Universitat de Girona

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN EDADES TEMPRANAS EN LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

Nataly Pincheira Hauck

TESIS DOCTORAL

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN EDADES TEMPRANAS EN LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

NATALY PINCHEIRA HAUCK

2023

TESIS DOCTORAL

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN EDADES TEMPRANAS EN LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

NATALY PINCHEIRA HAUCK

2023

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Dirigida por: Dr. Ángel Alsina

Memoria como compendio de publicaciones presentada para optar al título de doctora por la Universidad de Girona

PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS DOCTORAL

La Tesis Doctoral desarrollada en esta memoria se presenta en la modalidad de compendio de publicaciones. La Tesis consta de ocho publicaciones que recogen el diseño y resultados obtenidos en la investigación sobre la caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra temprana en los futuros profesores de educación infantil y primaria. Las publicaciones corresponden a siete artículos en revistas ([A], [B], [C], [D], [E], [F], [G]) y uno aceptado ([K]):

[A] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics*, *9*, 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Índices de calidad:

- Revista indexada en JCR. Índice 2,258 en SCIE, Cuartil 1(2021).
- Revista indexada en Scopus. Índice 0,54 en SJR, Cuartil 2 (2021).

[B] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Índice de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,25 en SJR, Cuartil 3 (2021).

[C] Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA*, *17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Índice de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,25 en SJR, Cuartil 3 (2021).

[D] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: Implicaciones para la formación docente. *Revista Bolema,* *Boletim de Educação Matemática, 35*(71), 1316-1337. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Índice de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,32 en SJR, Cuartil 3 (2021).

[E] Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (2023). Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.2

Índice de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,17 en SJR, Cuartil 3 (2021)

[F] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Mathematical knowledge of pre-service Early Childhood and Primary Education Teachers: an approach based on the design of tasks involving patterns. *Australian Journal of Teacher Education, 47*(8), 50-69. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2022v47n8.4

Índice de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,63 en SJR, Cuartil 2 (2021).

[G] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. *Revista de Investigación en Educación, 20*(2), 154-171. https://doi.org/10.35869/reined.v20i2.4222

Índice de calidad:

- Revista indexada en Scopus. Índice 0,13 en SJR, Cuartil 4 (2021).

[K] Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (Aceptado). Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*.

- Índice de calidad: Revista indexada en Látintex Catálogo v2.0 (2018-) (29/36 características cumplidas).

PUBLICACIONES COMPLEMENTARIAS DERIVADAS DE LA TESIS DOCTORAL

En el marco de la Tesis Doctoral, además de las publicaciones mencionadas anteriormente, se han desarrollado otros tres artículos que se encuentran en proceso de revisión. Tales artículos, complementan el compendio de publicaciones y permiten obtener una visión holística de los resultados obtenidos en la investigación:

[H] Pincheira, N., y Alsina, Á. (En revisión). Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación primaria.

[I] Pincheira, N., y Alsina, Á. (En revisión). Mathematical knowledge of early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers.

[J] Pincheira, N., y Alsina, Á. (En revisión). Mathematical knowledge of primary school teachers for teaching early algebra.

CAPÍTULOS DE LIBRO DERIVADOS DE ACTAS DE CONGRESOS

La Tesis consta de seis capítulos de libros ([L], [M], [N], [Ñ], [O], [P]) derivados de comunicaciones presentadas en congresos a nivel nacional e internacional, que consideran la revisión por pares:

[L] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Opportunities to develop algebraic thinking in early childhood textbooks. España: Escola de Doctorat. In Boto, G., y Vicens, L. (Eds.), *VI Conference of Pre-doctoral Researchers. Abstract Book*, (vol. VI, pp. 203-204). Escola de Doctorat. Servei de Publicacions de la Universitat de Girona.

[M] Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (2022). Habilidades para hacer patrones en tareas diseñadas por futuras maestras de educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 471-478). SEIEM.

[N] Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2021). Tareas de patrones en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto de Chile y España. En D. M. Gómez, C. Cornejo, y M.V. Martínez (Eds.), *Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 270-274). SOCHIEM-UOH.

[Ñ] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Explorando la demanda cognitiva de tareas matemáticas de búsqueda de patrones diseñadas por futuros profesores de Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 489-496). SEIEM.

[O] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Mathematical tasks proposed in textbooks to promote the teaching of early algebra in Primary Education. In M. Solà (Ed.), *V Conference of Pre-doctoral Researchers. Abstract Book*, (vol. V, pp. 155-156). Escola de Doctorat. Servei de Publicacions de la Universitat de Girona.

[P] Pincheira, N., y Alsina, Á. (2020). Characterization of Early Algebra in Early Childhood and Primary Education. In M. Solà (Ed), *IV Conference of Pre-doctoral Researchers. Abstract Book*, (vol. IV, pp. 165-166). Escola de Doctorat. Servei de Publicacions de la Universitat de Girona.

Universitat de Girona

El Dr. Ángel Alsina, de la Universidad de Girona,

DECLARA:

Que el trabajo titulado “Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra edades tempranas en los futuros profesores de Educación Infantil y Primaria”, que presenta Nataly Pincheira para la obtención del título de doctora, se ha realizado bajo mi dirección.

Y para que así conste y tenga los efectos oportunos, firmo el presente documento.

Firma

Girona, Mayo de 2023

A mis abuelitas,
por sus consejos y enseñanzas

a mis padres,
por su amor infinito y comprensión constante

a Paula y Claudia,
por su apoyo y oración incondicional

a Julio,
por no soltarme la mano y confiar en este proyecto

Sin ellos, nada hubiera sido posible…

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco al Dr. Ángel Alsina, mi Director de Tesis, gracias por acompañarme en este camino y darme la posibilidad de aprender a tu lado. Gracias por la confianza depositada, la rigurosidad de tu trabajo, por compartir tus conocimientos, tu apoyo constante en cada uno de los desafíos que significó el desarrollo de esta investigación y, por, sobre todo, gracias por tu cobijo y amistad durante estos años en Girona.

Gracias a mis compañeros del Doctorado, que se han convertido en mi familia, gracias por compartir en un ambiente de cariño, alegría y respeto. A Jefferson por compartir tus conocimientos, por tu sentido del humor cuando parecía todo estar perdido, a Gloria por tu sencillez e infinita generosidad, a Yeni por convertirte en esa luz que encontré en la mitad del camino, esa luz que me hizo avanzar con más ánimo, con más fuerza, con alegría y esperanza. A todos ellos, espero haberles acompañado, como ellos lo hicieron conmigo.

Agradezco también a la Dra. Claudia Vásquez, por iniciarme en el trabajo de la academia, por compartir tus conocimientos y entregarme las primeras herramientas que me permitieron llegar hasta aquí, pero en especial gracias por tu amistad y compañía a la distancia. Agradezco también al Dr. Eder Pinto, por compartir sus conocimientos y los comentarios entregados que permitieron mejorar este trabajo.

A los amigos que he encontrado en Girona, gracias por esos momentos de distracción y buena comida catalana, gracias por ser ese oxígeno que muchas veces necesité para continuar.

A mi familia, por serlo todo para mí, por sus palabras de aliento, por comprender y ponerse en mi lugar, aun cuando eso significaba estar lejos los unos de los otros.

En especial, agradezco a mi esposo Julio por impulsarme siempre a luchar por mis anhelos, por el apoyo constante en cada uno de los desafíos que enfrento, por preocuparte de mí bienestar, pero por sobre todo por ponerme a mí primero durante estos últimos cuatro años, por ser mi contención y el motor que impulsa desde la sombra este proyecto.

Finalmente agradezco a Dios por su infinita bondad y misericordia en mi vida…

Reconocimientos: La Tesis Doctoral ha sido apoyada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) del Gobierno de Chile, mediante una beca de doctorado en el extranjero Folio Nº 72200447; el Departamento de Didácticas es Específicas de la Facultad de Educación y Psicología de la Universidad de Girona; el grupo de investigación consolidado de la Generalitat de Catalunya "Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental – GRECA (GRHCS0002)"; y el "Institut de Recerca Educativa" (IRE) de la Universidad de Girona.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN 1

RESUM........ 3

ABSTRACT 5

PRESENTACIÓN GENERAL 7

1. INTRODUCCIÓN........ 10

1.1. Problema de investigación 10

1.2. Pregunta y objetivos de investigación........ 12

2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES 15

2.1 Los orígenes del Early Algebra 15

2.2 La naturaleza del pensamiento algebraico 18

2.2.1 Enfoque del álgebra en educación infantil........ 20

2.2.2 Enfoque del álgebra en educación primaria........ 26

2.3 Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza........ 31

2.4 Antecedentes sobre el conocimiento del profesorado para enseñar álgebra en edades tempranas 36

3. METODOLOGÍA........ 39

3.1 Enfoque metodológico 39

3.2 Participantes........ 40

3.3 Diseño de la investigación y procedimiento 42

3.3.1 Fase 1: Exploratoria 43

3.3.2 Fase 2: Elaboración de instrumentos 45

3.3.3 Fase 3: Administración de los instrumentos 46

3.4 Análisis de los datos 52

4. COMPENDIO DE PUBLICACIONES........ 54

4.1 Estudio [A]........ 55

4.2 Estudio [B] ... 71

4.3 Estudio [C] ... 100

4.4 Estudio [D] ... 125

4.5 Estudio [E] ... 148

4.6 Estudio [F] ... 169

4.7 Estudio [G] ... 191

4.8 Estudio [H] ... 210

4.9 Estudio [I] ... 231

4.10 Estudio [J] ... 253

4.11 Estudio [K] ... 278

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES ... 303

5.1 Pregunta de investigación y objetivos de la investigación ... 303

5.1.1 Objetivo específico 1 ... 305

5.1.2 Objetivo específico 2 ... 306

5.1.3 Objetivo específico 3 ... 308

5.1.4 Objetivo específico 4 ... 310

5.1.5 Objetivo específico 5 ... 311

5.1.6 Objetivo específico 6 ... 314

5.2 Contribuciones de la investigación e implicaciones para la formación inicial docente ... 314

5.3 Limitaciones y perspectivas futuras ... 318

REFERENCIAS ... 320

ANEXOS ... 342

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 *Tareas matemáticas y habilidades para hacer patrones* 24
Figura 2-2 *Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)* 34
Figura 3-1 *Fases de la investigación* 43
Figura 3-2 *Fase exploratoria de la investigación* 45
Figura 3-3 *Fase de elaboración de instrumentos* 46
Figura 3-4 *Fase de administración de instrumentos* 47
Figura 3-5 *Análisis de los datos según las fases de la investigación* 53

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-1
Relación entre los objetivos y las publicaciones derivadas de la Tesis Doctoral 13
Tabla 1-2
Relación entre los objetivos y las publicaciones
complementarias de la Tesis Doctoral 14
Tabla 3-1 *Distribución de los participantes según universidad de procedencia*............ 41
Tabla 3-2 *Distribución de los participantes según género* 41
Tabla 3-3
Características generales de los estudios y su
relación con los objetivos de la Tesis Doctoral 48
Tabla 5-1
Relación entre los objetivos y estudios desarrollados en la Tesis Doctoral................. 304

RESUMEN

La proyección que ha sufrido la enseñanza del álgebra desde edades tempranas, bajo las directrices de la propuesta curricular *Early Algebra*, representa un desafío para la formación inicial del profesorado. El propósito de la investigación es caracterizar el conocimiento matemático que movilizan los futuros profesores de educación infantil y primaria para la enseñanza del álgebra en edades tempranas. Para alcanzar dicho propósito nos situamos desde la perspectiva de Ball et al. (2008) y utilizamos como herramienta analítica el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

La investigación ha adoptado un enfoque metodológico mixto por medio de un diseño exploratorio secuencial. Bajo esta mirada se ha llevado a cabo el proceso de construcción de dos instrumentos: Cuestionario MKT - álgebra temprana (3-6) y Cuestionario MKT - álgebra temprana (6-12). Para ello, en primer lugar, se ha indagado en los estudios empíricos que se han llevado a cabo en relación con la enseñanza del álgebra en las primeras edades y el conocimiento matemático del profesorado de educación infantil y primaria. Asimismo, se ha analizado el tratamiento otorgado al álgebra en las orientaciones curriculares internacionales, así como los libros de texto correspondientes a ambas etapas escolares. Además, se ha profundizado en las tareas matemáticas que diseña el profesorado en formación para movilizar los inicios del pensamiento algebraico y los conocimientos matemáticos para la enseñanza involucrados en tales tareas. Este análisis ha permitido establecer el significado de referencia de la investigación, que conforma la base sobre la que hemos construido y validado los cuestionarios antes mencionados.

El Cuestionario MKT - álgebra temprana (3-6) fue aplicado a una muestra de 60 futuros profesores de educación infantil y el Cuestionario MKT - álgebra temprana (6-12) a una muestra de 76 futuros profesores de educación primaria. Los resultados obtenidos exhiben las limitaciones en el concomiendo matemático del profesorado, tanto en el dominio del conocimiento del contendido (conocimiento común del contenido; conocimiento especializado del contenido; conocimiento del horizonte matemático), como en el conocimiento pedagógico del contenido (concomiendo del contendido y los estudiantes; conocimiento del contenido y la enseñanza; conocimiento del currículo), para enfrentar la enseñanza del álgebra en las primeras edades. Cabe destacar que el

conocimiento matemático del profesorado tanto de infantil como primaria se caracteriza por presentar menores limitaciones respecto del conocimiento común del contenido y mayores dificultades en el conocimiento del horizonte matemático.

A partir de los datos obtenidos, se concluye que es necesario ofrecer programas de formación que permitan fortalecer y desarrollar los distintos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas del profesorado.

RESUM

La projecció que ha sofert l'ensenyament de l'àlgebra des d'edats primerenques, sota les directrius de la proposta curricular *Early Algebra*, representa un desafiament per a la formació inicial del professorat. El propòsit de la recerca és caracteritzar el coneixement matemàtic que mobilitzen els futurs professors d'educació infantil i primària per a l'ensenyament de l'àlgebra en edats primerenques. Per a aconseguir aquest propòsit ens situem des de la perspectiva de Ball et al. (2008) i utilitzem com a eina d'anàlisi el model *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

La recerca ha adoptat un enfocament metodològic mixt per mitjà d'un disseny exploratori seqüencial. Sota aquesta mirada s'ha dut a terme el procés de construcció de dos instruments: Qüestionari MKT - àlgebra primerenca (3-6) i Qüestionari MKT- àlgebra primerenca (6-12). Per a això, en primer lloc, s'ha indagat en els estudis empírics que s'han dut a terme en relació amb l'ensenyament de l'àlgebra en les primeres edats i el coneixement matemàtic del professorat d'educació infantil i primària. Així mateix, s'ha analitzat el tractament atorgat a l'àlgebra en les orientacions curriculars internacionals, així com els llibres de text corresponent a totes dues etapes escolars. A més, s'ha aprofundit en les tasques matemàtiques que dissenya el professorat en formació per a mobilitzar els inicis del pensament algebraic i els coneixements matemàtics per a l'ensenyament involucrats en aquestes tasques. Aquesta anàlisi ha permès establir el significat de referència de la recerca, que conforma la base sobre la qual hem construït i validat els qüestionaris esmentats.

El Qüestionari MKT - àlgebra primerenca (3-6) ha estat aplicat a una mostra de 60 futurs mestres d'educació infantil i el Qüestionari MKT-àlgebra primerenca (6-12) a una mostra de 76 futurs mestres d'educació primària. Els resultats obtinguts mostren les limitacions en el coneixement matemàtic del professorat, tant en el domini del coneixement del contingut (coneixement comú del contingut; coneixement especialitzat del contingut; coneixement de l'horitzó matemàtic), com en el coneixement pedagògic del contingut (coneixement del contingut i els estudiants; coneixement del contingut i l'ensenyament; coneixement del currículum), per a fer front a l'ensenyament de l'àlgebra en les primeres edats. Cal destacar que, el coneixement matemàtic del professorat tant d'infantil com primària, es caracteritza per presentar menors limitacions respecte del

coneixement comú del contingut i majors dificultats en el coneixement de l'horitzó matemàtic.

A partir de les dades obtingudes, es conclou que és necessari oferir programes de formació que permetin enfortir i desenvolupar els diferents subdominis del coneixement matemàtic del professorat per a l'ensenyament de l'àlgebra en edats primerenques.

ABSTRACT

As approach under the guidelines of the Early Algebra curriculum proposal, the early teaching of algebra represents a challenge for initial teacher training. The purpose of this research is to characterise the mathematical knowledge mobilised by future early childhood and primary pre-service teachers for algebra instruction at an early age. To achieve this purpose, we use the perspective of Ball et al. (2008) and the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model as an analytical tool.

The research has adopted a mixed methodological approach and a sequential exploratory design. From this perspective, two instruments have been constructed: the MKT-Early Algebra Questionnaire (3-6) and the MKT-Early Algebra Questionnaire (6-12). We have examined empirical studies carried out in relation to the instruction of algebra at an early age and the mathematical knowledge of early childhood and primary education teachers. Likewise, we have analysed the treatment given to algebra in international curricular guidelines, the textbooks corresponding to both school stages, and the mathematical tasks designed by pre-service teachers to mobilise the beginnings of algebraic thinking and the mathematical knowledge for teaching involved in such tasks. This analysis has allowed us to establish the reference meaning of the research, which forms the basis by which we have constructed and validated the two questionnaires.

The MKT-Early Algebra Questionnaire (3-6) was applied to a sample of 60 pre-service teachers of early childhood education and the MKT-Early Algebra Questionnaire (6-12) was applied to a sample of 76 pre-service teachers of primary education. The results show the limitations in the mathematical knowledge of pre-service teachers to instruct algebra at an early age. These limitations were apparent both in the domain of content knowledge (common knowledge of content; specialised knowledge of content; knowledge of the mathematical horizon) and in the pedagogical knowledge of content (knowledge of content and students; knowledge of content and teaching; knowledge of the curriculum). It is worth noting that the mathematical knowledge of both pre-primary and primary school teachers is characterised by fewer limitations with respect to common knowledge of the content and greater difficulties in the knowledge of the mathematical horizon.

From the data obtained, it is concluded that it is necessary to offer training programmes for teachers to strengthen and develop the different subdomains of mathematical knowledge for the instruction of algebra at an early age.

PRESENTACIÓN GENERAL

El conocimiento del profesorado se ha conformado como una temática de interés en la investigación en educación matemática durante las últimas décadas ya que, tanto el dominio disciplinar como el manejo de aspectos pedagógicos y la experiencia docente, se asocian positivamente con el aprendizaje de los estudiantes (Darling-Hammond et al., 2009).

En este contexto, el conocimiento del profesorado resulta fundamental para atender a los retos y demandas que plantean los currículos contemporáneos de educación infantil (3 a 6 años) y primaria (6 a 12 años), como es el caso de la enseñanza del álgebra en edades tempranas, que se ha impulsado a partir del impacto del *Early Algebra*.

En términos curriculares, el *Early Algebra* responde a una propuesta de cambio cuyo propósito es la introducción de modos de pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización (Carraher y Schliemann, 2019; Kaput, 2000). Dicho proceso, ha sido denominado por (Kaput, 2000) como la algebrización del currículo, que implica "capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad" (Lins y Kaput, 2004, p. 58).

De acuerdo con el *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (2000), la integración del algebra en el currículo desde la educación infantil, permite que el profesorado pueda ayudar a los alumnos a construir una sólida base de comprensión y experiencia en torno al álgebra, como preparación para un trabajo más complejo en los niveles medios y en la escuela secundaria.

Así pues, bajo las directrices del *Early Algebra* se han desarrollado diversos estudios con estudiantes de educación infantil y primaria (e.g., Blanton et al., 2015; Molina y Castro, 2021; Papic et al., 2011; Radford, 2011), que se han centrado principalmente en explicar las oportunidades de los estudiantes para explorar y discernir relaciones matemáticas, patrones y estructuras aritméticas mediante procesos de observación, conjetura, generalización, representación, justificación y comunicación (Kieran et al., 2016a). Sin embargo, es esencial analizar experiencias que profundicen en el conocimiento matemático del profesorado implicado en la formación de tales estudiantes (Kieran, 2007), puesto que son agentes claves para implementar el cambio que implica introducir la enseñanza del álgebra en la educación infantil y primaria, y con ello suscitar el desarrollo del pensamiento algebraico como una capacidad de hacer y expresar generalizaciones (Kaput, 2008).

Desde esta perspectiva, la presente investigación se ha centrado en determinar ¿qué conocimientos matemáticos caracterizan la enseñanza del álgebra en edades tempranas en los futuros profesores de Educación Infantil y Primaria? Para ello, se ha asumido el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), propuesto por Ball et al. (2008).

Los datos obtenidos serán el punto de partida para informar sobre aquellos aspectos centrales que debiese considerar la formación inicial del profesorado de educación infantil y primaria para enseñar álgebra temprana.

La memoria se ha organizado en cinco capítulos que se detallan brevemente:

- Capítulo 1: en este capítulo se justifica la relevancia del estudio, el problema y la pregunta de investigación, así como los objetivos que derivan de esta pregunta.
- Capítulo 2: este capítulo considera la descripción del marco teórico que sustenta la investigación. En una primera parte, se aborda el álgebra temprana como objeto matemático del estudio y posteriormente, se profundiza en el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza-MKT. Asimismo, en este último apartado se exponen los antecedentes de investigaciones previas sobre el conocimiento del profesorado de educación infantil y primaria para enseñar álgebra en edades tempranas.
- Capítulo 3: en este capítulo se describe el enfoque metodológico y las fases de la investigación. Para ello, la investigación se sitúa desde un marco metodológico general y posteriormente se detallan los estudios que forman parte de la memoria.
- Capítulo 4: este capítulo considera los resultados de la investigación. Tales resultados, obedecen al compendio de publicaciones que se materializan con una serie de publicaciones derivados de los estudios que conforman la investigación, detallados en el apartado anterior.
- Capítulo 5: este capítulo recoge las conclusiones de la investigación, considerando la pregunta de investigación, los objetivos planteados y los estudios que dan lugar a los resultados. Posteriormente, se detallan las

contribuciones de la investigación y las implicaciones para la formación inicial docente. Se concluye el capítulo con las limitaciones de la investigación y posibles líneas de investigación futuras.

- Finalmente, la memoria presenta las referencias bibliográficas y los anexos que conforman la investigación.

1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo contiene el planteamiento general del problema de investigación que se aborda en la Tesis Doctoral. En el primer apartado se exponen los argumentos que sustentan la investigación, justificando el estudio y argumentando su pertinencia, mientras que en el segundo apartado se enuncia la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos de la Tesis Doctoral.

1.1. Problema de investigación

Impulsar la actividad algebraica y promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de escolaridad es uno de los propósitos que persigue el *Early Algebra* (Carraher y Schliemann, 2019), como propuesta de cambio curricular (Kaput, 2000; Molina, 2009). El desafío de enseñar álgebra desde las primeras edades surge ante la necesidad imperiosa de fomentar experiencias de aprendizaje que preparen a los estudiantes para un estudio más formal del álgebra en grados superiores, favorecer el desarrollo progresivo de los modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica temprana y, otorgar claridad y coherencia al currículo (Cai et al., 2011).

De acuerdo con Blanton y Kaput (2011), el pensamiento algebraico se concibe como una manera de pensar y no se restringe al trabajo con simbolismo algebraico, es decir, no se centra en el uso de letras y su manipulación (Radford, 2011b). Desde una concepción amplia, garantizar el desarrollo del pensamiento algebraico implica el estudio de estructuras y análisis de relaciones numéricas que surgen de la aritmética, el estudio de las funciones y relaciones conjuntas, el cambio y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 2008; Kieran, 2004).

La introducción de conocimientos de naturaleza algebraica, desde los primeros niveles escolares, se ha impulsado durante las últimas décadas y, progresivamente, se ha ido asentando en las directrices curriculares de educación infantil (3-6 años) y primaria (6-12 años) de diversos países (e.g., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2020; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2012, 2018; Ministry of Education, Republic of Singapore, 2012, 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

A pesar del interés en la investigación por el desarrollo del pensamiento algebraico y los avances del álgebra temprana en términos curriculares, se ha explorado en menor medida cómo guiar al profesorado hacia una enseñanza efectiva del álgebra en estas etapas escolares. Así pues, para asegurar el éxito de las nuevas propuestas curriculares que promueven el estudio del álgebra en edades tempranas, se requiere contar con profesores capaces de brindar a los estudiantes oportunidades en sus experiencias diarias, para desarrollar un pensamiento algebraico apropiado a su edad (Stephens et al., 2015).

De acuerdo con Santagata y Lee (2021), los efectos en el aprendizaje de los estudiantes y la calidad de la instrucción tienen estrecha relación con el conocimiento matemático del profesorado. En términos de Hill et al. (2005), los docentes que poseen conocimientos matemáticos para la enseñanza están en mejores condiciones de favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Por tanto, promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de educación infantil y primaria compromete directamente al profesorado, ya que requieren contar con un amplio conocimiento de la materia, es decir, una sólida comprensión de diversos elementos y conceptos asociados con el desarrollo del pensamiento algebraico, así como un conocimiento pedagógico que permita ofrecer experiencias de aprendizaje efectivas para alcanzar dicho pensamiento.

Esto último, representa un desafío para la formación inicial del profesorado, puesto que el profesorado necesita una preparación en sintonía con la transformación que exige la enseñanza del álgebra (Kim y Kim, 2022). La literatura destaca la necesidad de desarrollar estudios que profundicen en el conocimiento matemático del profesorado en formación sobre la enseñanza del álgebra en edades tempranas (e.g., Cabral et al., 2021; Hohensee, 2017; Tirosh et al., 2019), puesto que existe una escasa evidencia acerca del desarrollo de dicho conocimiento para implementar conocimientos tempranos de álgebra (Walkoe et al., 2022). En consecuencia, se requiere contar con estudios que permitan indagar en aspectos centrales del conocimiento matemático del profesorado para llevar a cabo el proceso de instrucción de este bloque de contenido en el aula de educación infantil y primaria.

Malara y Navarra (2009) aseguran que el profesorado desempeña un rol fundamental en la enseñanza del álgebra en edades tempranas, ya que son los encargados de tomar decisiones sobre su instrucción y propiciar cambios en las prácticas pedagógicas que posibiliten a los estudiantes mejorar la calidad de su aprendizaje, permitiendo avanzar hacia los desafíos que plantea el *Early Algebra*. Sin embargo, para alcanzar este propósito es necesario desarrollar los conocimientos matemáticos necesarios durante la formación inicial del profesorado (Hohensee, 2017), para suscitar una enseñanza efectiva de este bloque de contenido.

1.2. Pregunta y objetivos de investigación

Dada la importancia que tiene el conocimiento matemático del profesorado, puesto que su desempeño impacta positivamente en la calidad de la enseñanza y el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes (Blömeke y Delaney, 2012; Lane et al., 2015), abordar la enseñanza del álgebra desde las primeras edades y con ello promover el desarrollo del pensamiento algebraico es el desafío actual que enfrenta la formación del profesorado. A partir de los antecedentes expuestos en el apartado anterior, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos matemáticos caracterizan la enseñanza del álgebra en edades tempranas en los futuros profesores de Educación Infantil y Primaria?

Con base en la problemática del estudio y para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación se han planteado el objetivo general de:

Caracterizar el conocimiento matemático que movilizan los futuros profesores de educación infantil y primaria para la enseñanza del álgebra en edades tempranas.

Para alcanzar el logro del objetivo general, se requiere del planeamiento de objetivos más específicos, a saber:

OE$_1$. Recopilar y sintetizar los antecedentes aportados en investigaciones previas sobre el conocimiento matemático del profesorado de educación infantil y primaria para enseñar álgebra en edades tempranas, incluyendo una revisión sistemática de los estudios realizados bajo el enfoque del MKT.

OE2: Identificar el tratamiento otorgado al álgebra en los currículos y en los libros de texto de educación infantil y primaria.

OE3: Describir las tareas matemáticas diseñadas por los futuros profesores para promover los inicios del pensamiento algebraico en educación infantil y primaria, y analizar el conocimiento matemático que moviliza el profesorado a partir de su diseño.

OE4: Construir instrumentos para evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas en futuros profesores de educación infantil y primaria.

OE5: Evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas de los futuros profesores de educación infantil y primaria.

OE6: Proponer orientaciones didácticas para abordar la enseñanza del álgebra en edades tempranas.

De acuerdo con los objetivos específicos que conducen el desarrollo de la investigación, se derivan una serie de publicaciones. Las Tablas 1-1 y 1-2 muestran la relación existente entre ambos elementos.

Tabla 1-1
Relación entre los objetivos y las publicaciones derivadas de la Tesis Doctoral

Publicaciones		Objetivos de la Tesis Doctoral					
		OE 1	OE 2	OE 3	OE 4	OE 5	OE 6
[A]	Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective	x					
[B]	Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de educación infantil y primaria		x				
[C]	Incorporación del álgebra temprana en educación infantil: un análisis desde los libros de texto		x				
[D]	El álgebra temprana en los libros de texto de educación primaria: Implicaciones para la formación docente		x				
[E]	Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades			x			
[F]	Mathematical knowledge of pre-service early childhood and primary education teachers: an approach based on the design of tasks involving patterns			x			
[G]	Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación infantil				x		

Publicaciones		Objetivos de la Tesis Doctoral					
		OE 1	OE 2	OE 3	OE 4	OE 5	OE 6
[K]	Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico.						x

Fuente: Elaboración propia

Tabla 1-2

Relación entre los objetivos y las publicaciones complementarias de la Tesis Doctoral

Publicaciones		Objetivos de la Tesis Doctoral					
		OE_1	OE_2	OE_3	OE_4	OE_5	OE_6
[H]	Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación primaria				x		
[I]	Mathematical knowledge of early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers					x	
[J]	Mathematical knowledge of primary school teachers for teaching early algebra					x	

Fuente: Elaboración propia

2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

EN ESTE CAPÍTULO SE DESCRIBEN LOS ASPECTOS CONCEPTUALES QUE SE RELACIONAN CON LA INVESTIGACIÓN. EL CAPÍTULO SE INICIA DETALLANDO LOS ORÍGENES DEL *EARLY ALGEBRA* COMO CORRIENTE CAMBIO CURRICULAR Y LA NATURALEZA DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO COMO OBJETO DE ESTUDIO, PUESTO QUE CONFORMA EL COMPONENTE CENTRAL DE LA INVESTIGACIÓN. POSTERIORMENTE, SE PROFUNDIZA EN LOS ELEMENTOS RELACIONADOS CON EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO QUE INTERVIENEN EN LAS ETAPAS DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA. FINALMENTE, SE DESCRIBE EL MODELO DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA-MKT COMO REFERENTE TEÓRICO QUE FUNDAMENTA DEL ESTUDIO, Y SE EXPONEN ALGUNOS ANTECEDENTES SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO PARA ENSEÑAR ÁLGEBRA EN EDADES TEMPRANAS.

2.1 Los orígenes del Early Algebra

Los primeros diálogos sobre la noción de extender el álgebra lo largo de los planes de estudio de educación primaria y secundaria estuvieron presentes en la década de 1960, de acuerdo con lo señalado por Davis (1985) en el informe ICME-5. Dicho informe, titulado “Pensamiento algebraico en los primeros grados” constituye uno de los principales impulsos en la discusión sobre promover el estudio del álgebra para niños de 6 a 12 años.

Durante las últimas décadas del siglo pasado, la investigación sobre el pensamiento algebraico se centraba en los errores de los estudiantes de 12 a 15 años y las limitaciones de su aprendizaje, señalando algunas deficiencias que manifestaban al pasar de un trabajo aritmético a una forma algebraica de razonamiento (Kieran, 1992; Wagner y Kieran, 1989). No cabía duda que los estudiantes de secundaria manejaban una comprensión frágil de la sintaxis del álgebra, presentando dificultades para interpretar símbolos algebraicos (Kaput et al., 2008). Según Kieran (2016b) esto brinda un estímulo para investigar si ciertos tipos de actividades algebraicas, centrándose en lo que comúnmente se conoce como pensamiento algebraico, pueden ser adoptados por estudiantes más jóvenes y, por lo tanto, facilitar la transición final a un aprendizaje algebraico más formal.

Posteriormente, en la década de los años 90, la idea de incorporar el álgebra como un itinerario longitudinal desde los primeros niveles de escolarización comenzó a asentarse en las discusiones colectivas de los investigadores y profesores en los Estados Unidos. Uno de los primeros grupos de discusión que se originó sobre la naturaleza y el papel del álgebra en las matemáticas escolares es el *Algebra Working Group* (AWG), liderado por James Kaput y respaldado por el *National Center for Research in Mathematical Sciences Education* (NCRMSE). Como resultado de las discusiones generadas en este grupo sobre el aprendizaje del álgebra es que una solución a largo plazo para enfrentar los desafíos que planteaba el álgebra escolar implicaba serios replanteamientos de las matemáticas escolares en los primeros grados (Kaput et al., 2008).

Asimismo, un grupo más pequeño conocido como *Early Algebra Research Group* (EARG) apoyado por el *National Center for Student Learning and Achievement* (NCISLA), un sucesor del NCRMSE, se enfocaba en la investigación sobre el pensamiento algebraico en los grados de educación primaria. Los resultados de tales investigaciones comenzaron a despertar interés en la comunidad investigativa de educación matemática.

Cabe destacar que, mientras el movimiento del álgebra comenzaba a ganar fuerza en Estados Unidos, en paralelo se desarrollaba un movimiento similar a nivel internacional, tanto en la escuela experimental en Rusia, como en la educación primaria en China (Kieran et al., 2016b).

Posteriormente, la celebración del Algebra *Initiative Colloquium* del Departamento de Educación de los Estados Unidos en el año 1993, marcó también un hito importante en el avance sobre las discusiones que se venían generando en el último tiempo sobre el estudio del álgebra (LaCampagne et al., 1995). En él se exponían dos puntos importantes: a) los estudiantes que se enfrentaban a cursos de álgebra en la escuela secundaria tenían serias dificultades con la materia; y b) tales dificultades parecían desencadenarse de la forma en que las matemáticas se enseñaban en los cursos anteriores.

Los avances de la investigación en relación con el *Early Algebra* fueron compartidos y discutidos en encuentros de gran prestigio a nivel internacional, como lo son las conferencias de la *European Society for Research in Mathematics Education*

(CERME) (e.g., Bolea et al., 1998) y el *International Group of the Psychology of Mathematics Education* (PME).

A comienzos del siglo XXI, la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), dio lugar al estudio ICMI sobre el futuro de la enseñanza del álgebra. La *12ª ICMI Study* se llevó a cabo en Australia, siendo la primera conferencia realizada en el Hemisferio Sur acerca de este tema. De acuerdo con Lins y Kaput (2004) al interior del grupo *Early Algebra* conformado en el marco de este encuentro, se enfatizaba que una de las características clave del pensamiento algebraico temprano es la expresión de generalidad, pudiendo definir dos características centrales implicadas en el pensamiento algebraico: a) actos de generalización deliberada y expresión de generalidad y b) el razonamiento basado en formas de generalizaciones estructuradas sintácticamente.

Hacia finales del año 2006, la *Mathematical Association of America* (MAA), financiada por la *National Academy of de Science* (NAS), reunió a un grupo de expertos sobre educación matemática que reflexionaron en torno a la enseñanza del álgebra escolar. El resultado de dicho encuentro fue la publicación del informe "*Algebra: Gateway to a Technological Future*" (Katz, 2007). Entre los distintos grupos de trabajo conformados, se encontraba el grupo *Early Algebra*, centrado en debatir sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en los años iniciales de escolaridad. La reflexión de este grupo se plasma en el segundo capítulo del informe, donde Blanton et al. (2007) afirman que tradicionalmente las matemáticas escolares se habían centrado en la aritmética, más concretamente en la fluidez del cálculo en educación primaria, luego en los grados medios se consideraba un enfoque más procedimental del álgebra. No obstante, este enfoque no había sido exitoso en términos de preparación para el aprendizaje del álgebra en los cursos posteriores.

Blanton et al. (2007) plantean la introducción de un enfoque que permita cultivar hábitos mentales que atienda a la estructura subyacente de las matemáticas (Kaput, 1999), así como formas de pensar que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas desde la educación primaria. Este enfoque, conocido como *Early Algebra*, presenta dos características centrales: a) generalizar, o identificar, expresar y justificar la estructura, las propiedades y las relaciones matemáticas y; b) razonar y actuar basándose en las formas de las generalizaciones (Kaput, 2008; Lins y Kaput, 2004).

El *Early Algebra*, está diseñada para ayudar a los niños a ver y describir la estructura matemática y las relaciones para las que han construido un significado (Blanton, 2008).

Uno de los supuestos implícitos en la propuesta *Early Algebra* es que cuando los estudiantes tienen estas experiencias desde los primeros niveles de escolarización, por un período extendido de tiempo, desarrollan una base matemática mucho más profunda que si sus experiencias se centran en el cálculo. Como resultado, estos estudiantes están mejor preparados para los cursos formales de álgebra en educación secundaria.

2.2 La naturaleza del pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico se puede definir desde múltiples perspectivas (Carraher y Schliemann, 2019). Kaput (2008), por ejemplo, asegura que el pensamiento algebraico implica el desarrollo de modos o formas particulares de pensar, que permiten avanzar hacia el aspecto central que promueve el *Early Algebra*, la generalización.

La generalización se concibe como un proceso mental, considerado como un prerrequisito para alcanzar la abstracción matemática, ya que "generalizar es derivar o inducir a partir de lo particular, identificar lo común y ampliar los dominios de validez" (Dreyfus, 2002, p. 35). Es decir, es una actividad matemática que implica identificar lo que es común para todos los casos, extender el razonamiento más allá del ámbito en el que se originó u obtener resultados más amplios a partir de casos particulares (Ellis, 2011).

Blanton et al. (2011) aseguran que atender a la generalización permite que los niños se alejen de las particularidades asociadas al cálculo aritmético y puedan identificar la estructura y las relaciones matemáticas involucradas. De acuerdo con Mason (2017) la generalización se encuentra en el centro del pensamiento algebraico y se puede interpretar como la acción de reconocer que algunos atributos de una situación matemática pueden cambiar, mientras que otros permanecen invariables.

Blanton (2008) define el pensamiento algebraico como "una forma de pensar que impregna todas las dimensiones de las matemáticas y es el núcleo de lo que los niños deberían hacer habitualmente en las matemáticas escolares" (p. xii). Para Kieran (2022), el pensamiento algebraico es un tipo de razonamiento en el que participan los estudiantes de 5 a 12 años a medida que construyen el significado de los objetos y las formas de pensar que se encontrarán en el estudio posterior del álgebra de la escuela secundaria. Si bien no hay una definición exacta de lo que es el pensamiento algebraico, pareciera existir un consenso en la literatura en que el pensamiento algebraico “no tiene que ver con símbolos literales, sino con formas de pensar” (Kieran, 2011, p. 591).

En esta investigación, a partir de las aportaciones de la literatura, consideramos que el pensamiento algebraico constituye una manera particular de razonar que promueve la capacidad de establecer relaciones matemáticas centradas en la estructura, para alcanzar la formalización de generalizaciones.

Aun cuando la propuesta *Early Algebra* plantea inicialmente introducir el pensamiento algebraico desde la educación primaria, diversos autores y organismos promueven desde hace años que la enseñanza de este bloque de contenido trasciende a la Educación Infantil (e.g., Alsina, 2019a, 2022a; Clements y Sarama, 2009; Kieran, 2022; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)

En este contexto, resulta interesante profundizar en la propuesta que plantea Kieran para abordar el desarrollo del pensamiento algebraico:

> El pensamiento algebraico en los primeros cursos académicos implica el desarrollo de diversos tipos de reflexiones como parte de las actividades en los que puede utilizarse la representación simbólica algebraica mediante letras como herramienta, pero no exclusiva, del álgebra, de modo que pueda llevarse a cabo también sin ningún tipo de representación simbólica con letras, como por ejemplo el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación, el ensayo y error y la predicción. (Kieran, 2004, p. 149).

A pesar de los considerables avances que la investigación ha ofrecido respecto de la naturaleza del pensamiento algebraico continúa siendo necesario definir de manera coherente el conocimiento involucrado en la instrucción temprana del álgebra que se requiere introducir de manera longitudinal en las etapas de educación infantil y primaria.

2.2.1 Enfoque del álgebra en educación infantil

De acuerdo con Alsina y Giralt (2017) promover el pensamiento algebraico desde educación infantil no solo prepara a los estudiantes para el álgebra en los niveles posteriores, también les ayuda desde muy pequeños a estructurar su pensamiento y a desarrollar su capacidad de razonar.

Diversas investigaciones informan que los estudiantes de educación infantil pueden adquirir nociones algebraicas elementales desde edades temprana, tales como la identificación de patrones, el reconocimiento de relaciones entre cantidades, entre otras (Acosta y Alsina, 2020; Anglada y Cañadas, 2021; Castro et al., 2017; Pinto, 2021; Rittle-Johnson et al., 2013).

Existe una larga tradición de desarrollar conocimientos de naturaleza algebraica previos a la generalización y el simbolismo ya desde la etapa de educación infantil, como por ejemplo diversos tipos de relaciones de equivalencia, de orden, etc. Diversos autores clásicos de reconocido prestigio, como Montessori (1914), Piaget (1941), Dienes (1971b, 1971a) y Dienes y Golding (1976), entre otros, jugaron un papel esencial en la construcción progresiva de un cuerpo de conocimientos asociados al álgebra en los primeros niveles escolares, aunque bajo otras nomenclaturas como la educación sensorial, el razonamiento lógico-matemático y la lógica, respectivamente, al no existir todavía el término *Early Algebra* que se usa en la actualidad (Alsina, 2019a). Este fenómeno dio lugar a la génesis de una didáctica asociada al pensamiento algebraico que, además de ir organizando el contenido a enseñar, fue definiendo también una forma de enseñarlo cercana a los niños y respetuosa con sus necesidades y posibilidades de aprendizaje: la manipulación, la experimentación y el juego, principalmente.

