

Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y tipos de pensamiento algebraico

Nataly Pincheira

Ángel Alsina

Yeni Acosta

(Universidad de Girona. España)

Fecha de recepción: 22 de octubre de 2022

Fecha de aceptación: 11 de julio de 2023

Resumen

En este artículo se presenta una actualización de la didáctica del álgebra en Educación Infantil. En la primera parte, se analizan los principales conocimientos de álgebra en edades tempranas a partir de una revisión de los currículos de educación infantil de diversos países; se definen los distintos tipos de pensamiento algebraico propios de esta etapa, considerando estudios recientes de la investigación en educación matemática infantil; y se vinculan tales conocimientos con los tipos de pensamiento algebraico. En la segunda parte, se describen prototipos de tareas para abordar los conocimientos que caracterizan la introducción del álgebra en educación infantil y, de este modo, desarrollar los distintos tipos de pensamiento algebraico. Se concluye que el diseño e implementación de actividades contextualizadas que consideren estos prototipos de tareas pueden contribuir a desarrollar los distintos tipos de pensamiento algebraico en las aulas de infantil.

Palabras clave

álgebra temprana, pensamiento algebraico, pensamiento relacional, pensamiento recursivo, pensamiento funcional, educación infantil

Abstract

This article presents an update on the teaching of early algebra in Early Childhood Education. In the first part, we analyse the main early knowledge at ages based on a review of early childhood education curricula in different countries; we define the different modes of algebraic thinking characteristic of this stage, considering recent research studies in early mathematics education; and we link such knowledge with the modes of algebraic thinking. In the second part, task prototypes are described to address the knowledge that characterises the introduction of algebra in early childhood education and, in this way, to develop the different types of algebraic thinking. It is concluded that the design and implementation of contextualised activities that consider these task prototypes can contribute to developing the different types of algebraic thinking in early childhood classrooms.

Keywords

early algebra, algebraic thinking, relational thinking, recursive thinking, functional thinking, early childhood education



1. Introducción

En las últimas décadas, los currículos han ido integrando nuevos conocimientos para tratar de dar respuesta a las demandas sociales contemporáneas, que requieren una ciudadanía con un conjunto de conocimientos y habilidades que les permitan desarrollarse con la máxima plenitud en un mundo complejo (Morin, 1999, 2019; Rocard et al., 2007). Fruto de ello, los currículos de matemáticas de diversos países han incorporado nuevos estándares de contenido desde los 3 años, como la estadística y la probabilidad o el álgebra (e.g., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2020; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2003). En este artículo nos focalizamos en el álgebra y, más concretamente, en el álgebra temprana, que es una propuesta de cambio curricular que busca promover el desarrollo de diversos modos de pensamiento algebraico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde las primeras edades (Carragher y Schliemann, 2019; Kaput, 2008; Zapatera, 2018).

De modo genérico, Blanton (2008) define el pensamiento algebraico como "una forma de pensar que impregna todas las dimensiones de las matemáticas y es el núcleo de lo que los niños deberían hacer habitualmente en las matemáticas escolares" (p. xii), lo cual incluye procesos como darse cuenta, generalizar, representar y justificar (Chimoni et al., 2021). En lo que se refiere a la educación infantil, que es la etapa en la que se focaliza este artículo, caracterizamos el álgebra temprana como

La capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemáticas, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos (Pincheira y Alsina, 2021, p. 175-176).

Considerando esta caracterización, cabe señalar que autores como Montessori (1914), Piaget (1941), Dienes (1971a, 1971b) y Dienes y Golding (1976), entre otros, jugaron un papel relevante en la construcción progresiva de un cuerpo de conocimientos asociados al álgebra en las primeras edades, aunque bajo otras nomenclaturas como la lógica, la lógica matemática o el razonamiento lógico-matemático (Alsina, 2019). Sus aportaciones, pues, pueden ser consideradas como la génesis de una didáctica del álgebra en infantil que, además de ir organizando el contenido a enseñar, fue definiendo también una forma de enseñarlo cercana a las niñas y los niños y respetuosa con sus necesidades y posibilidades de aprendizaje: la manipulación, la experimentación y el juego, principalmente. En Canals (1989), por ejemplo, se puede encontrar una síntesis de las aportaciones de estos autores clásicos: dentro de los capítulos de "lógica", por un lado, se definen los conocimientos que el alumnado de 3 a 5 años puede ir aprendiendo; y, por otro lado, se describen algunos materiales manipulativos para promover el aprendizaje de estos conocimientos. Posteriormente, otros autores (e.g., Alsina, 2006, 2011; Chamorro, 2005; Castro y Castro, 2016), entre otros, sin referirse explícitamente al álgebra por las razones que se acaban de señalar, han ido aportando datos tanto referentes a la organización de conocimientos vinculados al pensamiento algebraico de 3 a 6 años como las formas de enseñarlos, a través de recursos diversos como la exploración del entorno, la manipulación de materiales, el juego, los recursos literarios, tecnológicos y gráficos. Otros autores que sí se han referido explícitamente al álgebra, incluso han

ampliado el rango de edad: Clements y Sarama (2009) han definido trayectorias de aprendizaje para “patrones y estructuras (incluyendo el pensamiento algebraico)” desde los 2 años; Geist (2014) ha concretado conceptos emergentes de “patrones, razonamiento y álgebra” que los niños y las niñas van desarrollando desde los 0 años; Alsina (2015) ha descrito las primeras acciones intuitivas e informales vinculadas a las relaciones, los patrones y los cambios de los 0 a los 3 años y, en Alsina (2022a), ha presentado una propuesta de distribución de contenidos asociados al álgebra temprana para niños y niñas de 3 a 6 años.

Paralelamente a todo este esfuerzo para caracterizar y organizar los conocimientos asociados al desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil, otros autores se han focalizado en indagar acerca de sus características específicas (e.g., Kaput, 2008; Radford, 2011). Estas aportaciones han dado lugar a la concreción de distintos tipos de pensamiento algebraico en educación infantil: relacional, recursivo y funcional (Lenz, 2022; Luken y Sauzet, 2020; Wijns, et al., 2019a).

Con el propósito de avanzar en la comprensión del pensamiento algebraico en educación infantil y, en consecuencia, promover una didáctica que fomente de manera eficaz el desarrollo de los distintos tipos de pensamiento algebraico, el objetivo de este artículo es vincular la caracterización y organización del conocimiento algebraico en educación infantil con los tipos de pensamiento algebraico. En otras palabras, se pretende definir qué conocimientos de álgebra temprana se vinculan con cada tipo de pensamiento algebraico y, posteriormente, ofrecer orientaciones didácticas para trabajar dichos conocimientos y poder desarrollar los distintos tipos de pensamiento algebraico en el aula.

