Universitat de Girona

INICIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DE LOS PATRONES DE REPETICIÓN

Yeni Acosta Inchaustegui

Universitat de Girona

TESIS DOCTORAL

INICIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DE LOS PATRONES DE REPETICIÓN

Autora
Yeni Acosta Inchaustegui

2023

Universitat de Girona

TESIS DOCTORAL

INICIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DE LOS PATRONES DE REPETICIÓN

Autora

Yeni Acosta Inchaustegui

2023

Dirigida por

Dr. Ángel Alsina

Memoria presentada para optar al título de doctora por la Universitat de Girona

Universitat de Girona

Dr. Àngel Alsina, profesor Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universitat de Girona,

DECLARO:

Que la Tesis titulada "INICIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DE LOS PATRONES DE REPETICIÓN", presentada por Yeni Acosta Inchaustegui para obtener el grado de Doctora en Educación por la Universitat de Girona ha sido realizada bajo mi supervisión.

Para todos los efectos, firmo este documento.

Firma

Girona, 30 de mayo de 2023

A mis hijos, Nora y Joel, por regalarme tiempo de su infancia.

A Xevi, mi compañero de viaje, por apoyarme en este camino.

A mis padres y familia, por creer en mí.

A mis abuelos maternos, por cuidarme siempre.

Lo que llamamos caos son solo patrones que no hemos reconocido.
Lo que llamamos aleatorio son solo patrones que no podemos descifrar.
Lo que no podemos entender lo llamamos tontería.

(Palahniuk, 2011, p. 118)

AGRADECIMIENTOS

Esta Tesis Doctoral no hubiera sido posible sin el apoyo y ayuda de muchas personas, a las que deseo dedicar esta sección de la memoria.

Àngel Alsina: Mi camino como maestra y mi crecimiento como persona ha estado marcado por alguien que siempre me ha animado a crear en el presente las oportunidades del futuro. Esta persona es Àngel Alsina, mi tutor de TFG, de TFM y ahora Director de Tesis. A él, doy las gracias por confiar en mí, por enseñarme a aprender y crecer desde la profesionalidad, el rigor, la humildad, la sencillez, el esfuerzo y la pasión por nuestro trabajo. Solo puedo decir, gracias por poner en el centro de todas nuestras investigaciones la necesidad de avanzar hacia un futuro matemáticamente consolidado, con niños y niñas que aprendan desde su realidad y conocimientos, junto a docentes cada vez mejor formados para afrontar los retos de la sociedad contemporánea. Gracias por acompañar mis horas de docencia en la Universitat de Girona y ayudarme a co-construir desde la formación inicial. Gracias por cada día a tu lado y por cada oportunidad de aprendizaje. Desde el primer instante que te conocí, cada momento vivido ha sido una experiencia de ejemplo a seguir. En este camino, has sido, sin duda, mi referente, mi faro y una mano segura para estos momentos donde el desnivel de la montaña se acentuaba. Gracias por plantar en mí una semilla que no dejaré de regar jamás.

Organismos implicados: Agradecer al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España la concesión de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856); a la Universitat de Girona, especialmente el Departamento de Didácticas Específicas de la Facultad de Educación y Psicología y el grupo de investigación consolidado de la Generalitat de Catalunya “Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental – GRECA (GRHCS0002). En este contexto, deseo realizar especial mención a las ayudas recibidas por el Departamento de Didácticas Específicas para la traducción al inglés de artículos que conforman la Tesis, así como la financiación para obtener asesoramiento estadístico y recursos para promover la transferencia y comunicación de resultados en diversos congresos.

Personal PDI y PAS de la UdG: Quiero dar las gracias a los dos directores del Departamento de Didácticas Específicas que han ocupado el cargo durante este tiempo: Jaume Ametller y Jordi Cicres, junto con Àngels Coma, secretaria de dicho Departamento. Deseo, además, hacer extensivo el agradecimiento a todos los compañeros y compañeras de Departamento por la acogida que me han brindado durante estos años, especialmente al profesorado del área de matemáticas. Gracias Teresa Calabuig por las horas de despacho compartidas. A todos, gracias. En la misma línea, agradecer a profesionales de la Universitat de Girona que han estado presentes como soporte técnico, didáctico y bibliográfico: Jaume Vilà (técnico de laboratorio), Ester Bosch (maestra responsable del Gamar) y Laia Molina (bibliotecaria-documentalista).

Escuela Pericot: Deseo compartir este agradecimiento con todos los docentes del centro, especialmente con Àngel Villalón por abrirme las puertas de la escuela y confiar en el proyecto de investigación que le presentaba una mañana de diciembre de 2016 en su despacho de director. También a Mireia Moran, por inspirarme como maestra y darme la oportunidad de entrar a su aula y vivir durante tres años consecutivos la evolución de sus alumnos. Asimismo, gracias a los 24 niños y niñas y sus respectivas familias por participar en este estudio longitudinal desarrollado durante tres años consecutivos de marzo a junio.

Juicio de expertos: Agradezco las valoraciones y propuestas de mejora recibidas durante el proceso de validación externa desarrollado en esta Tesis. Doy las gracias a los siguientes expertos y miembros del grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM): Blanca Arteaga, Ainhoa Berciano, Alicia Bruno, Mª Luz Callejo, Mequè Edo, Judith Fábregas, José Mª Gavilán, Mª Cinta Muñoz-Catalán, Mª Luisa Novo, María Salgado, Mª Jesús Salinas, Claudia Vázquez. Destacando la participación relevante de las Doctoras Berciano, Bruno, Novo y Salgado, quienes aportaron año tras año su valoración.

Gracias también a Cristina Ayala-Altamirano, por su colaboración, asesoramiento y oportunidad para compartir líneas de investigación. A Mª Luisa Novo, por sus mensajes llenos de bondad y fuerza. A Alicia Bruno, por su profesionalidad y

humildad. A María Cañadas, por su predisposición para recibirme en su universidad. A Claudia Vásquez, por sus consejos y presencia.

Doctorandos: En este camino muchas personas han subido al mismo vagón de este tren y con ellas ha sido más fácil compartir el viaje. Doy las gracias a todas las personas con quiénes he compartido el despacho 049 de la Facultad de Educación y Psicología de la Universidad de Girona. El doctorado me ha dado la oportunidad de conocer personas maravillosas, a quienes también dedico con cariño las siguientes líneas:

- Gracias Cesar Trelles y Ximena Toalongo por iniciar este camino en el mismo momento.
- Gracias Claudia Cornejo por dar fuerzas con una simple y cálida sonrisa.
- Gracias Jefferson Rodrigues-Silva por esa mirada técnica, estética y filosófica de muchos conceptos de la Tesis y de la vida. Gracias por tantos conocimientos adquiridos a tu lado. Gracias por ser un ejemplo de superación constante.
- Gracias Gloria Olmos, por enseñarme a aprender desde el corazón, por ayudarme a confiar en que las cosas buenas pasan y que las no tan buenas, también pasan por alguna razón. Gracias por esta conexión tan especial desde el primer día, por toda tu ayuda en mi docencia y por regalarnos con tanta humildad y profesionalidad tu pasión. Gracias por tu presencia y estima, sé que has llegado para no marchar.
- Gracias Nataly Pincheira, gracias por llegar a mi vida en un momento postpandemia donde el mundo que conocíamos evolucionaba a marchas, a veces, forzadas. Fuimos dos chispas de ilusión, que juntas fueron capaces de encontrar un punto en común para avanzar cogidas de la mano. El pensamiento algebraico y el álgebra fueron la excusa, y en este trabajo conjunto de análisis minucioso de la literatura, nació una amistad para toda la vida. Más allá del espacio profesional, doy gracias a la vida por encontrar una persona como tú en este viaje. Una persona sincera, transparente, humilde, profesional, apasionada y con un corazón enorme. Gracias por tanta complicidad, por todas las risas, y a veces también lágrimas que nos han hecho crecer. Gracias por todo el pasado y presente vivido, pero también por un futuro juntas, aprendiendo, soñando y

construyendo, sobre unos valores comunes que hacen que la fusión sea perfecta.

Amigas: Reservo también unas líneas para todas aquellas amistades que me han apoyado desde el principio y que me han hecho ver que podía ser posible. Especialmente, gracias a Nerina Romero, Laura Rodríguez, Cristina Isamat y Bibi Abad. Siempre habéis estado presentes en momentos importantes de mi vida y en este también he contado con vuestra amistad. Gracias por ser y estar.

Familia: Llegados a este punto de agradecimientos, reservo un espacio especial para mi familia porque sin todos vosotros, llegar hasta aquí hubiera sido casi imposible.

- Gracias Amparo y Enrique, mis padres, que siempre me han dado un rayo de luz para esos días grises, junto con abrazos llenos de amor. Gracias por todo el valor del esfuerzo transmitido y por el aliento brindado para confiar, para seguir y para aprender de cada error, porque en la vida no cuentan las veces que caes, cuentan las que te levantas y lo que aprendes de ello. Hoy pongo en valor más que nunca esta frase porque me ha ayudado a llegar hasta aquí. Gracias a Rafe, mi hermano, por también estar presente.
- Gracias Neus y Pere, mis suegros, por su apoyo también incondicional. Por ayudarme a encontrar tiempo para avanzar en el desarrollo de esta Tesis. Gracias por alentarme a continuar hacia adelante y por todas las palabras de reconocimiento, apoyo y estima.

Xevi, Nora y Joel: Para finalizar, quiero agradeceros a vosotros, mi epicentro familiar, mis tres personas imprescindibles. Comenzaré por estas dos personitas que, a pesar de ser soñadas, físicamente no estaban presentes en los inicios de este camino: Nora y Joel, mis hijos de 4 y 2 años. Lo primero que tengo que decir es: gracias por regalarme tiempo de vuestra corta infancia y perdón por no estar presente en algunas "primeras veces" de vuestras vidas. Tú, Nora, formaste parte del trabajo de campo, sintiendo desde dentro todas mis emociones; y tú, Joel, viviste desde mis brazos muchas revisiones y reuniones en plena pandemia. Gracias a los dos por comprender el trabajo de la mama y por regalarme cada día una mirada llena de admiración.

La tercera persona eres tú, Xevi Buch, mi compañero de viaje, mi principio y mi fin, sin ti, nada de lo escrito hasta ahora tendría sentido. Gracias por compensar mis "ausencias" y dar sentido a todo lo que iba construyendo. Gracias por estar ahí, paciente, optimista, comprensible, desde el último suspiro de la noche hasta el primer minuto del día. Gracias por regalarme calma, tiempo y amor. Ha sido un camino que deseo recordar toda la vida, a pesar de estos momentos donde, mirándome a los ojos, me tomabas de la mano y tras un cálido abrazo me decías: - "tu pots, endavant, tot anirà bé!"-. Gracias por ser la razón de mis mañanas y la fuerza para vencer mis miedos. Gracias por poder contar contigo y sentir, incluso en este intenso viaje, la suerte que tengo de tenerte.

Sin más, gracias a todas las personas que han caminado junto a mí y que me han dado la oportunidad de aprender y crecer a su lado, tanto en el ámbito profesional como personal.

Deseo que este solo sea el inicio de un largo viaje…

Reconocimientos: Esta Tesis Doctoral ha sido apoyada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España a través de la Beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856); el Departamento de Didácticas Específicas de la Facultad de Educación y Psicología de la Universitat de Girona; el Instituto de Recerca Educativa de la misma universidad; y el grupo de investigación consolidado de la Generalitat de Catalunya “Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental – GRECA (GRHCS0002).

ÍNDICE DE CONTENIDOS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

ACARA	*Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority*
AMPS	*Awareness of Mathematical Pattern and Structure*
EIEM	Enfoque de los Itinerarios de la Enseñanza de las Matemáticas
ICM	Índice de competencia matemática
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
NEL	*Nurturing Early Learners*
MOE	*Ministry of Education*
OE	Objetivos específicos
OG	Objetivos generales
PISA	*Programme for International Student Assessment*
RG	Recursos gráficos
RL	Recursos lúdicos
RLIT	Recursos literarios
RM	Recursos manipulativos
RT	Recursos tecnológicos
SEIEM	Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
SR	Situaciones reales
TIMMS	*Trends in International Mathematics and Science Study*

RESUMEN

La Tesis Doctoral que se presenta en esta memoria, tiene como finalidad aportar conocimientos que permitan situar la forma en que los niños y las niñas de 3, 4 y 5 años se inician en la comprensión de patrones de repetición para avanzar hacia el desarrollo temprano del pensamiento algebraico, promoviendo la conexión entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional. Para ello, en el marco de una investigación basada en el diseño y desde una perspectiva longitudinal, se diseñan, validan e implementan propuestas sobre patrones de repetición con 24 escolares de educación infantil. Dichas propuestas emergen durante 3 años consecutivos a partir de la fusión entre las aportaciones de Clements y Sarama (2015) sobre las trayectorias de aprendizaje y el Enfoque de los Itinerarios de la Enseñanza de las Matemáticas (EIEM, de ahora en adelante) de Alsina (2010, 2019, 2020, 2022), conjuntamente con conocimientos teóricos que se sustentan de la literatura en general y orientaciones curriculares internacionales, en particular.

Tomando en consideración estos planteamientos, se asumen, las trayectorias de aprendizaje como una ruta que permite vehicular y secuenciar en el marco de una dificultad creciente un determinado objetivo matemático. En base a esto, se contemplan itinerarios de enseñanza que nacen en contextos informales (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos), prosiguen en contextos intermedios (recursos literarios y tecnológicos) y finalizan en contextos formales (recursos gráficos) contribuyendo a crear situaciones de aprendizaje desde lo situacional hasta lo formal, tal como plantea el EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022). Desde esta óptica, se pretende promover los inicios del pensamiento algebraico a través de la enseñanza de patrones de repetición, priorizando un aprendizaje secuencial de habilidades para hacer patrones de repetición y determinando la relación que se establece entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional, para poder garantizar una comprensión profunda de las matemáticas en las primeras edades.

Numerosas investigaciones han informado que el estudio de los patrones de repetición y su estructura influyen de manera positiva en el desarrollo matemático temprano, proporcionando una base esencial para fomentar el pensamiento algebraico (Lüken y Sauzet, 2020; Mulligan et al., 2020; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2006; Rittle-Johnson et al., 2013; Sarama y Clements, 2009;

Wijns et al., 2020). Bajo esta concepción, desde la propuesta curricular *Early Algebra,* se apuesta por la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas con la finalidad de consolidar modos de pensamientos que permitan atender de manera comprensiva la estructura que subyace a las matemáticas (Kaput, 2000). En esta Tesis Doctoral definimos, por una parte, el pensamiento algebraico como un modo de pensamiento multimodal que, mediante la focalización de relaciones y cambio, facilita el análisis, la representación, la justificación y la comprensión de la estructura; y, por otra parte, los patrones de repetición, como una secuencia de elementos ordenados que se rige por una estructura con una regularidad replicable. Autores como Gripton (2022); Hunter y Miller (2022); Lüken y Sauzet (2020); Miller et al. (2016); Papic (2015); y Zippert et al. (2021) sugieren la necesidad de promover la conciencia de los niños y las niñas sobre los patrones para estimular el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde una edad temprana. Sin embargo, Clements y Sarama (2007) exponen que es necesaria una implicación mayoritaria de profesionales para dar apoyo a un currículo de matemáticas para la primera infancia que despliegue y articule un modelo específico de aprendizaje, donde se contemple que los patrones configuran la base para el comienzo de la representación algebraica (Clements y Sarama, 2015). En este sentido, autores como Tirosh et al. (2017) detectaron que el profesorado de infantil no apuesta por el diseño de tareas que se centren en la estructura de los patrones; y otros como Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., (2019) exponen que queda pendiente estudiar si las actividades con patrones que se implementan promueven de forma óptima todo su potencial. Ante esta problemática, es necesario cuestionarse si la enseñanza de los patrones de repetición en la educación infantil se basa en la estrategia de alternancia de colores exclusivamente, en lugar de avanzar hacia la identificación y relación de los elementos que configuran el patrón para así comprender de manera funcional la estructura subyacente.

Bajo esta mirada, en cada ciclo de iteración longitudinal de la investigación de diseño, se realizan microanálisis transversales (entre contextos) y longitudinales (en función de la edad) que nos permiten reajustar el diseño de la intervención. Los datos recogidos mediante esquemas metodológicos etnográficos de observación participante (diario de campo); documentación pedagógica (registro audiovisual); y representaciones de los patrones (en formato dibujo), se han analizado a partir de técnicas cualitativas y cuantitativas. De este análisis mixto emergen datos que han permitido interpretar, calibrar y establecer una secuencia de aprendizaje de patrones de repetición para escolares de 3, 4 y 5 años. Dicha secuencia establece una ruta o trayectoria de aprendizaje para transitar de manera comprensible y progresiva hacia la estructura, avanzando a su vez, hacia los inicios del pensamiento algebraico. Los resultados obtenidos aportan orientaciones teóricas y metodológicas longitudinales sobre los inicios del pensamiento algebraico a través de la enseñanza de patrones de repetición. Tras 3 años consecutivos de estudio hemos podido constatar que el nivel de comprensión de los patrones de repetición varía en función de la edad, de las oportunidades del contexto de enseñanza y de la gestión docente. Por tanto, se concluye que es primordial tener presente los siguientes aspectos:

- Considerar una trayectoria de aprendizaje que contemple habilidades para hacer patrones con un orden de abstracción creciente, para así dotar de comprensión y significación los inicios del pensamiento algebraico, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de reproducir o extender, sin identificar la unidad de repetición. Para ello se establece un abordaje que incluye las habilidades de: 1) copiar; 2) interpolar; 3) extender; 4) abstraer o traducir; 5) reconocer la unidad de repetición; y 6) crear, con sus respectivas tareas: 1) duplicar un patrón; 2) encontrar elementos faltantes; 3) ampliar la secuencia; 4) construir el mismo patrón con diferentes elementos; 5) identificar la unidad de repetición; y 6) inventar un patrón. No podemos obviar, que si no comprendemos la manera en que se configura el pensamiento algebraico y la enseñanza de patrones de repetición, no podremos lograr que el aprendizaje sea significativo.
- Ser consciente que es a partir de los 4 años que los escolares comienzan a ser capaces de centrar su atención en la unidad que se repite e iniciar, por consiguiente, la movilización del pensamiento relacional.
- Acompañar la transición entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional, diseñando tareas que se centren de manera progresiva en la estructura y en la relación que se establece entre los elementos que configuran la unidad de repetición.
- Tener presente de que la dificultad del patrón con una estructura de repetición radica en la complejidad de la unidad que se repite de manera periódica. Por este motivo, de manera orientativa, se propone una

introducción gradual y combinada de los siguientes tipos de patrones de repetición: AB (3 años), ABB y AAB (4 años); y ABC (5 años).

- Diseñar tareas que permitan a los niños y las niñas transitar de los conocimientos concretos e informales, a los abstractos y formales, trazando un itinerario de enseñanza que incluya: situaciones reales, recursos manipulativos, lúdicos, literarios, tecnológicos y gráficos, contemplando lo que evolutivamente son capaces, sin limitar las oportunidades de crecimiento y aprendizaje.
- Compartir entre iguales diferentes maneras de representar una misma situación matemática para fomentar el uso de representaciones múltiples cuando los escolares organizan, registran y comunican sus ideas.
- Utilizar la representación y la justificación como procesos interconectados que permiten: i) plasmar de manera concreta la comprensión que poseen los niños y las niñas acerca de los patrones de repetición; ii) evaluar el progreso de dicha comprensión, y iii) reequilibrar el proceso de enseñanza de patrones de repetición a través del diseño de tareas contextualizadas que fomenten y extiendan el aprendizaje.

En esta ruta temprana hacia la promoción del pensamiento algebraico, la figura docente debe estar enfocada en ayudar a los escolares a prestar atención a la unidad de repetición dentro de las tareas de patrones. En este sentido, es importante ofrecer espacios de diálogo para preguntar a los niños y las niñas cómo llegaron a la solución de las tareas propuestas, favoreciendo así: 1) escenarios de co-aprendizaje entre pares; 2) oportunidades para externalizar a través del lenguaje su comprensión; y 3) un debate co-constructivo sobre las estrategias utilizadas que enriquezcan la conexión entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional. De esta manera será posible avanzar hacia la sofisticación del pensamiento algebraico de manera conectada con las matemáticas formales de la educación primaria.

RESUM

La Tesi Doctoral que es presenta en aquesta memòria, té com a finalitat aportar coneixements que permetin situar la manera en què els nens i les nenes de 3, 4 i 5 anys s'inicien en la comprensió de patrons de repetició per a avançar cap al desenvolupament primerenc del pensament algebraic, promovent la connexió entre el pensament recursiu, relacional i funcional. Per a això, en el marc d'una investigació basada en el disseny i des d'una perspectiva longitudinal, es dissenyen, validen i implementen propostes sobre patrons de repetició amb 24 escolars d'educació infantil. Aquestes propostes emergeixen durant tres anys consecutius a partir de la fusió entre les aportacions de Clements i Sarama (2015) sobre les trajectòries d'aprenentatge i l'Enfocament dels Itineraris de l'Ensenyament de les Matemàtiques (EIEM, d'ara endavant) d'Alsina (2010, 2019, 2020, 2022), conjuntament amb coneixements teòrics que se sustenten de la literatura en general i orientacions curriculars internacionals, en particular.

Prenent en consideració aquests plantejaments, s'assumeixen, les trajectòries d'aprenentatge com una ruta que permet vehicular i seqüenciar en el marc d'una dificultat creixent un determinat objectiu matemàtic. Sobre la base d'això, es contemplen itineraris d'ensenyament que neixen en contextos informals (situacions reals, materials manipulatius i jocs), prossegueixen en contextos intermedis (recursos literaris i tecnològics) i finalitzen en contextos formals (recursos gràfics) contribuint a crear situacions d'aprenentatge des del situacional fins al formal, tal com planteja l’EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022). Des d'aquesta òptica, es pretén promoure els inicis del pensament algebraic a través de l'ensenyament de patrons de repetició, prioritzant un aprenentatge seqüencial d'habilitats per a fer patrons de repetició i determinant la relació que s'estableix entre el pensament recursiu, relacional i funcional, per a poder garantir una comprensió profunda de les matemàtiques en les primeres edats.

Nombroses recerques han informat que l'estudi dels patrons de repetició i la seva estructura influeixen de manera positiva en el desenvolupament matemàtic primerenc, proporcionant una base essencial per a fomentar el pensament algebraic (Lüken i Sauzet, 2020; Mulligan et al., 2020; *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2006; Rittle-Johnson et al., 2013; Sarama i Clements, 2009; Wijns et al., 2020). Sota aquesta concepció, des de la proposta curricular *Early Algebra*, s'aposta per

l'observació de patrons, relacions i propietats matemàtiques amb la finalitat de consolidar maneres de pensaments que permetin atendre de forma comprensiva l'estructura que emergeix de les matemàtiques (Kaput, 2000). En aquesta Tesi Doctoral definim, d'una banda, el pensament algebraic com una manera de pensament multimodal que, mitjançant la focalització de relacions i canvi, facilita l'anàlisi, la representació, la justificació i la comprensió de l'estructura; i, d'altra banda, els patrons de repetició, com una seqüència d'elements ordenats que es regeix per una estructura amb una regularitat replicable. Autors com Gripton (2022); Hunter i Miller (2022); Lüken i Sauzet (2020); Miller et al. (2016); Papic (2015); i Zippert et al. (2021) suggereixen la necessitat de promoure la consciència dels nens i les nenes sobre els patrons per a estimular el desenvolupament estructural, la comprensió relacional i la generalització des d'una edat primerenca. No obstant això, Clements i Sarama (2007) exposen que és necessària una implicació majoritària de professionals per a donar suport a un currículum de matemàtiques per a la primera infància que desplegui i articuli un model específic d'aprenentatge, on es contempli que els patrons configuren la base per al començament de la representació algebraica (Clements i Sarama, 2015). En aquest sentit, autors com Tirosh et al. (2017) van detectar que el professorat d'infantil no aposta pel disseny de tasques que se centrin en l'estructura dels patrons; i uns altres com Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., (2019) exposen que queda pendent estudiar si les activitats amb patrons que s'implementen promouen de manera òptima tot el seu potencial. Davant aquesta problemàtica, és necessari qüestionar si l'ensenyament dels patrons de repetició a l'educació infantil es basa en l'estratègia d'alternança de colors exclusivament, en lloc d'avançar cap a la identificació i relació dels elements que configuren el patró per a així comprendre de manera funcional l'estructura subjacent.

Sota aquesta mirada, en cada cicle d'iteració longitudinal de la investigació de disseny, es realitzen microanàlisis transversals (entre contextos) i longitudinals (en funció de l'edat) que ens permeten reajustar el disseny de la intervenció. Les dades recollides mitjançant esquemes metodològics etnogràfics d'observació participant (diari de camp); documentació pedagògica (registre audiovisual); i representacions dels patrons (en format dibuix), s'han analitzat a partir de tècniques qualitatives i quantitatives. D'aquesta anàlisi mixta emergeixen dades que han permès interpretar, calibrar i establir una seqüència d'aprenentatge de patrons de repetició per a escolars de 3, 4 i 5 anys. Aquesta seqüència estableix una ruta o trajectòria d'aprenentatge per a transitar de manera comprensible i progressiva cap a l'estructura, avançant alhora, cap als inicis del pensament algebraic. Els resultats obtinguts aporten orientacions teòriques i metodològiques longitudinals sobre els inicis del pensament algebraic a través de l'ensenyament de patrons de repetició. Després de tres anys consecutius d'estudi hem pogut constatar que el nivell de comprensió dels patrons de repetició varia en funció de l'edat, de les oportunitats del context d'ensenyament i de la gestió docent. Per tant, es conclou que és primordial tenir presents els següents aspectes:

- Considerar una trajectòria d'aprenentatge que contempli habilitats per a fer patrons amb un ordre d'abstracció creixent, per a així dotar de comprensió i significació els inicis del pensament algebraic, evitant un tractament dels patrons exclusivament de reproduir o estendre, sense identificar la unitat de repetició. Per a això, s'estableix un abordatge que inclou les habilitats de: 1) copiar; 2) interpolar; 3) estendre; 4) abstreure o traduir; 5) reconèixer la unitat de repetició; i 6) crear, amb les seves respectives tasques: 1) duplicar un patró; 2) trobar elements que falten; 3) ampliar la seqüència; 4) construir el mateix patró amb diferents elements; 5) identificar la unitat de repetició; i 6) inventar un patró. No podem obviar, que si no comprenem la manera en què es configura el pensament algebraic i l'ensenyament de patrons de repetició, no podrem aconseguir que l'aprenentatge sigui significatiu.
- Ser conscient que és a partir dels 4 anys que els escolars comencen a ser capaços de centrar la seva atenció en la unitat que es repeteix i iniciar, per consegüent, la mobilització del pensament relacional.
- Acompanyar la transició entre el pensament recursiu, relacional i funcional, dissenyant tasques que se centrin de manera progressiva en l'estructura i en la relació que s'estableix entre els elements que configuren la unitat de repetició.
- Tenir present que la dificultat del patró amb una estructura de repetició radica en la complexitat de la unitat que es repeteix de manera periòdica. Per aquest motiu, de manera orientativa, es proposa una introducció gradual i combinada dels següents tipus de patrons de repetició: AB (3 anys), ABB i AAB (4 anys); i ABC (5 anys).
- Dissenyar tasques que permetin als nens i les nenes transitar dels coneixements concrets i informals, als abstractes i formals, traçant un itinerari d'ensenyament que inclogui: situacions reals, recursos

manipulatius, lúdics, literaris, tecnològics i gràfics, contemplant el que evolutivament són capaços, sense limitar les oportunitats de creixement i aprenentatge.

- Compartir entre iguals diferents maneres de representar una mateixa situació matemàtica per a fomentar l'ús de representacions múltiples quan els escolars organitzen, registren i comuniquen les seves idees.
- Utilitzar la representació i la justificació com a processos interconnectats que permeten: i) plasmar de manera concreta la comprensió que posseeixen els nens i les nenes sobre els patrons de repetició; ii) avaluar el progrés d'aquesta comprensió, i iii) reequilibrar el procés d'ensenyament de patrons de repetició a través del disseny de tasques contextualitzades que fomentin i promoguin l'aprenentatge.

En aquesta ruta primerenca cap a la promoció del pensament algebraic, la figura docent ha d'estar enfocada a ajudar els escolars a focalitzar l'atenció a la unitat de repetició dins de les tasques de patrons. En aquest sentit, és important oferir espais de diàleg per a preguntar als nens i les nenes com van arribar a la solució de les tasques proposades, afavorint així: 1) escenaris de co-aprenentatge entre iguals; 2) oportunitats per a exterioritzar a través del llenguatge la seva comprensió; i 3) un debat co-constructiu sobre les estratègies utilitzades que enriqueixin la connexió entre el pensament recursiu, relacional i funcional. D'aquesta manera serà possible avançar cap a la sofisticació del pensament algebraic de manera connectada amb les matemàtiques formals de l'educació primària.

ABSTRACT

The purpose of the doctoral thesis presented in this report is to provide knowledge that allows us to situate the way in which 3-, 4- and 5-year-old children are initiated in the understanding of repetition patterns in order to advance towards the early development of algebraic thinking, promoting the connection between recursive, relational and functional thinking. For this purpose, within the framework of a design-based research and from a longitudinal perspective, proposals on repetition patterns are designed, validated and implemented with 24 infant schoolchildren. These proposals emerge over 3 consecutive years from the fusion of Clements and Sarama's (2015) contributions on learning trajectories and Alsina's (2010, 2019, 2020, 2022) Mathematics Education Itineraries Approach (EIEM, hereafter), together with theoretical knowledge based on literature in general and international curricular guidelines in particular.

Taking these approaches into consideration, the learning trajectories are assumed as a route that allows a certain mathematical objective to be conveyed and sequenced within the framework of increasing difficulty. Based on this, teaching itineraries are considered that start in informal contexts (real situations, manipulative materials and games), continue in intermediate contexts (literary and technological resources) and end in formal contexts (graphic resources), contributing to create learning situations from the situational to the formal, as proposed by the EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022). From this perspective, the aim is to promote the beginnings of algebraic thinking through the teaching of repeating patterns, prioritising sequential learning of skills for making repeating patterns and determining the relationship established between recursive, relational and functional thinking, in order to guarantee a deep understanding of mathematics at an early age.

Numerous research studies have reported that the study of repetition patterns and their structure have a positive influence on early mathematical development, providing an essential basis for fostering algebraic thinking (Lüken and Sauzet, 2020; Mulligan et al., 2020; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2006; Rittle-Johnson et al., 2013; Sarama and Clements, 2009; Wijns et al., 2020). Under this conception, the Early Algebra curriculum proposal is committed to the observation of patterns, relationships and mathematical properties in order to consolidate ways of thinking that

allow us to comprehensively address the structure that underlies mathematics (Kaput, 2000). In this Doctoral Thesis we define, on the one hand, algebraic thinking as a multimodal mode of thinking that, by focusing on relations and change, facilitates analysis, representation, justification and understanding of structure; and, on the other hand, repeating patterns, as a sequence of ordered elements that is governed by a structure with a replicable regularity. Authors such as Gripton (2022); Hunter and Miller (2022); Lüken and Sauzet (2020); Miller et al. (2016); Papic (2015); and Zippert et al. (2021) suggest the need to promote children's awareness of patterns to stimulate structural development, relational understanding and generalisation from an early age. However, Clements and Sarama (2007) argue that a majority involvement of professionals is needed to support an early childhood mathematics curriculum that deploys and articulates a specific model of learning, where patterns are seen as the basis for the beginning of algebraic representation (Clements and Sarama, 2015). In this sense, authors such as Tirosh et al. (2017) found that early childhood teachers are not committed to designing tasks that focus on the structure of patterns; and others such as Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., (2019) state that it remains to be studied whether the activities with patterns that are implemented optimally promote their full potential. Given this problem, it is necessary to question whether the teaching of repetition patterns in early childhood education is based exclusively on the strategy of colour alternation, instead of moving towards the identification and relationship of the elements that make up the pattern in order to understand the underlying structure in a functional way.

Under this perspective, in each cycle of longitudinal iteration of the design research, cross-sectional (between contexts) and longitudinal (according to age) micro-analyses are carried out, which allow us to readjust the design of the intervention. The data collected through ethnographic methodological schemes of participant observation (field diary); pedagogical documentation (audio-visual recording); and representations of patterns (in drawing format), have been analysed using qualitative and quantitative techniques. From this mixed analysis, data emerged that allowed us to interpret, calibrate and establish a learning sequence of repetition patterns for 3-, 4- and 5-year-old schoolchildren. This sequence establishes a learning path or trajectory to move in a comprehensible and progressive way towards structure, advancing in turn towards the beginnings of algebraic thinking. The results obtained provide longitudinal theoretical and methodological orientations on the beginnings of algebraic thinking through the teaching of repetition patterns. After 3 consecutive years of study, we have been able to confirm that the level of understanding of repeating patterns varies according to age, the opportunities of the teaching context and teacher management. We therefore conclude that it is essential to keep the following aspects in mind:

- To consider a learning path that contemplates skills for making patterns with an increasing order of abstraction, in order to provide understanding and significance to the beginnings of algebraic thinking, avoiding a treatment of patterns exclusively of reproducing or extending, without identifying the unit of repetition. To this end, an approach is established that includes the skills of: 1) copying; 2) interpolating; 3) extending; 4) abstracting or translating; 5) recognising the unit of repetition; and 6) creating, with their respective tasks: 1) duplicating a pattern; 2) finding missing elements; 3) extending the sequence; 4) constructing the same pattern with different elements; 5) identifying the unit of repetition; and 6) inventing a pattern. We cannot ignore the fact that if we do not understand the way in which algebraic thinking and the teaching of repeating patterns are configured, we will not be able to make learning meaningful.
- Be aware that it is from the age of 4 that schoolchildren begin to be able to focus their attention on the repeating unit and thus begin to mobilise relational thinking.
- Accompany the transition between recursive, relational and functional thinking, designing tasks that progressively focus on the structure and the relationship established between the elements that make up the repeating unit.
- Keep in mind that the difficulty of the pattern with a repeating structure lies in the complexity of the unit that is repeated periodically. For this reason, as a guideline, a gradual and combined introduction of the following types of repeating patterns is proposed: AB (3 years), ABB and AAB (4 years); and ABC (5 years).
- Designing tasks that allow children to move from concrete and informal knowledge to abstract and formal knowledge, outlining a teaching itinerary that includes: real situations, manipulative, playful, literary, technological and graphic resources, taking into account what they are

developmentally capable of, without limiting opportunities for growth and learning.

- Share different ways of representing the same mathematical situation among peers to encourage the use of multiple representations when schoolchildren organise, record and communicate their ideas.
- Using representation and justification as interconnected processes to: i) concretely capture children's understanding of repeating patterns; ii) assess the progress of that understanding; and iii) rebalance the process of teaching repeating patterns through the design of contextualised tasks that encourage and extend learning.

In this early route towards the promotion of algebraic thinking, the teaching role should be focused on helping schoolchildren to pay attention to the unit of repetition within pattern tasks. In this sense, it is important to offer spaces for dialogue to ask children how they arrived at the solution of the proposed tasks, thus favouring: 1) co-learning scenarios among peers; 2) opportunities to externalise through language their understanding; and 3) a co-constructive debate on the strategies used that enrich the connection between recursive, relational and functional thinking. In this way it will be possible to move towards the sophistication of algebraic thinking in a way that is connected to formal mathematics in primary education.

PRESENTACIÓN

Promover la conciencia de los niños y las niñas sobre los patrones permite avanzar en el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde una edad temprana, sentando así las bases del pensamiento algebraico. La Tesis Doctoral que se presenta a continuación está constituida por un compendio de 6 artículos que se han desarrollado en el marco de una Beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856) apoyada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. La investigación implementada pretende ser un punto de partida accesible tanto para docentes de educación infantil, como para formadores de maestros, con la finalidad de incidir de manera práctica y temprana en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Partimos del convencimiento del álgebra como un estándar de conocimiento propio para niños y niñas[*] de 3 a 6 años y focalizamos la mirada en este bloque de contenido como un área que debe ser abordada de manera temprana para poder ayudar a los niños a crear una base sólida de comprensión donde emergerán contenidos más sofisticados de la educación matemática formal. Autores como Carpenter et al. (2003) consideran el conocimiento intuitivo de los escolares sobre los patrones como una base que favorece la transición hacia el pensamiento algebraico temprano. De acuerdo con Ginsburg et al. (2003), el primer tipo de patrón con el que los niños pequeños se involucran en diversos contextos de enseñanza son los patrones de repetición, ya que como afirman Bock et al. (2018) otorgan un orden a lo que los escolares perciben como colecciones caóticas de elementos dispares.

Bajo esta mirada, se concibe el pensamiento algebraico en general, y los patrones de repetición en particular, como una ruta para involucrar a los niños en la observación, el razonamiento y el reconocimiento de estructuras matemáticas abstractas. Es por ello que centramos nuestro interés en los patrones de repetición, partiendo de la base que a pesar de que se trata de una forma de pensamiento que contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas, siguen siendo una temática que se aborda de manera limitada en las aulas de educación infantil (Wijns, Torbeyns, Bakker, et al.,

[*] En adelante, en esta Tesis Doctoral se usará el masculino con el único objetivo de hacer más fluida la lectura, sin menoscabo de género.

2019). Esta idea se pone de manifiesto cuando se diseñan tareas que para su resolución no requieren de un reconocimiento de la unidad de repetición, limitando así, el desarrollo de modos de pensamiento que se anidan en el pensamiento algebraico y que permiten transitar hacia una educación matemática formal desde la comprensión. Por tanto, nuestro propósito es ofrecer una fundamentación teórica y metodológica para favorecer que los escolares de educación infantil, se inicien en el desarrollo temprano del pensamiento algebraico, a través de una trayectoria de aprendizaje articulada en itinerarios de enseñanza que contemplen contextos multimodales. Desde este escenario, se apuesta por el diseño de una ruta de aprendizaje para generar conexiones de apoyo entre el pensamiento recursivo, el pensamiento relacional y el funcional con la intención de avanzar hacia la comprensión estructural y la representación de los patrones de repetición.

Seguidamente se detalla brevemente el contenido de cada capítulo:

- Capítulo I: Introduce la problemática de investigación, pregunta y objetivos que guían el estudio longitudinal desarrollado.
- Capítulo II: Proporciona una sinopsis de los antecedentes teóricos de la literatura matemática sobre el álgebra como estándar de contenido; los patrones como puerta de entrada al pensamiento algebraico; los modos de pensamiento, que, desde el contexto de patrones, se anidan en la educación infantil; y algunas pautas teóricas y metodológicas sobre cómo abordar a través de la enseñanza de patrones de repetición los inicios del pensamiento algebraico.
- Capítulo III: Muestra una síntesis del método que ha ejercido de columna vertebral de la Tesis, incluyendo las diferentes fases de la investigación de diseño y la vinculación detallada de los estudios desarrollados en función de los objetivos específicos de la Tesis.
- Capítulo IV: Incluye el cuerpo de artículos que conforma el compendio.
- Capítulo V: Discute los principales resultados, conclusiones, implicaciones para la práctica, y limitaciones y perspectivas futuras.

Finalmente, se concluye la sección de Presentación con el listado de los 6 artículos que conforman el compendio, 4 de los cuales están publicados (A, C, E, y F) y 2 en revisión (B y D).

LISTADO DE ARTÍCULOS DEL COMPENDIO

Artículos publicados

A

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood, 45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Indicios de calidad
https://miar.ub.edu/issn/1836-9391
a) JCR Clarivate Analytics (JIF-2021, 1.238, Cuartil Q4, EDUCATION y EDUCATIONAL RESEARCH).
b) Scopus (SJR 0.403, Cuartil 2, Developmental and Educational Psychology, Education).
c) Fuentes secundarias: Academic Search Premier, Education Abstracts, EBSCO Education Source, ERIC (Education Resources Information Center).

C

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad, 17*(2), 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Indicios de calidad
https://miar.ub.edu/issn/1390-325X
a) Emerging Sources Citation Index (ESCI) de Clarivate Analytics (JCI-2021, 0.48, Cuartil Q3, EDUCATION y EDUCATIONAL RESEARCH).
b) Latindex. Catálogo v2.0 (2018 -) [38 de 38 características cumplidas].
c) Fuentes secundarias: DOAJ, DIALNET, Directory of Open Access Journals, ERIHPlus, REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico.

E

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Indicios de calidad
https://miar.ub.edu/issn/2254-4313
a) Emerging Sources Citation Index (ESCI) de Clarivate Analytics (JCI-2021, 0.32, Cuartil Q3, EDUCATION y EDUCATIONAL RESEARCH).
b) Scopus (SJR 0.41, Cuartil 2, Education, Mathematics (miscellaneous).
c) Latindex: Catálogo v2.0 (2018-) [29 de 38 características cumplidas].
d) Fuentes secundarias: DOAJ, DIALNET, CARHUS Plus+ 2018, Directory of Open Access Journals, ERIHPlus, REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico.

F

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 11*(2), 1-37. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37

Indicios de calidad
https://miar.ub.edu/issn/2254-8351
a) Emerging Sources Citation Index (ESCI) de Clarivate Analytics (JCI-2021, 0.19, Cuartil Q4, EDUCATION y EDUCATIONAL RESEARCH).
b) Latindex: Catálogo v2.0 (2018 -) [29 de 38 características cumplidas].
c) Fuentes secundarias: DIALNET, ERIHPlus, REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico.

Artículos en revisión

B

Acosta, Y., y Alsina, Á. (en revisión). Modos de pensamiento algebraico en la educación infantil desde el contexto de patrones de repetición.

Indicios de calidad

a) Emerging Sources Citation Index (ESCI) de Clarivate Analytics (JCI-2021, 0.16, Cuartil Q4, EDUCATION y EDUCATIONAL RESEARCH).
b) Scopus (SJR 0.25, Cuartil 3, Education, Mathematics (miscellaneous).
c) Latindex: Catálogo v 2.0 (2018-) [33 de 38 características cumplidas].
d) Fuentes secundarias: DOAJ, DIALNET, CARHUS Plus+ 2018, Directory of Open Access Journals, ERIHPlus, REDIB. Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico.

D

Acosta, Y., Alsina, Á., y Pincheira, N. (en revisión). Computational Thinking and Repetition Patterns in Early Childhood Education: Longitudinal Analysis of Representation and Justification.

Indicios de calidad

a) Scopus (SJR 1.06, Cuartil 1, Education, E-learning, Library and Information Sciences).
b) JCR Clarivate Analytics (JIF-2021, 3.666, Cuartil Q1, EDUCATION y EDUCATIONAL RESEARCH).
c) Fuentes secundarias: INSPEC, Communication Abstracts, EBSCO Education Source, Educational research abstracts (ERA), ERIC (Education Resources Information Center).

OTRAS PUBLICACIONES

Capítulos de libros, revisados por pares, derivados de actas de congresos

2018-2019

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: El caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). SEIEM.

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2019). Early Algebraic Literacy: A learning trajectory to teach the patterns to studies as young as 3. En M. Solà y Puig (Ed.), II *Conference of Pre-doctoral Researchers Abstract Book: Vol. II* (pp. 73-74). Escola de Doctorat.Servei de Publicacions de la UdG.

2019-2020

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2019). La representación de patrones en Educación Infantil: una primera aproximación con alumnos de 4 años. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 153-162). SEIEM.

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Advancing towards knowledge of mathematical representation in early childhood education. En M. Solà (Ed.), *III Conference of Pre-doctoral Researchers Abstract Book: Vol. III* (pp. 65-66). Escola de Doctorat.Servei de Publicacions de la UdG. https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/18341

2021-2022

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en educación infantil: ¿cómo influye el contexto de enseñanza? En P. D. Diago, D. F. Yánez, M. T. González-Astudillo, y D. Carillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101-108). SEIEM.

Acosta, Y., Alsina, Á., y Pincheira, N. (2022). Recursos manipulativos y gráficos en la comprensión de tareas con patrones: un análisis comparativo con niños de 4 a 6 años. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 19-127). SEIEM.

2022-2023

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Analysis of the presence of the presence of patterned tasks in early childhood education textbooks. En G. Boto Varela y L. Vicens Serra (Eds.), *VI Conference of Pre-doctoral Researchers Abstract Book: Vol. VI*. Escola de Doctorat. Servei de Publicacions de la UdG. https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/22435

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

> El capítulo presenta la problemática de estudio justificando la pertinencia de la investigación longitudinal desarrollada. Se aportan razones para considerar los patrones de repetición como un contenido propio de la educación infantil que permite avanzar de manera consolidada hacia los inicios del pensamiento algebraico. Se concluye el capítulo con la pregunta de investigación y los objetivos específicos que guían el diseño de la investigación.

1.1. Planteamiento del problema de investigación

El pensamiento algebraico temprano abarca una variedad de conceptos, procesos y formas de razonamiento que se interrelacionan entre sí. Estudios empíricos y longitudinales han podido evidenciar como los patrones contribuyen de manera eficaz en el desempeño matemático del alumnado en las primeras etapas escolares (Nguyen et al., 2016; Rittle-Johnson et al., 2017) y como su comprensión estructural proporciona herramientas cognitivas para desarrollar habilidades que permiten ingresar en el mundo del pensamiento algebraico. Precisamente, desde la propuesta curricular *Early Algebra*, se apuesta por la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas con la finalidad de consolidar modos de pensamientos que permitan atender de manera comprensiva la estructura que subyace a las matemáticas (Kaput, 2000). Desde esta óptica, autores como Miller et al. (2016) y Rittle-Johnson et al. (2017) consideran la capacidad de identificar regularidades en los patrones como un componente crucial del conocimiento matemático en general y del algebraico en particular. Es por este motivo que en esta Tesis Doctoral centramos la atención en los patrones como trampolín o puerta de entrada hacia los inicios del pensamiento algebraico en la educación infantil y como un componente que influye positivamente en el desarrollo matemático temprano (Lüken, 2020; Mulligan et al., 2020; Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2017; Wijns et al., 2021), puesto que promueve el estudio de las regularidades, y la conexión, justificación y representación de relaciones mediante símbolos (Radford, 2008). Tal como exponen Pasnak et al. (2019, p. 528) los patrones promueven una "intervención cognitiva que facilita el rendimiento académico", desarrollando a su vez una base caudal para el desarrollo del pensamiento algebraico (Clements y Sarama, 2007).

Ahora bien, ¿qué son los patrones? ¿y, de acuerdo a su naturaleza, cuáles son los más adecuados para fomentar los inicios del pensamiento algebraico en la educación infantil? Según Mulligan y Mitchelmore (2009) un patrón es una secuencia de elementos con una regularidad replicable, donde se combinan relaciones numéricas, espaciales o lógicas. Dichas secuencias pueden ayudar a los alumnos a describir las relaciones predecibles que ven en situaciones matemáticas (Charles, 2005). Por ejemplo: ser consciente de que los números pares crecen en n+2 y son el doble de su posición en la secuencia; identificar que los dígitos del 0 al 9 se repiten en cada década; reconocer la alternancia que se produce entre números pares e impares; contar de 5 en 5 y anticipar que los números resultantes terminan en 5, 0, 5, 0 (Charles, 2005; Liljedahl, 2004; Papic, 2007; Papic et al., 2011; Pasnak et al., 2019; Sarama y Clements, 2009; Wijns et al., 2021; Zippert et al., 2021). En relación con la naturaleza del patrón, Bock et al. (2018) exponen que pueden variar en función de su regularidad y contenido presentando unidades que se repiten, que crecen o que se ordenan de manera estructural o simétrica. Dentro del cuerpo de investigación que se ha generado desde el contexto de patrones matemáticos existe una dicotomía en ubicar el objeto de estudio de patrones de repetición en el rango de edad de 3 a 6 años (p. ej. Larkin et al., 2022; Lüken y Sauzet, 2020; Papic, 2007; Rittle-Johnson et al., 2019; Wijns et al., 2020) y la atención hacia los patrones de crecimiento de 6 a 9 años (p. ej. MacKay y De Smedt, 2019; Warren y Cooper, 2008). En esta Tesis Doctoral apostamos por los patrones de repetición como conocimiento que emerge antes de la educación formal (Rittle-Johnson et al., 2015) y como base de comprensión estructural que permite avanzar en el conocimiento de patrones más sofisticados, como pueden ser considerados los de crecimiento (Wijns et al., 2021). De acuerdo con Liljedahl (2004, pp. 26-27) los patrones de repetición presentan "una estructura cíclica que puede generarse mediante la aplicación repetida de una porción más pequeña del patrón" la cual Threlfall (1999) define como unidad de repetición. Partimos del convencimiento que los escolares de 3 a 5 años primero deben adquirir la habilidad de focalizar la atención en la unidad que se repite de manera constante, para luego ser capaz de detectar el cambio sistemático que se produce en cada iteración de un patrón de crecimiento. Además, en los últimos años, evidencias empíricas han constatado que la enseñanza de patrones de crecimientos resulta más desafiante (Papic et al., 2011; Warren, 2005; Wijns et al., 2021; y Wijns, Torbeyns, Bakker, et al., 2019). De hecho, el estudio de Pasnak et al. (2019, p. 532) informó que los patrones de crecimiento eran "demasiado difíciles" para los niños de la escuela infantil y "deberían usarse con niños mayores". Esta conclusión se suma a las evidencias de las investigaciones de Papic et al. (2011) y Wijns, Torbeyns, Bakker, et al. (2019), quienes han corroborado en sus estudios que los niños de 4 y 5 años suelen tener dificultades para completar de manera exitosa tareas con patrones de naturaleza creciente.

Desde este panorama y tomando como referencia el marco de la propuesta curricular *Early Algebra*, es importante exponer que la investigación que se ha generado a su alrededor se centra mayoritariamente en el desarrollo inicial del pensamiento algebraico en la etapa K-12 (5-18 años), más bien en las puertas de primaria, sin incidir en la base previa que los alumnos deben adquirir en etapas anteriores. Involucrar a los niños en el pensamiento algebraico de manera temprana, implica diseñar tareas y oportunidades de aprendizaje que promuevan la generalización fomentando a su vez la capacidad de pensar estructuralmente (Stephens et al., 2015). El NCTM (2000) apoya este planteamiento y junto con autores que focalizan sus líneas de investigación en la educación infantil (Alsina, 2022a; Björklund, 2016; Collins y Laski, 2015; Fox, 2005; Gripton, 2022; Lüken, 2012; Mulligan et al., 2013; Nguyen et al., 2016; Papic y Mulligan, 2007; Rittle-Johnson et al., 2017; Sen y Guler, 2022; Tsamir et al., 2017; Wijns et al., 2020, 2021) apuestan por una introducción temprana del pensamiento algebraico a partir de *Prekindergarten* y *Kindergarten* (3-6 años), reconociendo la influencia que ejercen los patrones de repetición. Lannin (2005); Threlfall (1999); y Warren (2005) sugieren que, en los inicios del desarrollo temprano del álgebra, los patrones deben jugar un papel intrínseco en el desarrollo del pensamiento de los niños.

Sin embargo, a pesar de que numerosas investigaciones han informado que el estudio de los patrones de repetición y su estructura influyen de manera positiva en el desarrollo matemático temprano (Mulligan et al., 2020; NCTM, 2006; Rittle-Johnson et al., 2013; Rittle-Johnson et al., 2017; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019), todavía no se lleva a cabo una enseñanza eficaz que permita avanzar hacia el desarrollo de dicho pensamiento en las primeras edades. Clements y Sarama (2007) exponen que es necesaria una implicación mayoritaria de profesionales para dar apoyo a un currículo de matemáticas para la primera infancia que despliegue y articule un modelo específico de aprendizaje de álgebra, donde se contemple que los patrones configuran la base para el comienzo de la representación algebraica (Clements y Sarama, 2015).

Uno de los obstáculos para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico es la tendencia a diseñar tareas que solo promueven el uso del pensamiento recursivo. Esto significa que los escolares tienden a enfocarse en los elementos sucesivos de una secuencia para poder predecir o extender solo el elemento sucesivo de un conjunto de elementos ordenados. Ser capaz de abstraer la unidad de repetición o generalizar una relación recurrente de elementos, continúa siendo un desafío para muchos niños. Tal como expone Threlfall (1999) es necesario ayudar a los escolares a transitar del pensamiento recursivo a la percepción de la unidad de repetición dentro de un patrón, puesto que ello se considera un hito en la comprensión conceptual, la exploración de patrones y la expresión de generalidades. En la misma línea, Economopoulos (1998, p. 230) señala que "para generalizar y predecir, los niños deben pasar de mirar un patrón como una secuencia de 'lo que viene después' a analizar la estructura del patrón, es decir, ver que está hecho de unidades de repetición".

En este sentido, autores como Tirosh et al. (2017) detectaron que el profesorado de infantil no apuesta por el diseño de tareas que se centren en la estructura de los patrones; y otros como Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., (2019) exponen que queda pendiente estudiar si las actividades con patrones que se implementan promueven de forma óptima todo su potencial. Ante esta problemática, es necesario cuestionarse si la enseñanza de los patrones de repetición en los currículos para la educación infantil se basa en la estrategia de alternancia de colores exclusivamente, en lugar de la identificación de los elementos del patrón y del número de repeticiones (Papic y Mulligan, 2007). En el contexto de los patrones de repetición, algunos estudios previos se han focalizado en describir, por ejemplo:

I. El tipo de patrones de acuerdo con la naturaleza de su estructura: a) de repetición; b) simétrico/estructurales o; c) de crecimiento (Bock et al., 2018; Mulligan y Mitchelmore, 2013; Papic et al., 2011);
II. el grado de dificultad de los patrones considerando la estructura de la unidad de repetición: p. ej. AB, AAB (Bock et al., 2018; Diago et al., 2022; Lüken y Sauzet, 2020; Mulligan y Mitchelmore, 2013; Sarama y Clements, 2009);
III. las estrategias que emplean los niños pequeños durante la resolución de tareas con patrones de repetición (Collins y Laski, 2015; Lüken, 2018; Rittle-Johnson et al., 2013);
IV. su influencia en otros dominios del conocimiento como la lectura, las matemáticas o las artes (Björklund y Pramling, 2014; Bock et al., 2018; Kidd et al., 2014; Mulligan et al., 2013; Rittle-Johnson et al., 2015; Zippert et al., 2021).

Sin embargo, no existen reportes de investigación longitudinal con escolares del segundo ciclo de educación infantil (3-5 años) que relacionen la enseñanza de patrones de repetición con los contextos involucrados en las tareas, es decir, estudios que muestren si en la comprensión de la tarea influye el contexto donde se desarrolla, para avanzar de una manera conectada y significativa hacia modos de pensamiento algebraico que sientan las bases para la generalización. Es importante comentar que las investigaciones anteriormente relacionadas se llevaron a cabo, de manera mayoritaria, en contextos con material manipulativo o recursos gráficos.

Para tratar de dar respuesta a estas cuestiones, se asume el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas [EIEM] (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022), que se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la memorización y, en su lugar, plantea la enseñanza como un recorrido de lo concreto hacia lo abstracto, a través de secuencias de enseñanza intencionadas. Dichas secuencias o itinerarios consideran distintos niveles de enseñanza (informal, intermedio y formal) en los que se consideran contextos que avanzan de lo particular a lo general, de lo situacional a lo formal.

1.2. Pregunta de investigación y Objetivos de la Tesis

El objetivo general de esta Tesis Doctoral es aportar conocimiento tanto disciplinar como didáctico para docentes de educación infantil, como para formadores de maestros, que permita incidir de manera práctica y temprana en el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la consciencia estructural que promueven los patrones de repetición, conectando así estos conocimientos con las matemáticas formales de la educación primaria. Tomando en consideración el marco anteriormente expuesto, definimos el problema de estudio a partir de la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo promover los inicios del pensamiento algebraico en la educación infantil a través de los patrones de repetición?

Esta pregunta conduce al siguiente objetivo general (OG) del cual se derivan cuatro objetivos específicos (OE):

OG. Aportar conocimientos que permitan situar la forma en que los niños de 3, 4 y 5

años se inician en la comprensión de patrones de repetición para avanzar hacia el desarrollo temprano del pensamiento algebraico, promoviendo la conexión entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional.

OE 1. Diseñar, validar e implementar una trayectoria de aprendizaje y un itinerario de enseñanza sobre patrones de repetición para niños de educación infantil.

OE 2. Analizar la influencia que ejerce el contexto de enseñanza en la comprensión, justificación y representación de patrones de repetición.

OE 3. Determinar las habilidades para hacer patrones que se movilizan durante la enseñanza de patrones de repetición, y la relación que se establece entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional.

OE 4. Elaborar orientaciones teórico-metodológicas que permitan avanzar en la implementación de tareas con patrones de repetición e iniciar el desarrollo temprano del pensamiento algebraico.

A modo de síntesis, se muestra en las Tablas 1 y 2 la vinculación entre los objetivos específicos (OE) de la Tesis y los estudios desarrollados, haciendo una distinción entre artículos publicados (Tabla 1) y artículos complementarios en revisión (Tabla 2).

Tabla 1

Estudios del compendio en función de los OE de la Tesis

Estudios publicados	Objetivos específicos			
	OE1	OE2	OE3	OE4
A. Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary.	x			
C. Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil.		x		
E. Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil.			x	
F. El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones.			x	x

Tabla 2

Estudios complementarios (en revisión) en función de los OE de la Tesis

Estudios en revisión	Objetivos específicos			
	OE1	OE2	OE3	OE4
B. Modos de pensamiento algebraico en la educación infantil desde el contexto de patrones de repetición.	x	x	x	
D. Computational Thinking and Repetition Patterns in Early Childhood Education: Longitudinal Analysis of Representation and Justification.		x		

CAPÍTULO II: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

> El capítulo comienza definiendo el pensamiento algebraico desde el marco de la propuesta curricular *Early Algebra*. Se establecen vínculos que permiten considerar los patrones matemáticos en general y los patrones de repetición en particular, como una puerta de entrada hacia el pensamiento algebraico. Se definen habilidades para hacer patrones y modos de pensamiento algebraico en educación infantil. Se presenta un breve recorrido sobre el panorama curricular internacional de algunos países como Singapur, Estados Unidos, Australia y Nueva Zelanda, en contraste con las orientaciones curriculares en el ámbito español. Se consideran las trayectorias de aprendizaje como un camino para vehicular la enseñanza de patrones de repetición, contemplando los planteamientos del EIEM. Finalmente, se define la representación y justificación como vías para exteriorizar la comprensión.

2.1. Pensamiento algebraico a través de la propuesta curricular *Early Algebra*

Durante la primera infancia los niños comienzan a aprender y a ser cada vez más conscientes de los efectos que provocan sus acciones. Podríamos deducir que cuando un bebé llora, sonríe o grita emitiendo sonidos sugerentes y/o secuenciados para buscar la atención y complicidad del adulto, empieza a explorar la fase de acción-reacción que producen sus actos. Estas situaciones cotidianas de la vida de un bebé son para Mason (2011) circunstancias donde el niño mediante el desarrollo de su consciencia aprende a controlar sus facultades, como una capacidad que le permite actuar y generalizar. Y es precisamente usando la generalización como se inicia el desarrollo del pensamiento algebraico (Cañadas et al., 2008; Chimoni et al., 2023; Papic et al., 2011). Sin duda, generalizar se configura como una actividad humana e innata inherente que los niños pequeños llevan a cabo de manera natural en el contexto escolar (Mason, 2011). Por esta razón, Blanton y Kaput (2005) señalan que es necesario un currículo que se base en estas habilidades naturales, tanto para proporcionar una mayor profundidad a los primeros conocimientos algebraicos como para facilitar una experiencia matemática más eficaz y sofisticada de manera temprana.

En esta Tesis Doctoral concebimos el pensamiento algebraico como formas de pensar que incluyen “analizar relaciones entre cantidades, notar estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir” (Kieran, 2004, p. 149). En esta misma línea, Blanton y Kaput (2005) conceptualizan dicho pensamiento como una habilidad mental que permea todas las matemáticas influyendo en la capacidad de los niños para elaborar conjeturas y justificaciones sobre estructuras y relaciones. Precisamente, Blanton (2008, p. 94) expone que el pensamiento algebraico es un hábito mental que se promueve mediante una instrucción centrada en diseñar oportunidades de exploración periódicas y sostenidas que inviten a los escolares a "pensar, describir y justificar relaciones generales".

Estamos de acuerdo con Carraher y Schliemann (2019) y Kieran (2014) cuando argumentan que el pensamiento algebraico se puede definir desde múltiples perspectivas y puede considerar varias dimensiones del álgebra (Chimoni et al., 2023). Kaput et al. (2008) en un intento de consenso y caracterización de este dominio del conocimiento, constató que el álgebra incluye la generalización y la formalización de patrones; una aritmética generalizada asociada a la identificación de relaciones entre números centrando la atención en la manipulación de operaciones y sus prioridades; el estudio de estructuras, funciones, relaciones y la covariación; y los lenguajes de la modelización.

Bajo esta mirada, en esta Tesis definimos el pensamiento algebraico como un modo de pensamiento multimodal que, mediante la focalización de relaciones y cambio, facilita el análisis, la representación, la justificación y la comprensión de la estructura.

Desarrollar el pensamiento algebraico a una edad temprana es una línea emergente de investigación de creciente interés (Acosta y Alsina, 2020; Cañadas et al., 2019; Clements y Sarama, 2015; Lüken, 2020; Miller et al., 2016; Mulligan et al., 2020; Nguyen et al., 2016; Papic et al., 2011; Pincheira y Alsina, 2021; Rittle-Johnson et al., 2019; Rodrigues y Serra, 2015; Tirosh, Dina et al., 2018; Wijns et al., 2021; Wijns, Torbeyns, Bakker, et al., 2019). Esta línea, nos permite identificar las intuiciones naturales del alumnado de la primera infancia para pensar algebraicamente y comprender por qué hay dificultades con el álgebra en etapas posteriores de la escolarización. Es así como a principios de siglo nace en Estados Unidos la idea de "algebraizar" de manera temprana el currículo (Kaput, 2000), dado que el enfoque tradicional y secuencial de abordar primero la aritmética como conocimiento concreto para luego avanzar hacia el álgebra como conocimiento abstracto no había reportado una comprensión profunda de este estándar de contenido en la etapa de secundaria. Es decir, tradicionalmente, desde el enfoque del *Pre-álgebra* se había considerado la aritmética y el álgebra disciplinas diferentes y posicionadas en un orden cronológico, donde la aritmética precedía al álgebra. Desde este enfoque se apuesta por la articulación de un puente transicional en los últimos dos años de primaria con el objetivo de suavizar y mitigar las dificultades entre estas dos disciplinas y asegurar una transición exitosa. Sin embargo, esta propuesta no había logrado erradicar el fracaso del álgebra en etapas posteriores de la escolarización, quizás por las falencias de una enseñanza matemática centrada más en las operaciones que en sus propiedades. Un ejemplo de esta debilidad se evidencia con la concepción limitada de los alumnos sobre el signo igual, considerándolo sólo como un operador unidireccional que produce un resultado a la derecha fruto de la combinación operacional de números en la izquierda (Kieran, 1981). No obstante, existe una alternativa que se ha forjado en los últimos 30 años y que concibe la aritmética como parte del álgebra y por tanto disciplinas intrínsecamente vinculadas.

Si viajamos unas cuantas décadas atrás, en los años sesenta Davis (1967) abogó por una introducción del álgebra en los grados segundo o terceros, reafirmando su postura años más tarde en el ICME-5 (*International Congress on Mathematical Education*) celebrado en Australia (Davis, 1985). Kieran (1989) apostó en la misma línea por el reconocimiento y uso de la estructura como eje vertebrador de contenidos más sofisticados en la secundaria. Desde Rusia, Davydov (1991) manifestó la necesidad de incluir la notación algebraica a partir del primer grado. Todas estas ideas manifiestan la ausencia de una concepción y postura unánime en relación con el álgebra y su abordaje de manera temprana. En 1993 se celebra en Virginia, Estados Unidos, el *Algebra Initiative Colloquium Working Groups* al cual asistieron 51 distinguidos profesores de álgebra, investigadores en educación matemática, algebristas y expertos en matemáticas de agencias federales con la finalidad de: a) crear una experiencia de álgebra adecuada para todos los alumnos de K-12 (5-18 años); b) incidir en la formación de los profesores, incluidos los de K-8 (5-12 años), para poder ofrecer una enseñanza eficiente de álgebra; c) reformar el álgebra para que sirva a la sociedad actual; y d) renovar el álgebra a nivel universitario para adecuar su uso a los futuros matemáticos, científicos e ingenieros (Lacampagne et al., 1995). Usiskin (1995, p. 89) en el documento que se deriva de esta reunión, define el álgebra escolar como,

> (…) un lenguaje escrito que trata del uso de letras u otros símbolos (no palabras) para representar elementos de los conjuntos. Por eso, porque es un lenguaje, se deduce lo siguiente:
> El álgebra se aprende mejor en su contexto.
> Casi cualquier ser humano puede aprenderla.
> La familiaridad se adquiere más fácilmente cuando se es joven que cuando se es mayor.

Sin duda, este espacio de debate y reflexión marcó un antes y un después en el futuro del álgebra; y en esta línea Schoenfeld (1995) sugirió que el álgebra no debería estar presente en cursos aislados durante la secundaria y que en su lugar debería impregnar y permear todo el currículo. Años más tarde, Kaput (2000) reclamó de manera fehaciente entrelazar de manera vertical el álgebra en un currículo K-12 con la finalidad de dejar de abordar de manera tardía este dominio y lenguaje básico para comenzar a construir matemáticas desde la coherencia, la profundidad y la comprensión. No cabe duda que su liderazgo fue crucial para caracterizar y conceptualizar las maneras de introducir el álgebra en los primeros grados (Kieran, 2022). Todas estas ideas se reivindicaron durante el *Proceedings of the XII ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Chick et al., 2001), bajo la necesidad de integrar la aritmética y el álgebra desde los primeros años de escolarización. Por tanto, desde principios de siglo, construir una base para garantizar el éxito en el álgebra y asegurar un conocimiento y rendimiento matemático veraz se ha convertido en una prioridad en las agendas de investigación. Es aquí como emerge la corriente curricular denominada *Early Algebra*, como un enfoque que se centra en la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas con la finalidad de apostar por la consolidación de modos de pensamientos que permitan atender de manera comprensiva la estructura que subyace a las matemáticas. Es importante destacar que la propuesta *Early Algebra* nace como alternativa al pre-álgebra y que ambos enfoques persiguen finalidades ampliamente diferentes. Desde el *Early Algebra* se pretende construir una base sólida de aprendizajes y procesos que favorezcan la adquisición y tratamiento de un conocimiento más sofisticado del álgebra en etapas posteriores de la enseñanza-aprendizaje, ya que como afirma Knuth et al. (2016, p. 65), “el álgebra proporciona las herramientas matemáticas para representar y analizar relaciones cuantitativas, modelar situaciones y resolver problemas en todos los dominios matemáticos”.

2.2. Patrones matemáticos: una puerta de entrada hacia el pensamiento algebraico

El desarrollo de un pensamiento matemático eficaz, tal como plantea el NCTM (2010), implica la capacidad de observar patrones y estructuras tanto en situaciones reales como en objetos simbólicos facilitando así, la formación de generalizaciones en torno a la abstracción de ideas y relaciones. Según Taylor-Cox (2003, p.15), “los patrones son la piedra angular del pensamiento algebraico”. Es así, como se considera que juegan un papel crucial en el apoyo del desarrollo matemático en las primeras edades proporcionando una base necesaria para el aprendizaje algebraico en grados posteriores (Gripton, 2022; Kaput et al., 2008; Lee y Freiman, 2006; Warren, 2005). De hecho, Kahneman (2011) describe a los humanos como buscadores de patrones naturales capaces de encontrar regularidades, incluso cuando son inexistentes. Desde el ámbito de las matemáticas, las regularidades, tal como exponen Supply et al. (2022), se consideran en ocasiones patrones o estructuras y precisamente para Mulligan y Mitchelmore (2013, p. 30) “todas las matemáticas se basan en patrones y estructuras”. Estos autores australianos definen el patrón como cualquier regularidad predecible, donde se combinan relaciones numéricas, espaciales o lógicas; y la estructura, como la forma interna en que los diversos elementos de una regularidad se organizan y relacionan. De acuerdo con Warren et al. (2012) la estructura es la forma en que se sistematiza un patrón y a través de la cual se promociona la generalización (Mulligan y Mitchelmore, 2009). En contraste con las aportaciones anteriores, destacamos autores como Carraher, Martinez, et al. (2008), quienes sostienen que los patrones matemáticos dificultan una inferencia rigurosa y en su lugar apuestan por un enfoque funcional del álgebra. Sin embargo, nuestra postura coincide con autores como Bäckman (2016); Fox (2005); Gripton (2022); Lüken y Kampmann (2018); Mulligan y Mitchelmore (2009); Mulligan et al. (2013); Nguyen et al. (2016); Papic (2007); Rittle-Johnson et al. (2015); Sarama y Clements (2009); Steen (1988); Supply et al. (2022); Taylor-Cox (2003); Threlfall (1999); Tsamir et al. (2017); Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al. (2019) quienes reconocen los patrones como una puerta de entrada hacia el pensamiento algebraico, ya que casi todas las matemáticas se rigen por una base relacionada con patrones y estructuras.

Existen diferentes tipos de patrones atendiendo a las características de su estructura. De acuerdo con la naturaleza del patrón, Bock et al. (2018) sugieren que pueden variar según su regularidad y contenido; y que, atendiendo a esta afirmación, los patrones pueden presentar unidades que se repiten, que crecen o que se ordenan de manera estructural o simétrica. En nuestro estudio focalizamos la mirada en los patrones de repetición, definiéndolos como una secuencia o seriación de elementos u objetos ordenados, que se rigen por una estructura segmentada en unidades de repetición que otorga regularidad. Siguiendo las aportaciones de Lüken y Sauzet (2020); Papic y Mulligan (2007); Rittle-Johnson et al. (2013); Warren et al. (2012); Zippert et al. (2021) en este tipo de patrón la dimensión matemática más importante es identificar la unidad de repetición, donde la estructura puede variar en niveles de complejidad de acuerdo a las características de los atributos que conforman la seriación. Compartimos las aportaciones de Warren et al. (2012) cuando sostienen que cuantos más atributos presenta la unidad de repetición, más compleja resultaran las tareas sobre patrones y que desde un punto de vista conceptual resulta más relevante comprender la estructura del patrón que inventar patrones complejos. Estamos convencidos de que la identificación de la estructura subyacente en los patrones de repetición puede considerarse la base necesaria para avanzar hacia la enseñanza de patrones más sofisticados y desafiantes como los patrones de crecimiento (Papic, 2015; Papic y Mulligan, 2007; Warren y Cooper, 2006; Warren y Miller, 2013).

Si bien es cierto que en los últimos años se ha incrementado el interés por la introducción de patrones de crecimiento antes de los 6 años, la literatura no adopta aún un criterio unánime. Por ejemplo, Warren y Cooper (2008) los consideran más apropiados para niños a partir de 8 años; Papic y Mulligan (2007) no reportaron éxito en tareas con patrones de crecimiento para niños de 4 a 5 años que no habían recibido una instrucción previa sobre patrones; y Wijns, Torbeyns, Bakker, et al. (2019a) informan en su estudio con 400 participantes de 4 años que los patrones de crecimiento son más difíciles que los de repetición.

