, a table, etc.	1.3.c. States the type of solution that the problem would generate, for example, a number, a range of values, a set of values, a graph, a formula, a table, the design of an object, etc.
	1.4.abc. Represents the main characteristics of the problem through drawings.		
		1.5.b. Expresses what the solution of the problem would bring to the environment.	1.5.c. Reflects on the extent to which the solution of the problem would influence the environment in which it is developed.
2. STRUCTURATION	2.1.a. Identifies the main elements of the problem.	2.1.bc. Identifies the data that are known, can be known and are unknown in the problem.	
	2.2.abc. Proposes ideas and/or assumptions that contribute to the simplification of the problem.		
			2.3.c. Identifies the variables present in the problem and is able to search for relationships between them.
3. MATHEMATIZATION	3.1.abc. Replaces the real elements with mathematical objects.		
	3.2.a. Explains the use of mathematical objects.	3.2.bc. Justifies the use of mathematical objects based on the characteristics of the problem.	
		3.3.bc. Identifies all the mathematical parameters present in the problem and the relationships between them.	
			3.4.c. Formulates hypotheses and/or conjectures related to the mathematical objects of the problem.

Table 8. Cont.

Phases	Preschool Education	Primary Education	Middle/High School
4. MATHEMATICAL WORK	4.1.abc. Uses various strategies according to age that allow for the proposition of solutions to the problem.		
	4.2.a. Uses mathematical objects in accordance with age to solve the problem.	4.2.bc. Uses mathematical objects and operates them to solve the problem.	
	4.3.abc. Obtains an initial mathematical model as a result of previous work.		
5. INTERPRETATION	5.1.a. Compares the solution with the initial problem.	5.1.bc. Checks the coherence of the mathematical solution applied to the initial real context.	
	5.2.a. Argues the validity of the results obtained.	5.2.bc. Identifies the possible limitations or restrictions of the mathematical solution in the initial real context.	
6. VALIDATION	6.1.abc. Justifies the proposed model through valid arguments.		
	6.2.abc. Assesses whether the obtained model provides a partial or total solution to the initial problem.		
	6.3.bc. Identifies whether the model is always valid or whether changes are required to make it generalizable to new situations		
	6.4.c. Generalizes the results, demonstrating that the model can be applied to new situations.		
7. PRESENTATION	7.1.abc. Explains the reasons for the decisions made throughout each phase of the process.		
	7.2.abc. Explains the obtained model as applied in the situation of the real context, its scope and limitations using age-appropriate language.		
	7.3.abc. Uses different types of examples, representations, diagrams, drawings, graphs, tables of values, symbolic language, etc.		
	7.4.abc. In the case of use of technology in one or several phases of the process, clearly states at what time, how and for what it was used.		
	7.5.abc. Listens to observations and/or suggestions raised by classmates and/or the teacher.		
	7.6.abc. Responds to the observations and/or suggestions of classmates and the teacher, using language according to their age.		
	7.7.bc. If in the process, paths were used that did not lead to any solution, reflects on them and socializes their main aspects.		
	7.8.bc. Critically analyses the presentations made by classmates.		

4. Applicability of the Rubric

In the interest of brevity, we do not present examples for each of the levels of the rubric here, nor do we describe the complete development of the activities. However, in the two selected examples (Early Childhood Education and Secondary Education) we present an extract from the analysis to show the applicability of the rubric. It should be noted that due to the complex nature of modelling processes, it is possible that students' actions can sometimes be assigned to more than one indicator in the rubric.

Example 1:

Level: Early Childhood Education (4–5 years)

Context and statement of the Modelling Activity: *As a result of the storm in Galicia (Spain), the newspapers and news programmes are full of news about the cold, the snowfall and the drop in temperatures, which aroused a lot of interest among the children. Based on this situation, the children were asked: "Do you know how the temperature is measured? Some of the children answered with a thermometer. Next, the question "what is a thermometer?" was asked, and some children's answers were that it is an instrument with several numbers on it.*

Therefore, the following question was posed as a guide for the whole modelling activity: how are the numbers located on a thermometer and how are they interpreted?

The activity was spread over six sessions and was audio - and video-recorded. The aim was for the children to answer the guiding question and to graphically represent a thermometer, in addition to giving meaning to the numbers on it. An extract from the analysis of the activity related to the representation of the thermometer, is presented in Table 9.

Table 9. Extract from the analysis of the modelling activity in early childhood education with the REPM instrument.

Participants	Transcriptions	Indicator	Phase of the Cycle
Teacher:	100 above, and 100° how is it?		
Boy E	Hot	1.1.a. Relates the content of the problem situation to their prior knowledge.	Understanding
Boy Ra:	And 0 down cold.		
Teacher:	Great, will you register it?		
Boy E	It goes out to the White panel and registers 100 degrees hot	4.2.a. Uses mathematical objects in accordance with age to solve the problem.	Mathematical work
Boy Ra:	It goes out and picks up 0 degrees cold.		
Teacher:	Do you know more temperatures?		
Boy S:	80.	4.2.a. Uses mathematical objects in accordance with age to solve the problem.	Mathematical work
Teacher:	What is it like?		
Boy S:	Hot. (Goes out to the panel, sets the 80 and collects the data on the thermometer.	4.2.a. Uses mathematical objects in accordance with age to solve the problem.	Mathematical work
Girl A.E	And 1 es cold.		
Girl G:	2		
Girl Y:	3		
Girl A.R:	4		
Teacher:	How are 1,2,3,4?		
Boys:	Cold.	1.1.a. Relates the content of the problem situation to their prior knowledge.	Understanding
Teacher:	How nice how many we have! Any others?		
Boy S:	75, 75 is hot	3.1.a. Replaces the real elements with mathematical objects.	Mathematization
Teacher:	And do you know where to put 75 on the thermometer?		
Boy S:	Yes, between 70 and 80, in the middle.	4.2.a. Uses mathematical objects in accordance with age to solve the problem.	Mathematical work
Boy Ru:	70 is also hot	1.1.a. Relates the content of the problem situation to their prior knowledge.	Understanding
Teacher:	And where does hot start?		
Boy Ru:	We wait to feel it in the glasses.	2.2.abc. Proposes ideas and/or assumptions that contribute to the simplification of the problem.	Structuring

Example 2:

Level: Secondary Education

Context and statement of the Modelling Activity: *The development of a Fermi realistic problem-solving activity to introduce mathematical modelling.*

The statement of the activity was the following (Figure 2):

The Empire State Building is one of the most visited places by tourists in New York-USA. This skyscraper has an information desk on the ground floor, the two most frequently asked questions to the staff at the desk are: How long does the tourist lift take to reach the observatory on the top floor, and how long does it take if you decide to walk up the stairs?

Your task is to write a letter answering these questions, including the assumptions on which you base your reasoning and the procedures used. In addition, you should indicate whether your procedure would be applicable to answer these questions for other buildings.

Figure 2. Adapted from Ärleback [49].

The team of students selected to exemplify the use of the rubric was a pair consisting of a boy, “D” (13 years old), and a girl, “T” (14 years old). “D” had some experience in

modelling activities, whereas “T” was doing this activity for the first time. There was no time limit for the activity.

The development of the activity was audio- and video-recorded, then transcribed into a text file for analysis. The activity was completed in 57 minutes.

At the beginning, the students focus their discussion on establishing a plan that will allow them to arrive at the answers to the questions. The boy states that if they have the height of the building and the speed of the lift, they could determine the time needed to go up, which would allow them to answer the first question. They then use their prior knowledge to make assumptions, for example, comparing the height of the Empire State Building with that of another building, such as the Eiffel Tower, and then concentrate on executing their plan to complete the activity.

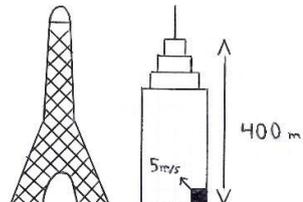
Table 10 presents an extract from the analysis of the activity related to the determination of the time it takes to go up the lift.

Table 10. Extract from the analysis of the modelling activity in compulsory secondary education with the REPMM instrument.

Student	Transcriptions	Indicator	Phase of the Cycle
D:	Let's see T, let's say it's about 400 m, so, now, we have to see how fast.	2.3.c. Identifies the variables present in the problem and is able to search for relationships between them.	Structuring
T:	Yeah, uh. You see there's always like a, a part like a button for when you're in danger, so you go down fast.		
D:	Yeah, but I don't think that's for when you have to go up [pauses] I think the lift has to be kind of fast, because being such a tall building I doubt very much that it has a slow lift because otherwise it would take a long time to go up.	1.1.c. Explains the main characteristics of the problem to classmates and the teacher, relating it to their previous knowledge.	Understanding
T:	Right.		
D:	And you, how fast do you think the lift is going?	2.1.c. Identifies the data that are known, which can be known and which are unknown in the problem.	Structuring
T:	100 for every one second, I guess, no, no, it would be more or less like 50.	3.4.c. Formulates hypotheses and/or conjectures related to the mathematical objects of the problem.	Mathematization
D:	50? No, I don't think 50.	5.1.bc. Checks the coherence of the mathematical solution applied to the initial real context.	Interpretation
T:	Yeah, I think so, because it's going up and it's different.	1.1.c. Explains the main characteristics of the problem to classmates and the teacher, relating it to their previous knowledge.	Understanding
D:	But you think that it would go so fast that in 10 s from the bottom, it would already be at the top. Not even 10 s.	5.2.bc. Identifies the possible limitations or restrictions of the mathematical solution in the initial real context.	Interpretation
T:	No, it would be every 5 then, 5 m.	3.4.c. Formulates hypotheses and/or conjectures related to the mathematical objects of the problem.	Mathematization
D:	Oh yeah, I see what you mean. Yes, yes, I think it would be like that, 5 m per second.		
T:	Yes, I think so.		
D:	So, now we would divide the height by the speed and that way we get the time the lift takes.	3.3.bc. Identifies all the mathematical parameters present in the problem and the relationships between them.	Mathematization
T:	So, it's 400 m high and the lift would have a speed of 5 m per second.	3.1.abc. Replaces the real elements with mathematical objects.	Mathematization
D:	Yeah sure, 5 m per second [writes a bit, does a calculation], but if it goes at 5 m per second, uh, it would take 80 s that it does from, uh, the time that would be from the ground floor to the top, would be that, 80 s, so that would be 1 min and 20 s.	4.3.abc. Obtains an initial mathematical model as a result of previous work.	Mathematical work

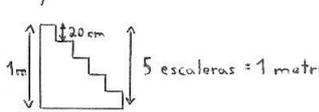
In Figure 3, we present a chart of the selected student team with the respective phases of the modelling cycle.

Buenos días.
Tomamos como referencia la torre Eiffel ya que suponemos que el Empire State tiene una altura similar.



Pensamos que el ascensor debe ser rápido = 5 m/s
 400 → Altura del edificio $\frac{400}{5} = 80$ segundos
 5 → Velocidad del ascensor
 Entonces el ascensor tardaría 80 segundos (1 minuto y 20s) en subir.

Para realizar los cálculos a pie pensamos que en 1 metro hay 5 escaleras



$400 \cdot 5 = 2.000$ escaleras
 Supon que la persona sube 2 escaleras en 1 segundo
 $\frac{2.000}{2} = 1.000$ segundos $\frac{1.000}{60} = 16$ minutos

16 minutos + 15 minutos que se cansa = 31 minutos
 También creemos que si se puede aplicar a otras edificaciones solo tendríamos que cambiar los datos.

Good morning,
 We take the Eiffel Tower as a reference because we assume that the Empire State Building has a similar height.
 We think that the lift must be fast = 5m/s.
 400 → Building height
 5 → Lift speed

$$\frac{400}{5} = 80 \text{ seconds}$$

Then the lift would take 80 seconds (1 minute and 20 seconds) to go up.
 To do the calculations on foot, we think that there are 5 stairs in one metre.
 $400 \cdot 5 = 2000$ stairs
 We assume that the person walks up 2 stairs in 1 second.

$$\frac{2.000}{2} = 1.000 \text{ seconds} \qquad \frac{1.000}{60} = 16 \text{ minutes}$$

16 minutes + 15 minutes that you get tired = 31 minutes.
 We also believe that it can be applied to other buildings, we would only have to change the data.

Figure 3. Original letter produced by the students and English translation.

A short section of the analysis is presented in Table 11 (other phases of the modelling cycle that were analysed above are also shown). Overall, the letter shows indicator 7.2.abc: “Explains the obtained model as applied in the situation of the real context, its scope and limitations using age-appropriate language”.

Table 11. Extract from the analysis of the modelling phases presented in the chart with the REPMMinstrument.

Fragment	Indicator	Phase of the Cycle
We take the Eiffel Tower as a reference since we assume that the Empire State Building is of similar height.	7.1.abc. Explain the reasons for the decisions made throughout each of the phases of the process.	Exposition/Presentation
Drawings representing the height of the Eiffel Tower and the Empire State Building and drawing representing the number of stairs in a metre.	7.3.abc. Uses different types of examples, representations, diagrams, drawings, graphs, tables of values, symbolic language, etc.	Exposition/Presentation
We also believe that it can be applied to other buildings, we would only have to change the data.	6.4.c. Generalizes the results by demonstrating that the model can be applied to new situations.	Validation

In summary, the use of the rubric shows how students move through the different phases of the modelling cycle. Specifically, the data in Tables 9–11 show that this first analysis of two mathematical modelling activities using the REPMM instrument can provide useful information for teachers about the progressive levels of mastery of students with respect to the creation of a model. Moreover, it can also be useful for the students themselves, especially at higher levels, to know objectively which phases of the modelling process need to be improved, using the rubric as a self- or co-assessment tool.

5. Final Considerations

In this study, the design, construction and validation of the rubric REMMP 3–18 was presented, with the aim of providing teachers and the scientific community with a useful instructional instrument in the sense proposed by Andrade [18]. It publicizes both how mathematical modelling is developed, as well as to evaluate mathematical modelling processes throughout the different educational stages, from 3 to 18 years. The theoretical references that guided the construction of the rubric include contributions from Blum and Leiß [30] about the understanding of modelling processes as a cycle that takes place in different scenarios in which modelling is put into practice. In addition, the guidelines of various international organizations were considered, mainly the Guidelines for Assessment And Instruction In Mathematical Modelling Education (COMAP & SIAM, [32]), as well as the CCSSM (National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers [2]) and some important NCTM curricular guidelines [3–5]. In addition, previous literature on the subject was considered, in particular Frejd's [17] meta-analysis of the main proposals for evaluating mathematical modelling.

The external validation of the rubric by eight experts and the internal validation using the CVR' index (Tristán-López [48]) led to important changes, both in the selection, as well as in the reformulation of some of the items. For example, in the understanding phase, the item "Understands the statement of the problem to be solved" was eliminated as a result of not meeting the required CVR values, as it is considered by experts to be too general an item. In the structuration phase, the item "Proposes solution strategies" was eliminated, as it is not relevant in this phase of the cycle. In the mathematization phase, among others, the item "Uses his or her mathematical knowledge" was modified to "Replaces the real elements with mathematical objects", as in this phase, the focus is on the translation from the real world to the mathematical world. In the mathematical work phase, the item "Obtains an initial mathematical model as a consequence of previous work" was incorporated, as in this phase, the mathematical work results in what is at least an initial model that will be improved throughout the process.

