

# SOBRE LA FORMA DE LOS ARBOTANTES EN LAS FÁBRICAS GÓTICAS

**Albert Samper Sosa**



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.ca>

Aquesta obra està subjecta a una llicència Creative Commons Reconeixement-  
NoComercial-CompartirIgual

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-  
CompartirIgual

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-  
ShareAlike licence



TESIS DOCTORAL

## **Sobre la forma de los arbotantes en las fábricas góticas**

Albert Samper Sosa

2023





TESIS DOCTORAL

2023

## **Sobre la forma de los arbotantes en las fábricas góticas**

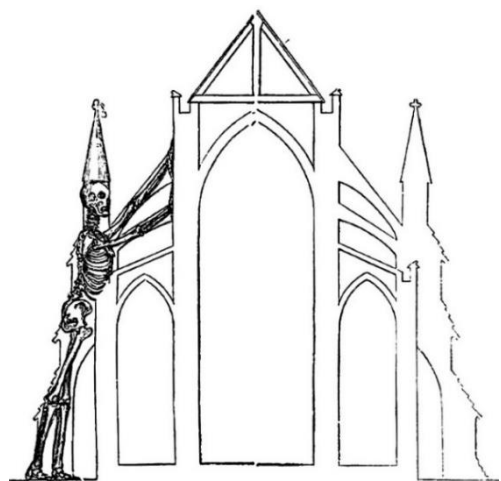
Albert Samper Sosa

Programa de Doctorado en Ciencias Humanas, del Patrimonio y de la Cultura

Dirección: Dr. Gerardo Boto Varela y el Dr. Blas Herrera Gómez  
Tutor: Dr. Gerardo Boto Varela

Memoria presentada para optar al título de doctor por la Universitat de Girona





**“Força, equilibri, valor i seny”**

Lema y verso de la composición coral “Los Xiquets de Valls”.

autor Josep Anselm Clavé.



## **Prefacio**

A continuación, se destacan las ocho aportaciones científicas nacionales e internacionales las cuales, hasta el momento, ha generado la presente Tesis presentada en formato de compendio de artículos:

### **Artículos en revistas científicas de impacto:**

1. A. Samper, B. Herrera, A. Costa. (2022). Systematic calculation of flying buttress parametres by means of geometric regresion. *Journal of Cultural Heritage*, 54, pp. 21-30. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.culher.2022.01.005>. Impacto: SJR, IF: 0,663-Q1; JCR, IF: 2,955– Q1.
2. A. Samper, R. Martín, B. Herrera. (2022). On the inclination of a flying buttress arch. *Nexus Network Journal*, 24, pp. 897-911. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00004-022-00619-7>. Impacto: SJR, Impact factor: 0,237 -Q1; JCR, IF: 0.338 - Q2.
3. A. Samper, R. Martín, D. Moreno. (2023). Study on the mechanical capacity and structural relevance of a flying buttress through the analysis of a particular case. *International Journal of Architectural Heritage*. DOI: <https://doi.org/10.1080/19648189.2015.1131201>. Impacto: SJR, Impact factor: 0,64 -Q1; JCR, IF: 3.11 – Q1.

### **Congresos internacionales con evaluación externa:**

4. A. Samper. Descripción geométrica de los arbotantes de la Catedral de Mallorca usando las cónicas de regresión. XV Congreso Internacional de Expresión Gráfica Aplicada a la Edificación, 27-28 de mayo de 2021. Universidad de la Laguna, España.
5. A. Samper, B. Herrera. Nota técnica sobre la determinación de los arcos de los arbotantes góticos. XIX Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica, 1-4 de junio de 2022. Universidad de Cartagena, España.

### **Capítulos de libro en editoriales de prestigio:**

6. A. Samper. Redibujando el futuro de la Expresión Gráfica aplicada a la edificación. “Descripción geométrica de los arbotantes de la Catedral de Mallorca usando las cónicas de regresión”. Editorial Tirant lo Blanch. 2021. Spain. ISBN: 978-84-18656-93-4.



**Participación en actividades de proyectos científicos competitivos:**

7. A. Samper. Artículo divulgativo y vídeo promocional del mismo enmarcado en el proyecto titulado “Castells de ciencia” de la convocatoria Ayudas de la FECYT para el fomento de la cultura científica, tecnológica y de la innovación. Línea de actuación “Cultura científica, tecnológica y de la innovación”. Organismo financiador: Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología. IP: Montserrat Cartaña Guasch, Universitat Rovira i Virgili. Código: 2019/00006/007/037.

**Conferencias invitadas:**

8. A. Samper. Título de la conferencia: “Análisis geométrico de algunos elementos arquitectónicos, de estilo gótico, de la Lonja y la Catedral de Mallorca”. Conferencia enmarcada en el curso titulado “Joyas de la arquitectura en Mallorca: del gótico a los Premios Pritzker y a Ferragut Pou” y organizado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia el día 14 de mayo de 2021.

El Dr. Blas Herrera Gómez, el Dr. Agustí Costa Jover, el Dr. Rodrigo Martín Saiz y el Sr. David Moreno García, como coautores de los artículos y comunicaciones siguientes:

1. A. Samper, B. Herrera, A. Costa. (2022). Systematic calculation of flying buttress parametres by means of geometric regresion. *Journal of Cultural Heritage*, 54, pp. 21-30.
2. A. Samper, R. Martín, B. Herrera. (2022). On the inclination of a flying buttress arch. *Nexus Network Journal*, 24, pp. 897-911.
3. A. Samper, R. Martín, D. Moreno. (2023). Study on the mechanical capacity and structural relevance of a flying buttress through the analysis of a particular case. *International Journal of Architectural Heritage*.
4. A. Samper, B. Herrera. Nota técnica sobre la determinación de los arcos de los arbotantes góticos. XIX Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica, 1-4 de junio de 2022. Universidad de Cartagena, España.

Aceptan que el Sr. Albert Samper Sosa presente los artículos mencionados como autor principal y como parte de su tesis doctoral, y que estos artículos no puedan, por tanto, formar parte de ninguna otra tesis doctoral. Y para que así conste y surta los efectos oportunos, firmamos este documento.

Girona, 2023.

**Dr. Blas Herrera**

**Dr. Agustí Costa**

**Dr. Rodrigo Martín**

**Sr. David Moreno**



Confirmamos que este trabajo, titulado «**Sobre la forma de los arbotantes en las fábricas góticas**», que presenta el señor *Albert Samper Sosa* para la obtención del título de Doctor, se ha realizado bajo nuestra dirección en la Universitat de Girona dentro del Programa de Doctorado titulado *Programa de Doctorado en Ciencias Humanas, del Patrimonio y de la Cultura* y por compendio de artículos.

Girona, 2023.

Los directores de la Tesis Doctoral:

**Dr. Gerardo Boto Varela**

Universitat de Girona

**Dr. Blas Herrera Gómez**

Universitat Rovira i Virgili



A mis abuelos.



## Agradecimientos

Vayan de antemano mis agradecimientos:

A mis directores de tesis.

A las siguientes entidades y personas que me facilitaron el acceso a las cubiertas de las diferentes catedrales donde se encuentran los arbotantes estudiados en el presente trabajo: Al Capítulo Catedralicio la Catedral de Mallorca y a su Directora del Archivo, Sra. Catalina Mas; al Sr. Gustau Torres Mendoza, conservador de la Catedral de Girona; al Sr. Víctor Ochotorena, Canónigo Fabriquero de la Catedral de Burgos; al Sr. Antonio Trobajo, Deán de la Catedral de León; al Sr. César García, historiador de la Catedral de Oviedo; al Sr. Isidoro Castañeda, Director del archivo y biblioteca capitular de la Catedral Primada de Toledo; al Sr. Gilles Fresson, Attaché de coordination de la Catedral de Chartres y de la Abadía de San Pedro de Chartres; al Sr. Eric Charlet, Technicien des services culturels et des bâtiments de Francia, y al Sr. Antoine Paoletti, architecte des bâtiments de France et coservateur de la Catedral de Amiens; al Sr. François-Xavier Créteaux, ingénieur des Services Culturels et du Patrimoine de la Abadía de San Denis; al Sr. Gary Price, Clerk of the works de la Catedral de Salisbury; al Sr. Jez Fry, Clerk of the works de la Catedral de Wells; y finalmente, a la Sra. Sarah Fielding, Head of visitors experience de la Abadía de Bath.

Y a todos los miembros del grupo de investigación de la URV titulado Patriar-CAIT y; en especial, al Dr. Agustí Costa, al Dr. Rodrigo Martín y al doctorando Sr. David Moreno por la colaboración en algunos trabajos científicos que se han derivado de la presente investigación.





## Índice del contenido

|  |            |
|--|------------|
| Índice de figuras y tablas   | 019        |
| Índice alfabético  | 027        |
| Resumen  | 029        |
| Presentación   | 031        |
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b>   | <b>037</b> |
| <b>2. OBJETIVOS</b>  | <b>049</b> |
| <b>3. METODOLOGÍA Y RESULTADOS</b>                                   | <b>051</b> |
| 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio       | 051        |
| 3.2. Revisión de los parámetros geométricos de los arbotantes        | 089        |
| 3.3. Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante           | 105        |
| 3.4. Justificación formal de los arbotantes de la Catedral de Girona | 125        |
| <b>4. CONCLUSIONES</b>   | <b>147</b> |
| Referencias bibliográficas   | 151        |
| Anexos   | 157        |



## Índice de figuras y tablas

### Relación de figuras:

**Figura 1.** A la izquierda, fotografía de la visita a los arbotantes de la Catedral de Mallorca realizada el 27 de julio de 2021. A la derecha, fotografía de la visita a la Playa de las Catedrales en el municipio gallego de Ribadeo realizada el 21 de agosto de 2017.

**Figura 2.** Dibujo de Villard de Honnecourt consultado en la Biblioteca Nacional de Francia y disponible en (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b10509412z>) correspondiente al folio 32v. A la derecha, dibujo de Thomas H. King de los arbotantes del coro de la catedral de Reims disponible en (Hahnloser, 1972).

**Figura 3.** Imágenes realizadas por Viollet-le-Duc en las que se concreta gráficamente el criterio que permitió agrupar los arbotantes en dos tipologías según la ubicación del centro del arco que bordea este elemento arquitectónico, (Viollet le Duc, 1854).

**Figura 4.** En la página siguiente se muestra un ejemplo gráfico del proceso fotogramétrico aplicado al arbotante de la Catedral de Chartres. A la izquierda, la nube densa de puntos del modelo. Al centro, el modelo mallado; y a la derecha, el modelo texturizado resultante. Imagen realizada por el autor.

**Figura 5.** Resumen explicativo del proceso fotogramétrico aplicado al arbotante de la Catedral de Mallorca. En esta figura se presentan parcialmente las fotografías usadas y una secuencia gráfica de los pasos 2, 3 y 4; correspondientes a la nube de puntos densa, al mallado del modelo y su posterior textura. Imagen realizada por el autor.

**Figura 6.** En la página siguiente se muestra un ejemplo gráfico del proceso fotogramétrico aplicado al arbotante de la Catedral de Burgos. A la izquierda, el modelo mallado; y a la derecha, el modelo texturizado resultante. Imagen realizada por el autor.

**Figura 7.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Mallorca. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 8.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Mallorca. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 9.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Burgos. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 10.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Burgos. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 11.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de León. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 12.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de León. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 13.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Oviedo. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 14.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Oviedo. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 15.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Toledo. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 16.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Toledo. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 17.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Chartres. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 18.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Chartres. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 19.** Fotografía de los arbotantes de la Abadía de San Pedro de Chartres. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 20.** La página siguiente muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Abadía de San Pedro de Chartres. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 21.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Amiens. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 22.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Amiens. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 23.** Fotografía de los arbotantes de la Abadía de San Denís. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 24.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Abadía de San Denis. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 25.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Salisbury. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 26.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Salisbury. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 27.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Wells. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 28.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Wells. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 29.** Fotografía de los arbotantes de la Abadía de Bath. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 30.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Abadía de Bath. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

**Figura 31.** A la izquierda mostramos una sección transversal de la Catedral de Oviedo y marcamos el detalle D correspondiente al levantamiento fotogramétrico situado a la derecha de la imagen. En este detalle indicamos los parámetros que configuran los arbotantes. La figura muestra el caso O1 correspondiente a que el centro está sobre el muro, y el caso O2 correspondiente a que el centro está en el interior de la catedral. Imagen realizada por el autor.

**Figura 32.** A la izquierda, levantamiento de uno de los arbotantes de la Catedral de Amiens. A la derecha, levantamiento de uno de los arbotantes de la Abadía de San Denis. En ambos gráficos mostramos las diferencias de: inclinación  $\alpha$ , flecha  $\mathcal{F}$ , luz  $\mathcal{L}$  y ubicación de los centros  $\mathcal{O}$  de los arcos, en función de la elección de puntos  $\mathcal{P}_n$  del borde del arco, la cual se realiza arbitrariamente. Imagen realizada por el autor.

**Figura 34.** En esta página mostramos unas vistas del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Burgos. A la izquierda, mostramos la superficie formada por 198.295 caras y que indicamos en la Tabla 1. En el centro, mostramos el modelo texturizado. A la derecha, marcamos en rojo los bordes  $\mathcal{B}_{3-4}$  de los arcos de estudio. Imagen realizada por el autor.

**Figura 35.** En la página siguiente mostramos los resultados gráficos de los doce modelos texturizados. A la derecha, ejemplo del levantamiento vectorial aplicado al arbotante de la

Catedral de León; en rojo marcamos el borde de los arcos de estudio. Imagen realizada por el autor.

**Figura 36.** A la izquierda, mostramos las cónicas de regresión de los bordes  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  correspondientes a los arcos del arbotante de la Catedral de Mallorca. A la derecha, mostramos la cónica de regresión del borde  $\mathcal{B}_{20}$  correspondiente al arco del arbotante de la Abadía de Bath. Imagen realizada por el autor.

**Figura 37.** Resultados gráficos del cálculo de regresión para los bordes  $\mathcal{B}_{1-20}$ . En línea de color azul mostramos un fragmento de arco de la circunferencia de regresión y su centro  $\mathcal{O}$  con una cruz azul. En color naranja mostramos la cónica de regresión y en amarillo sus ejes. Imagen realizada por el autor.

**Figura 38.** En la página siguiente se muestra en color verde el método de los tres puntos aplicado a algunos arcos considerados en este estudio. A la izquierda, arbotante de la Catedral de Mallorca. En el centro, arbotante de la Catedral de Chartres. A la derecha, arbotante de la Abadía de San Pedro de Chartres. Imagen realizada por el autor.

**Figura 39.** Ejemplo de determinación subjetiva de la inclinación de algunos arcos que configuran los arbotantes de la Catedral de Mallorca, Burgos y León. En rojo y en sombreado gris marcamos, respectivamente: los bordes inferiores  $\mathcal{B}_{1-2}$  y las regiones de los arcos de los arbotantes  $R_{1-2}$  de la Catedral de Mallorca, los bordes inferiores  $\mathcal{B}_{3-4}$  y las regiones de los arcos de los arbotantes  $R_{3-4}$  de la Catedral de Burgos, y los bordes inferiores  $\mathcal{B}_{5-6}$  y las regiones de los arcos de los arbotantes  $R_{5-6}$  de la Catedral de León. Imagen realizada por el autor.

**Figura 40.** A la izquierda, mostramos dos imágenes resultantes del proceso de modelado fotogramétrico. A la derecha, dos fotografías que ilustran las dos partes arqueadas que configuran este arbotante. En rojo marcamos los bordes  $\mathcal{B}_{10-11}$  de los arcos de estudio, correspondientes a la Catedral de Chartres. Imagen realizada por el autor.

**Figura 41.** A la izquierda, doce gráficos resultantes del proceso de modelado fotogramétrico. A la derecha, ejemplo de una proyección frontal, en formato vectorial y con textura, del arbotante de la Catedral de León; en azul marcamos las regiones  $R_{5-6}$  de los dos arcos de este arbotante. Imagen realizada por el autor.

**Figura 42.** Detalles de los extremos de los bordes  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_4$ ,  $\mathcal{B}_5$  y  $\mathcal{B}_{10}$ . En color verde marcamos el punto extremo determinado de cada arbotante. En color naranja y línea discontinua marcamos las líneas horizontales y verticales que pasan por los extremos del borde analizado. Imagen realizada por el autor.

**Figura 43.** Resultados de regresión por circunferencia para los bordes  $\mathcal{B}_{1-20}$ . La numeración de cada arbotante va enlazada a los números que aparecen a lo largo del presente trabajo. En color

rojo mostramos un fragmento de arco de la circunferencia de regresión y su centro  $\mathcal{O}$ . En línea punteada y color rojo marcamos la inclinación  $\alpha$  de cada arbotante. En color azul marcamos las regiones de los arbotantes  $R_{1-20}$  analizadas en la subsección 2.2. Imagen realizada por el autor.

**Figura 44.** En la página siguiente se muestra el resultado del proceso de estática gráfica aplicado a las dos regiones  $R_1$  (superior) y  $R_2$  (inferior) del arbotante de la Catedral de Mallorca. En color verde marcamos la línea de mínimo empuje. En color naranja marcamos la línea de máximo empuje. En color amarillo marcamos las nubes  $I_1$  y  $I_2$  de puntos que delimitan las dos líneas de máximo y mínimo empuje. En color azul oscuro marcamos las rectas de regresión  $\rho_1$  y  $\rho_2$  de las nubes  $I_1$  y  $I_2$ . En color lila marcamos las rectas de regresión  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  de toda la nube de puntos que contiene cada una de las regiones  $R_1$  y  $R_2$  del arbotante. Imagen realizada por el autor.

**Figura 45.** Resultado del proceso de estática gráfica aplicado a todas las regiones  $I_{1-6}$  de los arcos de arbotante estudiados. Usamos el mismo código de colores que en el caso concreto mostrado en la Figura 44 y la misma numeración que en la Figura 43. Imagen realizada por el autor.

**Figura 46.** Resultado del proceso de estática gráfica aplicado a todas las regiones  $I_{1-6}$  de los arcos de arbotante estudiados. Usamos el mismo código de colores que en el caso concreto mostrado en la Figura 44 y la misma numeración que en la Figura 43. Imagen realizada por el autor.

**Figura 47.** En la página siguiente se muestran los resultados gráficos de los modelos de elementos finitos aplicados a los primeros seis arbotantes de estudio. A la derecha, detalle del modelo para el arbotante de la Catedral de Mallorca: en color amarillo las líneas isostáticas calculadas con el software Autodesk Robot Structural Analysis Professional, en color naranja la línea de máximo empuje y en color verde la línea de mínimo empuje calculadas mecánicamente con los procesos gráficos. Imagen realizada por el autor.

**Figura 48.** En la página 118 se muestran los resultados gráficos de los modelos de elementos finitos aplicados a los últimos seis arbotantes de estudio. A la derecha, detalle del modelo para el arbotante de la Catedral de Burgos usando el mismo código de colores que en la Figura 47. Imagen realizada por el autor.

**Figura 49.** En la página siguiente se muestra un ejemplo de algunos resultados gráficos. A la izquierda, inclinaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  ( $R_5$ : 52.2°, 49.7°, 49.1°;  $R_6$ : 52.9°, 47.9°, 48.4°) de los arcos del arbotante de la Catedral de León. Al centro, inclinaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  ( $R_{14}$ : 38.1°, 40.2°, 41.3°;  $R_{15}$ : 45.3°, 37.6°, 39.7°) de los arcos del arbotante de la Catedral de Amiens. A la derecha,



inclinaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  ( $R_{19}$ : 58. 2°, 55.3°, 56.7°) del arco del arbotante de la Catedral de Wells. Imagen realizada por el autor.

**Figura 50.** A la izquierda, fotografía de los arbotantes de la Catedral de Girona. A la derecha, fotografía de los arbotantes de la Catedral de Narbona. A pesar de sus influencias geográficas, históricas y constructivas, se observan grandes diferencias formales; además, los arbotantes de Narbona –a diferencia de los de Girona– desempeñan la función de canalizar las aguas pluviales. Imagen realizada por el autor.

**Figura 51.** Muestra gráfica de algunos arbotantes ubicados en 13 catedrales de diferentes países. Cada fotografía está ubicada según el orden alfabético de la Figura 52. Imagen realizada por el autor.

**Figura 52.** Imagen de la nube de puntos generada mediante la técnica de escáner láser terrestre. En esta figura mostramos el conjunto de arbotantes que configuran el deambulatorio de la Catedral de Girona e indicamos, en color naranja, el sector analizado en el presente trabajo. Imagen realizada por el autor.

**Figura 53.** En la página siguiente se muestran las vistas en alzado de algunos arbotantes ubicados en 13 catedrales de diferentes países, concretamente: 6 catedrales españolas (A: Catedral de Girona, B: Catedral de Mallorca, C: Catedral de Burgos, D: Catedral de León, E: Catedral de Oviedo y F: Catedral de Toledo), 5 catedrales francesas (G: Catedral de Chartres, H: Abadía de San Pedro de Chartres, I: Catedral de Amiens y J: Catedral de Reims) y 3 catedrales inglesas (K: Catedral de Salisbury, L: Catedral de Wells y M: Abadía de Bath). En color rojo se muestra el ángulo de inclinación de cada arbotante y en color azul señalamos la parte de arbotante comprendido entre la fachada de la catedral y su contrafuerte. Imagen realizada por el autor.

**Figura 54.** En la página siguiente se muestran los resultados del procedimiento de estática gráfica aplicados al arbotante de la Catedral de Girona. De izquierda a derecha y de arriba abajo: A) polígono funicular correspondiente al arco límite de empuje máximo, B) polígono funicular correspondiente de empuje máximo dentro del núcleo central, C) polígono funicular correspondiente al empuje mínimo dentro del núcleo central, y D) polígono funicular correspondiente al arco límite de empuje mínimo.

**Figura 55.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, un fragmento de la nube de puntos obtenida del escáner láser y registrada con el software Cyclone. Al centro, mostramos la malla tridimensional correspondiente al sector anterior y realizada con el software Cyclone 3DR. A la derecha, mostramos el tercer modelo sintetizado realizado con el software AutoCad. Imagen realizada por el autor.

**Figura 56.** En la página siguiente se muestra de izquierda a derecha, diversas vistas del modelo MEF: A la izquierda, vista axonométrica con los espesores de los muros y las nervaduras; al centro, sección del modelo con el despiece de los muros y las juntas horizontales; a la derecha, vista axonométrica con la indicación de soportes y relajaciones en los extremos y bordes de los elementos que limitan con los sectores contiguos. Imagen realizada por el autor.

**Figura 57.** Esquema con las áreas tributarias en planta y sección utilizadas para la estimación de las cargas sobre las nervaduras de las bóvedas. En color naranja marcamos las cargas sobre las bóvedas de la nave central. Imagen realizada por el autor.

**Figura 58.** En la página siguiente se muestra una hipótesis sobre las fases constructivas y entrada en carga de sus elementos arquitectónicos; concretamente: a la izquierda, primera etapa constructiva; al centro, segunda etapa constructiva; y a la derecha, tercera etapa constructiva. Imagen realizada por el autor.

**Figura 59.** Imágenes del modelo A de análisis FEM: a la izquierda, vectores de las fuerzas de compresión de las líneas de descarga en los muros de la parte superior de la sección; a la derecha, esfuerzo axial de compresión en el arbotante debido a las cargas correspondientes a los elementos construidos en la tercera fase. Imagen realizada por el autor.

**Figura 60.** Desplazamientos horizontales de los modelos A y B de análisis FEM: a la izquierda, considerando el efecto del arbotante; y a la derecha, sin considerar el efecto del arbotante. Imagen realizada por el autor.

**Figura 61.** En la página siguiente se muestra un análisis de estática gráfica del sector estudiado para los modelos A (con arbotante) y B (sin arbotante).

**Figura 62.** Representación gráfica de los valores de empuje resultantes del análisis del arbotante de la Catedral de Girona. En esta figura se resumen los valores más representativos de las comprobaciones realizadas y se indican los intervalos, mínimo y máximo, en los cuales el conjunto de arbotante y contrafuerte sería estable. Imagen realizada por el autor.

**Relación de tablas:**

**Tabla 1.** Características formales de los modelos tridimensionales generados para cada arbotante de estudio con el software PhotoScan.

**Tabla 2.** Parámetros de las cónicas de regresión de los bordes  $\mathcal{B}_{1-20}$ .

**Tabla 3.** Parámetros de los doce arbotantes estudiados obtenidos mediante el proceso de regresión geométrica.

**Tabla 4.** Cálculos de los parámetros estadísticos  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $CV$  para los conjuntos de ángulos  $\alpha$  y espesores  $\varepsilon$ . En la fila  $\mathcal{B}_{1-20}$  consideramos los parámetros de todos los arcos que configuran todos los arbotantes estudiados, y en la fila  $\mathcal{B}_{1-17}$  consideramos únicamente los arcos que configuran los arbotantes españoles y franceses.

**Tabla 5.** Resultados angulares –según criterios: clásico  $\alpha$ , mecánico  $\beta$  y geométrico  $\gamma$ – de las inclinaciones de todos los arcos de arbotante analizados en este trabajo.

**Tabla 6.** Parámetros estadísticos derivados de los valores angulares determinados en la Tabla 5.

**Tabla 7.** Valores de las fuerzas de reacción horizontal y vertical en los extremos del arbotante según los cuatro polígonos funiculares de líneas de descarga descritos anteriormente.

**Tabla 8.** Valores de las fuerzas horizontales máximas  $F_{H,max}$  que provocarían el vuelco en diferentes alturas  $h$  del contrafuerte medidas desde la coronación (Figura 52).

## Índice alfabético

- A**
- Alemania..... 39  
ángulo .....42, 101, 102, 103, 106, 119, 123, 143, 144, 145  
arbotantes .....5, 7, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 47, 48, 52, 85, 86, 87, 88, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 106, 115, 121, 122, 123, 124, 125, 142, 143, 144, 150, 151  
arcos .5, 7, 19, 20, 21, 24, 32, 37, 38, 42, 86, 87, 88, 93, 94, 95, 99, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 111, 112, 115, 135, 143, 150  
arquitectura .....6, 29, 35, 36, 37, 38, 39, 47, 85, 147, 150  
Auguste Choisy..... 85, 101, 144
- B**
- Bélgica ..... 39  
bibliografía ..... 35, 37, 107  
Blondel..... 94, 147  
borde..... 19, 20, 38, 42, 86, 88, 93, 94, 99, 101, 102, 103, 104, 106, 107, 119, 143, 144
- C**
- canalizar ..... 22, 121, 123  
capacidad mecánica .....43, 45, 124, 130, 142  
Catedral de Amiens ....13, 18, 19, 21, 39, 40, 54, 64, 72, 88  
Catedral de Bath ...13, 19, 20, 40, 54, 64, 72, 88, 93  
Catedral de Burgos .....13, 17, 19, 20, 21, 39, 40, 54, 64, 72, 88, 95, 103  
Catedral de Chartres...13, 17, 18, 20, 40, 54, 64, 72, 88, 104  
Catedral de Girona.....13, 15, 22, 23, 39, 40, 42, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 129, 130, 131, 135, 142, 144, 151  
Catedral de León ..13, 18, 20, 21, 37, 40, 54, 64, 72, 88, 103, 105, 149  
Catedral de Mallorca.5, 6, 13, 17, 20, 21, 40, 50, 54, 64, 72, 88, 93, 103  
Catedral de Oviedo .....13, 18, 19, 40, 54, 64, 72, 87, 88  
Catedral de Salisbury..13, 19, 39, 40, 54, 64, 72, 88  
Catedral de San Denis..... 13, 19, 88  
Catedral de San Pedro de Chartres... 18, 20, 40, 54, 64, 72, 88, 95  
Catedral de Toledo .....18, 40, 54, 64, 72, 88  
Catedral de Wells...13, 19, 22, 40, 54, 64, 72, 88  
centro ..17, 19, 20, 21, 22, 23, 33, 38, 40, 42, 44, 45, 85, 86, 87, 93, 94, 99, 100, 133, 143, 156, 161, 162  
circunferencia....20, 86, 91, 93, 94, 99, 103, 105, 106, 159, 162  
códigos ..... 92, 106
- compresión ..... 23, 108, 110, 127, 133, 138, 139  
construcción36, 37, 85, 86, 87, 94, 99, 135, 138, 151  
coordenadas..... 91, 92, 105  
Cyclon ..... 131
- D**
- definición 15, 37, 42, 45, 94, 101, 102, 103, 107, 133, 143, 144  
deformaciones ..... 42, 85, 86, 99, 102, 133  
Derand..... 94, 147  
dibujos .....36, 37  
digitalización .....47, 48  
Dinamarca .....39
- E**
- ecuación ..... 91, 92, 93, 105  
elasticidad ..... 133, 138  
elementos finitos ..... 21, 110, 131, 138, 149, 150  
España ..... 5, 7, 33, 35, 37, 39, 102, 148, 149  
espesor..... 42, 44, 85, 86, 94, 99, 110, 127, 135, 143  
estadísticos ..... 24, 93, 98, 99, 118, 119  
estática ..... 21, 22, 102, 103, 104, 107, 110, 111, 112, 119, 124, 129, 138, 143, 147  
estereoscópica .....47
- F**
- flecha..... 19, 42, 44, 85, 86, 88, 94, 99, 143  
fotografías ..... 17, 20, 47, 50, 51, 52, 104, 147  
fotogramétricas.. 38, 42, 45, 47, 85, 87, 104, 143  
Francia ..... 13, 17, 33, 36, 39, 102  
funciones ..... 33, 42, 121
- G**
- Gauss ..... 91, 93, 105  
geométrico 6, 24, 31, 37, 38, 86, 91, 93, 99, 103, 105, 115, 131, 143, 149  
gótica..... 35, 36, 37, 39, 85, 147, 148  
gráfico..... 17, 29, 31, 33, 41, 52, 89, 104, 105
- H**
- horizontal... 24, 42, 94, 101, 102, 106, 110, 119, 127, 129, 133, 138, 139, 143, 144
- I**
- inclinación. 15, 19, 20, 21, 42, 44, 45, 85, 86, 88, 94, 99, 101, 102, 103, 105, 106, 107, 110, 115, 116, 118, 119, 121, 123, 143, 144, 145  
influencia ..... 36, 42, 45, 121, 122
- L**
- Levantamiento..... 15, 41, 47, 143  
luz..... 19, 42, 44, 47, 85, 86, 88, 94, 99, 143

**M**

mecánica ....36, 42, 45, 110, 121, 122, 123, 124,  
127, 129, 130, 131, 142, 144  
metodología ..38, 43, 45, 86, 100, 121, 122, 130,  
142, 144  
morfología.....42, 45, 85, 103

**N**

nube.... 17, 21, 22, 38, 42, 45, 50, 51, 85, 87, 91,  
92, 93, 105, 110, 119, 125, 131, 143, 144,  
155, 160

**P**

parámetros 15, 19, 24, 38, 41, 42, 45, 51, 85, 86,  
87, 91, 94, 98, 99, 106, 143  
Pearson ..... 98, 118, 119  
precisión .....42, 47, 50, 85, 86, 99, 131  
puntales ..... 101

**R**

radio . 35, 42, 44, 45, 85, 86, 87, 93, 94, 99, 106,  
143, 149, 161, 162, 163  
Reino Unido..... 39  
resistencia ..... 108, 130, 138

**S**

software..... 21, 22, 24, 47, 51, 52, 104, 110, 131  
*Student*..... 118, 119

**T**

técnicas .. 32, 33, 37, 38, 42, 45, 47, 85, 87, 101,  
104, 143  
tipología..... 86, 122

**V**

vertical..... 24, 94, 106, 110, 127, 129, 133  
Viollet-le-Duc.. 17, 38, 40, 42, 45, 85, 87, 94, 99,  
143

## Resumen / Resum / Abstract

CAS/

Los arbotantes han sido bastante estudiados desde un punto de vista mecánico, constructivo o descriptivo. Las referencias sobre sus aspectos geométricos son prácticamente escasas y desafortunadamente nos tenemos que remontar hasta el 1854 para encontrar alguna nota sobre el análisis morfológico de estos elementos; concretamente, Viollet-le-Duc clasificó los arcos que configuran el borde de los arbotantes en función de dónde se ubican sus centros, permitiendo agruparlos en dos categorías. Esta nota histórica y el uso de técnicas gráficas, geométricas y estadísticas ha permitido encauzar esta investigación constituida por tres estudios: el primero determina –de forma no arbitraria– el centro  $O$  y el radio  $R$  del arco de un arbotante, obteniendo de manera directa el resto de los parámetros que lo constituyen (inclinación  $\alpha$ , flecha  $\mathcal{F}$ , luz  $\mathcal{L}$  y espesor  $\mathcal{E}$ ); el segundo estudio presenta una nueva propuesta de definición de inclinación  $\alpha$  que representa a todo el arco del arbotante; y el tercer estudio, establece una metodología objetiva para determinar el nivel de influencia de un arbotante sobre el comportamiento estructural del conjunto arquitectónico según su morfología.

CAT/

Els arcbotants han sigut àmpliament estudiats des d'un punt de vista mecànic, constructiu o descriptiu. Les referències sobre els seus aspectes geomètrics son pràcticament nul·les i desafortunadament ens tenim que remuntar fins al 1854 per trobar alguna nota sobre l'anàlisi morfològic d'aquests elements; concretament, Viollet-le-Duc va classificar els arcs que configuren la vora dels arcbotants en funció d'on s'ubiquen els seus centres, permetent agrupant-los en dos categories. Aquesta nota històrica i l'ús de tècniques gràfiques, geomètriques i estadístiques ha permès canalitzar aquesta investigació constituïda per tres estudis: el primer determina –de forma no arbitrària– el centre  $O$  i el radi  $R$  de l'arc d'un arcbotant, obtenint de manera directe la resta de paràmetres que el constitueixen (inclinació  $\alpha$ , fletxa  $\mathcal{F}$ , llum  $\mathcal{L}$  i espessor  $\mathcal{E}$ ); el segon estudi presenta una nova proposta de definició d'inclinació  $\alpha$  que representa a tot l'arc de l'arcbotant; i el tercer estudi, estableix una metodologia objectiva per determinar el nivell d'influència d'un arcbotant sobre el comportament estructural del conjunt arquitectònic segons la seva morfologia.

ENG/

Flying buttresses have been extensively studied from a mechanical, constructive or descriptive point of view. The references on its geometric aspects are practically scarce and unfortunately, we have to go back to 1854 to find any note on the morphological analysis of these elements; Specifically, Viollet-le-Duc classified the arches that make up the edge of the flying buttresses based on where their centers are located, allowing them to be grouped into two categories. This historical note and the use of graphic, geometric and statistical techniques have allowed us to channel this investigation consisting of three studies: the first one determines –in a non-arbitrary way– the center  $\mathcal{O}$  and the radius  $\mathcal{R}$  of the arch of a flying buttress, directly obtaining the rest of the parameters that constitute it (inclination  $\alpha$ , rise  $\mathcal{F}$ , span distance  $\mathcal{L}$  and thickness  $\mathcal{E}$ ); the second study presents a new proposal for the definition of inclination  $\alpha$  that represents the entire arch of the flying buttress; and the third study establishes an objective methodology to determine the level of influence of a flying buttress on the structural behavior of the architectural complex according to its morphology.

## Presentación

En las siguientes líneas quisiera explicar los motivos que me motivaron a realizar esta tesis doctoral y, por otra parte, presentar el objeto de estudio de esta investigación. Con el fin de clarificar lo anterior, he estructurado esta *Presentación* en dos partes: una que llamaré ¿Por qué?, y la otra que llamaré ¿Qué?

### ¿Por qué?

Para entender el sentido de esta investigación, considero que es relevante para el lector que conozca mínimamente mi trayectoria académica. Es por ello por lo que a continuación trataré de resumir mis logros en los últimos quince años:

Me llamo Albert Samper y en 2008 me licencié como arquitecto por la Universitat Politècnica de Catalunya. En 2011, finalicé un Máster Universitario en la misma universidad titulado “Teoría y práctica de proyectos arquitectónicos”. En 2014, me doctoré por la Universitat Rovira i Virgili en el Programa de Doctorado de Arquitectura con la investigación titulada “Análisis fractal en las catedrales góticas”. Este trabajo, y a raíz de las múltiples publicaciones científicas que se derivaron, me permitió lograr el Premio Extraordinario de Doctorado de la Universitat Rovira i Virgili en la rama de “Artes y Humanidades”. Actualmente soy investigador en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la URV, ocupando una plaza de Lector Serra Húnter con perfil de Expresión Gráfica Arquitectónica. Además, ocupo el cargo de responsable del área gráfica y de responsable de investigación en la dirección de la escuela. Sumado a lo anterior, en 2020 me matriculé en el programa de doctorado titulado “Ciencias Humanas, del Patrimonio y de la Cultura” de la línea “Cultura escrita y visual en época medieval” en la Universitat de Girona para desarrollar una segunda tesis doctoral.

Los requisitos para progresar laboralmente en un entorno académico son cada vez más exigentes y escabrosos. Una muestra de la afirmación anterior es que en algunas convocatorias competitivas de nivel europeo exigen que el investigador principal haya realizado un doble doctorado a lo largo de su carrera académica. A priori, no está en mis planes solicitar ningún proyecto europeo y tampoco es el motivo por el cual he realizado esta segunda tesis doctoral; no obstante, los requisitos sobre mi consolidación como académico sí influyeron inicialmente en la decisión de matricularme de nuevo como estudiante de doctorado. Concretamente, los requisitos para que un investigador con perfil Lector Serra Húnter pueda consolidarse con contrato indefinido en su universidad son los siguientes:



Presentación.

- 1- Estar acreditado por AQU como profesor Agregado.
- 2- Alcanzar una puntuación mínima de 60 puntos en la acreditación de profesor Agregado.
- 3- Obtener una evaluación positiva de la mayoría de los miembros que configuraron la comisión.
- 4- Demostrar una desvinculación contractual, mínima de dos años, en su universidad o haber realizado su tesis doctoral en una universidad distinta a la actual.

A pesar del inmenso esfuerzo que implicó lograr los méritos de los tres primeros puntos, mi objetivo central era cómo superar el cuarto requisito. Como mi situación familiar me impedía poder desvincularme dos años de mi universidad realizando una movilidad nacional o internacional y, como mi primera tesis doctoral la defendí en la Universitat Rovira i Virgili, tuve que formular otra estrategia para alcanzar con éxito el cuarto escenario; concretamente: ser doctor por otra universidad distinta a la que actualmente desarrollo mis tareas como Profesor Lector Serra Húnter.

Después de un largo periodo de reflexión y de asumir esta robusta decisión, en septiembre de 2020 ingresé como estudiante de doctorado en el programa titulado "Ciencias Humanas, del Patrimonio y de la Cultura" de la Universitat de Girona con el fin de suplir, inicialmente, el requisito 4).

Mi vinculación con la Universitat de Girona no ha sido circunstancial. En 2016, tuve el placer de conocer al Dr. Gerardo Boto, profesor de Historia del Arte Medieval y actual director de la Escuela de Doctorado de la misma universidad. En los siguientes años, me ofreció generosamente diferentes colaboraciones que fortalecieron nuestra confianza, de las cuales destaco las siguientes:

- Participación en el grupo de trabajo del siguiente proyecto nacional competitivo: Proyecto del Ministerio del "Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad". El proyecto está liderado por el Dr. Gerardo Boto y se titula "Sedes Memoriae: Espacios, usos y discursos de la Memoria en las catedrales medievales de la Tarraconense I. Memoria Institucional, legados personales". Referencia de la concesión: HAR2015-63870-R. Durada: 01/01/2016-31/12/2018.
- Participación en el grupo de trabajo del siguiente proyecto nacional competitivo: Proyecto del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades "Proyectos I+D+I 2019, Generación de Conocimiento". El proyecto está liderado por el Dr. Gerardo Boto y se titula " Sedes Memoriae 2: Memorias de cultos y las artes del altar en las catedrales medievales hispanas: Oviedo, Pamplona, Roda, Zaragoza, Mallorca, Vic, Barcelona, Girona, Tarragona". Referencia de la concesión: PID2019-105829GB-I00. Durada: 01/06/2020-31/05/2024.

Presentación.

- Encargo de transferencia de tecnología: Proyecto titulado "Anàlisi gràfic sobre la cronologia del teixit urbà de l'entorn de la catedral de Tarragona" mediante la Fundació de la Universitat Rovira i Vigili con la Universitat de Girona. Referencia de la concesión: T18245S. Durada: 08/11/2018 - 21/12/2018. Importe: 9.128,85 euros. Rol: Investigador Principal.
- Encargo de transferencia de tecnología: Proyecto titulado "Modelat tridimensional del carrer Major i del carrer de la Civaderia del Casc Antic de Tarragona" mediante la Fundació de la Universitat Rovira i Vigili con la Universitat de Girona. Referencia de la concesión: T19068S. Durada: 09/01/2018 - 27/02/2019. Importe: 4.459,20 euros. Rol: Investigador Principal.

Además de mi colaboración con las actividades anteriores, mi línea central de investigación se centra en el análisis geométrico y gráfico de elementos arquitectónicos de relevancia internacional y en especial, de estilo gótico. Esta afinidad y la participación en proyectos de investigación con el Dr. Gerardo Boto me motivó a ser tutorizado en su línea de doctorado titulada "Cultura escrita y visual en época medieval".

A pesar de tomar, inicialmente, la decisión de realizar un segundo doctorado por un motivo administrativo, el Servicio de Recursos Humanos de mi universidad me informó –a lo largo de mi primer año como estudiante de doctorado de la UdG– que el cuarto requisito no se me aplicaba por normativa interna. Esta noticia no modificó ni alteró mi decisión inicial, sino que me permitió cumplir mis objetivos sin una presión añadida. La línea de investigación planteada con mis directores de tesis me ofrecía confianza y seguridad para desarrollarla hasta el presente documento.

A diferencia de la primera tesis doctoral, esta investigación contiene una especialización técnica propia del bagaje profesional de estos últimos quince años y una motivación personal desvinculada de cualquier obligación académica. A continuación, explicaré el eje central y el objeto de estudio de esta tesis doctoral.

### ¿Qué?

El verano de 2017, después de realizar una parada en León para comer con mi actual director de tesis, me dirigí –junto con mi familia– a la costa norte de Galicia para visitar la popular *Playa de las Catedrales* en el municipio de Ribadeo (Figura 1).

Paseando por este fantástico escenario, mi hijo mayor (entonces de 3 años) me preguntó: ¿Por qué esta playa se llama así si no hay ninguna catedral? Lo cierto, es que me hubiera encantado

Presentación.

visualizar lo que la mente de Martí se imaginaba de lo que esperaba encontrar. Después de su decepción inicial, todo pasó cuando descubrió –con los pies descalzos– que la naturaleza lo envolvía e inconscientemente percibía ciertas sensaciones que también tiene cuando solemos pasear por la Catedral de Tarragona.

Aunque las sensaciones eran importantes, no relacionó el nombre de la playa con las catedrales hasta que le expliqué uno de los elementos más característicos de estas edificaciones: los arbotantes. Tratando de explicarle su sentido, me acuerdo de que le pregunté:

“¿Cómo evitarías que estas rocas se cayeran hacia el mar? “

Como si fuera una obviedad, me contestó a la vez que inclinaba su cuerpo y apoyaba sus manos sobre las rocas cubiertas de un manto de mejillones. Pienso que entendió el concepto de equilibrio –simulando ser un puntal de carne y huesos tal como los son los arbotantes de piedra– porque justamente, su posición reproducía los enormes arcos de roca que nos rodeaban, ver la Figura 1.

Esta experiencia y mi línea de investigación condicionó meses después a seguir pensando en los arbotantes. Con el fin de buscar ideas para realizar investigaciones que terminaran en formato de artículos científicos –aquí quisiera recordar la fuerte exigencia del sistema académico para que todas las investigaciones concluyan en formato de artículo científico y de impacto– empecé a realizar una búsqueda sobre el *estado del arte* de estos elementos tan representativos del gótico. A pesar de la existencia de todos los documentos históricos de gran relevancia, mi sorpresa fue que no encontré ninguna investigación actual sobre el estudio formal de los arbotantes; prácticamente todos los trabajos científicos consultados giraban en torno al análisis mecánico de los mismos. Este hueco académico fue el punto de partida para la presente investigación.

Mi formación como arquitecto y mi especialidad académica provocan que cualquier elemento arquitectónico que tenga la necesidad de analizar no baste en visitarlo y fotografiarlo; haciendo un símil con la medicina, de forma imperativa necesito la radiografía de cada objeto como punto de partida de la investigación. Esta radiografía arquitectónica consiste en medir y dibujar. Afortunadamente, las técnicas actuales permiten realizar simultáneamente las dos acciones anteriores gracias a la fotogrametría o la captura de información mediante un dispositivo láser. Precisamente, y como el lector podrá visualizar a lo largo del presente estudio, son las herramientas implementadas en esta investigación.

A finales del 2017, y sin ninguna intención de realizar un segundo doctorado, empezó la aventura de contactar con los Cabildos, Canónigos Fabriqueros, Conservadores, Directores de Archivo,

Presentación.

Historiadores y Técnicos del Servicio Cultural de múltiples catedrales con la finalidad de pedir acceso a sus cubiertas para poder “medir y dibujar” –con técnicas actuales– los arbotantes que las coronan. La acción empezó por algunas catedrales de España y, a medida que mis recursos económicos me lo permitieron, se extendió por Francia e Inglaterra. Quisiera nuevamente dar las gracias a todas las entidades y personas que me facilitaron el acceso a las cubiertas de las diferentes catedrales donde se encuentran los arbotantes estudiados en el presente trabajo.

Sin saberlo, esta aventura se estaba convirtiendo en el trabajo de campo de la presente tesis doctoral. Durante más de dos años visité un total de 13 construcciones góticas (11 catedrales y 2 abadías) y recorrí privilegiadamente por rincones únicos; concretamente: en España visité las catedrales de Girona, Palma de Mallorca, Burgos, León, Toledo y Oviedo; en Francia visité la catedral de Notre-Dame de Chartres, la abadía de San Pedro de Chartres, la abadía de San Denis y la catedral de Notre-Dame de Amiens; y en Inglaterra visité las catedrales de Wells, Salisbury y Bath. Los permisos de acceso a las catedrales francesas fueron complicados de gestionar y de coordinar por tratarse de monumentos de propiedad del estado francés; afortunadamente, los permisos para visitar las catedrales españolas e inglesas fueron más rápidos de alcanzar.

El final de todos los viajes y el inicio de mi estatus como alumno de doctorado de la UdG coincidió en 2020. A partir de entonces, empezó mi coordinación para desarrollar la presente investigación con la base documental generada durante los años anteriores.

Con todo lo anterior, contesto a las dos preguntas planteadas inicialmente en la *Presentación* justificando el motivo y el objeto. No obstante, en la siguiente sección de “*Introducción*” se argumentará con más profundidad el centro de interés y de estudio del análisis de los arbotantes.

La presente tesis está realizada por compendio de artículos; es por ello por lo que a continuación se destaca la actividad científica producida: tres artículos científicos, dos participaciones a congresos internacionales, un capítulo de libro, la participación a un proyecto científico competitivo y la invitación a una conferencia. Sin desmerecer los trabajos científicos que se han derivado de la presente investigación, quisiera destacar mi colaboración en el proyecto competitivo con referencia 2019/00006/007/037 de la convocatoria Ayudas de la FECYT y titulado “Castells de ciencia”. Se trata de un proyecto de divulgación científica sobre el mundo de los castellers y donde tuve el placer de colaborar con mi visión como arquitecto e integrando el concepto de los arbotantes a las construcciones de las diferentes tipologías edificatorias de estas “torres humanas”. Mi estudio consistió en hacer un símil formal sobre el comportamiento mecánico y funcional de las estructuras arquitectónicas góticas -concretamente, el arbotante y el contrafuerte– con las funciones de las estructuras humanas –*pinya*, *folre* y *manilles*–. Este proyecto se enmarcó en la Universitat Rovira i Virgili y todo el material gráfico generado en mi

Presentación.

tesis doctoral fue de gran ayuda para dar soporte documental a la exposición y a las conferencias realizadas.

Tengo muy presente el día de la defensa de mi primera tesis doctoral (14 de febrero de 2014) y todo el camino recorrido hasta llegar a ese día. Recuerdo que, a pesar de tener todo el tiempo del mundo para dedicarme a ese trabajo, la principal dificultad durante su confección fue la inexperiencia en el campo de la investigación. Después de 9 años inmerso en un sistema académico, me encuentro en el mismo punto, pero con el orden anterior cambiado; concretamente, la gestión del tiempo ha sido el mayor reto a causa de su ausencia por mis diversas obligaciones profesionales y familiares.

A pesar de todo, quisiera expresar mi satisfacción personal de haber logrado llegar hasta este punto y demostrar que lo que empezó siendo un “obligación administrativa” y un requisito a superar, se ha convertido en una línea de investigación muy enriquecedora para mi maduración académica.

Con todo, espero que los resultados de esta investigación ayuden a seguir complementando los estudios de toda la comunidad investigadora en el campo del patrimonio arquitectónico y, especialmente, en la época medieval. Este conocimiento y su divulgación debe ser la base para un óptimo mantenimiento y conservación del mismo.



**Figura 1.** Fotografía de la visita a la Playa de las Catedrales en el municipio gallego de Ribadeo, realizada el 21 de agosto de 2017.

## 1. INTRODUCCIÓN

Desafortunadamente no toda la arquitectura gótica que nos rodea, incluida la catalogada por la UNESCO como patrimonio de interés internacional, dispone de la documentación histórica y original pertinente para conocer cómo fue diseñada o pensada desde su origen. Muy a menudo sólo nos queda la propia edificación como base documental para descifrar las preguntas que nos hacemos en la actualidad sobre su proceso constructivo, sus alteraciones estilísticas, su autoría o, entre otras, la configuración de sus formas geométricas en algunos elementos arquitectónicos que las componen.