Atendiendo a las evidencias anteriormente expuestas, nuestra posición es apostar por los patrones de repetición, antes de iniciar la enseñanza de patrones con una estructura creciente, puesto que la estructura que conforma los patrones de repetición es visible y fácilmente extraíble, mientras que la transformación que experimenta la unidad de repetición en un patrón de crecimiento debe deducirse a partir de la relación de dos unidades consecutivas (Wijns et al., 2021). Una conclusión tentativa de ello es considerar los patrones de repetición como la antesala o apoyo en la comprensión de los patrones de crecimiento (Wijns et al., 2021).

De acuerdo con Bock et al. (2018) los patrones que se enseñan en la educación infantil son los de repetición, ya que otorgan un orden a lo que los niños perciben como colecciones caóticas de elementos dispares. Tal como afirma Du Plessis (2018), el análisis de la estructura de los patrones de repetición incita a los escolares a pensar en términos de cómo los elementos están relacionados, y esto a su vez, proporciona habilidades tempranas del pensamiento algebraico. Precisamente, la enseñanza de patrones de repetición a niños pequeños consiste en ayudarlos a ser conscientes que una seriación se basa en una regla interna que permite crear y descubrir patrones isomorfos, independientemente de los elementos que la conformen. Por tanto, la comprensión de patrones de repetición requiere de la capacidad del alumno para detectar la regularidad de una secuencia, identificar la estructura mínima de repetición y desarrollar, a su vez, hábitos que facilitan el desarrollo del pensamiento algebraico. Tal como afirman Mulligan y Mitchelmore (2009) casi todas las matemáticas se erigen por una base relacionada con los patrones y las estructuras; y la falta de conocimiento de estas dos entidades puede ser un predictor de futuras dificultades matemáticas (Mulligan et al., 2020).

Estudios empíricos y longitudinales han podido evidenciar como los patrones contribuyen de manera eficaz en el desempeño matemático del alumnado hasta los 11 años de edad (Nguyen et al., 2016; Rittle-Johnson et al., 2017). Lüken y Kampmann (2018) constatan que la comprensión de los patrones ejerce una influencia positiva en las habilidades aritméticas en particular, a la vez que también en las habilidades matemáticas en general (Rittle-Johnson et al., 2019; Rittle-Johnson et al., 2017). Además, el patrón está estrechamente relacionado con el cálculo multiplicativo (Papic et al., 2011). Kidd et al. (2014) expone que la regularidad inherente en los patrones de repetición permite que los niños centren su atención en la previsibilidad de la relación entre los elementos que conforman el patrón. En este sentido, argumenta que, “cuando los niños de kindergarten cuentan de cinco en cinco (p. ej., 5, 10, 15, 20), aprenden que, en esta secuencia de conteo, los dígitos de las unidades se alternan (0, 5, 0, 5)” (Kidd et al., 2014, p. 135). McGarvey (2012) y Warren y Cooper (2008) argumentan que los patrones requieren que los niños centren su atención en las semejanzas y diferencias de los elementos de la unidad de repetición, así como en la regla que subyace lo que permite iniciarse en la generalización. Esta comprensión estructural proporciona herramientas cognitivas para desarrollar habilidades, como la necesidad de centrarse en relaciones, conjeturas y generalizaciones, que permiten ingresar de manera temprana en el mundo del pensamiento algebraico. Desde esta óptica, Hunter y Miller (2022) consideran fundamental la visualización e identificación de estructuras como medios que ayudan a los escolares a abstraer y generalizar.

2.3. Habilidades para hacer patrones de repetición

Cuando los alumnos de los primeros niveles escogen dos colores y los alternan con la finalidad de construir una torre o diseñar un collar, por ejemplo, amarillo-azul-amarillo-azul, se están iniciando en un tipo de tarea que investigaciones recientes han considerado fundamentales para su desarrollo cognitivo (McGarvey, 2012; Pasnak et al., 2015). Considerando lo anterior, Wijns et al. (2019) señalan que una línea de investigación abierta es describir tareas pautadas que exploten el potencial de los patrones de repetición y mostrar cómo implementarlas en las aulas de educación infantil, ya que como exponen Papic et al. (2011) el desarrollo de la consciencia y comprensión de los patrones, se puede acompañar a través de un marco de experiencias apropiadas.

Algunas de las razones para promover la enseñanza de patrones en la educación infantil es que los patrones brindan una base esencial para el desarrollo del pensamiento matemático y contribuyen al proceso general de representación y abstracción en matemáticas (Lüken y Kampmann, 2018; McGarvey, 2012; NCTM, 2000). Por ende, la exploración de patrones puede considerarse un trampolín para promover la generalización (Vanluydt et al., 2021), la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el uso preciso del lenguaje matemático. En esta línea, estudios anteriores abogan por el diseño de propuestas que contribuyan a aumentar la conciencia del niño en la estructura (Mulligan et al., 2011; Papic et al., 2011; Warren y Miller, 2013), ya que se ha detectado que el profesorado de infantil no apuesta por actividades que se centren en la estructura de los patrones (Tirosh et al., 2017), y brindan en sus intervenciones oportunidades limitadas sobre la enseñanza de los mismos (Waters, 2004; Wijns, Torbeyns, Bakker, et al., 2019) evitando ampliar el interés y el conocimiento de los niños en los patrones (Fox, 2005).

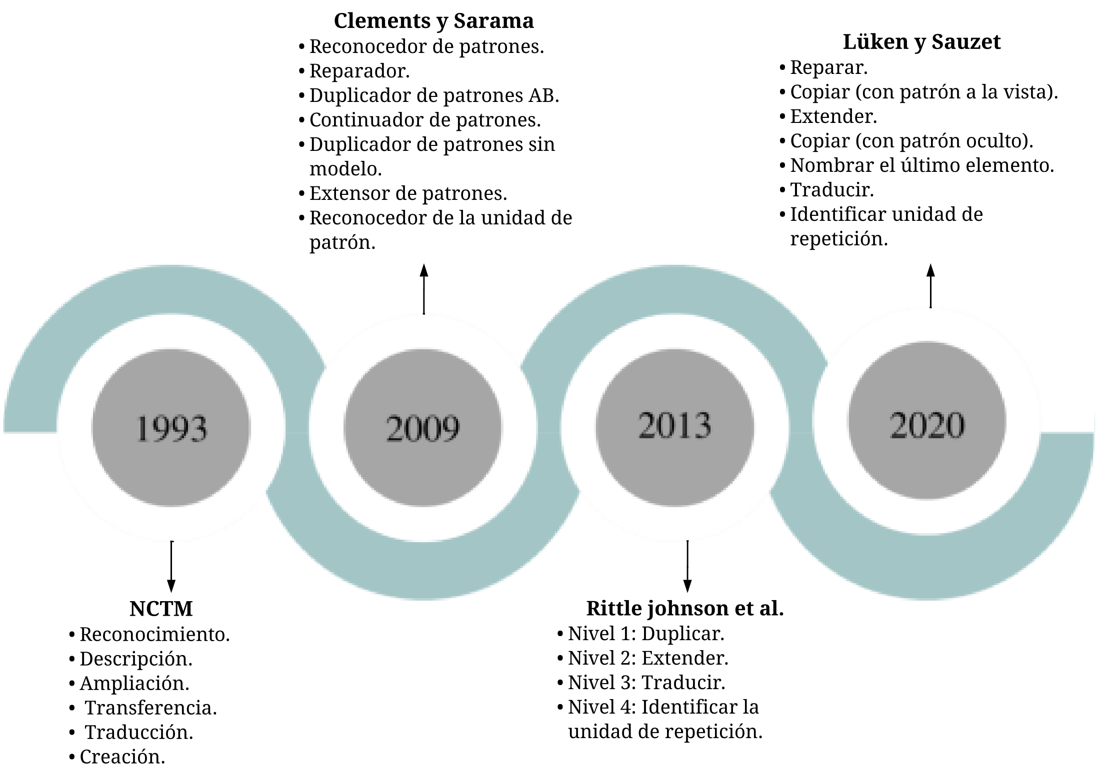
Por consiguiente, es necesario cuestionarse si la presencia de enseñanza del álgebra en general y de los patrones de repetición en particular en los currículos de educación infantil se basa en la estrategia de alternancia de colores exclusivamente, en lugar de la identificación de los elementos del patrón y del número de repeticiones (Papic y Mulligan, 2007). Resulta importante destacar que las habilidades para hacer patrones (*patterning skills*) se pueden abordar a través de diversas tareas teniendo en cuenta si requieren o no conocimiento de la estructura o regla subyacente del patrón.

Las habilidades para hacer patrones se definen como las competencias que desarrollan los niños a través de la enseñanza de tareas con patrones de repetición (Lüken y Sauzet, 2020). A pesar de que la literatura no otorga un orden consensuado de abordaje en la práctica, ni una nomenclatura coincidente en todas las habilidades y tareas, sí que se muestra acuerdo en considerar que las habilidades que movilizan el reconocimiento de la unidad de repetición son las precursoras del inicio del pensamiento funcional (Bock et al., 2018; Clements y Sarama, 2015; Collins y Laski, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; McGarvey, 2012; Rittle-Johnson et al., 2015; Warren et al., 2012; Warren y Cooper, 2006; Wijns, Torbeyns, Bakker, et al., 2019), un tipo de pensamiento que junto con el recursivo y el relacional se anidan dentro del pensamiento algebraico.

En la Figura 1 se muestra una línea de tiempo con la finalidad de visibilizar algunas de las caracterizaciones sobre las habilidades para hacer patrones que han servido de base teórica en esta Tesis.

Figura 1

Caracterización de las habilidades para hacer patrones de repetición propuesta por algunas organizaciones y autores



Fuente: Elaboración propia

Tomando como referencia las aportaciones de los organismos y autores que se citan en la Figura 1, en esta Tesis, a partir de la configuración de indicadores de análisis para libros de texto en Acosta et al. (2022) y Pincheira et al. (2022), se consideran las siguientes tareas sobre patrones de repetición: 1) duplicar el patrón; 2) encontrar elementos faltantes; 3) ampliar la secuencia; 4) construir el mismo patrón con diferentes elementos; 5) identificar la unidad de repetición; y 6) inventar un patrón. Para estas tareas se movilizan las habilidades de: 1) copiar; 2) interpolar; 3) extender; 4) abstraer o traducir; 5) reconocer la unidad de repetición, y 6) crear, respectivamente. Si bien en la literatura sobre patrones de repetición algunas veces los términos "tarea" y "habilidad" significan prácticamente lo mismo (p. ej., "duplicar un patrón" es una tarea y "copiar" es una habilidad que implica repetir algo) en esta Tesis se asume que, cuando hablamos de tareas, nos referimos a aquellas actividades que orientan sobre el "cómo" y las habilidades sobre el "qué", considerando la relación estrecha que existe entre ambos términos.

Desde el marco de tareas y habilidades para hacer patrones debemos tener presente que la riqueza de la enseñanza radica en la percepción de regularidad, o sea, en la capacidad del niño para detectar la unidad de repetición (Lüken, 2012; Sen y Guler, 2022; Supply et al., 2022; Twohill, 2018; Wijns, Torbeyns, Bakker, et al., 2019). La revisión de Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al. (2019) hace visible dos características que normalmente convergen en la conceptualización del patrón: regularidad y previsibilidad. La regularidad otorga un orden que permite que un patrón se repita o se modifique de acuerdo a una regla intrínseca que genera previsibilidad (Sarama y Clements, 2009). Desde esta premisa, algunos autores como Lüken y Sauzet (2020); McGarvey (2012); y Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al. (2019) han constatado que es posible predecir usando de manera recursiva las relaciones que se establecen entre los elementos que conforman el patrón, y que dicha previsibilidad permite avanzar hacia el pensamiento funcional.

Diversos estudios contemporáneos señalan que un desarrollo temprano del patrón y una comprensión de su estructura facilita de manera efectiva el rendimiento matemático y favorece la transición entre el pensamiento recursivo y funcional (McGarvey, 2012; Mulligan y Mitchelmore, 2009; Wijns et al., 2019).

> Los niños que piensan de manera recursiva solo ven la relación entre elementos consecutivos en un patrón y, por lo tanto, solo pueden predecir el siguiente (es decir, el +1), mientras que aquellos que son capaces de pensar funcionalmente pueden ver la estructura subyacente de un patrón y, por lo

> tanto, predecir cualquier patrón. (Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019, p. 147).

Desde esta perspectiva, se instaura una frontera imaginaria entre el pensamiento recursivo y funcional, estableciendo una progresión en el nivel de dificultad de las tareas, que permite avanzar de manera consolidada hacia el conocimiento de la estructura. De acuerdo con McGarvey (2012, p. 334), las tareas que movilizan las habilidades de copiar, interpolar y extender “ (…) enfatizan la organización recursiva de elementos en lugar de repetir unidades”. En cambio, las que permiten a los niños ser conscientes de la regla subyacente del patrón son las de abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear (Lüken y Sauzet, 2020).

Es importante tener presente que la implementación de estas tareas permite fomentar los inicios de modos de pensamientos que se anidan dentro del pensamiento algebraico. Desde el contexto de patrones de repetición, seguidamente abordaremos el pensamiento recursivo, el pensamiento relacional y el pensamiento funcional.

2.4. Modos de pensamiento algebraico en la educación infantil: recursivo, relacional y funcional

Una primera aproximación a la enseñanza de patrones de repetición en educación infantil es a través de patrones simples de dos elementos, donde mediante el emparejamiento de un elemento a la vez, conocido como estrategia de alternancia, los niños pequeños pueden, por ejemplo, copiar un patrón realizando comparaciones constantes entre dos elementos (Collins y Laski, 2015; Fyfe et al., 2015). A partir de los 3 años aproximadamente, los niños pueden ser capaces de observar la relación entre los elementos consecutivos de una secuencia. Desde el contexto de patrones de repetición, Lüken y Sauzet (2020) definen esta capacidad vinculada con el pensamiento recursivo, el cual permite, predecir el elemento desconocido que prosigue en una secuencia a partir del uso de la relación entre elementos consecutivos de una seriación, ya que los escolares toman como referencia siempre el último elemento conocido. De acuerdo con Lüken y Sauzet (2020) y Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al. (2019) pensar recursivamente implica anticipar solo el elemento sucesor (el +1) de una secuencia. Por estudios anteriores conocemos que los niños pequeños pueden iniciarse en la abstracción y generalización de patrones, a pesar de que en los inicios de esta enseñanza perciban relaciones recursivas en lugar de relaciones funcionales (Wijns, Torbeyns, De

Smedt, et al., 2019). Por tanto, en esta Tesis Doctoral se asume que las habilidades de: 1) copiar; 2) interpolar; y 3) extender movilizan el pensamiento recursivo permitiendo ejecutar las tareas de: 1) duplicar el patrón; 2) encontrar elementos faltantes; y 3) ampliar la secuencia, respectivamente, sin necesidad previa de identificar la unidad de repetición.

Carpenter et al. (2005) exponen que la introducción del álgebra en las primeras edades contribuye además al desarrollo inicial del pensamiento relacional. El pensamiento relacional o pensamiento centrado en las relaciones se define ampliamente como el proceso de hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y patrones significativos que subyacen a la información (Dumas et al., 2013). Para ser consciente de la estructura que subyace en el patrón de repetición, es necesario centrar la atención en las relaciones que se producen entre los elementos de la unidad de repetición, en lugar de simplemente percibir las características individuales (Lüken y Sauzet, 2020; Miller et al., 2016). De acuerdo con Borriello et al. (2022), las habilidades que centran su atención en la estructura representan una forma de pensamiento relacional, concebido como la capacidad para comparar e identificar semejanzas y diferencias entre elementos y situaciones. Por ejemplo, para ser capaz de reconocer la unidad mínima que conforma la estructura de una seriación, los niños deben considerar los elementos que la componen e identificar cómo se relacionan entre sí (Borriello et al., 2022; Miller et al., 2016). A partir de les aportaciones de autores como Collins y Laski (2015); Rittle-Johnson et al. (2015); Sarama y Clements (2009); y Warren y Cooper (2007) establecemos una frontera imaginaria entre las tareas que centren el foco en la estructura de repetición, tomando como referente la habilidad 4) abstraer o traducir. Es importante comentar que no existe un consenso claro en la literatura, ya que Lüken (2018) y Wijns, Torbeyns, Bakker et al. (2019) exponen que, para construir el mismo patrón con diferentes elementos, los escolares pueden recurrir a la estrategia de alternancia y establecer comparaciones continuas de elementos sucesivos sin necesidad de focalizar la atención en la relación de elementos que constituyen la unidad de repetición.

Ahora bien, cuando, desde el contexto de los patrones de repetición, los niños pueden ver la estructura subyacente a un patrón de dos o tres elementos, es decir, identificar el núcleo o la unidad de repetición, avanzan hacia los inicios del desarrollo del pensamiento funcional (Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019). “El pensamiento funcional en un contexto de patrón de repetición sería identificar la unidad de repetición y usar la estructura del patrón para predecir cualquier elemento de la secuencia” (Lüken y Sauzet, 2020, p. 3). En cambio, en un contexto de patrones de crecimiento y funciones (Smith, 2008) define el pensamiento funcional como aquel que “(...) se produce cuando los niños inventan o se apropian de sistemas de representaciones para representar la generalización de una relación entre cantidades variables”. Desde este escenario establece tres modos de análisis de patrones y relaciones: i) recurrencia, que implica encontrar variación dentro de una sola secuencia de valores; ii) pensamiento covariacional, que se basa en analizar cómo dos cantidades varían simultáneamente, por ejemplo, cuando *x* aumenta en dos, *y* aumenta en cuatro; y iii) relaciones de correspondencia, que conlleva identificar una correlación entre variables, por ejemplo, *y* es 2 veces *x* más 3. Sin embargo, para llegar a este nivel de formalización, creemos que es necesario primero focalizar la atención, desde las primeras edades, en la estructura que se repite de manera cíclica para luego comprender a partir de la generalización de patrones de crecimiento el estudio de las funciones y uso de variables (Wilkie y Clarke 2016). Precisamente, Cañadas y Molina (2016) consideran el pensamiento funcional un modo de pensamiento algebraico que se promueve desde de la propuesta curricular *Early Algebra* y que fomenta la capacidad de entender cómo varían dos cantidades (Anglada et al., 2022; Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Blanton y Kaput, 2011).

Basándonos en estas afirmaciones, consideramos que gran parte de las capacidades anteriormente descritas, se promocionan de manera temprana a partir de observaciones generales y multifacética de la estructura de los patrones de repetición. Esto se corrobora en un estudio longitudinal de Warren et al. (2012) quienes detectaron que los alumnos de primaria presentaban grandes dificultades para reconocer la regularidad implícita en patrones de crecimiento, lo que a su vez obstaculizaba avanzar hacia la generalización.

Desde este contexto, para construir una base sólida y competente de conocimiento matemático, los niños deben captar la regularidad en la estructura, es decir, los elementos que se repiten, para así transitar de manera consolidada desde los patrones de repetición hacia patrones de crecimiento donde la unidad de repetición se transforma de manera predecible con cada iteración, y acabar avanzando hacia la generalización formal en modo de función. Por tanto, es necesario que, tal como reafirma Papic (2007) los docentes permanezcan conscientes de la necesidad de enfocar la atención de los niños en los elementos comunes, es decir, en la unidad que se repite.

Coincidimos con Threlfall (1999) cuando afirma que antes de que los niños se introduzcan en la enseñanza de patrones más sofisticados deben de haber establecido una comprensión previa de lo que es un patrón y de cómo identificar puntos en común. Por ende, resulta importante poner al alcance de los escolares situaciones de aprendizaje que movilicen el reconocimiento y la articulación de estructuras y relaciones (Martin et al., 2023).

A modo de síntesis, podemos constatar que las tareas que movilizan las habilidades de copiar, interpolar y extender, focalizan la mirada en la disposición recursiva de los elementos, mientras que las habilidades que promueven la toma de consciencia de la regla subyacente del patrón son las de abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear (Lüken y Sauzet, 2020; McGarvey, 2012). Desde esta perspectiva, asumimos que la consciencia de la estructura del patrón promueve un aprendizaje temprano de las matemáticas, y es que aprender matemáticas es precisamente comprender patrones, interpretar estructuras y establecer relaciones (Lüken y Sauzet, 2020). No podemos obviar que, la transición entre el pensamiento recursivo y el pensamiento funcional es un hito importante en el desarrollo del pensamiento algebraico, puesto que impulsa el progreso de habilidades tempranas para hacer patrones (Acosta et al., 2022).

2.5. Panorama internacional y nacional sobre la presencia de los patrones en el currículo

Como se ha puesto de manifiesto en las secciones previas, un gran cuerpo de investigaciones, muestra que la atención al patrón y la estructura es fundamental para el aprendizaje y la competencia matemática en la primera infancia (Burgoyne et al., 2019; Fyfe et al., 2017; Kidd et al., 2014; Lüken, 2012; Nguyen et al., 2016; Papic et al., 2011; Perry y Dockett, 2008; Rittle-Johnson et al., 2019; Rittle-Johnson et al., 2017; Warren y Cooper, 2007). Los resultados de estas investigaciones se han empezado a reflejar en los currículos de matemáticas de las primeras edades (Chimoni et al., 2023); y dada la importancia que tiene el estudio de los patrones en la educación infantil como impulsor del pensamiento algebraico, diversos países introducen su abordaje desde la educación no formal, apostando por construir un itinerario algebraico desde la educación infantil a la educación primaria.

Singapur, por ejemplo, es un país que refleja de una manera bastante precisa en el currículo educativo la importancia de la presencia del álgebra en edades tempranas. Precisamente, Singapur es un país situado en la primera posición en las pruebas internacionales de medición del rendimiento matemático TIMMS (Mullis et al., 2015) y PISA (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016). *Nurturing Early Learners* [NEL] es la versión revisada del currículo que publica el *Ministry of Education* [MOE] de Singapur para ofrecer una cobertura educativa de calidad a alumnos de entre 4 y 6 años de edad. Dicho plan de estudios para la educación infantil incluye un marco en consonancia con la investigación reciente en el campo de la primera infancia que ha permitido elaborar una guía para los docentes con recursos para cada área y objetivo de aprendizaje. La finalidad que se persigue es nutrir y desarrollar el conocimiento, las habilidades y las disposiciones de los niños desde la óptica de una educación moderna y actualizada (Singapore, Republic of Ministry of Education, 2013) .

Una de las áreas de aprendizaje de NEL es la aritmética, donde encontramos como objetivo "reconocer y usar relaciones y patrones simples" (p. 22). En la guía para docentes donde se despliega de manera más detallada este objetivo, se sugiere crear patrones repetidos usando objetos, palabras, dibujos, símbolos o acciones, así como reconocer y extender patrones simples. A su vez también se aboga por,

- Emparejar, clasificar y comprar objetos por un atributo (es decir de acuerdo con el color, la forma o tamaño).
- Ordenar de acuerdo con el tamaño o la longitud y secuencia de eventos.
- Reconocer, extender y crear patrones simples [es decir patrón AB] (Singapore, Republic of Ministry of Education, 2013, p. 94).

En esta línea se ofrecen, además, pautas para llevar a cabo la evaluación a través de la observación y la documentación, poniendo al alcance de los docentes algunas preguntas a tener presente para determinar la comprensión y el progreso de los alumnos en relación con los patrones.

> ¿Pueden reconocer patrones? ¿Pueden copiar patrones? ¿Pueden reconocer y extender patrones? ¿Extienden patrones de manera consistente? ¿Pierde la pista del patrón ya que lo hace más largo? ¿Pueden crear sus propios patrones usando colores u otros atributos? (Singapore, Republic of Ministry of Education, 2013, p. 51).

Otros países que también destacan por sus aportaciones sobre el pensamiento algebraico en general y los patrones en particular en la etapa de educación infantil son

Estados Unidos, Australia y Nueva Zelanda. A continuación, ofrecemos una breve exposición del tratamiento que facilitan en sus currículos oficiales estos tres países:

En Estados Unidos, por ejemplo, el (NCTM, 2000, p. 90) propone una serie de estándares para los niveles de *Pre-K-2* (de los 3 hasta los 8 años aproximadamente) donde se contemplan los siguientes objetivos:

- Comprender patrones, relaciones y funciones: seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades; reconocer, descubrir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra; analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos: ilustrar los procesos generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números; usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas: modelizar situaciones relativas a la adición y substracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.
- Analizar el cambio en contextos diversos: describir cambios cualitativos, como “ser más alto”; describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.

Siguiendo esta línea, unos años más tarde, la misma asociación americana concreta los puntos focales curriculares en que es necesario centrar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra desde el *Pre-Kindergarten* hasta el *Kindergarten* (hasta los 6 años aproximadamente):

- Ordenar, clasificar y ordenar objetos por tamaño, cantidad, y otras propiedades.
- Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos simples y transferir de una representación a otra.
- Analizar cómo se generan y crecen dos patrones que se repiten.
- Utilizar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar una comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
- Describir cambios cualitativos (NCTM, 2006, p. 24).

En Australia, el *Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority* [ACARA]., (2015) aboga por un desarrollo del sentido de número, del orden, la secuencia, el patrón y la posición haciendo uso del contexto del alumno. Concretamente en relación con el álgebra y los patrones defiende que los alumnos de 4 años ordenen, clasifiquen objetos familiares, expliquen la base de la clasificación ejecutada, copien, creen y extiendan patrones con objetos, dibujos o material manipulable, etc., reforzando a su vez la capacidad de observar e identificar los patrones naturales existentes en el entorno. En este sentido, exponen que es necesario introducir símbolos matemáticos y utilizar el lenguaje para comunicar y abordar ideas con un vocabulario cada vez más preciso que favorezca la capacidad de los alumnos para formular, investigar y resolver problemas sencillos y concretos.

Finalmente, en Nueva Zelanda, *Te Whāriki-Early childhood curriculum* (2017) se organiza sobre cuatro principios básicos (desarrollo holístico; empoderamiento; relaciones; y familias y comunidad) que se entrelazan con cinco fundamentos (bienestar; pertenencia; contribución; comunicación y exploración) sobre los cuales se generan una serie de objetivos y metas de aprendizaje que configuran el currículo para la etapa de 0-6 años. En este país se prioriza que los alumnos tengan una oportunidad de calidad para desarrollar conceptos matemáticos tempranos, como volumen, cantidad, medida, clasificación, y percepción de patrones. Uno de los intereses y capacidades crecientes de los niños pequeños que se expone en el plan de estudios es precisamente el ser capaz de reconocer una amplia gama de patrones y regularidades en su entorno que incitará a la indagación, exploración y evaluación de todo aquello que resulte inesperado. De esta forma se asegura establecer una base permeable que permita a los estudiantes en etapas posteriores explorar el uso de los patrones y las relaciones que se pueden establecer con aspectos de cantidad, conjuntos de datos, espacio y tiempo (New Zealand Government. Ministry of Education, 2017).

A pesar del reconocimiento internacional a la inclusión del álgebra y a la atención del patrón y la estructura como hitos fundamentales para el aprendizaje y logro de las matemáticas, en el currículo español se minimiza su importancia, evidenciando un vacío para el pensamiento algebraico en las primeras edades. Es decir, no se contempla una apuesta clara y consolidada que integre un modelo curricular de aprendizaje específico de álgebra para la primera infancia. Este hecho dificulta que los docentes puedan establecer conexiones significativas entre los contenidos propios de la educación infantil como base o puente para construir, de manera consolidada, los conocimientos de primaria. Si como maestros y maestras no somos capaces de divisar los cimientos del aprendizaje, ¿cómo podremos avanzar de manera comprensible hacia unas matemáticas más sofisticadas? Tal como afirma Knuth et al. (2016) el álgebra es considerada una pieza elemental y permeable en todas las áreas de las matemáticas, aunque en el contexto español, el reto radica en concretar y reconocer su presencia.

Los inicios de esta Tesis Doctoral están marcados por el Real Decreto Legislativo 1630/2006, de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación infantil* (a partir de ahora RDL 1630/2006); donde las orientaciones matemáticas seguían la siguiente tendencia:

> Iniciarse en las habilidades matemáticas, manipulando funcionalmente elementos y colecciones, identificando sus atributos y cualidades, y estableciendo relaciones de agrupamientos, clasificación, orden y cuantificación […] Para conocer y comprender cómo funciona la realidad, el niño indaga sobre el comportamiento y las propiedades de objetos y materias presentes en su entorno: actúa y establece relaciones con los elementos del medio físico, explora e identifica dichos elementos, reconoce las sensaciones que producen, se anticipa a los efectos de sus acciones sobre ellos, detecta semejanzas y diferencias, compara, ordena, cuantifica, pasando así de la manipulación a la representación, origen de las incipientes habilidades lógico matemáticas. (pp. 474-479).

Actualmente, nos encontramos inmersos en un cambio de legislación que tampoco aporta presencia del álgebra en edades tempranas. En un análisis reciente de la legislación educativa española vigente de educación infantil (Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, *por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil* [de ahora en adelante RDL 95/2022]), Alsina (2022b) constata que la referencia a los patrones es nula a pesar de que la literatura considera los patrones un tema unificador que establece puentes y permite el inicio de modos de pensamiento que pueden favorecer la adquisición de conocimientos más sofisticados en grados posteriores. En su lugar, el currículo español apuesta por el reconocimiento de cualidades y atributos de los objetos con la finalidad de establecer comparaciones y establecer relaciones clasificando, ordenando y emparejando (Alsina y Pincheira, 2022). Desde esta óptica, las orientaciones oficiales españolas presentan ciertas debilidades que los maestros deberían de ser capaces de compensar en sus aulas. A pesar de esta realidad a nivel estatal, cierto destello de luz se materializa en el currículo autonómico de Catalunya, Decreto Legislativo 21/2023, *de 7 de febrero, de ordenación de las enseñanzas de educación infantil* (de ahora en adelante DLeg 21/2023), donde se evidencia de manera explícita los siguientes aspectos:

- Reconocimiento de secuencias y ordenación temporal de hechos y actividades de la vida cotidiana. Identificación de series, repeticiones y patrones (p.22).
- (…) Establecer relaciones entre elementos, diferenciando cualidades o atributos, captando patrones y sabiéndolo comunicar (p.31).

- (…) Comparación, correspondencia, ordenación y clasificación de las calidades o atributos de los elementos del entorno. Relaciones cualitativas y cuantitativas. Reconocimiento de patrones, anticipaciones y verbalización de regularidades en situaciones de la vida cotidiana (p.32).

Bajo la mirada de Stein et al. (2007), consideramos el uso del currículo como la interpretación de unos estándares mínimos sobre los cuales los docentes construyen su propia versión a partir de sus objetivos, necesidades y conocimientos (Remillard, 2005). Por tanto, se requieren profesionales de la primera infancia comprometidos y formados para ser capaces de detectar falencias de la enseñanza y actuar en consonancia con las orientaciones matemáticas vigentes que nacen de investigaciones contrastadas. Tal como plantea Twohill (2018) es alarmante pensar que para muchos niños las habilidades que acompañan el pensamiento algebraico involucionen, en lugar de nutrirse y potenciarse mediante prácticas de aula focalizadas en su desarrollo.

2.6. Trayectorias de aprendizaje e itinerarios de enseñanza

Las trayectorias de aprendizaje en el ámbito de las matemáticas, no se han de considerar como universales, más bien se deben contemplar como descripciones o estrategias fundamentadas que favorecen el desarrollo del pensamiento del niño sobre rangos de temas matemáticos específicos (Clements y Sarama, 2019; Daro et al., 2011). Varias investigaciones han considerado la descripción de niveles de pensamiento de los escolares sobre un dominio matemático específico utilizando como ruta de oportunidades de enseñanza las trayectorias de aprendizaje (Blanton et al., 2017, 2022; Rittle-Johnson et al., 2017; Warren et al., 2012).

El primero en hacer uso del término trayectorias de aprendizaje fue Simon (1995, p. 136) cuando expuso que,

> La trayectoria hipotética de aprendizaje se compone de tres componentes: el objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético: una predicción de cómo evolucionarán el pensamiento y la comprensión de los alumnos en el contexto de las actividades de aprendizaje.

Desde esta perspectiva, se considera que existe una interdependencia entre los procesos de aprendizaje y las actividades didácticas que condiciona la consolidación de los objetivos. Siguiendo la línea de Simon (1995), Clements y Sarama (2004, p. 83) exponen que las trayectorias de aprendizaje son “descripciones del pensamiento y aprendizaje de los niños en un dominio matemático específico, y una ruta conjeturada relacionada a través de un conjunto de tareas educativas diseñadas para engendrar procesos mentales o acciones hipotéticas […]". En estudios posteriores Clements y Sarama (2015, p. 12) proponen construir trayectorias de aprendizaje que "[...] describen las metas del aprendizaje, los procesos de pensamiento y aprendizaje de los niños en diferentes niveles, y las actividades de aprendizaje en las que ellos podrían participar". Para estos autores, las metas del aprendizaje son las grandes ideas matemáticas que incluyen agrupaciones de conceptos y capacidades matemáticas primordiales que fomentan el pensamiento de los niños y que construyen las bases idóneas para el aprendizaje futuro, mientras que los procesos de pensamiento y aprendizaje se refieren a los niveles de pensamiento que vehiculan el logro de la meta matemática, es decir, "[...] la progresión del desarrollo describe una ruta típica que los niños siguen durante el desarrollo del entendimiento y las habilidades necesarias en torno al tema matemático" (Clements y Sarama, 2015, p. 11). Finalmente, las actividades de aprendizaje son un conjunto de tareas instructivas diseñadas para ayudar a los niños a adquirir ideas y habilidades necesarias, para así promover el desarrollo del pensamiento desde un nivel particular a otro superior. Todos estos condicionantes facilitan la concreción y creación de itinerarios de enseñanza, siguiendo el principio de que para que haya un desarrollo completo del niño, debemos desarrollar al niño matemático y para favorecer dicho proceso, los escolares deben de experimentar y manipular las matemáticas mientras exploran de manera lúdica su entorno (Clements y Sarama, 2015).

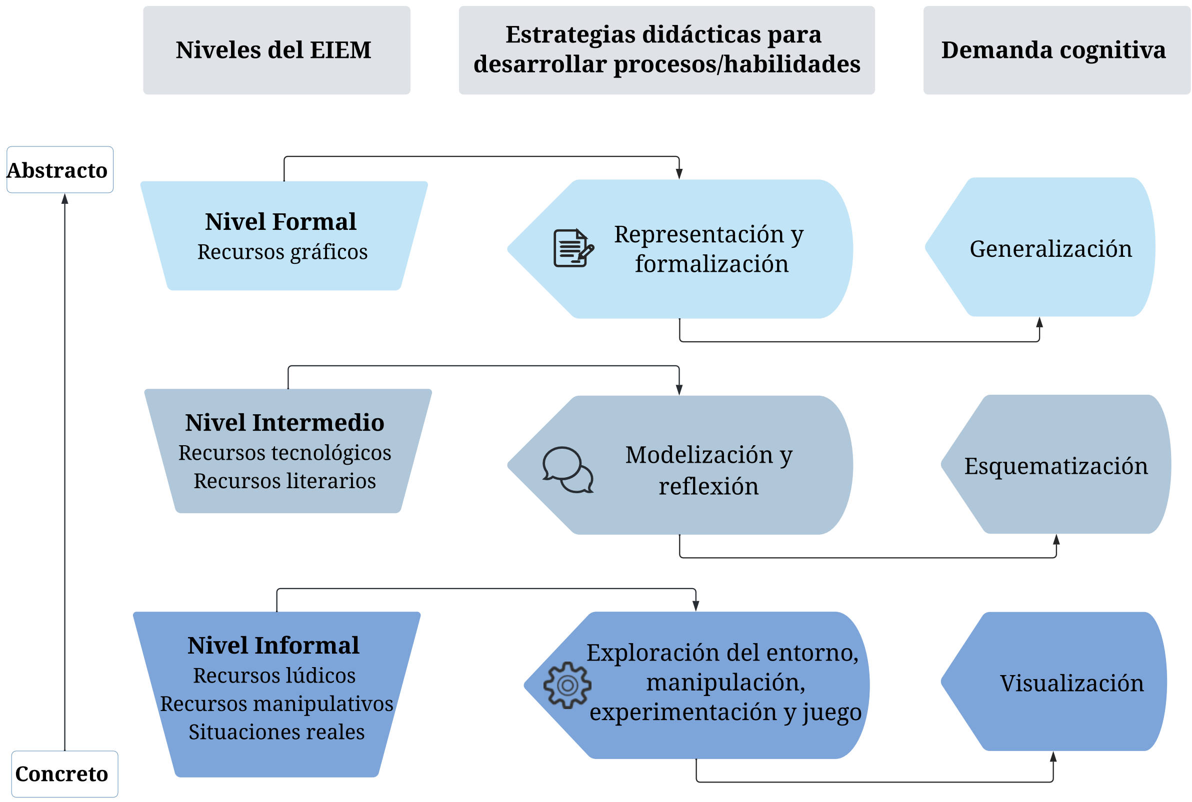
Desde esta óptica es imprescindible adquirir el compromiso de diseñar tareas que sean coherentes con el proceso natural de desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, en las que se potencie el uso del contexto con finalidades didácticas y donde la enseñanza de las matemáticas en infantil se contemple como una secuencia, un recorrido de lo concreto hacia lo abstracto que permita avanzar de lo particular a lo general. Por este razón, en esta Tesis se adoptan los planteamientos del EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022) como apoyo metodológico y didáctico durante el diseño de tareas con patrones de repetición.

Este enfoque está diseñado para ser una herramienta que ayude a los docentes a desarrollar la competencia matemática de los niños en los primeros niveles escolares, sobre la base de que para potenciar esta competencia es necesario diversificar los contextos de enseñanza-aprendizaje. Se sustenta en tres pilares interrelacionados: a) la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygotsky, 1978), que concibe la educación como un fenómeno social y cultural que se fundamenta en el lenguaje y la interacción como herramientas esenciales para promover el aprendizaje; b) el Modelo Realista de Formación Docente (Korthagen, 2001), que considera que los docentes deben conocer muchas formas de actuar y ejercerlas en la práctica, es decir, deben tener criterios para saber cuándo, qué y por qué algo es adecuado y reflexionar sobre ello sistemáticamente; y c) la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), que fomenta el uso de situaciones reales o problemas contextualizados como punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas. Progresivamente, estas situaciones se matematizan a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.

Desde esta perspectiva, el EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022) propone la enseñanza de las ideas matemáticas a través de itinerarios, entendiendo por “itinerario” una secuencia didáctica intencionada que comprende tres niveles tal como se muestra en la Figura 2:

Figura 2

Niveles del EIEM, estrategias didácticas para desarrollar procesos/habilidades y demanda cognitiva



Fuente: Elaboración propia a partir de Alsina (2010, 2019, 2020, 2022)

Tal como se observa en la Figura 2, los niveles de enseñanza avanzan de lo concreto a lo abstracto, de lo particular a lo general, presentando diferentes tipos de contextos de enseñanza y estrategias didácticas para desarrollar procesos/habilidades de las que emergen distintas demandas cognitivas.

- **Nivel 1 Enseñanza en contextos informales**: la enseñanza de contenidos matemáticos se inicia en situaciones reales o realistas, como el entorno inmediato del niño, o materiales manipulativos y juegos, en los que se utilizan conocimientos de la situación y estrategias en el contexto de la propia situación, apoyándose en el conocimiento informal, el sentido común y la experiencia. En estos contextos, la exploración del entorno, la manipulación, la experimentación y el juego favorecen la visualización de las ideas matemáticas de forma concreta.
- **Nivel 2 Enseñanza en contextos intermedios**: la enseñanza del contenido continúa en contextos que actúan como puente entre los contextos reales o realistas de la fase anterior y los contextos formales de la fase posterior, como algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (Applets, robots educativos programables, etc.). En estos contextos, a través de la modelización y la reflexión, se conduce a la progresiva esquematización del conocimiento matemático.
- **Nivel 3 Enseñanza en contextos formales**: la enseñanza del contenido culmina en contextos gráficos y simbólicos. En estos contextos, pues, mediante la representación y la formalización se avanza hacia la generalización.

El EIEM por tanto, se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la práctica de ejercicios que los libros de texto presentan como las principales estrategias para "aprender" las matemáticas, y en cambio, sugiere que es necesario promover la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que el puro ejercicio, y el pensamiento crítico matemático más que la simple repetición (Alsina, 2020). Sabemos por investigaciones de autores como Conway y Sloane (2005) que un uso excesivo de libros de texto puede resultar ser contraproducente en el desarrollo de habilidades matemáticas en general y en la resolución de problemas en particular. Freudenthal (1991) en sus contribuciones argumentó que la instrucción matemática a menudo carece de éxito porque los alumnos aprenden a proyectar manipulaciones simbólicas abstractas antes de estar capacitados para otorgarles sentido. Décadas más tarde, autores como Reinke y Casto (2022) reivindican que el contexto de la tarea matemática debe ser considerado como un ancla conceptual que proporcione sentido y significancia a las nuevas ideas matemáticas. Por tanto es importante diversificar los escenarios de enseñanza para así garantizar que los niños a través de la participación con el medio y de la interacción con iguales, adopten el rol de agentes activos en la construcción de la comprensión (Acosta et al., 2022; Pincheira et al., 2022; Twohill, 2018).

No obstante, cabe señalar que la selección de contextos representativos implica realizar predicciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, considerando las concepciones sobre la evolución del pensamiento infantil y la profundización del docente en aspectos matemáticos (Alsina, 2020). De aquí la necesidad de comprender el proceso de enseñanza-aprendizaje como un recorrido hacia lo formal, donde el docente acompaña su intervención y discurso con recursos comunicativos que enriquecen y apoyan el aprendizaje de los escolares (Acosta y Alsina, 2022). No podemos obviar que "aprender matemáticas implica no solo conocimiento matemático, sino también prácticas matemáticas y discurso" (Erath et al., 2021, p. 246). Diversos estudios contemporáneos demuestran el papel primordial que ocupa el docente para transitar más allá de la generalización recursiva y desarrollar generalizaciones explícitas (Blanton y Kaput, 2011; Hunter y Miller, 2022; Twohill, 2018). Es decir, la generalización que más allá de centrarse en la relación entre los términos sucesivos del patrón, focaliza la atención en captar la relación funcional de la regla subyacente. Watson et al. (2013) sugieren que cuando se enseña algebra desde la manipulación de expresiones descontextualizadas, existe una gran probabilidad de que gran parte de los alumnos desconecten de las matemáticas por el desafío que presenta tal abstracción. Bajo esta mirada, se asume que el EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022) proporciona oportunidades de aprendizaje con apoyo en múltiples contextos que, en el caso de la enseñanza de patrones de repetición, permite avanzar de manera sólida y comprensible hacia habilidades más sofisticadas que requieren reconocimiento de la estructura de manera funcional.

2.7. Representación y Justificación: vías para exteriorizar la comprensión

La representación es una forma de conocimiento que ejerce un papel crucial en el desarrollo de conceptos de los niños pequeños (Vygotsky, 1978). En un sentido amplio, está considerada como el medio para pensar y comunicar ideas matemáticas (Rahmawati et al., 2017; Tripathi, 2008). Desde esta óptica, es necesario tener en cuenta que las representaciones no son un producto estático, ya que muestran el proceso de construcción y comprensión de un concepto o idea matemática (MacDonald, 2013; Reed, 2001). “Es importante destacar que la representación no es solo un procedimiento mediante el cual los niños registran su conocimiento sobre un concepto; también es un proceso a través del cual se pueden construir, reconsiderar y aplicar entendimientos de nuevas maneras” (MacDonald, 2013, p. 72).

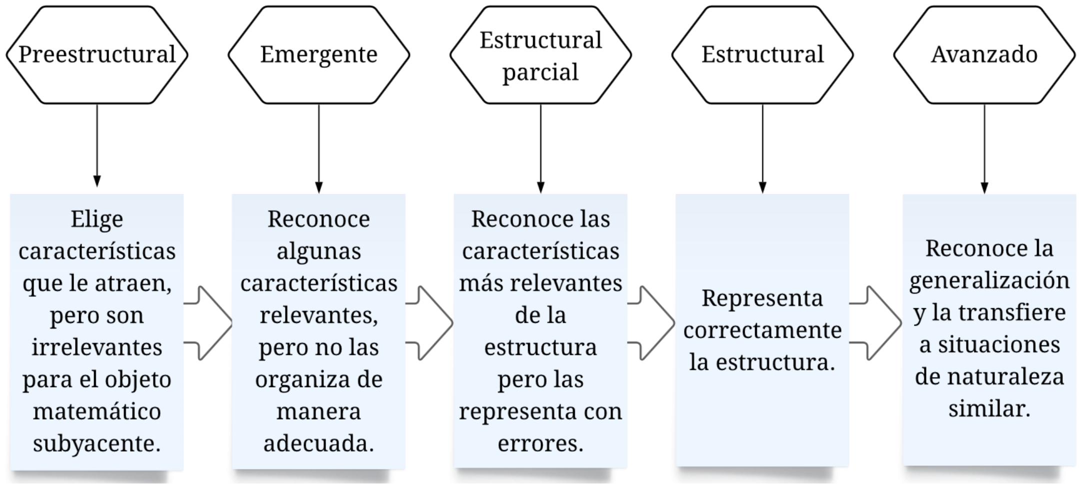
En esta Tesis, entendemos la representación como un proceso interconectado que nos permite plasmar de manera concreta, mediante el uso de diferentes elementos figurativos y/o lenguaje natural, los conocimientos y procedimientos matemáticos que movilizan los niños. De esta forma es posible organizar, comprender y comunicar el carácter matemático de acciones realizadas previamente en el plano educativo y social.

Para el NCTM (2000), la representación debe estar presente en los programas educativos desde el *prekindergarten* hasta el grado 12 (aproximadamente de los 3 a los 18 años), con el fin de incentivar el uso de las representaciones como un proceso que permite la organización, registro y comunicación de ideas matemáticas y que, además, ayuda al reconocimiento de la naturaleza matemática común de distintas situaciones. Como expone Rico (2009, p. 10) “la representación es un acto creador, consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo”. En este sentido, a través del acto de dibujar los escolares hacen emerger ideas a la superficie que permiten traducir entre la representación interna y la externa (Woleck, 2001). Es decir, entre aquellas concepciones mentales que no son físicamente observables y aquellas que se materializan siendo accesibles de manera perceptiva por cualquier individuo con el conocimiento adecuado. Como suscribe Wright (2003), cuando los niños describen y explican sus dibujos construyen múltiples interpretaciones generadoras de nuevos significados. Autores como Mulligan et al. (2004) argumentan que las imágenes externas de un niño reflejan las características estructurales de sus representaciones internas, permitiendo examinar y comprobar el grado de comprensión conceptual de los escolares. En esta línea y con la intención de profundizar en esta cuestión, se muestra en la Figura 3 los 5 niveles de desarrollo estructural propuestos por Mulligan y

Mitchelmore (2013) en el marco del enfoque *Awareness of Mathematical Pattern and Structure* (AMPS) [Consciencia de Patrón y de Estructura Matemática].

Figura 3

Niveles del enfoque AMPS



Fuente: Elaboración propia a partir de Mulligan y Mitchelmore (2013)

Este enfoque facilita una lente objetiva para constatar la manera en que los escolares van desarrollando su pensamiento. Tal como expone Rico (2009), comprender es un modo destacado de conocimiento y un acto de comunicación (Ayala-Altamirano y Molina, 2021). Por tanto, “representar es sustituir, dar presencia a un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia” (Rico, 2009, p. 6). Es así como las representaciones permiten a las personas otorgar significado y comprender estructuras matemáticas (Radford, 2008). Por tanto, representar también se refiere al acto de externalizar una abstracción mental interna (Goldin, 2020).

> El objetivo central del pensamiento algebraico es lograr que los niños piensen, describan y justifiquen lo que sucede en general con respecto a alguna situación matemática. Es decir, queremos que los niños desarrollen una generalización, un enunciado que describa una verdad matemática general sobre algún conjunto de datos (Blanton, 2008, p. 105).

En este sentido, Chua (2017, p. 115) señala que “para profundizar en el razonamiento matemático de los estudiantes, se necesita otra herramienta para hacer visible dicho razonamiento: la justificación”. Ball y Bass (2003) señalan que la justificación se postula como una habilidad necesaria para descubrir y comprender nuevos conceptos matemáticos, desde una perspectiva flexible que permite transferir procedimientos matemáticos a otras situaciones y reestructurar conocimientos previos generando argumentos nuevos. Cornejo-Morales et al. (2021) indican que esta reconstrucción se manifiesta entre los discursos interpersonales e intrapersonales de los niños cuando comparten y justifican sus puntos de vista. Staples et al. (2012, p. 447) consideran la justificación como una práctica de aprendizaje mediante la cual los niños "(…) mejoran su comprensión de las matemáticas y su competencia en hacer matemáticas; es un medio para aprender y hacer matemáticas". Tal como sostiene Blanton (2008, p. 103),

> (…) la enseñanza del pensamiento algebraico a menudo consiste más en preguntar que en decir. Hacer buenas preguntas les da a los niños la oportunidad de organizar su pensamiento y construir ideas matemáticas. Cuando un maestro les dice a los niños qué representación usar o cómo simbolizar una relación funcional o cómo justificar una conjetura particular, disminuye la posibilidad de que los niños desarrollen su propio pensamiento.

Por ende, Cox et al. (2017) plantean que es necesario escuchar la matemática de los alumnos, para así monitorear, seleccionar, secuenciar, discutir y compartir el conocimiento generado entre iguales. De acuerdo con Blanton et al. (2017) la justificación es visible cuando los escolares discuten sobre la veracidad de una generalización; y en dicho proceso los niños exploran la estructura, la regla subyacente, los datos y el contexto para ofrecer argumentos (Ayala-Altamirano y Molina, 2021a). Desde esta óptica, Chua (2017) considera que las tareas de justificación se consolidan como un elemento integral para aprender matemáticas con comprensión, señalando cuatro tipos de justificación: 1) la "elaboración", que requiere exponer la estrategia o enfoque utilizado; 2) la "validación", que implica usar argumentos para apoyar o refutar una conclusión matemática; 3) la "inferencia", que precisa conectar e interpretar el resultado matemático; y 4) la "predicción o toma de decisiones", que requiere encontrar evidencias y generalizaciones para apoyar una afirmación matemática. De esta manera, se consigue organizar, comprender, comunicar y justificar la naturaleza matemática de acciones previamente realizadas en el plano educativo, social, creativo y tecnológico. Por este motivo, las propuestas educativas se deben articular con la finalidad de aumentar la codificación de las características estructurales que conforman el patrón, para facilitar la representación y su justificación. Es por ello que en esta Tesis Doctoral se asume la postura de Blanton (2008) y se consideran también los procesos de representar, preguntar y escuchar, focos o componentes de la instrucción que permiten a los escolares elaborar y comprender sus propias generalizaciones.

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se aborda el marco metodológico que ha ejercido de columna vertebral de la Tesis Doctoral. Se presenta una breve descripción del tipo de investigación desarrollada, se especifican los participantes, el diseño y procedimiento llevado a cabo a lo largo de tres años de estudio longitudinal, así como la manera en que se han analizado los datos. Finalmente, para vincular los objetivos específicos de la Tesis y los estudios realizados, se muestra una tabla resumen donde se detalla: objetivos, edad, nivel del EIEM donde se contextualiza el estudio y tipo de investigación desarrollada.

3.1. La investigación de diseño

La Tesis Doctoral sigue las líneas de una investigación de diseño o investigación basada en diseño (en inglés, *Design-Based Research* [DBR]). Este modelo metodológico emergente, con carácter básicamente cualitativo, persigue la comprensión y mejora de la realidad educativa a partir del estudio de la complejidad y singularidad de contextos naturales de aprendizaje (Design-Based Research Collective, 2003; Molina et al., 2011). Autores como Bakker (2019) y Molina (2021) coinciden en que desde esta perspectiva se apuesta por generar nuevas condiciones de aprendizaje, herramientas, estrategias o entornos que promuevan una mejora de la praxis docente y un aumento de la transferencia y aplicabilidad del conocimiento. Por tanto, la finalidad de este método es "[...] analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (Molina et al., 2011, p. 76). Nuñez del Río et al. (2010, p. 464) constatan que este modelo emergente de investigación educativa,

> [...] promueve el diseño de innovaciones curriculares basadas en teorías que, a través de un ciclo de diseño, implementación, análisis y rediseño, trata de explicar cómo funcionan los diseños en situaciones reales, mejorarlos, y desarrollar las teorías que sustentan la innovación y que orientan el diseño.

Bajo estos principios, se establece un diálogo permanente entre teoría y práctica para promover escenarios de aprendizaje coherentes y significativos (Cotton et al., 2009). Según Ayala-Altamirano (2021) el rol del investigador es diseñar, probar, analizar y refinar conjeturas haciendo uso de ciclos iterativos de reflexión con el objetivo de promover principios que sustenten el diseño y faciliten el proceso de aprendizaje. Dentro de las investigaciones basadas en el diseño, los experimentos de enseñanza se configuran como una ruta que permite la implementación, análisis y rediseño de la situación de aprendizaje (Collins et al., 2004). Dichos experimentos permiten comprender los progresos sobre un contenido concreto en un determinado grupo de participantes dentro de un espacio de tiempo específico, para así ofrecer modelos de aprendizaje que promuevan la enseñanza (Cobb y Gravemeijer, 2008; Molina et al., 2011).

A partir de les aportaciones de Cobb y Gravemeijer (2008) sobre las fases de un experimento de enseñanza, adaptamos su propuesta fusionándola con el diseño de trayectoria de aprendizaje, la cual se vehicula a través de itinerarios de enseñanza que emergen a partir de los planteamientos del EIEM. La finalidad de esta fusión es definir una propuesta metodológica que permita aportar conocimientos para situar la forma en que los niños de 3, 4 y 5 años se inician en la comprensión de patrones de repetición, promoviendo la conexión entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional para avanzar hacia el desarrollo temprano del pensamiento algebraico.

3.2. Participantes

La implementación se ha llevado a cabo de manera longitudinal, durante tres años consecutivos, con 24 niños (12 niñas y 12 niños) pertenecientes todos a una misma clase de un centro de educación público de Girona, España. La muestra se ha mantenido constante durante los tres años de implementación. En el primer año de intervención, la edad promedio de los participantes era 3 años y 9 meses (DE= 5 meses) y en el último 5 años y 9 meses (DE= 5 meses).

Se ha seleccionado este grupo a través de un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal (Fernández et al., 2014), puesto que los criterios de selección han sido determinados por la posibilidad de acceder a este grupo; por la continuidad y seguimiento longitudinal de la maestra tutora; y por estar considerado un centro con baja movilidad de matrícula en cursos preescolares.

Cada año, antes de comenzar la implementación de las tareas de enseñanza, se aplicó el Test de Competencia Matemática Básica 3 (Test of Early Mathematics Ability -TEMA3-) diseñado por Ginsburg y Baroody (2003). Dicha prueba está validada y estandarizada y permite evaluar la habilidad matemática infantil desde los 3 años y 0 meses hasta los 8 años y 11 meses, a través de 72 ítems que valoran diferentes aspectos formales e informales de la competencia matemática básica. Resulta relevante subrayar que los aspectos informales, es decir aquellos que no requieren el uso de símbolos matemáticos, están conformados por 41 ítems; y los formales -aquellos que sí utilizan símbolos matemáticos- están estructurados en 31 ítems.

Esta prueba ha sido creada con la finalidad de: a) identificar alumnos que se sitúen, de manera significativa, por encima o por debajo de sus pares; b) identificar puntos fuertes y débiles de la competencia matemática temprana; c) documentar el progreso de los alumnos; y d) facilitar una medida de la competencia matemática de los alumnos validada para ser utilizada en los proyectos de investigación. En nuestro caso, hemos aplicado la prueba con la finalidad de evidenciar los conocimientos matemáticos previos de los niños y tener un dato validado para nuestro estudio.

Considerando la escala interpretativa del TEMA3 (Ginsburg y Baroody, 2003), que indica que un Índice de Competencia Matemática (ICM) muy pobre se sitúa en valores menores de 70 y uno muy superior se ubica en datos por encima de 130, se constata que el grupo de manera general presenta un nivel medio de ICM al obtener los valores de 93, 81 y 89 para 3, 4, y 5 años, respectivamente.

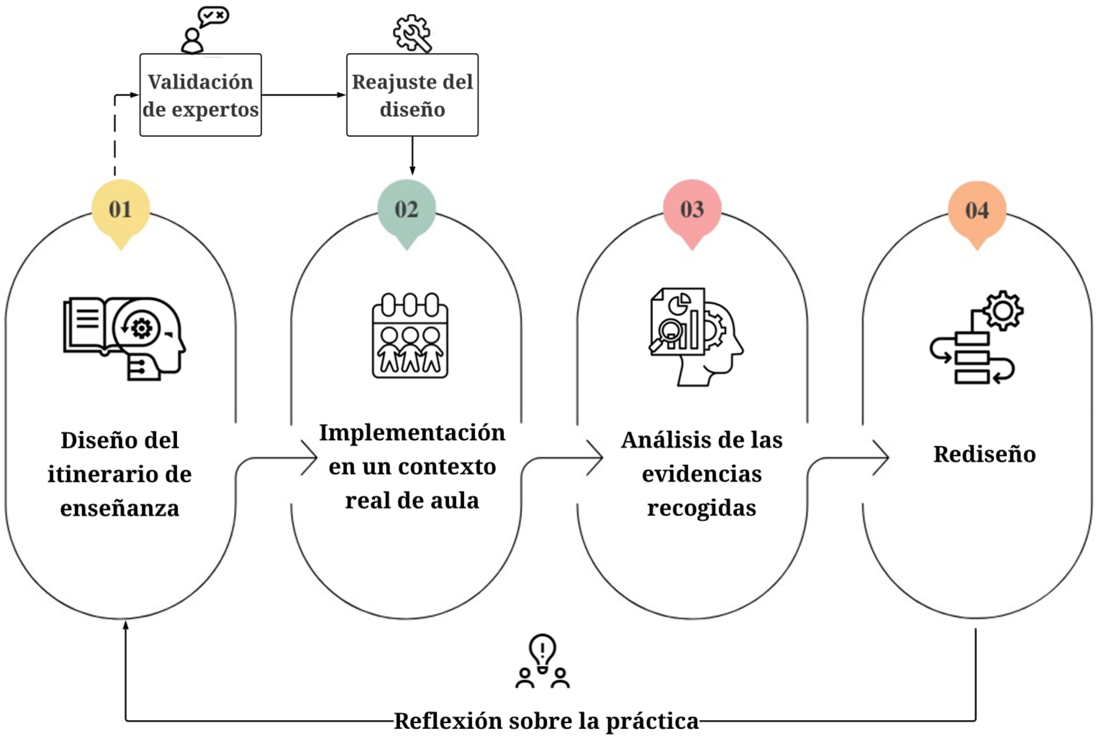
3.3. Diseño y procedimiento

La investigación que se desarrolla en esta Tesis Doctoral adopta una perspectiva educativa, lo que significa, según Björklund et al. (2020), que está vinculada a la visión del niño que aprende, a las oportunidades que ofrece el contexto de enseñanza donde se lleva a cabo el proceso de aprendizaje y a la gestión docente que se desempeña.

Desde este punto de vista, nuestro propósito es aportar conocimientos que permitan situar la forma en que los niños de 3, 4 y 5 años se inician en la comprensión de patrones de repetición y en su representación para avanzar hacia el desarrollo temprano del pensamiento algebraico. Así pues, nuestro diseño presenta tres grandes ciclos iterativos longitudinales (3, 4 y 5 años) donde en cada uno de ellos se diseña, valida, implementan y analizan propuestas relacionadas con tareas de enseñanza de patrones de repetición. En la Figura 4, se pueden apreciar las fases que se incluyen en cada iteración longitudinal.

Figura 4

Fases longitudinales que configuran la investigación de diseño desarrollada



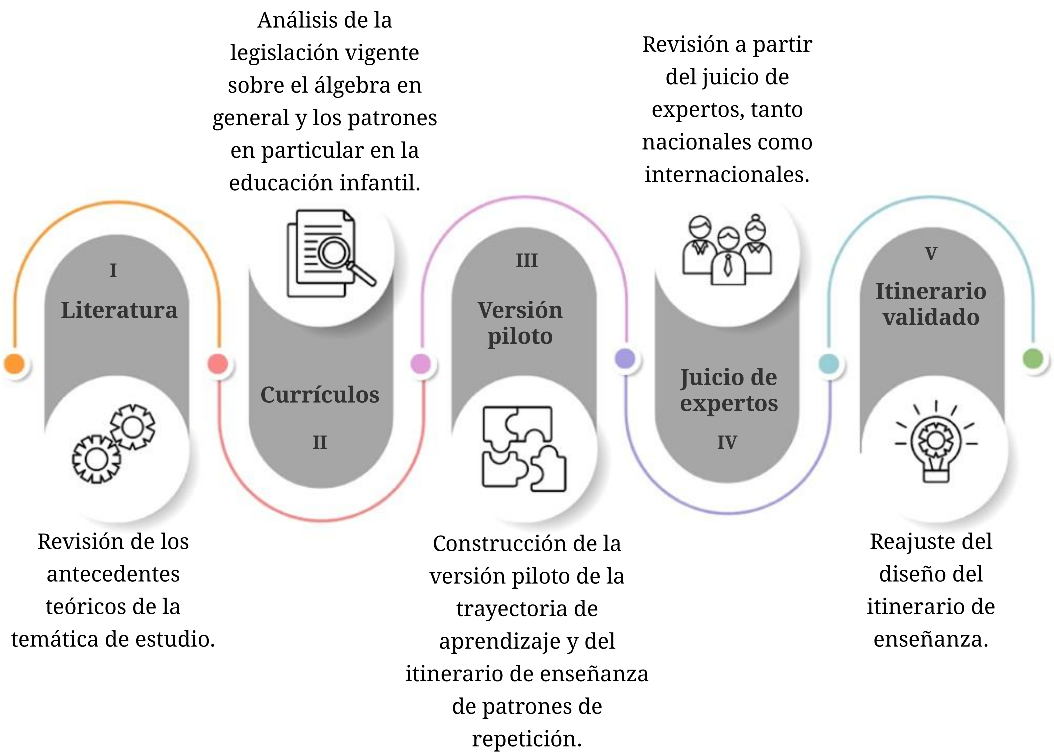
Fuente: Elaboración propia

3.3.1. Fase 1: Diseño del itinerario de enseñanza

En la fase 1 se lleva a cabo la construcción y validación de una trayectoria de aprendizaje y de un itinerario de enseñanza que contempla el uso jerarquizado de los niveles y contextos que conforman el EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022). El diagrama de la Figura 5 sintetiza las etapas de dicha fase:

Figura 5

Etapas del proceso de diseño y validación de la trayectoria de aprendizaje y del itinerario de enseñanza

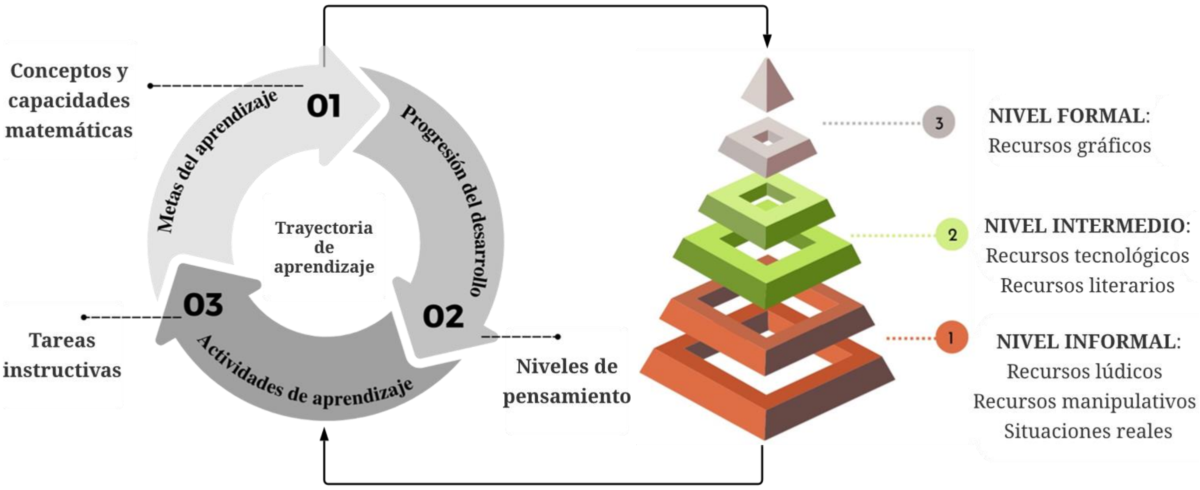


Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la información que se muestra en la Figura 5, consideramos necesario exponer que las etapas I y II dan lugar a una fusión entre las aportaciones de Clements y Sarama (2015) sobre las trayectorias de aprendizaje y el enfoque del EIEM de Alsina (2010, 2019, 2020, 2022) que permiten avanzar a la etapa III y diseñar una propuesta piloto sobre patrones de repetición para niños de educación infantil (ver Figura 6).

Figura 6

Principios teóricos que fundamentan el diseño de la intervención

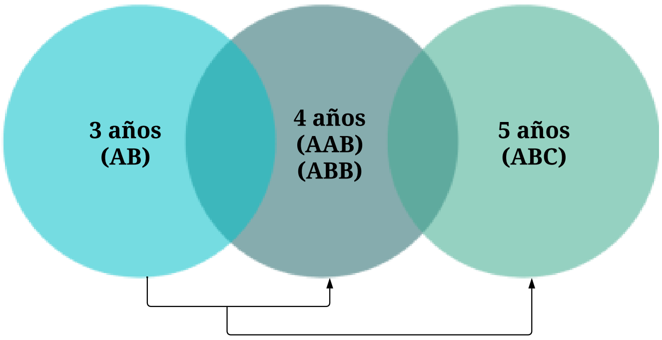


Fuente: Elaboración propia a partir de Clements y Sarama (2015) y Alsina (2010, 2019, 2020, 2022)

La trayectoria de aprendizaje e itinerario de enseñanza diseñado consta de 9 propuestas enmarcadas en los distintos contextos que conformen el EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022). De manera intencionada y en consonancia con el uso jerarquizado de contextos que se propone desde el EIEM, se incluyen 6 actividades para el nivel informal (dos de situaciones reales [SR], dos de recursos manipulativos [RM] y dos recursos lúdicos [RL]); 2 para el nivel intermedio (una de recursos literarios [RLIT] y una de recursos tecnológicos [RT]); y una para el nivel formal (recursos gráficos [RG]). Uno de los principales argumentos para presentar una implementación jerárquica de los tres niveles de enseñanza es el supuesto de que los niños más pequeños aprenden matemáticas de lo concreto a lo abstracto, iniciando un camino que avanza hacia una progresiva formalización del aprendizaje. El grado de dificultad de las tareas diseñadas se refleja en función del tipo de patrón introducido en cada edad y de la capacidad de los participantes en centrarse en la estructura. En la Figura 7 mostramos el tipo de patrón introducido a los 3, 4 y 5 años, respectivamente.

Figura 7

Tipo de patrón introducido en cada edad

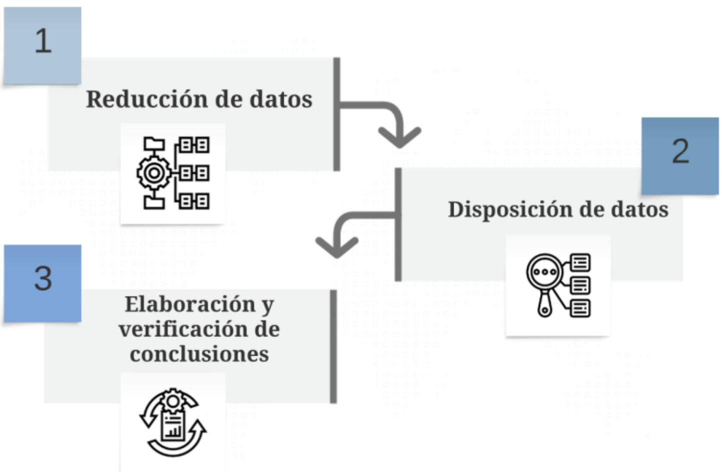


Fuente: Elaboración propia

Retomando las etapas restantes de la Figura 4, exponemos que durante la etapa IV, cada una de las tareas que configuran el itinerario de enseñanza se ha sometido a un juicio de expertos externos, pertenecientes mayoritariamente al Grupo de Trabajo "Investigación en Educación Matemática Infantil" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), que ha valorado de manera longitudinal mediante un cuestionario: a) el grado de correspondencia; b) la formulación y uso del lenguaje matemático; y c) la pertinencia del proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones de repetición para escolares de educación infantil. El análisis de la validación se ha llevado a cabo siguiendo el proceso que se muestra en la Figura 8.

Figura 8

Componentes de análisis según Miles y Huberman (1994)



Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la reducción de datos, se han establecido categorías que han permitido sintetizar y agrupar las aportaciones de los expertos. Durante este proceso, a través del programa *Atlas.ti*, se asignan categorías iniciales que se van refinando hasta obtener las categorías definitivas. Una vez reducidos lo datos, se analizan las aportaciones de los expertos con el objetivo de extraer conclusiones. Dichas conclusiones permiten en el momento de elaboración y verificación, establecer semejanzas y diferencias y contrastar las contribuciones con la literatura de referencia para poder dar lugar a la etapa V "Itinerario validado".

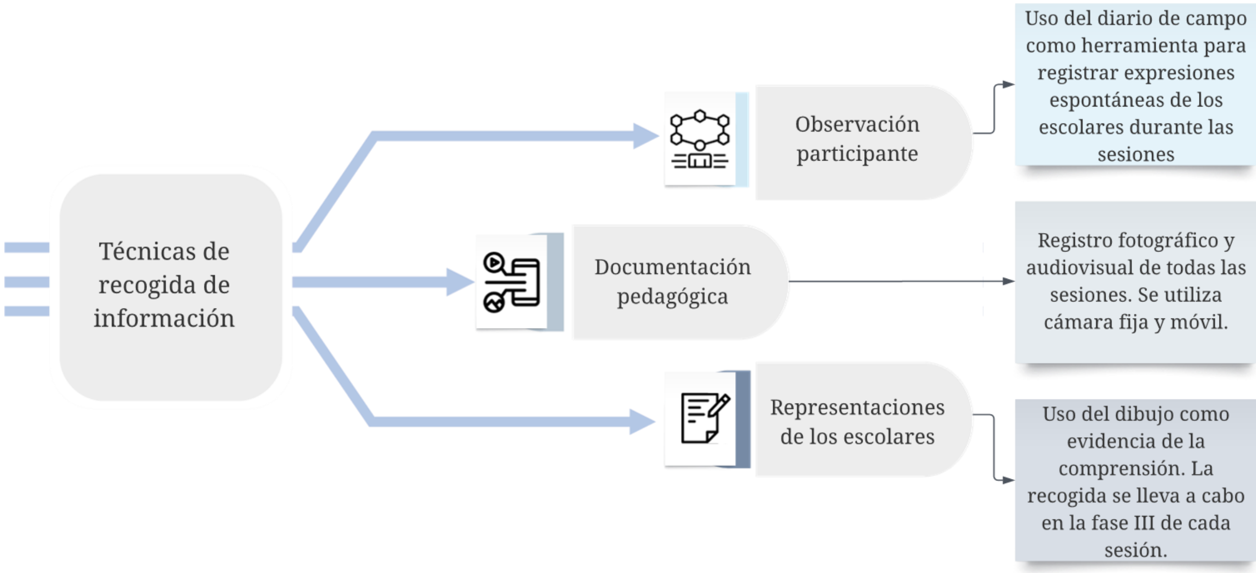
3.3.2. Fase 2: Implementación en un contexto real de aula

La implementación se lleva a cabo en un aula de la escuela pública "Pericot" de Girona. En cada sesión, el grupo se divide en dos de manera aleatoria con la intención de ofrecer una atención personalizada e individualizada. Por tanto, en total se desarrollan 18 sesiones presenciales de 50 minutos, en cada ciclo de iteración. De esta manera al finalizar los 3 años de implementación longitudinal se llevan a cabo 54 sesiones. Es necesario comentar que en el contexto de recursos tecnológicos se dedicó una sesión extra para que los niños se familiarizaran con los artefactos utilizados (Bee-bots, Ipad y el robot Cubettos).