Los currículos contemporáneos de educación infantil (e.g., NCTM, 2000; ACARA, 2020) han asumido la importancia de incorporar de manera progresiva contenidos vinculados con el álgebra (Pincheira y Alsina, 2021). Los contenidos expuestos en los currículos para abordar el estudio del álgebra desde edades temprana, profundizan principalmente en el trabajo con patrones de repetición y reconocen las aportaciones preliminares de autores clásicos como Piaget, Montessori y Dienes, vinculadas con las relaciones de equivalencia y de orden a través del reconocimiento de atributos, así como la introducción de operadores.

Desde la perspectiva de Piaget (1941), las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos, permiten al niño construir el conocimiento lógico-matemático. En esta línea, Dienes (1971a) señala que:

> Para facilitar al niño la adquisición de la abstracción que supone la teoría de los estados y los operadores, sugerimos el empleo lo más temprano posible de muchos operadores distintos de diferente naturaleza. Si el niño no adquiere más que experiencia de operadores de carácter aritmético, llegará a creer que no existe otra clase de operadores. Es evidente que no es así. (p. 9)

En concreto, cuando Dienes hace mención a "operadores distintos de diferente naturaleza", se está refiriendo a situaciones de transformación y juegos de diferencias a partir de los Bloques Lógicos, en los que se comparan semejanzas y diferencias de los objetos a partir de cualidades como el color, la forma, el grosor o el tamaño. Desde este punto de vista, más adelante, Alsina (2012) afirma que:

> … relacionar cualidades sensoriales implica comparar los elementos de una o diversas agrupaciones entre sí a partir de un criterio de tipo cualitativo preestablecido (por ejemplo: tener la misma forma, tener el mismo color, etc.), pero nuevamente este trabajo sensorial permite desarrollar el razonamiento lógico-matemático de manera que poco a poco se pueden extrapolar e inferir estos conocimientos cualitativos hacia otros cuantitativos, a partir de actividades que implican clasificar, ordenar, hacer parejas, etc., por criterios cuantitativos, utilizando comparativos como más que, menos que, igual que, tanto como, etc. (p. 80)

A partir de la manipulación de objetos, los estudiantes de educación infantil adquieren conocimientos físicos que le permiten establecer características o atributos externos a estos (Piaget, 1953), dando lugar a la construcción de diferentes tipos de relaciones cualitativas y cuantitativas, tales como comparaciones, clasificaciones, ordenaciones, correspondencias (Alsina, 2019a; Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Según el NCTM (2000), tales relaciones facilitan posteriormente el trabajo con patrones.

Una relación implica comparar elementos por medio de semejanzas o diferencias, a partir de un criterio: la clasificación, por ejemplo, es una relación de equivalencia en una agrupación de elementos, que cumple con la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva; la ordenación es una relación de orden en una agrupación de elementos que posee las propiedades antireflexiva, antisimétrica y transitiva; y, finalmente, la correspondencia representa una relación donde determinados elementos de una agrupación A se asocian con uno o más elementos de una agrupación B (Alsina, 2011, 2012).

Lenz (2022) asegura que en educación infantil las comparaciones más-menos, la comprensión de la igualdad, y las relaciones parte-todo, permiten el acceso inicial a las variables al profundizar en las cualidades y los cuantificadores, estimulando un modo particular de pensamiento algebraico, como es el pensamiento relacional.

El pensamiento relacional o pensamiento centrado en las relaciones se define ampliamente como el proceso de hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y patrones significativos que subyacen a la información (Dumas et al., 2013). De acuerdo con Carpenter et al. (2005) este modo de pensamiento atiende a las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, en lugar de centrarse exclusivamente en los procedimientos de cálculo. Por tanto, el pensamiento relacional se encuentra estrechamente relacionado con las representaciones simbólicas y el uso de notación algebraica.

Aun cuando los estudiantes en educación infantil no tienen suficiente experiencia con las representaciones simbólicas, Lenz (2022) afirma que es posible favorecer el desarrollo del pensamiento relacional en educación infantil utilizando representaciones sin notación algebraica, con la ayuda de objetos reales y manipulables a partir del trabajo con relaciones cualitativas y cuantitativas.

Otro elemento central en la instrucción temprana del álgebra son los patrones matemáticos. El reconocimiento y análisis de patrones matemáticos, entendido como "cualquier regularidad predecible, que generalmente involucra relaciones espaciales, numéricas o lógicas" (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 34), ofrece a los niños la posibilidad de observar y verbalizar generalizaciones, así como registrarlas simbólicamente (Threlfall, 1999). Diversos autores (Clements y Sarama, 2009; Mason et al., 2009) consideran que la exploración de patrones sienta las bases para promover la generalización y fomentar el pensamiento algebraico, puesto que permite a los niños coordinar sus habilidades inferenciales perceptivas y simbólicas, de manera que sean capaces de construir una estructura plausible y algebraicamente útil (Rivera, 2010).

De acuerdo con Carpenter et al. (2003a) la capacidad de observar regularidades es desarrollada por los niños de forma intuitiva desde los primeros años de escolarización, a través de acciones, comportamientos, representaciones visuales, melodías musicales, entre otros, (Clements y Sarama, 2009; Liljedahl, 2004). De esta forma, "los patrones constituyen una manera de reconocer, ordenar y organizar los niños su mundo" (NCTM, 2000, p.95).

Mulligan y Mitchelmore (2009) afirman que en los patrones matemáticos es necesario diferenciar entre un patrón como secuencia ordenada o seriación, y como estructura, es decir, la regla o núcleo subyacente al patrón. Así pues, los patrones presentan un componente cognitivo vinculado al reconocimiento de su estructura, y un componente metacognitivo asociado a la capacidad de encontrar y analizar patrones.

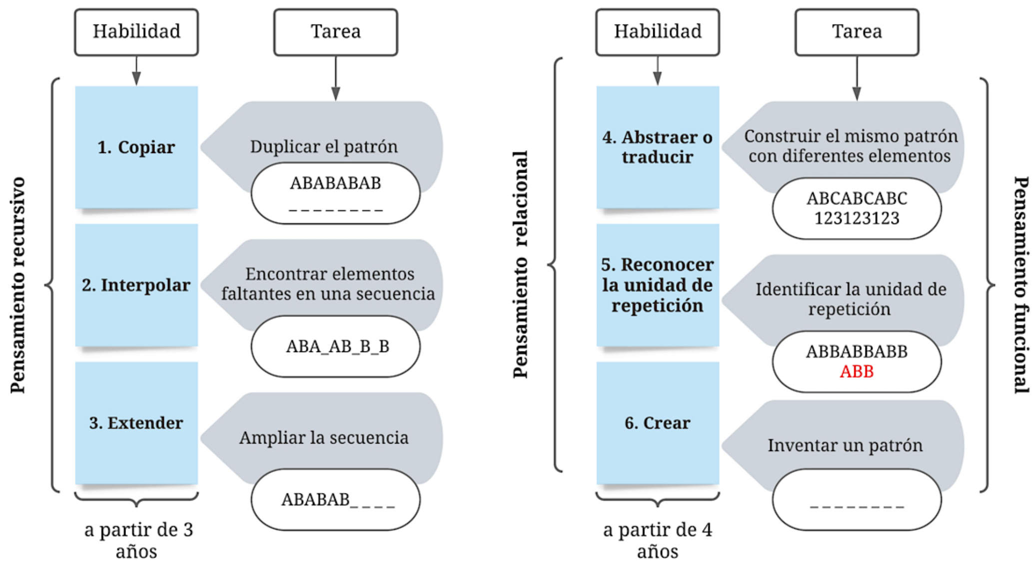
Papic et al. (2011) asegura que los estudiantes en los primeros niveles de escolaridad experimentan con tres tipos de patrones, de acuerdo con la naturaleza de su estructura. Sin embargo, en educación infantil se consideran más apropiado los dos primeros (Papic y Mulligan, 2007): a) patrones de estructura espacial, son relaciones invariantes entre diversas características de formas geométricas; b) patrones repetitivos, tienen "una estructura cíclica que puede generarse mediante la aplicación repetida de una porción más pequeña del patrón" (Liljedahl, 2004, pp. 26-27), conocida como unidad de repetición (Threlfall, 1999) y; c) patrones crecientes, que consisten en secuencias de elementos que aumentan o disminuyen sistemáticamente.

Los patrones de crecimiento, han cobrado interés en el enfoque del *Early Algebra* (Kaput, 2008), no obstante, se ha demostrado que es apropiado incorporarlos en los primeros años de la escolarización formal (Warren y Cooper, 2008).

Para efectos de la instrucción sobre patrones en la educación infantil, profundizamos en las secuencias con una regularidad replicable (Papic et al., 2011). En este contexto, la literatura aporta una serie de tareas y habilidades que permiten operacionalizar el trabajo con patrones de repetición (Clements y Sarama, 2009; Lüken y Sauzet, 2021; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019).

Acosta et al. (2022a) y Pincheira et al. (2022), plantean unos indicadores para analizar tareas de patrones en libros de texto de educación infantil, donde aúnan criterios y otorgan un orden de dificultad creciente a las tareas para hacer patrones determinadas en la literatura: a) duplicar el mismo patrón; b) encontrar los elementos que faltan en una secuencia; c) ampliar la secuencia; d) construir el mismo patrón con diferentes materiales; e) identificar la unidad que se repite; y f) inventar un patrón. Junto a estas tareas, se movilizan una serie de habilidades, definidas como "competencias de los niños en relación con la repetición de patrones" (Lüken y Sauzet, 2021, p. 29). Las habilidades de creación de patrones que movilizan dichas tareas son: copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad que se repite y crear, respectivamente, como se observa en la Figura 2-1.

Figura 2-1
Tareas matemáticas y habilidades para hacer patrones



Fuente: Acosta et al. (2022b)

Por una parte, las tareas de duplicar el patrón, encontrar elementos faltantes y ampliar la secuencia "enfatizan la organización recursiva de elementos en lugar de repetir unidades" (McGarvey, 2012, p. 334), pudiendo resolverse de manera exitosa haciendo uso de la estrategia de emparejamiento de apariencia uno a uno (Collins y Laski, 2015); por otro lado, las tareas Construir el mismo patrón con diferentes elementos, identificar la unidad de repetición e inventar un patrón fomentan un enfoque más directo en la estructura (Tirosh et al., 2019), requiriendo que los niños usen estrategias de similitud relacional (Rittle-Johnson et al., 2013). Por este motivo, se considera que una experiencia temprana con patrones permite también promover el pensamiento relacional. No obstante, pese a que en la de construir el mismo patrón con diferentes elementos (tarea 4) se precisa un pensamiento más abstracto (Clements y Sarama, 2009; Rittle-Johnson et al., 2015), existen autores como Lüken (2018) y Wijns et al. (2019b) que difieren. Lüken (2018) alega que, para este tipo de tareas, los niños pueden recurrir a una estrategia de alternancia, ya que perciben el patrón como una secuencia de colores sin captar la estructura de repetición; y Wijns et al. (2019b) explica que los alumnos también pueden establecer una correspondencia término a término si no existe un espacio prudencial entre el patrón modelo y el patrón a construir con diferentes elementos. En cualquier caso, en este estudio se asume la tarea de construir un mismo patrón con diferentes elementos como la frontera entre el pensamiento recursivo y funcional.

De acuerdo con el NCTM (2000), otro elemento fundamental vinculado con el pensamiento algebraico es el cambio. Desde una perspectiva genérica, las ideas sobre cambio y las relaciones que se establecen entre los cambios, se vinculan con el pensamiento funcional (Warren y Cooper, 2005). La incorporación de ideas vinculadas con el cambio en educación infantil, permite a los niños "comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo" (NCTM, 2000, p. 99). Por ejemplo, "describir cambios cualitativos, como ser más alto o describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año" (NCTM, 2000, p. 94), es fundamental para entender el desarrollo de las funciones en las etapas escolares posteriores.

El cambio, entendido como la variación o transformación que experimenta un determinado objeto matemático, de un estado inicial a otro final, a partir de un operador (Alsina y Pincheira, 2022) se puede abordar desde distintos enfoques. De acuerdo con autores como Dienes (1971a) y Alsina (2012), entre otros, en educación infantil se promueven diversos tipos de cambios, ya sean: a) aritméticos, por ejemplo, al añadir una cantidad determinada a una cantidad inicial; b) geométricos, por ejemplo, un giro es un operador que actúa en la posición y; c) de atributos físicos, por ejemplo, cuando se pintan las paredes blancas de una casa de color rojo, se usa un operador que convierte en rojo lo que era blanco. Castro et al. (2017) afirman que los niños y niñas de educación infantil pueden realizar análisis de situaciones estudiando el cambio. En consecuencia, el pensamiento funcional se puede estimular a partir de la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

Los diferentes procesos y conceptos que se requieren incorporar en las prácticas matemáticas de educación infantil para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico movilizan una serie de contenidos matemáticos que se deben tener en consideración en las prácticas de enseñanza del álgebra en edades tempranas, ya que, “las observaciones y discusiones sobre cómo se relacionan unas cantidades con otras, conducen a experiencias con relaciones funcionales; y sus representaciones de situaciones matemáticas usando objetos concretos, dibujos y símbolos constituyen los comienzos de la construcción de modelos matemáticos” (NCTM, 2000, p. 95).

2.2.2 Enfoque del álgebra en educación primaria

El *Early Algebra* busca promover en las aulas de clase modos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de tareas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas (Blanton y Kaput, 2005). Esto implica propiciar un ambiente escolar en donde los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas e igualmente practiquen habilidades de cálculo.

Kaput (2008) sugiere tres líneas básicas de contenido de álgebra: a) la aritmética generalizada; b) el pensamiento funcional y; c) la aplicación de las generalizaciones como lenguaje de modelado. La aritmética generalizada incluye la construcción del aspecto sintáctico del álgebra a partir de la estructura de la aritmética, es decir, implica mirar las expresiones aritméticas a partir de su estructura, en lugar de calcular su valor. Considera, además, la identificación de relaciones entre los números y la construcción de generalizaciones sobre sus propiedades, así como la expresión explícita de las estrategias de cálculo. Esta línea atiende a la transición de la aritmética al álgebra, al expandir las nociones de equivalencia asociadas con el signo de igualdad (=), como operador y como resultado de equivalencia general. En términos de Demosthenous y Stylianides (2014), las tareas matemáticas que se desarrollan en esta línea las denomina tareas de relaciones aritméticas situadas.

Por otra parte, el pensamiento funcional se relaciona con la generalización de las funciones, es decir, las relaciones entre cantidades covariables. Asimismo, el pensamiento funcional se relaciona con la capacidad de expresar patrones numéricos y figurativos como funciones y expresiones algebraicas (Mulligan y Mitchelmore, 2009; Warren y Cooper, 2005). En este contexto se sitúa el cambio y el trabajo con patrones elementales como un precursor necesario para alcanzar otras formas de generalización matemática. En esta línea de contenido se desarrollan las tareas de relaciones basadas en reglas Demosthenous y Stylianides (2014). Mientras que, el lenguaje de modelado se refiere a la generalización de regularidades que se presentan implícitamente a través de diversos contextos de problemas. Demosthenous y Stylianides (2014) asegura, que en esta línea de contenido se profundiza en el trabajo con relaciones conocidas-desconocidas.

Cada una de las líneas que aporta Kaput (2008) consideran el desarrollo de distintos conceptos algebraicos, que en algunos casos se entrelazan entre sí, sin embargo, difieren en su interpretación. La aritmética generalizada, por ejemplo, implica conceptos de números, operaciones, signo de igualdad, ecuación, expresión y variables. En el marco del pensamiento funcional, el concepto de ecuación, expresión y variable también cobra relevancia, pero con una interpretación diferente a la línea de la aritmética generalizada (Kieran et al., 2016b). Además, esta línea incorpora otros conceptos como covarianza, correspondencia y cambio, que a su vez también de evidencian en la línea del leguaje de modelado (Chimoni et al., 2018).

Blanton et al. (2015) identifican cinco grandes ideas que se encuentran representadas en las líneas de contenido de Kaput (2008):

a) equivalencia, expresiones, ecuaciones, y desigualdades: esta idea incluye una comprensión relacional del signo igual, representar y razonar con expresiones y ecuaciones en su forma simbólica, y describir relaciones entre cantidades dos o más cantidades generalizadas que pueden o no ser equivalentes.
b) aritmética generalizada: implica la generalización de relaciones aritméticas, incluidas las propiedades fundamentales del número y la operación (por ejemplo, la propiedad conmutativa de la suma), y el razonamiento sobre la estructura de las expresiones aritméticas en lugar de su valor computacional.
c) pensamiento funcional: implica generalizar relaciones entre cantidades covariantes y, representar y razonar con esas relaciones a través del lenguaje natural, notación algebraica (simbólica), tablas y gráficos.

d) variables: se refiere a la notación simbólica como herramienta lingüística para representar ideas matemáticas de manera sucinta e incluye los diferentes roles que juega la variable en diferentes contextos matemáticos (Blanton et al., 2011):
    - Una variable puede representar un número de un patrón generalizado: Ejemplo: Las letras r y s en la ecuación r+s=s+r, donde r y s representan números reales.
    - Una variable puede utilizarse para representar un número fijo pero desconocido:
      Ejemplo: La letra y en la ecuación y+5=8 y la letra x en la ecuación 2x-3=x+1
    - Una variable puede utilizarse para representar una cantidad que varía, especialmente en relación con otra cantidad. Ejemplo: Las letras y y f en la ecuación 3y=f
    - Una variable puede utilizarse para representar un parámetro: Ejemplo: La letra m en la ecuación y=mx
    - Una variable puede utilizarse para representar un marcador de posición arbitrario o abstracto en un proceso algebraico: Ejemplo: La letra t en el enunciado “Factor t^2+3t”

e) razonamiento proporcional: se refiere a las oportunidades para razonar algebraicamente sobre dos cantidades generalizadas que están relacionadas de tal manera que la razón de una cantidad a la otra es invariable.

Tales ideas no son excluyentes entre sí, ofrecen oportunidades para abordar de manera significativa las prácticas básicas del pensamiento algebraico, tales como la generalización, representación, justificación y razonamiento de relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008).

A partir de las aportaciones de Kaput (2008) y Blanton et al. (2015), profundizaremos en dos componentes fundamentales para atender a la instrucción temprana del álgebra en educación primaria, como es la aritmética generalizada y el pensamiento funcional.

De acuerdo con Blanton (2008) la aritmética generalizada se refiere a la generalización de la construcción sobre las operaciones y propiedades de los números. De este modo, los estudiantes generalizan ideas matemáticas importantes como la conmutatividad de las operaciones, aprenden cómo afectan las operaciones a los números y desarrollan una visión relacional de la equidad. Por ejemplo, a medida que los niños experimentan con la suma, la resta, la multiplicación y la división de números, empiezan a darse cuenta de ciertas regularidades en el comportamiento de los números.

Como se ha mencionado, las propiedades de las operaciones, las propiedades de los números, el signo igual y la equivalencia son fundamentales en el desarrollo de la aritmética generalizada. Carraher et al. (2019) considera también oportuno incluir las variables en este constructo.

Stephens et al. (2017), aseguran que el proceso de generalización, puede ocurrir en el contexto de las siguientes actividades: a) identificar la conmutatividad entre los casos (e.g., 2+3=3+2=5;4+5=5+4=9); b) extender el razonamiento más allá del rango de casos presentados (e.g., saber que 1348+2865=2865+1348, sin calcular); y c) llegara resultados más amplios a partir de casos específicos, por ejemplo, generalizar que la propiedad conmutativa es válida para cualquier par de números.

A partir del trabajo con expresiones aritméticas surge el pensamiento relacional (Carpenter et al., 2005). Para Castro y Molina (2007), la importancia del pensamiento relacional radica en que "uno de los objetivos de su uso es central la atención en las propiedades de las operaciones, en cómo trasformar expresiones y operaciones, y cómo esta trasformación afecta a las operaciones" (p.71). Asimismo, Molina y Ambrose (2008) afirman que el pensamiento relacional posee una visión estructural más que operativa de los elementos matemáticos, estableciendo relaciones entre ellos y utilizándolos para encontrar una solución a una tarea.

En este contexto cobra importancia el signo igual, que denota una relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que se escriben a ambos lados del signo. Por tanto, el pensamiento relacional se emplea al estudiar una igualdad abierta (e.g., 4+__=6+4) o cerrada (e.g., 7+5=8+4), o una sentencia numérica (e.g., 15+2=15+3), cuando la respuesta a la situación planteada se obtiene estableciendo relaciones entre los números o expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual (Castro y Molina, 2007).

Cabe destacar que el signo igual presenta tres significados, según Kieran (1981): a) significado operacional, profundiza en la idea de que, tras este símbolo "=", hay que poner siempre el resultado de una operación y, generalmente, sólo se acepta como verdadera una única cantidad (e.g., 4+13=17); b) significado de equivalencia, permite establecer muchas formas de representar un número, a través de desigualdades numéricas (e.g., 12=6+6;8+4=12;12=10+2), así como indicar posibilidades de trabajar expresiones como 7+3=2+8, indicando una relación de equilibrio, de equivalencia entre los términos “antes” y “después” del signo; y c) significado relacional, que establece relaciones entre expresiones (e.g., 10+12+15=10+10+17), apunta a la comprensión y uso de las propiedades de las operaciones.

El trabajo con expresiones numéricas asegura posteriormente el descubrir patrones y establecer relaciones funcionales (Castro y Molina, 2007; Stephens et al., 2017).

El pensamiento funcional se basa en un conjunto de habilidades diferente al de la aritmética generalizada. Requiere que los niños presten atención al cambio y al crecimiento (Blanton, 2008; Warren y Cooper, 2005). Implica la búsqueda de patrones en las cantidades varían entre sí, donde la función es una forma de expresar esa variación. De acuerdo con Blanton (2008) el pensamiento funcional “brinda a los estudiantes la oportunidad de trabajar con un amplio abanico de herramientas: tablas, gráficos, máquinas de funciones, diagramas de entrada/salida, etc.” (p.5).

Cañadas y Molina (2016), definen el pensamiento funcional como “un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (p. 212).

Según Smith (2008) el “pensamiento funcional se produce cuando los niños inventan o se apropian de sistemas de representación para representar la generalización de una relación entre cantidades variables” (p.143). La generalización promueve la flexibilidad en el pensamiento matemático de los estudiantes (Pinto y Cañadas, 2021).

En el marco del pensamiento funcional, Smith (2008) describe tres modos de analizar patrones y las relaciones implicadas en las funciones: a) recursividad, implica encontrar el patrón de variación dentro de una sola secuencia de valores. Según Kieran (2018), el patrón recursivo implica la capacidad de buscar y conceptualizar la regularidad replicable. Por tanto, se pueden considerar los patrones repetitivos y los patrones de crecimiento, es decir, entre un conjunto ordenado de objetos o entre dos conjuntos ordenados de objetos (Papic et al., 2011); b) pensamiento covariacional, se basa en analizar cómo dos cantidades varían simultáneamente y en cómo los cambios en los valores de una variable producen cambios en la otra variable (ej. “como x aumenta en uno, y aumenta en 2”) y; c) relación de correspondencia, se basa en identificar una correlación entre variable, el uso de la regla de la función para predecir valores de funciones lejanas y encontrar el valor de una variable dado el valor de la otra (ej. “y es 3 veces x más 2” ó y=3x). Una relación de correspondencia también podría darse en los patrones de crecimiento (Pittalis et al., 2020). Los patrones de crecimiento mantienen dos tipos de regla, la primera llamada generalización recursiva o regla local, que implica encontrar el siguiente término de un patrón (Mason, 1996), y una segunda regla que implica, por ejemplo, encontrar el término número 100 de un patrón creciente, esta regla hace referencia a una generalización lejana, donde se debe encontrar una regla general para cualquier elemento de la secuencia, es decir, percibe la relación entre dos cantidades, permitiendo la descripción general de la regla (Usiskin, 1988). Es en esta última regla, donde interviene la relación de correspondencia.

Durante los últimos años, se han impulsado una serie de investigaciones que dan cuenta de que los estudiantes de educación primaria pueden desarrollar y utilizar una serie de herramientas de representación para razonar sobre funciones, pueden describir con palabras y símbolos relaciones recursivas, de covarianza y de correspondencia, y pueden utilizar el lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades desconocidas (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Carraher et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2018).

2.3 Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Hay un consenso en la literatura sobre la conexión existente entre el conocimiento de los profesores y la calidad de su enseñanza (e.g., Darling-Hammond, 2000; Hiebert, y Grouws, 2007; Tchoshanov, 2011). Bajo esta premisa, durante las últimas tres décadas se han realizado diversos intentos para describir los componentes que debiese considerar los conocimientos del profesorado.

Shulman (1986) ha sido el precursor en construir una base teórica en relación con el conocimiento del profesorado, proponiendo inicialmente tres categorías de conocimiento del contenido: a) conocimiento del contenido de la materia, que “se refiere a la cantidad y organización de conocimientos per se en la mente del profesor” (p.9), es decir, los conocimientos que posee un profesor y la forma como los organiza; b) conocimiento pedagógico del contenido, entendido como “la forma particular de conocimiento del contenido que incorpora los aspectos del contenido más relacionados con su enseñanza" (p.9). Esta categoría de conocimiento considera la representación de ideas, uso de analogías, descripciones, ejemplos, explicaciones, etc., es decir, las formas de representar y plantear un contenido de modo que sea comprensible para los estudiantes; c) conocimiento curricular, que comprende el conocimiento sobre los programas y materiales curriculares diseñados para llevar a cabo el proceso de instrucción.

Posteriormente, Shulman (1987) redefine las categorías iniciales de conocimiento y profundiza en la base de conocimiento para la enseñanza, considerando: a) el conocimiento del contenido; b) el conocimiento pedagógico general; c) conocimiento del currículo; d) conocimiento pedagógico del contenido; e) conocimiento de los alumnos y sus características; f) conocimiento de los contextos educativos; g) conocimiento de los fines, propósitos y valores educativos, y sus fundamentos filosóficos e históricos.

El autor brinda especial interés al conocimiento pedagógico del contenido, que se constituye como "esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es competencia exclusiva de los profesores, su propia forma especial de comprensión profesional" (Shulman, 1987, p. 8). Es decir, representa la combinación entre el contenido y la pedagogía, permitiendo distinguir la comprensión que realiza un especialista en contenidos de la del pedagogo.

Las aportaciones de Shulman (1986; 1987) dieron lugar a una sólida agenda de investigación en torno a lo que los profesores saben y cómo piensan sobre contenidos específicos, obteniendo como resultado la producción de modelos y teorías, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento matemático. Entre ellos destaca, por ejemplo: a) el Cuarteto de Conocimientos-KQ planteado por Rowland et al. (2005) que considera cuatro grandes dimensiones (Foundation, Transformation, Connection, Contingency) que permiten observar, describir y discutir sobre el conocimiento del contenido matemático de los profesores en la práctica de enseñanza de las matemáticas y, desarrollar la enseñanza de dicha disciplina; b) el Conocimiento Matemático para la Enseñanza-MKT propuesto por Ball et al. (2008), que considera un conjunto de conocimientos y habilidades que requiere el profesorado para gestionar las tareas recurrentes en la enseñanza de las matemáticas; el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas-CCDM de Godino et al. (2017) que permite analizar, interpretar y categorizar los conocimientos que pone en juego el profesorado al enseñar un determinado contenido matemático; y el modelo de Conocimientos Especializados del Profesor de Matemáticas-MTSK propuesto por Carrillo et al. (2018), que asume por conocimiento especializado todo aquel conocimiento que es útil para el profesor en el contexto de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con Chapman (2014) “no sólo es importante lo que saben los profesores de matemáticas, sino también cómo lo saben y lo que son capaces de movilizar para la enseñanza” (p. 295). Esto último ha traído consigo el desarrollo de diversas investigaciones sobre el conocimiento del profesorado al enseñar matemáticas desde diferentes perspectivas.

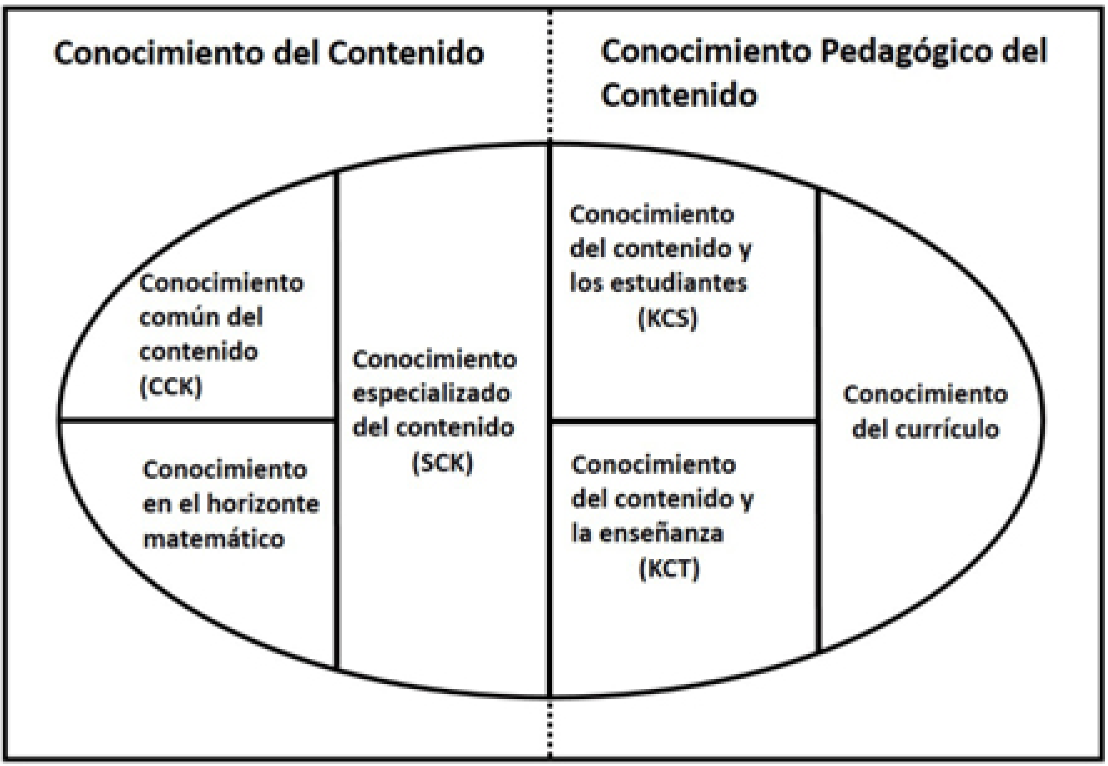
La revisión de una serie de investigaciones sobre el aprendizaje y conocimientos de los futuros profesores de matemática realizada por Ponte y Chapman (2015) destacan como referente teórico de estos estudios el modelo MKT (Ball et al., 2008), desarrollado un gran alcance e impacto en la comunidad investigativa.

El modelo MKT (Ball et al., 2008) emerge como resultado de un intento por redefinir y validar empíricamente el conocimiento pedagógico del contenido propuesto por Shulman (1986, 1987), permitiendo identificar elementos esenciales del conocimiento para enseñar matemáticas. Así pues, a partir del análisis de las prácticas del profesorado Ball et al. (2008) determinaron las demandas matemáticas de la enseñanza, que posteriormente conforman los componentes del modelo, proporcionando una base empírica de la relación positiva que constituye el conocimiento pedagógico del profesorado y los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

Dicho modelo, se ha desarrollado como una herramienta analítica del conocimiento del profesor y se define como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill et al., 2008, p. 374). En consecuencia, el modelo MKT establece un mapa de dominio del conocimiento matemático para enseñar, que considera el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Ambos dominios se subdividen en tres subdominios, como se ilustra en la Figura 2-2.

Figura 2-2

Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)



Fuente: Hill et al. (2008, p. 377)

El conocimiento del contenido integra: el conocimiento común del contenido (CCK), definido como "conocimiento matemático y habilidades utilizados en escenarios distintos a la enseñanza" (Ball et al., 2008, p.399), es decir, corresponde al manejo que se puede alcanzar a lo largo de los niveles educacionales y que posee cualquier persona que se enfrenta a una tarea matemática; el conocimiento especializado del contenido (SCK), que se refiere al "conocimiento matemático y habilidad exclusiva para la enseñanza" (Ball et al., 2008, p.400), un conocimiento que es específico del profesor y que se emplea para desarrollar tareas de la enseñanza alusivas a: "cómo representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema" (Hill et al., 2008, p.377-378); y el conocimiento del horizonte matemático, es una "conciencia de cómo se relacionan los temas matemáticos a lo largo de la extensión de las matemáticas incluidas en el plan de estudios" (Ball et al., 2008, p.403), permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículum a lo largo de las diversas etapas educativas y ofrece una visión para entender las conexiones entre las diversas nociones de la matemática y/o con otras ciencias.

Por otra parte, el conocimiento pedagógico del contenido considera: el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), que se define como el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular” (Hill et al., 2008, p.375), es decir, es el conocimiento que permite anticipar e interpretar el pensamiento de los estudiantes frente a una determinada tarea matemática; el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), descrito como el conocimiento que “combina el saber sobre la enseñanza y el saber sobre las matemáticas” (Ball et al., 2008, p.401), integra el conocimiento matemático específico, y aspectos pedagógicos y didácticos de los procesos de enseñanza que intervienen en el aprendizaje de los estudiantes, centrándose en el uso de diferentes métodos y procedimientos que permiten desarrollar la instrucción; y, finalmente, el conocimiento del currículo, que se refiere al conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes” (Ball et al., 2008), es decir, está relacionado con las orientaciones y enfoques correspondientes a los programas diseñados para cada nivel educativo en el área de matemáticas.

La categorización de los subdominios del modelo MKT, permite examinar los conocimientos del profesorado en el aspecto práctico (Ng, 2011). Sin embargo, dicha categorización no está ligada a una visión particular de la enseñanza, sino más bien responde a diversos estilos o enfoques de enseñanza, es decir, se puede suscitar en una discusión de toda la clase, una tarea escrita o un cuestionario (Ball et al., 2008). El conocimiento especializado del contenido (SCK) y el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), por ejemplo, se encuentran vinculados de manera más crítica con el diseño de tareas matemáticas (Sullivan et al., 2015).

Por tanto, las herramientas que otorga el modelo MKT son de gran riqueza en el ámbito de la educación matemática, dado que permiten caracterizar los conocimientos que debe manifestar un profesor en el desarrollo de su práctica para la enseñanza de las matemáticas (Hill et al., 2008). Sin embargo, continúa siendo una línea de investigación abierta donde se requiere avanzar hacia la búsqueda de procedimientos para identificar y analizar con precisión los dominios y subdominios que plantea el modelo.

2.4 Antecedentes sobre el conocimiento del profesorado para enseñar álgebra en edades tempranas

Algunos estudios recientes se han empezado a interesar por profundizar en el conocimiento del profesorado de educación infantil y primaria sobre aspectos fundamentales en la enseñanza del álgebra en las primeras edades. Los distintos enfoques teóricos en que se enmarcan estos estudios han permitido tener una mirada generalizada respecto de los conocimientos que manejan el futuro profesorado y profesorado en activo, para enfrentarse a tareas de índole algebraico y promover el desarrollo del pensamiento algebraico.

Gasteiger et al. (2020), por ejemplo, analizan el conocimiento pedagógico de 149 profesores de educación infantil, en formación y activo, observando una incomprensión en el tratamiento de los patrones, que los lleva a tomar decisiones erróneas en el contexto de la enseñanza del álgebra en esta etapa escolar. Asimismo, Noviyanti y Suryadi (2019), evalúan el conocimiento matemático básico de 35 profesores en activo de educación infantil sobre patrones y el sentido numérico de relaciones matemáticas. Los resultados revelan limitaciones en el conocimiento del contenido en ambos constructos.

Castro (2011), por ejemplo, a partir del enfoque Onto-semiótico de la cognición y de la Instrucción Matemática (Godino et al., 2007) evalúa las competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico de 28 futuros profesores a través del diseño de una unidad didáctica. Los resultados revelan, que los futuros profesores no se encuentran preparados para asumir la inclusión curricular del álgebra temprana en la escuela primaria, puesto que priorizan un enfoque procedimental y numérico en las unidades diseñadas. Asimismo, Aké (2013) evalúa el razonamiento algebraico de 40 futuros profesores de educación primaria a través de un cuestionario. Los futuros profesores exhiben dificultades en el desarrollo de ideas algebraicas, puesto que asocian el uso de conocimientos algebraicos principalmente con la manipulación simbólica.

Por otra parte, Mejías (2019) desde la perspectiva del Modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009), evalúa el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra en 121 profesores en activo de educación primaria, evidenciando deficiencias en el tratamiento de contenidos algebraicos y limitaciones para justificar e interpretar ideas matemáticas de carácter algebraico.

Desde una perspectiva más amplia, sin centrarse en un modelo específico de conocimiento Cabra et al. (2021) analizan el conocimiento sobre patrones repetitivos y la capacidad de percibir el pensamiento algebraico en los niños de educación infantil. Los resultados revelan que el profesorado aborda aspectos relevantes del pensamiento algebraico de los niños, sin embargo, presentan ciertas dificultades para comprender los patrones de repetición como objeto matemático, observando algunas limitaciones en su interpretación.

Blanton y Kaput (2005) examinan la práctica de aula de una maestra de tercer grado de educación primaria, a través de un estudio de caso, explorando las estrategias en que se construyen habilidades de razonamiento algebraico en los estudiantes. La maestra es capaz de integrar el razonamiento algebraico en la instrucción en formas planificadas y espontáneas, por medio de tareas matemáticas relacionadas con la aritmética generalizada, pensamiento funcional y generalizaciones. El estudio sugiere que el pensamiento aritmético y funcional generalizado, ofrece puntos de entrada accesibles para que los maestros promuevan el razonamiento algebraico. Jacobs et al. (2007), mediante un estudio experimental de desarrollo profesional implementado en 19 escuelas de Educación Primaria en California, desarrollaron un trabajo con 180 maestros de primer y quinto grado, y 3735 estudiantes (6 a 11 años de edad) acerca del razonamiento algebraico y las relaciones matemáticas. Los resultados señalan que los maestros que participaron del estudio generaron una amplia variedad de estrategias que reflejan de mejor manera el uso del pensamiento relacional, que los maestros que no, mientras que los estudiantes mostraron una comprensión significativamente mejor del signo igual y utilizaron más estrategias que reflejan el pensamiento relacional durante las entrevistas, que los estudiantes en las clases de los maestros no participantes.

Por otra parte, Stephens (2008) profundizó en las concepciones de álgebra de 30 maestros de Educación Primaria en activo, analizando las definiciones generales de álgebra de los participantes y las tareas diseñadas para involucrar a los estudiantes en el pensamiento relacional, es decir, si manejan una comprensión profunda del signo igual. Las concepciones de álgebra de los profesores son bastante limitadas, los maestros relacionan el álgebra con la manipulación simbólica, valorando la manipulación simbólica por sobre el pensamiento relacional, sugiriendo que lo que se ve como álgebra es lo que se valora en el aula.

En síntesis, las investigaciones en torno al conocimiento que moviliza el profesorado en formación y activo de educación infantil y primaria son escasas, y reflejan un limitado conocimiento para promover una enseñanza efectiva del álgebra en edades tempranas.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta el marco metodológico de la investigación. En el primer apartado se describe y justifica el enfoque metodológico general que rige la investigación. Posteriormente, se detallan las características sociodemográficas de los participantes y se profundiza en el diseño de la investigación y procedimiento, a partir de las fases que lo componen. Asimismo, en este apartado se detallan los distintos estudios que se despliegan en las distintas fases del estudio, el apartado finaliza con las características generales de los estudios y su relación con los objetivos de la Tesis Doctoral. Por último, se detallan los instrumentos de recogida de información y las categorías de análisis.

3.1 Enfoque metodológico

De acuerdo con los objetivos que persigue la investigación, se ha adoptado un enfoque metodológico mixto, puesto que considera la integración sistemática de variables cualitativas y cuantitativas que permiten interpretar un fenómeno (Onwuegbuzie et al., 2009), en nuestro caso, la caracterización del conocimiento matemático que movilizan los futuros profesores de educación infantil y primaria para la enseñanza del álgebra en edades tempranas.

La combinación de dos métodos puede ser superior a la de uno solo, ya que proporciona una visión rica del fenómeno de investigación que no pueden comprenderse plenamente utilizando únicamente métodos cualitativos o cuantitativos. Un diseño de métodos mixtos puede integrar y establecer una sinergia entre múltiples fuentes de datos, lo que puede ayudar a estudiar problemas complejos (Poth y Munce, 2020).

De acuerdo con Shorten y Smith (2017), la aplicación de métodos mixtos implica la consolidación intencional de datos que permite buscar una visión amplia del estudio al profundizar en un fenómeno desde diferentes perspectivas y lentes de investigación.

En nuestro caso, se ha optado por la combinación de datos cualitativos y cuantitativos, puesto que ofrecen una visión holística del fenómeno a partir de los resultados de la investigación, permitiendo aportar información adicional sobre sus diferentes componentes. Asimismo, producen una mayor certeza y una implicación más amplia en las conclusiones (Maxwell, 2016).

Por otra parte, Teddlie y Tashakkori (2009) aseguran que la combinación de dos métodos, cualitativo y cuantitativo, ayuda a obtener una imagen más completa y ofrece la oportunidad de una mayor variedad de puntos de vista divergentes o complementarios, que son valiosos, ya que no solo conducen a una reflexión adicional y enriquecen nuestra comprensión acerca del fenómeno de estudio, sino que también abren nuevas vías para futuras investigaciones.

3.2 Participantes

La investigación se ha llevado a cabo con futuros profesores, que presentan una modalidad dual dadas las características del estudio, ya que por una parte considera futuros profesores del Grado de Maestro de Educación Infantil y por otra, futuros profesores del Grado de Maestro de Educación Primaria.

Los participantes han sido escogidos a través de un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal (Hernández et al., 2014), puesto que el criterio de selección ha sido determinado por la posibilidad de acceder a este grupo.