2. Marco teórico

En esta sección, se revisan los principales conocimientos de álgebra en edades tempranas a partir de una revisión de los currículos de diversos países que explicitan este bloque de contenidos desde la etapa de educación infantil. Seguidamente, se define el pensamiento algebraico y los distintos modos de pensamiento que se movilizan en esta etapa escolar.

2.1 El álgebra temprana en el currículo de educación infantil

Diversas investigaciones informan que los niños y las niñas pueden desarrollar conocimientos vinculados con el álgebra en edades tempranas -principalmente, a través de la indagación y exploración del entorno, la manipulación, la experimentación y el juego-, adquiriendo nociones algebraicas elementales, como las relaciones, los patrones y el cambio (e.g., Alsina, 2022a; Rittle-Johnson et al., 2015). Asimismo, los currículos contemporáneos de educación infantil han asumido la importancia de los contenidos vinculados con el álgebra temprana, incorporado de manera progresiva conocimientos de naturaleza algebraica a partir de esta etapa escolar (Pincheira y Alsina, 2021).

La Tabla 1 muestra una síntesis de los contenidos que promueven las orientaciones curriculares de educación infantil para abordar el estudio del álgebra en edades tempranas.

Currículo	Contenido	
<p>NCTM (2003): álgebra (Pre-K-2): 3-8 años</p>	<p>Comprender patrones, relaciones y funciones</p>	<p>Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades. Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.</p>
	<p>Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos</p>	<p>Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números. Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.</p>
	<p>Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas</p>	<p>Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.</p>
	<p>Analizar el cambio en diversos contextos</p>	<p>Describir cambios cualitativos, como “ser más alto”. Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.</p>
<p>ACARA (2020): patrones y álgebra: 4-6 años</p>	<p>Ordenar y clasificar objetos familiares y explicar la base de estas clasificaciones. Copiar, continuar y crear patrones con objetos y dibujos.</p>	
<p>NEL (2013): Relaciones y patrones: 4-6 años</p>	<p>Emparejar, clasificar y comparar cosas por un atributo (por ejemplo según el color, la forma o tamaño) Poner las cosas en orden según el tamaño o la longitud y eventos de secuencia Reconocer, extender y crear patrones simples (por ejemplo: patrón AB)</p>	
<p>MINEDUC (2018): Núcleo pensamiento matemático: 4-6 años</p>	<p>Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos Experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por dos o tres atributos a la vez (forma, color, tamaño, función, masa, materialidad, entre otros) y seriar por altura, ancho, longitud o capacidad para contener. Emplear cuantificadores, tales como: “más que”, “menos que”, “igual que”, al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas.</p>	
<p>MEFP (2022): Área conocimiento del entorno: 3-6 años</p>	<p>Establecer distintas relaciones entre los objetos a partir de sus cualidades o atributos, mostrando curiosidad o interés. Cualidades o atributos de objetos y materiales. Relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación.</p>	

Tabla 1. Contenidos propuestos en los currículos de educación infantil para abordar la enseñanza del álgebra temprana

A partir de los contenidos expuestos en la Tabla 1, se constata que las aportaciones preliminares de autores como Montessori, Piaget y Dienes, vinculadas con las clasificaciones, ordenaciones y seriaciones, así como la introducción del cambio, son reconocidas por algunos currículos contemporáneos de educación infantil e incorporados en el bloque de contenidos que aborda el estudio del álgebra en edades tempranas, como es el caso de Estados Unidos (NCTM, 2003) o de Australia (ACARA, 2020). En este sentido, el NCTM (2003) argumenta que “seleccionar, clasificar y ordenar facilita el trabajo con patrones...” (p. 95), o bien que “comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y entender el mundo” (p. 99). Por otra parte, el currículo australiano (ACARA, 2020) promueve también que los niños y niñas de 4 a 6 años ordenen y clasifiquen objetos con base en distintos criterios y profundicen en el trabajo con patrones de repetición, copiando, extendiendo y creando patrones con objetos y dibujos.

En otros países, como Singapur, los conocimientos algebraicos se incluyen dentro de “las relaciones y patrones” (Nurturing Early Learners [NEL], 2013). Como se observa en la Tabla 1, en el currículo de este país se señala que, a partir de los 4 años, los niños y niñas reconozcan relaciones de orden, clasificación y comparación de objetos por atributos, y exploren patrones simples.

Finalmente, en países como Chile o España no hay una denominación específica asociada al álgebra, pues son currículos que se organizan a partir de áreas de aprendizaje globalizadas. El currículo chileno de educación infantil (Ministerio de educación [MINEDUC], 2018) propone que los niños y niñas (4 a 6 años) establezcan relaciones entre objetos al clasificar por dos o tres atributos a la vez, indaguen en el estudio de los patrones, por medio de la creación de patrones sonoros, visuales, gestuales y corporales de dos o tres elementos y, empleen cuantificadores, tales como: “más que”, “menos que”, “igual que”, al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas. Respecto a España, Alsina (2022b) señala que el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación infantil (MEFP, 2022) se refiere a algunos saberes que, de acuerdo con la caracterización de álgebra temprana de Pincheira y Alsina (2021), están asociados con el álgebra temprana, como el reconocimiento de cualidades y atributos de los objetos para comparar semejanzas y diferencias y establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones y correspondencias) junto con el uso de cuantificadores y la funcionalidad de los números en la vida cotidiana, mientras que los patrones se omiten y las referencias al cambio son mínimas.

Para Kilpatrick (2011), la obtención de buenos resultados en la implementación de los contenidos que promueven las directrices curriculares para introducir la enseñanza del álgebra desde edades tempranas depende de cómo se considere el currículo: no se producen cambios si se concibe como un listado de contenidos, mientras que conlleva cambios profundos si se aprecia como un conjunto de experiencias para los estudiantes.

2.2 Tipos de pensamiento algebraico temprano en educación infantil

El pensamiento algebraico implica desarrollar progresivamente distintos tipos o formas particulares de pensamiento (Kieran, 2004) que permiten avanzar hacia el aspecto central del álgebra temprana, la generalización (Kaput, 2008): el pensamiento relacional, el pensamiento recursivo y el pensamiento funcional.

2.2.1. El pensamiento relacional en educación infantil

El pensamiento relacional o pensamiento centrado en las relaciones se define ampliamente como el proceso de hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y



patrones significativos que subyacen a la información (Dumas et al., 2013). Este tipo de pensamiento es importante para el desarrollo del álgebra temprana, puesto que presta atención a las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, en lugar de centrarse exclusivamente en los procedimientos de cálculo (Carpenter et al., 2005). Molina y Ambrose (2008) afirman que el pensamiento relacional posee una visión estructural más que operativa de los elementos matemáticos, estableciendo relaciones entre ellos y utilizándolos para encontrar una solución a una tarea. En consecuencia, se caracteriza por utilizar relaciones entre elementos matemáticos y se refiere a la relación entre igualdad y desigualdad (Lenz, 2022).