Es importante exponer que cada sesión cuenta intrínsecamente con las siguientes fases: I) presentación de la tarea enmarcada en el contexto; II) interacción, exploración y desarrollo de la tarea diseñada, y III) representación y reflexión. En la fase III de cada sesión, los niños representan el patrón de memoria sin tener el modelo frente a ellos. El objetivo de esta fase es observar y analizar si los niños se inician en la comprensión de la estructura del patrón siendo capaces de representarlo mediante un dibujo y de explicar lo que han representado. Resulta necesario comentar que, durante el primer ciclo de iteración del diseño, en la fase III solo se llevó a cabo un proceso de diálogo y reflexión con los participantes.

Las técnicas de recogida de información se muestran en la Figura 9.

Figura 9
Técnicas que facilitan la recogida de evidencias



Fuente: Elaboración propia

Según Kawulich (2005) la observación participante es una estrategia que ayuda a los investigadores a aprender y reflexionar sobre las actividades que se implementan con los participantes en un escenario natural, utilizando la observación y la participación activa, con el fin de facilitar la interacción directa en un contexto real de aula. Las notas de campo registradas en el diario, nos han permitido conservar expresiones, razonamientos, diálogos de los escolares e incluso reflexiones extraídas de la praxis. En este escenario, la documentación pedagógica adopta un carácter reflexivo que da voz al pensamiento del niño, reconociendo al observador como un agente activo que co-construye significado de manera reflexiva, activa y recíproca con la finalidad de crear un espacio plural y transformador (Mitchelmore, 2018). No podemos ignorar que las expresiones verbales y no verbales son claves para interpretar los conocimientos y habilidades de los niños más pequeños en diferentes contextos (Björklund et al., 2020). Tal como sostiene Björklund et al. (2020, p. 607),

> (…) adquirir conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años requiere una investigación que se lleve a cabo en varios entornos de aprendizaje y que reconozca que estos entornos de aprendizaje son complejos, multifacéticos y dinámicos.

Por estas razones, utilizamos la representación de los niños en formato dibujo, no como un producto final y estático sino como una evidencia del proceso de construcción y comprensión de un concepto o idea matemática (MacDonald, 2013; Reed, 2001). Es importante comentar que la recogida de dibujo para todos los contextos de enseñanza se implementa, durante la fase III de cada sesión a partir del segundo ciclo de iteración cuando los participantes tenían 4 años y 9 meses.

Finalmente, exponer que antes de iniciar el trabajo de campo, y desde un marco de transparencia y con base en los principios éticos, las familias fueron informadas de los siguientes aspectos: finalidad de la investigación; objetivos, temporalidad; procedimiento y necesidad de registro fotográfico y audiovisual de las sesiones. De este modo, se obtuvo el consentimiento informado y la aprobación de todas las familias implicadas en el estudio. De la misma manera, se respetó a lo largo de toda la intervención el deseo de los niños de participar o no en las propuestas y de ser grabados y fotografiados.

3.3.3. Fase 3: Análisis de las evidencias recogidas

En cada ciclo de iteración longitudinal, se realizan microanálisis transversales (entre contextos) y longitudinales (en función de la edad) que nos permiten reajustar el diseño de la intervención. De manera general, se presentan las técnicas cualitativas y cuantitativas usadas para el análisis de los datos recogidos.

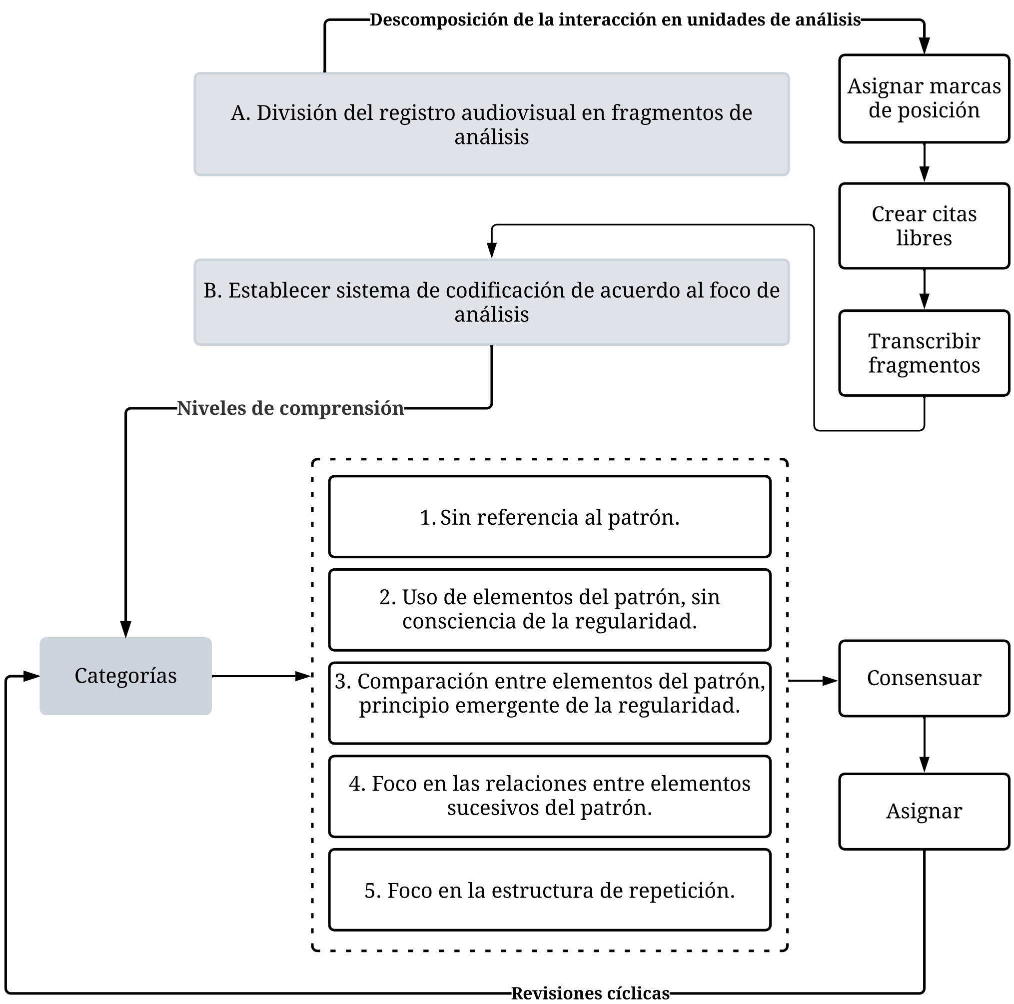
La observación participante ha permitido registrar *in situ* relatos de situaciones relevantes a través de diarios de campo que se organizan por sesiones transversales. La grabación fija y móvil complementa los relatos seleccionados y proporciona, mediante la transcripción en diferido, una mirada global al modo en que el niño desarrolla y comprende la tarea propuesta; y a la manera que se desempeña la gestión docente que acompaña el proceso de enseñanza-aprendizaje. Durante el primer ciclo de iteración se transcriben episodios relevantes y se analizan para calibrar el diseño, a través de la reflexión sobre la práctica.

En el segundo y tercer ciclo de iteración, a través del *Atlas.ti,* se analizan de forma interpretativa las aportaciones de los niños para describir, por un lado, el nivel de comprensión de los patrones de repetición (I) y por otro, el tipo de justificación utilizado (II). Para ello se articula un proceso de reducción y categorización descomponiendo en unidades de análisis todas las sesiones grabadas y asignando marcas de posición a fragmentos relevantes. Una vez detectado dicho fragmento, se procede a su transcripción y codificación de acuerdo con la categorización deductiva de Lüken (2018) para el análisis (I) y Chua (2017) para el (II). Los dos sistemas de codificación adoptados presentan un nivel de sofisticación creciente de acuerdo a las categorías propuestas por los autores anteriormente citados. Es importante comentar que, por razones evolutivas que condicionan la fluidez del lenguaje, estos análisis se empiezan a implementar cuando los participantes tienen 4 años y 9 meses.

Para el primer análisis (I), se toma como referencia la categorización de Lüken (2018) donde se focaliza la mirada en un orden de comprensión jerárquico que avanza de una comprensión básica a una comprensión avanzada de los patrones de repetición. En la Figura 10, se sintetiza el proceso de codificación desarrollado.

Figura 10

Procesos de reducción de datos y categorización del nivel de comprensión de los escolares



Fuente: Elaboración propia a partir de las categorías de Lüken (2018)

El segundo análisis (II), se utiliza como instrumento una adaptación de las aportaciones de Chua (2017) que se muestran en la Tabla 3 y que están directamente relacionadas con el grado de sofisticación de la justificación.

Tabla 3
Tipo de justificación atendiendo al propósito y elementos que la complementan

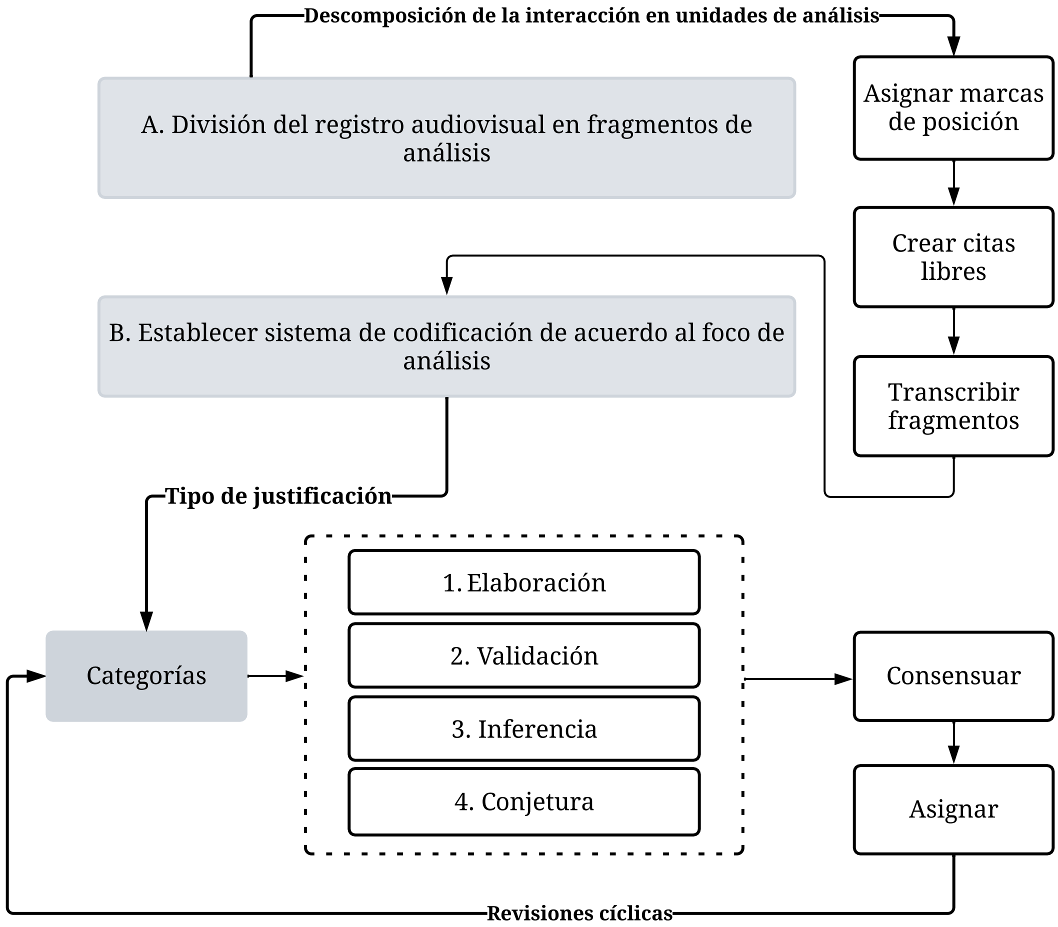
Tipo de justificación	Finalidad de la justificación	Elementos que complementan
Elaboración	Explica como…	Una descripción de lo realizado.
Validación	Explica porque…	Una evidencia para aceptar o refutar una afirmación.
Inferencia	Explica que…	Uso de un discurso matemático con palabras clave de la tarea o reto abordado.
Conjetura	Explica si…	Una decisión generalizada con evidencia para apoyar o refutar la afirmación matemática.

Fuente: Adaptado de Chua (2017)

De acuerdo con la información de la Tabla 3, esta autora considera que la justificación de los niños permite profundizar en el razonamiento matemático y por ende en el nivel de comprensión de un determinado concepto. Para ello, establece cuatro tipos de justificación: 1) la “elaboración”, que requiere exponer la estrategia o enfoque utilizado; 2) la “validación”, que implica usar argumentos para apoyar o refutar una conclusión matemática; 3) la “inferencia”, que precisa conectar e interpretar el resultado matemático; y 4) la “predicción o toma de decisiones”, (que adaptamos como “conjetura”) que requiere encontrar evidencias y generalizaciones para apoyar una afirmación matemática. En la Figura 11 se muestra el proceso de análisis y categorización desarrollado para determinar, a partir del discurso explicativo que acompaña la representación realizada en la fase III, el nivel de justificación de los participantes.

Figura 11

Procesos de reducción de datos y categorización de la justificación de los escolares



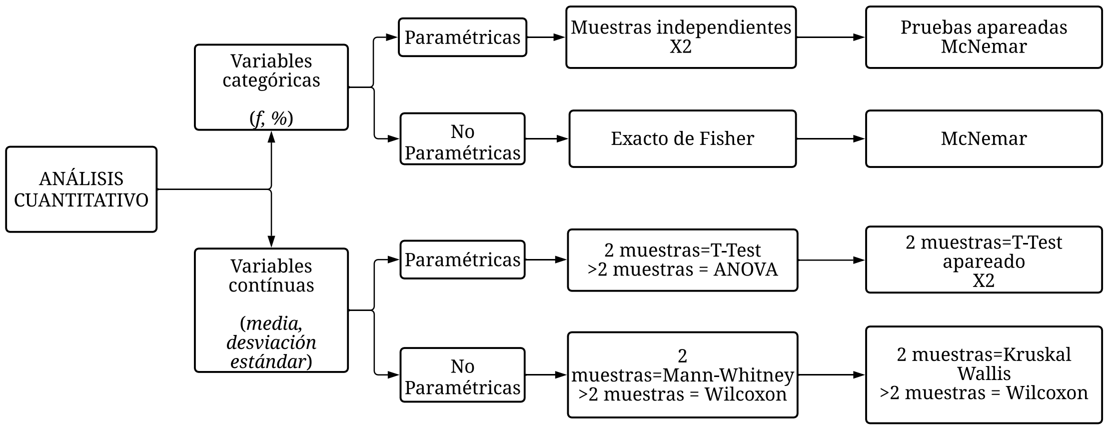
Fuente: Elaboración propia a partir de la adaptación de las categorías de Chua (2017)

Cabe puntualizar que los análisis mostrados en la Figura 10 y 11 comportan intrínsecamente revisiones cíclicas y deductivas, donde se triangulan y discuten los desacuerdos de la categorización hasta establecer un consenso.

Ahora bien, una vez categorizado el tipo de justificación de los participantes para cada contexto, se lleva a cabo un análisis estadístico correlacionando los resultados de la categorización con el ICM individual calculado mediante la aplicación del Test TEMA 3 de Ginsburg y Baroody (2003). Dicho análisis se ha desarrollado por AOResearch, aplicando la ley orgánica 15/1999 de Protección de Datos y de acuerdo con las buenas prácticas biométricas. Se puede consultar en el diagrama de la Figura 12 los test aplicados (paramétricos y no paramétricos) de acuerdo al tipo de variable (categóricas o continuas).

Figura 12

Diagrama de flujo donde se muestran el análisis estadístico desarrollado

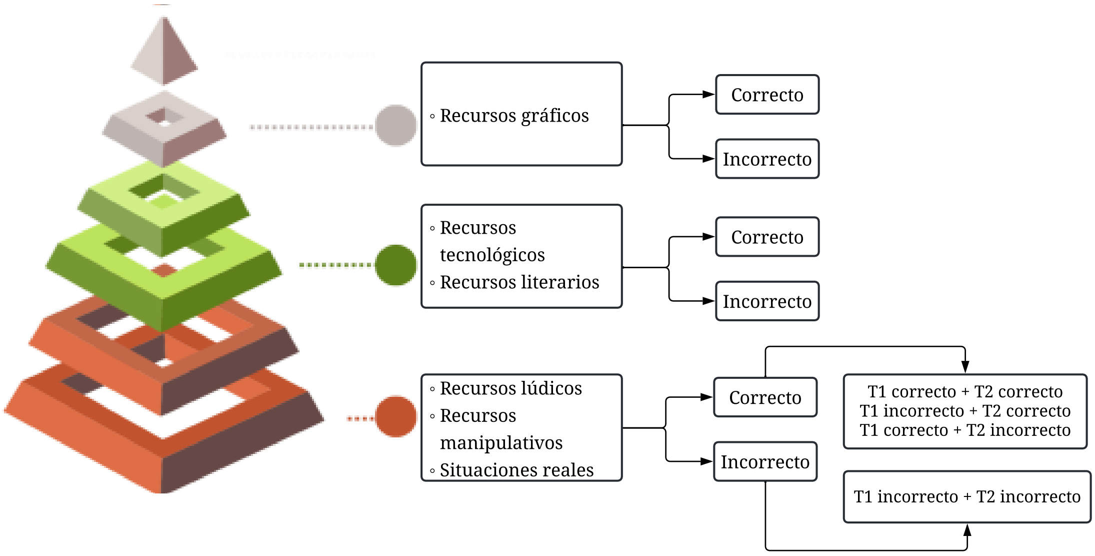


Fuente: Elaboración propia

Las representaciones de los escolares en formato dibujo se han categorizado, durante el segundo y tercer ciclo de iteración, siguiendo el diagrama que se muestra en la Figura 13. Para ello, se considera la categoría “correcto” cuando la representación no presenta errores e “incorrecto” cuando la producción presenta error en su estructura (ver ejemplo en la Tabla 4). En esta línea, con la intención de eliminar el sesgo que genera una presencia jerarquizada de propuestas de acuerdo con el modelo que plantea el EIEM, en el nivel informal se tienen en cuenta dos criterios en relación con la categorización de “correcto”. O sea, se considera que en un contexto de enseñanza el niño representa de manera correcta la seriación, cuando las dos propuestas desarrolladas en aquel contexto no presentan errores y también cuando una representación no presenta errores y la otra sí.

Figura 13

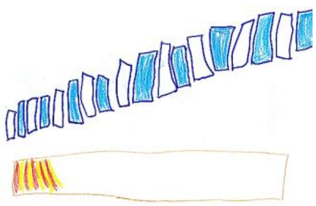
Categorización de las representaciones en formato dibujo de los participantes



Fuente: Elaboración propia

Tabla 4

Ejemplos de representaciones correctas e incorrectas

Representación correcta	Representación incorrecta
	

En función de la categorización obtenida, se realiza un análisis estadístico de la siguiente manera:

- Las variables categóricas han estado descritas según el número y el porcentaje de casos de cada categoría.
- Las variables continuas han estado descritas mediante estadísticos de tendencia central como la mediana y la desviación estándar.
- El análisis bivariable se ha realizado mediante tablas de datos cruzadas.
- La inferencia estadística se ha trabajado con un nivel de confianza del 95%. Previo a cualquier inferencia se ha utilizado el test de Kolmogorov-Smirnov para evaluar la distribución de las variables. Según los

resultados del test se han utilizado test paramétricos (chi cuadrado, T-Student, etc.) o no paramétricos (Exacto de Fisher, Mann-Whitney, etc.).

Finalmente, en consonancia con los objetivos específicos que se presentan en esta Tesis Doctoral, y en el marco de microanálisis transversales y longitudinales, se vincula en la Tabla 5 los estudios que configuran el cuerpo del compendio con los objetivos específicos presentados en el capítulo I:

OE 1. Diseñar, validar e implementar una trayectoria de aprendizaje y un itinerario de enseñanza sobre patrones de repetición para niños de educación infantil contemplando tanto contextos concretos como abstractos.

OE 2. Evidenciar la influencia que ejerce el contexto de enseñanza en la comprensión, justificación y representación de patrones de repetición.

OE 3. Determinar las habilidades para hacer patrones que se movilizan durante la enseñanza de patrones de repetición, y la relación que se establece entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional.

OE 4. Elaborar orientaciones teóricas y metodológicas que permitan avanzar en la implementación de tareas con patrones de repetición e iniciar el desarrollo temprano del pensamiento algebraico.

Tabla 5

Vinculación de los estudios desarrollados con los objetivos específicos (OE) de la Tesis

Estudio	OE 1	OE 2	OE 3	OE 4	Objetivos del estudio	Edad	Nivel del EIEM	Tipo de investigación
A	x				• Diseñar y aplicar una trayectoria de aprendizaje de patrones y un itinerario de enseñanza con niños de entre tres y cuatro años.	3 años	Informal, Intermedio y Formal	DBR
B (en revisión)	x	x	x		• Diseñar, validar e implementar un itinerario de enseñanza para patrones de repetición que contempla tres niveles: a) nivel informal (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos), b) nivel intermedio (recursos literarios y tecnológicos); y c) recursos gráficos. • Analizar, por un lado, el efecto de dicha enseñanza en cada contexto; y, por otro lado, los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal.	4 años	Informal, Intermedio y Formal	Método mixto
C		x			• Analizar la relación que se establece entre la comprensión y la representación de patrones de repetición. • Evidenciar la influencia que ejerce el contexto de enseñanza en el éxito de la representación de patrones de repetición.	4-6 años	Informal vs. Forrmal	Cualitativa
D (en revisión)		x			• Analizar la comprensión de los patrones de repetición a través de su representación, en el marco de una enseñanza asistida mediante el uso de recursos tecnológicos (robots programables y juegos en línea), de manera longitudinal durante tres años de intervención con 24 alumnos de educación infantil (3, 4 y 5 años). • Describir el tipo de justificación que utilizan los niños de 3, 4 y 5 años para evidenciar la comprensión de la enseñanza de patrones de repetición en contextos tecnológicos.	3-6 años	Intermedio	Método mixto
E			x		• Determinar la presencia de tareas con patrones de repetición en cinco proyectos editoriales para niños españoles de 3, 4 y 5 años. • Evidenciar las habilidades para hacer patrones que se movilizan durante la enseñanza de patrones de repetición en los libros de texto analizados.	3-5 años	Formal	Cualitativa de carácter exploratoria-descriptiva
F	x		x	x	• Ofrecer estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones en educación infantil.	3-5 años	Informal	Innovación didáctica

De acuerdo con la información que se muestra en la Tabla 5, es importante comentar que los datos que se derivan de esta Tesis "no pretenden generalizar intrínsecamente los hallazgos a universos más grandes" (Hernández et al., 2010, p. 16), sino ser una vía de inspiración y que estas referencias reales guíen la acción futura mediante la reflexión (Radford y Sabena, 2015) para de esta manera avanzar en los inicios del desarrollo del pensamiento algebraico.

3.3.4. Fase 4: Rediseño

La fase de rediseño se desarrolla en el marco de un proceso de reflexión sobre la práctica desarrollado tras cada sesión. La participación activa de la investigadora principal, la maestra tutora y el director de Tesis han favorecido la articulación de ciclos iterativos de reflexión y análisis continuos y retrospectivos que informan sobre el diseño y facilitan su mejora, consiguiendo, como sostiene Plom (2010), un equilibrio entre lo pretendido y lo logrado. En este sentido, las aportaciones de las tres partes implicadas, conjuntamente con los resultados cualitativos y cuantitativos obtenidos, fruto del análisis anteriormente descrito, y la literatura que acompaña la investigación, permiten triangular y calibrar el diseño tanto de manera transversal (entre contextos) como longitudinal (entre edades). Este hecho proporciona las condiciones idóneas para reajustar el diseño de la intervención con la finalidad de ofrecer orientaciones metodológicas y didácticas que emergen de la teoría en contacto con la práctica.

CAPÍTULO IV: ARTÍCULOS DEL COMPENDIO

El capítulo presenta el cuerpo de estudios publicados durante el desarrollo de la Tesis Doctoral.

A Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood, 45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

B Acosta, Y., y Alsina, Á. (en revisión). Modos de pensamiento algebraico en la educación infantil desde el contexto de patrones de repetición.

C Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad, 17*(2), 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

D Acosta, Y., Alsina, Á., y Pincheira, N. (en revisión). Computational Thinking and Repetition Patterns in Early Childhood Education: Longitudinal Analysis of Representation and Justification.

E Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

F Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 11*(2), 1-37. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37

ESTUDIO A

Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary

Australasian Journal of Early Childhood, *45*(1), 14-29

Received: 19 February 2019/ Accepted: 28 August 2019/ Published: 02 January 2020

Australasian Journal of Early Childhood
AJEC

Article

Australasian Journal of Early Childhood
2020, Vol. 45(1) 14–29

DOI: 10.1177/1836939119885310
journals.sagepub.com/home/aec
SAGE

Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary

Yeni Acosta Inchaustegui
University of Girona, Spain

Ángel Alsina
University of Girona, Spain

Abstract
The mathematics curricula of countries such as the United States, Singapore, Australia and New Zealand have started to incorporate the teaching of algebra in early childhood education. From this perspective, our study has two objectives: (a) to design a learning trajectory and teaching itinerary introducing patterns for children between the ages of three and four years old; and (b) to apply the previously validated learning trajectory and teaching itinerary to a group of 24 children between three and four years old from Spain. The results obtained through a design-based research methodology indicate that children recognize and represent seriations that follow a simple pattern in different teaching contexts. It is concluded that the trajectory and itinerary empower a specialized educational intervention to promote the initiation of algebraic thinking in early childhood education.

Keywords
Early childhood mathematics education, algebraic thinking, patterns, learning trajectory, educational itinerary

Introduction

During early childhood, children start to become aware of the effects of their actions: for example, from birth onwards they smile, cry, cry out and even produce suggestive and/or sequential sounds in order to attract the adult's attention or gain their recognition. Different researchers on human behaviour agree that babies

Corresponding author:
Yeni Acosta Inchaustegui, University of Girona, Pujada de Sant Domènec, 9, Girona 17004, Catalonia, Spain.
Email: yeni.acosta@udg.edu

develop early forms of social understanding that enable them to produce intentional communicative signs and to interpret the importance of the social signs, as well as actions and events in their environment long before they are able to speak (Ninio & Snow, 2018). For Mason, these actions are "the moments in which the child develops control over their faculties by developing their awareness (as the capacity to act), through generalisation" (Mason, 2011, p. 567), which this same author defines as the process that enables us to pass from the particular to the general, from the concrete to the abstract, and to be able to identify specific issues in general matters. In this regard, generalizing is considered to be an innate human activity that small children carry out naturally in the school setting. Papic, Mulligan and Mitchelmore (2011) indicate that it is precisely through generalization that the development of algebraic thinking begins. From this perspective, our study is part of the research that analyses the teaching/learning process of mathematics in early childhood. Therefore, our research is based, on the one hand, on the construction and organization of mathematical knowledge, emphasizing the structuring of algebraic contents in reference to patterns; and, on the other hand, in the pedagogical analysis of the different teaching contexts and teaching resources to facilitate mathematical literacy. Our purpose is consistent with the agendas and fields of research in mathematical education described by Llinares (2008) based on the work done in Spain. These works have been published in journals that appear in the register of the "ISI-web of Knowledge" and the "European Reference Index for the Humanities" (ERIH) of the European Science Foundation, and that Alsina (2019a) has recently adapted to the specific case of research in the mathematical education of babies. In light of the above, our study focuses on the learning of patterns at early ages, since this aspect has received little analysis in the context of preschool mathematics education research (Clements & Sarama, 2009; McGarvey, 2012). Specifically, our aim is to design and apply a learning trajectory of patterns and a teaching itinerary with children aged between three and four.

Algebraic thinking and patterns in preschool education

Over recent decades, algebra has been introduced with rigour into early years curricula in line with the new pre-algebra and early-algebra approaches, since it is considered to offer an access route into more advanced mathematics. While the "pre-algebra" approach aims to facilitate the transition between arithmetic and algebra in the final stages of Primary Education and Secondary Education, the "early-algebra" approach had wider goals and aims to introduce modes of algebraic thinking from the first years of schooling (Lee, Collins, & Melton, 2016; Papic et al., 2011).

Early algebraic thinking is developed through awareness of the structural relations of patterns and later in the structure of arithmetic (Kaput, 2008). Papic (2015) claims that patterns provide a base which is essential for developing algebraic thinking and which contributes to the general development of mathematical representation and abstraction. Patterns are therefore more than mere content, since they are configured as a process, a study skill and a mental habit, given that creating patterns involves looking for mathematical regularities and structures (Clements & Sarama, 2009). Moreover, the exposition of a variety of patterns that enable the creation of seriations in different contexts, which is to say sequences in which a certain pattern or unit of repetition that increases or decreases is repeated *n* times, generally in a regular manner (Alsina, 2006); alongside the role of the teacher, are specific components in the action of generalizing and developing algebraic thinking. Nevertheless, Clements and Sarama (2009) argue that there is still not enough research and professional commitment to support, articulate and implement a mathematics curriculum for early years that provides a specific model for early algebra learning, despite the recognition that patterns provide the basis for the start of algebraic representation.

In spite of this, over recent years the results of these studies have started to be reflected in early childhood mathematics curricula in different countries. In the United States, for example, the National Council of Teachers of Mathematics (2006) establishes the focal points around which the processes for teaching and learning algebra should be centred from approximately three to six years old. These points focus on: ordering and classifying objects, taking into account specific properties; recognizing and extending aural and numerical patterns; and analysing the behavior of patterns using specific pictorial and verbal representations; among other aspects. In Nurturing Early Learners, the revised version of the current curriculum of the Ministry of Education of Singapore, one of the established objectives for students between four and six years old is "to recognise and use relations and simple patterns" (Ministry of Education, Republic of Singapore, 2013, p. 22). In Australia, the Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2015) advocates the development of number sense, order, sequencing, patterns and positions, making use of the student's context. Specifically, in relation to algebra and patterns, it suggests that four-year-old students should order and classify familiar objects, explaining the reason for the classification carried out, copying, creating and extending patterns with objects, drawings or manipulable material, as well as strengthening their capacity to observe and identify natural patterns found in their environment. Finally, in New Zealand, one of the growing interests and abilities of small children set out in the Te Whāriki-Early Childhood Curriculum (Ministry of Education, New Zealand Government, 2017) is precisely that of being able to recognize a wide range of patterns and regularities in the environment that prompt them to explore, discover and evaluate everything they find of interest.

We base our approach to the learning of patterns in three-year-old children on the learning trajectory proposals, which offer descriptions or well-founded strategies that promote the development of student thinking on a range of specific mathematical issues (Daro, Mosher, & Corcoran, 2011). Clements and Sarama indicate that learning trajectories are "descriptions of children's thinking and learning in a specific mathematical domain, and a conjectured pathway made up of a set of educational tasks designed to engender mental processes or hypothetical actions [. . .]" (Clements & Sarama, 2004, p. 83). Subsequently, they propose the construction of learning trajectories that describe learning goals, the thinking and learning processes of children at different levels, and learning activities in which they could participate (Clements & Sarama, 2015).

Following the learning trajectories approach, we consider that the teaching of patterns should be conceived of as a pathway that leads from the specific to the abstract, through teaching itineraries that take into account different teaching/learning contexts (Alsina, 2015, 2019b). In particular, according to Alsina (2019b), we understand by "itinerary" an intentional teaching sequence that contemplates three phases: (a) teaching in informal contexts (situations in the immediate environment of the children, or manipulative materials and games); (b) teaching in intermediate contexts (stories, songs and technological resources) that act as a bridge between the real contexts and the formal contexts; and (c) teaching in formal contexts (graphic resources, such as pencil and paper) where the teaching of content ends in the conventional representation and formalization of mathematical knowledge.

From this perspective, the teaching sequence of Alsina (2019b) is suggested to promote the process of teaching/learning mathematics at early ages. In the initial stages we find the contexts which should be "consumed" daily: daily life situations, the manipulation of different kinds of material and the use of games and recreational proposals; at intermediate stages, reference is made to the contexts that should be used sometimes, such as literary and technological resources; and finally, at the advanced stage, some contexts appear that should be used occasionally, such as textbooks.

Design of the learning trajectory and teaching itinerary

Our study follows a design-based research method which is basically a qualitative method. This method aims to explore the range of innovations created in the educational field, in order to understand the relations established between theory, the artefacts designed and practice, in order to contribute towards teaching and learning theories (Design-Based Research Collective, 2003).

The flow diagram in Figure 1 shows the methodological process which frames our study, in line with the perspective of the Design-Based Research Collective (2003) and Reeves (2006).

From this perspective, the design and application of a learning trajectory and teaching itinerary has included the following phases: (a) review of the theoretical background; (b) analysis of the current legislation on algebra in general and on patterns, particularly in preschool education; (c) construction of the pilot version of the learning trajectory and teaching itinerary; (d) review on the basis of expert judgement; (e) application in a real classroom context; and (f) obtaining of the definitive version of the learning trajectory and teaching itinerary.

Construction of the pilot version of the learning trajectory and the teaching itinerary for children between the ages of three and four

The learning trajectory designed includes two sections:

1. Learner progression: (a) recognition of patterns present in daily life situations and games; (b) simple seriations with different material, alternating colours, shapes and sizes; and (c) reading and representing simple patterns (AB).
2. Objectives: identify simple patterns (AB); start to construct seriations that follow a simple pattern; anticipate actions by identifying specific

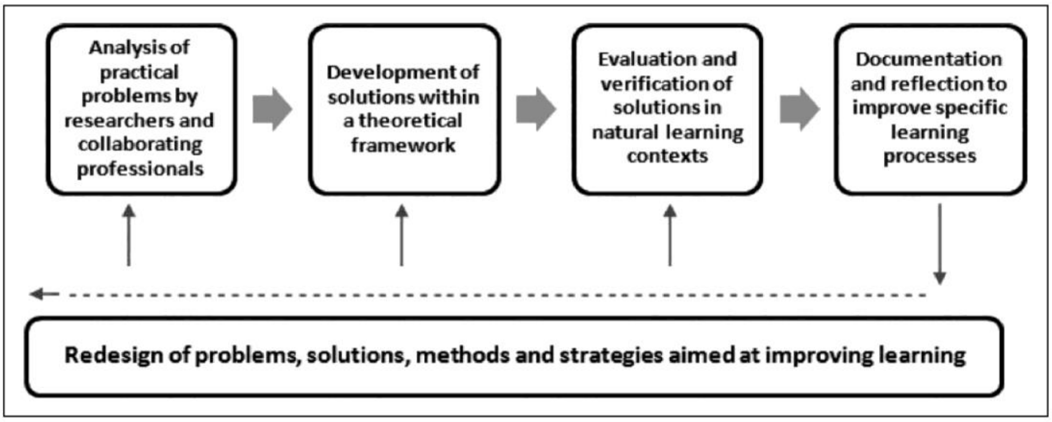


Figure 1. Flow diagram showing the design-based research methodological approach framing the study.

sequences; and read and represent the pattern (AB).

A teaching itinerary has been designed on the basis of this trajectory, comprising nine proposals organized according to the three levels indicated, based on the teaching sequence proposed by Alsina (2019b): (a) six proposals in daily life contexts, manipulative materials or games; (b) two proposals using literary or technological resources; and (c) a proposal with graphic resources.

Validation through expert judgement

The initial trajectory and itinerary have been validated by six experts in childhood mathematics education from Spain and Chile. Specifically, the experts have been asked to analyse the following aspects: (a) degree of correspondence, to assess the configuration; (b) formulation, to assess the language used; and (c) relevance, to assess the process of teaching/learning patterns in children three to four years old.

The following components of Miles and Huberman (1994) have been used in the analysis:

1. Data reduction: in order to reduce information and facilitate its interpretation, categories have been elaborated to help identify the contributions and proposals made by the experts in a concise way. The raw data were used to obtain the different categories and different classifications carried out using the ATLAS.ti computer program that helped assign initial categories that were then refined up to the point of obtaining the definitive categories.
2. Data layout: the reduced data and resulting categories were used to analyse the contributions offered by the experts in order to extract conclusions.
3. Elaboration and verification of conclusions: similarities and differences were sought between the data obtained, with the conclusions and modifications that emerged being contrasted in light of the previous literature.

Tables 1 and 2 show the data obtained. During the process of analysing and selecting the evidence of each category, a condensation phenomenon is observed, which is to say that different expert contributions repeat the same idea. As a result, only the most representative evidence of each category has been selected. Evidence has been coded, assigning a number to each expert.

In line with the data in Table 1, the expert contributions have helped to enrich the itinerary

Table 1. Degree of correspondence.

Categorization	Evidence
Modification of images	E.3: "The trees (the pattern) cannot be seen clearly in the images; there are many elements that will distract the student's attention".
	E.5: "The images of the bushes do not show an AB pattern clearly".
Introduction of new proposals and/or variations	E.2: "The example of the zebra crossing could be considered to be a repetition of one single element (the white), with a specific distance. There's no reason to say it should be seen as a 2-part longitudinal pattern of white and black".
	E.4: "I think that other objectives could be set [in the activity of the graphic resource]. I think the proposal is "richer" and the objective is a bit poor".
Deferral of proposals until higher levels	E.6: "I think the Pattern Block proposal is more suitable for children over 4".
	E.5: "For students upwards of three years old, I would choose a story already known by the target group to facilitate the objective of the proposal".

Table 2. Relevance.

Categorization	Evidence
Suitability of the teaching itinerary proposals	E.1: "Full account is taken of all the important aspects, daily life contexts, the need for manipulative materials, the importance of dialogue with the children and of asking them good questions . . . " E.2: "I think it's suitable, but I'm not sure about when they go from patterns and seriations of objects to patterns and seriations of actions. I think this change could generate some cognitive difficulties".

Table 3. Formulation.

Categorization	Evidence
Language used	E.6: "I think it's a bit too soon to introduce the concept of pattern in the first activity". E.4: "I think that the language is perfectly understandable, the proposals of the teaching itinerary also relate to a large number of experiences relating to daily life situations and manipulative resources".

and to include the following aspects: (a) some images have been modified to show patterns in the environment, since some contained elements that could lead to confusion; (b) some proposals have been introduced with recycled material; (c) the activity with the "Pattern Block" material has been deferred until a later stage since the experts considered it to be more suitable for older children; (d) one of the proposals using play-based resources has been modified, changing the word game suggested for a simpler one; (e) the tale has been changed since it included many characters and has been replaced with a simpler one which is already known by the students; (f) a column has been added to the activity with technological resources as a starting point for programmable robots, to help the students move the robot bees correctly following the pattern programmed to achieve the challenge set; and (g) the objective of the proposals using the graphic resource has been modified, emphasizing the mathematical process present.

In line with the evidence shown in Table 3 , the experts have considered the use of vocabulary appropriate, thus endorsing the rigour and coherence of the proposals. Equally, the early use of the concept of "pattern" has been reconsidered, with the intention now being to introduce it in the third session or fourth session.

Regarding relevance, as shown in Table 2, suggestions have emphasized the need to pay special attention to patterns with objects and patterns established in actions to avoid generating conflicts that could interfere with the children's understanding of the concept of "seriation". Finally, the experts have valued the recommendation of a play-based methodology, in which observation and documentation of students' actions is the ultimate key during the application of the learning trajectory and teaching itinerary.

The experts' contributions have helped to modify the teaching itinerary and to reconfigure it in the following way:

1. Daily life situation: the children are shown two images depicting daily life situations (a pedestrian crossing in one session and a landscaping scene following the AB pattern in the other) and they are asked to represent the seriation they see.

2. Manipulative resources: different manipulative resources are placed in reach of the students (polycubes in one session and egg cartons with plastic lids in another), with the intention being for them to construct simple seriations by freely manipulating the material offered.
3. Play-based resources: two games are used to promote students' capacity to anticipate by internalizing the sequence present in both play-based resources.
4. Literary resources: the aim is for students to identify the temporal sequence of the story: "La ratita presumida" ("The vain little mouse"), and to be able to predict what will happen next in the story.
5. Technological resources: students are invited to enter the correct sequenced commands into Bee-Bots in order to achieve the challenge set.
6. Graphic resources: students represent the Bee-Bots route using the stamping technique after watching a video showing the actions carried out in the previous session.

It is important to note that each proposal indicates the objectives, contents, materials, a description of the experience and the questions to be asked. Due to space limitations, one single proposal is shown as an example (see Appendix).

Application of the learning trajectory and teaching itinerary for the teaching of patterns

Participants

The study has been carried out with a group of 24 students (12 boys and 12 girls) of children aged three to four years old in a state school in Girona, Spain. The average age of the group is three years and eight months old. In general, they present optimum maturation levels in line with their developmental age. This group has been selected for reasons of accessibility and given the kind of methodologies applied in the classrooms, which are mainly based on project work (daily life situations), the use of manipulative materials and games.

The qualitative data collection procedure has been carried out through field notes, through the observation of participants, and through the audio-visual and photographic recording of all the interventions.

Ethical considerations

Before initiating the field work, and from a framework of clarity and transparency, the families were informed of the following aspects: purpose of the research; objectives; temporality; and procedure and requirement of the audio-visual and photographic recordings of the sessions. In this way the informed consent and approval of all the families involved in the study were obtained. In the same manner before starting each proposal, students were asked if they wanted to participate in the activities. At all times the rights of the participants have been respected and they have been considered as protagonists of the teaching-learning process from an inclusive perspective.

Findings

The most relevant evidence is presented below (see Table 4 and Figures 2 and 3 4), categorized in accordance with the technique that has enabled us to collect information related to student learning and teaching practice.

The observation carried out reveals the need to prioritize a semi-directed format accompanied by good questions that help achieve the objective of the proposal.

In the transcription of Table 5 we can see the teacher asking a question about the shape

Table 4. Session 1: pedestrian crossing.

OP AR PR	Teacher: If we now have a black strip, a white one and a black one, which strip will we put after?
	Student 1: A white and then a black and then another white and after a white.
	Student 2: No, after another black.
	Teacher: And why will we put a white one after the black one?
	Student 3: To make the zebra crossing right.
FN AR	Reflections are carried out after the sessions and the following conclusions are reached: "with the first group (A), the instructions given were not as clear as with the second group (B) and this affected the way they carried out the seriation".

Note: OP, observation of the participants; AR, audio-visual recordings; PR, photographic recordings; and FN, field notes.

Figure 2. Photographic evidence captured during session 1.

and using notions such as "big" and "small", when the real objective is to talk about the height of the tree (high–low). This fact helped to add to the itinerary the specific need to use precise mathematical language adapted to the students' level.

Tables 6 and 7 and the photographic evidence in Figure 6 show that it is necessary for the teacher to act in a way that prompts awareness through planning and structuring the space and material, in order to generate specific actions in an indirect way. In this

Figure 3. Photographic evidence captured during session 1.

Table 5. Session 2: landscaping of a road.

OP AR	Teacher: What are the trees in the photo like?
	Student 1: Like in autumn.
	Teacher: But what are they like, what shape are they?
	Student: Triangular.
	Teacher: And what's this one like? – pointing to a tree in the photograph.
	Everyone: Small.
	Teacher: Look what we have here – showing the inside of a wooden box.
	Student 2: They're pieces!
	Teacher: And if we want to make a big tree and a small one with these pieces, how can we do it?
	Student 1: We can stick them.
	Teacher: One-piece, which tree would it represent?
	Student 3: The big one.
	Teacher: This would be the big one?
	Student 1: No. The small one.
	Teacher: Good. This would be the small one. But how do we make the big one?
	Student 4: With a lot.
	Teacher: If we now have a small tree, a big tree, which will we put here now?
	Everyone: A small one!

Note: OP, observation of the participants; and AR, audio-visual recordings.

Table 6. Session 3: let's play with recycled material.

OP	Teacher: What are the lids like?
AR	Student 1: Round.
	Teacher: Are they all the same?
	Student 2: No, there are blue ones and green ones.
	Teacher: What can we do with the lids and the egg cartons?
	Student 4: Put them inside.
	Teacher: Which ones will we put in?
	Student 1: One of one colour and another of another colour.
	Teacher: You help me and I'll put the ones you tell me, ok?
	Student 1: White, blue . . .
	Teacher: Which goes next?
	Everyone: White.
	Teacher: Very good.

Note: OP, observation of the participants; AR, audio-visual recordings.

Figure 4. Photographic evidence captured during session 3.

Figure 5. Photographic evidence captured during session 3.

Table 7. Session 4: Multilink.

FN	Student 1: A tower! Now touch the green one.
OP	Teacher: Why touch the green one?
PR	Student 1: Because it is green, orange, green, orange . . .
	Teacher: But instead of an orange piece you've put a yellow one.
	Student 1: Yes, there are no more orange ones.
FN OP	Some students only add pieces of one single colour to their construction while others alternate them following an AB pattern. It is important to point out that with the first half group the mixed pieces contained up to five or six different colours. With the second half group a decision was taken to leave only two colours mixed in pairs. This new organization and availability of material led to more specific seriations.

Note: FN, field notes; OP, observation of the participants; and PR, photographic recordings.

sense, organizational strategies are introduced in the teaching itinerary when offering the material; for example, the idea of grouping the polycubes into two colours is suggested so that the variety of qualitative aspects in the collection does not detract from achieving the objective set. In this way, directed activities in which students are not

Figure 6. Photographic evidence captured during session 4.

Table 8. Session 5: train game.

OP AR PR	Teacher: The train has reached the station. Which passenger would like to get on? Student 1: Me! Teacher: Which object do you need to get on the train with? Student 1: With a cap. Teacher: Very good. But why with a cap and not a tale? Student 2: Because there's a tale, a cap, a tale, a hat, a tale, a hat, a tale . . . and now it's the cap's turn.
FN OP PR	A highly cooperative way of working has been established among the students, since the ones who choose the incorrect element are helped by the others. Once the train has been made, the students leave the element in a corner of the room, but in the second half group a student suggested creating a train on the floor together using the elements. This opportunity was taken up and helped to consolidate and represent the seriation used following an AB pattern.

Note: OP, observation of the participants; AR, audio-visual recordings; PR, photographic recordings; and FN, field notes.

the main protagonists or cannot take the initiative are avoided.

On this occasion, it was deemed a good idea to include the spontaneous proposal of the students to represent the train on the floor in the teaching itinerary (see Table 8 and Figures 7–9).

Figure 7. Photographic evidence captured during session 5.

Figure 8. Photographic evidence captured during session 5.

Figure 9. Photographic evidence captured during session 5.

Table 9 shows the degree of difficulty of the activity, while also showing the students' ability to follow guidelines with a specific sequence. It is also interesting to note how the students spontaneously transfer the game dynamic to another educational moment and how they are able to remember the rules, distribute roles and follow the game sequence autonomously.

Table 9. Session 6: game of statues.

FN	It was difficult for the children to respect the rules given, but as the game progressed they gradually internalized the temporal sequence of the pattern (quiet like a statue–walk–quiet like a statue–walk), carrying it out correctly.
FN	During playtime, a small group of students played statues: Student 1: Shall we play statues? Student 2: I'm 'It'. Student 3: We're statues. Student 1: You're not allowed to move. Student 2: If you move, you lose. Student 1: You don't lose, you start again. Student 4: First you stop, then you look, you stop, you look, and if anyone moves, you start again.

Note: FN, field notes.

On the basis of the data observed, it was deemed appropriate to include the students' idea of representing a sequence of the tale in the teaching itinerary, since this provided a good strategy for inviting the group to anticipate events and actions (see Table 10 and Figure 10 and 11).

The transcriptions included in Tables 11 and 12 and the photographic evidence in Figures 12–14 show how good questions foster mathematical processes related to reasoning, communication, conflict resolution and representation, thus reaffirming the imperative need of the "development questions" section of the teaching itinerary.

Table 10. Session 7: children's tale "La ratita presumida" ("The vain little mouse").

OP AR	Teacher: All the animals went to the wedding of the little mouse and the cat. Who was the first to ask her to marry them? Student 1: The rooster. Teacher: Let's see, the first, the rooster asked her after the . . . Student 2: The dog. Teacher: Very good. The dog. And after? Everyone: The rooster. (. . .) Teacher: Who came after the little pig? Student 5: The cat. Teacher: Yes. The cat? Student 6: Nooo! Hee Haw, Hee Haw . . . doing the onomatopoeia made by the donkey. Everyone: The donkey!
FN PR	Some students started to play out the anticipated events spontaneously and the teacher used the opportunity to encourage the members of the class to join in.

Note: OP, observation of the participants; AR, audio-visual recordings; FN, field notes; and PR, photographic recordings.

Figure 10. Photographic evidence captured during session 6.

Figure 11. Photographic evidence captured during session 6.

Table 11. Session 8: Bee-Bots.

OP AR	Student 1: The bee stopped at the three flowers!
	Teacher: And how did you manage to do it?
	Student 1: Pressing forward–forward–pause a lot of times.
OP AR	Teacher: How many times do we have to press the "pause" key?
	Student 1: Three times.
	Teacher: And why three times? – asks the teacher –
	Student 1: Because there are one, two and three flowers.

Note: OP, observation of the participants; and AR, audio-visual recordings.

Figure 12. Photographic evidence captured during session 8.

Table 12. Session 9: representing the Bee-Bots route.

OP AR	Teacher: The bees can't remember the route they took to get to the flowers. Can you remember?
	Student 1: Yesss; one, two, pause.
	Teacher: Very good. Two steps forward and pause. And where did the bees pause?
	Everyone: At the flowers.
	(. . .)
	Teacher: We have these two lids to make the route. How can we do it?
	Student 2: Painting, first one and then the other.
	Teacher: Do you like this idea?
	Everyone: Yes!
	Teacher: But what will we mark the two steps forward with?
	Students 3 and 4: With this – showing the lid with the arrow.
	Teacher: Very good. We'll make the two steps with the lid with an arrow, and the pause?
	Everyone: With the flower.
FN	Student 1: One, two, flower, one, two . . . and then a flower.

Note: OP, observation of the participants; AR, audio-visual recordings; and FN, field notes.

Figure 13. Photographic evidence captured during session 9.

Figure 14. Photographic evidence captured during session 9.

Discussion and conclusions

The study carried out has enabled us to define a learning trajectory and didactic pathway for teaching patterns to 3-year-old children. Expert judgement has helped restructure some proposals on the one hand, reinforcing the constructivist and sociocultural profile that characterizes learning trajectories, while also helping to adjust the proposals to the age of the participants.

In line with Rittle-Johnson, Zippert and Boice (2019), we have verified that children first learn how to work with simple (AB) type patterns and then learn how to identify patterns with three and four units. Moreover, we have found that "pattern" is a complicated term for students of three to four years old to take on board. For this reason, greater emphasis is placed on the reading of the seriation and less on the recognition of its unit of repetition. This supports the conclusions drawn by Papic et al. (2011), who also observed that students of this age do not identify the pattern underpinning the seriation without the direct intervention of the teacher. Similarly, in their study, Rittle-Johnson, Fyfe, Loehr and Miller (2015) confirm the need to use instructive explanations to reinforce the abstraction of the pattern and that this fact is shown successfully from four–five years onwards.

On the other hand, the main contribution of the study consists in the description provided of a didactic itinerary for teaching patterns to 3-year-old children which includes different teaching contexts, from more informal settings (recognizing patterns in daily life situations, manipulative materials and games) to more formal contexts (starting to represent patterns), which has significant implications for early years' teachers both in terms of teaching mathematics in general, and in teaching patterns in particular. In this sense, and as argued by Freudenthal (1991) some decades ago, children first learn and understand mathematics at a situational level, which is to say in the context of the situation itself, supported by informal knowledge, common sense and experience, moving gradually on to other levels (referential and general) until reaching the formal level when they begin to work with procedures and conventional notations. Within this framework, Alsina (2019b) highlights that it is important to promote the use of specific contexts which students are already familiar with at early ages, to encourage future processes of abstraction and generalization of patterns.

Furthermore, we have been able to verify that these kinds of activities act as awareness prompts, through the formulation of good questions and grading the vocabulary to the age of the students, while still aiming to promote mathematical language. Precise language encourages the comprehensive assimilation of complex processes (Perry & Dockett, 2008). In this sense, it is important to highlight the role of the teacher as a guide who accompanies and invites students to recognize, transfer and represent patterns in different educational contexts, drawing on good questions and thorough planning, connected to theory and sustained in practice, that help start the students on the road to algebraic thinking. Regarding the limitations of our study, it is important to mention the following three points:, the reduced number of participants means that the results cannot be generalized; the deferred use – through images – of daily life contexts at the first stage of the teaching itinerary may have influenced the children's responses, and we cannot know for certain if they would have been able to identify AB repetition patterns in real situations; and it is also important to point out that the early age of the participants has limited the representation of patterns. Although we observed that many children found it difficult to represent a pattern during the final stage of the itinerary, we have not obtained data on the percentage of success or failure; furthermore, providing a graphic representation in the way suggested would not help to clarify if the children would have been able to carry out other representations in a spontaneous way.

Finally, we share the view expressed by Papic and Mulligan (2007) on the need to carry out further studies to continue exploring the impact on early childhood development caused by the progressive introduction of significant changes in the curriculum that enable the implementation of teaching practices advocating representation, abstraction and the generalization of repetitive and cumulative patterns at early ages. From this viewpoint, the data obtained in this study provide the starting point for the design of a new learning trajectory for the teaching of patterns and a new teaching itinerary for students of four–five years old, in order to continue researching this topic in a longitudinal manner.

Declaration of conflicting interests

The author(s) declared no potential conflicts of interest with respect to the research, authorship, and/or publication of this article.

Funding

The author(s) disclosed receipt of the following financial support for the research, authorship and/or publication of this article: this work has been supported by the Ministry of Education, Culture and Sports of Spain through providing a grant in University Teacher Training (FPU16-01856).

References

Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años: Propuestas didácticas [How to develop mathematical thinking from 0 to 6 years: Didactic proposals.]* Barcelona: Octaedro. [In Spanish.]

Alsina, Á. (2015). Factores clave para una educación matemática infantil de calidad [Key factors for quality math education]. *Aula Infantil*, *79*, 11–14. [In Spanish.]

Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? [Infant maths education in Spain-what is needed?]. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *100*, 85–108. [In Spanish.]

Alsina, Á. (2019b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6–12 años)* [Educational itineraries for the teaching of mathematics (6–12 years). Barcelona: Graó. [In Spanish.]

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. Retrieved from http://v7-5.australiancurriculum.edu.au/Curriculum/Overview

Clements, H. D., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81–89.

Clements, H. D., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Clements, H. D., & Sarama, J. (2015). El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad [Learning and Teaching Mathematics at an Early Age: The Approach to Learning]. Jonesborough, USA: Learning Tools LLC. [In Spanish.]

Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. (2011). Learning trajectories in mathematics education. A Foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction (CPRE Research Report # RR-68). Philadelphia, PA: Consortium for Policy Research in Education Consortium for Policy Research in Education. Retrieved from https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1019&context=cpre_researchreports

Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde “ISI-web of knowledge” y ERIH [Research agendas in mathematics education in Spain: An approach from “ISI-web of knowledge” and ERIH]. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII [Mathematics education research XII]*, (pp. 25–54). Badajoz, Spain: SEIEM. [In Spanish.]

Lee, J., Collins, D., & Melton, J. (2016). What does algebra look like in early childhood? *Childhood Education*, *92*(4), 305–310.

Mason, J. (2011). What makes ‘Algebra’ early? In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 566–568). Berlin, Germany: Springer.

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310–337.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd Ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Ministry of Education, New Zealand Government. (2017). Te Whāriki: Early Childhood Curriculum. Wellington: Ministry of Education. Retrieved from https://education.govt.nz/assets/Documents/Early-Childhood/ELS-Te-Whariki-Early-Childhood-Curriculum-ENG-Web.pdf

Ministry of Education, Republic of Singapore. (2013). Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6. Singapore: Ministry of Education. Retrieved from https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/preschool/files/nel-edu-guide-numeracy.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2006). Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved from https://www2.bc.edu/solomon-friedberg/mt190/nctm-focal-points.pdf

Ninio, A., & Snow, C. E. (2018). Prelinguistic communication and the transition to speech. In A. Ninio (Ed.), *Pragmatic development* (pp. 45–58). New York: Routledge.

Papic, M. M. (2015). An early mathematical patterning assessment: Identifying young Australian Indigenous children’s patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 519–534.

Papic, M. M., & Mulligan, J.T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice: Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*: Vol. *2* (pp. 591–600). Adelaide, Australia: Merga.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers’ mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237–268.

Perry, B., & Dockett, S. (2008). Young children’s access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd Ed., pp. 75–108). New York: Routledge.

Reeves, T. (2006). Design research from a technology perspective. In J. V. D. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 52–66). New York: Routledge.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., & Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, *31*, 101–112.

Rittle-Johnson, B, Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*, *46*, 166–178.

Appendix

1. Daily life situations

Objectives

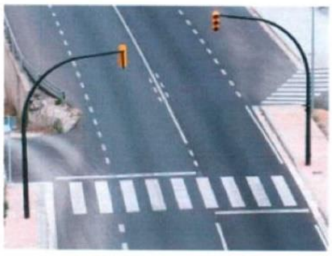
- Identify patterns in daily life situations.
- Create a simple series by identifying patterns.

Content

Observation and recognition of patterns in the environment to create a series.

Material needed

Image of a pedestrian crossing.



Layout of a city.

White transparent strips.

Experience

-Start a dialogue with the whole class about pedestrian crossings.

-Show an image of a pedestrian crossing and ask students to describe what they can see in the image.

-Show the layout of the city and give students manipulative elements (strips) so they can build their own pedestrian crossing following the AB pattern (white-black). The development of the activity should be guided using good questions.

-Encourage the actions carried out during the activity by maintaining a group dialogue.

Development questions

-If we now have a black strip, a white one and a black one, which strip will we place next?

-What colour is the strip that is between two white ones? And the one between two black ones?

-Before a white strip, what colour is the strip?

Activity

Create a simple seriation following the AB pattern (white-black) by observing the daily life situation presented.

Figure A1. Example of a proposal based on a daily life situation.

ESTUDIO B

Modos de pensamiento algebraico en la educación infantil desde el contexto de patrones de repetición

(en revisión)

Recibido: 05 de octubre 2022

MODOS DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LA EDUCACIÓN INFANTIL DESDE EL CONTEXTO DE PATRONES DE REPETICIÓN

Modes of algebraic thinking in Early Childhood Education based on the teaching of repetition pattern

Yeni Acosta[1] Àngel Alsina[2]
yeni.acosta@udg.edu angel.alsina@udg.edu
https://orcid.org/0000-0001-9873-2127[1]
https://orcid.org/0000-0001-8506-1838[2]
Universitat de Girona
Plaza Sant Domènec, 9, 17004, Girona, España.
Teléfono: +34 972 41 87 40

RESUMEN: Se desarrolla una Investigación Basada en el Diseño con 24 escolares de 4 años para diseñar, validar y analizar los efectos de un itinerario de enseñanza de patrones de repetición que contempla situaciones reales, recursos manipulativos, recursos lúdicos, recursos literarios, recursos tecnológicos y recursos gráficos. Para ello se analizan los modos de pensamiento algebraico (recursivo, relacional y funcional) que movilizan ocho escolares en los contextos más concretos del itinerario. Los resultados muestran una diferencia del 22% de éxito entre contextos concretos y abstractos, evidenciándose una presencia mayoritaria de pensamiento recursivo que funcional. Se concluye que la enseñanza de patrones de repetición requiere de un nivel de abstracción que debe ser acompañado y gestionado de manera eficaz para garantizar la transición del pensamiento recursivo al relacional y funcional.

PALABRAS CLAVE: patrones de repetición, itinerario de enseñanza, pensamiento algebraico, pensamiento recursivo, pensamiento relacional, pensamiento funcional.

ABSTRACT: A Design-Based Research is developed with 24 children aged 4 years old in order to design, validate and analyse the effects of a teaching itinerary of repetition patterns that contemplates real situations, manipulative resources, playful resources, literary resources, technological resources and graphic resources. To this end, the modes of algebraic thinking (recursive, relational and functional) mobilised by eight children in the most specific contexts of the itinerary are analysed. The results show a 22% difference in success between concrete and abstract contexts, with a greater presence of recursive than functional thinking. It is concluded that the teaching of repetition patterns requires a level of abstraction that must be accompanied and managed effectively to ensure the transition from recursive to relational and functional thinking.

KEYWORDS: repetition patterns, teaching itinerary, algebraic thinking, recursive thinking, relational thinking, functional thinking.

INTRODUCCIÓN

El álgebra temprana o *Early Algebra* a menudo se describe como una puerta de entrada a las matemáticas superiores y como un cambio de paradigma en la manera de abordar la enseñanza del álgebra (Hunter y Miller, 2022). Esta descripción responde al hecho de que, entre otras cosas, aporta un lenguaje y modos de pensamiento enriquecidos capaces de crear la base con la que se enseñan las matemáticas. Para Godino y Font (2003), el pensamiento algebraico, concebido como la ciencia de los patrones y el orden, es una forma de razonar que supone establecer generalizaciones y regularidades en diversas situaciones matemáticas. Una idea recurrente en la literatura es conceder importancia a la capacidad de distinguir e identificar la estructura (McGarvey, 2012; Mulligan y Mitchelmore, 2013; Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2017). Para Mason et al. (2009, p. 10) las estructuras matemáticas son las "propiedades generales que se ejemplifican en situaciones particulares como relaciones entre elementos o subconjuntos de elementos de un conjunto". En este sentido, coincidimos con Lüken y Kampmann (2018) cuando afirman que identificar y analizar patrones y estructuras juega un papel crucial en el aprendizaje de las matemáticas. Según Taylor-Cox (2003), los patrones son la piedra angular del pensamiento algebraico. Sin embargo, uno de los obstáculos para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico es la tendencia a diseñar tareas que solo promueven el uso del pensamiento recursivo. Esto significa que, en el contexto de tareas con patrones de repetición, los escolares tienden a enfocarse en los elementos sucesivos de una secuencia para poder predecir o extender solo el elemento que sigue de un conjunto de elementos ordenados. Ser capaz de abstraer la estructura de repetición o generalizar una relación recurrente de elementos, continúa siendo un desafío para muchos niños. Precisamente, Tirosh et al. (2017) detectaron que el profesorado de infantil no apuesta por el diseño de tareas que se centren en la estructura de los patrones. Bajo esta mirada, de acuerdo con Twohill (2018), es alarmante pensar que para muchos escolares las habilidades que acompañan el pensamiento algebraico involucionen, en lugar de nutrirse y potenciarse mediante prácticas de aula focalizadas en su desarrollo.

Ante esta problemática, este artículo se centra en la enseñanza de patrones de repetición tomando en consideración, por un lado, la progresión de aprendizaje para patrones de repetición a partir de diversas habilidades, que van desde copiar hasta crear (Acosta et al., 2022b; Pincheira et al.,2022); y, por otro lado, el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), que parte de la base "que el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades se debería llevar a cabo a través de itinerarios de enseñanza, entendiendo por itinerario una secuencia de enseñanza intencionada" (Alsina, 2022, p. 26). En estas secuencias, los contextos y recursos de enseñanza se organizan con base en el principio de abstracción progresiva, iniciando la enseñanza en lo situacional hasta avanzar hacia lo formal. Considerando estos antecedentes, este estudio sobre el pensamiento algebraico en educación infantil se focaliza en la enseñanza de patrones de repetición. Para ello, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué modos de pensamiento algebraico movilizan escolares de 4 años cuando se implementan tareas de enseñanza con patrones de repetición? De esta pregunta emergen los siguientes objetivos:

1) Diseñar, validar e implementar un itinerario de enseñanza para patrones de repetición que contempla tres niveles: a) nivel informal (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos), b) nivel intermedio (recursos literarios y tecnológicos); y c) recursos gráficos.
2) Analizar, por un lado, el efecto de dicha enseñanza en cada contexto; y, por otro lado, los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal.

MARCO TEÓRICO

Para fundamentar teóricamente el estudio, se define el pensamiento algebraico, el papel que ejercen los patrones en el desarrollo de este pensamiento y las habilidades para hacer patrones de repetición y los modos de pensamiento algebraico en educación infantil. Se finaliza con el EIEM (Alsina, 2020, 2022) como apoyo metodológico y didáctico para el diseño de tareas con patrones de repetición.

El pensamiento algebraico incluye formas de pensar que permiten "analizar relaciones entre cantidades, notar estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir" (Kieran, 2004, p. 149). En esta misma línea, Blanton y Kaput (2005) conceptualizan dicho pensamiento como una habilidad mental que permea todas las matemáticas, influyendo en la capacidad de los niños para elaborar conjeturas y justificaciones sobre estructuras y relaciones. Desde esta óptica, autores como Miller et al. (2016) y Rittle-Johnson et al. (2017) consideran la capacidad de identificar regularidades en los patrones como un componente crucial del pensamiento matemático en general y del algebraico en particular. Bajo la influencia de estos autores, en este artículo se define el pensamiento algebraico como un modo de pensamiento multimodal que, mediante la focalización de relaciones y cambio, facilita el análisis, la representación, la justificación y la comprensión de la estructura. En este escenario, los patrones se consideran la puerta de entrada hacia los inicios del pensamiento algebraico y la piedra angular del mismo (Taylor-Cox, 2003). Cuando hablamos de patrón, autores como Bock et al. (2018) sugieren que pueden variar según su regularidad y contenido; y que, de acuerdo a esta afirmación, los patrones pueden presentar unidades que se repiten, que crecen o que se ordenan de manera estructural o simétrica. En nuestro estudio, se adoptan los patrones de repetición, asumiendo que son una secuencia de elementos ordenados de acuerdo a una estructura o unidad replicable determinada que otorga regularidad y previsibilidad (Wijns et al., 2019). Diversos estudios contemporáneos señalan que un desarrollo temprano del patrón y una comprensión de su estructura facilita de manera efectiva el rendimiento matemático y favorece la transición entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional (Dumas et al., 2013; Lüken y Sauzet, 2020; McGarvey, 2012; Miller et al., 2016; Wijns et al., 2019).

Una primera aproximación a la enseñanza de patrones de repetición en educación infantil es a través de patrones simples de dos elementos, donde mediante el emparejamiento de un elemento a la vez, conocido como estrategia de alternancia, los niños pequeños pueden, por ejemplo, copiar un patrón realizando comparaciones constantes entre dos elementos (Collins y Laski, 2015; Fyfe et al., 2015). A partir de los 3 años aproximadamente, el pensamiento recursivo permite a los niños ser capaces de observar la relación entre los elementos consecutivos de una secuencia pudiendo predecir el elemento desconocido que prosigue. De acuerdo con Lüken y Sauzet (2020) y Wijns et al. (2019), pensar recursivamente implica anticipar solo el elemento sucesor (el +1) de una secuencia.
Carpenter et al. (2005) exponen que la introducción del álgebra en las primeras edades contribuye además al desarrollo inicial del pensamiento relacional. El pensamiento relacional o pensamiento centrado en las relaciones se define ampliamente como el proceso de hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y patrones significativos que subyacen a la información (Dumas et al., 2013). Para ser consciente de la estructura que emerge en el patrón de repetición, es necesario centrar la atención en las relaciones que se producen entre los elementos de la unidad de repetición, en lugar de simplemente percibir las características individuales (Lüken y Sauzet, 2020; Miller et al., 2016). De acuerdo con Borriello et al. (2022), las habilidades que centran su atención en la estructura representan una forma de pensamiento relacional, concebido como la capacidad para comparar e identificar semejanzas y diferencias entre elementos y situaciones. Ahora bien,

cuando, desde el contexto de los patrones de repetición, los escolares pueden ver la estructura subyacente a un patrón de dos o tres elementos, es decir, identificar el núcleo o la unidad de repetición, avanzan hacia los inicios del desarrollo del pensamiento funcional (Wijns et al., 2019). Este último se considera como predecesor para comprender estructuras sofisticadas y promover la capacidad de entender cómo varían dos cantidades (Blanton y Kaput, 2011), cuando se inicia, por ejemplo, el trabajo con patrones de crecimiento y posteriormente las funciones en grados posteriores.

Por tanto, el reconocimiento de la unidad de repetición determina un orden de dificultad creciente que está en consonancia con el pensamiento recursivo, relacional y funcional. Lüken y Sauzet, (2020), por ejemplo, plantean que la comprensión de la estructura del patrón, parece ser fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de los escolares, para trascender de un tipo de pensamiento que permite establecer relaciones predictivas entre elementos sucesivos, a otro más sofisticado que promueve la abstracción de la regla subyacente de la seriación (Acosta et al., 2022a). Desde esta perspectiva, Acosta et al. (2022b) y Pincheira et al. (2022) determinan un orden de dificultad creciente a tareas y habilidades para hacer patrones de repetición, con la intención de avanzar hacia la comprensión estructural de dichos patrones. Este orden se toma como la ruta para establecer una trayectoria de aprendizaje de patrones (Acosta y Alsina, en revisión) con la finalidad de secuenciar tareas y habilidades para hacer patrones de repetición desde la vinculación con los modos de pensamiento (recursivo, relacional y funcional) que se incluyen dentro del pensamiento algebraico en educación infantil, estableciendo así una progresión de aprendizaje para patrones de repetición a partir de las siguientes habilidades: 1) copiar, 2) interpolar, 3) extender, 4) abstraer o traducir, 5) reconocer la unidad de repetición y 6) crear (Figura 1).