En total han participado 196 futuros profesores, 88(44.9%) estudian el Grado de Maestro de Educación Infantil y 108 (55.1%) al Grado de Maestro de Educación Primaria. Tales participantes, pertenecen a dos universidades, una chilena y una española, como se muestra en la Tabla 3-1.

Cabe destacar que, han participado futuros profesores de Chile y España, puesto que la investigación estuvo sujeta a las condiciones establecidas por la pandemia de la COVID-19. En una primera instancia de la investigación se ha considerado la participación de futuros profesores chilenos y luego, en una segunda instancia se ha considerado la participación de futuros profesores españoles.

Tabla 3-1
Distribución de los participantes según universidad de procedencia

Participantes	Universidad chilena	Universidad española	Total
Futuros profesores de educación infantil	18(9.2%)	70(32.7%)	88(44.9%)
Futuros profesores de educación primaria	22(11.2%)	86(43.9%)	108(55.1%)
Total	40(20.4%)	156(79.6%)	196(100%)

Fuente: Elaboración propia

Podemos observar que el 20.4% de los futuros profesores que participan de la investigación pertenecen a una universidad chilena, mientras que el 79.6% pertenece a una universidad española.

En cuanto a las edades de los participantes, fluctúan entre los 18 y 28 años, siendo 168 mujeres (85.7%) y 28 hombres (14.3%). Considerando la universidad de procedencia, la Tabla 3-2 muestra, de manera más específica, la distribución de los futuros profesores según género.

Tabla 3-2
Distribución de los participantes según género

Participantes	Universidad chilena		Universidad española	
	M	F	M	F
Futuros profesores de educación infantil	0(0%)	18(9.2%)	1(0.5%)	69(35.2%)
Futuros profesores de educación primaria	7(3.6%)	15(7.6%)	20(10.2%)	66(33.7%)
Total	7(3.6%)	33(16.8%)	21(10.7%)	135(68.9%)

Fuente: Elaboración propia

En relación con la formación de los participantes, los futuros profesores de educación infantil pertenecientes a la universidad chilena cursaban su tercer año académico (de un total de cuatro) y realizaban la asignatura de “Didáctica de las matemáticas” que es un curso didáctico-disciplinar que profundiza en la enseñanza del álgebra y otros bloques de contenido. Anterior a dicha asignatura, los participantes habían desarrollado sólo una asignatura disciplinar vinculada con la comprensión del pensamiento lógico matemático. Mientras que, los futuros profesores de educación primaria, se encontraban en su tercer año académico (de un total de cinco) y cursaban la asignatura de "Aprendizaje y enseñanza del álgebra", donde reciben formación didáctica específica sobre álgebra que complementa la formación disciplinar. Tales participantes, habían realizado previamente los cursos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar y de la geometría.

Cabe destacar que, tanto los futuros profesores de educación infantil como los de primaria pertenecientes a la universidad chilena habían desarrollado experiencias de práctica profesional.

En relación con la formación de los participantes que proceden de la universidad española, los futuros profesores de educación infantil cursaban su segundo año académico (de un total de cuatro) y desarrollaban la asignatura de "Aprendizaje de las Matemáticas", que corresponde a la primera asignatura en el ámbito de la educación matemática, donde estudian los contenidos y estrategias de enseñanza para abordar la enseñanza del álgebra en las primeras edades (3 a 6 años) y otros bloques de contenido, como la numeración y el cálculo, geometría, medida, y estadística y probabilidad.

En el caso de los futuros maestros de educación primaria, cursaban su tercer año académico (de un total de cinco), y realizaban la asignatura "Matemáticas II". En este curso los futuros profesores profundizan en los contenidos y estrategias de enseñanza de los bloques temáticos de medida, espacio y forma, relaciones y cambio. Cabe destacar que, en el curso académico anterior, los participantes han realizado la asignatura de "Matemáticas I", donde han recibido instrucción sobre la enseñanza de la numeración y el cálculo, la estadística y probabilidad.

3.3 Diseño de la investigación y procedimiento

La investigación responde a un diseño exploratorio secuencial (Creswell, 2014), dado que se comienza explorando con datos y análisis cualitativos, para luego utilizar los resultados en una segunda etapa donde se recaban y analizan datos cuantitativos. Por tanto, el diseño de investigación tiene una modalidad derivativa (Hernández et al., 2014) ya que la recolección y análisis de los datos cuantitativos se construye sobre la base de los resultados cualitativos.

Dadas las características que presenta la investigación, la elección de un diseño exploratorio secuencial se fundamenta en dos razones: a) la investigación tiene una orientación más cualitativa, por tanto, tiene sentido iniciar con un enfoque más inductivo y b) requiere del desarrollo de productos, más específicamente de instrumentos que posteriormente pueden ser transferible y generalizable a otras muestras (Creswell y Plano, 2018)

La investigación ha seguido las fases del método mixto exploratorio secuencial, propuestas por Creswell (2014): a) fase exploratoria; b) fase de elaboración de instrumentos; y c) fase de administración de instrumentos, como se muestra en la Figura 3-1.

Figura 3-1
Fases de la investigación

Fuente: Elaboración propia

Cada una de las fases de investigación está conformada por distintos estudios, que contribuyen directamente al desarrollo de los objetivos específicos de la investigación y en su conjunto responden al objetivo general.

3.3.1 Fase 1: Exploratoria

En la fase exploratoria se ha indagado en profundidad sobre cuatro temáticas esenciales para el desarrollo de la investigación:

a) antecedentes aportados en investigaciones previas sobre el conocimiento matemático del profesorado para enseñar álgebra temprana, donde emerge el estudio [A], que consiste en una revisión sistemática que expone en detalle los avances en términos de la conceptualización del conocimiento matemático del profesorado en formación y activo para la enseñanza del algebra temprana en educación infantil y primaria. A partir de dicho estudio, se pretende abordar el OE_1 de la investigación.
b) el tratamiento otorgado al álgebra en los currículos de educación infantil y primaria que promueve el estudio [B], donde se han analizado las orientaciones curriculares de educación infantil y primaria de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile, a partir de los conocimientos que consideran para promover el desarrollo del pensamiento algebraico.
c) el tratamiento otorgado al álgebra en los libros de texto, que da lugar a los estudios [C] y [D], que profundizan en el análisis de las tareas algebraicas tempranas propuestas en los libros de texto de educación infantil (3 a 6 años) y primaria (6 a 12 años), respectivamente. A partir del desarrollo de tales estudios [B], [C] y [D], se espera abordar el OE_2 de la investigación.
d) las tareas matemáticas que diseña el profesorado para promover los inicios del pensamiento algebraico, como es el caso de los patrones. Indagar en esta temática ha suscitado en desarrollo de los estudios [E] y [F], desde dos perspectivas. El estudio [E] se focalizan en las características que permiten explorar el desempeño instruccional de las tareas de patrones diseñadas por el profesorado en formación de educación infantil (n=18) y primaria (n=22), mientras que el estudio [F] se centra en los conocimientos matemáticos que moviliza dicho profesorado al diseñar tareas matemáticas sobre patrones. En ambos estudios han participado los futuros profesores pertenecientes a una universidad chilena. Los estudios [E] y [F], dan respuesta al OE_3 de la investigación.

La Figura 3-2, muestra una panorámica general de la fase exploratoria, considerando los estudios respectivos que la componen.

Figura 3-2
Fase exploratoria de la investigación

Fuente: Elaboración propia

Cabe destacar que, en la fase exploratoria se recaban y analizan datos cualitativos, donde los hallazgos obtenidos en cada uno de los estudios que conforman la fase, posteriormente sientan las bases para elaborar los instrumentos de evaluación implicados en la Fase 2.

3.3.2 Fase 2: Elaboración de instrumentos

En la segunda fase de la investigación interviene un enfoque cuantitativo para el tratamiento de los datos, que se complementa con un análisis cualitativo. Así, pues, los resultados obtenidos en la fase anterior, permiten establecer el significado de referencia de la investigación y dar inicio al proceso de diseño, construcción y validación de dos instrumentos, más específicamente cuestionarios, que evalúan el conocimiento matemático del profesorado para la enseñanza del álgebra temprana.

La fase de elaboración de los cuestionarios da origen a los estudios [G] y [H] (Figura 3-3), que se llevan a cabo considerando la valoración del juicio de 12 expertos en Didáctica de la Matemática y la aplicación piloto con la participación de futuros profesores de educación infantil (n=10) y primaria (n=10) de una universidad española.

El primero de ellos se centra en un cuestionario para evaluar el conocimiento matemático para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación infantil, mientras que el segundo considera la elaboración de un cuestionario para evaluar el conocimiento matemático del profesorado en formación de educación primaria para enseñar álgebra temprana. Ambos estudios pretenden dar respuesta al OE_4 de la investigación.

Figura 3-3
Fase de elaboración de instrumentos

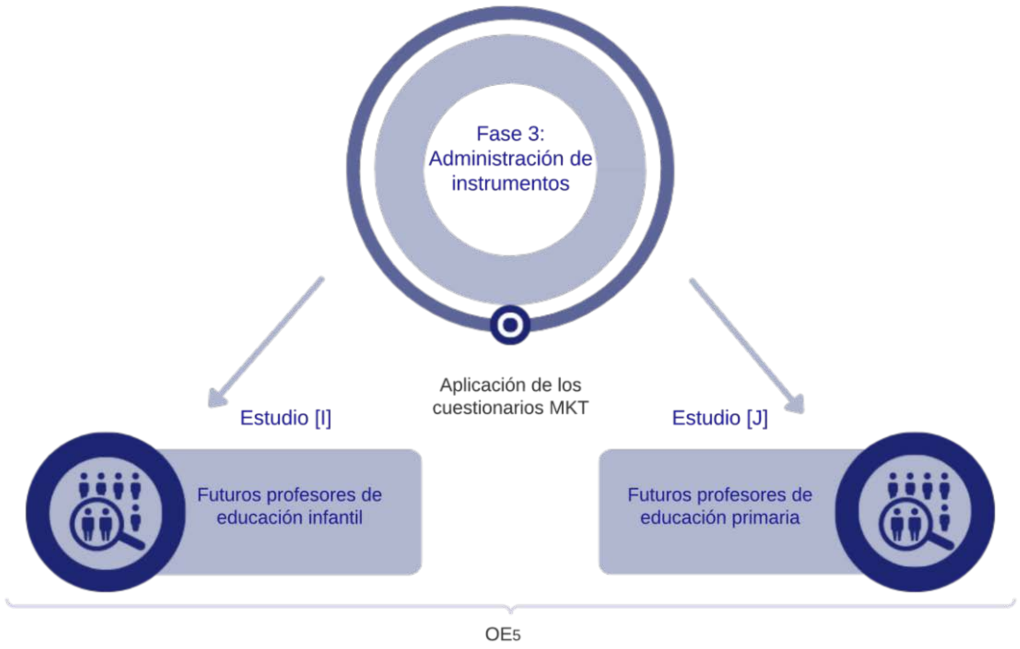
Fuente: Elaboración propia

3.3.3 Fase 3: Administración de los instrumentos

La última fase de investigación considera la aplicación de los instrumentos elaborados en la fase anterior. En este contexto, emergen los estudios [I] y [J] que hacen referencia a la aplicación de los cuestionarios, como se muestra en la Figura 3-6. En tales estudios han participado futuros profesores de educación infantil y primaria de una universidad española, que han respondido de manera voluntaria el instrumento, firmando previamente un consentimiento informado. La administración de los instrumentos se ha llevado a cabo durante el desarrollo de una clase lectiva del proceso de formación de los participantes.

El estudio [I] detalla la administración de cuestionario que permite evaluar del conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra temprana en futuro profesores de educación infantil, mientras que el estudio [J] se centra en la administración del cuestionario para evaluar el conocimiento matemático de los futuros profesores de educación primaria para enseñar álgebra temprana. El desarrollo de ambos estudios da respuesta al OE_5 de la investigación.

Figura 3-4
Fase de administración de instrumentos



Fuente: Elaboración propia

Cabe destacar que, luego de llevar a cabo la última fase de la investigación se ha considerado realizar el estudio [K], que propone orientaciones didácticas para abordar la enseñanza del álgebra en edades tempranas. Este último estudio da respuesta al OE_6 de la investigación.

La Tabla 3-3, resume las características principales de los estudios que considera la investigación, mostrando su vinculación con cada uno de los objetivos específicos propuestos en la Tesis Doctoral.

Tabla 3-3

Características generales de los estudios y su relación con los objetivos de la Tesis Doctoral

Estudio	Título del estudio/Revista	Objetivo del estudio	Enfoque metodológico	Documentos/ sujetos de análisis	Nivel educativo		Objetivos de la Tesis Doctoral					
					Educación infantil	Educación primaria	OE_1	OE_2	OE_3	OE_4	OE_5	OE_6
[A]	Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. (*Mathematic*).	Realizar una revisión sistemática de la forma en que se ha conceptualizado y estudiado empíricamente en la producción científica el MKT de los profesores de educación infantil y primaria sobre álgebra temprana	Revisión sistemática	17 estudios empíricos con profesores en formación y activos	x	x	x					
[B]	Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de educación infantil y primaria. (*Revista Educación Matemática*)	Analizar la incorporación del álgebra temprana en los currículos de educación infantil y primaria, y caracterizarla.	Cualitativo de carácter documental	5 documentos curriculares de países internacionales	x	x		x				
[C]	Incorporación del álgebra temprana en educación infantil: un análisis desde los libros de texto. (*PNA*)	Analizar las tareas matemáticas sobre álgebra temprana presentes en ocho libros de texto chilenos para el nivel de transición de educación infantil (4 a 6 años)	Cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo	8 libros de texto	x			x				

Estudio	Título del estudio/Revista	Objetivo del estudio	Enfoque metodológico	Documentos/ sujetos de análisis	Nivel educativo		Objetivos de la Tesis Doctoral					
					Educación infantil	Educación primaria	OE_1	OE_2	OE_3	OE_4	OE_5	OE_6
[D]	El álgebra temprana en los libros de texto de educación primaria: Implicaciones para la formación docente. (*Revista Bolema, Boletim de Educação Matemática*).	Analizar las tareas sobre álgebra temprana presentes en una serie de ocho libros de texto escolares chilenos de educación primaria (6-12 años).	Cualitativo de carácter descriptivo	8 libros de texto		x		x				
[E]	Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades. (*Uniciencia*).	Analizar las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan los futuros profesores de educación infantil y primaria durante su formación universitaria	Cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo	40 futuros profesores: 18 de educación infantil y 22 de educación primaria	x	x			x			
[F]	Mathematical knowledge of pre-service early childhood and primary education teachers: an approach based on the design of tasks involving patterns. (*Australian Journal of Teacher Education*).	Analizar los conocimientos matemáticos que evocan los futuros profesores de educación infantil y primaria al diseñar una tarea matemática para promover el estudio de patrones.	Cualitativo de carácter descriptivo	40 futuros profesores: 18 de educación infantil y 22 de educación primaria	x	x			x			

Estudio	Título del estudio/Revista	Objetivo del estudio	Enfoque metodológico	Documentos/ sujetos de análisis	Nivel educativo		Objetivos de la Tesis Doctoral	
[G]	Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. (*Revista de Investigación en Educación*)	Construir y validar un instrumento para evaluar el conocimiento matemático para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación infantil.	Mixto de carácter instrumental	10 futuros profesores	x		x	
[H]	Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación primaria. (*En revisión*).	Construir y validar un instrumento para evaluar el conocimiento matemático sobre álgebra temprana del profesorado de educación primaria durante la formación inicial	Mixto de carácter instrumental	10 futuros profesores		x	x	
[I]	Mathematical knowledge of early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers. (*En revisión*).	Analizar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra temprana del profesorado en formación de educación infantil.	Mixto de carácter exploratorio-descriptivo	60 futuros profesores	x			x
[J]	Mathematical knowledge of primary school teachers for teaching early algebra. (*En revisión*).	Analizar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra temprana del profesorado en formación de educación primaria.	Mixto de carácter exploratorio-descriptivo	76 futuros profesores		x		x

Estudio	Título del estudio/Revista	Objetivo del estudio	Enfoque metodológico	Documentos/ sujetos de análisis	Nivel educativo	Objetivos de la Tesis Doctoral
[K]	Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico. Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas (*Aceptado*).	Avanzar en la comprensión del pensamiento algebraico en educación infantil				x

Fuente: Elaboración propia

OE_1. Recopilar y sintetizar los antecedentes aportados en investigaciones previas sobre el conocimiento matemático del profesorado de educación infantil y primaria para enseñar álgebra en edades tempranas, incluyendo una revisión sistemática de los estudios realizados bajo el enfoque del MKT.

OE_2: Identificar el tratamiento otorgado al álgebra en los currículos y en los libros de texto de educación infantil y primaria.

OE_3: Describir las tareas matemáticas diseñadas por los futuros profesores para promover los inicios del pensamiento algebraico en educación infantil y primaria, y analizar el conocimiento matemático que moviliza el profesorado a partir de su diseño.

OE_4: Construir instrumentos para evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas en futuros profesores de educación infantil y primaria.

OE_5: Evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas de los futuros profesores de educación infantil y primaria.

OE_6: Proponer orientaciones didácticas para abordar la enseñanza del álgebra en edades tempranas.

3.4 Análisis de los datos

El análisis de los datos se ha realizado a partir de dos herramientas metodológicas, como son el análisis de contenido y los cuestionarios.

El análisis de contenido es una técnica de investigación que establece “un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos” (Cohen et al., 2018, p. 475), permitiendo estudiar la naturaleza del discurso con detalle y profundidad, pudiendo descubrir la estructura interna de los textos a través del estudio de su contenido semántico (Rico y Fernández-Cano, 2013). Mientras que, los cuestionarios permiten obtener de manera relativamente rápida datos sobre las variables (Hernández et al., 2014).

El análisis de contenido se ha aplicado principalmente a los datos de carácter cualitativo recogidos en la fase 1 de la investigación, como es el caso del análisis de los estudios de la revisión sistemática (estudio [A]), los currículos (estudio [B]), los libros de texto (estudios [C] y [D]) y las tareas matemáticas que diseña el profesorado en formación (estudios [E] y [F]). Para ello, se han establecido una serie de indicadores que responden a las características particulares de cada estudio, asignando puntuaciones en caso de presencia o ausencia.

Por otra parte, el uso de los cuestionarios se ha llevado a cabo en las fases 2 y 3 de la investigación, a través de la valoración del juicio de expertos y la aplicación piloto (estudios [G] y [H]), así como en la administración de los cuestionarios definitivos (estudios [I] y [J]), respectivamente.

En la fase 2, para validar el instrumento mediante el juicio de expertos se ha proporcionado una pauta a los expertos para valorar el grado de adecuación de cada ítem de acuerdo con los dominios y subdominios del conocimiento matemático considerando tres categorías: a) grado de correspondencia, en relación con las características del modelo MKT (Ball et al., 2008); b) formulación, referido al lenguaje y claridad de cada ítem; c) pertinencia, vinculado con la coherencia del ítem respecto de cada subdominio del modelo. Mientras que, la aplicación piloto, ha considerado la codificado de las respuestas otorgadas en el cuestionario, a partir de una rúbrica, asignando puntuaciones que se han resumido en matrices de datos numéricos. Esto ha permitido establecer el grado de consistencia y fiabilidad de cada instrumento (coeficiente Alfa de Cronbach), así como el índice de dificultad de los ítems para ambos cuestionarios.

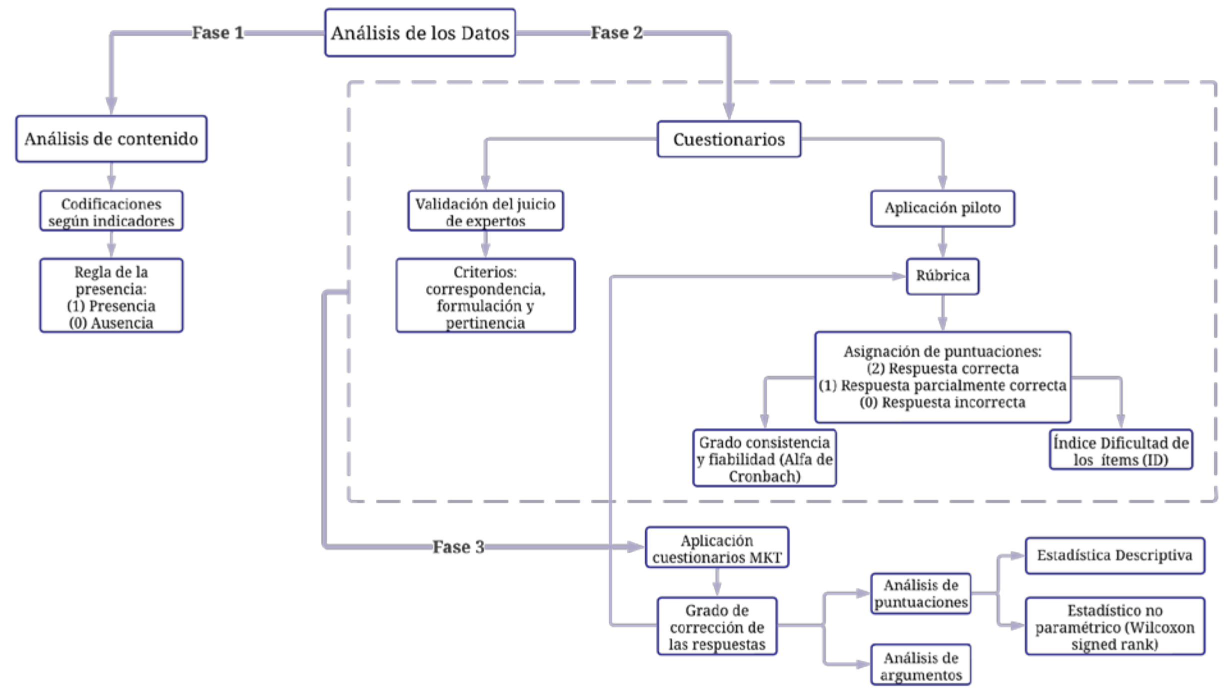
Cabe destacar que, en las fases 2 y 3 de la investigación se ha considerado el análisis de variable cuantitativa, como es el grado de corrección de las respuestas. Para tales efectos, nos hemos apoyado en el tratamiento de datos SPSS Stadistics 27 para realizar el análisis estadístico de las puntuaciones de los cuestionarios, determinando a partir de la estadística descriptiva la distribución de las puntuaciones totales, la puntuación de la mediana de cada uno de los cuestionarios y los puntajes normados según los subdominios del modelo de conocimiento matemático para la enseñanza evaluados.

Por otra parte, para profundizar en las diferencias de las puntuaciones obtenidas en los distintos subdominios del conocimiento matemático, se ha establecido una comparación aplicando el estadístico no paramétrico de signos para muestras apareadas *Wilcoxon Signed-Rank*, con un nivel de confianza del 95%.

Asimismo, se ha considerado un análisis cualitativo, por medio de los diferentes tipos de argumentos otorgados en las respuestas.

La Figura 3-5 resume como se ha establecido el análisis de los datos en las distintas fases de la investigación.

Figura 3-5
Análisis de los datos según las fases de la investigación



Fuente: Elaboración propia

4. COMPENDIO DE PUBLICACIONES

EN ESTE CAPÍTULO SE PRESENTAN LOS RESULTADOS DE LA TESIS DOCTORAL, LOS CUALES ESTÁN ORGANIZADOS EN DIVERSOS ESTUDIOS QUE SE MATERIALIZAN EN ONCE ARTÍCULOS, SIETE DE ELLOS PUBLICADOS [A-G], UNO ACEPTADO [K], Y TRES EN REVISIÓN [H-J]. LOS ESTUDIOS RESPONDEN A LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE ESTA INVESTIGACIÓN. A CONTINUACIÓN, SE PRESENTA EL ORDEN DE LOS ESTUDIOS SEGÚN SE DETALLAN EN EL CAPÍTULO.

[A] Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective.
[B] Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de educación infantil y primaria.
[C] Incorporación del álgebra temprana en educación infantil: un análisis desde los libros de texto.
[D] El álgebra temprana en los libros de texto de educación primaria: implicaciones para la formación docente.
[E] Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades.
[F] Mathematical knowledge of pre-service early childhood and primary education teachers: an approach based on the design of tasks involving patterns.
[G] Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación infantil.
[H] Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación primaria.
[I] Mathematical knowledge of early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers.
[J] Mathematical knowledge of primary school teachers for teaching early algebra.
[K] Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico.

Los estudios que se exponen presentan el formato de los manuscritos de acuerdo a los requerimientos de cada revista, por lo que se siguen las nomas de las mismas.

4.1 Estudio [A]

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9, 2590.* https://doi.org/10.3390/math9202590

mathematics

MDPI

Article

Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching Early Algebra: A Systematic Review from the MKT Perspective

Nataly Pincheira * and Ángel Alsina

Department of Subject-Specific Didactics, Faculty of Education and Psychology, University of Girona, 17004 Girona, Spain; angel.alsina@udg.edu

* Correspondence: nataly.pincheira@udg.edu

Abstract: The mathematical knowledge for teaching (MKT) model emerged from the advances proposed by Shulman in 1986 and 1987 as part of the teacher's professional knowledge model, and refers to the mathematical knowledge that the teacher employs to carry out the instruction process in the classroom. MKT has become an international benchmark for research into mathematics education and boasts a great scope and impact to date. The objective of this study is to conduct a systematic review of the way in which the MKT of early algebra teachers has been conceptualized and empirically studied in the scientific literature from 2010 to 2021. A systematic search in the Web of Science and Scopus databases led to a review of 17 papers. The results show great advances in the conceptualization of mathematical knowledge for teaching early algebra, focusing mainly on primary education teachers and on specialized knowledge of the content. In turn, there is a predominance of studies that address functional thinking as a content area. We conclude that more empirical studies are needed that address the mathematical knowledge that childhood and primary education teachers have of early algebra.

Keywords: mathematical knowledge; teachers; systematic review; early algebra; childhood and primary education

Citation: Pincheira, N.; Alsina, Á. Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching Early Algebra: A Systematic Review from the MKT Perspective. *Mathematics* **2021**, *9*, 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Academic Editor: Luis Carlos Contreras-González

Received: 22 September 2021
Accepted: 13 October 2021
Published: 15 October 2021

1. Introduction

The professional knowledge of teachers has been a topic of interest in the field of mathematics education in recent decades [1]. Llinares [2] notes that the research agenda into mathematics education on the professional development of teachers is very prolific (e.g., [3,4]), since it positively impacts the quality of teaching and the performance of students [5,6]. According to Chapman [7], "it is not only important what mathematics teachers know but also how they know it and what they are able to mobilize for teaching" (p. 295). The latter has brought with it the development of research on the knowledge of mathematics teachers [8], approached from different specific themes, such as problem-solving (e.g., [9]), geometry (e.g., [10]), and others.

The review of a series of studies on the learning and knowledge of pre-service mathematics teachers carried out by Ponte and Chapman [11] highlights the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) proposed by Ball, Thames and Phelps [12] defined as "the mathematical knowledge that teachers uses in the classrooms to produce instruction and student growth" [13] (p. 374). As a result, the theoretical tools provided by the model have expanded in scope and created a large impact on the research community.

In this context, the need arises to understand the characteristics of the mathematical knowledge required by teachers to meet the challenges and demands posed by today's childhood (three to six years old) and primary education (six to twelve years old) curricula (e.g., [14,15]), as in the case of early algebra, by incorporating knowledge of an algebraic nature from the first levels of schooling as an additional content standard [16].

Early algebra responds to a new proposal for curricular change [17] in order to integrate modes of algebraic thinking from the initial stages of schooling [18,19], a process that Kaput [20] refers to as the algebrization of the curriculum, which implies it "would empower students, particularly by fostering a greater degree of generality in their thinking and an increased ability to communicate that generality" [21] (p. 58).

The development of early algebra has been reflected mainly in studies with childhood and primary education students (e.g., [22–25]). However, it is essential to analyze experiences that involve the teachers who educate these students [26], since they are essential to implementing the change to early algebra teaching from the first years of schooling.

Consequently, considering the importance and role of teacher knowledge in student learning [27] and the potential for the development of algebraic thinking in the first years of schooling, it is necessary to pay attention to mathematical knowledge for teaching. This requires knowing the contributions of the studies and literature that have supported the development of this research agenda.

Strand and Mills [28] conducted a review of the literature from 1998 to 2012 on the knowledge of mathematical content for teaching early algebra in primary education, analyzing 21 research papers. The results show that primary education teachers exhibit procedural skills for determining patterns. However, they have problems interpreting algebraic symbols, graphical representations and solving algebraic problems. Our intention is to continue investigating in this direction to provide updated data that can be used to investigate the advances made in the conceptualization of MKT for early algebra, the goal being to offer a general panorama that comprises a framework of empirical knowledge and challenges to address in future research.

The objective of our study is to conduct a systematic review of the way in which the MKT of Early Algebra teachers has been conceptualized and empirically studied in scientific production from 2010 to 2021. To do so, we will analyze general aspects of each scientific production, such as: author(s), year and country in which the research was carried out, and objectives. We will then focus on more specific aspects, such as the domains and subdomains of the MKT model that is addressed, specific areas of algebraic content, the nature of the participants, research method and the main results that are presented.

2. Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

The contributions of Shulman [29] on teacher knowledge reveal the importance of content knowledge for teaching, defined as "the amount and organization of knowledge per se in the mind of the teacher" (p. 9), and pedagogical knowledge as "the particular form of content knowledge that embodies the aspect of content most germane to its teachability" (p. 9). This has given way to the study and development of other models derived from Shulman's [29,30] in this area specific for mathematics teachers [12,31–33], showing that content knowledge is more effective in teaching when it is combined with pedagogical knowledge [8,34].

Ball et al. [12], based on the knowledge framework proposed by Shulman [29,30], identified the essential elements of knowledge to teach mathematics and developed the mathematical knowledge for teaching (MKT) model, described as "the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics" [12] (p. 395).

Based on an analysis of teacher practices, Ball et al. [12] determined the mathematical demands of teaching that would later make up the model's components, providing an empirical basis for the positive relationship that constitutes the pedagogical knowledge of teachers and the learning outcomes of students. Accordingly, the MKT model establishes a domain map of mathematical knowledge for teaching that considers content knowledge and pedagogical content knowledge.

Content knowledge is subdivided into three aspects: common content knowledge (CCK), which refers to the "mathematical knowledge and skill used in settings other than teaching" [12] (p. 399), meaning it corresponds to the knowledge that can be achieved throughout the educational levels and that anyone who faces a mathematical task possesses; specialized content knowledge (SCK), which refers to "mathematical knowledge and skill unique to teaching" [12] (p. 400), meaning knowledge that is specific to the teacher and that is used to engage in teaching tasks related to "how to accurately represent mathematical ideas, provide mathematical explanations for common rules and procedures, and examine and understand unusual solution methods to problems" [13] (pp. 377–378); and knowledge of the mathematical horizon, which is defined as "awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum" [12] (p. 403), meaning the knowledge that allows the teacher to establish the way in which the mathematical contents are related to other contents of the curriculum.

A pedagogical knowledge of the content considers: the knowledge of the content and the students (KCS), which is defined as the "content knowledge intertwined with knowledge of how students think about, know, or learn this particular content" [13] (p. 375), i.e., it is the knowledge that the teacher has about the knowledge of the students, letting the teacher predict situations and anticipate the concerns, attitudes or difficulties of the students; knowledge of content and teaching (KCT), "combines knowledge about teaching and knowing about mathematics" [12] (p. 401), meaning knowledge that integrates specific mathematical knowledge and pedagogical and didactic aspects of the teaching processes involved in student learning; and, finally, knowledge of the curriculum, "represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level, and the variety of instructional materials available in relation to those programs" [12] (p. 391) meaning it refers to the orientations and approaches corresponding to the study programs designed for each educational level in the area of mathematics, together with the instructional materials.

The theoretical implications provided by the MKT model [13] allow us to categorize the knowledge that a teacher must manifest during the exercise of their teaching practice to teach mathematics.

Early Algebra

The teaching of early algebra in childhood and primary education has been consolidated in recent years, as there is a growing consensus of researchers to provide learning experiences that promote the development of algebraic thinking from the earliest levels [35–38].

Early algebra seeks to promote thinking habits in classrooms that reflect the structure that underlies mathematics [35]. That is, it concerns a way of thinking and acting with mathematical objects, relationships, structures and situations to promote teaching that is grounded in mathematics [39].

Incorporating algebra early in childhood and primary education requires accommodating a broad conception of algebra in order to achieve the development of algebraic thinking. According to the literature, the understanding of patterns, number relationships and functions are some of the fundamental elements that contribute to this process [40,41].

Papic, Mulligan, and Mitchelmore [24] note that algebraic thinking starts to develop in the childhood education stage through the process of generalization. Carraher, Martínes, and Schliemann [42] state that to address mathematical generalization, it is necessary to start by identifying mathematical patterns and relationships. In this way, patterns contribute to the development of mathematical representation and abstraction and provide an essential foundation for the development of early algebraic thinking [43].

Therefore, generalization and the search for regularities form a central aspect in the development of algebraic thinking in the early years [44].

Along these same lines, Kaput [45] notes that algebraic thinking develops from an awareness of the structural relationships of arithmetic patterns and structure, suggesting three basic areas of algebraic content: generalized arithmetic, functional thinking, and the application of generalizations as a modeling language.

Generalized arithmetic refers to the relationships between numbers, the properties of operations, the equal sign, equivalence, and variables. By developing this line of content, students can understand the properties of numbers and their operations, and thus perform calculations and analyze how the operations are related to one another [46,47]. In turn, students are expected to use variable notation in a meaningful way to represent arithmetic properties, expressions, and equations [48].

Functional thinking considers the generalization of the relationships between co-variable quantities, numerical and figurative patterns, functions, and algebraic expressions. On the one hand, students gradually learn to determine patterns, describe the change in a sequence of values, and identify how two quantities co-vary [46]. On the other hand, functional thinking promotes the algebraic activity linked to the process of generalization and of representing relationships between quantities [49].

Generalization as a modeling language refers to the description of regularities that occur implicitly during the development of mathematical situations or phenomena. This area of content allows students to identify regularities and select appropriate models for solving various mathematical situations.

Finally, another of the key elements to promote algebraic thinking that stands out in the literature is relational thinking. This refers to the structural sense of the relationships between the elements of an arithmetic expression and the properties of operations [23,50].

3. Methodology

In keeping with our study objective, we relied on a systematic review methodology [51], which is an explicit and replicable search strategy with studies based on predetermined criteria [52]. In our case, the studies involved the mathematical knowledge of childhood and primary education instructors for teaching early algebra.

When conducting the research, we considered the criteria and procedures of the quality standards of the PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic reviews and Meta-Analyses) statement, proposed by Urrutia and Bonfill [53] for systematic reviews, such as: eligibility criteria, sources of information, search and selection of studies, data extraction process, listing of data, and summary of results.

The following phases were employed to carry out the systematic review:

Phase 1. Establish the search elements

The search elements were formulated from the key terms that guide our study. To establish the concepts, three central ideas were considered: the knowledge of the teachers as per the MKT model, the main content areas from early algebra taken from the literature, and the teacher participants considered in the study. These concepts generated the search elements, as shown in Table 1.

Table 1. Search elements.

Key Terms	Concepts
Teacher knowledge	Mathematical knowledge for teaching Teacher knowledge
Content areas derived from early algebra	Algebra Algebraic reasoning "OR" algebraic thinking Pattern generalization Functional thinking
Participants	Primary teacher Elementary teacher Early childhood teacher

Phase 2. Select the sources of information

For the source of information, we consulted databases that include scientific production on an international level that is more relevant in the field of educational research, such as: Web of Science (WOS) by Clarivate Analytics, and Scopus by Elsevier, given the index of impact they constitute (JCR and SJR, respectively), and the implication of the indexing of scientific articles in journals that fall under these parameters.

Phase 3. Establish eligibility (inclusion and exclusion) criteria

The following inclusion criteria were established: (a) academic papers, as we want to ensure that only papers published in scientific journals that have undergone a rigorous peer-review process are considered; (b) publications in English since it is the universal language of scientific research, Spanish because it is the authors' first language, or Portuguese to ensure a greater geographic range of studies; (c) publication period 2010–2021; and (d) full text of the papers available for review.

The exclusion criteria were as follows: (a) book chapters, conference proceedings, books or other types of publications; (b) access to the publication restricted or not available for review; (c) bibliographic and editorial reviews, duplicate papers, or other systematic reviews; (d) papers in languages other than English, Spanish, or Portuguese; (e) papers whose structure does not allow for the analysis proposed, such as essays, reviews, etc.

Phase 4. Data extraction and processing to establish the sample

The data were extracted and processed in May 2021, as follows: (1) an initial search was carried out in the databases by combining the key concepts established in the initial phase using the "AND" connector. The key concepts were applied to the title of the paper, the abstract and keywords; (2) the inclusion and exclusion criteria were applied to the academic papers that were filtered by the search engines; and (3) the results were filtered by a language review, followed by title review. If the title of the paper did not provide sufficient clarity to apply these criteria, the abstracts were reviewed. Finally, the papers were filtered for duplicates to yield the study sample.

3.1. Sample

The search process allowed us to establish the study sample, consisting of 17 academic papers that constitute our analysis units, as seen in Figure 1.

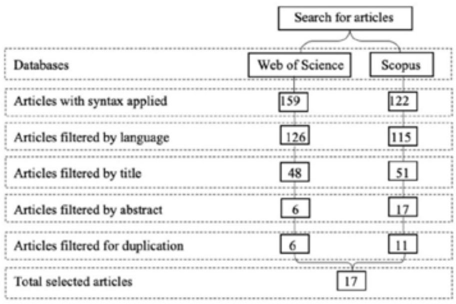


Figure 1. Methodological outline of the PRISMA-type systematic review process.

The papers selected, published between 2010 and 2021, correspond to empirical studies (quantitative and/or qualitative) based on the MKT of early childhood and primary education teachers involving early algebra.

3.2. Analysis Categories

To address our study objective, we defined a series of categories that allowed us to consider and delve into the analysis of the selected scientific productions on the MKT for early algebra. The analysis categories established were: (a) author(s), year and country in which the study was conducted, which can be used to place each paper chronologically and geographically; (b) research goal; (c) domains and subdomains of the MKT model measured by the research; (d) area of algebraic content detailed in the research; (e) the nature of the participants; (f) research method used to investigate the MKT; and (g) the main findings presented.

3.3. Data Analysis

Having established the sample, the data were analyzed by reading each research paper exhaustively. To this end, the analysis categories established were applied using the content analysis technique [54], and the information was recorded and encoded in a data analysis template made using Excel. This last step made it possible to carry out a descriptive analysis of the data by preparing analysis tables for the qualitative information extracted from the review of the selected paper. Initially, a vertical analysis, or analysis within the case [55], was carried out of each of the 17 research papers that constitute our analysis unit in order to obtain a general categorization of each study. We then conducted a horizontal or cross-sectional analysis [55], which established comparisons between the research papers that make up the sample to search for systematic similarities and differences.

It should be noted that the data coding work considered a process of successive cyclical and inductive reviews of the research articles that make up the study sample. This process was carried out by the first author, and was supervised and reviewed by the second author.

4. Results

The results of our study consider the analysis of 17 research papers published between 2010 and 2021 that investigate the mathematical knowledge of early childhood and primary education teachers for teaching early algebra from the perspective of the MKT model.

4.1. Categorization of the Papers That Analyze Mathematical Knowledge for Teaching Early Algebra

For the selected articles, we identified the country in which the research was carried out and the objective of the study. The latter will give us an insight into the conceptualization of MKT for early algebra by identifying the intentions that spurred each research effort. We subsequently identified the nature of the participants corresponding to the teaching staff who are the subject of study, be it early childhood or primary education, pre-service or in service.

Finally, we have coded the domains and subdomains of the MKT model to which they correspond, namely: common content knowledge (CCK), specialized content knowledge (SCK), mathematical horizon knowledge (MHK), knowledge of content and students (KCS), knowledge of content and teaching (KCT), and knowledge of the curriculum (CK), as shown in Table 2.

The selected studies took place mainly in the United States, followed by Australia and Brazil. It should be noted that only one study was found involving collaboration between two countries (Spain-Portugal).

In terms of the conceptualization of mathematical knowledge, we observed a preference for conducting research aimed at understanding the mathematical knowledge that teachers demonstrate for teaching a specific area of algebraic content (around three-fourths of the studies analyzed).

An incipient number of studies (about a quarter) investigates professional development and its effect on teaching based on the mathematical knowledge that educators demonstrate when teaching early algebra. Finally, there is only one study that proposes developing an instrument to measure the mathematical knowledge of teachers, more specifically, pedagogical knowledge.

Regarding the nature of the participants, more than two-thirds of the studies involved mainly primary education teachers, of whom three were pre-service teachers and ten in-service. A low number of studies involved early childhood education teachers, whether pre-service or in-service.

Of note is the fact that only two of the seventeen studies address both types of participants, both early childhood education and primary teachers, pre-service.

Table 2. Categorization of the papers (2010–2021) on the MKT for teaching early algebra.