En este contexto, el pensamiento relacional se ha asociado a la relación entre los números, el uso de las propiedades básicas de las operaciones y la comprensión de los significados del signo igual (Carpenter et al., 2005; Castro y Molina, 2017). Adicionalmente, el pensamiento relacional se encuentra estrechamente relacionado con las representaciones simbólicas y el uso de notación algebraica. Sin embargo, los niños y niñas en educación infantil no tienen suficiente experiencia con las representaciones simbólicas. Según Lenz (2022), en educación infantil es posible estimular el pensamiento relacional utilizando representaciones sin notación algebraica, con la ayuda de objetos reales y manipulables, a través de la comprensión de la igualdad, las comparaciones de más-menos y las relaciones parte-todo, introduciendo poco a poco la noción de variable al profundizar en las cualidades y los cuantificadores.

Desde la perspectiva de Piaget (1941), las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos permiten al niño construir el conocimiento lógico-matemático. En esta línea, Dienes (1971a) señala que:

Para facilitar al niño la adquisición de la abstracción que supone la teoría de los estados y los operadores, sugerimos el empleo lo más temprano posible de muchos operadores distintos de diferente naturaleza. Si el niño no adquiere más que experiencia de operadores de carácter aritmético, llegará a creer que no existe otra clase de operadores. Es evidente que no es así. (p. 9)

En concreto, cuando Dienes hace mención a “operadores distintos de diferente naturaleza”, se está refiriendo a situaciones de transformación y juegos de diferencias a partir de los Bloques Lógicos, en los que se comparan semejanzas y diferencias de los objetos a partir de cualidades como el color, la forma, el grosor o el tamaño. Desde este punto de vista, más adelante, Alsina (2006) afirma que:

... relacionar cualidades sensoriales implica comparar los elementos de una o diversas agrupaciones entre sí a partir de un criterio de tipo cualitativo preestablecido (por ejemplo: tener la misma forma, tener el mismo color, etc.), pero nuevamente este trabajo sensorial permite desarrollar el razonamiento lógico-matemático de manera que poco a poco se pueden extrapolar e inferir estos conocimientos cualitativos hacia otros cuantitativos, a partir de actividades que implican clasificar, ordenar, hacer parejas, etc., por criterios cuantitativos, utilizando comparativos como más que, menos que, igual que, tanto como, etc. (p. 80)

Si consideramos, pues, que tal como se ha señalado en la introducción, diversos autores clásicos como Montessori, Piaget y Dienes promovieron una didáctica que actualmente podemos asociar al álgebra que se iniciaba desde lo cualitativo (educación sensorial, cualidades sensoriales, atributos, etc.)

para avanzar seguidamente hacia lo cuantitativo (cuantificadores, números y relaciones entre números, etc.), asumimos que en educación infantil es recomendable iniciar el desarrollo del pensamiento relacional a través de tareas de experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones cualitativas y cuantitativas (Pincheira y Alsina, 2021).

2.2.2. El pensamiento recursivo y el pensamiento funcional en educación infantil

El pensamiento recursivo permite predecir un elemento desconocido en una secuencia de valores haciendo uso de la relación entre elementos consecutivos (Luken y Sauzet, 2020). De acuerdo con Wijns et al. (2019a), pensar recursivamente implica anticipar solo el elemento sucesor (el +1) de una secuencia. En cambio, el pensamiento funcional implica identificar y abstraer la regla subyacente de una secuencia (Luken y Sauzet, 2020; Wijns et al., 2019a). Papic y Mulligan (2007) enfatizan la necesidad de una intervención docente específica para desarrollar desde una edad temprana la capacidad de concentrarse en la estructura. En este sentido, la exploración, reconocimiento y análisis de patrones son actividades apoyadas por investigadores, diseñadores de currículos y matemáticos, como una base para el desarrollo del pensamiento algebraico (Tirosh, et al., 2019; Clements y Sarama 2007).

Cuando hablamos de patrón, si bien en la literatura sus definiciones varían, en la revisión de Wijns et al. (2019a) se aprecia un acuerdo general que considera dos aspectos clave: la regularidad y la previsibilidad. Sarama y Clements (2009) destacan que, para que un patrón muestre regularidad debe presentar una estructura debidamente ordenada que siga un curso iterativo o cambiante, según una regla subyacente que facilita la previsibilidad. La percepción de dicha previsibilidad permite avanzar del pensamiento recursivo al pensamiento funcional. Estos modos de pensamiento son posibles de desarrollar en una escolarización no formal, a través de tareas de enseñanza vinculadas a la seriación con patrones de repetición (Papic, 2007; Pincheira y Alsina, 2021). Desde este contexto de la educación infantil, se ha constatado que la exploración de patrones de repetición puede contribuir a la concienciación de la estructura subyacente (Björklund y Pramling, 2014; Mcgarvey, 2012; Papic, 2007, Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2015; Starkey et al. 2004; Tirosh et al., 2019; Zipper et al., 2020) para así avanzar hacia una manera más sofisticada de pensamiento algebraico. Por este motivo, la estructura, entendida como unidad de repetición, a veces se separa del patrón en las definiciones para enfatizar su importancia (Gripton, 2022).

Desde esta perspectiva, autores como Clements y Sarama (2015); Lüken y Sauzet (2020), Rittle-Johnson et al. (2013); Wijns et al. (2019a), entre otros, determinan una serie de tareas para hacer patrones estrechamente vinculadas con la capacidad para identificar o no la unidad de repetición, con la finalidad de dejar de entender el patrón como una alternancia rítmica y regular de atributos, para focalizar la atención en los núcleos que lo conforman (Papic et al., 2011). Bajo esta mirada, el reconocimiento de dicha estructura, regla o unidad de repetición otorga un orden de dificultad creciente en consonancia con el pensamiento recursivo y funcional (Acosta et al., 2022a; Pincheira et al., 2022). A partir de las aportaciones de los autores anteriormente señalados, Acosta et al. (2022a) y Pincheira et al. (2022) otorgan un orden de dificultad creciente a las habilidades para hacer patrones con la finalidad de analizar tareas matemáticas en libros de texto de educación infantil. Dichas habilidades son: 1) copiar, 2) interpolar, 3) extender, 4) abstraer o traducir, 5) reconocer la unidad de repetición; y 6) inventar un patrón. Las tareas que movilizan las habilidades mencionadas se detallan a continuación: 1) duplicar el mismo patrón; 2) encontrar elementos faltantes de una secuencia; 3) ampliar la secuencia; 4) construir el mismo patrón con diferentes elementos; 5) identificar la unidad de repetición; e 6) inventar un patrón, respectivamente. En la Figura 1 se muestran las habilidades para hacer patrones y las tareas matemáticas que las movilizan.