In the interpretation phase, the item "Reflects on the coherence of the mathematical results obtained" was improved to "Checks the coherence of the mathematical solution applied to the initial real context", as it is important that it is explicitly mentioned that the results must be interpreted in the initial real context of the problem. In the validation phase, the item "Check the validity of the results obtained" was modified to "Evaluate whether the obtained model provides a partial or total solution to the initial problem", as we consider it important that the item be more specific and assess the strengths and/or limitations of the model.

Finally, in the presenting phase, some items were incorporated, such as "In the case of using technology in one or more phases of the process, they clearly state when, how and what it was used for", as it is highly probable that students make use of technology in one or more phases of the process, so it is very important that they communicate how they used it. In addition, some items were merged—a decision made fundamentally for two reasons: (1) because some items can be used at more than one educational level and (2) to avoid the instrument becoming cumbersome, extensive and difficult to use.

Additionally, the rubric can be used by teachers as an evaluation tool in terms of the modelling processes that students develop when performing an activity of this type, which is framed according to the concept of formative assessment, as both students and teachers

can identify the strengths and weaknesses that may arise in the work of mathematical modelling, thereby improving processes on an ongoing basis. In addition, the rubric allows teachers to generate strategies that strengthen mathematical competence in the application of mathematical knowledge and reasoning; although the rubric does not include a quantitative assessment, it is left to the teacher's discretion to assign an assessment to each of the elements.

On the other hand, this rubric allows for the implementation of mathematical modelling activities in the classroom, which makes it possible to record the students' work in audio, video and written reports and use the rubric for the respective analysis.

This study is subject to two main limitations: (1) Mathematical modelling is a complex process, and the different modelling cycles contribute to its simplification. For this reason, we are aware that the boundaries between each of the phases of the modelling cycle are quite blurred and that on some occasions, it will surely be difficult to determine with complete accuracy in which phase of the cycle the various productions of the students fall. However, the idea is to make this proposal available to teachers and the scientific community so that it can benefit from the contributions of educational practice. (2) Furthermore, the rubric has only been used in the modelling environments presented in Section 4. However, this is one of the aspects that is present on our research agenda, with the aim of discovering more detail regarding the modelling processes, as well as fine-tuning the instrument.

Author Contributions: Conceptualization, X.T., C.T. and Á.A.; methodology, X.T. and C.T.; investigation, X.T. and C.T.; data analysis, X.T., C.T. and Á.A.; writing original draft, X.T. and C.T.; review and editing, X.T., C.T. and Á.A.; supervision, C.T. and Á.A. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: The authors would like to thank to Corporación Ecuatoriana para el Desarrollo de la Investigación y Academia—CEDIA for the financial support given to the present research, development and innovation work through its CEPRA program, especially for the <CEPRA XVI-06-Mathematical modeling> fund and the University of Girona through the IFUdG2018 programme, No. 401.

Data Availability Statement: Not applicable.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Appendix A

Table A1. CVR' indices for instrument items.

Item	CVR' and CVI Calculation				CVR'	Acceptable	CVI
	Essential	Useful	Not Necessary				
1.1.a.	6	2	0		0.75	X	
1.2.a.	6	1	1		0.75	X	
1.3.a.	6	2	0		0.75	X	
1.1.b.	6	2	0		0.75	X	
1.2.b.	8	0	0		1.00	X	
1.3.b.	6	2	0		0.75	X	
1.1.c.	3	1	4		0.38		
1.2.c.	6	1	1		0.75	X	
1.3.c.	7	1	1		0.88	X	
1.1.d.	3	1	4		0.38		
1.2.d.	6	2	0		0.75	X	
1.3.d.	7	1	1		0.88	X	
2.1.a.	2	1	5		0.25		
2.2.a.	6	2	0		0.75	X	
2.1.b.	1	2	5		0.13		
2.2.b.	4	1	3		0.50		
2.1.c.	4	1	3		0.50		

Table A1. Cont.

Item	CVR' and CVI Calculation			CVR'	Acceptable	CVI
	Essential	Useful	Not Necessary			
2.2.c.	1	2	5	0.13		
2.1.d.	6	1	1	0.75	X	
2.2.d.	1	2	5	0.13		
2.3.d.	6	1	1	0.75	X	
3.1.a.	2	2	4	0.25		
3.2.a.	1	2	5	0.13		
3.1.b.	1	3	4	0.13		
3.2.b.	5	1	2	0.63	X	
3.1.c.	6	1	1	0.75	X	
3.2.c.	6	2	0	0.75	X	
3.1.d.	5	0	3	0.63	X	
3.2.d.	6	2	0	0.75	X	
3.3.d.	5	1	2	0.63	X	36.63/47 = 0.78
4.1.a.	1	3	4	0.13		
4.1.b.	6	1	1	0.75	X	
4.1.c.	6	2	0	0.75	X	
4.2.c.	5	2	1	0.63	X	
4.1.d.	6	1	1	0.75	X	
4.2.d.	5	1	2	0.63	X	
5.1.a.	5	3	0	0.63	X	
5.1.b.	6	1	1	0.75	X	
5.1.c.	6	1	1	0.75	X	
5.1.d.	5	1	2	0.63	X	
6.1.a.	7	1	0	0.88	X	
6.2.a.	5	1	2	0.63	X	
6.1.b.	7	1	0	0.88	X	
6.2.b.	8	0	0	1.00	X	
6.1.c.	7	1	0	0.88	X	
6.2.c.	8	0	0	1.00	X	
6.3.c.	7	1	0	0.88	X	
6.1.d.	7	1	0	0.88	X	
6.2.d.	8	0	0	1.00	X	
6.3.d.	6	2	0	0.75	X	
7.1.a.	7	1	0	0.88	X	
7.2.a.	7	1	0	0.88	X	
7.1.b.	7	1	0	0.88	X	
7.2.b.	6	1	1	0.75	X	
7.1.c.	7	1	0	0.88	X	
7.2.c.	6	1	1	0.75	X	
7.1.d.	6	2	0	0.75	X	
7.2.d.	6	1	1	0.75	X	
7.3.d.	6	1	1	0.75	X	
Sum of acceptable items				36.63	47	

References

1. Kaiser, G.; Blomhøj, M.; Sriraman, B. Towards a didactical theory for mathematical modeling. *ZDM Math. Educ.* **2006**, *38*, 82–85. [CrossRef]
2. National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. *Common Core State Standards Mathematics*; National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers: Washington, DC, USA, 2010.
3. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*; NCTM: Reston, VA, USA, 1989.
4. National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*; NCTM: Reston, VA, USA, 2000.
5. National Council of Teachers of Mathematics. *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*; NCTM: Reston, VA, USA, 2014.

6. Albarracín, L.; Gorgorió, N. Mathematical Modeling Projects Oriented towards Social Impact as Generators of Learning Opportunities: A Case Study. *Mathematics* **2020**, *8*, 2034. [CrossRef]
7. Alsina, Á.; Toalongo, X.; Trelles, C.; Salgado, M. Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: Un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Quadr. Rev. Investig. Educ. Matemática* **2021**, *30*, 74–93. [CrossRef]
8. Bliss, K.; Libertini, J. What is mathematical modeling? In *Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education*; Garfunkel, S., Montgomery, M., Eds.; COMAP: Philadelphia, PA, USA, 2019; pp. 7–21.
9. Blum, W.; Borromeo, R. Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *J. Math. Model. Appl.* **2009**, *1*, 45–58.
10. Carreira, S.; Amado, N.; Lecoq, F. Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. In *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling*; Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G., Eds.; Springer: New York, NY, USA, 2011; pp. 199–210. [CrossRef]
11. Ortiz, J.; Rico, L.; Castro, E. Mathematical Modelling: A teacher's training study. In *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics*; Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S., Eds.; Horwood Publishing: Chichester, UK, 2007; pp. 249–441. [CrossRef]
12. Toalongo, X.; Alsina, Á.; Trelles, C.; Salgado, M. Creando los primeros modelos matemáticos: Análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO* **2021**, *1*, 81–98. [CrossRef]
13. Trelles, C.; Toalongo, X.; Alsina, Á. Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza Cienc.* **2022**, *40*, 192–213. [CrossRef]
14. Trelles, C.; Toalongo, X.; Alsina, Á. La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos. *Innova Res. J.* **2022**, *7*, 97–116. [CrossRef]
15. Wess, R.; Greefrath, G. Professional Competencies for Teaching Mathematical Modelling—Supporting the Modelling-Specific Task Competency of Prospective Teachers in the Teaching Laboratory. Paper Presented in the CERME11, Utrecht, The Netherlands, 6–10 February 2019. Available online: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02409039/document> (accessed on 21 May 2022).
16. Trelles-Zambrano, C.; Alsina, Á. Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: Panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Rev. Iberoam. Educ. Matemática* **2017**, *51*, 140–163.
17. Fredj, P. Modes of modelling assessment—a literature review. *Educ. Stud. Math.* **2013**, *84*, 413–438. [CrossRef]
18. Andrade, H. Using rubrics to promote thinking and learning. *Educ. Leadersh.* **2000**, *57*, 13–18.
19. Alsina, C.; García-Raffi, L.M.; Gómez, J.; Romero, S. Modelling in science education and learning. *SUMA* **2007**, 51–53.
20. Villa, J.A. La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas* **2007**, *19*, 63–85. [CrossRef]
21. Borba, M.C.; Villareal, M.E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*; Springer: New York, NY, USA, 2005.
22. Trigueros Gaisman, M. El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educ.* **2009**, *9*, 75–87.
23. Kaiser, G.; Sriraman, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zent. Didakt. Math.* **2006**, *38*, 302–310. [CrossRef]
24. Blomhøj, M. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. In *Different Perspectives on Mathematical Modelling in Educational Research—Categorising the TSG21 Papers, Proceedings of the Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico, 6–13 July 2008*; Blomhøj, M., Carreira, S., Eds.; ICME: Monterrey, Mexico, 2009; pp. 469–473. Available online: <http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/461.pdf> (accessed on 10 June 2022).
25. Abassian, A.; Safi, F.; Bush, S.; Bostic, J. Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investig. Math. Learn.* **2019**, *12*, 53–65. [CrossRef]
26. Geiger, V. Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. In *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)*; Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G., Eds.; Springer: New York, NY, USA, 2011; pp. 305–314. [CrossRef]
27. Girnat, B.; Eichler, A. Secondary Teacher's Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. In *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling*; Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G., Eds.; Springer: New York, NY, USA, 2011; pp. 75–84. [CrossRef]
28. Greefrath, G. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling—Overview. In *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)*; Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G., Eds.; Springer: New York, NY, USA, 2011; pp. 301–304. [CrossRef]
29. Kaiser, G. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht: Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In *Materialien für Einen Realitätsbezogenen Mathematikunterricht*; Graumann, G., Jahnke, T., Kaiser, G., Meyer, J., Eds.; Verlag Franzbecker: Hildesheim, Germany, 1995; pp. 64–84.
30. Blum, W.; Leiß, D. How do students and teachers deal with modelling problems? In *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*; Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S., Eds.; Woodhead Publishing: Chichester, UK, 2007; pp. 222–231.
31. Czocher, J. Mathematical modelling cycles as a task design heuristic. *Math. Entus.* **2017**, *14*, 129–140. [CrossRef]
32. Consortium for Mathematics and its applications (COMAP) and Society for industrial and applied mathematics (SIAM). *Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education*; Garfunkel, S., Montgomery, M., Eds.; COMAP: Philadelphia, PA, USA, 2019.

33. Colwell, J.; Enderson, C.M. “When I hear literacy”: Using pre-service teachers’ perceptions of mathematical literacy to inform program changes in teacher education. *Teach. Teach. Educ.* **2016**, *53*, 63–74. [[CrossRef](#)]
34. Aydin, U.; Özgeldi, M. The PISA Tasks: Unveiling Prospective Elementary Mathematics Teachers’ Difficulties with Contextual, Conceptual, and Procedural Knowledge. *Scand. J. Educ. Res.* **2017**, *63*, 105–123. [[CrossRef](#)]
35. Sáenz, C. The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educ. Stud. Math.* **2009**, *71*, 123–143. [[CrossRef](#)]
36. Olande, O. Graphical artefacts: Taxonomy of students’ response to test items. *Educ. Stud. Math.* **2014**, *85*, 53–74. [[CrossRef](#)]
37. Blum, W.; Niss, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educ. Stud. Math.* **1991**, *22*, 37–68. [[CrossRef](#)]
38. Borromeo Ferri, R. Mathematical modelling in European education. *J. Math. Educ. Teach. Coll.* **1991**, *4*, 18–24. [[CrossRef](#)]
39. Haines, C.; Crouch, R. Mathematical and applications: Ability and competence frameworks. In *Modelling and Applications in Mathematics Education*; Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.N., Eds.; The 14th ICMI Study; Springer: New York, NY, USA, 2007; pp. 417–424.
40. Leong, R. Assessment of mathematical modeling. *J. Math. Educ. Teach. Coll.* **2012**, *3*, 61–65. [[CrossRef](#)]
41. Tekin-Dede, A.; Bukova-Güzel, E. A rubric development study for the assessment of modeling skills. *Math. Educ.* **2018**, *27*, 33–72.
42. Turner, E.; Roth McDuffie, A.; Bennett, A.; Aguirre, J.; Chen, M.; Foote, M.; Smith, J. Mathematical Modeling in the Elementary Grades: Developing and Testing an Assessment. *Int. J. Sci. Math. Educ.* **2022**, *20*, 1387–1409. [[CrossRef](#)]
43. Turner, E.; Chen, M.; Roth McDuffie, A.; Smith, J.; Aguirre, J.; Foote, M.B. Validating a student assessment of mathematical modeling at elementary school level. *Sch. Sci. Math.* **2021**, *121*, 408–421. [[CrossRef](#)]
44. Sanmartí, N.; Mas, N. Les rúbriques per a una avaluació plantejada com a aprenentatge. *Perspect. Esc.* **2016**, *390*, 37–41.
45. Osterlind, S.J. *Constructing Test Items*; Kluwer: Boston, MA, USA, 1989.
46. Millman, J.; Greene, J. The specification and development of test of achievement and ability. In *Educational Measurement*; Linn, R.L., Ed.; Macmillan: London, UK, 1989; pp. 335–366.
47. Lawshe, C.H. A quantitative approach to content validity. *Pers. Psychol.* **1975**, *28*, 563–575. [[CrossRef](#)]
48. Tristán-López, A. Modificación al modelo de Lawshe para el dictámen cuantitativo de la validez de contenido de un instrumento objetivo. *Av. Med.* **2008**, *6*, 37–48.
49. Årlebäck, J.B. On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *Math. Enthus.* **2009**, *6*, 331–364. [[CrossRef](#)]

4.2. Artículos sometidos a revisión

4.2.1. Artículo 4

Toalongo, X.; Trelles, C. y Alsina, Á. (en revisión). La modelización matemática y los problemas de Fermi aplicados a estudiantes de Educación Primaria

Revista: Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia.

Índices de calidad:

- Revista indexada en Web of Sciences (Emerging Sources Citation Index (ESCI)), Dialnet, LatinREV, REDIB, Redalyc, Latindex.