Author(s)/Country	Objective	Early Childhood Education Teachers	Primary Education Teachers	Pre-Service	In Service	Content Knowledge			Pedagogical Knowledge of the Content		
						CCK	SCK	MHK	KCS	KCT	CK
Bair and Rich [56], United States	Characterize the development of specialized knowledge for teaching algebraic reasoning and number theory.	x	x	x			x				
Dash et al. [57], United States *	Investigate the effects of professional development on the pedagogical content and practices of fifth-grade teachers.		x		x						
McAuliffe and Lubben [58], South Africa	Examine the content knowledge of a teacher pre-service for teaching early algebra.		x	x			x				
Wilkie [59], Australia	Analyze the mathematical knowledge of Primary Education teachers for teaching functional thinking.		x		x		x		x	x	x
Trivilin and Ribeiro [60], Brazil	Understand what knowledge teachers announce and demonstrate involving the different meanings of the equal sign.		x		x	x	x				x
Wilkie and Clarke [61], Australia	Analyze the perspectives of late primary school teachers involving their knowledge and practice of algebra.		x		x				x	x	
Kosko [62], United States **	Explore whether elementary teachers chose probing questions, given two hypothetical math lesson scenarios.		x		x						
Wilkie [63], Australia	Research the professional learning of second cycle primary school teachers to develop the functional thinking of their students through pattern generalization.		x		x		x		x	x	x
Di Bernardo et al. [64], Italy	Access the knowledge of future teachers to recognize and interpret student output in the context of algebraic thinking.	x	x	x		x	x				
Ferreira, Ribeiro and Ribeiro [65], Portugal	Identify and discuss the MKT revealed by a group of teachers when discussing tasks aimed at improving algebraic thinking.		x		x	x	x		x		
Zapatera and Callejo [66], Spain	Study the relationship between mathematical knowledge and teaching skills in the context of pattern generalization.		x	x		x	x				
Heck et al. [67], United States	Examine the learning outcomes of teachers when they participate in different formats of professional learning experience courses to teach early algebra.		x		x	x			x		

Table 2. *Cont.*

Author(s)/Country	Objective	Early Childhood Education Teachers	Primary Education Teachers	Pre-Service	In Service	Content Knowledge			Pedagogical Knowledge of the Content		
						CCK	SCK	MHK	KCS	KCT	CK
Noviyanti and Suryadi [68], Indonesia	Analyze the basic mathematical knowledge of Early Childhood Education teachers.	x			x	x	x				
Gasteiger et al. [69], Germany *	Propose an instrument to measure the pedagogical knowledge of the mathematical content of Early Childhood Education teachers from a cognitive perspective and from a situated.	x		x	x						
Souza, Ribeiro and Pazuch [70], Brazil	Identify how professional learning tasks, based on teaching practice, contribute to the mobilization and expansion of the algebraic thinking of Primary Education teachers, in relation to the different meanings of the equal sign.		x		x		x		x	x	
Oliveira, Polo-Blanco and Henríquez [71], Spain-Portugal	Understand what aspects of functional thinking are exhibited by future Spanish and Portuguese Primary Education teachers at the beginning of their teacher training program.		x	x			x				
Souza, Pazuch and Ribeiro [72], Brazil	Understand how the construction of mathematical and didactic knowledge of teachers who teach primary school mathematics occurs about the different meanings of the equal sign.		x		x	x	x	x	x	x	

* Refers to pedagogical knowledge without specifying a subdomain. ** Does not refer to a specific subdomain.

When comparing the studies, we see that the majority involve both content knowledge and pedagogical content knowledge, which implies delving into more than one subdomain of mathematical knowledge (MKT). In other words, the research allows inquiring into various aspects of the mathematical knowledge and teacher classroom instruction for teaching early algebra (for example, solving and interpreting an algebraic task, identifying teaching strategies, understanding possible student errors, among others).

Moreover, if we consider the conceptualization of MKT, almost all of the studies inquire into specialized content knowledge (SCK), while only half of these inquire into common content knowledge (CCK) and knowledge of content and students (KCS). There is a lower proportion of studies that inquire into the knowledge of content and teaching (about a quarter). Finally, less than a quarter of the research we analyzed addressed the subdomains of knowledge of the curriculum and the mathematical horizon.

To investigate the different subdomains of the MKT model, the studies analyzed the essential aspects that characterize them, as described below:

In general, the studies that delve into common content knowledge (CCK) involve teachers directly in solving mathematical tasks in an early algebra content area: for example, the representation of equality in mathematical expressions (e.g., [60,70]); solving first-degree equation problems (e.g., [64,67]); or the generalisation of patterns (e.g., [66]). These studies show a lack of mastery of algebraic content and reasoning, difficulties in recognising the different mathematical meanings of the equal sign and difficulties in obtaining the general rule of a growth pattern.

Regarding the subdomain of specialized content knowledge (SCK), the studies focus on aspects of knowledge typical of teachers. Bair and Rich [56], for example, investigate the ability of teachers to explain and justify mathematical ideas that involve the development of algebraic thinking. McAuliffe and Lubben [58] focus on the explanations provided by teachers regarding the selection of examples, representations, and modifications of an algebraic task. Wilkie [59,63] and Wilkie and Clarke [61] consider the possible correct answers that teachers provide to questions that arise over the course of a certain algebraic task, and they identify recursive and explicit generalization strategies.

Bair and Rich [56] show that teachers can make progress in analyzing specific aspects of an algebraic task by identifying and discussing the concepts involved in the task after its completion. McAuliffe and Lubben [58] report good knowledge of representations for teaching patterns (use of concrete manipulatives, function tables and flowcharts), while explanations about the selection of examples to describe the relationships leading to generalization are not always considered successful. Wilkie [59,63] and Wilkie and Clarke [61] find that teachers can identify strategies for generalizing a linear growth pattern, but have difficulties in representing the generalizations symbolically.

The studies by Di Bernardo et al. [64], Trivilin and Ribeiro [60], Souza, Ribeiro and Pazuch [70], Oliveira, Polo-Blanco, and Henríquez [71] focus on how teachers interpret the processes of solving an algebraic task or algebraic content area. Evidence has been found of difficulties in assigning the semantic meaning involved in solving a task, such as the meaning of division in the performance of an equal sharing task (e.g., [64]), the meaning of equivalence of the equal sign in a mathematical expression (e.g., [60,70]) and difficulties in interpreting variables, relationships between variables, and connections between function representations (e.g., [71]).

Ferreira, Ribeiro, and Ribeiro [65] consider how teachers understand and identify a mathematical situation that contains an error, especially the source and the reasons that lead to the occurrence of this error [72]. Finally, Zapatera and Callejo [66] focus on identifying significant mathematical elements that are evident in the performance of an algebraic task.

The study conducted by Souza, Pazuch, and Ribeiro [72] investigates the knowledge of the mathematical horizon through the relationships that teachers establish involving relational thinking in early school years and its impact on later school years.

By contrast, studies that delve into the subdomain of knowledge of content and students (KCS), such as the study by Wilkie [59], focus on how teachers understand the possible errors that students can make when performing an algebraic task. The studies carried out by Wilkie [63], Ferreira, Riberiro, and Ribeiro [65], Souza, Ribeiro, and Pazuch [70], and Souza, Pazuch, and Ribeiro [72] analyze situations that allows teachers to anticipate what the students think and the difficulties they may experience in an algebraic task.

The studies that consider the subdomain of knowledge of content and teaching (KCT) address how teachers identify suitable teaching strategies for exploring functional relationships [59,61], and examples of learning experiences appropriate for the development of algebraic thinking [63,70,72].

The subdomain of knowledge of the curriculum is covered in the studies undertaken by Wilkie [59] and Wilkie [63] when inquiring into teachers' understanding of the curriculum and its impact on decision-making involving learning experiences related to early algebra. Trivilin and Ribeiro [60] study how teachers approach the inclusion of the meanings of the equal sign in the curriculum.

4.2. Areas of Algebraic Content and Research Method Used to Investigate the MKT for Early Algebra

Table 3 shows the area of mathematical content that the studies in our data set address, the level of schooling in which they focus in order to investigate the mathematical knowledge, as well the number of participants (*N*) present in each study and the research method used to inquire into the mathematical knowledge of early childhood and primary education teachers involving the teaching of early algebra.

Table 3. Areas of mathematical content addressed in the studies and research methods used to investigate mathematical knowledge for teaching early algebra.

Studies	Area of Content	Early Childhood Education	Primary Education	*N*	Questionnaire	Survey	Interview	Class Obs.	Meeting	Documentary Records
Bair and Rich [56]	AR/T	x	x	>5000						x
Dash et al. [57]	AR/T		x	79	x					
McAuliffe and Lubben [58]	FT		x	1				x		
Wilkie [59]	FT		x	105	x					
Trivilin and Ribeiro [60]	RT		x	10	x		x			
Wilkie and Clarke [61]	FT		x	10	x		x			x
Kosko [62]	FT		x	45		x				
Wilkie [63]	FT		x	10	x	x		x		
Di Bernardo et al. [64]	AR/T	x	x	60	x					
Ferreira, Ribeiro and Ribeiro [65]	GA		x	14					x	x
Zapatera and Callejo [66]	FT		x	40	x					
Heck et al. [67]	AR/T		x	205	x				x	
Noviyanti and Suryadi [68] *	FT	x		35			x	x		
Gasteiger et al. [69] **	FT	x		149	x					
Souza, Ribeiro and Pazuch [70]	RT		x	6	x				x	
Oliveira, Polo-Blanco and Henríquez [71] ***	FT		x	164	x					
Souza, Pazuch and Ribeiro [72]	RT		x	6					x	x

* Number sense (patterns), Geometry and Measurement. ** Numbers, Magnitudes and Patterns. *** 94 pre-service teachers from Spain and 70 from Portugal.

The content areas considered for the analysis are those explicitly declared in the studies, such as: algebraic reasoning or thinking (AR/T), generalized arithmetic (GA), functional thinking (FT), and relational thinking (RT).

There is a greater predominance of studies that involve functional thinking, and more specifically, the development of patterns and functions. They are followed by studies that focus on general algebraic reasoning or algebraic thinking. A lower number of studies address relational thinking and the generalization of arithmetic.

Now, if we look at the levels of schooling, we notice that the contextualized studies in early childhood education focus on the development of algebraic thinking, and more specifically on functional thinking through patterns. While in primary education, the content areas are expanded, reaching the development of generalized arithmetic and relational thinking.

Another important aspect to note is that two of the studies that focus on early childhood education (e.g., [68,69]) propose analyzing the mathematical knowledge of teachers through a broad conception of the area of mathematical content, meaning these are studies that address aspects of general mathematical content. However, early algebra is addressed as a content area within the study.

In terms of the conceptualization of mathematical knowledge for teaching early algebra, the studies that analyze algebraic thinking or reasoning at a general level do so by solving mathematical problems that require the representation of quantities and modeling through first-order equations [56,64]. Dasch et al. [57] address this content area by exploring activities such as the representation and use of mathematical models to understand algebraic relationships.

Ferreira, Ribeiro, and Ribeiro [65] deal with generalized arithmetic through numerical relationships, the properties of numbers and operations, and the meaning of the equal sign as an equivalence relationship.

Regarding the studies that address the content area linked to functional thinking, for example Gasteiger et al. [69] and Noviyanti and Suryadi [68] focus on pattern identification and representation, while the studies conducted by Wilkie [59,63], Wilkie and Clarke [61], Zapatera and Callejo [66] advance towards the generalization of growth patterns. The studies done by McAuliffe and Lubben [58] and Oliveira, Polo-Blanco, and Henríquez [71] address the generalization of functional relationships, the relationship and interpretation of independent and dependent variables.

Finally, an in-depth analysis of relational thinking is reflected in the studies of Trivilin and Ribeiro [60], Souza, Ribeiro, and Pazuch [70] and Souza, Pazuch, and Ribeiro [72] through the meanings of the equal sign (operational, equivalence and relational).

By contrast, if we look at the research methods used to investigate the mathematical knowledge of teachers involving early algebra, we see that these are largely related to the number of participants. In general terms, when comparing the studies, two different types of research are evident: that conducted on a larger scale that mainly prioritizes the use of questionnaires, and that carried out on a smaller scale that normally uses surveys, interviews, class observation and meetings to ascertain the MKT.

Table 3 shows a predominance of studies that rely on questionnaires. The research where teachers collaborate for professional learning is more situated in this type of data collection instrument, through the items and questions posed to teachers. This last method places the educators in a context of teaching various content areas of early algebra with the purpose of demonstrating and describing the components of mathematical knowledge that they reveal through their answers, either when solving mathematical tasks, interpreting student output or making decisions in teaching situations.

4.3. Key Findings

As mentioned in Section 4.1, a large number of the studies analyzed (more than three-quarters) are aimed at understanding the MKT for a specific area of algebraic content. As a whole, these studies declare that the teachers, both in early childhood and primary education, exhibit a lack of mastery of mathematical knowledge to teach early algebra. There are limitations in the pedagogical knowledge of the content (for example, the difficulty that teachers have helping students shift from focusing solely on the number pattern to focusing simultaneously on the function (e.g., [58])), and provide examples of learning experiences based on the development of functional thinking that is suitable for students (e.g., [59]).

Other studies reveal the limitations in the knowledge of the content, such as the recognition of the different mathematical meanings of the equal sign (e.g., [60]); solving algebraic tasks mainly by trial and error, not paying attention to the structure of the problem and the knowledge involved in developing algebraic thinking (e.g., [64]); difficulties solving problems involving the generalization of patterns related to the discrimination of strategies in the use of proportionality, explanation of a growth pattern and obtaining a general rule (e.g., [66,68]); ignorance of the central issues that the characterization of and working with algebraic thinking imply, such as solving mathematical problems that require the representation of unknown quantities (e.g., [56]) and the case of the generalization of arithmetic with the properties of numbers, the operations and the meaning of the equal sign as equivalence (e.g., [65]); and a lack of strategies for generalizing functional relationships, and problems understanding and connecting the different representations of functions (e.g., [71]).

However, some studies report notable progress in the development of mathematical knowledge including improved relational thinking with the resignification by teachers of the equal sign, moving from the operational to the equivalence and the relational [70], understanding the meaning of the equivalence of the equal sign [72], and increased knowledge related to functional thinking, when transitioning from a written description to a symbolic expression of an explicit generalization [63].

Moreover, fewer than a quarter of the studies investigate professional development and its effect on teaching practice based on the MKT for early algebra showing a relevant increase in the knowledge of pedagogical content and teaching practices related to early algebra, although this does not translate into considerable differences in student performance (e.g., [57]). Heck et al. [67] reveal that teachers achieve a more sophisticated understanding of ways to use context to engage students with ideas in early algebra. Another result of note corresponds to the study proposed by Wilkie and Clarke [61], where the teachers' lack of mastery of mathematical knowledge to address the development of functional thinking leads to discomfort when the students pose questions during a class. The study proposed by Kosko [62] shows that teachers who select probing questions tend to have greater mathematical knowledge or a greater willingness to support student autonomy, but not both.

Finally, in the study proposed for developing an instrument to measure the mathematical knowledge of early childhood education teachers, and more specifically, pedagogical knowledge [69], we will refer only to the results of the items related to early algebraic knowledge. The application of the instrument reveals the teachers' misunderstanding of the mathematical term 'regular pattern', leading to erroneous situations in the context of teaching experiences.

5. Final Considerations

This study conducted a systematic review of the way in which the scientific literature produced between 2010 and 2021 in English, Spanish, and Portuguese has conceptualized and empirically studied the mathematical knowledge that early childhood and primary education teachers have of early algebra, from the perspective of the mathematical knowledge for teaching (MKT) model.

We conducted a systematic search of two databases, Web of Science and Scopus, which yielded a total of 17 research articles that we included in our analysis.

Our review of the research articles shows the great advances in recent years in the conceptualization of MKT, for both teachers pre-service and in service, for teaching this content block. However, we agree with Doerr [73] on "the lack of a substantial body of research on teachers' knowledge and practice in the teaching of algebra" (p. 268).

As concerns the conceptualization of mathematical knowledge, we see that while most of the studies focus on understanding the MKT that is demonstrated when teaching a specific area of algebraic content, only a few studies have addressed the relationship between the mathematical knowledge that teachers have in these content areas and the learning outcomes or interactions with students.

Also, of note is the fact that the experiments in the studies involved mostly primary education teachers, which makes it imperative to conduct empirical studies that involve early childhood education teachers, whether pre-service or in service, given their importance in the development of early algebra from the earliest ages of schooling [26].

Another important aspect to underscore in the conceptualization of the MKT is that the studies, by investigating areas of specific knowledge of early algebra, focused on the development of functional thinking. In the context of early childhood education, for example, teachers are only placed in content areas that involve functional thinking, more specifically, patterns. However, other elements that support the development of algebraic thinking in this school stage are neglected, such as establishing relationships (selecting, classifying, ordering) by recognizing object attributes, using concrete, pictorial and verbal representations to analyze situations, and analyzing change in diverse contexts [15]. Regarding primary education teachers, while the researchers made an effort to address all areas of algebraic content, there are still few studies that delve into the generalization of arithmetic. Therefore, we consider it important to conduct studies that investigate these content areas.

Our systematic review shows that the studies can be used to investigate, in different levels of detail, the mathematical knowledge and the classroom instruction of the teachers for teaching early algebra, with specialized content knowledge (SCK) being addressed the most in the studies.

The main conclusions found in the analysis of the studies show similarities with respect to the difficulties that teachers exhibit when tackling tasks of an algebraic nature that were identified in other systematic reviews (e.g., [28]).

The results of the systematic review are relevant in the context of teacher training and mathematics education, since they provide an expanded and updated perspective of how the MKT for early algebra has developed, and they identify the challenges that must be addressed by training programs in the future, such as delving into content areas that promote algebraic thinking and the development of adequate mathematical knowledge to implement teaching practices that achieve effective learning of early algebra, since there are still few studies that provide these guidelines [74].

We conclude that a greater number of empirical studies is needed that address the mathematical knowledge of early childhood and primary education teachers for teaching early algebra. These studies need to expand their scope to consider not only the MKT, but also the impact on professional development and teaching practice.

Regarding the limitations of the research, they are related to the bias that could be caused by the selection criteria used to constrain the data set of our study. More specifically, it is possible that by excluding book chapters and conference proceedings, some research documents that may be relevant have not been considered. In addition, the search terms that had to appear in the title, abstract and/or keywords, and the language could also lead to the suppression of some relevant studies that address the mathematical knowledge of teachers involving early algebra. Thus, in the future, it will be necessary to design new systematic reviews that expand both the nature of the documents analyzed and the languages of publication in order to more precisely refine the data obtained so far.

Author Contributions: Conceptualization, N.P. and Á.A.; methodology, N.P.; investigation, N.P.; data analysis, N.P.; writing original draft, N.P.; review and editing, Á.A.; supervision, Á.A. All authors have read and agreed the published version of the manuscript.

Funding: This research has received external funding from the Department of Subject-Specific Didactics and the Institute of Educational Research (IRE) of the University of Girona.

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: Not applicable.

Acknowledgments: This research was supported by the National Agency for Research and Development of the Government of Chile (ANID) through a PhD scholarship abroad, Folio No. 72200447.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Ponte, J.P. Studying mathematics teachers' knowledge and professional development. In *Theory, Critique and Practice of Mathematics Education*; Planas, N., Ed.; Graó: Barcelona, España, 2012; pp. 83–98.
2. Llinares, S. Research agendas in mathematics education in Spain. An approach from "ISI-web of knowledge" and ERIH. In *Research in Mathematics Education XII*; Luengo, R., Gómez, B., Camacho, M., Blanco, L.J., Eds.; SEIEM: Badajoz, España, 2008; pp. 25–54.
3. Barrantes, M.; Blanco, L.J.; Scherer, P.; Steinbring, H. A Study of Prospective Primary Teachers' Conceptions of Teaching and Learning School Geometry. *J. Math. Teach. Educ.* **2006**, *9*, 411–436. [CrossRef]
4. Escudero, I.; Sánchez, V. A Mathematics Teachers' Perspective and its Relationship to Practice. *Int. J. Sci. Math. Educ.* **2007**, *6*, 87–106. [CrossRef]
5. Cohen, D.K.; Hill, H.C. *Learning Policy*; Yale University Press: New Haven, CT, USA, 2001.
6. Lane, K.L.; Oakes, W.P.; Powers, L.; Diebold, T.; Germer, K.; Common, E.A.; Brunsting, N. Improving Teachers' Knowledge of Functional Assessment-based Interventions: Outcomes of a Professional Development Series. *Educ. Treat. Child.* **2015**, *38*, 93–120. [CrossRef]
7. Chapman, O. Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. *Res. Trends Math. Teach. Educ.* **2014**, 295–309. [CrossRef]
8. Hill, H.C.; Rowan, B.; Ball, D.L. Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *Am. Educ. Res. J.* **2005**, *42*, 371–406. [CrossRef]
9. Van Dooren, W.; Verschaffel, L.; Onghena, P. The Impact of Preservice Teachers' Content Knowledge on Their Evaluation of Students' Strategies for Solving Arithmetic and Algebra Word Problems. *J. Res. Math. Educ.* **2002**, *33*, 319. [CrossRef]
10. Adaptation of the Test Developed to Measure Mathematical Knowledge of Teaching Geometry in Turkey. *Int. J. Educ. Methodol.* **2019**, *5*. [CrossRef]
11. Ponte, J.P.; Chapman, O. Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 3rd ed.; English, L., Kirshner, D., Eds.; Taylor & Francis: New York, NY, USA, 2015; pp. 275–296.
12. Ball, D.L.; Thames, M.H.; Phelps, G. Content Knowledge for Teaching. *J. Teach. Educ.* **2008**, *59*, 389–407. [CrossRef]
13. Hill, H.C.; Ball, D.L.; Schilling, S.G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *J. Res. Math. Educ.* **2008**, *39*, 372–400. [CrossRef]
14. Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. The Australian Curriculum: Mathematics. Available online: https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/ (accessed on 22 May 2015).
15. NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*; The National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA, USA, 2000.
16. Pincheira, N.; Alsina, Á. Towards a characterization of early algebra from the analysis of the contemporary curricula of Early Childhood Education and Primary Education. *Educ. Mate* **2021**, *33*, 153–180. [CrossRef]
17. Molina, M. Proposal of a curricular change: Integration of algebraic thinking in elementary education. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **2009**, *3*, 135–156.
18. Cai, J.; Knuth, E. Early algebraization. In *A Global Dialogue from Multiple Perspectives*; Springer: Berlin, Germany, 2011.
19. Carraher, D.W.; Schliemann, A.D. Early algebra and algebraic reasoning. In *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*; Lester, F.K., Ed.; NCTM e IAP: Reston, VA, USA, 2007; pp. 669–705.
20. Kaput, J. *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum*; National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science: Dartmouth, MA, USA, 2000.
21. Lins, R.; Kaput, J. The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*; The 12th ICMI Study; Chick, H., Stacey, K., Vincent, J., Vincent, J., Eds.; The University of Melbourne: Melbourne, Australia, 2004; Volume 1, pp. 47–70.
22. Blanton, M.L.; Stephens, A.; Knuth, E.; Gardiner, A.M.; Isler-Baykal, I.; Kim, J.-S. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *J. Res. Math. Educ.* **2015**, *46*, 39–87. [CrossRef]
23. Molina, M.; Castro, E. Third Grade Students' Use of Relational Thinking. *Mathematics* **2021**, *9*, 187. [CrossRef]
24. Papic, M.M.; Mulligan, J.T.; Mitchelmore, M.C. Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *J. Res. Math. Educ.* **2011**, *42*, 237–268. [CrossRef]
25. Radford, L. Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking*, 4th ed.; Ubuz, B., Ed.; PME: Ankara, Turkey, 2011; pp. 17–24.
26. Kieran, C. Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of Research on the Pscyhology of Mathematics Education: Past, Present and Future*; Gutiérrez, A., Boero, P., Eds.; Sense Publishers: Rotterdam, The Netherlands, 2006; pp. 11–49.
27. Santagata, R.; Lee, J. Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: A study of novice elementary school teachers. *J. Math. Teach. Educ.* **2019**, *24*, 33–60. [CrossRef]

28. Strand, K.; Mills, B. Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on algebra. *Math. Enth.* **2014**, *11*, 385–432.
29. Shulman, L.S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educ. Res.* **1986**, *15*, 4–14. [CrossRef]
30. Shulman, L. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harv. Educ. Rev.* **1987**, *57*, 1–23. [CrossRef]
31. Fennema, E.; Franke, M. Teachers' knowledge and its impact. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*; Grouws, D.A., Ed.; Macmillan: New York, NY, USA, 1992; pp. 147–164.
32. Rowland, T.; Huckstep, P.; Thwaites, A. Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *J. Math. Teach. Educ.* **2005**, *8*, 255–281. [CrossRef]
33. Carrillo-Yañez, J.; Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L.C.; Flores-Medrano, E.; Escudero-Ávila, D.; Vasco, D.; Rojas, N.; Flores, P.; Aguilar-González, Á.; et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Res. Math. Educ.* **2018**, *20*, 236–253. [CrossRef]
34. Nolan, B.; Dempsey, M.; Lovatt, J.; O'Shea, A. Developing mathematical knowledge for teaching (MKT) for pre-service teachers: A study of students' developing thinking in relation to the teaching of mathematics. In Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics; Adams, G., Ed.; BSRLM: Dublin, Ireland, 2015; pp. 1–6.
35. Blanton, M.; Kaput, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *J. Resear. Math. Educ.* **2005**, *36*, 412–446.
36. Lüken, M.M.; Sauzet, O. Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Math. Think. Learn.* **2020**, *23*, 28–48. [CrossRef]
37. Radford, L. On the development of early algebraic thinking. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **2012**, *6*, 117–133.
38. Rittle-Johnson, B.; Zippert, E.L.; Boice, K.L. The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Child. Res. Q.* **2018**, *46*, 166–178. [CrossRef]
39. Carpenter, T.P.; Franke, M.L.; Levi, L. *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic y Algebra in Elementary School*; Heinemann: Portsmouth, UK, 2003.
40. Mason, J. Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In *Algebra in the Early Grades*; Kaput, J., Carraher, D.W., Blanton, M.L., Eds.; Routledge: New York, NY, USA, 2008; pp. 57–94.
41. Lee, K.; Ng, S.F.; Bull, R. Learning and solving algebra word problems: The roles of relational skills, arithmetic, and executive functioning. *Dev. Psychol.* **2018**, *54*, 1758–1772. [CrossRef]
42. Carraher, D.W.; Martinez, M.V.; Schliemann, A.D. Early algebra and mathematical generalization. *ZDM* **2007**, *40*, 3–22. [CrossRef]
43. Papic, M. An Early Mathematical Patterning Assessment: Identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Math. Educ. Res. J.* **2015**, *27*, 519–534. [CrossRef]
44. Mason, J.; Graham, A.; Johnston-Wilder, S. *Developing Thinking in Algebra*; Sage: London, UK, 2005.
45. Kaput, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In *Algebra in the Early Grades*; Kaput, J., Carraher, D.W., Blanton, M.L., Eds.; Routledge: New York, NY, USA, 2008; pp. 5–17.
46. Chimoni, M.; Pitta-Pantazi, D.; Christou, C. The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking. *J. Stud. Educ. Develop.* **2020**, *44*, 503–552. [CrossRef]
47. Bastable, V.; Schifter, D. Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In *Algebra in the Early Grades*; Kaput, J., Carraher, D.W., Blanton, M.L., Eds.; Routledge: New York, NY, USA, 2008; pp. 165–184.
48. Blanton, M.L.; Isler-Baykal, I.; Stroud, R.; Stephens, A.; Knuth, E.; Gardiner, A. Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educ. Stud. Math.* **2019**, *102*, 193–219. [CrossRef]
49. Blanton, M.L.; Kaput, J.J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education: A Global Dialogue from Multiple Perspective*; Cai, J., Knuth, E., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2011; pp. 5–23.
50. Stephens, M.; Ribeiro, A. Working towards algebra: The importance of relational thinking. *Relime* **2012**, *15*, 373–402.
51. Sánchez-Meca, J. How to conduct a systematic review and meta-analysis. *Aula Abier.* **2010**, *38*, 53–64.
52. Gough, D.; Thomas, J.; Oliver, S. Clarifying differences between review designs and methods. *Syst. Rev.* **2012**, *1*, 28. [CrossRef]
53. Urrútia, G.; Bonfill, X. PRISMA declaration: A proposal to improve the publication of systematic reviews and meta-analyses. *Med. Clínic.* **2010**, *135*, 507–511. [CrossRef]
54. Krippendorff, K. *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology*, 3rd ed.; Sage Publications: California, CA, USA, 2013.
55. Miles, M.B.; Huberman, A.M. *Qualitative Data Analysis*, 2nd ed.; Sage: Thousand Oaks, CA, USA, 1994.
56. Bair, S.L.; Rich, B.S. Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and Number Theory. *Math. Think. Learn.* **2011**, *13*, 292–321. [CrossRef]
57. Dash, S.; de Kramer, R.M.; O'Dwyer, L.M.; Masters, J.; Russell, M. Impact of Online Professional Development or Teacher Quality and Student Achievement in Fifth Grade Mathematics. *J. Res. Technol. Educ.* **2012**, *45*, 1–26. [CrossRef]
58. McAuliffe, S.; Lubben, F. Perspectives on pre-service teacher knowledge for teaching early algebra. *Perspect. Educ.* **2013**, *31*, 155–169.
59. Wilkie, K.J. Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *J. Math. Teach. Educ.* **2013**, *17*, 397–428. [CrossRef]
60. Trivilin, L.R.; Ribeiro, A.J. Mathematical knowledge for teaching different meanings of the equal sign: A study carried out with elementary school teachers. *Bolema Bole. de Educa. Matemá.* **2015**, *29*, 38–59. [CrossRef]

61. Wilkie, K.J.; Clarke, D. Pathways to professional growth: Investigating upper primary school teachers' perspectives on learning to teach algebra. *Austr. J. Teach. Educ.* **2015**, *40*, 87–118. [CrossRef]
62. Kosko, K.W. Primary teachers' choice of probing questions: Effects of MKT and supporting student autonomy. *Inter. Electron. J. Math. Educ.* **2016**, *11*, 991–1012.
63. Wilkie, K.J. Learning to teach upper primary school algebra: Changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Math. Educ. Res. J.* **2015**, *28*, 245–275. [CrossRef]
64. Di Bernardo, R.; Carotenuto, G.; Mellone, M.; Ribeiro, M. Prospective teachers' interpretative knowledge on early algebra. *Cader. De Pesqui.* **2017**, *24*, 208–222. [CrossRef]
65. Ferreira, M.C.N.; Ribeiro, M.; Ribeiro, A.J. Mathematical knowledge for teaching algebra at early years. *Zetetike* **2017**, *25*, 496–514. [CrossRef]
66. Zapatera, A.; Callejo, M.L. Mathematical knowledge and professional noticing of prospective teachers in the context of pattern generalization. Characterization of Profiles. *Revis. Complu. De Educa.* **2017**, *24*, 35–38. [CrossRef]
67. Heck, D.J.; Plumley, C.L.; Stylianou, D.A.; Smith, A.A.; Moffett, G. Scaling up innovative learning in mathematics: Exploring the effect of different professional development approaches on teacher knowledge, beliefs, and instructional practice. *Educ. Stud. Math.* **2019**, *102*, 319–342. [CrossRef]
68. Noviyanti, M.E.R.Y.; Suryadi, D.I.D.I. Basic Mathematics knowledge of early childhood teachers. *J. Eng. Sci. Technol.* **2019**, *1*, 19–27.
69. Gasteiger, H.; Bruns, J.; Benz, C.; Brunner, E.; Sprenger, P. Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: A standardized situation-related measurement approach. *ZDM* **2019**, *52*, 193–205. [CrossRef]
70. Barboza, L.C.D.S.; Ribeiro, A.J.; Pazuch, V. Primary School Teacher's Professional Learning: Exploring Different Meanings of the Equals Signal. *Acta Sci.* **2020**, *22*, 71–97. [CrossRef]
71. Oliveira, H.; Blanco, I.P.; Henriques, A. Exploring prospective elementary mathematics teachers' knowledge: A focus on functional thinking. *J. Math. Educ.* **2021**, *12*, 257–278. [CrossRef]
72. Souza, L.C.B.; Pazuch, V.; Ribeiro, A.J. Tasks for learning teachers who teach mathematics in the elementary school. *Zetetike* **2021**, *29*, 1–25. [CrossRef]
73. Doerr, H.M. Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*; The 12th ICMI Study; Chick, H., Stacey, K., Vincent, J., Vincent, J., Eds.; The University of Melbourne: Melbourne, Australia, 2004; Volume 1, pp. 267–290.
74. Hohensee, C. Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *J. Math. Teach. Educ.* **2015**, *20*, 231–257. [CrossRef]

4.2 Estudio [B]

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática*, *33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN
DOI: 10.24844/EM3301.06

Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria

Towards a characterization of early algebra from the analysis of the contemporary curricula of Early Childhood Education and Primary Education

Nataly Pincheira Hauck,[1] Ángel Alsina[2]

Resumen: En este artículo se analiza la incorporación del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile. A partir del método de análisis de contenido se ha realizado un estudio comparativo y se han establecido unas primeras categorías de conocimiento para caracterizar el álgebra temprana en ambas etapas educativas: 1) Educación Infantil: experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones, seriaciones de patrones de repetición (identificación, construcción y representación) y descripción de cambios cualitativos y cuantitativos; 2) Educación Primaria: comprensión de distintos tipos de relaciones y de patrones, uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, comprensión del cambio y uso de variables para determinar una constante o incógnita. Se concluye que es necesario que los programas de formación de maestros incluyan estos conocimientos para articularlos adecuadamente en las dos etapas educativas.

Fecha de recepción: 17 de octubre de 2019. **Fecha de aceptación**: 30 de noviembre de 2020.

[1] Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología. Departamento de Didácticas Específicas. nataly.pincheira@udg.edu. Girona. España. orcid.org/0000-0002-5051-964X

[2] Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología. Departamento de Didácticas Específicas. angel.alsina@udg.edu. Girona. España. orcid.org/0000-0001-8506-1838

Palabras claves: *álgebra temprana, currículo, pensamiento algebraico, Educación Infantil, Educación Primaria.*

Abstract: This article discusses the incorporation of early algebra in the curricula of Early Childhood and Primary Education in the United States, Australia, Singapore and Chile is analyzed. Based on the content analysis method, a comparative study has been made and the first categories of knowledge have been established to characterize early algebra: 1) Early Childhood Education: experimentation with elements or objects based on the recognition of attributes to establish relationships, seriations based on patterns of repetition (identification, construction and representation) and description of qualitative and quantitative changes; 2) Primary Education: understanding different types of relationships and patterns, using algebraic symbols and mathematical models to represent mathematical situations, understanding change and using variables to determine a constant or unknown. It is concluded that it is necessary for teacher training programs to include this knowledge to adequately articulate it in the two educational stages.

Keywords: *early algebra, curriculum, algebraic thinking, Early Childhood Education, Primary Education.*

1. INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones dedicadas al estudio del álgebra sugieren la necesidad de ser incorporada en los currículos desde los primeros cursos escolares, dado que su inicio según las propuestas clásicas se considera desde la Educación Secundaria. Con el objeto de distinguir el álgebra propiamente dicha de las actividades generadoras de pensamiento algebraico en las primeras edades de escolarización, se ha acuñado el término *Early-Algebra,* a partir de ahora álgebra temprana, que intenta introducir modos del pensamiento algebraico desde las primeras edades de escolarización (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000, 2008; Molina, 2009). Esta nueva corriente no considera el álgebra como una asignatura, sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas para promover una enseñanza fundamentada en la comprensión de las matemáticas (Carpenter, Franke y Levi 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput, 1995, 1998, 2000).

A pesar de la importancia que está adquiriendo el álgebra temprana, no existe todavía un consenso en la literatura acerca de su caracterización, ni tampoco de los conocimientos que se incluyen bajo el concepto "álgebra temprana". Sin embargo, son varios los currículos de Educación Infantil y Primaria que han empezado a introducir de forma explícita conocimientos para promover el pensamiento algebraico en las primeras edades. Desde esta perspectiva, nuestro propósito es realizar un estudio comparativo de estos currículos que evidencie qué elementos se consideran para el desarrollo del pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares y, más específicamente, qué conocimientos se incluyen para promover el aprendizaje del álgebra temprana o bien cómo evoluciona el álgebra temprana a lo largo de estas etapas.

Desde este prisma, el análisis del currículo resulta relevante tanto para la etapa escolar, ya que determina la formación matemática de los escolares (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011), como para el desarrollo profesional del profesor, puesto que el profesorado debe conocer y manejar las orientaciones curriculares para lograr un aprendizaje efectivo en sus estudiantes. En este sentido, en el marco del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), Ball, Thames y Pelps (2008) destacan la importancia del conocimiento del currículo como un subdominio del conocimiento pedagógico del contenido. Este subdominio se refiere al "conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes" (Ball, *et al.*, 2008, p. 391).

Asumiendo, pues, que el profesor debe conocer el currículo de matemáticas para mejorar la enseñanza de los contenidos, nuestro estudio considera como punto de discusión la presencia y evolución del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria, dado que durante los últimos años se ha generado una transformación curricular progresiva en este bloque de contenido. Este cambio conforma un desafío para la formación del profesorado, pues resulta indispensable contar con maestros capaces de asumir estos cambios y de empoderar el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras edades. Desde esta perspectiva, la finalidad de este artículo consiste en analizar la incorporación del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria y caracterizarla, con el propósito de poder establecer orientaciones específicas acerca de la enseñanza del álgebra temprana y, de esta forma, contribuir al desarrollo profesional del profesorado. En concreto, se realiza un estudio comparativo a nivel transversal de las orientaciones curriculares de Educación Infantil y Educación Primaria de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile. Para la selección de estos currículos se ha considerado en primer lugar Estados Unidos, pues es la fuente de referencia del currículo latinoamericano, junto con otros países donde el estudio del álgebra temprana se encuentra de forma explícita en el currículo escolar.

2. ÁLGEBRA TEMPRANA

El álgebra temprana forma parte de una propuesta de cambio curricular que emerge como resultado de diversos estudios que se han desarrollando durante las últimas décadas (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000; Kaput, Carraher y Blanton, 2009). Esta nueva corriente plantea introducir el desarrollo del pensamiento algebraico principalmente desde la Educación Primaria, aunque algunos organismos y autores proponen su incorporación desde niveles inferiores (Davis, 1985; Vergnaud, 1988; Kaput y Blanton, 2001; Carpenter, Franke y Levi, 2003; NCTM, 2003). El motivo de esta propuesta surge ante la necesidad de eliminar la tardía incorporación del estudio del álgebra en la educación secundaria (Carpenter *et al.*, 2003; Kaput 1998).

Kaput (2000) denomina a este proceso como "la algebrización" del currículo, es decir, la integración del razonamiento o pensamiento algebraico a lo largo de toda la escolaridad. Cabe destacar que el introducir el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos de escolarización no significa impartir un curso específico de álgebra, sino más bien "capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad" (Lins y Kaput, 2004, p. 58). El obtener buenos resultados dependerá de cómo se piense el currículo escolar, pues no existirán cambios si se aprecia como un listado de contenidos, mientras que existirán cambios profundos si se considera como un conjunto de experiencias para los estudiantes (Kilpatrick, 2011).

En este sentido, el propósito que persigue el álgebra temprana no se fundamenta sólo en preparar a los estudiantes para el estudio del álgebra en niveles educativos superiores, sino desarrollar en ellos modos de pensamiento que les permitan alcanzar una comprensión profunda y compleja de las matemáticas escolares, de manera que éstos permeen en otros bloques de contenido como numeración, medida, geometría, etcétera.

Según Blanton y Kaput (2005) el álgebra temprana busca promover en las aulas de clase hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Así también, se debe propiciar un ambiente escolar en donde los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas e igualmente practiquen habilidades de cálculo.

Del mismo modo, resulta interesante profundizar en la propuesta que plantea Kieran para abordar el desarrollo del pensamiento algebraico:

> El pensamiento algebraico en los primeros cursos académicos implica el desarrollo de diversos tipos de reflexiones como parte de las actividades en los que puede utilizarse la representación simbólica algebraica mediante letras como herramienta, pero no exclusiva, del álgebra, de modo que pueda llevarse a cabo también sin ningún tipo de representación simbólica con letras, como por ejemplo el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación, el ensayo y error y la predicción. (Kieran, 2004, p. 149)

Por otra parte, Radford (2011) asegura que "el pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades del estudiante de comprender patrones en formas co-variantes desarrolladas culturalmente y utilizarlos para tratar cuestiones de términos remotos y no específicos" (p. 23), es decir, para alcanzar un desarrollo del pensamiento algebraico temprano los estudiantes deben identificar regularidades relacionando tanto estructuras numéricas como espaciales.

Estos planteamientos permiten ampliar y considerar nuevos conocimientos y actividades que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra temprana desde las primeras edades, cumpliendo con las metas que este propone.

3. METODOLOGÍA

De acuerdo con las finalidades del estudio, para realizar el análisis de los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile se ha usado el método de análisis de contenido, que es "una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto" (Krippenddorff, 1990, p. 28). Esta técnica busca proporcionar conocimientos, nuevas interacciones y una representación de los hechos, en nuestro caso, el progreso del álgebra temprana a nivel curricular. Además, permite descubrir la estructura interna de los textos a través del estudio de su contenido semántico (Rico y Fernández-Cano, 2013) y establecer "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos" (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563).

Para el desarrollo de la investigación se han considerado las siguientes etapas:

1. Seleccionar las unidades de muestreo, en nuestro caso las orientaciones curriculares vigentes de matemáticas de países avanzados en el estudio del álgebra temprana en Educación Infantil y Primaria: Estados Unidos (NCTM, 2003; CCSSM, 2010), Australia (ACARA, 2015), Singapur (NEL, 2013; MOE, 2012) y Chile (MINEDUC, 2012, 2018).
2. Identificar los contenidos u objetivos de aprendizaje que se encuentran vinculados, de manera implícita o explícita, al álgebra temprana, analizando su despliegue y evolución.
3. Organizar los contenidos u objetivos de aprendizaje de álgebra temprana de los distintos currículos, estableciendo categorías inductivas de conocimiento para la Educación Infantil y Primaria. Para llevar a cabo esta organización y establecer dichas categorías se consideran todos los contenidos u objetivos de aprendizaje que aparecen en los distintos currículos analizados, esto supone, por lo tanto, que una categoría no requiera que los contenidos u objetivos de aprendizaje estén presente en todos los currículos. En las tablas 1 y 2 se muestran algunos ejemplos del proceso de obtención de categorías.