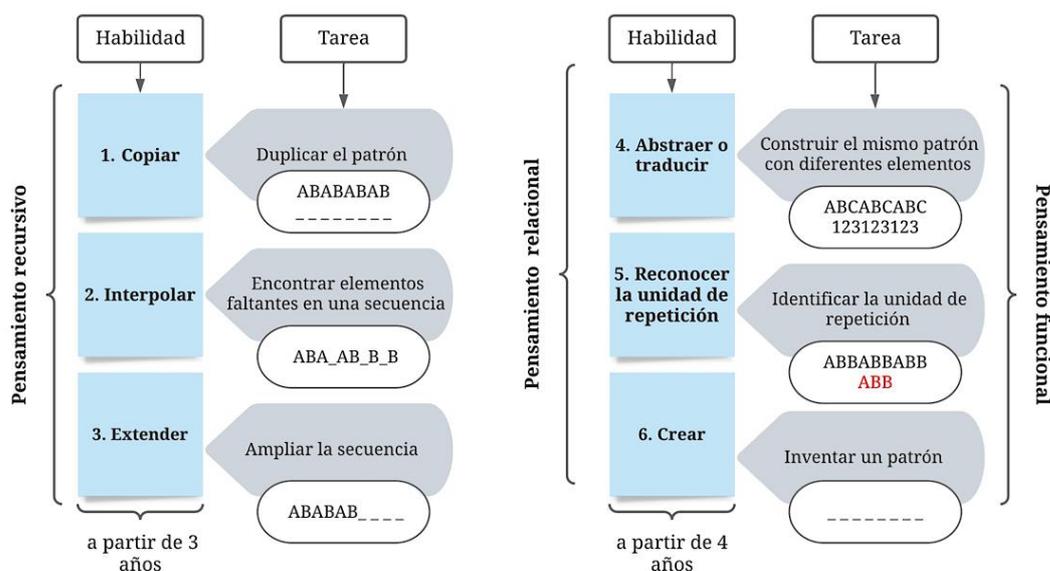


Figura 1. Habilidades para hacer patrones y tareas matemáticas. Fuente: Acosta et al. (2022b)

Cabe destacar que, por un lado, las tareas 1, 2 y 3 “enfatan la organización recursiva de elementos en lugar de repetir unidades” (Mcgarvey, 2012, p.334), pudiendo resolverse de manera exitosa haciendo uso de la estrategia de emparejamiento de apariencia uno a uno (Collins y Laski, 2015); por otro lado, las tareas 4, 5 y 6 fomentan un enfoque más directo en la estructura (Tirosh et al., 2019), requiriendo que los niños y niñas usen estrategias de similitud relacional (Rittle-Johnson et al., 2013). Por este motivo, se considera que una experiencia temprana con patrones permite también promover el pensamiento relacional. No obstante, pese a que en la tarea 4 (construir el mismo patrón con diferentes elementos) se precisa un pensamiento más abstracto (Rittle-Johnson et al., 2015; Sarama y Clements, 2009), existen autores como Lüken (2018) y Wijns et al. (2019b) que difieren. Lüken (2018) alega que, para este tipo de tareas, los niños pueden recurrir a una estrategia de alternancia, ya que perciben el patrón como una secuencia de colores sin captar la estructura de repetición; y Wijns et al. (2019b) explica que los alumnos también pueden establecer una correspondencia término a término si no existe un espacio prudencial entre el patrón modelo y el patrón a construir con diferentes elementos. En cualquier caso, en este artículo se asume la tarea 4 como la frontera entre el pensamiento recursivo y funcional.

Por otra parte, el desarrollo del pensamiento funcional también se vincula con la noción de cambio (Warren y Cooper, 2005). La incorporación de ideas vinculadas con el cambio en educación infantil, permite a los niños “comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo” (NCTM, 2003, p. 99). Por ejemplo, “describir cambios cualitativos, como ser más alto o describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año” (NCTM, 2003, p. 94), es fundamental para entender el desarrollo de las funciones en las etapas escolares posteriores.

El cambio, entendido como la variación o transformación que experimenta un determinado objeto matemático, de un estado inicial a otro final, a partir de un operador (Alsina y Pincheira, 2022) se puede abordar desde distintos enfoques. De acuerdo con autores como Dienes (1971a) y Alsina (2006), entre otros, en educación infantil se promueven diversos tipos de cambios, ya sean: a) aritméticos, por ejemplo, al añadir una cantidad determinada a una cantidad inicial; b) geométricos, por ejemplo, un giro es un operador que actúa en la posición y; c) de atributos físicos, por ejemplo, cuando se pintan las paredes blancas de una casa de color rojo, se usa un operador que convierte en rojo lo que era blanco. Castro et al. (2017) afirman que los niños y niñas de educación infantil pueden realizar análisis de situaciones estudiando el cambio. En consecuencia, el pensamiento funcional se puede estimular a partir de la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (Pincheira y Alsina, 2021).

A partir de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana, la Figura 2 muestra una panorámica general de los distintos tipos de pensamiento algebraico que se movilizan en educación infantil.

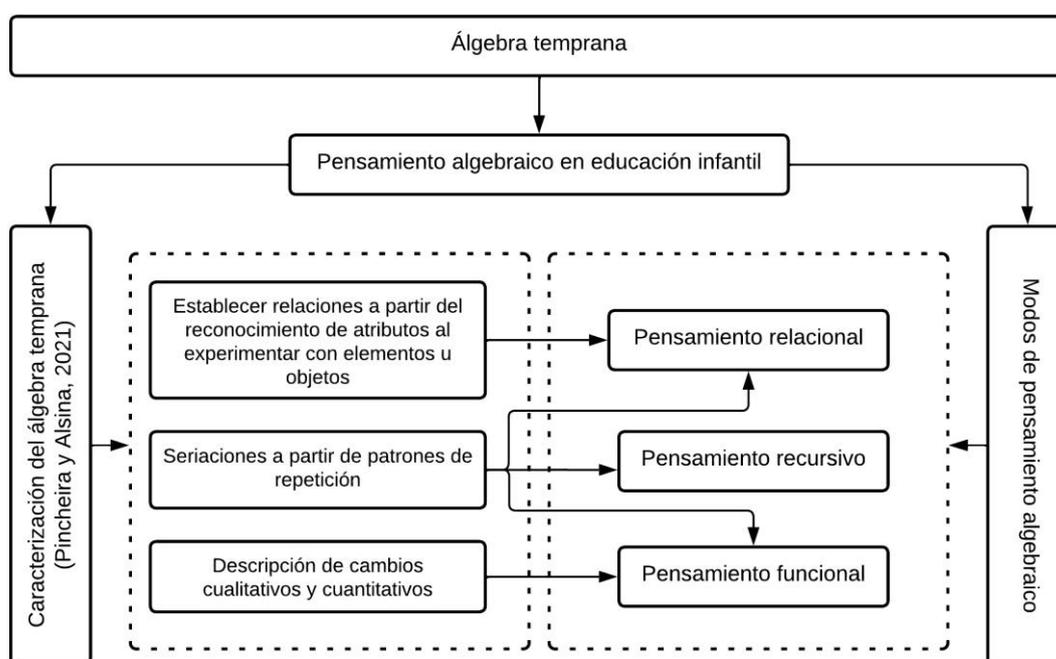


Figura 2. Panorámica general de los tipos de pensamiento algebraico que se movilizan en educación infantil. Fuente: elaboración propia