El presente estudio pretende ampliar el conocimiento sobre uno de los elementos más característicos de la arquitectura gótica y que carecen, en su mayoría de casos, de información rigurosamente original: los arbotantes. Para definir el espacio de interés y acotar los objetivos de esta investigación ha sido ineludible consultar la bibliografía de primer orden con la finalidad de conocer el *estado del arte* de estos elementos tan distintivos del gótico. El lector, puede acudir al apartado de *Referencias Bibliográficas* para consultarlas, aunque a continuación se destacan algunas por su gran importancia e impacto:

- Bony, J. 1943. Essai sur la spiritualité de deux cathédrales: Notre-Dame de Paris et Saint-Etienne de Bourges. Paris.
- Bony, J. 1985. French Gothic Architecture of the Twelfth and Thirteenth Centuries. California.
- Bork, R, Mark, R. y Murray, S. 1997. The Openwork Flying Buttresses of Amiens Cathedral: "Postmodern Gothic" and the Limits of Structural Rationalism. Journal of the Society of Architectural Historians, 56 (4), pp. 478-493.
- Choisy, A. 1899. Histoire de l'architecture. Vol. 2. Paris: Gauthier - Villars.
- Courtenya, L. 1997. The engineering of medieval cathedrals, pp. 117-132. Routledge.
- Frankl, P. 2002. Arquitectura gótica. España.
- Hahnloser, H. 1972. Villard de Honnecourt. Kritische Gesamtausgabe des Bauhüttenbuches ms. fr 19093 der Pariser Nationalbibliothek, 2nd ed. Graz.
- Kimpel, D. y Suckale, R. 1985. Die gotische Architektur in Frankreich: 1130-1270. München.
- Kimpel, D. 1990. Ars et radio. Dalla torre di Babele al ponte di Rialto, pp.127-146. Palermo.
- Kimpel, D. 1989. Les bâtisseurs des cathédrales gothiques, pp. 91-102. Strasbourg.
- Kimpel, D. 1987. Artistes, artisans et production artistique au Moyen Âge: Colloque international, pp. 349-363. Paris.

## 1. Introducción.

- Recht, R. 1989. Les bâtisseurs des cathédrales gothiques. Strasbourg.
- Viollet le Duc, E. 1854. Dictionnaire Raisoné de L'architecture Française du XIe au XVIe Siècle. B. Bance, París.
- Viollet-Le-Duc, E. 1996. La construcción medieval. Madrid: Instituto Juan Herrera.
- Wirth, J. 2015. Villard de Honnecourt, Architecte du XIII siècle. Genève.

Este trabajo documental se ha profundizado consultando múltiples referencias, dibujos, láminas y notas en la Biblioteca Nacional de Francia y en diferentes bases de datos como Persee y Google Scholar; además, y para cada caso particular de estudio se ha indagado en sus archivos catedralicios con el fin de encontrar y consultar los escasos documentos originales.

Para completar este *estado del arte* se han consultado múltiples referencias científicas en formato de publicaciones indexadas y capítulos de libros de autores que han estudiado, en los últimos años, algunos aspectos sobre los arbotantes. De todos ellos, destaco los trabajos del autor Jacques Heyman y del maestro Santiago Huerta:

- Heyman, J. 1966. The stone skeleton. International Journal of Solids and Structures, 2, 249-279.
- Heyman, J. 1969. The safety of masonry arches. International Journal of Mechanical Science 11: 363-385.
- Heyman, J. 1995. The stone skeleton: Structural engineering of masonry architecture. Cambridge: Cambridge University Press.
- Huerta, S. 2006. Geometry and equilibrium: The gothic theory of structural design. Structural Engineer, 84 (2), pp. 23-28.
- Huerta, S. 2007. Las reglas estructurales del gótico tardío alemán. Actas del Quinto Congreso Nacional de Historia de la Construcción, M. Arenillas, C. Segura, F. Bueno, S. Huerta (eds.), Madrid: I. Juan de Herrera, pp. 519-532.
- Huerta, S. 2019. El arco límite: breve historia de un problema estructural. Paper presented at XXI Congreso Nacional de Historia de la Construcción. Soria, Spain. October 9-12.

Con toda la base académica consultada se puede constatar, hasta el presente trabajo, que los centros de interés de los autores se agrupan principalmente en dos temáticas: por un lado, los trabajos que analizan la influencia mecánica y estructural de los arbotantes; y, por otro lado, los estudios que analizan la relación compositiva, constructiva y estilística de diferentes arbotantes en función de su autoría. Esta doble tendencia toma aún más importancia, y de forma unánime, si acudimos al término de arbotante; concretamente, expresa lo siguiente:

*“Es un elemento estructural exterior con forma de medio arco que recoge la presión en el arranque de la bóveda y la transmite a un contrafuerte, o estribo, adosado al muro de una nave lateral. Además, es un elemento constructivo distintivo de la arquitectura gótica, junto con el arco apuntado y la crucería.”*

Analizando con detenimiento la definición anterior, observamos que únicamente se expresa desde un punto de vista constructivo, estructural y ligeramente formal. De hecho, el único apunte relacionado con la forma es que corresponde a un "arco de medio punto". A continuación, se muestran algunos trabajos científicos encontrados en bases de datos como Scimago Journal Rank, Web of Science y Arts of Humanities donde los aspectos mecánicos son relevantes y los aspectos geométricos o formales son secundarios o inapreciables:

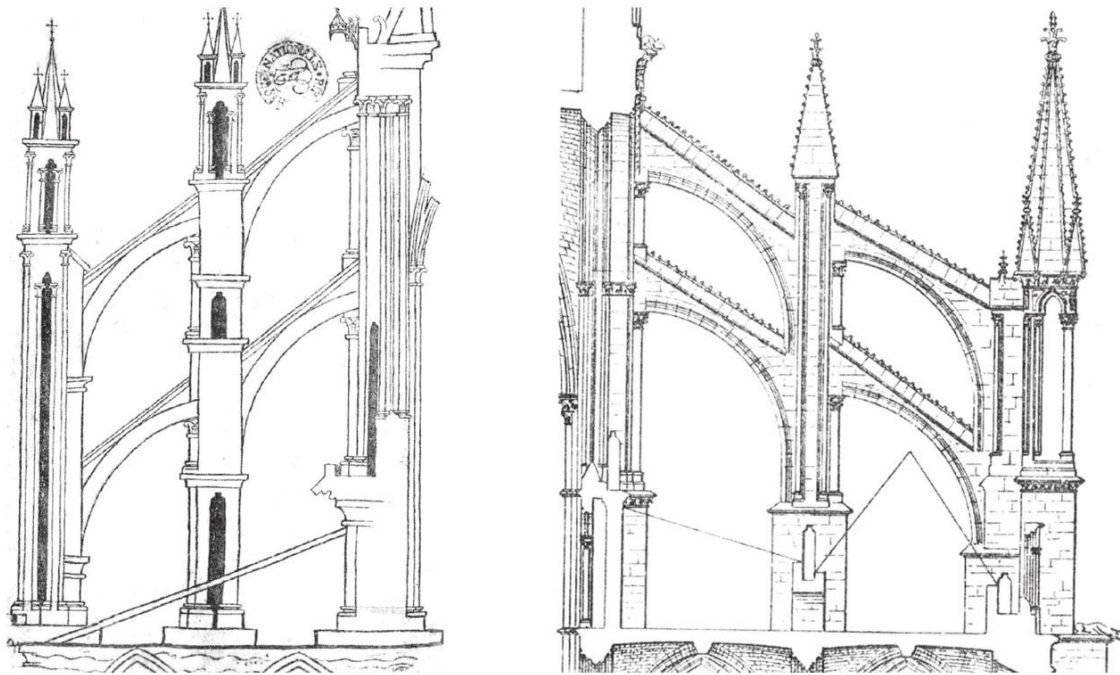
- Tarrío, I. 2015. Los arbotantes en el sistema de contrarresto de construcciones medievales: teorías sobre su comportamiento estructural. Actas del Noveno Congreso Nacional y Primer Congreso Internacional Hispanoamericano de Historia de la construcción. S. Huerta y P. Fuentes (eds.). Madrid: I. Juan de Herrera, pp. 1675-1685.
- León, L. y Russo, F. 2008. Parámetros geométricos, resistentes de la Catedral de León en comparación con otras catedrales góticas. IV Congreso de la Asociación Científico-Técnico del Hormigón Estructural - Congreso Internacional de Estructuras, Valencia, España.
- Richard, D. 2016. Analysis of architectural geometries affecting stress distributions of gothic flying buttresses (Tesis doctoral). Department of Architectural Engineering and Construction Science. College of Engineering, Kansas, Estados Unidos.
- Alomar, G. 1970. Guillermo Sagrera y la arquitectura gótica del siglo XV. Barcelona: Publicaciones -Durliat, M. 1964. L'art al Regne de Mallorca. Mallorca: Editorial Moll. del Colegio de Arquitectos de Cataluña y Baleares y Ed. Blume.
- Salcedo, M., y Calvo, J. 2008. De la práctica constructiva a los textos de cantería: los pasos abovedados en la cabecera de la catedral de Granada. Revista EGA, 23 (32), pp: 154-163. doi: <https://doi.org/10.4995/ega.2018.9808>.
- García, R. y Calvo, J. 2015. El arco por esquina y rincón en los tratados y manuscritos de cantería del renacimiento hispánico. Revista EGA, 25, pp. 128-137. doi: <https://doi.org/10.4995/ega.2015.3704>.
- López, A., Rabasa, E. y Alonso, M.A. 2020. Trazados y ejecución de las bóvedas de la cabecera de la iglesia de Priego. Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción, Soria, España.
- Navarro, P. y Rabasa, E. 2018. Bóvedas construidas como arcos en la arquitectura de Baldomar. Revista EGA, 23 (32), pp. 142-153. doi: <https://doi.org/10.4995/ega.2018.8606>.



Si nos centramos con los conceptos que escasean en toda la bibliografía consultada, se puede concluir que no se ha encontrado ningún estudio geoméricamente riguroso que trate, explícitamente, este campo de interés. Es cierto que existen diversos autores que a lo largo de la historia han intentado dibujar y medir estos elementos, con técnicas manuales, pero los resultados han sido siempre dibujos descriptivos y sin ninguna intencionalidad científica (Figura 2 y Figura 3). Estos trabajos han sido muy útiles para analizar campos concretos del arte y de la ciencia, pero no suficientes para determinar resultados objetivos y/o numéricos. La única nota histórica que podemos destacar sobre el análisis formal de los arbotantes góticos es la presentada por Viollet-le-Duc (Figura 3); concretamente, en 1854 clasificó los arcos que configuran el borde de los arbotantes en función de dónde se ubican sus centros. Este criterio permitió agruparlos en dos tipologías: los arcos cuyos centros están ubicados en los muros en los cuales se apoyan y los que tienen el centro desplazado hacia el interior de la catedral (Viollet le Duc, 1854; Llopis, 2019). A pesar de ser una expresión formal mínima y muy concreta, este concepto ha sido el hilo conductor inicial de toda la investigación. Este matiz geométrico fue presentado en 2022, a modo de comunicación, en el XIX Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica con el trabajo titulado “Nota técnica sobre la determinación de los arcos de los arbotantes góticos”. De forma resumida, el trabajo presentaba una metodología –basada con técnicas fotogramétricas, control de nube de puntos, redibujado vectorial y regresión geométrica– de clasificación objetiva de un arbotante según el criterio de Viollet-le-Duc. A lo largo del presente trabajo, y más concretamente en el apartado 3.2, se usará esta metodología para obtener otros parámetros geométricos de los arbotantes.

La escasez de estudios formales sobre los arbotantes en las áreas de la historia del arte o de la arquitectura ha sido el punto de partida y de motivación para desplegar esta investigación. Para su correcta elaboración, ha sido ineludible acudir a técnicas gráficas de captura de puntos con láser, reconstrucción virtual, aplicación de procesos computacionales, cálculo geométrico y estadístico para aportar un valor a este nuevo enfoque de análisis sobre estos elementos. Por consiguiente, este estudio pretende explicar con profundidad aspectos geométricos íntimamente ligados a la forma de los arbotantes y, como consecuencia, investigar su repercusión con su principal función. Estos procesos de análisis se alejan, inevitable e imprescindiblemente, de los recursos y metodologías comunes en las áreas de *Historia del Arte*, aunque los resultados logrados ofrecen una base documental totalmente compatible para respaldar estudios de este ámbito.

Una vez presentada la base teórica con la cual se fundamenta esta investigación y, una vez detectada qué temática escasea o se ausenta información que motive a realizar un estudio original y novedosos –en formato de artículos científicos y de tesis doctoral– a continuación, se explicará cuáles han sido los mecanismos para acotar y seleccionar los objetos de estudio. Esta muestra ha permitido aplicar las metodologías formales de análisis y determinar unos resultados suficientemente representativos y concluyentes.



**Figura 2.** Dibujo de Villard de Honnecourt consultado en la Biblioteca Nacional de Francia y disponible en (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b10509412z>) correspondiente al folio 32v. A la derecha, dibujo de Thomas H. King de los arbotantes del coro de la catedral de Reims disponible en (Hahnloser, 1972).

Según diferentes bases especializadas de arquitectura gótica, podemos aceptar que Europa tiene el privilegio de disponer de más de 220 catedrales y/o abadías góticas, siendo Francia el país que más aportación hace; concretamente, tenemos que en Alemania hay aproximadamente 19 (Catedral de Colonia, Catedral de Friburgo, Catedral de San Pedro de Bremen, etc.), en Bélgica hay 11 (Catedral de Amberes, Catedral de Brujas, etc.), en Dinamarca encontramos 6 (Catedral de San Clemente de Aarhus, Catedral de Roskilde, etc.), en España existen 33 (Catedral de Girona, Catedral de Tortosa, Catedral de Burgos, etc.), en Francia hay 92 (Catedral de Amiens, Catedral de Bayona, Catedral de Estrasburgo, Catedral de Lyon, Catedral de Ruan, Catedral de Tours, etc.), en Reino Unido localizamos 23 (Catedral de Salisbury, Catedral de Ripon, Catedral de Lincoln, Catedral de Bristol, etc.), en Italia hay más de 12, en Suecia más de 4, en Polonia más de 15 y, por ejemplo, en Portugal existen más de 6 catedrales. Es cierto que el número disminuye si considerásemos las edificaciones de estilo puramente gótico y, aún disminuye más, si considerásemos únicamente las catedrales o abadías góticas que tienen arbotantes en sus estructuras.

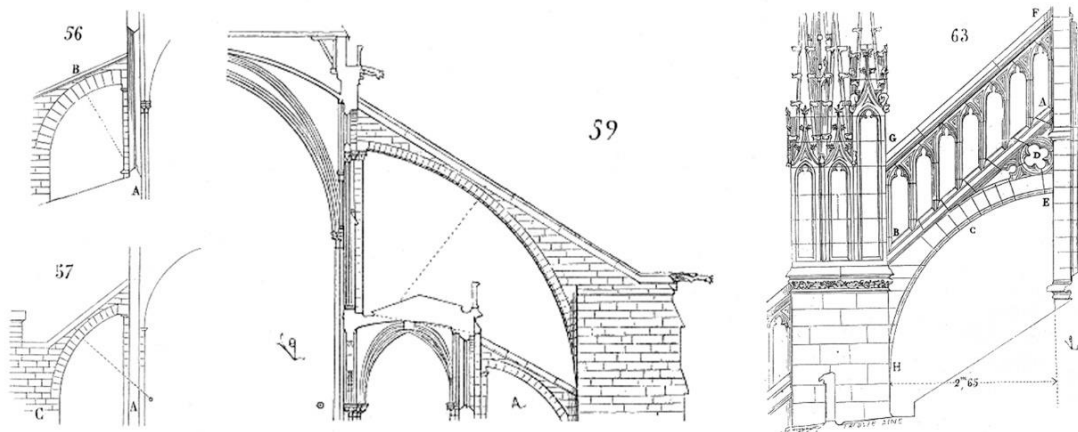
Es lógico pensar que el presente estudio debería centrarse en recompilar información de la totalidad de catedrales o abadías góticas que tienen arbotantes para garantizar que los resultados geométricos y/o formales sobre ellos sean plenamente representativos. Quisiera explicar que conseguir lo anterior sería posible contando con dos variables importantes: una el

tiempo y la segunda la economía. Aunque el trabajo de campo o el levantamiento planimétrico de todos los arbotantes considerados en el estudio se realizó antes de estar matriculado en el programa de doctorado –y con fondos propios–, esta investigación se ha desplegado durante tres cursos académicos. Esta limitación temporal y la falta de financiación para poder desplazarme en cada una de las edificaciones que contienen arbotantes ha provocado que la muestra integrada en el estudio se reduzca sin perder una representación considerable. Es por ello por lo que la presente investigación integra 13 arbotantes de diferentes construcciones góticas ubicadas en 3 países relevantes; concretamente: 6 catedrales españolas (Catedral de Mallorca, Catedral de Burgos, Catedral de León, Catedral de Oviedo, Catedral de Toledo y Catedral de Girona), 2 catedrales y 2 abadías francesas (Catedral de Chartres, Abadía de San Pedro de Chartres, Catedral de Amiens, Abadía de San Denis) y 2 catedrales y 1 abadía inglesa (Catedral de Salisbury, Catedral de Wells y Abadía de Bath). La coordinación para visitar cada arbotante ha sido un trabajo complejo por las dificultades administrativas que conlleva acceder a edificios de este calibre y el poder compaginar la profesión como investigador con la disponibilidad de cada catedral para poder acceder a realizar los trabajos de medición pertinentes.

Los arbotantes analizados en este estudio fueron construidos a lo largo del período prerrománico (s. XII) y gótico clásico (s. XIII). Con el fin de no excluir ningún arbotante que se encuentre en alguna edificación que tenga diferente jerarquía eclesiástica al que otorga el sustantivo de “catedral”, en el título de la presentación se ha usado el término de “fábrica gótica”; es por este motivo que los arbotantes se encuentran en 9 catedrales y 3 abadías. Concretamente el inicio de construcción de cada edificación se establece para cada caso: Catedral de Mallorca en 1229, Catedral de Burgos en 1221, Catedral de León en 1205, Catedral de Oviedo en 1382, Catedral de Toledo en 1226, Catedral de Chartres en 1194, Abadía de San Pedro de Chartres en 1250, Catedral de Amiens en 1220, Abadía de San Denis en 1140, Catedral de Salisbury en 1220, Catedral de Wells en 1175 y Abadía de Bath en 1472. Además de situarse cronológicamente entre los s. XII y s. XIII, constituyen la coronación de catedrales y abadías compuestas principalmente por tres naves, una central y dos laterales.

Es cierto que algunos de los arbotantes examinados, además de la afección provocada por el paso del tiempo, pueden haber padecido restauraciones en época moderna; por ejemplo, parte de las estructuras de los arbotantes de la Catedral de Salisbury fueron ocultos bajo la cubierta de las falsas tribunas; o, por ejemplo, en el caso de algunos de los arbotantes de la Catedral de Mallorca tienen un puntal estructural en su centro. Asumiendo estas alteraciones constructivas, el estudio se centra en las estructuras de los arbotantes que quedan totalmente expuestas al exterior de todas las catedrales y abadías visitadas. Esta decisión se ha tomado por motivos prácticos y no técnicos porque la inspección física de cada uno de los arbotantes ha sido a veces limitada en función de las facilidades administrativas y logísticas de cada edificación.

El análisis formal de estos arbotantes se ha estructurado en cuatro capítulos incluidos dentro de una sección compartida que se titula “*Metodología y Resultados*”. El objetivo de unificar los procedimientos metodológicos con los resultados es para destacar aún más el formato, por compendio de artículos, de esta tesis doctoral. Concretamente, y salvo la primera sección 3.1, el resto (3.2, 3.3 y 3.4) corresponde a cada uno de los tres artículos científicos publicados.



**Figura 3.** Dibujos de Viollet-le-Duc en las que se concreta gráficamente el criterio que permitió agrupar los arbotantes en dos tipologías según la ubicación del centro del arco que bordea este elemento arquitectónico, (Viollet le Duc, 1854).

El apartado 3 “*Metodología y Resultados*” está confeccionado siguiendo un orden cronológico y de maduración de cada uno de los resultados; es decir, cada resultado de cada apartado ha permitido plantear las hipótesis del siguiente apartado estableciendo una secuencia científica o un hilo conductor que articula los tres estudios en una misma dirección.

La primera sección del apartado 3 se titula “*Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio*”. Aquí se presentan los levantamientos arquitectónicos de todos los arbotantes introducidos en el trabajo y se explican los procedimientos gráficos usados para la representación tridimensional de cada objeto. Aunque esta sección no ha repercutido directamente con una publicación científica, ha permitido generar el material gráfico resultante para ilustrar más del 90% de las figuras que configuran los tres artículos que se presentan en las siguientes secciones. Los resultados de esta sección se expresan en imágenes totalmente inéditas y realizadas plenamente por el autor del trabajo. Estas imágenes se agrupan por zonas geográficas y no según un orden cronológico porque los procesos constructivos de los edificios consideran conceptos climáticos específicos de la zona y el uso de materiales propios del lugar que repercuten intrínsecamente en el diseño formal de los arbotantes; por ejemplo, y como el lector

podrá apreciar a lo largo del trabajo, la inclinación de los arbotantes de las catedrales o abadías francesas es muy similar para optimizar la evacuación de las aguas pluviales de sus cubiertas al estar en zonas con un alto porcentaje de lluvias o nieve. Por este motivo, en esta sección se presentan las catedrales y/o abadías manteniendo un orden geográfico y no un orden cronológico o de influencia estilística.

Quisiera enfatizar que la dificultad de los resultados de este paso radica en haber logrado los permisos pertinentes que me han autorizado acceder a cada escenario donde se localizan los arbotantes. Para ello, fue fundamental contactar previamente con los responsables de cada catedral y coordinar las visitas en diferentes localidades y países entre los años 2018 y 2020. Esta complejidad ha sido uno de los mayores retos de esta investigación por todos los trámites administrativos ejecutados y por no disponer de financiación económica para llevar a cabo cada viaje. No obstante, esta investigación y su necesidad de fotografiar los arbotantes de cada catedral me ha permitido pasear privilegiadamente por escenarios de un gran interés artístico y arquitectónico. En el apartado de agradecimientos del presente trabajo indico las personalidades que me han facilitado y autorizado el acceso a cada uno de estos espacios y que sin su colaboración no hubiera sido posible ejecutar este trabajo.

La segunda sección del apartado 3 se titula “*Revisión de los parámetros geométricos de los arbotantes*” y deriva de la primera publicación: A. Samper, B. Herrera, A. Costa. (2022). *Systematic calculation of flying buttress parameters by means of geometric regression*. Journal of Cultural Heritage, 54, pp. 21-30. Indexación: SJR, IF: 0,663 -Q1; JCR, IF: 2,955 – Q1. Aquí se presenta un proceso objetivo para determinar los parámetros formales que configuran cualquier arbotante. Es sabido que un arbotante está diseñado considerando los siguientes parámetros: la ubicación del centro  $O$  y el radio  $R$  de su arco, la inclinación  $\alpha$ , la flecha  $\mathcal{F}$ , la luz  $\mathcal{L}$  y su espesor  $\mathcal{E}$ . La falta de precisión durante su proceso constructivo, el desgaste con el tiempo, los movimientos sísmicos, las deformaciones estructurales u otros incidentes de distinta naturaleza, son agentes que pueden alterar su morfología haciendo que la determinación de sus parámetros no sea evidente ni válida. Con técnicas fotogramétricas, control de nube de puntos, redibujado vectorial y regresión geométrica, se presenta un proceso objetivo para determinar de forma no arbitraria el centro  $O$  y el radio  $R$  del arco de un arbotante; obteniendo de manera directa dos resultados: 1) Determinar de forma no arbitraria el resto de los parámetros  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{E}$ ; y 2) Clasificar los arbotantes, en dos tipos, según el criterio que estableció Viollet-le-Duc en 1854.

La tercera sección del apartado 3 se titula “*Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante*” y deriva de la segunda publicación: A. Samper, R. Martín, B. Herrera. (2022). *On the inclination of a flying buttress arch*. Nexus Network Journal, 24, pp. 897-911. Indexación: SJR, Impact factor: 0,237 -Q1; JCR, IF: 0.338 - Q2. Dada la importancia de los resultados concretados en la sección anterior y obtenidos, principalmente, en base a la determinación objetiva de los parámetros  $O$  y

$\mathcal{R}$  para la determinación de su inclinación  $\alpha$ , la presente sección se centra en la influencia de la inclinación de un arbotante en la propia morfología y su valor intrínseco con su principal función mecánica. Concretamente, la determinación de la inclinación de un arco que configura un arbotante es conocida históricamente como la amplitud del ángulo resultante entre la recta que une los dos extremos del borde inferior del arco con una recta horizontal. Pero esta inclinación no representa a todo el arbotante, correspondería, si acaso, solo a la inclinación del borde inferior del arco. Por consiguiente, con técnicas basadas en criterios geométricos y mecánicos, aplicadas a veinte arcos que configuran doce arbotantes de diferentes catedrales góticas de Europa, se presenta una nueva propuesta de definición de inclinación, que representa a todo el arco del arbotante y refuerza aún más los procedimientos –no arbitrarios– presentados en la sección anterior.

La cuarta sección del apartado 3 se titula “*Justificación formal de los arbotantes de la Catedral de Girona*” y deriva de la tercera publicación: A. Samper, R. Martín, D. Moreno. (2023). Study on the mechanical capacity and structural relevance of a flying buttress through the analysis of a particular case. International Journal of Architectural Heritage. DOI: <https://doi.org/10.1080/19648189.2015.1131201>. Impacto: SJR, Impact factor: 0,64 -Q1; JCR, IF: 3.11 – Q1. Este estudio presenta un procedimiento objetivo que establece qué nivel de influencia mecánica tiene un arbotante en función de su morfología. Es sabido que un arbotante puede desempeñar tres funciones: a) presenta una finalidad formal en el exterior de la edificación, b) evacua y canaliza las aguas pluviales, y c) transmite y neutraliza los empujes horizontales hasta los contrafuertes. Podemos determinar los aspectos a) y b) acudiendo, por una parte, a múltiples trabajos que explican su composición formal y por otra, examinando de forma visual cada elemento; no obstante, evaluar la función estructural c) no es directo y debe realizarse un estudio mecánico riguroso. Es por ello por lo que, que el presente trabajo tratará de establecer una metodología objetiva para determinar el nivel de influencia de un arbotante sobre el comportamiento estructural del conjunto arquitectónico; es decir, pretendemos contestar a dos cuestiones: La primera, ¿cuál es la capacidad mecánica de un arbotante en función de su morfología?; y la segunda, ¿es relevante esta capacidad en el comportamiento global de la estructura? Para ello, y para elogiar la catedral de la ciudad de la Universitat de Girona, aplicaremos este estudio a uno de los arbotantes ubicados en su catedral.

Todo el contenido que aparece en esta investigación tiene como objetivo ser un punto de partida para los futuros trabajos que traten de aportar datos sobre la forma de los arbotantes y, al mismo tiempo, ser un texto imprescindible para trabajos de otra índole o área de interés que necesiten la base gráfica y geométrica que se expone en las siguientes páginas. A excepción del trabajo presentado en la cuarta sección del apartado 3 de metodología, todo el estudio gira en torno al análisis específico sobre la morfología del propio arbotante sin tener en cuenta su contexto construido. Esta desvinculación con el resto de edificación se ha realizado intencionadamente

## 1. Introducción.

para seguir una secuencia de análisis ordenada que va del exterior a su interior y para no tratar de abordar precipitadamente todo el espectro de conceptos vinculados a los arbotantes. El estudio riguroso de su diseño permitirá seguir deshilvanando su repercusión estilística, mecánica y técnica en su entorno catedralicio y seguir aportando resultados novedosos en la fábrica gótica. A pesar de lo anterior, aquí se destacan algunas líneas de investigación con las que podrían derivar los resultados morfológicos obtenidos en esta investigación y que empezaría a relacionar los parámetros geométricos del arbotante con los de la propia catedral:

- 1) Determinación sobre la existencia, o no, de una relación formal entre el diseño de un arbotante con otros arbotantes ubicados en otras fábricas góticas diseñados por el mismo maestro de obra. Esta línea de investigación trataría de determinar si el diseño de un arbotante viene establecido según los criterios estilísticos de un maestro de obra o, por el contrario, si su diseño queda fijado por otro tipo de criterios menos subjetivos. Las técnicas para concretar lo anterior, deberían de basarse principalmente en procedimientos de comparación como el análisis de escabrosidad, el análisis de sus parámetros dimensionales y el análisis estadístico.
- 2) Determinación sobre la existencia, o no, de una relación entre la inclinación de los arbotantes y su posición geográfica. Esta línea de investigación trataría de determinar si los materiales y/o la climatología de una zona concreta del territorio condicionó al maestro de obra a diseñar los arbotantes con una determinada inclinación para favorecer y/o optimizar la descarga de tensiones mecánicas según el tipo de piedra utilizada en la sillería y/o para evacuar, de una forma más eficaz, las aguas pluviales provenientes de las cubiertas de sus construcciones. Para determinar lo anterior deberían de realizarse análisis químicos de las diferentes tipologías de piedra utilizadas en cada zona, así como una consulta específica sobre los parámetros meteorológicos y geológicos de cada construcción.
- 3) Determinación sobre la existencia, o no, de una relación entre los parámetros geométricos y constructivos de un arbotante (la ubicación del centro  $O$  y el radio  $R$  de su arco, la inclinación  $\alpha$ , la flecha  $\mathcal{F}$ , la luz  $\mathcal{L}$  y su espesor  $\mathcal{E}$ ) con algunos de los parámetros geométricos y constructivos de la catedral (altura de la nave  $\mathcal{H}$  y la anchura de la nave  $\mathcal{A}$ ). Para determinar lo anterior deberían de realizarse mediciones precisas de los parámetros  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{A}$  para cada catedral; y además, mediante los coeficientes de covarianza y de correlación de Pearson calcular si existe relación estadística.
- 4) Determinación sobre la existencia, o no, de una relación entre la altura en el que el arbotante apuntala el muro de la nave central con la altura de la nave  $\mathcal{H}$  y su anchura

## 1. Introducción.

*A.* Para determinar lo anterior sería conveniente realizar estudios mecánicos combinados con análisis geométricos.

Además de presentar los resultados y sus respectivas conclusiones en cada sección, en el apartado 4 de *Conclusiones* el lector podrá encontrar, de forma agrupada y enlazada, todos los aspectos logrados en cada investigación. Asimismo, los resultados de estas cuatro secciones han sido publicados en revistas internacionales que aparecen en diferentes bases de prestigio científico y ocupan una posición exquisitamente relevante.

Con todo lo anterior, al lector aquí se presenta esta Tesis para alcanzar el grado de Doctor por la Universitat de Girona y por compendio de artículos. Aunque la normativa de la universidad permita presentar las tres publicaciones encabezadas por una introducción y enlazadas por unas conclusiones, se ha optado por una maquetación más próxima a una monografía para facilitar la lectura a los interesados y con la finalidad de mostrar los resultados gráficos de una forma óptima.





## 2. OBJETIVOS

Esta investigación tiene un objetivo general y cuatro objetivos específicos.

Desde un punto de vista académico, este trabajo pretende realizar un estudio original y novedoso sobre una temática cuya información preliminar es escasa o inexistente. Con procedimientos objetivos y técnicas actuales, esta investigación pretende aportar un enfoque sobre la forma de los arbotantes en algunas catedrales y abadías góticas. Con una base gráfica y técnica, este documento debería de ser el punto de partida de otras investigaciones sobre arbotantes, independientemente del área natural de cada investigador.

Los objetivos específicos se estructuran siguiendo el orden de elaboración y publicación de los artículos que configuran la presente investigación:

- 1- Con técnicas fotogramétricas, control de nube de puntos, redibujado vectorial y representación gráfica este estudio pretende realizar un levantamiento –rigurosamente preciso– de los arbotantes considerados en el estudio para su análisis morfológico.
- 2- Con técnicas de regresión geométrica, este estudio pretende determinar de forma no arbitraria el centro  $O$  y el radio  $R$  del arco de un arbotante y, como consecuencia, determinar de forma no arbitraria el resto de los parámetros  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{E}$ ; y también, clasificar los arbotantes, en dos tipos, según el criterio que estableció Viollet-le-Duc en 1854.
- 3- Con técnicas basadas en criterios geométricos y mecánicos, este estudio pretende aportar una nueva propuesta de definición de inclinación  $\alpha$ , que representa a todo el arco del arbotante y refuerza aún más los procedimientos –no arbitrarios– presentados en el objetivo anterior.
- 4- Con técnicas gráficas y procesos básicos de mecánica, este estudio pretende establecer una metodología objetiva para determinar el nivel de influencia de un arbotante sobre el comportamiento estructural del conjunto arquitectónico. Concretamente, se pretende contestar a dos cuestiones: La primera, ¿cuál es la capacidad mecánica de un arbotante en función de su morfología?; y la segunda, ¿es relevante esta capacidad en el comportamiento global de la estructura?

En el siguiente apartado de “*Metodología y Resultados*” se presentarán, de forma más extendida, estos objetivos y se desarrollarán los procesos para alcanzarlos.



### **3. METODOLOGÍA Y RESULTADOS**

#### **3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio**

Existen diferentes procedimientos y herramientas para digitalizar la geometría de un elemento físico; concretamente, el escáner láser y la fotogrametría son las más usadas en el campo de la arquitectura permitiendo capturar, con alta precisión, la geometría y la textura de cada objeto. Aunque no es la esencia del presente trabajo explicar los fundamentos y el procedimiento de cómo realizar un levantamiento arquitectónico mediante técnicas fotogramétricas, a continuación, se realizará una breve explicación sobre su concepto y su aplicación directa a los elementos que entran en concurso en la presente investigación. Para aquellos lectores que quieran profundizar sobre esta técnica o sus aplicaciones pueden acudir a las siguientes referencias bibliográficas (Angulo, 2013; Aparicio et al., 2014).

La fotogrametría es la técnica que estudia y define –con precisión– la forma, las dimensiones y la posición en el espacio de un objeto cualquiera, utilizando esencialmente medidas hechas sobre una o varias fotografías de ese objeto. La palabra fotogrametría deriva del vocablo "fotograma" (de "photós" equivalente a luz, y de "gramma" equivalente a dibujo) y de "metrón" que significa medir. Por lo que resulta que el concepto de fotogrametría es: "medir sobre fotos". Desde un punto de vista más específico, esta técnica se basa en el análisis de pares estereoscópicos y la extracción de la información de estos durante la fase de restitución, con ayuda de la visión estereoscópica (Pérez, 2010).

Existen múltiples programas que simplifican el cómputo numérico y que automatizan cada uno de los pasos para generar el modelo tridimensional resultante; por ejemplo: el Autodesk ReCap, el AliceVision Meshroom, el Pix4D, el PhotoModeler, el CapturingReality y, entre otros, el Regard3D; no obstante, para la generación de los modelos de todos los arbotantes que completan el estudio se ha usado el software Agisoft PhotoScan por ser uno de los más usados en el campo de la digitalización arquitectónica y por disponer de licencia previamente.

A continuación, se describen los cinco pasos para la obtención de cada modelo tridimensional:

Paso 1: Registrar fotográficamente los arbotantes de estudio. Como se ha descrito anteriormente, la técnica fotogramétrica permite modelar digitalmente un elemento mediante la captura de fotografías del mismo objeto. Para garantizar un buen resultado, las fotografías deben registrar parcialmente la totalidad de su geometría y deben realizarse con un trípode para evitar las vibraciones y los movimientos. Se usó una cámara réflex (modelo Canon EOS 5D) y se realizaron un total de 718 fotografías con una resolución por imagen de más de 3 megapíxeles. En la Tabla 1, el lector puede observar cuántas fotografías fueron necesarias para cada arbotante

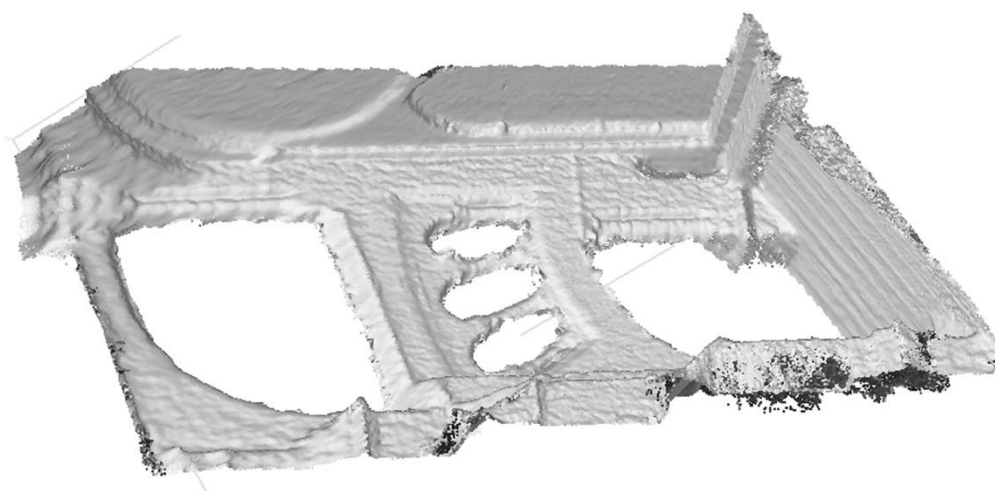
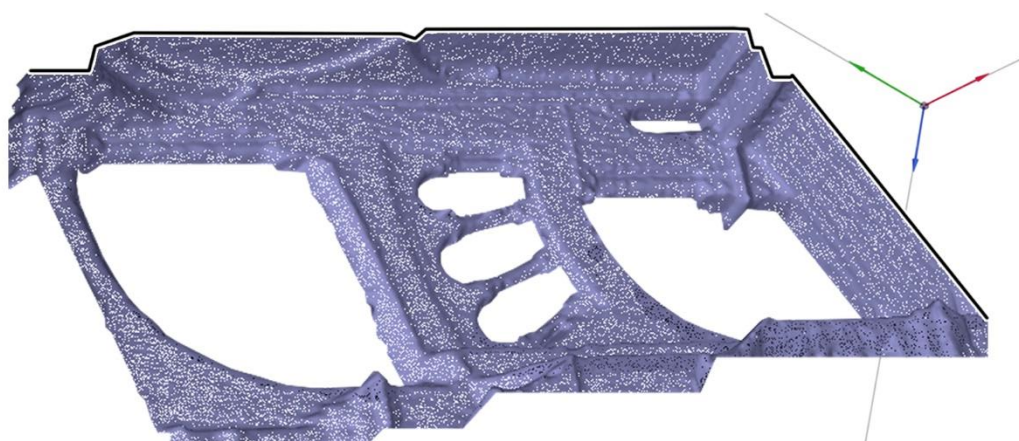
en concreto, y en las siguientes Figuras 4-30 el lector puede ver un ejemplo de cada arbotante estudiado en la presenta tesis.

Además, y para cada arbotante fue imprescindible tomar un mínimo de tres medidas para escalar y rotar cada modelo resultante a su dimensión y posición real. Estas medidas o marcadores han generado un error medio, inferior a 1.5 centímetros, para los ejes X, Y, Z de cada modelo resultante. Este valor es más que aceptable para modelos de esta envergadura y frecuentes en la digitalización de objetos arquitectónicos.

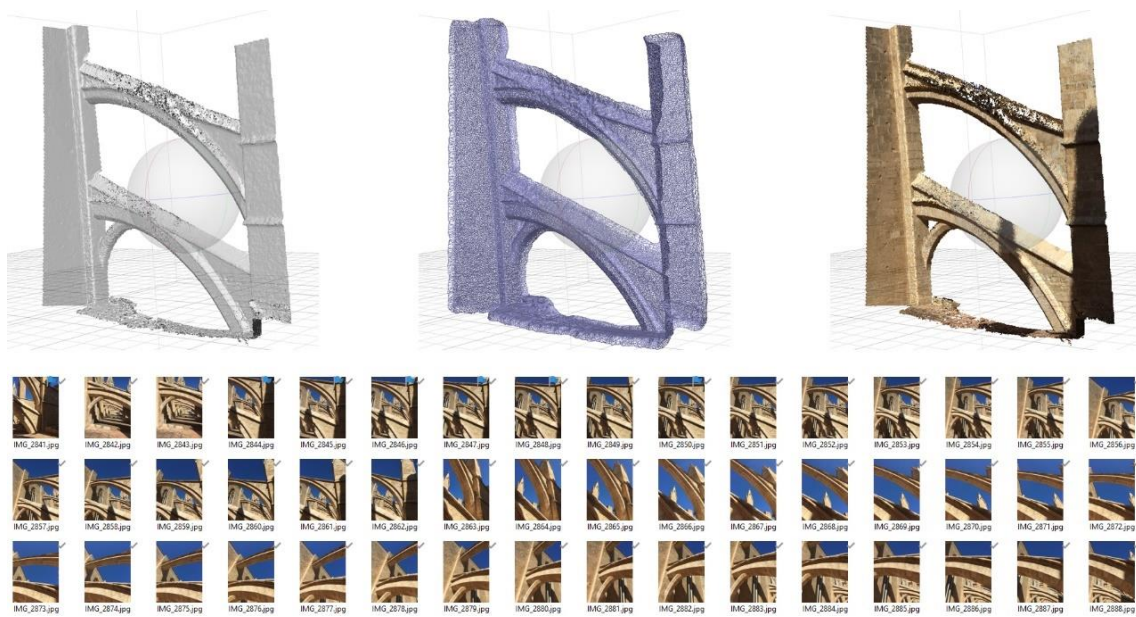
Es importante remarcar que la dificultad de los resultados de este paso radica en haber logrado los permisos pertinentes que me han autorizado acceder a cada escenario donde se localizan los arbotantes. Para ello, fue fundamental contactar previamente con los responsables de cada catedral y coordinar las visitas en diferentes localidades y países entre los años 2018 y 2020. Esta complejidad ha sido uno de los mayores retos de esta investigación por todos los trámites administrativos ejecutados y por no disponer de financiación económica para llevar a cabo cada viaje. No obstante, esta investigación y su necesidad de fotografiar los arbotantes de cada catedral me ha permitido pasear privilegiadamente por escenarios de un gran interés artístico y arquitectónico. En el apartado de agradecimientos del presente trabajo indico las personalidades que me han facilitado y autorizado el acceso a cada uno de estos espacios y que sin su colaboración no hubiera sido posible ejecutar este trabajo.

**Figura 4.** En la página siguiente se muestra un ejemplo gráfico del proceso fotogramétrico aplicado al arbotante de la Catedral de Chartres. A la izquierda, la nube densa de puntos del modelo. Al centro, el modelo mallado; y a la derecha, el modelo texturizado resultante. Imagen realizada por el autor.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.



Paso 2: Insertar y orientar/alinear las fotografías. Una vez se incorporan al programa todas las fotografías, el proceso sigue con su orientación o alineación. Este paso permite determinar, con precisión máxima, la posición geográfica y orientación de la cámara durante el momento de su registro fotográfico. Al mismo tiempo, también permite localizar en las respectivas fotografías las partes físicas del objeto que se midieron “in situ” y colocar los marcadores y sus dimensiones tomadas con el fin de escalar y rotar el modelo a una dimensión y posición que refleje la realidad.



**Figura 5.** Resumen explicativo del proceso fotogramétrico aplicado al arbotante de la Catedral de Mallorca. En esta figura se presentan parcialmente las fotografías usadas y una secuencia gráfica de los pasos 2, 3 y 4; correspondientes a la nube de puntos densa, al mallado del modelo y su posterior textura. Imagen realizada por el autor.

|    | Modelo del arbotante de la Catedral/Abadía de: | Número de fotografías | Número de puntos | Número de vértices | Número de caras |
|----|--|-----------------------|------------------|--------------------|-----------------|
| 1  | Mallorca                                       | 67                    | 2.129.347        | 72.575             | 140.998         |
| 2  | Burgos   | 76                    | 3.236.789        | 119.537            | 198.295         |
| 3  | León   | 56                    | 1.789.554        | 49.934             | 96.045          |
| 4  | Oviedo   | 44                    | 2.986.332        | 91.038             | 179.999         |
| 5  | Toledo   | 87                    | 2.997.888        | 95.690             | 189.170         |
| 6  | Chartres                                       | 83                    | 2.004.667        | 78.260             | 155.225         |
| 7  | San Pedro de Chartres                          | 40                    | 2.999.765        | 100.560            | 215.890         |
| 8  | Amiens   | 67                    | 4.234.997        | 149.970            | 296.728         |
| 9  | San Denis                                      | 61                    | 4.457.214        | 155.567            | 320.135         |
| 10 | Salisbury                                      | 61                    | 2.789.635        | 85.890             | 168.890         |
| 11 | Wells  | 45                    | 2.876.345        | 89.987             | 176.988         |
| 12 | Bath   | 31                    | 1.789.433        | 49.475             | 97.489          |

**Tabla 1.** Características formales de los modelos tridimensionales generados para cada arbotante de estudio con el software PhotoScan.

Paso 3: Determinar una nube de puntos densa. Una vez georreferenciado y optimizado cada arbotante, Photoscan permite generar y visualizar el objeto aproximado formado por una nube de puntos densa. El programa, basado en las posiciones de cámara que se han estimado, calcula la información de profundidad para cada cámara para ser combinada en una única nube de puntos densa. Con el fin de obtener una geometría más detallada y precisa –y de forma similar al proceso de alineación anterior– el software permite validar el paso con un valor máximo de calidad. En la Tabla 1, el lector puede observar el número de puntos que configura cada nube de cada arbotante.

Paso 4: Determinar una malla del modelo. En base la nube de puntos anterior, Photoscan ofrece la posibilidad de generar una malla fijando previamente el número de caras resultantes, el tipo de superficies y el tipo de interpolación. Al mismo tiempo, y de forma similar a los pasos anteriores, se establece un criterio de calidad alto para construir el mallado de cada arbotante. En la Tabla 1, el lector puede observar el número de vértices y caras que configura cada malla de cada arbotante.

Paso 5: Texturizar la malla del modelo. Una vez generada la malla para cada arbotante, Photoscan ofrece la posibilidad de texturizar esta superficie en base a las fotografías introducidas en el primer paso. Este procedimiento permite configurar ciertos parámetros de intensidad, corrección de la textura y de su calidad.



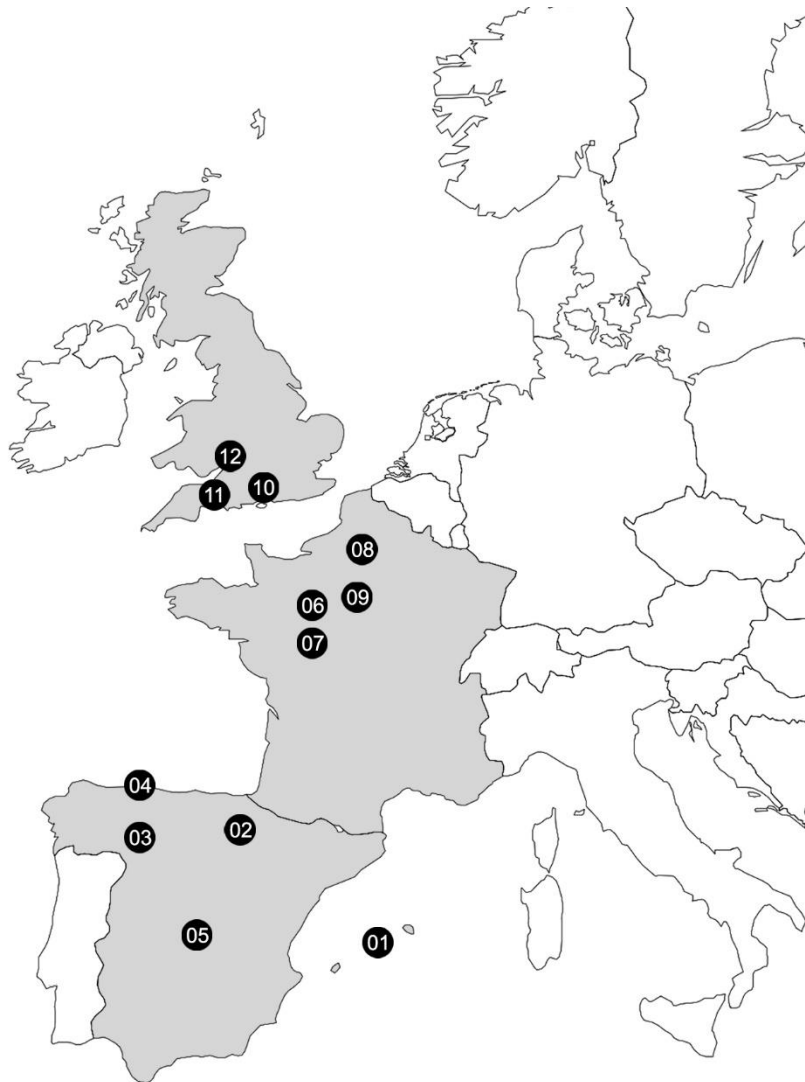
Aplicando los pasos anteriores con las fotografías realizadas de cada arbotante, se han obtenido doce modelos tridimensionales con sus respectivas texturas. Con el fin de poder tener un control gráfico de estos modelos se ha realizado un levantamiento en dos dimensiones y en formato vectorial CAD de cada arbotante. Este último paso se ha realizado exportando una proyección cilíndrica texturizada del alzado de cada arbotante en formato TIFF y seguidamente, con ayuda del software Autocad, se ha dibujado con valor gráfico –y en formato vectorial– cada uno de los sillares que configuran todos los arbotantes de estudio. El lector puede observar estos resultados apreciando las Figuras 7-30.