Matías Arce Sánchez y José María Marbán Prieto, directores de la revista *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*

CERTIFICAN

Que *Xúmena Toalongo-Guamba, César-Trelles Zambrano y Ángel Alsina* son autores del artículo "La modelización matemática y los problemas de Fermi aplicados a estudiantes de Educación Primaria". El artículo ha sido enviado a la revista *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, y está actualmente sometido a un proceso de revisión por pares para valorar su publicación en la revista.

Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia (ISSN: 2254-8351) es una revista electrónica, publicada con *Open Journal Systems (OJS)*, semestral y gratuita de Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil y Primaria.

Edma 0-6 es una revista evaluada por pares, siguiendo el sistema de doble ciego. Publicada online en la dirección: <https://revistas.uva.es/index.php/edmain>, está incluida en los siguientes índices y bases de datos: *Catálogo de Latindex, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Base de datos del ISOC de Revistas de CC. Sociales y Humanidades, Dialnet, Directory of Research Journal Indexing (DRJI), Academic Journals Database, Matriz de Información para la Evaluación de Revistas (MIAR), Dulcinea (color verde), Sherpa Romeo (color verde), Redíned-Red de información educativa, Repositorio Digital de Documentos de Educación Matemática de la Universidad de los Andes-FUNES*, y en *Google Scholar*.

Y para que conste a los efectos oportunos, se expide este certificado en Valladolid, a fecha de firma electrónica

Firmado por ARCE SANCHEZ
MATIAS - ***3908** el
día 21/05/2024 con un
certificado emitido por
AC FNMT Usuarios

MARBAN PRIETO
JOSE MARIA -
DNI I 2384540Y
Firmado digitalmente
por MARBÁN PRIETO
JOSE MARIA - DNI
I2384540Y
Fecha: 2024.05.21
13:08:06 +02'00'

Fdo.: Matías Arce Sánchez

Fdo.: José María Marbán Prieto

Directores de *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*



La modelización matemática y los problemas de Fermi aplicados a estudiantes de Educación Primaria*

Mathematical modelling and the Fermi problems applied to primary school students

NOMBRE Y APELLIDOS [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Dirección postal completa de la institución [se incluirá tras la evaluación anónima]

Dirección de correo electrónico [la incluirá el editor tras la evaluación anónima]

ORCID [lo incluirá el editor tras la evaluación anónima]:

Recibido/Received: . Aceptado/Accepted: .

Cómo citar/How to cite: Apellidos, Nombre, “Título del artículo”, *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia* volumen (año): páginas. DOI: <https://doi.org/xxx/xxx>.

Artículo de acceso abierto distribuido bajo una [Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional \(CC-BY 4.0\)](#). / Open access article under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License \(CC-BY 4.0\)](#).

Resumen:

La modelización matemática ocupa un relevante lugar en la investigación educativa internacional. En este contexto, el presente estudio trata sobre una actividad de modelización matemática elaborada bajo los planteamientos teóricos de las *Modelling Eliciting Activities (MEA'S)* en combinación con los problemas de Fermi. El objetivo es describir y comprender la producción de alumnos ecuatorianos de educación primaria (10-11 años) al enfrentarse a estas actividades. Se utilizó un enfoque metodológico mixto a través de un diseño de estudio de caso intensivo. Los resultados muestran que el alumnado a pesar de no tener experiencia previa con estas actividades es capaz de comprender el problema, establecer conjeturas, suposiciones y proponer ideas de solución. Se concluye que estas actividades presentan grandes ventajas para el desarrollo de la competencia matemática del alumnado y sus habilidades de modelización.

Palabras clave: Modelización matemática; problemas de Fermi; ciclo de modelización; estudio de caso; educación primaria

Abstract:

Mathematical modelling occupies a relevant place in international educational research. In this context, the present study deals with a mathematical modelling activity developed under the theoretical approaches of *Modelling Eliciting Activities (MEA'S)* in combination with Fermi

* Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto de Investigación... [lo incluirá el editor tras la evaluación anónima].

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

problems. The aim is to describe and understand the production of Ecuadorian primary school students (10-11 years old) when confronted with these activities. A mixed methodological approach was used through an intensive case study design. The results show that students, despite having no previous experience with these activities, are able to understand the problem, establish conjectures, assumptions and propose solution ideas. It is concluded that these activities present great advantages for the development of students' mathematical competence and modelling skills.

Keywords: Mathematical modelling; Fermi problems; Modelling cycle; case study; Primary education

INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática en los últimos años ha otorgado gran importancia a la modelización, focalizándose sobre todo en cómo puede favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Trelles y Alsina, 2017). Como muestra de ello, en la actualidad son numerosas las investigaciones educativas cuyo objeto de estudio es la modelización matemática (e.g., Barquero et al., 2018; Barquero y Jessen, 2020; Daher, 2021; Ferrando y Albarracín, 2021; Florensa et al., 2020; Jung et al., 2019; Lu y Kaiser, 2022; Montero y Vargas, 2022; Toalongo et al., 2021; Toalongo et al., 2022; Trelles et al., 2022a; Trelles et al., 2022b; Vargas et al., 2018). Podemos observar también como las principales reuniones de matemática educativa a nivel internacional, como por ejemplo el *International Congress on Mathematical Education* (ICME), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) o la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), entre otras, han designado espacios específicos para discutir acerca de la modelización matemática y sus implicaciones en los procesos de enseñanza- aprendizaje.

Además, varias organizaciones de prestigio internacional plantean, ya sea de forma explícita o implícita, la importancia que tiene la modelización matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989) expresa la importancia y necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos, haciendo énfasis en que los conocimientos matemáticos deben servir para modelizar, analizar, describir, evaluar y tomar decisiones sobre problemas de la vida real. *La Organization for*

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Economic Cooperation and Development (OECD, 2023), define la competencia matemática como la capacidad que posee un individuo para razonar matemáticamente, así como para formular, emplear e interpretar la Matemática para resolver problemas en una variedad de contextos del mundo. Esto incluye utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas que permitan describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a conocer el papel que la Matemática juega en el mundo además de colaborar en la elaboración de juicios bien fundados y en la toma de las decisiones que necesita un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo del siglo 21. Asimismo, para la OECD una de las siete capacidades fundamentales es la matematización, es decir la capacidad para transformar un problema del mundo real a una forma estrictamente matemática, que es la esencia de la modelización.

Por lo expuesto, es necesario continuar con esta importante línea de investigación, y hacerlo desde diferentes aristas contribuirá significativamente a comprender la modelización matemática en todas sus dimensiones. En consecuencia, uno de los aspectos importantes a investigar es cómo reaccionan los alumnos de educación primaria al enfrentarse a actividades de modelización matemática, en la línea ya iniciada por English (2006, 2010, 2014), English y Watson (2018), Ruiz-Higueras et al. (2013) y Trelles et al. (2022a), entre otros. En este sentido, el objetivo de esta investigación es describir y comprender la producción de alumnos ecuatorianos de educación primaria al enfrentarse a una actividad de modelización matemática, considerando los planteamientos teóricos de las *Modelling Eliciting Activities (MEA'S)* en combinación con los problemas de Fermi.

1. MARCO TEÓRICO

1. 1. La modelización matemática

En la literatura podemos encontrar fácilmente varias definiciones de modelización matemática, por ejemplo, para Alsina, C. et al. (2007), la modelización matemática consiste en un proceso en el cual se construye un modelo con el propósito de comprender y explicar un fenómeno real o matemático y para ello se necesitan constantes traducciones entre la realidad y las matemáticas.

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Algunos autores tratan de dar una definición más apegada al ámbito educativo, en consecuencia, son estas las que se asumen en este estudio; por ejemplo, Bliss y Libertini (2019) y Blum y Borromeo (2009) plantean que la modelización matemática se la debe entender como un proceso en el que a través de la matemática se pretende predecir o proporcionar información acerca de los fenómenos del mundo real, lo que implica realizar traducciones entre el mundo real y las matemáticas. Para Aymerich y Albarracín (2022) “la modelización matemática es un proceso de resolución de problemas contextualizados en las que se elabora un modelo matemático para describir el fenómeno real estudiado” (p. 4). Trigueros Gaisman (2006, p. 1210), manifiesta:

Cuando hablamos de modelación en la enseñanza nos referimos a proporcionar a los estudiantes problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en cuestión en términos matemáticos y mediante la revisión, la reflexión, la aplicación de sus conocimientos y la comunicación de sus resultados con la idea de que se acerquen a los procesos que se llevan a cabo en la actividad científica.

1. 2. La modelización matemática en las primeras etapas educativas

Tradicionalmente la modelización matemática ha sido implementada en los procesos de enseñanza-aprendizaje de niveles educativos superiores, fundamentalmente en la educación secundaria y universitaria (Barquero et al., 2014; Hernández-Martínez y Vos, 2018; Sol et al., 2011 y Trelles et al., 2019); en consecuencia, son aún escasas las investigaciones que abordan el uso de la modelización matemática en las primeras etapas educativas, a pesar de que, documentos elaborados por importantes organizaciones como el NCTM (2000) y la *National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers* (2010) recomiendan implementarla en las aulas desde los primeros niveles escolares.

Si bien en estas edades las investigaciones aún son limitadas, los trabajos pioneros de English (1996, 1997, 2004, 2006, 2010) permiten tener evidencia acerca del desarrollo de los procesos de modelización del alumnado de estos niveles, concretamente plantean que la modelización matemática propicia que los niños desarrollen ideas propias y procesos

matemáticos en el marco de la resolución de problemas reales. Por su parte, investigaciones más recientes como las de Alsina et al. (2021), English (2014), English y Watson (2018); Ruiz-Higueras y García (2011); Ruiz-Higueras et al. (2013), Toalongo et al. (2022), Trelles et al. (2022a, 2022b) permiten comprender los procesos de modelización matemática desde diferentes enfoques, como por ejemplo desde el punto de vista numérico, algebraico, geométrico y estadístico. A su vez, investigaciones más recientes como la de Toalongo et al. (2021) sugieren que los procesos de modelización matemática pueden ser desarrollados incluso por alumnado de educación infantil, logrando una verdadera conexión de significados de los objetos matemáticos y su utilidad en la vida cotidiana.

En lo que concierne al tratamiento que se da a la modelización matemática en los documentos curriculares dirigidos a estos niveles educativos, Trelles y Alsina (2017) han realizado un estudio de estos documentos a nivel de España, Ecuador y Estados Unidos, identificando que la modelización matemática está presente y que uno de los aspectos comunes es la implementación progresiva de los procesos de modelización, siendo los modelos concretos y los modelos gráfico-visuales los que predominan en los currículos de estas edades.

1. 3. El ciclo de modelización

Uno de los aspectos característicos de la modelización matemática es que se desarrolla a través de procesos no lineales, consecuentemente varios autores (e.g., Carreira et al., 2011; Geiger, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Greefrath, 2011) proponen entenderla a través de ciclos de modelización. Si bien las diferentes propuestas presentan varias similitudes, para nuestro estudio asumimos el ciclo de modelización del Blum y Leib (2007) que se presenta en la Figura 1.

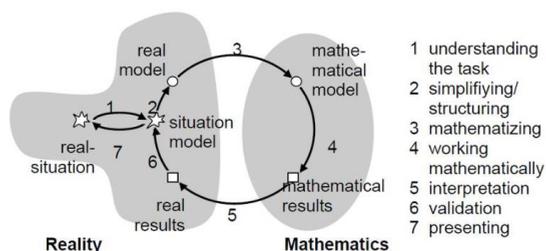


Figura 1. Ciclo de modelización matemática (Blum y Leib, 2007)

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Al ser un proceso no lineal e iterativo, se entiende que el alumnado al enfrentarse a actividades de modelización matemática puede transitar de forma no ordenada por cada una de las fases del ciclo, siendo estas: 1) comprender el problema, la tarea o la actividad, 2) simplificar y estructurar el problema a partir de sus datos y variables, 3) matematizar el problema a partir de las relaciones existentes entre las variables del problema y mediante el uso de objetos matemáticos, 4) trabajo matemático que permita obtener resultados matemáticos, 5) interpretar los resultados obtenidos de acuerdo a las características del problema, 6) validación a partir de juzgar si el modelo obtenido soluciona el problema, y 7) presentación, en donde el alumnado explica a los demás el modelo obtenido.

Si bien el ciclo de modelización antes descrito contribuye a tener una idea bastante aproximada de cómo se desarrollan los procesos de modelización, consideramos importante contar con varios indicadores en cada una de las fases del ciclo que permitan realizar un minucioso análisis de la producción de los alumnos al enfrentarse a actividades de modelización matemática, y que a su vez consideren los niveles educativos a los cuales pertenece el alumnado. Al respecto, con el propósito de evaluar los procesos de modelización matemática existen en la literatura varios planteamientos, por ejemplo, Leong (2012), Tekin-Dede y Bukova-Güzel (2018); Turner et al. (2021); sin embargo, por lo explicado anteriormente, en nuestro estudio se asume la herramienta en forma de rúbrica denominada *Rubric for Evaluating Mathematical Modelling Processes (REMMP)*, desarrollada por Toalongo et al. (2022).

1.4. Las *model-eliciting activities (MEA's)*

Son varias las propuestas existentes para implementar la modelización matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje, por ejemplo, Albarracín (2017), Ferrando y Navarro (2015), Gallart et al. (2019), Trelles et al. (2019), entre otras. En nuestro estudio, asumimos las *Model-eliciting activities (MEA's)*, propuestas por Lesh et al. (2000) y Lesh y Doerr (2003). Estas actividades están fundamentadas en seis principios: 1) construcción, 2) realidad, 3) autoevaluación, 4) documentación, 5) prototipo efectivo y 6) generalización. Además, estas actividades se caracterizan por ser abiertas, lo que implica que no existen respuestas únicas, ni siquiera respuestas incorrectas, tan solo unas más eficaces que

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

otras de acuerdo a las condiciones iniciales del problema y a los supuestos planteados por el alumnado; otra característica es que se trabajan normalmente en grupos reducidos de máximo cuatro alumnos, su duración es de aproximadamente dos o tres sesiones de clase, y normalmente se pide al alumnado que mediante una carta asesore a las personas o instituciones que tienen interés en conocer la solución del problema, aquí explicarán detalladamente los procesos utilizados para la solución.

1.5. Los problemas de Fermi

De acuerdo con Ärlebäck (2009), los problemas de Fermi son enunciados que proponen problemas de situaciones abiertas y no estandarizadas. Estas situaciones pretenden que el alumnado, a través de sus conocimientos previos, estructuren ideas y den respuesta a las necesidades de esa situación en particular. Para ello, se usa la estimación de cantidades como estrategia que permite dar respuestas mediante cálculos sencillos, de acuerdo con su nivel de escolaridad.

En este sentido, para Sriraman y Knott (2009), los problemas de Fermi deben ser considerados como problemas que permitan al alumnado estimar cantidades ante una situación particular, de tal manera que, de forma didáctica, se inicie con ideas iniciales a través de operaciones sencillas hasta concluir con cálculos que requieren más fundamentación en cuanto a cantidades y variables para dar respuesta al problema.