2.2.3 Vinculando los conocimientos algebraicos con los tipos de pensamiento algebraico en educación infantil

A partir de la caracterización del álgebra temprana en educación infantil y la concreción de los distintos modos de pensamiento algebraico, en la Tabla 2 se muestra una primera vinculación entre los distintos conocimientos que se deben abordar para la enseñanza del álgebra en esta etapa y los tipos de pensamiento algebraico que movilizan.

Tipos de pensamiento algebraico	Establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos					Seriações a partir de patrones de repetición: identificación, construcción y representación del patrón						Descripción de cambios cualitativos-cuantitativos	
	Agrupar	Clasificar	Ordenar	Correspondencia	Comparar	Duplicar el patrón	Encontrar el elemento faltante	Ampliar la secuencia	Construir el mismo patrón con diferentes elementos	Identificar la unidad de repetición	Inventar un patrón	Reconocer cambios	Aplicar cambios
Pensamiento Relacional	x	x	x	x	x				x	x	x		
Pensamiento Recursivo						x	x	x					
Pensamiento Funcional									x	x	x	x	x

Tabla 2. Vinculación de conocimientos y modos de pensamiento algebraico. Fuente: elaboración propia

En la Tabla 2 se pone de manifiesto que, para poder ayudar a las niñas y a los niños de 3 a 6 años a desarrollar los distintos tipos de pensamiento algebraico, es imprescindible diseñar e implementar tareas que permitan establecer relaciones, tareas de seriações a partir de patrones de repetición y tareas que impliquen la descripción de cambios, con todas sus variantes.

3. Tareas para la enseñanza del álgebra temprana en educación infantil

A partir de las aportaciones recientes que se han descrito en la sección anterior, resulta evidente que la enseñanza del álgebra temprana en educación infantil requiere una actualización que pasa por implementar tareas que contribuyan al desarrollo de los distintos tipos de pensamiento algebraico que se movilizan en esta etapa escolar, a saber: pensamiento relacional, pensamiento recursivo y pensamiento funcional.

Con base en ello, a continuación, se presentan prototipos de tareas y recursos a partir de los conocimientos que promueve la caracterización del álgebra en educación infantil (Pincheira y Alsina, 2021). Cabe destacar que, en la práctica, estos prototipos de tareas requieren de una planificación y una gestión que promueva el desarrollo de las formas particulares de pensar algebraicamente de los niños y niñas de educación infantil, a través del planteamiento de retos y de preguntas que inviten a razonar y argumentar; la comunicación y la representación o bien las conexiones tanto intradisciplinarias como interdisciplinarias (NCTM, 2003).

3.1 Establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos

Una relación implica comparar elementos por medio de semejanzas o diferencias a partir de un criterio. El trabajo desarrollado en educación infantil permite establecer distintos tipos de relaciones: a) relaciones de equivalencia o clasificaciones en una agrupación de elementos por semejanzas; b) relaciones de orden u ordenaciones en una organización de elementos por diferencias y, c) correspondencias donde determinados elementos de una agrupación A se asocian con uno o más elementos de una agrupación B (Alsina, 2022a).

Las Tablas 3 y 4 presentan, a modo de ejemplo, dos prototipos de tareas para trabajar relaciones a partir del reconocimiento de atributos.

Título: “La bandeja sorpresa”	
Objetivo: Establecer clasificaciones al reconocer atributos de material no estructurado.	Contenidos matemáticos: Reconocimiento de atributos de diversos elementos u objetos a partir de sus cualidades (color, forma, tamaño). Clasificaciones de diferentes elementos u objetos. Iniciación al conteo. Empleo de cuantificadores para establecer comparaciones.

Tabla 3. Tarea para establecer clasificaciones a partir del reconocimiento de atributos

Material necesario (Figura 3):



Figura 3. (izquierda) Bandeja con diversos elementos: piñas de pino, piedrecillas y castañas; (derecha) Clasificación de los elementos. Fuente: elaboración propia.

Desarrollo de la tarea:

- Presentar a los niños y niñas diversos elementos, como se aprecia en la Figura 3 (izquierda) y ponerlos a su alcance para que jueguen libremente.
- Iniciar el diálogo sobre las características observadas en los materiales manipulados.
- Invitar a los niños y niñas a describir, tales características: color, forma, tamaño, peso, etc.
- Proponer a los niños y niñas formar grupos los elementos a partir de un criterio establecido, como se muestra en la Figura 3 (derecha).

- Fomentar, a través del diálogo conjunto, el conteo y uso de cuantificadores para comparar los distintos grupos de elementos.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cómo son los elementos que observamos?, ¿qué características tienen en común?, ¿en qué se diferencian?
- ¿Qué grupos podríamos formar?, ¿qué criterios establecieron para formar los grupos?, ¿los elementos se podrían organizar de otra manera? ¿cómo sería?
- ¿Cuántos grupos de elementos formaron?, ¿Cuántos elementos tiene cada grupo? ¿qué grupo tiene más elementos?, ¿qué grupo tiene menos elementos?
- ¿Hay más o menos piñas que castañas?, ¿hay más o menos castañas que piedrecillas?, ¿hay igual cantidad de piñas que de piedrecillas? ¿por qué?

Título: “La cesta de frutas: buscando la otra mitad”	
<p>Objetivo: Establecer relaciones de correspondencia al reconocer atributos de frutas.</p>	<p>Contenidos matemáticos: Reconocimiento de atributos de diversos elementos u objetos a partir de sus cualidades (color, forma, tamaño). Comparaciones de elementos u objetos a partir de un criterio. Correspondencia entre elementos u objetos. Noción de cantidad: entero y mitad.</p>

Tabla 4. Tarea para establecer relaciones de correspondencia a partir del reconocimiento de atributos

Material necesario (Figura 4):



Figura 4. (izquierda) Cesta con frutas; (derecha) correspondencia establecida entre las mitades de cada fruta. Fuente: elaboración propia.