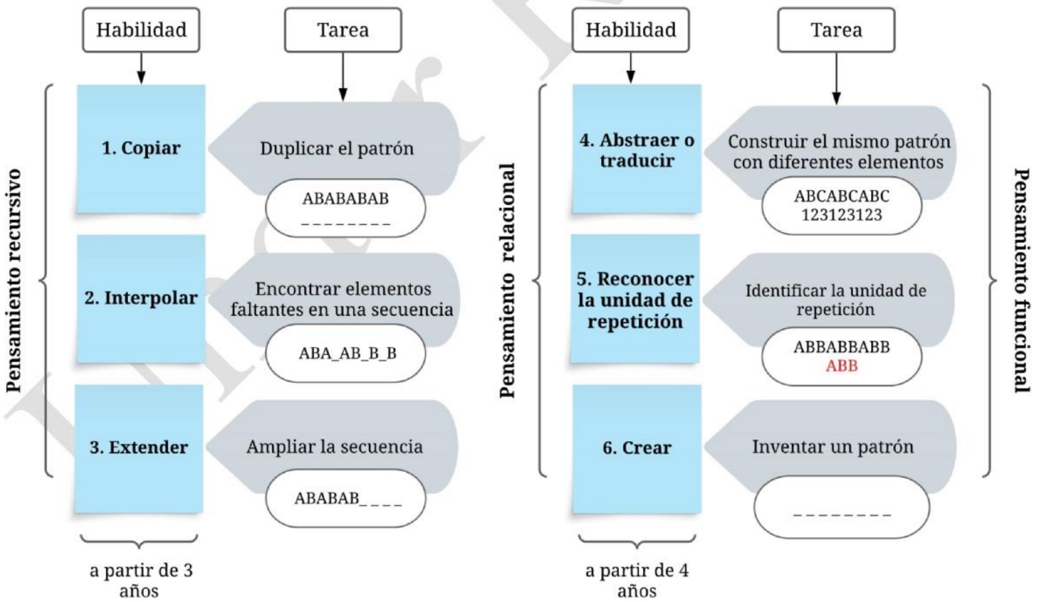


Figura 1. Trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición Fuente: Elaboración propia a partir de Acosta et al. (2022) y Pincheira et al. (2022)

De acuerdo con Rittle-Johnson et al. (2013) las tres primeras habilidades se movilizan en tareas fáciles de resolver; mientras que las tres últimas requieren de la capacidad de dejar de entender el patrón como “una alternancia de dos colores, una sucesión de colores con cierta regularidad" (Lüken, 2018, p. 9) para centrar la mirada en la estructura que lo conforma (Papic et al., 2011).

Ahora bien, ¿cómo se planifica una secuencia de enseñanza que contemple dicha dificultad creciente de manera eficaz? ¿Cómo podemos abordar ciertas habilidades para hacer patrones que requieran de un mayor grado de abstracción desde un contexto cercano al alumnado? Desde esta perspectiva, se asume el EIEM (Alsina, 2020, 2022) como apoyo metodológico y didáctico durante el diseño de tareas con patrones de repetición. Dicho enfoque se compone de tres niveles de enseñanza (Figura 2):

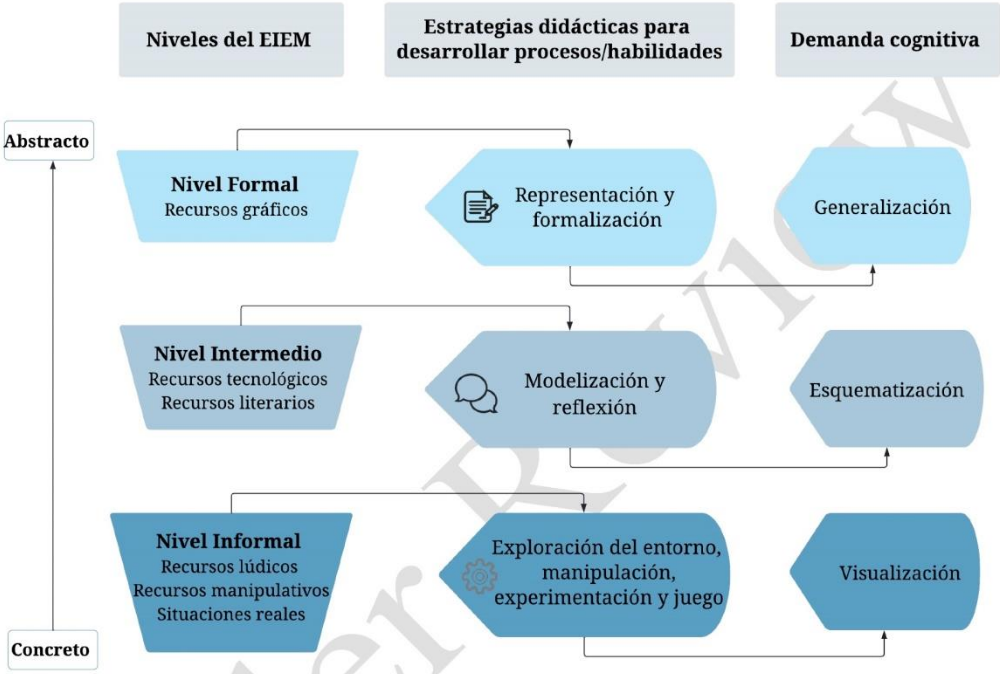


Figura 2. Niveles del EIEM, estrategias didácticas para desarrollar procesos/habilidades y demanda cognitiva (Alsina, 2020, 2022). Fuente: Elaboración propia

Tal como se observa en la Figura 2, los niveles de enseñanza avanzan de lo concreto a lo abstracto, de lo particular a lo general, presentando diferentes tipos de contextos, recursos y estrategias didácticas para desarrollar procesos/habilidades de las que emergen distintas demandas cognitivas. En el nivel informal se encuentran los contextos que se deberían “consumir” diariamente: las situaciones reales, la manipulación de diversos materiales y el uso de juegos y tareas recreativas. En estos contextos, la exploración del entorno, la manipulación, la experimentación y el juego favorecen la visualización de las ideas matemáticas de forma concreta. En los niveles intermedios, se hace alusión a los contextos que deberían usarse algunas veces, como los recursos literarios y tecnológicos. En este caso, a través de la modelización y la reflexión, se conduce a la progresiva esquematización del conocimiento matemático. Finalmente, en el nivel formal, aparecen aquellos contextos que deberían usarse de forma ocasional, como las fichas y los libros de texto. En estos contextos, pues, mediante la representación y la formalización se avanza hacia la generalización. Freudenthal (1991) en sus contribuciones argumentó que la instrucción matemática a menudo carece de éxito porque los alumnos aprenden a proyectar manipulaciones simbólicas abstractas antes de estar capacitados para otorgarles sentido. Décadas más tarde, autores como Reinke y Casto (2022) reivindican que el contexto de la tarea matemática debe ser considerado como un ancla conceptual que proporcione sentido y significancia a las nuevas ideas matemáticas. Bajo esta mirada, consideramos que el EIEM proporciona oportunidades de aprendizaje con apoyo en múltiples contextos que, en el caso de la enseñanza de patrones de repetición, permite avanzar de manera sólida y comprensible hacia habilidades más sofisticadas que requieren reconocimiento de la estructura de manera funcional.

MÉTODO

Este estudio forma parte de una investigación longitudinal de tres años, llevado a cabo con los mismos participantes a la edad de 3, 4 y 5 años. Dicho estudio se enmarca en una investigación basada en el diseño (DBR) con carácter básicamente cualitativo que persigue la comprensión y mejora de la realidad educativa a partir del estudio de la complejidad y singularidad de contextos naturales de aprendizaje (Molina, 2021), apostando por la generación de estrategias que promuevan una mejora de la praxis docente (Bakker, 2019).
En cada ciclo de iteración longitudinal, se realizan microanálisis transversales que nos permiten reajustar el diseño de la intervención. En consonancia con los objetivos que se presentan en este estudio, y en el marco de estos microanálisis transversales, se ha optado por hacer uso del método mixto combinado con la investigación exploratoria. Creswell y Plano Clark (2018) exponen que la fusión de datos cualitativos y cuantitativos permite desarrollar una comprensión holística y matizada del objeto de investigación.

En la Figura 3, se puede apreciar el proceso de iteración desarrollado y las cuatro fases que se han considerado durante cada año de intervención. Nuestro estudio se focaliza en el segundo ciclo de iteración, cuando los participantes cursaban el 2º curso de infantil (4-5 años).

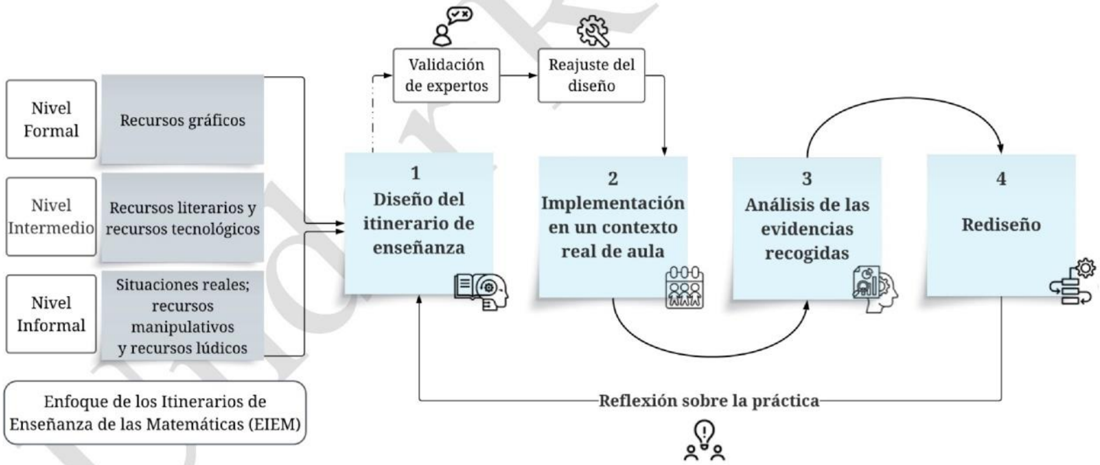


Figura 3. Proceso que enmarca los tres ciclos de iteración del DBR de nuestro estudio longitudinal. Fuente: Elaboración propia

Participantes

La muestra está conformada por 24 alumnos, 12 niños y 12 niñas de un centro público de la provincia de Girona, España, cuya media de edad es de 4 años y 9 meses (DE= 5 meses). Se ha seleccionado este grupo a través de un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal (Fernández et al., 2014), puesto que los criterios de selección han sido determinados por la posibilidad de acceder a este grupo; por la continuidad y seguimiento longitudinal de la maestra tutora; y por estar considerado un centro con baja movilidad de matrícula en cursos de educación infantil.

Cabe señalar que los participantes están familiarizados con los patrones de repetición, ya que durante el primer ciclo de iteración del diseño longitudinal tuvieron la oportunidad de abordar tareas con patrones de repetición del tipo AB (Acosta y Alsina, 2020). Para la realización del trabajo de campo y el registro audiovisual y fotográfico de las sesiones, se obtuvo previamente el consentimiento informado de las familias.

Diseño y procedimiento

El diseño de la intervención se basa en los planteamientos del EIEM (Alsina, 2020, 2022) para diseñar un itinerario de enseñanza de patrones de repetición, la revisión de la literatura y el análisis de currículos internacionales que consideran el abordaje del álgebra desde la educación infantil.

Dicho itinerario consta de 9 tareas enmarcadas en los distintos contextos de enseñanza que conforman el EIEM (Alsina, 2020, 2022). De manera intencionada se incluyen seis tareas para el nivel informal (situaciones reales [SR], recursos manipulativos [RM] y recursos lúdicos [RL]); dos para el nivel intermedio (recursos literarios [RLIT] y recursos tecnológicos [RT]); y una para el nivel formal (recursos gráficos [RG]). Precisamente, una de las orientaciones del EIEM, en sintonía con la literatura sobre educación matemática infantil, es priorizar la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades a partir de contextos informales.

Cada una de las tareas diseñadas se han sometido a un juicio previo de expertos externos, pertenecientes mayoritariamente al Grupo de Trabajo "Investigación en Educación Matemática Infantil" (IEMI), de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), que ha valorado mediante un cuestionario: a) el grado de correspondencia; b) la formulación y el uso del lenguaje matemático; y c) la pertinencia del proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones de repetición para escolares de 4 años.

El análisis de la validación ha considerado las etapas que se contemplan en la Figura 4.

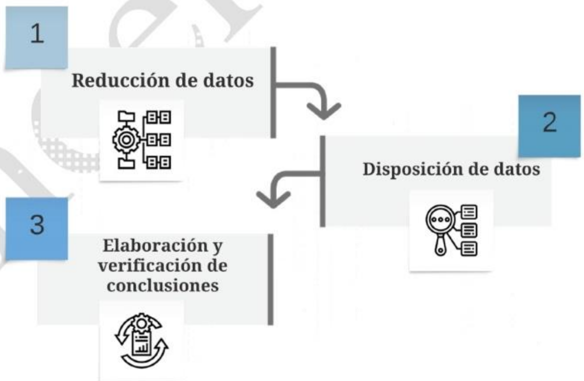


Figura 4. Componentes de análisis según Miles y Huberman (1994). Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la reducción de datos, se han establecido categorías que han permitido sintetizar y agrupar las aportaciones de los expertos. Durante este proceso, a través del programa *Atlas.ti*, se asignan categorías iniciales que se van refinando hasta obtener las categorías definitivas. Una vez reducidos los datos, se analizan las aportaciones de los expertos con el objetivo de extraer conclusiones. Dichas conclusiones, en la etapa de elaboración y verificación, permiten establecer semejanzas y diferencias para contrastar las contribuciones con la literatura de referencia.

La implementación del itinerario validado, se desarrolla durante un total de 18 sesiones presenciales de 50 minutos cada una, puesto que el grupo se divide en dos de manera aleatoria con la intención de ofrecer una atención personalizada e individualizada. Es importante exponer que cada sesión cuenta intrínsecamente con las siguientes fases: I) presentación de la tarea enmarcada en el contexto; II) interacción, exploración y desarrollo de la tarea diseñada, y III) representación y reflexión. En la fase III de cada sesión, los escolares representan el patrón de memoria sin tener el modelo frente a ellos. El objetivo de esta fase es observar y analizar la manera en que los participantes perciben la unidad de repetición y como se inician en la comprensión de la estructura del patrón, siendo capaces de representarlo mediante un dibujo y de explicar lo que han representado.

En la Figura 5 se detallan las técnicas de recogida de información utilizadas.

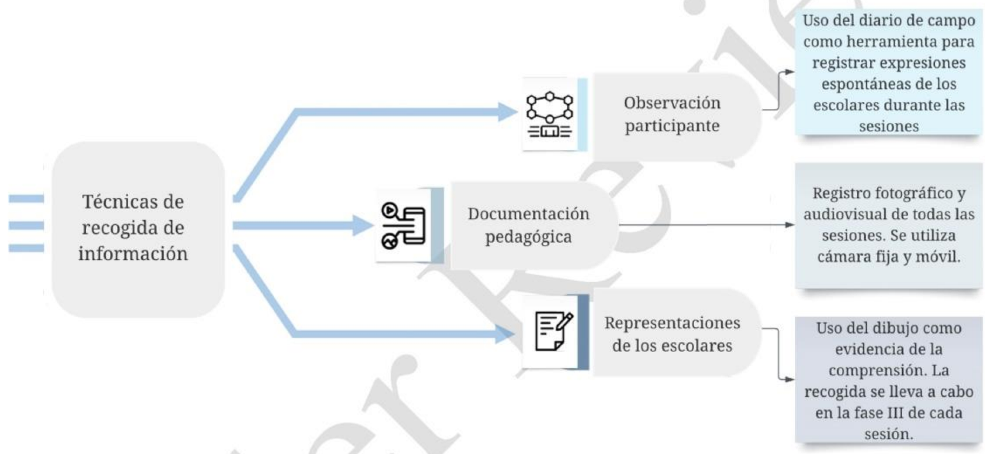


Figura 5. Técnicas que facilitan la recogida de evidencias. Fuente: Elaboración propia

Análisis de los datos tras la implementación

En consonancia con los objetivos del estudio, se lleva a cabo de manera combinada un análisis cuantitativo y cualitativo de los datos obtenidos.

El análisis cuantitativo se realiza mediante estadística descriptiva de las representaciones obtenidas en la fase III. Para ello, se describen las variables categóricas según el porcentaje de casos en cada contexto y se categoriza como “correcto” cuando la representación no presenta errores e “incorrecto” cuando la producción presenta error en su estructura. Con la intención de eliminar el sesgo que genera una presencia jerarquizada de tareas (T1 y T2) en el nivel informal, versus el resto de niveles, se categorizan los resultados del primer nivel, siguiendo el diagrama de la Figura 6.

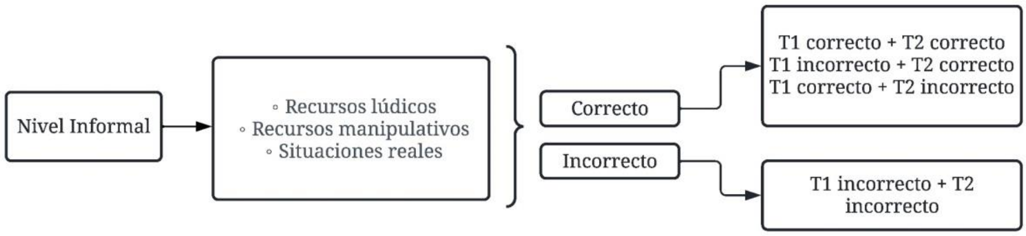


Figura 6. Diagrama de flujo con el proceso de categorización de los resultados obtenidos en el nivel informal

El análisis cualitativo se desarrolla a partir del discurso que utilizan los escolares para centrar o no su atención en la estructura. Para dicho análisis se divide la muestra del estudio mediante un proceso de muestreo estratificado, tomando el Índice de Competencia Matemática (ICM) de los escolares. Este ICM fue obtenido previamente a la intervención a través de la aplicación del test Tema 3 de Ginsburg y Baroody (2003). En la Tabla 1 se muestran los resultados agrupados por intervalos de ICM.

Tabla 1
Frecuencia de escolares en cada intervalo de ICM

Intervalos de ICM	Interpretación según test TEMA 3	$f(x)$
>70	Muy pobre	7
70-79	Pobre	6
80-89	Por debajo de la media	1
90-110	Medio	8
111-120	Por encima de la media	2
121-130	Superior	0
<130	Muy superior	0

De acuerdo con la información de la Tabla 1, se seleccionan los ocho escolares que se ubican dentro del rango 90-110 de ICM y se analizan los modos de pensamiento que movilizan en el nivel informal del EIEM. Para este análisis se toma como referencia la categorización de Lüken (2018) donde se otorga un orden de comprensión jerárquico que avanza de una comprensión básica a una comprensión avanzada de los patrones de repetición. En la Figura 7 se muestra el proceso de categorización realizado.

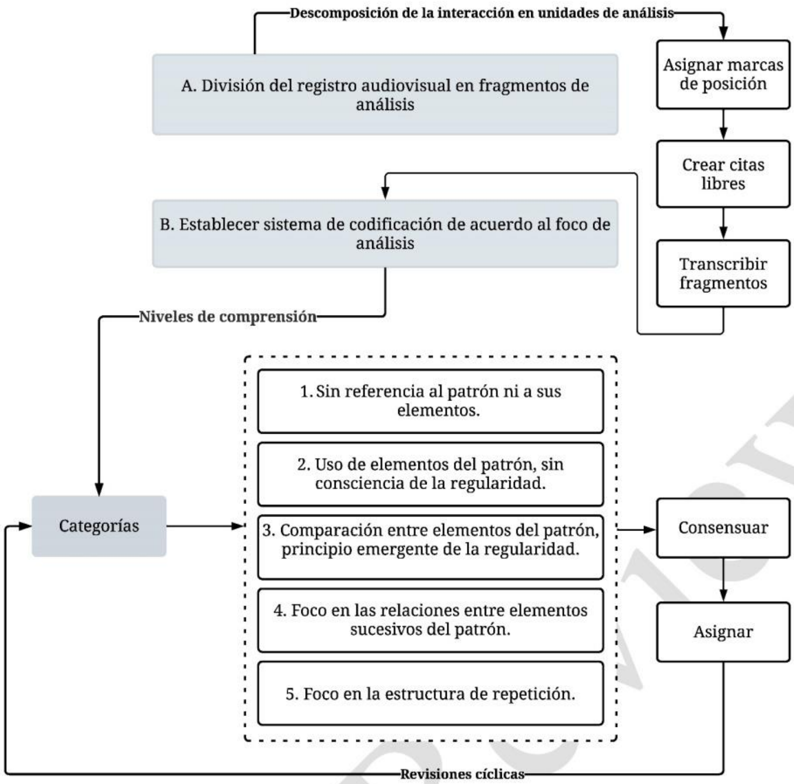


Figura 7. Diagrama de flujo con el proceso de categorización de los resultados obtenidos en el nivel informal. Fuente: Elaboración propia a partir de las categorías de Lüken (2018)

La codificación de los datos ha considerado el uso de las categorías de Lüken (2018) asignando puntuaciones del 0 al 3. En este sentido, la primera categoría se codifica como (0); la segunda se relaciona con el pensamiento recursivo y se codifica como (1); la tercera y la cuarta se vinculan con el pensamiento relacional asignando (2) y la quinta con el pensamiento funcional, codificándose con (3). Para garantizar la confiabilidad de los datos, los autores han seguido una doble codificación cruzada e independiente de los fragmentos de análisis seleccionados, han discutido desacuerdos referidos al proceso de codificación y, finalmente, han establecido consensos.

RESULTADOS

Considerando los objetivos de nuestro estudio, por un lado, se diseña, valida e implementa un itinerario de enseñanza para patrones de repetición que contempla tres niveles: a) nivel informal (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos), b) nivel intermedio (recursos literarios y tecnológicos) y c) recursos gráficos. Por otro lado, se analiza el efecto de dicha enseñanza en cada contexto y los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal.

Validación del itinerario de enseñanza

Las evaluaciones recibidas mediante el juicio externo de expertos se procesan a través del *Atlas.ti* estableciendo categorías que contribuyen a la reducción de datos: a) aspectos didácticos

(AD), b) cuestiones metodológicas (CM), y c) lenguaje matemático (LM). Durante el proceso de análisis y selección de evidencias para cada categoría establecida se ha producido un fenómeno de condensación, es decir, se ha detectado una reiteración de las mismas ideas. En consecuencia, solo se han seleccionado las pruebas más representativas de cada categoría. Las evidencias se han codificado, asignando un número a cada experto (de E1 a E8) tal y como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2
Evidencias de la validación

Categoría	Tarea	Evidencia
AD	SR 1	a) E4: Iniciaría la actividad con una imagen donde se pudiese ver varios elementos, por ejemplo, una fachada donde se muestren toldos distintos, de manera que el niño pueda situar de manera global los elementos de la realidad.
	RLIT	b) E8: Aconsejo que los personajes sean muñecos o animales con volumen o algún tipo de soporte visual más allá del cuento.
CM	SR1	a) E5: ¿por qué no dejar que los niños construyan realmente un toldo?
	SR2	b) E1: Yo igual lo que les diría es que modelasen arbustos y árboles con plastilina
	RM4	c) E2: […] me parece interesante que, una vez trabajada la actividad usando las cartulinas plastificadas (material concreto), se plantee su descripción verbal y que después ellos pudieran pasarlo al papel (cada uno con el registro que desee).
	RT	d) E3: Una vez que el niño/a completa la tarea, conviene hacer que explique a los compañeros o docente el proceso seguido.
LM	SR2	a) E6: usáis como lenguaje para describir el ajardinado “redondeado-redondeado-alto” […] la terminología utilizada para designarlo no parece adecuada, pues ambos, en cierto sentido, son redondeados. Diferente sería designarlos en función de su altura o grosor, “bajo-bajo-alto” o como “grueso-grueso-esbelto.
	RL	b) E7: ¿Se está utilizando de manera sinónima el término seriación y patrón?

En función de las valoraciones recibidas se ha rediseñado y reajustado el itinerario de enseñanza con la intención de ofrecer orientaciones metodológicas y didácticas nacidas desde la teoría y en consonancia con la práctica. En relación con las modificaciones introducidas en la categoría “aspectos didácticos” se decide: a) incluir el uso de la aplicación *Google Maps* para observar diferentes toldos de zonas aledañas al colegio; y b) utilizar personajes físicos para dramatizar el cuento que se explica en el contexto de recursos literarios. En la categoría de “cuestiones metodológicas” se incluye: a) la construcción cooperativa del toldo identificado a través de *Google Maps*; b) el uso de plastilina para poder construir el mismo patrón con diferente elemento; c) la representación en papel de la seriación identificada tras cada tarea; y en la actividad de recursos tecnológicos, se introducen preguntas específicas que contribuyan a compartir el conocimiento que se genera de manera individual: ¿qué elementos debes escoger para ampliar la seriación? ¿Cómo sabes que ahora toca este que has seleccionado? Estas preguntas se establecen tomando como referencia las aportaciones de Blanton (2008, p. 103):

> (…) la enseñanza del pensamiento algebraico a menudo consiste más en preguntar que en decir. Hacer buenas preguntas les da a los niños la oportunidad de organizar su pensamiento y construir ideas matemáticas. Cuando un maestro les dice a los niños qué representación usar o cómo simbolizar una relación funcional o cómo justificar una conjetura particular, disminuye la posibilidad de que los niños desarrollen su propio pensamiento.

Finalmente, en la categoría de "lenguaje matemático" se introducen los siguientes cambios: a) se adopta la terminología "bajo-bajo-alto"; y b) se unifica el criterio de *patrón* para referirse a la unidad de repetición y *seriación* para la versión extendida del patrón.

En la Tabla 3 se expone la versión final del itinerario de enseñanza de patrones de repetición para escolares de 4 años.

Tabla 3
Tareas de cada nivel de enseñanza

Nivel informal	Situaciones reales (SR)	1. Se visualizan diferentes calles de nuestra ciudad con *Google Maps* y se pide a los niños y las niñas que identifiquen seriaciones en los elementos. Mediante buenas preguntas, se les invita a observar las fachadas de las casas, los edificios y los comercios. Una vez identificadas las seriaciones, se representan conjuntamente los respectivos patrones mediante tarjetas de colores.
		2. Se muestra una imagen de un jardín con una seriación de diferentes arbustos que sigue un patrón (AB; AAB) y, a través del diálogo, se invita al alumnado a describir cómo están colocados los arbustos, con el objetivo de analizar el patrón. Finalmente, se les propone que representen el mismo patrón con plastilina.
	Recursos manipulativos (RM)	3. Se propone a los escolares que amplíen las secuencias con las piezas de Pattern Blocks (Geomosaico), siguiendo el patrón indicado en las tarjetas: (AB), (AAB) o (ABB).
		4. Se ponen a disposición de los niños y las niñas tarjetas plastificadas con varias seriaciones. Se les invita a completar o extender la seriación con la ayuda de pinzas de ropa de colores.
	Recursos lúdicos (RL)	5-6. Se proponen dos juegos de actividad motriz para promover la anticipación de eventos a partir de la interiorización de la secuencia presente en dos canciones: 1) Canción popular y 2) *I'm so happy* https://www.youtube.com/watch?v=T2qXSMENrQA
Nivel intermedio	Recursos literarios (RLIT)	7. Con el cuento infantil "El caracol y la menta". Se invita a los escolares a escuchar activamente la historia y a anticipar la secuencia temporal de acciones que se repite en cada diálogo de los personajes del cuento infantil.
	Recursos tecnológicos (RT)	8. Se propone el juego en línea "En serie" en el que cada escolar continúa o completa la seriación propuesta. https://clic.xtec.cat/projects/enserie/jclic.js/index.html
Nivel formal	Recursos gráficos (RG)	9. A través de una tarea escrita previamente diseñada con diferentes tipos de toldos, se invita a los escolares a ampliar la seriación. Un toldo sigue el patrón (AB) y el otro (AAB).

Efecto de la enseñanza de patrones de repetición en cada contexto y modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal

Los resultados con respecto al efecto de las tareas que componen el itinerario de enseñanza de patrones de repetición muestran como el éxito de la comprensión de la tarea disminuye a medida que se avanza hacia contextos más abstractos. A continuación, en la Figura 8 se observan los resultados agrupados por contextos de enseñanza que conforman el EIEM.

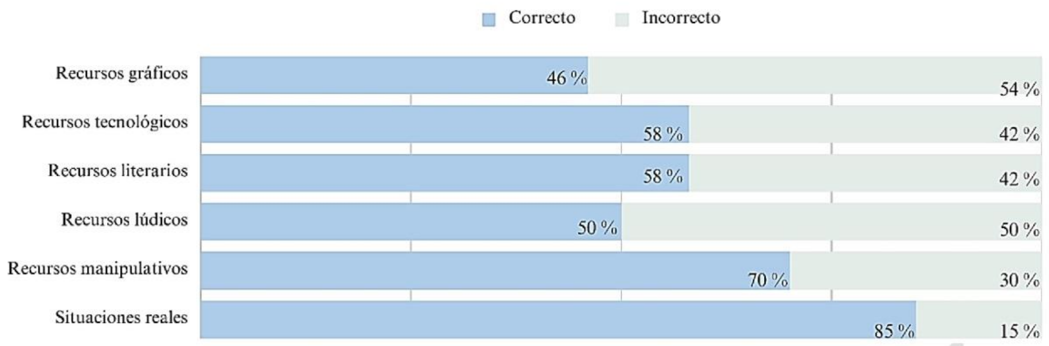


Figura 8. Resultados obtenidos en cada contexto de enseñanza del itinerario

A partir de los datos que muestra la Figura 8, se aprecia un grado de éxito en la comprensión y resolución de la tarea del 85% para situaciones reales; 70% para recursos manipulativos y 50% recursos lúdicos. En relación con la categoría "incorrecto" se observa como el porcentaje aumenta de manera relevante entre contextos de un mismo nivel, situándose en 15%, 30% y 50% para situaciones reales, recursos manipulativos y recursos lúdicos, respectivamente. En los recursos literarios y tecnológicos en ambos contextos el 58% de casos realizaron de manera correcta la tarea, ocupando el 42% de los participantes la categoría "incorrecto". Finalmente, en los recursos gráficos se observa como aumenta el error en las producciones escritas de los escolares, situándose en un 54% frente a un 46% de soluciones correctas.

De manera general, los resultados obtenidos por nivel de enseñanza se resumen en el siguiente gráfico:

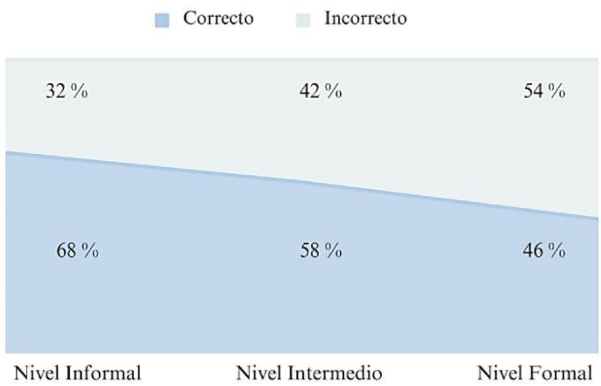


Figura 9. Resultados de casos válidos agrupados por nivel de enseñanza del EIEM

Como se puede comprobar en la Figura 9, el 68% de los escolares realizaron de manera correcta las tareas diseñadas en el nivel informal, frente a un 58% y 46% para los niveles intermedio y formal, respectivamente. De manera transversal se evidencia como el éxito de la resolución y comprensión de las tareas disminuye a medida que se avanza hacia contextos más abstractos.

Estos resultados se combinan con el análisis cualitativo del discurso utilizado por los ocho escolares con un ICM medio según el test TEMA 3 de Ginsburg y Baroody (2003) para evidenciar los modos de pensamiento algebraico que movilizan durante la fase II y III de las sesiones desarrolladas en el nivel informal.

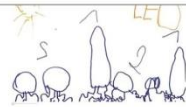
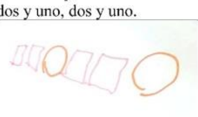
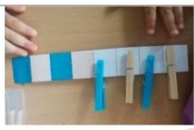
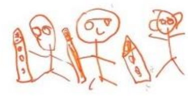
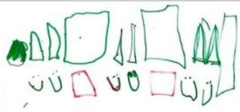
Tabla 4
Distribución de los indicadores según los modos de pensamiento algebraico movilizados en cada contexto del nivel informal

	Indicador*	SR1 (*n*=8)	SR2 (*n*=8)	RM1 (*n*=8)	RM 2 (*n*=8)	RL1 (*n*=8)	RL2 (*n*=8)
Modos de pensamiento algebraico	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	3	2	6	7	6
	2	7	5	4	2	0	1
	3	0	0	2	0	0	0

*0= sin referencia al patrón ni a sus elementos; 1=pensamiento recursivo; 2= pensamiento relacional 3= pensamiento funcional

De acuerdo con la información mostrada en la Tabla 4, se interpreta de manera longitudinal (entre contextos) que la movilización del pensamiento recursivo (indicador 1) tuvo mayor presencia en los contextos RM2, RL1 y RL2. En cambio, el pensamiento relacional (indicador 2) obtiene mayor presencia en los contextos SR1, SR2 y RM1. El pensamiento funcional (indicador 3) se evidencia solo por dos escolares en la tarea de RM1. De manera general se aprecia como los ocho escolares seleccionados muestran mayor evidencia de pensamiento recursivo que de funcional en el nivel informal del EIEM.
En la Tabla 5 se presentan fragmentos de análisis para cada contexto de enseñanza del nivel informal. El fragmento seleccionado corresponde al modo de pensamiento algebraico con mayor presencia dentro de cada contexto. En la transcripción se asigna (D) a las intervenciones del docente y (E) a la de los escolares.

Tabla 5
Evidencias recogidas en el nivel informal: SR; RM y RL

Contexto	Fase II (documentación pedagógica)		Fase III (representación y diario de campo)	Modo de pensamiento algebraico
SR1	D: Si ahora tenemos una tira de color amarillo, una marrón y una amarilla. ¿Qué tira colocaremos a continuación? E: Una marrón. D: ¿Por qué una marrón y no una amarilla? E: Porque es amarillo, marrón, amarillo, marrón, amarillo, marrón. (…) D: ¿De qué color es la cartulina que está en medio de dos amarillas? E: Marrón. D: ¡Muy bien! ¿Sabes cuáles son los colores que se repiten? E: amarillo y marrón. (…) D: ¿Puedo poner una cartulina azul en esta seriación? E: ¡No!		 El alumno representa la seriación explorada durante la construcción conjunta del toldo, reconociendo los dos elementos de repetición (amarillo-marrón).	Pensamiento relacional
SR2	D: ¿Cómo estaban colocados los arbustos de la foto? E: Así [señalando la seriación con la plastilina]. D: ¿Cómo lo has hecho para no equivocarte? E: Poniendo dos bolas y un palo, dos bolas y un palo, dos bolas y un palo, dos bolas y un palo... D: ¿Por qué, dos y uno? E: Porque había dos juntos iguales y el otro era más grande, dos iguales y uno más alto.		 El alumno representa en un papel la colocación de los arbustos exponiendo que para no equivocarse contaba dos y uno, dos y uno, dos y uno.	Pensamiento relacional
RM1	E: ¡Mira, yo he descubierto un a cosa! D: A ver nos explicas tu descubrimiento. E: Sí, esta seriación con piezas verdes y azules es igual a esta otra hecha con piezas amarillas y rojas. (…) D: ¿Y por qué dices que son iguales? E: Porque los dos tienen dos figuras iguales y una diferente. D: Muy bien, es cierto, las dos cartulinas tienen representado el mismo patrón: Dos figuras iguales y una diferente.		 El alumno explica que dibuja un camino igual que el de las tarjetas, con dos figuras iguales (rectángulos rosas) y una diferente (círculo naranja).	Pensamiento relacional y Pensamiento funcional
RM2	E: ¡Mira! D: ¡Los has completado! Y ¿cómo lo has hecho? E: Poniendo las pinzas. D: ¿Cómo sabías cuál tocaba poner? E: Había cuadrado azul, color carne, cuadrado azul, color carne, cuadrado azul, color carne, y luego todo blanco. D: Entonces, ¿por qué pusisteis la pinza azul en el primer cuadrado blanco? E: Porque antes había color carne. D: ¿Y después del color azul? E: La pinza sin color, la de color... de color madera. D: ¿Seguro que es la correcta? E: Creo que sí…Va un color-otro color, un color-otro color.		 El alumno explica que ha dibujado azul, blanco, azul, blanco, azul, blanco, igual que como estaba en la tarjeta.	Pensamiento recursivo
RL1	D. Ahora ¿qué toca hacer? E: Cantar D: ¿Y después? E: Toca correr, cantar, correr, cantar, correr, cantar, correr. (...) D: ¿Cuáles son las dos acciones que siempre se repiten? E: Correr, cantar, correr, cantar, correr... D: Entonces las dos que se repiten, ¿cuáles son? E: ¿Jugar?		 El alumno expone que ha representado cuando cantaban y cuando corrían.	Pensamiento recursivo
RL2	D: ¿Escribimos un código secreto para recordar la coreografía de la canción? E: (canta la canción ejecutando las acciones de: reír, reír y cantar, reír, reír y cantar).		 El alumno dibuja la seriación reír-reír-cantar, reír-reír-cantar designando con ayuda de los compañeros los elementos de la representación.	Pensamiento recursivo

Como se aprecia en la Tabla 5, por un lado, en las tareas de SR1, SR2 y RM1 se observan evidencias que responden al pensamiento relacional. Es decir, el alumnado identifica con la ayuda del docente los elementos que otorgan regularidad a la seriación descartando aquellos que no cumplen con la regla. En este sentido, resulta importante destacar como los escolares van focalizando su atención en las relaciones que se producen entre los elementos que conforman la unidad de repetición (Lüken y Sauzet, 2020; Miller et al., 2016) para adentrarse en el pensamiento relacional. Además, en algunos casos (RM1) se manifiesta de manera explícita una relación de equivalencia entre unidades de repetición constituidas por diferentes elementos, observándose así indicios de pensamiento funcional. Por otro lado, la presencia del pensamiento recursivo se ubica en las tareas de RM2, RL1 y RL2. Como se ha evidenciado en los resultados (Figura 8), a pesar de ser los RL un contexto concreto, los escolares han presentado dificultades para comprender la estructura intrínseca del juego y la secuenciación iterativa que se producía en cada caso.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se ha diseñado, validado e implementado un itinerario de enseñanza para patrones de repetición con la finalidad de describir los efectos de dicha enseñanza en cada contexto del EIEM y evidenciar los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal del itinerario.

Considerando los resultados obtenidos tras la implementación de las tareas, se observa que cuanto más cercano y concreto ha sido el contexto de enseñanza, más fácil ha sido para los escolares lograr el éxito de la tarea, incluso en aquellas que movilizan habilidades más complejas. De manera general, se observa una diferencia relevante del 22% de éxito entre el nivel más concreto (informal) y el más abstracto (formal); y de manera más específica, una diferencia del 39% de producciones correctas entre el contexto de situaciones reales y recursos gráficos. Estos datos están en sintonía con las conclusiones de Zhong y Xia (2020) cuando afirman que los niños pequeños necesitan oportunidades de exploración, manipulación y experimentación, para así fomentar el aprendizaje desde una perspectiva lúdica y concreta.

Con ello, se refuerza la idea de que la enseñanza de patrones de repetición requiere de un nivel de abstracción mental que debe ser acompañado, a través de la exploración, manipulación y experimentación, para fomentar de manera eficaz la transición del pensamiento recursivo al relacional y funcional. En consonancia con nuestros datos, pues, parece que el itinerario de enseñanza validado y la gestión docente ha reforzado el razonamiento verbal, la comunicación y expresión del conocimiento de los escolares y a su vez, ha estimulado su proceso de aprendizaje mediante la interacción con diferentes contextos de enseñanza. En esta línea, el contexto donde se enmarca la tarea puede ser considerado como un andamiaje conceptual y procedimental que proporciona una comprensión consolidada de nuevos contenidos matemáticos (Hunter y Miller, 2022). Cuando los escolares comprenden, transfieren y generalizan, conectan las ideas matemáticas desde un escenario sólido y eficaz.

En relación con los modos de pensamiento algebraico que se han movilizado en cada contexto de enseñanza del nivel informal del EIEM, el estudio realizado ha puesto de manifiesto como los escolares, con el apoyo docente necesario, comienzan a percibir una seriación no como la alternancia de elementos, sino como una estructura que se rige por una norma de repetición. De aquí la importancia de la gestión docente en incitar, a través de preguntas, reflexiones más propias del pensamiento relacional y funcional, es decir, de argumentos para describir conjeturas explícitas centradas en habilidades más sofisticadas para hacer patrones.

Este dato apoya la conclusión de Papic et al. (2011) quienes también observaron que, sin una intervención directa, los escolares de estas edades no identifican de manera autónoma la unidad de repetición que origina la seriación. A esta conclusión, Rittle-Johnson et al. (2013) añadieron que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar la abstracción del patrón. Esta cuestión explicaría en nuestro estudio la poca presencia explícita de pensamiento funcional. No podemos obviar que, según Rittle-Johnson et al. (2013) el reconocimiento de la unidad de repetición se manifiesta de manera exitosa a partir de los 4-5 años. Como expone Du Plessis (2018) promover habilidades cognitivas relacionadas con la identificación de la unidad de repetición, favorece los procesos de predicción, anticipación, busca de regularidades y, por ende, la expresión de la generalización. Desde esta misma óptica, Mulligan et al. (2020) defienden que reconocer la unidad de repetición repercute en el desarrollo del razonamiento multiplicativo y algebraico. Bajo esta mirada, es necesario ser consciente que la demanda cognitiva de la habilidad de copiar, interpolar o extender no es la misma que para tareas como abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición o crear, que sí requieren de una percepción más abstracta y funcional del patrón y de sus unidades de repetición. Por tanto, resulta conveniente que los docentes utilicen estrategias de instrucción basadas en preguntas que vehiculen el proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones (Castro-Rodríguez y Castro, 2016), que hagan uso de un lenguaje comprensible que facilite la asimilación de estos procesos complejos (Erath et al., 2021) y que prioricen el uso de contextos de enseñanza que permitan explorar de manera tangible la estructura del patrón.

Estos hallazgos, en su conjunto, contribuyen a poner al alcance del profesorado de las primeras edades herramientas y recursos que sirvan de inspiración para: a) planificar la enseñanza de los patrones de repetición como un recorrido de lo particular a lo general contemplando diferentes contextos de enseñanza; b) considerar una trayectoria de aprendizaje que contemple habilidades para hacer patrones con un orden de abstracción creciente, para así dotar de comprensión y significación los inicios del pensamiento algebraico, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de reproducir o extender, sin identificar la unidad de repetición (Acosta y Alsina, en revisión), c) gestionar la intervención docente en consonancia con las orientaciones teóricas sobre las habilidades para hacer patrones, descritas por autores como (Acosta et al., 2022b; Clements y Sarama, 2015; Larkin et al., 2022; Lüken y Sauzet, 2020; Pincheira et al., 2022; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019); c) promover de manera guiada y acompañada el reconocimiento de la unidad de repetición de una seriación, para de esta manera fomentar la transición del pensamiento recursivo al relacional y funcional; y d) promocionar el uso de preguntas intencionadas (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2014) que inviten a generar conocimiento compartido con el grupo de iguales, para de esta forma, fomentar el diálogo entre iguales y retroalimentar el proceso de aprendizaje de los escolares (Berciano-Alcaraz et al., 2022), evitando así preguntas que no comporten razonamiento, ni justificación y que se contesten con un "sí" o un "no".

Como limitaciones de nuestro estudio, es importante declarar que los datos que se generan no pretenden ser generalizables a universos de mayor magnitud (Hernández et al. 2010), sino sumarse al cuerpo de investigación sobre patrones y pensamiento algebraico convirtiéndose en una vía de inspiración que guíe la acción futura mediante la reflexión (Radford y Sabena, 2015). Además, es importante mencionar, que el uso diferido, a través de imágenes, de situaciones reales en la primera etapa del itinerario de enseñanza puede haber influido en las respuestas de los escolares, puesto que no se ha podido comprobar si los errores hubieran disminuido con el desarrollo de las tareas en un contexto real directo. Todas estas cuestiones nos permiten iniciar un nuevo ciclo de iteración para el diseño de un itinerario para 5 años, y así poder analizar, tanto transversalmente como longitudinalmente, la influencia de los contextos en el proceso de enseñanza de patrones de repetición. Sería interesante también en una línea futura analizar los modos de pensamientos que se movilizan en otros niveles del EIEM, así como el tipo de error a partir de las aportaciones de Collins y Laski (2015) y Rittle-Johnson et al. (2013).

A modo de conclusión, se apuesta por un proceso de enseñanza-aprendizaje que aproveche todas las oportunidades y potencial que ofrecen los patrones de repetición. En esta dirección, se sugiere una implementación que siga un curso de lo concreto a lo abstracto, donde se movilicen habilidades para hacer patrones con una dificultad creciente; es decir, donde se promocionen las habilidades propias del pensamiento recursivo (copiar, interpolar y extender), pero que se avance también hacia aquellas que promueven el pensamiento relacional y funcional (abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear) diversificando el uso de contextos de enseñanza. Desde esta óptica, la búsqueda y uso de la generalización se considera un hito y una característica del pensamiento algebraico necesaria para fomentar un aprendizaje desde el terreno de lo concreto hacia lo abstracto (Acosta y Alsina, 2022; Cañadas et al., 2008; Papic et al., 2011; Pincheira y Alsina, 2021; Torres et al., 2022). Bajo esta mirada, el álgebra temprana en general, y los patrones matemáticos en particular, se configuran como una ruta para involucrar a los escolares, en la observación, el razonamiento y el reconocimiento de estructuras matemáticas abstractas (Blanton y Kaput, 2011). Es decir, un camino que se inicia con la enseñanza de patrones de repetición promocionando el peregrinaje entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional, incluyendo así una planificación minuciosa con oportunidades para explorar, manipular e identificar propiedades concretas y avanzar hacia la generalización de estructuras.

Agradecimientos
Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856). Agradecemos la predisposición de la escuela Pericot de Girona y a Mireia Moran, maestra de los escolares participantes. Los autores desean agradecer, además, a la editora y revisores por su ayuda en la mejora del artículo.

Referencias

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad*, *17*(2), 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022a). El pensamiento algebraico en educación infantil: Estrategias didácticas para promover y evaluar las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *11*(2), 1-37. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022b). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, *3*(2), 127-158. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3 a 6 años)*. Graó.

Bakker, A. (2019). *Design research in education*. Routledge.

Berciano-Alcaraz, A., Salgado-Somoza, M., y Jiménez-Gestal, C. (2022). Alfabetización computacional en educación infantil:Dificultades y beneficios en el aula de 3 años. *Revista Electrónica Educare*, *26*(2), 1-21. https://doi.org/10.15359/ree.26-2.15

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraisation: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer.

Bock, A. M., Cartwright, K. B., McKnight, P. E., Patterson, A. B., Shriver, A. G., Leaf, B. M., Mohtasham, M. K., Vennergrund, K. C., y Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology*, *9*(1802). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802

Borriello, G. A., Flynn, M. E., y Fyfe, E. R. (2022). Developmental differences in children's and adults' strategies on a repeating pattern task. *Early Childhood Research Quarterly*, *59*, 300-310. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2021.12.012

Cañadas, M. C., Castro Martínez, E., y Castro Martínez, E. (2008). *Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas*. https://digibug.ugr.es/handle/10481/4392

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53-59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87-107). Ediciones Pirámide.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.

Collins, M. A., y Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, *32*, 204-214. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.04.004

Creswell, J. W., y Plano Clark, V. L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (Vol. 3). Sage.

Dumas, D., Alexander, P. A., y Grossnickle, E. M. (2013). Relational Reasoning and Its Manifestations in the Educational Context: A Systematic Review of the Literature. *Educational Psychology Review*, *25*(3), 391-427.

Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J., y Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(2), 245-262. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2

Fernández, C., Baptista, P., y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., y Rittle-Johnson, B. (2015). Easy as ABCABC: Abstract Language Facilitates Performance on a Concrete Patterning Task. *Child Development*, *86*(3), 927-935. https://doi.org/10.1111/cdev.12331

Ginsburg, H. P., y Baroody, A. J. (2003). *Test of Early Mathematics Ability-Third Edition*. Pro Ed.

Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (Vol. 5). McGraw-Hill.

Hunter, J., y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*, 139-151.

Larkin, K., Resnick, I., y Lowrie, T. (2022). Preschool children's repeating patterning skills: Evidence of their capability from a large scale, naturalistic, Australia wide study. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-16. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2056320

Lüken, M. M. (2018). Repeating Pattern Competencies in Three- to Five-Year Old Kindergartners: A Closer Look at Strategies. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, y C. Benz (Eds.), *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education* (pp. 35-53). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_3

Lüken, M. M., y Kampmann, R. (2018). The Influence of Fostering Children's Patterning Abilities on Their Arithmetic Skills in Grade 1. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, y C. Benz (Eds.), *ICME-13 Monographs. Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education: Vol. I* (pp. 55-66). Springer. https://pub.uni-bielefeld.de/record/2918871

Lüken, M. M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Mason, J., Stephens, M., y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

McGarvey, L. M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Miller, M. R., Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M., y Fyfe, E. R. (2016). The Influence of Relational Knowledge and Executive Function on Preschoolers' Repeating Pattern Knowledge. *Journal of Cognition and Development*, *17*(1), 85-104. https://doi.org/10.1080/15248372.2015.1023307

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: Un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.

Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 29-45). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_3

NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* National Council of Teachers of Mathematics.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: Un análisis desde los libros de texto. *PNA*, *17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Radford, L., y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 157-182). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Reinke, L. T., y Casto, A. R. (2022). Motivators or conceptual foundation? Investigating the development of teachers' conceptions of contextual problems. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(1), 113-137. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00329-8

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., y Farran, D. C. (2017). Early Math Trajectories: Low-Income Children's Mathematics Knowledge From Ages 4 to 11. *Child Development*, *88*(5), 1727-1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 376-396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes! *Young Children*, *58*(1), 14-21.

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R., y Levenson, E. (2017). Preschool teachers' variations when implementing a patterning task. *CERME 10*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01938920

Torres, M. D., María C. Cañadas, y Antonio Moreno. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: Estructuras y representaciones. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

Twohill, A. (2018). Observations of Structure Within Shape Patterns. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 213-235). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_9

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019). Young Children's Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. En K. M. Robinson, H. P. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139-161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Zhong, B., y Xia, L. (2020). A Systematic Review on Exploring the Potential of Educational Robotics in Mathematics Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 79-101. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09939-y

Notificaciones

×

[pna] Decisión del Editor

2023-03-31 11:18 PM

Estimados autores,

He recibido los informes de dos evaluadores de su artículo "**APRENDIZAJE EN CONTEXTO Y HABILIDADES PARA HACER PATRONES EN 4 AÑOS: EFECTOS DE UN ITINERARIO DE ENSEÑANZA**", remitido para su posible publicación en PNA. Ambos evaluadores son especialistas en el tema del artículo.

Los dos revisores, si bien consideran interesante el trabajo, han señalado algunos aspectos del artículo que necesitan una mejora importante. En particular, el primer revisor, si bien valora que el estudio está bien planteado, sugiere rechazarlo pues considera que los objetivos y el problema no son de investigación.

A su vez, el segundo revisor, si bien sugiere aceptar el artículo, pone en consideración de los autores la posibilidad de: 1) modificar y detallar el tipo de análisis que le efectúan a los datos para responder a los objetivos de la investigación y 2) en función del análisis deben modificar el apartado resultados en donde deben mostrar claramente la asociación explicita entre resultado y evidencia.

Después de analizar en detalle los dos informes y de mi propia lectura del artículo, considero que deben valorar la incorporación, o no, de las sugerencias del primer revisor y también deben mostrar mejor la relevancia de este estudio y su contribución a los resultados existentes. Por esta razón, de momento mi decisión es que son necesarios cambios mayores para que sea sometido a una nueva evaluación por los revisores.

Reciban un cordial saludo

Claudia Vásquez
Pontificia Universidad Católica de Chile
cavasque@uc.cl

ESTUDIO C

Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil

Alteridad, *17*(2), 166-179

Recibido: 14 de febrero 2022/ Aceptado: 07 de junio 2022/ Publicado: 01 de julio 2022

ALTERIDAD
REVISTA DE EDUCACIÓN
p-ISSN:1390-325X / e-ISSN:1390-8642
http://alteridad.ups.edu.ec

Julio-diciembre 2022
Vol. 17, No. 2, 166-179
https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil

Influence of the teaching context on pattern representation in early childhood education

Yeni Acosta es profesora investigadora en formación, Universidad de Girona, España (yeni.acosta@udg.edu) (https://orcid.org/0000-0001-9873-2127)

Dr. Ángel Alsina es profesor catedrático de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Girona, España (angel.alsina@udg.edu) (https://orcid.org/0000-0001-8506-1838)

Recibido: 2022-02-14 / **Revisado:** 2022-05-27 / **Aceptado:** 2022-06-07 / **Publicado:** 2022-07-01

Resumen

Con base en el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), que propone secuencias de enseñanza intencionadas desde lo concreto hasta lo simbólico, se analiza cómo influye el contexto de enseñanza en las tareas con patrones de repetición en un grupo de 24 escolares españoles durante dos cursos académicos consecutivos (4-6 años). Para ello, se han implementado tareas de patrones de repetición de los dos contextos extremos de un itinerario previamente diseñado y validado: situaciones reales y contextos gráficos, respectivamente. Los datos se han analizado a partir de esquemas metodológicos etnográficos de observación participante (diario de campo); la documentación pedagógica (registro audiovisual); y las producciones escritas de los patrones (representaciones). Los principales resultados obtenidos muestran que: a) en el alumnado de 4-5 años se ha identificado una diferencia positiva del 32,9 % de las situaciones reales frente a los recursos gráficos; b) en el alumnado de 5-6 años, si bien desciende ligeramente dicha diferencia entre ambos contextos, continúa estando por encima del 30 %. Se concluye que el contexto de enseñanza influye en la comprensión de los patrones de repetición, por lo que es necesaria una enseñanza de los patrones desde el nivel situacional hasta el formal.

Descriptores: Patrones de repetición, representación en matemáticas, situaciones reales, recursos gráficos, educación infantil.

Abstract

According to the Mathematics Teaching Itineraries Approach (EIEM), which proposes intentional teaching sequences from the concrete to the symbolic, we analyse how the teaching context influences the repetition pattern tasks in a group of 24 children during two consecutive school years (4-6 years old). For this purpose, repetition pattern tasks have been implemented in the two extreme contexts of a previously designed and validated itinerary: real situations and graphic contexts, respectively. The data have been analysed from ethnographic methodological schemes of participant observation (field diary); pedagogical documentation (audiovisual record); and written productions of the patterns (representations). The main results obtained show that: a) in pupils aged 4-5 years, a positive difference of 32.9% of real situations versus graphic resources has been identified; b) in pupils aged 5-6 years, although the difference between the two contexts decreases slightly, it continues to be above 30%. It is concluded that the teaching context influences the understanding of repetition patterns, so that it is necessary to teach patterns from the situational to the formal level.

Keywords: Repetition patterns, representation in mathematics, real situations, graphical resources, early childhood education.

Forma sugerida de citar: Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad, (17)*2, 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

1 Introducción y estado de la cuestión

En los últimos años, se le ha conferido a la infancia una especial importancia para el desarrollo integral de la persona. Bowman *et al.* (2001, p. 23), por ejemplo, afirman que "[…] los niños pequeños son estudiantes capaces y que la experiencia educativa durante los años preescolares puede tener un impacto positivo en el aprendizaje escolar". En este sentido, diversas investigaciones señalan que las competencias matemáticas tempranas (de 4 a 6 años básicamente) pueden llegar a ser un indicador del éxito académico en etapas posteriores (Nguyen *et al.,* 2016; Rittle-Johnson *et al.,* 2017; Wijns *et al.,* 2021, entre otros). En consecuencia, resulta necesaria una planificación e implementación efectiva que permita promover el desarrollo de la competencia matemática desde las primeras edades, diversificando el uso de escenarios educativos que conduzcan a buenas prácticas en el aula de matemáticas (Alsina, 2019, 2022; *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2000, 2014).

Desde este prisma, este artículo asume el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas de Alsina (2019, 2020, 2022), en adelante EIEM, que plantea que la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades debería proponerse como un recorrido de lo concreto a lo abstracto a través de secuencias de enseñanza que contemplen distintos contextos de enseñanza, con el fin de promover una adquisición consolidada de competencias matemáticas. Este enfoque establece una secuencia intencionada que incluye tres niveles de enseñanza que avanzan de lo particular a lo general, ofreciendo una orientación de uso jerarquizado de los contextos que lo conforman. En el primer nivel se encuentran los contextos informales que se deberían "consumir" diariamente: las situaciones reales, los recursos manipulativos y el uso de propuestas lúdicas y recreativas; en el siguiente nivel se hace alusión a los contextos intermedios que deberían utilizarse algunas veces, como los recursos literarios y tecnológicos; y finalmente, aparecen aquellos contextos formales que deberían implementarse ocasionalmente, como las fichas y los libros de texto.

En concreto, este artículo aplica este enfoque en la enseñanza de patrones de repetición, dado que se ha evidenciado que el conocimiento de patrones y su estructura influye positivamente en el desarrollo temprano del pensamiento matemático (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Kampmann, 2018; Mulligan *et al.,* 2020; Papic *et al.,* 2011; Rittle-Johnson *et al.,* 2018; Tirosh *et al.,* 2018; y Wijns *et al.,* 2021). Por lo tanto, la exploración de patrones puede considerarse una puerta de entrada para promocionar la generalización (Vanluydt *et al.,* 2021), la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el uso preciso del lenguaje matemático (Acosta y Alsina, 2020). Al hablar de patrones matemáticos, es necesario distinguir entre patrón como una secuencia o seriación ordenada, y entre estructura de patrón, es decir, organización o regla que subyace al patrón (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Estas autoras australianas puntualizan que los patrones comprenden dos componentes: uno cognitivo, relacionado con el conocimiento de la estructura; y otro meta-cognitivo, asociado con la capacidad de búsqueda y análisis de patrones. Mulligan *et al.* (2020) exponen que la falta de consciencia del patrón y su estructura puede llegar a ser un predictor de dificultades matemáticas futuras. Sin embargo, poco se sabe sobre cómo influye el contexto de enseñanza en la comprensión y representación de patrones. De hecho, autores como Wijns *et al.* (2019) plantean la necesidad de estudiar si las tareas con patrones que se implementan promueven de forma óptima todo su potencial, para así fomentar el desarrollo de la percepción algebraica de los escolares. Como afirma Alsina (2020), el libro de texto se postula en ocasiones como un recurso preponderante que no deja espacio para abordar conceptos y procedimientos matemáticos desde otros escenarios más realistas, concretos y significativos para los escolares.

En esta línea, nuestro propósito es aportar datos que permitan iniciar una aproximación al modo en que los niños y niñas de 4 a 6 años ejecutan patrones de repetición y exteriorizan su representación en diversos contextos de enseñanza, para así abordar el desarrollo de la comprensión de patrones de una manera contextualizada y longitudinal, considerando los planteamientos del EIEM.

Desde esta perspectiva nos formulamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo influye el contexto de enseñanza en las tareas con patrones de repetición?
- ¿Qué relación se establece entre los contextos de enseñanza concretos (situaciones reales) y los contextos de enseñanza abstractos (recursos gráficos) durante la comprensión y representación de patrones de repetición?

De estas preguntas se derivan los siguientes objetivos de estudio:

- Analizar la relación que se establece entre la comprensión y la representación de patrones de repetición.
- Evidenciar la influencia que ejerce el contexto de aprendizaje en el éxito de la representación de patrones de repetición.

1.1 Enseñanza y representación de patrones de repetición desde el enfoque de itinerarios didácticos

En las siguientes líneas se abordan los pilares que fundamentan el EIEM como marco teórico de nuestro estudio, se define qué se entiende por patrón, la importancia de su enseñanza y la representación como proceso matemático que promueve la comprensión.

Acosta y Alsina (2021) señalan que el aprendizaje de los patrones se inicia en situaciones concretas hasta consolidarse en experiencias abstractas. Por consiguiente, se toma como referente el EIEM (Alsina, 2019, 2020) que se fundamenta en tres pilares interrelacionados: a) la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygotsky, 1978), que entiende la educación como un fenómeno social y cultural que contempla el lenguaje y la interacción como herramientas esenciales para fomentar el aprendizaje; b) el Modelo Realista de Formación del Profesorado (Korthagen, 2001), que considera que los docentes deben de estar familiarizado con diversas maneras de intervenir y ejercitarlas en la práctica, es decir, deben tener criterio para saber cuándo, qué y por qué alguna situación es susceptible para reflexionar de forma sistemática; y c) la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), que promueve la utilización de problemas contextualizados en situaciones reales como inicio del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con base en estos pilares, el EIEM (Alsina, 2019, 2020, 2022) considera la enseñanza de las matemáticas a través de secuencias didácticas que incluyen los siguientes tres niveles:

- Nivel informal: la enseñanza de los contenidos matemáticos se prioriza desde contextos de situaciones reales y cercanas al alumnado, haciendo uso de materiales manipulativos y lúdicos, apoyándose, a su vez, en el conocimiento informal, el sentido común y la experiencia. En estos contextos, las demandas cognitivas que se movilizan son: la exploración, la manipulación o la experimentación, conformándose como requisitos para visualizar y comprender las ideas matemáticas de forma concreta.
- Nivel intermedio: la enseñanza de los contenidos continúa en contextos que se configuran como puente entre los contextos de la fase anterior y los contextos formales de la fase posterior. Se incluyen en este nivel, recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (Applets, robots educativos programables, etc.). En estos contextos, las exigencias cognitivas se centran en: la exploración y la reflexión, que facilitan de manera

progresiva la esquematización y generalización del conocimiento matemático.

- Nivel formal: la enseñanza del contenido termina en contextos gráficos y simbólicos donde se fomenta la representación y formalización del conocimiento matemático, haciendo uso de procedimientos y notaciones convencionales para promocionar el aprendizaje de lo concreto a lo simbólico. En estos contextos, pues, las exigencias cognitivas se centran principalmente en: la abstracción y la generalización.

Desde este enfoque se apuesta por la actividad heurística más que la pura ejercitación, y el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición (Alsina, 2019).

Como se ha indicado en la introducción, este estudio se focaliza en la enseñanza de patrones. Cuando hablamos de patrón, nos referimos desde nuestro punto de vista, a una secuencia de elementos ordenados de acuerdo con una norma, regla, núcleo o unidad periódica determinada. Clements y Sarama (2015) exponen que la enseñanza de patrones persigue, precisamente, la búsqueda de regularidades y estructuras matemáticas. Es así como reconocer patrones se configura como una capacidad fundamental para muchos dominios del conocimiento como la lectura, las matemáticas o las artes, puesto que los patrones aportan significado y cohesión (Björklund y Pramling, 2014). Por esta razón Papic (2015) sugiere la necesidad de promover la conciencia de los niños y las niñas sobre los patrones para estimular el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde una edad temprana y, aunque de forma emergente, sentar las bases del pensamiento matemático en general y algebraico en particular. No podemos obviar que un pensamiento algebraico consolidado requiere capacidad para simbolizar y generalizar (Sibgatullin *et al.,* 2022).

En nuestro estudio se asume que los patrones pueden variar según su regularidad y contenido; y que atendiendo a esta afirmación los patrones pueden presentar unidades que se repiten; que se ordenan de manera estructural o simétrica; o que crecen (Bock *et al.,* 2018). La tipología de patrón que se aborda en nuestro itinerario de enseñanza son los de repetición. Es decir, patrones que mediante secuencias iterativas muestran regularidades o repeticiones de características cualitativas y/o cuantitativas específicas (color, formas, tamaño, sonidos, o números, por ejemplo, "verde, verde, amarillo, verde, verde, amarillo" o "■○■○").

Autores e instituciones de prestigio señalan que la enseñanza de patrones de repetición y la comprensión de su estructura influye positivamente en el desarrollo matemático temprano, puesto que promueve un cimiento veraz para el pensamiento algebraico (Mulligan *et al.,* 2020; Rittle-Johnson *et al.,* 2018; Wijns *et al.,* 2019). Desarrollar el concepto de patrón implica percibir la regla subyacente e identificar de manera consciente y funcional la unidad de repetición. De acuerdo con Wijns *et al.* (2019) es necesario apostar por la implementación de tareas con patrones que den la oportunidad a los escolares de transitar del pensamiento recursivo al funcional, es decir, de observar la relación consecutiva de elementos que yace en una seriación, para de manera guiada y acompañada lograr abstraer y representar la estructura interna de su núcleo.

Ahora bien, ¿qué implica la representación en matemáticas? Para Freudenthal (1991) el desarrollo progresivo de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos va de lo concreto a lo abstracto, de manera que puede tener formas diversas a través de objetos físicos, lenguaje natural, dibujos y símbolos convencionales. Según afirma Reed (2001, p. 215), "dibujar puede ser una ventana a la mente de un niño". Por tanto, es necesario respetar y favorecer el proceso de la representación con la finalidad de aprender (y sobre todo comprender) el símbolo que representa un objeto, una situación o una idea matemática. Es por esta razón que Duval (1995, p. 15) considera que "no hay conocimiento que pueda ser movilizado por un individuo sin una actividad de representación". Asimismo, en relación con la representación como un proceso matemático que externaliza la comprensión del alumnado, Pino-Fan *et al.* (2017) aseguran que dicho proceso tiene un rol fundamental con la adquisición y el tratamiento del conocimiento de un individuo. Desde este prisma, el NCTM (2014) apuesta por una enseñanza de las matemáticas que permita establecer conexiones entre representaciones para así vincular de manera eficaz la comprensión conceptual y procedimental.

Considerando estos antecedentes, conceptualizamos la representación en matemáticas como un proceso interconectado que permite plasmar de manera concreta, a través de la utilización de diferentes signos, gráficos y/o lenguaje natural, el conocimiento y procedimientos matemáticos que poseen los alumnos. De esta manera se consigue organizar, comprender y comunicar la naturaleza matemática de acciones previamente realizadas en el plano educativo y social.

2 Metodología

El presente estudio se desarrolla desde un enfoque cualitativo para comprobar las oportunidades de comprensión que brinda el contexto más concreto (situaciones reales) y el más abstracto (recursos gráficos) del EIEM (Alsina, 2019, 2020) cuando se enseñan patrones de repetición al alumnado de educación infantil (4-6 años). De acuerdo con Maldonado (2018), este enfoque apuesta por la interpretación, descripción, análisis y comprensión de información cualitativa obtenida a través de grabaciones, observaciones, entrevista, etc. En consonancia con esta aportación, nuestro diseño facilita un análisis descriptivo e interpretativo que permite mostrar, mediante la representación en matemáticas de los alumnos, los resultados obtenidos de manera longitudinal en el nivel informal, concretamente en el contexto de situaciones reales, haciendo una comparativa con los resultados recogidos en el nivel formal (recursos gráficos).

2.1 Diseño y procedimiento

Como se ha indicado, se han seleccionado las actividades enmarcadas en los contextos de situaciones reales y recursos gráficos que conforman el EIEM. Las seis propuestas han sido sometidas a un juicio de expertos donde se han valorado: a) aspectos didácticos, b) organizativos, c) metodológicos, y d) pedagógicos del itinerario didáctico. Este procedimiento, junto con la práctica reflexiva desarrollada después de cada sesión, han favorecido la articulación de análisis continuos y retrospectivos que informan sobre el diseño y facilitan su mejora longitudinalmente. Se puede ampliar dicho procedimiento en Acosta y Alsina (2020) cuando validaron y aplicaron un itinerario de patrones de repetición con escolares de 3 años.

La implementación se ha llevado a cabo de manera longitudinal, con 24 escolares españoles pertenecientes todos a una misma clase de un centro de educación público. La muestra está conformada por 12 niños y 12 niñas. La edad promedio de la muestra es de 4,8 años y 5,8 años para los dos cursos escolares correspondientes a la intervención. Se ha seleccionado este grupo por las facilidades de acceso; por la continuidad y seguimiento longitudinal de la maestra tutora; y por estar considerado un centro con baja movilidad de matrícula en cursos preescolares.

Seguidamente en la tabla 1 se muestran las actividades diseñadas y validadas para escolares de 4 a 6 años.

La intervención se lleva a cabo en grupo reducido (12 niños y niñas) para facilitar la atención individualizada y la recogida de evidencias específicas y personalizadas. Dicha distribución de participantes se realiza de manera aleatoria y se mantienen los dos subgrupos de 12 alumnos durante toda la intervención. Por tanto, de manera longitudinal, se destinan un total de ocho sesiones de intervención directa para el contexto de situaciones reales y cuatro sesiones para el de recursos gráficos, con una duración de 50 minutos cada una. Cabe destacar que previamente a la intervención, se obtuvo el consentimiento informado de todas las familias.

Tabla 1

Propuestas desarrolladas de acuerdo al contexto de enseñanza

4-5 años	
Situaciones reales	A1. Se utiliza Google Maps en la pizarra digital para mostrar diferentes calles de nuestra ciudad en busca de patrones matemáticos. A través de buenas preguntas se propone a los escolares fijarse en las fachadas de casas, edificios y comercios. Una vez identificados los patrones, de manera conjunta se reproducen utilizando cartulinas de colores.
	A2. Se muestra una imagen de un enjardinado y se invita a los alumnos a describir cómo están colocados los arbustos. Mediante buenas preguntas se les consulta si creen que los arbustos siguen una secuenciación y se les propone recrear la seriación con plastilina.
Recursos gráficos	A través de una tarea escrita previamente diseñada con diferentes tipos de toldos, se invita a los escolares a ampliar la seriación.
5-6 años	
Situaciones reales	A1. Se presenta a los alumnos una cesta con calcetines y jerséis con diseños variados; juego de ajedrez, piano de juguete; juego de barajas, fotos de baldosas; trozos de telas con dibujos de piel de algunos animales, fotos de toldos…Y se les invita a "cazar" e identificar los patrones presentes en los objetos de la cesta.
	A2. Paseo por el patio de la escuela con la finalidad de capturar fotográficamente los patrones existentes en este espacio educativo. Seguidamente, se propone a los alumnos el reto de representar en un papel alguna de las seriaciones encontradas.
Recursos gráficos	A través de fichas previamente diseñadas se invita a los alumnos a observar, identificar, analizar y leer las seriaciones propuestas para reconocer los elementos que componen la unidad mínima del patrón y poder completar la seriación.

Las sesiones se dividieron en tres fases: a) introducción de la propuesta, b) interacción y desarrollo, y c) representación y reflexión. Es importante destacar que en la fase final el alumnado representa de memoria el patrón que ha identificado en la actividad sin tener delante el modelo. El rol del docente es de guía e incitador de aprendizaje a través de preguntas intencionadas (NCTM, 2014) que inviten a generar conocimiento compartido con el grupo de iguales. Deben evitarse preguntas que no impliquen razonamiento, ni argumentación por parte de los escolares y que se contesten con un "sí" o un "no".

2.2 Recogida de datos

La recogida de datos contempla tres herramientas: i) esquemas metodológicos etnográficos de observación participante donde se hace uso del diario de campo como instrumento para registrar expresiones espontáneas de los niños y las niñas durante la realización de las tareas; II) documentación pedagógica a través del registro audiovisual, fijo y móvil, de todas las sesiones; y III) producciones escritas, en formato dibujo, de todas las representaciones de los escolares como muestra de la formalización de los conocimientos adquiridos.

Kawulich (2006) considera la observación participante como una destreza que capacita a los investigadores para reflexionar y aprender sobre las propuestas que se desarrollan con participantes en un contexto natural, utilizando la observación y la participación activa como herramientas facilitadoras de una interacción directa y sin interferencias. Por su parte, la documentación pedagógica adopta un carácter reflexivo que da voz al pensamiento del niño, reconociendo al observador como un agente activo que co-construye significado de manera reflexiva, activa y recíproca con la finalidad de crear un espacio plural y transformador (Mitchelmore, 2018). No podemos obviar que las expresiones verbales y no verbales son claves para interpretar los conocimientos y habilidades de los escolares más pequeños (Björklund *et al.,* 2020).