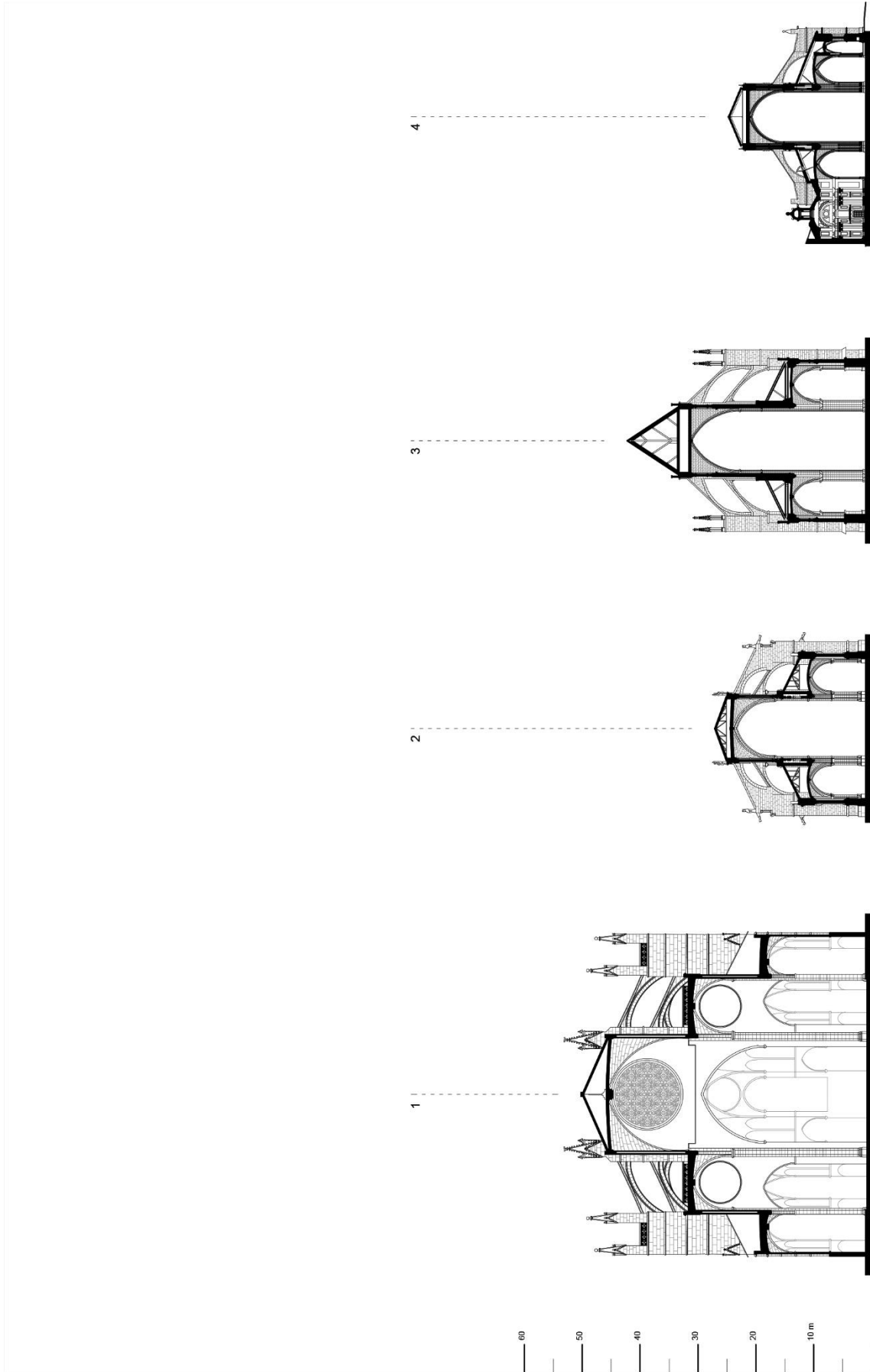
Las ventajas de realizar este levantamiento bidimensional son múltiples. Por una banda, permite visualizar todos los arbotantes, con la misma escala gráfica, de forma simultánea. Y por otra banda, permite incorporar los resultados gráficos –que el lector podrá observar a lo largo del presente trabajo– procedentes de los cálculos numéricos de una forma rápida y precisa. A continuación, se presentan todos estos levantamientos a una misma escala gráfica para facilitar la comparación visual entre los diferentes arbotantes que configuran el estudio.

**Figura 6.** En la página siguiente se muestra un ejemplo gráfico del proceso fotogramétrico aplicado al arbotante de la Catedral de Burgos. A la izquierda, el modelo mallado; y a la derecha, el modelo texturizado resultante. Imagen realizada por el autor.



1. **Catedral de Mallorca**
2. **Catedral de Burgos**
3. **Catedral de León**
4. **Catedral de Oviedo**
5. Catedral de Toledo
6. Catedral de Chartres
7. Abadía de San Pedro de Chartres
8. Catedral de Amiens
9. Abadía de San Denis
10. Catedral de Salisbury
11. Catedral de Wells
12. Abadía de Bath



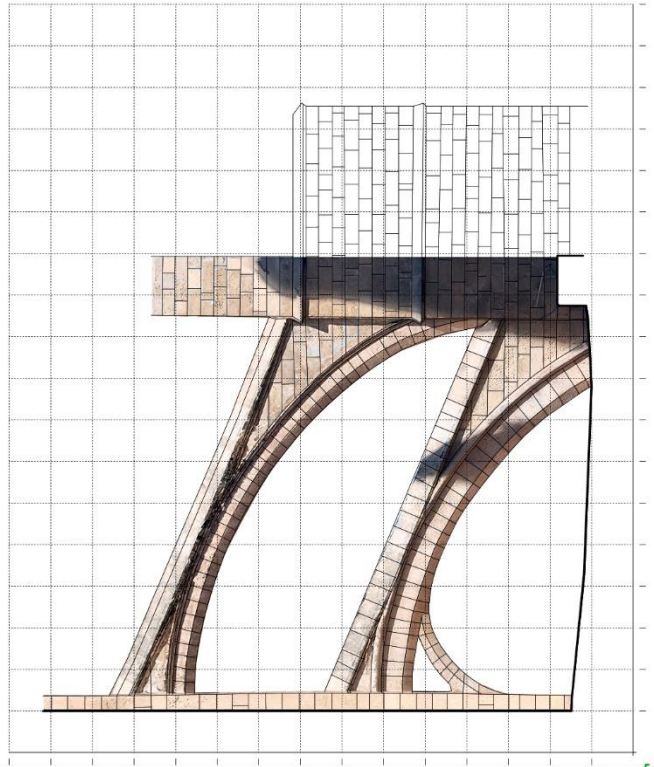
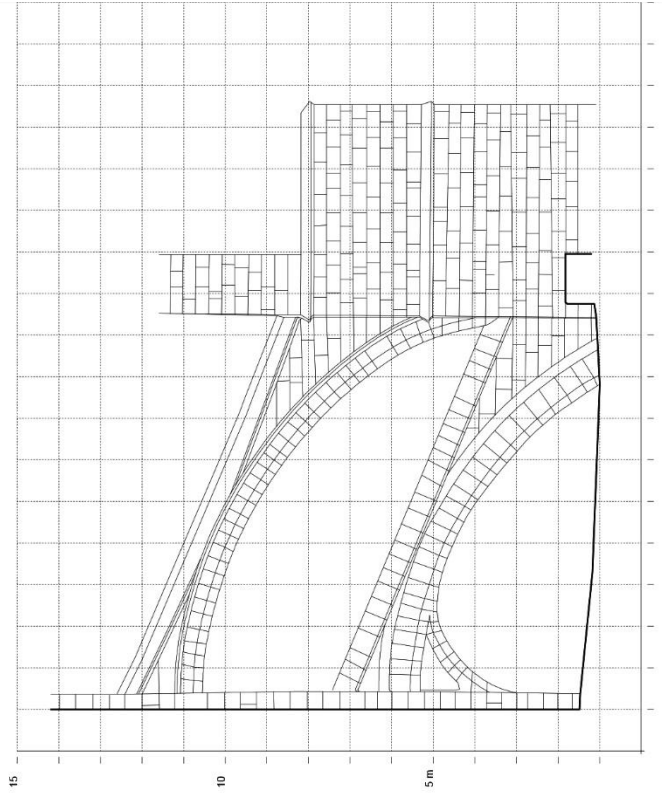




**Figura 7.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Mallorca. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 8.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Mallorca. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.

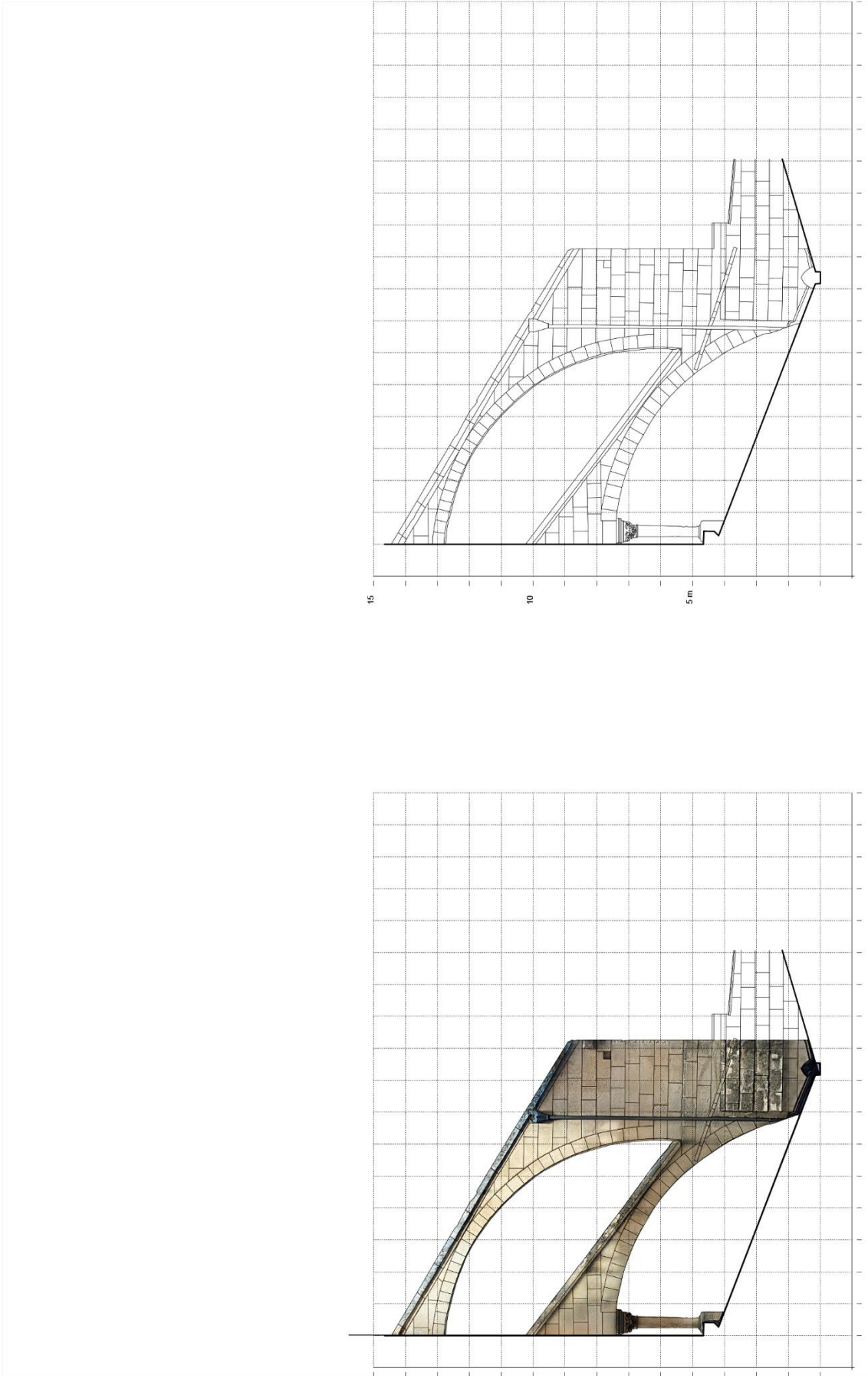




**Figura 9.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Burgos. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 10.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Burgos. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.



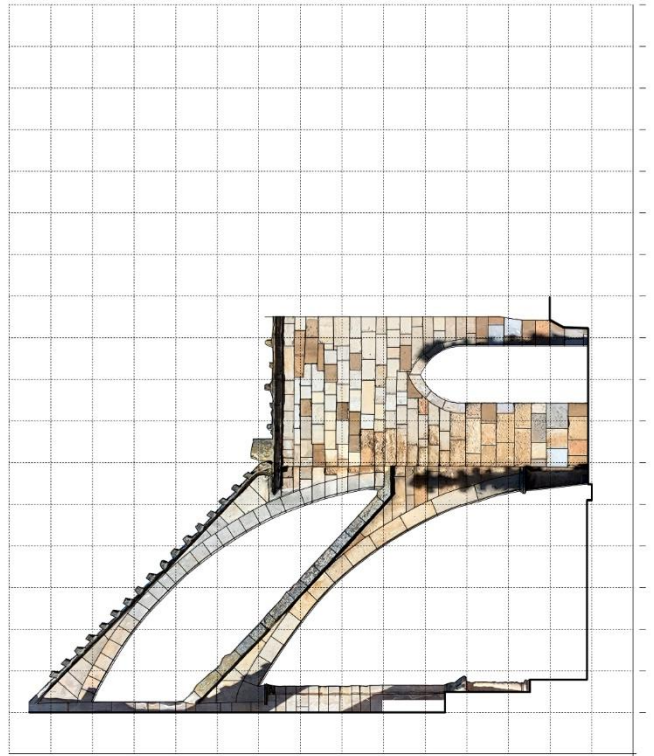
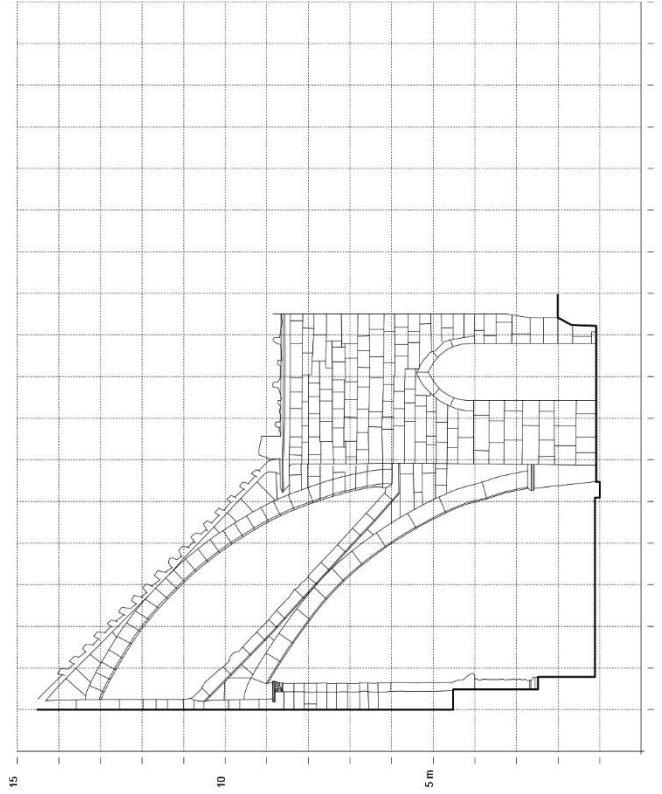




**Figura 11.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de León. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 12.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de León. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.

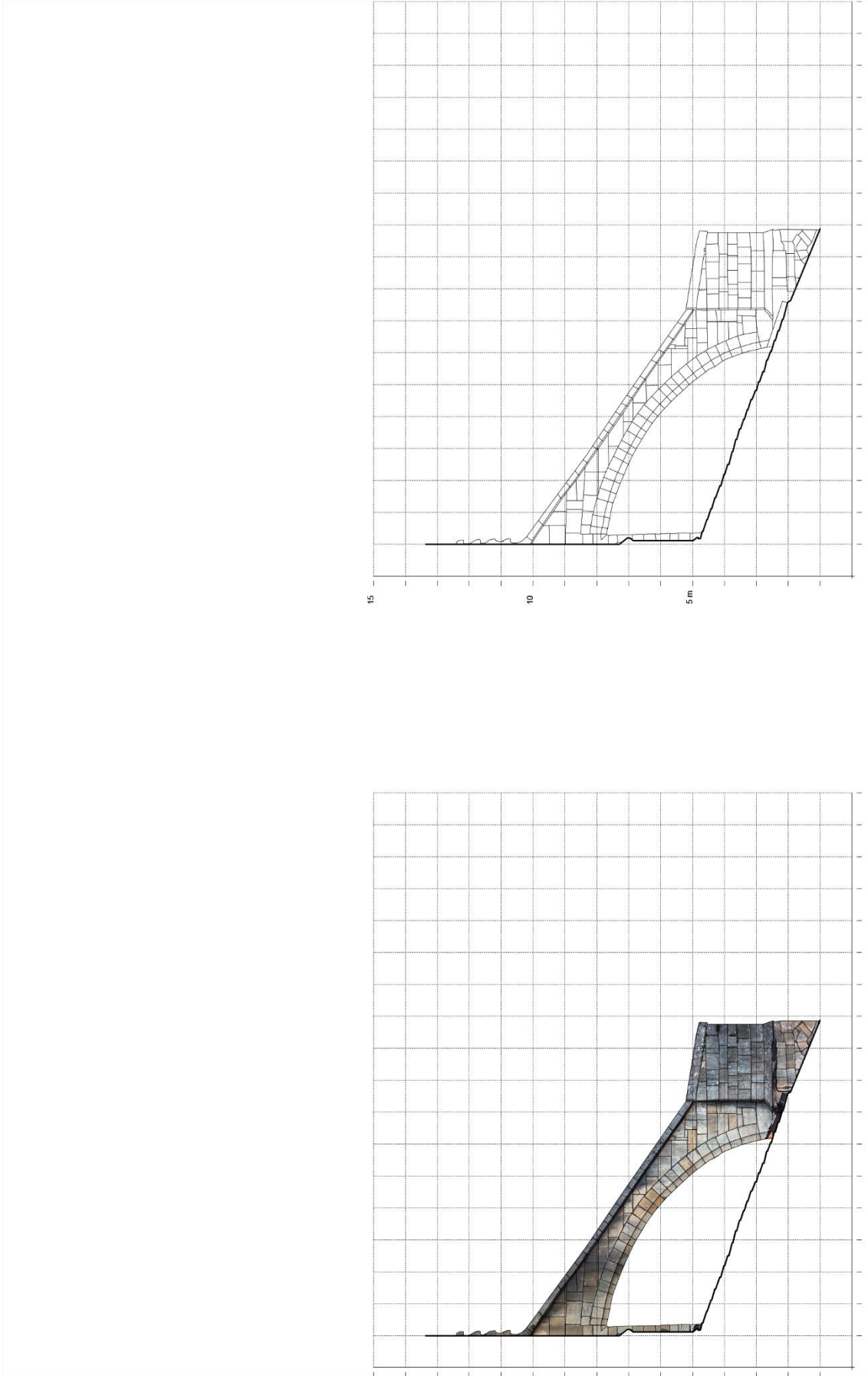




**Figura 13.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Oviedo. Fotografía realizada por el autor.

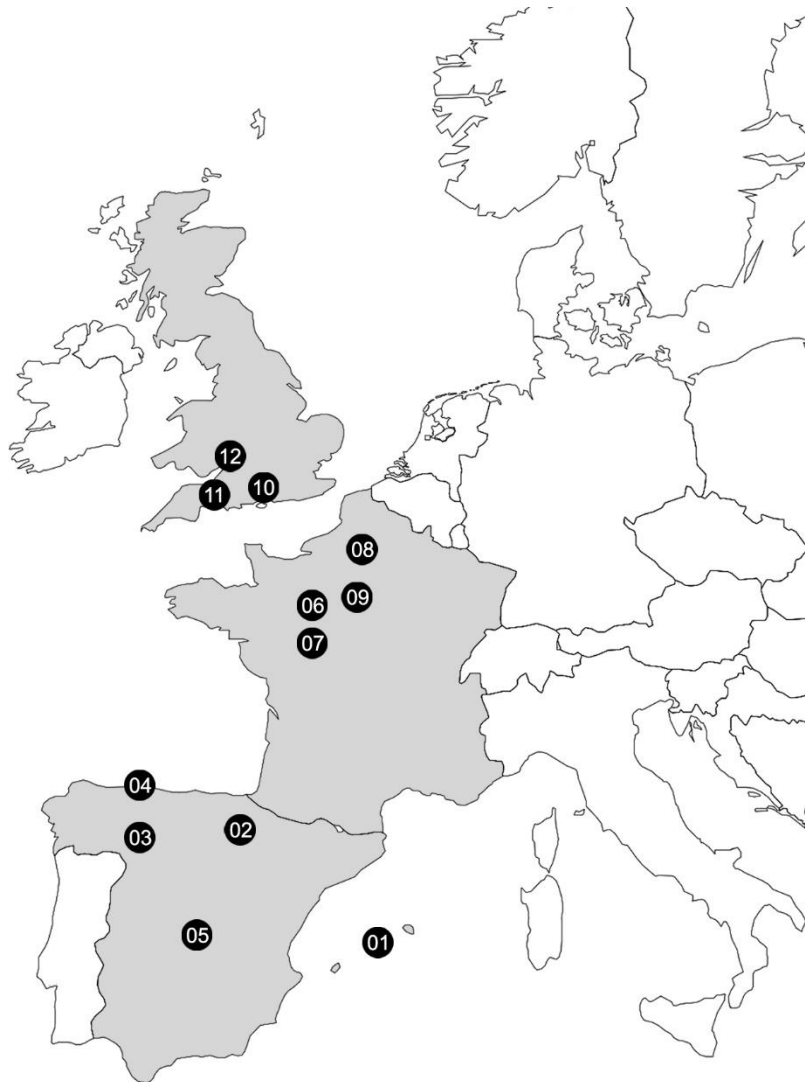
**Figura 14.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Oviedo. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

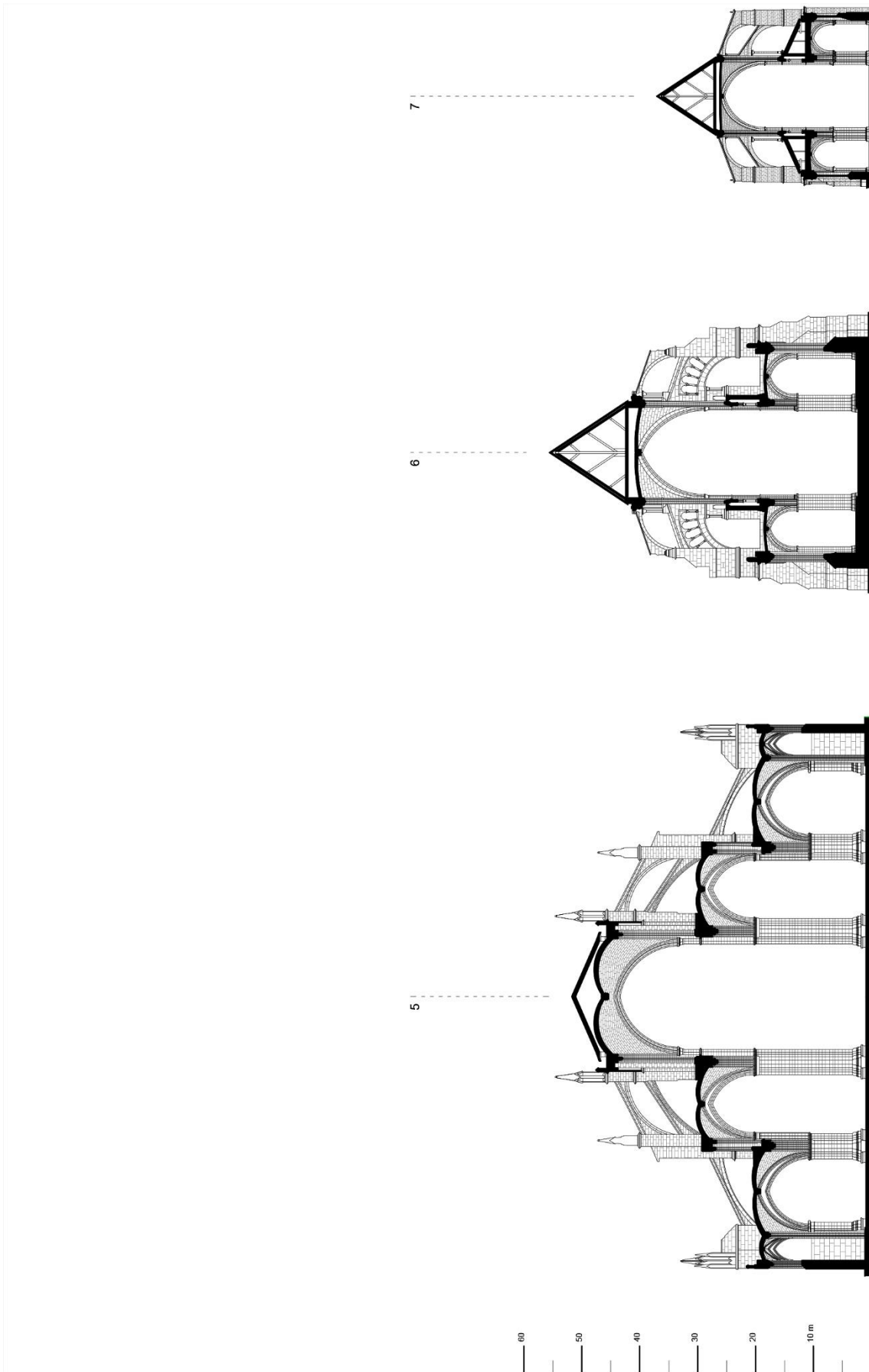
3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.



Catedrales y abadías incorporadas en el presente estudio:

1. Catedral de Mallorca
2. Catedral de Burgos
3. Catedral de León
4. Catedral de Oviedo
5. **Catedral de Toledo**
6. **Catedral de Chartres**
7. **Abadía de San Pedro de Chartres**
8. Catedral de Amiens
9. Abadía de San Denis
10. Catedral de Salisbury
11. Catedral de Wells
12. Abadía de Bath



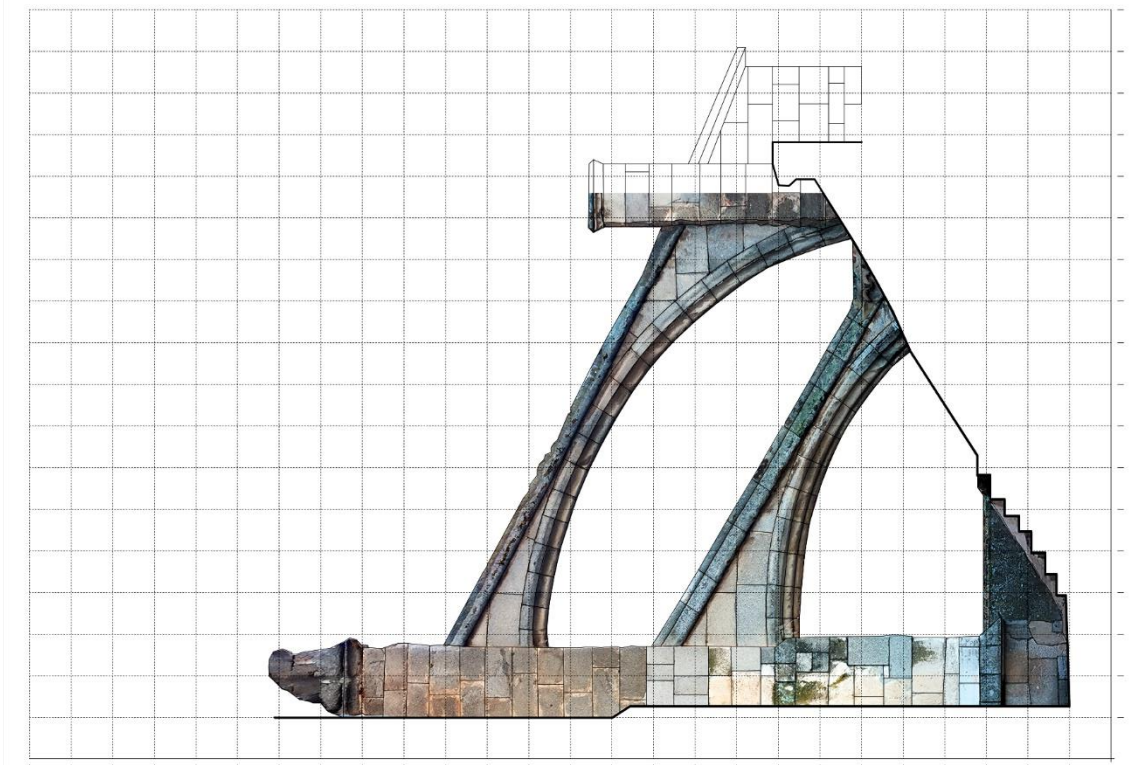
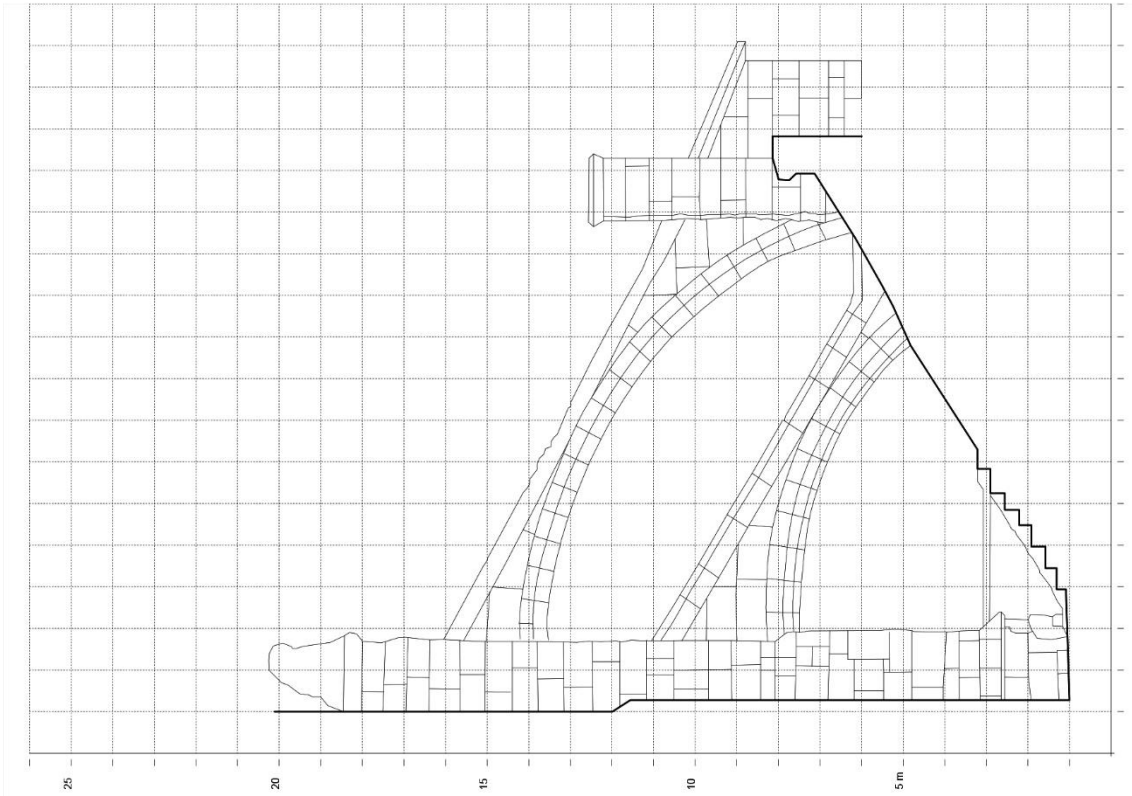




**Figura 15.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Toledo. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 16.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Toledo. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.

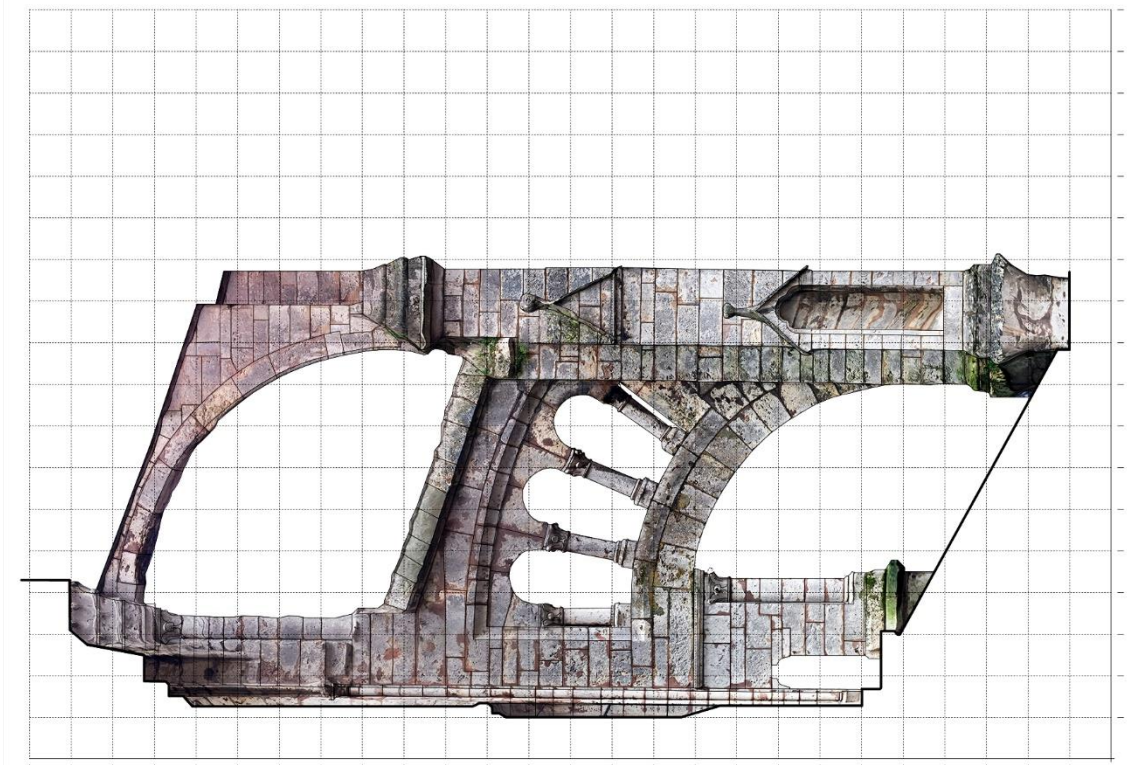
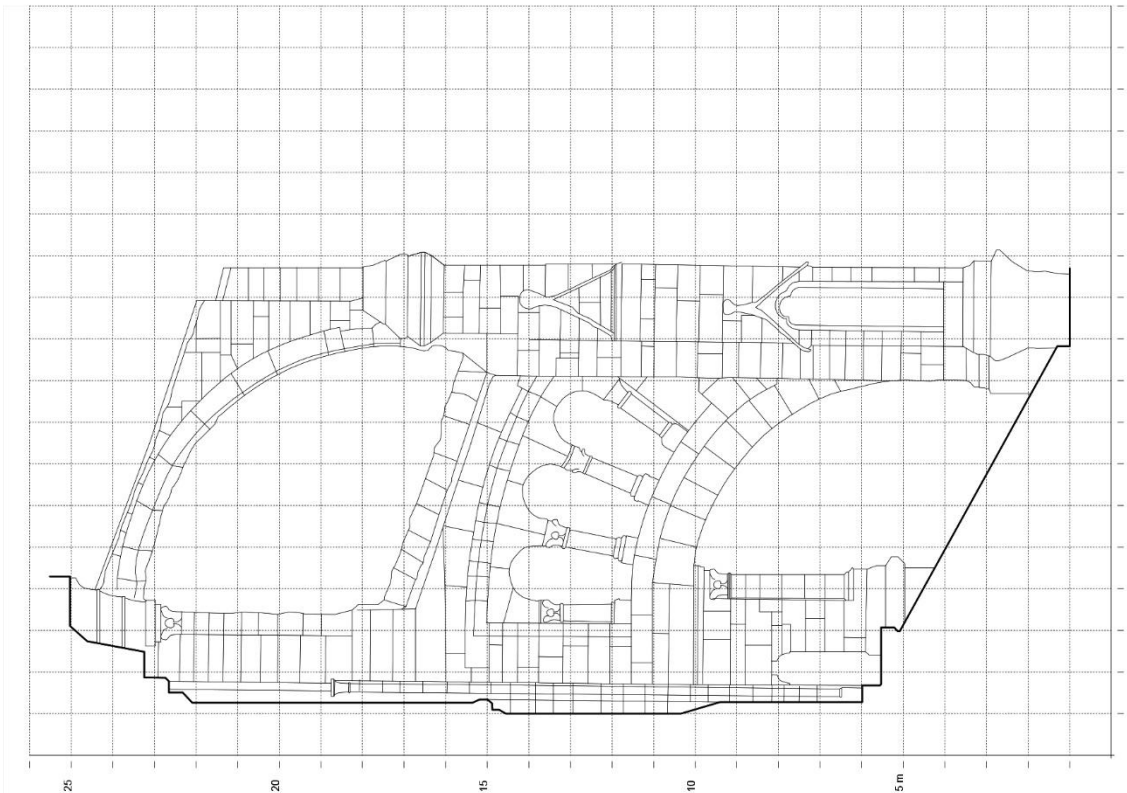






**Figura 17.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Chartres. Fotografía realizada por el autor.

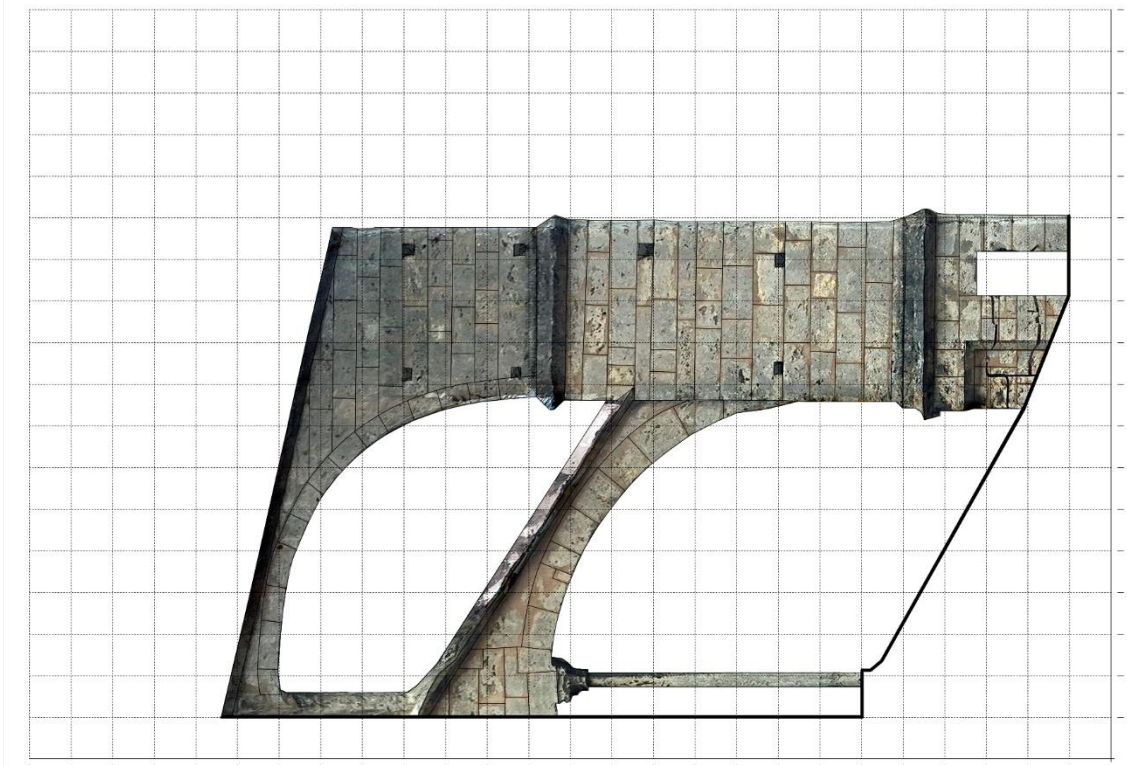
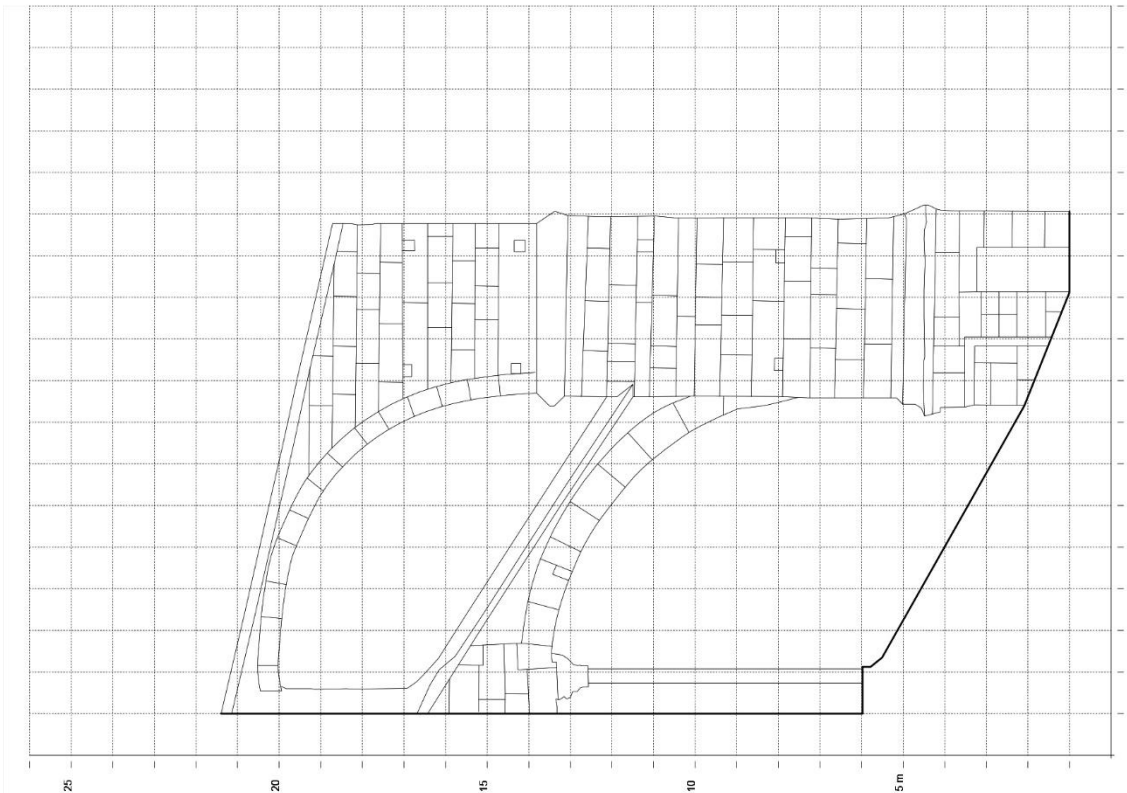
**Figura 18.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Chartres. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.





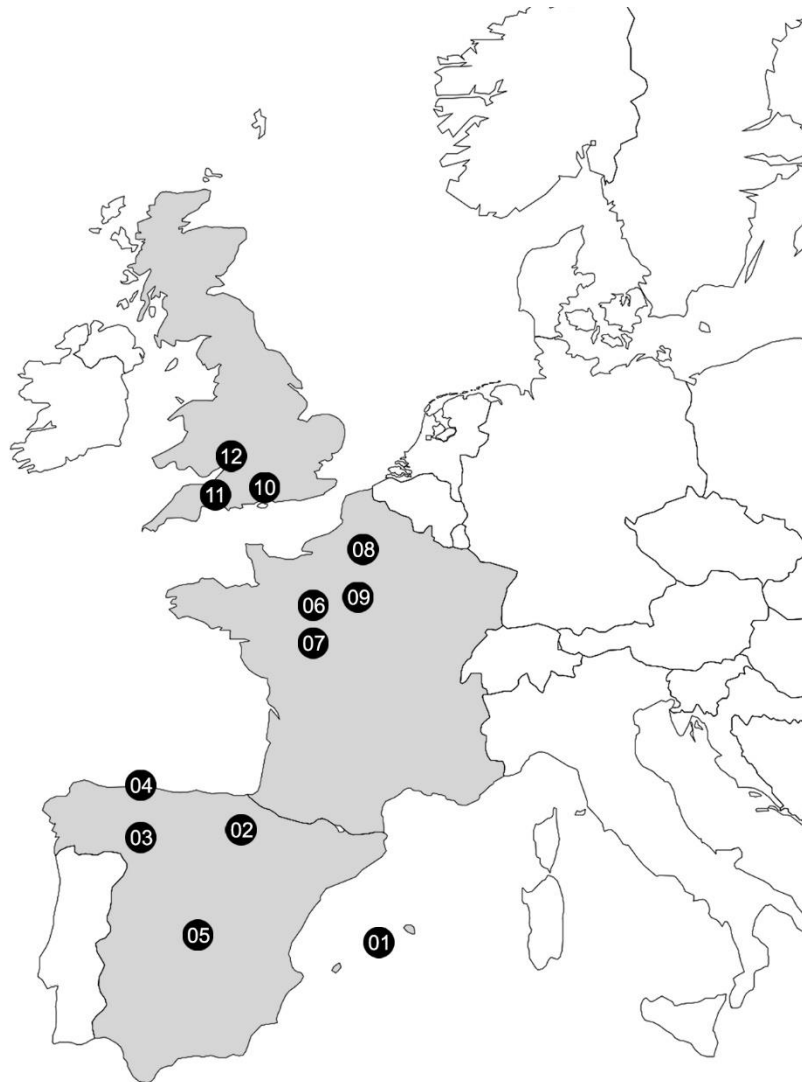
**Figura 19.** Fotografía de los arbotantes de la Abadía de San Pedro de Chartres. Fotografía realizada por el autor.

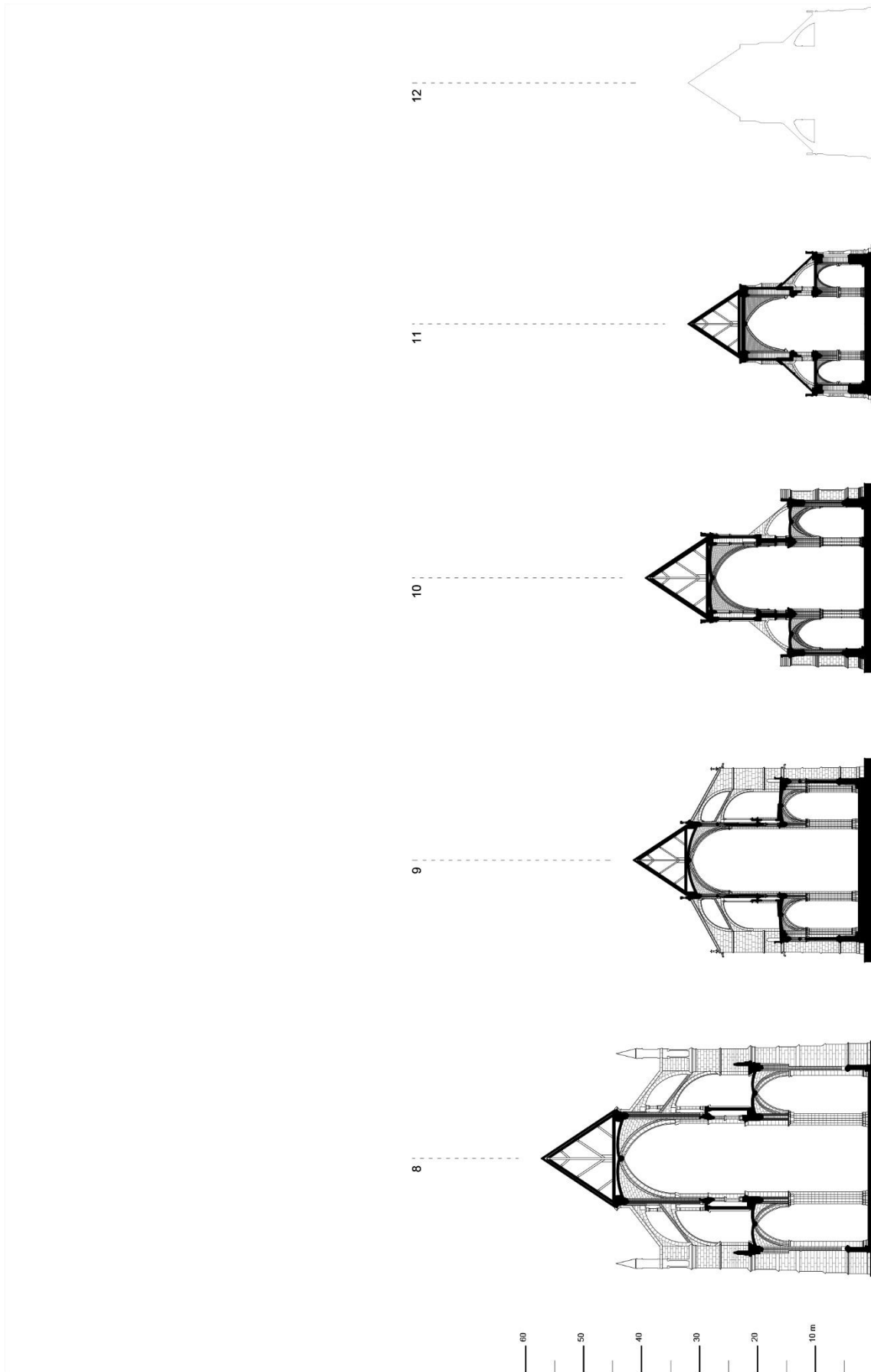
**Figura 20.** La página siguiente muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Abadía de San Pedro de Chartres. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.