Desarrollo de la tarea:

- Reunir a los niños y niñas en pequeños grupos de trabajo.

- Presentar a cada grupo una cesta con distintas frutas partidas por la mitad, por ejemplo: manzana, limón, naranja, pomelo, mandarina, como se observa en la Figura 4 (izquierda).
- Iniciar el diálogo sobre las características de las frutas estableciendo semejanzas y diferencias a partir de la observación y manipulación.
- Invitar a los niños y niñas a describir, tales características: color, forma, tamaño, etc.
- Proponer a los niños y niñas encontrar las mitades, luego juntar cada parte hasta completar la fruta entera, como se muestra en la Figura 4 (derecha).
- Fomentar, a través del diálogo conjunto, las acciones que han desarrollado.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cómo son las frutas que observamos?, ¿qué características tienen en común?, ¿en qué se diferencian?
- ¿Cómo podemos encontrar la otra mitad (pareja) de cada fruta?, ¿qué estrategia has utilizado?
- Si juntamos las mitades (parejas), ¿qué tenemos?

Pensamiento algebraico que promueven las tareas:

Las tareas de las Tablas 3 y 4 permiten iniciar el desarrollo del pensamiento relacional, puesto que a partir de objetos reales y manipulables se establecen relaciones cualitativas y cuantitativas por medio del reconocimiento de atributos. Más específicamente, en la Tabla 3 se presenta un prototipo de tarea de clasificación que introduce una relación de equivalencia a través de una agrupación de elementos, mientras que en la Tabla 4 se muestra una relación de correspondencia, a través de la asociación de elementos según sus atributos.

3.2 Seriaciones a partir de patrones de repetición: identificación, construcción y representación del patrón

La identificación de patrones de repetición implica la observación y el reconocimiento de regularidades en secuencias iterativas de objetos o datos (Alsina, 2022a). En las Tablas 5 y 6, se muestran propuestas de prototipos de tareas para abordar el trabajo con patrones.

Título: “En busca del que falta”	
<p>Objetivo: Completar los elementos faltantes en la seriación presentada siguiendo la secuencia propuesta.</p>	<p>Contenidos matemáticos: Observación de patrones de repetición. Identificación del elemento que falta del patrón (AB).</p>

Tabla 5. Tarea de encontrar el elemento faltante de una seriación

Material necesario (Figura 5):



Figura 5. Cajas con frutas de juguetes y cartulina. Fuente: elaboración propia.

Desarrollo de la tarea:

- Poner el material al alcance de los niños y las niñas y proponerles colocar en el espacio en blanco de la cartulina, el elemento que correspondería para seguir la seriación, como se aprecia en la Figura 5.
- Observar y documentar si los escolares son capaces de interpolar el patrón (AB).
- Invitar a los niños y niñas a describir la seriación completada.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cómo has descubierto cuál era la fruta o verdura que tocaba colocar en los espacios en blanco de la primera seriación?
- Si después de un plátano, viene una zanahoria y después otro plátano y otra zanahoria. Después del plátano: ¿cuál tocaría? ¿por qué?, ¿notas algo que siempre sucede?

Título: “Espirales de repetición”	
<p>Objetivo: Inventar un patrón y extenderlo a partir de la manipulación de material no estructurado.</p>	<p>Contenidos matemáticos: Identificación de patrones. Creación de seriaciones atendiendo a la combinación de criterios cualitativos y/o cuantitativos.</p>

Tabla 6. Tarea de inventar un patrón de repetición

Material necesario (Figura 6):

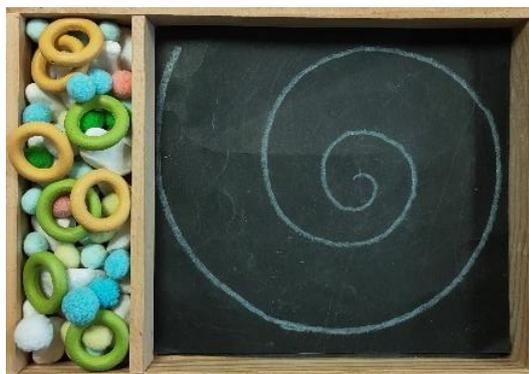


Figura 6. Piedras, argollas de colores, pompones de lana y cartulina con dibujo de espiral. Fuente: elaboración propia

Desarrollo de la tarea:

- Presentar el material (Figura 6) a los niños y las niñas y dejar un espacio de tiempo para que lo manipulen libremente.
- Proponerles en parejas crear patrones con los elementos proporcionados, para posteriormente extenderlos siguiendo la espiral.
- Documentar y registrar las interacciones que se producen durante la toma de decisiones.

Preguntas intencionadas:

- ¿Qué piezas utilizaremos para definir el patrón central?
- En un patrón ABC, ¿cómo son las 3 primeras piezas?
- En un patrón ABB hay una pieza diferente y dos iguales, y en un patrón AAB ¿cómo son las piezas?, ¿notas algo que siempre sucede?
- ¿Qué te parece más fácil, extender un patrón ABC o un patrón AB? ¿por qué?
- ¿Puedes construir otra seriación con los mismos elementos? ¿cómo sería?
- ¿Puedes describir tu nueva seriación con palabras?, ¿puedes describir la seriación utilizando símbolos en lugar de palabras?

Pensamiento algebraico que promueven las tareas:

La primera tarea de seriación propuesta (Tabla 5) corresponde a encontrar elementos faltantes de una secuencia. Dicha tarea promueve el pensamiento recursivo, ya que permite anticipar solo el elemento sucesor de la secuencia. En cambio, la segunda tarea de inventar patrones (Tabla 6), permite avanzar hacia la consciencia de la estructura subyacente, como es la unidad de repetición, promoviendo el pensamiento relacional y el funcional.

3.3 Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos

El estudio del cambio considera tres etapas: el estado inicial, el cambio o transformación a partir de un operador, y el estado final, que es distinto a la inicial, salvo cuando el operador es neutro (Alsina, 2022a). En las Tablas 7 y 8 se muestran algunas posibles tareas para abordar el cambio.

Título: “Proyectando mi personaje en la oscuridad”	
Objetivo: Aplicar cambios cualitativos.	Contenidos matemáticos: Observación de cambios. Introducción de operadores directos para realizar cambios (forma, color, tamaño, grosor).

Tabla 7. Tarea para describir cambios cualitativos

Material necesario (Figura 7):



Figura 7. (izquierda) Bandeja con vasos de plástico, papel transparente, rotulador y linternas; (derecha) Proyección con el uso de la linterna. Fuente: elaboración propia.