2.3 Análisis de los datos obtenidos

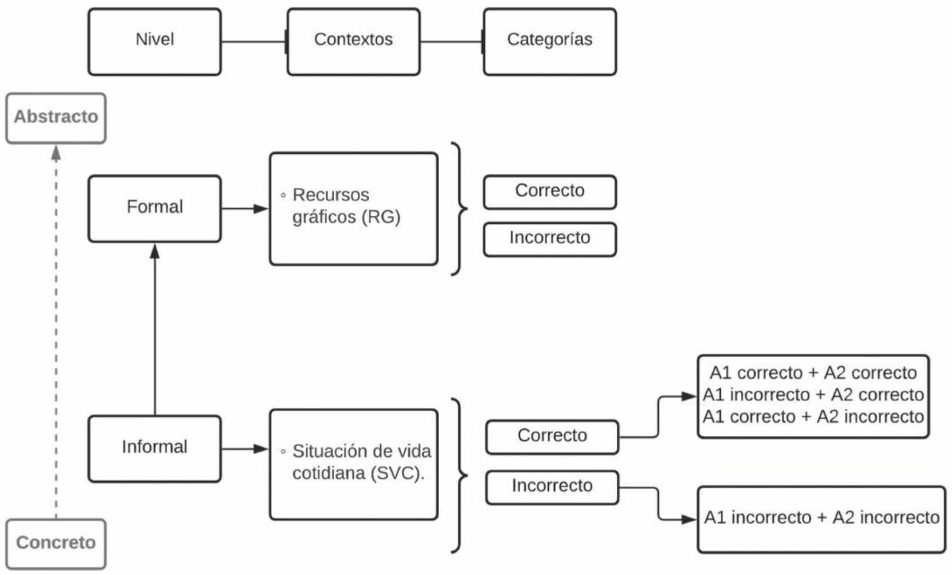
Las producciones infantiles, recogidas en formato de dibujo, se han categorizado siguiendo el diagrama que se muestra a continuación con la intención de eliminar el sesgo que genera una presencia jerarquizada de propuestas de acuerdo con el modelo que plantea el EIEM (Alsina, 2019, 2020). Se considera la categoría "correcto" cuando la representación no presenta errores e "incorrecto" cuando la producción presenta error en su estructura.

A partir de la información mostrada en la figura 1, se realiza un análisis cuantitativo donde se describen las variables categóricas según el número y porcentaje de casos en cada categoría.

Con la intención de complementar los datos anteriores, se transcriben y discuten las evidencias audiovisuales a través de un análisis interpretativo del discurso. Este análisis de los fragmentos más relevantes permite revisar las relaciones entre los textos y la realidad haciendo visible el discurso utilizado por el niño, su punto de origen, cómo fluye, y qué lo acompaña (Leeuwen, 2008). Esta información se triangula y contrasta con los datos cuantitativos, con las notas de campo registradas y con las producciones escritas de los niños y las niñas, para así mostrar también el rol que adopta el docente.

Figura 1

Diagrama de flujo con el proceso de categorización de las representaciones obtenidas



3 Resultados

Considerando el propósito de nuestro estudio, se analizan los resultados obtenidos longitudinalmente en contextos de situaciones reales y recursos gráficos, con la intención de comprobar cómo influye el contexto de enseñanza en la comprensión y representación de tareas con patrones de repetición.

Como se aprecia en la tabla 2, el 85 % de casos válidos realizó correctamente la representación del patrón identificado en las actividades que se desarrollan en el contexto de situaciones reales, frente a un 15 % que no logró desempeñar la tarea con éxito. Sin embargo, se observa un aumento significativo de errores en el contexto de recursos gráficos, situándose en un 54,2 %. El grado de éxito en este contexto es solo del 45,8 %.

Tabla 2

Resultados obtenidos para 4-5 años

Situaciones reales	Frecuencia	Porcentaje	Pct. válidos
Correcto	17	70,8	85,0
Incorrecto	3	12,5	15,0
Total válidos	20	83,3	100
No válidos	4	16,7	
Total	24	100	
Recursos gráficos	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Pct. válidos**
Correcto	11	45,8	45,8
Incorrecto	13	54,2	54,2
Total válidos	24	100	100
No válidos	0	0,0	
Total	24	100	

A continuación, se muestran los resultados correspondientes a 5-6 años.

De acuerdo con la información que se aprecia en la tabla 3, el 100 % de casos válidos representaron sin errores los patrones identificados en el contexto de situaciones reales, mientras que en el contexto de recursos gráficos solo lo hizo el 69,6 %. Observamos que, en comparación con la intervención del año anterior, las representaciones incorrectas disminuyeron un 23,8 %.

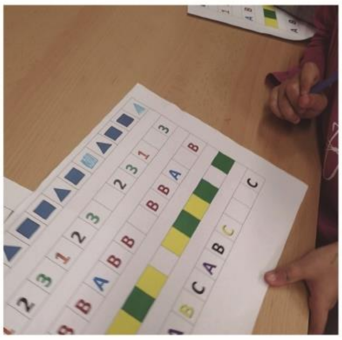
Tabla 3

Resultados obtenidos para 5-6 años

Situaciones reales	Frecuenciza	Porcentaje	Pct. válidos
Correcto	23	95,8	100,0
Incorrecto	0	0,0	0,0
Total válidos	23	95,8	100,0
No válidos	1	4,2	
Total	24	100	
Situaciones reales	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Pct. válidos**
Correcto	16	66,7	69,6
Incorrecto	7	29,2	30,4
Total válidos	23	95,8	100,0
No válidos	1	4,2	
Total	24	100	

Tabla 4

Evidencias de la implementación en cada contexto según edad

Contexto	4-5 años	5-6 años
Situaciones reales		
	Reproducen la seriación utilizando cartulinas de colores (A1)	Descubren seriaciones con elementos del patio (A2)
Recursos gráficos		
	Amplían la seriación	Completan los elementos faltantes de las seriaciones

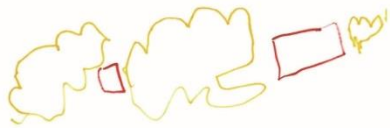
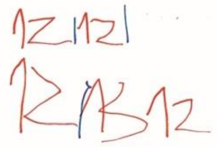
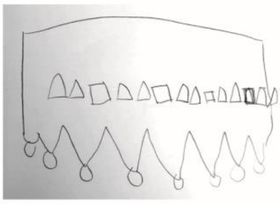
En la tabla 4 mostramos algunos ejemplos de la implementación. Por razones de espacio se selecciona uno para cada contexto y edad.

Seguidamente, se exponen algunos ejemplos de representaciones y transcripciones de diálogos obtenidos durante la implementación pedagógica para ilustrar el rol del docente como generador y promotor de aprendizaje.

A partir de los ejemplos que se muestran en la tabla., podemos observar cómo la justificación del alumnado, a pesar de la realización correcta, es más elaborada y consolidada en el contexto de situaciones reales que en el de recursos gráficos. De la misma manera, se aprecia cómo el docente a través de buenas preguntas, es decir, de intervenciones abiertas y con un lenguaje matemático preciso, invita e incita al alumnado a comunicar, justificar y razonar sus respuestas. Este escenario permite una discusión constructiva, desde una perspectiva paralela vivida por otro participante, que favorece un enriquecimiento y conceptualización para aquellos escolares que no han tenido éxito en la tarea (Vygotsky, 2004).

Tabla 5

Ejemplos de representaciones correctas obtenidas en cada contexto según edad

Contexto	4-5 años	5-6 años
Situaciones reales	 **Docente**: ¿Qué representa tu dibujo? **Alumno**: El toldo que vimos. **Docente**: ¿Por qué utilizas dos colores? **Alumno**: Porqué era amarillo-marrón, amarillo-marrón. **Docente**: ¿Y el toldo que tenía rayas blancas y azul, es también igual a este? **Alumno**: Sí, porque también tiene dos colores diferentes.	 **Alumno**: Yo pinté 1Z y raya azul, 1Z y raya azul. **Docente**: ¿Qué objeto del cesto de los tesoros has representado? **Alumno**: El jersey de rayas rosa-lila-blanco. **Docente**: ¿Nos puedes explicar por qué has utilizado un., una Z y una raya azul? **Alumno**: Porque el rosa, el lila y el blanco son colores diferentes. **Docente**: ¿Entonces has asignado el número 1 al color rosa y la Z al color lila? **Alumno**: Sí, y la raya azul al color blanco.
Recursos gráficos	 **Alumno**: Mira yo pinté triángulos y cuadrados **Docente**: ¿Nos explicas que representa tu dibujo? **Alumno**: Son dos triángulos y un cuadrado, dos triángulos y un cuadrado y así hasta el infinito. **Docente**: ¿Por qué has pintado dos triángulos y un cuadrado? **Alumno**: Porque mi corona de aniversario era así.	 **Docente**: ¿Nos explicas tu representación? **Alumno**: En la ficha había un patrón con letras y también con números. **Docente**: ¿Entonces has hecho el mismo de la ficha? **Alumno**: No porque tenía la C y yo he puesto el uno. **Docente**: El patrón de la ficha era ABCABCABC, el tuyo es AB1AB1AB1, ¿son iguales o diferentes? **Alumno**: Son diferentes. **Docente**: Pero si nos fijamos los dos tienen tres elementos diferentes (ABC) y (AB1). Entonces los podríamos considerar iguales porque tienen la misma estructura de repetición.

4 Discusión y conclusiones

Este estudio ha investigado cómo influye el contexto de enseñanza en la realización de tareas con patrones de repetición. Para ello, se analizaron las producciones escritas del alumnado para determinar si eran capaces de representar correctamente patrones de repetición en el contexto más concreto (situaciones reales) y en el más abstracto (recursos gráficos) de un itinerario de enseñanza de patrones previamente diseñado y validado. A partir de este análisis, se identificó una diferencia positiva del 32,9 % de las situaciones reales frente a los recursos gráficos en el alumnado de 4-5 años; en el alumnado de 5-6 años, aunque la diferencia entre ambos contextos disminuyó ligeramente, seguía siendo superior al 30 %.

Si se analizan los resultados de manera longitudinal, un 15 % de participantes de 4-5 años han representado de manera incorrecta los patrones en tareas planteadas a partir de situaciones reales, mientras que el porcentaje de incorrectos desciende al 0 % a los 5-6 años. En el contexto de recursos gráficos, las representaciones incorrectas disminuyen en un 23,8 %, siendo de 54,2 % para 4-5 años y de 30,4 % para 5-6 años. Sin embargo, a pesar de este descenso de errores, de manera general los y las participantes muestran dificultad para representar el patrón sin una previa interacción o manipulación de elementos concretos que conforman la unidad de repetición. En otras palabras, los datos obtenidos han evidenciado que la comprensión es más precisa en contextos en los que se prioriza la enseñanza a partir de situaciones informales de exploración de un entorno cotidiano y cercano a los niños y las niñas, donde es más fácil establecer relaciones con sus conocimientos previos. En este sentido, Castro y Castro (2016) señalan que aprenden a través de experiencias concretas con materiales y mediante interacciones lúdicas intencionadas y previamente planificadas. En esta misma línea, Zhong y Xia (2020) subrayan que la niñez necesita oportunidades de exploración, manipulación y experimentación, para de esta manera fomentar el aprendizaje desde una perspectiva lúdica y concreta.

Focalizándonos en las representaciones de los patrones, estamos de acuerdo con Alsina (2016) cuando señala que la representación de ideas y procedimientos matemáticos es un proceso indispensable para el aprendizaje, y por ello, si no hay representación no hay comprensión, y sin comprensión no puede haber aprendizaje de las matemáticas. Por ende, se puede asumir que, desde una edad temprana, los escolares deben representar para aprender matemáticas y así poder organizar, comprender y comunicar la naturaleza matemática de las acciones previamente realizadas en el plano educativo y social mediante la utilización de signos, gráficos y/o lenguaje natural. Esta es la razón principal por la que hemos tomado la representación en matemáticas como un proceso interconectado que permite: a) plasmar de manera concreta los conocimientos y procedimientos que poseen los niños y las niñas acerca de los patrones de repetición; b) evaluar el progreso en la comprensión de dichos patrones, y c) reequilibrar el proceso de enseñanza de patrones a través del diseño de tareas contextualizadas que fomentan y extienden el aprendizaje.

Desde esta perspectiva, Laski y Siegler (2014) ponen de manifiesto que los materiales de aprendizaje concretos solo son efectivos en la medida en que las actividades diseñadas están alineadas con el proceso de representación mental deseado. Es por este motivo que las propuestas educativas se deben articular con la finalidad de aumentar la codificación de las características estructurales que conforman el patrón, para facilitar la representación. Carruthers y Worthington (2005) llegan a la conclusión que, cuando los docentes alientan a los escolares de 3 a 8 años a representar en papel sus ideas matemáticas, favorecen la comprensión del simbolismo abstracto.

Nuestro estudio ha aportado datos relevantes que muestran cómo el grado de éxito de la comprensión a través de la representación está condicionado por el nivel de abstracción del contexto donde se plantea la propuesta. En esta línea, se considera que es necesario planificar y estructurar tareas que contemplen diferentes contextos de enseñanza, para así ofrecer una intervención educativa respetuosa con las necesidades del alumnado, en la que es imprescindible fomentar el uso de contextos concretos e informales que permitan ir avanzando hacia la generalización y formalización del conocimiento, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de papel y lápiz. Este enfoque requiere, por una parte, conocimientos disciplinares sobre lo que se desea enseñar (NCTM, 2014; Pincheira y Alsina, 2021); y por otra, habilidades didácticas y metodológicas para tratar un concepto o procedimiento determinado a partir de diferentes contextos de enseñanza (Alsina, 2022). En esta línea, Villalpando *et al.* (2020) señalan que el profesorado debe traducir el currículo oficial a un lenguaje real que permita otorgar significado a la práctica docente, para así acercar los contenidos académicos a los escolares de manera reflexiva, competente y vivencial.

Llegados a este punto de discusión, compartimos la idea de que las situaciones educativas son sensibles al contexto, al ponerse en evidencia que el éxito de la representación ha estado estrechamente ligado con la comprensión del patrón y dicha comprensión ha sido más exitosa en el nivel más concreto del EIEM, en el que se prioriza la enseñanza de contenido matemático a partir de situaciones reales o cercanas a los niños y las niñas. Se ha evidenciado, además, como a través de buenas peguntas se promueve, genera y consolida conocimiento compartido. Por esta razón, alentamos a los docentes a apostar por el acompañamiento de la enseñanza de patrones de repetición desde una visión dialógica y multimodal que contemple diversos escenarios educativos que transiten de manera progresiva de contextos concretos a abstractos. Por ende, nuestra finalidad es que estas experiencias reales acompañen, mediante la reflexión, la acción docente futura (Radford y Sabena, 2015) y que nuestras conclusiones sean motivo de inspiración, sin pretender ser directamente generalizables a otras realidades, puesto que el número reducido de nuestra muestra lo dificulta. En esta línea, también asumimos como limitación de nuestro estudio el uso diferido, a través de imágenes, de situaciones reales en la primera etapa del itinerario didáctico, puesto que puede haber influido en las respuestas del alumnado, y es posible saber con certeza si los errores habrían disminuido con una implementación en un contexto real directo. Como futuras líneas de investigación, nos proponemos seguir evidenciando cómo influyen los otros contextos del EIEM en la enseñanza de patrones de repetición, analizando a su vez la relación que se establece entre el conocimiento matemático del alumnado y la habilidad para justificar y argumentar sus respuestas.

Agradecimientos

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856). Agradecemos la predisposición de la escuela Pericot de Girona y a Mireia Moran, maestra de los niños y las niñas participantes.

Referencias bibliográficas

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en Educación Infantil: ¿Cómo influye el contexto de enseñanza? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo. (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101-108). SEIEM.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. Épsilon, Revista de Educación Matemática, 33(1), 7-29. https://bit.ly/3MEPMk8

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años.* Graó.

Alsina, Á. (2020). El enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué?, y ¿cómo aplicarlo en el aula? *Tangram, 3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años).* Graó.

Bock, A. M., Cartwright, K. B., McKnight, P. E., Patterson, A. B., Shriver, A. G., Leaf, B. M., Mohtasham, M. K., Vennergrund, K. C. y Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology*,., 1802.

Björklund, C. y Pramling, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education, 22*(1), 9-104. https://doi.org/10.1080/09669760.2013.809657

Björklund, C., van den Heuvel-Panhuizen, M., y Kullberg, A. (2020). Research on early childhood mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 607–619. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01177-3

Bowman, B., Donovan, M. y Burns, M. (2001). *Eager to learn: Educating our preschoolers*. National Academy Press.

Carruthers, E. y Worthington, M. (2005) Making Sense of mathematical graphics: the development of understanding abstract symbolism. *European Early Childhood Educational Research Journal, 13*(1), 57-79. https://doi.org/10.1080/13502930585209561

Castro, E. y Castro E. (2016). Matemáticas en educación infantil. En E. Castro y E. Castro (eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 19-41). Ediciones Pirámide.

Clements, H. D. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad.* Learning Tools LLC.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Kawulich, B.B. (2005). La observación participante como método de recolección de datos. *Forum Qualitative Social Research, 6*(2), art. 43. https://bit.ly/3Q8VM7G

Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education.* Lawrence Erlbaum Associates.

Laski, E. V. y Siegler, R. S. (2014). Learning from number board games: You learn what you encode. *Developmental Psychology, 50*(3), 853-864. https://doi.org/10.1037/a0034321

Leeuwen, V. T. (2008). *Discourse and practice: New tools forcritical discourse analysis*. Oxford University Press.

Lüken, M. M. y Kampmann, R. (2018). The influence of fostering children's patterning abilities on their arithmetic skills in grade 1. En Elia, I., Mulligan, J., Anderson, A., Baccaglini-Frank, A., Benz, C. (eds.) *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education*. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_4

Maldonado, J. E. (2018). *Metodología de la investigación social: Paradigmas: Cuantitativo, sociocrítico, cualitativo, complementario*. Ediciones de la U.

Mitchelmore, S. (2018). Providing Insight Through Pedagogical Documentation: Seeing Research as an Everyday Practice. En M. Fleer, y B. van Oers (eds.), *International Handbook of Early Childhood Education Volume I* (pp.190-195). Springer.

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://bit.ly/3O2PeW9

Mulligan, J.T., Oslington, G. y English, L. D. (2020) Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM-International Journal of Mathematics Education*, *52*, 663-676. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D., Sarama, J., Wolfe, C. y Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly*, *36*, 550-560. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003

Papic, M. M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of pre-schoolers' mathematical patter-

ning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42,* 237-268.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V. y Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *PNA, 11*(2), 97-124.
https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6076

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskyan semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 157-182). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Reed, K. (2001). Listen to their pictures. An investigation of children's mathematical drawings. En A. Cuoco, F.R. Curcio (eds.), *The roles of representation in School Mathematics* (pp. 215-227). National Council of teachers of Mathematics.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G. y Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from age 4 to 11. *Child Development, 88,* 1727-1742.
https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Rittle-Johnson,., Zippert, E. L. y Boice, K. L. (2018). the roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly, 46,* 166-178.
https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.006

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V. y Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), em2065.
https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R. y Levenson, E. (2018). Engaging young children with mathematical activities involving different representations: Triangles, patterns, and counting objects. *CEPS Journal, 8*(2), 9-30.
https://bit.ly/3H6YNBm

Vanluydt, E., Wijns, N., Torbeyns, J. y Dooren, W.V. (2021). Early childhood mathematical development: the association between patterning and proportional reasoning. *Educational Studies in Mathematics* 107, 93-110.
https://doi.org/10.1007/s10649-020-10017-w

Villalpando, C., Estrada-Gutiérrez, M. y Álvarez-Quiroz, G. (2020). El significado de la práctica docente, en voz de sus protagonistas. *Alteridad, 15*(2), 229-240.
https://doi.org/10.17163/alt.v15n2.2020.07

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harward University Press.

Vygotsky, L. S. (2004). Imaginación y creatividad en la infancia. *Journal of Russian and East European Psychology*, *42*, 7-97.
https://doi.org/10.1080/10610405.2004.11059210

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt B. y Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly, 49,* 152-163.
https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. y Torbeyns, J. (2021). Associations between repeating patterning, growing patterning, and numerical ability: A longitudinal panel study in four- to six-year olds. *Child Development, 92,* 1354-1368. https://doi.org/10.1111/cdev.13490

Zhong, B. y Xia, L. (2020). A systematic review on exploring the potential of educational robotics in Mathematics Education. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18* (1), pp. 79-101. https://bit.ly/3MwCUfI

ESTUDIO D

Computational Thinking and Repetition Patterns in Early Childhood Education: Longitudinal Analysis of Representation and Justification

(en revisión)

Received: 21 November 2022

Computational Thinking and Repetition Patterns in Early Childhood Education: Longitudinal Analysis of Representation and Justification

Abstract:

This paper provides a longitudinal analysis of the understanding of repetition patterns by 24 Spanish children ages 3, 4 and 5, through representation and the type of justification. A mixed quantitative and qualitative study is conducted to establish bridges between algebraic thinking and computational thinking by teaching repetition patterns in technological contexts. The data are obtained using: a) participant observations; b) audio-visual and photographic records; and c) written representations, in drawing format, from the students. The analysis involves, on the one hand, a statistical analysis of the representations of patterns, and on the other, an interpretive analysis to describe the type of justification that children use in technological contexts: "elaboration", "validation", "inference" and "prediction or decision-making". The results show that: a) with respect to the representation of patterns, errors decreased by 27.3% in 3-to-5-year-olds, with understanding and correct representation of repetition patterns gaining prominence in more than 50% of the sample from the age of 4; b) on the type of justification used, it is evident that in 3-and-4-year-olds, "elaboration" predominates, and at 5, progress is made towards "validation". We conclude that it is necessary to design learning sequences connected with theory and upheld through practice, and that foster the active role of the teacher as a promoter of teaching situations that help spur the beginning of algebraic and computational thinking.

Keywords: Computational thinking, algebraic thinking, repetition patterns, representation, justification.

INTRODUCTION

Addressing the teaching-learning process by using a textbook as the only instructional resource is no longer sufficient in a society based on knowledge that is evolving at an accelerated pace, in which digital technologies are part of daily life and alter our way of being, being and relating (Castañeda et al., 2020).

In a school environment, technology has been defined as a tool that the student can use to learn and grow (Sharapan, 2012). However, the use of technology must be a means to support learning, one that is not isolated and decontextualised. For this reason, the Technology Policy Statement of the *National Association for the Education of Young Children* (NAEYC) & *Fred Rogers Center for Early Learning and Children's Media* (2012) provides a guide for early childhood education professionals on the balanced and appropriate use of interactive digital technologies from birth to age eight. The purpose of this statement is to understand, evaluate and integrate suitable technologies for development in the classroom and thus promote digital literacy and computational thinking.

This study assumes that computational thinking is an ability of human reasoning that, through analytical and algorithmic approaches, formulates, analyses and solves problems (Bocconi et al., 2016). Accordingly, the *International Society for Technology in Education* [ISTE] and the *Computer Science Teachers Association* [CSTA] (2011) describe the following essential traits of this type of thinking in order to promote and implement it in education: a) organise data logically; b) represent them through models and simulations; c) automate solutions by sequencing in ordered steps; d) identify and analyse solutions and be able to implement the most efficient one; and e) have the ability and attitude to communicate and work as a team to achieve a common goal. Years later, ISTE (2016) set out four computational thinking skills, and urged that proposals be implemented that encompass them: 1) decomposition; 2) abstraction; 3) pattern recognition; and 4) algorithm design.

Within this framework of connections, various studies affirm that technological resources such as robots provide students with the opportunity to engage interactively, multidisciplinarily and cooperatively in the teaching-learning process (Adams & Cook, 2017; Keren & Fridin, 2014; La Paglia et al., 2017, Seckel et al., 2022). Gomoll et al. (2016) view robotics as an efficient tool for promoting basic learning. Rhine and Martin (2008) state that experience with robots facilitates the abstract transfer of mathematics to the practical reality of everyday situations.

Despite this relevance, few studies analyse the relationship between mathematical education and technological contexts in early childhood education (ages 3, 4 and 5). Zhong and Xia

(2020) state, for example, that without evidence teachers perceive a limited understanding of the opportunities of robotics, and therefore, without teacher acceptance, it is difficult for technological resources to play a significant role in mathematical education (Keren & Fridin, 2014).

The tangible and materialisable nature of robots provides a concrete, motivational and authentic way to access and consolidate abstract mathematical knowledge, as well as to develop computational thinking and promote understanding, reasoning and justification when tasks are posed that are intended to challenge and connect.

Based on these considerations, the purpose of this study is to analyse the understanding of repetition patterns in students of 3, 4 and 5 years of age when they carry out assisted teaching in technological contexts, and thus provide evidence that motivates teachers to rely on this type of mathematical content through technological resources, while promoting one of the four skills proposed by ISTE (2016): pattern recognition. It is important to note that we will focus on this skill since pattern exploration can be regarded as a springboard to promote generalisation (Vanluydt et al., 2021), anticipation, guesswork, justification, representation, and the precise use of mathematical language. Authors such as Mulligan et al. (2020) argue that a lack of knowledge of patterns and their structure can be a predictor of future mathematical difficulties. Some of the reasons for promoting the teaching of patterns in early childhood education is that patterns provide an essential foundation for the development of mathematical thinking and contribute to the overall process of representation and abstraction in mathematics (Lüken & Kampmann, 2018; McGarvey, 2012; NCTM, 2000). With this in mind, empirical and longitudinal studies have been able to demonstrate how patterns effectively contribute to the mathematical performance of students up to 11 years of age (Nguyen et al., 2016; Rittle-Johnson et al., 2017). Considering the above, Wijns et al. (2019) point out that an open area of research is to describe patterned tasks that exploit the potential of patterns and show how to implement them in early childhood education classrooms.

From this perspective, we define the study problem based on the following research question: How do technological resources support the understanding of tasks with repetition patterns, and what kind of justification do 3-, 4-, and 5-year-olds use in their representation?

This question leads to the following research objectives:

1. Analyse the understanding of repetition patterns through their representation, as part of an assisted teaching method that relies on technological resources (programmable

robots and online games), longitudinally during a three-year intervention with 24 early childhood education students (3, 4 and 5 years old).

2. Describe the type of justification that 3-, 4-, and 5-year-olds use to demonstrate an understanding of repetition patterns in technological contexts.

LITERATURE REVIEW

This section considers computational thinking and educational robots as scenarios to promote the teaching of repetition patterns, and their representation and justification as processes that promote understanding.

Computational thinking and educational robots

Based on the ideas of Papert (1985), Wing (2006, p. 33) introduced and developed the term computational thinking as "a fundamental skill for everyone, not just for computer scientists. To reading, writing, and arithmetic, we should add computational thinking to every child's analytical ability". According to Wing (2006), computational thinking is a set of thinking skills derived from computer sciences that are useful for solving problems in a given context. A few years later, she explained that computational thinking is a type of analytical thinking that supports the development of abstraction and argued that, to provide a basis for understanding and applying computational thinking, these skills have to be presented in early childhood (Wing, 2008). From this perspective, we recognise that computational thinking emerges from computing, but unlike this discipline, computational thinking can be used to transfer skills, such as abstraction, to fields other than programming (Berland & Wilensky, 2015). However, the place that computational thinking occupies in curricula varies from country to country (Nardelli, 2019). As expressed by this author, in some curricula, computational thinking is integrated into every subject, while in others, it is exclusively part of an isolated computer science subject. This varying approach may be the result of the little consensus contained in the literature to define or position itself in a specific model of computational thinking (Nardelli, 2019; Shute et al., 2017).

In this study, we share the vision of the International Society for Technology in Education (ISTE) and the Computer Science Teachers Association (CSTA) (ISTE & CSTA, 2011), who specify that computational thinking allows: a) formulating problems by using technological artifacts to solve them; b) ordering and analysing data in a logical way; c) representing said data with different elements; d) automating solutions through algorithmic thinking, that is, a sequence of ordered steps; e) implementing possible solutions in an effective and efficient way; and f) generalising and transferring this problem-solving to other similar situations or contexts. Thus, computational thinking skills should be taught at an early age in order to trigger early cognitive development in students (Avcı & Deniz, 2022; Buitrago Flórez et al., 2017). It is also necessary to promote digital skills as a way to solve problems creatively by combining abstraction and pragmatism, since such thinking is also based on mathematics (Valverde-Berrocoso et at., 2015). Our position is consistent with that of Wing (2011), who considers computational thinking as thought processes that are intrinsically related to the formulation of problems and the search for efficiently executable solutions that, as expressed by Shute et al. (2017), are reusable in different contexts. In this context, Wing (2011) emphasises that the main process of computational thinking is abstraction and that this process is very useful for "(...) defining patterns, generalising from specific instances and parameterising" (paragraph 5). In this scenario, schools must play a crucial role in linking curricular proposals framed in teaching-learning contexts that favour the development of computational thinking (Gutiérrez-Núñez et al., 2022). This is how we should realise that new technologies, in particular robotics, provide a vehicle for different multidisciplinary learning tasks, including new forms of social interaction that facilitate the cognitive, creative and communicative development of the student, as well as to promote multidisciplinary benefits in mathematics (Barker & Ansorge, 2007; Schina et al., 2021; Nugent et al., 2009). Technological environments such as online games, animation programming for children, educational robots, etc., allow learning while applying and understanding abstract concepts in a fun way. Studies carried out in Western countries have concluded that students ages 4 to 6 are able to program simple educational robots (Cejka et al. 2006; Kazakoff et al. 2012). González-González (2019, p. 17-12) chronologically schematises various proposals for children ages 3 to 6 based on a holistic and globalising approach where active and collaborative learning methodologies are executed:

- From 3-4 years old: production and execution of instructions, mainly involving the body itself and action and work with manipulatives (tangible programming).
- Between 4-5: manipulative tangible programming, incorporation of programming through natural tactile interfaces (drag-drop interactions, commands with visual representation, graphic instructions).
- Between 5-6: tangible and tactile programming, possibility of introducing commands with some words (simple instructions).

From this perspective, robotics has been selected as a means for teaching patterns, since, as Bers (2008) states, this type of resource makes abstract ideas more concrete. That is, students can check right away the impact of their programming commands on the robot's actions and understand the logic of instructions, iterative regularities and sequential thinking.

Paris and Paris (2003) argue that the use of sequenced images to tell stories is common in early childhood and that this task requires narrative thinking and understanding of sequences. Computer programming can be regarded as creating a story through sequencing (Kazakoff & Bers, 2014), since students control the behaviour of the robot through scripts. This is how involving children in programming tasks where scripts are executed promotes the externalisation and reflection of their internal thinking processes (Kazakoff & Bers, 2014).

Teaching repetition patterns: representation and justification as processes that promote understanding.

Algebraic thinking is made up of mental processes that contribute to creating referential meaning for some type of representation, and in turn constructing and expressing generalisations (Cetina-Vázquez & Cabañas-Sánchez, 2022). Through this prism, pattern exploration can be considered a springboard to promote generalisation (Vanluydt et al., 2021) and a component that positively influences early mathematical development (Lüken, 2018; Mulligan et al., 2020; Papic et al. 2011; Wijns et al., 2021), since it promotes the study of regularities, and the connection and representation of relationships through symbols (Radford, 2010). Lüken & Sauzet (2020) affirm that to learn mathematics is to develop the ability to recognise patterns, interpret structures and establish relationships. Therefore, it is necessary for children to have prior experience with pattern tasks to develop their algebraic thinking before they are instructed on the use of algebraic notation and symbology (Carraher & Schliemann, 2018).

Pattern identification involves the observation and recognition of regularities or iterative sequences in objects or data, and for Hsu et al. (2018), recognising patterns and designing algorithms are two possible computational thinking skills that can be introduced early in childhood education.

Learning patterns contributes to the ability of children, from an early age, to recognise, order and organise their world, since it has been shown that pattern recognition, comparison and analysis are factors that determine and promote the intellectual development of children (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2000). Several studies demonstrate that pattern recognition is a cognitive ability that influences a wide range of academic skills (Kidd et al., 2013; Pasnak et al., 2015). Mulligan & Mitchelmore (2009) state that, when considering patterns, it is necessary to distinguish between pattern as an ordered sequence or series, and pattern structure, that is, the organisation, rule or core that underlies the pattern. Along these lines, they state that patterns comprise two components: 1) cognitive, related to the knowledge of the structure; and 2) meta-cognitive, linked to the ability to search and analyse patterns. Du Plessis (2018, p. 3) notes that a knowledge of patterns "provides a gateway to the algebraic world of generalised thought". Zippert et al. (2020) state that there is a close relationship between the recognition of patterns and the mathematical capacity of children, given the determining role played by the ability to identify predictable sequences based on underlying rules.

McGarvey (2012) believes that when patterns are presented to children, they are more likely to develop the skills needed to understand relationships within a pattern and begin to use symbols to represent those relationships. Alsina et al. (2021) point out that the representation of mathematical ideas and procedures is an indispensable process for learning, and therefore, if there is no representation there is no understanding, and without understanding there can be no mathematical learning. Therefore, it is assumed that, from an early age, children have to represent in order to learn patterns (Acosta et al., under review). When children engage in programming activities and create scripts, they are externalising and reflecting on their internal thought processes.

From this point of view, Mulligan et al. (2004) affirm that the external images of a child reflect the structural characteristics of his/her internal representations, which allows capturing the conceptual understanding of the child. Therefore, representing also refers to the act of externalising an internal mental abstraction (Goldin, 2020). Against this backdrop, we conceptualise representation in mathematics as an interconnected process that provides specific evidence, through the use of different signs, graphs and/or natural language, of the mathematical knowledge and procedures that students have.

Additionally, promoting communication in the math classroom helps students to express themselves more clearly, which in turn allows teachers to understand what students are thinking and thus make assertive pedagogical decisions (Ingram et al., 2019). In this regard, Chua (2017, p.115) notes that "To probe into the mathematical reasoning of students, another tool is needed to make such reasoning visible: justification". Ball & Bass (2003) point out that justification is a necessary skill to discover and understand new mathematical concepts, from a flexible perspective that allows transferring mathematical procedures, to other situations and restructuring previous knowledge by generating new arguments. Cornejo-Morales et al. (2021) indicate that this reconstruction manifests itself between children's interpersonal and intrapersonal discourses when they share and justify their views. Staples et al. (2012) consider justification as a learning practice whereby children "(…) improve their understanding of mathematics and their proficiency in doing mathematics; it is a means of learning and doing mathematics" (p. 447). Cox et al. (2017) thus argue that it is necessary to listen to the mathematics of students, in order to monitor, select, sequence, discuss and share the knowledge generated among peers.

From this perspective, Chua (2017) believes that justification tasks are an integral element for learning mathematics with understanding, pointing out four types of justification: 1) "elaboration", which requires presenting the strategy or approach used; 2) "validation", which implies using arguments to support or refute a mathematical conclusion; 3) "inference", which requires connecting and interpreting the mathematical result; and 4) "prediction or decision-making", which requires finding evidence and generalisations to support a mathematical statement. This makes it possible to organise, understand, communicate and justify the mathematical nature of actions previously carried out on the educational, social, creative and technological level. Because of this, educational proposals must be constructed for the purpose of increasing the codification of the structural characteristics that comprise the pattern, to facilitate the representation and its justification.

METHOD

In keeping with our goals, we have designed a mixed study to test the opportunities for understanding provided by technological contexts when teaching repetition patterns to Early Childhood Education students (ages 3, 4 and 5). Creswell & Plano Clark (2018) state that this type of research intentionally combines the perspectives, approaches, data forms and analyses associated with a quantitative and qualitative design in order to provide a more complete and nuanced understanding of the object of study. The research design relies on quantitative + qualitative methods with the intention of emphasising the quantitative phase and the complementary role of the qualitative phase in the design of mixed methods (Creswell & Plano Clark, 2011).

From this perspective, our design facilitates a descriptive and interpretive analysis that seeks to show an understanding of repetition patterns through their representation and justification, within the framework of a teaching process that relies on the use of technological resources.

We share the idea that educational phenomena are sensitive to the context, which is why our goal is for these real references to guide future action through reflection (Radford &

Sabena, 2015) and for our conclusions to be a source of inspiration, without intending to have them be directly generalisable to other realities.

Participants

The program was implemented longitudinally over three consecutive years with 24 children, all belonging to the same class of a public school in Spain. The sample consisted of 12 boys and 12 girls. In the first year of the intervention, the average age of the participants was 3.8 years, then 4.8 years and 5.8 years for the second and third years of the intervention, respectively.

This group was selected through a non-probabilistic sampling of an accidental or causal nature (Fernández et al., 2014), since the selection criteria were determined by the possibility of having access to this group; by the continuity and longitudinal monitoring of the tutor; and by virtue of being a school with low enrolment mobility in preschool courses.

Each year, before starting the implementation of the teaching tasks, the Test of Early Mathematics Ability 3 (TEMA3), designed by Ginsburg & Baroody (2003). This test has been created for the purpose of: a) identifying students who are significantly above or below their peers; b) identifying strengths and weaknesses of early mathematical competence; c) documenting students' progress; and d) facilitating a measure of students' mathematical competence validated for use in research projects. In our case, it was administered in order to determine the children's existing mathematical knowledge and have a validated data point for our study.

Considering the interpretative scale of the TEMA3, which indicates that a score below 70 is very poor and one above 130 is very good, we note that the group generally obtained an average score of 93, 81 and 89 at the ages of 3, 4, and 5, respectively.

The participants had previous knowledge of working with patterns. During the three years of the intervention, cross-cutting tasks with patterns were implemented through different educational contexts (real situations, manipulatives, playful, literary and graphic resources) following the Approach of the Mathematics Teaching Itineraries (EIEM) (Alsina, 2019, 2020a, 2022). This approach shuns the teaching of mathematics based on repetition and memorisation, and instead proposes that mathematics be taught as a journey from the concrete to the abstract through deliberate teaching sequences that consider different contexts (Acosta & Alsina, 2021, 2022).

Ethical considerations

Before starting the field work, and in an effort to provide transparency, and based on ethical principles, the families were informed of the following aspects: purpose of the research; goals and timeline; procedure; and the need to record audio and video of the sessions. As a result, all the families involved in the study provided their informed consent and approval. In the same way, the children's desire to participate or not in the activities and to be recorded and photographed was respected throughout the intervention.

Design and procedure

During the three school years, three tasks were designed in technological contexts that relied on different resources. In keeping with the implementation in González-González (2019), the first year, the intervention involved the Bee-bots programmable robots; the second year, the students worked on patterns using an iPad and an online game; and finally, in the third year they solved challenges with the Cubetto robot. All the tasks included three intervention sessions: 1) introduction; 2) performance of the challenge, and 3) conclusion, dialogue and confirmation of the content learned. In order to ensure personalised and individual instruction, the group was divided into two randomly. As a result, over the course of three years, 9 sessions lasting 50 minutes each were held, prioritising tasks with repetition patterns in technological contexts.

The implementation of the intervention considered the phases proposed in the Mathematical Literacy Model for Children (Alsina, 2017). The phases, described in Figure 1, promote the students' mental autonomy, the formulation of hypotheses, as well as the design and application of creative problem-solving strategies, all by relying on a verified and negotiated debate to reach a joint construction of solutions (Alsina, 2020b).

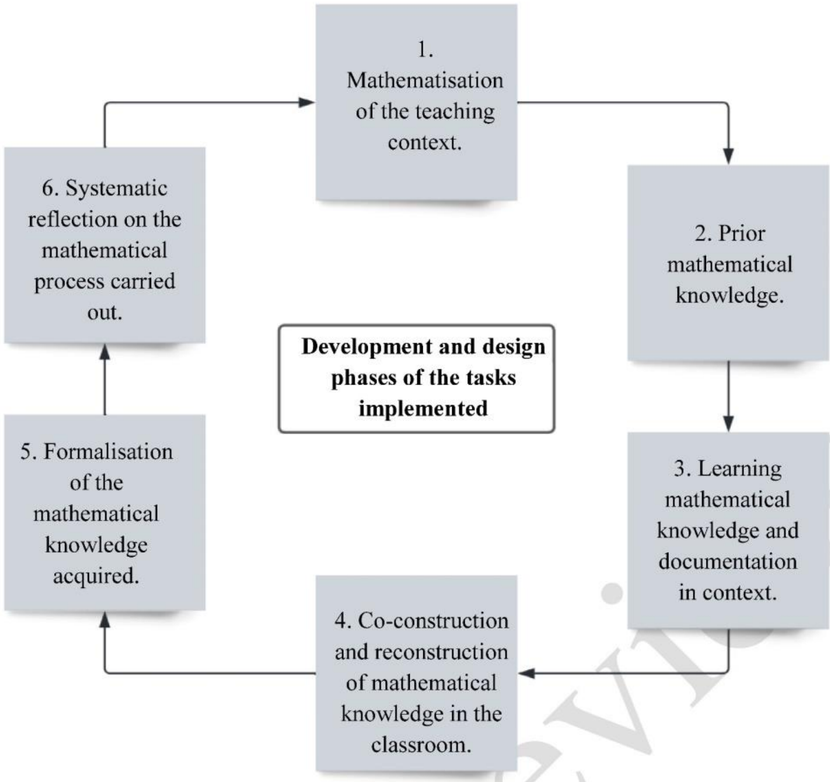


Figure 1. Mathematical Literacy Model for Children, Alsina (2017)

Below, we specify each of the phases based on the design, planning and intervention of this study:

Phase 1. Mathematisation of the teaching context: As part of a longitudinal study, the context of technological resources is planned to convey the teaching of repetition patterns. The content is approached keeping the literature in mind, and an itinerary of increasing difficulty is set up according to the pattern types and the age at which they are taught, as shown in Figure 2.

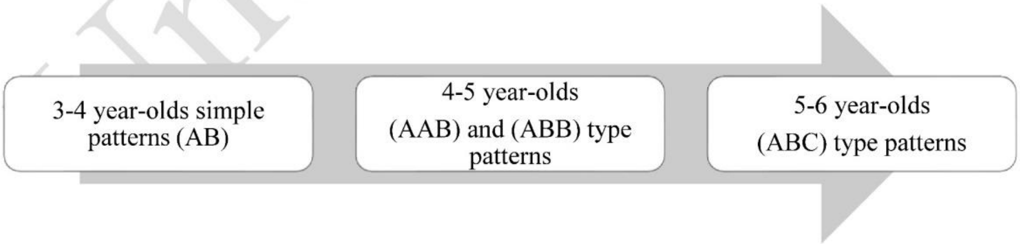


Figure 2. Types of patterns introduced at each age

Phase 2. Prior mathematical knowledge: The Ginsburg & Baroody TEMA-3 Test is applied every year (2003) and, through proper questions such as strategies to bring out the students' knowledge, reflexive processes are induced that generate the co-construction of knowledge within the framework of teaching for understanding (Anijovich & Mora, 2021).

Phase 3. Learning mathematical knowledge and documentation in context: We opted for tasks that engage skills, such as copying, interpolating, extending, translating or abstracting, and identifying the unit of repetition, providing the opportunity to create sequences in order to solve a challenge or problem conveyed in a technological context (Figure 3). All the actions carried out are documented.

Age	Task	Sessions
3	The students are prompted to enter the correct sequence of commands into the programmable educational robots (Bee-bots) in order to achieve the challenge proposed: to help the bee collect as much pollen as possible.	1. We are robots. 2. Execution of the challenge. 3. Space for reflection, representation and formalisation.
4	Copy, extend and interpolate patterns through the online game “In series”, accessible at: https://clic.xtec.cat/projects/enserie/jclic.js/index.html	1. Familiarisation with the iPad. 2. Execution of tasks. 3. Space for reflection, representation and formalisation.
5	Patterns are created with Lego Duplo pieces, and based on the interaction with the programming sheets of the “Cubetto” robot, sequences of actions are associated with the series created with the manipulatives. Next, the route designed is checked and the finished building, which follows the same pattern that was used with the programming sheets, is placed at the end of the route.	1. We are robots. 2. Execution of the challenge. 3. Space for reflection, representation and formalisation.

Figure 3. Tasks designed and implemented longitudinally

Phase 4. Co-construction and reconstruction of mathematical knowledge in the classroom: The learning produced is communicated in context, prioritising a precise and adequate mathematical language. In this phase, “the new co-built knowledge is contrasted with prior knowledge, leading to the reconstruction of mathematical knowledge” (Alsina, 2020b. p. 174).

Phase 5. Formalisation of the mathematical knowledge acquired: The process of representation is used to materialise the formalisation of the understanding of the repetition patterns addressed, in order to start on the path to justification.

Phase 6. Systematic reflection on the mathematical process carried out: Introspection on the practice itself is promoted by creating iterative cycles of longitudinal reflection that question certainties and explore new perspectives in order to reflexively recover what happened and think about improving future actions (Anijovich & Mora, 2021).

Information-gathering techniques

Data were collected at three levels (Figure 4).

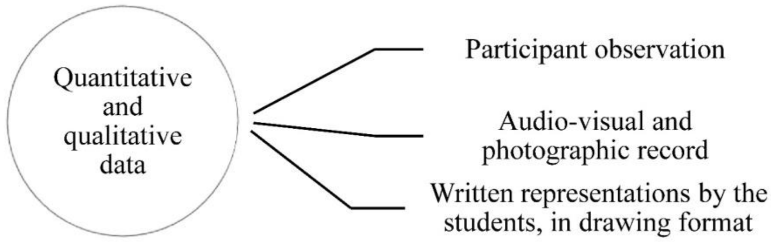


Figure 4. Methods of obtaining qualitative and quantitative data

As shown in Figure 4, we opted to use: a) ethnographic methodological schemes of participant observation that rely on a field diary as a tool to record the children's spontaneous expressions during the performance of the tasks; b) pedagogical documentation through a fixed and mobile audio-visual record of all the sessions; and c) written representations, in drawing format, of all the children's output as a sample of the formalisation of the knowledge acquired.

Kawulich (2006) believes that observation and active participation promotes a direct interaction that allows researchers to learn and reflect on the activities that are implemented with the participants in a natural setting. In this scenario, the pedagogical documentation gives a voice to the child's thinking and makes it possible to interpret the knowledge and skills of younger children through verbal and non-verbal expressions (Björklund et al., 2020). We agree with Mitchelmore (2018) when he states that, "the processes of pedagogical documentation inherently support the interaction of the collection and generation of concurrent data" (p.190), where the observer acts as an active agent who co-constructs meaning in a reflective, active and reciprocal way in order to create a plural and transformative space (Mitchelmore, 2018).

Analysis of the data obtained

We conducted a descriptive analysis with a dual focus on the responses recorded during the intervention (Esterberg, 2002). On the one hand, the students' representations are categorised by age into two case groups: 1) correct, when the written production exhibits no errors; and 2) incorrect, when it does exhibit errors. An invalid case occurs when the child is absent on the day of the intervention. The quantitative analysis was carried out as follows (Figure 5):

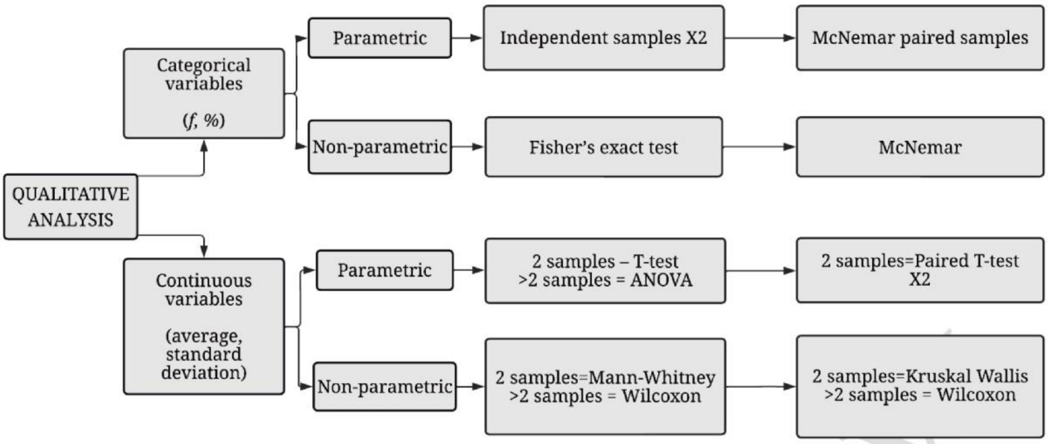


Figure 5. Flow diagram showing the statistical analysis employed

On the other hand, the children's contributions are analysed in an interpretive way to describe the type of justification they use, based on the Chua model (2017) as an instrument (Figure 6). This analysis involves cyclical and deductive reviews, where categorisation disagreements are triangulated and discussed until a consensus is established.

Type of justification	Purpose of the justification	Supplemental elements
Elaboration	Explain how…	A description of what was done
Validation	Explain why…	Evidence to accept or refute a claim
Inference	Explain what…	Use of mathematical discourse with keywords from the task or challenge addressed
Prediction/decision-making	Explain whether…	A generalised decision with evidence to support or refute the mathematical claim

Figure 6. Type of justification based on the purpose and elements that supplement it Source: Adapted from Chua (2017)

With the intention of complementing the above data, audiovisual evidence is transcribed and discussed after the fact by analysing the discourse used by the student to justify their actions. Figure 7 shows the scheme that guided the reduction of the data and the assignment of the categories described by Chua (2017) through the *Atlas.ti* program.

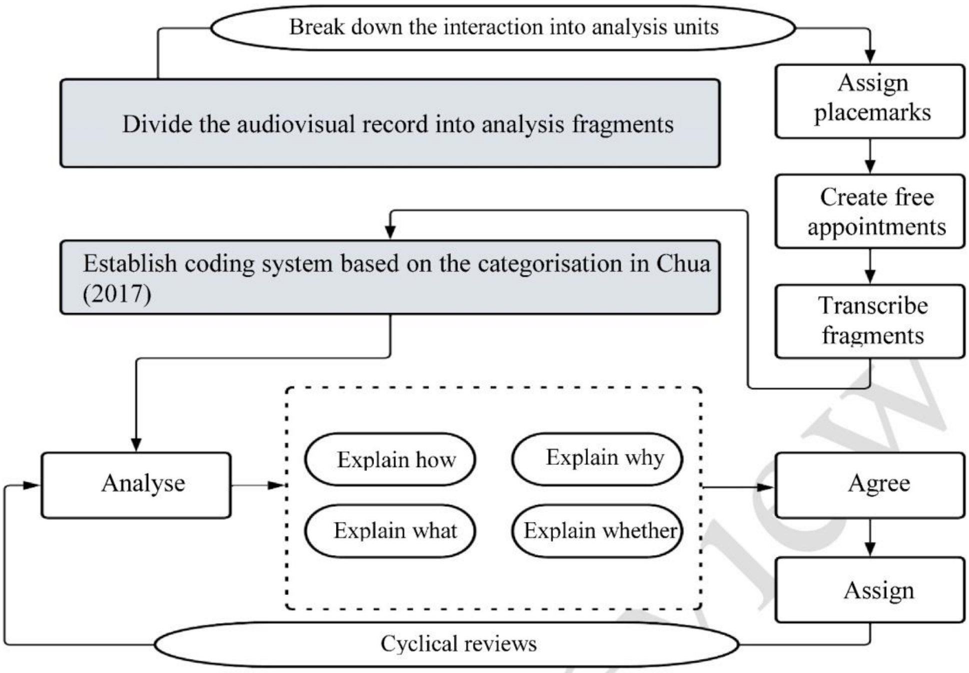


Figure 7. Data reduction processes and categorisation of the students' justification

At this point in the qualitative analysis, it is necessary to highlight that the detection of the most relevant fragments allows us to review the relationships between the texts and reality, revealing the discourse used by the child, its point of origin, how it flows, and what accompanies it (Leeuwen, 2008).

RESULTS

In keeping with the objectives of our study, we analyse, on the one hand, the understanding of repetition patterns in a context of technological resources, through their representation; and on the other, we describe the type of justification used by children aged 3, 4 and 5 to demonstrate their understanding of how said repetition patterns are taught. Table 1 shows the valid cases that comprise the final analysis sample.

Table 1. Description of valid cases during the longitudinal intervention

3		**4**		**5**	
f	%	*f*	%	*f*	%
22	91.7	24	100	22	91.7

As the table above shows, two participants were lost in the first year and two in the third year, since they did not attend school on the day of the intervention.

Understanding repetition patterns through their representation

The results of Figure 8 show an increasing trend of correct representations that are evidenced longitudinally.

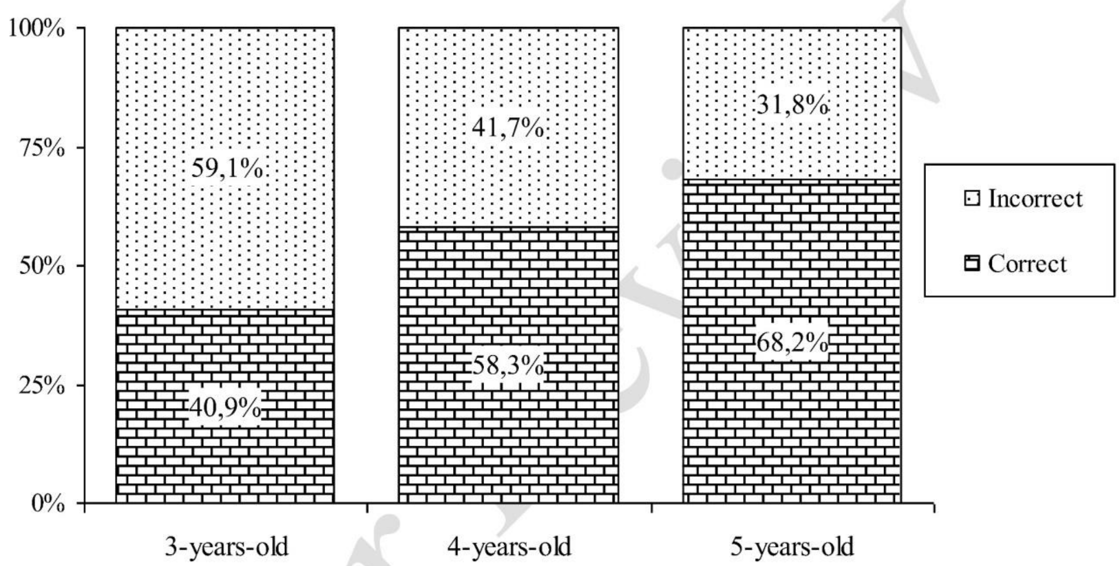
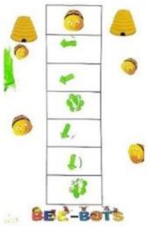
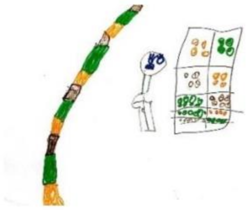


Figure 8. Categorisation of longitudinal results

In general, we see that 40.9% of 3-year-olds represented without errors the repetition pattern proposed through tasks with Bee-bot; 58.3% of 4-year-olds did the same with the patterns practiced using online games; and 68.2% of 5-year-olds with the sequence executed using Cubettos. We also see that errors decreased by 27.3% between the first year of the intervention and the last.

Examples of representations categorised as correct are presented below (Table 2). Due to space constraints, one example is chosen for each age.

Table 2. Examples of correct representations for 3-, 4- and 5-year-olds

	3	4	5
Correct representations	 Representation of a pattern with an AAB unit, despite not having been introduced directly, but agreed between equals.	 Alphanumeric representation of one of the proposals of the online game that suggested expanding the series: 	 Representation of a pattern with an ABC unit executed using Cubettos.

The information presented in Table 2 shows how children are able to represent patterns with different repetition units.

Table 3 below shows the correlation between the score provided by the TEMA-3 of Ginsburg & Baroody (2003) and the categorisation of the participants' written productions.

Table 3. Correlation TEMA-3 score and written representations in drawing format

Age	3		4		5	
Categories	Correct	Incorrect	Correct	Incorrect	Correct	Incorrect
	13	9	14	10	15	7
Average	88.92	104.56	83.14	71.10	93.53	81.71
Standard deviation	19.02	20.29	17.475	20.404	19.364	18.355
P-value	0.080		0.039		0.191	

P-value calculated using the parametric T-Student statistic for two independent samples with a 95% confidence level.

Table 3 shows a direct relationship between the TEMA-3 score and the correct representation of the repetition patterns for 3- and 4-year-olds, yielding a significant P-value of 0.080 and 0.039, respectively. For 5-year-olds, no statistically significant differences were observed, despite a percentage of 93.53% correct versus 81.71% incorrect.

Type of justification that 3-, 4-, and 5-year-olds use to demonstrate an understanding of repetition patterns in technological contexts

The results obtained from the qualitative analysis carried out through the *Atlas.ti* program are presented below. This analysis breaks down all the recorded sessions into analysis units, focusing on the justification provided by each child over the course of the task. Once the relevant fragment was detected, it was transcribed and coded as per the deductive categorisation in Chua (2017). The coding system adopted presents an increasing level of sophistication depending on the categories proposed by Chua (2017): 1) Elaboration; 2) Validation; 3) Inference; and 4) Prediction/decision-making. Our data are summarised in Table 4.

Table 4. Longitudinal distribution of frequencies and percentages by the type of justification used by the children

Purpose of the justification	age 3		age 4		age 5	
	f	%	*f*	%	*f*	%
1. Elaboration (Explain how)	14	63.6	12	50	3	13.6
2. Validation (Explain why)	8	36.4	7	29.2	10	45.5
3. Inference (Explain what)	0		5	20.8	7	31.8
4. Prediction/decision-making (Explain whether)	0		0		2	9.1

In general, the data in Table 4 show how the "elaboration" category is present in ages 3, 4 and 5, showing a relevant presence of 63.6% and 50% for ages 3 and 4, respectively. It should be noted that "validation" also predominates longitudinally, being the type of justification most used by 5-year-old children (45.5%). The "inference" does not appear until age 4, occupying a presence of 20.8% and showing a slight increase of 11% at age 5. Finally, "prediction/decision-making" remains absent at ages 3 and 4, and only two 2 children (9.1%) exhibit this type of justification to argue - with evidence tailored to their age - the underlying rule that governs the repetition pattern in the tasks carried out using Cubettos.

During the longitudinal qualitative analysis, some recurring questions were observed by the teacher, which drove a specific type of justification. By way of example, some of them are shown in Figure 9.

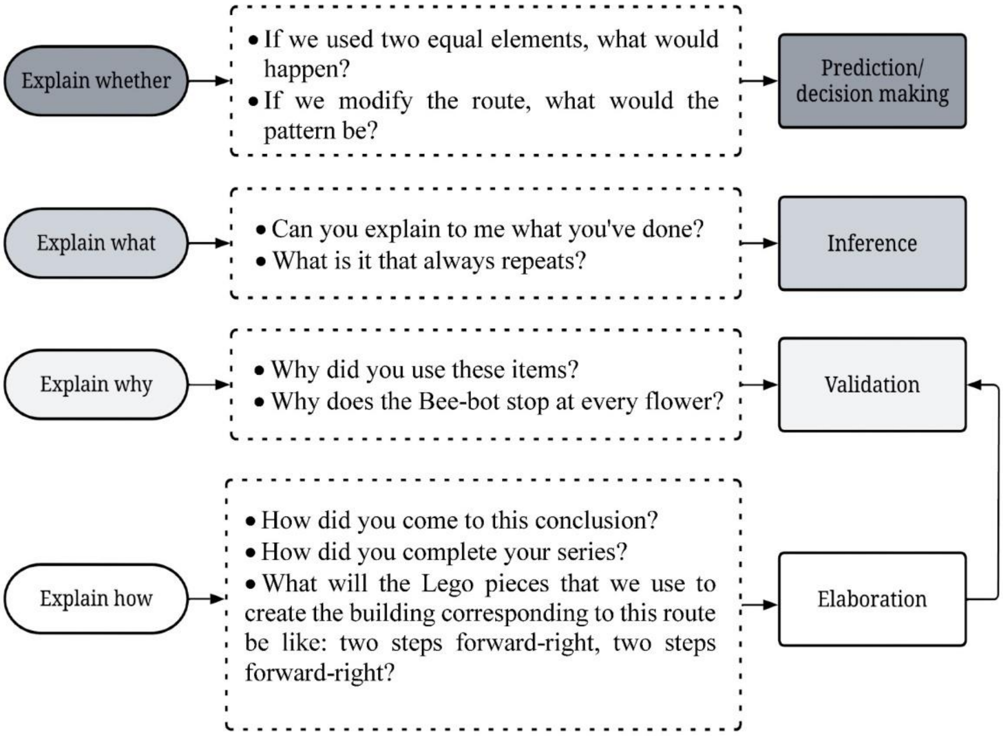


Figure 9. Examples of questions used by the teacher over the course of the tasks

As Figure 9 shows, in general, the questions prompt a more elaborate response in an effort to check the children's level of understanding.

Next, Table 5 establishes a statistical correlation between the categorised results (Chua, 2017) and the TEMA-3 score (Ginsburg & Baroody, 2003).

Table 5. Correlation TEMA-3 score vs Justification

age 3	N	Average	Standard Deviation	P-value
1. Elaboration	14	85.00	13.485	0.000
2. Validation	8	114.75	15.229	
3. Inference				

4. Prediction/decision-making				
age 4	**N**	**Average**	**Standard Deviation**	**P-value**
1. Elaboration	12	64.5	8.713	0.000
2. Validation	7	88.4	7.480	
3. Inference	5	110.4	8.142	
4. Prediction/decision-making				
age 5	**N**	**Average**	**Standard Deviation**	**P-value**
1. Elaboration	3	66.7	1.155	0.000
2. Validation	10	83.5	10.047	
3. Inference	7	99.1	16.965	
4. Prediction/decision-making	2	125.0	7.071	

P-value calculated using the Bonferroni statistic with a 95% confidence level.

Table 5 shows that, for 3-year-olds, the "validation" subgroup has a higher TEMA-3 score than the "elaboration" subgroup, with a gap between averages of 29.75 points. In the 4-year-olds, five responses from the children emerge involving "inference" tasks. This subgroup, with respect to the previous types of justification, shows a difference between averages of 45.9 and 22 points in relation to the "elaboration" and "validation" subgroups, respectively. Finally, in 5-year-olds, two responses are categorised in the "prediction/decision-making" subgroup, revealing a gap between averages of 58.3, 41.5 and 25.9 points with the "elaboration", "validation" and "inference" subgroups, respectively. Longitudinally, a statistically significant relationship is described between the TEMA-3 score and the type of justification, with the P-value for 3-year-olds being 0.000. Our interpretation, then, is that the higher the TEMA-3 score, the more sophisticated the justification.

Examples of the most prominent types of justification for each age are provided below (Table 6).

Table 6. Examples of the predominant type of justification for 3-, -4 and 5-year-olds

Age	Type of justification	Documentation	Field transcriptions
3	Elaboration		Teacher: How many stops will the bee have to make? Student: 1, 2, and 3. There are 3 flowers. Teacher: Very good, continue with the challenge.
4	Elaboration		Teacher: How did you complete the series? Student: By putting a large triangle and two small ones, a large triangle and two small ones. Teacher: So what did you put between the two large triangles? Student: Two small triangles.
5	Validation	 	Student 1: The Cubetto moves up, turns to one side, then the other, moves up, turns to one side and then the other. Student 2: And the blue chip? Student 1: The blue one repeats everything. Teacher: So, how many colours will we use for the Lego building? Student 1: three colours. Teacher: Why three colours? Student 1: Because it moves forward, turns to one side, and turns to the other. They are three separate things. My building will be yellow-green-blue, yellow-green-blue.

Based on the findings shown in Table 6, we see how, through proper questions, the teacher invites and encourages the students to communicate, argue and justify their answers, in order to achieve and perfect a more sophisticated type of justification.

DISCUSSION AND CONCLUSIONS

In this study, we analysed the opportunities for understanding provided by technological contexts when teaching repetition patterns to students ages 3, 4 and 5. In keeping with the objectives of the study, we analysed, on the one hand, the understanding of repetition patterns through their representation and, on the other, the type of justification used by children ages 3, 4 and 5 to demonstrate their understanding of said patterns.

In relation to the understanding of repetition patterns through their representation, we observed an upward longitudinal trend of success by the children, that is, a gradual increase in the number of correct representations. From ages 3 to 5 year, the errors decreased by 27.3%, since, starting from the age of 4, over 50% of the sample understood and correctly represented repetition patterns. It is thus evident that technological contexts can positively influence the understanding of repetition patterns by allowing the abstract structure of a series to be manipulated in a concrete manner. In this sense, we acknowledge the finding in Lüken & Sauzet (2020) when they explain that to learn mathematics is to develop the ability to recognise patterns, interpret structures and establish relationships. As specified by NCTM (2000), in Pre-K-2 (3 to 8 years old), the goal is to "recognise, describe and extend patterns, such as sequences of sounds and shapes or simple numerical patterns, and translate from one representation to another [and] analyse how repetitive and increasing patterns are generated (NCTM, 2000, p.90)". This is how we begin to recognise that the teaching of patterns in K-2 (5 to 8 years old) is related to sequences, functions and relationships(Carraher & Schliemann, 2019). Later, in grades 3-5 (8-12 years old), students are expected to be able to use multiple representations (words, tables, graphs) to describe, extend, and make generalisations about geometric and numerical patterns.

Authors such as Carpenter et al. (2005) regard students' intuitive knowledge of patterns as a foundation that helps in the transition to early algebraic thinking. Engaging children in algebraic thinking early involves designing tasks and learning opportunities that promote abstraction and generalisation while fostering the ability to think structurally (Stephens et al., 2015). Precisely for Kieran (2004), algebraic thought it implies "(...) analysing relationships between quantities, noticing the structure, studying change, generalising, problem solving, modelling, justification, testing and prediction" (p.149). The aim is thus to take advantage of the opportunity provided by technological contexts when teaching repetition patterns with early childhood education students (3, 4 and 5 years old) to build a solid foundation of learning and concrete processes that aid in the acquisition and processing of more sophisticated knowledge in later stages of teaching-learning. In this regard, the study conducted has shown that children, with proper support from a teacher, begin to perceive a series not as the alternation of elements, but as a structure governed by a rule of repetition.

When students, through Bee-bots, online games or Cubettos, engage in actions that follow a recurring sequence, it provides them an introduction into the abstraction of the underlying rule of a repetition pattern. This fact supports the promotion of one of the four computational thinking skills described by ISTE (2016): pattern recognition. This ability encourages problem solving, since, as stated by Lee et al. (2022),

> without pattern recognition, each problem is new and novel so that problem solving or information processing does not become more systematic and efficient. Further, without pattern recognition, sorting by characteristics or by similarities and differences is especially challenging. Characteristics — those features or qualities belong to a group, thing, or person — are used to make sense of much of the world and to organise our thinking. ("Pattern recognition", paragraph 1).

However, it is necessary to bear in mind that recognition of the repetition structure does not manifest itself at the age of 3 (Acosta & Alsina, 2020: Acosta et al., 2022). Rittle-Johnson et al. (2015) confirmed that this is only the case from the age of four or five, and requires the use of instructional explanations by the teacher. Along these lines, Acosta & Alsina (2020, 2022) propose approaches that allow children to transition from concrete and informal knowledge to abstract and formal knowledge, tracing a path of increasing difficulty in keeping with the students' abilities; that is, by considering what they are capable of, without limiting their opportunities to grow and learn.

This study has also provided results that coincide with the findings of authors such as Kidd et al. (2013) and Warren & Miller (2013), who state that there is a clear relationship between the ability to perform tasks with patterns and an individual's mathematical ability. From this perspective, we found a statistically significant correlation between the TEMA-3 score of students aged 3 and 4 and the successful performance of the representation task. One notable result of our study is the finding that the level of sophistication of the mathematical justification was also directly related to the TEMA-3 score, yielding a statistically significant P-value for 3-, 4- and 5-year-olds.

In relation to the type of justification used by children ages 3, 4 and 5 to demonstrate their understanding of repetition patterns, we were able to show the importance of having the teacher encourage, through questions, reflections typical of computational thinking; that is, explicit arguments focused on pattern recognition in order to provide a response to a challenge or task articulated in a technological context. Taking into consideration the contributions of NCTM (2014), one of the traits of effective mathematics teaching practices relies on formulating questions to children to elicit explanations of their own reasoning processes, and thus be able to construct a mathematically meaningful discourse. Accordingly, we relied on the use of open questions that seek to promote and mobilise increasingly sophisticated justifications focused on understanding the structure as a replicable rule, thus avoiding teacher questions that are answered with a “yes” or a “no”. These questions are intended to promote active participation and externalise the level of understanding of children.

As we have seen, at the age of 3, more than half of the participants in our study use “elaboration” as a type of justification, using a descriptive type of discourse; that is, they only explain the successive elements of their representation. At the age of 4, “elaboration” continues to be the predominant type of justification in 50% of the sample. However, some students start using mathematical discourse with keywords from the task or challenge presented, with the “inference” subgroup thus accounting for 20.8%. Finally, by the age of 5, the majority type of justification is in the “validation” subgroup at 45.5%, with the “prediction/decision-making” subgroup emerging with 9.1%. It should be noted that the two students who were in this type of justification group scored higher than average on the TEMA-3 by Ginsburg & Baroody (2003). Longitudinally, then, we see diversification in the type of justification, which allows the students to advance toward learning based on comprehension and mathematical literacy. From this perspective, the knowledge shared between equals provides an opportunity to favour the construction of an increasingly sophisticated and significant mathematical discourse, both among those who are involved in the justification, and the audience that is inspired by said justification (Staples et al., 2012).

The limitations of our study are the sample size, which does not allow us to generalise the results; the lack of digital skills in some children, which may have influenced the performance of the tasks; and, finally, the loss of two participants in the first and last years of the implementation. In the future, it will be necessary to expand this research with a larger sample based on the results of this study to assess, in addition, the impact of computational thinking in other contexts of mathematics teaching.

In summary, we believe it necessary to emphasise: a) the meticulous design of learning sequences connected with theory and supported by practice, to contribute to the start of algebraic and computational thinking; b) the role of the teacher as a guide who accompanies and prompts students to recognise, transfer and represent patterns in technological contexts; c) the use of knowledge-generating questions that invite children to create a mathematically significant discourse.

Our 21st century society demands citizens with critical-thinking and decision-making skills to provide creative solutions to contemporary problems. This may be one of the greatest reasons why computational thinking, like algebraic thinking, is starting to make its way into today’s schools (Kilhamn et al., 2022). Zhong & Xia (2020) note that young children need opportunities to explore, engage and experiment with interactive media in order to promote learning through enjoyment and a concrete perspective. Although there is still a long way to go, this study shows teachers how technological resources can also contribute to a tangible understanding of abstract mathematical concepts and pattern recognition in order to promote two types of thought - algebraic and computational - that can coexist in a connected way.

Author contributions: All authors were involved in concept, design, collection of data, interpretation, writing, and critically revising the article. All authors approve final version of the article.

Funding: This work was supported by the Ministry of Education, Culture and Sports of Spain under the Grant for University Teacher Training (FPU16-01856), by the National Agency for Research and Development of the Chilean Government (ANID) through a PhD scholarship abroad (Nº 72200447) and the Department of Specific Didactics of the Faculty of Education and Psychology of the University of Girona.

Acknowledgements: We would like to thank Pericot school in Girona and Mireia Moran, teacher of the participating children. The authors would like to acknowledge the editor and reviewers for their help in improving the manuscript.

Declaration of interest: Authors declare no competing interest.

Data availability: Data generated or analysed during this study are available from the authors on request.