Tabla 1. Ejemplificación de la organización de los contenidos curriculares de álgebra temprana y establecimiento de categorías de conocimiento en Educación Infantil

Unidades de muestreo	Contenidos	Categoría de conocimiento
NCTM (2003)	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades.	Experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.)
NEL (2013)	Emparejar, clasificar y comparar cosas por un atributo (por ejemplo según el color, la forma o tamaño)	

Tabla 2. Ejemplificación de la organización de los contenidos curriculares de álgebra temprana y establecimiento de categorías de conocimiento en Educación Primaria

Unidades de muestreo	Contenidos	Categoría de conocimiento
NCTM (2003)	Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos.	Comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones
ACARA (2015)	Investigar y describir patrones numéricos formados por conteo de saltos y patrones con objetos.	

4. Establecer un sistema de codificación cuantitativo, por medio de la presencia o ausencia de los contenidos u objetivos de aprendizaje relacionados al álgebra temprana en los diversos currículos analizados, de acuerdo a las categorías inductivas de conocimiento propuestas en la etapa anterior. En concreto, se ha asignado 1 punto en caso de presencia de estos y 0 en caso de ausencia.
5. Sistematizar la información por medio de tablas comparativas y gráficos, cuya lectura permita: a) establecer semejanzas y diferencias a partir del análisis de los contenidos que se promueven en las diversas propuestas curriculares y, b) analizar la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria.

4. RESULTADOS

Considerando las finalidades de nuestro estudio, se describen los datos obtenidos a partir del análisis de contenido de los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile.

4.1 El álgebra temprana en el currículo escolar de Estados Unidos

Los documentos oficiales que rigen el currículo escolar de los Estados Unidos son los Principios y Estándares para la Educación Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003), y los Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM, 2010). Resulta de gran interés profundizar en el análisis de estos documentos, dado que han tenido un alto impacto a nivel internacional al ser considerados modelos de referencia, generando una repercusión en los currículos de diversos países, sobre todo del contexto latinoamericano como por ejemplo Chile.

Los Principios y Estándares del NCTM (2003) proponen estándares de contenidos y estándares de proceso desde el *Prekindergarten* hasta el nivel 12 (3-18 años): los estándares de contenido (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, Análisis de datos y probabilidad) describen explícitamente lo que deberían aprender y, los estándares de proceso (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación) ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Estos contenidos y procesos "son también reflejo de la cultura matemática que la sociedad necesita, de la práctica educativa anterior, y de los valores y expectativas que comparten los profesores, los educadores matemáticos, los matemáticos y el público en general" (NCTM, 2003, p. xvii).

El Estándar de álgebra "se centra en las relaciones entre cantidades -incluyendo las funciones-, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio" (p. 39), como se muestra en la tabla 3.

Los conocimientos algebraicos en la propuesta del NCTM se desarrollan en diversas fases: a) en los primeros niveles se introduce el trabajo con patrones y relaciones, a partir de la manipulación de objetos y posteriormente utilizando secuencias de sonidos y secuencias numéricas; b) así también, se da paso a las representaciones para desarrollar la comprensión de simbología y modelizar situaciones de adicción y sustracción, hasta alcanzar la descripción de cambios tanto cualitativos como cuantitativos; c) luego se fomenta la construcción de patrones numéricos y geométricos y el uso de funciones por medio de tablas y gráficas; d) posteriormente se introduce el concepto de variable como cantidad desconocida y se exploran relaciones mediante ecuaciones; e) finalmente, se introduce la modelización de situaciones usando representaciones de tipo gráfico y tabular para extraer conclusiones, así como el análisis de situaciones de cambios que experimentan dos variables.

Tabla 3. Estándares de contenido de álgebra temprana para la Educación Infantil y Primaria (NCTM, 2003, p. 402)

	Pre-K-2 (3-8 años)	3-5 (9-11 años)
Comprender patrones, relaciones y funciones	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades. Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.	Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos. Representar y analizar patrones y funciones, verbalmente y mediante tablas y gráficas.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números. Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.	Identificar propiedades como la conmutatividad, la asociatividad y distributividad, y emplearlas en el cálculo con números naturales. Representar la idea de variable como cantidad desconocida, por medio de una letra o un símbolo. Expresar relaciones matemáticas mediante ecuaciones.
Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas	Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.	Modelizar situaciones-problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en diversos contextos	Describir cambios cualitativos, como "ser más alto". Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.	Investigar de qué manera el cambio que experimenta una variable se relaciona con el de una segunda variable. Identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes o variables, y compararlas.

Otro referente curricular destacado en Estados Unidos son los CCSSM, que definen "lo que los estudiantes deben entender y poder hacer en su estudio de las matemáticas" (CCSSM, 2010, p.4), y establecen un conjunto de orientaciones que impulsan el desarrollo de una educación de alta calidad. Se organizan en estándares para la práctica matemática y estándares para el contenido matemático. Los estándares para la práctica han sido adaptadas de los cinco estándares de proceso del NCTM (2003) y de los cinco aspectos de competencia descritos en el informe "*Adding It Up*", del National Research Council de Estados Unidos (NRC, 2001): a) Dar sentido a los problemas; b) Desarrollar un pensamiento abstracto y cuantitativo; c) Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros; d) Modelar usando matemáticas; e) Usar herramientas adecuadas de manera estratégica; f) Reconocer la importancia de la precisión; g) Buscar y hacer uso de una estructura; y h) Buscar y expresar regularidades en un razonamiento repetido. Los estándares para el contenido matemático responden a una combinación equilibrada de procedimientos y conocimientos que los estudiantes deben manejar para conectar la práctica con el contenido. Para lograr el desarrollo de los estándares de contenido, se establecieron un conjunto de dominios de acuerdo a cada grado educativo: desde Kindergarten hasta el grado 2 (4-8 años) se incluye conteo y cardinalidad, operaciones y pensamiento algebraico, números y operaciones en base diez, medición de datos, geometría; y en los grados 3, 4 y 5 (9-11 años) sus dominios corresponden a operaciones y pensamiento algebraico, números y operaciones en base diez, números y operaciones: fracciones, medición de datos, geometría.

La presencia del álgebra temprana en los estándares de contenido se evidencia en el dominio de operaciones y pensamiento algebraico, como se aprecia en la tabla 4.

Tabla 4. Estándares de contenidos matemáticos en relación al álgebra temprana en la Educación Infantil y Primaria (CCSSM, 2010)

	Estándares de contenido
Kindergarten (3-6 años)	Entender la suma como unir y sumar, y entender la resta como separar y tomar de.
Grado 1 (6-7 años)	Representar y resolver problemas que involucran sumas y restas. Comprender y aplicar las propiedades de las operaciones y la relación entre la suma y la resta. Sumar y restar hasta 20. Trabaja con ecuaciones de suma y resta.
Grado 2 (7-8 años)	Representar y resolver problemas que involucran sumas y restas. Sumar y restar hasta 20. Trabaja con grupos iguales de objetos para obtener bases para la multiplicación.
Grado 3 (8-9 años)	Representar y resolver problemas de multiplicación y división. Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre multiplicación y división. Multiplica y divide entre 100. Resuelve problemas relacionados con las cuatro operaciones e identifique y explica patrones en aritmética.
Grado 4 (9-10 años)	Usa las cuatro operaciones con números enteros para resolver problemas. Familiarizarse con factores y múltiplos. Generar y analizar patrones.
Grado 5 (10-11 años)	Escribir e interpretar expresiones numéricas. Analizar patrones y relaciones.

El pensamiento algebraico en los CCSSM (2010) se desarrolla por medio de las siguientes fases: a) los primeros grados se encuentran relacionados fuertemente con la operatoria de adición y sustracción, al profundizar en términos como unir y separar, representar y comprender sus propiedades e incorporar trabajos con ecuaciones de sumas y restas; b) luego se establece la operatoria de multiplicación y división (Grado 3), por medio de la resolución de problemas, la comprensión de sus propiedades y la relación entre ambas operaciones. A partir de las cuatro operaciones básicas se introduce al trabajo con patrones numéricos; c) finalmente se establecen vínculos entre la operatoria y las expresiones numéricas, dando origen a la generalización y al análisis de patrones y relaciones durante los Grados 4 y 5.

A modo general, se puede apreciar que el álgebra temprana está presente en los CCSSM (2010) desde los primeros grados educativos al igual que en el NCTM (2003); sin embargo, éstos últimos resultan ser más coherentes con el estudio del álgebra. Se observan también algunas diferencias en la evolución y propuesta para el desarrollo de ciertos contenidos, como lo es la generación de patrones y relaciones, que se evidencian en grados más avanzados según los CCSSM, mientras que el NCTM los promueve desde edades tempranas.

4.2 El álgebra temprana en el currículo escolar de Australia

El currículo de matemáticas australiano, que depende del organismo *Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority* (ACARA), se enfoca en "desarrollar una comprensión matemática sofisticada y refinada, con fluidez, razonamiento lógico, pensamiento analítico y habilidades para resolver problemas" (ACARA, 2015, p. 4), comenzando su desarrollo desde *Foundation* (5 años) hasta el año 12 (18 años). Se estructura en tres líneas de contenido (Números y álgebra, Medición y geometría, Estadística y probabilidad) y cuatro de competencias (comprensión, fluidez, resolución de problemas, razonamiento). Las líneas de competencia describen las acciones en las que los estudiantes pueden participar al aprender y usar el contenido, proporcionando el lenguaje para construir en el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas. Este currículo, además, garantiza el vínculo entre las matemáticas y otras disciplinas, es decir, propicia que las diversas interrelaciones que componen la matemática, tales como, habilidades, conceptos, procesos, propiedades, etc., puedan ser aplicadas más allá del aula de matemáticas.

Los contenidos que se abordan en la línea de Números y Álgebra se agrupan en seis sublíneas de contenido, que se desarrollan de acuerdo al nivel educativo de los estudiantes: Números y valor posicional (F-8), Fracciones y decimales (1-6), Números reales (7-10), Dinero y matemáticas financieras (1-10), Patrones y álgebra (F-10), relaciones lineales y no lineales (7-10). Los contenidos correspondientes a la sublínea de Patrones y álgebra se presentan en la tabla 5.

Tabla 5. Descripciones de contenido de la sublínea "Patrones y álgebra" para la Educación Infantil y Primaria (ACARA, 2015)

	Contenidos
Foundation (5 -6 años)	Ordenar y clasificar objetos familiares y explicar la base de estas clasificaciones. Copiar, continuar y crear patrones con objetos y dibujos.
Año 1 (6-7 años)	Investigar y describir patrones numéricos formados por conteo de saltos y patrones con objetos.
Año 2 (7-8 años)	Describir patrones numéricos e identificar elementos faltantes. Resolver problemas usando oraciones numéricas para sumar o restar.
Año 3 (8-9 años)	Describir, continuar y crear patrones numéricos resultantes de realizar sumas o restas.
Año 4 (9-10 años)	Explorar y describir patrones numéricos resultantes de realizar la multiplicación. Resolver problemas verbales mediante el uso de oraciones numéricas que impliquen multiplicación y división donde no hay resto. Encontrar cantidades desconocidas en oraciones numéricas que involucran suma y resta e identificar oraciones numéricas equivalentes que involucren suma o resta.
Año 5 (10-11 años)	Describir, continuar y crear patrones con fracciones, decimales y números enteros resultantes de realizar sumas y restas. Encontrar cantidades desconocidas en oraciones numéricas que involucren multiplicación y división e identificar oraciones numéricas equivalentes que involucren multiplicación y división.
Año 6 (11-12 años)	Continuar y crear secuencias que involucren números enteros, fracciones y decimales. Describir la regla utilizada para crear la secuencia. Explorar el uso de corchetes y orden de las operaciones para escribir oraciones numéricas.

Los conocimientos que promueve el currículo australiano para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico están presentes desde la Educación Infantil (*Foundation*) y se desarrollan por medio de las siguientes fases: a) inicialmente con la clasificación de objetos y luego en el trabajo con patrones, desde su forma experiencial, usando materiales, sonidos, movimientos o dibujos; b) luego, al iniciar la Educación Primaria, se profundiza el trabajo con patrones, al describir patrones numéricos y establecer relaciones. El uso de patrones numéricos se extiende y profundiza en toda la Educación Primaria; c) en los niveles posteriores, los estudiantes deben crear patrones numéricos como resultado de realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, hasta alcanzar la descripción de patrones con fracciones, decimales y números enteros; y d) al finalizar la Educación Primaria, los estudiantes deben ser capaces de crear secuencias numéricas que involucren números enteros y racionales, explicando la regla utilizada. Por otro lado, se evidencia la resolución de problemas al utilizar números en diversos contextos que impliquen operatoria de adición, sustracción, multiplicación y divisiones exactas. Con el desarrollo de este contenido, el currículo realiza una primera aproximación al trabajo con ecuaciones y desigualdades, al encontrar cantidades desconocidas en oraciones numéricas e identificar equivalencias. Finalmente, se explora en el uso de paréntesis y prioridad de las operaciones al escribir oraciones numéricas.

Así pues, para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico, tanto el currículo de Estados Unidos como el de Australia, proponen el trabajo con patrones desde la Educación Infantil. Para ello, ambos currículos acercan este contenido a la experiencia de los estudiantes, por medio del reconocimiento y descripción de patrones en secuencias de sonido, formas, objetos y dibujos.

Por otra parte, a diferencia del currículo estadounidense, el currículo australiano aborda una cantidad menor de contenidos durante la Educación Primaria, pero profundiza ampliamente en el trabajo con patrones y secuencias. Así también, se da prioridad al trabajo con operaciones numéricas, uso de incógnitas y expresiones equivalentes.

4.3 El álgebra temprana en el currículo escolar de Singapur

El sistema educativo en Singapur se rige por el Ministerio de Educación (MOE, *Ministry of Education*) y comienza a implementarse en la Educación Infantil (4 a 6 años de edad). El desarrollo de la Educación Infantil se fundamenta a partir del marco *Nurturing Early Learners* (NEL), en el que el ámbito de las matemáticas se establece a partir del área de aprendizaje de la Aritmética. Según el marco NEL (2013, p. 6), "el desarrollo de conceptos y habilidades de aritmética, implica ayudar a los niños a conocer y usar conceptos y habilidades, de modo que establezcan relaciones y conexiones que luego puedan aplicar significativamente en sus experiencias diarias". En este sentido, la Aritmética como área de aprendizaje se desarrolla en la Educación Infantil a través de tres líneas centrales: Relaciones y patrones simples, Conteo y sentido numérico, Formas básicas y conceptos espaciales simples.

El estudio del álgebra temprana se ve incorporado explícitamente en la línea de Relaciones y patrones, donde se conocen y establecen relaciones simples a través del desarrollo de habilidades y conceptos, tales como emparejar, clasificar, comparar y ordenar. Así también, el trabajo con patrones permite a los niños desarrollar sus capacidades de pensamiento lógico, las cuales son fundamentales para comprender el concepto de número (NEL, 2013).

El plan de estudio de matemáticas de Educación Primaria pone especial énfasis en cinco componentes (comprensión conceptual, dominio de habilidades, procesos matemáticos, metacognición y actitudes) y está organizado en tres líneas de contenido: Números y álgebra, Medición y geometría, Estadística. La línea de contenido de Números y álgebra se divide en sublíneas de acuerdo a cada nivel educativo (Números enteros, Dinero, Fracciones, Decimales, Porcentajes, Relaciones proporcionales, Tasa y velocidad). Los contenidos de álgebra que se evidencian a lo largo del currículo (tabla 6) están ligados principalmente a la sublínea de contenido de Números Enteros, sin embargo, en el nivel de Primaria 6 se presenta una sublínea específica para el estudio del álgebra temprana.

Tabla 6. Contenidos en relación al estudio del álgebra temprana en currículo de Singapur de Educación Infantil (NEL, 2013) y Educación Primaria (Ministry of Education Singapore, 2012)

	Contenidos
Kindergarten (4-6 años)	Emparejar, clasificar y comparar cosas por un atributo (por ejemplo según el color, la forma o tamaño) Poner las cosas en orden según el tamaño o la longitud y eventos de secuencia Reconocer, extender y crear patrones simples (por ejemplo: patrón AB)
Primaria 1 (6-7 años)	Números enteros: Números hasta el 100 Comparar y ordenar números Patrones en secuencias numéricas Números ordinales (primero, segundo hasta el décimo) y símbolos (1º, 2º, 3º, etc.)
Primaria 2 (7-8 años)	Números enteros: Números hasta el 1000 Comparar y ordenar números Patrones en secuencias numéricas Números pares e impares
Primaria 3 (8-9 años)	Números enteros: Números hasta 10.000 Comparar y Ordenar números Patrones en secuencias numéricas

Primaria 4 (9-10 años)	Números enteros: Números hasta el 100.000 Comparar y ordenar números Patrones en secuencias numéricas
Primaria 5 (10-11 años)	Relaciones: Notación, representación e interpretación de $a{:}b$ y $a{:}b{:}c$, donde a, b y c son números enteros, excluyendo las relaciones que implican fracciones y decimales Relaciones equivalentes Dividir una cantidad en una relación determinada Expresar una relación en su forma más simple Encontrar la proporción de dos o tres cantidades dadas Encontrar el término que falta en un par de relaciones equivalentes Resolver problemas de palabras en dos pasos en relación con la proporción
Primaria 6 (11-12 años)	Álgebra: Uso de letras para representar un número desconocido Notación, representación e interpretación de expresiones algebraicas simples, tales como: $a \pm 3$, $a \times 3$ ó $3a$, a: 3 ó $\frac{a}{3}$ Simplificar expresiones lineales simples excluyendo los paréntesis Evaluar expresiones lineales simples por sustitución Resolver ecuaciones lineales simples que implican un coeficiente de números enteros sólo en contextos simples

La presencia del álgebra temprana en las orientaciones curriculares de Singapur se manifiesta en las siguientes etapas: a) la Educación Infantil se ve marcada por el reconocimiento de patrones simples y relaciones de números por medio de la clasificación, orden y comparación de objetos, b) mientras tanto, en la Educación Primaria el desarrollo curricular de estos contenidos se vincula al estudio de los Números enteros. Los Números enteros se trabajan de forma gradual, partiendo desde el 100 en Primaria 1 hasta el 10.000 en Primaria 4. Así pues, se establece en cada uno de estos niveles la comparación y orden de estos números, dando paso a la descripción y creación de patrones a partir del análisis de las secuencias numéricas que se registran; c) por otra parte, en Primaria 5, los contenidos relacionados con el álgebra temprana se manifiestan a través de la sublínea de Relaciones, haciendo uso de la notación algebraica para representar el concepto de razón, estableciendo relaciones equivalentes para introducir el concepto de proporción, y con ello determinar el término desconocido en relaciones equivalentes; d) luego, en el nivel de Primaria 6, se dedica de forma preferente una sublínea de contenido al estudio del álgebra temprana por medio del lenguaje algebraico al emplear letras para representar una cantidad desconocida, y traducir a números y símbolos expresiones del lenguaje común. Así también, se origina el uso de expresiones lineales simples al evaluar expresiones algebraicas por sustitución y reducir términos semejantes por medio de la simplificación. El desarrollo del pensamiento algebraico finaliza en Educación Primaria con la resolución de ecuaciones lineales de primer grado en contextos simples.

A modo general, los contenidos que promueve el currículo de Singapur para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras edades se fundamentan, en gran medida, en el uso de patrones y sucesiones numéricas, en sintonía con los currículos de Estados Unidos y Australia.

Por otro lado, tanto las orientaciones curriculares de Singapur como de Australia, vinculan el estudio del álgebra temprana a los números, al ser considerados como parte de una sola línea de contenidos. Ambos currículos destacan la importancia de trabajar estos contenidos en forma simultánea, dado que uno complementa el estudio del otro, es decir, la enseñanza de los números requiere del álgebra y el estudio del álgebra requiere de la comprensión de los números.

4.4 El álgebra temprana en el currículo escolar de Chile

En Chile, el Ministerio de Educación (MINEDUC) plantea el currículo para el desarrollo de la Educación Infantil a partir de las Bases Curriculares para la Educación Parvularia (MINEDUC, 2018), las cuales constituyen un referente a nivel nacional donde se "define principalmente qué y para qué deben aprender los párvulos desde sus primeros meses de vida hasta el ingreso de la Educación Básica" (p. 9).

Los objetivos de aprendizaje que proponen estas Bases Curriculares se organizan en tres ámbitos de experiencia: Desarrollo personal y social, Comunicación integral, Interacción y comprensión del entorno. Este último ámbito de aprendizaje alberga el núcleo Pensamiento Matemático, haciendo referencia a los diferentes procesos a través de los cuales los niños interpretan y explican los diversos elementos y situaciones del entorno, tales como, ubicación en el espacio-tiempo, relaciones de orden, comparación, clasificación, seriación, identificación de patrones, etc., como también, a la construcción de la noción de número y el uso inicial de la función ordenadora y cuantificadora del mismo.

Para efectos de este estudio, nos centraremos en los objetivos curriculares relacionados con la enseñanza del álgebra temprana correspondientes al 3° nivel curricular, nivel de Transición (tabla 7), referido a niños de 4 a 6 años de edad.

Por otra parte, la implementación del currículo escolar para la Educación Básica (6 a 12 años) se fundamenta a partir de las Bases Curriculares Primero a Sexto Básico (MINEDUC, 2012). La asignatura de matemáticas tiene como propósito "enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes" (MINEDUC, 2012, p. 214). Para desarrollar el pensamiento matemático se establecen cuatro habilidades relacionadas entre sí: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar. Estas habilidades representan un rol fundamental en la adquisición de nuevas destrezas, conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver problemas rutinarios y no rutinarios, propios de la matemática y de otros ámbitos. Así también, la adquisición de nuevos conceptos en la asignatura de matemáticas se organiza a través de cinco ejes temáticos: Números y operaciones, Patrones y álgebra, Geometría, Medición, Datos y probabilidades.

El eje de patrones y álgebra pretende que los estudiantes expliquen y describan relaciones de todo tipo, entre números, formas, objetos y conceptos. El uso de patrones, observados en secuencia de objetos, imágenes o números que representan regularidades, debe ser representado de manera concreta, pictórica y simbólica, desde donde los estudiantes deben ser capaces de transitar de una forma de representación a otra.

La tabla 7 muestra los objetivos de aprendizaje vinculados al álgebra temprana que plantean las Bases Curriculares del Ministerio de Educación para la Educación Parvularia y Educación Básica.

Tabla 7. Objetivos de aprendizaje en relación al álgebra temprana en la Educación Parvularia (MINEDUC, 2018) y Educación Básica (MINEDUC, 2012)

	Objetivos de Aprendizaje
3º Nivel de Transición (4-6 años)	Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos. Experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por dos o tres atributos a la vez (forma, color, tamaño, función, masa, materialidad, entre otros) y seriar por altura, ancho, longitud o capacidad para contener. Emplear cuantificadores, tales como: "más que", "menos que", "igual que", al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas.

1º Básico (6-7 años)	Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos...) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo. Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=).
2º básico (7-8 años)	Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes, de manera manual y/o usando software educativo. Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=) y los símbolos no igual (>, <).
3º Básico (8-9 años)	Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo. Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100.
4º Básico (9-10 años)	Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo. Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción.
5º Básico (10-11 años)	Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones. Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica.
6º Básico (11-12 años)	Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos: a) identificando patrones entre los valores de la tabla b) formulando una regla con lenguaje matemático Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: a) usar una balanza b) usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución.

El álgebra temprana está presente en todos los niveles del currículo escolar chileno. La adquisición del aprendizaje del álgebra en los estudiantes se evidencia a partir del progreso de diversas etapas: a) comenzando en el nivel de transición para la Educación Parvularia con la indagación en diversos patrones (sonoros, visuales, gestuales, etc.) y, estableciendo relaciones de clasificación y cuantificación a partir de diversos objetos; b) posteriormente en los primeros niveles de la Educación Básica se inicia el desarrollo de un trabajo más amplio con reconocimiento y descripción de patrones repetitivos, para avanzar hacia el registro de patrones numéricos de forma manual y/o software educativos por medio de tablas; c) para luego descubrir y formular reglas con lenguaje matemático a partir de una sucesión para realizar predicciones e indagar en el trabajo con ecuaciones e inecuaciones que involucre adiciones y sustracciones; d) hasta finalizar la Educación Básica con la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, aplicando procedimientos formales.

Si bien, el tratamiento que recibe el álgebra en el currículo escolar chilenos para la Educación Infantil y Primaria se ve influenciado fuertemente por las directrices que proponen los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2003), no se ha considerado abordar de manera más específica la modelización de problemas utilizando tablas, gráficas y ecuaciones y, el análisis de situaciones de cambio por medio del uso de variables.

4.5 ¿Qué conocimientos promueve el currículo escolar para desarrollar el pensamiento algebraico? Hacia una caracterización del álgebra temprana

A partir del análisis de las diversas propuestas curriculares podemos evidenciar el despliegue y evolución de los conocimientos que se ven implicados en el estudio del álgebra temprana de algunos currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria que incluyen explícitamente conocimientos de esta naturaleza. Para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico, estos currículos proponen abordar en cada nivel educativo diversos conocimientos por medio de la adquisición de conceptos y habilidades. El bloque de álgebra temprana impulsa el tratamiento de diversos contenidos, estableciendo ciertas diferencias en el grado de profundización y prioridad que estos consiguen a lo largo del currículo escolar.

En relación a la Educación Infantil, y con base a poder caracterizar el álgebra temprana y analizar su presencia o ausencia en los currículos de esta etapa, se han establecido tres categorías de contenidos a partir de la revisión curricular realizada:

– Experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.).

- Seriación a partir de patrones de repetición: Identificación, construcción y representación del patrón.
- Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

A partir de éstas categorías, hemos clasificado los contenidos propuestos en las orientaciones curriculares. La figura 1, muestra las diferencias respecto a la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Infantil en los currículos contemporáneos considerados en este estudio.

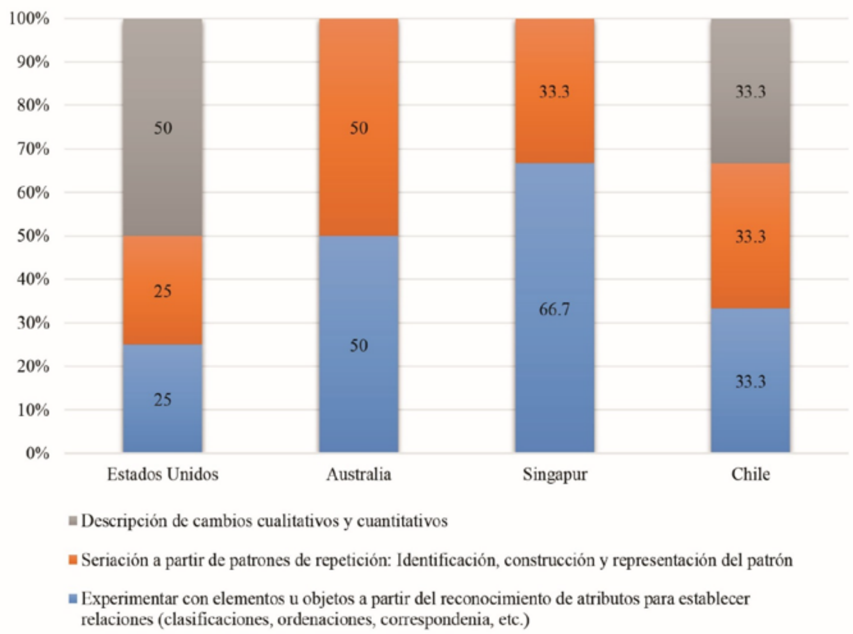


Figura 1. Presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Infantil.

El conocimiento relacionado a la experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones se evidencia en todos los currículos contemporáneos, alcanzando una mayor presencia (por encima del 65%) en el currículo de Singapur. Una menor presencia presenta el conocimiento correspondiente a la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (no supera el 50%), dado que sólo se observa en los currículos de

Estados Unidos y Chile, siendo el conocimiento con mayor predominancia para el currículo de Estados Unidos, quedando ausente en los currículos de Australia y Singapur.

El conocimiento correspondiente a seriación a partir de patrones de repetición está presente en todas las orientaciones curriculares, pero su presencia no excede el 50%.

Cabe señalar que el currículo australiano muestra un equilibrio en la presencia de los conocimientos que promueve el currículo para el desarrollo del álgebra temprana en la Educación Infantil, considerando la experimentación con elementos para establecer relaciones y la seriación a partir de patrones. A su vez en el currículo chileno, la presencia de los conocimientos que se establecen para alcanzar el pensamiento algebraico en la Educación Infantil se desarrolla de manera proporcional.

Por otra parte, para realizar el análisis comparativo de los currículos de Educación Primaria se han considerado las categorías de conocimientos importantes de álgebra temprana para esta etapa propuestos por Alsina (2019):

- La comprensión de distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.).
- El uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.
- La comprensión del cambio.
- Además, a partir del análisis de las orientaciones curriculares se ha incorporado otra categoría: el uso de variables para determinar una constante o incógnita, dado que al revisar los contenidos que promueven las orientaciones curriculares, especialmente en los últimos niveles de Educación Primaria, se plantea iniciar la comprensión conceptual respecto de los diferentes usos de la variable como cantidad desconocida, ya sea para determinar el término que falta en un par de relaciones equivalentes, determinar una cantidad desconocida en oraciones numéricas, determinar una proporción, resolver ecuaciones lineales e inecuaciones, entre otros.

A partir de las categorías de conocimiento propuestas, hemos clasificado los contenidos revisados en las orientaciones curriculares. La figura 2, muestra las diferencias relacionadas con la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Primaria en los currículos de los diferentes países analizados en este estudio.

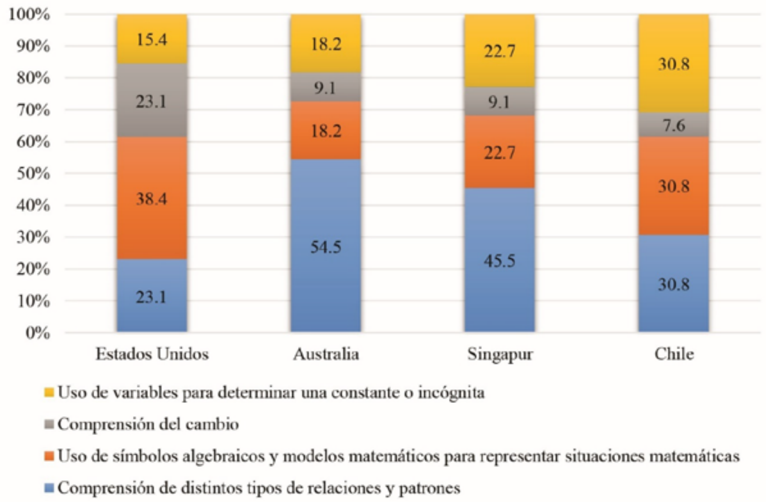


Figura 2. Presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Primaria.

Los resultados obtenidos muestran una mayor presencia del conocimiento vinculado a la comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones en los currículos de Australia y Singapur (por encima del 45%). En el currículo de Estados Unidos, la mayor presencia de los conocimientos se relaciona al uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones (alcanzando 38,4%). En el caso de Chile, tres de los cuatro conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Primaria se desarrollan en forma proporcional a lo largo del currículo escolar, con una presencia del 30,8%. Finalmente, se observa una presencia menor del conocimiento relacionado a la comprensión del cambio (por debajo del 25%) en los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile.

La revisión de los currículos contemporáneos nos ha permitido realizar una primera aproximación hacia la caracterización del álgebra temprana. A partir de este análisis y considerando los referentes teóricos estudiados, realizamos una primera caracterización del álgebra temprana como *la capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemática, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del* *reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos; y se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Primaria para comprender distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.), usar símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, comprender el cambio y usar variables para determinar una constante o incógnita.*

5. CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se ha presentado un análisis de la incorporación del álgebra temprana en las etapas de Educación Infantil y Primaria (4 a 12 años de edad aproximadamente) a nivel curricular. Para ello, se han analizado las orientaciones curriculares de países que incluyen explícitamente este bloque de contenido desde los primeros años de escolaridad. Esta revisión ha permitido, por una parte, caracterizar el álgebra temprana a partir de los conocimientos que fomentan el desarrollo del pensamiento algebraico en Educación Infantil y Primaria y, por otra, realizar un estudio comparativo que evidencie la presencia de estos conocimientos, a modo de itinerario vertical a lo largo de todo el currículo escolar.

A modo de síntesis, los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Infantil son: experimentación con elementos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etc.); seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón); y descripción de cambios cualitativos y cuantitativos y; en Educación Primaria: comprensión de distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.); uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas; comprensión del cambio; y uso de variables para determinar una constante o incógnita.

Por otra parte, los resultados obtenidos muestran que el desarrollo del pensamiento algebraico se encuentra estrechamente relacionado con el tratamiento y evolución que reciben los contenidos matemáticos vinculados a la enseñanza del álgebra en los distintos niveles educativos. En este sentido, el estudio del álgebra temprana en la Educación Infantil se ve marcada por la experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones, con una presencia media del 43,8%, mientras que el conocimiento con menor presencia corresponde a la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos, con una presencia media del 20,8%. En la Educación Primaria se profundiza mayoritariamente en la comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones, teniendo una presencia media del 38,5%, mientras que el conocimiento con menor presencia es la comprensión del cambio, con una presencia media del 12,2%.

Todos los currículos que hemos analizado enfatizan la importancia del desarrollo de los patrones y relaciones como base para construir un itinerario algebraico desde la Educación Infantil a Primaria. Por ello, es necesario establecer una estrecha coordinación entre ambas etapas educativas para garantizar la continuidad de los objetivos establecidos en las orientaciones curriculares y lograr una enseñanza eficaz del álgebra temprana desde las primeras edades, que asegure las bases para su posterior profundización en la educación secundaria.

Así también, dado los cambios que han sufrido los planes curriculares escolares durante los últimos años, consideramos que es necesario ofrecer a los futuros maestros y a los maestros en activo experiencias de formación que incorporen aspectos que permitan reconocer y promover el desarrollo del pensamiento algebraico en sus estudiantes. Estas experiencias de formación deben suponer, por una parte, el desarrollo y reflexión sobre tareas matemáticas de carácter algebraico, así como estrategias para propiciar su enseñanza, mediante la representación de situaciones y problemas con patrones, secuencias, uso de expresiones simbólicas formuladas con variables, modelización, funciones, proporcionalidad, expresiones equivalentes, planteamiento de fórmulas sencillas y resolución de ecuaciones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447.

REFERENCIAS

ACARA (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. Recuperado de: https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Andréu, J. (2002). *Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada*. Editorial Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelp, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bastable, V y Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165-184). Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton M. L., y Kaput J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM e IAP.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Estudio de Educación y Desarrollo, 42*(3), 479-522

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* Routledge.

Common Core State Standars for Mathematics (2010). Common Core State Standards Initiative. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4*, 195-208.

Hill H. C., Ball D.L. y Schilling S.G. (2008): Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Kaput, J. (1995). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. *Paper presented at the Annual. Meeting of the National Council of Teachers Mathematics.* Boston MA.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.

Kaput, J. y Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders' performance on a state fourth-grade assessment. En R. Speiser, C.Maher, y C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the Qorth American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, 1, 99-108.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (2009). Algebra in the Early Grades. Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*, 139-151.

Kilpatrick, J. (2011). En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 125-130). Springer-Verlag.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y Práctica*. Ediciones Paidós ibérica, S.A.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Click, M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (pp.47-70). Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NRC (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. The National Academies Press.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 17-24). PME.

Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2011. *Siglo XXI, 29*(2), 139-172.
Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp.1-22). Comares.
Singapore, Republic of. Ministry of Education (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six.* Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education.
Singapore, Republic of. Ministry of Education (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6.* Ministry of Education.
Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. In C. Laborde (Eds.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). La Pensée Sauvage.
Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas,* 97, 51-67.

NATALY PINCHEIRA HAUCK

Dirección: Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología.
Departamento de Didácticas Específicas

4.3 Estudio [C]

Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA, 17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto

Nataly Pincheira, Yeni Acosta y Ángel Alsina

En este estudio se analizan las tareas matemáticas sobre álgebra temprana en una colección de ocho libros de texto chilenos de Educación Infantil (4 a 6 años). La investigación siguió una metodología cualitativa, de carácter exploratorio-descriptivo, utilizando la técnica de análisis de contenido. Los resultados muestran una presencia de tareas algebraicas en todos los libros de texto analizados, predominando las tareas vinculadas con establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos, seguidas de tareas que requieren de la seriación a partir de patrones de repetición y una escasa presencia de tareas que implican la descripción de cambios.

Términos clave: Álgebra temprana; Educación Infantil; Libros de texto; Pensamiento algebraico; Tareas matemáticas

Incorporation of Early Algebra in Early Childhood Education: An Analysis from Textbooks

This study analyses the mathematical tasks on early algebra in a collection of eight widely distributed Chilean textbooks for Early Childhood Education (4 to 6 years old). The research followed a qualitative methodology, of an exploratory-descriptive nature, using the technique of content analysis. The results show a presence of algebraic tasks in all the textbooks analysed, with a predominance of tasks linked to establishing relations based on the recognition of attributes, followed by tasks that require seriation based on patterns of repetition, and a scarce presence of tasks that involve the description of changes.

Keywords: Algebraic thinking; Early algebra; Early childhood Education; Mathematical tasks; Textbooks

Pincheira, N., Acosta, Y. y Alsina, A. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA, 17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Incorporação da *Early Algebra* na Educação Infantil: uma análise a partir de livros didáticos.

Este estudo analisa as tarefas matemáticas sobre álgebra inicial em uma coleção de oito livros didáticos chilenos amplamente distribuídos para a Educação Infantil (4 a 6 anos). A pesquisa seguiu uma metodologia qualitativa, de natureza exploratório-descritiva, utilizando a técnica de análise de conteúdo. Os resultados mostram a presença de tarefas algébricas em todos os livros analisados, com predominância de tarefas ligadas ao estabelecimento de relações baseadas no reconhecimento de atributos, seguidas de tarefas que exigem seriação com base em padrões de repetição, e uma presença escassa de tarefas que envolvem a descrição das mudanças.

Palavras chave: Pensamento algébrico; Early algebra; Educação Infantil; Tarefas matemáticas; Livros didáticos

La incorporación del álgebra como bloque de contenido desde los primeros años de escolarización responde a una propuesta de innovación curricular conocida como *Early Algebra*, a partir de ahora álgebra temprana, que emerge de los resultados de numerosas investigaciones dedicadas al estudio del álgebra y su didáctica (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2008; Molina, 2009). Esta nueva corriente propone introducir la enseñanza de este bloque de contenido desde la Educación Infantil (Alsina, 2019a; Alsina y Giralt, 2017; Clements y Sarama, 2015; Kaput et al., 2017, NCTM, 2000).

En concreto, el álgebra temprana plantea promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolarización (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007) como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y situaciones matemáticas para suscitar una enseñanza fundamentada en la comprensión de las matemáticas (Bastable y Schifter, 2007; Carpenter et al., 2003). De acuerdo con Blanton y Kaput (2005), el álgebra temprana busca desarrollar en las aulas de clase hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de tareas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, donde los estudiantes exploren, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas.

Los currículos contemporáneos de Educación Infantil no han quedado ajenos a esta innovación (e.g., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2015; Ministerio de Educación, 2018; Ministry of Education Singapore, 2013; NCTM, 2000) y han asumido la importancia de los contenidos vinculados con el álgebra temprana, incorporado conocimientos de naturaleza algebraica de manera progresiva a partir de esta etapa escolar (Pincheira y Alsina, 2021a).

La enseñanza del álgebra desde la Educación Infantil permite que los profesores puedan ayudar a los alumnos a construir una sólida base de comprensión y experiencia, como preparación para un trabajo más complejo en álgebra en los niveles medios y en la escuela secundaria (NCTM, 2000, p. 39). Así pues, la transformación curricular del álgebra temprana hasta su estado actual, requiere contar con profesores capaces de atender a los objetivos que esta persigue y conducir su enseñanza de manera efectiva, mediante la selección e implementación de tareas matemáticas fundamentadas en los contenidos que exponen las orientaciones curriculares.

Esto último es importante, puesto que lo que los estudiantes aprenden en gran medida se define por las tareas que se les asignan y que componen la base de sus acciones (Sullivan et al., 2013, p. 57), es decir, la enseñanza del álgebra temprana depende mayoritariamente de las tareas que se proponen a los estudiantes. En este sentido, el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM) propuesto por Alsina (2018; 2019b; 2020a), plantea que la enseñanza del contenido se inicia en contextos informales, que permiten visualizar las ideas matemáticas de manera concreta (situaciones de vida cotidianas, materiales manipulativos y juegos); prosigue en contextos intermedios, que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático (recursos literarios y tecnológicos); y finaliza en contextos formales, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico (recursos gráficos, principalmente los libros de texto).

Este artículo se focaliza en el libro de texto, al tratarse de un recurso de enseñanza que influye considerablemente en el proceso de instrucción en el aula, puesto que conforma un elemento de apoyo para el profesorado en la preparación de la clase (Even y Olsher, 2014). De este modo, los conocimientos que promueven los libros de texto de matemáticas se vinculan estrechamente con las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes (Stylianides, 2009).

Pese a la importancia que tiene el libro de texto como un recurso donde se formaliza el aprendizaje, las investigaciones se han centrado en analizar principalmente las tareas matemáticas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria (p. ej., Aké y Godino, 2018; Demosthenous y Stylianides, 2014; Pincheira y Alsina, 2021b). Nuestro propósito es ampliar estas investigaciones hacia el contexto de la Educación Infantil y profundizar en la incorporación de los conocimientos matemáticos vinculados con el álgebra temprana. Desde esta perspectiva, nos preguntamos ¿Qué conocimientos se movilizan en los libros de texto de Educación Infantil cuando se diseñan tareas de álgebra temprana?

Para responder a esta pregunta se asume la caracterización de los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución de tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en Educación

Infantil propuesta por Pincheira y Alsina (2021a). En concreto, estos autores definen el álgebra temprana como:

> *La capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemáticas, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos* (Pincheira y Alsina, 2021a, pp. 175-176).