Experiencia:

- Invitar a los niños y niñas a formar un círculo y sentarse en el suelo para escuchar atentamente la lectura de un cuento.
- Presentar una bandeja con linternas y vasos de plástico cubiertos con papel transparente, como se aprecia en la Figura 7 (izquierda). Cada vaso tiene dibujado un personaje del cuento sobre el papel transparente, por ejemplo, un animal, una persona, un objeto, etc.
- Invitar a cada uno de los niños y niñas a escoger un vaso y una linterna, y descubrir un personaje.
- Los niños y niñas manipulan el material y juegan libremente.
- A partir de preguntas guiadas se invita a descubrir qué ocurre con el personaje al ser proyectado en la pared, como se observa en la Figura 7 (derecha).
- Finalmente, el profesor o profesora relata nuevamente el cuento. Los niños y niñas participan del relato e interactúan proyectando el personaje asignado.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cuáles son los personajes del cuento?
- ¿Cómo es tu personaje?, ¿qué características tiene?
- ¿Qué le ocurre al personaje si lo proyectamos en la pared con la ayuda de la linterna?
- ¿Qué sucede si acercamos el vaso a la pared?, ¿y si lo alejamos?, ¿notas algo que siempre sucede?, ¿cómo se transforma el personaje?, ¿qué características tienen ahora?

Título: “Observando el crecimiento del ajo”	
Objetivo: Reconocer cambios cuantitativos.	Contenidos matemáticos: Observación de cambios en el entorno cercano. Empleo de cuantificadores para describir cambios. Uso de tablas para registrar datos.

Tabla 8. Tarea para describir cambios cuantitativos

Material necesario (Figura 8):



Figura 8. Ajos, envases de cristal, tierra y agua. Fuente: elaboración propia.

Desarrollo de la tarea:

- Poner el material al alcance de los niños y las niñas, como se observa en la Figura 8.
- Proponer a cada uno de los niños y niñas plantar un ajo en un envase de cristal.
- Mientras ejecutan la acción, realizar preguntas que permitan generar hipótesis sobre lo que sucederá con el ajo en los días próximos.
- Observar día tras día los cambios en el crecimiento del ajo.
- Medir el crecimiento del ajo y registrar los datos en una tabla de valores.
- Comprobar o refutar las hipótesis planteadas.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cuánto tiempo pensáis que demorará en crecer cada ajo plantado?, ¿todos los ajos crecerán en igual tamaño al mismo tiempo?
- ¿Cómo podemos saber cuánto crecen?, ¿qué herramienta podemos utilizar para medir el crecimiento del ajo?, ¿cómo podemos organizar la información del crecimiento del ajo?

- Si conocemos la medida del tallo de un ajo, ¿podremos predecir la longitud que tendrá mañana?, ¿cómo podemos representar esa cantidad desconocida?
- ¿Cuánto más creció hoy el ajo en comparación con ayer? ¿y si comparamos su crecimiento con tres días atrás?

Pensamiento algebraico que promueven las tareas:

Las tareas de las Tablas 7 y 8, plantean situaciones de cambios a partir de un operador. Para su desarrollo, requieren de la aplicación de cambios cualitativos y reconocimiento de cambios cuantitativos, respectivamente. Por tanto, promueven el desarrollo del pensamiento funcional, permitiendo a futuro introducir la noción de función.

4. Consideraciones finales

La enseñanza del álgebra desde la educación infantil permite que “los profesores puedan ayudar a los alumnos a construir una sólida base de comprensión y experiencia, como preparación para un trabajo más complejo en álgebra en los niveles medios y en la escuela secundaria” (NCTM, 2003, p.39). Por tanto, promover el desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil implica atender a una variedad de conocimientos algebraicos tempranos: 1) establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos; 2) seriaciones a partir de patrones de repetición; 3) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (Pincheira y Alsina, 2021; NCTM; 2000; ACARA, 2020; NEL, 2013; MINEDUC, 2018), lo que representa un desafío para el profesorado. Sin embargo, la adquisición de tales conocimientos no supone una dificultad para los niños y niñas de esta etapa escolar, puesto que se ha evidenciado que desde temprana edad son capaces de desarrollar competencias matemáticas amplias y sofisticadas (Clements y Sarama, 2015).

En términos generales, el pensamiento algebraico se fundamenta en la comprensión tanto de conceptos algebraicos, como una concienciación de la estructura y las relaciones matemáticas (Chimoni et al., 2021), dando lugar a otros tipos de pensamiento. En educación infantil, como se ha señalado, los tipos de pensamiento algebraico que se movilizan son: el pensamiento relacional, pensamiento recursivo y pensamiento funcional (Lenz, 2022; Luken y Sauzet, 2020; Wijns, et al., 2019a).

Diversos autores (e.g., Lenz, 2022; Carpenter et al., 2005) informan que es posible iniciar el desarrollo del pensamiento relacional mediante la comprensión de la igualdad, las comparaciones de más-menos y las relaciones parte-todo, con la ayuda de objetos reales y manipulables, puesto que permiten profundizar en el uso de cuantificadores y descripción de cualidades a partir del reconocimiento de atributos. Por otro lado, el reconocimiento y análisis de patrones de repetición conforman una base importante en el desarrollo del pensamiento algebraico. En este contexto, las distintas tareas para hacer patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al. 2013; Wijns et al., 2019a) ofrecen la oportunidad de movilizar modos de pensamiento algebraico específicos de acuerdo al nivel de sofisticación de la tarea, es decir, según requieran o no de la identificación de la unidad de repetición para su desarrollo (Acosta et al., 2022b; Pincheira et al., 2022). En tal caso, las tareas de duplicar un patrón, encontrar elementos faltantes de una secuencia y ampliar una secuencia, movilizan el pensamiento recursivo, puesto que requieren de la predicción de un elemento desconocido en una secuencia de valores haciendo uso de la relación entre elementos consecutivos (Luken y Sauzet, 2020). Mientras que, las tareas de construir el mismo patrón con

diferentes elementos, identificar la unidad de repetición e inventar un patrón, se focalizan en el uso de estrategias de similitud relacional para su desarrollo (Rittle-Johnson et al., 2013), movilizándolo el pensamiento relacional. Asimismo, dichas tareas requieren del reconocimiento de la estructura o núcleo para su desarrollo, movilizándolo el pensamiento funcional (Wijns et al., 2019a).

Este último tipo de pensamiento también se moviliza a partir de la transformación de situaciones matemáticas que están relacionadas y cambian (Warren y Cooper, 2005), asentando las bases para el posterior estudio de las funciones y variables (NCTM, 2003).