Finalmente, es importante mencionar que se pueden realizar actividades de modelización matemática recogiendo algunos de los planteamientos de los problemas de Fermi. Así, por ejemplo, según Ärlebäck (2011) la utilización de problemas de Fermi en las aulas contribuye a que los alumnos se acerquen a actividades de modelización matemática, por las siguientes razones: a) pueden ser desarrolladas por el alumnado en cualquier etapa escolar sin poseer un conocimiento específico en matemáticas, b) desarrollan la capacidad de estructurar y seleccionar información importante para la resolución del problema, c) desarrollan estrategias específicas de acuerdo al problema que se presenta, d) los alumnos están en capacidad de estimar cantidades sin que posean datos numéricos específicos y, f) fomenta el pensamiento crítico, reflexión y argumentación frente al punto de vista de otros alumnos.

2. METODOLOGÍA

La investigación responde al paradigma interpretativo, con un enfoque metodológico de diseño mixto, concretamente cualitativo-cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018), es decir, con una preponderancia del enfoque cualitativo. En lo referente al enfoque cualitativo, se ha diseñado un estudio de caso descriptivo (Coller, 2005; Yin, 2018) con el propósito de identificar y describir los elementos clave del objeto de estudio, y realizar un estudio a profundidad del caso seleccionado. Un estudio de caso es un estudio intensivo de un solo caso o un pequeño número de casos que se basa en datos de observación y promete arrojar luz sobre una población más grande de casos (Gerring, 2017), de acuerdo con esto una de las principales características es estudiar el caso en profundidad, el mismo debe proporcionar importante evidencia para el argumento, logrando así una generalización analítica.

Las unidades de análisis son los 882 diálogos y producciones realizados por los participantes de la investigación, las categorías guardan relación con la fundamentación teórica explicada en el anterior apartado y están formadas por cada fase del ciclo de modelización.

En lo referente al enfoque cuantitativo, se realizó un análisis de contenido cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018; Krippendorff, 2018), con el propósito de determinar qué fase del ciclo de modelización tiene una mayor presencia en el estudio del caso seleccionado.

2.1. Participantes

La actividad se desarrolló dentro de un curso de 24 alumnos -14 niñas y 10 niños- de sexto grado de Educación General Básica de una institución privada de la ciudad de Cuenca-Ecuador, de edades comprendidas entre 10 y 11 años. El nivel socioeconómico al que pertenece el alumnado se puede catalogar como medio. El rendimiento académico de los alumnos en la asignatura de Matemáticas está en un promedio de 8.00/10, lo que corresponde a Alcanzar los Aprendizajes (AA) de acuerdo con el Art. 26 del Reglamento a la Ley Orgánica de Educación Intercultural de Ecuador. Ningún alumno tenía experiencia previa en el trabajo con actividades de modelización matemática, debido a que estas actividades tienen poca o

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

nula presencia en el currículo ecuatoriano (véase, por ejemplo, la investigación de Trelles et al. 2022b.)

La actividad analizada en este estudio fue desarrollada por dos niñas de 10 años. El rendimiento académico de una de las niñas es de 10/10 y de la otra es de 9,5/10 en la asignatura de Matemáticas, lo que corresponde a la escala cualitativa de dominio de los aprendizajes (DA), de acuerdo con el Art. 26 del Reglamento a la Ley Orgánica de Educación Intercultural.

2.2. Diseño y aplicación de la actividad

La actividad fue ideada y diseñada por los autores siguiendo los planteamientos teóricos de las Modelling Eliciting Activities (MEA's) y los problemas de Fermi. La actividad pretende que el alumnado proponga un método para calcular el número de perros en cualquier ciudadela de Cuenca-Ecuador y que mediante una carta expliquen los procedimientos utilizados.

Como se ha indicado, se aplicó una primera actividad a los 24 alumnos descritos en el apartado anterior, en la que se les pidió que se organizaran por parejas según afinidad y establecieran un método para calcular el número de perros en una de las ciudadelas que queda cerca de la institución educativa. En esta parte se dieron indicaciones generales a todo el grupo y uno de los investigadores acompañó en el proceso del desarrollo de la actividad para orientar a las parejas que requieran alguna aclaración, la misma tuvo una duración de 80 minutos.

A continuación, con los resultados obtenidos, se seleccionó a la pareja que realizó la mejor propuesta en la primera parte de la actividad. Después de dos días, a esta pareja se le planteó una actividad más compleja (Figura 2). Con el propósito de concentrarnos en la producción de estas alumnas, se acompañó a las niñas durante toda la sesión de trabajo, para estudiar el trabajo desarrollado y formular preguntas clave que permitan desarrollar la capacidad de modelización en las alumnas. La sesión tuvo una duración de 123 minutos, con breves pausas, toda la sesión fue videograbada para luego ser transcrita, analizada y codificada.

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA, BASADA EN LOS PROBLEMAS DE FERMI Y LAS
MODELLING ELICITING ACTIVITIES



Estimados estudiantes, lean con atención el siguiente párrafo:

El Ministerio del Ambiente del Ecuador, piensa desarrollar una campaña de desparasitación a todos los perros de la ciudad. Empezará por cada ciudadela, para ello necesitan que ustedes les ayuden con lo siguiente: ellos no conocen el número exacto de cuántos perros hay, por lo tanto, les piden que ustedes se inventen una forma para calcular el número de perros en cualquier ciudadela.

No deben apresurarse en dar simplemente un número, es decir, hagan todas las suposiciones que crean necesarias y realicen todos los dibujos, gráficos, cálculos, etc., que crean convenientes para saber el número de perros en cualquier ciudadela. Todo lo que realicen escribanlo en su hoja de trabajo, para que al final mediante una carta le expliquen al Ministerio este procedimiento inventado por ustedes.

Adelante y éxitos en la actividad, desde ya el Ministerio y la ciudad de Cuenca les agradece por su ayuda.



Figura 2. Actividad de Modelización matemática
Fuente: Elaboración propia

2.3. Análisis de Datos

El desarrollo de la actividad fue videograbado y posteriormente transcrito, a partir de la siguiente codificación: niña 1 (N1), niña 2 (N2) e investigadora (I), con estos datos se realizó un análisis de contenido de carácter cualitativo, realizado por separado por los autores, específicamente se optó por un análisis inductivo, tomando como referente la herramienta REMMP (Toalongo et al., 2022), como se ha señalado anteriormente.

En la Tabla 1 se presentan los indicadores de la rúbrica para analizar los procesos de modelización matemática en educación primaria:

Tabla 1. Indicadores del instrumento REMMP para educación primaria

Fases	Educación Primaria
1. Comprensión	1.1. Explica el problema a los compañeros y al profesor, mostrando cómo relaciona el contenido utilizando los conocimientos previos. 1.2. Plantea preguntas sobre el problema. 1.3. Enuncia el tipo de solución que generaría el problema, por ejemplo, un número, un rango de valores, un conjunto de valores, una gráfica, una fórmula, una tabla, etc. 1.4. Representa mediante dibujos las principales características del problema. 1.5. Expresa lo que aportaría al entorno la solución del problema.
2. Estructuración	2.1. Identifica los datos que se conocen, se pueden conocer y se desconocen en el problema. 2.2. Propone ideas y/o supuestos que contribuyan a la simplificación del problema.
3. Matematización	3.1. Sustituye los elementos reales por objetos matemáticos. 3.2. Justifica el uso de objetos matemáticos de acuerdo con las características del problema. 3.3. Identifica todos los parámetros matemáticos presentes en el problema y las relaciones entre ellos.
4. Trabajo matemático	4.1. Utiliza diversas estrategias acordes a su edad que permiten proponer soluciones al problema. 4.2. Utiliza objetos matemáticos y opera con ellos para resolver el problema. 4.3. Obtiene un modelo matemático inicial como resultado de un trabajo previo.
5. Interpretación	5.1. Comprueba la coherencia de la solución matemática aplicada al contexto real inicial. 5.2. Identifica las posibles limitaciones o restricciones de la solución matemática en el contexto real inicial.
6. Validación	6.1. Justifica el modelo propuesto mediante argumentos válidos. 6.2. Valora si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total al problema inicial. 6.3. Identifica si el modelo es siempre válido o si se requieren cambios para hacerlo generalizable a nuevas situaciones.
7. Presentación	7.1. Explica las razones de las decisiones tomadas a lo largo de cada fase del proceso.

7.2. Explica el modelo obtenido aplicado a la situación del contexto real, su alcance y limitaciones utilizando un lenguaje adecuado a su edad.

7.3. Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, diagramas, dibujos, gráficos, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.

7.4. En el caso de utilización de tecnología en una o varias fases del proceso, indica claramente en qué momento, cómo y para qué se utilizó.

7.5. Escucha las observaciones y/o sugerencias planteadas por los compañeros y/o el profesor.

7.6. Responde a las observaciones y/o sugerencias de los compañeros y del profesor, utilizando un lenguaje acorde a su edad.

7.7. Si en el proceso se utilizaron caminos que no condujeron a ninguna solución, reflexiona sobre ellos y socializa sus principales aspectos.

7.8. Analiza críticamente las presentaciones realizadas por los compañeros de clase.

Fuente: Toalongo et al. (2022, p.10-11)

Una vez clasificados los datos en las correspondientes categorías se procedió a realizar un análisis de contenido cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018; Krippendorff, 2018), con el propósito de identificar qué fases del ciclo de modelización están más presentes en la realización de la actividad.

3. RESULTADOS

Luego del respectivo estudio de los datos, se presentan tres tablas que representan tres momentos en el desarrollo de la actividad.

La Tabla 2 presenta cómo las dos alumnas inician su tránsito por las diferentes fases del ciclo de modelización en busca de posibles alternativas, de esta forma contextualizan el problema de acuerdo con sus conocimientos previos y su entorno.

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Tabla 2. Análisis de los datos generados por las alumnas (primer momento)

No. de diálogo	Participante	Diálogo	Fase correspondiente del ciclo de modelización / Ítem de acuerdo con la rúbrica
19	I	Como ven piden calcular el número de perros en cualquier ciudadela	
23	N1	¿Y no podemos ver la forma de la ciudadela en Google maps?	Comprensión / 1.2
24	I	Podría ser, ya. ¿Está clara la actividad?	
25	N1 y N2	Sí (responden simultáneamente)	
28	I	Entonces qué podemos hacer, ¿qué haríamos primero?	
29	N2	Dibujar la ciudadela	
30	N1	Inventarnos la forma de la ciudadela	Estructuración / 2.2
31	I	...el momento que se van a inventar la forma de la ciudadela qué es lo primero que debería aparecer, o sea más bien dicho qué es lo más importante que va a aparecer en la ciudadela	
32	N1	Las casas, las calles	Comprensión / 1.1
36	N1	Y también en las calles	
37	I	¿Cómo es eso de las calles?	
38	N2	Hay perros callejeros	Comprensión / 1.1
41	I	Muy bien, entonces comencemos, ya	
	N1 y N2	N1 y N2 inician sus dibujos en sus respectivas hojas	
42	N1	¿Deben ser rectas las líneas?	Comprensión / 1.2
43	I	¿Qué cree usted? [hace una pausa] ¿las calles son rectas siempre?	
44	N1	No	Comprensión / 1.1
46	N1	Esta calle es un poco rara [dibuja una línea inclinada]	Matematización / 3.1
		Se toman su tiempo para realizar el dibujo	

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

47	N1	Ya está, esta es mi ciudadela [muestra de dibujo un cuadrilátero]	Matematización / 3.1
58	N2	En la mayoría de casas de mi urbanización hay muchos perros, demasiados	Comprensión / 1.1
65	I	Muy bien, ¿y esto de acá qué es N2? [señala la hoja de N2]	
66	N2	El resto de la ciudadela [muestra el gráfico de su hoja]	
71	N2	[N2 marca una equis dentro de uno de los pequeños rectángulos de su gráfico]	Matematización / 3.1
72	I	¿Qué significa esa equis N2?	
73	N2	Que ahí nadie vive	Comprensión / 1.1
79	N2	Aquí hay un perro [señala un punto en el gráfico], aquí hay otro perro [señala otro punto en el gráfico], aquí hay otro perro [señala otro punto en el gráfico]... y los gatos no cuentan	Matematización / 3.1
81	N2	Aquí hay 5 perros si no estoy mal [sigue señalando puntos en el gráfico], aquí hay 6 perros, listo. Hay 5 perros en una casa de mi urbanización.	Comprensión / 1.1

En los diálogos de la Tabla 3 se observa que las alumnas a través de preguntas por parte de la investigadora continúan su tránsito por las fases del ciclo de modelización de una forma no lineal, aquí las niñas desarrollan una propuesta de solución acorde a las representaciones planteadas en el primer momento.

Tabla 3. Análisis de los datos generados por las alumnas (segundo momento)

No. de diálogo	Participante	Diálogo	Fase correspondiente del ciclo de modelización / Ítem de acuerdo con la rúbrica
106	I	Ya, una vez que tenemos los dibujos N1 y N2, ¿qué más tendríamos que hacer, ya	

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

		tenemos el dibujo de una ciudadela hecha por N1 y una ciudadela hecha por N2, ahora ¿qué podríamos hacer?, ¿qué deberíamos hacer?	
107	N2	Contar los perros	
115	N1	Las casas, que hay	Estructuración / 2.2
117	N2	Donde hay perros, y luego contar los perros	
121	N1	1,2,3...18,19,20,21	Matematización / 3.1
134	I	¿Ya está todo? ¿Cuántas casas hay en total?	
135	N1	39	
139	N1	[Continúa con la parte del gráfico que faltaba] 40,41,42,43... 85	Matematización / 3.1
143	I	Entonces N2 ¿Cuántas en la tuya?	
148	N2	[cuenta] 1,2,3, ... 50	Matematización / 3.1
156	I	¿Cómo podríamos saber cuántos perros hay por ejemplo en la que tiene 50 casas? Y cuántos perros hay en la que tiene 85 casas	
182	I	¿Entonces qué más tendríamos que hacer ahora?	
184	N2	Multiplicación, mmm sumar	Estructuración / 2.2
186	N1	No, primero deberíamos de restar el 85 menos las casas que están deshabitadas	Estructuración / 2.2
190	N1	85-3. Ya acabé [muestra en su hoja la operación realizada 85-3=82]	Trabajo matemático / 4.2
191	I	Perfecto	
192	N2	[Escribe en su hoja la operación de forma vertical 50-1=49], listo	Trabajo matemático / 4.2
195	I	En estas 49 casas y en estas 82 casas, ¿qué pasaría en estas?, en estas casas que ustedes han obtenido como respuesta.	
196	N1	Que si hay personas	Interpretación / 5.1

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

197	I	Si hay personas, y el hecho de que haya personas, significa que...	
198	N1	Tal vez, pueden haber perros	Interpretación / 5.1
200	N1	Seguro hay perros y en otras no han de haber perros	Comprensión / 1.1
215	I	Como podríamos saber cuáles si tienen perros y cuales no	
235	N1	Estaba haciendo que 9 casas tienen perros, 10 perros aquí en toda la ciudadela, pero sería poco	Comprensión / 1.1
239	N1	Porque si es que hay 82 casas, es muy poco que haya 10 perros en total	Interpretación / 5.1
241	N2	la idea que yo propongo es que pongan el número de casas que hay en la ciudadela y le resten por las casas que tienen perros	Estructuración / 2.2
243	N2	Y de ahí, esas casas que tienen perros, mmm [piensa] tengo que sumar los perros que viven en cada casa	
244	N1	¿Pero si no sabemos el número de perros que hay en cada casa?	Comprensión / 1.2
247	I	Qué tal si, si es que, pensamos en esta calle de aquí [señala la calle que queda frente a la escuela] que ustedes conocen ¿cuántas casas habrá en esta calle?	
248	N2	¿unas 15?	
249	N1	Mmm [piensa] tal vez unas 9	Matematización / 3.1
254	N2	¿12?	Comprensión / 1.2
255	I	¿Por qué el 12?	
258	N1	Porque tal vez es el número del medio que está entre el 15 y el 9 [lo expresa con una ligera duda]	Trabajo matemático / 4.1
344	I	De esas 12 casas ¿cuántas tendrán perros?	
346	N2	La de lado, mmm, la del otro... la siguiente allí al lado [indica	Comprensión / 1.1

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

		con el dedo en señal de ubicación de casas]	
352	N2	Mmm [piensa] unos seis	Matematización / 3.1
353	I	Unas 6, muy bien, ¿cuántas casas habían?	
354	N2	12	Matematización / 3.1
355	I	Y ustedes dicen que las 6 tienen perros	
357	I	Ya, el 6 qué es para el 12	
361	N2	La mitad	Matematización / 3.3

Finalmente, en la Tabla 4 las niñas hacen uso de los análisis que han desarrollado durante el primer y segundo momento y se acercan a la solución final del problema.