Catedrales y abadías incorporadas en el presente estudio:

1. Catedral de Mallorca
2. Catedral de Burgos
3. Catedral de León
4. Catedral de Oviedo
5. Catedral de Toledo
6. Catedral de Chartres
7. Abadía de San Pedro de Chartres
8. Catedral de Amiens
9. **Abadía de San Denis**
10. **Catedral de Salisbury**
11. **Catedral de Wells**
12. **Abadía de Bath**



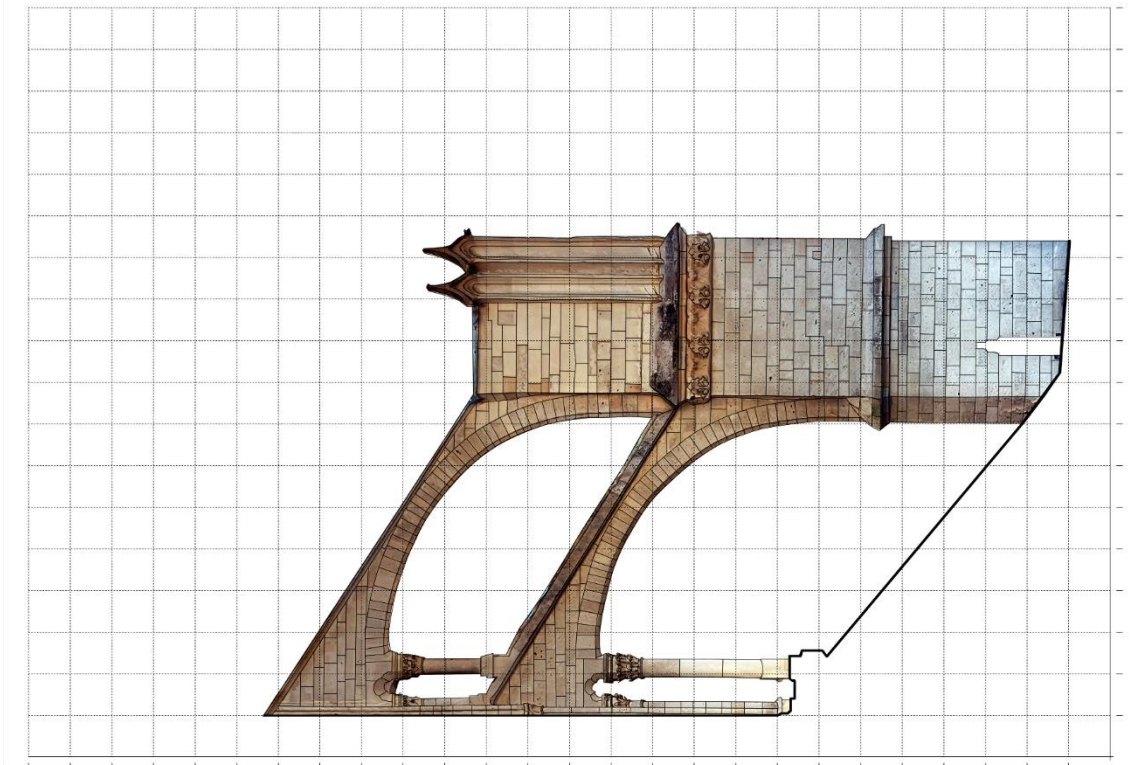
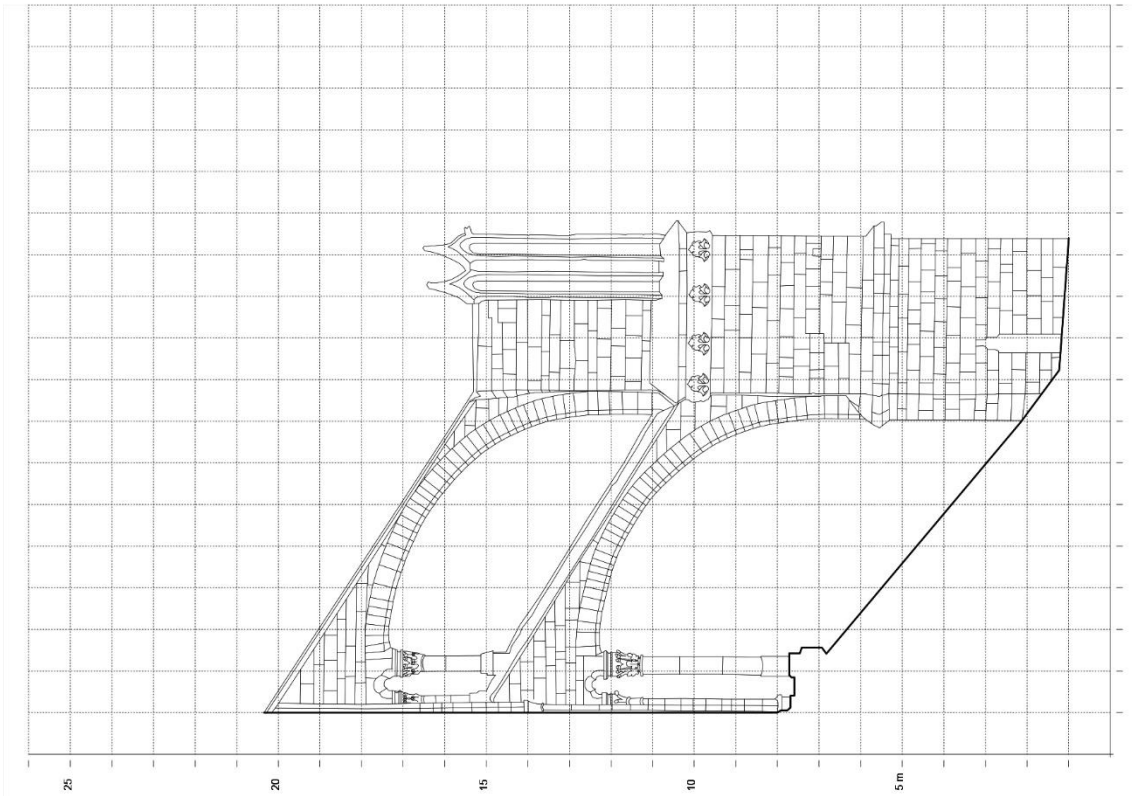




**Figura 21.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Amiens. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 22.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Amiens. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.

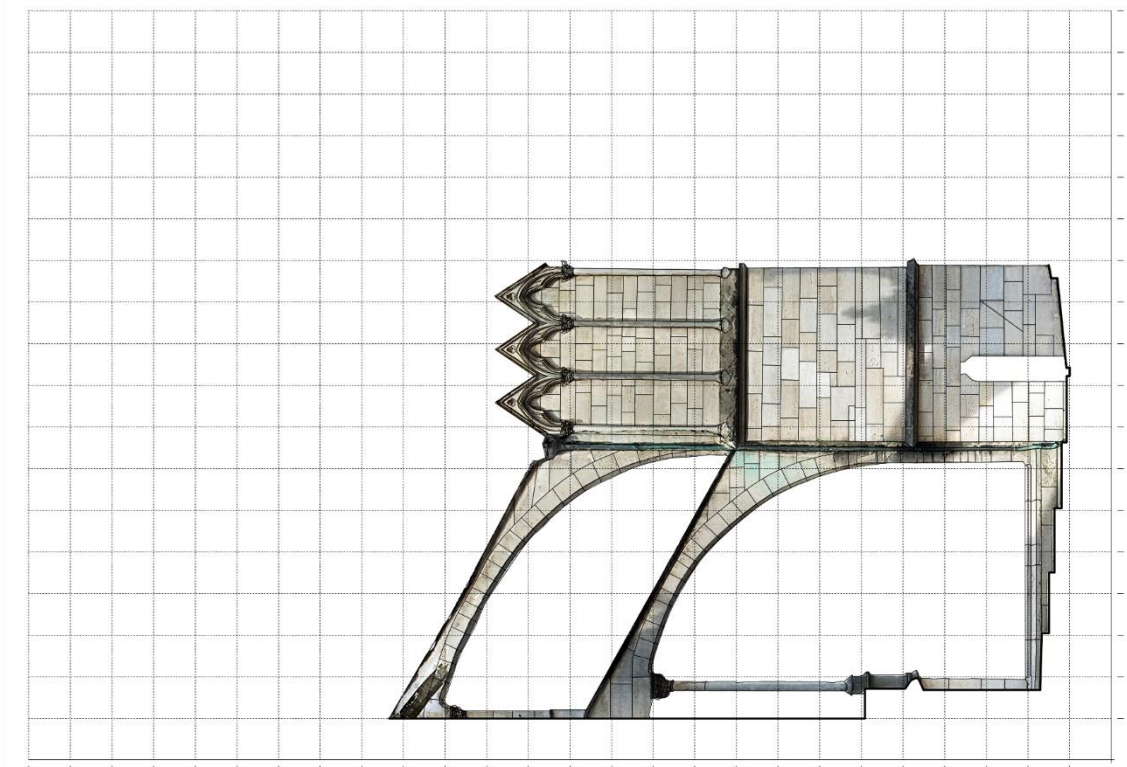
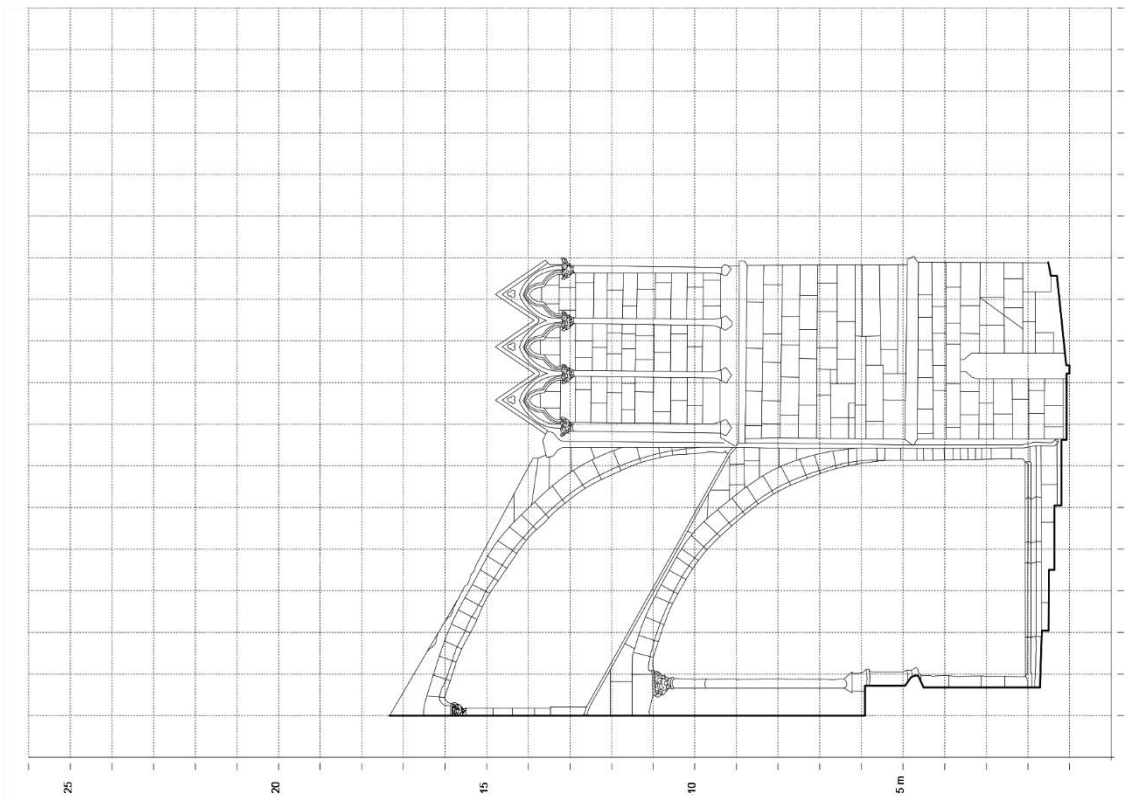






**Figura 23.** Fotografía de los arbotantes de la Abadía de San Denis. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 24.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Abadía de San Denis. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

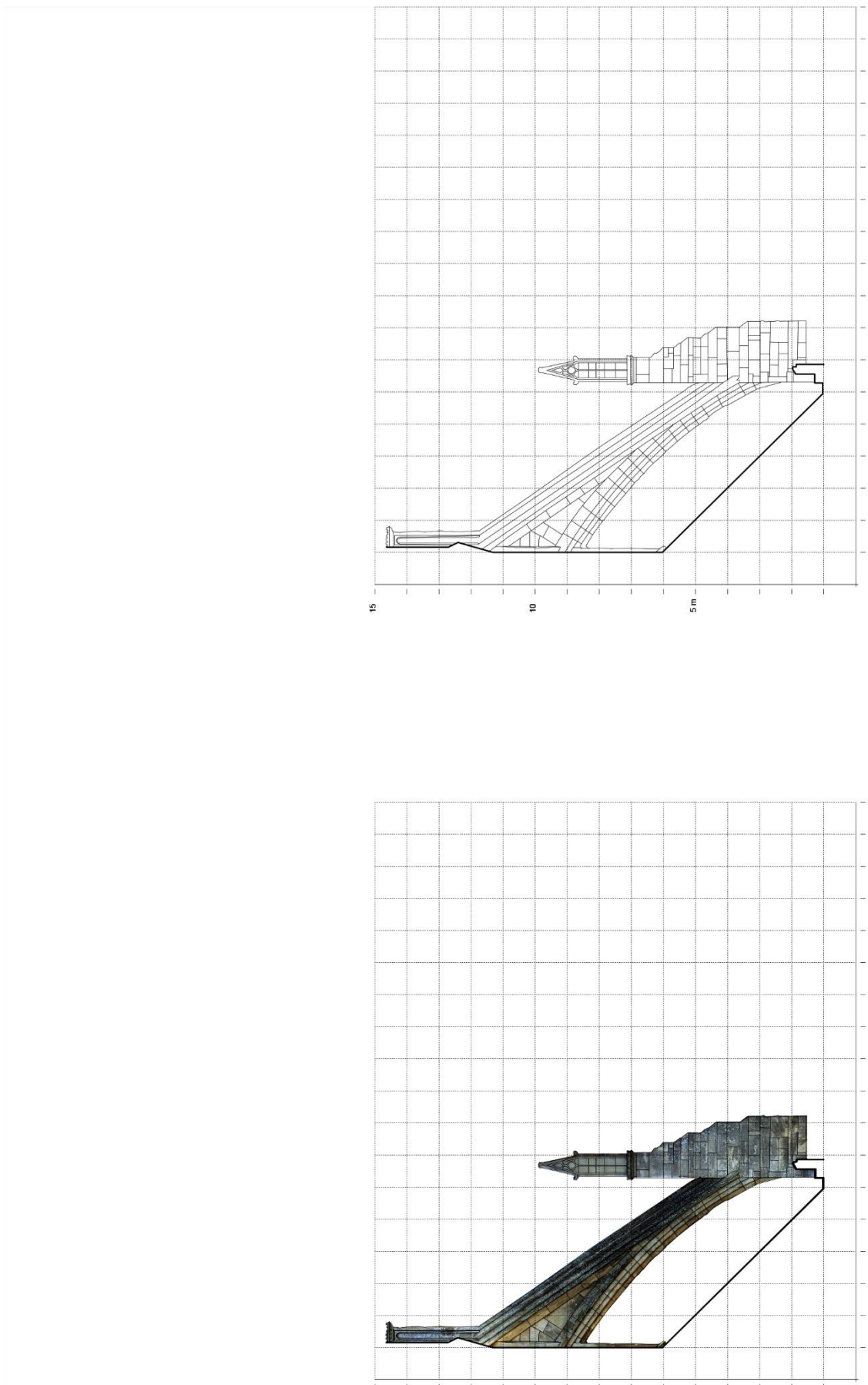




**Figura 25.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Salisbury. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 26.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Salisbury. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.

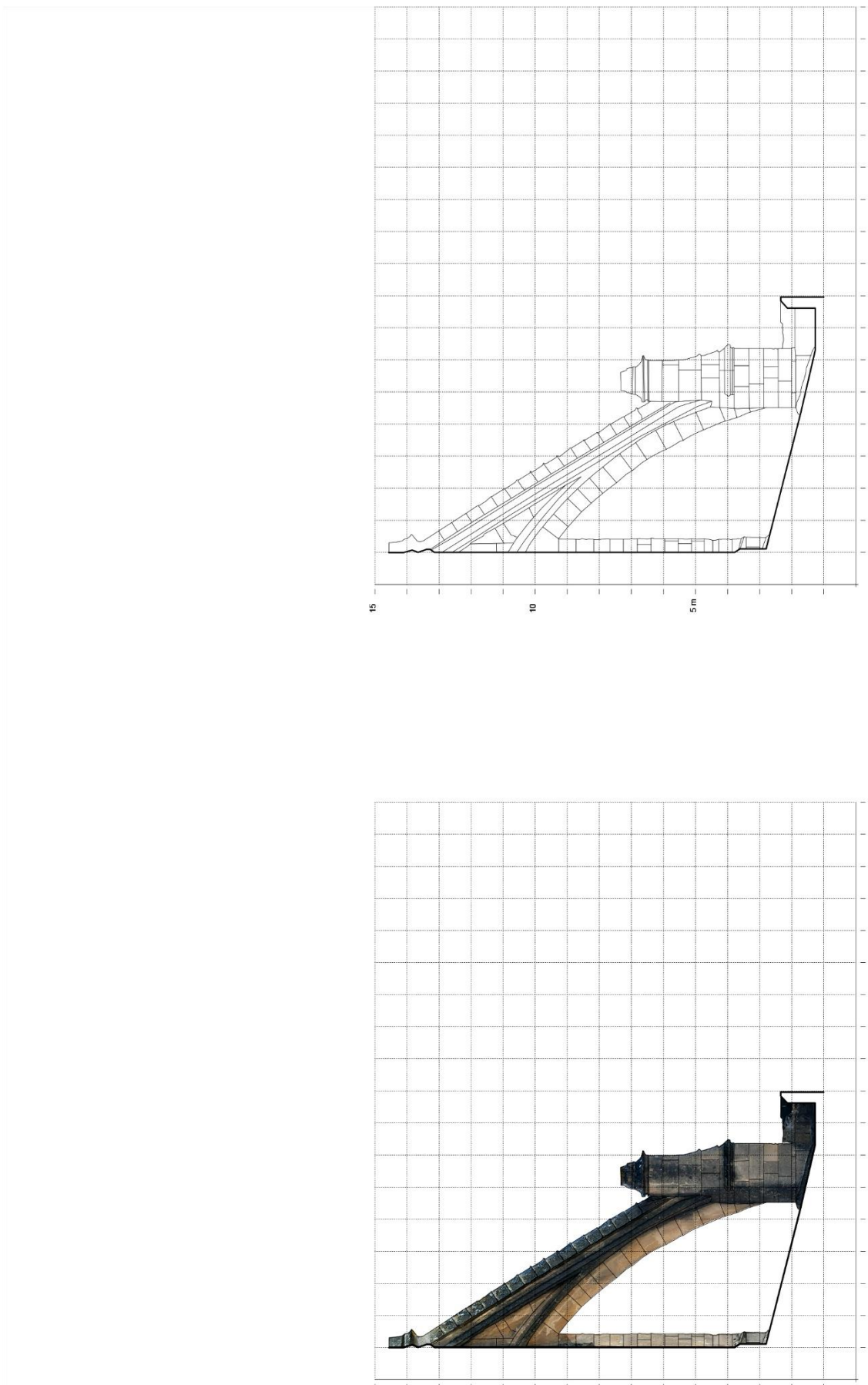




**Figura 27.** Fotografía de los arbotantes de la Catedral de Wells. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 28.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Wells. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.

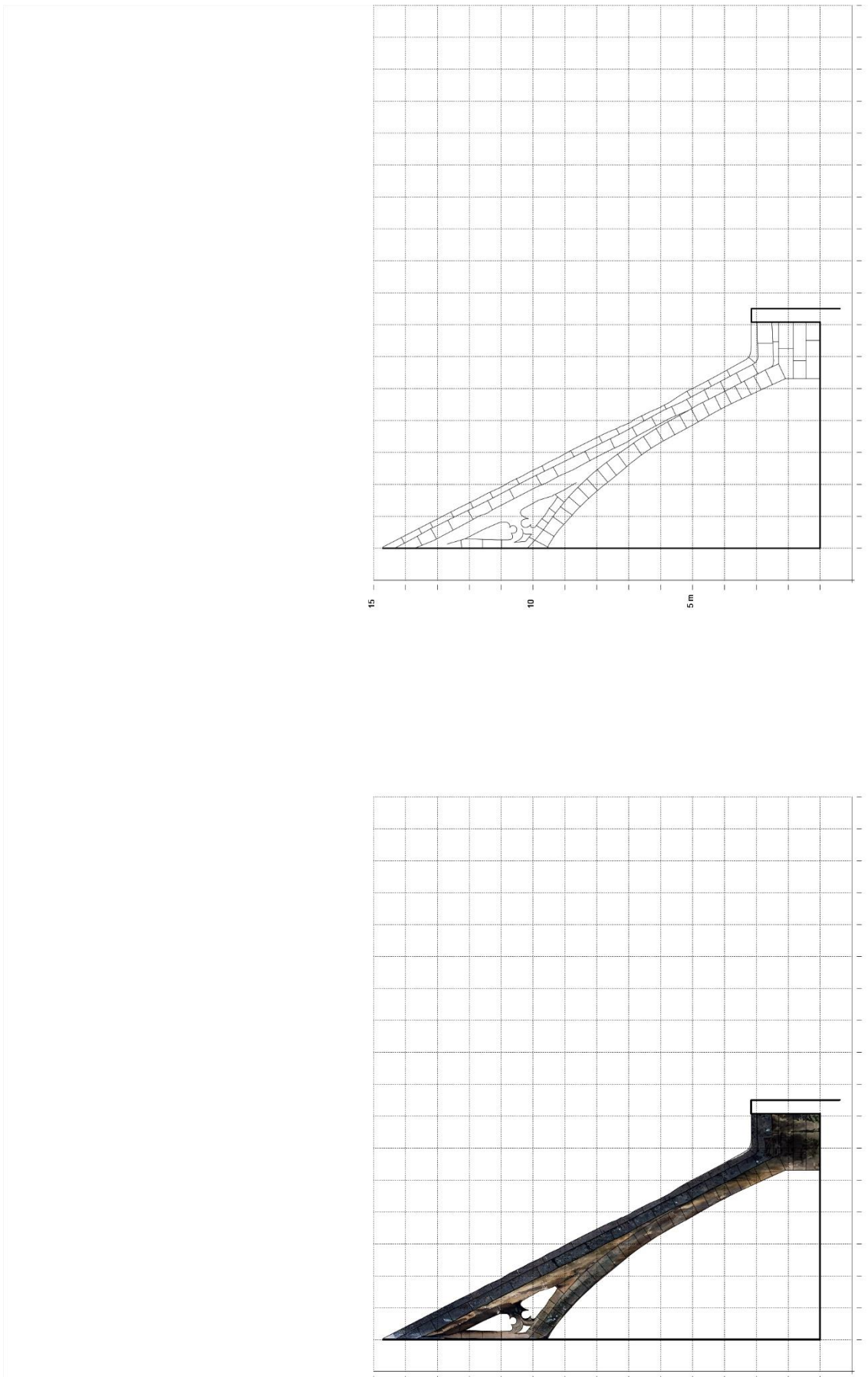




**Figura 29.** Fotografía de los arbotantes de la Abadía de Bath. Fotografía realizada por el autor.

**Figura 30.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, el modelo texturizado resultante del proceso fotogramétrico del arbotante de la Abadía de Bath. A la derecha, se muestra el levantamiento vectorial en CAD del mismo arbotante.

3. Metodología y Resultados: 3.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio.









El lector puede acudir a la publicación que deriva el siguiente capítulo 3.2 escaneando el siguiente código QR y cuyo título es “Systematic calculation of flying buttress parametres by means of geometric regresion”.

### **3.2. Revisión de los parámetros geométricos de los arbotantes**

Es sabido que un arbotante está configurado por los siguientes parámetros: la ubicación del centro  $\mathcal{O}$  y el radio  $\mathcal{R}$  de su arco, la inclinación  $\alpha$ , la flecha  $\mathcal{F}$ , la luz  $\mathcal{L}$  y su espesor  $\mathcal{E}$ . La falta de precisión durante su proceso constructivo, el desgaste con el tiempo, los movimientos sísmicos, las deformaciones estructurales u otros incidentes de distinta naturaleza, son agentes que pueden alterar su morfología haciendo que la determinación de sus parámetros no sea evidente ni válida. Con técnicas fotogramétricas, control de nube de puntos, redibujado vectorial y regresión geométrica, se presenta un proceso objetivo para determinar de forma no arbitraria el centro  $\mathcal{O}$  y el radio  $\mathcal{R}$  del arco de un arbotante; obteniendo de manera directa dos resultados: 1) Determinar de forma no arbitraria el resto de los parámetros  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{E}$ ; 2) Clasificar los arbotantes, en dos tipos, según el criterio que estableció Viollet-le-Duc en 1854.

#### **3.2.1. Conceptos generales**

La construcción de iglesias y catedrales góticas es un tema complejo que ha recibido la atención de numerosos autores en la historia reciente. Apenas existen documentos del periodo gótico que traten cuestiones de diseño, y los pocos existentes datan del periodo gótico tardío (Huerta, 2005). A mediados del siglo XIX, encontramos diversos trabajos desde la disciplina de la historia de la construcción, como las obras de Robert Willis (Willis, 1842) o Auguste Choisy (Choisy, 1899) entre muchos otros, pero será la obra de Violet le Duc (Viollet le Duc, 1854) la primera en plantear una teoría completa sobre la construcción gótica. En el afán por dar continuidad al conocimiento en este ámbito, se presenta este trabajo aplicado a uno de los elementos más representativos de la arquitectura gótica: el arbotante.

Como se ha dicho en la introducción, los trabajos recientes que han tratado de forma monográfica el estudio de arbotantes son muy escasos. Son precursoras del estudio contemporáneo de estos

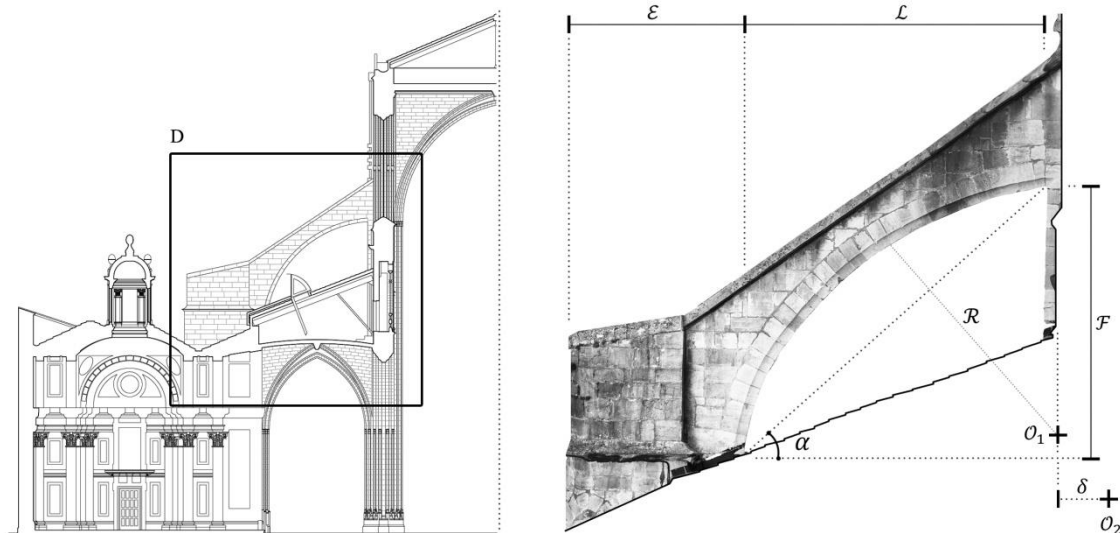
elementos investigaciones como las de Jackes Heyman (Heyman 1966) o Robert Mark (Mark, 1982) que abordan el tema en el contexto de la estabilidad global de los edificios. También John Fitchen estudia la construcción de catedrales góticas, y de forma específica el comportamiento de los arbotantes (Fitchen, 1955-1960). Otros ejemplos más recientes como los de (Roca, 2001) o (Huerta, 2005, 2007) también profundizan el análisis estructural de estos edificios, su diseño y proporciones.

De entre las investigaciones recientes que tratan específicamente la cuestión de los arbotantes, destacan las centradas en temas estructurales, como las de (Tarrío, 2015) o (Quintas, 2017) quien desarrolla una metodología para el análisis de arbotantes a partir de los planteamientos de Heyman. También a partir de los mismos principios, (Nikolinakou, Tallon y Ochsendorf, 2005) desarrolla un método de análisis a partir de líneas de presión, y complementa el análisis estructural con el estudio del trazado geométrico de los arcos inferiores. Posteriormente, (Vellilla et al., 2019) plantea el estudio de los arbotantes desde un punto de vista puramente geométrico, y desarrolla un método para el estudio de arcos con doble curvatura.

Un arbotante está configurado por los siguientes parámetros: la ubicación del centro  $\mathcal{O}$  y el radio  $\mathcal{R}$  de su arco, la inclinación  $\alpha$ , la flecha  $\mathcal{F}$ , la luz  $\mathcal{L}$  y su espesor  $\mathcal{E}$ ; en la Figura 31 se definen gráficamente estos parámetros. Desde un punto de vista geométrico, se muestra que todos estos parámetros quedan determinados a partir del centro  $\mathcal{O}$  y radio  $\mathcal{R}$  de la circunferencia que configura el arco del arbotante. A priori, bastaría con escoger tres puntos aleatorios del borde del arco del arbotante y trazar sus mediatrices para determinar  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{R}$ ; no obstante, pasadas varias centurias tras su construcción, este procedimiento no es tan evidente, ni tampoco válido, como el lector podrá observar a lo largo del presente trabajo. La falta de precisión durante su proceso constructivo, el desgaste con el tiempo, los movimientos sísmicos, las deformaciones estructurales u otros incidentes de distinta naturaleza, pueden hacer que aquel arco de circunferencia que se trazó durante el proceso de diseño no haya mantenido su tipología geométrica, y que la determinación de su centro  $\mathcal{O}$  y su radio  $\mathcal{R}$  sean variables en función de los tres puntos escogidos. De manera similar, la determinación de la inclinación  $\alpha$  de un arbotante también queda sujeta a la elección arbitraria de dos puntos extremos del arco pudiendo generar diferencias significativas en el resultado.

Como se observa en la izquierda de la Figura 32 –solo a modo de ejemplo y de forma exagerada–, la elección arbitraria de dos pares de puntos extremos  $\mathcal{P}_{ab}$  y  $\mathcal{P}_{cd}$  del borde de ambos arcos hacen que la inclinación  $\alpha$  para cada caso quede igualmente definida y calculada de manera arbitraria, a la vez que los parámetros de flecha  $\mathcal{F}$  y luz  $\mathcal{L}$  puesto que son los catetos del triángulo rectángulo de inclinación  $\alpha$ . También observamos, en la derecha de la Figura 32, que trazando las mediatrices de los segmentos determinados por la elección de cualesquiera de las ternas de

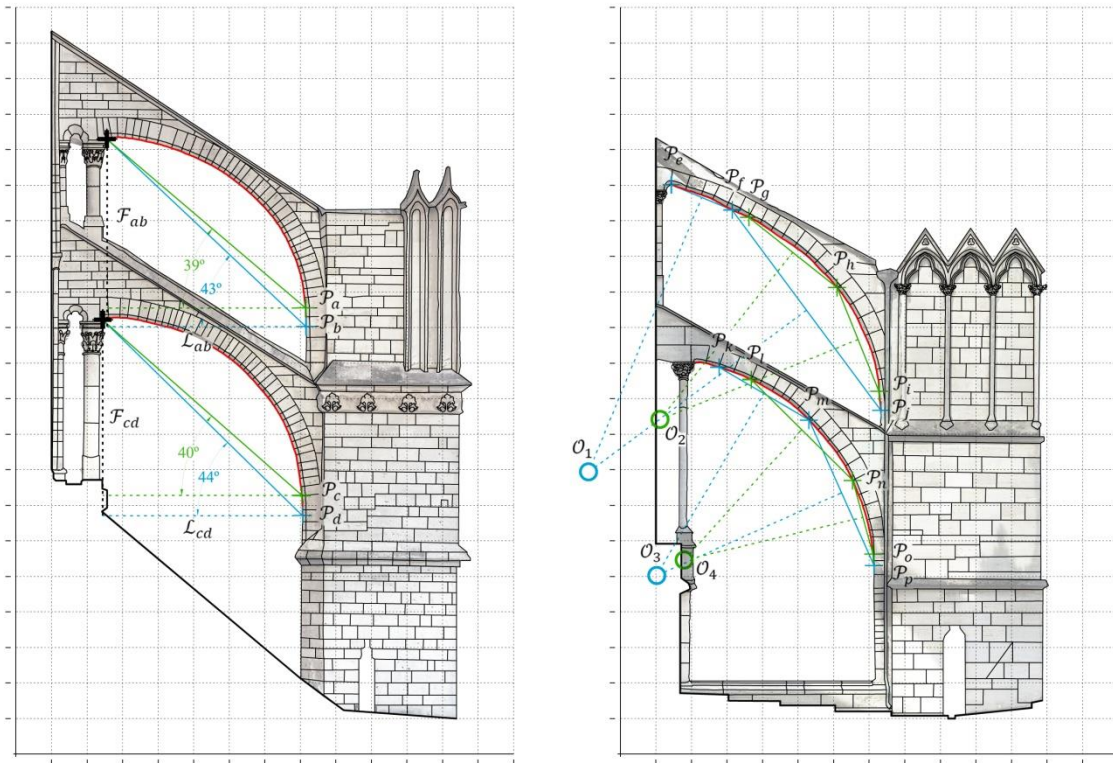
puntos  $\mathcal{P}_{eff}$ ,  $\mathcal{P}_{ghi}$ ,  $\mathcal{P}_{kmp}$  o  $\mathcal{P}_{lno}$  del borde de ambos arcos, se determinan posiciones dispares de los centros  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$  o  $\mathcal{O}_4$ , respectivamente.



**Figura 31.** A la izquierda mostramos una sección transversal de la Catedral de Oviedo y marcamos el detalle D correspondiente al levantamiento fotogramétrico situado a la derecha de la imagen. En este detalle indicamos los parámetros que configuran los arbotantes. La figura muestra el caso O1 correspondiente a que el centro está sobre el muro, y el caso O2 correspondiente a que el centro está en el interior de la catedral. Imagen realizada por el autor.

Esta subjetividad en la determinación de los parámetros del arbotante puede conducir a obtener conclusiones erróneas o imprecisas sobre estos elementos tan característicos del gótico, así como de sus procesos medievales de construcción.

Por todo lo anterior, se presenta aquí una propuesta de cálculo sistemático de parámetros que elimine las arbitrariedades aludidas. La propuesta usa técnicas fotogramétricas, control de nube de puntos, redibujado vectorial y regresión geométrica, y con ella presentamos un proceso objetivo para determinar de forma no arbitraria el centro  $\mathcal{O}$  y el radio  $\mathcal{R}$  del arco de un arbotante. Y de manera directa se obtienen los dos objetivos siguientes: 1) Determinar de forma no arbitraria el resto de los parámetros  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{E}$ ; 2) Clasificar de forma no arbitraria los arcos de arbotantes, en dos tipos, según el criterio que estableció Viollet-le-Duc en 1854 (Viollet le Duc, 1854; Llopis, 2019); A) los arcos de los arbotantes cuyos centros están ubicados en los muros en los cuales se apoyan –caso O1 de la Figura 31– y, B) los que tienen el centro desplazado hacia el interior de la catedral una medida  $\delta$  –caso O2 de Figura 31–.



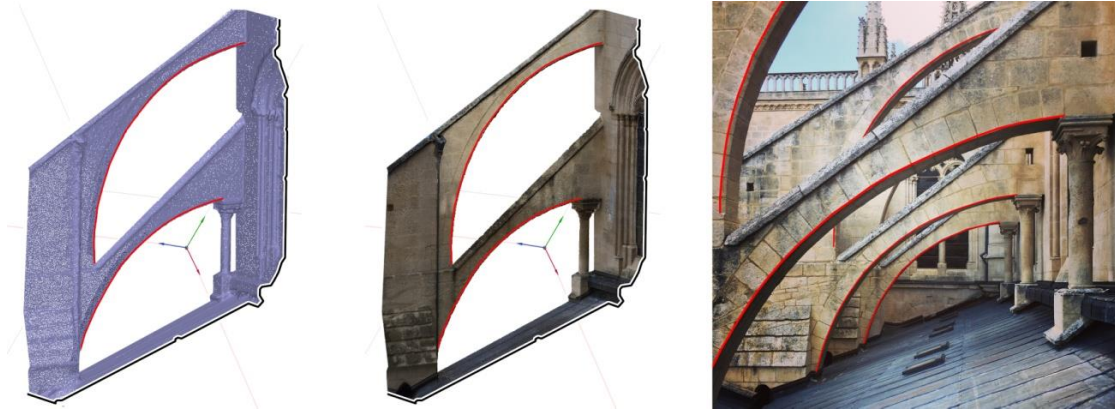
**Figura 32.** A la izquierda, levantamiento de uno de los arbotantes de la Catedral de Amiens. A la derecha, levantamiento de uno de los arbotantes de la Abadía de San Denis. En ambos gráficos se muestran las diferencias de: inclinación  $\alpha$ , flecha  $F$ , luz  $L$  y ubicación de los centros  $O$  de los arcos, en función de la elección de puntos  $P_n$  del borde del arco, la cual se realiza arbitrariamente. Imagen realizada por el autor.

### 3.2.2. Determinación gráfica y geométrica

El proceso propuesto se realiza estructurado en dos fases: la primera de determinación gráfica, y la segunda de regresión geométrica. Y se presenta tal proceso a la vez que se aplica a veinte arcos de doce arbotantes representativos de cinco catedrales góticas españolas, dos catedrales y dos abadías francesas y tres inglesas (Figuras 7-30). Estas doce catedrales son – como ya se ha mostrado en la subsección 3.1: Catedral de Mallorca, Catedral de Burgos, Catedral de León, Catedral de Oviedo, Catedral de Toledo, Catedral de Chartres, Abadía de San Pedro de Chartres, Catedral de Amiens, Abadía de San Denis, Catedral de Salisbury, Catedral de Wells y Abadía de Bath. Como se verá en el análisis, todos los arbotantes estudiados a excepción de los de las catedrales de Oviedo, Salisbury, Wells y Bath, fueron diseñados por dos arcos –uno superior y otro inferior–.

### Proceso gráfico

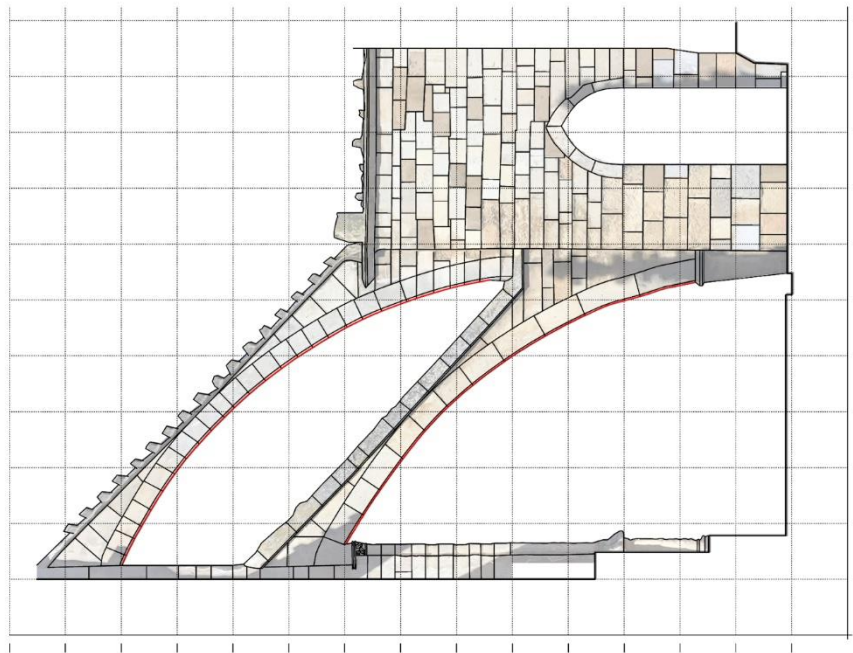
El proceso gráfico aplicado para el modelo bidimensional y tridimensional de cada arbotante es el explicado en la subsección 3.1. No obstante, a continuación, mostramos unos gráficos más detallados y que complementaran la explicación para el propósito de esta subsección 3.2.



**Figura 34.** En esta página se muestran unas vistas del proceso fotogramétrico del arbotante de la Catedral de Burgos. A la izquierda, mostramos la superficie formada por 198.295 caras y que indicamos en la Tabla 1. En el centro, mostramos el modelo texturizado. A la derecha, se marcan en rojo los bordes  $B_{3-4}$  de los arcos de estudio. Imagen realizada por el autor.

**Figura 35.** En la página siguiente se muestran los resultados gráficos de los doce modelos texturizados. A la derecha, ejemplo del levantamiento vectorial aplicado al arbotante de la Catedral de León; en rojo se marca el borde de los arcos de estudio. Imagen realizada por el autor.

3. Metodología y Resultados: 3.2. Revisión de los parámetros geométricos de los arbotantes.



OVIEDO



AMIENS



BATH



LEÓN



SAN PEDRO DE CHARTRES



WELLS



BURGOS



CHARTRES



SALISBURY



MALLORCA



TOLEDO



SAN DENIS

### Proceso geométrico

Para cada uno de los veinte bordes  $\mathcal{B}_{1-20}$  determinados con el proceso anterior, se encuentran las coordenadas  $XY$  (coordenadas  $P_i = (x_i, y_i)$ ) de 10000 puntos  $P_i$  que los configuran; llamamos nube  $\mathcal{N}_{1-20} = \{P_i\}_{i=1}^{i=n}$  al conjunto de tales puntos con  $n = 10000$ . Con la ayuda de una rutina *isp*, llamada EPC, obtenemos en formato TXT un fichero numérico de las coordenadas de los puntos  $P_i$  de las nubes  $\mathcal{N}_{1-20}$ , y se procede al cálculo geométrico de la cónica de regresión  $\gamma$  de cada nube.

El resultado de este cálculo es la curva de ecuación general  $\gamma \equiv Bx^2 + Cy^2 + Dxy + Ex + Fy + 1 = 0$ , la cual es la curva cónica que mejor ajusta a la nube minimizando la suma siguiente de residuos cuadráticos  $\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (Bx_i^2 + Cy_i^2 + Dx_iy_i + Ex_i + Fy_i + 1)^2$ . Es muy bien sabido que la solución del problema del cálculo de  $\gamma$  la ofrecen las ecuaciones normales de Gauss; en concreto, resolviendo el siguiente sistema [1]:

$$[1] \begin{pmatrix} 1_i x_i^4 & x_i^2 y_i^2 & x_i^3 y_i & x_i^3 & x_i^2 y_i \\ x_i^2 y_i^2 & 1_i y_i^4 & x_i y_i^3 & x_i y_i^2 & y_i^3 \\ x_i^3 y_i & x_i y_i^3 & x_i^2 y_i^2 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 \\ x_i^3 & x_i y_i^2 & x_i^2 y_i & 1_i x_i^2 & x_i y_i \\ x_i^2 y_i & y_i^3 & x_i y_i^2 & x_i y_i & 1_i y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_i x_i^2 \\ -1_i y_i^2 \\ -x_i y_i \\ -1_i x_i \\ -1_i y_i \end{pmatrix}$$

En esta ecuación el rango de variación de  $i$  es  $i=1 \div n$  con el convenio de suma de Einstein cuando se repiten subíndices, siendo  $1_i = 1$ . Por ejemplo,  $x_i^2 y_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 y_i$ , y  $1_i y_i^4 = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^4$ . Las curvas de regresión que obtenemos de los bordes  $\mathcal{B}_{1-20}$  son las presentadas en la Tabla 2 y a modo de ejemplo se ilustran dos casos concretos en la Figura 36. Y se computa un programa propio de cálculo para tener el control total de la corrección de los resultados. El lector puede acudir al apartado de anexos para visualizar el código del programa computado.

De hecho, en la Tabla 2, se muestran los parámetros geométricos determinantes de las cónicas  $\gamma$  obtenidas;  $a$  su semieje focal en metros,  $b$  su semieje transversal en metros,  $ex$  su excentricidad, además de su tipo en función de si es elipse no circunferencia, circunferencia, parábola o hipérbola.

A continuación, se calcula en qué medida la cónica  $\gamma$  representa estadísticamente el punto de la nube  $\mathcal{N}$ . Para estos cálculos, se usa la bien conocida ecuación de correlación  $\eta^2$ , ver ecuación [2]:

$$[2] \quad \eta^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \bar{y})^2},$$



donde  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ , y donde  $(x_i, f(x_i))$  son las coordenadas de los puntos que forman la curva de regresión  $\gamma$ . El coeficiente de correlación ajustado  $\eta_{adj}^2$  nos lo ofrece la siguiente ecuación [3]:

$$[3] \quad \eta_{adj}^2 = 1 - [(1 - \eta^2)] \frac{n-1}{n-5-1}$$

Los resultados presentados a continuación se han obtenido programando, en C++, todos los pasos geométricos anteriores con el fin de agilizar y simplificar el proceso de cálculo. El lector puede acudir a los anexos del presente trabajo y ver los respectivos códigos programados para cada acción geométrica.

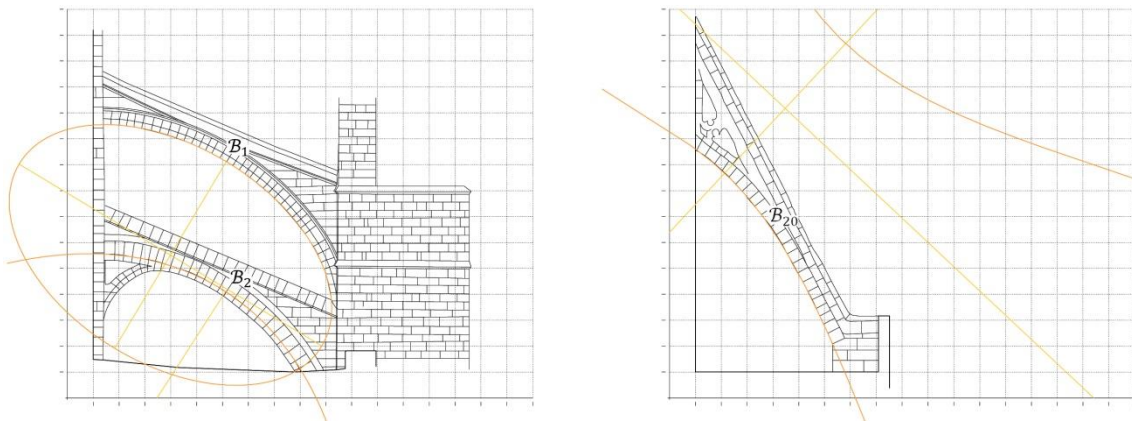
| Nº | Arco                   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>ex</i> | Tipo      | <i>d<sub>γ</sub></i> |
|----|------------------------|----------|----------|-----------|-----------|----------------------|
| 1  | <i>B</i> <sub>1</sub>  | 6.825    | 4.200    | 0.788     | Elipse    | 99.982               |
| 1  | <i>B</i> <sub>2</sub>  | 12.140   | 10.408   | 0.514     | Elipse    | 99.960               |
| 2  | <i>B</i> <sub>3</sub>  | 7.906    | 7.105    | 0.438     | Elipse    | 99.976               |
| 2  | <i>B</i> <sub>4</sub>  | 17.709   | 10.742   | 0.795     | Elipse    | 99.948               |
| 3  | <i>B</i> <sub>5</sub>  | 7.483    | 6.151    | 0.569     | Elipse    | 99.984               |
| 3  | <i>B</i> <sub>6</sub>  | 29.224   | 15.303   | 1.128     | Hipérbola | 99.905               |
| 4  | <i>B</i> <sub>7</sub>  | 5.575    | 3.890    | 0.716     | Elipse    | 99.936               |
| 5  | <i>B</i> <sub>8</sub>  | 8.769    | 6.499    | 0.671     | Elipse    | 99.944               |
| 5  | <i>B</i> <sub>9</sub>  | 20.073   | 11.992   | 1.164     | Hipérbola | 99.877               |
| 6  | <i>B</i> <sub>10</sub> | 308.819  | 39.702   | 1.008     | Elipse    | 99.893               |
| 6  | <i>B</i> <sub>11</sub> | 5.854    | 5.411    | 0.381     | Elipse    | 99.898               |
| 7  | <i>B</i> <sub>12</sub> | 50.159   | 15.420   | 0.951     | Elipse    | 99.983               |
| 7  | <i>B</i> <sub>13</sub> | 5.496    | 4.010    | 0.683     | Elipse    | 99.958               |
| 8  | <i>B</i> <sub>14</sub> | 5.199    | 4.275    | 0.569     | Elipse    | 99.947               |
| 8  | <i>B</i> <sub>15</sub> | 6.173    | 5.569    | 0.431     | Elipse    | 99.950               |
| 9  | <i>B</i> <sub>16</sub> | 442.325  | 48.488   | 0.993     | Elipse    | 99.930               |
| 9  | <i>B</i> <sub>17</sub> | 5.931    | 5.749    | 0.245     | Elipse    | 99.960               |
| 10 | <i>B</i> <sub>18</sub> | 6.799    | 2.675    | 0.919     | Elipse    | 99.753               |
| 11 | <i>B</i> <sub>19</sub> | 247.103  | 53.595   | 4.718     | Hipérbola | 99.577               |
| 12 | <i>B</i> <sub>20</sub> | 3.421    | 6.219    | 2.074     | Hipérbola | 99.523               |

**Tabla 2.** Parámetros de las cónicas de regresión de los bordes *B*<sub>1-20</sub>.

Es conocido que  $\eta_{adj}^2 \in [0,1]$ , y el valor  $\eta_{adj}^2 * 100 = d_\gamma$  es la media en las que las variables  $\{y_i\}_{i=1}^{i=n}$  de la nube  $\mathcal{N} = \{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^{i=n}$  se explican estadísticamente por la correlación de los mínimos cuadrados entre  $\{y_i\}_{i=1}^{i=n}$  y  $\{x_i\}_{i=1}^{i=n}$ . En otras palabras, este valor  $d_\gamma$  es el porcentaje en que las

variables  $\{y_i\}_{i=1}^{i=n}$  de los puntos que forman la nube  $\mathcal{N}$  son estadísticamente explicadas por las variables  $y$  de los puntos que forman la cónica  $\gamma$ . Es decir,  $d_\gamma$  es una medida estadística de cuánto de bien  $\gamma$  se ajusta a la nube  $\mathcal{N}$ . En la Tabla 2, mostramos los valores de  $d_\gamma$  para cada nube  $\mathcal{N}_{1-20}$ .