REFERENCES

Acosta, Y., & Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14–29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y., & Alsina, A. (2021). Aprendiendo patrones en Educación Infantil: ¿Cómo influye el contexto de enseñanza? In Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIV*. Valencia: SEIEM.

Acosta, Y., & Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad, 17*, (2), 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Acosta, Y., Pincheira, N., & Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Acosta, Y., Alsina, A., & Ayala-Altamirano, C. (en revisión). Relationship between teaching contexts and 4-year-old children's patterning competencies.

Adams, K. D., & Cook, A. M. (2017). Performing mathematics activities with non-standard units of measurement using robots controlled via speech-generating devices: Three case studies. Disability and Rehabilitation. *Assistive Technology, 12*(5), 491–503. https://doi.org/10.3109/17483107.2016.1151954

Alsina, A. (2017). Caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia: vinculando investigación con buenas prácticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 59-78. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i12.181

Alsina, A. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años*. Graó.

Alsina, A. (2020a). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? T*ANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, A. (2020b). Conexiones matemáticas a través de actividades STEAM en Educación Infantil *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*(58), 168-190.

Alsina, A., Maurandi-Lopez, A., Ferre, E., & Coronata, C. (2021). Validating an Instrument to Evaluate the Teaching of Mathematics Through Processes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19,* 559–577. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10064-y

Anijovich, R., & Mora, S. (2021). *Estrategias de enseñanza: otra mirada al quehacer en el aula* (2a edición). Aique Grupo Editor.

Avcı, C., Deniz, M.N. (2022). Computational thinking: early childhood teachers' and prospective teachers' preconceptions and self-efficacy. *Education and Information Technologies*, *27*, 11689–11713 https://doi.org/10.1007/s10639-022-11078-5

Barker, B. S., & Ansorge, J. (2007). Robotics as means to increase achievement scores in an informal learning environment. *Journal of Research on Technology in Education, 39*(3), 229–243. https://doi.org/10.1080/15391523.2007.10782481

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3–14). CMESG/GCEDM.

Berland, M., & Wilensky, U. (2015). Comparing Virtual and Physical Robotics Environments for Supporting Complex Systems and Computational Thinking. *Journal of Science Education and Technology*, *24*(5), 628–647. https://doi.org/10.1007/s10956-015-9552-x

Bocconi, S., Chioccariello, A., Dettori, G., Ferrari, A., & Engelhardt, K. (2016). *Developing Computational Thinking in Compulsory Education-Implications for policy and practice.* Publications Office of the European Union.

Björklund, C., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kullberg, A. (2020). Research on early childhood mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 607–619 https://doi.org/10.1007/s11858-020-01177-3

Bers, M. (2008). *Blocks to Robots: Learning with technology in the Early Childhood Classroom*. Teacher's College Press.

Buitrago Flórez, F., Casallas, R., Hernández, M., Reyes, A., Restrepo, S., & Danies, G. (2017). Changing a generation's way of thinking: Teaching computational thinking through programming. *Review of Educational Research,87*(4), 834–860. https://doi.org/10.3102/0034654317710096

Castañeda, L., Salinas, J., & Adell, J. (2020). Hacia una definición contemporánea de la Tecnología Educativa. *Digital Education Review, 37*, 240-268. https://doi.org/10.1344/der.2020.37.240-268

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53–59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Reasoning. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- 12- year-olds*, (107-138). The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice. ICME-13 Monographs. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 479–522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Cejka, E., Rogers, C., & Portsmore, M. (2006). Kindergarten robotics: Using robotics to motivate math, science, and engineering literacy in elementary school. *International Journal of Engineering Education,22*(4), 711–722.

Cetina-Vázquez, M., & Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(1), 65-86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Creswell, J.W., & Plano Clark, V.L. (2011) *Designing and Conducting Mixed Methods Research*. 2nd Edition, Sage Publications.

Creswell, J.W., & Plano Clark, V.L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (3rd ed.). Sage.

Chua, B.L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. *CERME 10*, Dublin, Ireland.

Cornejo-Morales, C. E., Goizueta, M., & Alsina, Á. (2021). La situación argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil. *PNA 15*(3), 159-185. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.16048

Cox, D. C., Meicenheimer, J. & Hickey, D. (2017). Eliciting and Using Evidence of Student Thinking Giving Students Voice. In Spangler, D. A. & Wanko, J. J. (Eds.) *Enhancing Classroom Practice* (pp. 89-97). National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Du Plessis, J. (2018). Early algebra: Repeating pattern and structural thinking at foundation phase. *South African Journal of Childhood Education, 8*(2), a578. https://doi.org/10.4102/sajce.v8i2.578

Durak, H. Y., Yilmaz, F. G. K., & Bartin, R. Y. (2019). Computational thinking, programming self-efcacy, problem solving and experiences in the programming process conducted with robotic activities. *Contemporary Educational Technology, 10*(2), 173–197. https://doi.org/10.30935/cet.554493

Esterberg, K. (2002). *Qualitative methods in social research*. McGraw Hill.

Fernández, C., Baptista, P., & Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Ginsburg, H.P., & Baroody, A.J. (2003). *Test of Early Mathematics Ability-Third Edition*. Pro Ed.

Goldin, G.A. (2020). Mathematical Representations. In S. Lerman (Eds), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_103

Gomoll, A., Hmelo-Silver, C. E., Šabanović, S., & Francisco, M. (2016). Dragons, ladybugs, and softballs: Girls' STEM engagement with human-centered robotics. *Journal of Science Education and Technology, 25*(6), 899–914. https://doi.org/10.1007/s10956-016-9671-z

González-González, C. S. (2019). Estado del arte en la enseñanza del pensamiento computacional y la programación en la etapa infantil. *Education in the Knowledge Society, 20,*1-15. https://doi.org/10.14201/eks2019_20_a17

Gutiérrez-Núñez, S. E., Cordero-Hidalgo, A., & Tarango, J. (2022). Implications of Computational Thinking Knowledge Transfer for Developing Educational Interventions. *Contemporary Educational Technology, 14*(3), ep367. https://doi.org/10.30935/cedtech/11810

Hsu, T.C., Chang, S.CH, & Hung, Y.T. (2018). How to learn and how to teach computational thinking: Suggestions based on a review of the literature. *Computers & Education, 126*, 296-310. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.07.004

Ingram, J., Andrews, N., & Pitt, A. (2019). When students offer explanations without the teacher explicitly asking them to. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(1), 51–66. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9873-9

International Society for Technology in Education. (2016). *ISTE National Educational Technology Standards (NETS)*. https://www.iste.org/iste-standards

Kazakoff, E. R., Sullivan, A., & Bers, M. U. (2012). The effect of a classroom-based intensive robotics and programming workshop on sequencing ability in early childhood. *Early Childhood Education Journal,41*(4), 245–255. https://doi.org/10.1007/s10643-012-0554-5

Kazakoff, E. R., & Bers, M. U. (2014). Put Your Robot in, Put Your Robot out: Sequencing through Programming Robots in Early Childhood. *Journal of Educational Computing Research*, *50*(4), 553–573. https://doi.org/10.2190/EC.50.4.f

Kawulich, B.B. (2006). Participant Observation as a Data Collection Method. *Forum: Qualitative Social Research*, *6*(2). http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0502430

Keren, G., & Fridin, M. (2014). Kindergarten Social Assistive Robot (KindSAR) for children's geometric thinking and metacognitive development in preschool education: A pilot study. *Computers in Human Behavior, 35*, 400–412. https://doi.org/10.1016/j.chb.2014.03.009

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*, 139-151.

Kidd, J.K., Carlson, A.G., Gadzichowski, M.K., Boyer, C.E., Gallington, D.A., & Pasnak, R. (2013). Effects of Patterning Instruction on the Academic Achievement of 1st-Grade Children. *Journal of Research in Childhood Education, 27*(2), 224-238. https://doi.org/10.1080/02568543.2013.766664

Kilhamn, C., Bråting, K., Helenius, O., & Mason, J. (2022). Variables in early algebra: exploring didactic potentials in programming activities. *ZDM Mathematics Education*, *54,* 1273–1288 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01384-0

La Paglia, F., La Cascia, C., Francomano, M. M., & La Barbera, D. (2017). Educational robotics to improve mathematical and metacognitive skills. *Annual Review of CyberTherapy and Telemedicine, 15*(14), 70– 75.

Lee, J., Joswick, C., & Pole, K. (2022). Classroom Play and Activities to Support Computational Thinking Development in Early Childhood. *Early Childhood Education Journal*. https://doi.org/10.1007/s10643-022-01319-0

Leeuwen, V.T. (2008). *Discourse and practice: New tools for critical discourse analysis*. Oxford Scholarship. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195323306.003.0004

Lüken, M. (2018). Is patterning a mathematical activity? —An analysis of young children's strategies in working with repeating patterns. In *A mathematics education perspective on early mathematics learning—POEM*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_5

Lüken, M. M., & Kampmann, R. (2018). The Influence of Fostering Children's Patterning Abilities on Their Arithmetic Skills in Grade 1. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, & C. Benz (Eds.), *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education* (pp. 55–66). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_4

Lüken, M. M., & Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28–48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

McGarvey, L.M. (2012). Is it a Pattern? *Teaching Children Mathematics, 19*(9) 564-571. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.9.0564

Mitchelmore, S. (2018). Providing Insight Through Pedagogical Documentation: Seeing Research as an Everyday Practice. In M. Fleer & B. van Oers (Eds.), *International Handbook of Early Childhood Education* Volume I (pp.190-195). Springer.

Mulligan, J.T., Prescott, A., & Mitchelmore, M.C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. In M. Heines & A. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 393-401). Bergen University College.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Mulligan, J.T., Oslington, G., & English, L. D. (2020) Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM—International Journal of Mathematics Education*, *52*, 663-676. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9

National Association for the Education of Young Children, & Fred Rogers Center for Early Learning and Children's Media. (2012). *Technology and interactive media as tools in early childhood programs serving children birth through age 8*. Washington, DC. http://www.naeyc.org/files/naeyc/file/positions/PS_ technology_WEB2.pdf

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards*. National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nardelli, E. (2019). Do we really need computational thinking? *Communications of the ACM*, *62*(2), 32–35. https://doi.org/10.1145/3231587

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C., & Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly*, *36*, 550–560. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003

Nugent, G., Barker, B., Grandgenett, N., & Adamchuk, V. (2009). The use of digital manipulatives in K-12: Robotics, GPS/GIS and programming. *Proceedings - Frontiers in Education Conference, FIE*. https://doi.org/10.1109/FIE.2009.5350828

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of pre-schoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*, 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Papert, S. (1985). Different visions of logo. Computers in the Schools. Interdisciplinary *Journal of Practice, Theory, and Applied Research, 2*(2-3), 3-8. https://doi.org/10.1300/J025v02n02_02

Pasnak, R., Kidd, J.K., Gadzichowski, M.K., Gallington, D.A., Schmerold, K.L, & West, H. (2015) Abstracting Sequences: Reasoning That Is a Key to Academic Achievement. *The Journal of Genetic Psychology, 176*(3), 171-193. https://doi.org/10.1080/00221325.2015.1024198

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37–62.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskyan semiotic approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 157–182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., & Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31*, 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., & Farran, D. C. (2017). Early Math Trajectories: Low-Income Children's Mathematics Knowledge From Ages 4 to 11. *Child Development*, *88*(5), 1727–1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Paris, A. H., & Paris, S. G. (2003). Assessing narrative comprehension in young children. *Reading Research Quarterly, 38*(1), 36-76. https://doi.org/10.1598/RRQ.38.1.3

Rhine, D., & Martin, F. (2008). Integrating mathematical analysis of sensors and motion in a mobile robotics course. *Lecture Notes in Computer Science, 5090*, 41–52. https://doi.org/10.1007/978-3-540-69924-8_4

Schina, D., Valls-Bautista, C., Borrull-Riera, A., Usart, M., & Esteve-Gonzáles, V. (2021). An associational study: preschool teachers' acceptance and self-efficacy towards Educational Robotics in a pre-service teacher training program. *International Journal of Educational Technology in Higher Education 18* (28), 1-20. https://doi.org/10.1186/s41239-021-00264-z

Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, *22*, 142–158. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003

Seckel, M. J., Breda, A., Farsani, D., & Parra, J. (2022). Reflections of future kindergarten teachers on the design of a mathematical instruction process didactic sequences with the use of robots. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(10), em2163. https://doi.org/10.29333/ejmste/12442

Sharapan, H. (2012). From STEM to STEAM: How early childhood educators can apply fred rogers' approach. *Young Children, 67*(1), 36-40.

Society for Technology in Education [ISTE] & Computer Science Teachers Association [CSTA]. (2011). *Computational Thinking: leadership toolkit*. https://cdn.iste.org/www-root/2020-10/ISTE_CT_Leadership_Toolkit_booklet.pdf

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The*

Journal of Mathematical Behavior, *31*(4), 447–462. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., & Gardiner, A. M. (2015). Just Say Yes to Early Algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92–101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Valverde-Berrocoso, J., Fernández-Sanchez, M.R., & Garrido-Arroyo, M.C. (2015). El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje. *RED-Revista de Educación a Distancia, 46*(3), 2-18. https://doi.org/10.6018/red/46/3

Vanluydt, E., Wijns, N., Torbeyns, J., & Dooren, W.V. (2021). Early childhood mathematical development: the association between patterning and proportional reasoning. *Educational Studies in Mathematics 107*, 93–110. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10017-w

Warren, E., & Miller, J. (2013). Young Australian indigenous students' effective engagement in mathematics: the role of language, patterns, and structure. *Mathematics Education Research Journal, 25*(1), 151-171. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0068-5

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 152–163. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., & Torbeyns, J. (2021). Associations Between Repeating Patterning, Growing Patterning, and Numerical Ability: A Longitudinal Panel Study in 4- to 6-Year Olds. *Child Development*, *92*(4), 1354–1368. https://doi.org/10.1111/cdev.13490

Wing, J. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM, 49*(3),33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical transactions of the Royal Society a Mathematical, physical, and engineering sciences, 366*, 3717-3725. https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0118

Wing, J. M. (2011). Research Notebook: Computational Thinking—What and Why. *The link Magazine, 6*, 20-23.

Zhong, B., & Xia, L. (2020). A Systematic Review on Exploring the Potential of Educational Robotics in Mathematics Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18* (1),79-101. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09939-y

Zippert, E.L., Douglas, A., & Rittle-Johnson, B. (2020). Finding patterns in objects and numbers: Repeating patterning in pre-K predicts kindergarten mathematics knowledge.

Journal of Experimental Child Psychology, 200. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104965

De: Łukasz Tomczyk <tomczyk_lukasz@prokonto.pl>
Enviat el: dimecres, 26 d'abril de 2023 9:00:06
Per a: Yenisel Acosta Inchaustegui
Tema: Odp: My Manuscript - #EAIT-D-22-02739R1 - [EMID:60cad3e2e7aa3ff7]

Dear Yeni Acotsa,
the status of your article is - under review. Your article entitled Computational Thinking and Repetition Patterns in Early Childhood Education: Longitudinal Analysis of Representation and Justification was submitted to the journal on 27 Sep 2022. We are currently awaiting feedback from reviewers in the second round. As soon as the feedback is in the system I will let you know the decision.
Kind regards
Lukasz

Z wyrazami szacunku
Łukasz Tomczyk

dr hab. inż. Professor (Associate) at Jagiellonian University, Poland

tel. kom. 0048 503 738 988

Skype: tomczyk_lukasz
Researchgate: https://www.researchgate.net/profile/Lukasz_Tomczyk
Education and Information Technologies Journal (Associate Editor, IF=3.666): https://www.springer.com/journal/10639/editors
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5652-1433
Google: https://scholar.google.pl/citations?user=hHnukIsAAAAJ&hl=pl
Academia: [up-krakow.academia.edu/ŁukaszTomczyk]up-krakow.academia.edu/ŁukaszTomczyk
Publons: https://publons.com/researcher/1557499/ukasz-tomczyk/peer-review/

ESTUDIO E

Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil

Avances de la Investigación en Educación Matemática (AIEM), 22, 91-110

Recibido: 24 de diciembre 2021/ Aceptado: 28 de julio 2022/ Publicado: 31 de octubre 2022

AIEM
AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
ISSN 2254-4313 | (2022) 22, 91-110 | aiem.es
seiem.es

Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil

Tasks and patterning skills for repeating patterns in early childhood education textbooks

Yeni Acosta, Nataly Pincheira, Ángel Alsina
Universitat de Girona (España)

Resumen ∞ Se estudia la presencia de tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en cinco proyectos editoriales españoles de educación infantil. A partir de un estudio cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo, se han analizado 850 tareas, de las cuales, 69 corresponden a patrones de repetición. Los resultados muestran: a) una diferencia relevante entre las frecuencias de tareas con patrones de repetición encontradas en los proyectos analizados para cada grupo de edad, hecho que provoca un proceso de enseñanza-aprendizaje desequilibrado y condicionado al proyecto que se utilice; y b) respecto a las habilidades para hacer patrones, "extender", "interpolar" y "reconocer la unidad de repetición", son las habilidades más frecuentes. Se concluye que es necesario una mejor planificación de las tareas de patrones de repetición en los libros de texto de infantil para promover el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde edades tempranas.

Palabras clave ∞ Patrones de repetición; Habilidades para hacer patrones; Libros de texto; Educación matemática infantil

Abstract ∞ The presence of repetition pattern tasks and patterning skills in five Spanish editorial projects for early childhood education is studied. Based on an exploratory-descriptive qualitative study, 850 tasks have been analysed, 69 of which correspond to repetition patterns. The results show: a) a relevant difference between the frequencies of tasks with repetition patterns found in the projects analysed for each age group, which leads to an unbalanced teaching-learning process conditioned to the project used; b) in relation to patterning skills, "extending", "interpolating" and "recognizing the repetition unit", are the most frequent skills. It is concluded that better planning of repetition pattern tasks in early childhood textbooks is necessary to promote structural development, relational understanding and generalization from an early age.

Keywords ∞ Repetition pattern; patterning skills; textbooks; early childhood mathematics education

Acosta, Y., Pincheira, N. & Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 22,* 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

1. Introducción

Los patrones matemáticos en edades tempranas han sido objeto de estudio durante los últimos años por su relevante papel en el desarrollo cognitivo de los niños, ya que favorecen la comprensión de las matemáticas y fomentan los inicios del pensamiento algebraico (Burgoyne et al., 2017; Callejo et al., 2016; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2006; Rittle-Johnson et al., 2013; Rittle-Johnson et al., 2017; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019; Wijns, Torbeyns, Bakker et al., 2019, entre otros).

De acuerdo con Kaput (2008) y Mason (2011), el pensamiento algebraico temprano se desarrolla a través de una conciencia de las relaciones estructurales de los patrones y más tarde en la estructura de la aritmética. Cabe destacar que reconocer patrones es fundamental para muchos dominios del conocimiento como la lectura, las matemáticas o las artes, puesto que los patrones aportan significado y cohesión (Björklund y Pramling, 2014). En este sentido, Papic (2015) sugiere la necesidad de promover la conciencia de los niños sobre los patrones para estimular el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde una edad temprana y, aunque de forma emergente, sentar las bases del pensamiento matemático en general y algebraico en particular. Por lo tanto, la exploración de patrones se puede considerar como una especie de trampolín útil para promover la generalización, la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el inicio del uso preciso del lenguaje matemático.

Dichos hallazgos se ven reflejados en los currículos de matemáticas para la primera infancia de países como Estados Unidos (NCTM, 2006); Australia (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2015) o Nueva Zelanda (Te Whāriki-Early childhood, 2017), donde se establecen objetivos específicos en torno a los cuales deben centrarse los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Sin embargo, Wijns, Torbeyns, De Smedt et al. (2019) constatan que queda pendiente estudiar si las actividades con patrones que se implementan promueven de forma óptima todo su potencial. Cabe señalar que la habilidad para hacer patrones se puede abordar a través de diversas tareas, teniendo en cuenta si requieren o no conocimiento de la estructura o regla subyacente del patrón. Por un lado, consideramos que un patrón es una secuencia de elementos ordenados que se rige por una organización replicable determinada, siendo nuestro foco de análisis los patrones de repetición; y, por otro lado, comprendemos las tareas de enseñanza de patrones de repetición como propuestas educativas diseñadas para engendrar procesos mentales o acciones hipotéticas (Clements y Sarama, 2015) en las cuales los niños pueden participar de manera activa.

Acosta y Alsina (2020, 2022) señalan que el aprendizaje de los patrones de repetición se inicia en situaciones concretas hasta consolidarse en experiencias abstractas. Por consiguiente, asumimos el Enfoque de los Itinerarios de la Enseñanza de las Matemáticas (EIEM, de ahora en adelante) de Alsina (2019, 2020, 2022), que propone una enseñanza de las matemáticas en las primeras edades a partir de secuencias intencionadas que se inician en contextos informales (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos), prosiguen en contextos intermedios (recursos literarios y tecnológicos) y finalizan en contextos formales (recursos gráficos). Dicho enfoque pretende promover un aprendizaje desde lo concreto hacia lo abstracto para poder garantizar una comprensión profunda de las matemáticas en los niños pequeños. Teniendo en cuenta, pues, los planteamientos del EIEM (Alsina, 2019, 2020, 2022), la enseñanza concluye en contextos gráficos y simbólicos donde se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático mediante procedimientos y notaciones convencionales, a través de libros de texto y/o cuadernos de actividades principalmente. Según el informe TIMSS (Hooper et al., 2015), los docentes de muchos países continúan confiando en los libros de texto como un recurso de apoyo de sus decisiones curriculares.

Si bien es cierto que la enseñanza en educación infantil debería adoptar un carácter más concreto que abstracto, según el informe de la Asociación Nacional de Editores de Libros y Material de Enseñanza [ANELE] (2020), durante el curso 2019-2020, se vendieron en España 5 667 910 ejemplares de libros de texto para educación infantil. Sin embargo, los estudios que han analizado la presencia de tareas sobre pensamiento algebraico en los libros de texto, se han centrado generalmente en Primaria (e. g., Aké y Godino, 2018; Demosthenous y Stylianides, 2014; Pincheira y Alsina, 2021b). Por tanto, nuestra intención es ampliar estas investigaciones hacia el contexto de la educación infantil, para así poder valorar el proceso de formalización con patrones de repetición que llevan a cabo los niños de 3 a 6 años a través de los libros de texto.

Desde esta perspectiva nos formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué habilidades para hacer patrones se movilizan en los libros de texto de educación infantil cuando se enseñan patrones de repetición a niños de 3, 4 y 5 años de edad?

De esta pregunta se derivan los siguientes objetivos de investigación:

1. Determinar la presencia de tareas con patrones de repetición en cinco proyectos editoriales para niños españoles de 3, 4 y 5 años.
2. Evidenciar las habilidades para hacer patrones que se movilizan durante la enseñanza de patrones de repetición en los libros de texto analizados.

2. Antecedentes y marco teórico

El libro de texto como mediador del aprendizaje debe ser analizado para valorar la calidad didáctica de sus aspectos formales (Braga y Belver, 2016). De acuerdo con Fan (2013) este tipo de investigación se centra normalmente en tres grandes grupos: 1) libros de texto como objeto principal del estudio; 2) análisis sobre los factores que influyen en los libros de texto; y 3) estudios sobre cómo los libros de texto pueden influir en otros aspectos del proceso de enseñanza. En esta línea, Marco-Buzunáriz et al. (2016) analizaron los trabajos presentados en el Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) desde 1997 hasta 2015 y determinaron que, de los 841 trabajos presentados, 74 correspondían a las investigaciones centradas en libros de texto, ocupando para álgebra en general y educación infantil en particular un 8.1 % y 3 %, respectivamente.

Considerando estos datos, parece que la mayoría de estudios que han analizado la presencia de tareas sobre pensamiento algebraico en los libros de texto se sitúan mayoritariamente en etapas posteriores a la educación infantil. Demosthenous y Stylianides (2014), por ejemplo, analizaron una serie de libros de texto de educación primaria (9-12 años) y determinaron que, de un total de 302 tareas algebraicas, el 42,4 % se vinculan con el estudio de los patrones. Salazar et al. (2016) analizaron 140 tareas matemáticas para los primeros niveles de primaria (7-9 años), determinando que el estudio de los patrones alcanza una presencia del 15.7 %. Aké y Godino (2018) estudiaron una colección de 57 tareas de educación primaria (6-7 años), encontrando solo una tarea matemática que responde a patrones, señalando a nivel general que las propuestas estaban diseñadas para priorizar, principalmente, el registro numérico. Posteriormente, Pincheira y Alsina (2021b) analizaron 373 tareas matemáticas vinculadas al estudio del álgebra temprana en educación primaria (6-12 años), informando que el 31,6 % de las tareas promueven la comprensión de patrones.

2.1. Patrones matemáticos: naturaleza y habilidades para hacer patrones con niños de 3, 4 y 5 años

El conocimiento de patrones "permite ingresar al mundo algebraico del pensamiento generalizado" (Du Plessis, 2018, p. 3). De acuerdo con la caracterización del álgebra temprana de Pincheira y Alsina (2021a) en la educación infantil se abordan, principalmente, tres tipos de conocimientos:

1. Reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etc.)
2. Patrones de repetición (identificación, construcción y representación de la seriación)
3. Descripción de cambios (cualitativos y cuantitativos).

Estamos de acuerdo con Lüken y Sauzet (2020) cuando afirman que aprender matemáticas es desarrollar la capacidad de reconocer patrones, interpretar estructuras y establecer relaciones. Los patrones son secuencias con una regularidad replicable (Papic et al. 2011) que van más allá de un simple contenido. Al hablar de patrones matemáticos, es necesario distinguir entre patrón como una secuencia o seriación ordenada, y entre estructura de patrón, es decir, organización, regla o núcleo que subyace al patrón (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Estos autores australianos puntualizan que los patrones comprenden dos componentes: cognitivo, relacionado con el conocimiento de la estructura, y meta-cognitivo, asociado a la capacidad de búsqueda y análisis de patrones. Desde nuestro punto de vista, un patrón es una secuencia de elementos ordenados de acuerdo con una norma o regla replicable determinada.

Ahora bien, de acuerdo con la naturaleza del patrón, Bock et al. (2018) sugieren que pueden variar según su regularidad y contenido; y que, atendiendo a esta afirmación, los patrones pueden presentar unidades que se repiten, que crecen o que se ordenan de manera estructural o simétrica. En nuestro estudio, nos centramos en los patrones de repetición: secuencias iterativas que muestran regularidades o repeticiones de características cualitativas y/o cuantitativas específicas (color, formas, tamaño, sonidos, o números, por ejemplo, “azul, azul, amarillo, azul, azul, amarillo”; “▲○▲○”, entre otros). Zippert et al. (2020) consideran que dichos patrones engloban tanto las secuencias alternas de objetos, formas y sonidos, como las estructuras repetitivas que pueden subyacer en el sistema numérico, considerando, como ejemplos de patrones numéricos, el conteo salteado en una recta numérica, la estructura del sistema de numeración de base 10, secuencias en las que los números o sus proporciones difieren en una constante, entre otros (Charles, 2005).

Es importante destacar que las habilidades para hacer patrones (*patterning skills*), se definen como un conjunto de competencias que se configuran como predictoras del rendimiento matemático en etapas posteriores (Rittle-Johnson et al., 2017). Dichas habilidades se pueden promover determinando la dificultad de la tarea en el sentido de si requiere o no conocimiento de la estructura o regla subyacente (Papic y Mulligan, 2007). Las tareas más frecuentes que engloba la literatura son: 1) duplicar el mismo patrón; 2) encontrar elementos faltantes de una secuencia; 3) ampliar la secuencia; 4) construir el mismo patrón con diferentes materiales; 5) identificar la unidad de repetición; y 6) inventar un patrón; siendo copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear las principales habilidades para hacer patrones que se movilizan para los tipos de tareas mencionados, respectivamente (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019). Desde esta perspectiva, se instaura una frontera imaginaria entre el pensamiento recursivo y funcional, estableciendo una progresión en el nivel de dificultad de las tareas. De acuerdo con Mcgarvey (2012, p. 334), las tareas que movilizan las habilidades de copiar, interpolar y extender (...) “enfatizan la organización recursiva de elementos en lugar de repetir unidades”. En cambio, las que permiten a los niños ser conscientes de la regla subyacente del patrón son las de abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear (Lüken y Sauzet, 2020).

En esta línea, Clements y Sarama (2015) y Rittle-Johnson et al. (2015) afirman que generalmente alrededor de los tres-cuatro años los niños son capaces de ejecutar tareas donde se requieran habilidades de copiar un patrón, ya que presentan un nivel de dificultad básico. Luego, las habilidades de extender se hacen más presentes de manera exitosa sobre los cuatro años (Lüken, 2018; Rittle-Johnson et al., 2013); para, finalmente, a partir de los 5-6 años, identificar la unidad de repetición y transferir dicho conocimiento para traducir o crear un patrón determinado (Clements y Sarama, 2015; Rittle-Johnson et al. 2015). Sin embargo, Tirosh et al. (2017) observaron que el profesorado de infantil no se centra en la estructura de los patrones durante las interacciones en el aula y que, por tanto, es necesario cuestionarse si la enseñanza de los patrones y el álgebra de los planes de estudio de matemáticas se basa en la estrategia de alternancia de colores exclusivamente, en lugar de la identificación de los elementos del patrón y del número de repeticiones (Papic y Mulligan 2007). Precisamente el trabajo con patrones desarrolla una habilidad cognitiva esencial en las matemáticas tempranas, puesto que permite identificar y describir atributos de objetos, así como similitudes y diferencias entre ellos (Papic, 2007).

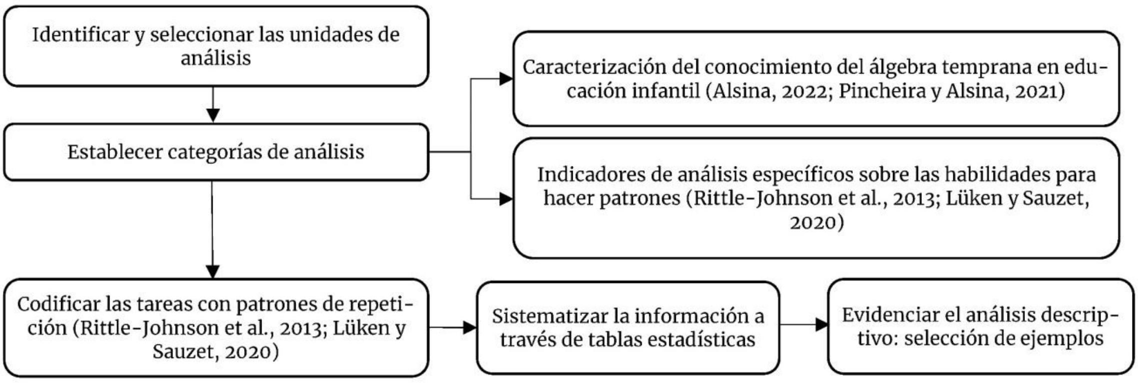
Con el propósito de valorar cómo se aborda la enseñanza de patrones de repetición a través de los recursos gráficos y qué habilidades para hacer patrones se movilizan, se analizan cinco proyectos editoriales que se distribuyen en los centros escolares de Catalunya (España) y que, en principio, ofrecen una propuesta de actividades teniendo en cuenta las directrices autonómicas del Decreto 181/2008 de 9 de septiembre, *para el cual se establece la ordenación de la enseñanza del segundo ciclo de educación infantil* (3-6 años) en Catalunya (Generalitat de Catalunya, 2008). Dicho marco legal apunta a la comparación, ordenación y clasificación de elementos, estableciendo relaciones cualitativas y cuantitativas, para reconocer patrones, verbalizar regularidades, hacer anticipaciones y ordenar secuencias temporales de actividades cotidianas; y, a su vez, promover la identificación de series y la predicción de su continuidad.

3. Método

En nuestro estudio se ha adoptado un enfoque cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo (Fernández et al., 2014) para analizar cómo se aborda la enseñanza de patrones de repetición mediante recursos gráficos, y así valorar el proceso de formalización que llevan a cabo los niños de 3, 4 y 5 años a través de los libros de texto. La técnica que vehicula y facilita nuestra investigación es el análisis de contenido, cuyo objetivo es "verificar la presencia de temas, palabras o de conceptos en un contenido y su sentido dentro de un texto en un contexto" (Arbeláez y Onrubia, 2014, p. 19).

Para llevar a cabo el análisis de contenido, se ha considerado y adaptado la estructura para el análisis de libros de texto, propuesta por Cobo (2003), que se detalla en la figura 1.

Figura 1. Diagrama de flujo del análisis de contenido



3.1. Muestra

Se analizan cinco proyectos editoriales del 2.º ciclo de educación infantil (3-6 años). Cada proyecto incluye 3 libros, uno para cada grupo de edad (3-4 años; 4-5 años y 5-6 años), por lo que en conjunto se han analizado 15 libros de texto (Tabla 1).

Las colecciones se escogieron de manera intencionada siguiendo los siguientes criterios: i) colecciones completas; ii) ediciones vigentes; iii) proyectos desarrollados por editoriales de prestigio; y iv) utilizadas de manera mayoritaria en el contexto donde se desarrolla la investigación. Cabe destacar que las series que conforman las colecciones presentan propuestas didácticas agrupadas por contenido y que en su totalidad suman 850 tareas matemáticas. Se entiende por tarea matemática toda la información que impulsa el trabajo con los niños, incluyendo representaciones, contexto, preguntas e instrucciones (Sullivan et al., 2012).

Tabla 1. Proyectos editoriales considerados para el análisis

Proyectos editoriales	Código	Edad	Título	Editorial	Edición
1. A volar. Matemáticas a partir de contextos de la vida cotidiana.	T1	3 años	Matemática 1	Casals	2014
	T2	4 años	Matemática 2		
	T3	5 años	Matemática 3		
2. *Cric crac Matemáticas*	T4	3 años	Cric crac matemáticas 3 años	Cruilla	2017
	T5	4 años	Cric crac matemáticas 4 años		
	T6	5 años	Cric crac matemáticas 5 años		
3. Trotacaminos	T7	3 años	Vía mates 3 años	Casals	2017
	T8	4 años	Vía mates 4 años		
	T9	5 años	Vía mates 5 años		
4. Nou axioma	T10	3 años	Nou axioma 3 años	Barcanova	2019
	T11	4 años	Nou axioma 4 años		
	T12	5 años	Nou axioma 5 años		
5. Mate+	T13	3 años	Matemáticas manipulativas 3 años	Santillana	2021
	T14	4 años	Matemáticas manipulativas 4 años		
	T15	5 años	Matemáticas manipulativas 5 años		

A partir de la muestra, se han seleccionado las unidades de análisis que conciernen a las tareas de enseñanza vinculadas con el estudio de patrones de repetición. Se consideran patrones de repetición los que incluyen desde secuencias alternas de objetos, acciones y figuras, hasta la estructura repetitiva del sistema de numeración, donde se promueve la predicción del número sucesor en una secuencia de conteo, ya sea en base a 10 o n+1 (Charles, 2005; Zippert et al., 2020). Las unidades de análisis se delimitan a partir de la instrucción específica de cada tarea, considerando las sub-tareas como unidades independientes de análisis.

3.2. Categorías e indicadores de análisis

Como se ha indicado, las tareas de enseñanza que conforman las unidades de análisis se han revisado de acuerdo con una de las categorías de conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en educación infantil propuesta por Pincheira y Alsina (2021a), que corresponde a: Seriación a partir de patrones de repetición.

A partir de esta categoría, se han considerado un conjunto de indicadores que emergen del análisis de la literatura que ha incorporado los conocimientos de patrones matemáticos en educación infantil. En la Tabla 2 se describen los indicadores correspondientes a la categoría objeto de análisis.

Tabla 2. Indicadores utilizados en el proceso de codificación

Categoría	Indicadores
Seriación a partir de patrones de repetición	1. Duplicar el patrón a partir de una secuencia. 2. Encontrar elementos faltantes en una secuencia. 3. Ampliar una secuencia de tipo cualitativa o cuantitativa. 4. Construir un mismo patrón con diferentes elementos. 5. Identificar la unidad de repetición de un patrón. 6. Crear un patrón a partir de elementos determinados.

Fuente: (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019)

La codificación de los datos ha considerado el uso de los indicadores asignando puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 puntos). Para garantizar la confiabilidad de los datos, los autores han seguido una doble codificación cruzada e independiente de las actividades de enseñanza, han discutido desacuerdos referidos al proceso de codificación y, finalmente, han establecido consensos.

Seguidamente, se muestra en la tabla 3 un ejemplo para cada indicador, señalando la habilidad que moviliza y la instrucción que acompaña la tarea.

4. Resultados

Considerando los objetivos de nuestro estudio, por un lado, se analiza la presencia de las tareas de patrones de repetición en los cinco proyectos editoriales y, por otro, se indaga en las habilidades para hacer patrones que movilizan dichas tareas.

Tabla 3. Ejemplos que guían la calibración de la codificación

Indicador	Habilidad para hacer patrones	Instrucción de la tarea	Ejemplo
1	Copiar	Reproduce la serie	ABABABAB ----------------------
2	Interpolar	Encuentra el elemento que falta	ABBAB___A___B___BB
3	Extender	Continúa la serie	AABAAB--------------
4	Abstraer o traducir	Construye el mismo patrón con diferentes elementos	ABCABCABC 123123123
5	Reconocer la unidad de repetición	Señala la unidad de repetición	ABABAB $\boxed{\text{AB}}$
6	Crear	Construye un patrón	Inventar un patrón

4.1. Presencia de las tareas de enseñanza de patrones de repetición en los libros de texto analizados

Los resultados obtenidos muestran de manera general que las tareas de enseñanza de patrones de repetición están presentes en los cinco proyectos editoriales que configuran nuestra muestra. En este sentido, de las 850 tareas analizadas en libros de texto para 3, 4, y 5 años, 83 tareas pertenecen a la enseñanza de patrones. Cabe destacar que, del total de tareas con patrones identificadas, se descartan 14 propuestas que para su resolución requieren el uso de recursos manipulativos, ya que focalizamos nuestro análisis exclusivamente en los recursos gráficos que define el EIEM (Alsina, 2019, 2020, 2022). Por tanto, nuestras unidades de análisis se conforman por 69 tareas matemáticas.

En las Tablas 3 a 5 se presenta la distribución de tareas con patrones de repetición identificadas en cada proyecto matemático para niños de 3, 4 y 5 años, respectivamente.

Tabla 3. Distribución de tareas matemáticas analizadas en cada proyecto para 3 años

Proyecto	N.º de tareas matemáticas	Frecuencia de tareas con patrones de repetición	Porcentaje de tareas con patrones de repetición
1 (T1)	60	0	0
2 (T4)	60	6	60 %
3 (T7)	16	2	20 %
4 (T10)	48	1	10 %
5 (T13)	48	1	10 %

Siguiendo la línea de análisis longitudinal, en la Tabla 3 se observa que, de las 232 tareas matemáticas analizadas en los proyectos editoriales para 3 años, 10 corresponden a patrones de repetición, alcanzando una presencia de 4.3 % del total de tareas analizadas para esta edad.

Tabla 4. Distribución de tareas matemáticas analizadas en cada proyecto para 4 años

Proyecto	N.º de tareas matemáticas	Frecuencia de tareas con patrones de repetición	Porcentaje de tareas con patrones de repetición
1 (T2)	72	2	6.9 %
2 (T5)	81	5	17.2 %
3 (T8)	24	3	10.4 %
4 (T11)	48	4	13.8 %
5 (T14)	84	15	51.7 %

A partir de los datos que muestra la Tabla 4, se evidencia una presencia total de 29 tareas con patrones de repetición de 309 tareas matemáticas analizadas para 4 años. Considerando el total de tareas con patrones de repetición para esta edad, se evidencia una presencia total de 9.4 %.

Tabla 5. Distribución de tareas matemáticas analizadas en cada proyecto para 5 años

Proyecto	N.º tareas matemáticas	Frecuencia de tareas con patrones de repetición	Porcentaje de tareas con patrones de repetición
1 (T3)	72	0	0
2 (T6)	81	7	23.3 %
3 (T9)	24	3	10 %
4 (T12)	48	2	6.7 %
5 (T15)	84	18	60 %

De acuerdo con la información de la Tabla 5, podemos observar que solo 30 tareas de 309 propuestas matemáticas abordan la enseñanza de patrones de repetición en 5 años. Esto representa un 9.7 % del total de tareas analizadas para esta edad.

De manera general, la presencia total de tareas con patrones de repetición para 3, 4 y 5 años (n=69), corresponden a 14.5 %, 42 % y 43.5 %, respectivamente. Bajo esta mirada, se evidencia un aumento notable de tareas con patrones de repetición de 3 a 4 años, siendo de 27.5 %. En cambio, para 4-5 años, la presencia no varía significativamente, puesto que la diferencia es solo de 1.5 %. Desde esta perspectiva, se evidencia que en los libros de texto analizados la presencia media de tareas con patrones de repetición se sitúa aproximadamente en 2 tareas para 3 años, y 6 tareas para 4 años y 5 años, respectivamente.

4.2. Análisis de las habilidades para hacer patrones que se movilizan para la resolución de las tareas de enseñanza de patrones de repetición

Tal y como se ha indicado, la habilidad para hacer patrones se puede abordar a través de diversas tareas, teniendo en cuenta si requieren o no conocimiento de la estructura o regla subyacente de la secuencia. En este sentido, los datos que se presentan a continuación muestran un análisis más detallado de las 69 tareas con patrones de repetición identificadas en los quince libros de texto, atendiendo a los indicadores que se han considerado de la literatura en relación con las habilidades para hacer patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019) que se movilizan en cada propuesta (Tabla 2).

Cabe destacar que una determinada tarea matemática puede atender a uno o más indicadores, es decir, una propuesta puede movilizar más de una habilidad para hacer patrones.

Tabla 6. Distribución longitudinal y transversal del porcentaje de los indicadores sobre las habilidades para hacer patrones

	Indicador	3 años (n=10)	4 años (n=29)	5 años (n=30)
Seriación a partir de patrones de repetición	1	0	0	0
	2	0	27.5	6.7
	3	90	62.1	90
	4	10	3.4	0
	5	10	13.8	3.3
	6	0	0	3.3

Los datos de la Tabla 6 muestran de manera longitudinal un comportamiento poco equilibrado de la presencia de habilidades para hacer patrones que emergen en las tareas analizadas. Es decir, las propuestas dirigidas a los niños de 3, 4 y 5 años requieren mayoritariamente: a) ampliar una secuencia de tipo cualitativa o cuantitativa (indicador 3); seguido de b) encontrar elementos faltantes en una secuencia (indicador 2); y finalmente c) identificar la unidad de repetición de un patrón (indicador 5). Por otra parte, podemos apreciar, a nivel transversal, que en las tareas destinadas para niños de 3 años existe una ausencia de las habilidades de copiar, interpolar y crear. Para 4 años no se encuentra presencia de las habilidades de copiar, y crear. Finalmente, para 5 años los vacíos se localizan en las habilidades de copiar y abstraer o traducir.

En la figura 2 se muestran ejemplos por edad de las tareas con mayor presencia.

Figura 2. Ejemplos de tareas que responden al indicador 3 "ampliar una secuencia de tipo cualitativa o cuantitativa"

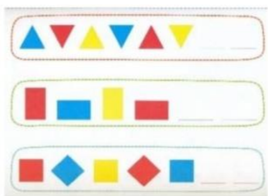
3 años

Fuente: T7 (2017, p. 15)

4 años

Fuente: T11 (2019, p. 11)

5 años

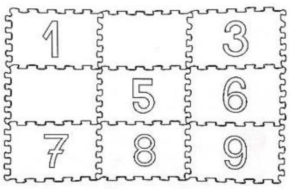


Fuente: T6 (2017, p. 26)

En las propuestas que se muestran en la Figura 2 se espera que los niños sean capaces de extender una secuencia determinada, por ejemplo, pintando las banderolas en la actividad de 3 años, pegando las pegatinas de los coches en la actividad de 4 años y colocando los adhesivos correspondientes en la actividad de 5 años.

Figura 3. Ejemplos de tareas que responden al indicador 2
"Encontrar elementos faltantes de una secuencia"

4 años



Fuente: T8 (2017, p. 19)

5 años

Fuente: T15 (2021, p. 3)

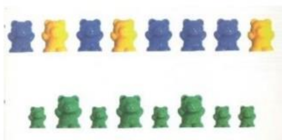
Tal y como se aprecia en la Figura 3, a los niños se les invita a completar el conteo salteado en una recta numérica colocando los elementos que faltan, tanto en la secuencia de la tarea del T8 como en la propuesta del T15.

Figura 4. Ejemplos de tareas que responden al indicador 5
"Identificar la unidad de repetición de un patrón"

3 años

Fuente: T13 (2021, p. 11)

4 años



Fuente: T2 (2014, p. 8)

5 años

Fuente: T12 (2019, p. 21)

Los ejemplos que se observan en la Figura 4 persiguen que los niños, para resolver de manera exitosa la tarea, identifiquen previamente la unidad de repetición que conforma la seriación. Solo de esta manera podrán, por ejemplo, en la propuesta del T13, recrear, con la ayuda de adhesivos, el patrón que previamente ha construido con material manipulativo; en la del T2 encontrar el elemento que rompe la recurrencia del patrón; y en la del T12 inventarse un patrón para crear una nueva seriación. Cabe señalar que las tareas mostradas para 3 y 5 años movilizan más de una habilidad para hacer patrones, presentando además de la habilidad de reconocer la unidad de repetición, la habilidad de abstraer o traducir (indicador 4), y crear, (indicador 6), respectivamente. De acuerdo con Rittle-Johnson et al. (2013) y Wijns, Torbeyns, Bakker et al. (2019), para construir el mismo patrón con diferentes elementos e inventar un patrón, se requiere que los niños abstraigan las características del patrón y se focalicen en su estructura.

5. Discusión y conclusiones

En este estudio se ha analizado la presencia de tareas para enseñar patrones de repetición en 15 libros de texto españoles de educación infantil, junto con las habilidades involucradas en dichas tareas. Nuestro análisis emerge, por un lado, de la categorización del álgebra temprana en educación infantil propuesta por Pincheira y Alsina (2021a) y, por otro, de indicadores de análisis específicos que se han considerado de la literatura en relación con las habilidades para hacer patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019).

De manera general, los datos obtenidos han puesto de manifiesto una diferencia relevante entre las frecuencias de tareas con patrones de repetición encontradas en los proyectos analizados para cada grupo de edad, hecho que provoca un proceso de enseñanza-aprendizaje desequilibrado y condicionado al proyecto que se utilice. La presencia global de tareas con patrones de repetición se distribuye de manera longitudinal en 10, 29 y 30 tareas para niños de 3, 4 y 5 años, respectivamente. En concreto, se observa una presencia media aproximada de 2 tareas para 3 años (valor mínimo 0 y valor máximo 6); 6 tareas para 4 años (valor mínimo 2 y valor máximo 15); y 6 para 5 años (valor mínimo 0 y valor máximo 18). A partir de estos datos, se puede afirmar que algunos proyectos editoriales abordan de manera limitada la enseñanza de patrones de repetición, puesto que de manera general se observa una media aproximada de 14 tareas (valor mínimo 2 y valor máximo 34) para los tres cursos de educación infantil.

Ante este panorama, parece evidente que los proyectos editoriales deberían promover de manera más sólida la conciencia de los niños sobre los patrones de repetición, para así estimular el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde una edad temprana. De esta manera, se podrían enraizar en mayor medida las bases del pensamiento matemático en general, y algebraico en particular, que se inicia mediante una conciencia estructural que se desarrolla en los niños a través de los patrones (Mason, 2011; Papic et al., 2011; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019; Wijns, Torbeyns, Bakker et al., 2019; entre otros).

Diversos estudios sugieren que la repetición de patrones debería incluirse en los planes de estudio desde las primeras edades (Burgoyne et al., 2017; Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2017). Actualmente, nos encontramos en un proceso de transición en el contexto legislativo español. Sin embargo, el reciente *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil,* continua sin contemplar una apuesta clara y consolidada que integre un modelo curricular de enseñanza-aprendizaje específico de los patrones para la primera infancia. Por tanto, una posible explicación a la presencia poco equilibrada de tareas con patrones de repetición en los proyectos editoriales podría ser fruto de un marco legislativo que no ahonda en el proceso de enseñanza de los patrones en las primeras edades, a diferencia de la tendencia de otros países como Estados Unidos, Australia o Nueva Zelanda. En este sentido, Ibáñez Ibáñez et al. (2019, p. 63) plantean que "los libros de texto suelen ser un reflejo del currículo oficial". No obstante, ratificamos la visión de Stein et al. (2007) del uso del currículo como interpretación, considerándolo una guía con un mínimo de estándares sobre los cuales los docentes construyen su propia versión a partir de sus objetivos, necesidades y conocimientos (Remillard, 2005).

En relación con las habilidades para hacer patrones, nuestros hallazgos constatan que las tareas más frecuentes para 3, 4 y 5 años son: a) las de ampliar una secuencia de tipo cualitativa o cuantitativa (indicador 3); seguido de b) encontrar elementos faltantes en una secuencia (indicador 2); y c) identificar la unidad de repetición de un patrón (indicador 5). Para estos tipos de tareas, las habilidades que se movilizan son extender, interpolar y reconocer la unidad de repetición, respectivamente. Sin embargo, vale la pena destacar que para 3 años existe una ausencia de la habilidad de interpolar y que en su lugar emerge la habilidad de traducir (indicador 4).

De forma más concreta, en relación con la habilidad de extender, en las tareas analizadas para 3 años representa un 90 % (*n*=10), frente a un 62.1 % (*n*=29) para 4 años y un 90 % (*n*=30) para 5 años, situándose como la habilidad predominante tanto de manera longitudinal (por edad) como transversal (entre proyectos). Estas tareas no requieren una identificación previa de la unidad de repetición, puesto que para su resolución normalmente los niños establecen como estrategia una asociación entre los elementos sucesivos adyacentes al patrón (McGarvey, 2012; Rittle-Johnson et al., 2015), en términos de Papic et al. (2011) hacen uso de la estrategia de alternancia. Lo mismo sucede con la habilidad de interpolar, por este motivo son consideradas habilidades menos relevantes para el desarrollo de la percepción algebraica de los niños (Wijns, Torbeyns, Bakker et al., 2019). Dicha habilidad ocupa en nuestro estudio una presencia de 27.5 % (*n*=29) y 6.7 % (*n*=30) para 4 y 5 años, respectivamente.

Por último, la habilidad de reconocer la unidad de repetición muestra una presencia del 10 % (*n*=10) para 3 años, seguido de un 13.8 % (*n*=29) y un 3.3 % (*n*=30) para 4 y 5 años, respectivamente. En estudios contrastados, autores como Papic et al. (2011) observaron que, sin una intervención directa del docente, los niños de 3-4 años no identifican de manera autónoma el patrón que origina la seriación, puesto que es una habilidad que puede resultar difícil incluso para niños de 9 años (Warren y Cooper, 2007). Asimismo, Rittle-Johnson et al. (2015) confirman en su estudio que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar la abstracción del patrón y que este hecho se evidencia de manera exitosa a partir de los 4-5 años. En este sentido, debe tenerse presente que existen dos niveles de pensamiento: el recursivo y el funcional y que se debe fomentar una transición progresiva entre uno y otro. Tal como exponen Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., (2019),

> Los niños que piensan de manera recursiva solo ven la relación entre elementos consecutivos en un patrón y, por lo tanto, solo pueden predecir el siguiente (es decir, el +1), mientras que aquellos que son capaces de pensar funcionalmente pueden ver la estructura subyacente de un patrón y, por lo tanto, predecir cualquier patrón. (p. 147)

En este marco de transición entre un pensamiento y otro, defendemos que la enseñanza de patrones de repetición se aborde siguiendo un criterio de dificultad creciente, tanto de manera longitudinal como transversal en las tareas diseñadas para este fin. Abogamos por una implementación priorizada de tareas en los primeros cursos de educación infantil que no requieran exclusivamente el reconocimiento de la unidad de repetición y que movilicen habilidades previas como: copiar, interpolar y extender; para así avanzar de manera consolidada hacia el fomento de habilidades que precisen reconocer la estructura interna de una seriación: como abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición, y crear. Esta idea podría ser objeto de estudio, en futuras investigaciones, con la finalidad de establecer una progresión de dificultad creciente tanto transversal como longitudinal de las habilidades para hacer patrones de repetición.

Recuperando la necesidad que plantean Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., (2019) sobre si las actividades con patrones que se implementan promueven de forma óptima todo su potencial, es necesario tener presente que algunos niños de las primeras edades pueden desarrollar habilidades de creación de patrones más avanzadas que las comúnmente reconocidas por los maestros (Rittle-Johnson et al., 2019). Resulta relevante destacar que la capacidad para crear un patrón de manera autónoma, a partir de determinados elementos, requiere que los niños dejen de entender el patrón como "una alternancia de dos colores, una sucesión de colores con cierta regularidad" (Lüken, 2018, p. 9), para focalizar la mirada en las unidades de repetición que lo conforman (Papic et al., 2011). Por tanto, es importante ofrecer tareas con diferentes niveles de dificultad y haciendo uso de diversos contextos educativos para enriquecer, sin limitar o acotar, el proceso de enseñanza de patrones.

En conclusión, los datos de esta investigación han evidenciado una escasa presencia de tareas para enseñar patrones de repetición en los libros de texto analizados y una enseñanza periférica y poco profundizada de las habilidades para hacer patrones. En futuros estudios, pues, será necesario analizar si se compensa este tratamiento en otros contextos educativos y de qué manera. Desde este marco, se asume esta necesidad como una línea futura de investigación que permita, además: a) evaluar las habilidades cognitivas que requiere cada tarea según el núcleo de repetición (por ejemplo, AB frente a ABC); y b) analizar la calidad de las propuestas en cuanto a tipo de habilidad para hacer patrones que se movilizan para cada edad y tipo de patrón.

En definitiva, es necesario seguir aportando datos que permitan al profesorado tanto analizar críticamente las tareas de los libros de texto, como implementar propuestas que ofrezcan la oportunidad a los niños de reconocer, transferir, representar y generalizar patrones en diferentes contextos educativos, siguiendo el principio de abstracción progresiva. Es decir, una enseñanza de patrones de repetición desde lo concreto hacia lo abstracto (Acosta y Alsina, 2022; Alsina, 2022), transitando del pensamiento recursivo al funcional, mediante el uso de buenas preguntas por parte del docente, y de una planificación minuciosa, conectada con la teoría y sustentada desde la práctica, que contribuya a iniciar el camino del pensamiento algebraico desde unos estándares matemáticos sólidos y contrastados.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856) y por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio Nº 72200447. Los autores desean agradecer a la editora y a los revisores por su ayuda en la mejora del artículo.

REFERENCIAS

Acosta, Y. & Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y., & Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad, 17*(2), 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Aké, L. P., & Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Revista Educación Matemática, 30*(2), 171-201. https://doi.org/10.24844/EM3002.07

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años.* Graó.

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 3-6 años.* Graó

Arbeláez, M., & Onrubia, J. (2014). Análisis bibliométrico y de contenido. Dos metodologías complementarias para el análisis de la revista colombiana Educación y Cultura. *Revista de Investigaciones UCM, 14*(23), 14-31. https://doi.org/10.22383/ri.v14i1.5

Asociación Nacional de Editores de Libros y Material de Enseñanza [ANELE] (2020). *El libro educativo en España. Curso 2019-2020.* Cedro.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting *Authority* [ACARA] (2015). *The Australian Curriculum: Mathematics.*

Björklund, C., & Pramling, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education,* 22 (1), 9-104. https://doi.org/10.1080/09669760.2013.809657

Braga, G., & Belver, J.L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación,* 27(1), 199-218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

Bock, A.M., Cartwright, K.B., McKnight, P.E., Patterson, A.B., Shriver, A.G., Leaf, B.M., Mohtasham, M.K., Vennergrund, K.C., & Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology*, *9*, 1802. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802

Burgoyne, K., Witteveen, K., Tolan, A., Malone, S., & Hulme, C. (2017). Pattern understanding: Relationships with arithmetic and reading development. *Child Development Perspectives, 11*(4), 239–244. https://doi.org/10.1111/cdep.12240

Callejo, M.J., García-Reche, A., & Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5–25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Charles, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Educational Leadership, 73*, 9–24.

Clements, H.D., & Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Demosthenous, E., & Stylianides, A. (2014). Algebra-Related Tasks in Primary School Textbooks. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 2, pp. 369-376). PME.

Du Plessis, J. (2018). Early algebra: Repeating pattern and structural thinking at foundation phase. *South African Journal of Childhood Education, 8*(2), a578. https://doi.org/10.4102/sajce.v8i2.578

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education, 45*, 765-777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fernández, C., Baptista, P., & Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Generalitat de Catalunya (2008). *Decret legislatiu 181/2008, de 9 de setembre, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del segon cicle de l'educació infantil.* (DOGC [en línea], núm. 5216, 9-9-2008, pág. 68256-68272). https://portaldogc.gencat.cat/utilsEADOP/PDF/5216/1017382.pdf

Hooper, M., Mullis, I. V., & Ma, M. O. (2015). *TIMSS 2015 context questionnaire framework.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS and PIRLS International Study Center, Lynch School of Education. https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_FW_Chap3.pdf

Ibáñez Ibáñez, M. M., Romero López, M. C. & Jiménez Tejada, M. P. (2019). ¿Qué ciencia se presenta en los libros de texto de Educación Secundaria? *Enseñanza de las ciencias, 37*(3), 49-71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2668

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput; D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Erlbaum.

Lüken, M. M. (2018). Is patterning a mathematical activity? — An analysis of young children's strategies in working with repeating patterns. En *A mathematics education perspective on early mathematics learning* — POEM 2018. Kristiansand.

Lüken, M. M., & Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. & Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.

J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325-334). SEIEM

Mason, J. (2011). What makes 'Algebra' early? En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 566-568). Springer.

McGarvey, L. M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning, 14*, 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*. National Council of Teachers of Mathematics.

New Zealand Government. Ministry of Education (2017). *Te Whāriki: Early Childhood Curriculum.* Autor.

Papic, M. (2007). Promoting Repeating Patterns with Young Children-More than Just Alternating Colors! *Australian Primary Mathematics Classroom*, *12*, 8-12.

Papic, M.M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 519-534. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8

Papic, M., & Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart)* (Vol. 2, pp. 591–600). MERGA.

Papic, M.M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*, 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021b). El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: Implicaciones para la formación docente. *Revista Bolema, Boletim de Educação Matemática, 35*(71), 1316-1337. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 28,* de 2 de febrero de 2022. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-1654

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75,* 211–246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., & Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31,* 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., & Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from age 4 to 11. *Child Development, 88*(5), 1727–1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, Katerine L. (2019). The Roles of Patterning and Spatial Skills in Early Mathematics Development. *Early Childhood Research Quarterly, 46*, 166-178. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.006

Salazar, V., Cabañas-Sánchez, G., & Navarro, C. (2016). Tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de matemáticas de primaria. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*, 49-56.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319–369). Information Age Publishing.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2012). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R., & Levenson, E. (2017). Preschool teachers' variations when implementing a patterning task. *Paper presented at the 10th Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME), Dublin, Ireland.

Warren, E., & Cooper, T. (2007). Repeating Patterns and Multiplicative Thinking: Analysis of Classroom Interactions with 9-Year-Old Students that Support the Transition from the Known to the Novel. *Journal of Classroom Interaction, 41*, 7-17.

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana, & D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly, 89*, 152-163. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Zippert, E.L., Douglas, A., & Rittle-Johnson, B. (2020). Finding patterns in objects and numbers: Repeating patterning in pre-K predicts kindergarten mathematics knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology, 200*. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104965

∞

Yeni Acosta

Facultad de Educación y Psicología, Universitat de Girona (España)
yeni.acosta@udg.edu | https://orcid.org/0000-0001-9873-2127

Nataly Pincheira

Facultad de Educación y Psicología, Universitat de Girona (España)
nataly.pincheira@udg.edu | https://orcid.org/0000-0002-5051-964x

Ángel Alsina

Facultad de Educación y Psicología, Universitat de Girona (España)
angel.alsina@udg.edu | https://orcid.org/0000-0001-8506-1838

Recibido: 22 de diciembre de 2021
Aceptado: 28 de julio de 2022

Tasks and patterning skills for repeating patterns in early childhood education textbooks

Yeni Acosta @, Nataly Pincheira @, Ángel Alsina @

Universitat de Girona (España)

This paper analyzes the presence of tasks with repeating patterns in five editorial projects for Spanish children ages 3, 4 and 5, and investigates the skills that are mobilized when making patterns during the solution process. With an exploratory-descriptive qualitative approach, 850 mathematical tasks are analyzed using the content analysis technique. The results show a total presence of 69 teaching tasks with repeating patterns, which are distributed longitudinally into 10, 29 and 30 tasks for children ages 3, 4 and 5, respectively. There is an approximate average presence of 2 tasks for 3 years (range from 0 to 6); 6 tasks for 4 years (range from 2 to 15); and 6 for 5 years (range from 0 to 18). The data show a relevant difference between the frequencies of tasks with repeating patterns found in the projects analyzed for each age group, resulting in a teaching-learning process that is unbalanced and conditioned by the project used. Given this framework, it can be said that some publishing projects address the teaching of repeating patterns in a limited way, since in general, an approximate average of 14 tasks (range from 2 to 34) is observed for the three years of early childhood education. One possible explanation for the unbalanced presence of tasks with repeating patterns in editorial projects could be the result of a Spanish legislative framework that does not delve into the process for teaching patterns at an early age, unlike the trend in other countries such as the United States, Australia or New Zealand. In relation to the pattern-making skills that are presented in the textbooks analyzed, our findings show that the most frequent tasks for ages 3, 4, and 5 are: a) expanding a qualitative or quantitative sequence; followed by b) finding missing elements in a sequence; and c) identifying the repetition unit of a pattern. For these types of tasks, the skills that are mobilized are extending, interpolating, and recognizing the unit of repetition, respectively. However, these tasks are not presented by following the criterion of increasing difficulty. Accordingly, we are committed to the prioritized implementation of tasks in the first years of early childhood education that do not exclusively require the recognition of the repetition unit and that mobilize previous skills such as copying, interpolating and extending, and thus advance in a consolidated way towards the promotion of skills that require recognizing the internal structure of a series, such as abstracting or translating, recognizing the repetition unit and creating. It is necessary to continue providing data that allow teachers to both critically analyze tasks in textbooks and implement proposals that promote the transition from recursive to functional thinking through the use of good questions by the teacher, making use of exhaustive planning, connected with theory and supported by practice, all in an effort to start the journey to algebraic thinking from solid and proven mathematical standards.

ESTUDIO F

El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones

Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 11(2), 1-37

Recibido: septiembre 2022/ Aceptado: noviembre 2022/ Publicado: 30 de diciembre 2022

El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones

Algebraic thinking in early childhood education: teaching strategies to promote patterning skills

YENI ACOSTA[A], NATALY PINCHEIRA[B] Y ÁNGEL ALSINA[C]
Universidad de Girona
[A] yeni.acosta@udg.edu, [B] natalygoreti@gmail.com, [C] angel.alsina@udg.edu
[A] https://orcid.org/0000-0001-9873-2127, [B] https://orcid.org/0000-0002-5051-964X,
[C] https://orcid.org/0000-0001-8506-1838
Recibido: Septiembre de 2022. Aceptado: Diciembre de 2022.
Cómo citar: Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *11*(2), 1-37.

DOI: https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37

Resumen: El objetivo de este artículo es ofrecer luces al tratamiento limitado que otorga el currículo sobre los patrones de repetición. Se presentan estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones en educación infantil, puesto que conforman una base esencial para desarrollar el pensamiento algebraico. Para ello, el artículo se estructura en dos partes: 1) se fundamenta teóricamente el desarrollo del pensamiento algebraico y su vinculación con los patrones; 2) se muestran diversas tareas para ejemplificar el trabajo con patrones de repetición, en las que se movilizan distintas habilidades: a) copiar; b) interpolar; c) extender; d) abstraer o traducir, e) reconocer la unidad de repetición y f) crear. Por último, se ofrecen orientaciones al profesorado para abordar el trabajo de los patrones en el aula, a través de un itinerario longitudinal sobre habilidades para hacer patrones de repetición. Se concluye que es necesario diseñar propuestas dinámicas enmarcadas en contextos multimodales que atiendan a una diversidad de tareas sobre patrones de repetición.
Palabras clave: educación infantil; pensamiento algebraico; patrones de repetición; habilidades para hacer patrones.

Abstract: The aim of this article is to shed light on the limited curriculum treatment of repeating patterns. Teaching strategies are presented to promote patterning skills in early childhood education, as they form an essential basis for developing algebraic thinking. To this end, the article is structured in two parts: 1) the development of algebraic thinking and its connection with patterns is theoretically based; 2) various tasks are shown to exemplify working with repeating patterns, in which different skills are used: a) copying; b) interpolating; c) extending; d) abstracting

or translating; e) recognising the unit of repetition; and f) creating. Finally, guidelines are offered to teachers for approaching the work on patterns in the classroom, through a longitudinal itinerary on patterning skills. It is concluded that it is necessary to design dynamic proposals framed in multimodal contexts that address a diversity of tasks on repetition patterns.
Keywords: early childhood education; algebraic thinking; repeating patterns; patterning skills.

1. Introducción

Promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolaridad es un desafío que emerge a partir de una propuesta de cambio curricular denominada álgebra temprana. El *Early Algebra* es un enfoque curricular que nace en Estados Unidos a principio de siglo con la finalidad de "algebraizar" de manera temprana el currículo (Kaput, 2000), dado que el enfoque tradicional y secuencial de abordar primero la aritmética como conocimiento concreto para luego avanzar hacia el álgebra como conocimiento abstracto no había reportado una comprensión profunda de este dominio matemático en la etapa de secundaria.

Para Blanton y Kaput (2005), el álgebra temprana busca promover en las aulas modos de pensamiento que atiendan a la estructura implícita en las matemáticas, por medio de actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y estructuras matemáticas. Desde esta perspectiva, los patrones conforman una base esencial para iniciar el pensamiento algebraico, puesto que contribuyen al desarrollo de la representación y la abstracción matemática (Papic, 2015). Estudios empíricos y longitudinales han podido demostrar cómo los patrones contribuyen de manera eficaz en el desempeño matemático del alumnado hasta los 11 años de edad (Nguyen et al., 2016; Rittle-Johnson et al., 2017) y cómo su comprensión estructural proporciona herramientas cognitivas para desarrollar habilidades que permiten ingresar en el mundo del pensamiento algebraico. Precisamente, desarrollar el pensamiento algebraico a una edad temprana es un área emergente de investigación que reporta en los últimos años un creciente interés (Acosta y Alsina, 2020; Clements y Sarama, 2015; Lüken, 2020; Miller et al., 2016; Mulligan et al., 2020; Nguyen et al., 2016; Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2019; Rodrigues y Serra, 2015; Tirosh et al., 2018; Wijns et al., 2020, 2021).

En la educación infantil, se pueden promover los inicios del pensamiento algebraico al establecer seriaciones con patrones de repetición y estudiar sus regularidades (Clements y Sarama, 2015). Según

Papic et al. (2011), la exploración de patrones permite a los niños establecer conjeturas, anticipar hechos e iniciar el uso preciso del lenguaje matemático; por tanto, la enseñanza de los patrones en edades tempranas promueve el desarrollo cognitivo de los niños favoreciendo la comprensión de las matemáticas (Wijns et al., 2019). Es así como "los patrones constituyen una manera de reconocer, ordenar y organizar los niños su mundo" (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2003, p. 95), promoviendo, a su vez, la capacidad de observar regularidades desde los primeros años de escolarización (Carpenter et al., 2003).

Dada la importancia que tiene el estudio de los patrones en la educación infantil como impulsor del pensamiento algebraico, países como Estados Unidos, Suecia, Australia, Canadá, Irlanda, Singapur, Israel, o Nueva Zelanda introducen su abordaje desde la educación no formal, apostando por construir un itinerario algebraico desde la educación infantil a la educación primaria (Pincheira y Alsina, 2021). Un gran cuerpo de investigación reciente muestra que la atención al patrón y la estructura es fundamental para el aprendizaje y la competencia matemática en la primera infancia (Kidd et al., 2014; Nguyen et al., 2016; Papic et al., 2011; Perry y Dockett, 2008; Rittle-Johnson et al., 2017, 2019; Warren y Cooper, 2007). Sin embargo, en el ámbito español el reto radica en concretar dicha enseñanza, puesto que el currículo nacional minimiza su importancia. En un análisis reciente de la legislación educativa española de educación infantil (*Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil*), Alsina (2022a) constata que la referencia a los patrones es nula a pesar de que la literatura considera los patrones un tema unificador que establece puentes y permite el inicio de modos de pensamiento que pueden favorecer la adquisición de conocimientos más sofisticados en grados posteriores. En su lugar, el currículo español apuesta por el reconocimiento de cualidades y atributos de los objetos con la finalidad de establecer comparaciones y establecer relaciones clasificando, ordenando y emparejando. Desde esta óptica, las orientaciones oficiales españolas presentan ciertas debilidades que los maestros deberían de ser capaces de compensar en sus aulas. Bajo la mirada de Stein et al. (2007), consideramos el uso del currículo como la interpretación de unos estándares mínimos sobre los cuales los docentes construyen su propia versión a partir de sus objetivos, necesidades y conocimientos (Remillard, 2005). Por tanto, se requieren profesionales de la primera infancia comprometidos y formados para ser capaces de detectar falencias de la enseñanza y actuar en consonancia con las orientaciones matemáticas vigentes que nacen de investigaciones contrastadas.

Según Taylor-Cox (2003, p. 15), “los patrones son la piedra angular del pensamiento algebraico”. Para abordar de manera eficaz dicho contenido que carece de orientaciones oficiales en el ámbito nacional, se requiere que el profesorado conozca y maneje una amplia gama de tareas para operacionalizar el trabajo con patrones de repetición, de manera que sea capaz de fomentar y consolidar las habilidades para hacer patrones en los niños. Lüken y Sauzet (2020) definen dichas habilidades como las competencias que se adquieren al desarrollar patrones de repetición.

Desde este prisma, en este artículo se pretende ofrecer luces a las sombras que se apoderan de un currículo limitado, algebraicamente hablando. En primer lugar, se ofrece un breve marco teórico sobre este dominio de contenido; y, en segundo lugar, se presentan una serie de orientaciones didácticas para trabajar los patrones de repetición. Tales orientaciones se focalizan en las tareas matemáticas y las habilidades para hacer patrones que se deben movilizar en el segundo ciclo de la educación infantil (3 a 6 años).

2. Marco teórico

En esta sección se aborda, por una parte, el pensamiento algebraico en la educación infantil, y, por otra, las habilidades que se movilizan para hacer patrones de repetición.

2.1. Pensamiento algebraico en educación infantil

Involucrar a los infantes en el pensamiento algebraico de manera temprana implica diseñar tareas y oportunidades de aprendizaje que promuevan la generalización fomentando a su vez la capacidad de pensar estructuralmente (Stephens et al., 2015). El NCTM (2003) apoya este planteamiento y junto con autores que focalizan algunas de sus líneas de investigación en la educación infantil (Collins y Laski, 2015; Fox, 2005; Miller et al., 2016; Mulligan y Mitchelmore, 2009; Mulligan et al., 2013; Nguyen et al., 2016; Papic y Mulligan, 2007; Rittle-Johnson et al., 2017; Tsamir et al., 2017; Wijns et al., 2019, 2020, 2021) apuestan por una introducción temprana del pensamiento algebraico a partir de

ISSN 2254-8351

Prekindergarten y *Kindergarten* (3-6 años), reconociendo la influencia que ejercen los patrones de repetición.