Con base en este marco, el objetivo de nuestro estudio es analizar las tareas matemáticas sobre álgebra temprana presentes en ocho libros de texto chilenos para el nivel de transición de Educación Infantil (4 a 6 años).

Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil

La incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil requiere desarrollar prácticas matemáticas que promuevan el pensamiento algebraico, por ejemplo, la comprensión de relaciones, búsqueda de patrones y el análisis de cambios en diferentes contextos (Alsina y Giralt, 2017).

Diversas investigaciones informan que los estudiantes de Educación Infantil pueden desarrollar conocimientos vinculados con el álgebra temprana desde las primeras edades, adquiriendo nociones algebraicas elementales, tales como las clasificaciones de objetos, el reconocimiento de patrones repetitivos, el uso de representaciones de relaciones numéricas, entre otras (p. ej., Acosta y Alsina, 2020; Castro et al., 2017; Rittle-Johnson et al., 2019).

Papic et al. (2011) señalan que el pensamiento algebraico se inicia en las primeras edades a través del proceso de generalización. Carraher et al. (2007) plantean que para abordar la generalización matemática se requiere trabajar a partir de la identificación de relaciones, patrones y estructuras.

En este sentido, a través de la indagación, los niños interpretan y explican los diversos elementos y situaciones del entorno (Ministerio de Educación, 2018), utilizando los conocimientos físicos que adquieren a través de la manipulación de objetos que forman parte de su interacción con el medio, considerando las características o atributos externos de estos (Piaget, 1953). A partir de estos conocimientos, los estudiantes empiezan a construir diferentes tipos de relaciones cualitativas y cuantitativas de objetos, tales como comparaciones, clasificaciones, ordenaciones y correspondencias (Alsina, 2006; 2011; 2019a; Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Una relación implica comparar elementos por medio de semejanzas o diferencias, a partir de un criterio: la clasificación, por ejemplo, es una relación de equivalencia en una agrupación de elementos, que cumple con la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva; la ordenación es una relación de orden en una agrupación de elementos que posee las propiedades antirreflexiva, antisimétrica y transitiva; y, finalmente, la correspondencia representa una relación donde determinados elementos de una agrupación A se asocian con uno o más elementos de una agrupación B (Alsina, 2006; 2011).

Por otra parte, los patrones, entendidos como cualquier regularidad predecible, que generalmente involucra relaciones espaciales, numéricas o lógicas (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 34), contribuyen al desarrollo de la representación y abstracción matemática, proporcionando una base esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Papic, 2015).

El trabajo con patrones involucra tareas que permiten desarrollar diversas habilidades para hacer patrones, considerando si requieren o no conocimiento de la estructura o regla subyacente. Dichas tareas corresponden a: (a) duplicar el mismo patrón, (b) encontrar elementos faltantes de una secuencia, (c) ampliar una secuencia, (d) construir el mismo patrón con diferentes elementos, (e) identificar la unidad de repetición, (f) inventar un patrón. Las principales habilidades para hacer patrones que se movilizan en este tipo de tareas son copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, respectivamente (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns, Torbeyns et al., 2019).

En un estudio previo, McGarvey (2012) determinó que las tareas vinculadas a copiar, interpolar y extender no requieren de una comprensión previa de la unidad de repetición, dado que sólo implican la comprensión de la organización recursiva de los elementos que conforman la secuencia, es decir, de una asociación entre los elementos sucesivos adyacentes al patrón.

De acuerdo con el NCTM (2000), otro elemento fundamental vinculado al pensamiento algebraico es el cambio. Desde una perspectiva genérica, las ideas sobre cambio y las relaciones que se establecen entre los cambios, se abordan en el marco del pensamiento funcional (Warren y Cooper, 2005). En el ámbito de la Educación Infantil, desde una perspectiva amplia, se conceptualiza el cambio como una transformación a través de un operador (Alsina, 2006; 2011). Describir cambios cualitativos, como ser más alto o describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año (NCTM, 2000, p. 94), es fundamental para entender el desarrollo de las funciones en las etapas escolares posteriores. Así, pues, la incorporación de ideas vinculadas al cambio en Educación Infantil, permite a los niños comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo (NCTM, 2000, p. 99).

Los diferentes procesos y conceptos que se requieren incorporar en las prácticas matemáticas de Educación Infantil para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico movilizan una serie de conocimientos matemáticos que se deben tener en consideración en las prácticas de enseñanza del álgebra temprana, ya que, las observaciones y discusiones sobre cómo se relacionan unas cantidades con otras, conducen a experiencias con relaciones funcionales; y sus representaciones de situaciones matemáticas usando objetos concretos, dibujos y símbolos constituyen los comienzos de la construcción de modelos matemáticos (NCTM, 2000, p. 95).

Algunos estudios han analizado la presencia de conocimientos sobre álgebra temprana en los libros de texto. Acosta et al. (en prensa), por ejemplo, analizaron las tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de Educación Infantil (3 a 6 años). Los resultados muestran que la enseñanza de los patrones de repetición se aborda de manera limitada, mientras que las habilidades para hacer patrones que se movilizan con mayor frecuencia son extender, interpolar y reconocer la unidad de repetición de un patrón.

Demosthenous y Stylianides (2014) analizaron una serie de libros de texto de cuarto a sexto grado de Educación Primaria (9-12 años), determinando que prevalecen las tareas matemáticas basadas en reglas y las tareas de relaciones conocidas-desconocidas. Por otra parte, Aké y Godino (2018) analizaron 57 tareas de un libro de texto de primer grado de Educación Primaria (6 a 7 años), evidenciando que las tareas propuestas priorizan el registro numérico y no están intencionalmente dirigidas a promover el desarrollo del pensamiento algebraico.

Posteriormente, Pincheira y Alsina (2021b) analizaron 373 tareas matemáticas vinculadas a la enseñanza del álgebra temprana en Educación Primaria (6 a 12 años), determinando una fuerte presencia de tareas que involucran la comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones, seguidas de las tareas donde interviene el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.

METODOLOGÍA

De acuerdo con nuestro objetivo de estudio que, como se ha indicado, consiste en analizar las tareas matemáticas sobre álgebra temprana presentes en ocho libros de texto chilenos para el nivel de transición de Educación Infantil (4 a 6 años), se adoptó un enfoque cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo (Fernández et al., 2014). Asimismo, se ha utilizado como técnica el análisis de contenido, que es una técnica de investigación que permite hacer inferencias replicables y válidas a partir del texto (u otra materia significativa) a los contextos de su uso (Krippendorff, 2013, p. 24), en nuestro caso las tareas de enseñanza propuestas por los libros de texto. Para realizar el análisis de contenido, se consideró y adaptó la estructura para el análisis de libros de texto, propuesta por Cobo (2003), que advierte las siguientes etapas:

1. Identificar y seleccionar las unidades de análisis, constituidas por las secciones de los libros de texto que presentan tareas matemáticas para abordar conocimientos vinculados con el álgebra temprana.
2. Establecer categorías de análisis, en nuestro caso las categorías obedecen a la caracterización del álgebra temprana en Educación Infantil propuesta por Pincheira y Alsina (2021a). Para efectos del estudio, a partir de esta caracterización se desarrollaron indicadores de análisis.
3. Codificar las tareas matemáticas vinculadas con el estudio del álgebra temprana presentes en los libros de texto con base en las categorías e indicadores propuestos.
4. Sistematizar la información a través de tablas estadísticas, de manera que su lectura facilite el análisis descriptivo.
5. Evidenciar el análisis descriptivo, a través de la selección de ejemplos de tareas propuestos en los libros de texto de acuerdo con las categorías de análisis definidas.

Muestra

La muestra está constituida por una colección de cuatro series que consideran un total de ocho libros de texto chilenos (Tabla 1) correspondientes al tercer nivel de transición de Educación Infantil (4 a 6 años). Este nivel se subdivide en primer nivel de transición NT1(Pre-kínder, 4 a 5 años) y segundo nivel de transición NT2 (Kínder, 5 a 6 años).

Tabla 1
Serie de libros de texto considerados para el análisis

Serie	Código	Nivel (Edad)	Título	Autores	Editorial	Edición
Serie 1	T1	Pre-Kínder (4 a 5 años)	Cuaderno de actividades del Nivel Transición 1 de Educación Parvularia	Departamento de estudios Pedagógicos SM	SM Chile S.A Edición especial para MINEDUC	2019

Tabla 1
Serie de libros de texto considerados para el análisis

Serie	Código	Nivel (Edad)	Título	Autores	Editorial	Edición
	T2	Kínder (5 a 6 años)	Cuaderno de Actividades del Nivel de Transición 2 de Educación Parvularia	M. Salazar	Ediciones Rau y Bedenburg. Edición especial para MINEDUC	2020
Serie 2	T3	Pre-Kínder (4 a 5 años)	Saber Hacer Comprensión del entorno 4 años	Departamento de Investigaciones Educativas Santillana	Santillana	2019
	T4	Kínder (5 a 6 años)	Saber Hacer Comprensión del entorno 5 años			2019
Serie 3	T5	Pre-Kínder (4 a 5 años)	Sonrisas Matemática Pre-kínder	Departamento de estudios Pedagógicos SM	SM Chile S.A	2018
	T6	Kínder (5 a 6 años)	Sonrisas Matemática Kínder			2018
Serie 4	T7	Pre-Kínder (4 a 5 años)	Matemática Lógica y Números Nº 1	K. Anavalón y M. Lepín	Caligrafix	2019 (2ª Edición)
	T8	Kínder (5 a 6 años)	Matemática Lógica y Números Nº 2			2019 (2ª Edición)

Los libros de texto se escogieron de manera intencionada puesto que, por una parte, son los más utilizados por los centros educativos tanto del sistema educativo público como privado y, por otra parte, corresponden a proyectos integrados en las editoriales más demandadas y de alto prestigio a nivel nacional.

Cabe destacar que la serie 1 corresponde a los libros de texto que entrega el Ministerio de Educación a los establecimientos educacionales públicos, siendo distribuidos de manera gratuita. Mientras que las series 2, 3 y 4 corresponden a libros de texto que son utilizados en establecimientos educacionales privados.

Por otra parte, las series 1 y 2 corresponden a proyectos editoriales globalizados, es decir, presentan unidades didácticas que integran tareas de todas las áreas de conocimiento. Mientras que las series 3 y 4 pertenecen a proyectos editoriales que desarrollan tareas específicas del área de matemáticas.

Todos los libros de texto que constituyen la muestra se encontraban vigentes durante el periodo en el que se realizó el estudio.

A partir de la muestra, se seleccionaron las unidades de análisis que conciernen a las tareas de enseñanza vinculadas con el estudio del álgebra temprana.

Categorías e indicadores de análisis

Las tareas matemáticas que conforman las unidades de análisis se examinaron de acuerdo con las categorías de conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Infantil propuestas por Pincheira y Alsina (2021a): (a) establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos, (b) seriación a partir de patrones de repetición, (c) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

A partir de estas categorías se consideró un conjunto de indicadores que emergen del análisis de la literatura sobre los conocimientos importantes de álgebra temprana en Educación Infantil.

Dichos indicadores permiten analizar de manera más precisa los conocimientos matemáticos que se deben movilizar en el proceso de resolución de tareas que promueven el pensamiento algebraico temprano en los libros de texto de Educación Infantil (Tabla 2). Los indicadores fueron sometidos a un proceso de validación interna interjuez (Hidalgo, 2005), desarrollado por los autores, a través de una triangulación para garantizar su fiabilidad. Para ello, se realizaron sesiones para unificar criterios y consensuar el grado de acuerdo entre los distintos indicadores, estableciendo un orden de dificultad creciente según las categorías de conocimientos. Esto permitió ajustar los indicadores y constatar que miden lo que se requiere examinar.

Tabla 2
Categorías e indicadores utilizados en el proceso de codificación

Caracterización del álgebra temprana en Educación Infantil	Indicadores
Establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos	1. Reconocimiento de atributos afirmativos o negativos de elementos u objetos
	2. Reconocimiento de atributos cualitativos y/o cuantitativos de una colección
	3. Reconocimiento del atributo común de una colección
	4. Agrupar elementos a partir de la identificación de sus propiedades
	5. Clasificar elementos a partir de criterios cualitativos y/o cuantitativos
	6. Establecer ordenaciones de objetos de manera ascendente o descendente
	7. Establecer relaciones de correspondencia a partir del reconocimiento de atributos
	8. Comparación de elementos a partir de criterios cualitativos y/o cuantitativos
Seriación a partir de patrones de repetición	9. Duplicar el patrón a partir de una secuencia
	10. Encontrar elementos faltantes en una secuencia
	11. Ampliar una secuencia
	12. Construir un mismo patrón con diferentes elementos
	13. Identificar la unidad de repetición de un patrón
	14. Crear un patrón a partir de elementos determinados
Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos	15. Reconocer cambios cualitativos
	16. Reconocer cambios cuantitativos
	17. Aplicar cambios cualitativos
	18. Aplicar cambios cuantitativos

La codificación de los datos consideró el uso de los indicadores de acuerdo con la categoría de conocimiento a la que pertenece cada tarea matemática vinculada con el estudio del álgebra temprana, asignando puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 puntos). Cabe destacar que una determinada tarea matemática puede requerir atender a uno o más de los indicadores propuestos en cada categoría de conocimiento.

Para garantizar la confiabilidad del proceso de codificación, los autores realizaron una doble codificación cruzada e independiente de las tareas matemáticas. Finalmente, se discutieron los desacuerdos referidos al proceso de codificación y se estableció un consenso.

Por último, en cuanto a la selección de ejemplos, se estableció como criterio el mostrar propuestas de aquellas tareas con mayor presencia en los libros de texto analizados según edad.

RESULTADOS

Considerando el objetivo de nuestra investigación, en una primera parte se da a conocer la distribución de las tareas matemáticas en los libros de texto vinculadas con el estudio del álgebra temprana y, posteriormente se describen los datos obtenidos a partir de la caracterización de los conocimientos de álgebra temprana para la Educación Infantil propuestos por Pincheira y Alsina (2021a).

Distribución de las tareas matemáticas propuestas en los libros de texto vinculadas al estudio del álgebra temprana

Para seleccionar las tareas vinculadas con el estudio del álgebra temprana se realizó una revisión exhaustiva de todas las tareas que conforman los libros de la muestra: en total se revisaron 1077 tareas matemáticas, de las que 295 se relacionan con la enseñanza del álgebra temprana, conformando nuestras unidades de análisis. En la tabla 3 se presenta la distribución de las tareas matemáticas de acuerdo a cada nivel educativo de Educación Infantil.

Tabla 3
Distribución de tareas matemáticas analizadas

Serie	Libro de texto (edad)	Tareas de álgebra temprana	
		f	%
Serie 1	T1 (4 a 5 años)	2	0,7
	T2 (5 a 6 años)	5	1,7
Serie 2	T3 (4 a 5 años)	26	8,8
	T4 (5 a 6 años)	18	6,1
Serie 3	T5 (4 a 5 años)	27	9,2
	T6 (5 a 6 años)	21	7,1
Serie 4	T7 (4 a 5 años)	112	37,9
	T8 (5 a 6 años)	84	28,5

Se observa que las tareas que promueven la enseñanza del álgebra temprana están presentes en los libros de texto de ambos niveles de Educación Infantil.

A nivel general, se evidencia una mayor concentración de tareas en los libros de texto de 4 a 5 años con un 56,6%, mientras que los libros correspondientes a 5 a 6 años la presencia de la actividad algebraica temprana es del 43,4%.

Por otra parte, la presencia media de tareas en los libros de texto de 4 a 5 años alcanza un 14,2% y en los libros de texto de 5 a 6 años un 10,9%.

Análisis de los conocimientos matemáticos que caracterizan la enseñanza del algebra temprana en Educación Infantil

La tabla 4 muestra los datos correspondientes a los conocimientos que caracterizan la enseñanza del álgebra temprana en Educación Infantil (Pincheira y Alsina, 2021a).

Tabla 4
Distribución por porcentaje de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Infantil

Caracterización	4 a 5 años				5 a 6 años				Total
	T1	T3	T5	T7	T2	T4	T6	T8	
	(*n*=2)	(*n*=26)	(*n*=27)	(*n*=112)	(*n*=5)	(*n*=18)	(*n*=21)	(*n*=84)	(*n*=295)
Establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos	100	53,8	51.9	90,2	60	66,7	76,2	84,5	79
Seriación a partir de patrones de repetición	0	34,6	48,1	9,8	40	33,3	23,8	15,5	20
Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos	0	11,6	0	0	0	0	0	0	1

A nivel general, en la tabla 4 se aprecia una mayor concentración de tareas de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos (79%). Siguen las tareas de seriación a partir de patrones de repetición (20%). Por último, se observa una presencia de tareas vinculadas con la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos prácticamente nula, con un 1%.

Por otra parte, en la totalidad de los libros de texto analizados, predominan las tareas de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos, por encima de las tareas de seriación a partir de patrones de repetición.

En lo que respecta a las tareas de seriaciones a partir de un patrón de repetición se desarrollan en ambos niveles escolares, en casi la totalidad de los libros de textos analizados. Mientras que, respecto a las tareas de descripción de cambios cualitativos y cuantitativos, están presentes sólo en un libro de texto (11,6%) en el nivel de 4 a 5 años.

Al situarnos, de manera más específica, desde la perspectiva de los indicadores que se han definido para precisar los conocimientos matemáticos de álgebra temprana en Educación Infantil (tabla 2), es posible observar en la tabla 5 los indicadores que predominan respecto de las tareas analizadas en los libros de texto de cada nivel educativo.

Tabla 5
Distribución por porcentaje de los indicadores que caracterizan las tareas matemáticas de álgebra temprana en Educación Infantil en relación con el total de tareas analizadas por nivel

Caracterización	Indicadores	4 a 5 años (*n*=167)	5 a 6 años (*n*=128)
Establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos	1	1,2%	5,5%
	2	4,2%	3,1%
	3	12,6%	10,2%
	4	3,6%	10,9%
	5	8,4%	10,9%
	6	15%	18%
	7	9,6%	7,8%
	8	26,9%	20,3%
Seriación a partir de patrones de repetición	9	1,8%	2,3%
	10	0,6%	3,9%
	11	10,8%	8,6%
	12	10,2%	2,3%
	13	1,2%	9,4%
	14	4,8%	3,1%
	15	0%	0%

Tabla 5

Distribución por porcentaje de los indicadores que caracterizan las tareas matemáticas de álgebra temprana en Educación Infantil en relación con el total de tareas analizadas por nivel

Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos	16	0%	0%
	17	1,8%	0%
	18	0%	0%

Podemos observar que tanto en el nivel de 4 a 5 años como en el de 5 a 6 años, los libros de texto proporcionan mayoritariamente tareas matemáticas vinculadas con establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos, donde predomina el indicador 8, asociado con la comparación de elementos cualitativos y cuantitativos, alcanzando una presencia del 26,9% y 20,3% en cada nivel, respectivamente. Un ejemplo de este tipo de tareas se muestra en las figuras 1 y 2.

Figura 1. Tarea de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos para 4 a 5 años, indicador 8. Fuente: T5 (2018, p.32)

Para responder de manera correcta, los estudiantes deben realizar una comparación de los objetos que intervienen en la tarea y establecer una relación entre cantidades, por medio del uso de comparativos, en este caso más que.

Figura 2. Tarea de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos para 5 a 6 años, indicador 8. Fuente: T6 (2018, p. 28)

Al igual que en ejemplo anterior, los estudiantes para dar solución a la tarea, requieren comparar elementos a partir de la relación que se da entre los objetos, aplicando distintos criterios de cantidad, como lo es, muchos/pocos, más/menos.

Por otra parte, en cuanto a las tareas matemáticas vinculadas con el nivel de 4 a 5 años que tienen relación con la seriación a partir de un patrón de repetición, destaca el indicador 11 (10,8%), referido a ampliar una secuencia. Mientras que en el nivel de 5 a 6 años prevalece el indicador 13, vinculado con identificar la unidad de repetición de un patrón, con una presencia del 9,4%. Las figuras 3 y 4 ejemplifican este tipo de tareas.

Figura 3. Tarea de seriación a partir de patrones de repetición para 4 a 5 años, indicador 11. Fuente: T5 (2018, p. 20)

Para dar solución a la tarea, los estudiantes deben ampliar la secuencia, identificando los elementos que le siguen. Para extender la secuencia se deben apoyar de la imitación del patrón sonoro de los animales, para luego pegar los recortables que continúan en la secuencia. Al ampliar la secuencia los estudiantes podrían identificar la estructura del patrón o no.

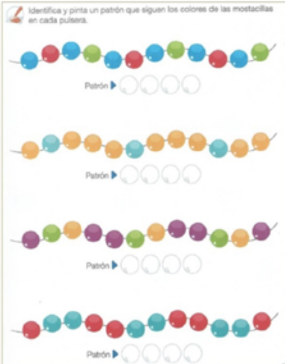


Figura 4. Tarea de seriación a partir de patrones de repetición para 5 a 6 años, indicador 13. Fuente: T4 (2019, p. 54)

La solución de esta tarea, requiere que los estudiantes analicen la estructura del patrón y reconozcan la unidad de repetición. En el desarrollo de esta tarea se debe considerar la longitud de la unidad de repetición.

Por último, las tareas sobre descripción de cambios cualitativos y cuantitativos son limitadas y se encuentran presentes sólo en el nivel de 4 a 5 años. Se observa el indicador 17, asociado con la aplicación de cambios cualitativos, alcanzando una presencia del 1,8%. En la figura 5 se expone un ejemplo de este tipo de tareas.

Figura 5. Tarea de descripción de cambios cualitativos y cuantitativos para 4 a 5 años, indicador 17. Fuente: T3 (2019, p. 107)

Para responder la tarea de manera correcta, los estudiantes deben aplicar un cambio cualitativo, de modo que realicen una transformación respecto de la primera imagen que se les presenta, a partir de las condiciones dadas.

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha presentado un análisis de las tareas matemáticas sobre álgebra temprana que proporcionan una colección de ocho libros de texto de Educación Infantil (4 a 6 años) de amplia difusión en Chile. El análisis se llevó a cabo a partir de la caracterización de los conocimientos de álgebra temprana para la Educación Infantil propuestos por Pincheira y Alsina (2021a): 1) establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos, 2) seriaciones a partir de patrones de repetición, 3) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

El análisis de las tareas matemáticas permitió constatar, en primer lugar, la presencia de tareas vinculadas al estudio del álgebra temprana en todos los libros de texto analizados para el nivel de transición de la Educación Infantil, como lo es NT1(Pre-kínder, 4 a 5 años) y NT2 (Kínder, 5 a 6 años). Otro aspecto importante a destacar, es que la incorporación de tareas algebraicas alcanza una mayor concentración en los libros de texto destinados a niños de 4 a 5 años, que en los libros dirigidos a niños de 5 a 6 años. Por lo tanto, la incorporación de tareas de índole algebraico en Educación Infantil no se realiza de manera progresiva como lo recomiendan diversos organismos internacionales (Australian Association of Mathematics Teachers and Early Childhood Australia, 2006; National Association for the Education of Young Children and National Council for Teachers of Mathematics, 2002; NCTM, 2000, 2006).

En cuanto a los conocimientos que movilizan los libros de texto de Educación Infantil para la enseñanza del álgebra temprana, se evidencia una predominancia importante de tareas que requieren establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos (80%). En ambos niveles escolares (4 a 5 años y 5 a 6 años) se profundiza en establecer una comparación de elementos a partir de criterios cualitativos o cuantitativos, alcanzando una presencia media del 24,5%. Le siguen las tareas que involucran seriaciones a partir de patrones de repetición (20%). Dichas tareas, destinadas a los niños de 4 a 5 años se centran en ampliar secuencias, mientras que a los 5 a 6 años se profundiza mayoritariamente en tareas de identificar la unidad de repetición. Por último, se observa una ausencia de tareas que aborden el análisis de cambios, tanto cualitativos como cuantitativos.

Estos resultados son relevantes en el contexto chileno, pues hasta el momento no se tenía evidencias respecto de cómo se está abordando la enseñanza del álgebra temprana en contextos formales, como es el libro de texto.

La escasa atención que sufren las tareas que involucran seriaciones a partir de patrones de repetición, así como la ausencia de tareas que involucran cambio es preocupante, y se contradice con lo que diversos organismos y autores proponen (e.g., Alsina, 2006; 2011; 2019a; Blanton y Kaput, 2011; Castro et al. 2017 ; Warren y Cooper, 2005) —destacando que ambos conocimientos son esenciales para promover, desde las primeras edades, el desarrollo del pensamiento algebraico en general e impulsar el pensamiento funcional en particular— estos libros de texto no entregan las herramientas necesarias para que los niños de Educación Infantil profundicen y desarrollen de manera progresiva estos conocimientos.

De acuerdo con Rittle-Johnson et al. (2013), la tarea de ampliar un patrón de repetición conduce al desarrollo de la habilidad de extender, mientras que las tareas que requieren identificar la unidad de repetición del patrón permiten alcanzar la habilidad de traducir. No obstante, es necesario incorporar tareas que involucren la construcción de un mismo patrón con diferentes elementos y la creación de patrones, puesto que permiten avanzar hacia el desarrollo de otras habilidades para hacer patrones y conseguir un nivel más alto de abstracción (Lüken, 2016; Wijns, Torbeyns et al., 2019; Wijns, Verschaffel et al., 2019), como es la generalización. El desarrollo de habilidades tempranas de creación de patrones sugiere una transición del pensamiento recursivo al pensamiento funcional (Wijns, Torbeyns et al., 2019), por lo tanto, es necesario que los libros de texto incorporen una variedad de tareas que atiendan a duplicar un patrón, ampliar una secuencia, encontrar elementos faltantes y construir patrones, para asegurar el paso de un pensamiento al otro.

Por otra parte, el desarrollo de tareas vinculadas con el análisis de cambios tanto cualitativos como cuantitativos es fundamental para establecer la comprensión de las funciones y fomentar la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas en las etapas educativas posteriores (Blanton et al., 2011; NCTM, 2000). En consecuencia, se requiere que los libros de texto consideren el desarrollo de este tipo de tareas desde las primeras edades.

De acuerdo con Remillard (2000), el uso del libro de texto por parte del profesorado supone replantearse aspectos de la propia práctica docente. En este contexto, los hallazgos encontrados en el estudio ofrecen la oportunidad al profesorado de adaptar, complementar y profundizar en tareas matemáticas que no han sido abordadas por el libro de texto, de modo que sea posible integrar la totalidad de los conocimientos necesarios para promover el desarrollo del pensamiento algebraico en las aulas de Educación Infantil.

En este sentido, y teniendo en cuenta la caracterización del álgebra temprana de Pincheira y Alsina (2021a), las prácticas de enseñanza del álgebra temprana deberían considerar el planteamiento de tareas de observación y comparación de elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos, como paso previo para realizar clasificaciones y seriaciones, puesto que al comparar se percibe si estos son semejantes, teniendo la oportunidad de agruparlos por clase, o distintos, permitiendo decidir si uno es mayor que otro o está antes que otro en una serie (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). En segundo lugar, deberían desarrollar la comprensión de los patrones, proporcionando a los estudiantes de Educación Infantil experiencias continuas con patrones repetitivos, animándolos a explorarlos, extenderlos y a descubrir la regla de formación (Zapatera, 2018).

Además, sería recomendable incluir tareas orientadas a describir y analizar situaciones de cambio a través de la aplicación de operadores (Alsina, 2006; 2011).

Adicionalmente, todavía respecto a la práctica del profesor, debería considerarse la implementación de tareas matemáticas en otros contextos, ya sea informales o intermedios (Alsina, 2019b; 2020a; 2020b) para abordar la enseñanza del álgebra temprana en Educación Infantil, de modo que el uso del libro de texto se constituya como un material complementario y no se remita a ser el recurso central del proceso de enseñanza-aprendizaje en estos niveles escolares.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447 y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856).

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood, 45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (en prensa). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de Educación Infantil. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática*.

Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Revista Educación Matemática, 30*(2), 171-201. https://doi.org/10.24844/em3002.07

Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Editorial Horsori.

Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros, 376*, 13-20. https://doi.org/10.14422/pym.i376.y2018.002

Alsina, Á. (2019a). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(1), 1-19. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19

Alsina, Á. (2019b). Itinerarios de enseñanza de las matemáticas en educación primaria. *Aula de innovación educativa, 286*, 12-17.

Alsina, Á. (2020a). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de*

Educação Matemática, *3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2020b). Itinerario de enseñanza para el álgebra temprana. *Revista Chilena de Educación Matemática,* *12*(1), 5-20. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.16

Alsina, Á. y Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Didácticas Específicas,* (16), 113-129. https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/14339

Australian Association of Mathematics Teachers and Early Childhood Australia (2006). Position paper on early childhood mathematics. https://aamt.edu.au/wp-content/uploads/2020/07/earlymaths.pdf

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2015). *The Australian Curriculum: Mathematics*. Recuperado el 23 de septiembre de 2022 https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Bastable, V. y Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165-184). Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (pp. 5-23). Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM e IAP.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87-107). Ediciones Pirámide.

Clements, H.D. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad*. Learning Tools LLC.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada, España. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf

Demosthenous, E. y Stylianides, A. (2014). Algebra-related tasks in primary school textbooks. En C. Nicol, P., Liljedahl, S., Oesterle y D. Allan (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, vol. 2* (pp. 369-376). PME. http://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2036%20PME%2038%202014%20Proceedings%20Vol%202.pdf

Even, R. y Olsher, S. (2014). Teachers as participants in textbook development: The Integrated Mathematics Wiki-book Project. En Y. Li y G. Lappan (Eds.), *Mathematics Curriculum in School Education* (pp 333-350). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7560-2_16

Fernández, C., Baptista, P. y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Hidalgo, L. (2005). Confiabilidad y validez en el contexto de la investigación y evaluación cualitativas. *Sinopsis Educativa. Revista venezolana de investigación*, *5*(1-2), 225-243. http://www.ucv.ve/uploads/media/Hidalgo2005.pdf

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum. https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781315097435-2/1-algebra-algebraic-reasoning-james-kaput

Kaput, J. J., Carraher, D.W. y Blanton, M. L. (2017). *Algebra in the Early Grades*. Routledge.

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis. An introduction to its methodology* (3ª edición). Sage Publications.

Lüken, M. M. (2016). Repeating patterning competencies in 3- and 4-year old kindergartners. En 13th *International Congress on Mathematical Education* (pp. 1–4). Hamburg.

Lüken, M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning, 14* (4), 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Ministerio de Educación (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación. https://parvularia.mineduc.cl/wp-content/uploads/2019/09/Bases_Curriculares_Ed_Parvularia_2018-1.pdf

Ministry of Education Singapore (2013). *Nurturing early learners: A curriculum for kindergartens in Singapore: Numeracy (volume 6)*. Ministry of Education. https://www.ecda.gov.sg/growatbeanstalk/Documents/MOE%20NEL%20Resources/NEL_educators%20guide%20vol%206_numeracy.pdf

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensmaiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6186

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

National Association for the Education of Young Children y National Council for Teachers of Mathematics (2002). *Early childhood mathematics: Promoting good beginnings. A joint position statement*. National Association for the Education of Young Children. http://www.naeyc.org/files/naeyc/file/positions/psmath.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence.* The National Council of Teachers of Mathematics.

Papic, M.M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8

Papic, M.M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Piaget, J. (1953). How children form mathematical concepts. *Scientific American, 189*(5), 74-79.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021b). El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: Implicaciones para la formación docente. *Bolema, Boletim de Educação Matemática, 35*(71), 1316-1337. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal, 100*(4), 331-350. https://doi.org/10.1086/499645

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L. y Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly, 46*, 166–178. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.006

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258-288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer Science & Business Media. https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-4681-1

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. y Torbeyns, J. (2019b). Which early patterning activities count the most? En M. Graven, H. Venkat, A. Essien y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 446-453). PME.

Zapareta, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números, Revista de Didáctica de las matemáticas*, *97*, 51-67. https://drive.google.com/file/d/1RvbG_rifclth3f062etQ6hxptngrmaoU/view

Nataly Goreti Pincheira Hauck
Universitat de Girona
nataly.pincheira@udg.edu

Yeni Acosta
Universitat de Girona
yeni.acosta@udg.edu

Ángel Alsina
Universitat de Girona
angel.alsina@udg.edu

Recibido: Abril 2022. Aceptado: Junio 2022
doi: 10.30827/pna.v17i1.24522

ISSN: 1887-3987

4.4 Estudio [D]

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: Implicaciones para la formación docente. *Revista Bolema*, *Boletim de Educação Matemática*, *35*(71), *1316-1337*. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: implicaciones para la formación docente

Early algebra in primary education textbooks: implications for teacher education

Nataly **Pincheira**[*]
ORCID iD 0000-0002-5051-964X
Ángel **Alsina**[**]
ORCID iD 0000-0001-8506-1838

Resumen

En este estudio se analizan las tareas de álgebra temprana en una colección de ocho libros de texto de Educación Primaria chilenos, de amplia difusión. Para la investigación se ha seguido una metodología cualitativa, de carácter descriptivo, a partir de la técnica de análisis de contenido. Los resultados obtenidos muestran una variedad de tareas matemáticas con una distribución no homogénea, predominando las tareas de relaciones basadas en reglas, más específicamente, tareas que involucran la comprensión de patrones, seguidas de tareas de relaciones conocidas-desconocidas y una presencia menor de tareas de relaciones aritméticas situadas. Se concluye que es necesario brindar experiencias de formación al profesorado que les permita, por una parte, profundizar en el análisis de tareas matemáticas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano para alcanzar una adecuada selección e implementación de dichas tareas y, por otra parte, indagar en la actividad matemática que deben desarrollar los estudiantes para su resolución.

Palabras clave: Álgebra temprana. Enseñanza. Tareas matemáticas. Libros de texto. Educación Primaria.

Abstract

This study analyses the early algebra tasks present in a set of eight Primary Education Chilean textbooks of wide dissemination. The methodology used involves a qualitative approach of descriptive character, by means of the content analysis technique. The results obtained show a variety of mathematical tasks with a non-homogeneous distribution, with a predominance of rule-based relations tasks, more specifically, tasks involving the understanding of patterns, followed by known-unknown relations tasks and a minor presence of arithmetically-situated relations tasks. It concludes that it is necessary to provide training experiences to teachers that allow them to deepen in the analysis of mathematical tasks that promote early algebraic thinking to achieve an adequate selection and implementation of such tasks on the one hand, and on the other, to investigate the mathematical activity that students must develop for its resolution.

Keywords: Early algebra. Teaching. Mathematical tasks. Textbooks. Primary Education.

[*] Doctoranda en Ciencias de la Educación por la Universidad de Girona (UdG), Girona, España. E-mail: nataly.pincheira@udg.edu.
[**] Doctor en Psicología por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Catedrático de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (UdG), Girona, España. E-mail: angel.alsina@udg.edu.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

1 Introducción

La introducción de conocimientos de naturaleza algebraica, desde los primeros niveles escolares, se ha impulsado durante las últimas dos décadas y, progresivamente, se ha ido asentado en los currículos de matemáticas de Educación Primaria de diversos países (e.g. ACARA, 2015; MINEDUC, 2012; MINISTRY OF EDUCATION, REPUBLIC OF SINGAPORE, 2012; NCTM, 2000).

Esta nueva alternativa de cambio e integración curricular se alberga bajo las directrices del enfoque *Early-Algebra*, a partir de ahora álgebra temprana, cuyo propósito es promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolaridad y facilitar una mejor comprensión de las matemáticas (BASTABLE; SCHIFTER, 2007; CAI; KNUTH, 2011; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KAPUT, 2000). Más específicamente, los objetivos que persigue el álgebra temprana consideran el desarrollo de modos de pensamiento que permitan alcanzar una comprensión más profunda y compleja de la matemática escolar (BLANTON; KAPUT, 2005), dado que el estudio del álgebra se encuentra implícito, de manera transversal, en el currículo de matemáticas desde los primeros niveles (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007).

La incorporación del álgebra temprana en los currículos contemporáneos de matemáticas de Educación Primaria interpela directamente al profesorado, desafiándolos a desarrollar prácticas de enseñanza que consideren la selección pertinente e implementación de tareas matemáticas que promuevan, de manera paulatina y sistemática, la enseñanza de estos contenidos. En este contexto, el profesorado sustenta y guía sus prácticas de enseñanza apoyándose en diversos recursos, siendo el libro de texto una de las herramientas más recurrentes (SHIELD; DOLE, 2013).

Los libros de texto constituyen una fuente de información para el alumnado y el profesorado, con tareas de clase y preguntas de evaluación (CAMPANARIO, 2001), convirtiéndose en uno de los elementos más emblemáticos del proceso de enseñanza-aprendizaje (RAMÍREZ, 2003). Diversos estudios (e.g. PORTER, 2002; TARR *et al*., 2006) han informado que, muchas de las decisiones que toma el profesorado acerca de los conocimientos matemáticos que deben enseñar, y cómo enseñarlos, están influenciadas por los libros de texto que utilizan y, en consecuencia, la instrucción en el aula depende en gran medida de este recurso. Esto implica que las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes estén estrechamente vinculadas con los conocimientos que promueven los libros de texto de matemáticas (STYLIANIDES, 2009).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Adicionalmente, el uso del libro de texto por parte del profesorado supone replantearse o cambiar aspectos de la propia práctica docente (REMILLARD, 2000), puesto que ofrece oportunidades para utilizar, adaptar y comprender el trabajo de los estudiantes en las tareas matemáticas que sugieren. Desde este punto de vista, el libro de texto puede influir en la formación docente, es decir, en el conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas y, en consecuencia, se debería prestar especial atención a las tareas matemáticas propuestas en este recurso para promover una enseñanza efectiva del álgebra temprana.

Considerando, por un lado, el impacto del libro de texto como herramienta para suscitar la enseñanza de las matemáticas y, por otro, que algunos estudios han evidenciado que las tareas de los libros de texto no están intencionalmente dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico temprano (AKÉ; GODINO, 2018), nuestro propósito es seguir investigando en esta dirección, para aportar nuevos datos que permitan una mayor comprensión tanto de las características que presentan las tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria como de los conocimientos matemáticos que promueven dichas tareas para conducir la enseñanza de este bloque de contenido.

Para llevar a cabo este análisis, se integra el marco analítico de Demosthenous y Stylianides (2014) para determinar las tareas sobre álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria, con la caracterización de los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución de las tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de Pincheira y Alsina (2021). Con base en este marco, el objetivo de nuestro estudio es analizar las tareas sobre álgebra temprana presentes en una serie de ocho libros de texto escolares chilenos de Educación Primaria (6-12 años).

2 La enseñanza del álgebra temprana en Educación Primaria

La enseñanza del álgebra temprana en Educación Primaria se ha ido consolidando durante los últimos años, pues existe un consenso cada vez mayor de los investigadores por brindar experiencias de aprendizaje que fomenten el desarrollo del pensamiento algebraico desde los niveles iniciales (BLANTON; KAPUT, 2005; CARPENTER; FRANKE; LEVI, 2003; MOLINA, 2009; NCTM, 2000).

Incorporar el álgebra temprana en Educación Primaria requiere atender a una amplia concepción del álgebra que comprende diversos elementos, como la generalización de la aritmética, el estudio de las relaciones numéricas y la generalización de patrones, el estudio de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

las relaciones funcionales, el estudio de las estructuras matemáticas comunes abstraídas de cálculos y relaciones, junto con el desarrollo de la modelización y la resolución de problemas (KAPUT, 2000; MOLINA, 2011; MOLINA; CAÑADAS, 2018; SCHLIEMANN *et al.*, 2003).

Diversas investigaciones informan que los estudiantes pueden desarrollar tanto tareas matemáticas vinculadas con el álgebra temprana, desde las primeras edades, como aprender las nociones algebraicas elementales (e.g. CARPENTER; FRANKE; LEVI, 2003; MOLINA, 2011; RADFORD, 2010, 2011), tales como reconocer patrones repetitivos, describir situaciones de igualdad y desigualdad, entre otras. En este sentido, el análisis de los libros de texto permite aproximarnos a esta realidad, puesto que este recurso didáctico influye, considerablemente, en el proceso de instrucción en el aula (EVEN; OLSHER, 2014), al constituirse en un elemento de apoyo para el profesorado en la preparación de la clase.

Con base en lo anterior, Demosthenous y Stylianides (2014) proponen un marco analítico para determinar las tareas matemáticas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de la Educación Primaria. En este marco se consideran tres categorías de tareas, que aportan una mirada amplia y general hacia las tareas matemáticas sobre álgebra temprana en los libros de texto:

a) *Tareas de relaciones aritméticas situadas (RAS)*, centradas en la estructura de la aritmética atendiendo al comportamiento de las operaciones aritméticas y propiedades como objetos matemáticos y el por qué funcionan de esta manera. Estas tareas podrían involucrar a los estudiantes en la generalización de estas relaciones. En la literatura, esta categoría de tareas se conoce como aritmética generalizada (CARPENTER; FRANKE; LEVI, 2003; KAPUT, 2008). Por ejemplo: una tarea que pide a los estudiantes formar una expresión general para la propiedad conmutativa de la adición.

b) *Tareas de relaciones basadas en regla (RBR)*, centradas en las relaciones de un conjunto de datos o entre conjuntos de datos. Estas tareas podrían involucrar a los estudiantes en la formación de una regla que se aplique a todos los elementos de los conjuntos de datos comprobando las reglas plausibles, extendiendo una regla para casos cercanos y lejanos, y generalizando una regla. Así también, la tarea podría ofrecer oportunidades para trabajar con representaciones equivalentes de la misma regla (por ejemplo, verbales y algebraicas). Por ejemplo: una tarea que pide a los estudiantes que generalicen verbalmente la regla funcional de un patrón geométrico creciente. Esta categoría de tareas se relaciona con el estudio de los patrones, las funciones, el cambio (cambios cualitativos y cuantitativos, cambios que experimenta una variable, tasas de cambio contantes o variables) y la variación (KAPUT,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

2008; NCTM, 2000).

c) *Tareas de relaciones conocidas-desconocidas (RCD)*, vinculadas con las relaciones entre cantidades y, números conocidos y desconocidos, y tratan a las incógnitas como objetos en lugar de como procesos. Por ejemplo, un problema como sigue: *una granja tiene pollos y conejos. Contamos las cabezas y encontramos 27. Contamos los pies y encontramos 78. ¿Cuántos son los pollos y cuántos los conejos?* Esta categoría de tareas se fundamenta en la descripción del álgebra como un conjunto de lenguajes de modelización (KAPUT, 2008) y el enfoque de la resolución de problemas sobre la introducción al álgebra (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996).