Los resultados geométricos y estadísticos que se han obtenido confirman que los diferentes agentes naturales, mecánicos y de ejecución, comentados en la introducción, han condicionado que las curvas que mejor se ajustan a los bordes  $\mathcal{B}_{1-20}$  no son arcos de circunferencia; en contra de lo que se esperaría, dado que estos arcos fueron diseñados geoméricamente como circunferencias.



**Figura 36.** A la izquierda, mostramos las cónicas de regresión de los bordes  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  correspondientes a los arcos del arbotante de la Catedral de Mallorca. A la derecha, mostramos la cónica de regresión del borde  $\mathcal{B}_{20}$  correspondiente al arco del arbotante de la Abadía de Bath. Imagen realizada por el autor.

Dado que las curvas de regresión que se obtienen no son arcos de circunferencia, y como consecuencia no hay forma objetiva de elegir tres puntos para trazar las mediatrices y determinar el centro  $\mathcal{O}$  y radio  $\mathcal{R}$ , se usa la circunferencia de regresión la cual sí nos aportará un procedimiento objetivo. Así, a continuación, se procede al cálculo geométrico de las circunferencias de regresión de las nubes  $\mathcal{N}_{1-20}$ .

Para determinar la circunferencia de regresión  $\theta$  de cada una de las nubes  $\mathcal{N}_{1-20}$ , se buscan los coeficientes de la ecuación  $\theta \equiv Bx^2 + By^2 + Ex + Fy + 1 = 0$ , la cual es la circunferencia que mejor ajusta a la nube minimizando la suma siguiente de residuos cuadráticos  $\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (Bx_i^2 + By_i^2 + Ex_i + Fy_i + 1)^2$ . Es muy bien sabido que la solución del problema del cálculo de  $\theta$  la ofrecen las ecuaciones normales de Gauss; en concreto, resolviendo el siguiente sistema [4]:

$$[4] \begin{pmatrix} 1_i(x_i^2 + y_i^2)^2 & x_i(x_i^2 + y_i^2) & y_i(x_i^2 + y_i^2) \\ x_i(x_i^2 + y_i^2) & 1_i x_i^2 & x_i y_i \\ y_i(x_i^2 + y_i^2) & x_i y_i & 1_i y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_i(x_i^2 + y_i^2) \\ -1_i x_i \\ -1_i y_i \end{pmatrix}$$

Aquí, de nuevo, se confecciona un programa propio de cálculo para tener el control total de la corrección de los resultados.

### 3.2.3. Resultados de la subsección 3.2

A continuación, se presenta gráficamente en la Figura 37 las circunferencias de regresión de los bordes  $B_{1-20}$ , fijando así los parámetros de centro  $O$  y radio  $R$  de los veinte arcos que configuran los doce arbotantes de estudio. Como consecuencia de lo anterior y midiendo el parámetro  $\delta$  (Figura 31) se pueden clasificar rigurosamente en función de los tipos, A o B, establecidos por el criterio de Viollet-le-Duc en 1854; ver Tabla 3.

También, con el centro  $O$  y radio  $R$  determinados anteriormente se puede obtener de manera objetiva la inclinación  $\alpha$  del arbotante uniendo los dos puntos resultantes de la intersección entre la circunferencia de regresión con las dos líneas ortogonales (horizontal y vertical) que contienen los dos puntos extremos del borde del arco. Esta inclinación  $\alpha$  nos permite determinar los parámetros de luz  $L$  y flecha  $F$  respectivamente. Ejecutando este proceso se encuentran los parámetros  $\alpha$ ,  $L$  y  $F$  para cada arco de arbotante y se presentan –en metros los parámetros lineales, y en grados sexagesimales la amplitud de  $\alpha$ – en la Tabla 3.

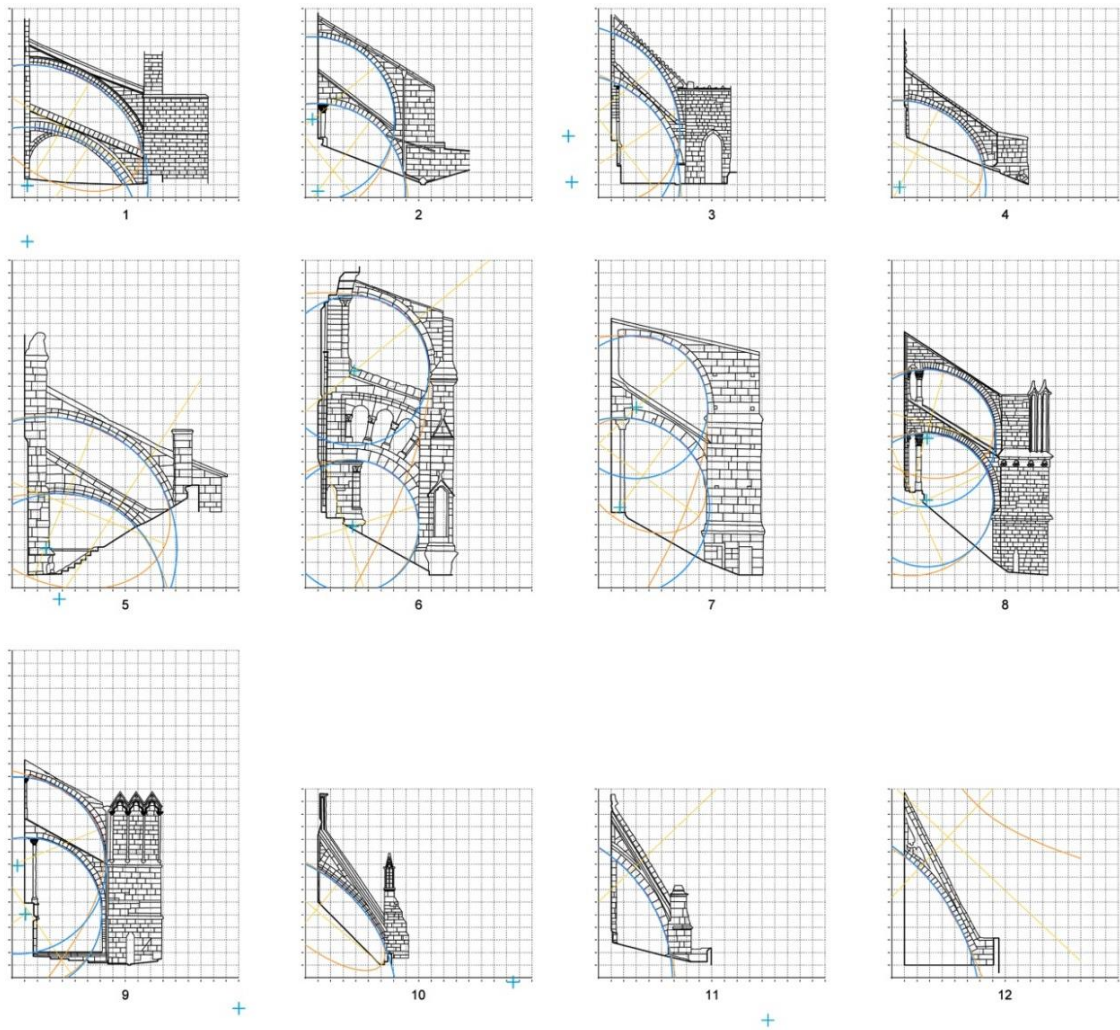
En cuanto a cómo determinar el espesor  $\varepsilon$  de los estribos, existen numerosas referencias bibliográficas históricas donde se describen reglas aritméticas y geométricas para conseguirlo. Para el estudio se utilizará la conocida como regla del tercio, cuya definición fue popularizada por autores como Derand, Blondel, o el propio Violet le Duc (Derand, 1643; Blondel, 1675; Violet le Duc, 1854).

Así, para determinar el espesor  $\varepsilon$  mínimo del estribo de un arco arquitectónico se procedió a partir de la construcción de un hexágono inscrito en la circunferencia que genera el arco. Usando este proceso y aplicándolo a los arcos de circunferencia de regresión determinados anteriormente para todos los arbotantes analizados, se observa:

- 1) Que los espesores mínimos  $\varepsilon_{1-17}$  determinados por el método de los tres puntos en los arbotantes de las catedrales españolas y francesas se ajustan bastante a la realidad o son inferiores a los construidos; es decir, que el espesor real  $\varepsilon$  está sobredimensionado mecánicamente al espesor mínimo determinado

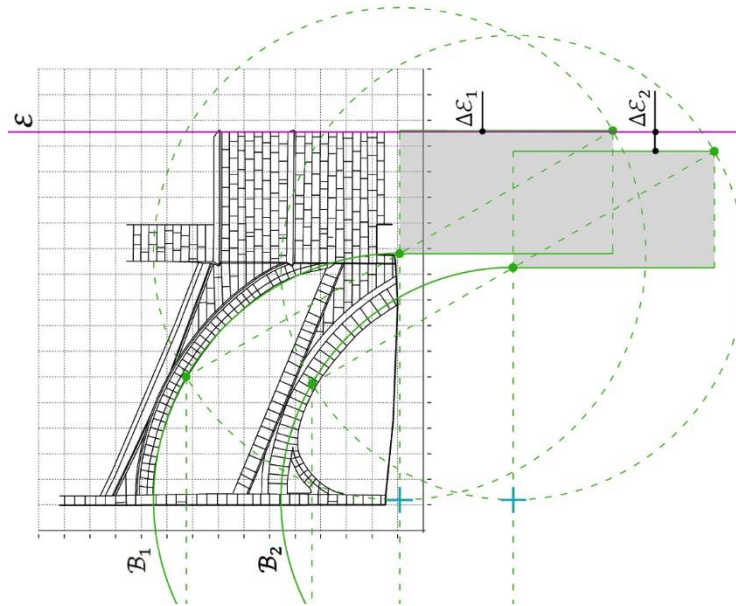
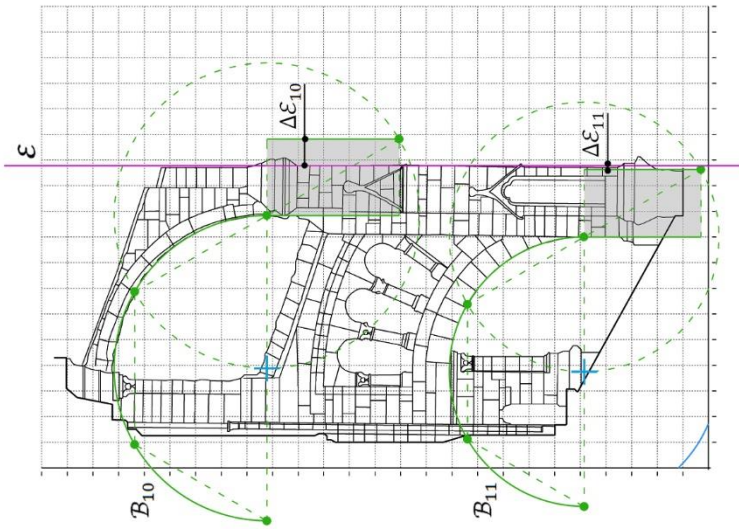
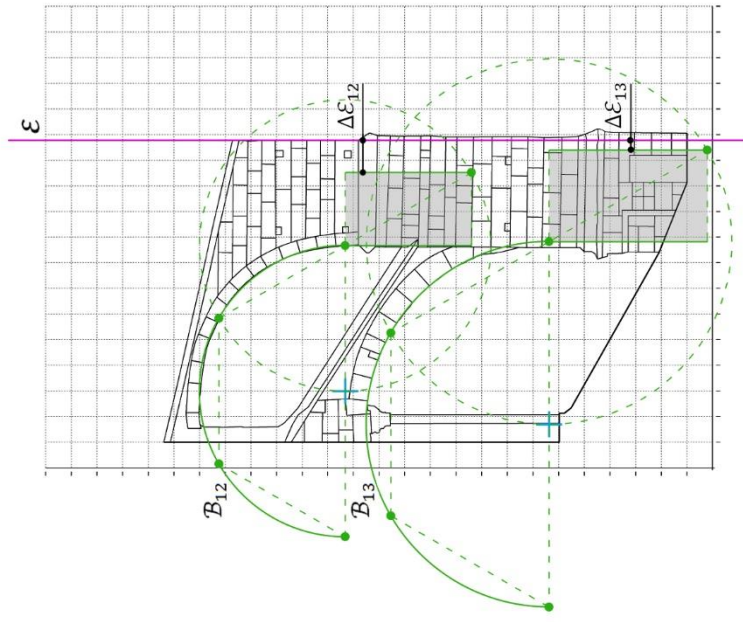
geoméricamente por el método de los tres puntos. Calculando la diferencia entre estos dos tipos de espesores (el real y el de los tres puntos), se observa que esta diferencia es de 33 centímetros de media, siendo la mínima diferencia de 1.5 centímetros para el caso del arco inferior del arbotante de la Catedral de Burgos ( $\Delta\mathcal{E}_4$ ) y la máxima de 1.25 metros para el caso del arco superior del arbotante de la abadía de San Pedro de Chartres ( $\Delta\mathcal{E}_{12}$ ). Son los arcos de diferencias  $\Delta\mathcal{E}_{12}$ ,  $\Delta\mathcal{E}_{14}$ ,  $\Delta\mathcal{E}_{15}$  y  $\Delta\mathcal{E}_{17}$ , los que se ajustan poco al espesor determinado por el proceso Le Duc, pero en todo ellos es inferior al tamaño del espesor  $\mathcal{E}$  real del contrafuerte; ver Figura 38 y Tabla 3.

- 2) Que los espesores mínimos  $\mathcal{E}_{18-20}$  de los tres arbotantes de las catedrales inglesas dados por el proceso Le Duc no resultan ser menores que los reales.



**Figura 37.** Resultados gráficos del cálculo de regresión para los bordes  $B_{1-20}$ . En línea de color azul se muestra un fragmento de arco de la circunferencia de regresión y su centro  $O$  con una cruz azul. En color naranja se muestra la cónica de regresión y en amarillo sus ejes. Imagen realizada por el autor.

**Figura 38.** En la página siguiente se muestra en color verde el método de los tres puntos aplicado a algunos arcos considerados en este estudio. A la izquierda, arbotante de la Catedral de Mallorca. En el centro, arbotante de la Catedral de Chartres. A la derecha, arbotante de la Abadía de San Pedro de Chartres. Imagen realizada por el autor.



| Nº | Arco     | O | $\delta$ | $\mathcal{R}$ | $\alpha$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{L}$ | $\mathcal{E}$ | $\Delta\mathcal{E}$ |
|----|----------|---|----------|---------------|----------|---------------|---------------|---------------|---------------------|
| 1  | $B_1$    | A | 0.199    | 9.600         | 35.589°  | 6.319         | 8.830         | 4.800         | -0.054              |
| 1  | $B_2$    | A | 0.199    | 9.058         | 30.764°  | 4.527         | 7.607         | 4.528         | 0.758               |
| 2  | $B_3$    | A | 0.426    | 6.545         | 49.468°  | 7.128         | 6.097         | 3.272         | -0.133              |
| 2  | $B_4$    | A | 0.008    | 6.966         | 45.200°  | 6.155         | 6.112         | 3.483         | 0.015               |
| 3  | $B_5$    | B | 3.399    | 8.892         | 52.195°  | 6.557         | 5.087         | 4.446         | -0.412              |
| 3  | $B_6$    | B | 3.136    | 8.585         | 52.943°  | 4.685         | 6.205         | 4.292         | -0.223              |
| 4  | $B_7$    | A | 0.372    | 6.863         | 39.306°  | 4.770         | 5.827         | 3.432         | -0.069              |
| 5  | $B_8$    | A | 1.415    | 10.404        | 35.425°  | 6.965         | 9.792         | 5.202         | -0.898              |
| 5  | $B_9$    | A | 1.650    | 8.387         | 20.136°  | 2.526         | 6.890         | 4.193         | 0.305               |
| 6  | $B_{10}$ | A | 2.629    | 5.954         | 42.057°  | 5.464         | 6.057         | 2.977         | -0.735              |
| 6  | $B_{11}$ | A | 2.473    | 5.257         | 47.789°  | 4.894         | 4.439         | 2.634         | 0.080               |
| 7  | $B_{12}$ | A | 1.991    | 5.682         | 38.595°  | 5.603         | 7.021         | 2.838         | 1.258               |
| 7  | $B_{13}$ | A | 0.694    | 7.128         | 39.909°  | 5.314         | 6.354         | 3.564         | 0.385               |
| 8  | $B_{14}$ | A | 1.808    | 5.441         | 38.138°  | 4.387         | 5.587         | 2.720         | 1.502               |
| 8  | $B_{15}$ | A | 1.759    | 5.309         | 45.270°  | 5.568         | 5.516         | 2.654         | 1.665               |
| 9  | $B_{16}$ | A | 0.578    | 7.030         | 43.772°  | 5.647         | 5.895         | 3.515         | 0.855               |
| 9  | $B_{17}$ | A | 0.067    | 6.075         | 49.239°  | 5.859         | 5.050         | 3.036         | 1.659               |
| 10 | $B_{18}$ | B | 6.277    | 12.605        | 48.854°  | 5.816         | 5.081         | 1.919         | -0.086              |
| 11 | $B_{19}$ | B | 7.789    | 12.675        | 58.209°  | 6.600         | 4.091         | 1.918         | 0.510               |
| 12 | $B_{20}$ | B | 10.854   | 16.980        | 55.947°  | 7.855         | 5.308         | 2.585         | 0.088               |

**Tabla 3.** Parámetros de los doce arbotantes estudiados obtenidos mediante el proceso de regresión geométrica.

Desde un punto de vista estadístico, dado un conjunto de parámetros  $C = \{p_i\}_{i=1}^{i=n}$  es bien conocido su Coeficiente de Variación de Pearson,  $CV$ , como  $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ , donde  $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_i}{n}$  es la media de  $C$  y  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (p_i - \mu)^2}{n}}$  es su desviación típica. Se dice comúnmente en los análisis estadísticos que un conjunto de parámetros  $C$ , por ejemplo, los parámetros  $\alpha$  y  $\mathcal{E}$  que se presentan en la Tabla 4, es conjunto concentrado y poco disperso si su media es representativa; y se suele afirmar que es representativa cuando, en tanto por ciento, su  $CV$  es inferior al 25%.

Entonces, a modo de pequeña observación se hace el siguiente comentario: Aplicando los cálculos de  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $CV$  para los conjuntos de los ángulos  $\alpha$  y de los espesores  $\mathcal{E}$ , se observa que sus  $CV$  son inferiores al 25%, ver Tabla 4. Concretamente el  $CV_\alpha = 20.40\%$  y el  $CV_\mathcal{E} = 24.50\%$ ; por lo tanto, se puede llegar a decir que se tiene cierta representatividad, no muy pronunciada, de la media y que se trata de dos conjuntos poco dispersos. Además, si se excluyen del análisis estadístico los parámetros  $\alpha$  y  $\mathcal{E}$  de los tres arbotantes de las catedrales inglesas, obtenemos

que las medias son un poco más representativas con valores un poco más concentrados;  $CV_\alpha = 19.70\%$  y el  $CV_\varepsilon = 21.60\%$ .

|                      | $\mu$    |               | $\sigma$ |               | $CV$     |               |
|----------------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|
|                      | $\alpha$ | $\varepsilon$ | $\alpha$ | $\varepsilon$ | $\alpha$ | $\varepsilon$ |
| $\mathcal{B}_{1-20}$ | 43.440   | 3.400         | 8.885    | 0.904         | 0.204    | 0.245         |
| $\mathcal{B}_{1-17}$ | 41.034   | 3.659         | 8.096    | 0.793         | 0.197    | 0.216         |

**Tabla 4.** Cálculos de los parámetros estadísticos  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $CV$  para los conjuntos de ángulos  $\alpha$  y espesores  $\varepsilon$ . En la fila  $\mathcal{B}_{1-20}$  se consideran los parámetros de todos los arcos que configuran todos los arbotantes estudiados, y en la fila  $\mathcal{B}_{1-17}$  se consideran únicamente los arcos que configuran los arbotantes españoles y franceses.

### 3.2.4. Conclusiones parciales de la subsección 3.2

En este estudio se muestra una propuesta de cálculo sistemático, mediante regresión geométrica por circunferencia de los puntos que configuran el borde  $\mathcal{B}_n$  de un arco de un arbotante. Con ello, se puede establecer un método geométrico objetivo para determinar su centro  $\mathcal{O}$  y su radio  $\mathcal{R}$ . El motivo, como se ha visto, es que los métodos tradicionales están sujetos a arbitrariedad pudiendo ofrecer resultados muy dispares.

Como una de las consecuencias directas, este procedimiento geométrico que se muestra nos permite clasificar rigurosamente los arcos de los arbotantes según el criterio que estableció Viollet-le-Duc en 1854. A lo largo del trabajo se ha mostrado la técnica propuesta aplicándola a veinte arcos de doce arbotantes góticos; de los cuáles, los tres de las catedrales inglesas: Salisbury, Wells y Bath son de tipo B.

Además, el resto de los parámetros que configuran un arbotante: inclinación  $\alpha$ , flecha  $\mathcal{F}$ , y luz  $\mathcal{L}$ , también son aportados de manera no arbitraria por el proceso propuesto, ya que están directamente determinados geoméricamente por el centro y el radio del arco que configura el arbotante.

En cuanto al parámetro de espesor  $\varepsilon$ , se ha aplicado el método de los tres puntos para determinar el espesor mínimo y hemos observado que en los arbotantes de las catedrales españolas y francesas se ajusta bastante al espesor real o son inferiores a los construidos.

En conclusión, la falta de precisión o el error de construcción, el desgaste con el tiempo, los movimientos sísmicos, las deformaciones estructurales u otros incidentes de distinta naturaleza,



son agentes que pueden alterar el arco de un arbotante. Por consiguiente, la investigación desarrollada define una metodología ágil, objetiva y precisa para la parametrización de las principales características formales y dimensionales de arbotantes de un solo centro. El método abre la puerta a futuras investigaciones, en las que se pueda abordar el estudio sistemático y riguroso de arbotante.



El lector puede acudir a la publicación que deriva el siguiente capítulo 3.3 escaneando el siguiente código QR y cuyo título es “On the inclination of a flying buttress arch”.

### **3.3. Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante**

La determinación de la inclinación de un arco que configura un arbotante es conocida históricamente como la amplitud del ángulo resultante entre la recta que une los dos extremos del borde inferior del arco con una recta horizontal. Pero esta inclinación no representa a todo el arbotante, correspondería, si acaso, solo a la inclinación del borde inferior del arco. Por consiguiente, con técnicas basadas en criterios geométricos y mecánicos, aplicadas a veinte arcos que configuran doce arbotantes de diferentes catedrales góticas de Europa, se presenta una nueva propuesta de definición de inclinación, que representa a todo el arco del arbotante.

#### **3.3.1. Conceptos generales**

Existen varios autores que tratan de desvelar el origen de los arbotantes (Lefevre-Pontalis 1919; Prache, 1976; Henriet, 1978 y 1982; Stanley, 2006). Además de los anteriores autores, se destaca a Viollet-Le-Duc (Viollet-Le-Duc, 1996) y a Auguste Choisy (Choisy, 1899) que a lo largo del siglo XIX trataron de explicar la aparición de los primeros arbotantes con la finalidad de reforzar la estructura de la abadía de Vézelay, construida en el año 1138. Ambos autores coincidieron en señalar que, con el paso de los años, la estructura de la abadía se deformó progresivamente como consecuencia de la elevada posición de las bóvedas de la nave central. Los autores plantearon dos hipótesis similares sobre cómo actuaron los constructores del momento para contrarrestar los empujes de la nave central y evitar el colapso del edificio. Ambos autores concluyeron que los constructores de esa época debieron consolidar y apuntalar la estructura mediante arcos inclinados de piedra; aunque Choisy señaló que estos elementos de sujeción fueron inicialmente puntales inclinados de madera (Choisy, 1899).

Los puntales, y su inclinación, son los elementos que permitieron contrarrestar los empujes horizontales y liberar las tensiones. Los arbotantes o los puntales de piedra, como los nombra

Antonio de Blas Orive (Blas Orive, 2019), son los elementos estructurales que desempeñan estas acciones en las catedrales góticas.

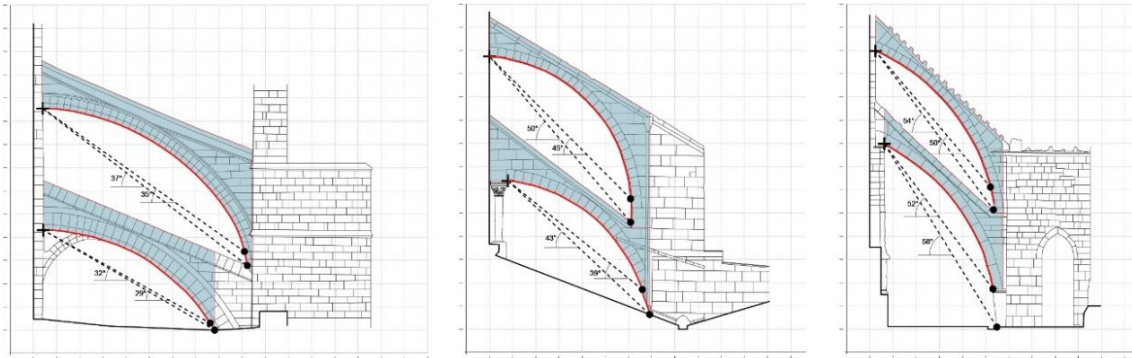
La determinación de la inclinación  $\alpha$  de un arco que configura un arbotante es conocida históricamente como la amplitud del ángulo resultante de unir los dos extremos del borde inferior del arco con una recta horizontal (Nikolinakou et al., 2005). Es razonable pensar que este procedimiento se semeja originalmente a la determinación de la inclinación de un puntal recto donde basta en determinar la inclinación de su eje respecto a una recta horizontal. Se observa que tal definición de la inclinación de un arco de un arbotante no es precisa por tres motivos:

- a) La determinación de dos puntos de un borde inferior de un arco de un arbotante es un proceso arbitrario y subjetivo, lo cual conlleva a que el resultado angular pueda alterarse en función de esta elección, ver Figura 32 y 39.
- b) El desgaste con el tiempo, los movimientos sísmicos, las deformaciones estructurales u otros incidentes de distinta naturaleza, pueden hacer que el borde del arco no conserve su naturaleza geométrica ni su aspecto inicial complicando aún más la determinación de su inclinación.
- c) El valor de la inclinación de todo un arco de arbotante no debería resultar únicamente de su borde inferior; además, en ocasiones encontramos que este borde está adornado con una ornamentación haciendo que este ángulo represente aún menos a todo el conjunto estructural del arco.

Como se observará a lo largo del presente trabajo, los dos primeros problemas pueden tener una solución objetiva vía la geometría (se usará regresión geométrica y el lector puede acudir a la anterior sección para clarificar algunos conceptos), pero el tercero no a causa de que la inclinación resultante de solo el borde inferior de un arco de un arbotante no podrá representar la inclinación de todo el conjunto del arco. Especialmente, es por este último motivo que en este trabajo se presentará una nueva propuesta definición de la inclinación de un arco que configura un arbotante teniendo en cuenta, en esencia, toda su forma y su comportamiento mecánico a través de la estática gráfica.

Esta nueva propuesta de concepto de inclinación se ha aplicado, nuevamente, sobre los 20 arcos de arbotantes que se encuentran en las 12 catedrales góticas integradas en la presente tesis: en España, las catedrales de Mallorca, Burgos, León, Oviedo y Toledo; en Francia, la catedral de Chartres, la abadía de San Pedro de Chartres, la catedral de Amiens y la abadía de San Denis; y finalmente, en Inglaterra, las catedrales de Salisbury, Wells y Bath; ver Figura 41. Así, este trabajo ofrece un procedimiento riguroso y objetivo para determinar la inclinación de un arco de

un arbotante mediante procesos de estática gráfica considerando todo el arco que configura el arbotante y no únicamente su borde inferior.



**Figura 39.** Ejemplo de determinación subjetiva de la inclinación de algunos arcos que configuran los arbotantes de la Catedral de Mallorca, Burgos y León. En rojo y en sombreado gris se marcan, respectivamente: los bordes inferiores  $B_{1-2}$  y las regiones de los arcos de los arbotantes  $R_{1-2}$  de la Catedral de Mallorca, los bordes inferiores  $B_{3-4}$  y las regiones de los arcos de los arbotantes  $R_{3-4}$  de la Catedral de Burgos, y los bordes inferiores  $B_{5-6}$  y las regiones de los arcos de los arbotantes  $R_{5-6}$  de la Catedral de León. Imagen realizada por el autor.

### 3.3.2. Determinación geométrica

En la siguiente sección se empezará presentando un proceso geométrico de regresión por circunferencia que ofrece una solución objetiva al problema a) aludido anteriormente sobre la arbitrariedad existente de escoger dos puntos extremos del borde inferior que configura el arco del arbotante para determinar su inclinación de manera clásica (Figura 39). Además, y como el lector podrá observar en la subsección 3.3.2.1, este procedimiento permite determinar la inclinación aun considerando que distintos agentes hayan podido alterar la morfología y naturaleza geométrica del borde del arco, o sea que resolverá también el problema b).

A pesar de que se ofrecerá un mecanismo geométrico para determinar la inclinación de un arco de un arbotante según el criterio clásico, se puede observar (como ya se ha indicado antes) que este parámetro no representa a todo el elemento estructural, solo tiene relación con su borde inferior. Decir que el ángulo resultante es la inclinación de todo un arbotante es conceptualmente desmesurado. Es por ello por lo que en la subsección 3.3.2.2, se presentará un nuevo procedimiento y definición de inclinación que considera todo el arco que configura un arbotante y su función estructural mediante los conceptos de la estática gráfica.

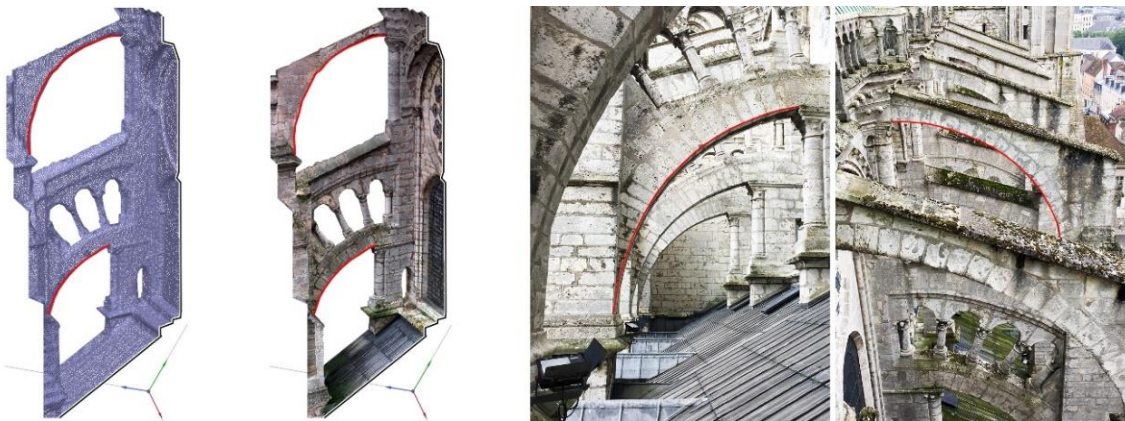
Como se ha dicho inicialmente, estos procedimientos mencionados los hemos aplicado a 20 arcos de arbotante reales con diversidad geográfica. Tras una visita a los doce escenarios y

fotografiar cada uno de los detalles de cada arbotante, hemos procedido a realizar un modelo gráfico mediante técnicas fotogramétricas y el software Agisoft PhotoScan Professional, ver Figura 40 y 41. El lector puede acudir a la sección 3.1 para ver en detalle cada elemento.

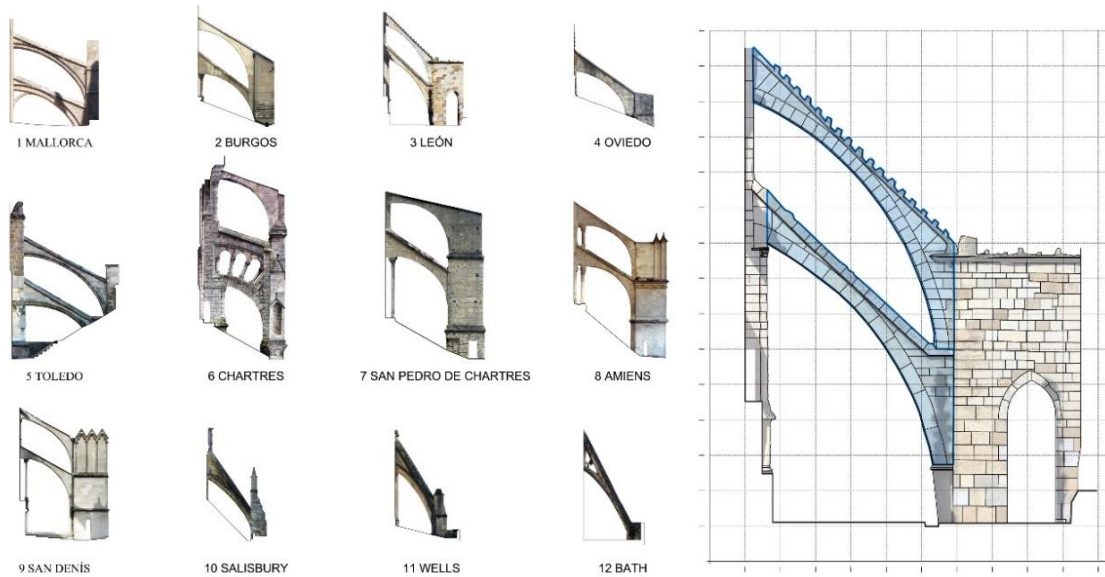
Con el modelo gráfico resultante, hemos podido obtener una proyección frontal de cada elemento en formato TIFF (Figura 41), el cual nos ha permitido realizar con detalle un dibujo lineal en formato vectorial CAD.

Estos resultados gráficos ofrecen la siguiente información geométrica y arquitectónica:

- a) Una curva o borde que perfila cada uno de los arcos que configuran los arbotantes. A estos bordes se les llamará  $\mathcal{B}_i$ , donde  $i$  va del 1 o al 20; a modo de ejemplo, se muestra en color rojo en la Figura 39 y Figura 40.
- b) Un fragmento o región que delimita cada uno de los arcos de arbotante con los que se van a hacer los cálculos en el estudio de estática gráfica. A estas regiones se les llamará  $R_i$ , donde  $i$  va del 1 o al 20; a modo de ejemplo, se muestran sombreadas en color azul algunas de ellas en la Figura 39 y Figura 41.



**Figura 40.** A la izquierda, se muestran dos imágenes resultantes del proceso de modelado fotogramétrico. A la derecha, dos fotografías que ilustran las dos partes arqueadas que configuran este arbotante. En rojo se marcan los bordes  $\mathcal{B}_{10-11}$  de los arcos de estudio, correspondientes a la Catedral de Chartres. Imagen realizada por el autor.



**Figura 41.** A la izquierda, doce gráficos resultantes del proceso de modelado fotogramétrico. A la derecha, ejemplo de una proyección frontal, en formato vectorial y con textura, del arbotante de la Catedral de León; en azul se marcan las regiones  $R_{5-6}$  de los dos arcos de este arbotante. Imagen realizada por el autor.

### 3.3.2.1. Determinación objetiva de la inclinación de un arco de arbotante según criterios clásicos

Para cada uno de los veinte bordes inferiores  $\mathcal{B}_{1-20}$  determinados con el proceso gráfico anteriormente mencionado, se encuentran coordenadas  $XY$  (coordenadas  $P_i = (x_i, y_i)$ ) de 10000 puntos  $P_i$  que los configuran; llamaremos nube  $\mathcal{N}_{1-20} = \{P_i\}_{i=1}^{i=n}$  al conjunto de tales puntos con  $n = 10000$ . Con la ayuda de una rutina *lisp*, llamada EPC, se obtienen en formato TXT un fichero numérico de las coordenadas de los puntos  $P_i$  de las nubes  $\mathcal{N}_{1-20}$ , y se procede al cálculo geométrico de la circunferencia de regresión  $\gamma$  de cada nube.

Para determinar la circunferencia de regresión  $\theta_{1-20}$  de cada una de las nubes  $\mathcal{N}_{1-20}$ , se buscan los coeficientes de la ecuación  $\theta \equiv Bx^2 + By^2 + Ex + Fy + 1 = 0$ , la cual es la circunferencia que mejor ajusta a la nube minimizando la suma siguiente de residuos cuadráticos  $\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (Bx_i^2 + By_i^2 + Ex_i + Fy_i + 1)^2$ . Es bien sabido que la solución del problema del cálculo de  $\theta$  la ofrecen las ecuaciones normales de Gauss; en concreto, resolviendo el siguiente sistema [5]:

$$[5] \begin{pmatrix} 1_i(x_i^2 + y_i^2)^2 & x_i(x_i^2 + y_i^2) & y_i(x_i^2 + y_i^2) \\ x_i(x_i^2 + y_i^2) & 1_i x_i^2 & x_i y_i \\ y_i(x_i^2 + y_i^2) & x_i y_i & 1_i y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_i(x_i^2 + y_i^2) \\ -1_i x_i \\ -1_i y_i \end{pmatrix}$$

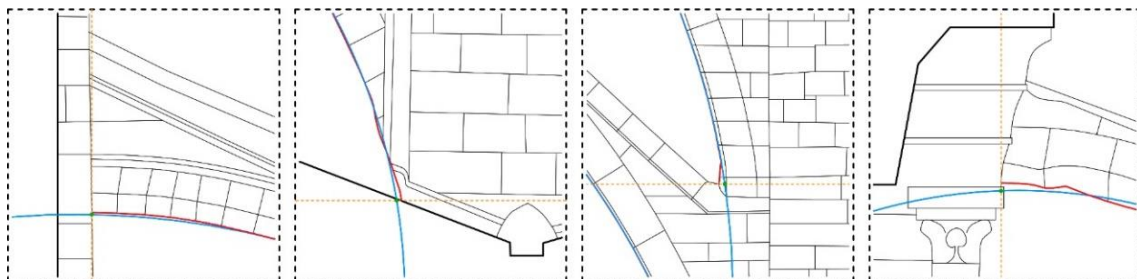
En esta ecuación el rango de variación de  $i$  es  $i=1 \div n$  con el convenio de suma cuando se repiten subíndices, siendo  $1_i = 1$ . Por ejemplo,  $x_i y_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$ , y  $1_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2$ . Para tener un mejor

control de la corrección de los resultados e integrarlos al mismo programa CAD, se ha realizado nuevamente un programa propio de cálculo que el lector puede visualizar en el apartado de anexos.

A continuación, se presentan gráficamente en la Figura 42 y 43 las circunferencias de regresión de los bordes  $B_j$  con  $j$  variando  $j=1\div 20$ , fijando así los parámetros de los centros  $O_j$  y radios  $r_j$  de los veinte arcos que configuran los doce arbotantes de estudio. Seguidamente, se determina el ángulo  $\alpha_j$  mediante la inclinación de la recta que pasa por los dos puntos extremos que vienen determinados según la siguiente explicación:

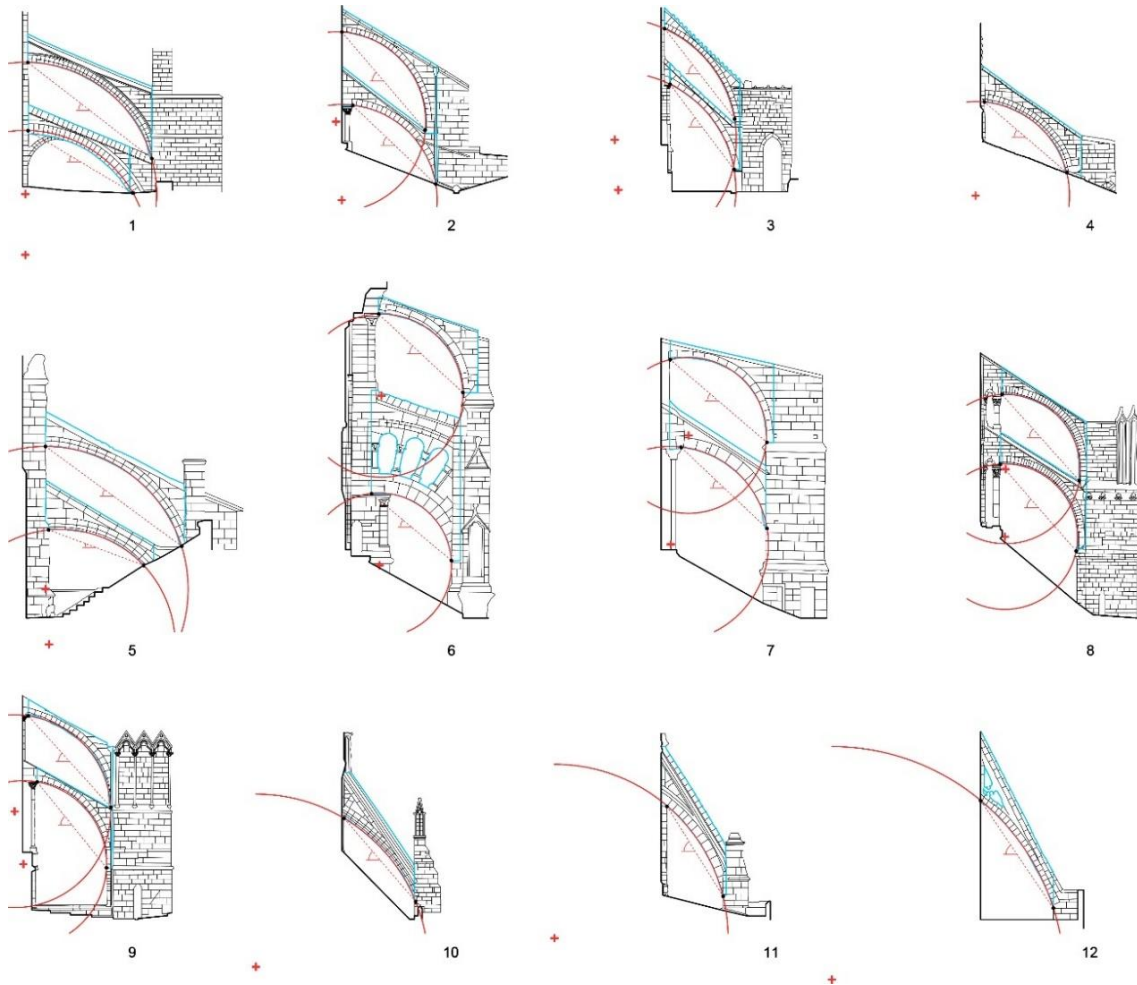
Cuando el punto extremo es el resultado de la intersección entre la circunferencia de regresión y la recta horizontal o vertical que pasa por cada extremo del borde analizado. En la siguiente Figura 43 el lector podrá observar, con detalle, una muestra gráfica de lo anterior aplicado a diferentes casos de estudio.

El valor del radio  $r_j$  de cada una de las circunferencias de regresión y el valor angular  $\alpha_j$  de la inclinación del arco de arbotante según el criterio clásico, extraído de forma objetiva con el método que se acaba de presentar de regresión por circunferencia, se presenta en la Tabla 5.



**Figura 42.** Detalles de los extremos de los bordes  $B_1$ ,  $B_4$ ,  $B_5$  y  $B_{10}$ . En color verde se marca el punto extremo determinado de cada arbotante. En color naranja y línea discontinua se marcan las líneas horizontales y verticales que pasan por los extremos del borde analizado. Imagen realizada por el autor.

Los resultados presentados a continuación se han obtenido programando, en C++, todos los pasos geométricos anteriores con el fin de agilizar y simplificar el proceso de cálculo. El lector puede acudir a los anexos del presente trabajo y ver los respectivos códigos programados para cada acción geométrica.



**Figura 43.** Resultados de regresión por circunferencia para los bordes  $B_{1-20}$ . La numeración de cada arbotante va enlazada a los números que aparecen a lo largo del presente trabajo. En color rojo se muestra un fragmento de arco de la circunferencia de regresión y su centro  $O$ . En línea punteada y color rojo se marca la inclinación  $\alpha$  de cada arbotante. En color azul se marcan las regiones de los arbotantes  $R_{1-20}$  analizadas en la subsección 3.3.2.2. Imagen realizada por el autor.

### **3.3.2.2. Determinación objetiva de la inclinación de un arco de arbotante según criterios mecánicos a través de la estática gráfica**

Como se indicó inicialmente, el parámetro  $\alpha$  únicamente representa al borde inferior del arco del arbotante y no a todo el elemento estructural. Es por ello por lo que a continuación se presenta otro procedimiento y definición de inclinación que considera toda la geometría del arco del arbotante, y su función, vía procesos de estática gráfica. Estos procedimientos son bien conocidos y se pueden encontrar múltiples ejemplos en la bibliografía especializada (Heyman, 1969 y 1995; Moya, 2011). No obstante, quisiera aclarar que, para la determinación de las líneas de máximo y mínimo empuje de cada uno de los arcos de arbotante presentados, se ha considerado como pauta los análisis de Ungewitter y Mohrmann (Ungewitter, 1890) teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

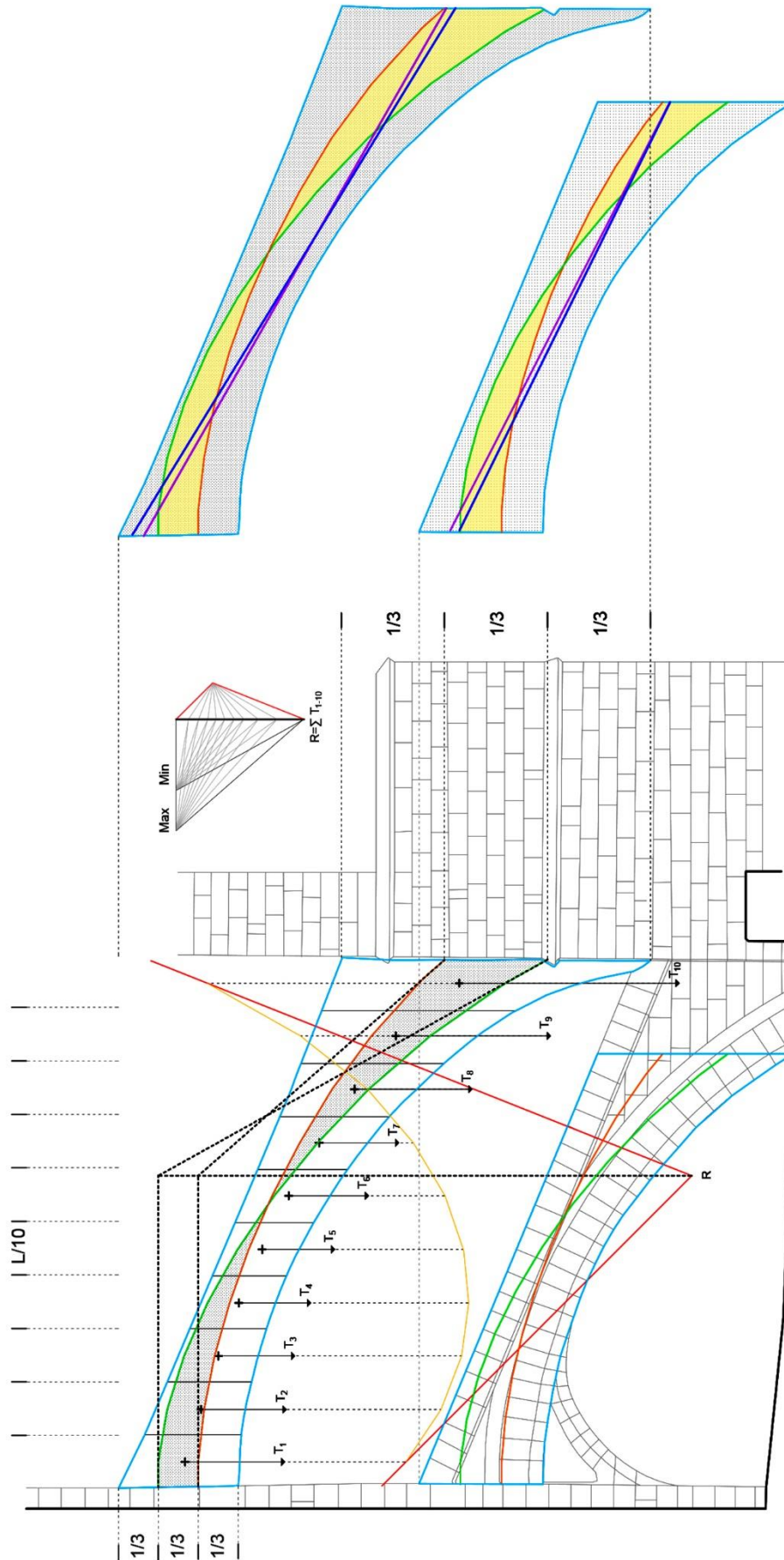


- a) Que las dovelas del arbotante tienen ilimitada resistencia a compresión.
- b) Que los empujes que recibe el arco de arbotante son principalmente horizontales.
- c) Que la línea de máximo empuje –trazada en color naranja– parte del tercio inferior del canto izquierdo del arco de arbotante y que su resultante pasa por el tercio superior del canto derecho del arco de arbotante, ver Figura 44.