El álgebra temprana busca desarrollar, desde las primeras edades, diferentes modos de pensamiento algebraico, ya sea recursivo, relacional, funcional, entre otros, a través de los distintos conocimientos vinculados con este eje de contenido (Pincheira et al., en revisión). Pero, ¿qué es el pensamiento algebraico? ¿Cómo se desarrolla? ¿Por qué los patrones de repetición promueven el desarrollo del pensamiento algebraico?

El pensamiento algebraico se puede definir desde múltiples perspectivas (Carraher y Schliemann, 2019; Kieran, 2014) y puede considerar varias dimensiones del álgebra. Kaput et al. (2008), en un intento de consenso y caracterización de este dominio del conocimiento, constató que el álgebra incluye: 1) la generalización y la formalización de patrones, 2) una aritmética generalizada asociada a la identificación de relaciones entre números centrando la atención en la manipulación de operaciones y sus prioridades, 3) el estudio de estructuras, funciones, relaciones y la covariación, y 4) los lenguajes de la modelización. Vergel (2015) define el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente; ya que el álgebra, tal como exponen Knuth et al. (2016), "proporciona las herramientas matemáticas para representar y analizar relaciones cuantitativas, modelar situaciones y resolver problemas en todos los dominios matemáticos" (p. 65).

En este sentido, un elemento central de la actividad matemática general y del pensamiento algebraico en particular es el proceso de generalización (Papic, 2015). Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez (2022) consideran que el pensamiento algebraico se conforma de procesos mentales que contribuyen a crear significado referencial para algún tipo de representación, construyendo y expresando, a su vez, generalizaciones. La generalización se concibe como un proceso mental, considerado como un prerrequisito para alcanzar la abstracción matemática, ya que "generalizar es derivar o inducir a partir de elementos, identificar puntos en común y ampliar los dominios de validez" (Dreyfus, 2022, p. 35).

El reconocimiento y el análisis de patrones de repetición ofrece a los niños la oportunidad de observar y verbalizar generalizaciones, así como registrarlas simbólicamente (Threlfall, 1999). Kahneman (2011) describe a los humanos como buscadores de patrones naturales capaces de encontrar regularidades, incluso cuando son inexistentes. Desde el ámbito de las matemáticas, las regularidades, tal como exponen Supply et al.

ISSN 2254-8351

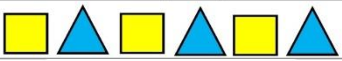
(2022), se consideran en ocasiones patrones o estructuras. Hunter y Miller (2022) conciben la visualización e identificación de estructuras como medios que ayudan a los escolares a abstraer y generalizar para poder ingresar en el mundo del pensamiento algebraico. Esto implica que la generalización de patrones permite a los niños coordinar sus habilidades inferenciales perceptivas y simbólicas, de manera que sean capaces de construir una estructura plausible y algebraicamente útil (Rivera, 2010). Desde esta óptica, autores como Mulligan et al. (2020) argumentan que la falta de conocimiento del patrón y la estructura puede ser un predictor de futuras dificultades matemáticas. Estos autores australianos definen el patrón como cualquier regularidad predecible; y la estructura, como la forma interna en que los diversos elementos de una regularidad se organizan y relacionan.

2.2. Habilidades que se movilizan para hacer patrones de repetición y modos de pensamiento algebraico

Los patrones de repetición se configuran como una puerta de entrada al mundo del pensamiento algebraico. Cuando hablamos de patrón en este artículo, nos referimos a secuencias con una regularidad replicable (Papic et al., 2011), es decir, con una unidad mínima de iteración denominada unidad de repetición (Threlfall, 1999). Si bien en la literatura la definición de patrón varía, la revisión de Wijns et al. (2019) hace visible dos características que normalmente convergen en su conceptualización: regularidad y previsibilidad. La regularidad otorga un orden que permite que un patrón se repita o se modifique de acuerdo a una regla intrínseca que genera previsibilidad (Sarama y Clements, 2009). Desde esta premisa, algunos autores como Lüken y Sauzet (2020), McGarvey (2012) y Wijns et al. (2019) han constatado que, en el contexto de patrones de repetición, es posible predecir usando de manera recursiva las relaciones que se establecen entre los elementos que conforman el patrón, y que dicha previsibilidad permite avanzar hacia el pensamiento funcional.

Llegados a este punto de conceptualización, es necesario puntualizar que existen diferentes tipos de patrones atendiendo a las características de su estructura. De acuerdo con la naturaleza del patrón, estos pueden presentar: 1) unidades que se repiten, 2) núcleos que se ordenan de manera simétrica o, 3) estructuras que crecen o decrecen (Bock et al., 2018). Los elementos de dichas unidades o núcleos pueden contener números, formas, colores, objetos, etc. En la Tabla 1 se muestran ejemplos de los patrones anteriormente descritos.

Tabla 1. Tipos de patrones de acuerdo con Bock et al. (2018)

Tipo de patrón	Ejemplo
Patrón de repetición	
Patrón simétrico	oOOOOo
Patrón de crecimiento	

Nota. Fuente: Elaboración propia.

De manera general, los patrones que se enseñan en la educación infantil son los de repetición, ya que otorgan un orden a lo que los niños perciben como colecciones caóticas de elementos dispares (Bock et al., 2018). Precisamente, la enseñanza de patrones de repetición a niños pequeños consiste en ayudarlos a ser conscientes de que una seriación se basa en una regla interna que permite crear y descubrir patrones isomorfos, independientemente de los elementos que la conformen. Por tanto, la comprensión de patrones de repetición requiere, por un lado, de la capacidad del alumno para detectar la regularidad de una secuencia; y, por el otro, de la habilidad para identificar y analizar la estructura mínima de repetición, avanzando así hacia la generalización e inicios del pensamiento algebraico.

Es importante destacar que las habilidades para hacer patrones (*patterning skills*) se pueden abordar a través de diversas tareas matemáticas (*mathematics tasks*) teniendo en cuenta si requieren o no conocimiento de la estructura o regla subyacente del patrón. Si bien en la literatura sobre patrones de repetición algunas veces los términos "tarea" y "habilidad" significan prácticamente lo mismo (p. ej., "copiar" un patrón es una tarea y "duplicar un patrón" es una habilidad que implica repetir algo), en este artículo se asume que, cuando hablamos de tareas, nos referimos a aquellas actividades que orientan sobre el "cómo", y las habilidades sobre el "qué", considerando la relación estrecha que existe entre ambos términos.

Acosta et al. (2022), para analizar la presencia de tareas con patrones en libros de texto de educación infantil, consideraron como tareas: 1) duplicar el patrón; 2) encontrar el elemento faltante; 3) ampliar la secuencia; 4) construir el mismo patrón con diferentes elementos; 5) identificar la unidad de repetición; y 6) inventar un patrón. Para estos autores, las tareas anteriores movilizan las habilidades de 1) copiar; 2) interpolar; 3) extender; 4) abstraer o traducir; 5) reconocer la unidad de repetición; y 6) crear, respectivamente.

Si bien es cierto que la literatura no otorga un orden consensuado de abordaje en la práctica, ni una nomenclatura coincidente en todas las habilidades y tareas, sí que se muestra acuerdo en considerar que las habilidades que movilizan el reconocimiento de la unidad de repetición son las precursoras del inicio del pensamiento funcional (Bock et al., 2018; Clements y Sarama, 2015; Collins y Laski, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; McGarvey, 2012; Rittle-Johnson et al., 2015; Warren y Cooper, 2006; Wijns et al., 2019).

En la Figura 1 se muestra una línea de tiempo con la finalidad de visibilizar algunas de las caracterizaciones sobre las habilidades para hacer patrones que han servido de base para proponer la secuenciación longitudinal que se propone en este artículo.

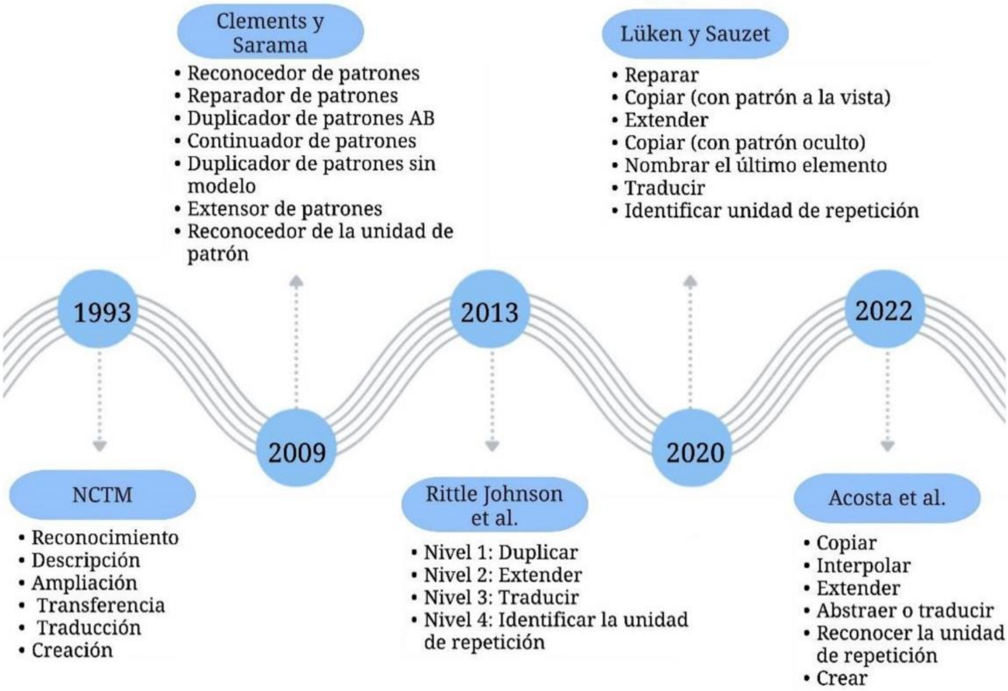


Figura 1. Caracterización de las habilidades para hacer patrones de repetición según algunos autores e instituciones
Nota. Fuente: Elaboración propia.

Las habilidades que se muestran en la Figura 1 permiten fomentar los inicios de modos de pensamientos que se anidan dentro del pensamiento algebraico. Desde el contexto de patrones de repetición, seguidamente abordaremos el pensamiento recursivo, el pensamiento relacional y el pensamiento funcional.

Cuando los infantes escogen dos colores y los alternan con la finalidad de construir una torre o diseñar un collar, por ejemplo, amarillo-azul-amarillo-azul, se están iniciando en un tipo de tarea que investigaciones recientes han considerado como fundamental para su desarrollo cognitivo (McGarvey, 2012; Pasnak et al., 2015). Una primera aproximación al trabajo con patrones de repetición en educación infantil es a través de este tipo de patrones simples de dos elementos, donde mediante el emparejamiento de un elemento a la vez, conocido como estrategia de alternancia, los niños pequeños pueden, por ejemplo, copiar un patrón realizando comparaciones constantes entre dos elementos (Collins y Laski, 2015; Fyfe et al., 2015). A partir de los 3 años aproximadamente, el pensamiento recursivo permite a los niños ser capaces de observar la relación entre los elementos consecutivos de una secuencia pudiendo predecir el elemento desconocido que prosigue. De acuerdo con Lüken y Sauzet (2020) y Wijns et al. (2019) pensar recursivamente implica anticipar solo el elemento sucesor (el +1) de una secuencia.

El pensamiento relacional o pensamiento centrado en las relaciones se define ampliamente como el proceso de hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y patrones significativos que subyacen a la información (Dumas et al., 2013). Para ser consciente de la estructura que subyace en el patrón de repetición, es necesario centrar la atención en las relaciones que se producen entre los elementos de la unidad de repetición, en lugar de simplemente percibir las características individuales (Lüken y Sauzet, 2020; Miller et al. 2016).

De acuerdo con Borriello et al. (2022), las habilidades que centran su atención en la estructura representan una forma de pensamiento relacional, concebido como la capacidad para comparar e identificar semejanzas y diferencias entre elementos y situaciones. Por ejemplo, para ser capaz de reconocer la unidad mínima que conforma la estructura de una seriación, los niños deben considerar los elementos que la componen e identificar cómo se relacionan entre sí (Borriello et al., 2022; Miller et al., 2016).

Desde esta óptica, cuando los niños pueden ver la estructura subyacente a un patrón de dos o tres elementos, es decir, identificar el núcleo o la unidad de repetición, avanzan hacia el desarrollo del pensamiento funcional (Wijns et al., 2019). Este último se vincula como predecesor de la capacidad de entender cómo varían dos cantidades (Blanton y Kaput, 2011), cuando se inicia, por ejemplo, el trabajo con patrones de crecimiento y, posteriormente, las funciones en grados posteriores.

Cabe destacar que la transición entre el pensamiento recursivo y el pensamiento funcional es un hito importante en el desarrollo del pensamiento algebraico, puesto que impulsa el progreso de habilidades tempranas para hacer patrones (Acosta et al., 2022).

A modo de síntesis, podemos constatar que las tareas que movilizan las habilidades de copiar, interpolar y extender focalizan la mirada en la disposición recursiva de los elementos, mientras que las habilidades que promueven la toma de consciencia de la regla subyacente del patrón son las de abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear (Lüken y Sauzet, 2020; McGarvey, 2012). Desde esta perspectiva, asumimos que la consciencia de la estructura del patrón promueve un aprendizaje temprano de las matemáticas, y es que aprender matemáticas es precisamente comprender patrones, interpretar estructuras y establecer relaciones (Lüken y Sauzet, 2020).

3. Estrategias didácticas para la enseñanza de patrones de repetición en educación infantil

En este estudio asumimos por estrategia didáctica el conjunto de acciones pedagógicas que caracterizan el proceso de instrucción en el aula, a partir de objetivos, contenidos, recursos de enseñanza, metodologías, preguntas intencionadas, etc., que conduzcan a la adquisición del aprendizaje de los estudiantes. Estamos de acuerdo con Hinojosa Becerra y Córdova Cando (2020), cuando plantean que gestionar dichas estrategias permite el progreso óptimo e integral de los infantes.

Desde esta perspectiva, para abordar la enseñanza de los patrones de repetición en educación infantil se requiere de la implementación de tareas que contribuyan al desarrollo del pensamiento recursivo, relacional y funcional, a partir de estrategias didácticas que atiendan a las distintas habilidades para hacer patrones. Para ello, se debe tener en cuenta el momento evolutivo en el que los niños son capaces de comprender la estructura interna de una seriación, es decir, la unidad de repetición (Clements y Sarama, 2015; Rittle-Johnson et al., 2015). Con base en estos planteamientos, se presentan estrategias didácticas contextualizadas para abordar, por un lado, las habilidades y tareas para hacer patrones de repetición que promueven el pensamiento recursivo y, por otro lado, las que fomentan el pensamiento relacional y funcional. En todo este andamio de estrategias, se concibe al docente como una figura que guía e incita el aprendizaje mediante preguntas intencionadas (NCTM, 2014) que invitan a generar conocimiento compartido con el grupo de iguales. En este sentido, tal como expresan Acosta y Alsina (2022, p. 171) "deben evitarse preguntas que no impliquen razonamiento, ni argumentación por parte de los escolares y que se contesten con un 'sí' o un 'no'".

3.1. Habilidades y tareas que promueven el pensamiento recursivo (a partir de 3 años)

ISSN 2254-8351

Seguidamente se muestra una propuesta para las habilidades de copiar, de interpolar y de extender que se acompaña con transcripciones de diálogos que se han producido durante la implementación. Las intervenciones docentes de codifican con D y para salvaguardar la identidad de los escolares participantes, se asigna una E seguida de un número a sus intervenciones.

3.1.1. Habilidad de copiar

Tabla 2. Tarea matemática para duplicar un patrón

"Los pasos de peatones de mi ciudad"	
Objetivos	**Contenido matemático**
Descubrir seriaciones en situaciones reales. Reproducir una serie sencilla a partir de la regularidad observada en el paso de peatones.	Observación y reconocimiento de regularidades del entorno con el fin de reproducir una serie.

Material necesario

El material necesario se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Material de la actividad: a) imagen de un paso de peatones; b) listones transparentes y de color blanco; y c) alfombra con circuito de ciudad

Experiencia

- Iniciar un diálogo con todo el grupo-clase sobre los pasos de peatones.
- Mostrar una imagen de un paso de peatones e invitar a los escolares a describir lo que observan en la imagen.
- Presentar el circuito de la ciudad y dar a los escolares elementos manipulativos (listones transparentes y de color blanco) con el fin de que reproduzcan su paso de peatones, siguiendo el patrón AB (blanco-negro). Es necesario guiar a través de buenas preguntas el desarrollo de la actividad. El modelo del patrón podrá estar visible según consideración del docente.
- Fomentar, a través de un diálogo conjunto, las acciones realizadas durante la actividad.

Preguntas intencionadas

- Si ahora tenemos una franja negra, una blanca y una negra, ¿qué franja colocaremos a continuación?
- ¿De qué color es la franja que está en medio de dos franjas blancas? ¿Y entre dos negras?
- Antes de una franja blanca, ¿de qué color es la franja?

Evidencias de la implementación

Figura 3. Los escolares duplican la seriación

E1: Yo pongo uno blanco y uno transparente que parece negro.
D: Entonces después de uno transparente, ¿cuál viene?
E2: Después viene uno blanco, así: blanco-negro, blanco-negro, blanco-negro…
D: Muy bien. Y ahora una pregunta difícil, a ver quién lo adivina. ¿De qué color es la franja que está en medio de dos franjas blancas?
E1: Transparente
E2: Negro
D: ¡Excelente!

De acuerdo con la interacción mostrada en la Figura 3, podemos apreciar cómo los niños y niñas reproducen la seriación de tipo AB utilizando la estrategia de alternancia. Es decir, emparejando cada elemento de manera correspondiente con el modelo dado, avanzando así hacia una manera recursiva de pensar.

3.1.2. Habilidad de interpolar

Tabla 3. Tarea matemática para encontrar elementos faltantes de una secuencia

"Reparando secuencias"	
Objetivos	**Contenido matemático**
Completar los elementos faltantes en la seriación presentada siguiendo la secuencia propuesta.	Identificación del elemento que falta de los patrones AB, AAB y ABB.

Material necesario

El material necesario se muestra en la Figura 4.

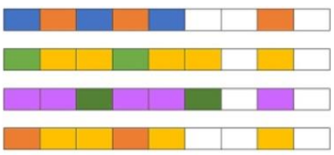


Figura 4. Cartulinas plastificadas (izda.) y pinzas de ropa diferentes (dcha.)

Experiencia

- Poner el material al alcance de los escolares y proponerles colocar en el espacio en blanco de la cartulina la pinza del color que correspondería para seguir la seriación.
- Observar y documentar si los escolares son capaces de reparar el patrón AB, AAB y ABB.
- Invitar a los escolares a describir la seriación completada.

Preguntas intencionadas

- ¿Cómo sabías cuál era el color que tocaba?
- Después de dos espacios con los colores iguales, ¿viene otro espacio de igual color o diferente?

Evidencias de la implementación

Figura 5. La niña encuentra los elementos faltantes de su secuencia

D: ¿Cómo sabías cuál era el color que tocaba?
E: Porque los verdes van de la mano. Ves, aquí le faltaba su amigo.
D: Entonces, después de dos espacios con dos colores que son iguales, ¿cuál toca?
E: El que va solo.
D: ¿Y después del que no va con amigos, cuál viene?
E: Los amigos verdes.

A partir de la intervención docente, se observa cómo se incita a la alumna de la Figura 5 a reflexionar sobre la estructura de la secuencia que está interpolando, es decir, encontrando los elementos faltantes.

3.1.3. Habilidad de extender

Tabla 4. Tarea matemática para ampliar una secuencia

"Hasta el infinito y más allá"	
Objetivos	**Contenido matemático**
Ampliar una seriación con el material propuesto siguiendo el patrón indicado en la tarjeta.	Seriaciones a partir de la alternancia y combinación de figuras geométricas según los patrones AB, AAB y ABB.

Material necesario

El material necesario se muestra en la Figura 6.

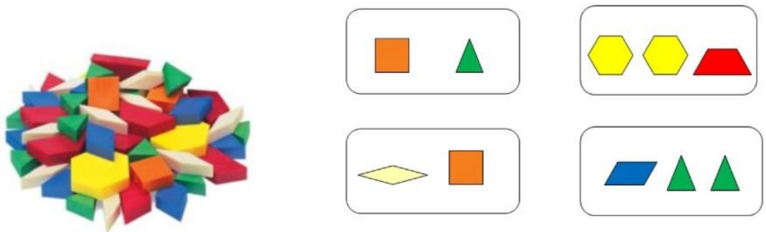


Figura 6. Pattern Blocks o geomosaico (izda.) y tarjetas con patrones (dcha.)

Experiencia

- Se presenta a los escolares una bolsa sorpresa llena de figuras geométricas mezcladas y se ponen a su alcance para que jueguen libremente.
- Transcurrido 10 minutos, se propone a los escolares construir seriaciones a partir de los patrones AB, AAB o ABB que indican las tarjetas.

- A través de buenas preguntas se guía la ejecución de la propuesta según el patrón seleccionado ( ); ( ); ( ) y ( ).
- Se finaliza la sesión con 10 minutos de manipulación libre, donde se propone a los escolares hacer seriaciones siguiendo los patrones que ellos deseen. Se documentan sus acciones y se promueve un diálogo conjunto para iniciar la familiarización con el concepto patrón.

Preguntas intencionadas

- Si eliges el patrón ( ), ¿Cuáles son las piezas que deberás utilizar? ¿De qué color es la figura que hay entre dos triángulos verdes?
- En el patrón ( ) ¿dónde colocaremos el cuadrado naranja?

Evidencias de la implementación

Figura 7. Los escolares 1, 2 y 3 amplían la seriación guiándose por el patrón ofrecido en las tarjetas.

E1: El mío es naranja y casi blanco, naranja y casi blanco, naranja y casi blanco.
D: ¿De qué color es la figura que hay entre dos cuadrados naranjas?
E1: No hay dos cuadrados naranjas.
D: ¿Seguro? Observa tu seriación a ver qué ves.

ISSN 2254-8351

E1. Muchos naranjas.
D: Entonces entre dos naranjas, ¿cuál colocamos?
E1: ¡Ah! Ya sé. Este, el casi blanco.
E2: Yo no tengo casi blanco.
D: ¿Cómo es tu seriación?
E2: Verde-verde y azul, verde-verde y azul, verde-verde y azul.
D: Entonces entre dos azules, ¿cuál colocamos?
E2: Entre dos azules… entre azul y azul…no, azul y azul no van juntos.
D: Correcto, no van juntos, ¿en medio de ellos qué piezas has colocado?
E2: ¡Ah!, ¿verde-verde?
E1: El mío no tiene dos colores juntos, siempre es uno y otro, uno y otro, uno y otro.
E2: El mío es uno-uno y otro, uno-uno y otro.
E3: El mío también es uno-uno y otro, uno-uno y otro.

Resulta interesante observar que, a través de las preguntas del docente, los escolares implicados en este relato que acompaña la Figura 7 establecen relaciones de igualdad y diferencia a partir de un reconocimiento inicial de la estructura que subyace en la secuencia.

3.2. Habilidades y tareas que promueven el pensamiento relacional y funcional (a partir de 4 años)

A continuación, se exponen propuestas para las habilidades de abstraer o traducir, de reconocer la unidad de repetición, y de crear.

3.2.1. Habilidad de abstraer o traducir

Tabla 5. Tarea matemática para construir el mismo patrón con diferentes elementos

“Un jardín especial”	
Objetivos	**Contenido matemático**
Identificar patrones en situaciones reales. Recrear una seriación siguiendo el patrón identificado.	Observación y reconocimiento de seriaciones del entorno con el fin de recrear el mismo patrón con elementos diferentes.

Material necesario

El material necesario se muestra en la Figura 8.

Figura 8. Imagen de un enjardinado (izda) y plastina (dcha.)

Experiencia

- Iniciar un diálogo con todo el grupo-clase sobre las características y colocación de los arbustos que se observan en las imágenes.
- Invitar a los escolares a describir cómo están colocados los arbustos.
- Proponer a los escolares que representen el enjardinado modelando con la plastilina el patrón identificado (arbusto bajo-bajo-alto).
- Fomentar, a través de un diálogo conjunto, las acciones que han desarrollado.

Preguntas intencionadas

- Si ahora colocamos dos arbustos bajos, uno alto, dos bajos y uno alto, ¿cuál deberíamos colocar a continuación?
- ¿Cómo es el arbusto que colocaremos después de dos que son bajos?

Evidencias de la implementación

Figura 9. La alumna construye el mismo patrón del enjardinado con plastilina, asignando diferentes formas a los elementos que componen la seriación

E: Yo lo hago así, una bola-una bola y un palo, una bola-una bola y un palo.
D: ¿Por qué lo haces así?
E: Había dos árboles pequeños y uno gigante hasta el cielo, dos árboles pequeños y uno gigante hasta el cielo.
D: Entonces, los dos árboles pequeños, aquí en tu seriación de plastilina, ¿cuáles son?
E: Estos (señalando las dos bolas de plastilina).
D: Si ahora colocamos dos bolas y un palo, dos bolas y un palo. ¿Cuál deberíamos colocar a continuación?
E: ¿Un palo?
D: ¿Recuerdas cómo era el enjardinado?
E: Sí. Pequeño-pequeño, gigante, pequeño-pequeño gigante.
D: Si tenías dos arbustos pequeños y uno gigante, entonces después de dos bolas y un palo, dos bolas y un palo, ¿Cuál viene?
E: ¡Ya lo sé! De nuevo dos bolas y un palo, dos bolas y un palo.

De acuerdo con la transcripción de la Figura 9, se aprecia que la alumna abstrae la regularidad del patrón para construir una nueva seriación utilizando diferentes elementos. Se observa como en este proceso de traducción y transferencia, el docente guía la acción a través de preguntas que permiten aprovechar el conocimiento de la alumna fortaleciendo la comprensión.

3.2.2. Habilidad de reconocer la unidad de repetición

Tabla 6. Tarea matemática para identificar la unidad de repetición

"Cazadores de patrones"	
Objetivos	**Contenido matemático**
Identificar seriaciones presentes en el patio de la escuela. Leer y analizar los elementos de la seriación, para poder identificar la unidad mínima del patrón. Representar en un papel alguna de las seriaciones encontradas en el patio.	Identificación y análisis de seriaciones presentes en un entorno cotidiano: el patio.

Material necesario

Cámara de fotos para documentar las seriaciones encontradas.

Experiencia

- Iniciar un dialogo con todo el grupo-clase para introducir la propuesta de ir a "cazar" patrones al patio de la escuela.
- Documentar cada seriación identificada e invitar a los escolares a analizar los elementos que la conforman.
- Proponer a los escolares el reto de representar en un papel alguna de las seriaciones encontradas, utilizando únicamente figuras geométricas o símbolos.
- Fomentar, a través de un diálogo conjunto, el análisis y descubrimiento de la unidad mínima que se repite y que da lugar a la seriación.

Preguntas intencionadas

- ¿Cómo están colocadas las jardineras del patio? ¿Siguen alguna regularidad?
- ¿Vemos alguna seriación en los juguetes del patio?

- ¿Cómo son las palas del arenal? ¿Las podemos guardar siguiendo algún patrón? ¿Cuál?

Evidencias de la implementación

Figura 10. Los escolares descubren patrones en los objetos del patio y se les animan a construir seriaciones con la misma unidad de repetición

Unas alumnas construyen una seriación con las palas del patio y entre ellas debaten si es igual el patrón verde-azul hecho con palas y el rojo-azul construido con los cubos de arena. La docente interviene y les pregunta si son iguales o diferentes. Una de ellas argumenta que son diferentes porque verde y rojo no son iguales y justifica su razonamiento alegando que si los cubos rojos fueran verdes, entonces sí que serían iguales. La otra compañera le explica que sí que son iguales porque ambos tienen un color de cada. Seguidamente, se les invita a reconocer la unidad de repetición de ambos y construir una nueva seriación con ese mismo núcleo de iteración. Los escolares deciden representar el patrón utilizando su propio cuerpo: un estudiante sentado-uno de pie.

3.2.3. Habilidad de crear

Tabla 7. Tarea matemática para inventar un patrón

“Un mandala gigante”	
Objetivos	**Contenido matemático**
Construir un mandala gigante con el material propuesto siguiendo el patrón que se decida de manera colectiva.	Seriaciones a partir de la combinación de atributos cualitativos y cuantitativos del material reciclado y estructurado propuesto.

Material necesario

Pattern Blocks (Geomosaico), tapas de botellas, círculos de madera, pompones de colores, depresores de madera, platos de colores… y papel de embalar en forma de círculo, de 1 metro de diámetro aproximadamente.

Experiencia

- Invitar a los alumnos a sentarse alrededor del papel de embalar e iniciar un diálogo sobre los mandalas.
- Con la ayuda del proyector mostrar algunos ejemplos en la pizarra digital.
- Proponer crear un mandala gigante siguiendo un patrón ideado de manera colectiva y cooperativa.
- Documentar y registrar las interacciones que se producen durante la toma de decisiones.

Preguntas intencionadas

- ¿Qué piezas utilizaremos para definir el patrón central?
- En un patrón AAB, ¿cómo debe ser la pieza que va después de dos iguales?
- En un patrón ABC, ¿cómo son las 3 primeras piezas?
- Si ponemos una hilera de tapas así: blanco-verde-rojo, blanco-verde-rojo, ¿qué patrón sigue la seriación?
- En un patrón ABB hay una pieza diferente y dos iguales, y en un patrón AAB, ¿cómo son las piezas?

Evidencias de la implementación

Uno de los grupos de trabajo decidió utilizar diferentes tipos de patrones para diseñar su mandala. Uno de sus integrantes propone construir uno muy difícil (haciendo referencia a un patrón del tipo ABC con depresores de colores lila-blanco-verde). Paralelamente, otro niño agrupa las tapas amarillas y blancas y decide crear un patrón AAB, y finalmente se escoge de manera conjunta y unánime el patrón AB construido con platos rojos y palos de helado.

Figura 11. Los escolares inventan patrones para diseñar un mandala

3.3. Implicaciones para la práctica docente de las habilidades para hacer patrones de repetición en Educación Infantil

El nivel de comprensión de los patrones varía en cada niño (Mulligan y Mitchelmore, 2009; Papic et al., 2011), pero una enseñanza de patrones eficaz, con la adecuada intervención docente, es posible (Lüken y Kampmann, 2018; Mulligan et al., 2020). Sin embargo, a menudo se proponen tareas a los infantes que no aprovechan todo su potencial, debido a que otorgan poca importancia al reconocimiento implícito de la unidad de repetición, provocando así una enseñanza limitada de los patrones como trampolín del álgebra temprana. Por tanto, es aconsejable que el profesorado: 1) contemple tareas que movilicen habilidades para hacer patrones que comporten una dificultad de abstracción creciente; 2) acompañe la transición del pensamiento recursivo al funcional y, 3) considere que ciertas habilidades están condicionadas al momento evolutivo del infante.

La dificultad del patrón con una estructura de repetición radica en la complejidad de la unidad que se repite de manera periódica (Lüken y Sauzet, 2020). Estos autores consideran que los patrones simples AB son los más fáciles y que la dificultad aumenta de manera proporcional con el incremento de elementos que conforman dicha unidad de repetición, por ejemplo, ABC; rojo, verde, amarillo, azul; ABCDE. Sarama y Clements (2009) consideran, además, que la repetición de elementos individuales del núcleo de repetición (por ejemplo, AAB) también aumenta la complejidad del patrón. Por este motivo, de manera orientativa, se propone una presentación gradual y combinada de los tipos de patrones, tal como se muestra en la Figura 12.

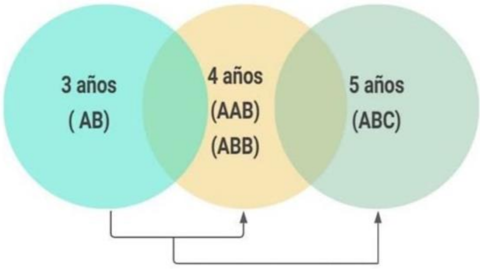


Figura 12. Introducción longitudinal de diversos tipos de patrones de repetición con una dificultad creciente.
Nota. Fuente: Elaboración propia.

Se propone introducir un tipo de patrón en cada edad sin dejar de abordar los que se han tratado en años anteriores. Por tanto, los infantes de 5 años realizarán también tareas con patrones de núcleo AB, AAB y ABB.

En un intento por ofrecer orientaciones al profesorado de infantil para abordar la enseñanza de los patrones de repetición en el aula, en la Figura 13 se propone un itinerario longitudinal vinculado con las habilidades para hacer patrones que se han abordado tanto de manera teórica como práctica en este artículo. La propuesta que se presenta pretende ser una herramienta para guiar el diseño e implementación de tareas que permitan avanzar de manera consolidada hacia maneras más sofisticadas de pensar algebraicamente en la educación infantil.

De acuerdo con la información que se muestra en la Figura 13, las habilidades de copiar, interpolar y extender no implican un reconocimiento previo de la unidad de repetición, puesto que los niños pueden hacer uso de la estrategia de alternancia, es decir, la correspondencia término a término para atender y resolver tareas de duplicar, encontrar elementos faltantes o ampliar una secuencia. Estas habilidades son propias del pensamiento recursivo, ya que los niños analizan la seriación como una entidad de elementos ordenados con cierto ritmo o regularidad, sin ser capaces de abstraer la regla intrínseca. Autores como Clements y Sarama (2015) han podido comprobar en sus estudios que este tipo de tareas son fáciles de resolver para niños de 3-4 años.

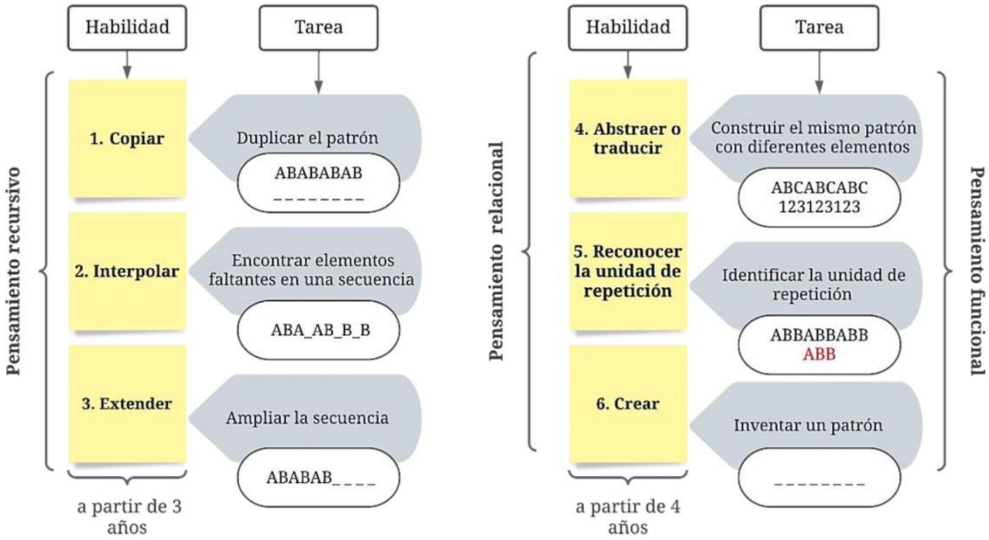


Figura 13. Propuesta de itinerario longitudinal sobre habilidades para hacer patrones de repetición.
Nota. Fuente: Elaboración propia.

En cambio, las habilidades de abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear requieren de la comprensión del núcleo de iteración para poder llevar a cabo tareas de construir el mismo patrón con diferentes elementos, identificar de la unidad repetición, e inventar un patrón. Desde los Estados Unidos, Rittle-Johnson et al. (2015) confirman que la comprensión de la regla subyacente del patrón, es decir, de la unidad mínima de repetición, se comienza a evidenciar de manera exitosa a partir de los 4-5 años, y que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar dicha abstracción del patrón. Todas estas habilidades permiten desarrollar el concepto de patrón de una manera más consciente y voluntaria, para así avanzar hacia el pensamiento funcional, mejorar la cognición de los niños y promocionar el razonamiento de conceptos y procedimientos matemáticos (Björklund y Pramling, 2014; Bock et al., 2018).

Sin embargo, todo este aprendizaje sería imposible de consolidar sin una intervención docente eficaz (Acosta y Alsina, 2022). Por tanto, en este sentido, es importante ofrecer espacios de diálogo para preguntar a los niños cómo llegaron a la solución de las tareas propuestas, favoreciendo así: 1) escenarios de co-aprendizaje entre pares; 2) oportunidades para externalizar a través del lenguaje su comprensión, y 3) un debate co-constructivo sobre las estrategias utilizadas.

4. Consideraciones finales

Los patrones de repetición se consideran uno de los conocimientos centrales del álgebra temprana dado que, por un lado, sientan las bases para desarrollar el pensamiento algebraico y, por otro, se configuran como una manera de involucrar a los niños y niñas en la observación, el razonamiento y la comprensión de las estructuras matemáticas abstractas (Blanton y Kaput, 2005, 2011). Además, autores como Björklund y Pramling (2014) constatan en sus estudios que reconocer patrones es fundamental para muchos dominios del conocimiento como la lectura, las matemáticas o las artes, ya que aportan significado y cohesión. Este tipo de patrones, los de repetición, resultan ser los más accesibles para los niños pequeños (Rittle-Johnson et al., 2013), puesto que presentan intrínsecamente un ritmo, regularidad y un orden.

En este artículo se han aportado una serie de estrategias didácticas para trabajar los patrones de repetición en educación infantil a partir del desarrollo de las distintas habilidades para hacer patrones que deberían movilizar los niños de 3 a 6 años: 1) copiar, 2) interpolar, 3) extender, 4) abstraer o traducir, 5) reconocer la unidad de repetición y 6) crear. Para ello, se han propuesto tareas matemáticas contextualizadas que fomentan, a nivel general, los inicios del pensamiento algebraico y, de manera específica, el pensamiento recursivo, relacional y funcional a medida que se profundiza en el desarrollo y sofisticación longitudinal de dichas habilidades.

Lüken y Sauzet (2020) plantean que la comprensión de la estructura del patrón parece ser fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de los niños, para trascender de un tipo de pensamiento que permite establecer relaciones predictivas entre elementos sucesivos a otro más sofisticado que promueve la abstracción de la regla subyacente de la seriación.

En esta línea consideramos que las tareas para hacer patrones pueden abordarse haciendo uso de diferentes contextos de enseñanza que permitan a los escolares manipular, explorar y experimentar con patrones, ya que no solo es válido el uso tradicional de papel y lápiz para abordar este contenido (Pincheira et al., 2022). Por ende, debemos apostar por la

ISSN 2254-8351

incorporación y uso de contextos como situaciones reales, materiales manipulativos, lúdicos, tecnológicos, literarios… para acercar un contenido abstracto a situaciones concretas y familiares de los niños y las niñas y favorecer su enseñanza, sin dejar de contemplar al docente como la figura que guía y conduce dicho proceso de aprendizaje (Alsina, 2022b). Desde nuestro punto de vista, el profesorado debe tener un amplio conocimiento sobre cuáles son las habilidades que atienden a la identificación de la unidad de repetición y cuáles no lo hacen. De ahí que en este artículo se proponga un itinerario longitudinal sobre las tareas a implementar en cada edad y una propuesta para introducir diferentes tipos de patrones de repetición, siguiendo un principio creciente de dificultad, con la finalidad de proporcionar herramientas que permitan a los docentes compensar las falencias de un currículo oficial poco alineado con las orientaciones internacionales.

Por consiguiente, alentamos al profesorado de educación infantil a generar oportunidades didácticas que permitan interactuar, opinar, discutir, reflexionar y co-construir conocimiento compartido, haciendo uso de preguntas y contra-preguntas intencionadas que favorezcan la exteriorización de la manera en que los niños y niñas han comprendido las tareas con patrones de repetición. Consideramos también importante gestionar el error como una oportunidad de enriquecimiento y aprendizaje entre iguales, donde se promueva la creación de un ambiente dialógico constructivo.

Llegados a este punto de reflexión, animamos a los docentes a diseñar propuestas dinámicas enmarcadas en contextos multimodales, apostando por tareas consecuentes con los aportes teóricos sobre las habilidades para hacer patrones, para de esta manera establecer puentes significativos entre la teoría y la práctica de aula.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856) y por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N.° 72200447. Los autores desean agradecer a los directores de la revista y a los revisores por su ayuda en la mejora del artículo.

Bibliografía

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad*, *17*(2), 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Acosta, Y. Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Alsina, Á. (2022a). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: Contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Épsilon, 111,* 67-89.

Alsina, Á. (2022b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.

Björklund, C. y Pramling, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education*, *22*(1), 89-104. https://doi.org/10.1080/09669760.2013.809657

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early* *algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Bock, A. M., Cartwright, K. B., McKnight, P. E., Patterson, A. B., Shriver, A. G., Leaf, B. M., Mohtasham, M. K., Vennergrund, K. C. y Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology*, *9*(1802). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802

Borriello, G. A., Flynn, M. E. y Fyfe, E. R. (2022). Developmental differences in children's and adults' strategies on a repeating pattern task. *Early Childhood Research Quarterly*, *59*, 300-310. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2021.12.012

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias,* *40*(1), 65-86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Clements, D. H. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.

Collins, M. A. y Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, *32*, 204-214. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.04.004

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2

Dumas, D., Alexander, P. A. y Grossnickle, E. M. (2013). Relational Reasoning and Its Manifestations in the Educational Context: A Systematic Review of the Literature. *Educational Psychology Review*, *25*(3), 391-427. https://doi.org/10.1007/s10648-013-9224-4

Fox, J. (2005). Child-Initiated Mathematical Patterning in the Pre-Compulsory Years. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 313-320). PME.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M. y Rittle-Johnson, B. (2015). Easy as ABCABC: Abstract Language Facilitates Performance on a Concrete Patterning Task. *Child Development*, *86*(3), 927-935. https://doi.org/10.1111/cdev.12331

Hinojosa Becerra, M. y Córdova Cando, D. (2020). El nivel inicial, base para fortalecer el desarrollo infantil. *Voces de la Educación*, *5*(10), 13-21.

Hunter, J. y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Macmillan.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 curriculum*. https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Kaput, J. J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates/NCTM.

Kidd, J. K., Pasnak, R., Gadzichowski, K. M., Gallington, D. A., McKnight, P., Boyer, C. E. y Carlson, A. (2014). Instructing First-Grade Children on Patterning Improves Reading and Mathematics.

Early Education and Development, *25*(1), 134-151. https://doi.org/10.1080/10409289.2013.794448

Kieran, C. (2014). Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 27-32). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_6

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. y Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, *97*(6), 65-68. https://doi.org/10.1177/0031721716636877

Lüken, M. M. (2020). Patterning as a Mathematical Activity: An Analysis of Young Children's Strategies When Working with Repeating Patterns. En M. Carlsen, I. Erfjord y P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 79-92). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_5

Lüken, M. M., y Kampmann, R. (2018). The Influence of Fostering Children's Patterning Abilities on Their Arithmetic Skills in Grade 1. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, y C. Benz (Eds.), *ICME-13 Monographs. Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education: Vol. I* (pp. 55-66). Springer.

Lüken, M. M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

McGarvey, L. M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Miller, M. R., Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M. y Fyfe, E. R. (2016). The Influence of Relational Knowledge and Executive Function on Preschoolers' Repeating Pattern Knowledge. *Journal of Cognition* *and Development*, *17*(1), 85-104. https://doi.org/10.1080/15248372.2015.1023307

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*, 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D. y Crevensten, N. (2013). Reconceptualizing Early Mathematics Learning: The Fundamental Role of Pattern and Structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 47-66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_4

Mulligan, J., Oslington, G. y English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM – Mathematics Education*, *52*(4), 663-676. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducción de Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* National Council of Teachers of Mathematics.

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C. y Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly*, *36*, 550-560. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003

Papic, M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: Identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 519-534. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8

Papic, M. y Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics*

Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice: Vol. II (pp. 591-600). MERGA.

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pasnak, R., Kidd, J. K., Gadzichowski, K. M., Gallington, D. A., Schmerold, K. L. y West, H. (2015). Abstracting Sequences: Reasoning That Is a Key to Academic Achievement. *The Journal of Genetic Psychology*, *176*(3), 171-193. https://doi.org/10.1080/00221325.2015.1024198

Perry, B., y Dockett, S. (2008). Young children's access to powerful mathematical ideas. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2.ª ed., pp. 75-108). Routledge.

Pincheira, N., Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: Un análisis desde los libros de texto. *PNA*, *17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (en revisión). *Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: Vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico*.

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 28,* de 02 de febrero de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95

Remillard, J. T. (2005). Examining Key Concepts in Research on Teachers' Use of Mathematics Curricula. *Review of Educational*

Research, *75*(2), 211-246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G. y Farran, D. C. (2017). Early Math Trajectories: Low-Income Children's Mathematics Knowledge From Ages 4 to 11. *Child Development*, *88*(5), 1727-1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M. y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, *31*, 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 376-396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L. y Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*, *46*, 166-178. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.006

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0

Rodrigues, M. y Serra, P. (2015). Generalizing repeating patterns: A study with children aged four. En I. Sahn, S. A. Kiray y S. Alan (Eds.), *International Conference on Education in Mathematics, Science y Technology (ICEMST)* (pp. 120-134). ICEMST.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Stein, M., Remillard, J. y Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Information Age.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just Say Yes to Early Algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Supply, A.-S., Wijns, N., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2022). It is probably a pattern: Does spontaneous focusing on regularities in preschool predict reasoning about randomness four years later? *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10187-9

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes! *Young Children*, *58*(1), 14-21.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18-30). Cassell.

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R. y Levenson, E. (2018). Engaging young children with mathematical activities involving different representations: triangles, patterns, and counting objects. *CEPS Journal, 8*(2), 9-30. https://doi.org/10.25656/01:15664

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E. S., Barkai, R. y Tabach, M. (2017). Repeating patterns in kindergarten: Findings from children's enactments of two activities. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 83-99. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9762-7

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215. https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Warren, E., y Cooper, T. (2006). Using Repeating Patterns to Explore Functional Thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Warren, E., y Cooper, T. (2007). Repeating Patterns and Multiplicative Thinking: Analysis of Classroom Interactions with 9-Year-Old Students that Support the Transition from the Known to the Novel. *Journal of Classroom Interaction*, *42*(1), 7-17.

Wijns, N., De Smedt, B., Verschaffel, L. y Torbeyns, J. (2020). Are preschoolers who spontaneously create patterns better in mathematics? *British Journal of Educational Psychology*, *90*(3), 753-769. https://doi.org/10.1111/bjep.12329

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 152-163. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Young Children's Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. En K. M. Robinson, H. P. Osana y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139-161). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. y Torbeyns, J. (2021). Associations Between Repeating Patterning, Growing Patterning, and Numerical Ability: A Longitudinal Panel Study in 4- to 6-Year Olds. *Child Development*, *92*(4), 1354-1368. https://doi.org/10.1111/cdev.13490

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

> Este capítulo consta de tres secciones. En primer lugar, se interpretan los resultados que configuran la unidad temática del compendio, con la finalidad de dar respuesta a la pregunta de investigación de la Tesis Doctoral. Para ello, se discuten los principales hallazgos con base en la literatura previa. En segundo lugar, se describen las implicaciones para la docencia que emergen de los resultados. Finalmente, se exponen las limitaciones y perspectivas futuras de investigación.

5.1. Discusión

El propósito de esta Tesis ha sido aportar conocimientos disciplinares y didácticos que permitan situar la forma en que los niños de 3, 4 y 5 años se inician en la comprensión de patrones de repetición para avanzar hacia el desarrollo temprano del pensamiento algebraico, promoviendo la conexión entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional. Desde este marco, hemos definido el pensamiento algebraico como un modo de pensamiento multimodal que, mediante la focalización de relaciones y cambio, facilita el análisis, la representación, la justificación y la comprensión de la estructura. En este escenario, los patrones de repetición son tomados en consideración como una puerta de entrada hacia los inicios del desarrollo del pensamiento algebraico y como apoyo en la comprensión posterior de los patrones de crecimiento. Como sostiene McGarvey (2012), los patrones de repetición presentan una unidad de repetición congruente que se abstrae de manera predecible, mientras que la unidad central en un patrón creciente se transforma a lo largo de múltiples dimensiones (Warren y Cooper, 2008). O sea, en un tipo de patrón la unidad de repetición adopta un carácter constante y en el otro cambiante, motivo que nos lleva a considerar los patrones de repetición como la antesala de los patrones de crecimiento, y estos a su vez, la base de la función en la educación matemática formal. Por tanto, los patrones son un eslabón esencial en el camino del pensamiento algebraico.

Ahora bien, considerando los objetivos específicos que se han detallado en el capítulo I, a continuación, se discuten los principales resultados.

5.1.1. Objetivo específico 1

Diseñar, validar e implementar una trayectoria de aprendizaje y un itinerario de enseñanza sobre patrones de repetición para niños de educación infantil contemplando tanto contextos concretos como abstractos.

Enseñar y aprender matemáticas a través de un enfoque de patrón y estructura puede requerir cambios fundamentales en la forma en que se conceptualiza, estructura e implementa el aprendizaje, la pedagogía, el currículo y la evaluación de las matemáticas. Para ello se contemplan diferentes contextos de enseñanza que contribuyen a crear situaciones de aprendizaje desde lo concreto hasta lo abstracto en base a los planteamientos del EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022) [Anexo 1].

Desde el marco de una investigación longitudinal de diseño que se calibra y modifica en función de la relación constante entre teoría y práctica, se muestra en el Estudio A el proceso de diseño, validación e implementación llevado a cabo durante el primer ciclo de iteración. En dicho estudio pudimos evidenciar que a la edad de 3 años, los participantes de nuestra investigación tendían a combinar de manera natural colecciones de objetos siguiendo un criterio establecido por ellos mismos, normalmente de tipo cualitativo, ya que como exponen Castro-Rodríguez y Castro (2016); Clements y Sarama (2017) y Lüken (2018), existen atributos como el color que son más familiares para los niños. El Estudio A también contribuyó a detectar que el tratamiento del concepto "patrón" concebido como "unidad de repetición" resulta complicado de asumir para los escolares de 3-4 años. Por este motivo, se pone mayor énfasis en la lectura de la seriación y en la relación recursiva de elementos que la integran, que en el reconocimiento de la unidad de repetición de la misma. Este dato es crucial para el diseño posterior de la trayectoria de aprendizaje e itinerarios de enseñanza para 4 (Estudio B) y 5 años [Anexo 1]. Además, apoya la conclusión del estudio de Papic et al. (2011) quienes también observaron que, sin una intervención directa del docente, los escolares de estas edades no identifican de manera autónoma el patrón que origina la seriación, la cual cosa otorga fidelidad a nuestros resultados. Años más tarde Rittle-Johnson et al. (2015) confirman en su estudio que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar la abstracción del patrón y que este hecho se inicia de manera exitosa a partir de los 4-5 años. Por ende, en el primer ciclo de iteración se concluye que las tareas más adecuadas a partir de los 3 años son: 1) duplicar el patrón; 2) encontrar elementos faltantes; y 3) ampliar la secuencia, donde se movilizan las habilidades de: 1) copiar; 2) interpolar; y 3) extender, respectivamente. Estas tareas y habilidades forman parte de la trayectoria de aprendizaje que proponemos en esta Tesis Doctoral y están estrechamente vinculadas con el pensamiento recursivo. Dicho tipo de pensamiento, que se anida dentro del pensamiento algebraico, permite predecir un elemento desconocido en una secuencia de valores haciendo uso de la relación entre elementos consecutivos (Lüken y Sauzet, 2020). De acuerdo con Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al. (2019), pensar recursivamente implica anticipar solo el elemento sucesor (el +1) de una secuencia, sin que se evidencie consciencia y comprensión de la estructura subyacente.

En relación con la gestión docente, se constata, tanto en el Estudio A, como en el Estudio B, que en este tipo de propuestas se debería de actuar como incitador del conocimiento a través de la formulación de buenas preguntas, adecuando el vocabulario a la edad de los alumnos, sin dejar de potenciar el lenguaje matemático. De acuerdo con Castro y Castro (2016) y Perry y Dockett (2008) un lenguaje preciso favorece la asimilación comprensiva de procesos complejos. Desde este escenario, es necesario poner en valor el papel del docente como guía que acompaña e invita a los niños a entrar en contacto con el mundo de los patrones desde diferentes contextos de enseñanzas, haciendo uso de buenas preguntas que desafíen el pensamiento del niño. Por tanto, es conveniente que los docentes utilicen estrategias de instrucción que permitan establecer, "una rica conversación en la que los niños hacen y exploran conjeturas matemáticas, construyen argumentos para establecer o refutar estas conjeturas y tratan las conjeturas establecidas (generalizaciones) como piezas importantes del conocimiento compartido" (M. L. Blanton, 2008, p. 93). Para ello, tal como se muestra en el Estudio B, resulta imprescindible conocer cómo se avanza desde un contexto de patrones de repetición, hacia una comprensión cada vez más sólida de la estructura subyacente para así iniciar el camino hacia el desarrollo del pensamiento algebraico. En este sentido, se cree necesario fomentar el uso de contextos concretos e informales que permitan ir avanzando hacia la generalización y formalización del conocimiento compartido, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de papel y lápiz.

5.1.2. Objetivo específico 2

Evidenciar la influencia que ejerce el contexto de enseñanza en la comprensión, justificación y representación de patrones de repetición.

En esta primera aproximación sobre la influencia del contexto de enseñanza en la comprensión de patrones de repetición a través de su representación, hemos constatado que el éxito de la representación ha estado estrechamente ligado con la comprensión del patrón y dicha comprensión fue más exitosa en el nivel más concreto del EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022) donde se prioriza la enseñanza de contenido matemático a partir de situaciones reales o cercanas a los niños. Resulta importante destacar que, en contextos más concretos, se favoreció el reconocimiento de patrones. Los alumnos incluso pudieron identificar la unidad de repetición, encontrar patrones isomorfos, e iniciarse en su generalización, lo cual se consideran hitos importantes en el momento de introducir el álgebra en las aulas (Vergel et al., 2022). Mientras que en los contextos más abstractos presentaron mayor dificultad. Estos resultados evidencian el rol de los contextos concretos y las posibilidades que ofrecen para acceder al pensamiento algebraico. Tal como exponen Hunter y Miller (2022) visualizar e identificar estructuras son acciones que ayudan a los escolares a abstraer y generalizar para poder ingresar en el mundo del pensamiento algebraico.

Específicamente, en el Estudio C se pone de manifiesto que en los contextos de situaciones reales los niños muestran un mayor porcentaje de respuestas correctas que en el de recursos gráficos. En el Estudio D, tras un análisis longitudinal de las tareas desarrolladas en el nivel intermedio del EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022), concretamente en contextos tecnológicos, se observa que dicho contexto puede influenciar de manera positiva en la comprensión de los patrones de repetición, ya que permiten manipular de forma concreta, la estructura abstracta de una seriación, desde una perspectiva lúdica. Estos datos están en sintonía con las conclusiones de Zhong y Xia (2020), cuando afirman que los niños pequeños necesitan oportunidades de exploración, manipulación y experimentación, para así fomentar el aprendizaje desde una perspectiva lúdica y concreta. Precisamente, tanto en el desarrollo del Estudio A, B, C como D, los participantes han tenido la oportunidad de: i) llevar a cabo una tarea a través de la exploración y la acción lúdica; ii) organizar, mostrar y compartir ideas que respondían a la interacción previamente articulada; y iii) iniciarse en la exteriorización de su comprensión a través de la representación, dando lugar, en algunos casos, a una primera aproximación de la representación simbólica. En este marco, el dibujo ha sido la vía que ha permitido exteriorizar y plasmar de manera explícita como los escolares se inician en la identificación y reconocimiento de los patrones de repetición abordados a través de los distintos contextos de enseñanza. Dichos estudios, aportan datos relevantes que muestran cómo el grado de éxito de la comprensión a través de la representación está condicionado por el nivel de abstracción del contexto donde se plantea la tarea, junto con el acompañamiento docente a través de preguntas que desafíen el pensamiento de los escolares.

En esta línea, observamos en el Estudio B que el tipo de tarea influyó directamente en el éxito de la representación. Es decir, cuanto más compleja era la acción de identificar el patrón y mayor el desconocimiento de los escolares sobre el contexto donde se enmarcaba, más dificultad tenían los participantes para representar la seriación y más probable era que lo hicieran con errores. Este hecho se evidenció sobre todo en el contexto de los recursos lúdicos donde los participantes tuvieron mayor dificultad para identificar el patrón (AB) presente en el juego, a pesar de ser considerado un contexto específico y, como exponen Tsamir et al. (2020), ser concebida como fácil la estructura (AB).

Desde el terreno de la comprensión, la justificación también ha sido un proceso que nos ha permitido entender como los niños van incorporando y relacionando la idea de patrón, como unidad de repetición. En el Estudio D se describe una relación estadísticamente significativa entre el ICM, calculado mediante el test TEMA 3 de Ginsburg y Baroody (2003), y el tipo de justificación, de acuerdo con la categorización adaptada de Chua (2017) siendo el P-valor de 0.000, para 3, 4 y 5 años. En relación con el tipo de justificación que utilizan los niños de 3, 4 y 5 años para evidenciar la comprensión de la enseñanza de patrones de repetición, se ha podido constatar la importancia de la gestión docente en incitar, a través de preguntas, reflexiones que permiten avanzar hacia la consciencia de estructura, es decir, argumentos explícitos centrados en el reconocimiento de patrones con la finalidad de dar respuesta a un reto o tarea articulada en un contexto tecnológico. Es así como de manera longitudinal se aprecia una diversificación en el tipo de justificación, que permite ir avanzando entre pares hacia un aprendizaje desde la comprensión y la alfabetización matemática. Desde esta perspectiva, los conocimientos compartidos entre iguales se consolidan como una oportunidad para favorecer la construcción de un discurso matemático cada vez más sofisticado y significativo, tanto entre los que protagonizan la justificación, como la audiencia que se nutre de dicha justificación (Staples et al., 2012).

5.1.3. Objetivo específico 3

Determinar las habilidades para hacer patrones que se movilizan durante la enseñanza de patrones de repetición, y la relación que se establece entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional.

Este objetivo se ha abordado, en el Estudio B, E y F. Para ello, a partir de un análisis minucioso de la literatura y del trabajo conjunto de Acosta et al. (2022) y Pincheira et al. (2022) para establecer indicadores de análisis para libros de texto de educación infantil, se otorga un orden de dificultad creciente a tareas y habilidades para hacer patrones de repetición con la intención de avanzar hacia la comprensión estructural de dichos patrones. Este orden se toma como la ruta para establecer una trayectoria de aprendizaje de patrones de repetición en el estudio B y F; y como instrumento de categorización para las tareas encontradas sobre patrones en los libros de texto analizados del Estudio E.

Por un lado, en el estudio B se han evidenciado los modos de pensamiento algebraico que movilizan escolares de 4 años cuando se implementan tareas matemáticas con patrones de repetición en diferentes contextos. Por otro lado, en el Estudio F se ofrecen ejemplos de tareas para cada habilidad priorizando el uso de situaciones reales y recursos manipulativos.

En esta ruta que denominamos trayectoria de aprendizaje, siguiendo la línea de Clements y Sarama (2015), cada habilidad es importante y necesaria para generar conexiones de apoyos entre el pensamiento recursivo, el pensamiento relacional y el funcional. Las habilidades para hacer patrones se definen como un conjunto de competencias que se configuran como predictoras del rendimiento matemático en etapas posteriores (Rittle-Johnson et al., 2013). Por tanto, en el diseño de tareas con patrones de repetición, apostamos por una serie de habilidades secuenciadas con un orden de dificultad creciente que se deben de promover desde el escenario de una progresión del aprendizaje: a) copiar, b) interpolar, c) extender, e) abstraer o traducir, f) reconocer la unidad de repetición, y e) crear. Las tareas que promueven estas habilidades se detallan a continuación: 1) duplicar el mismo patrón; 2) encontrar elementos faltantes de una secuencia; 3) ampliar la secuencia; 4) construir el mismo patrón con diferentes materiales; 5) identificar la unidad de repetición; e 6) inventar un patrón, respectivamente. Dichas tareas se desarrollan, en el Estudio B, siguiendo los planteamientos EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022) teniendo en cuenta el momento evolutivo en el que los niños son capaces de comprender la estructura interna de una seriación, es decir, la unidad de repetición (Clements y Sarama, 2015; Rittle-Johnson et al., 2015). Es así, cómo se ofrecen tareas con diferentes niveles de dificultad y haciendo uso de diversos contextos para enriquecer, sin limitar o acotar, el proceso de enseñanza de patrones. Desde esta perspectiva, en el Estudio B se evidencia una presencia mayoritaria de pensamiento recursivo que funcional. Se concluye que la enseñanza de patrones de repetición requiere de un nivel de abstracción que debe ser acompañado y gestionado de manera eficaz para garantizar la transición del pensamiento recursivo al relacional y funcional.

Desde el Estudio E se han analizado libros de texto de educación infantil, como un recurso que se ubica en el nivel formal del EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022) y que puede ser considerado de apoyo para la formalización del conocimiento matemático. Los resultados obtenidos han puesto de manifiesto que las tareas más frecuentes de manera longitudinal son las de ampliar una secuencia de tipo cualitativa o cuantitativa, movilizando la habilidad de extender. Dicha habilidad no requiriere de reconocimiento de la unidad repetición para abordar la resolución. De acuerdo con Rittle-Johnson et al. (2013), se supone que estas tareas son más fáciles de resolver (Rittle-Johnson et al., 2013) y, por ende, podrían no contribuir al desarrollo de la percepción de la estructura (Wijns et al., 2019). No podemos obviar que ser capaz de comprender el componente cognitivo, relacionado con el conocimiento de la estructura; y el meta-cognitivo, asociado con la capacidad de búsqueda y análisis de patrones (Mulligan y Mitchelmore, 2009), favorece la generalización y apoya el razonamiento multiplicativo en etapas posteriores (Papic et al., 2011; Warren y Cooper, 2007).

Si bien es cierto que, en algunas de las tareas con patrones de repetición analizadas, se apuesta por un reconocimiento de la unidad de repetición, es importante tener en cuenta que, sin una intervención directa del docente, los niños de 4 años no identifican de manera autónoma el patrón que origina la seriación (Papic, et al., 2011), puesto que es una habilidad que puede resultar difícil incluso para niños de 9 años (Warren y Cooper, 2007). En esta línea, Rittle-Johnson et al. (2013) confirman en su estudio que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar la abstracción del patrón y que este hecho se evidencia de manera exitosa a partir de los 4-5 años.

Por tanto, de manera longitudinal los libros de texto analizados incluyen mayoritariamente tareas que movilizan habilidades previas a la identificación de la unidad de repetición, promoviendo ampliamente el pensamiento recursivo, lo que consideramos una fortaleza. No obstante, al promocionar únicamente este tipo de tareas, se genera una debilidad en el proceso de formalización de los patrones de repetición, provocando una desconexión en la transición del pensamiento recursivo al funcional, puesto que los niños pierden oportunidades de centrar la mirada en otras habilidades que requieran un mayor grado de abstracción. En conclusión, los datos de este estudio han evidenciado una escasa presencia de tareas para enseñar patrones de repetición en los libros de texto analizados y una enseñanza periférica y poco profundizada de las habilidades para hacer patrones. Desde esta perspectiva resulta imprescindible ofrecer oportunidades de enseñanza que compensen desde otros contextos estas falencias detectadas.

Así pues, apostamos por una enseñanza de patrones de repetición que se desarrolle en el marco de un criterio de dificultad creciente, tanto de manera longitudinal (entre niveles) como transversal (en un mismo nivel), para así promover el aprendizaje de habilidades cada más complejas para hacer patrones, desarrollando de manera eficaz los inicios del pensamiento algebraico.

5.1.4. Objetivo específico 4

Elaborar orientaciones teóricas y metodológicas que permitan avanzar en la implementación de tareas con patrones de repetición e iniciar el desarrollo temprano del pensamiento algebraico.

En el Estudio F se presentan estrategias didácticas que permiten promover las habilidades para hacer patrones en educación infantil ofreciendo orientaciones que se focalizan en las tareas matemáticas que se deben movilizar en el segundo ciclo de la educación infantil (3 a 5 años). Para apoyar dichas habilidades de una manera temprana, se requiere: a) una trayectoria clara que permita al docente visualizar una ruta de aprendizaje que favorezca la expresión de generalidades; b) una reconsideración y un reconocimiento curricular explícito; y c) el uso de un lenguaje matemático específico que promueva la exploración temprana de patrones de repetición.

Para ello, se han propuesto en el Estudio F tareas matemáticas contextualizadas que fomentan, a nivel general, los inicios del pensamiento algebraico y, de manera específica, el pensamiento recursivo, relacional y funcional a medida que se profundiza en el desarrollo y sofisticación longitudinal de dichas habilidades.

Lüken y Sauzet (2020) plantean que la comprensión de la estructura del patrón parece ser fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de los niños, para trascender de un tipo de pensamiento que permite establecer relaciones predictivas entre elementos sucesivos a otro más sofisticado que promueve la abstracción de la regla subyacente de la seriación. Por ende, debemos apostar por la incorporación y uso de contextos como situaciones reales, materiales manipulativos, lúdicos, tecnológicos, literarios… para acercar un contenido abstracto a situaciones concretas y familiares de los escolares y favorecer su enseñanza, sin dejar de contemplar al docente como la figura que guía y conduce dicho proceso de aprendizaje (Acosta y Alsina, 2022; Alsina, 2022a; Olmos y Alsina, 2021).

Desde nuestro punto de vista, el profesorado debe tener un amplio conocimiento sobre cuáles son las habilidades que atienden a la identificación de la unidad de repetición y cuáles no lo hacen. De ahí que en el Estudio F se proponga una trayectoria de aprendizaje sobre las tareas a implementar en cada edad y una propuesta para introducir diferentes tipos de patrones de repetición, siguiendo un principio creciente de dificultad, con la finalidad de proporcionar herramientas que permitan a los docentes compensar un currículo español poco alineado con las orientaciones internacionales. Dicha trayectoria pretende ser una herramienta para guiar y estimular el aprendizaje en una línea de abstracción creciente, armonizada en función de la capacidad del niño para centrar la atención en la estructura subyacente de los patrones de repetición. Para ello, se concluye que las habilidades de: 1) copiar, 2) interpolar y 3) extender, son más adecuadas para abordar a partir de los 3 años, donde los niños movilizan el pensamiento recursivo. A partir de los 4 años, se puede iniciar el diseño de tareas para las habilidades de: 4) abstraer o traducir; 5) reconocer la unidad de repetición; y 6) crear. Para estas habilidades los escolares se introducen en otros modos de pensamiento más sofisticados como son: el relacional y el funcional, para avanzar hacia la comprensión de la estructura.

En esta línea, en el Estudio F, alentamos al profesorado de educación infantil a generar oportunidades didácticas que permitan interactuar, opinar, discutir, reflexionar y co-construir conocimiento compartido, haciendo uso de preguntas y contra-preguntas intencionadas que favorezcan la exteriorización de la manera en que los niños han comprendido las tareas con patrones de repetición. Consideramos también importante gestionar el error como una oportunidad de enriquecimiento y aprendizaje entre iguales, donde se promueva la creación de un ambiente dialógico constructivo, que permita establecer puentes significativos entre la teoría y la práctica de aula.

5.2. Implicaciones para la docencia

Después de tres años de estudio longitudinal hemos podido constatar que el nivel de comprensión de los patrones de repetición varía en función de la edad, de las oportunidades del contexto de enseñanza y de la gestión docente. Por tanto, es primordial tener presente los siguientes aspectos para así promover los inicios del pensamiento algebraico en la educación infantil a través de los patrones de repetición:

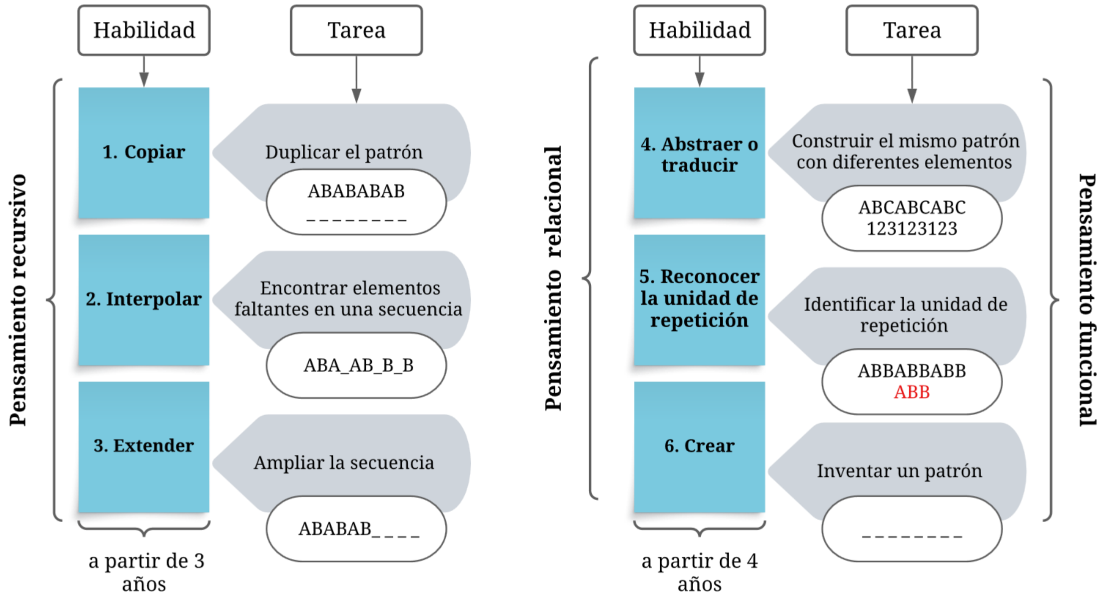
- Considerar una trayectoria de aprendizaje que contemple habilidades para hacer patrones con un orden de abstracción creciente, para así dotar de comprensión y significación los inicios del pensamiento algebraico, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de reproducir o extender, sin identificar la unidad de repetición.
- Ser consciente que es a partir de los 4 años que los escolares comienzan a ser capaces de centrar su atención en la unidad que se repite.
- Acompañar la transición entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional, diseñando tareas que se centren de manera progresiva en la estructura y en la relación que se establece entre los elementos que configuran la unidad de repetición.

Para ello, aportamos una trayectoria de aprendizaje que nace de esta Tesis Doctoral con la finalidad de secuenciar habilidades para hacer patrones de repetición desde la vinculación con los modos de pensamiento (recursivo, relacional y funcional) que se anidan dentro del pensamiento algebraico, estableciendo así una progresión de aprendizaje para patrones de repetición. De esta manera, ponemos al alcance de docentes y formadores, una herramienta para guiar el diseño e implementación de tareas que permitan avanzar de manera consolidada hacia maneras más sofisticadas de pensar algebraicamente en la educación infantil.

En la Figura 14 se sintetizan las habilidades y tareas que se deberían introducir a partir de 3 y 4 años, junto con el tipo de pensamiento que movilizan.