Para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil, pues, es necesario contar con profesores capaces de implementar en sus prácticas de enseñanza actividades que incorporen los distintos tipos de pensamiento propios de esta etapa escolar. Sin embargo, las actividades por sí solas no les otorgarán a los niños y niñas las habilidades necesarias para pensar algebraicamente, por lo que es muy importante la gestión de la enseñanza que se realiza. Se concluye que, desde una perspectiva competencial, las prácticas de enseñanza del álgebra en infantil deberían focalizarse en el planteamiento de retos (resolución de problemas); la formulación de buenas preguntas para que los niños y las niñas expliquen, argumenten, justifiquen y comprueben sus acciones (razonamiento y prueba); la interacción, la negociación y el diálogo en el aula (comunicación); los vínculos de los conocimientos algebraicos con conocimientos de otros ejes y con otras áreas (conexiones); y, finalmente, la representación (concreta, pictórica e introducción a la simbólica).

Agradecimientos:

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447; el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856); y las Escoles Bressol Municipals de Vic, Cataluña (España).

Bibliografía

- Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022a). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática*, 22, 91-110. <https://doi.org/10.35763/aiem22.4193>
- Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022b). El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 11(2), 1-37. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37>
- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. ICE-Horsori.
- Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8(1), 1-19. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19>
- Alsina, Á. (2022a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Editorial Graó.
- Alsina, Á. (2022b). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*, 111, 67-89.



- Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). El cambio: Un conocimiento esencial del álgebra temprana. *Revista Científica Ecociencia*, 9(6), 49-76. <https://doi.org/10.21855/ecociencia.96.737>
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2020). *The Australian Curriculum: Mathematics*. Recuperado de <https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/>
- Blanton, M.L. (2008). *Algebra in elementary classrooms: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.
- Björklund, C. y Pramling, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education*, 22 (1), 9-104. <https://doi.org/10.1080/09669760.2013.809657>
- Canals, M^a. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari*. Eumo.
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM Mathematics Education*, 37(1), 53-59. <https://doi.org/10.1007/BF02655897>
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Journal for the Study of Education and Development*, 42(3), 479-522. <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570>
- Castro, E. y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13>
- Castro, E. y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, 19(2), 67-94.
- Chamorro, M.C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*. Pearson-Prentice.
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2021). The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development*, 44(3), 503-552. <https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280>
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461-555). Information Age Publishing.
- Clements, H. D., y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.
- Clements, H.D. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.
- Collins, M. A. y Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, 32, 204-214.
- Dienes, Z.P. (1971a). *Estados y operadores. 2: Iniciación al álgebra*. Teide
- Dienes, Z.P. (1971b). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos*. Teide
- Dienes, Z.P., y Golding, E. (1976). *Los primeros pasos en matemáticas. 1: lógica y juegos lógicos*. Teide.
- Dumas, D., Alexander, P.A. y Grossnickle, E.M. (2013). Relational reasoning and its manifestations in the educational context: A systematic review of the literature. *Educational Psychology Review*, 25(3), 391-427.
- Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Upper Saddle River, NJ: Pearson. <http://dx.doi.org/10.14507/er.v0.1104>.

- Gripton, C. (2022). Pattern in early years mathematics curriculum: a 25-year review of the status, positioning and conception of pattern in England. *Research in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.2010237>
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8, 139–151.
- Kilpatrick, J. (2011). En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 125-130). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education*, 1-17. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6>
- Lüken, M. M. (2018). Is patterning a mathematical activity? -An analysis of young children's strategies in working with repeating patterns. *A mathematics education perspective on early mathematics learning- POEM 2018*. Kristiansand.
- Lüken, M.M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 28-48. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452>
- McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 310–337.
- Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil*. Ministerio de Educación y Formación Profesional.
- Molina, M. y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61–80.
- Montessori, M. (1914). *El método de la pedagogía científica aplicado a la educación de la infancia en las Case dei Bambini*. Araluce.
- Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. UNESCO.
- Morin, E. (2019). *Pensar la complejidad. Crisis y metamorfosis*. Publicacions de la Universitat de Valencia.
- National Council Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).
- Nurturing Early Learners [NEL]. (2013). *A Curriculum for Kindergartens in Singapore*. Volume 6. Ministry of Education. Republic of Singapore.
- Papic, M. (2007). Promoting Repeating Patterns with Young Children—More than Just Alternating Colors. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12, 8-13.
- Papic, M. y Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice* (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart) (Vol. 2, pp. 591–600). MERGA.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Thinking. *Journal for Research for Mathematics Education*, 42, 237-269. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.3.0237>
- Piaget, J. (1941). *Génesis de las estructuras lógicas elementales*. Guadalupe.
- Pincheira, N., Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en educación infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA*, 17(1), 1-24.



- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). PME.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376–396.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M. y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, 31, 101–112.
- Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). Informe Rocard-Enseñanza de las ciencias ahora: Una nueva pedagogía para el futuro de Europa. *Comisión europea*.
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Starkey, P., Klein, A. y Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 99–120.
- Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E.S., Barkai, R. y Tabach, M. (2019). Preschool teachers' knowledge of repeating patterns: focusing on structure and the unit of repeat. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22, 305–325. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9395-x>
- Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162. <https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5>
- Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019a). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. M. Robinson, H. P. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical learning and cognition in early childhood: Integrating interdisciplinary research into practice* (pp. 139–161). Springer.
- Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019b). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, 49, 152-163. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004>
- Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números, Revista de Didáctica de las matemáticas*, 97, 51-67.
- Zippert, E.L., Douglas, A. y Rittle-Johnson, B. (2020). Finding patterns in objects and numbers: Repeating patterning in pre-K predicts kindergarten mathematics knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology*, 200. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104965>

Nataly Pincheira. Departamento de Didácticas Específicas, Área de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Educación y Psicología, Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona (Catalunya).
Doctora en Educación por la Universidad de Girona. Máster en Educación Matemática. Licenciada en Educación. Profesora de Educación Media en Matemáticas. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra temprana en educación infantil y primaria, y en la formación del profesorado de matemáticas. Email: nataly.pincheira@udg.edu

Ángel Alsina. Departamento de Didácticas Específicas, Área de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Educación y Psicología, Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona (Catalunya).
Profesor Catedrático de Didáctica de las Matemáticas y Director de la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals en la Universidad de Girona. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. Email: angel.alsina@udg.edu

Yeni Acosta. Departamento de Didácticas Específicas, Área de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Educación y Psicología, Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona (Catalunya).
Doctora en Educación por la Universidad de Girona. Máster en Atención a la Diversidad en Educación Inclusiva. Graduada en Educación Infantil. Sus líneas de investigación se centran en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los patrones matemáticos y del álgebra temprana en general, a través del diseño de itinerarios de enseñanza. Email: yeni.acosta@udg.edu