Que la línea de mínimo empuje –trazada en color verde– parte del tercio superior del canto izquierdo del arco de arbotante y que su resultante pasa por el tercio inferior del canto derecho del arco de arbotante, ver Figura 44.

**Figura 44.** En la página siguiente se muestra el resultado del proceso de estática gráfica aplicado a las dos regiones  $R_1$  (superior) y  $R_2$  (inferior) del arbotante de la Catedral de Mallorca. En color verde se marca la línea de mínimo empuje. En color naranja se marca la línea de máximo empuje. En color amarillo se marcan las nubes  $I_1$  y  $I_2$  de puntos que delimitan las dos líneas de máximo y mínimo empuje. En color azul oscuro se marcan las rectas de regresión  $\rho_1$  y  $\rho_2$  de las nubes  $I_1$  y  $I_2$ . En color lila se marcan las rectas de regresión  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  de toda la nube de puntos que contiene cada una de las regiones  $R_1$  y  $R_2$  del arbotante. Imagen realizada por el autor.

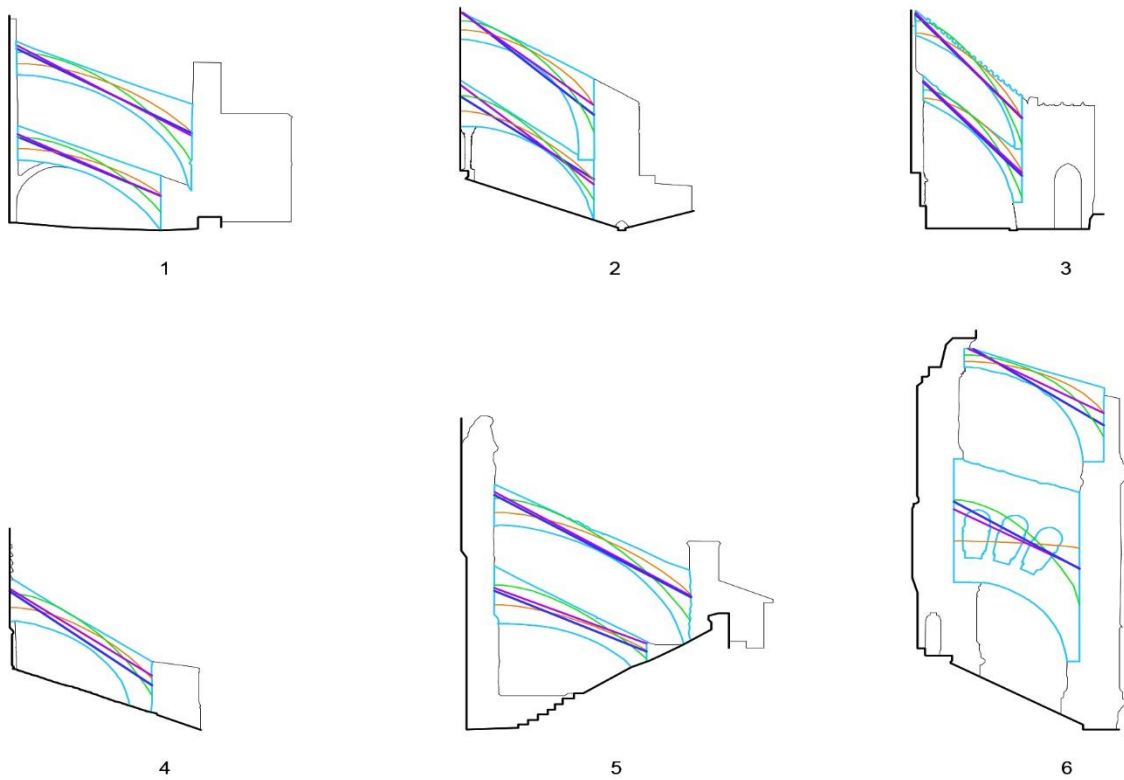
3. Metodología y Resultados: 3.3. Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante.



En la Figura 45 y 46 se presentan las líneas de máximo y mínimo empuje para las 20 regiones  $R_j$  analizadas. A continuación, y para cada caso de estudio, se define una nube homogénea de puntos  $I_j$  delimitada por las dos líneas de empuje y la línea de contorno de su región. En la Figura 44 y a modo de ejemplo, se marcan en color amarillo las nubes de puntos  $I_1$  y  $I_2$ . Esta nube de puntos  $I_j$  permite calcular y trazar su recta de regresión  $\rho_j$  cuya inclinación  $\beta_j$  determinará la propuesta que se presenta de inclinación de arco de arbotante considerando su geometría y su función mecánica. En la Figura 45 y 46, se muestran en color azul oscuro la recta de regresión  $\rho_j$  para cada  $I_j$  de cada arco de arbotante y en la Tabla 5 se muestran sus medidas angulares  $\beta_j$ . En la subsección siguiente se hacen unos breves comentarios sobre los resultados obtenidos.

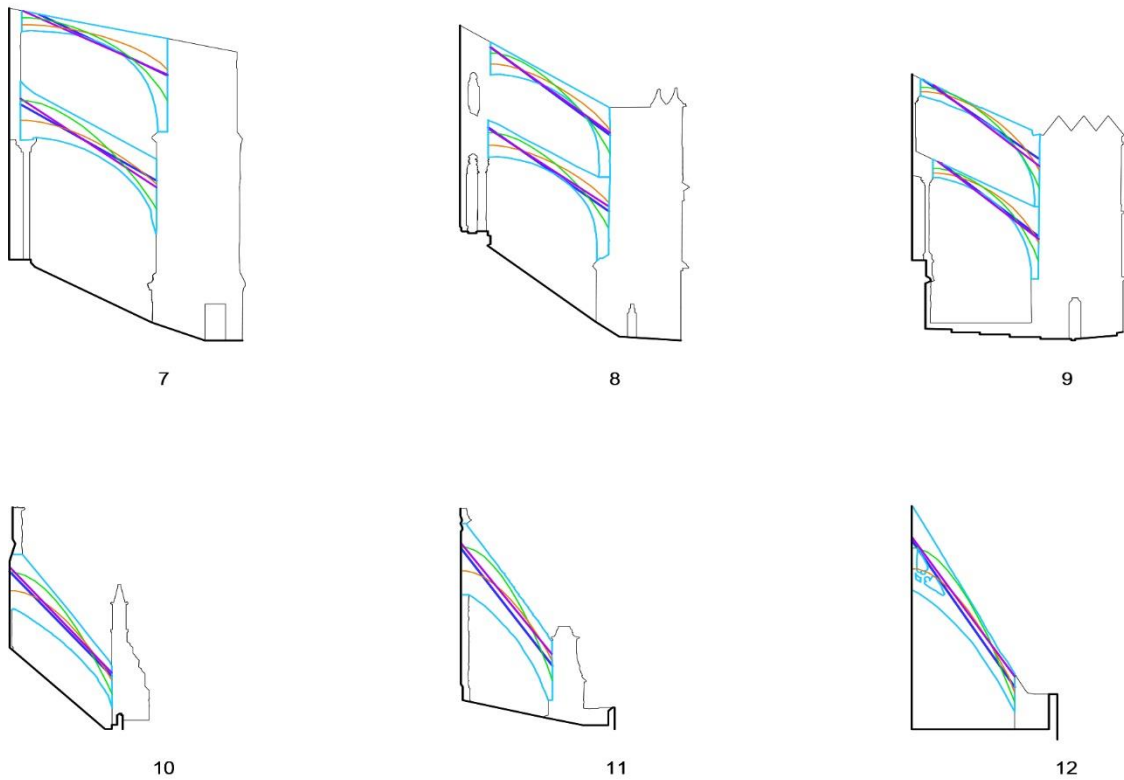
Para poder validar la bondad de los resultados obtenidos en los modelos de estática gráfica descritos anteriormente e ilustrados en las Figuras 45 y 46, se ha analizado cada arbotante mediante modelos de elementos finitos (MEF) (Oñate, 1995). Para este análisis se ha utilizado el software Autodesk Robot Structural Analysis Professional. En estos modelos se ha considerado cada arbotante como un elemento laminar de espesor constante y material homogéneo. El elemento laminar se ha discretizado en elementos finitos de tres y cuatro nodos. Para la discretización se ha utilizado una malla de 30x30cm, algo más densa en las zonas con geometría más compleja. Se ha impuesto una coacción de los desplazamientos en los bordes extremos del arbotante. La coacción al desplazamiento vertical se ha definido mediante un apoyo elástico de rigidez variable en altura, aproximada a la variación de rigidez axil del contrafuerte a lo largo de la altura del arbotante. La coacción al desplazamiento horizontal se ha ajustado a aquella que permite encontrar un comportamiento en el que no se producen tracciones relevantes. Es decir, se ha liberado esta coacción en las zonas donde aparecían tracciones. Para esto se han tenido que hacer algunas iteraciones en el análisis con diferentes coacciones hasta encontrar un modelo de equilibrio sin tracciones relevantes.

Los resultados obtenidos, e ilustrados en las Figuras 47 y 48, permiten mostrar las líneas isostáticas del modelo de fuerzas en las direcciones principales de los elementos. Estas líneas representan las direcciones del flujo de las fuerzas de compresión en cada arbotante.



**Figura 45.** Resultado del proceso de estática gráfica aplicado a todas las regiones  $I_{1-6}$  de los arcos de arbotante estudiados. Usamos el mismo código de colores que en el caso concreto mostrado en la Figura 44 y la misma numeración que en la Figura 43. Imagen realizada por el autor.

Si se comparan los gráficos de líneas isostáticas de cada arbotante con los polígonos funiculares obtenidos mediante estática gráfica, se puede observar que las trayectorias son sensiblemente parecidas; y como consecuencia validar los resultados obtenidos con procedimientos de estática gráfica.

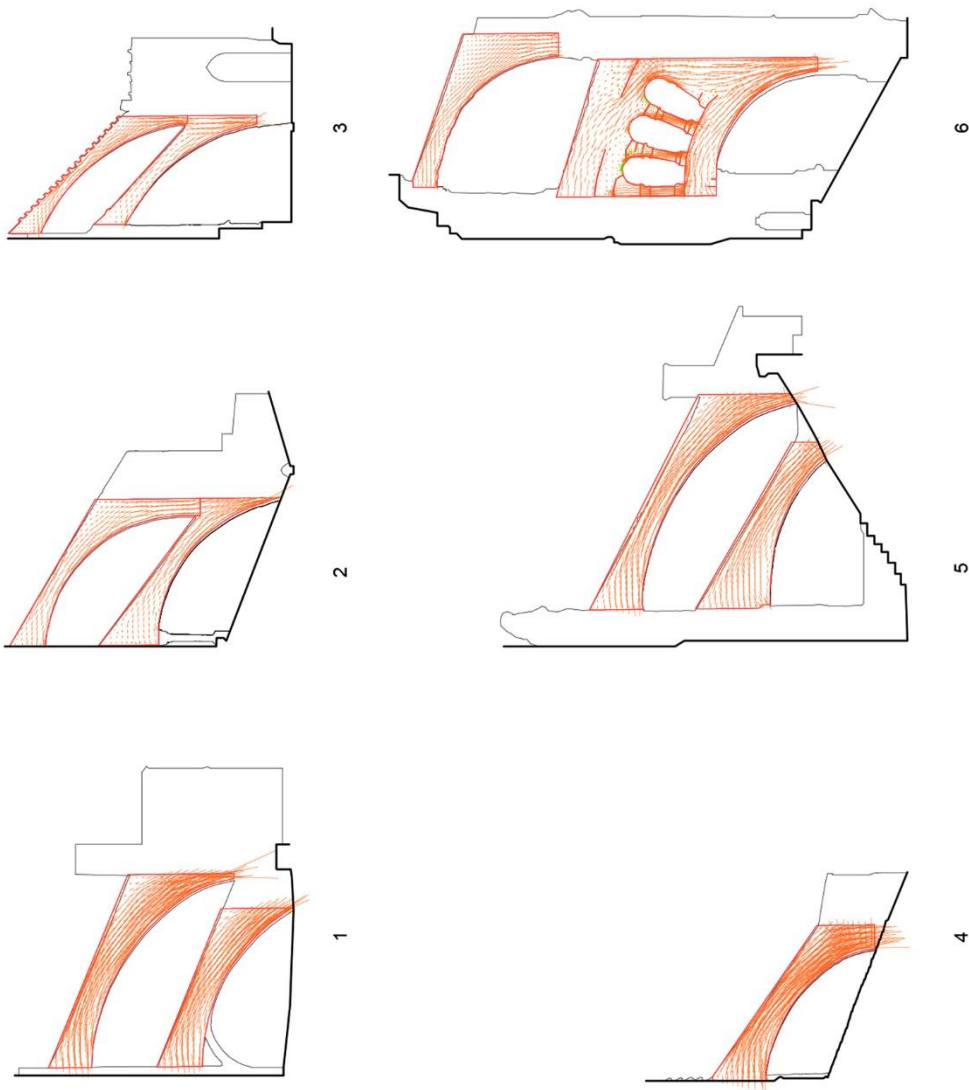
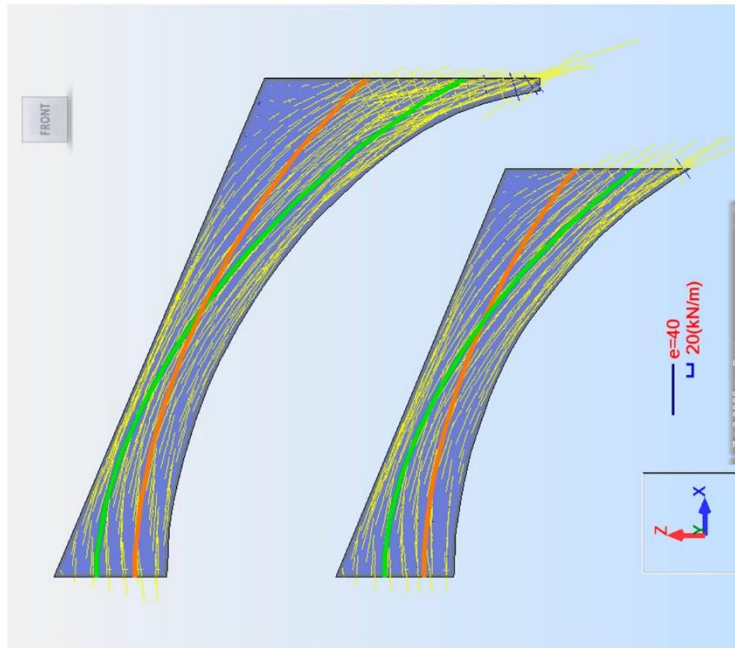


**Figura 46.** Resultado del proceso de estática gráfica aplicado a todas las regiones  $I_{1-6}$  de los arcos de arbotante estudiados. Usamos el mismo código de colores que en el caso concreto mostrado en la Figura 44 y la misma numeración que en la Figura 43. Imagen realizada por el autor.

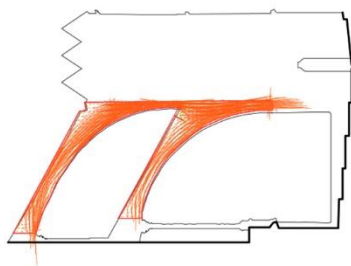
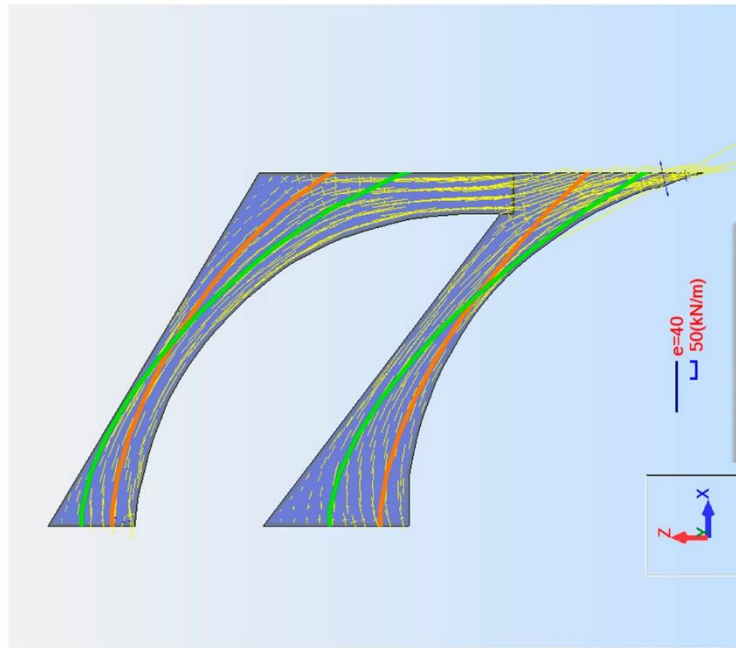
**Figura 47.** En la página siguiente se muestran los resultados gráficos de los modelos de elementos finitos aplicados a los primeros seis arbotantes de estudio. A la derecha, detalle del modelo para el arbotante de la Catedral de Mallorca: en color amarillo las líneas isostáticas calculadas con el software Autodesk Robot Structural Analysis Professional, en color naranja la línea de máximo empuje y en color verde la línea de mínimo empuje calculadas mecánicamente con los procesos gráficos. Imagen realizada por el autor.

**Figura 48.** En la página 118 se muestran los resultados gráficos de los modelos de elementos finitos aplicados a los últimos seis arbotantes de estudio. A la derecha, detalle del modelo para el arbotante de la Catedral de Burgos usando el mismo código de colores que en la Figura 47. Imagen realizada por el autor.

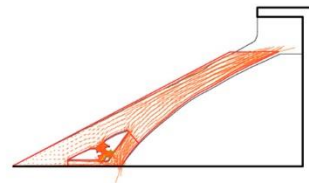
3. Metodología y Resultados: 3.3. Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante.



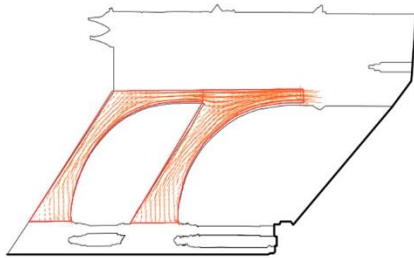
3. Metodología y Resultados: 3.3. Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante.



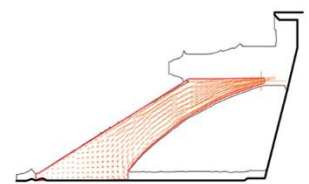
9



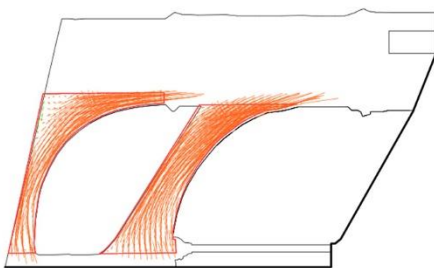
12



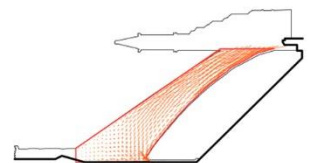
8



11



7



10

## 3.3.3. Resultados de la subsección 3.3

| Catedral /<br>Abadía | Borde    | Región   | $r$   | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|----------------------|----------|----------|-------|----------|---------|----------|
| Mallorca             | $B_1$    | $R_1$    | 9.60  | 35.6°    | 31.5°   | 29.9°    |
|                      | $B_2$    | $R_2$    | 9.05  | 30.8°    | 27.2°   | 26.2°    |
| Burgos               | $B_3$    | $R_3$    | 6.54  | 49.5°    | 39.6°   | 42.8°    |
|                      | $B_4$    | $R_4$    | 6.96  | 45.2°    | 41.5°   | 36.4°    |
| León                 | $B_5$    | $R_5$    | 8.89  | 52.2°    | 49.7°   | 49.1°    |
|                      | $B_6$    | $R_6$    | 8.58  | 52.9°    | 47.9°   | 48.4°    |
| Oviedo               | $B_7$    | $R_7$    | 6.86  | 39.3°    | 36.1°   | 38.2°    |
| Toledo               | $B_8$    | $R_8$    | 10.4  | 35.4°    | 32.1°   | 31.7°    |
|                      | $B_9$    | $R_9$    | 8.39  | 20.1°    | 23.3°   | 25.4°    |
| Chartres             | $B_{10}$ | $R_{10}$ | 5.95  | 42.1°    | 29.5°   | 34.7°    |
|                      | $B_{11}$ | $R_{11}$ | 5.25  | 47.8°    | 29.1°   | 32.3°    |
| San Pedro            | $B_{12}$ | $R_{12}$ | 5.68  | 38.6°    | 27.6°   | 29.5°    |
| Chartres             | $B_{13}$ | $R_{13}$ | 7.12  | 39.9°    | 37.8°   | 33.8°    |
| Amiens               | $B_{14}$ | $R_{14}$ | 5.44  | 38.1°    | 40.2°   | 41.3°    |
|                      | $B_{15}$ | $R_{15}$ | 5.31  | 45.3°    | 37.5°   | 39.7°    |
| San Denis            | $B_{16}$ | $R_{16}$ | 7.03  | 43.8°    | 42.4°   | 39.1°    |
|                      | $B_{17}$ | $R_{17}$ | 6.07  | 49.2°    | 42.4°   | 41.8°    |
| Salisbury            | $B_{18}$ | $R_{18}$ | 12.60 | 48.8°    | 50.9°   | 50.5°    |
| Wells                | $B_{19}$ | $R_{19}$ | 12.67 | 58.2°    | 55.3°   | 56.7°    |
| Bath                 | $B_{20}$ | $R_{20}$ | 16.98 | 55.9°    | 58.2°   | 59.5°    |

**Tabla 5.** Resultados angulares –según criterios: clásico  $\alpha$ , mecánico  $\beta$  y geométrico  $\gamma$ – de las inclinaciones de todos los arcos de arbotante analizados en este trabajo.

3.3.3.1. Aproximación geométrica de la nueva inclinación propuesta  $\beta$ 

La nueva inclinación  $\beta$ , propuesta para los arcos de arbotantes en la sección 3.3.2.2, requiere de la serie de conocimientos y cálculos expuestos anteriormente. Ahora bien, es posible que algunas personas, que en el futuro estén interesadas en calcular y aplicar esta nueva inclinación, por el motivo que sea no puedan o no quieran realizar los cálculos necesarios, los cuales se basan en asuntos mecánicos. Para tales personas, se presentará un proceso únicamente geométrico mucho más simple para su cálculo, que será *a priori* una buena aproximación geométrica  $\gamma$  de  $\beta$ . Y se mostrará que esta última afirmación -*a priori* buena aproximación- es cierta.



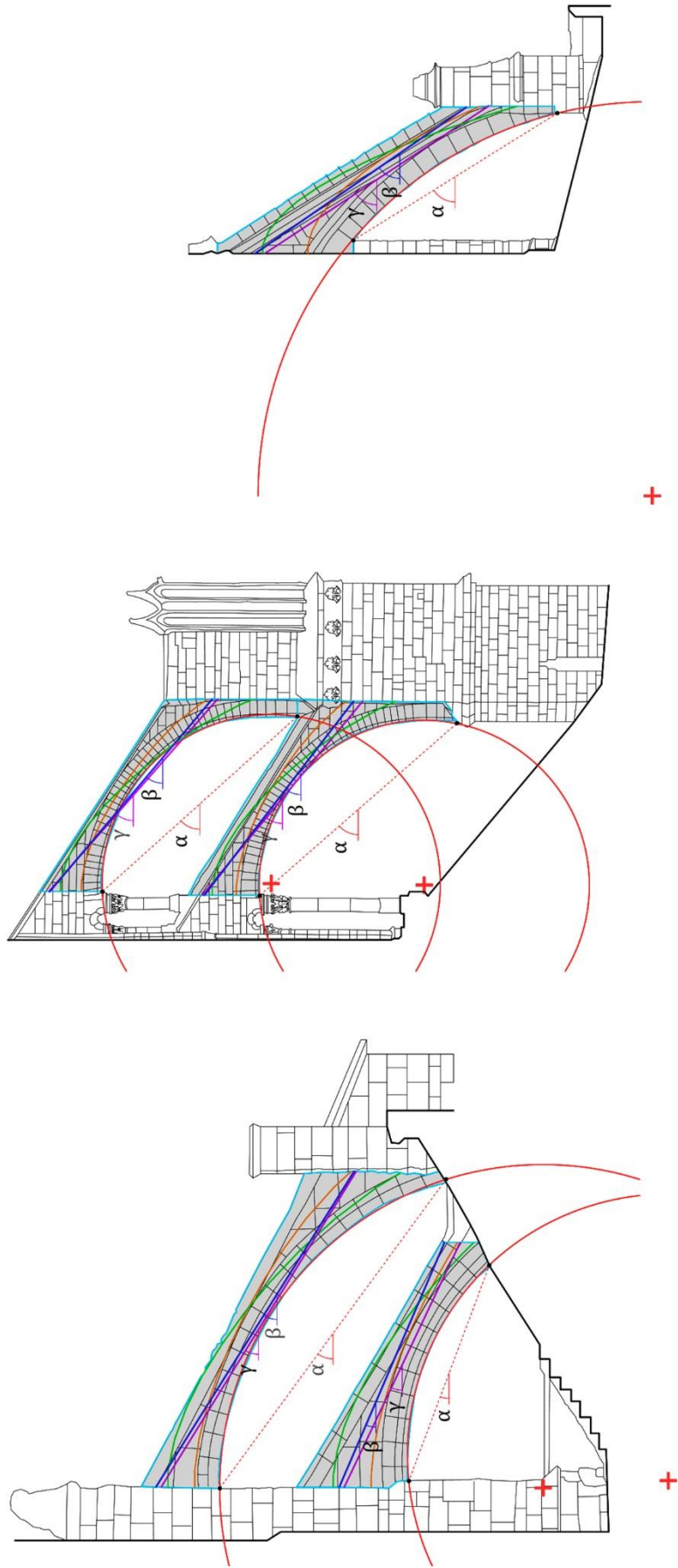
El proceso de aproximación al cual quisiera referirme es la inclinación  $\gamma_j$  de la recta de regresión  $\sigma_j$  de todo el objeto de estudio, o sea, de la región  $R_j$ . En las Figuras 44, 45 y 46 se muestra tal recta en color lila.

Por supuesto, el cálculo de recta de regresión  $\sigma$  es muchísimo más simple que el de la recta de regresión  $\rho$ . Y podría, por tanto, *a priori*, ser usada  $\beta$  como buena aproximación substituta de  $\gamma$ . *A posteriori*, en función de sus necesidades, el usuario de la recta  $\sigma$  puede decidir si necesariamente requiere o no el cálculo de  $\rho$ .

Las inclinaciones  $\gamma_{5-6}$ ,  $\gamma_{14-15}$  y  $\gamma_{19}$ , se muestran con detalle en la Figura 49, todas las rectas de regresión  $\sigma_j$  están mostradas en las Figuras 45 y 46, mientras que la Figura 44 muestra las rectas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  con más detalle. Numéricamente la Tabla 5 recoge el valor de todas las inclinaciones  $\gamma_j$ .

**Figura 49.** En la página siguiente se muestra un ejemplo de algunos resultados gráficos. A la izquierda, inclinaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  ( $R_5$ : 52.2°, 49.7°, 49.1°;  $R_6$ : 52.9°, 47.9°, 48.4°) de los arcos del arbotante de la Catedral de León. Al centro, inclinaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  ( $R_{14}$ : 38.1°, 40.2°, 41.3°;  $R_{15}$ : 45.3°, 37.6°, 39.7°) de los arcos del arbotante de la Catedral de Amiens. A la derecha, inclinaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  ( $R_{19}$ : 58. 2°, 55.3°, 56.7°) del arco del arbotante de la Catedral de Wells. Imagen realizada por el autor.

3. Metodología y Resultados: 3.3. Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante.



### 3.3.3.2. A priori buena aproximación y de $\beta$

A continuación, se justifica por qué se afirma que la inclinación  $\gamma$  es, *a priori*, una buena aproximación geométrica de la inclinación  $\beta$ .

Cuando se dice que es buena aproximación "*a priori*", se quiere indicar que lo que *estadísticamente* se ha obtenido es una buena aproximación. Por eso, dado que los resultados estadísticos no son teoremas geométricos que siempre se cumplen, es por lo que la afirmación se la califica de "*a priori*". Se usan los resultados que se han obtenido en este trabajo para la afirmación estadística.

A efectos de encontrar que estadísticamente es una buena aproximación se procede de la siguiente manera. Como primer paso: se calcula si existe o no una fuerte correlación lineal entre los conjuntos de inclinaciones  $\beta_j$  y  $\gamma_j$  ofrecidos por la Tabla 6. De hecho, se encuentra un coeficiente de correlación de Pearson del 0.96; y se encuentra la probabilidad, con *t-test de Student*, de no estar correlacionados del  $3 \times 10^{-12}$ . Pero eso no basta para indicar el parecido estadístico entre los pares de valores  $\beta_j$  y  $\gamma_j$ . Así que, como segundo paso: se comprueba que las medias de ambos conjuntos difieren con un error relativo pequeño, de hecho, se determina que ese error es solo el 0.87%; a la vez que se comprueba que ambas medias son representativas de sus respectivos conjuntos de inclinaciones, de hecho, se encuentra que sus coeficientes de variación de Pearson son el 23.8% y 24.4% respectivamente. Con la combinación de estos resultados, se puede afirmar que se tiene una aproximación desde el punto de vista estadístico.

Quisiera recordar a los lectores que el coeficiente de variación de Pearson  $cv$  es  $\frac{s}{m}$ , donde  $s$  es la desviación típica, y  $m$  la media; que comúnmente la media  $m$  se considera representativa de su conjunto si  $cv$  es menor que el 25%; que el coeficiente de correlación de Pearson  $cr$  es  $\frac{s_{\beta\gamma}}{s_{\beta}s_{\gamma}}$ , donde  $s_{\beta}$  es la desviación típica del conjunto de los  $\beta_j$ ,  $s_{\gamma}$  es la desviación típica del conjunto de los  $\gamma_j$ , y  $s_{\beta\gamma}$  es la covariancia de ambos conjuntos; y que aplicando el *t-test de Student* con  $n-2$  grados de libertad ( $n=20$ ) se encuentra el parámetro  $P_{\beta\gamma}$  tal que se rechaza la hipótesis de no correlación lineal con probabilidad  $1 - P_{CD} = \text{nivel de significancia}$  de cometer error siendo cierto que no hay correlación lineal, y que comúnmente se considera un muy buen nivel de significancia aquel que es menor que 0.01.

Procediendo con los cálculos pertinentes, que los lectores pueden reproducir con lo que hemos comentado en el párrafo anterior, se obtienen los siguientes valores de la Tabla 6, los cuales ya se han citado al describir los pasos de los cálculos.

| Parámetros estadísticos  | $\beta$ | $\gamma$            |
|--|---------|---------------------|
| Media  | 39.3°   | 38.9°               |
| Desviación típica  | 9.36    | 9.54                |
| Coeficiente <i>cv</i> de variación de Pearson                  | 0.238   | 0.245               |
| Covariancia $\beta \gamma$                                     |         | 86.226              |
| Coeficiente <i>cr</i> de correlación de Pearson $\beta \gamma$ |         | 0.965               |
| Coeficiente de Pearson al cuadrado $\beta \gamma$              |         | 0.931               |
| Coeficiente de <i>t-test de Student</i>                        |         | 0.999               |
| Nivel de significancia   |         | $3 \times 10^{-12}$ |
| Error relativo entre las medias                                |         | 0.87%               |

**Tabla 6.** Parámetros estadísticos derivados de los valores angulares determinados en la Tabla 5.

### 3.3.4. Conclusiones parciales de la subsección 3.3

La determinación de la inclinación de un arco que configura un arbotante es conocida históricamente como la amplitud del ángulo resultante entre la recta que une los dos extremos del borde inferior del arco con una recta horizontal paralela a tierra; llamo  $\alpha$  en este artículo a esa inclinación. Pero esta inclinación no representa a todo el arbotante, a lo sumo, y tampoco es realmente así, correspondería a la inclinación del borde inferior del arco.

Por consiguiente, se presenta una nueva propuesta de inclinación, que aquí llamo  $\beta$ , del arco que configura un arbotante teniendo en cuenta su forma y su estática gráfica. Esta inclinación  $\beta$  se define como: la amplitud del ángulo que forma, con una recta horizontal paralela a tierra, la recta de regresión de la nube de puntos homogénea encerrada por el borde perimetral del arco del arbotante y sus las líneas de máximo y mínimo empuje.

Finalmente, a efectos de ofrecer una aproximación que simplifica el procedimiento de determinación de la inclinación  $\beta$ , este trabajo presenta también una nueva inclinación, que llamo  $\gamma$ , la cual es la resultante de calcular, únicamente, la amplitud del ángulo que forma, con una recta horizontal paralela a tierra, la recta de regresión de la nube de puntos homogénea encerrada por el borde perimetral del arco del arbotante. Se muestra que esta nueva inclinación  $\gamma$ , es *a priori* una buena aproximación de la inclinación  $\beta$ .





El lector puede acudir a la publicación que deriva el siguiente capítulo 3.4 escaneando el siguiente código QR y cuyo título es “Study on the mechanical capacity and structural relevance of a flying buttress through the analysis of a particular case”.

### **3.4. Justificación formal de los arbotantes de la Catedral de Girona**

El arbotante puede desempeñar tres funciones: a) presenta una finalidad formal en el exterior de la edificación, b) evacua y canaliza las aguas pluviales, y c) transmite y neutraliza los empujes horizontales hasta los contrafuertes. Podemos determinar los aspectos a) y b) acudiendo, por una parte, a múltiples trabajos que explican su composición formal y por otra, examinando de forma visual cada elemento; no obstante, evaluar la función estructural c) no es directo y debe realizarse un estudio mecánico riguroso. Es por ello por lo que el presente trabajo tratará de establecer una metodología objetiva para determinar el nivel de influencia de un arbotante sobre el comportamiento estructural del conjunto arquitectónico; es decir, se pretende contestar a dos cuestiones: La primera, ¿cuál es la capacidad mecánica de un arbotante?; y la segunda, ¿es relevante esta capacidad en el comportamiento global de la estructura? Para ello, se aplicará este estudio a uno de los arbotantes ubicados en la Catedral de Girona.

#### **3.4.1. Conceptos generales**

El arbotante es, junto a la bóveda de crucería, uno de los elementos arquitectónicos más emblemáticos del estilo gótico. A nivel teórico desempeña tres funciones (Tarrío, 2015; Blas, 2018): a) presenta una finalidad formal y con un gran impacto visual exterior, b) permite evacuar y canalizar las aguas pluviales provenientes de la cubierta superior hacia el exterior gracias a su posición en el contexto catedralicio y a su inclinación y, c) transmite y neutraliza los empujes horizontales de las bóvedas de crucería de la nave central hasta los contrafuertes. A pesar de lo anterior y de las múltiples referencias históricas que destacan su funcionalidad (Courtenay, 1997; Kimpel y Suckale, 1985; Llopis-Pulido, Alonso, Fenollosa, et al., 2016; Roca, Cervera, Pelà, et al., 2013), en realidad observamos que existen arbotantes que no cumplen parcialmente alguno de los tres aspectos anteriores.

Se puede determinar si un arbotante cubre los aspectos a) y b) acudiendo, por una parte, a estudios (Samper, Herrera y Costa-Jover, 2022; Samper, Martín-Sáiz y Herrera, 2022) que explican su composición formal y por otra, examinando de forma visual cada arbotante; no obstante, evaluar la función estructural c) no es trivial y no puede atribuirse sin realizar previamente, y con profundidad, un estudio mecánico. Es por ello por lo que el presente trabajo tratará de establecer una metodología objetiva para determinar el nivel de influencia de un arbotante sobre el comportamiento estructural del conjunto arquitectónico. Es decir, pretendemos dar respuesta a dos cuestiones: La primera, ¿cuál es la capacidad mecánica de un arbotante?; y la segunda, ¿es relevante esta capacidad en el comportamiento global de la estructura? Para ello, se aplicará este estudio a uno de los arbotantes ubicados en la cabecera de la Catedral de Girona por las singularidades que se destacan a continuación y por destacar en este trabajo la catedral que se encuentra en la misma ciudad de la Universidad de Girona.

Los arbotantes de la Catedral de Girona merecen ser estudiados por dos motivos. El primero, porque difiere formalmente de cualquier tipología de arbotante, incluso se alejan explícitamente de cualquier arbotante ubicado en cualquier otra catedral próxima a Girona que condicionó históricamente en su proceso constructivo; por ejemplo, la fuerte influencia geográfica, histórica y constructiva de la Catedral de Narbona en el diseño arquitectónico de la Catedral de Girona (Freigang, 2002; Molina 2007; Cassanelli, 1995) se diluye al comparar formalmente ambos tipos de arbotantes. El segundo motivo es porque, como se muestra en la Figura 50, no desempeña la función de evacuar las aguas pluviales provenientes de su cubierta. El hecho de que sus arbotantes difieran de la composición formal habitual a) y b) motiva a evaluar su finalidad c).

Este estudio, además de ofrecer una metodología objetiva para cuantificar la función mecánica de un arbotante, pretende analizar el caso concreto de un arbotante de la Catedral de Girona y comprobar si su existencia favorece al descenso de las cargas y la transmisión de empujes provenientes de la bóveda; y, por lo tanto, analizar si se desempeña el aspecto funcional c) y en qué grado.

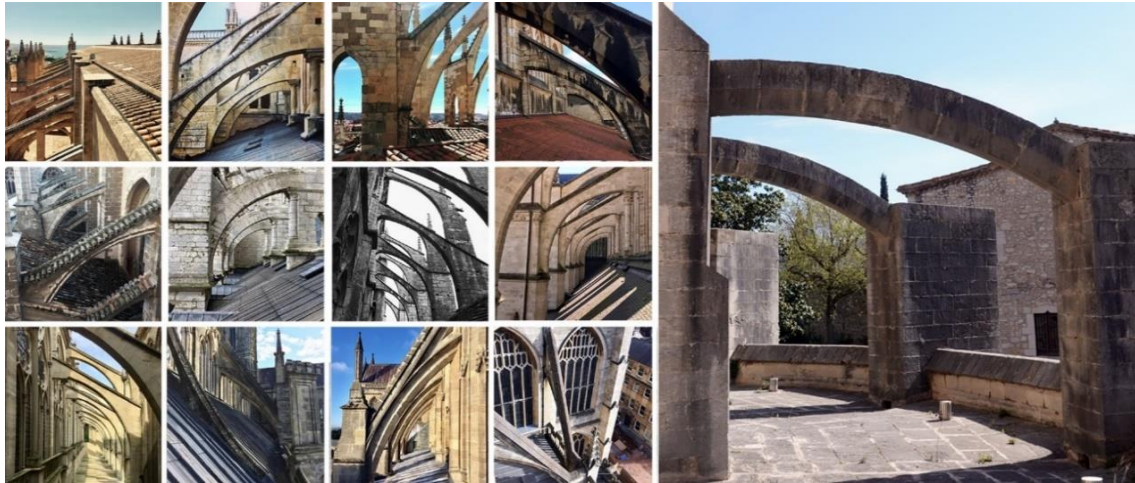


**Figura 50.** A la izquierda, fotografía de los arbotantes de la Catedral de Girona. A la derecha, fotografía de los arbotantes de la Catedral de Narbona. A pesar de sus influencias geográficas, históricas y constructivas, se observan grandes diferencias formales; además, los arbotantes de Narbona –a diferencia de los de Girona– desempeñan la función de canalizar las aguas pluviales. Imagen realizada por el autor.

#### **3.4.1.1. Los arbotantes de la Catedral de Girona como caso de estudio**

Como se ha descrito en el apartado anterior, los arbotantes de la Catedral de Girona merecen un especial estudio por su singularidad formal a) y la ausencia de función de evacuación de las aguas pluviales b). Además, si se comparan con otros arbotantes (Figura 51) se puede sugerir de forma intuitiva, y aventurándonos antes de realizar ningún cálculo, que su función mecánica no es especialmente significativa. Esta intuición se fundamenta en tres observaciones: su ángulo de inclinación es menos pronunciado y su sección resistente es más pequeña de lo que es habitual en la mayoría de los arbotantes y, además, su contrafuerte carece de un pináculo (Figura 51 y 52).

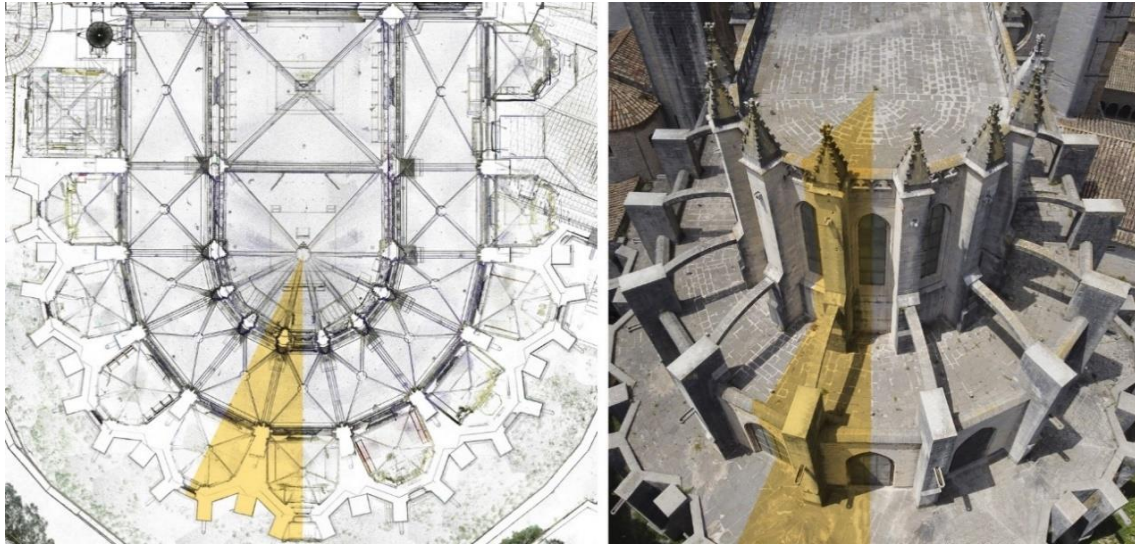




**Figura 51.** Muestra gráfica de algunos arbotantes ubicados en 13 catedrales de diferentes países. Cada fotografía está ubicada según el orden alfabético de la Figura 52. Imagen realizada por el autor.

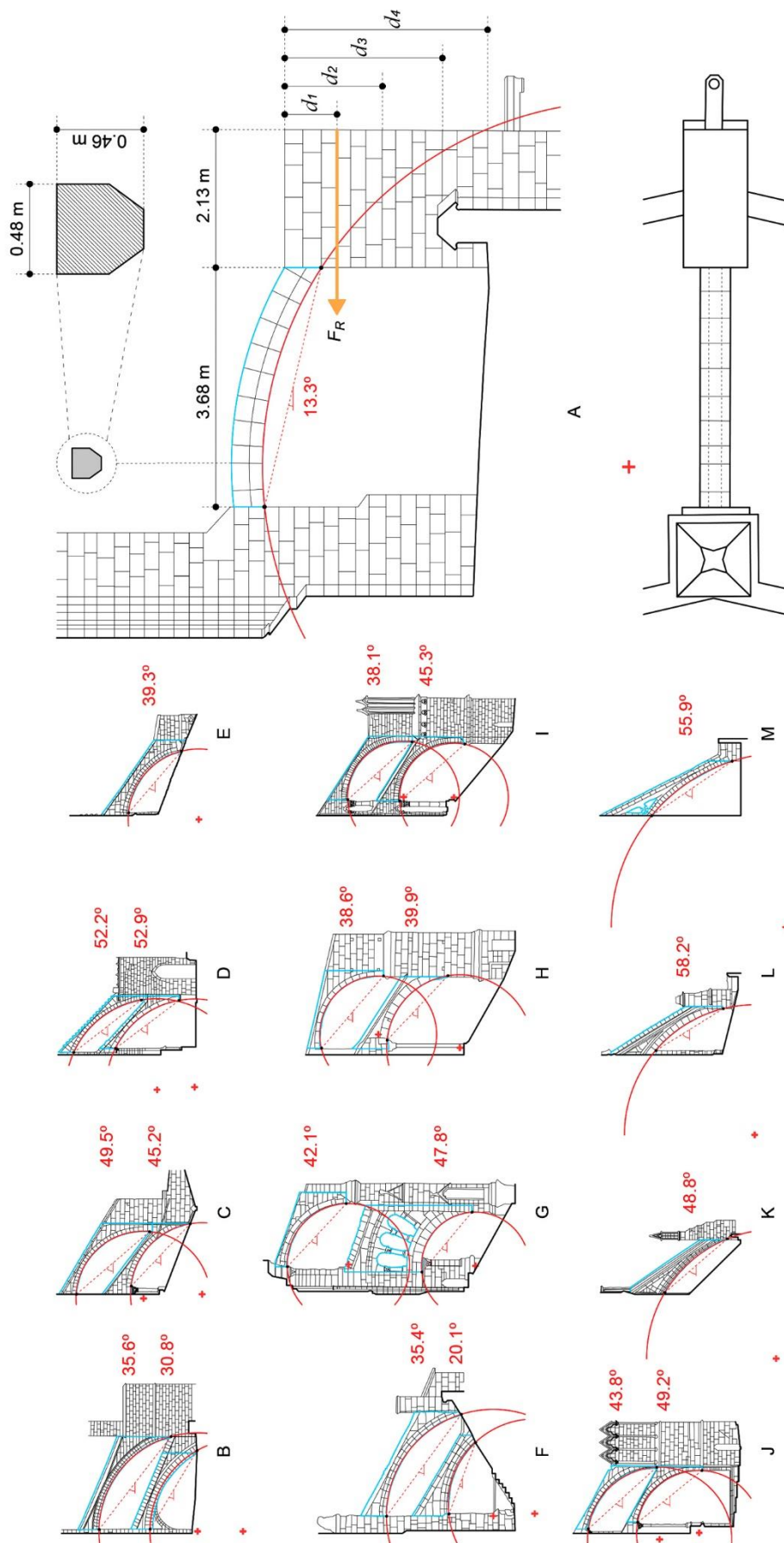
El deambulatorio de la cabecera de la Catedral de Girona está configurado por diez arbotantes. En la Figura 53 indicamos y mostramos qué sector aislamos para realizar el análisis; además, según la referencia (Sureda, 2005), el arbotante analizado se sitúa sobre la primera capilla construida de la catedral.

Antes de determinar –en el siguiente apartado– si es relevante, o no, la capacidad mecánica de un arbotante en el comportamiento global de la estructura, quisiéramos mostrar y calcular con procedimientos de estática gráfica la capacidad máxima que tiene el arbotante de estudio en función de su geometría y su materia; y, además, la capacidad mecánica del contrafuerte. Para la determinación de su geometría, se ha realizado un dibujo vectorial y en dos dimensiones de su alzado considerando todos sus rasgos constructivos, es decir, el despiece y tamaño real de las dovelas que forman el arco (Figura 52 y Figura 54). Para la determinación de su peso, se ha fijado la densidad de la piedra (Caliza nummulítica de Girona) que constituye el arbotante fijando un valor de 26,43Kg/m<sup>3</sup>. Este dato físico ha sido consultado en la memoria técnica de un proyecto de diagnóstico de lesiones y sugerencias de intervención de la piedra de la Catedral de Girona elaborado por el Área de Petrología y Geoquímica de la Universidad de Oviedo en el año 1999 y por encargo de la misma Catedral de Girona.



**Figura 52.** Imagen de la nube de puntos generada mediante la técnica de escáner láser terrestre. En esta figura mostramos el conjunto de arbotantes que configuran el deambulatorio de la Catedral de Girona e indicamos, en color naranja, el sector analizado en el presente trabajo. Imagen realizada por el autor.

**Figura 53.** En la página siguiente se muestran las vistas en alzado de algunos arbotantes ubicados en 13 catedrales de diferentes países, concretamente: 6 catedrales españolas (A: Catedral de Girona, B: Catedral de Mallorca, C: Catedral de Burgos, D: Catedral de León, E: Catedral de Oviedo y F: Catedral de Toledo), 2 catedrales y 2 abadías francesas (G: Catedral de Chartres, H: Abadía de San Pedro de Chartres, I: Catedral de Amiens y J: Abadía de San Denis) y 3 catedrales inglesas (K: Catedral de Salisbury, L: Catedral de Wells y M: Abadía de Bath). En color rojo se muestra el ángulo de inclinación de cada arbotante y en color azul señalamos la parte de arbotante comprendido entre la fachada de la catedral y su contrafuerte. Imagen realizada por el autor.