Figura 14

Trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición



Fuente: Elaboración propia a partir de Acosta et al. (2022) y Pincheira et al. (2022)

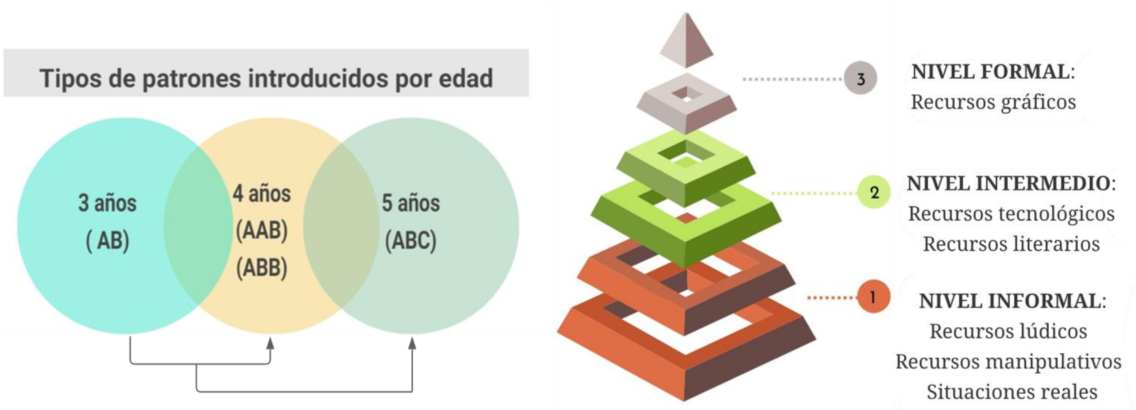
De acuerdo con la información que se muestra en la Figura 14, las habilidades de: 1) copiar; 2) interpolar; y 3) extender, no implican un reconocimiento previo de la unidad de repetición, puesto que los niños pueden hacer uso de la estrategia de alternancia, es decir, la correspondencia término a término para atender y resolver tareas de duplicar, encontrar elementos faltantes o ampliar una secuencia. Estas habilidades son propias del pensamiento recursivo, ya que los escolares analizan la seriación como una entidad de elementos ordenados con cierto ritmo o regularidad, sin ser capaces de abstraer la regla intrínseca. Autores como Clements y Sarama (2015) han podido comprobar en sus estudios que este tipo de tareas son fáciles de resolver para niños de 3-4 años. En cambio, las habilidades de: 4) abstraer o traducir; 5) reconocer la unidad de repetición; y 6) crear, requieren de la comprensión del núcleo de iteración para poder llevar a cabo tareas de construir el mismo patrón con diferentes elementos, identificar de la unidad repetición, e inventar un patrón. Desde los Estados Unidos, Rittle-Johnson et al. (2015) confirman que la comprensión de la regla subyacente del patrón, es decir, de la unidad mínima de repetición, se comienza a evidenciar de manera exitosa a partir de los 4-5 años, y que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar dicha abstracción del patrón. Todas estas habilidades permiten desarrollar el concepto de patrón de una manera más consciente y voluntaria, para así avanzar hacia el pensamiento funcional, mejorar la cognición de los niños y promocionar el razonamiento de conceptos y procedimientos matemáticos (Björklund y Pramling, 2014; Bock et al., 2018).

Para este fin, resulta también necesario:

- Ser consciente de que la dificultad del patrón con una estructura de repetición radica en la complejidad de la unidad que se repite de manera periódica. Por este motivo, de manera orientativa, se propone una introducción gradual y combinada de los siguientes tipos de patrones de repetición: AB (3 años), ABB y AAB (4 años); y ABC (5 años).
- Diseñar tareas que permitan a los niños transitar de los conocimientos concretos e informales, a los abstractos y formales, trazando un itinerario de enseñanza que incluya: situaciones reales, recursos manipulativos, lúdicos, literarios, tecnológicos y gráficos, contemplando lo que evolutivamente son capaces, sin limitar las oportunidades de crecimiento y aprendizaje.

Figura 15

Tipo de patrón de repetición y contextos de enseñanza que incluye el planteamiento EIEM



Fuente: Elaboración propia a partir de Alsina (2010, 2019, 2020, 2022)

En este sentido, estamos convencidos de que la exposición a una variedad de patrones en diferentes contextos y modalidades, conjuntamente con el papel del docente como guía que anima a los alumnos a representar, justificar y transferir dichos patrones, son componentes cruciales y determinantes en la acción de comprender, generalizar e iniciar el camino del pensamiento algebraico.

Por consiguiente, creemos que es relevante:

- Compartir entre iguales diferentes maneras de representar una misma situación matemática para fomentar el uso de representaciones múltiples cuando los escolares organizan, registran y comunican sus ideas.
- Utilizar la representación y la justificación como procesos interconectados que permiten: i) plasmar de manera concreta la comprensión que poseen los niños acerca de los patrones de repetición; ii) evaluar el progreso de dicha comprensión, y iii) reequilibrar el proceso de enseñanza de patrones de repetición a través del diseño de tareas contextualizadas que fomenten y extiendan el aprendizaje.

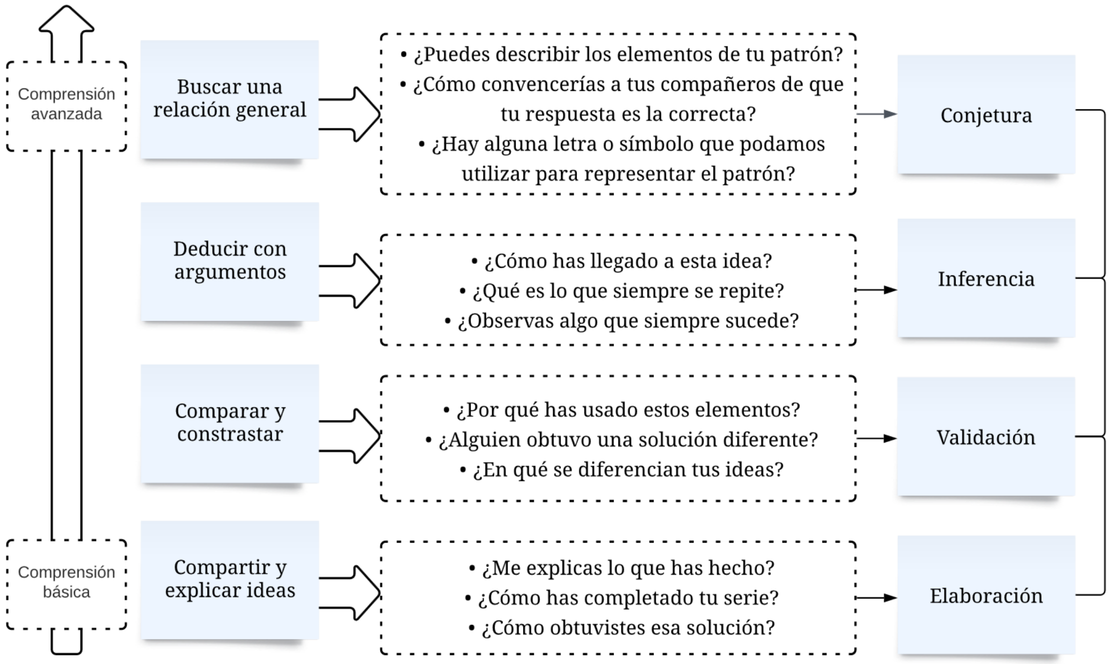
De acuerdo con la literatura que sustenta nuestra base teórica, diversas investigaciones ratifican la importancia de la representación como un proceso que permite avanzar en el aprendizaje de las matemáticas, pero sobre todo en su comprensión holística. Bajo esta mirada, asumimos que, desde una edad temprana los escolares deben representar para aprender matemáticas y así poder organizar, registrar, comprender y comunicar la naturaleza matemática de las acciones previamente realizadas en el plano educativo y social mediante la utilización de signos, gráficos y/o lenguaje natural. Corroborando las aportaciones de Sterner et al. (2020), creemos que es fundamental conectar el conocimiento informal con los símbolos escritos, ya que de esta manera se establece un vínculo significativo entre las habilidades informales y formales creando una base sólida y consolidada para las etapas posteriores de escolarización. Desde este marco, coincidimos con la NCTM (2000, p. 138) en que “ver similitudes en las formas de representar diferentes situaciones es un paso importante hacia la abstracción”. Por ello, una instrucción guiada y sistemática, combinada con tareas articuladas en diferentes contextos educativos donde se fomente el uso de diferentes tipos de representaciones y las relaciones entre ellas puede ser una manera exitosa de asegurar el proceso de representación y comprensión de patrones de repetición. Tal y como afirma Rico (2009, p. 7), “las representaciones desempeñan un papel destacado para los procesos de construcción de conceptos y, por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático”.

A pesar de todas las ideas expuestas anteriormente, queremos poner en valor la intervención y gestión docente como el baluarte y eslabón fundamental para garantizar los inicios del pensamiento algebraico en la educación infantil a través de la enseñanza de patrones de repetición. Tal como afirma Blanton (2008), un aspecto fundamental del álgebra en las primeras edades es que las tareas y el currículo por sí solos no son suficientes, ya que la experiencia y conocimientos del docente juegan un papel crucial para ejercer una instrucción eficaz. En esta ruta temprana hacia la promoción del pensamiento algebraico, la figura docente debe estar enfocada en ayudar a los niños a prestar atención a la unidad de repetición dentro de las tareas de patrones. Por consiguiente, es importante ofrecer espacios de diálogo para preguntar a los niños cómo llegaron a la solución de las tareas propuestas, favoreciendo así: 1) escenarios de co-aprendizaje entre pares; 2) oportunidades para externalizar a través del lenguaje su comprensión; y 3) un debate co-constructivo sobre las estrategias utilizadas.

En la Figura 16 ofrecemos una pauta orientativa como guía para la formulación de preguntas, que, desde el contexto de patrones de repetición, permite focalizar la mirada con un orden de comprensión jerárquico que avanza de una comprensión básica a una comprensión avanzada de los patrones de repetición.

Figura 16

Guía de prototipo de buenas preguntas



Fuente: Elaboración propia a partir de adaptaciones de Blanton (2008) y Chua (2017)

A modo de síntesis, exponer que, en toda intervención, es preciso tener presente que el uso de preguntas intencionadas incita a los escolares a exteriorizar sus ideas y los invita a articular un lenguaje matemático que les permite avanzar hacia la construcción de conjeturas y argumentos cada vez más sofisticados, para progresar en el camino de la generalización. No en balde Flynn et al. (2020) exponen que la manera en que se habla de patrones, condiciona la forma en que se piensa en patrones. Desde este enfoque, resulta primordial formular buenas preguntas para así transferir la oportunidad a los escolares de ser protagonistas de su aprendizaje y de organizar y estructurar sus ideas matemáticas.

5.3. Limitaciones y perspectivas de futuro

En esta sección se exponen algunas de las principales limitaciones y perspectivas de investigaciones.

En primer lugar, abordaremos las limitaciones desde el modelo metodológico emergente utilizado. Desde este marco, somos conscientes que los conocimientos y orientaciones teóricas y metodológicas que se generan en el contexto de una investigación de diseño son humildes y dificultan la generalización de resultados para universos mayores. Sin embargo, tal como expone Molina (2021), en una investigación basada en el diseño, la generalización no está directamente relacionada con la representatividad de la muestra, sino con la replicabilidad de modos de andamiaje y trayectorias que permitan proveer a los docentes de herramientas eficaces para su práctica en el aula. Por tanto, nuestra finalidad es que las orientaciones que se derivan de esta Tesis, acompañen, mediante la reflexión, la acción docente futura (Radford y Sabena, 2015) y que nuestras conclusiones sean motivo de inspiración, sin pretender ser directamente generalizables a otras realidades, puesto que el número reducido de la muestra lo dificulta.

En segundo lugar, resaltamos la complejidad en el proceso de recogida de datos y análisis posterior de la cantidad de información que se genera en un estudio longitudinal. Durante los tres años de implementación, se administró, mediante entrevista individual, el test TEMA 3 de Ginsburg y Baroody (2003) para obtener el índice de competencia matemática de los niños antes de la intervención; se desarrollaron un total de 57 sesiones presenciales de 50 minutos cada una; se recogieron las representaciones en formato dibujo de los 24 participantes tras cada sesión; se tomaron notas de campo; y grabaciones de todas las sesiones con cámara fija y móvil. Toda esta información ha permitido combinar tanto aspectos cuantitativos como cualitativos, siendo conscientes de variables que no han estado contempladas, como, por ejemplo, las funciones ejecutivas de los participantes, o la aplicación de un post-test.

En tercer lugar, destacamos que el uso diferido, a través de imágenes, de contextos de situaciones reales en la primera etapa del itinerario de enseñanza pudo haber influido en las respuestas de los niños, y no podemos saber con certeza si los errores hubieran disminuido con la articulación de las tareas en un contexto real directo.

Todas estas cuestiones inspiran las siguientes líneas de investigación:

i. Determinar la relación que se establece entre las funciones ejecutivas y las habilidades para hacer patrones de repetición en los diferentes contextos que conforman el EIEM (Alsina, 2010, 2019, 2020, 2022). Tal como plantea Kieran (2018, p. 6), “el hallazgo de que la excelencia algebraica requiere una gran cantidad de atención consciente y esfuerzo cognitivo debería sensibilizar a los profesores e investigadores sobre las demandas mentales involucradas en hacer álgebra”.
ii. Evidenciar las dificultades, obstáculos y elementos distractores con los que se encuentran los escolares cuando no logran identificar la estructura subyacente y ofrecerles estrategias didácticas que les permitan avanzar hacia modos de pensamiento algebraico más sofisticados.
iii. Evaluar la demanda cognitiva que requiere cada tarea de la trayectoria de aprendizaje diseñada en esta Tesis, en función de la unidad de repetición (por ejemplo, AB frente a AAB; o ABB frente a ABC).
iv. Diseñar, validar e implementar una trayectoria de aprendizaje para patrones de crecimiento a partir de 6 años y avanzar hacia el estudio de la función y el uso de variables.
v. Generar estrategias de aprendizaje, desde el contexto de patrones que permitan continuar avanzando en la sofisticación del pensamiento algebraico permeando hacia otros estándares de contenido matemático, como, por ejemplo, la numeración y el cálculo.
vi. Profundizar en la relación entre el pensamiento computacional y el pensamiento algebraico, tomando como punto de intersección el reconocimiento de patrones en la resolución de problemas.
vii. Estudiar la transición entre modos de representación que permiten avanzar hacia la representación simbólica

Llegados a este punto de la memoria, añadimos para concluir, que concebimos los inicios del pensamiento algebraico en la educación infantil como una vía donde se acompaña más desde el preguntar que desde el dar respuestas. Es decir, un camino que se inicia con la enseñanza de patrones de repetición promocionando el peregrinaje entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional, incluyendo así una planificación minuciosa, conectada con la teoría y sustentada desde la práctica, para consolidar dicho camino desde unos estándares matemáticos sólidos y contrastados. De ahí que en esta Tesis se proponga una trayectoria de aprendizaje (Figura 14) y una propuesta de itinerario de enseñanza (Anexo 1) con la finalidad de proporcionar estrategias didácticas que permitan ofrecer un proceso de enseñanza-aprendizaje en consonancia con las orientaciones internacionales y garantizar el avance hacia la sofisticación del pensamiento algebraico de manera conectada con las matemáticas formales de la educación primaria.

REFERENCIAS

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad*, *17*(2), 166-179. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2015). *The Australian Curriculum: Mathematics*.

Alsina, Á. (2010). La «pirámide de la educación matemática»: Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de innovación educativa*. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/86942

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años*. Graó.

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, *3*(2), 127-158. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2022a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3 a 6 años)*. Graó.

Alsina, Á. (2022b). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: Contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, *111*, 67-89.

Alsina, Á., y Pincheira, N. (2022). Luces y sombras del álgebra temprana en el currículo español (3-12 años). *Suma*, *99*, 17-26.

Anglada, M. L., Cañadas, M. C., y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J.

A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157).

Ayala Altamirano, C. (2021). *Concepción y representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales*. Universidad de Granada. https://digibug.ugr.es/handle/10481/69402

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2021a). El Proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(3), 211-241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2021b). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Bäckman, K. (2016). Children's play as a starting point for teaching shapes and patterns in the preschool. En T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange, y A. Wernberg (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 223-234). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_12

Bakker, A. (2019). *Design research in education*. Routledge.

Ball, D. L., y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). CMESG/GCEDM.

Björklund, C. (2016). Playing with patterns: Conclusions from a learning study with toddlers. En T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange, y A. Wernberg (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 269-287). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_15

Björklund, C., y Pramling, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education*, *22*(1), 89-104. https://doi.org/10.1080/09669760.2013.809657

Björklund, C., van den Heuvel-Panhuizen, M., y Kullberg, A. (2020). Research on early childhood mathematics teaching and learning. *ZDM*, *52*(4), 607-619. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01177-3

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 181-202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M., Gardiner, A. M., Ristroph, I., Stephens, A., Knuth, E., y Stroud, R. (2022). Progressions in young learners' understandings of parity arguments. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-32. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2053775

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraisation: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer.

Bock, A. M., Cartwright, K. B., McKnight, P. E., Patterson, A. B., Shriver, A. G., Leaf, B. M., Mohtasham, M. K., Vennergrund, K. C., y Pasnak, R. (2018). Patterning, reading, and executive functions. *Frontiers in Psychology*, *9*(1802). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802

Borriello, G. A., Flynn, M. E., y Fyfe, E. R. (2022). Developmental differences in children's and adults' strategies on a repeating pattern task. *Early Childhood Research Quarterly*, *59*, 300-310. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2021.12.012

Burgoyne, K., Malone, S., Lervag, A., y Hulme, C. (2019). Pattern understanding is a predictor of early reading and arithmetic skills. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 69-80. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.006

Cañadas, M. C., Blanton, M., y Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking / *Número especial sobre el pensamiento algebraico temprano*. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 469-478. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569

Cañadas, M. C., Castro Martínez, E., y Castro Martínez, E. (2008). *Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas*. https://digibug.ugr.es/handle/10481/4392

Cañadas, M. C., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruíz, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53-59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W., Martinez, M. V., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos. *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Catalunya. Decret legislatiu 21/2023, de 7 de febrer, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació infantil. (DOGC [en línea], núm. 8851, 9-2-2023, pág. 1-39). https://portaldogc.gencat.cat/utilsEADOP/PDF/8851/1955221.pdf. [Consulta: 4 de mayo de 2023].

Charles, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education*, *7*(3), 9-24.

Chick, H., Stacey, K., Vincent, J., y Vincent, J. (2001). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*. http://hdl.handle.net/11343/35000

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2023). Unfolding algebraic thinking from a cognitive perspective. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10218-z

Chua, B. L. (2017). *A framework for classifying mathematical justification tasks*. CERME 10. https://hal.science/hal-01873071

Clements, D. H., y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Clements, D. H., y Sarama, J. (2007). Mathematics. En R. S. New y M. Cochran (Eds.), *Early childhood education: An international encyclopedia* (Vol. 2, pp. 502-509). Praeger.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.

Clements, D. H., Sarama, J., Layzer, C., y Unlu, F. (2023). Implementation of a scale-up model in early childhood: Long-term impacts on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *54*(1), 64-88. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0245

Clements, D., y Sarama, J. (2019). *Learning and teaching with learning trajectories early math—Birth to grade 3*. Learning and teaching with learning trajectories [LT]2. http://www.learningtrajectories.org/

Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.

Collins, A., Joseph, D., y Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Collins, M. A., y Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, *32*, 204-214. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.04.004

Conway, C., y Sloane, F. (2005). *International trends in post-primary mathematics education*. NCCA.

Cornejo-Morales, C. E., Goizueta, M., y Alsina, Á. (2021). La situación argumentativa: Un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(3), 159-185. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.16048

Cotton, W., Lockyer, L., y Brickell, G. J. (2009). A journey through a Design-Based Research project. En G. Siemens y C. Fulfor (Eds.), *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications*

2009 (pp. 1364-1371). Association for the Advancement of Computing in Education.

Cox, D. C., Meicenheimer, J., y Hickey, D. (2017). Eliciting and using evidence of student thinking giving students voice. En D. A. Spangler y J. J. Wanko (Eds.), *Enhancing Classroom Practice* (pp. 89-97). National Council of Teachers of Mathematics.

Daro, P., Mosher, F., y Corcoran, T. (2011). Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction. *CPRE Research Reports*. https://doi.org/10.12698/cpre.2011.rr68

Davis, R. (1967). *Exploration in mathematics: A text for teachers*. Addison-Wesley Publishing Company.

Davis, R. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior, 4*, 195-208.

Davydov, V. V. (Ed.). (1991). *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Design-Based Research Collective. (2003). Design based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Diago, P. D., Yáñez, D. F., y Arnau, D. (2022). Relations between complexity and difficulty on repeating-pattern tasks in early childhood. *Journal for the Study of Education and Development*, *45*(2), 311-350. https://doi.org/10.1080/02103702.2021.2000127

Du Plessis, J. (2018). Early algebra: Repeating pattern and structural thinking at foundation phase. *South African Journal of Childhood Education*, *8*(2). https://doi.org/10.4102/sajce.v8i2.578

Dumas, D., Alexander, P. A., y Grossnickle, E. M. (2013). Relational reasoning and its manifestations in the educational context: A systematic review of the literature. *Educational Psychology Review*, *25*(3), 391-427.

Economopoulos, K. (1998). Early childhood corner: What comes next? The mathematics of pattern in kindergarten. *Teaching Children Mathematics*, *5*(4), 230-233. https://doi.org/10.5951/TCM.5.4.0230

España. Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación infantil. (BOE [en línea], núm. 4, 04-1-2007, pág. 474-482). https://www.boe.es/eli/es/rd/2006/12/29/1630 . [Consulta: 4 de mayo de 2023].

España. Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. (BOE [en línea], núm. 28, 02-2-2022, pág. 14561-14595). https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95. [Consulta: 4 de mayo de 2023].

Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J., y Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(2), 245-262. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2

Fernández, C., Baptista, P., y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Flynn, M. E., Guba, T. P., y Fyfe, E. R. (2020). ABBABB or 1212: Abstract language facilitates children's early patterning skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *193*, 104791. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.104791

Fox, J. (2005). *Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years* (pp. 313-320). International Group for the Psychology of Mathematics Education. https://eric.ed.gov/?id=ED496828

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Fyfe, E. R., Evans, J. L., Matz, L. E., Hunt, K. M., y Alibali, M. W. (2017). Relations between patterning skill and differing aspects of early mathematics knowledge. *Cognitive Development*, *44*, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2017.07.003

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., y Rittle-Johnson, B. (2015). Easy as ABCABC: Abstract language facilitates performance on a concrete patterning task. *Child Development*, *86*(3), 927-935. https://doi.org/10.1111/cdev.12331

Ginsburg, H. P., y Baroody, A. J. (2003). *Test of Early Mathematics Ability-Third Edition*. Pro Ed.

Ginsburg, H. P., Lin, C., Ness, D., y Seo, K.-H. (2003). Young american and chinese children's everyday mathematical activity. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 235-258. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0504_01

Goldin, G. A. (2020). Mathematical representations. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.

Gripton, C. (2022). Developing mathematical patterning in ECE classrooms: Participatory research with teachers of 3–5-year-olds. *European Early*

Childhood Education Research Journal, 1-17. https://doi.org/10.1080/1350293X.2022.2108097

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (Vol. 5). McGraw-Hill.

Hunter, J., y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Macmillan.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «Algebrafying» the K-12 curriculum.* https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Kawulich, B. B. (2005). Participant observation as a data collection method. *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research*, *6*(2). https://doi.org/10.17169/FQS-6.2.466

Kidd, J. K., Pasnak, R., Gadzichowski, K. M., Gallington, D. A., McKnight, P., Boyer, C. E., y Carlson, A. (2014). Instructing first-grade children on patterning improves reading and mathematics. *Early Education and Development*, *25*(1), 134-151. https://doi.org/10.1080/10409289.2013.794448

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (1.ª ed., pp. 32-56). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044378

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*, 139-151.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 27-32). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_6

Kieran, C. (2018). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-9). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_6-5

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M., y Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, *97*(6), 65-68. https://doi.org/10.1177/0031721716636877

Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lacampagne, C. B., Blair, W. D., Kaput, J. J., y National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment (U.S.) (Eds.). (1995). *The algebra initiative colloquium Vol. 2: Working group papers*. U.S. Dept. of Education, Office of Educational Research and Improvement, National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Larkin, K., Resnick, I., y Lowrie, T. (2022). Preschool children's repeating patterning skills: Evidence of their capability from a large scale, naturalistic, Australia wide study. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-16. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2056320

Lee, L., y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(9), 428-433. https://doi.org/10.5951/MTMS.11.9.0428

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*(3), 24-42.

Lüken, M. M. (2012). Young children's structure sense. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *33*(2), 263-285. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0036-8

Lüken, M. M. (2018). Repeating pattern competencies in three- to five-year old kindergartners: A closer look at strategies. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, y C. Benz (Eds.), *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education* (pp. 35-53). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_3

Lüken, M. M. (2020). Patterning as a mathematical activity: An analysis of young children's strategies when working with repeating patterns. En M. Carlsen, I.

Erfjord, y P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 79-92). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_5

Lüken, M. M., y Kampmann, R. (2018). The influence of fostering children's patterning abilities on their arithmetic skills in grade 1. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, y C. Benz (Eds.), *ICME-13 Monographs. Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education: Vol. I* (pp. 55-66). Springer. https://pub.uni-bielefeld.de/record/2918871

Lüken, M. M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

MacDonald, A. (2013). Using children's representations to investigate meaning-making in mathematics. *Australasian Journal of Early Childhood*, *38*(2), 65-73. https://doi.org/10.1177/183693911303800209

MacKay, K. J., y De Smedt, B. (2019). Patterning counts: Individual differences in children's calculation are uniquely predicted by sequence patterning. *Journal of Experimental Child Psychology*, *177*, 152-165. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.07.016

Martin, R., Viseu, F., y Rocha, H. (2023). Functional thinking: A study with 10th-grade students. *Education Sciences*, *13*(4), 335. https://doi.org/10.3390/educsci13040335

Mason, J. (2011). What makes ´Algebra´ early? En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 566-568). Springer.

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Miles, M., y Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2.ª ed.). Sage.

Miller, M. R., Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M., y Fyfe, E. R. (2016). The Influence of relational knowledge and executive function on preschoolers' repeating pattern knowledge. *Journal of Cognition and Development*, *17*(1), 85-104. https://doi.org/10.1080/15248372.2015.1023307

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2016). *PISA 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español*. SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: Un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Mulligan, J., English, L., Mitchelmore, M. C., Welsby, S. M., y Crevensten, N. (2011). *An evaluation of the pattern and structure mathematics awareness program in the early school years.* (J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, y S. Thornton, Eds.). The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. and Mathematics Education Research Group of Australasia.

Mulligan, J., y Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*, 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Mulligan, J., Oslington, G., y English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a ‘pattern and structure’ intervention program. *ZDM*, *52*(4), 663-676. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9

Mulligan, J., Prescott, A., y Mitchelmore, M. C. (2004). Children’s development of structure in early mathematics. En M. Heines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 393-401). Bergen University College. https://opus.lib.uts.edu.au/handle/10453/11379

Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 29-45). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_3

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D., y Crevensten, N. (2013). Reconceptualizing early mathematics learning: The fundamental role of pattern and structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 47-66). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_4

Mullis, I. . V. S., Martin, M. O., Foy, P., y Hooper, M. (2015). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. TIMSS y PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

NCTM. (2000). *Principles and standards*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2010). *Curriculum focal points from prekindergarten through grade 8: A quest for coherence*. National Council of Teachers of Mathematics.

New Zealand Government. Ministry of Education. (2017). *Te Whāriki: Early childhood curriculum*. Ministry of Education.

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C., y Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly*, *36*, 550-560. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003

Nuñez del Río, M. C., Castro Hernández, C. de, Pozo Galeote, A. del, Mendoza, C., y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/47157

Olmos, G., y Alsina, Á. (2021). Conocimientos matemáticos del profesorado de la Escuela Infantil (0-3 años): Efecto en el diseño de espacios para desarrollar las matemáticas informales. *Magister*, 59-73. https://doi.org/10.17811/msg.33.1.2021.59-73

Palahniuk, C. (2011). *Survivor*. W.W. Norton y Company.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children—More than just alternating colours! *Australian primary mathematics classroom*, *12*(3), 8-13.

Papic, M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: Identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 519-534. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8

Papic, M. M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Papic, M., y Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice: Vol. II* (pp. 591-600). MERGA.

Pasnak, R., Kidd, J. K., Gadzichowski, K. M., Gallington, D. A., Schmerold, K. L., y West, H. (2015). Abstracting sequences: Reasoning that Is a key to academic achievement. *The Journal of Genetic Psychology*, *176*(3), 171-193. https://doi.org/10.1080/00221325.2015.1024198

Pasnak, R., Thompson, B. N., Gagliano, K. M., Righi, M. T., y Gadzichowski, K. M. (2019). Complex patterns for kindergartners. *The Journal of Educational Research*, *112*(4), 528-534. https://doi.org/10.1080/00220671.2019.1586400

Perry, B., y Dockett, S. (2008). Young children's access to powerful mathematical ideas. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2.ª ed., pp. 75-108). Routledge.

Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: Un análisis desde los libros de texto. *PNA*, *17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Plom, T. (2010). Educational Design Research: An introduction. En T. Plomp y N. M. Nieveen (Eds.), *An introduction to educational design research: Proceedings of the seminar conducted at the East China Normal University, Shanghai* (3rd print, pp. 9-36). SLO.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 83-96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L., y Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 157-182). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Rahmawati, D., Purwanto, Subanji, Hidayanto, E., y Anwar, R. B. (2017). Process of mathematical representation translation from verbal into graphic. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 367-381.

Reed, K. (2001). Listen to their pictures. An investigation of children's mathematical drawings. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in School Mathematics* (pp. 215-227). National Council of teachers of Mathematics.

Reinke, L. T., y Casto, A. R. (2022). Motivators or conceptual foundation? Investigating the development of teachers' conceptions of contextual problems. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(1), 113-137. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00329-8

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, *75*(2), 211-246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., y Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from ages 4 to 11. *Child Development*, *88*(5), 1727-1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, *31*, 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 376-396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., y Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*, *46*, 166-178. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.006

Rodrigues, M., y Serra, P. (2015). Generalizing repeating patterns: A study with children aged four. *International Conference on Education in Mathematics, Science y Technology (ICEMST)*, 120-134.

Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Schoenfeld, A. (1995). Report of working group 1. En C. B. Lacampagne, W. D. Blair, J. J. Kaput, y National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment (U.S.) (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium Vol. 2: Working Group Papers* (Vol. 2). U.S. Dept. of Education, Office of Educational Research and Improvement, National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment.

Sen, C., y Guler, G. (2022). Reasoning skills of children aged between 4 and 6 years in repeating pattern tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(7), 1894-1915. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2070085

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(2), 114-145.

Singapore, Republic of Ministry of Education. (2013). *Nurturing early learners: A curriculum for kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume.6*. Ministry of Education.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Routledge.

Staples, M. E., Bartlo, J., y Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 447-462. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, *240*(4852), 611-616. https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611

Stein, M., Remillard, J., y Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. En *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Information Age.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., y Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to Early Algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Sterner, G., Wolff, U., y Helenius, O. (2020). Reasoning about representations: Effects of an early math intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *64*(5), 782-800. https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579

Supply, A.-S., Wijns, N., Van Dooren, W., y Onghena, P. (2022). It is probably a pattern: Does spontaneous focusing on regularities in preschool predict reasoning about randomness four years later? *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10187-9

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes! *Young Children*, *58*(1), 14-21.

The Australian Curriculum: Mathematics..

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18-30). Continuum.

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R., y Levenson, E. (2017). Preschool teachers' variations when implementing a patterning task. *CERME 10*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01938920

Tirosh, Dina, Tsamir, Pessia, Barkai, Ruthi, y Levenson, Esther. (2018). Engaging young children with mathematical activities involving different representations: Triangles, patterns, and counting objects. *CEPS Journal*, *8*(2), 9-30. https://doi.org/10.25656/01:15664

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in Middle School*, *13*(8), 438-445.

Tsamir, P., Tirosh, D., Barkai, R., y Levenson, E. (2020). Copying and comparing repeating patterns: Children's strategies and descriptions. En M. Carlsen, I. Erfjord, y P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 63-78). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_4

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E. S., Barkai, R., y Tabach, M. (2017). Repeating patterns in kindergarten: Findings from children's enactments of two activities.

Educational Studies in Mathematics, *96*(1), 83-99. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9762-7

Twohill, A. (2018). Observations of structure within shape patterns. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 213-235). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_9

Usiskin, Z. (1995). Thoughts preceding the algebra colloquium. En C. B. Lacampagne, W. D. Blair, J. J. Kaput, y National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment (U.S.) (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium Vol. 2: Working Group Papers*. U.S. Dept. of Education, Office of Educational Research and Improvement, National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment : For sale by U.S. G.P.O., Supt. of Docs.

Vanluydt, E., Wijns, N., Torbeyns, J., y Van Dooren, W. (2021). Early childhood mathematical development: The association between patterning and proportional reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), 93-110. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10017-w

Vergel, R., Radford, L., y Rojas, P. J. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: Una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(74), 1174-1192. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harward University Press.

Warren, E. A. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. En H. Chick y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305-312). University of Melbourne. https://acuresearchbank.acu.edu.au/item/86z60/young-children-s-ability-to-generalize-the-pattern-rule-for-growing-patterns

Warren, E., y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Warren, E., y Cooper, T. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9-year-old students that support the transition from the known to the novel. *Journal of Classroom Interaction*, *42*(1), 7-17.

Warren, E., y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171-185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Warren, E., y Miller, J. (2013). Young Australian Indigenous students' effective engagement in mathematics: The role of language, patterns, and structure. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(1), 151-171. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0068-5

Warren, E., Miller, J., y Cooper, T. (2012). Repeating patterns: Strategies to assist young students to generalise the mathematical structure. *Australasian Journal of Early Childhood*, *37*(3), 111-120. https://doi.org/10.1177/183693911203700315

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. En I. Putt, M. McLean, y R. Faragher (Eds.), *MERGA 27: Mathematics Education for the Third Millennium, Towards 2010.* (pp. 565-572). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Watson, A., Jones, K., y Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19.* Oxford University Press.

Wijns, N., De Smedt, B., Verschaffel, L., y Torbeyns, J. (2020). Are preschoolers who spontaneously create patterns better in mathematics? *British Journal of Educational Psychology*, *90*(3), 753-769. https://doi.org/10.1111/bjep.12329

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 152-163. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. M. Robinson, H. P. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139-161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., y Torbeyns, J. (2021). Associations between repeating patterning, growing patterning, and numerical ability: A longitudinal panel study in 4- to 6-year olds. *Child Development*, *92*(4), 1354-1368. https://doi.org/10.1111/cdev.13490

Wilkie, K. J., y Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 223-243. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0146-y

Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 215-227). NCTM.

Wright, S. (2003). Ways of knowing in the arts. En S. Wright (Ed.), *Children, meaning-making and the arts* (1.ª ed., pp. 1-33). Pearson Education Australia.

Zhong, B., y Xia, L. (2020). A systematic review on exploring the potential of educational robotics in mathematics education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 79-101. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09939-y

Zippert, E. L., Douglas, A.-A., Tian, F., y Rittle-Johnson, B. (2021). Helping preschoolers learn math: The impact of emphasizing the patterns in objects and numbers. *Journal of Educational Psychology*, *113*(7), 1370-1386. https://doi.org/10.1037/edu0000656

ANEXOS

Anexo 1:

Itinerarios de enseñanza para patrones de repetición

EDUCACIÓN INFANTIL

3 AÑOS

SITUACIONES REALES I

Objetivos

- Descubrir seriaciones en situaciones reales.
- Copiar una serie sencilla a partir de la regularidad observada en el paso de peatones.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades del entorno con el fin de reproducir una serie.

Materiales

- Imagen de un paso de peatones.
- Listones transparentes y de color blanco;

Tarea

Duplicar un patrón, siguiendo el patrón AB (blanco-negro) a partir de la observación de la situación real presentada.

Experiencia

- Iniciar un diálogo con todo el grupo-clase sobre los pasos de peatones.
- Mostrar una imagen de un paso de peatones e invitar a los escolares a describir lo que observan en la imagen.
- Presentar el circuito de la ciudad y dar a los escolares elementos manipulativos (listones transparentes y de color blanco) con el fin de que reproduzcan su paso de peatones, siguiendo el patrón AB (blanco-negro). Es necesario guiar a través de buenas preguntas el desarrollo de la actividad. El modelo del patrón estará visible.
- Fomentar, a través de un diálogo conjunto, las acciones realizadas durante la actividad.

Preguntas intencionadas

- Si ahora tenemos una franja negra, una blanca y una negra, ¿qué franja colocaremos a continuación?
- ¿De qué color es la franja que está en medio de dos franjas blancas? ¿Y entre dos negras?
- Antes de una franja blanca, ¿de qué color es la franja?

SITUACIONES REALES II

Objetivos

- Descubrir seriaciones en situaciones reales.
- Copiar una serie sencilla a partir de la regularidad observada en el ajardinado.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades del entorno con el fin de reproducir una serie.

Materiales

- Imagen de enjardinado.
- Policubos solo de dos colores.

Tarea

Duplicar un patrón, siguiendo el patrón AB (árbol pequeño-árbol grande) a partir de la observación de la situación real presentada.

Experiencia

- Iniciar un diálogo con todo el grupo-clase sobre las características y colocación de los árboles y arbustos que se observan en las imágenes.
- Invitar a los alumnos a describir cómo están colocados los árboles y los arbustos.
- Proponer a los escolares que enjardinen las carreteras del circuito de la ciudad usando elementos manipulativos y siguiendo un patrón AB (árbol pequeño-árbol grande).
- Utilizar un lenguaje matemático preciso y adaptado al nivel de los alumnos.
- Fomentar, a través de un diálogo conjunto, las acciones desarrolladas.

Preguntas intencionadas

- Si ahora colocamos un árbol pequeño, uno grande, uno pequeño y uno grande. ¿Cuál deberíamos colocar a continuación?
- ¿Cómo es el árbol que colocaremos entre dos pequeños?

RECURSOS MANIPULATIVOS I

Objetivos

- Alternar las piezas del material propuesto con la finalidad de extender una secuencia.

Saberes

- Observación y exploración de atributos cualitativos (color) con el fin de extender una seriación.

Materiales

- Policubos agrupados en dos colores.

Tarea

Ampliar la secuencia siguiendo el patrón AB a partir de la alternancia de colores de los policubos.

Experiencia

- Poner el material agrupado en dos colores al alcance de los escolares e invitarlos a explorarlo de manera libre.
- Observar y documentar sus acciones, poniendo especial atención en las seriaciones que realicen.
- En el caso de que espontáneamente no hagan seriaciones, mostrar un ejemplo e invitarlos a copiarla y luego extenderla.
- Animar a los alumnos a describir la seriación creada.

Preguntas intencionadas

- ¿Cómo lo has hecho para construir la seriación?
- ¿Cuáles son los colores que has utilizado?
- Si has hecho la seriación, azul-amarillo, azul-amarillo, ¿podemos poner una pieza de color naranja?
- ¿Y una de color marrón? ¿Por qué?

RECURSOS MANIPULATIVOS II

Objetivos

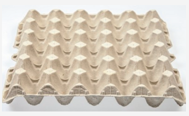
- Completar la secuencia encontrando los elementos que faltan.

Saberes

- Observación y exploración de regularidades con el fin de completar la seriación.

Materiales

- Tapas variadas de plástico.
- Hueveras de cartón con filas pintadas siguiendo un patrón AB y otras con seriaciones incompletas realizadas con tapas de plástico.



Tarea

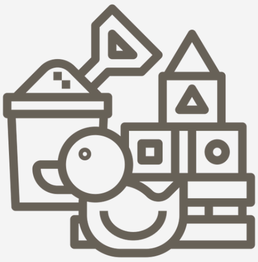
- Encontrar el elemento faltante de la seriación creada con tapas de plástico en las hueveras.

Experiencia

- Poner el material al alcance de los escolares e invitarlos a explorarlo de manera libre.
- Observar y documentar sus acciones, poniendo especial atención en las seriaciones que completan.
- Invitarlos a copiar la seriación pintada utilizando las tapas de plástico.
- Animar a los alumnos a describir la seriación creada y completar las otras que les faltan elementos.

Preguntas intencionadas

- Si ahora tenemos una fila pintada con una seriación rojo-verde, rojo-verde, rojo-verde, ¿de qué color serán las tapas que utilizaras para copiar la seriación en la fila de abajo?
- En esta seriación hay una tapa amarilla-una azul, una amarilla-una azul, una amarilla, un espacio en blanco y una azul. ¿Qué tapa colocaremos en el espacio en blanco?



RECURSOS LÚDICOS I

Objetivos

- Alternar los complementos propuestos con la finalidad de extender la secuencia AB (gorra-gafas).

Saberes

- Observación y exploración de atributos cualitativos (la forma) con el fin de extender una seriación.

Materiales

- Gorras y gafas como complementos.

Tarea

Ampliar un patrón, siguiendo el patrón AB (blanco-negro) a partir de la observación de la situación de vida cotidiana presentada.

Experiencia

- Se divide el grupo en 4 y se colocan los escolares en cada estación designada esperando a que pase el tren. De manera aleatoria se le asigna a cada alumno un complemento (gorra o gafas).
- El tren inicia su recorrido invitando a los alumnos de la primera estación a que suban siguiendo el patrón AB (alumno con gorra-alumno con gafas).
- Un escolar designado como maquinista comprobará que los pasajeros estén colocados correctamente.
- Al ritmo de la música "Un tren petitó", el tren se moverá hasta su próxima estación, donde subirán nuevos pasajeros dando continuidad a la seriación.
- Finalmente, invitar a los alumnos a representar en el suelo con los elementos del patrón (gorra-libro) el tren.

Preguntas intencionadas

- Si en esta estación sube un pasajero con gafas, otro con gorra, uno con gafas y otro con gorra, ¿los dos siguientes con qué complementos subirán?
- ¿Por qué después de un pasajero con gorra viene otro con gafas?

RECURSOS LÚDICOS II

Objetivos

- Alternar la acción de desplazamiento y parada siguiendo las normas del juego.

Saberes

- Exploración de acciones con el propio cuerpo (desplazamiento - parada) con la finalidad de seguir las normas del juego.

Materiales

- Tarjetas para representar la secuencia del juego: desplazamiento - parada.

Tarea

Extender un patrón AB, siguiendo las acciones de: desplazamiento - parada, a partir de las propias normas del juego.

Experiencia

- Invitar a los alumnos a participar en el juego “1, 2, 3, pica pared”
- Explicar las normas del juego y modelar los dos roles presentes.
- Uno de los jugadores se apoyará de cara a la pared, sin mirar. El resto se situarán detrás de una línea a unos 10-15 metros de la pared.
- El objetivo del juego es llegar a la pared y tocar la espalda de quien para sin ser visto.
- El que para (jugador de cara a la pared), comenzará a cantar: "¡uno, dos, tres, pica-pared, un, dos, tres, ya!". A continuación, se girará. Mientras canta, el resto de alumnos deberán desplazarse lo máximo posible, parándose en el lugar justo antes de que se gire. Quien haya sido visto avanzando por el que para, tendrá que volver a la línea inicial y volver a empezar.

Preguntas intencionadas

- Cuando se acaba la canción "1,2,3 pica pared, 1,2,3 ya" ¿qué se debe hacer?
- ¿Notáis alguna cosa que siempre se repite?

RECURSOS LITERARIOS

Objetivos

- Identificar la secuencia temporal del cuento: *La ratita presumida.*
- Ser capaz de predecir lo que sucederá en la historia, tomando como referencia el personaje antecesor y/o sucesor.

Saberes

- Anticipación de hechos, a partir de la identificación de la secuencia temporal que guía el cuento explicado.

Materiales

- Personajes de la historia. *La ratita presumida*

Tarea

Escuchar activamente el cuento y ser capaz de anticipar la secuencia temporal de la historia a partir de los elementos de repetición del cuento.

Experiencia

- Explicar el cuento con apoyo visual.
- Invitar a los alumnos a predecir y anticipar lo que sucederá en la historia.
- Una vez acabada la explicación del cuento, se les propondrá a los alumnos representar algunas secuencias de la historia.

Preguntas intencionadas

- ¿Qué preguntará el perro a la ratita?
- ¿Qué contestará la ratita?
- Qué animal hablo con la ratita después del cerdito, ¿y antes?

RECURSOS TECNOLÓGICOS

Objetivos

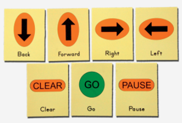
- Alternar la acción de desplazamiento y pausa, siguiendo el objetivo de la abeja.

Saberes

- Exploración de acciones con los comandos de la bee-bot: desplazamiento - pausa, con la finalidad de lograr el objetivo de la abeja.

Materiales

- Bee-bots.
- Tarjetas de instrucciones.
- Tablero de recorrido de flores



Tarea

Ampliar un patrón simple, siguiendo las acciones de: desplazamiento - pausa.

Experiencia

- Llegan a la clase las Bee-bots, se presenta el material a los alumnos y se explican las acciones que pueden hacer las abejas a partir de las tarjetas de instrucción.
- Invitar a los alumnos a explorar y familiarizarse con el material.
- Agrupar a los alumnos por pareja y formar 6 equipos. Cada niño/a debe introducir el patrón (dos movimientos adelante*-pausa) con el fin de hacer una parada en cada flor y conseguir que la abeja se desplace hasta el otro lado del tablero. Al llegar la abeja, el compañero borra las órdenes introducidas, coge la abeja, la lleva a la colmena y programa nuevamente la abeja para hacer el recorrido que indica el patrón (dos movimientos adelante-pausa).
- Con cada parada correcta de la abeja, el alumno que ha introducido la secuencia de órdenes consigue un punto.
- Fomentar a través del diálogo una co-autoevaluación sobre las órdenes introducidas.

Preguntas intencionadas

- ¿Cuántas veces hay que introducir una pausa?
- ¿Notas algo que siempre se repite?

RECURSOS GRÁFICOS

Objetivos

- Alternar la acción de desplazamiento y pausa, con el objetivo de representar el camino recorrido por la bee-bot.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades del entorno con el fin de extender una serie.

Materiales

- Tapones de estampación y pintura.
- Fragmento audiovisual de la sesión con las Bee-bots.

Tarea

Ampliar un patrón simple, siguiendo las acciones de: desplazamiento - pausa.

Experiencia

- Iniciar un diálogo con los alumnos con el fin de recordar la actividad de las Bee-bots.
- Visualizar, a través de una grabación audiovisual, el recorrido que hacían las abejas con las órdenes que los mismos alumnos introdujeron.
- Verbalizar la secuencia de comandos que siguieron las abejas, poniendo especial énfasis en los dos comandos que conforman el patrón.
- Invitar a los alumnos a representar en un papel el desplazamiento realizado por las abejas.
- Poner a su alcance el material para representar la seriación a partir de la técnica de estampación.

Preguntas intencionadas

- ¿Cuántos tapones de estampación elegirás?
- ¿Serán todos iguales? ¿Por qué?

4 AÑOS

SITUACIONES REALES I

Objetivos

- Descubrir seriaciones en situaciones reales.
- Copiar una serie sencilla a partir de la regularidad observada en el toldo.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades del entorno con el fin de reproducir una serie.

Materiales

- Imágenes de toldos.
- Cartulinas de diferentes colores.

Tarea

Duplicar el patrón AB identificado en los toldos utilizando cartulinas de colores.

Experiencia

- Visualizar diferentes calles de una ciudad con Google Maps.
- Invitar a los alumnos a encontrar seriaciones en los elementos que observan de la ciudad.
- A través de preguntas, guiar la atención de los niños hacia las fachadas y toldos de las casas, los edificios y los comercios.
- Una vez identificadas las seriaciones, se representan conjuntamente los respectivos patrones mediante tarjetas de colores.

Preguntas intencionadas

- Si ahora tenemos una tira de color blanco, una azul y una blanca. ¿Qué tira colocaremos a continuación?
- ¿De qué color es la tira que está en medio de dos de color amarillo? ¿Y entre dos de marrón?
- Antes de una tira blanca, ¿de qué color es la tira anterior?
- ¿Qué posición ocupan las tiras de color amarillo? ¿Y las de color marrón?
- Si la primera tira es de color amarillo, ¿de qué color será la tercera? ¿Y la quinta?

SITUACIONES REALES II

Objetivos

- Descubrir seriaciones en situaciones reales.
- Recrear el patrón AAB del ajardinado, modelando con la plastilina una forma para cada elemento que conforma el patrón.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades del entorno.

Materiales

- Imagen de ajardinado.
- Plastilina.

Tarea

Construir el mismo patrón con diferentes elementos a través de la manipulación de la plastilina.

Experiencia

- Se muestra una imagen de un jardín con una seriación de diferentes arbustos que sigue un patrón (AAB).
- A través del diálogo, se invita a los escolares a describir cómo están colocados los arbustos, con el objetivo de analizar el patrón.
- Proponer a los niños que representen el ajardinado modelando con la plastilina el patrón identificado (arbusto: bajo-bajo-alto).
- Fomentar, a través de un diálogo conjunto, las acciones que han desarrollado.

Preguntas intencionadas

- Si ahora colocamos dos arbustos bajos, uno alto, dos bajos y uno alto, ¿cuál deberíamos colocar a continuación?
- ¿Cómo es el arbusto que colocaremos después de dos que son bajos?

RECURSOS MANIPULATIVOS I

Objetivos

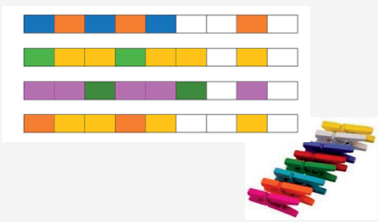
- Completar los elementos faltantes en la seriación presentada siguiendo la secuencia propuesta.

Saberes

- Identificación del elemento que falta de los patrones AB, AAB y ABB.

Materiales

- Cartulinas plastificadas.
- Pinzas de ropa diferentes.



Tarea

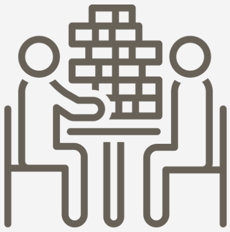
Encontrar los elementos faltantes en las tiras de cartulina.

Experiencia

- Poner el material al alcance de los escolares y proponerles colocar en el espacio en blanco de la cartulina la pinza del color que correspondería para seguir la seriación.
- Observar y documentar si los escolares son capaces de reparar el patrón AB, AAB y ABB.
- Invitar a los escolares a describir la seriación completada.

Preguntas intencionadas

- ¿Cómo sabías cuál era el color que tocaba?
- Después de dos espacios con los colores iguales, ¿viene otro espacio de igual color o diferente?
- ¿Notas en alguna de secuencia de colores algo que siempre se repite?



RECURSOS MANIPULATIVOS II

Objetivos

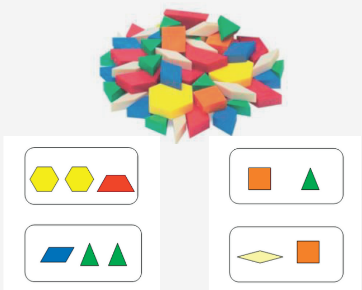
- Extender el patrón indicado en la tarjeta con el material propuesto.
- Iniciarse en la creación de patrones.

Saberes

- Seriaciones a partir de la alternancia y combinación de figuras geométricas según los patrones AB, AAB y ABB.

Materiales

- Piezas del Geomosaico.
- Tarjetas con patrones AB, AAB y ABB.



Tarea

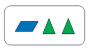
Ampliar una seriación con el material propuesto siguiendo el patrón indicado en la tarjeta.

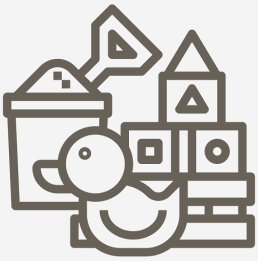
Inventar un patrón.

Experiencia

- Se presenta a los escolares una bolsa sorpresa llena de figuras geométricas mezcladas y se ponen a su alcance para que jueguen libremente.
- Transcurrido 10 minutos, se propone a los escolares construir seriaciones a partir de los patrones AB, AAB o ABB que indican las tarjetas.
- A través de buenas preguntas se guía la ejecución de la propuesta según el patrón en la tarjeta.
- Se finaliza la sesión con 10 minutos de manipulación libre, donde se propone a los escolares hacer seriaciones siguiendo los patrones que ellos deseen. Se documentan sus acciones y se promueve un diálogo conjunto para iniciar la familiarización con el concepto patrón.

Preguntas intencionadas

- Si eliges el patrón  ¿Cuáles son las piezas que deberás utilizar? ¿De qué color es la figura que hay entre dos triángulos verdes?
- En el patrón,  ¿dónde colocaremos el cuadrado naranja?



RECURSOS LÚDICOS I

Objetivos

- Ser capaz de ejecutar la acción que marca la canción respetando la secuencia de repetición presente.
- Alternar estado de la emoción con acción corporal.

Saberes

- Observación y exploración de atributos cualitativos (la forma) con el fin de extender una seriación.

Materiales

- Canción: If you're happy de Super Simple Learning

Tarea

Duplicar el patrón AB (emoció-acció), siguiendo la secuencia que indica la canción.

Experiencia

- Invitar a todo el grupo-clase a cantar y seguir la coreografía que marca la canción.
- Observar y documentar si los alumnos son capaces de anticipar las acciones correspondientes.

Preguntas intencionadas

- ¿Qué hacíamos después de reír? ¿Y antes de aplaudir?
- Cuando estaba triste. ¿Cuáles eran los dos gestos que se hacían?
- ¿Y cuándo tenía sueño?

RECURSOS LÚDICOS II

Objetivos

- Identificar la secuencia temporal de la retahíla del juego.
- Ser capaz de anticipar la acción correspondiente según las normas del juego.

Saberes

- Anticipación de hechos, a partir de la identificación de la secuencia presente en el juego.

Materiales

- Cançó: L'espardenyeta (versió catalana).
- Zapatilla

Tarea

Duplicar el patrón AB (emoció-acció), siguiendo la secuencia que indica la canción.

Experiencia

- Invitar los escolares a sentarse en el suelo formando un círculo.
- Cantar la canción y explicar las normas del juego. Hay dos roles: niños que cantan y uno que elige a quien quiere dejar la zapatilla detrás. El alumno con la zapatilla al ritmo de la canción camina por fuera del círculo y elige a qué compañero le quiere dejar detrás el elemento del juego. Al terminar la canción todos los escolares miran detrás y el que tenga la zapatilla adopta el rol anteriormente explicado.
- El juego sigue la misma secuencia y desarrollo: cantar la canción-mirar detrás.

Preguntas intencionadas

- Después de cantar, ¿qué debo hacer?
- ¿Y después de mirar detrás?

RECURSOS LITERARIOS

Objetivos

- Identificar la secuencia temporal del cuento: *El caracol y la menta*
- Ser capaz de predecir lo que sucederá en la historia, tomando como referencia el personaje antecesor y/o sucesor.

Saberes

- Anticipación de hechos, a partir de la identificación de la secuencia temporal que guía el cuento explicado.

Materiales

- Personajes de la historia

Tarea

Escuchar activamente el cuento y ser capaz de anticipar la secuencia temporal de la historia a partir de los elementos de repetición del cuento.

Experiencia

- Explicar el cuento con apoyo visual.
- Invitar a los escolares a escuchar activamente la historia y a anticipar la secuencia temporal de acciones que se repite en cada diálogo de los personajes del cuento infantil.

Preguntas intencionadas

- ¿Qué dirá el caracol al conejo?
- ¿Qué preguntará el perro?
- ¿Qué animal ha venido antes del gato?
- ¿Y después del conejo?

RECURSOS TECNOLÓGICOS

Objetivos

- Completar, extender o reconocer la unidad de repetición a partir de las seriaciones propuestas.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades en patrones del tipo AB, AAB y ABB.

Materiales

- Juego en línea "En serie".
- Tableta.

Tarea

Encontrar el elemento faltante, ampliar secuencias o identificar la unidad de repetición.

Experiencia

- Se propone el juego en línea “En serie” en el que cada escolar continúa o completa la seriación propuesta desde la tableta.

Preguntas intencionadas

- ¿Qué elementos debes elegir para seguir la seriación?
- Tras dos elementos iguales, ¿vendrá otro igual o diferente?
- ¿Notas algo que siempre se repite?

RECURSOS GRÁFICOS

Objetivos

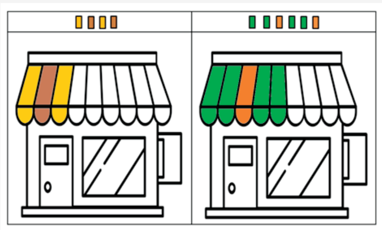
- Extender el patrón presentado en la ficha.
- Iniciarse en la creación de patrones.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades.

Materiales

- Fichas impresas.



Tarea

Ampliar una seriación con el material propuesto siguiendo el patrón indicado en la tarjeta.

Inventar un patrón.

Experiencia

- Compartir con los escolares una selección de fotos de la documentación realizada durante la tarea de "Situaciones reales I".
- Verbalizar el patrón que seguía el diseño de los toldos presentados.
- Poner al alcance de los niños el material e invitarles a pintar el toldo siguiendo la secuencia sugerida en la ficha.
- Finalmente, proporcionaremos una ficha sin ninguna sugerencia de patrón para que los alumnos pinten el toldo siguiendo un criterio propio.

Preguntas intencionadas

- ¿Cuántos colores deberás usar? ¿Por qué?
- Después de dos espacios de color verde, ¿qué color va?
- ¿Me explicas el patrón de tu seriación?

5 AÑOS

SITUACIONES REALES I

Objetivos

- Reconocer seriaciones con patrones: (AB), (AAB), (ABB) y (ABC), presentes en situaciones u objetos de la vida real.
- Identificar la unidad de repetición que origina la seriación reconocida.
- Inventar un patrón.

Saberes

- Observación y reconocimiento de seriaciones presentes en objetos y/o situaciones de la vida real, con la finalidad de analizar e identificar la unidad de repetición para así crear nuevas seriaciones.

Materiales

- Calcetines y jerséis con diseños variados; juego de ajedrez, piano; juego de barajas, fotos de baldosas; trozos de telas con dibujos de piel de algunos animales, fotos de toldos…

Tarea

Reconocer patrones en objetos cotidianos.

Crear patrones y seriaciones.

Experiencia

- En grupos reducidos de 6 alumnos presentar una caja con todos los elementos enumerados en el "materiales".
- Guiar la manipulación de los objetos, hacia la identificación y reconocimiento de las seriaciones presentes en los objetos.
- Invitar a los escolares a analizar la seriación descubierta, guiando el análisis, a través de buenas preguntas, hacia la identificación de la unidad de repetición.
- Crear en un papel una nueva seriación a partir del patrón identificado.

Preguntas intencionadas

- ¿Seríamos capaces de encontrar algún calcetín que tenga una seriación?
- ¿Cómo es la seriación? ¿Cuáles son los elementos que la conforman?
- ¿Podemos encontrar otro objeto que también tenga una seriación?
- ¿Cuál es la diferencia entre una seriación y un patrón?
- ¿Qué patrón da lugar a la seriación que se observa en el jersey de rayas?
- ¿Podemos encontrar otro objeto que siga el mismo patrón del jersey de rayas?

SITUACIONES REALES II

Objetivos

- Identificar seriaciones presentes en el patio de la escuela.
- Analizar los elementos de la seriación, para poder identificar la unidad de repetición.
- Recrear en un papel nuevas seriaciones con la misma unidad de repetición.

Saberes

- Observación y reconocimiento de seriaciones presentes en objetos y/o situaciones de la vida real, con la finalidad de analizar e identificar la unidad de repetición para así crear nuevas seriaciones.

Materiales

- No se requiere de material específico. Se recomienda al docente observar el espacio del patio y crear en las zonas de juegos algunas seriaciones intencionadas.

Tarea

Reconocer patrones en objetos cotidianos.

Construir el mismo patrón con diferentes elementos.

Inventar patrones y seriaciones.

Experiencia

- Iniciar un diálogo con todo el grupo-clase para introducir la propuesta de ir a “cazar” seriaciones al patio de la escuela.
- Documentar cada seriación identificada e invitar a los escolares a analizar los elementos que la conforman y extraer la unidad de repetición.
- Posteriormente, en el aula, proponer a los niños el reto de representar en un papel alguna de las seriaciones encontradas, utilizando figuras geométricas o símbolos (letras, números...).
- Fomentar, a través de un diálogo conjunto, el análisis y descubrimiento de la unidad de repetición que da lugar a la seriación.

Preguntas intencionadas

- ¿Cómo están colocadas las jardineras del patio? ¿Siguen algún orden?
- ¿Vemos alguna seriación en los juguetes del patio?
- ¿Cómo son las palas del arenal? ¿Las podemos guardar siguiendo algún patrón? ¿Cuál?

RECURSOS MANIPULATIVOS I

Objetivos

- Extender la secuencia a partir de la unidad de repetición escogida.
- Inventar un patrón para diseñar un nuevo collar.

Saberes

- Observación y exploración de atributos cualitativos (color y forma) con el fin de extender y crear seriaciones.

Materiales

- Mesa de luz.
- Tarjetas con patrones.
- Piezas translúcidas para enfilar.

AB AAB ABB ABC

Tarea

Ampliar la secuencia siguiendo el patrón escogido.

Identificar la unidad de repetición.

Inventar un patrón.

Experiencia

- Mostrar tarjetas con un determinado patrón (AB) (AAB) (ABB) y (ABC) y establecer un diálogo con los escolares.
- Invitar a los alumnos a escoger un patrón y crear un collar enfilando piezas translúcidas sobre la mesa de luz.
- Observar y documentar si los alumnos son capaces de obtener un collar con un patrón determinado previamente.
- Proponer a los escolares crear ellos un patrón para diseñar un nuevo collar.

Preguntas intencionadas

- ¿Cómo sabías qué pieza tocaba?
- Después de dos piezas iguales en el patrón AAB ¿cómo es la pieza que sigue a continuación?
- ¿Podrías explicar a los demás el patrón que has utilizado para hacer tu collar? ¿Por qué has escogido este patrón?
- ¿Cuál es el patrón del nuevo collar que has diseñado?

RECURSOS MANIPULATIVOS II

Objetivos

- Inventar patrones de manera cooperativa con la finalidad de construir un mandala gigante.

Saberes

- Seriaciones a partir de la combinación de atributos cualitativos y cuantitativos del material reciclado y estructurado propuesto.

Materiales

- Pattern Blocks (Geomosaic), tapas de botellas, círculos de madera, pompones de colores, depresores de madera, platos de colores… y papel de embalar en forma de círculo, de 1m de diámetro aproximadamente.

Tarea

Ampliar la secuencia siguiendo el patrón escogido.

Identificar la unidad de repetición.

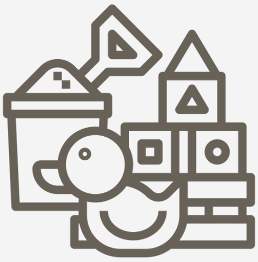
Inventar un patrón.

Experiencia

- Invitar a los alumnos a sentarse alrededor del papel de embalar e iniciar un diálogo sobre los mandalas.
- Con la ayuda del proyector mostrar algunos ejemplos en la pizarra digital.
- Proponer crear un mandala gigante siguiendo un patrón ideado de manera colectiva y cooperativa.
- Documentar y registrar las interacciones que se producen durante la toma de decisiones.

Preguntas intencionadas

- ¿Qué piezas utilizaremos para definir el patrón central?
- En un patrón AAB, ¿cómo debe ser la pieza que va después de dos iguales?
- En un patrón ABC, ¿cómo son las 3 primeras piezas?
- Si ponemos una hilera de tapas así: blanco-verde-rojo, blanco-verde-rojo, ¿qué patrón sigue la seriación?
- En un patrón ABB hay una pieza diferente y dos iguales, y en un patrón AAB ¿cómo son las piezas?



RECURSOS LÚDICOS I

Objetivos

- Ser capaz de ejecutar la acción que marca la canción respetando la secuencia de repetición presente.
- Anticipar acciones a partir de la identificación de la secuencia temporal de la canción.
- Reconocer el patrón que se establece en la coreografía.

Saberes

- Anticipación y ejecución de acciones respetando la secuencia temporal y gestual presente en la canción, reconociendo así el patrón que se establece.

Materiales

- Ordenador con acceso a Internet y pizarra digital o proyector.
- Vídeo de la canción: Canta-Juego: El baile de los pajaritos

Tarea

Reproducir la coreografía e identificar posteriormente la unidad de repetición.

Experiencia

- Invitar a los alumnos a cantar y seguir la coreografía que marca la canción.
- Observar y documentar si los alumnos son capaces de anticipar y ejecutar las acciones correctamente, reconociendo a su vez el patrón que se sigue en la coreografía.

Preguntas intencionadas

- ¿Qué se hace después de aplaudir?
- ¿Qué pasa cada vez que se remueve la colita? ¿Qué acción viene seguidamente?
- ¿Cuál es el patrón que se repite durante la coreografía?

RECURSOS LÚDICOS II

Objetivos

- Ser capaz de ejecutar las consignas del juego, respetando la secuencia de repetición presente.
- Anticipar acciones a partir de la identificación de la secuencia temporal del juego.
- Reconocer el patrón que se establece en las consignas.

Saberes

- Anticipación de acciones, a partir de la identificación de la secuencia presente en el juego.

Materiales

- Pintar una línea blanca en el suelo para delimitar de manera imaginaria la parte de mar y la de tierra.

Tarea

Ejecutar las consignas del juego e identificar posteriormente la unidad de repetición.

Experiencia

- Explicar las normas del juego "Mar-Tierra". A un lado de la línea estará el mar y al otro la tierra.
- Se darán las consignas de mar-tierra siguiendo un determinado patrón (mar-mar-tierra-mar-mar-tierra). Los escolares deberán situarse al lado que corresponda.
- Invitar a los alumnos a anticipar la consigna siguiente para así comprobar si han sido capaces de identificar el patrón.
- Una vez identificado el patrón se cambia por otro.
- Invitar a los escolares a representar algunas de las secuencias del juego, designando ellos mismos los elementos gráficos (signos, símbolos...) de su representación.

Preguntas intencionadas

- Después de situarme dos veces en el mar, ¿qué tocará hacer?
- ¿Cómo podría dar las consignas siguiendo un patrón ABC? ¿Y un patrón AAB?
- En la consigna: mar-tierra-tierra; mar-tierra-tierra, ¿qué es lo que siempre se repite?

RECURSOS LITERARIOS

Objetivos

- Identificar la secuencia temporal del cuento: ¿A qué sabe la Luna?
- Ser capaz de predecir lo que sucederá en la historia, tomando como referencia el personaje antecesor y/o sucesor.

Saberes

- Anticipación de hechos, a partir de la identificación de la secuencia temporal que guía el cuento explicado.

Materiales

- Personajes de la historia: *¿A qué sabe la Luna?*
- Máscaras de los personajes para representar el cuento.

Tarea

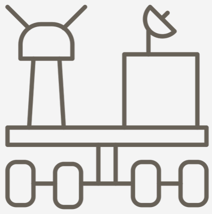
Escuchar activamente el cuento y ser capaz de anticipar la secuencia temporal de la historia a partir de los elementos de repetición del cuento.

Experiencia

- Explicar el cuento con apoyo visual.
- Invitar a los escolares a predecir y anticipar lo que sucederá en la historia.
- Motivar a los alumnos a representar la historia utilizando las máscaras de cada animal. Los niños se colocarán en una fila siguiendo el orden de aparición de los personajes.

Preguntas intencionadas

- ¿Quién viene después de la jirafa?
- ¿Y antes del león?
- ¿Cuál fue el último animal? ¿Y el primero?
- ¿Qué hacía la luna cada vez que subía un animal?
- ¿Cuál sería el orden si comenzáramos por la luna y fuéramos bajando hasta la tortuga?
- ¿Qué animal viene antes de cebra? ¿Y después?
- ¿Vemos en los personajes del cuento alguna seriación y/o patrón?



RECURSOS TECNOLÓGICOS

Objetivos

- Reconocer patrones del tipo AB, ABB, AAB y ABC.
- Extender patrones atendiendo a una unidad de repetición determinada.
- Recrear un mismo patrón con diferentes elementos.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades estableciendo relaciones isomórficas.

Materiales

- Robot Cubetto y fichas de programación.
- Tablero de circuito.
- Lego Duplo

Tarea

Inventar patrones.

Construir el mismo patrón con diferentes elementos.

Identificar la unidad de repetición.

Experiencia

- Llega a la clase el Cubetto®, se presenta el robot a los alumnos y se explican las acciones que puede hacer a partir de las fichas de programación.
- Invitar a los niños a pensar, en parejas, en un patrón de repetición y extenderlo de manera manipulativa con piezas de lego Duplo.
- A continuación, a partir de la interacción con las fichas de programación del robot Cubetto®, asociar secuencias de acciones en correspondencia con las seriaciones creada con las piezas de lego Duplo.
- Comprobar el recorrido diseñado y al final del trayecto colocar el edificio de Lego que concuerda con el mismo patrón usado en las fichas de programación.
- Invitar a representar en un papel las secuencias creadas.

Preguntas intencionadas

- ¿Cuál es la función de la ficha azul?
- Si hemos indicado al robot que haga dos pasos adelante, derecha, dos pasos adelante y derecha. ¿Cómo serán las piezas de lego que utilizaremos para crear el edificio correspondiente a este recorrido?
- Si tenemos un edificio de la siguiente estructura: azul, rojo, amarillo, azul, rojo, amarillo. ¿Cómo colocaremos las fichas de programación en el tablero para este edificio?

RECURSOS GRÁFICOS

Objetivos

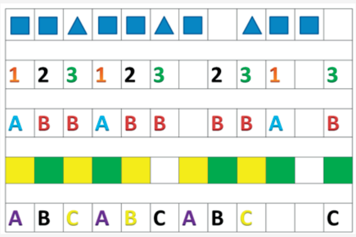
- Completar la seriación con el elemento que falta.
- Analizar la regularidad presente en las seriaciones propuestas.

Saberes

- Observación y reconocimiento de regularidades, para avanzar hacia la identificación de unidades de repetición isomórficas.

Materiales

- Fichas previamente diseñadas con patrones AB, AAB, ABB y ABC.



Tarea

Encontrar elementos faltantes en las seriaciones propuestas.

Identificar las unidades de repetición.

Experiencia

- A través de fichas previamente diseñadas, invitar a los escolares a observar y analizar las seriaciones propuestas.
- Seguidamente, completar los elementos que faltan.
- A través de un diálogo, descubrir cuáles de las seriaciones comparten la misma unidad de repetición.

Preguntas intencionadas

- ¿Cuál es el patrón que sigue la primera seriación? ¿Y la segunda? ¿Y la última?
- De las seriaciones que hemos identificado el patrón, ¿hay algunas que sean iguales entre ellas? ¿Cuáles? ¿Por qué crees que son iguales?
- Después de dos elementos iguales y uno de diferente, dos de iguales y no de diferente, ¿cómo son los que siguen?