Tabla 4. Análisis de los datos generados por las alumnas (tercer momento)

No. de diálogo	Participante	Diálogo	Fase correspondiente del ciclo de modelización / Ítem de acuerdo con la rúbrica
446	I	¿Cuál es la idea para saber el número de perros?	
447	N1	tal vez podríamos dividir el 41 para el 2	Estructuración / 2.2
448	I	Pero, ¿qué era este 41?	
449	N1	El 41 era el número de casas con perros	Matematización / 3.1
460	I	N1 y N2, N2 ha dicho de que hay 24 casas que tienen perros y N1 ha dicho que en la ciudadela que ella dibujo hay 41 casas que tienen perros, atención a esta pregunta, N2 y N1 muy atentas a esta pregunta ¿cuántos perros habría en cada casa?, ¿cuántos perros vamos a poner que hay en cada casa?	
463	N1	Yo pondría unos 2	Comprensión / 1.1
492	I	Haber veamos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... [cuenta en la hoja con el	

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

		dedo] bien, hay 15 perros aquí en el dibujo de N2, hay 15 perros en 8 casas	
493	N1	Y tal vez podríamos hacer esos 15 dividido para 8	Estructuración / 2.2
552	I	Entonces, si es que tengo 41 casas [señala en la hoja de trabajo] y digo que en cada casa hay 2 perros, cuántos perros hay	
564	N1	me da 82	Trabajo matemático / 4.2
596	I	Pero ¿ya con eso estaríamos? O falta o hay que poner algo más	
599	N1	No creo [piensa mirando a I]	Estructuración / 2.1
602	I	había unos perros que ustedes dijeron antes	
603	N2	Que eran callejeros	Comprensión / 1.1
604	I	Eso, ahora ¿cuántos callejeros pondríamos?	
605	N2	Yo aquí [mira en sus otras hojas] hay, aquí tengo yo 6 callejeros	Comprensión / 1.1
636	I	Si, entonces les podríamos decir al ministerio que no sabe cómo calcular los perros, ¿le podríamos decir como una secuencia de operaciones para que ellos determinen el número de perros?	
637	N1 y N2	Sí, responden simultáneamente.	Comprensión / 1.1

A continuación, se presentan los dibujos de las dos niñas que representan cada una de las ciudadelas con las que realizaron el trabajo.

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

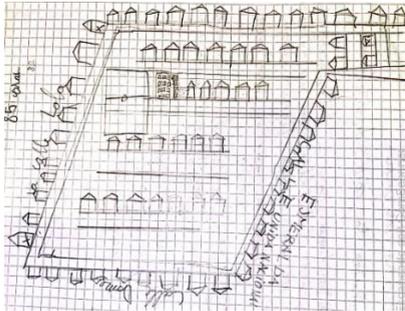


Figura 3. Representación de la ciudadela de la niña N1

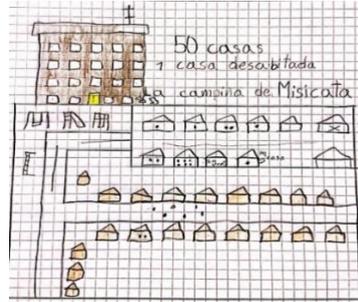


Figura 4. Representación de la ciudadela niña N2

Finalmente, la investigadora pregunta a las alumnas cuál es el procedimiento seguido para sumar los perros callejeros, las niñas utilizan el concepto de media aritmética y proponen que al final se deben sumar 5 perros callejeros, esto debido a que N1 en su trabajo sumó cuatro perros callejeros y N2 sumó, 6. La síntesis del procedimiento se puede observar en la carta redactada por las niñas (Figura 5).

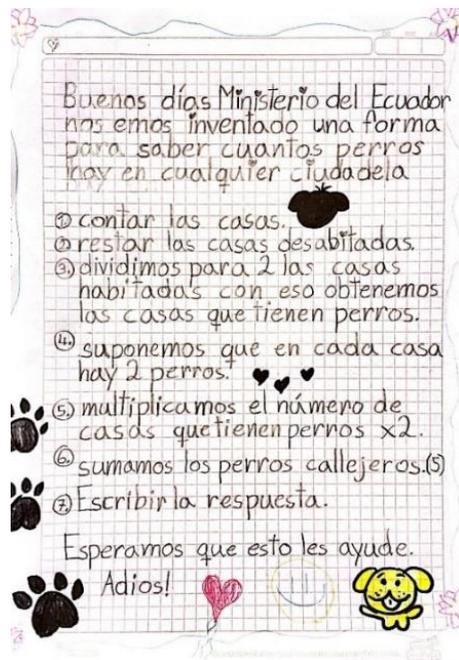


Figura 5. Carta redactada por las niñas
Fuente: Elaboración de las alumnas

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Al cuantificar las fases por las que transitaron las dos alumnas al desarrollar la actividad, se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 5. Cuantificación de las fases del ciclo de modelización presentes en el desarrollo de la actividad

Fases	Total	%
Comprensión	119	34.10
Estructuración	65	18.62
Matematización	54	15.47
Trabajo matemático	82	23.50
Interpretación	18	5.16
Validación	11	3.15
Presentación	0	0
Total	349	100

Es importante mencionar que dentro de las 882 unidades de análisis están los diálogos planteados por la investigadora, los mismos que no son categorizados dentro de las fases del ciclo de modelización, ya que esto hace alusión exclusiva a la producción de las alumnas; así mismo, existen algunos diálogos que no son relevantes y que no pertenecen a ninguna de las fases del ciclo de modelización. También conviene aclarar que la fase correspondiente a la Exposición/Presentación no estuvo presente en el desarrollo de la actividad, esto se debe fundamentalmente al diseño del estudio, pues las características del diseño no posibilitaron que las alumnas presenten el trabajo ante sus pares.

DISCUSIÓN

En este estudio se ha analizado la producción de alumnos ecuatorianos de educación primaria al enfrentarse a una actividad de modelización matemática, considerando los planteamientos teóricos de las *Modelling Eliciting Activities (MEA'S)* en combinación con los problemas de Fermi. Los resultados obtenidos a partir de las producciones de dos alumnas evidencian que, a pesar de no haber tenido experiencia previa con actividades de modelización matemática, son capaces de comprender el problema, realizar suposiciones, conjeturas y proponer estrategias de solución, aspectos que usualmente están descuidados en los planes de

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

estudio de matemáticas. Desde esta perspectiva, English (2010) afirma que normalmente no se expone al alumnado ante el desarrollo de eficaces procesos matemáticos, tan útiles para resolver los problemas actuales y futuros de la sociedad contemporánea. En la misma línea de ideas, coincidimos con Trelles et al. (2022a), en que es imperante entregar al alumnado problemas contextualizados, altamente significativos y que desafíen sus procesos de pensamiento.

El modelo elaborado por las alumnas pone de manifiesto la capacidad que tienen para hacer uso de conocimientos extramatemáticos, relacionarlos con la situación propuesta y proponer ideas de solución que se ajusten a las condiciones del problema. Esto coincide con los hallazgos de Trelles et al. (2022a), quienes afirman que los alumnos participantes en su investigación fueron capaces de relacionar aspectos extramatemáticos y decidir como estos aspectos pueden incidir en los datos.

Según los datos obtenidos, se evidencia que las alumnas transitan con mayor frecuencia por la fase denominada: Comprensión. Esto sugiere que lograron un alto nivel de entendimiento del problema, lo cual es corroborado por el hecho de que alcanzaron a proponer una solución a través de un modelo. Sin embargo, estos resultados conviene interpretarlos con cautela, pues la subrepresentación de una fase del ciclo de modelización no necesariamente representa una debilidad, así como una superrepresentación una fortaleza. Consideramos que esto está en función de la naturaleza del problema, en ocasiones podría darse que la fase más transitada por los alumnos sea precisamente la que más dificultad les generó. Esto conlleva a pensar que lo más probable en un problema de modelización es que el alumnado transite con distinta frecuencia por cada una de las fases de ciclo.

Nuestros hallazgos coinciden con Kaygisiz y Şenel (2023), quienes describen que en su investigación los trabajos de los alumnos demostraron que la competencia de comprensión se había alcanzado en un nivel satisfactorio, pues los alumnos asociaron el problema con sus conocimientos previos y relacionaron la situación del problema con la vida real. No obstante, estos investigadores reportaron que el alumnado participante en su investigación tuvieron dificultades para dibujar la representación del problema, resultados que difieren de nuestros hallazgos,

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

ya que en nuestro estudio las dos niñas no presentaron dificultad para representar el problema mediante un dibujo.

Además, consideramos que la interacción de las dos alumnas en el desarrollo de la actividad de modelización les permitió fortalecer capacidades comunicativas, así como intercambiar ideas, pensamientos y formas de representación que les facilita desarrollar el pensamiento matemático. Para Brady (2018) y Jung y Brady (2023) los alumnos cuando se enfrentan a actividades de modelización pueden utilizar herramientas representacionales para imaginar una variedad de fenómenos en el mundo real que pueden ser capturados por esas herramientas; este trabajo imaginativo ayuda a condicionar sus formas de ver y les apoya en la producción reflexiva de matematizaciones, a su vez esto apoya las lecturas críticas de los alumnos sobre sus propios modelos o modelos creados por sus compañeros. Asimismo, para Zubi et al. (2018), los alumnos aprendieron diferentes conocimientos de parte de sus compañeros al enfrentarse a actividades de modelización.

Una de las fases menos presente en el desarrollo de la actividad fue la validación. De manera similar, Zubi et al. (2018), Ji (2012) y Tekin-Dede y Yilmaz (2013) encontraron que el alumnado con o sin experiencia en modelización presentaba dificultades al validar el modelo. Zubi et al. (2018), concluyen que en su investigación se examinaron las competencias de modelación de los alumnos y se observaron que estos se desempeñaron en el nivel deseado en términos de comprensión, simplificación, matematización y trabajo matemático. Sin embargo, su desempeño fue inadecuado o parcialmente adecuado en las fases de interpretación y verificación, hallazgos que coinciden en su gran mayoría con los nuestros.

Un aspecto, que merece también la atención y que ya ha sido manifestado por varios investigadores, como por ejemplo Toalongo et al. (2021), tiene que ver con el hecho de que los procesos de modelización siguen una estructura no lineal, es decir los alumnos transitan de forma desordenada por cada una de las fases del ciclo de modelización.

Consideramos también que la combinación de los problemas de Fermi con actividades de modelización matemática pueden resultar una estrategia interesante para afianzar el conocimiento matemático en el

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

alumnado. En esta misma línea, diversos autores (e.g., Albarracín y Gorgorió, 2019; Habertzettl et al., 2018; Segura y Ferrando, 2023) han subrayado que los problemas de Fermi pueden constituirse en un primer acercamiento del alumnado hacia la modelización. No obstante, recomendamos que para su elaboración se consideren los intereses de los alumnos, así como la formación del profesorado para su implementación.

CONCLUSIONES

La actividad fue ideada y diseñada por el equipo investigador, partiendo de los intereses del alumnado, en este caso, las mascotas. A pesar de que las dos participantes no tenían experiencia previa en el desarrollo de estas actividades, se evidenció la capacidad que tienen para enfrentarse a actividades de este estilo, situación que sugiere que actividades como estas deberían estar más presentes en la planificación del profesorado.

Uno de los aspectos relevantes es el potencial que tienen las alumnas para intercambiar ideas, realizar conjeturas, suposiciones, relacionar conocimientos previos con la situación problemática, utilizar objetos matemáticos para representar problemas de la vida real y de realizar un aprendizaje conjunto. Sin embargo, estas situaciones difícilmente ocurren de manera espontánea, pues es preciso que el currículo así como el profesorado, promuevan el desarrollo de actividades de modelización matemática en las aulas. Para ello, los problemas de Fermi en combinación con las características de las actividades de modelización matemática podrían ser una buena alternativa.

La formación del profesorado para diseñar actividades de modelización, orientar al alumnado en su desarrollo y evaluar sus respectivos procesos se convierten en un aspecto fundamental, pues en cualquier contexto comprender los procesos de pensamiento emergentes del alumnado es mucho más complicado que imponerles nuestro propio modelo.

Una de las principales limitaciones del estudio es que trata de un estudio de caso intensivo, concretamente del estudio a profundidad del trabajo de una pareja de niñas de 10 años con un alto dominio de los

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

aprendizajes; por lo tanto, los resultados de este estudio no pueden generalizarse a todos los niños de esta edad. Sin embargo, existe la posibilidad de seguir estudiando más actividades de modelización matemática con otros niños de esta misma edad o incluso con grupos de diferentes edades en distintos contextos educativos.

Una segunda limitación del estudio tiene que ver con la imposibilidad de que las alumnas expongan sus trabajos ante sus pares y que estos a su vez también den opiniones para la mejora del modelo, para ello se necesita previamente que todo el grupo de alumnos hayan trabajado en la misma actividad. Sin embargo, queda abierta esta modalidad para futuras investigaciones.

Finalmente, consideramos importante ejecutar propuestas innovadoras en la clase de matemáticas, que propicien el desarrollo del pensamiento y la creatividad en el alumnado, para así contribuir al alcance de la competencia matemática, tan necesaria en la sociedad contemporánea.