### **Análisis de la capacidad mecánica máxima del arbotante de estudio**

Como la geometría del arbotante de la Catedral de Girona coincide con la de un semiarco circular en el que la clave está situada casi en el extremo superior, se ha supuesto que en este extremo, la fuerza de reacción es prácticamente horizontal. De este modo, se han trazado cuatro polígonos funiculares inscritos en el plano del arbotante: dos de ellos corresponden a los que pasan por el límite del tercio central de la sección y que generan un empuje máximo y mínimo (Figura 54b y Figura 54c, respectivamente); y los otros dos, corresponden a los polígonos funiculares que se identificarían con el arco límite (Alexakis y Makris, 2014; Huerta, 2019) que generarían un empuje mínimo y máximo (Figura 54a y Figura 54d, respectivamente). En los dos primeros casos, la transmisión de fuerzas entre las dovelas se produce siempre dentro de los límites del núcleo central, y por tanto todas las fibras de todas las secciones del arco están siempre en compresión. En los otros dos casos, la transmisión de fuerzas entre las dovelas extremas se produce fuera del núcleo central, concretamente en el límite de la sección. Multiplicando el área en alzado de cada dovela por el espesor medio de la sección y por la densidad de la piedra, se ha encontrado el valor de las fuerzas de empuje  $R_H$  correspondientes a cada polígono y la reacción vertical en el extremo inferior  $R_V$ , (Tabla 7).

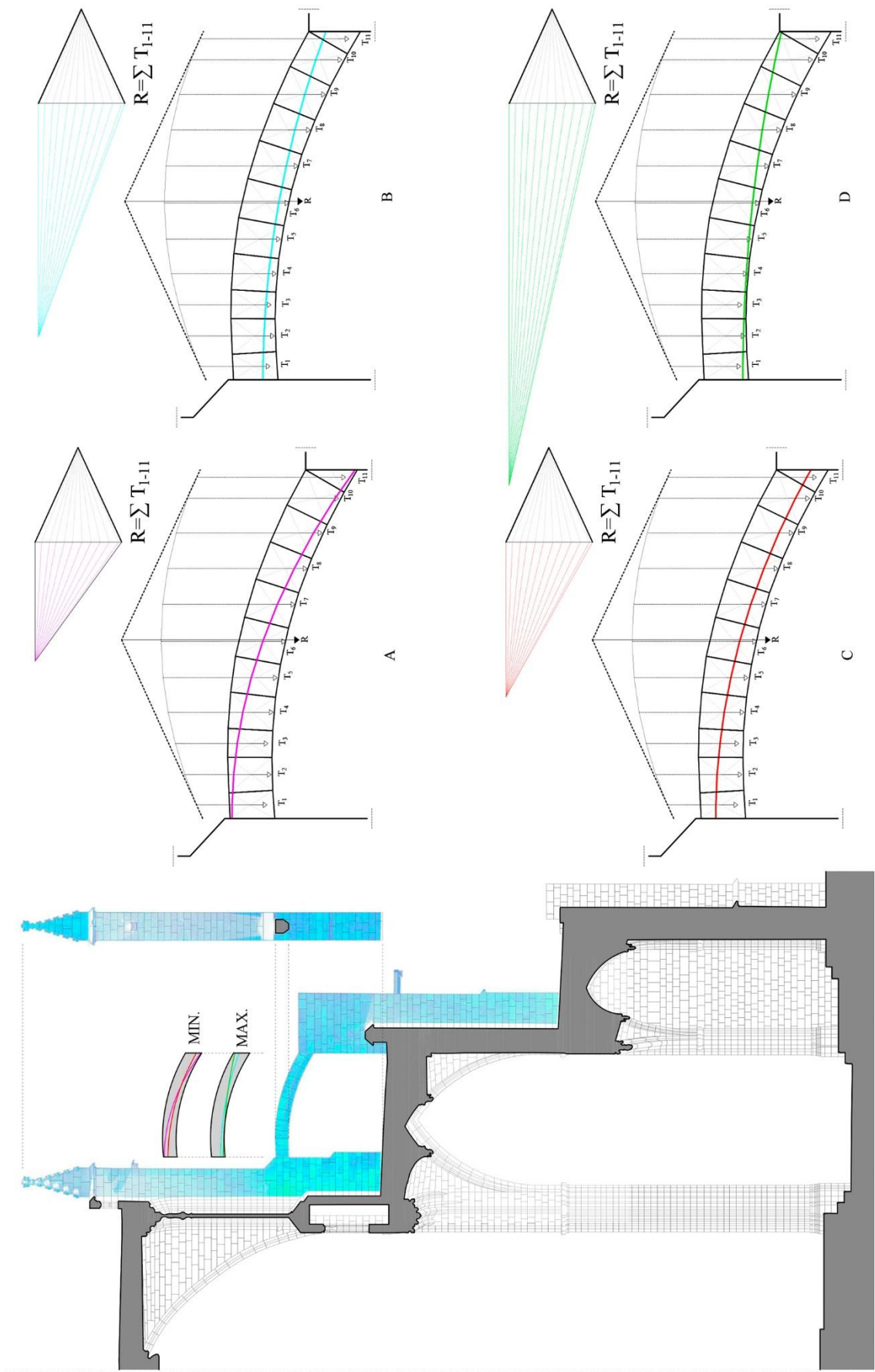
Con todo lo anterior se obtiene que las fuerzas de reacción horizontales debidas al peso propio del arbotante pueden variar entre 28.26 y 90.52 KN.

| <b>Acrónimo</b> | <b>Forma del polígono funicular</b> | <b><math>R_H</math> (KN)</b> | <b><math>R_V</math> (KN)</b> | <b>Figura</b> |
|-----------------|-------------------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------|
| (MAEL)          | Máximo empuje arco límite           | 90.52                        |                              | 54d           |
| (MAEC)          | Máximo empuje núcleo central        | 55.31                        | 23.30                        | 54b           |
| (MIEC)          | Mínimo empuje núcleo central        | 36.67                        |                              | 54c           |
| (MIEL)          | Mínimo empuje arco límite           | 28.26                        |                              | 54a           |

**Tabla 7.** Valores de las fuerzas de reacción horizontal y vertical en los extremos del arbotante según los cuatro polígonos funiculares de líneas de descarga descritos anteriormente.

**Figura 54.** En la página siguiente se muestran los resultados del procedimiento de estática gráfica aplicados al arbotante de la Catedral de Girona. De izquierda a derecha y de arriba abajo: A) polígono funicular correspondiente al arco límite de empuje mínimo, B) polígono funicular correspondiente de empuje máximo dentro del núcleo central, C) polígono funicular correspondiente al empuje mínimo dentro del núcleo central, y D) polígono funicular correspondiente al arco límite de empuje máximo. Imagen realizada por el autor.

3. Metodología y Resultados: 3.4. Justificación formal de los arbotantes de la Catedral de Girona.



**Análisis de la capacidad mecánica máxima del contrafuerte de estudio**

Siguiendo con el cálculo de la capacidad mecánica del contrafuerte de la Catedral de Girona se observa que la capacidad de absorción de la fuerza de reacción horizontal se encuentra limitada por la fuerza de rozamiento  $F_R$  que podría generarse en la junta horizontal entre las hiladas de piedra del contrafuerte situadas justo por debajo del arbotante (Figura 52). Esta fuerza de rozamiento  $F_R$  es directamente proporcional al coeficiente de rozamiento  $\mu$  y a la fuerza vertical  $F_V$  en la junta. Debido a que el arbotante arranca en la coronación del contrafuerte y a la ausencia de un pináculo, la fuerza vertical  $F_V$  sobre esta junta y, por tanto, también la fuerza de rozamiento son muy limitadas. Se ha realizado un cálculo de esta fuerza de rozamiento considerando el peso de tres hiladas de piedra del contrafuerte (Figura 52 y Figura 54), además de la reacción vertical del arbotante, y considerando también diferentes coeficientes de rozamiento en muros de mampostería de piedra (Rankine, 1858; Vasconcelos y Lourenço, 2009; Milosevic, Sousa Gago, Lopes, et al., 2013). Para calcular el peso propio de las tres últimas hiladas del contrafuerte, se ha tenido en cuenta sus dimensiones (3 x 0.26 x 2.10 x 0.98 m) y la densidad de la piedra caliza de Girona (26,43 KN/m<sup>3</sup>), si bien es verdad que dependiendo de la heterogeneidad en la composición de los materiales, el peso podría ser ligeramente menor.

| $F_V$ (KN)           | $\mu$ | $F_R$ (KN) | Acrónimo |
|----------------------|-------|------------|----------|
| 23.30 (arbotante)    | 0.60  | 39.43      | (LIRC)   |
| +                    | 0.70  | 46.01      |          |
| 42.43 (contrafuerte) | 0.74  | 48.63      |          |
|                      | 0.78  | 51.26      | (LSRC)   |

**Tabla 7.** Valores de las fuerzas de rozamiento  $F_R$  en el plano horizontal de la junta del contrafuerte inmediatamente por debajo del arranque del arbotante en función de cuatro coeficientes de rozamiento  $\mu$  distintos.

Con todo lo anterior se obtiene que la fuerza de rozamiento que podría generarse entre las hiladas de piedra del contrafuerte, justo por debajo del arranque del arbotante, podría estar comprendida entre 39.43 KN (LIRC, límite inferior de rozamiento del contrafuerte) y 51.26 KN (LSRC, límite superior de rozamiento del contrafuerte). Se observa que solo dos de los empujes calculados mediante estática gráfica para cada uno de los polígonos funiculares son inferiores a las fuerzas de rozamiento máximas que se podrían producir en el contrafuerte; concretamente corresponden a las líneas de mínimo empuje en el arco límite y de dentro del núcleo central (Figura 54A y Figura 54C, respectivamente).

La misma fuerza horizontal genera un momento de vuelco en el contrafuerte directamente proporcional a la distancia en dirección vertical  $d$  considerada. Este momento es

contrarrestado por otro momento equilibrante  $M_e$  que también es directamente proporcional al peso del arbotante  $R_{V,f}$  y al del contrafuerte  $R_{V,b}$  según la misma altura considerada. A partir de estos valores, se puede deducir la fuerza horizontal máxima  $F_{H,max}$  que provocaría el vuelco del contrafuerte considerando diferentes distancias (Tabla 7 y 8). Se observa que esta fuerza varía entre los 119.84 KN, en la cota inmediatamente por debajo del arranque del arbotante, y los 72.80 KN (MAVC, máximo empuje de vuelco del contrafuerte) aproximadamente 3 m por debajo (Figura 52). En todo caso, estas fuerzas no son limitantes porque son superiores a las fuerzas que generarían el desequilibrio por deslizamiento calculado anteriormente.

| $d$ (m)      | $R_{V,f}$ (KN) | $R_{V,b}$ (KN) | $M_e$ (KNm) | $F_{H,max}$ (KN) | Acrónimo |
|--------------|----------------|----------------|-------------|------------------|----------|
| $d_1 = 0.78$ |                | 42.43          | 93.48       | 119.84           |          |
| $d_2 = 1.56$ | 23.30          | 84.85          | 138.03      | 88.48            |          |
| $d_3 = 2.34$ |                | 127.28         | 182.57      | 78.02            |          |
| $d_4 = 3.12$ |                | 169.71         | 227.12      | 72.80            | (MAVC)   |

**Tabla 8.** Valores de las fuerzas horizontales máximas  $F_{H,max}$  que provocarían el vuelco en diferentes distancias  $d$  del contrafuerte medidas desde la coronación (Figura 53).

En resumen, la capacidad de absorber empujes horizontales por el conjunto arbotante-contrafuerte estaría acotada en un intervalo mínimo de entre 28.26 KN (MIEL) y 39.43 KN (LIRC) y un intervalo máximo entre 28.26 KN (MIEL) y 51.26 KN (LSRC); concretamente, el primer valor de ambos intervalos correspondería al empuje mínimo producido por el arbotante según el arco límite (Figura 54A y Tabla 6) y el segundo valor correspondería a la resistencia mínima y máxima a rozamiento que podría asumir el contrafuerte en la hilada inmediatamente por debajo del arranque del arbotante (Tabla 7 y 8).

### 3.4.2. Desarrollo sobre la capacidad mecánica de un arbotante y su relevancia en el comportamiento de la estructura

Una vez calculados los límites mecánicos del arbotante y su contrafuerte, en el siguiente apartado se describe una metodología para determinar la capacidad mecánica del arbotante considerando su contexto catedralicio. Por este motivo se ha estructurado este apartado en dos secciones: una primera donde se presentan los pasos a seguir para modelar tridimensionalmente el contexto arquitectónico del arbotante de estudio; y una segunda donde se presentan los pasos a seguir para evaluar la capacidad mecánica del contrafuerte mediante una simulación. Como se ha indicado anteriormente, los siguientes procedimientos los aplicaremos para un arbotante ubicado en la Catedral de Girona.

#### **3.4.2.1. Obtención del modelo geométrico de estudio**

Primero de todo, se ha construido un modelo digital tridimensional del objeto de estudio. La principal técnica usada para la creación de este modelo digital es mediante el escáner láser terrestre. Para el caso concreto de la Catedral de Girona, se ha utilizado un escáner láser modelo Leica RTC360 con una precisión inferior a 2 milímetros y se ha usado el software Cyclon Register 360 y el software Cyclone para el correcto procesado de datos numéricos tridimensionales. Todo este proceso de registro no es invasivo para el patrimonio arquitectónico y es frecuentemente usado para su representación gráfica gracias a su velocidad de ejecución y simplicidad (Grussenmeyer, Landes, Voegtle, et al., 2008). Este método de representación ha permitido obtener el estado actual de toda la cabecera de la catedral con precisión milimétrica y, en especial, el sector de estudio que mostramos en la Figura 55. Para proceder con los siguientes pasos de esta sección, se ha transformado la nube de puntos, correspondiente al sector de estudio, a una malla tridimensional; concretamente, se ha pasado de una nube de 397.356.684 puntos a un segundo modelo formado por 5.099.321 caras. Con el fin de minimizar el tamaño del fichero del segundo modelo, sin alterar su geometría, se ha creado un tercer modelo con el software AutoCad. El lector puede observar estas transformaciones geométricas en la Figura 55.

#### **3.4.2.2. Obtención del modelo geométrico de estudio**

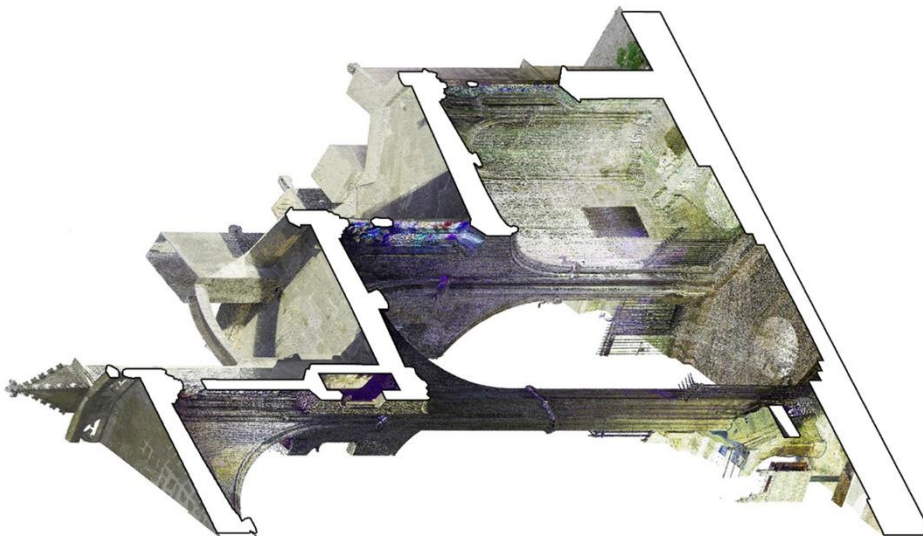
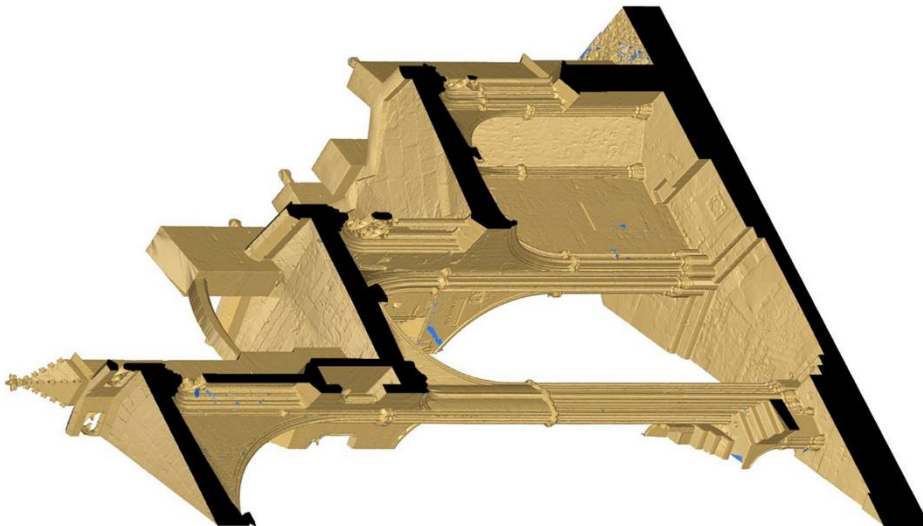
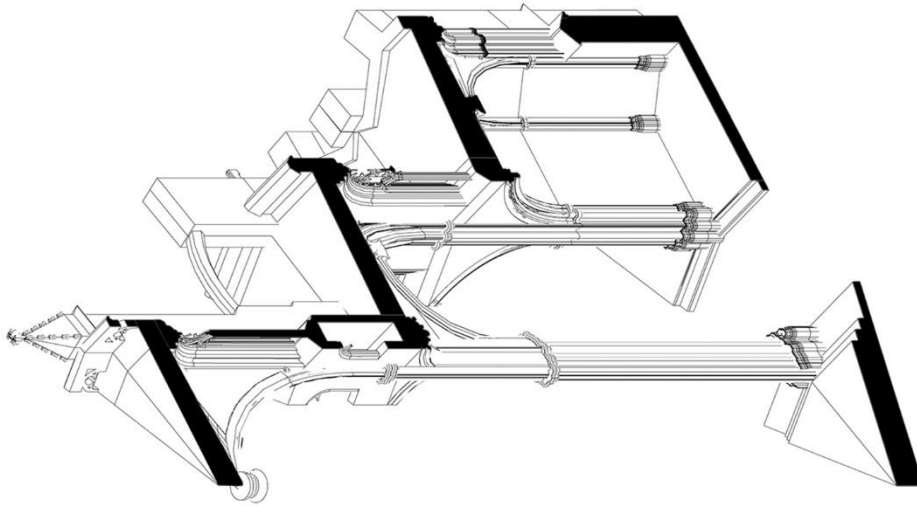
En este apartado se cuantifica la magnitud del esfuerzo al que está sometido el arbotante teniendo en cuenta el conjunto de rigideces del sector analizado; este estudio se aplica a un modelo de análisis que llamo A. Una vez se conozca esta magnitud, y con la finalidad de comparar el nivel de contribución mecánica del arbotante en el conjunto de la estructura, se aplicarán los cálculos a un modelo de análisis alternativo, el cual llamo B, en el cual no exista el arbotante.

#### **Síntesis del modelo para la simulación**

Se usa el programa Autodesk Robot Structural Analysis y el tercer modelo geométrico presentado en la subsección 2.1 para seguir con el análisis estructural mediante el método de elementos finitos (FEM). Para ello y previamente, ha sido ineludible realizar un nuevo modelo geométrico simplificado, formado por planos y líneas (Figura 56), con el que aplicaremos los cálculos para definir las diferencias mecánicas entre el modelo de análisis A y el B. Este proceso de simplificación se ha realizado fijando las siguientes premisas:

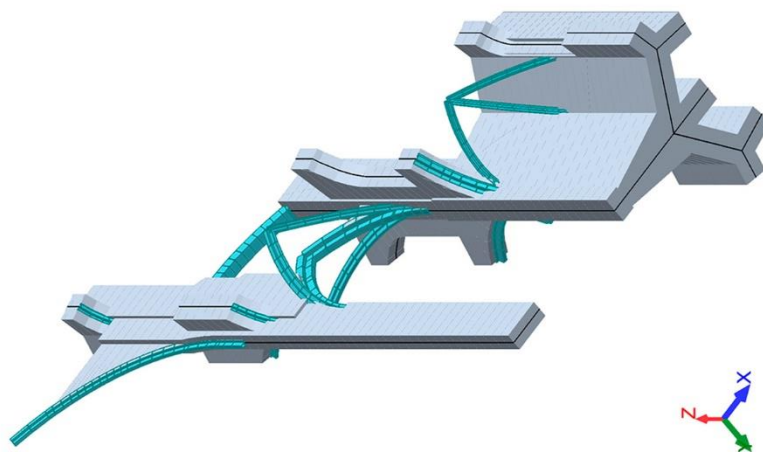
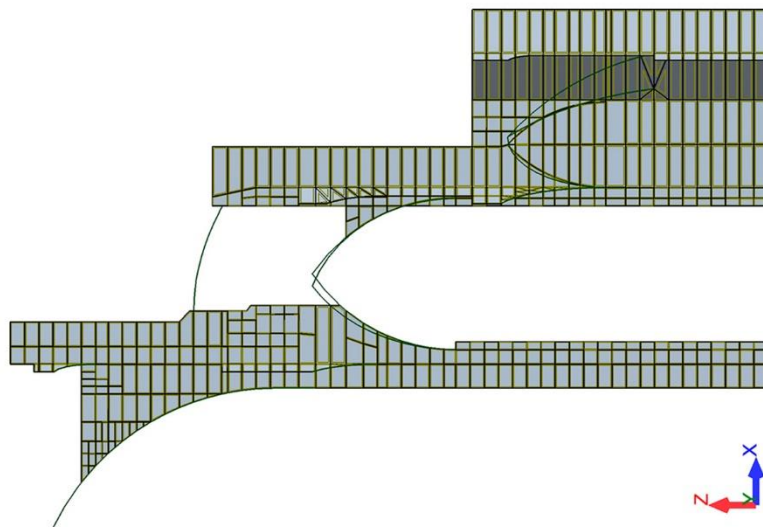
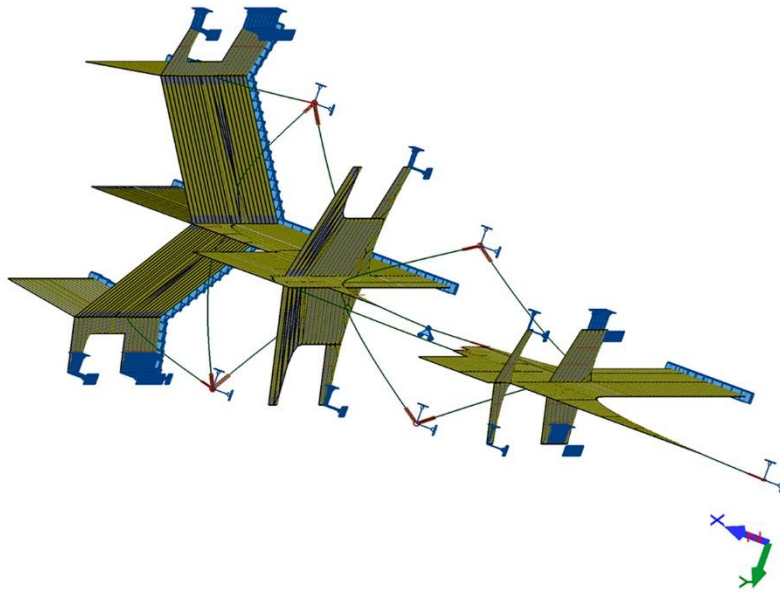
**Figura 55.** En la página siguiente se muestra: A la izquierda, un fragmento de la nube de puntos obtenida del escáner láser y registrada con el software Cyclone. Al centro, se muestra la malla tridimensional correspondiente al sector anterior y realizada con el software Cyclone 3DR. A la derecha, se muestra el tercer modelo sintetizado realizado con el software AutoCad. Imagen realizada por el autor.





- Se han considerado los planos medios de los muros y los ejes de las nervaduras. También se han considerado líneas poligonales para modelar la curvatura de las nervaduras.
- Se ha simplificado la geometría de las pilastras y las columnas mediante una sección rectangular equivalente (Figura 56, izquierda). También se han considerado juntas horizontales correspondiente a la altura de tres hiladas de sillares para la definición de los planos (Figura 56, centro). No se han considerado juntas verticales de forma generalizada sino solo en aquellas zonas donde ha sido necesario para obtener un comportamiento mecánico equiparable a un comportamiento real de sólo compresiones mediante la introducción de desconexiones entre elementos. Para simular las interacciones con las secciones de los sectores contiguos, se han introducido soportes con restricción de deslizamiento en el plano horizontal, y libres en la dirección vertical. Además, en los extremos de las barras y paneles que coinciden con estos soportes, se han introducido relajaciones en el giro y en el desplazamiento transversal, de forma que las reacciones sobre estos soportes sólo sean unas fuerzas de compresión en el plano horizontal (Figura 56, derecha).
- El módulo de elasticidad  $E$  de la mampostería de piedra puede variar entre  $1.7 \times 10^{-3}$  y  $6.85 \times 10^{-3}$  N/mm<sup>2</sup> (Magenes, Penna, Galasco, et al., 2010; Gonen y Soyoz, 2021). Esta variabilidad no solo es debida a la heterogeneidad constructiva, sino también a la diversidad de métodos utilizados para caracterizarlo. Esta disparidad de valores supone una incertidumbre sobre el modelo de análisis y sus resultados, especialmente los valores resultantes de los desplazamientos y las deformaciones. Por este motivo, estos resultados no deberán ser interpretados como absolutos y precisos, sino solamente ofrecerán un orden de magnitud. Por todo lo anterior, y a causa de una mayor heterogeneidad constructiva de los muros respecto de las nervaduras, hemos aplicado módulos de elasticidad distintos en ambos elementos; en concreto,  $2 \times 10^{-3}$  y  $4 \times 10^{-3}$  KN/mm<sup>2</sup>, respectivamente.
- Los paneles de los muros se han discretizado en una malla de elementos de tres y cuatro nodos con un tamaño no superior a los 30 centímetros, densificando hasta los 10 centímetros en las zonas que presentan mayor irregularidad o concentración de esfuerzos.

**Figura 56.** En la página siguiente se muestra de izquierda a derecha, diversas vistas del modelo MEF: A la izquierda, vista axonométrica con los espesores de los muros y las nervaduras; al centro, sección del modelo con el despiece de los muros y las juntas horizontales; a la derecha, vista axonométrica con la indicación de soportes y relajaciones en los extremos y bordes de los elementos que limitan con los sectores contiguos. Imagen realizada por el autor.



### ***Determinación de las cargas sobre las bóvedas***

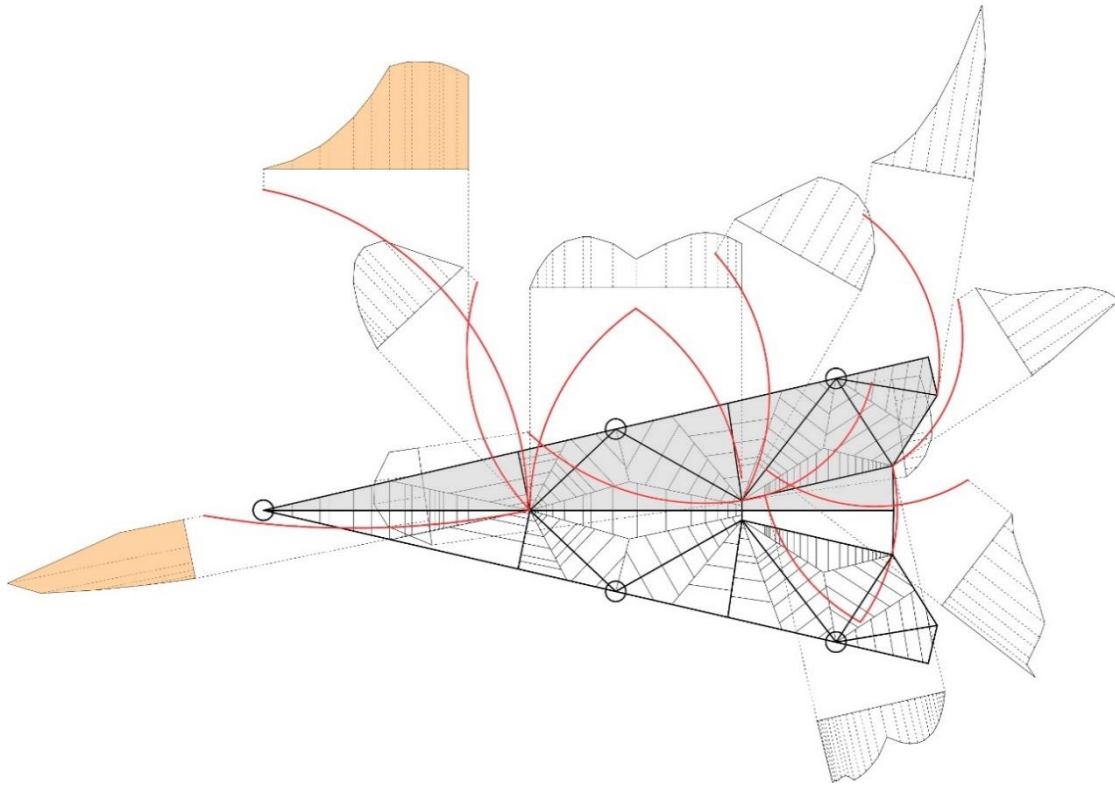
A continuación, se describen todas las consideraciones que se han precisado para la óptima determinación de las cargas sobre las bóvedas para proceder al cálculo; las cuales son las siguientes:

- Se han considerado las cargas debidas al peso propio de los muros, las pilastras, las columnas, las nervaduras de los arcos, las bóvedas y el relleno de tierras dispuesto sobre éstas. En todos los elementos de piedra se ha considerado una densidad de 26,43 Kg/m<sup>3</sup> y en el caso del relleno de tierras sobre las bóvedas se ha considerado una densidad de 18,00 Kg/m<sup>3</sup>.
- Se ha considerado un espesor constante de 30 centímetros para estimar el peso de las propias bóvedas; además, para estimar el volumen de tierras sobre las propias bóvedas se ha multiplicado el área tributaria en planta por la altura de la sección en cada punto (Figura 57).

### ***Consideración de las fases constructivas y entrada en carga del arbotante***

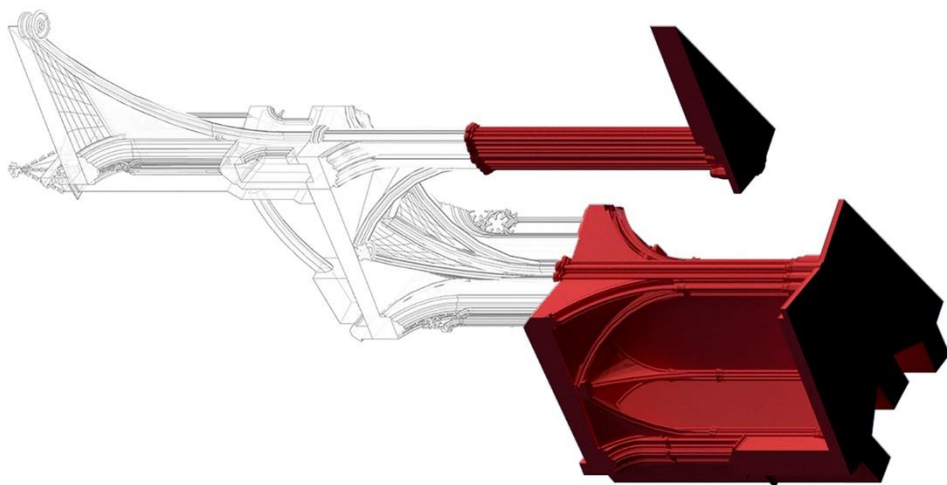
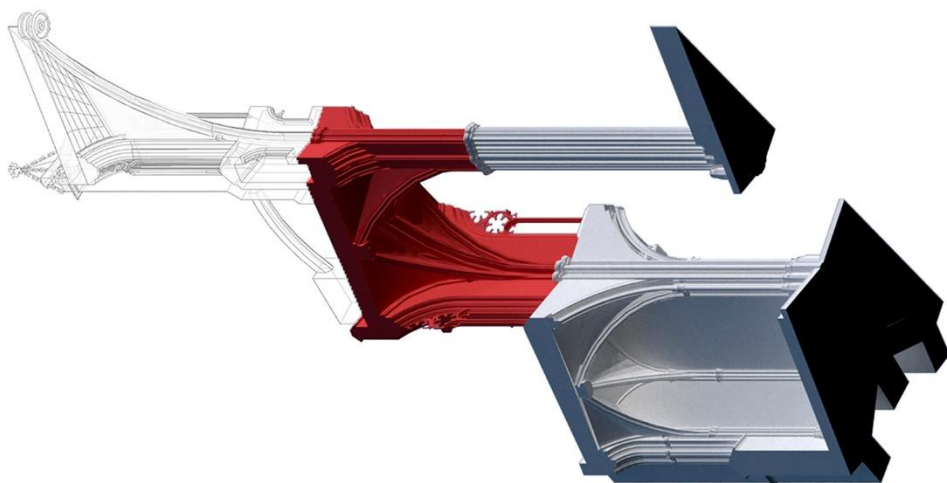
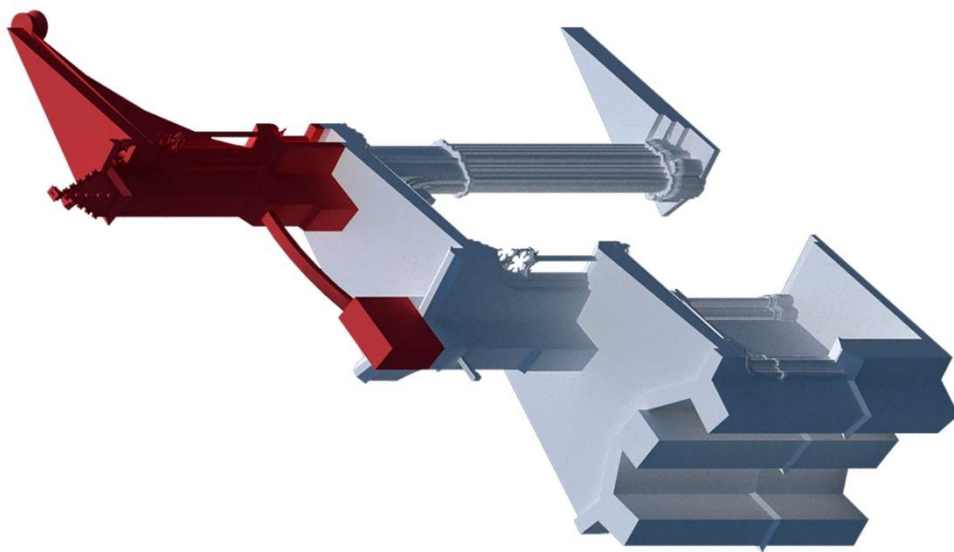
Ningún elemento constructivo puede verse afectado por las cargas que han empezado a actuar antes de su construcción. Según esta premisa, la construcción y entrada en carga de los elementos constructivos de la catedral seguirían un orden ascendente. Así, los elementos situados a una cota más baja están afectados por todas las cargas debidas al peso de los elementos situados por encima. Del mismo modo, los elementos situados en la parte superior de la catedral solo están afectados por su peso propio y el de los materiales que gravitan sobre ellos. En todo caso, la rigidez del conjunto es relevante en todas las fases. Es decir, el comportamiento de los elementos de una fase no está afectado por las cargas de una fase anterior, pero sí por la rigidez del conjunto de elementos ya construidos.

No se conoce, de forma detallada, el orden temporal de construcción y entrada en carga de los elementos del sector de la cabecera de la Catedral de Girona; sin embargo, sí que se puede establecer una hipótesis con un orden lógico, según el cual, primero se construyeron las capillas laterales, luego la nave del deambulatorio y por último la nave central con el contrafuerte y el arbotante (Figura 58). En este análisis se fija que el relleno de las bóvedas se construye simultánea o inmediatamente después que las propias bóvedas. Según esta hipótesis de construcción, el comportamiento del arbotante y de la parte superior del contrafuerte estarían afectados por el peso de los elementos construidos en la tercera fase y por la rigidez del conjunto de elementos de las tres fases.



**Figura 57.** Esquema con las áreas tributarias en planta y sección utilizadas para la estimación de las cargas sobre las nervaduras de las bóvedas. En color naranja marcamos las cargas sobre las bóvedas de la nave central. Imagen realizada por el autor.

**Figura 58.** En la página siguiente se muestra una hipótesis sobre las fases constructivas y entrada en carga de sus elementos; concretamente: a la izquierda, primera etapa constructiva; al centro, segunda etapa constructiva; y a la derecha, tercera etapa constructiva. Imagen realizada por el autor.



### ***Obtención de un comportamiento estructural de sólo compresiones***

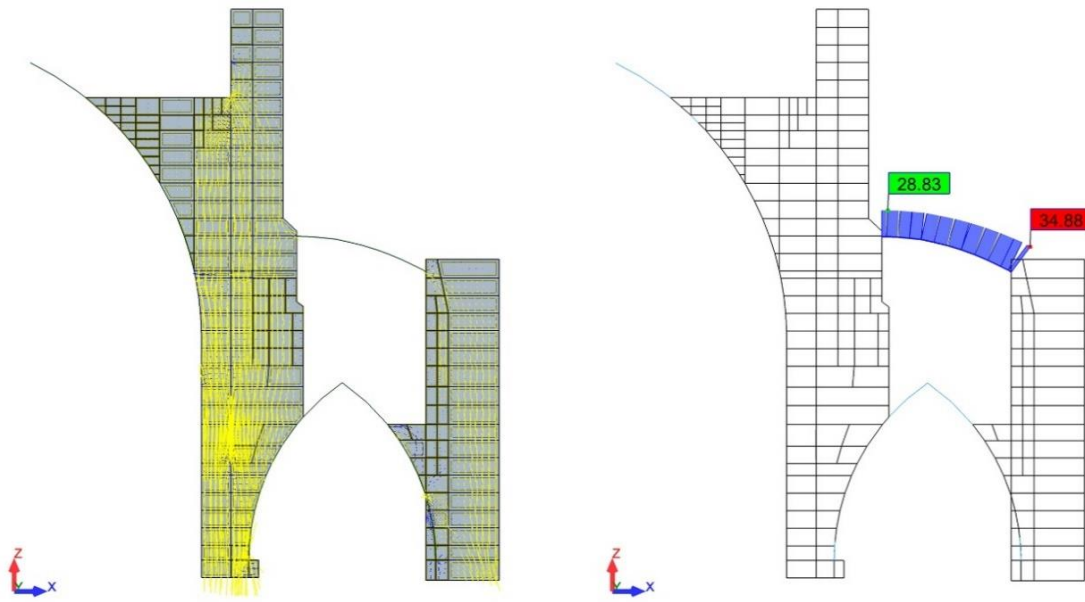
Se puede establecer que una simulación mediante el método de elementos finitos (FEM) tiene un comportamiento mecánico equivalente al de la construcción real cuando el esfuerzo dominante es el de compresión, y los esfuerzos de tracción y momentos flectores son residuales. Este comportamiento se obtiene mediante la introducción sistemática de desconexiones entre elementos en aquellas zonas en las que en un primer cálculo aparecen esfuerzos de tracción. Este proceso de introducción de desconexiones se ha repetido hasta obtener un comportamiento sin esfuerzos de tracción relevantes (Figura 59). Dicho de otro modo, se ha considerado la sillería de piedra de los muros como un conjunto de elementos elásticos separados por líneas potenciales de fractura (López, Oller y Oñate, 1998).

#### **3.4.3. Resultados de la subsección 3.4**

En el análisis mediante FEM del modelo A se ha evaluado el orden de magnitud de los esfuerzos y desplazamientos en el arbotante y los muros adyacentes sometidos al peso propio de los elementos construidos en la tercera fase constructiva (Figura 59). En este modelo A se ha obtenido un esfuerzo de compresión en el extremo más bajo del arbotante de 29.35 KN, lo cual supone una fuerza de empuje horizontal de 28.83 KN (Figura 60). Este valor es ligeramente superior al esfuerzo más pequeño obtenido mediante estática gráfica y presentado en el apartado 3.4.1.1.

Para poder evaluar la incidencia que tiene el arbotante en el comportamiento mecánico del conjunto se han comparado los desplazamientos horizontales obtenidos en el modelo A con los desplazamientos que se obtendrían en un modelo B idéntico, pero sin arbotante.

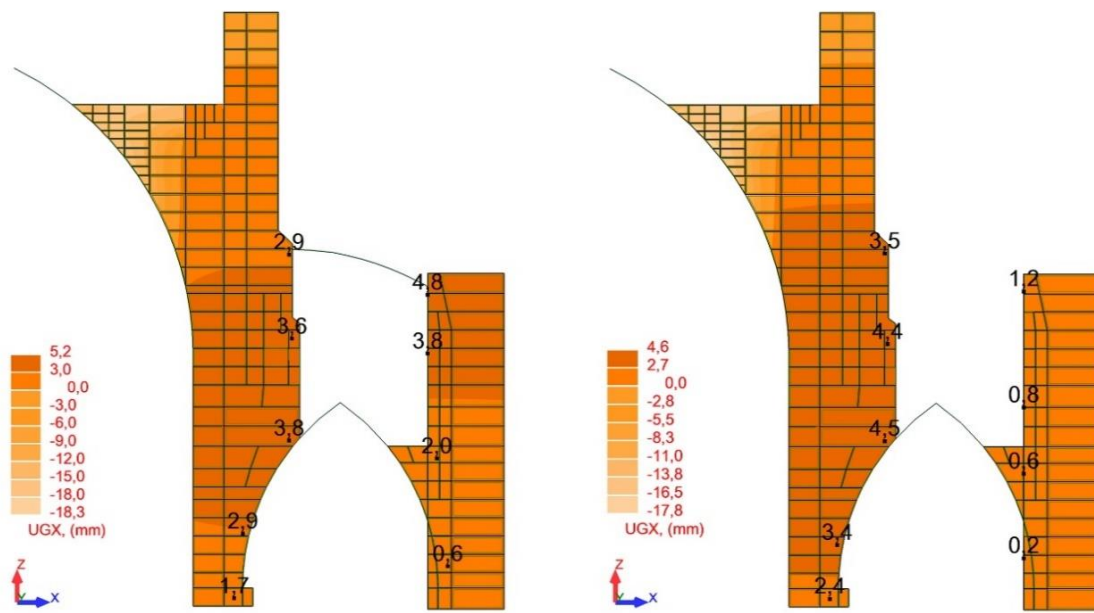
En el modelo A (Figura 60) se observa que los desplazamientos horizontales son distintos en ambos extremos del arbotante, siendo mayor el del extremo inferior al lado del contrafuerte. La diferencia de casi 2 milímetros entre ambos extremos supone un ligero alargamiento del arbotante. Es decir, debido a la rigidez limitada del contrafuerte, la coacción en el extremo inferior del arbotante no es perfecta, sino que se produce un desplazamiento diferencial de 2 milímetros aproximadamente. Este desplazamiento es probablemente una de las causas de que el empuje horizontal del arbotante sea próximo al mínimo necesario para ser estable. Una mayor rigidez del contrafuerte, basada en la aplicación de un módulo de elasticidad mayor al considerado en este modelo, reduciría ese desplazamiento diferencial e incrementaría la fuerza horizontal transmitida por el arbotante. Aun considerando un módulo de elasticidad mayor, nunca debería alcanzar el límite de 51.26 KN, por ser este valor el límite de resistencia a deslizamiento de las hiladas de piedras en la coronación del contrafuerte.



**Figura 59.** Imágenes del modelo A de análisis FEM: a la izquierda, vectores de las fuerzas de compresión de las líneas de descarga en los muros de la parte superior de la sección; a la derecha, esfuerzo axial de compresión en el arbotante debido a las cargas correspondientes a los elementos construidos en la tercera fase. Imagen realizada por el autor.

En el modelo B (Figura 61) se observa que los desplazamientos horizontales en el muro de la nave central a la altura del arbotante incrementan ligeramente (entre un 20 y un 25% aproximadamente) con respecto al modelo A. Esta diferencia indica cierto grado de eficacia en la función estructural del arbotante para evitar la deformación horizontal debida a los empujes de la nave central, aunque no excesivamente significativos debido a la pequeña magnitud de los desplazamientos.



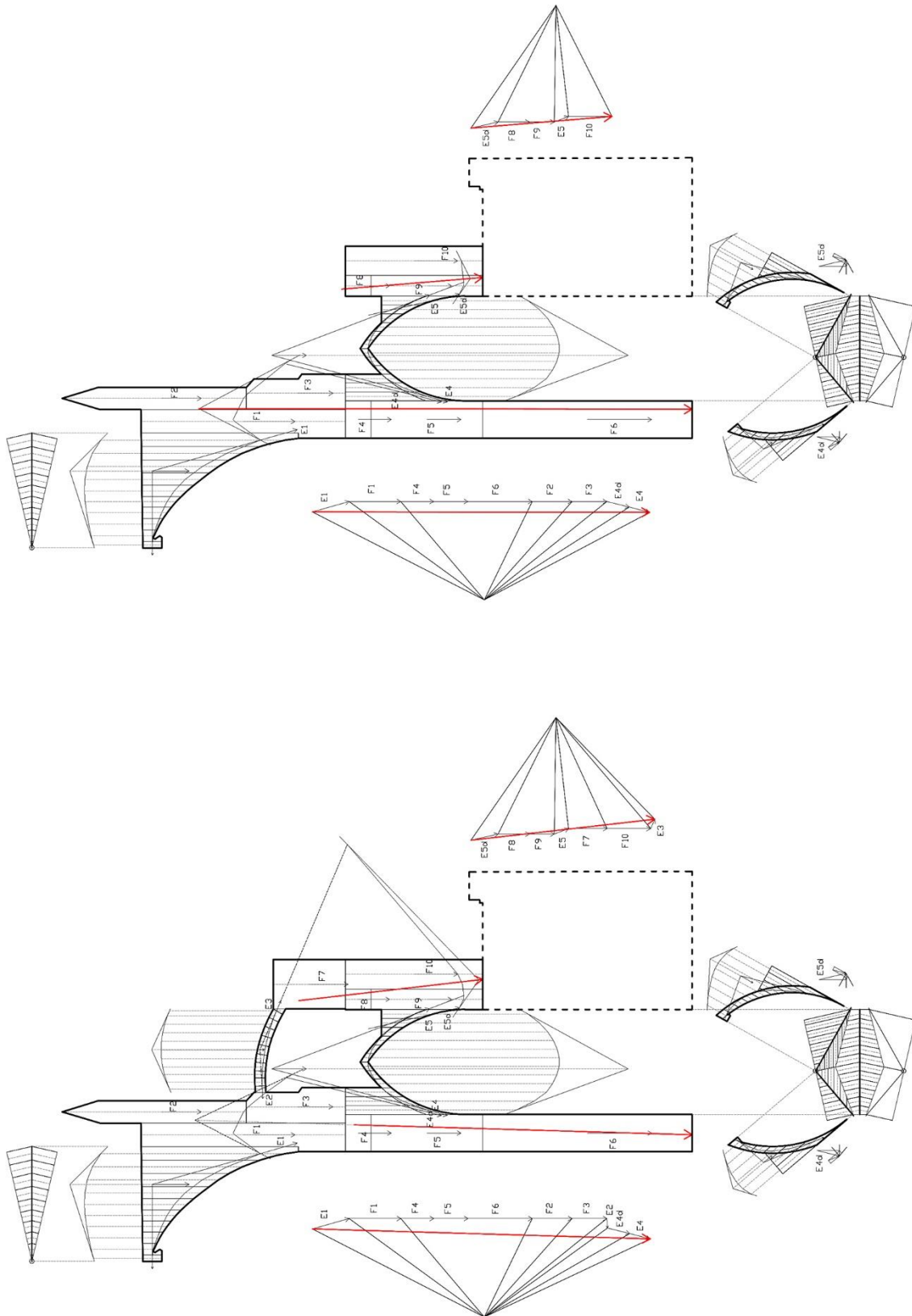


**Figura 60.** Desplazamientos horizontales de los modelos A y B de análisis FEM: a la izquierda, considerando el efecto del arbotante; y a la derecha, sin considerar el efecto del arbotante. Imagen realizada por el autor.

Para corroborar los resultados anteriores mostramos un análisis de estática gráfica del sector estudiado para los dos modelos A y B (Figura 61). Este estudio muestra cómo cambia la posición y la inclinación de la fuerza resultante en función de la presencia o ausencia del arbotante.

**Figura 61.** En la página siguiente se muestra un análisis de estática gráfica del sector estudiado para los modelos A (con arbotante) y B (sin arbotante).

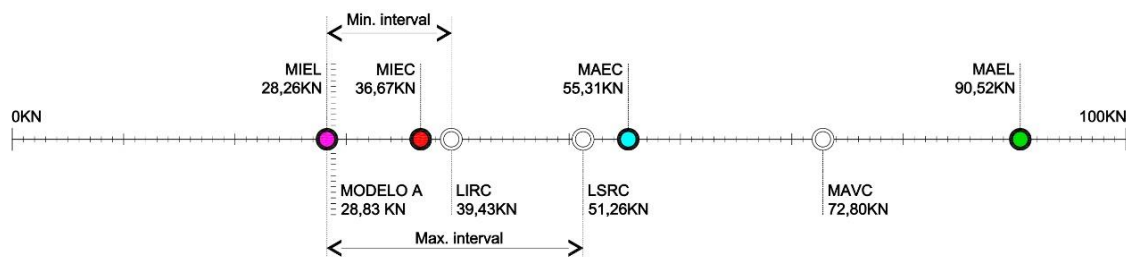
3. Metodología y Resultados: 3.4. Justificación formal de los arbotantes de la Catedral de Girona.