Algunos trabajos que analizan series de libros de texto, con base en estas categorías, aportan evidencia acerca de los tipos de tareas algebraicas que estos emplazan en diversos niveles educativos. Demosthenous y Stylianides (2014), por ejemplo, analizaron una serie de libros de texto de Educación Primaria para cuarto, quinto y sexto grado (9-12 años) y obtuvieron que, de las 2814 tareas que contenían, el 10,7% estaban relacionadas con el álgebra, entre las que prevalecen las tareas matemáticas basadas en reglas (42,4%) y las tareas de relaciones conocidas-desconocidas (45,7%).

Salazar, Cabañas-Sánchez y Navarro (2016) analizaron las tareas matemáticas relacionadas al álgebra temprana en los libros de texto de segundo y tercer grado de Educación Primaria (7-9 años). Los resultados muestran que, de las 140 tareas analizadas, la mayoría se ubican en la categoría de relaciones aritméticas situadas (79,3%), seguidas de las tareas de relaciones basadas en regla (15,7%) y un porcentaje menor corresponden a tareas de relaciones conocidas-desconocidas (5%). En general, se evidencia que las tareas matemáticas correspondientes a este bloque de contenido tienen escasa presencia en los primeros grados de Educación Primaria.

Asimismo, Cabañas-Sánchez, Salazar y Nolasco-Hesiquio (2017) analizaron las tareas matemáticas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico en primer grado de Educación Primaria (6-7 años). Se analizaron un total de 125 tareas, de las cuales 68 corresponden al estudio del álgebra temprana. En su mayoría, las tareas se ubican en las categorías de relaciones aritméticas situadas (44%) y relaciones basadas en regla (43%), una cantidad menor de tareas corresponden a las de tipo de relaciones conocidas-desconocidas (13%).

La multidimensionalidad de tareas que se describen en estos estudios responde a la propuesta de cambio curricular que promueve el álgebra temprana. Como se ha indicado en la introducción, diversos currículos de matemáticas de Educación Primaria han empezado a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

incorporar, progresivamente, estos contenidos. A modo de ejemplo, en la Figura 1 se muestra la presencia del álgebra en los estándares para las matemáticas propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics*, y su progresión a lo largo de las diferentes etapas (NCTM, 2000).

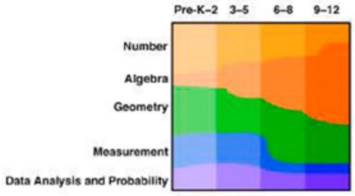


Figura 1 – Diferente atención de los Estándares de contenido
Fuente: NCTM (2000, p. 30)

Como se aprecia en la Figura 1, la presencia del álgebra va aumentando progresivamente desde finales de la etapa Pre-K-2 (3 a 8 años) y durante toda la etapa 3-5 (9 a 12 años) y, con ello, se pretende que el alumnado de Educación Primaria pueda construir, gradualmente, una base sólida de conocimientos para el aprendizaje del álgebra a medida que aumenta el nivel y, de este modo, alcanzar con éxito el estudio de matemáticas más avanzadas (BLANTON *et al*., 2015). En lo que se refiere a los primeros niveles, explicitan los siguientes contenidos (Figura 2).

Álgebra

ESTÁNDAR *Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:*	Etapa Pre-K–2 Expectativas En la etapa Pre-K-2, todos los estudiantes deberían:	Etapa 3–5 Expectativas En la etapa 3-5, todos los estudiantes deberían:
Comprender patrones, relaciones y funciones	• seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades; • reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra; • analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.	• describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos; • representar y analizar patrones y funciones, verbalmente y mediante tablas y gráficas.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	• ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números; • usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales;	• identificar propiedades como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad, y emplearlas en el calculo con números naturales; • representar la idea de variable como cantidad desconocida, por medio de una letra o un símbolo; • expresar relaciones matemáticas mediante ecuaciones.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	• modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.	• modelizar situaciones de problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en contextos diversos	• describir cambios cualitativos, como "ser más alto"; • describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.	• investigar de qué manera el cambio que experimenta una variable se relaciona con el de una segunda variable; • identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes o variables, y compararlas.

Figura 2 – Estándares de álgebra para la Etapa Pre-K-2 (3-8 años) y la Etapa 3-5 (9-12 años)
Fuente: NCTM (2000, p. 402)

A partir de la revisión de las orientaciones curriculares de Estados Unidos (CCSSM, 2010; NCTM, 2000) y de otros países que ponen en manifiesto el estudio del álgebra temprana desde los primeros años de escolaridad, como Australia (ACARA, 2015), Singapur

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

(MINISTRY OF EDUCATION, REPUBLIC OF SINGAPORE, 2012, 2013) y Chile (MINEDUC, 2012, 2018), junto con las aportaciones sobre los conocimientos importantes de álgebra temprana planteados por diversos autores (ALSINA, 2019; CARPENTER; FRANKE; LEVI, 2003; KAPUT, 2000; MOLINA, 2011; MOLINA; CAÑADAS, 2018; RADFORD, 2010, 2011; SCHLIEMANN *et al.*, 2003; entre otros), Pincheira y Alsina (2021) han realizado una primera caracterización de los conocimientos matemáticos que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en Educación Infantil y Primaria.

En concreto, para la Educación Primaria establecen, inicialmente, cuatro categorías de conocimientos: a) comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones: centrado en cómo se relacionan unas cantidades con otras, a partir de equivalencias, ordenaciones, desigualdades etc., establecer generalizaciones e identificar patrones y regularidades; b) uso de símbolos algebraicos y modelos para representar situaciones matemáticas: asociado a la notación simbólica a través de objetos, dibujos o lenguaje formal y, la modelización de situaciones del mundo real; c) comprensión del cambio: vinculado con el análisis de cambios cualitativos o cuantitativos en diversos contextos; d) uso de variables para determinar una constante o incógnita: referente a las condiciones que pueden tomar los valores de una variable como cantidad desconocida.

3 Método

De acuerdo con el objetivo de nuestro estudio, se ha utilizado una metodología cualitativa de carácter descriptivo (HERNÁNDEZ; FERNÁNDEZ; BAPTISTA, 2010), usando como técnica el análisis de contenido, que es "una técnica de investigación para hacer inferencias replicables y válidas a partir del texto (u otra materia significativa) a los contextos de su uso" (KRIPPENDORFF, 2013, p. 24). Para llevar a cabo el análisis de contenido, hemos adaptado ciertos elementos de la estructura propuesta por Cobo (2003) para el análisis de libros de texto, considerando las siguientes etapas:

1. Reconocer y seleccionar las unidades de análisis, constituidas por las secciones de los libros de texto que presentan tareas matemáticas para abordar conocimientos vinculados al álgebra temprana.
2. Determinar las categorías e indicadores de análisis, a partir de la articulación entre el marco analítico propuesto por Demosthenous y Stylianides (2014) y la caracterización del álgebra temprana de Pincheira y Alsina (2021).
3. Codificar las tareas matemáticas relacionadas con el estudio del álgebra

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

temprana presentes en los libros de texto con base en estas categorías e indicadores.

4. Sistematizar la información por medio de tablas estadísticas, cuya lectura facilite el análisis descriptivo y la obtención de conclusiones.

5. Evidenciar el análisis descriptivo, por medio de la selección de ejemplos de tareas matemáticas propuestas en los textos de acuerdo a cada una de las categorías de análisis establecidas.

3.1 Muestra

La muestra está constituida por una colección de ocho libros de texto chilenos (Cuadro 1) de Educación Primaria (1º a 6º grado) que se encuentran en concordancia con las orientaciones curriculares vigentes de matemáticas en Chile (MINEDUC, 2012). Dicha muestra se ha escogido de manera intencionada dado el impacto que posee, puesto que los libros de texto seleccionados corresponden a textos oficiales con los cuales se orienta la enseñanza de la matemática escolar en los establecimientos educacionales chilenos, tanto públicos como particulares subvencionados (94,1%), siendo distribuidos de manera gratuita por el Ministerio de Educación.

Código	Título	Autores	Editorial
T1	Sumo Primero Tomo 1 1º Básico	Masami Isoda (2020)	Mineduc
T2	Sumo Primero Tomo 2 1º Básico	Masami Isoda (2020)	Mineduc
T3	Sumo Primero Tomo 1 2º Básico	Masami Isoda (2020)	Mineduc
T4	Sumo Primero Tomo 2 2º Básico	Masami Isoda (2020)	Mineduc
T5	Matemática 3º Básico	Andrea Urra Vásquez, Carmen Córdoba Hermosilla y Claudia Quezada Soto (2019)	Santillana
T6	Matemática 4º Básico	Romina Rodriguez Rojel, Daniela García Orellana, Patricia Romante Flores y Arlette Verdejo Lagunas (2019)	SM
T7	Matemática 5º Básico	Fong Ho Kheong, Gan Kee Soon y Chelvi Ramakrishnan (2019)	Santillana
T8	Matemática 6º Básico	Lesly Maldonado Rodríguez y Carlos Castro Maldonado (2019)	Santillana

Cuadro 1 – Colección de libros de texto considerados para el análisis
Fuente: elaboración propia

A partir de la muestra, se han seleccionado las unidades de análisis que corresponden a las tareas matemáticas vinculadas al estudio del álgebra temprana. Cabe destacar que los libros de texto correspondientes a los niveles de 1º Básico y 2º Básico se subdividen en dos series de textos (Tomo 1 y 2), como se aprecia en el Cuadro 1. Para el desarrollo de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

investigación, se han analizado ambas subseries de textos, de manera transversal al nivel educativo que corresponden, dado que uno es la continuación del otro.

3.2 Categorías e indicadores de análisis

Para llevar a cabo el estudio, como se ha indicado, las unidades de análisis se han examinado con base en las tres categorías de tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto, planteadas por Demosthenous y Stylianides (2014): a) tareas de relaciones aritméticas situadas, b) tareas de relaciones basadas en reglas y, c) tareas de relaciones conocidas-desconocidas. Estas categorías se han articulado con las categorías de conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Primaria propuestos por Pincheira y Alsina (2021), al reconocer relaciones o estructuras matemáticas asociadas al tipo de razonamiento que demanda el proceso de resolución de tareas sobre el pensamiento algebraico temprano:

- Las tareas de relaciones aritméticas situadas se conectan con la comprensión de distintos tipos de relaciones, la solución de este tipo de tareas se vincula, explícitamente, con la idea de equivalencia, y, de modo implícito, con la desigualdad (CABAÑAS-SÁNCHEZ; SALAZAR; NOLASCO-HESIQUIO, 2017). A su vez, en este tipo de tareas se establecen relaciones de orden y comparación entre cantidades.

- Las tareas de relaciones basadas en reglas promueven el reconocimiento de patrones en sucesiones y desarrollo del pensamiento funcional (CABAÑAS-SÁNCHEZ; SALAZAR; NOLASCO-HESIQUIO, 2017; DEMOSTHENOUS; STYLIANIDES, 2014). De este modo, dichas tareas se enmarcan en la comprensión de patrones y comprensión del cambio.

- Las tareas de relaciones conocidas-desconocidas se articulan con problemas de valor faltante y el lenguaje de modelización (DEMOSTHENOUS; STYLIANIDES, 2014), vinculándose directamente con el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones y, uso de variables para determinar una constante o incógnita.

La articulación de ambos enfoques ha permitido definir un conjunto de indicadores para establecer las relaciones de las tareas matemáticas asociadas al estudio del álgebra temprana, y de esta forma, analizar de manera más precisa los conocimientos matemáticos que se deben movilizar en el proceso de resolución de tareas que promueven el pensamiento algebraico temprano en los libros de texto de Educación Primaria. En el marco de esta articulación (Cuadro 2), se ha subdividido en dos la categoría de conocimientos: *a) Comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones*, ya que las relaciones mantienen

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

vínculos con la categoría *Tareas de relaciones aritméticas situadas* (RAS), mientras que los patrones se vinculan con las *Tareas de relaciones basadas en regla* (RBR).

Categorías de tareas	**Indicadores**	
RAS	Comprensión de distintos tipos de relaciones	1. Establecer relaciones de equivalencia entre dos cantidades. 2. Establecer relaciones de igualdad o desigualdad entre cantidades. 3. Establecer relaciones de comparación y/u orden entre cantidades.
RBR	Comprensión de patrones	4. Crear secuencias o patrones. 5. Completar elementos faltantes en secuencias numéricas o lógicas. 6. Utilizar tablas de 100 para determinar secuencias y/o patrones numéricos (crecientes, decrecientes) 7. Establecer relaciones o reglas entre los números que componen una tabla de valores. 8. Identificar un patrón a partir de una secuencia numérica, secuencia lógica o en relación a los valores de una tabla. 9. Determinar los términos de una secuencia considerando el patrón de formación. 10. Determinar términos de una tabla de valores a partir de un patrón o secuencia.
	Comprensión del cambio.	11. Identificar y/o describir cambios cualitativos. 12. Identificar y/o describir cambios cuantitativos. 13. Analizar situaciones en las que se producen cambios y otras que se mantienen constantes.
RCD	Uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.	14. Representar una ecuación/inecuación por medio de balanza o viceversa. 15. Representar expresiones escritas en lenguaje natural con lenguaje algebraico o viceversa. 16. Utilizar expresiones algebraicas para establecer relaciones entre números. 17. Identificar regularidades en una situación y utilizar símbolos algebraicos para expresarla. 18. Plantear y/o resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. 19. Plantear y/o resolver inecuaciones.
	Uso de variables para determinar una constante o incógnita.	20. Evaluar expresiones de una variable. 21. Analizar las condiciones de los valores que puede tomar una variable. 22. Determinar los valores de la variable que permiten mantener y/o dar solución a una ecuación o inecuación.

Cuadro 2 – Categorías e indicadores utilizados en el proceso de codificación
Fuente: elaboración propia

La codificación de los datos se ha llevado a cabo en tres fases: 1) la clasificación de las tareas matemáticas sobre álgebra temprana con base en las categorías propuestas por Demosthenous y Stylianides (2014); 2) la delimitación de las tareas clasificadas a partir de la caracterización del álgebra temprana en Educación Primaria propuesta por Pincheira y Alsina (2021); 3) y finalmente, el uso de los indicadores correspondientes a cada tipo de tarea matemática de acuerdo con la asignación de puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 puntos) en las lecciones vinculada al estudio del álgebra temprana. Para establecer la codificación de los datos se han realizado revisiones sucesivas de los textos escolares, de modo cíclico e inductivo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

4 Resultados

Considerando nuestro objetivo de estudio, se describen los datos obtenidos a partir de la articulación del marco analítico propuesto por Demosthenous y Stylianides (2014) y la caracterización de los conocimientos de álgebra temprana para la Educación Primaria propuestos por Pincheira y Alsina (2021).

4.1 Distribución de las tareas matemáticas propuestas en los libros de texto relacionadas con el estudio del álgebra temprana

Para seleccionar las tareas matemáticas vinculadas con el estudio del álgebra temprana, en primer lugar, se ha partido de las lecciones destinadas al desarrollo de este bloque de contenido declaradas en los libros de texto. Dado que los libros de texto de 1º y 2º de Educación Primaria no presentan lecciones específicas para indagar en el estudio del álgebra temprana, se han seleccionado todas las tareas matemáticas que se vinculan con su enseñanza.

Por otra parte, en la selección se han considerado las tareas matemáticas sobre álgebra temprana propuestas en todas las secciones de los libros de texto: evaluación inicial, desarrollo del contenido, evaluación de proceso, evaluación final.

La distribución de las tareas matemáticas de acuerdo con cada nivel educativo se aprecia en la Tabla 1.

Tabla 1 – Distribución de las tareas matemáticas analizadas

Nivel Educativo	Frecuencia	Porcentaje
1º Educación Primaria	107	29
2º Educación Primaria	41	11
3º Educación Primaria	45	12
4º Educación Primaria	49	13
5º Educación Primaria	15	4
6º Educación Primaria	116	31

Fuente: elaboración propia

Se han analizado un total de 373 tareas matemáticas vinculadas al estudio del álgebra temprana, observando que su enseñanza se encuentra presente en los libros de texto de todos los niveles de Educación Primaria. Asimismo, se evidencia una concentración mayor de tareas en el primer y último nivel de Educación Primaria, mientras que en 5º Educación Primaria la presencia de la actividad algebraica temprana en los libros de texto es considerablemente menor, con un 4%.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

4.2 Análisis de las categorías de tareas y de los conocimientos matemáticos que caracterizan la enseñanza del álgebra temprana

En la Tabla 2 se muestran los datos correspondientes a la articulación de las categorías de las tareas relacionadas con el álgebra temprana que plantean Demosthenous y Stylianides (2014) y las categorías de conocimientos que caracterizan la enseñanza del álgebra temprana en Educación Primaria (PINCHEIRA; ALSINA, 2021).

Tabla 2 – Distribución por porcentaje de las categorías de tareas relacionadas con el álgebra temprana y los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Primaria

Categorías de tareas	Caracterización	1º E.P (n=107)	2º E.P (n=41)	3º E.P (n=45)	4º E.P (n=49)	5º E.P (n=15)	6º E.P (n=116)	Total (n=373)
RAS	Comprensión de distintos tipos de relaciones	38,3	46,3	15,6	6,1	0	7,8	21,2
RBR	Comprensión de patrones	29	19,6	53,4	24,5	100	24,1	31,6
	Comprensión del cambio	32,7	34,1	0	0	0	0	13,1
RCD	Uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones	0	0	31	61,2	0	50,9	27,6
	Uso de variables para determinar una constante o incógnita	0	0	0	8,2	0	17,2	6,5

Fuente: elaboración propia

A nivel general, los datos de la Tabla 2 muestran una mayor concentración de tareas de relaciones basadas en regla (RBR), con un 44,7%, destacando las tareas vinculadas a la comprensión de patrones (31,6%). Siguen las tareas de relaciones conocidas-desconocidas (RCD), con un 34,1%, donde predominan las tareas relacionadas con el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones (27,6%). Por último, se observa una menor presencia de las tareas de relaciones aritméticas situadas (RAS), con un 21,2%.

Así también, se observa que en los niveles de 1º, 2º, 3º y 5º Educación Primaria, las tareas RBR predominan sobre las tareas de RAS y tareas de RCD, con un 61,7%, 53,7%, 53,4% y 100%, respectivamente. Cabe destacar que este tipo de tareas se encuentra presente en todos los libros de texto de Educación Primaria analizados.

En lo que respecta a las tareas de RCD, comienzan a desarrollarse a partir de 3º Educación Primaria, a excepción 5º de Educación Primaria, alcanzando una mayor presencia

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

en los niveles 4º y 6º Educación Primaria, con un 69,4% y 68,1% respectivamente.

Por otro lado, en relación con las tareas de RAS se encuentran presentes en casi la totalidad de los libros de texto, exceptuando el 5º Educación Primaria.

Si nos situamos, de manera más específica, desde la perspectiva de los indicadores que se han definido para establecer las relaciones de las tareas matemáticas asociadas al estudio del álgebra temprana (Cuadro 2), en la Tabla 3 es posible observar los indicadores que predominan respecto de las tareas matemáticas analizadas en cada nivel educativo de 1º a 6º de Educación Primaria. Cabe destacar que una determinada tarea matemática puede requerir atender a uno o más de los indicadores propuestos, razón por la cual a una tarea puede no corresponderle un solo indicador.

Tabla 3 – Distribución por porcentaje de los indicadores que caracterizan las tareas matemáticas de álgebra temprana en Educación Primaria en relación al total de tareas analizadas para cada nivel educativo

Categorías de tareas	**Caracterización**	**Indicadores**	**1º E.P**	**2º E.P**	**3º E.P**	**4º E.P**	**5º E.P**	**6º E.P**
RAS	Comprensión de distintos tipos de relaciones	1	5,6	0	4,4	6,1	0	0
		2	17,8	26,8	6,7	0	0	3,4
		3	15	19,5	4,4	0	0	0
RBR	Comprensión de patrones	4	1,9	2,4	4,4	0	0	0,9
		5	26,2	14,6	11,1	0	13,3	3,4
		6	0	0	11,1	2	0	0
		7	0	2,4	2,2	10,2	13,3	13,8
		8	5,6	0	22,2	20,4	33,3	9,5
		9	0	0	6,7	4,1	40	5,2
		10	0	0	0	12,2	26,7	10,3
	Comprensión del cambio	11	0	0	0	0	0	0
		12	32,7	34,1	0	0	0	0
		13	0	0	0	0	0	0
RCD	Uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas	14	0	0	4,4	12,2	0	1,7
		15	0	0	2,4	6,1	0	13,8
		16	0	0	4,4	0	0	10,3
		17	0	0	0	0	0	12,1
		18	0	0	20	26,5	0	18,1
		19	0	0	0	18,3	0	0
	Uso de variables para determinar una constante o incógnita	20	0	0	0	0	0	13,8
		21	0	0	0	8,1	0	6,3
		22	0	0	0	10,2	0	0

Fuente: elaboración propia

En 1º de Educación Primaria, los libros de texto proporcionan mayoritariamente tareas matemáticas que promueven la comprensión de distintos tipos de relaciones (38,3%), sobresaliendo con un 17,8% el indicador 2, que tiene relación con establecer relaciones de igualdad o desigualdad entre cantidades. Un ejemplo de este tipo de tarea se muestra en la Figura 3, puesto que, para responder de manera correcta, los estudiantes deben agregar los elementos faltantes para equilibrar la balanza y establecer la igualdad entre las cantidades.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Figura 3 – Tarea de comprensión de distintos tipos de relaciones, indicador 2
Fuente: T2 (2020, p. 47)

Al analizar las tareas matemáticas propuestas en los libros de texto de 2º Educación Primaria predominan las tareas matemáticas que involucran la comprensión de distintos tipos de relaciones (46,3%), destacando el indicador 2, referido a establecer relaciones de igualdad o desigualdad entre cantidades (26,8%). En la Figura 4 se muestra un ejemplo de este tipo de tarea.

Figura 4 – Tarea de comprensión de distintos tipos de relaciones, indicador 2
Fuente: T4 (2020, p. 42)

Los estudiantes, para dar solución al problema, requieren establecer relaciones entre las cantidades que intervienen, en este caso la tarea demanda establecer una relación de igualdad entre los resultados de ambas tarjetas.

Por otra parte, en relación al libro de texto de 3º Educación Primaria, destacan las tareas que requieren de la comprensión de patrones para su resolución (53,4%), prevalece el indicador 8 (22,2 %), vinculado con la identificación de un patrón a partir de una secuencia numérica, secuencia lógica o en relación con los valores de una tabla. Un ejemplo de tarea que involucra la comprensión de patrones se presenta en la Figura 5:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

1. Observa los números que se muestran en los recuadros pintados en la tabla y luego responde.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

a. ¿Qué patrón observas en el dígito de las unidades y en el dígito de las decenas de los números contenidos en los recuadros pintados?

Unidades ▶ ☐ Decenas ▶ ☐

Figura 5 – Tarea de comprensión de patrones, indicador 8
Fuente: T5 (2019, p. 183)

Para dar solución a este tipo de tarea, los estudiantes deben determinar el patrón numérico a partir de los valores que muestra la tabla. Descubrir el patrón requiere observar los números de manera diagonal, identificando el sentido de la secuencia, ya sea creciente o decreciente.

En el caso del libro de texto de 4º Educación Primaria, predominan las tareas que involucran el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas (61,2%), es el indicador 18 el que presenta una mayor presencia (26,5%). Este indicador tiene relación con plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Un ejemplo de este tipo de tarea es el siguiente (Figura 6):

6 Plantea una ecuación a partir de la situación y aplica una estrategia para resolverla.

Figura 6 – Tarea de uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, indicador 18
Fuente: T6 (2019, p. 105)

En la Figura 6, los estudiantes deben modelar una situación cotidiana mediante una ecuación. A su vez, el desarrollo de esta tarea requiere determinar el valor de la incógnita apoyándose en diversas estrategias, ya sea utilizando una balanza equilibrada descomponiendo los números involucrados o aplicando propiedades numéricas, determinando la operación inversa.

En cuanto al libro de texto de 5º Educación Primaria, sólo promueve tareas matemáticas que requieren de la comprensión de patrones para su resolución. Destaca el indicador 9, que se focaliza en determinar los términos de una secuencia considerando el patrón de formación, con una presencia del 40%. La Figura 7 ejemplifica este tipo de tarea.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

5 Escribe los 5 primeros términos de cada secuencia considerando la información dada.

a. El primer término es 45 y el patrón de formación es multiplicar por 10.

b. El primer término es 729 y el patrón de formación es dividir por 3.

Figura 7 – Tarea de comprensión de patrones, indicador 9
Fuente: T7 (2019, p. 89)

La solución de esta tarea requiere que los estudiantes utilicen el patrón de formación otorgado y lo apliquen en la secuencia numérica, de tal modo que esto les permita determinar términos en la secuencia y hacer predicciones.

Finalmente, el libro de texto de 6º de Educación Primaria promueve mayoritariamente las tareas que suponen el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas (50,9%), logra una mayor presencia (18,1%) el indicador 18, orientado a plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. En la Figura 8 se expone un ejemplo de este tipo de tarea.

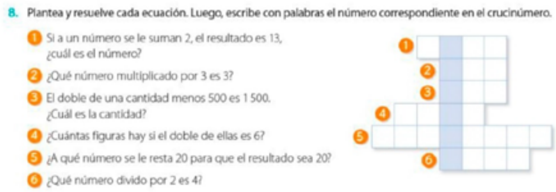


Figura 8 – Tarea de uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, indicador 18
Fuente: T8 (2019, p. 129)

Los estudiantes, para dar solución a este tipo de tarea, deben aplicar ecuaciones de primer grado para modelar las diversas situaciones que se plantean, y posteriormente resolverlas. En este nivel educativo, se espera que los estudiantes evalúen el uso de diversas estrategias de resolución de ecuaciones y con ello las soluciones obtenidas según el contexto.

5 Consideraciones finales

En este estudio se ha presentado un análisis de las tareas matemáticas sobre álgebra temprana que proporcionan una colección de libros de texto de Educación Primaria (6 a 12 años) de amplia difusión en Chile. Dicho análisis se ha realizado a partir de la integración del marco analítico planteado por Demosthenous y Stylianides (2014) y la caracterización del álgebra temprana de Pincheira y Alsina (2021). Esta articulación ha permitido, por una parte, categorizar las tareas propuestas en los libros de texto sobre este bloque de contenido (DEMOSTHENOUS; STYLIANIDES, 2014): tareas de relaciones aritméticas situadas (RAS), tareas de relaciones basadas en regla (RBR) y tareas de relaciones conocidas y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

desconocidas (RCD); y, por otra parte, indagar en los conocimientos que se promueven en el desarrollo de dichas tareas matemáticas para conducir la enseñanza del álgebra temprana, de acuerdo con la caracterización del álgebra temprana (PINCHEIRA; ALSINA, 2021): comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones, uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, comprensión del cambio, uso de variables para determinar una constante o incógnita.

El análisis de las tareas matemáticas vinculadas al estudio del álgebra temprana en los libros de texto ha evidenciado la presencia y alcance de este bloque de contenidos en todos los niveles educativos de la Educación Primaria. No obstante, se observa un desajuste en la distribución de las tareas matemáticas, pues su incorporación no es progresiva durante esta etapa escolar como plantea, por ejemplo, el NCTM (2000). En 1º Educación Primaria, por ejemplo, se observa una concentración mucho mayor de las tareas matemáticas que en los niveles posteriores, mientras que en 5º Educación Primaria la incorporación de estas tareas es mínima.

De forma más concreta, los resultados obtenidos acerca del tipo de tareas muestran un predominio considerable de las tareas de relaciones basadas en regla (44,7%), seguidas de las tareas de relaciones conocidas-desconocidas (34,1%) y, por último, una presencia menor de las tareas de relaciones aritméticas situadas (21,2%). Por un lado, estos resultados son innovadores en el contexto chileno, ya que hasta el momento no se tenían datos comparativos al respecto, y por otro, reportan semejanzas respecto de las tareas matemáticas sobre álgebra temprana analizadas en los libros de texto de otros países (e.g. CABAÑAS-SÁNCHEZ; SALAZAR; NOLASCO-HESIQUIO, 2017; DEMOSTHENOUS; STYLIANIDES, 2014; SALAZAR; CABAÑAS-SÁNCHEZ; NAVARRO, 2016). Así, se confirma que en los primeros niveles educativos prevalecen las tareas de relaciones aritméticas situadas, mientras que, a partir de los niveles intermedios predominan las tareas de relaciones basadas en regla, seguidas de las tareas de relaciones conocidas-desconocidas.

En lo que respecta a los conocimientos algebraicos que se movilizan en el proceso de resolución de las tareas matemáticas que proponen los libros de texto, se evidencia una fuerte presencia de las tareas que involucran la comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones (52,8%), seguidas de las tareas donde interviene el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas (27,6%), una menor presencia se observa en las tareas que requieren de la comprensión del cambio (13,1%) para su resolución y uso de variables para determinar una constante o incógnita (6,5%).

Estos resultados son relevantes, pues proporcionan evidencias acerca de como se está

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

abordando la enseñanza del álgebra temprana en los libros de texto. Más concretamente, el análisis realizado ha permitido visualizar cuáles son los conocimientos que se profundizan en los diferentes niveles escolares para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico, observando que su distribución no es homogénea.

Por otro lado, se evidencia una ausencia de tareas matemáticas que requieran identificar o describir cambios cualitativos y, analizar situaciones en las que se producen cambios y otras que se mantienen constantes. Para remediar esta situación, el profesorado debería ofrecer oportunidades de aprendizaje que permitieran abordar, en su totalidad, el conocimiento en torno a la comprensión del cambio.

A modo general, los resultados favorecen la reflexión e invitan a abrir la discusión acerca de ¿qué debe considerar la formación docente para promover una enseñanza idónea del álgebra temprana? y ¿cómo se deberían orientar las prácticas de enseñanza de este bloque de contenido?, pues es importante construir una base sólida de comprensión y manejo de experiencias acerca del álgebra temprana (NCTM, 2000), dado que esto un aspecto de gran interés para el desarrollo profesional del profesorado.

Bajo esta mirada, consideramos que es necesario proporcionar, tanto en la formación inicial como continua del profesorado, experiencias de formación que permitan profundizar en el análisis de tareas matemáticas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, de modo tal, que se entreguen herramientas orientadoras para una adecuada selección e implementación de dichas tareas. En este sentido, es necesario que estas experiencias formativas también incorporen el análisis de las tareas planteadas en los libros de textos para seleccionar aquellas que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico, o bien, enriquecerlas para que promuevan dicho pensamiento.

Asimismo, es recomendable que el profesorado favorezca la incorporación progresiva de las tareas algebraicas tempranas, a medida que avanzan los niveles escolares en Educación Primaria.

En consecuencia, conducir la enseñanza del álgebra temprana de manera efectiva, desde los primeros niveles educativos, requiere que el profesorado conozca e identifique las diversas categorías de tareas que se establecen para el tratamiento de este contenido, como también los conocimientos que caracterizan cada tarea. Esto último permitirá establecer relaciones y determinar en profundidad la actividad matemática que deben poner en juego los estudiantes para su resolución.

En cuanto a las limitaciones de la investigación, las tareas matemáticas analizadas no consideran, en su totalidad, el caso de la generalización de la aritmética, más específicamente

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

el estudio sobre las propiedades de las operaciones.

Finalmente, la investigación permite abrir futuras líneas de indagación ampliando el estudio a otras colecciones de libros escolares. Así también, se hace necesario indagar en la demanda cognitiva de las tareas matemáticas propuestas para promover el aprendizaje del álgebra temprana en los libros de texto y en tratamiento que se les otorga a los contenidos vinculados con el álgebra temprana en los libros de texto de Educación Infantil.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447.

Referencias

ACARA. AUSTRALIAN CURRICULUM, ASSESSMENT AND REPORTING AUTHORITY. **The Australian Curriculum**: Mathematics. Australian curriculum. 2015. Disponible en: https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/. Acceso: 10 jun. 2020.

AKÉ, L. P.; GODINO, J. D. Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. **Revista Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 30, n. 2, p. 171-201, 2018.

ALSINA, Á. **Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)**. Barcelona: Graó, 2019.

BASTABLE, V.; SCHIFTER, D. Classroom stories: examples of elementary students engaged in Early Algebra. *En:* KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON M. L. (Eds.). **Algebra in the Early Grades**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2007. p. 165-184.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. *En:* BERNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to algebra.** Dordrecht: Springer, 1996. p. 3-12.

BLANTON, M.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Virginia, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E.; MURPHY, A.; ISLER, I.; KIM, J. S. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. **Journal for Research in Mathematics Education,** Virginia, v. 46, n. 1, p. 39-87, ener. 2015.

CABAÑAS-SÁNCHEZ, G.; SALAZAR, V.; NOLASCO-HESIQUIO, H. Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. *En:* AKÉ, L.; CUEVAS-ROMO, J. (Eds.). **Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques**. San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2017. p. 13-35.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

CAI, J.; KNUTH, E. **Early algebraization**: A Global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, 2011.

CAMPANARIO, J. M. ¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 19, n. 3, p. 351-364, 2001.

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M. L.; LEVI, L. **Thinking mathematically**: Integrating arithmetic y algebra in elementary school. Portsmouth: Heinemann, 2003.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. *En:* LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM e IAP, 2007. p. 669-705.

COBO, B. **Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria**. 2003. 303f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas) – Universidad de Granada, Granada, 2003.

CCSSM. COMMON CORE STATE STANDARS FOR MATHEMATICS. **Common Core State Standards Initiative**. Washington: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, 2010. Disponible en: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf. Acceso: 15 jun. 2020.

DEMOSTHENOUS, E.; STYLIANIDES, A. Algebra-Related Tasks in Primary School Textbooks. *En:* NICOL, C.; LILJEDAHL, P.; OESTERLE, S.; ALLAN, D. (Eds.). **Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36**. v. 2. Vancouver: PME, 2014. p. 369-376.

EVEN, R.; OLSHER, S. Teachers as participants in textbook development: The Integrated Mathematics Wiki-book Project. *En:* LI, Y.; LAPPAN, G. (Eds.). **Mathematics Curriculum in School Education**. New York: Springer, 2014. p. 333-350.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C; BAPTISTA, P. **Metodología de la investigación**. 5. ed. Ciudad de México: McGraw-Hill Interamericana, 2010.

KAPUT, J. **Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum**. Dartmouth: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 2000.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? *En:* KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Eds.). **Algebra in the early grades.** New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM, 2008. p. 5-17.

KRIPPENDORFF, K. **Content Analysis**: An Introduction to Its Methodology. 3. ed. Thousand Oaks: Sage Publications, 2013.

MINEDUC. **Bases Curriculares 2012**: Educación Básica Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación, 2012.

MINEDUC. **Bases Curriculares 2018**: Educación Parvularia. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación, 2018.

MINISTRY OF EDUCATION, REPUBLIC OF SINGAPORE. **Mathematics Syllabus**: Primary on to six. Singapore: Curriculum Planning and Development Division, 2012.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

MINISTRY OF EDUCATION, REPUBLIC OF SINGAPORE. **Nurturing Early Learners**: A Curriculum for Kindergartens in Singapore. Singapore: Ministry of Education, 2013.

MOLINA, M. Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. *En:* MARTINHO, M. H.; FERREIRA, R. A. T.; PONTE, J. P. (Eds.). **Ensino e Aprendizagem da Álgebra**: Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matemática. Póvoa do Varzim: EIEM, 2011. p. 27-51.

MOLINA, M. Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. **PNA**, Granada, v. 3, n. 3, p.135-156, 2009.

MOLINA, M.; CAÑADAS, M. La noción de estructura en early algebra. *En:* FLORES, P.; LUPIÁÑEZ, J. L.; SEGOVIA, I. (Eds.). **Enseñar matemáticas**: Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz. Granada: Atrio, 2018. p. 129-141.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PINCHEIRA, N.; ALSINA, Á. Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. **Revista Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 33, n. 1, p. 153-180, 2021.

PORTER, A. Measuring the content of instruction: Uses in research and practice. **Educational Researcher**, Washington, v. 31, n. 7, p. 3-14, oct. 2002.

RADFORD, L. Elementary forms of algebraic thinking in young students. *En:* PINTO, M. F.; KAWASAKI, T. F. (Eds.). **Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. 4. ed. Belo Horizonte: PME, 2010. p. 73-80.

RADFORD, L. Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. *En:* UBUZ, B. (Ed.). **Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking**. 4. ed. Ankara: PME, 2011. p. 17-24.

RAMÍREZ, T. El texto escolar: una línea de investigación en educación. **Revista de Pedagogía**, Caracas, v. 24, n. 70, p. 273-292, 2003.

REMILLARD, J. T. Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. **The Elementary School Journal**, Chicago, v. 100, n. 4, p. 331-350, 2000.

SALAZAR, V.; CABAÑAS-SÁNCHEZ, G.; NAVARRO, C. Tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de matemáticas de primaria. **Investigación e Innovación en Matemática Educativa**, Chilpancingo de los Bravo, v. 2, n. 1, p. 49-56, 2016.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D.; GOODROW, A.; LARA–ROTH, S. Algebra in elementary school. *En:* PATEMAN, N.; DOUGHERTY, G.; ZILLIOX, J. (Eds.). **Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America**. Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawaii, 2003. p. 127-134.

SHIELD, M.; DOLE, S. Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 2, p. 183-199, 2013.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

STYLIANIDES, G. J. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical thinking and learning**, Philadelphia, v. 11, n. 4, p. 258-288, 2009.

TARR, J. E.; CHÁVEZ, Ó.; REYS, R. E.; REYS, B. J. From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. **School Science and Mathematics**, Chicago, v. 106, n. 4, p. 191-201, 2006.

Submetido em 02 de Novembro de 2020.
Aprovado em 07 de Junho de 2021.

4.5 Estudio [E]

Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (2023). Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades. *Uniciencia*, *37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.2

Uniciencia Vol. 37(1), pp. 1-20, January-December, 2023
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades

Preservice teachers designing mathematical tasks on patterns: context, cognitive demand and skills

Futuros professores projetando tarefas matemáticas sobre padrões: contexto, demanda cognitiva e habilidades

Nataly Pincheira[1]*, Ángel Alsina[1], Yeni Acosta[1]

Received: Apr/2/2022 • Accepted: Aug/12/2022 • Published: Jan/1/2023

Resumen

[Objetivo] En este estudio se han analizado las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan futuros profesores y futuras profesoras de Educación Infantil y Primaria de Chile durante su proceso de formación universitaria. **[Metodología]** Se ha diseñado un estudio cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo y, a partir de la técnica de análisis de contenido, se han analizado tres categorías de las tareas matemáticas diseñadas, a saber: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades para hacer patrones. En el estudio han participado 40 docentes en formación y la recolección de datos se ha realizado en una clase regular de su plan de estudios, donde los futuros profesores y las futuras profesoras plantean tareas matemáticas para promover la enseñanza de patrones de acuerdo con los objetivos que propone el currículo escolar chileno de Educación Infantil y Primaria. **[Resultados]** Los resultados obtenidos muestran una variedad de tareas matemáticas para enseñar patrones, predominando en Educación Infantil una enseñanza en el contexto informal y en Educación Primaria una enseñanza en contexto formal. Por otra parte, la mayoría de las tareas matemáticas atienden a un bajo nivel de demanda cognitiva y se centran principalmente en tareas que movilizan la habilidad de extender un patrón, es decir, se focalizan en ampliar una secuencia. **[Conclusiones]** Se concluye que las tareas diseñadas por el futuro profesorado carecen de profundización para abordar a cabalidad el estudio de los patrones en los años iniciales. Por tanto, es necesario ofrecer al profesorado experiencias formativas que permitan progresar en el diseño de tareas matemáticas que promuevan el proceso de generalización a través de la exploración de patrones repetitivos y numéricos.

Palabras clave: tareas matemáticas; patrones matemáticos; futuros profesores; Educación Infantil; Educación Primaria

*Autor para correspondencia
Nataly Pincheira, nataly.pincheira@udg.edu, https://orcid.org/0000-0002-5051-964X
Ángel Alsina, angel.alsina@udg.edu, https://orcid.org/0000-0001-8506-1838
Yeni Acosta, yeni.acosta@udg.edu, https://orcid.org/0000-0001-9873-2127
1 Departamento de Didácticas Específicas, Facultad de Educación y Psicología, Universidad de Girona, Girona, España.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] This study analyzes mathematical tasks related to patterns designed by prospective Chilean Early Childhood and Primary Education teachers during their university training process. **[Methodology]** An exploratory-descriptive qualitative study was designed and, using the content analysis technique, three categories of the mathematical tasks designed were analyzed, namely: context, cognitive demand and patterning skills. Forty prospective teachers participated in the study. Data collection was carried out in a regular class of their program of study, in which prospective teachers propose mathematical tasks to promote the teaching of patterns in accordance with the objectives set forth for the Chilean school curriculum for Early Childhood and Primary Education. **[Results]** The results obtained include a variety of mathematical tasks for teaching patterns, primarily for teaching in an informal context in Early Childhood Education, and in a formal context in Primary Education. On the other hand, these mathematical tasks have a low level of cognitive demand and are mainly focused on tasks that require extending a sequence. **[Conclusions]** It is concluded that the tasks designed by prospective teachers lack the depth necessary to fully address the study of patterns in the early years of the educational process. It is necessary to provide teachers with training experiences that assist them to design mathematical tasks that better promote the process of generalization through the exploration of repetitive and numerical patterns.