REFERENCIAS

Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135. <https://doi.org/10.4995/msel.2017.7707>

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45-57. <https://doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004>

Alsina, Á., Toalongo, X., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Quadrante: Revista de Investigaçã o em Educaçã o Matemática*, 30(1), 74-93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23654>

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

- Alsina, C., García-Raffi, L. M., Gómez, J. y Romero, S. (2007).
Modelling in science education and learning. *SUMA*(54), 51-53.
- Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(4), 331-364. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157>
- Ärlebäck, J. B. (2011). Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education. En M. Pytlak, T. Rowland y W. Swoboda (Eds.), *Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics (CERME 7)* (pp. 1010-1020). University of Rzeszów.
https://www.researchgate.net/publication/337243663_Exploring_the_solving_process_of_group_solving_realistic_Fermi_problems_from_the_perspective_of_the_Anthropological_Theory_of_Didactics
- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 36(1), 1-18. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.16>
- Barquero, B. y Jessen, B. (2020). Impacto del enfoque teórico en el diseño de tareas de modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(17), 98-113.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.317>
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del aplicacionismo en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933>
- Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*(50), 31-43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Bliss, K. y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7-21) Consortium for Mathematics and Its Applications and Society for Industrial and Applied Mathematics.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught And Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
https://www.researchgate.net/publication/279478754_Mathematical_Modelling_Can_It_Be-Taught_And_Learnt

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Woodhead Publishing.
<https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>

Brady, C. (2018). Modelling and the representational imagination. *ZDM*, 50(1), 45-59. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4>

Carreira, S., Amado, N. y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 199-210). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_21

Coller, X. (2005). *Estudio de casos*. Centro de Investigaciones Sociológicas.

Daher, W. (2021). Middle school students' Motivation in solving modelling activities with technology. *EURASIA*, 17(9), 1-13.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/11127>

English, L. D. (1996). Children's reasoning in solving novel problems of deduction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 2, pp. 329-336.

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

- English, L. D. (Ed.). (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Lawrence Erlbaum.
- English, L. D. (2004). Promoting the development of young children's mathematical and analogical reasoning. En L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 210-215). Lawrence Erlbaum.
- English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9013-1>
- English, L. D. (2010). Modeling with Complex Data in the Primary School. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford, *Modelling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 287-300). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_25
- English, L. D. (2014). Promoting statistical literacy through data modelling in the early school years. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 441-458). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_23
- English, L. D. y Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM Mathematics Education*, 50, 103-115. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0896-y>
- Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 61-78. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z>
- Ferrando, I. y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. <https://doi.org/10.4995/msel.2015.3681>
- Florensa, I., García, F. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de casos en distintos niveles

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

educativos. *Avances de investigación en Educación Matemática*(17), 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315>

Gallart, C., García-Raffi, L. y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86. <https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955>

Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling*, (ICTMA 14) (pp. 305-314). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31

Gerring, J. (2017). *Case study research: Principles and Practices (Strategies for Social Inquiry)*. Cambridge University Press.

Girnat, B. y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher`s Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 75-84). Springer. http://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_9

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling - Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling*, (ICTMA 14) (pp. 301-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30

Haberzettl, N., Klett, S. y Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule—Modellieren mit Fermi-Aufgaben. En K. Eilerts y K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule* (pp. 31-41). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21042-7_3

Hernandez-Martínez, P. y Vos, P. (2018). "Why do I have to learn this?" A case study on estudents' experiences of the relevance of

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

- mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50, 245-257. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2>
- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill.
- Ji, X. (2012). 12th International Congress on Mathematical Education. A *quasi-experimental study of high school students' mathematics modelling competence*. COEX.
- Jung, H., Stehr, E. y He, J. (2019). Mathematical modeling oportunities reported by secondary mathematics preservice teachers and instructors. *School Science and Mathematics*, 119(6), 353-365. <https://doi.org/10.1111/ssm.12359>
- Jung, H. y Brady, C. (2023). Modeling actions foregrounded in whole-class modeling discourse: A case study of a model-eliciting activity and a three-act task. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24. <https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2180849>
- Kaygisiz, I. y Şenel, E. A. (2023). Investigating mathematical modeling competencies of primary school students: Reflections from a model eliciting activity. *Journal of Pedagogical Research*, 7(1), 1-24. <https://doi.org/10.33902/JPR.202317062>
- Krippendorff, K. (2018). *Content Analysis: An introduction to its methodology*. SAGE Publications.
- Leong, R. (2012). Assessment of mathematical modeling. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 3(1), 61-65. <https://doi.org/10.7916/jmetc.v3i1.736>
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Desing in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Lawrence Erlbaum Associates.

Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Can mathematical modelling works as a creativity-demanding activity? An empirical study in China. *ZDM Mathematics Education*, 54(1), 67-81.
<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01316-4>

Montero, L. y Vargas, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214-248.
<https://doi.org/10.24844/EM3401.08>

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. An overview*. NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices: Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standars for Mathematics*.

OECD. (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. (PISA, Ed.) OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfef0bf9c-en>.

Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de Modelización Matemática en la Escuela Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 41-70.

Ruiz-Higueras, L., García, F. y Lendínez, E. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95-118. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.95-118>

Segura, C. y Ferrando, I. (2023). ¿Qué estrategia es mejor para un problema de Fermi? Adaptabilidad de futuros maestros. *Enseñanza*

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

- de las Ciencias*, 41(3), 133-151.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5978>
- Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343. <https://doi.org/10.4995/msel.2011.3100>
- Sriraman, B. y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, 40(2), 205-223. <https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7>
- Tekin-Dede, A. y Yılmaz, S. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliliklerinin incelenmesi [Examination of modeling competencies of primary school mathematics teacher candidates]. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 4(3), 185-206.
<https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/201346>
- Tekin-Dede, A. y Bukova-Güzel, E. (2018). A rubric development study for the assessment of modeling skills. *The Mathematics Educator*, 27(2), 33-72.
- Toalongo, X., Alsina, Á., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO*(1), 81-98. <https://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>
- Toalongo, X., Trelles, C. y Alsina, Á. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics*(10), 4662.
<https://doi.org/10.3390/math10244662>
- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022a). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 192-213.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>

Nombre y apellidos [los incluirá el editor tras la evaluación anónima]

- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022b). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos. *Innova Research Journal*, 7(2), 97-116. <https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076>
- Trelles-Zambrano, C. y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163.
- Trelles-Zambrano, C., Toalongo-Guamba, X., Alsina, Á. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*(102), 43-59.
- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240. <http://www.comie.org.mx/documentos/rmie/v11/n31/pdf/rmiev11n31scB02n02es.pdf>
- Turner, E., Chen, M., Roth McDuffie, A., Smith, J., Aguirre, J. y Foote, M. B. (2021). Validating a student assessment of mathematical modeling at elementary school level. *School Science and Mathematics*, 121(7), 408-421. <https://doi.org/10.1111/ssm.12494>
- Vargas, V., Escalante, C. y Carmona, G. (2018). Competencias matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213-236. <https://doi.org/10.24844/EM3001.08>
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: design and methods*. SAGE Publications, Inc.
- Zubi, I. A., Peled, I. y Yarden, M. (2018). Children with mathematical difficulties cope with modelling tasks: what develops? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(4), 506-526. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1527404>

*La evaluación es el motor del aprendizaje, ya que de ella depende tanto qué y cómo se enseña,
como el qué y el cómo se aprende.*

-Neus Sanmartín-

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Una vez presentada la pregunta de investigación de la presente tesis doctoral y sus correspondientes objetivos se procede a discutir los principales resultados obtenidos.

5.1. Discusión

5.1.1. Conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial del alumnado con talento matemático

Uno de los aspectos clave en lo que a educación se refiere es lo concerniente al proceso de evaluación de los aprendizajes, es por esta razón que, en la formación del profesorado es necesario sentar bases sólidas para la correcta identificación, utilización e implementación de los instrumentos y técnicas al momento de llevar a cabo el proceso de evaluación de los aprendizajes ya sea dentro o fuera del aula.

En este sentido, lo referente al proceso de evaluación de los aprendizajes es un aspecto clave en el proceso de enseñanza aprendizaje, tal como lo señala Quinquer (1999) la forma en cómo se aborda la evaluación de los aprendizajes tiene relación directa con las concepciones que tiene el profesorado acerca del proceso de enseñanza aprendizaje. En este sentido, nuestros hallazgos coinciden con el trabajo de Hamodi et al. (2015) quienes concluyen que existe confusión por parte del profesorado en el uso de la terminología relacionada con la evaluación de los aprendizajes, situación que genera consecuencias directas en el alumnado, tal como manifiesta Prieto (2008), para quien las creencias de evaluación por

parte del personal docente acarrear profundas consecuencias en el alumnado, algunas de las cuales pueden ser bastante críticas y desfavorables.

Por tal razón, es el personal docente el encargado de encaminar al alumnado hacia la adquisición de saberes y aprendizajes dentro y fuera del aula, para ello debe definir de manera correcta los criterios, técnicas e instrumentos de evaluación que permitan al alumnado adquirir los respectivos aprendizajes, además debe tener claridad en la utilización de la terminología utilizada en el proceso y su correspondiente interrelación. En nuestro caso preocupa el hecho de que el 56% del profesorado que participó en nuestro estudio no relacione correctamente las competencias matemáticas a evaluarse con sus respectivas dimensiones, pues coincidimos con Pérez y Gonçalves (2013) para quienes el personal docente además de situar a sus estudiantes en las mejores condiciones de aprender debe también definir los criterios e instrumentos que permitan valorar el nivel de dominio de las competencias a ser adquiridas por sus grupos. Por consiguiente, resulta claro que, si el personal docente no relaciona adecuadamente las competencias matemáticas y sus dimensiones, es muy probable que este proceso descrito anteriormente no sea adecuado.

Además, los resultados de nuestro estudio evidencian que la mayoría del profesorado utiliza únicamente la observación y la rúbrica como técnica e instrumento de evaluación, y desaprovecha otras técnicas muy valiosas, por ejemplo: el análisis documental y de producciones, la autoevaluación, la evaluación entre pares, la evaluación compartida; así como algunos instrumentos

como: fichas de observación, listas de control, fichas de autoevaluación, entre otros. Estos hallazgos coinciden con los encontrados por Rochera et al. (2002) para quienes el profesorado de educación primaria emplea mayoritariamente la observación en sus prácticas evaluativas. Al respecto, estamos de acuerdo con Trelles-Zambrano et al. (2017), para quienes son muchas las técnicas que se pueden aprovechar para evaluar los aprendizajes en la asignatura de Matemáticas y que la utilización de estas dependerá del conocimiento y de la experiencia del profesorado para poder usarlas en la particularidad de los contextos que se presentan en el proceso educativo.

Por lo expuesto, es fundamental que el personal docente comprenda que evaluar la competencia matemática del alumnado, implica ir más allá de la evaluación de los contenidos para focalizarse en la evaluación de los procesos matemáticos o dimensiones, como, por ejemplo, la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. Coincidimos con Sanmartí (2007) en el sentido que debe fortalecerse la evaluación formativa y formadora que, a partir de técnicas e instrumentos diversos, ayude a todo el alumnado a guiar su proceso de enseñanza-aprendizaje.

5.1.2. Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil

En la actualidad son muchos los países que han decidido incorporar la modelización matemática en los planes de estudio de los diferentes niveles educativos, Trelles-Zambrano y Alsina (2017) manifiestan que esto se debe principalmente al importante papel de la modelización matemática en diferentes

áreas del conocimiento, en donde se incluye la propia educación matemática. Autores como Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo, 2009; Carreira, Amado y Lecoq 2011; Ortiz, Rico y Castro, 2007; Wess y Greefrath, 2019 en sus trabajos indagan y permiten conocer el proceso de modelización; sin embargo, aún existe falta de orientaciones en los currículos en cuanto a modelización matemática, su uso en el aula y la forma de evaluar dichas actividades (Trelles-Zambrano y Alsina, 2017).

Los resultados obtenidos en nuestro estudio revelan que los niños de educación infantil son capaces de elaborar unos primeros modelos con base a los conocimientos matemáticos que poseen, situación que confirma los hallazgos de Porras-Lizano y Fonseca-Castro (2015) y English y Watson (2018). Además, coincidimos con Gallart, Ferrando y García-Raffi (2015, 2019) y Trigueros (2009) en el sentido de que las actividades de modelización matemática se constituyen en actividades enriquecedoras para el alumnado.

A través del estudio se corroboran también los trabajos de English y Watson (2018), Ruiz-Higuera y García (2011), entre otros en el sentido de que el proceso de modelización es complejo, pues los niños en educación infantil -al igual que el alumnado de otros niveles educativos- transitan de una forma no ordenada por las diferentes fases del ciclo de modelización. Además, la utilización de actividades de modelización matemática en el aula de educación infantil a partir de problemas reales favorece un verdadero desarrollo de la

conexión de significados de los objetos matemáticos con la vida cotidiana (Reeuwijk, 1997).

Finalmente, indicamos que las siete fases del ciclo de modelización son trabajadas en diferente medida, siendo las fases de interpretación y validación las que requieren mayor atención, por ello es necesario que el profesorado de educación infantil cuente con una adecuada formación en modelización matemática para que sean ellos los encargados de fomentar la participación del alumnado y que todas las fases se desarrollen en la misma medida sin que ninguna sea considerada más importante que otra.

5.1.3. Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education

En el primer artículo que forma parte de esta tesis se concluyó que la observación y la rúbrica son la técnica e instrumento, respectivamente, más utilizados por el profesorado. En consecuencia, con estos hallazgos, y con el propósito de dotar al profesorado de un instrumento de evaluación con el que estén familiarizados es que en este estudio se presentó el diseño, construcción y validación de la rúbrica REMMP 3-18, con el objetivo de proporcionar a los profesores y a la comunidad científica un instrumento que permita evaluar los procesos de modelización matemática desarrollados por alumnos de diferentes niveles educativos. Para ello, nos apoyamos en el trabajo de Andrade (2000) para quien las *instructional rubrics* no son solamente guías o escalas de evaluación sino también son

herramientas que permiten guiar a la persona que aprende y a la persona que enseña.

Para la construcción de la rúbrica hemos considerado las aportaciones teóricas de Blum y Leiβ (2007) referente al ciclo de modelización; sin dejar de lado los criterios de instituciones como el COMAP y SIAM (2019), National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2010) y otros aspectos que contempla el NCTM (1989, 2014) en cuanto al currículo se refiere. Además, se consideró el trabajo de Frejd (2013) con el propósito de identificar las principales propuestas para evaluar la modelización matemática y de esta manera contar con un punto de partida.

En este sentido, consideramos que si bien existen trabajos referentes a la evaluación de la modelización matemática (Leong, 2012 y Tekin-Dede y Bukova-Güzel, 2018) estos no consideran las etapas de desarrollo del alumno, o bien existen otros trabajos (Turner, Roth McDuffie et al., 2022 y Turner, Chen et al., 2021) en los cuales la evaluación se limita a los cursos de tercero a quinto de educación primaria.

Así, la revisión de estas propuestas nos permite afirmar que, la modelización matemática al ser un proceso complejo puede abordarse desde diferentes perspectivas, y que a partir del ciclo de modelización se puede simplificar el desarrollo de los procesos de modelización con su correspondiente evaluación, esto es lo que se pretende abarcar en la rúbrica REMMP que se

presenta a través de siete fases y sus respectivos indicadores, así como la manera de evaluar este proceso en las diferentes etapas educativas.

Finalmente, a manera de ejemplo se presentaron dos actividades de modelización matemática en los niveles de educación infantil y educación secundaria en las cuales se pudieron observar cómo se desempeñan los alumnos en las diferentes fases del ciclo de modelización, lo que evidencia que la rúbrica REMMP permite al profesorado obtener información sobre el nivel de avance respecto a la creación de un modelo, para así realizar la correspondiente retroalimentación, en donde el alumnado puede visualizar la fase en la que ha tenido inconvenientes y mejorarlas a través de la autoevaluación y coevaluación.