### 3.4.4. Conclusiones parciales de la subsección 3.4

El presente trabajo establece una metodología objetiva para determinar la capacidad mecánica de un arbotante y para evaluar su relevancia estructural en el conjunto arquitectónico. Aplicando esta metodología de análisis estructural a uno de los arbotantes de la Catedral de Girona se ha obtenido su capacidad mecánica considerando los esfuerzos mínimos y máximos de su propia capacidad resistente y además la de su contrafuerte. A partir de esta referencia mecánica, usando la metodología presentada en la sección 3.4.2 y considerando la secuencia de entrada en carga de los elementos en función de sus fases constructivas, se han obtenido unos nuevos valores de esfuerzos que pueden ser comparados con el intervalo de esfuerzos máximos y mínimos propios de la capacidad mecánica del arbotante y de su contrafuerte; presentando así la Figura 62.

Con todo lo anterior, se obtiene que la relevancia estructural del arbotante y su contrafuerte no es significativa si se consideran los desplazamientos horizontales obtenidos en ambos modelos A y B. Esta metodología muestra que la función c) del arbotante analizado es muy poco relevante frente a los esfuerzos del resto de la estructura.



**Figura 62.** Representación gráfica de los valores de empuje resultantes del análisis del arbotante de la Catedral de Girona. En esta figura se resumen los valores más representativos de las comprobaciones realizadas y se indican los intervalos, mínimo y máximo, en los cuales el conjunto de arbotante y contrafuerte sería estable. Imagen realizada por el autor.

## 4. CONCLUSIONES

### 4.1. Levantamiento arquitectónico de los arbotantes de estudio

- Se presenta de forma inédita y con técnicas gráficas de representación arquitectónica los arbotantes considerados en esta investigación.

- Se modela (con técnicas fotogramétricas) y se dibuja (en formato vectorial CAD) la base gráfica para desarrollar toda la investigación.

### 4.2. Revisión de los parámetros geométricos de los arbotantes

- Se establece un método geométrico objetivo para determinar el centro  $O$  y el radio  $R$  de un arbotante. El motivo, como se ha visto, es que los métodos tradicionales están sujetos a arbitrariedad pudiendo ofrecer resultados muy dispares.

- Se clasifican rigurosamente los arcos de los arbotantes según el criterio que estableció Viollet-le-Duc en 1854. Los arbotantes de las tres de las catedrales inglesas analizadas son del tipo B.

- Se muestra que los parámetros que configuran un arbotante: inclinación  $\alpha$ , flecha  $\mathcal{F}$ , y luz  $\mathcal{L}$ , también son aportados de manera no arbitraria por el proceso propuesto, ya que están directamente determinados geoméricamente por el centro y el radio del arco que configura el arbotante.

- Se aplica el método de los tres puntos para determinar el espesor  $\mathcal{E}$  mínimo y se observa que en los arbotantes de las catedrales españolas y francesas se ajusta bastante al espesor real o son inferiores a los construidos.

### 4.3. Nueva definición sobre la inclinación de un arbotante

- Se presenta una nueva propuesta de definición de inclinación, que aquí llamo  $\beta$ , del arco que configura un arbotante teniendo en cuenta su forma y su estática gráfica. Esta inclinación  $\beta$  se define como: la amplitud del ángulo que forma, con una recta horizontal paralela a tierra, la recta

#### 4. Conclusiones.

de regresión de la nube de puntos homogénea encerrada por el borde perimetral del arco del arbotante y sus las líneas de máximo y mínimo empuje.

- Se presenta otra propuesta de definición de inclinación, a efectos de ofrecer una aproximación que simplifica el procedimiento de determinación de la inclinación  $\beta$ , que llamamos  $\gamma$ . Esta propuesta de definición es la resultante de calcular, únicamente, la amplitud del ángulo que forma, con una recta horizontal paralela a tierra, la recta de regresión de la nube de puntos homogénea encerrada por el borde perimetral del arco del arbotante.

- Se muestra que esta nueva inclinación  $\gamma$ , es *a priori* una buena aproximación de la inclinación  $\beta$ .

#### 4.4. Justificación formal de los arbotantes de la Catedral de Girona

- Se presenta una metodología de análisis sobre la función mecánica de un arbotante en función de su morfología.

- En el caso concreto del arbotante de la Catedral de Girona, se muestra que la relevancia estructural del arbotante y su contrafuerte no es significativa si se consideran los desplazamientos horizontales obtenidos en ambos modelos A y B.

- Esta metodología muestra que la función estructural del arbotante analizado es muy poco relevante frente a los esfuerzos del resto de la estructura.

Además de ilustrar resultados gráficos y presentarlos de forma inédita, con el fin de relacionar transversalmente las conclusiones anteriores, expongo resumidamente lo siguiente:

La mínima expresión formal de un arbotante se concreta, como ya indicaron Viollet-Le-Duc (Viollet-Le-Duc, 1996) y a Auguste Choisy (Choisy, 1899), en un puntal inclinado. Su inclinación, su geometría y su materia son los conceptos que deben garantizar su principal función mecánica. El parámetro de inclinación  $\alpha$  condiciona particularmente su estabilidad y, dada su importancia, la presente investigación ha constatado que este ángulo –respecto el plano horizontal– condiciona directamente los otros parámetros geométricos que configuran un arbotante; concretamente: la flecha  $\mathcal{F}$ , la luz  $\mathcal{L}$  y el espesor  $\mathcal{E}$  de su contrafuerte. Dada esta relevancia formal, la presente investigación ha demostrado de formar objetiva cómo determinar este parámetro de inclinación teniendo en cuenta todas las alteraciones formales que un elemento patrimonial centenario ha podido padecer (desgaste, deterioro, deformaciones estructurales,

daños mecánicos o humanos, etc.) y como consecuencia, se demuestra cómo el resto de los parámetros geométricos quedan directamente correlacionados.

Históricamente el parámetro de inclinación  $\alpha$  ha estado atribuido únicamente al borde del arco inferior que configura un arbotante. Como se ha dicho a lo largo de este trabajo, y como cualquier persona podría deducir, esta inclinación no representa a toda la morfología de todo el arbotante y, ni mucho menos, tiene representación con su principal función mecánica. Es por ello por lo que, con los resultados presentados en el primer bloque, esta investigación determina dos tipos de inclinaciones que tratan de solucionar las deficiencias anteriores: un parámetro de inclinación que viene determinado por un análisis básico de estática gráfica del arbotante y que en el trabajo llamo inclinación  $\beta$ , y un parámetro de inclinación que viene determinado por un análisis de regresión geométrica de la forma de todo el arbotante que en el trabajo llamo inclinación  $\gamma$ . Con el fin de concretar, aún más este parámetro tan relevante de un arbotante, y para evitar realizar la media aritmética de ambos parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ , se ha realizado un estudio estadístico que concluye que un parámetro puede ser explicado por el otro. Esto significa que la inclinación obtenida por medios de regresión geométrica y que considera toda la morfología del arbotante representa su forma, su mecánica y además a todo su arbotante.

Además de la definición y concreción de los parámetros geométricos de un arbotante, esta investigación ha tratado de no desvincular su contenido a la esencia de un arbotante. La función mecánica y su morfología son los conceptos que el tercer bloque trata de relacionar vía el análisis de uno de los arbotantes de la catedral de la ciudad de la Universitat de Girona. Aquí se establece un método, aplicable a cualquier arbotante, que determina el nivel de influencia mecánica en función de su morfología. Para el caso concreto de estudio, se determina que la función estructural de un arbotante de la Catedral de Girona es muy poco relevante frente a los esfuerzos del resto de la estructura de la catedral. Por lo tanto, se ha determinado de forma numérica lo que de forma intuitiva cualquier investigador esperararía; es decir, los arbotantes de la Catedral de Girona tienen un ángulo de inclinación menor y una sección resistente más pequeña si los comparamos con el resto de los arbotantes analizados en el presente trabajo.

Con todo, la presente investigación ha tratado de ampliar los conceptos geométricos de uno de los elementos más representativos de la arquitectura gótica. Es cierto que los procesos de análisis se alejan, inevitable e imprescindiblemente, de los recursos y metodologías aplicadas en las áreas de Historia del Arte; no obstante, los resultados logrados establecen una base documental totalmente compatible para respaldar estudios de este ámbito.



## Referencias bibliográficas

- Alexakis, H., N. Makris. 2014. Limit equilibrium analysis of masonry arches. *Archive of Applied Mechanics*, 85 (9), pp. 1363-1381. doi: 10.1007/s00419-014-0963-6.
- Alomar, G. 1970. Guillermo Sagrera y la arquitectura gótica del siglo XV. Barcelona: Publicaciones del Colegio de Arquitectos de Cataluña y Baleares y Ed. Blume.
- Angulo, F. 2013. La fotogrametría digital: una herramienta para la recuperación de arquitecturas perdidas. *Virtual Archaeology Review*, 4 (8), pp.140-144.
- Aparicio, P., Carmona, J.D., Fernández, M., Martín, P.M. 2014. Fotogrametría involuntaria: rescatando información geométrica en 3D de fotografías de archivo. *Virtual Archaeology Review*, 5 (10), pp. 11-20.
- Blas Orive, A. 2019. El puntal de piedra, estática y estética del arbotante gótico. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- Blondel, F. 1675-1683. *Cours d'architecture*. Paris: Lambert Roulland.
- Bony, J. 1943. *Essai sur la spiritualité de deux cathédrales: Notre-Dame de Paris et Saint-Etienne de Bourges*. Paris.
- Bony, J. 1985. *French Gothic Architecture of the Twelfth and Thirteenth Centuries*. California.
- Bork, R, Mark, R. y Murray, S. 1997. The Openwork Flying Buttresses of Amiens Cathedral: "Postmodern Gothic" and the Limits of Structural Rationalism. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 56 (4), pp. 478-493.
- Cassanelli, R. 1995. *Talleres de arquitectura en la edad media*. Barcelona: Moleiro.
- Choisy, A. 1899. *Histoire de l'architecture*. Vol. 2. Paris: Gauthier - Villars.
- Courtenay, L. 1997. *The engineering of medieval cathedrals*. 1st ed. London: Routledge.
- Derand, F. 1643. *L'architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes*. Paris: Sebastian Cramoisy.
- Durliat, M. 1964. *L'art al Regne de Mallorca*. Mallorca: Editorial Moll.



- Fitchen, J. 1955. A comment on the function of the upper flying buttress in French Gothic architecture. *Gazette des Beaux-Arts*, 45, pp. 69-90.
- Fitchen, J. 1961. *The Construction of Gothic Cathedrals*. Oxford.
- Frankl, P. 2002. *Arquitectura gótica*. España.
- Freigang, C. 2002. La catedral de Narbona com a referent directe de les Barcelona i Girona, L'art gòtic a Catalunya. *Arquitectura I: catedrals, monestirs i altres edificis religiosos*. 1st ed. Barcelona: Enciclopèdia Catalana.
- García, R. y Calvo, J. 2015. El arco por esquina y rincón en los tratados y manuscritos de cantería del renacimiento hispánico. *Revista EGA*, 25, pp. 128-137. doi: <https://doi.org/10.4995/ega.2015.3704>.
- Gonen, S., S. Soyoz. 2021. Investigation on the elasticity modulus of stone masonry. *Structures*, 30, pp. 378-389. doi: 10.1016/j.istruc.2021.01.035.
- Grussenmeyer, P., Landes, T., Voegtle, T., y Ringle, K. 2008. Comparison methods of terrestrial laser scanning, photogrammetry and tacheometry data for recording of cultural heritage buildings. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Science*, 37, pp. 213-18.
- Hahnloser, H. 1972. *Villard de Honnecourt. Kritische Gesamtausgabe des Bauhüttenbuches ms. fr 19093 der Pariser Nationalbibliothek*, 2nd ed. Graz.
- Heyman, J. 1966. The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, 2, pp. 249-279.
- Heyman, J. 1969. The safety of masonry arches. *International Journal of Mechanical Science*, 11, pp. 363-385.
- Heyman, J. 1995. *The stone skeleton: Structural engineering of masonry architecture*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Henriot, J. 1978. Recherches sur les premiers arc-boutants. *Un jalon: Saint-Martin-d'Etampes. Bulletin monumental*, 136, pp. 309-323.
- Henriot, J. 1982. La cathedrale Saint-Etienne de Sens: Le parti du premier maître et ses campagnes du XIIe siècle. *Bulletin monumental*, 140, pp. 152-212.
- Huerta, S. 2006. Geometry and equilibrium: The gothic theory of structural design. *Structural Engineer*, 84 (2), pp. 23-28.

#### 4. Conclusiones.

- Huerta, S. 2007. Las reglas estructurales del gótico tardío alemán. Actas del Quinto Congreso Nacional de Historia de la Construcción, M. Arenillas, C. Segura, F. Bueno, S. Huerta (eds.), Madrid: I. Juan de Herrera, pp. 519-532.
- Huerta, S. 2019. El arco límite: breve historia de un problema estructural. Paper presented at XXI Congreso Nacional de Historia de la Construcción. Soria, Spain. October 9-12.
- Kimpel, D. 1990. Ars et radio. Dalla torre di Babele al ponte di Rialto, pp.127-146. Palermo.
- Kimpel, D. 1989. Les bâtisseurs des cathédrales gothiques, pp. 91-102. Strasbourg.
- Kimpel, D. 1987. Artistes, artisans et production artistique au Moyen Âge: Colloque international, pp. 349-363. Paris.
- Kimpel, D., y R. Suckale. 1985. Die gotische Architektur in Frankreich: 1130-1270. München: Hirmer Verlag.
- Lefevre-Pontalis, E. 1919. Etude historique et archiologique sur l'iglise de Saint-Germain-des-Pris. Congrès archiologique 82, pp. 363.
- Llopis-Pulido, V. et al. 2019. Analysis of the Structural Behavior of the Historical Constructions: Seismic Evaluation of the Cathedral of Valencia. Int. J. Archit. Herit, 13, pp. 205–214. doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.15.102>.
- León, L. y Russo, F. 2008. Parámetros geométricos-resistentes de la Catedral de León en comparación con otras catedrales góticas. IV Congreso de la Asociación Científico-Técnico del Hormigón Estructural - Congreso Internacional de Estructuras, Valencia, España.
- López, A., Rabasa, E. y Alonso, M.A. 2020. Trazados y ejecución de las bóvedas de la cabecera de la iglesia de Priego. Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción, Soria, España.
- López, J., S. Oller, y E. Oñate. 1998. Cálculo del comportamiento de la mampostería mediante elementos finitos. Barcelona: CIMNE.

- Magenes, G., A. Penna, A. Galasco y M. Rota. 2010. Experimental characterization of Stone masonry mechanical properties. Paper presented at the 8th International Masonry Conference. Dresden, Germany. July 4-8.
- Mark, R. 1982. Experiments in gothic structure. Cambridge, Mass.: The MIT Press.
- Milosevic, J., A. Sousa Gago, M. Lopes y R. Bento. 2013. Experimental assessment of shear strength parameters on rubble masonry specimens. *Construction and Building Materials*, 47, pp. 1372-1380. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2013.06.036.
- Molina, J. 2007. De genere militari ex utroque parente. La nobleza eclesiástica y los inicios de la Catedral Gótica de Gerona. *Anuario de estudios medievales*, 37 (1), pp. 741-780. doi: <https://doi.org/10.3989/aem.2007.v37.i2.52>.
- Moya, D. 2011. El origen de los arbotantes en la historia de la Arquitectura. En el X Certamen Arquímedes de Introducción a la Investigación Científica. Ministerio de Educación y Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- Navarro, P. y Rabasa, E. 2018. Bóvedas construidas como arcos en la arquitectura de Baldomar. *Revista EGA*, 23 (32), pp. 142-153. doi: <https://doi.org/10.4995/ega.2018.8606>.
- Nikolinakou, M. K., Tallon, A. J. y Ochsendorf, J. A. 2005. Structure and form of early Gothic flying buttresses. *Revue Européenne de Génie Civil*, 9 (9-10), pp. 1191-1217.
- Oñate, E. 1995. Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal. Barcelona: CIMNE.
- Pérez, JA. 2010. Apuntes de Fotogrametría III. Universidad de Extremadura. Mérida.
- Quintas, V. 2017. Structural analysis of flying buttresses. *European Journal of environmental and Civil Engineering*, 21 (4), pp. 471-507.
- Rankine, W. J. M. 1858. *Manual of applied mechanics*. London: C. Griffin and Co.
- Recht, R. 1989. *Les bâtisseurs des cathédrales gothiques*. Strasbourg.
- Richard, D. 2016. Analysis of architectural geometries affecting stress distributions of gothic flying buttresses (Tesis doctoral). Department of Architectural Engineering and Construction Science. College of Engineering, Kansas, Estados Unidos.
- Roca, P. 2001. Studies on the construction of Gothic Cathedrals. *Historical Constructions*, P.B. Lourenço, P. Roca (Eds.), Guimarães, pp- 71-90.

#### 4. Conclusiones.

- Roca, P., M. Cervera, L. Pelà, R. Clemente, y M. Chiumenti, 2013. Continuum FE Models for the Analysis of Mallorca Cathedral. *Engineering Structures*, 46, pp. 653-670. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.08.005>.
- Salcedo, M., y Calvo, J. 2008. De la práctica constructiva a los textos de cantería: los pasos abovedados en la cabecera de la catedral de Granada. *Revista EGA*, 23 (32), pp. 154-163. doi: <https://doi.org/10.4995/ega.2018.9808>.
- Samper, A., B. Herrera y A. Costa-Jover. 2022. Systematic calculation of flying buttress parameters by means of geometric regression. *Journal of Cultural Heritage*, 54, pp. 21-30. doi: <https://doi.org/10.1016/j.culher.2022.01.005>.
- Samper, A., R. Martín-Sáiz y B. Herrera. 2022. On the inclination of a flying buttress arch. *Nexus Network Journal*, 24, pp. 897-911. doi: <https://doi.org/10.1007/s00004-022-00619-7>.
- Stanley, D. J. 2006. The original buttressing of abbot Suger's Chever at the abbey of Saint-Denis. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 65, pp. 353.
- Sureda, M. 2005. *Catedral de Girona*. Barcelona: Ediciones Aldeasa.
- Tarrío, I. 2015. Los arbotantes en el sistema de contrarresto de construcciones medievales: teorías sobre su comportamiento estructural. *Actas del Noveno Congreso Nacional y Primer Congreso Internacional Hispanoamericano de Historia de la construcción*. S. Huerta y P. Fuentes (eds.). Madrid: I. Juan de Herrera, pp. 1675-1685.
- Ungewitter, G y Mohrmann, K. 1890. *Lehrbuch der Gotischen Konstruktionen*. Leipzig: Weigel Nachfolger.
- Vasconcelos, G. y P. B. Lourenço. 2009. Experimental characterization of stone masonry in shear and compression. *Construction and Building Materials*, 23 (11), pp. 3337-3345. doi: [10.1016/j.conbuildmat.2009.06.045](https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2009.06.045).
- Velilla, C. et al. 2019. Rampant Arch and Its Optimum Geometrical Generation. *Symmetry*, 11 (5), pp. 627.
- Viollet le Duc, E. 1854. *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. B. Bance, París.
- Viollet-Le-Duc, E. 1996. *La construcción medieval*. Madrid: Instituto Juan Herrera.

- Willis, R. 1842. On the construction of the vaults of the Middle Ages. Transactions of the Royal Institute of British Architects Vol.1, part 2. London: Longman.
- Wirth, J. 2015. Villard de Honnecourt, Architecte du XIII siècle. Genève.

## ANEXOS

A continuación, se presentan los códigos que se han programado en C++ correspondientes a los pasos geométricos aplicados en el presente trabajo con el fin de agilizar y simplificar el proceso de cálculo. Aunque existen múltiples programas comerciales que realizan los mismos cálculos y aunque los procedimientos geométricos son básicos, el hecho de usar un programa propio ha permitido tener un mejor control de los resultados y aplicarlos de forma particular a los programas de dibujo usados en esta investigación. Los pasos geométricos programados son tres: cálculo de la cónica de regresión, cálculo de la circunferencia de regresión y cálculo de la recta de regresión.

Además, se presentan las tres publicaciones principales las cuales justifican toda la investigación presentada.

### Código para el cálculo de la cónica de regresión

```
#include <winbgim.h> /* subrutinas de dibujo*/
#include <stdlib.h> /* subrutinas standar de signación de memoria*/
#include <math.h> /* subrutinas matemáticas */
#include <stdio.h> /* subrutinas standar de entrada y salida */
#include <string.h> /* subrutinas de manejo de strings */

void pivota_fila( double *mat ,double *b, int a , int j )
{
    int k,c;
    double x,y;

    x=fabs (mat[ (j-1) *a+(j-1) ]);

    for(k=j;k<=a;k++)
    {
        y=fabs (mat[ (k-1) *a+(j-1) ]);
        if(y>x)
        {
            for(c=1;c<=a;c++)
            {
                x=mat[ (j-1) *a+(c-1) ];
                mat[ (j-1) *a+(c-1) ]=mat[ (k-1) *a+(c-1) ];
                mat[ (k-1) *a+(c-1) ]=x;
            }
            x=b[j-1];
            b[j-1]=b[k-1];

            b[k-1]=x;
            x=y;
        }
    }
    if(fabs (x)<=1.e-18)
    {
        printf("\n Matriz singular \n");
        system("pause");
        exit(1);
    }
    return;
}

void GAUSS( double *mat ,double *b, int a )
{
    int i,j,k,y;
    double x;
```

Anexos: Código para el cálculo de la cónica de regresión.

```

j=1;
for (i=2; i<=a; i++)
{
    y=i;
    do
    {
        pivota_fila(mat,b,a,j);
        if (fabs(mat[(j-1)*a+(j-1)])>1.e-15)
        {
            x=(mat[(i-1)*a+(j-1)])/(mat[(j-1)*a+(j-1)]);
            for (k=j+1; k<=a; k++)
            {
                mat[(i-1)*a+(k-1)]=mat[(i-1)*a+(k-1)]-(x*mat[(j-1)*a+(k-1)]);
            }
            b[i-1]=b[i-1]-x*b[j-1];
            mat[(i-1)*a+(j-1)]=0;
        }
        else{mat[(j-1)*a+(j-1)]=0.;}
        i++;
    }
    while (i<=a);
    i=y;
    j++;
}
return;
}

void resolucio( double *mat ,double *b, int a )
{
    int i,h;
    double res;

    if (fabs(mat[(a-1)*a+(a-1)])>1.e-10)
    {
        b[a-1]=b[a-1]/mat[(a-1)*a+(a-1)];
    }
    else{b[a-1]=0.;}

    for (i=a-1; i>=1; i--)
    {
        res=0;
        for (h=i+1; h<=a; h++)
        {
            res=( mat[(i-1)*a+(h-1)] * b[h-1] )+res;
        }
        if (fabs(mat[(i-1)*a+(i-1)])>1.e-15)
        {
            b[i-1]=(b[i-1]-res)/mat[(i-1)*a+(i-1)];
        }
    }
    return;
}

main()
{
    printf("PROGRAMA REGRESION_POR_CONICA_T2 \n\n");
    printf("GIRANDO \n\n");
    printf("Entra el fichero NUBE_2D_INICIAL_ARBOTANTE.txt \n\n");
    printf("Formato de entrada: LINEA A LINEA \n");
    printf(" primera linea es el numero de puntos \n");
    printf(" resto de lineas sin comas \n \n");

    int dim1;

    double *x,*y, *nada1, *nada2, *xaux, *yaux;

    char nombrefich[80]="NUBE_2D_INICIAL_ARBOTANTE.txt";
    FILE *fichero;
    FILE *fichero2;
    FILE *fichero3;
    fichero = fopen(nombrefich,"r");
}

```

Anexos: Código para el cálculo de la cónica de regresión.

```

if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
}
else
{
    fscanf(fichero,"%d \n",&dim1);
    printf("La cantidad de puntos de la nube es = %d \n \n",dim1);
}

x=(double*)malloc(dim1*sizeof(double));
y=(double*)malloc(dim1*sizeof(double));

double giro;
printf("Introduce el angulo de giro en grados sexagesimales:\n");
scanf("%lf",&giro);
giro=acos(-1.)*giro/180.;

int i;
for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    fscanf(fichero,"%lf %lf %lf %lf\n",&nadal,&yaux,&xaux,&nada2);
    printf("%d %lf %lf\n",i, xaux,yaux);
    x[i-1]=xaux*cosl(giro)-yaux*sinl(giro);
    y[i-1]=xaux*sinl(giro)+yaux*cosl(giro);
}

fclose(fichero);

int dim=5,j;
double *b,*mat;

mat=(double*)malloc(dim*dim*sizeof(double));
b=(double*)malloc(dim*sizeof(double));

for (j=1;j<=dim;j++)
{
    b[j-1]=0.;
}

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    b[1-1]=b[1-1]-pow(x[i-1],2);
    b[2-1]=b[2-1]-pow(y[i-1],2);
    b[3-1]=b[3-1]-x[i-1]*y[i-1];
    b[4-1]=b[4-1]-x[i-1];
    b[5-1]=b[5-1]-y[i-1];
}

for (i=1;i<=dim;i++)
{
    for (j=1;j<=dim;j++)
    {
        mat[(i-1)*dim+(j-1)]=0.;
    }
}

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    mat[(1-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(1-1)]+pow(x[i-1],4);
    mat[(1-1)*dim+(2-1)]=mat[(1-1)*dim+(2-1)]+pow(x[i-1],2)*pow(y[i-1],2);
    mat[(1-1)*dim+(3-1)]=mat[(1-1)*dim+(3-1)]+pow(x[i-1],3)*y[i-1];
    mat[(1-1)*dim+(4-1)]=mat[(1-1)*dim+(4-1)]+pow(x[i-1],3);
    mat[(1-1)*dim+(5-1)]=mat[(1-1)*dim+(5-1)]+pow(x[i-1],2)*y[i-1];
    mat[(2-1)*dim+(2-1)]=mat[(2-1)*dim+(2-1)]+pow(y[i-1],4);
    mat[(2-1)*dim+(3-1)]=mat[(2-1)*dim+(3-1)]+x[i-1]*pow(y[i-1],3);
    mat[(2-1)*dim+(4-1)]=mat[(2-1)*dim+(4-1)]+x[i-1]*pow(y[i-1],2);
    mat[(2-1)*dim+(5-1)]=mat[(2-1)*dim+(5-1)]+pow(y[i-1],3);
    mat[(3-1)*dim+(3-1)]=mat[(3-1)*dim+(3-1)]+pow(x[i-1],2)*pow(y[i-1],2);
    mat[(3-1)*dim+(4-1)]=mat[(3-1)*dim+(4-1)]+pow(x[i-1],2)*y[i-1];
    mat[(3-1)*dim+(5-1)]=mat[(3-1)*dim+(5-1)]+x[i-1]*pow(y[i-1],2);
    mat[(4-1)*dim+(4-1)]=mat[(4-1)*dim+(4-1)]+pow(x[i-1],2);
    mat[(4-1)*dim+(5-1)]=mat[(4-1)*dim+(5-1)]+x[i-1]*y[i-1];
    mat[(5-1)*dim+(5-1)]=mat[(5-1)*dim+(5-1)]+pow(y[i-1],2);
}

```



Anexos: Código para el cálculo de la cónica de regresión.

```

}

mat[(2-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(2-1)];
mat[(3-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(3-1)];
mat[(3-1)*dim+(2-1)]=mat[(2-1)*dim+(3-1)];
mat[(4-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(4-1)];
mat[(4-1)*dim+(2-1)]=mat[(2-1)*dim+(4-1)];
mat[(4-1)*dim+(3-1)]=mat[(3-1)*dim+(4-1)];
mat[(5-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(5-1)];
mat[(5-1)*dim+(2-1)]=mat[(2-1)*dim+(5-1)];
mat[(5-1)*dim+(3-1)]=mat[(3-1)*dim+(5-1)];
mat[(5-1)*dim+(4-1)]=mat[(4-1)*dim+(5-1)];

GAUSS(mat,b,dim);
resolucio(mat,b,dim);
printf(" \n");
printf("Sale el fichero ECUACION_DE_CONICA_DE_REGRESION.txt \n\n");
printf("La ecuacion es Bx^2+Cy^2+Dxy+Ex+Fy+1=0 con \n");
printf("B=%lf \n",b[1-1]);
printf("C=%lf \n",b[2-1]);
printf("D=%lf \n",b[3-1]);
printf("E=%lf \n",b[4-1]);
printf("F=%lf \n \n",b[5-1]);

double c1,c2;
c1=(b[5-1]*b[3-1]-2.*b[2-1]*b[4-1])/(b[3-1]*b[3-1]-4.*b[1-1]*b[2-1]);
c2=- (b[3-1]*b[4-1]-2.*b[1-1]*b[5-1])/(b[3-1]*b[3-1]-4.*b[1-1]*b[2-1]);

printf("El centro es (%lf, %lf) \n \n",c1 ,c2);

fichero2 = fopen("ECUACION_DE_CONICA_DE_REGRESION.txt","w");
if(fichero2==NULL)
{
printf("Error abiendo el fichero.\n");
}
else
{
fprintf(fichero2,"La ecuacion es Bx^2+Cy^2+Dxy+Ex+Fy+1=0 con \n");
fprintf(fichero2,"B=%10.16lf \n",b[1-1]);
fprintf(fichero2,"C=%10.16lf \n",b[2-1]);
fprintf(fichero2,"D=%10.16lf \n",b[3-1]);
fprintf(fichero2,"E=%10.16lf \n",b[4-1]);
fprintf(fichero2,"F=%10.16lf \n \n",b[5-1]);
fprintf(fichero2,"El centro es (%lf, %lf) \n \n", c1,c2);
}

double xr, yr;
double radicando;

double l1, l2;
int cantidad, cantidad_final=0, k=0;
printf("Introduce el numero inicial de puntos de la elipse,\n");
printf("(por defecto pon 10.000): \n");
scanf("%d",&cantidad);
printf("Introduce la coordenada x del extremo inicial de la elipse,\n");
printf("(por defecto pon -60): \n");
scanf("%lf",&l1);
printf("Introduce la coordenada x del extremo final de la elipse,\n");
printf("(por defecto pon 20): \n");
scanf("%lf",&l2);

fichero3 = fopen("ELIPSE_DE_REGRESION_AUTOCAD.txt","w");
if(fichero3==NULL)
{
printf("Error abiendo el fichero 2.\n");
}

for (i=0;i<=cantidad;i++)
{
xr=l1+(l2-l1)*float(i)/float(cantidad);
radicando=pow((b[3-1]*xr+b[5-1]),2)-4.*b[2-1]-4.*b[2-1]*b[4-1]*xr-4.*b[1-1]*b[2-1]*xr*xr;
if (radicando >= 0. )
{

```

Anexos: Código para el cálculo de la cónica de regresión.

```

        yr=(-(b[3-1]*xr+b[5-1])+sqrtl(radicando))/(2.*b[2-1]);
        k=k+1;
        fprintf(fichero3,"%4.10lf,%4.10lf\n",xr,yr);
        cantidad_final=cantidad_final+1;
    }
}

for (i=0;i<=cantidad;i++)
{
    xr=l1+(l2-l1)*float(i)/float(cantidad);
    radicando=pow((b[3-1]*xr+b[5-1]),2)-4.*b[2-1]-4.*b[2-1]*b[4-1]*xr-4.*b[1-
1]*b[2-1]*xr*xr;
    if (radicando >= 0. )
    {
        yr=(-(b[3-1]*xr+b[5-1])-sqrtl(radicando))/(2.*b[2-1]);
        k=k+1;
        fprintf(fichero3,"%4.10lf,%4.10lf\n",xr,yr);
        cantidad_final=cantidad_final+1;
    }
}

fclose(fichero3);
printf(" \n");
printf("Sale el fichero ELIPSE_DE_REGRESION_AUTOCAD.txt con %d
puntos.\n\n",cantidad_final);

printf("Sale el fichero PARAMETROS_PARA_INCLINACION_Y_CANONICA.txt con %d
puntos.\n\n");
fichero = fopen("PARAMETROS_PARA_INCLINACION_Y_CANONICA.txt","w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abiendo el fichero.\n");
}
else
{
    fprintf(fichero,"%10.16lf \n",b[1-1]);
    fprintf(fichero,"%10.16lf \n",b[2-1]);
    fprintf(fichero,"%10.16lf \n",b[3-1]);
    fprintf(fichero,"%10.16lf \n",b[4-1]);
    fprintf(fichero,"%10.16lf \n \n",b[5-1]);
}

fclose(fichero);

double media;
media=0.;

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    media=media+y[i-1];
}
media=media/float(dim1);

double numerador, denominador;
double numerador2;
double yrmas, yrmenos;

denominador=0.;
numerador2=0.;

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    radicando=pow((b[3-1]*x[i-1]+b[5-1]),2)-4.*b[2-1]-4.*b[2-1]*b[4-1]*x[i-1]-
4.*b[1-1]*b[2-1]*x[i-1]*x[i-1];
    if (radicando >= 0. )
    {
        yrmas=(-(b[3-1]*x[i-1]+b[5-1])+sqrtl(radicando))/(2.*b[2-1]);
        yrmenos=(-(b[3-1]*x[i-1]+b[5-1])-sqrtl(radicando))/(2.*b[2-1]);

        if ( fabsl( y[i-1]-yrmas ) > fabsl( y[i-1]-yrmenos ) )

```

Anexos: Código para el cálculo de la cónica de regresión.

```
        {
            yr=yrmenos;
        }
        else

            denominador=denominador+pow(y[i-1]-media,2);
            numerador2=numerador2+pow(y[i-1]-yr,2);
    }

    double det2, adj2;

    det2=1.-numerador2/denominador;
    adj2=(1.-(1-det2)*(float(dim1)-1.)/(float(dim1)-5.-1.));

    printf("Coeficiente ajustado de determinacion = %lf \n",adj2*100.);
    double adjaux;
    adjaux=adj2*100.;

    fprintf(fichero2,"Coeficiente de determinacion ajustado= %10.251f \n",adjaux);
    fclose(fichero2);

    system("pause");
```

## Código para el cálculo de la circunferencia de regresión

```
#include <winbgim.h> /* subrutinas de dibujo*/
#include <stdlib.h> /* subrutinas standar de signación de memoria*/
#include <math.h> /* subrutinas matemáticas */
#include <stdio.h> /* subrutinas standar de entrada y salida */
#include <string.h> /* subrutinas de manejo de strings */

void pivota_fila( double *mat ,double *b, int a , int j )
{
    int k,c;
    double x,y;

    x=fabs(mat[(j-1)*a+(j-1)]);

    for(k=j;k<=a;k++)
    {
        y=fabs(mat[(k-1)*a+(j-1)]);
        if(y>x)
        {
            for(c=1;c<=a;c++)
            {
                x=mat[(j-1)*a+(c-1)];
                mat[(j-1)*a+(c-1)]=mat[(k-1)*a+(c-1)];
                mat[(k-1)*a+(c-1)]=x;
            }
            x=b[j-1];
            b[j-1]=b[k-1];

            b[k-1]=x;
            x=y;
        }
    }
    if(fabs(x)<=1.e-18)
    {
        printf("\n Matriz singular \n");
        system("pause");
        exit(1);
    }
    return;
}

void GAUSS( double *mat ,double *b, int a )
{
    int i,j,k,y;
    double x;

    j=1;
    for(i=2;i<=a;i++)
    {
        y=i;
        do
        {
            pivota_fila(mat,b,a,j);
            if(fabs(mat[(j-1)*a+(j-1)])>1.e-15)
            {
                x=(mat[(i-1)*a+(j-1)])/(mat[(j-1)*a+(j-1)]);
                for(k=j+1;k<=a;k++)
                {
                    mat[(i-1)*a+(k-1)]=mat[(i-1)*a+(k-1)]-(x*mat[(j-1)*a+(k-1)]);
                }
                b[i-1]=b[i-1]-x*b[j-1];
                mat[(i-1)*a+(j-1)]=0;
            }
            else{mat[(j-1)*a+(j-1)]=0.;}
            i++;
        }
        while(i<=a);
        i=y;
        j++;
    }
    return;
}
```

Anexos: Código para el cálculo de la circunferencia de regresión.

```

}

void resolucio( double *mat ,double *b, int a )
{
    int i,h;
    double res;

    if(fabs(mat[(a-1)*a+(a-1)])>1.e-10)
    {
        b[a-1]=b[a-1]/mat[(a-1)*a+(a-1)];
    }
    else{b[a-1]=0.;}

    for(i=a-1;i>=1;i--)
    {
        res=0;
        for(h=i+1;h<=a;h++)
        {
            res=( mat[(i-1)*a+(h-1)] * b[h-1] )+res;
        }
        if(fabs(mat[(i-1)*a+(i-1)])>1.e-15)
        {
            b[i-1]=(b[i-1]-res)/mat[(i-1)*a+(i-1)];
        }
    }

    }
    return;
}

main()
{

    printf("PROGRAMA REGRESION_POR_CIRCUNFERENCIA_Y_DEFORMACION_T2  \n\n");
    printf("GIRANDO  \n\n");
    printf("NUEVO FORMATO  \n\n");
    printf("Entra el fichero 1_.txt \n\n");

    int dim1;

    double *x,*y, xaux, yaux;

    char nombrefich[80]="1_.txt";
    FILE *fichero;
    FILE *fichero2;
    fichero = fopen(nombrefich,"r");
    if(fichero==NULL)
    {
        printf("Error abriendo el fichero 1_.txt \n");
    }
    else
    {
        fscanf(fichero,"%d \n",&dim1);
        printf("La cantidad de puntos de la nube es = %d \n \n",dim1);
    }
    x=(double*)malloc(dim1*sizeof(double));
    y=(double*)malloc(dim1*sizeof(double));

    double giro;
    printf("Introduce el angulo de giro en grados sexagesimales:\n");
    printf("Por defecto pon 0 grados sexagesimales:\n");
    scanf("%lf",&giro);
    giro=acos(-1.)*giro/180.;

    int i;
    double nada1,nada2;
    char cosa1[50], cosa2[50];

    for (i=1;i<=dim1;i++)
    {

        fscanf(fichero,"%lf %s %lf %s %lf
\n",&xaux,&cosa1,&yaux,&cosa2,&nada2);
        printf("%d %lf %lf\n",i, xaux,yaux);
        x[i-1]=xaux*cosl(giro)-yaux*sinl(giro);

```

Anexos: Código para el cálculo de la circunferencia de regresión.

```

        y[i-1]=xaux*sinl(giro)+yaux*cosl(giro);
    }

fclose(fichero);

int dim=3,j;
double *b,*mat;

mat=(double*)malloc(dim*dim*sizeof(double));
b=(double*)malloc(dim*sizeof(double));

    for (j=1;j<=dim;j++)
    {
        b[j-1]=0.;
    }

for (i=1;i<=diml;i++)
{
b[1-1]=b[1-1]-pow(x[i-1],2)-pow(y[i-1],2);
b[2-1]=b[2-1]-x[i-1];
b[3-1]=b[3-1]-y[i-1];
}

    for (i=1;i<=dim;i++)
    {
        for (j=1;j<=dim;j++)
        {
            mat[(i-1)*dim+(j-1)]=0.;
        }
    }

for (i=1;i<=diml;i++)
{
    mat[(1-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(1-1)]+pow(pow(x[i-1],2)+pow(y[i-1],2),2);
    mat[(1-1)*dim+(2-1)]=mat[(1-1)*dim+(2-1)]+(pow(x[i-1],2)+pow(y[i-1],2))*x[i-1];
1];
    mat[(1-1)*dim+(3-1)]=mat[(1-1)*dim+(3-1)]+(pow(x[i-1],2)+pow(y[i-1],2))*y[i-1];
1];

    mat[(2-1)*dim+(2-1)]=mat[(2-1)*dim+(2-1)]+pow(x[i-1],2);
    mat[(2-1)*dim+(3-1)]=mat[(2-1)*dim+(3-1)]+x[i-1]*y[i-1];

    mat[(3-1)*dim+(3-1)]=mat[(3-1)*dim+(3-1)]+pow(y[i-1],2);

}

mat[(2-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(2-1)];
mat[(3-1)*dim+(1-1)]=mat[(1-1)*dim+(3-1)];
mat[(3-1)*dim+(2-1)]=mat[(2-1)*dim+(3-1)];

GAUSS(mat,b,dim);
resolucio(mat,b,dim);
    printf(" \n");
    printf("La ecuacion es Bx^2+By^2+Ex+Fy+1=0 con \n");
    printf("B=%lf \n",b[1-1]);
    printf("E=%lf \n",b[2-1]);
    printf("F=%lf \n \n",b[3-1]);

double c1,c2, radio;
c1=-(-2.*b[1-1]*b[2-1])/(-4.*b[1-1]*b[1-1]);
c2=-(-2.*b[1-1]*b[3-1])/(-4.*b[1-1]*b[1-1]);
radio=sqrtl(c1*c1+c2*c2-1./b[1-1]);

    printf("El centro es (%lf, %lf) \n \n",c1 ,c2);
    printf("El radio es %lf \n \n",radio);

printf("Sale el fichero CIRCUNFERENCIA_DE_REGRESION_DEL_ARBOTANTE.txt con los
datos de error\n\n");
fichero = fopen("CIRCUNFERENCIA_DE_REGRESION_DEL_ARBOTANTE.txt","w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abiendo el fichero.\n");
}
else

```

Anexos: Código para el cálculo de la circunferencia de regresión.

```

{
    fprintf(fichero,"La ecuacion es Bx^2+By^2+Ex+Fy+1=0 con \n");
    fprintf(fichero,"B=%10.16lf \n",b[1-1]);
    fprintf(fichero,"E=%10.16lf \n",b[2-1]);
    fprintf(fichero,"F=%10.16lf \n \n",b[3-1]);

    fprintf(fichero,"El centro es (%10.16lf, %10.16lf) \n \n", c1,c2);
    fprintf(fichero,"El radio es %10.16lf \n \n",radio);
}

double xr, yr;
double radicando;

double l1, l2;
int cantidad, cantidad_final=0, k=0;
printf("Introduce el numero inicial de puntos de la circunferencia,\n");
printf("(por defecto pon 10.000): \n");
scanf("%d",&cantidad);
printf("Introduce la coordenada x del extremo inicial de la circunferencia,\n");
printf("(por defecto pon 18): \n");
scanf("%lf",&l1);
printf("Introduce la coordenada x del extremo final de la circunferencia,\n");
printf("(por defecto pon 22): \n");
scanf("%lf",&l2);

fichero2 = fopen("CIRCUNFERENCIA_DE_REGRESION_AUTOCAD.txt","w");
if(fichero2==NULL)
{
    printf("Error abiendo el fichero 2.\n");
}

for (i=0;i<=cantidad;i++)
{
    xr=l1+(l2-l1)*float(i)/float(cantidad);
    radicando=pow(b[3-1],2)-4.*b[1-1]-4.*b[1-1]*b[2-1]*xr-4.*b[1-1]*b[1-
1]*xr*xr;
    if (radicando >= 0. )
    {
        yr=(-b[3-1]+sqrtl(radicando))/(2.*b[1-1]);
        k=k+1;
        fprintf(fichero2,"%4.10lf,%4.10lf\n",xr,yr);
        cantidad_final=cantidad_final+1;
    }
}

for (i=0;i<=cantidad;i++)
{
    xr=l1+(l2-l1)*float(i)/float(cantidad);
    radicando=pow(b[3-1],2)-4.*b[1-1]-4.*b[1-1]*b[2-1]*xr-4.*b[1-1]*b[1-
1]*xr*xr;
    if (radicando >= 0. )
    {
        yr=(-b[3-1]-sqrtl(radicando))/(2.*b[1-1]);
        k=k+1;
        fprintf(fichero2,"%4.10lf,%4.10lf\n",xr,yr);
        cantidad_final=cantidad_final+1;
    }
}

fclose(fichero2);
printf(" \n");
printf("Sale el fichero CIRCUNFERENCIA_DE_REGRESION_AUTOCAD.txt con %d
puntos.\n\n",cantidad_final);

double media;
media=0.;

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    media=media+y[i-1];
}
media=media/float(dim1);

double numerador, denominador;

```

Anexos: Código para el cálculo de la circunferencia de regresión.

```

double numerador2;
double yrmas, yrmenos;

denominador=0.;
numerador2=0.;

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    radicando=pow(b[3-1],2)-4.*b[1-1]-4.*b[1-1]*b[2-1]*x[i-1]-4.*b[1-1]*b[1-1]*x[i-
1]*x[i-1];
    if (radicando >= 0. )
    {
        yrmas=(-b[3-1]+sqrt1(radicando))/(2.*b[1-1]);
        yrmenos=(-b[3-1]-sqrt1(radicando))/(2.*b[1-1]);

        if ( fabs1( y[i-1]-yrmas ) > fabs1( y[i-1]-yrmenos ) )
        {
            yr=yrmenos;
        }
        else
        {
            yr=yrmas;
        }
    }

    denominador=denominador+pow(y[i-1]-media,2);
    numerador2=numerador2+pow(y[i-1]-yr,2);
}

double det2, adj2;

det2=1.-numerador2/denominador;
adj2=(1.-(1-det2)*(float(dim1)-1.)/(float(dim1)-3.-1.));

printf("Coeficiente ajustado de determinacion = %lf \n \n",adj2*100.);
double adjaux;
adjaux=adj2*100.;

fprintf(fichero,"Coeficiente de determinacion ajustado= %10.25lf \n",adjaux);

double error_maximo=-1., error_medio=0., error_cuadratico_medio=0.;
double error, error_cuadratico;

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
    error=labs(sqrt1(pow(x[i-1]-c1,2)+ pow(y[i-1]-c1,2))-radio)/radio;
    error_cuadratico=pow(error,2);
    if (error_maximo<=error)
    {
        error_maximo=error;
    }
    error_medio=error_medio+error;
    error_cuadratico_medio=error_cuadratico_medio+error_cuadratico;
}
error_medio=error_medio/float(dim1);
error_cuadratico_medio=sqrt1(error_cuadratico_medio/float(dim1));
printf("error relativo maximo = %lf \n",error_maximo);
printf("error relativo medio = %lf \n",error_medio);
printf("error relativo cuadratico medio = %lf \n \n",error_cuadratico_medio);

fprintf(fichero,"error relativo maximo = %lf \n",error_maximo);
fprintf(fichero,"error relativo medio = %lf \n",error_medio);
fprintf(fichero,"error relativo cuadratico medio = %lf \n
\n",error_cuadratico_medio);

fclose(fichero);

system("pause");

```



## Código para el cálculo de la recta de regresión

```

#include <winbgim.h> /* subrutinas de dibujo*/
#include <stdlib.h> /* subrutinas standar de signación de memoria*/
#include <math.h> /* subrutinas matemáticas */
#include <stdio.h> /* subrutinas standar de entrada y salida */
#include <string.h> /* subrutinas de manejo de strings */

main()
{

printf("PROGRAMA RECTA_DE_REGRESION_T2 \n\n");
printf("Entra el fichero NUBE_PLANA_ARBOTANTE.txt \n\n");
printf("Formato de entrada: LINEA A LINEA y dos columnas \n \n");

int dim1;
double *x,*y,aux3;
char aux1,aux2;

char nombrefich[80]="NUBE_PLANA_ARBOTANTE.txt";
FILE *fichero;
fichero = fopen(nombrefich,"r");
if(fichero==NULL)
{
printf("Error abriendo el fichero.\n");
}

printf("Lee el numero ENTERO de puntos del fichero. \n");
fscanf(fichero,"%d \n",&dim1);
printf("%d \n",dim1);

x=(double*)malloc(dim1*sizeof(double));
y=(double*)malloc(dim1*sizeof(double));

double m_y, m_x, s2_x, c_xy, pendiente, independiente, grados;
int i;
double a,b;

m_y=0., m_x=0., s2_x=0., c_xy=0.;
for (i=1;i<=dim1;i++)
{
fscanf(fichero,"%lf %c %lf %c %lf \n",&x[i-1],&aux1,&y[i-1],&aux2,&aux3);
m_y=m_y+y[i-1];
m_x=m_x+x[i-1];
}
fclose(fichero);

m_x=m_x/float(dim1);
m_y=m_y/float(dim1);

for (i=1;i<=dim1;i++)
{
s2_x=s2_x+pow(x[i-1]-m_x,2);
c_xy=c_xy+(x[i-1]-m_x)*(y[i-1]-m_y);
}

s2_x=s2_x/float(dim1);
c_xy=c_xy/float(dim1);

pendiente=c_xy/s2_x;
independiente=m_y-pendiente*m_x;

printf(" \n");
printf("Sale el fichero ECUACION_RECTA_DE_REGRESION_de_Y_respecto_de_X.txt \n");
printf("La ecuacion de la RECTA_DE_REGRESION_de_Y_respecto_de_X es: \n \n");
printf("y=(%10.6lf)*x+(%10.6lf) \n \n",pendiente,independiente);
printf("pendiente = %10.6lf \n",pendiente);

grados=atan1(pendiente)*180./acos1(-1.);

printf("amplitud en grados sexagesimales del angulo de pendiente = %10.6lf \n
\n",grados);

```

Anexos: Código para el cálculo de la recta de regresión.

```
fichero = fopen("ECUACION_RECTA_DE_REGRESION_de_Y_respecto_de_X.txt","w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abiendo el fichero.\n");
}
else
{
    fprintf(fichero,"La ecuacion de la RECTA_DE_REGRESION_de_Y_respecto_de_X es:
\n \n");
    fprintf(fichero,"y=(%10.6lf)*x+(%10.6lf) \n \n",pendiente,independiente);
    fprintf(fichero,"pendiente = %10.6lf \n",pendiente);
    fprintf(fichero,"amplitud en grados sexagesimales del angulo de pendiente =
%10.6lf \n \n",grados);
}

a=x[l-1];
b=pendiente*a+independiente;
fprintf(fichero,"punto: (%10.6lf,%10.6lf) \n",a,b);
printf("punto: (%10.6lf,%10.6lf) \n",a,b);
a=x[dim1-1];
b=pendiente*a+independiente;
fprintf(fichero,"punto: (%10.6lf,%10.6lf) \n",a,b);
printf("punto: (%10.6lf,%10.6lf) \n",a,b);

fclose(fichero);

system("pause");

}
```

Universitat  
de Girona