5.1.4. La modelización matemática y los problemas de Fermi aplicados a estudiantes de Educación Primaria

En este artículo se analiza la producción de alumnos ecuatorianos de educación primaria al enfrentarse a una actividad de modelización matemática, la misma que ha sido diseñada considerando los planteamientos teóricos de las *Modeling Eliciting Activities (MEA's)* conjuntamente con los problemas de Fermi. Los resultados demuestran que, los participantes aun cuando no han trabajado con este tipo de actividades presentan una adecuada comprensión del problema, realizan suposiciones, conjeturas y proponen estrategias de solución que usualmente no están contempladas en el plan de estudios de matemáticas. Desde esta perspectiva, coincidimos con English (2010) quien afirma que normalmente no se expone al alumnado ante el desarrollo de eficaces procesos matemáticos,

tan útiles para resolver los problemas actuales y futuros de la sociedad contemporánea, coincidimos también con Trelles et al (2022a) quienes manifiestan la importancia de presentar al alumnado problemas contextualizados, altamente significativos y que desafíen sus procesos de pensamiento.

El proceso de elaboración del modelo por parte de las alumnas demuestra la capacidad que tienen para utilizar conocimientos extramatemáticos, relacionarlos con la situación propuesta y proponer una solución ajustada a las condiciones del problema, hallazgos que coinciden con lo encontrado por Trelles et al. (2022a), para quienes los alumnos participantes fueron capaces de relacionar aspectos extra matemáticos y decidir cómo estos aspectos pueden incidir en los datos.

Según los datos obtenidos en este estudio, se evidencia que las alumnas transitan con mayor frecuencia por la fase denominada: Comprensión. Esto sugiere que lograron un alto nivel de entendimiento del problema, lo cual es corroborado por el hecho de que alcanzaron a proponer una solución a través de un modelo. Sin embargo, estos resultados conviene interpretarlos con cautela, pues la subrepresentación de una fase del ciclo de modelización no necesariamente representa una debilidad, así como una superrepresentación una fortaleza. Consideramos que esto está en función de la naturaleza del problema, en ocasiones podría darse que la fase más transitada por los alumnos sea precisamente la que más dificultad les generó. Esto conlleva a pensar que lo más

probable en un problema de modelización es que el alumnado transite con distinta frecuencia por cada una de las fases de ciclo.

Estos hallazgos coinciden con Kaygisiz y Şenel (2023), quienes reportan que en su investigación los trabajos de los estudiantes demostraron que la competencia de comprensión se había alcanzado en un nivel satisfactorio, pues los estudiantes asociaron el problema con sus conocimientos previos y relacionaron la situación del problema con la vida real. No obstante, estos investigadores reportaron que los estudiantes participantes en su investigación tuvieron dificultades para dibujar la representación del problema, resultados que difieren de nuestros hallazgos, ya que en nuestro estudio las dos niñas no presentaron dificultad para representar el problema mediante un dibujo.

Además, consideramos que la interacción de las estudiantes en el desarrollo de la actividad de modelización les permitió fortalecer capacidades comunicativas, así como intercambiar ideas y pensamientos que les facilita desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido, investigadores como Zubi et al. (2018), concluyen que los estudiantes al trabajar en una actividad de modelización matemática aprenden diferentes conocimientos de parte de sus compañeros.

Una de las fases menos presente en el desarrollo de la actividad fue la validación. De manera similar, Ji (2012), Tekin-Dede y Yilmaz (2013) y Zubi et al. (2018) encontraron que los estudiantes con o sin experiencia en modelización presentaban dificultades al validar el modelo. Zubi et al. (2018), concluyen que

en su investigación se examinaron las competencias de modelación de los estudiantes y se observaron que estos se desempeñaron en el nivel deseado en términos de comprensión, simplificación, matematización y trabajo matemático. Sin embargo, su desempeño fue inadecuado o parcialmente adecuado en las fases de interpretación y verificación, hallazgos que coinciden en su gran mayoría con los nuestros.

Un aspecto, que merece también la atención y que ya ha sido manifestado por varios investigadores, como por ejemplo Toalongo et al. (2021), tiene que ver con el hecho de que los procesos de modelización siguen una estructura no lineal, es decir los estudiantes transitan de forma desordenada por cada una de las fases del ciclo de modelización.

Consideramos también que la combinación de los problemas de Fermi con actividades de modelización matemática puede resultar una estrategia interesante para afianzar el conocimiento matemático en los estudiantes. En esta misma línea, diversos autores (e.g., Albarracín y Gorgorió, 2019; Haberzettl et al., 2018; Segura y Ferrando, 2023) han subrayado que los problemas de Fermi pueden constituirse en un primer acercamiento de los estudiantes hacia la modelización. No obstante, recomendamos que para su elaboración se consideren los intereses de los estudiantes, así como la formación del profesorado para su implementación.

5.2. Conclusiones

En este apartado presentamos las conclusiones obtenidas en cada una de las fases de esta tesis. En este sentido, consideramos que la investigación realizada contribuye a tener una mejor comprensión acerca de los conocimientos del profesorado en lo que se refiere a la evaluación de los aprendizajes, así como acerca de la evaluación de la competencia matemática. Además, permite comprender el trabajo del alumnado -principalmente- de edades tempranas al enfrentarse a actividades de modelización matemática, logrando identificar en qué fases del ciclo de modelización los alumnos transitan con mayor facilidad y a su vez en qué fases presentan mayores dificultades. A más de lo expuesto, como una de las contribuciones de esta tesis se pone a disposición del profesorado y de la comunidad de investigadores una rúbrica que permite evaluar y consecuentemente comprender con mayor profundidad los procesos de modelización matemática desarrollados por alumnos de distintos niveles educativos, aportando de esta manera al avance del conocimiento respecto a la evaluación de la competencia matemática a través de actividades de modelización.

Ahora bien, de acuerdo con la pregunta de investigación y los objetivos que se han planteado se concluye que:

- El análisis del conocimiento del profesorado acerca de los conceptos de evaluación de los aprendizajes demuestra que existe confusión en el uso de la terminología, pues tan solo el 37.5% del profesorado participante en

el estudio brinda una respuesta bastante cercana a lo que en la literatura se entiende por evaluación de los aprendizajes. Este aspecto debe ser considerado por los planes de formación inicial y permanente del profesorado en estos temas.

- El 56% del profesorado participante en el estudio no relaciona correctamente las competencias matemáticas a evaluarse con sus respectivas dimensiones, hecho que tiene repercusión directa en el proceso de evaluación de los aprendizajes, pues es muy probable que los criterios e indicadores de evaluación que se formulen no sean los más adecuados.
- Los datos obtenidos reflejan que la mayoría del profesorado utiliza en su práctica profesional únicamente la observación y la rúbrica como técnica e instrumento de evaluación respectivamente, y desaprovecha otras técnicas muy valiosas, por ejemplo: el análisis documental y de producciones, la autoevaluación, la evaluación entre pares, la evaluación compartida; así como algunos instrumentos como: fichas de observación, listas de control, fichas de autoevaluación, entre otros.
- Únicamente el 53,1% del profesorado, concibe a la evaluación como un proceso permanente, es decir que debe ser realizado al inicio, durante y al final del proceso enseñanza-aprendizaje.
- Es urgente que el profesorado comprenda que evaluar la competencia matemática implica ir más allá de los contenidos para focalizarse en la

evaluación de los procesos matemáticos, para ello se debe reemplazar de forma progresiva la evaluación sumativa por la evaluación formativa y formadora, para que a partir de técnicas e instrumentos adecuados se permita regular de forma correcta el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Las actividades de modelización matemática trabajadas con alumnado de educación infantil demuestran que los niños son capaces de elaborar modelos acordes a su edad con base en los conocimientos matemáticos que movilizan.
- El alumnado participante en el estudio demostró que al enfrentarse a actividades de modelización matemática transita de forma no ordenada por las diferentes fases del ciclo de modelización: comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación y exposición/presentación. Si bien estas fases son trabajadas en diferente medida, la interpretación y validación son las fases que requieren mayor atención.
- En lo referente al diseño, construcción y validación de la rúbrica REMMP 3-18, consideramos que esta rúbrica proporciona a los profesores y a la comunidad científica un instrumento que permite evaluar los procesos de modelización matemática desarrollados por alumnos de diferentes niveles educativos. Esta se enmarca según el concepto de evaluación formativa ya que tanto los alumnos como profesores pueden identificar los puntos

fuertes y débiles que pueden surgir en el desarrollo del modelo y se puedan mejorar los procesos de forma continua.

- Esta rúbrica contribuye a la literatura en el campo de la modelización matemática, consecuentemente puede ser inclusive utilizada por profesores e investigadores noveles como una herramienta propedéutica para diseñar, implementar y facilitar sus primeras actividades de modelización matemática.
- Los estudiantes de educación primaria participantes del estudio demostraron su capacidad para intercambiar ideas, realizar conjeturas, suposiciones, relacionar conocimientos previos con la situación problemática, utilizar objetos matemáticos para representar problemas de la vida real y de realizar un aprendizaje conjunto. Sin embargo, se evidenció un significativo desbalance al momento de trabajar con cada una de las fases del ciclo de modelización, siendo la fase de comprensión la que tuvo mayor presencia en el proceso, seguida del trabajo matemático, la estructuración y la matematización. A su vez, la interpretación, validación y exposición fueron las fases menos presentes.
- Identificar con detalle cómo se moviliza el alumnado por cada una de las fases del ciclo de modelización, permite que docentes e investigadores planeen estrategias que posibiliten fortalecer las fases en las que el alumnado posee destreza, así como estrategias que permitan superar las

dificultades que presenta el alumnado para movilizarse por las fases de interpretación, validación y exposición.

- Un aspecto importante por considerar es que la implementación de actividades de modelización matemática genera una verdadera conexión de significados de los objetos matemáticos a partir de actividades que son reales y demuestran su utilidad en la vida cotidiana.
- El diseño de actividades de modelización matemática bajo los planteamientos teóricos de las MEA's en combinación con los problemas de Fermi, pueden resultar una excelente oportunidad para el desarrollo de la competencia matemática por parte del alumnado.

Otro aspecto para considerar es que el profesorado comprenda que evaluar la competencia matemática del alumnado no es solamente evaluar los contenidos, sino que se debe evaluar los procesos matemáticos o dimensiones que son una parte fundamental en el aprendizaje como lo son la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación.

Para que esto sea posible es necesario brindar al profesorado durante su formación inicial conocimientos que permitan evaluar de forma correcta la competencia matemática y de forma paralela prestar atención a la formación continua del profesorado para brindar temáticas relacionadas con la evaluación competencial para que desarrolle diversas actividades que le permitan utilizar técnicas y herramientas que favorezcan el aprendizaje, la utilización de éstas

dependerá en gran medida del conocimiento y experiencia del profesorado para utilizarlas de acuerdo con la particularidad de los contextos en que se desarrolla el proceso educativo.

De forma global, y a partir de la pregunta de investigación y objetivos de esta tesis doctoral se concluye que, la modelización matemática a través de los diferentes procesos que conlleva contribuye significativamente para que el alumnado de las diferentes etapas educativas pueda alcanzar niveles adecuados de competencia matemática; sin embargo, para obtener resultados exitosos es necesaria la formación inicial y permanente del profesorado en estos temas.

A partir de estos resultados preliminares aquí expuestos se ve la necesidad de continuar con el trabajo sobre cómo evaluar la competencia matemática, pero enfocando nuestro estudio a las actividades de modelización matemática.

5.3. Limitaciones del estudio y futuros trabajos de investigación

Si bien la presente investigación permite avanzar en el conocimiento respecto a la evaluación competencial de la modelización matemática, conviene indicar las limitaciones que presenta este trabajo.

Consideramos que una limitante en cuanto al conocimiento que tiene el profesorado respecto a la evaluación de la competencia matemática es el no contar con un mayor número de maestros, ya que los resultados obtenidos en este trabajo fueron con base a un número de 32 maestros y por ende no podemos generalizar dichos hallazgos. En este sentido, creemos pertinente generar otros

estudios con un número mayor de participantes que nos permita analizar con mayor amplitud los conocimientos que tiene el profesorado acerca de la evaluación de la competencia matemática; sin embargo, a partir de estos datos se puede contribuir con el diseño de programas formativos que servirán a los maestros en activo a mejorar estos conocimientos.

Otro aspecto que limitó nuestro estudio en cuanto a la creación de un primer modelo matemático fue que en educación infantil no se pudo trabajar con más de un grupo dentro del aula debido a que era la primera vez que tanto la maestra como el grupo clase realizaba una actividad de modelización matemática.

Por ello, entre las futuras líneas de investigación consideramos que, para trabajar con actividades de modelización matemática en educación infantil es necesario que el profesorado esté en condición de elaborar actividades que permitan que los niños se inicien en el desarrollo de un modelo, por tanto debe existir una formación inicial y permanente del profesorado para que ellos quienes son guías del aprendizaje dentro del aula puedan gestionar de una manera correcta el desarrollo de cada una de las fases del ciclo de modelización.

Otra limitante es que la modelización matemática es un proceso complejo y en este aspecto los distintos ciclos de modelización contribuyen a simplificarlo, por esta razón, los límites entre cada una de las fases del ciclo de modelización pueden resultar bastante difusos y en algunas ocasiones puede resultar difícil

determinar con exactitud en qué fase del ciclo se encuadran las diferentes producciones de los alumnos.

Otra limitación es el no contar con datos acerca de la utilización de la rúbrica en el nivel educativo de bachillerato, quedando esta posibilidad abierta para futuras investigaciones.

Finalmente, a partir de lo expuesto en esta tesis doctoral, consideramos que quedan planteados varios aspectos que pueden ser objeto de investigaciones futuras, por ejemplo: el diseño e implementación de nuevas actividades de modelización matemática que combinen MEA's y problemas de Fermi y que sean implementadas en educación infantil, secundaria y bachillerato; así como la formación inicial y permanente del profesorado de las diferentes etapas educativas en cuanto a modelización matemática.

6. REFERENCIAS

- Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2019). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematical Learning*, 12(1), 53-65. <https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360>
- Acosta, Y. y Alsina, Á. (2017). Conocimientos del profesorado sobre las altas capacidades y el talento matemático desde una perspectiva inclusiva. *Números*, 94, 71-92. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/94/Articulos_04.pdf
- Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135. <https://doi.org/10.4995/msel.2017.7707>
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45-57. <https://doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004>
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2020). Mathematical Modeling Projects Oriented towards Social Impact as Generators of Learning Opportunities: A Case Study. *Mathematics*, 8(11), 2034. <https://doi.org/10.3390/math8112034>
- Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.
- Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 33(1)(92), 7-29.
- Alsina, Á. (2018). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*(98), 7-23.
- Alsina, Á. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿Qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*(100), 187-192.
- Alsina, Á. y Coronata, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 23-36.
- Alsina, Á., García, M. y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(55), 85-108.
- Alsina, Á., Liñán-García, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). El número y las operaciones matemáticas en Educación Infantil. En M. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 81-144). Paraninfo.

- Alsina, Á., Toalongo, X., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 30(1), 74-93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23654>
- Alsina, C., García-Raffi, L. M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA*(54), 51-53.
- Andrade, H. (2000). Using rubrics to promote thinking and learning. *Educational Leadership*, 57(5), 13-18.
- Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(4), 331-364. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157>
- Ärlebäck, J. B. (2011). Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education. En M. Pytlak, T. Rowland y W. Swoboda (Eds.), *Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics (CERME 7)* (pp. 1010-1020). University of Rzeszów.
- Aydin, U. y Özgeldi, M. (2017). The PISA Tasks: Unveiling Prospective Elementary Mathematics Teachers` Difficulties with Contextual, Conceptual, and Procedural Knowledge. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 63(1), 105-123. <https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1324906>
- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 36(1), 1-18. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.16>
- Azcárate, P. y Cardeñoso, J. (2012). Evaluación de la competencia matemática. *Investigación en la escuela*(78), 31-42.
- Barquero, B. y Jessen, B. (2020). Impacto del enfoque teórico en el diseño de tareas de modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(17), 98-113. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.317>
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del aplicacionismo en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933>
- Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*(50), 31-43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Benavides, M. y Maz-Machado, A. (2012). ¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre el talento matemático? 167-179.
- Bliss, K. y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment and instruction in mathematical*

modeling education (pp. 7-21). Consortium for Mathematics and Its Applications and Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling - Categorising the TSG21 papers. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 1-17). Roskilde University.
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *Proceeding of the 21th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught And Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Borba, M. C. y Villareal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer.
- Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4(2), 18-24. <https://doi.org/10.7916/jmetc.v4i2.624>
- Borromeo, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematik didaktik*, 31(1), 99-118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Brady, C. (2018). Modelling and the representational imagination. *ZDM*, 50(1), 45-59. doi:<https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4>
- Carreira, S., Amado, N. y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 199-210). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_21
- Castillo, S. y Cabrerizo, J. (2003). *Evaluación educativa y promoción escolar* (Primera ed.). Pearson Educación.
- Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula*(21), 85-104. <https://doi.org/10.14201/aula20152185104>

- Coller, X. (2005). *Estudio de casos*. Centro de Investigaciones Sociológicas.
- Colwell, J. y Enderson, C. M. (2016). "When I hear literacy": Using pre-service teachers' perceptions of mathematical literacy to inform program changes in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 53, 63-74. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2015.11.001>
- Common Core Standards Writing Team [CCSSI]. (2010). *Common core state standards mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices; Council of Chief State School Officers.
- Consortium for Mathematics and its Applications and Society for Industrial and Applied Mathematics. (2019). *GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education* (2a ed.). (S. Garfunkel y M. Montgomery, Eds.), COMAP and SIAM.
- Corbalán, F. (2011). Los recursos que utilizar. En J. M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 53-74). Graó.
- Creswell, J. y Garrett, A. L. (2008). The "movement" of mixed methods research and the role of educators. *South African Journal of Education*, 28, 208-333.
- Czocher, J. (2017). Mathematical modelling cycles as a task design heuristic. *The Mathematics Enthusiast*, 14(1), 129-140. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1391>
- Daher, W. (2021). Middle school students' Motivation in solving modelling activities with technology. *EURASIA*, 17(9), 1-13. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11127>
- de Guzmán, M. (2004). Tratamiento del talento matemático precoz. En C. Jiménez Fernández, y A. Rivero Otero (Eds.), *Diagnóstico y atención a los alumnos con necesidades educativas específicas Alumnos intelectualmente superdotados* (pp. 119-135). Secretaria General Técnica.
- Díaz Barriga, F. y Hernández Rojas, G. (2000). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. McGraw-Hill.
- English, L. D. (1996). Children's reasoning in solving novel problems of deduction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 2, pp. 329-336.
- English, L. D. (Ed.). (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Lawrence Erlbaum.
- English, L. D. (2004). Promoting the development of young children's mathematical and analogical reasoning. En L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 210-215). Lawrence Erlbaum.
- English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9013-1>

- English, L. D. (2010a). Young Children's Early Modelling with Data. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 24-47. <https://doi.org/10.1007/BF03217564>
- English, L. D. (2010b). Modeling with Complex Data in the Primary School. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modelling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 287-300). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_25
- English, L. D. (2014). Promoting statistical literacy through data modelling in the early school years. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 441-458). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_23
- English, L. D. y Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM Mathematics Education*, 50, 103-115. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0896-y>
- English, L. D. y Watters, J. (2005). Mathematical Modelling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58-79. <https://doi.org/10.1007/bf03217401>
- Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 61-78. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z>
- Ferrando, I. y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. <https://doi.org/10.4995/msel.2015.3681>
- Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las ciencias*, 32(3), 385-405. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1231>
- Florensa, I., García, F. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de casos en distintos niveles educativos. *Avances de investigación en Educación Matemática*(17), 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315>
- Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *approach. The Mathematics Enthusiast*, 3(1), 51-75. <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol3/iss1/3/>
- Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment-a literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 413-438. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9491-5>
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números*, 88, 93-103.
- Gallart, C., García-Raffi, L. y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86. <https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955>

- García, F. (2004). *Recomendaciones metodológicas para el diseño de un cuestionario*. Editorail Limusa.
- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)* (pp. 305-314). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31
- Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Servei de Comunicació i Publicacions
- Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. (2015). *De l'escola inclusiva al sistema inclusiu. Una escola per a tothom, un projecte per a cadascú*. Servei de Comunicació i Publicacions.
- Gerring, J. (2017). *Case study research: Principles and Practices (Strategies for Social Inquiry)*. Cambridge University Press.
- Girnat, B. y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher`s Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 75-84). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_9
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Gómez, L., Cáceres, M. y Zúñiga, M. (2018). La evaluación del aprendizaje en la educación preescolar. Aproximación al estado del conocimiento. *Revista Conrado*, 14(62), 242-250.
- Goñi Zabala, J. M. (2008). *3² - 2 Ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling - Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)* (pp. 301-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 28(6), 14-17. https://www.jstor.org/stable/41191796?seq=1#page_scan_tab_contents
- Haberzettl, N., Klett, S. y Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule – Modellieren mit Fermi-Aufgaben. En K. Eilerts y K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule* (pp. 31-41). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21042-7_3

- Haines, C. y Crouch, R. (2007). Mathematical and applications: Ability and competence frameworks. En W. Blum, P. L. Galbraith y H. N. Henn (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 417-424). Springer.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6a. ed.). McGraw-Hill.
- Hernandez-Martínez, P. y Vos, P. (2018). "Why do I have to learn this?" A case study on students' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50, 245-257. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2>
- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Universidad de Valencia.
- Ji, X. (2012). 12th International Congress on Mathematical Education. *A quasi-experimental study of high school students' mathematics modelling competence*. COEX.
- Johnsen, S. K. (2004). Definitions, models, and characteristics of gifted students. En S. Johnsen (Ed.), *Identifying gifted students: A practical guide* (pp. 1-21). Prufrock Press.
- Jung, H. y Brady, C. (2023). Modeling actions foregrounded in whole-class modeling discourse: A case study of a model-eliciting activity and a three-act task. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24. <https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2180849>
- Jung, H., Stehr, E. y He, J. (2019). Mathematical modeling oportunities reported by secondary mathematics preservice teachers and instructors. *School Science and Mathematics*, 119(6), 353-365. <https://doi.org/10.1111/ssm.12359>
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht: ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. En G. Graumann, T. Jahnke, G. Kaiser y J. Meyer (Eds.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp. 64-84). Verlag Franzbecker.
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(3), 302-310. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02652813>
- Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 82-85. <https://doi.org/10.1007/BF02655882>

- Kaygisiz, I. y Şenel, E. A. (2023). Investigating mathematical modeling competencies of primary school students: Reflections from a model eliciting activity. *Journal of Pedagogical Research*, 7(1), 1-24. <https://doi.org/10.33902/JPR.202317062>
- Krippendorff, K. (2018). *Content Analysis: An introduction to its methodology*. SAGE Publications.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. University of Chicago Press.
- Lawshe, C. H. (1975). A quantitative approach to content validity. *Personnel Psychology*, 28(4), 563-575. <https://doi.org/10.1111/j.1744-6570.1975.tb01393.x>
- Leong, R. (2012). Assessment of mathematical modeling. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 3(1), 61-65. <https://doi.org/10.7916/jmetc.v3i1.736>
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Lawrence Erlbaum Associates.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, R. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 25-54). SEIEM.
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087901127_016
- Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Can mathematical modelling works as a creativity-demanding activity? An empirical study in China. *ZDM Mathematics Education*, 54(1), 67-81. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01316-4>
- McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. Pearson Educación, S.A.
- Miles, M. y Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis; an expanded sourcebook* (2a. ed.). SAGE.
- Millman, J. y Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335-366). MacMillan.

- Montero, L. y Vargas, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214-248. <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>
- Moya, J. y Luengo, F. (2011). Las competencias básicas como poderes para la ciudadanía. En J. Moya y F. Luengo, *Teoría y Práctica de las competencias básicas* (pp. 29-48). Graó.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. An overview*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices: Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*.
- Niss, M. (1993). Assessment in Mathematics Education and Its Effects: An Introduction. En M. Niss (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study* (pp. 1-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1974-2_1
- Niss, M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. En B. Madison y L. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 215-220). National Council on Education and the Disciplines.
- Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM Project.
- Olande, O. (2014). Graphical artefacts: Taxonomy of students` response to test items. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 53-74. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9493-3>
- Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. (PISA, Ed.) OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>.
- Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*. OECD. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>.
- Ortiz, J.; Rico, L. y Castro, E. (2007). Mathematical Modelling: A teacher`s training study. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan, *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 249-441). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.241>
- Osterlind, S. J. (1989). *Constructing test items*. Kluwer.

- Pérez, M. y Gonçalves, S. (2013). Formación del profesorado en competencias. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 17(3), 3-10.
- Peter-Koop, A. (2009). Teaching and Understanding Mathematical Modelling through Fermi-Problems. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Education Mathematics Teacher 4: Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars* (pp. 131-145). Springer.
- Porras-Lizano y Fonseca-Castro. (2015). Aplicación de actividades de modelización matemática en la educación secundaria costarricense. *Uniciencia*, 29(1), 42-57.
- Prieto, M. (2008). Creencias de los profesores sobre evaluación y efectos incidentales. *Revista de Pedagogía*, 29(84), 123-144.
- Prieto, M. y Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: un problema a develar. *Estudios Pedagógicos*, 34(2), 245-262. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052008000200015>
- Quinquer, D. (1999). Modelos y enfoques sobre la evaluación: El modelo comunicativo. *Aula de Innovación Educativa*, 80, 54-57.
- Reeuwijk, M. V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*(12), 9-16.
- Rochera, M. J., Remesal, A. y Barberá, E. (2002). El punto de vista del profesorado de educación primaria y educación secundaria obligatoria sobre las prácticas de evaluación del aprendizaje matemático: Un estudio comparativo. *Revista de Educación*(327), 249-265.
- Ruiz-Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 181-219). Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de Modelización Matemática en la Escuela Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 41-70.
- Ruiz-Higueras, L., García, F. y Lendínez, E. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95-118. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.95-118>
- Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics*, 71, 123-143. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9167-8>
- Sánchez, M. (2011). A Review of Research Trends in Mathematics Teacher Education. *PNA*, 5(4), 129-145. <https://doi.org/10.30827/pna.v5i4.6151>
- Sanmartí, N. (2007). *10 ideas clave. Evaluar para aprender*. Graó.

- Sanmartí, N. y Mas, N. (2016). Les rúbriques per a una avaluació plantejada com a aprenentatge. *Perspectiva Escolar*(309), 37-41.
- Segura, C. y Ferrando, I. (2023). ¿Qué estrategia es mejor para un problema de Fermi? Adaptabilidad de futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(3), 133-151. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5978>
- Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343. <https://doi.org/10.4995/msel.2011.3100>
- Sriraman, B. y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, 40(2), 205-223. <https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7>
- Sternberg, R. J. (2018). Theories and conceptions of giftedness. En S. I. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children. Psycho-educational theory, research and best practices*, 2a. ed. (pp. 29-48). https://doi.org/10.1007/978-3-319-77004-8_3
- Tannenbaum, A. J. (2003). Nature and nurture of giftedness. En N. Colangelo y G. Davis (Edits.), *Handbook of gifted education*, 3a. ed. (pp. 45-59). Allyn and Bacon.
- Tekin-Dede, A. y Bukova-Güzel, E. (2018). A rubric development study for the assessment of modeling skills. *The Mathematics Educator*, 27(2), 33-72.
- Tekin-Dede, A. y Yılmaz, S. (2013). İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının modelleme yeterliliklerinin incelenmesi [Examination of modeling competencies of primary school mathematics teacher candidates]. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 4(3), 185-206. <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/201346>
- Toalongo, X., Alsina, Á., Trelles, C. y Acosta, Y. (2021). Conocimiento del profesorado sobre la evaluación competencial del alumnado con talento matemático. *Educare Electronic Journal*, 25(1), 1-23. <http://doi.org/10.15359/ree.25-1.5>
- Toalongo, X., Alsina, Á., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO*(1), 81-98. <https://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>
- Toalongo, X., Trelles, C. y Alsina, Á. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics*(10), 4662. <https://doi.org/10.3390/math10244662>
- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022a). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 192-213. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>
- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022b). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto

- ecuatorianos. *Innova Research Journal*, 7(2), 97-116.
<https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076>
- Trelles-Zambrano, C. y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163.
- Trelles-Zambrano, C., Bravo, F. y Barraqueta, J. (2017). ¿Cómo Evaluar los Aprendizajes en Matemáticas? *INNOVA Research Journal*, 2(6), 35-51.
<https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183>
- Trelles-Zambrano, C., Toalongo-Guamba, X., Alsina, Á. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*(102), 43-59.
- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240.
<http://www.comie.org.mx/documentos/rmie/v11/n31/pdf/rmiev11n31scB02n02es.pdf>
- Trigueros Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.
- Tristán-López, A. (2008). Modificación al modelo de Lawshe para el dictámen cuantitativo de la validez de contenido de un instrumento objetivo. *Avances en Medición*(6), 37-48.
- Turner, E., Chen, M., Roth McDuffie, A., Smith, J., Aguirre, J. y Foote, M. B. (2021). Validating a student assessment of mathematical modeling at elementary school level. *School Science and Mathematics*, 121(7), 408-421.
<https://doi.org/10.1111/ssm.12494>
- Turner, E., Roth McDuffie, A., Bennett, A., Aguirre, J., Chen, M., Foote, M. y Smith, J. (2022). Mathematical Modeling in the Elementary Grades: Developing and Testing an Assessment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 1387-1409. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10195-w>
- Vargas, V., Escalante, C. y Carmona, G. (2018). Competencias matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213-236. <https://doi.org/10.24844/EM3001.08>
- Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.
<https://doi.org/10.22430/22565337.505>
- Wenderlin, I. (1958). *The Mathematical Ability: Experimental and Factorial studies*. Glerups.
- Wess, R. y Greefrath, G. (2019). Professional competencies for teaching mathematical modelling - supporting the modelling-specific task competency of prospective

teachers in the teaching laboratory. Comunicación presentada en el CERME11. Utrecht.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: design and methods*. SAGE Publications, Inc.

Zubi, I. A., Peled, I. y Yarden, M. (2018). Children with mathematical difficulties cope with modelling tasks: what develops? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(4), 506-526.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1527404>.