Keywords: Mathematical tasks; mathematical patterns; preservice teachers; Early Childhood Education; Primary Education

Resumo

[Objetivo] Neste estudo, foram analisadas as tarefas matemáticas sobre padrões desenhados por futuros professores da Educação Infantil e do Ensino Fundamental no Chile durante o processo de formação universitária. **[Metodologia]** Foi desenhado um estudo qualitativo de natureza exploratória-descritiva e, com base na técnica de análise de conteúdo, foram analisadas três categorias das tarefas matemáticas projetadas, ou seja: o contexto, a demanda cognitiva e as habilidades para fazer padrões. O estudo envolveu 40 professores estagiários e a coleta de dados foi realizada em uma aula regular de seu currículo, onde futuros professores apresentam tarefas matemáticas para promover o ensino de padrões de acordo com os objetivos propostos pelo currículo escolar chileno da Educação Infantil e do Ensino Fundamental. **[Resultados]** Os resultados obtidos mostram uma variedade de tarefas matemáticas para ensinar padrões, predominando, na Educação Infantil, um ensino no contexto informal e, no Ensino Fundamental, um ensino no contexto formal. Por outro lado, a maioria das tarefas matemáticas atende a um baixo nível de demanda cognitiva e se concentram principalmente em tarefas que mobilizam a capacidade de estender um padrão, ou seja, enfocadas em estender uma sequência. **[Conclusões]** Conclui-se que as tarefas projetadas pelo futuro corpo docente carecem de consolidação para abordar plenamente o estudo dos padrões nos anos iniciais. Portanto, é necessário oferecer aos professores experiências de formação que permitam o progresso na concepção de tarefas matemáticas que promovam o processo de generalização através da exploração de padrões repetitivos e numéricos.

Palavras-chave: tarefas matemáticas; padrões matemáticos; futuros professores; Educação Infantil; Ensino Fundamental

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

La formación universitaria en Didáctica de las Matemáticas se encuentra conformada por una agenda de investigación muy prolífica, puesto que dicha formación tiene un papel esencial en la construcción de la identidad profesional del profesorado de matemáticas (Alsina, 2019a; Llinares, 2008). En los últimos años, en diversos estudios se han analizado las condiciones para que esta formación sea transformadora, es decir, que se lleven a cabo procesos de deconstrucción, coconstrucción y reconstrucción que permitan cambiar los conocimientos espontáneos por conocimientos profesionales (Alsina, 2019b; Alsina et al., 2019). Una de las condiciones identificadas en estos estudios es la vinculación con la práctica profesional y, por extensión, el diseño de tareas, puesto que desempeñan un rol importante en las experiencias de aula tanto para estudiantes como docentes (Wake, 2018).

Este artículo, pues, se focaliza en el diseño de tareas matemáticas que diseñan profesores y profesoras en formación; más concretamente, se indaga en el diseño de tareas sobre patrones, al tratarse de un conocimiento algebraico de reciente incorporación en los currículos que merece especial atención, debido a su relevancia en el desarrollo de habilidades matemáticas (Clements y Sarama, 2015).

Desde este punto de vista, los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria (e.g., Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority [ACARA], 2015; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2012; 2018; Ministry of Education, Republic of Singapore, 2012; 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) han incorporado de forma explícita en sus planes de estudio conocimientos de naturaleza algebraica como un estándar de contenido más (Pincheira y Alsina, 2021a). Esta propuesta responde a una nueva corriente de cambio curricular (Molina, 2009), conocida como *Early-Algebra*, desde ahora *álgebra temprana*, que plantea la integración de modos de pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolarización (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007, Kaput, 2000).

Papic, Mulligan y Mitchelmore (2011) señalan que el pensamiento algebraico comienza a desarrollarse a través del proceso de generalización. Carraher, Martínes y Schliemann (2007) plantean que para abordar la generalización matemática se requiere trabajar a partir de la identificación de patrones, relaciones y estructuras. Por lo tanto, los patrones contribuyen al desarrollo de la representación y abstracción matemática, proporcionando una base esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Papic, 2015).

Este nuevo escenario de integración curricular reta al profesorado a incorporar tareas matemáticas que promuevan el pensamiento algebraico desde las etapas escolares iniciales. En Chile, por ejemplo, el currículo de Educación Infantil (MINEDUC, 2018) sugiere que los niños y niñas interpreten y expliquen los diversos elementos y situaciones del entorno, estableciendo relaciones de orden, comparaciones, clasificaciones, seriaciones e identificación de patrones. Asimismo, el currículo de matemática de Educación Primaria (MINEDUC, 2012) correspondiente al eje de patrones y álgebra, plantea que los y las estudiantes expliquen y describan relaciones, y observen patrones en secuencias de objetos, imágenes o números que representan regularidades. En este contexto, el diseño de tareas matemáticas que considere

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470

estos conocimientos forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza del álgebra temprana.

Sullivan, Clarke y Clarke (2013) definen una tarea matemática como la información que impulsa el trabajo con los estudiantes, incluyendo representaciones, contexto, preguntas e instrucciones. Desde este punto de vista, las tareas matemáticas son una fuente de oportunidades para la población estudiantil y un desafío para el profesorado (Sullivan, Clarke, Clarke y O'Shea, 2010). Esto último, se debe a que el diseño de una tarea se ve influenciado por la comprensión del profesorado de los conocimientos matemáticos relevantes para la enseñanza (Chamoso y Cáceres, 2019; Sullivan, Knott, y Yang, 2015).

De acuerdo con Thompson, Carlson y Silverman (2007) el diseño de tareas permite a docentes reconocer las matemáticas que enseña como un cuerpo coherente de ideas significativas. Desde este prisma, las tareas que presentan estas y estos profesionales para promover la enseñanza del álgebra temprana deberían desempeñar un doble rol, por una parte, fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico y, por otra, motivar a docentes a facilitar que el estudiantado piense profundamente en las relaciones, patrones y el cambio (Twohill, Breen, Venkat, y Roberts, 2019).

Al considerar los lineamientos que plantea el álgebra temprana y los desafíos que requiere enfrentar la incorporación de tareas que promuevan el pensamiento algebraico, como es el caso de los patrones, es necesario profundizar en las tareas matemáticas que propone el profesorado. Desde esta perspectiva, el presente estudio se focaliza en los futuros y las futuras docentes, en cuanto son agentes claves en el cambio curricular que impulsa el estudio del álgebra temprana desde las primeras edades (Pincheira y Alsina, 2021b). Con base en ello, surge la pregunta ¿qué rasgos caracterizan las tareas matemáticas que diseñan los futuros profesores de Educación Infantil y Primaria para promover la enseñanza de los patrones?

Para indagar y dar respuesta a esta pregunta de investigación, nuestro objetivo consiste en analizar las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan las profesoras y los profesores en formación profesional de Educación Infantil y Primaria durante su formación universitaria, a partir de tres categorías que nos permitirán explorar su desempeño instruccional: el contexto de enseñanza en que se enmarca cada tarea, la demanda cognitiva y las habilidades de para hacer patrones que promueven dichas tareas.

Marco de teórico

Contextos de las tareas matemáticas

El contexto, en el ámbito de la educación matemática, debería entenderse desde una perspectiva que engloba todas aquellas situaciones o actividades que son significativas para el alumnado y que promueven su pensamiento matemático crítico y, no centrarse exclusivamente en el contexto de aula, social, familiar o escolar (Niss, 1995). De acuerdo con Alsina (2011), el contexto se describe como una situación que puede ser objeto de estudio y que origina interrogantes o problemas que requieren de las matemáticas para responderlas y darles solución.

Desde este punto de vista, las tareas que involucran patrones matemáticos se pueden propiciar a través de diversos contextos de enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, Alsina (2018; 2019c; 2020), en el marco del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), acuña

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

el término "itinerario" como una secuencia de enseñanza intencionada que trasciende desde lo concreto hacia lo abstracto. Dichas secuencias consideran tres niveles de enseñanza (contexto informal, intermedio y formal) integrados por recursos que avanzan de lo particular a lo general: la enseñanza se requiere iniciar en contextos informales, permitiendo visualizar las ideas matemáticas de manera concreta, a través de situaciones reales, materiales manipulativos y juegos. En este marco, las tareas se focalizan en la exploración del entorno, el sentido común y la propia experiencia como requisito para representar de manera concreta las nociones matemáticas.

La enseñanza en contextos intermedios prosigue en contextos que enlazan los contextos reales del nivel inicial y los contextos formales del nivel final, por medio de recursos literarios y tecnológicos. En este contexto se promueve la exploración y reflexión que conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático. Por último, la enseñanza en contextos formales, el contenido matemático concluye en contextos gráficos y simbólicos mediante fichas y libros de texto. En este contexto se promueve la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales, ampliando el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico.

Demanda cognitiva de la tarea

Las tareas matemáticas desempeñan un rol fundamental en la enseñanza, puesto que el aprendizaje de los estudiantes está determinado por el tipo de tarea que se les plantea (Sullivan et al., 2010).

El profesorado, al trabajar con tareas matemáticas, mejora su conocimiento matemático y su capacidad de diseño matemático-didáctico (Pepin, 2015). Según Stein, Smith, Henningsen y Silver (2009), las tareas matemáticas pueden ser utilizadas por docentes como medio para articular los contenidos y alcanzar los objetivos de enseñanza. Sin embargo, no todas las tareas matemáticas ofrecen las mismas oportunidades de aprendizaje.

En este contexto, las tareas matemáticas pueden atender a distintos niveles de demanda cognitiva, el "tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito" (Stein et al., 2009, p.1).

Smith y Stein (1998) caracterizaron cuatro niveles de demanda cognitiva de las tareas: a) memorización, b) procedimientos sin conexión, c) procedimientos con conexión y d) construir matemáticas.

De acuerdo con los autores, los dos primeros tipos de tareas responden a una demanda cognitiva de bajo nivel, puesto que implican la reproducción de fórmulas, reglas o definiciones, no existe conexión con los conceptos o significados que subyacen a la tarea, presentan poca ambigüedad en su instrucción, y se enfatiza en el desarrollo de procedimientos algorítmicos. Mientras que los últimos dos tipos de tareas se asocian a un alto nivel cognitivo, dado que exigen al alumnado un nivel más profundo de los conceptos matemáticos, alcanzando un pensamiento complejo y no algorítmico, teniendo que establecer conexiones entre diversos conceptos o significados asociados al objeto de estudio. Asimismo, estas tareas requieren explorar y comprender la naturaleza las relaciones y procesos matemáticos, y el desarrollo de múltiples representaciones, tales como diagramas, símbolos, gráficas y situaciones problema.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Patrones matemáticos y habilidades para hacer patrones de repetición

Un patrón matemático se describe como "cualquier regularidad predecible, que normalmente implica relaciones espaciales, numéricas o lógicas" (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 34).

Clements y Sarama (2015) consideran que la exploración de patrones sienta las bases para promover la generalización y fomentar el pensamiento algebraico. Asimismo, mediante el estudio de los patrones, se impulsa el pensamiento funcional (Blanton y Kaput, 2011; Castro, Cañadas y Molina, 2017).

De acuerdo con Mulligan y Mitchelmore (2009), al hablar de patrones matemáticos es necesario diferenciar entre patrón como una secuencia o seriación ordenada, y su estructura, es decir, la organización, regla o núcleo subyacente al patrón. De este modo, los patrones advierten dos componentes: uno cognitivo vinculado con el reconocimiento de su estructura y un componente meta-cognitivo asociado con la capacidad de búsqueda y análisis de patrones.

Papic y Mulligan (2007) consideran la existencia de diferentes tipos de patrones matemáticos, siendo los más comunes los patrones de repetición, patrones de estructura espacial y patrones de crecimiento. Los patrones de repetición tienen una unidad o núcleo constante que se repite indefinidamente (por ejemplo, ABABAB), mientras que en un patrón de crecimiento la unidad o núcleo aumenta o disminuye sistemáticamente (por ejemplo, ABAABAAAB). Los patrones de estructura espacial son invariantes entre diversas características de formas geométricas y describen la organización de elementos individuales en un espacio bidimensionales o tridimensionales. Ejemplos de formas son: los triángulos, los cuadrados, los bloques, las matrices y rejillas; ejemplos de características son: el número, el tamaño, la colinealidad y el espaciado de los elementos de estas formas (Papic et al., 2011).

Desde los primeros años, los niños y las niñas identifican patrones en su entorno y, mediante las experiencias que desarrollan en el aula, deberían llegar a ser más hábiles para descubrir patrones en configuraciones de objetos (NCTM, 2000). Los patrones que se enseñan en Educación Infantil suelen tratarse de repeticiones de diferentes formas, colores o tamaños, mientras que, en los primeros años de Educación Primaria, se comienzan a abordar patrones más desafiantes, como por ejemplo patrones de crecimiento, los cuales pueden incluir números crecientes y decrecientes o letras que aparecen progresivamente en el alfabeto (Bock et al., 2018).

Existen una serie de tareas que permiten operacionalizar el trabajo con patrones y desarrollar habilidades. Lüken y Sauzet (2020) definen tales habilidades como las competencias que se adquieren al desarrollar patrones.

Las tareas de patrones más comunes son: a) duplicar un patrón, que implica una réplica exacta del patrón; b) encontrar elementos faltantes de una secuencia; c) ampliar o continuar el patrón, que requiere encontrar el siguiente elemento de una secuencia; d) construir el mismo patrón con diferentes elementos; e) identificar la unidad de repetición; e f) inventar un patrón. Las habilidades para hacer patrones que movilizan estas tareas son: copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, respectivamente (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a), siendo la habilidad de reconocer la unidad de repetición una de

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

las más complejas de desarrollar (Lüken y Sauzet, 2020).

De acuerdo con Mcgarvey (2012), las habilidades de copiar, interpolar y extender atienden a una organización recursiva de los elementos y no implican un reconocimiento previo de la unidad de repetición, impulsando el pensamiento recursivo. Por otra parte, las habilidades de abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear requieren de la comprensión de la estructura o regla subyacente del patrón, promoviendo el pensamiento funcional (Wijns et al., 2019a).

Diversos estudios han informado que los niños y las niñas progresan en sus habilidades para hacer patrones en la Educación Infantil e inicios de la Educación Primaria al trabajar con patrones matemáticos (e.g., Clements y Sarama, 2014; Lüken, 2016). Aproximadamente a los tres-cuatro años, las niñas y los niños son capaces de desarrollar tareas donde se requieran habilidades de copiar un patrón, puesto que presentan un nivel básico de dificultad (Clements y Sarama, 2014; Rittle-Johnson et al., 2015). Luego, las habilidades de interpolar y extender se inician de manera exitosa a partir de los cuatro años (Clements y Sarama, 2009; Lüken, 2016). Finalmente, alrededor de los cinco-seis años desarrollan la capacidad de identificar la unidad de repetición y transferir dicho conocimiento para traducir y crear un patrón determinado (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013).

Metodología

De acuerdo con nuestro objetivo de estudio que, como se ha indicado, consiste en analizar las tareas matemáticas sobre patrones que diseña el futuro profesorado de Educación Infantil y Primaria durante su formación universitaria, se ha adoptado un enfoque cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo (Fernández, Baptista y Hernández, 2014). Asimismo, se ha utilizado como técnica el análisis de contenido, la cual consiste en "una técnica de investigación que permite hacer inferencias replicables y válidas a partir del texto (u otra materia significativa) a los contextos de su uso" (Krippendorff, 2013, p. 24), en nuestro caso las producciones escritas correspondientes a las tareas diseñadas por el profesorado en formación.

Para llevar a cabo el análisis de las tareas se han considerado las siguientes etapas:

1. Lectura individual de cada una de las tareas matemáticas para explorar y organizar la información presente en cada una de ellas.
2. Análisis del contenido de las tareas que considera las siguientes categorías de análisis:
   - Contexto: se refiere a la situación donde se gestiona la enseñanza según Alsina (2018; 2019c; 2020).
   - Demanda cognitiva: se refiere al razonamiento que una determinada tarea requiere a los estudiantes para ser resuelta con éxito. Nos hemos basado en la caracterización de los cuatro niveles de demanda cognitiva propuesta por Smith y Stein (1998).
   - Habilidades para hacer patrones: se refiere a la capacidad o competencias que movilizan las tareas de matemáticas de patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a).

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

3. Codificación de las tareas matemáticas con base a las categorías propuestas.
4. Selección de ejemplos de tareas que evidencien las categorías analizadas

Participantes y contexto

En el estudio participaron 40 docentes en formación, 18 corresponden a docentes de Educación Infantil, que cursaban el quinto semestre de formación (de un total de ocho) y 22 docentes en formación de Educación Primaria, que cursaban el quinto semestre de formación (de un total de diez) en una universidad del sur de Chile.

Los y las docentes de Educación Infantil en formación cursaban la asignatura de "Didáctica de las Matemáticas", un curso didáctico-disciplinar en el que reciben formación didáctica sobre álgebra y otros ejes de contenido. Cabe destacar, que estas personas participantes solo han recibido un curso disciplinar previo, vinculado con la comprensión del pensamiento lógico matemático. Mientras que los y las docentes de Educación Primaria en formación cursaban la asignatura "Aprendizaje y enseñanza del álgebra", donde reciben formación didáctica específica sobre álgebra que complementa la formación disciplinar. Estas personas participantes han recibido con anterioridad los cursos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar y de la geometría.

Tanto los y las docentes de Educación Infantil en formación como de Primaria han tenido experiencias de práctica profesional. En consecuencia, el diseño de tareas forma parte del proceso de formación del profesorado, puesto que, en las experiencias de materias anteriores, como en el desarrollo de las prácticas profesionales, deben enfrentarse a la planificación de sesiones de clase que requiere del diseño de tareas matemáticas.

En el contexto de una clase regular del proceso de formación (sesión 90 minutos) se plantea a las personas participantes proponer, de manera individual, una tarea matemática que promueva la enseñanza de patrones de acuerdo a los objetivos que propone el currículo escolar chileno (MINEDUC, 2012; 2018).

En el caso del grupo de Educación Infantil, se indica que la tarea debe estar dirigida a niños y niñas del Tercer Nivel (kínder, 5-6 años de edad) y responder al objetivo: "Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos" (MINEDUC, 2018, p. 99). Mientras que, al grupo docente de Educación Primaria, se señala que la tarea debe estar dirigida a estudiantes de primero año básico (6-7 años de edad) de acuerdo con el objetivo de aprendizaje: "Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos…) y patrones numéricos hasta 20, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo" (MINEDUC, 2012, p. 228).

Las tareas diseñadas por los y las docentes de Educación Infantil y Primaria en formación constituyen las unidades de análisis del estudio.

Por último, es importante señalar que el propósito de este estudio no es realizar un análisis comparativo entre las tareas que diseñan las personas del grupo de Educación Infantil y las tareas del grupo de Primaria, sino analizar los rasgos que caracterizan dichas tareas matemáticas en su conjunto.

Categorías e indicadores de análisis

Para llevar a cabo el estudio, como se ha indicado, las unidades de análisis se han examinado con base en tres categorías: a) contexto en que se plantea el desarrollo de

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

la tarea propuesto por Alsina (2018; 2019c; 2020); b) demanda cognitiva que requiere la tarea para su desarrollo de acuerdo con Smith y Stein (1998); y c) habilidades para hacer patrones que promueven las tareas (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a).

A partir de la caracterización de cada una de las categorías, se han considerado un conjunto de indicadores que permitieron centrar el análisis durante el proceso de codificación como se aprecia en la Tabla 1. Tales indicadores permiten analizar de manera más precisa las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan los futuros profesores de Educación Infantil y Primaria.

Procedimiento de análisis

La codificación de los datos ha considerado las categorías y la aplicación de sus respectivos indicadores en cada una de las tareas matemáticas que conforman nuestras unidades de análisis, asignando puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 puntos).

Para garantizar la confiabilidad del proceso de codificación, se han realizado revisiones sucesivas de forma cíclica y deductiva (Bisquerra, 2004) de las tareas matemáticas. Posteriormente, se han realizado una triangulación a partir de revisiones continuas de las tareas. Finalmente, los autores han discutido los desacuerdos referidos al proceso de codificación y se ha establecido un consenso.

Tabla 1. *Categorías e indicadores de análisis utilizados para el proceso de codificación*

Categoría	Indicador	Descripción
Contexto	Contexto informal	La enseñanza del contenido matemático se desarrolla a través de situaciones reales, recursos manipulativos o recursos lúdicos.
	Contexto intermedio	La enseñanza del contenido matemático se desarrolla por medio de recursos literarios o recursos tecnológicos.
	Contexto formal	La enseñanza del contenido matemático se desarrolla a través de recursos gráficos y simbólicos como fichas o libro de texto.
Demanda cognitiva	Memorización	Se focaliza en la reproducción memorística de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos. Su resolución no implica un procedimiento. No hay conexión con otros conceptos.
	Procedimiento sin conexión	Corresponden a tareas algorítmicas o procesos rutinarios, utilizan un procedimiento evidente, descrito en la instrucción de la tarea. Se focaliza en la producción de respuestas correctas en lugar de promover la comprensión matemática.
	Procedimiento con conexión	Requieren la atención de los estudiantes sobre el uso de procedimientos con el fin de desarrollar niveles más profundos de ideas y conceptos matemáticos. Se representan de formas variadas, como diagramas, objetos manipulativos, símbolos y situaciones problema.
	Construir matemáticas	Requieren de un procedimiento complejo y no algorítmico. Exige comprender conceptos, procesos y relaciones matemáticas. Para dar respuesta a la tarea, de manera exitosa, los estudiantes deben acceder a experiencias y conocimientos relevantes.
Habilidades para hacer patrones	Copiar	La tarea consiste en duplicar el mismo patrón.
	Interpolar	La tarea implica encontrar los elementos faltantes de una secuencia.
	Extender	La tarea requiere ampliar una secuencia.
	Traducir	La tarea requiere construir el mismo patrón con diferentes materiales.
	Reconocer la unidad de repetición	La tarea implica identificar la unidad o núcleo del patrón
	Crear	La tarea requiere inventar un patrón

Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470

Resultados

En lo que sigue se describen los datos obtenidos a partir de las categorías de análisis utilizadas en el estudio.

Contexto de enseñanza de las tareas

La tabla 2 muestra los contextos de enseñanza donde se enmarcan el desarrollo de las tareas matemáticas diseñadas por los y las docentes en formación para promover el estudio de los patrones. Es importante tener presente que durante el desarrollo de una tarea matemática se puede abordar más de un contexto de enseñanza.

Tabla 2. *Distribución de los indicadores que caracterizan el contexto de las tareas matemáticas*

Indicadores	Tareas Educación Infantil	Tareas Educación Primaria
Contexto informal	15	8
Contexto intermedio	2	3
Contexto formal	6	14

Nota: Fuente propia de la investigación.

Los resultados, de forma global, informan que las tareas propuestas por el grupo de docentes en formación de Educación Infantil atienen principalmente a un contexto informal de enseñanza, es decir, las tareas se plantean a través de situaciones reales, recursos manipulativos o recursos lúdicos, permitiendo visualizar de manera concreta las ideas matemáticas en torno a los patrones. Por otro lado, las tareas propuestas por el grupo de docentes en formación de Educación Primaria se abordan mayoritariamente en un contexto de enseñanza formal, mediante el uso de fichas o libros de texto, promoviendo la formalización del conocimiento matemático.

Ejemplos de los contextos de enseñanza que predominan en las tareas diseñadas por los casos analizados, tanto las del grupo de Educación Infantil como las del grupo de Primaria, se muestran en las Figuras 1 y 2.

A partir de la Figura 1, se observa un ejemplo de tarea en un contexto de enseñanza informal propuesta por una de las personas que cursa la carrera de Educación Infantil. La tarea se plantea a través de una situación real conocida para la población estudiantil, como es la organización de elementos, en este caso con frutas.

La Figura 2, evidencia un ejemplo de tarea de enseñanza en un contexto formal, propuesto por una persona del grupo de docentes en formación de Educación Primaria. El desarrollo de la tarea se genera a partir del trabajo de los y las estudiantes con un recurso gráfico y simbólico.

Presentar a las niñas y niños 3 canastas de frutas: manzanas, plátanos y naranjas. Luego, se introduce a la experiencia realizando las siguientes preguntas: ¿qué elementos tenemos?, ¿qué características tienen? ¿cómo podemos organizar las frutas para formar una secuencia?

Figura 1. *Ejemplo de tarea de enseñanza en contexto informal.*
Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil Nº 2

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Por otra parte, una presencia menor de tareas matemáticas se plantea en un contexto de enseñanza intermedio, es decir, son escasa las tareas sobre patrones que se desarrollen por medio de un recurso tecnológico o literario. Sin embargo, aquellas tareas que se desarrollan en este contexto promueven la exploración y reflexión en torno a los patrones principalmente a través de *applets* y recursos virtuales, como se observa en la Figura 3.

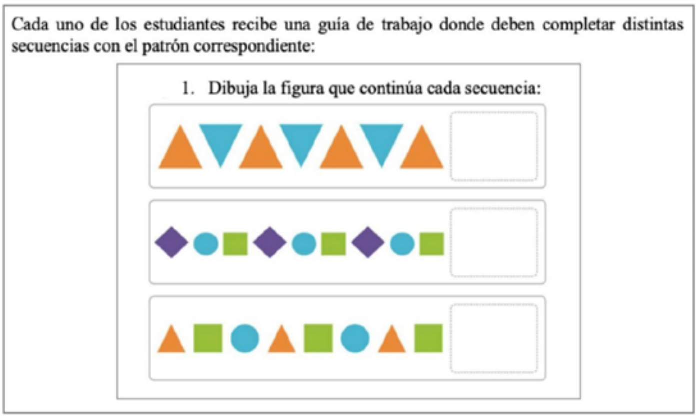


Figura 2. *Ejemplo de tarea de enseñanza en contexto formal.*
Fuente: Extracto de tarea Educación Primaria N° 21

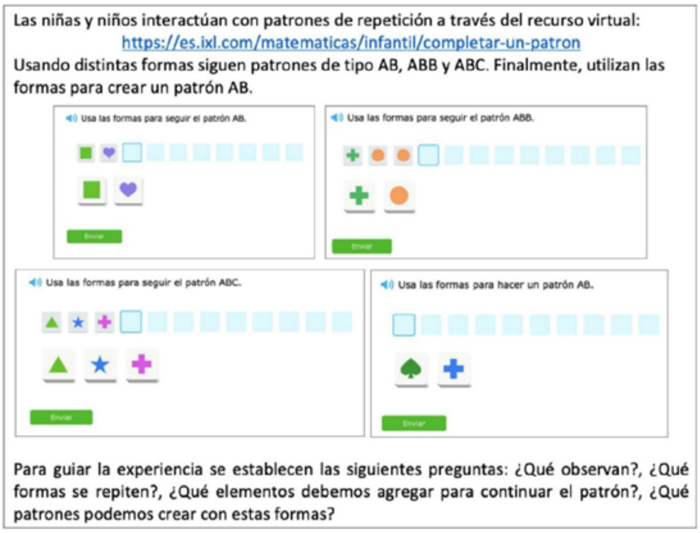


Figura 3. *Ejemplo de tarea de enseñanza en contexto intermedio.*
Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil N° 12

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Demanda cognitiva de las tareas

Para establecer el nivel de demanda cognitiva de cada tarea matemática se presta especial atención al enunciado de la tarea y las preguntas que se formulan para su desarrollo. En la tabla 3 se aprecia el nivel de demanda cognitiva de las tareas propuestas por los futuros profesores para promover la enseñanza de los patrones en Educación Infantil y Primaria.

Tabla 3. *Distribución de los indicadores que caracterizan la demanda cognitiva de las tareas matemáticas*

Indicadores	Tareas Educación Infantil	Tareas Educación Primaria
Memorización	10	11
Procedimiento sin conexión	6	7
Procedimiento con conexión	2	4
Construir matemáticas	0	0

Nota: Fuente propia de la investigación.

A nivel general, se observa que las tareas diseñadas por los y las docentes en formación atienden a un bajo nivel de demanda cognitiva, destacando las tareas de memorización, seguidas de tareas que requieren del uso de procedimientos sin conexión. Dichas tareas, se centran mayoritariamente en la reproducción de los patrones matemáticos y en continuar una serie o secuencia, sin establecer conexiones entre ideas matemáticas, como los elementos o características de un patrón y su estructura.

Por otra parte, una presencia mínima de tareas, tanto de Educación Infantil como Primaria, asumen un nivel alto de demanda cognitiva. Estas tareas permiten explorar y establecer relaciones matemáticas al identificar una regularidad en un patrón de repetición o crecimiento, y los elementos faltantes en una secuencia.

Por último, se observa una nula presencia de tareas vinculadas con construir matemáticas.

La Figura 4, muestra un ejemplo de tarea que responde a una demanda cognitiva de memorización, puesto que, para responder de manera correcta, los y las estudiantes deben observar y reproducir el patrón corporal establecido por el personal docente para continuar la secuencia. Esta tarea no requiere de un procedimiento para su resolución.

¿Podremos representar patrones con el cuerpo al movernos?
La profesora modela una secuencia utilizando un patrón corporal de tres elementos:
palma-salto-giro; palma-salto-giro; palma -salto-giro
Luego, invita a los niños a repetir los movimientos y continuar la secuencia.

Figura 4. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva de memorización.*
Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil Nº 11

Asimismo, en Figura la 5 se observa que la instrucción de la tarea implica ampliar una secuencia. El desarrollo de la tarea no presenta ambigüedad sobre lo que se debe realizar y cómo se debe hacer. La tarea responde a un nivel de memorización de demanda cognitiva, puesto que es clara y direccionada, no hay conexión con otros conceptos.

La cuncuna tricolor	Rellenar con plastilina el cuerpo de la cuncuna, siguiendo la secuencia de colores que se muestra.

Figura 5. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva de memorización.*
Fuente: Extracto de tarea Educación Primaria Nº 6

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

La Figura 6, evidencia un ejemplo de tarea que manifiesta una demanda cognitiva de procedimiento sin conexión, propuesto por una persona del grupo de docentes en formación de Educación Infantil. La tarea requiere construir patrones con policubos, por medio de la asociación colores, focalizándose sólo en la producción de respuestas correctas en lugar de promover la comprensión matemática.

Por último, un ejemplo de tarea de demanda cognitiva de procedimiento con conexión se muestra en la Figura 7. La tarea se presenta a partir de una situación problema y su desarrollo requiere que los estudiantes establezcan conexiones entre las regularidades de los elementos que conforman la secuencia, para luego ampliar la secuencia e identificar la unidad o núcleo del patrón de repetición.

Habilidades para hacer patrones que promueven las tareas

Para determinar las habilidades para hacer patrones se considera el tipo de tarea que propone el profesorado y los requerimientos que esta demanda para ser resuelta. En la tabla 4 se aprecia las habilidades que promueven el futuro profesorado en

Organizar a los niños y niñas en parejas entregando distintas tarjetas que representan patrones y un set de policubos.

Los niños observan los patrones de dos y tres elementos, y luego los representan con el material manipulativo.

Figura 6. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva sin conexión.*
Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil N° 7

Juan tiene que hacer una guirnalda, para ayudar con la decoración del acto escolar de su colegio, y para esto deberá utilizar una serie de figuras geométricas. Él decide que su guirnalda será la siguiente secuencia de figuras:

Juan necesita ayuda, no sabe cuál es la figura que le sigue al círculo. Según lo observado, ¿cuál crees tú que puede ser esa figura? ¿por qué? Si él quiere que su guirnalda tenga en total 20 figuras, ¿cuál será la última figura que deberá colocar? ¿por qué?, y ¿cuál crees que es el patrón de Juan decidió repetir en su guirnalda?

Figura 7. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva con conexión.*
Fuente: Extracto de tarea Educación Primaria N° 18

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470

las tareas que diseñan sobre patrones. Cabe destacar, que una misma tarea puede atender a más de una habilidad para hacer patrones en el trascurso de la propuesta.

Tabla 4. *Distribución de los indicadores que caracterizan las habilidades para hacer patrones que promueven las tareas matemáticas*

Indicadores	Tareas Educación Infantil	Tareas Educación Primaria
Copiar	8	10
Interpolar	2	3
Extender	13	16
Traducir	3	5
Reconocer la unidad de repetición	4	3
Crear	3	2

Nota: Fuente propia de la investigación.

Las tareas diseñadas por los y las docentes en formación de Educación Infantil y Primaria para enseñar patrones se centran principalmente en ampliar una secuencia con patrones de dos o tres elementos, abordando la habilidad de extender. Este tipo de tareas, se observa, por ejemplo, en las Figuras 2, 4 y 5.

Le siguen tareas matemáticas relacionadas con duplicar un patrón que implica el desarrollo de la habilidad de copiar.

Una menor presencia de tareas atiende a encontrar elementos faltantes de una secuencia, construir un mismo patrón con diferentes elementos, identificar la unidad de repetición e inventar un patrón. Por tanto, las habilidades para hacer patrones que se desarrollan con menor frecuencia en el diseño de las tareas de patrones son interpolar, traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, respectivamente. Esta última habilidad se muestra en las Figuras 1 y 3.

Finalmente, un ejemplo de tarea que moviliza la habilidad de traducir se observa en la Figura 6, mientras que la habilidad de reconocer la unidad de repetición se manifiesta en la tarea de la Figura 7.

Conclusiones

En este estudio se ha presentado un análisis de las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan 40 docentes en formación, 18 de Educación Infantil y 22 de Educación Primaria. Dicho análisis ha considerado tres categorías: el contexto de enseñanza en que se enmarca cada tarea (Alsina, 2018; 2020), la demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998) y las habilidades para hacer patrones que promueven las tareas de patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a).

En relación con el contexto de enseñanza, el análisis de las tareas matemáticas ha evidenciado que, para promover la enseñanza de patrones, los futuros y las futuras profesionales de Educación Infantil se centran principalmente en una enseñanza en el contexto informal a través de experiencias reales, recursos lúdicos y materiales manipulativos. Mientras que los y las docentes en formación de Educación Primaria promueven mayoritariamente tareas en contextos formales, utilizando recursos gráficos y simbólicos. Esto último resulta preocupante puesto que, según Alsina (2020), para asegurar la comprensión de las matemáticas es imprescindible considerar una enseñanza en contextos reales, intermedios y formales, sin embargo, en los primeros niveles se requiere prestar especial protagonismo al desarrollo de la enseñanza en un contexto informal y a medida que avanza la escolaridad se debe ir disminuyendo su presencia.

De acuerdo con Acosta y Alsina (2021), la comprensión de la población estudiantil

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

sobre el patrón matemático se ve influenciada directamente por el tipo de contexto en el que se desarrolla una tarea algebraica temprana, dado que dicha comprensión se ve favorecida por la posibilidad de visualizar el núcleo del patrón en contextos concretos y luego transferirlo a contextos más abstractos hasta alcanzar el proceso de generalización. En esta misma línea, Sterner, Wolff y Helenius (2019) señalan que es fundamental conectar el conocimiento informal con los símbolos escritos, dado que esto permite establecer un vínculo significativo entre las habilidades informales y las formales.

Respecto de la demanda cognitiva que presentan las tareas, se ha evidenciado que los futuros y las futuras docentes plantean fundamentalmente tareas de bajo nivel de demanda cognitiva, centrándose mayoritariamente en tareas de memorización, seguidas de tareas de procedimientos sin conexión. Una escasa presencia alcanza las tareas que requieren de un alto nivel de demanda cognitiva para su desarrollo, a través de propuestas que involucran procedimientos con conexión. Es inquietante no encontrar tareas que impliquen construir matemáticas, ya que para alcanzar una enseñanza eficaz de las matemáticas se requiere involucrar a los y las estudiantes en tareas que sean desafiantes, de manera que se les pueda implicar y retar intelectualmente (NCTM, 2000; 2015).

Stein y Smith (1998) señalan que las tareas matemáticas determinan el razonamiento que el estudiantado desarrolla al resolverlas, por lo tanto, diferentes tareas constituyen diferentes oportunidades de aprendizaje. En este contexto, es necesario avanzar hacia el desarrollo de tareas que requieran una exigencia cognitiva mayor y, a la vez, permitan ir más allá de la simple memorización de hechos o procedimientos.

Por último, en relación con las capacidades o habilidades para hacer patrones, los y las profesionales en formación de Educación Infantil y Primaria diseñan mayoritariamente tareas que requieren ampliar una secuencia, seguidas de aquellas que implican duplicar un patrón. Rittle-Johnson et al. (2013) y Lüken y Sauzet (2020) informan que el desarrollo de estas tareas conduce a las habilidades de extender y copiar, respectivamente. No obstante, es esencial que el futuro profesorado considere la incorporación de tareas más complejas, tales como construir el mismo patrón con diferentes materiales, identificar la unidad de repetición e inventar un patrón; tareas que impulsan las habilidades de traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, permitiendo alcanzar un nivel más alto de abstracción, como es la generalización (Lüken, 2016; Wijns et al., 2019a; 2019b).

El desarrollo de habilidades tempranas de creación de patrones sugiere una transición del pensamiento recursivo al pensamiento funcional (Wijns et al., 2019a). Por tanto, es necesario que el profesorado incorpore en los primeros años de escolaridad una variedad de tareas matemáticas que atiendan a duplicar un patrón, encontrar elementos faltantes de una secuencia y ampliar una secuencia, dado que promueven el pensamiento recursivo. Así como, el desarrollo de tareas que requieran construir un patrón con diferentes elementos, identificar el núcleo del patrón e inventar patrones, tareas que promuevan el pensamiento funcional, asegurando el paso de un pensamiento al otro.

Los resultados obtenidos son relevantes en el contexto de la formación del profesorado de los niveles iniciales para enseñar matemáticas, pues aportan evidencias sobre qué tareas diseñan los futuros profesores y las futuras profesoras para abordar el

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

trabajo con patrones, así como sobre cuál es el nivel de atención que recibe cada una de las categorías analizadas. En este sentido, el estudio advierte acerca de los aspectos que se deben atender en los programas de formación del profesorado cuando se diseñan tareas para promover el desarrollo del pensamiento algebraico, más específicamente, el estudio de los patrones de repetición, ya que aún son escasos los estudios que entreguen estas orientaciones (Hohensee, 2017).

Dado que el diseño de tareas matemáticas forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza (Wake, 2018), a partir de los datos obtenidos, es necesario ofrecer al profesorado experiencias formativas que permitan profundizar en el diseño de tareas matemáticas que promuevan el proceso de generalización a través de la exploración de patrones repetitivos y numéricos, puesto que el pensamiento algebraico temprano se desarrolla a través de las relaciones estructurales de los patrones y la aritmética (Kaput, 2008).

Estas actividades de formación deberían tener en cuenta, principalmente, el contexto en el que se desarrolla la tarea, el nivel de pensamiento requerido para determinar su solución y las capacidades o habilidades para hacer patrones que permiten alcanzar el desarrollo de esta. Asimismo, se deben generar instancias de análisis y reflexión en torno a la tarea diseñada, mejorar la propuesta inicial e implementación de la tarea.

En esta línea, una limitación del estudio estuvo dada a raíz del hecho de no haber indagado previamente en el programa de formación inicial de los y las participantes, más concretamente, en el estudio de dicho programa y su consideración o vacío respecto a las tres categorías analizadas. Con base en esta limitación, no se pudo determinar si los resultados obtenidos están condicionados por la falta de estos conocimientos en el diseño de las tareas matemáticas. Otra limitación del estudio fue el tamaño de la muestra, la cual impide que nuestras conclusiones sean generalizables a otras realidades.

Tomando en consideración los datos obtenidos en este estudio y las limitaciones descritas, en futuras líneas de investigación se deberá indagar en el diseño de tareas que promuevan otros contenidos que susciten el desarrollo del álgebra temprana en los diferentes niveles de escolarización de Educación Infantil y Primaria, al tratarse de un aspecto clave de la formación universitaria que reciben los futuros maestros.

Agradecimiento

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio Nº 72200447 y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856).

Consentimiento informado

Los autores declaran que los participantes fueron informados acerca de la investigación, aceptaron participar y firmaron un consentimiento voluntario.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: N.P. 50 %, Á.A. 30 % y Y.A. 20%.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente **[N.P.]**, previa solicitud razonable.

Referencias

ACARA. (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en Educcaión Infantil: ¿cómo influye el contexto de enseñanza? En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101 – 108). Valencia: SEIEM. https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori.

Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros, 376*, 13-20. https://doi.org/10.14422/pym.i376.y2018.002

Alsina, Á. (2019a). Hacia una formación transformadora de futuros maestros de matemáticas: avances de investigación desde el modelo realista-reflexivo. *Uni-pluriversidad, 19*(2), 60-79.

Alsina, Á. (2019b). Repensando la formación inicial de maestros de matemáticas: cinco consideraciones para contribuir al progreso social. *Papeles de Trabajo sobre Cultura, Educación y Desarrollo Humano, 15*(3), 13-26.

Alsina, Á. (2019c). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Barcelona: Graó.

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á., Batllori, R., Falgàs, M., y Vidal, I. (2019). Marcas de autorregulación para la construcción del perfil docente durante la formación de maestros. *Revista Complutense de Educación, 30*(1), 55-74. https://doi.org/10.5209/RCED.55466

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Blanton, M., y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., y Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education,* (pp. 5-23). Heidelberg, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Bock, A.M., Cartwright, K.B., McKnight, P.E., Patterson, A.B., Shriver, A.G., Leaf, B.M., Mohtasham, M.K., Vennergrund, K.C., y Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology, 9*, 1802. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives.* https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carraher, D. W., Martínez, M. V., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Chamoso, J. M., y Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18*, 59-69.

Clements D., y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Clements, D., y Sarama, J. (2014). Other content domains. En D. Clements, y J. Sarama (Eds.), *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2nd ed., pp. 214–229). New York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003083528-12

Clements, D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Great Britain: Learning Tools LLC. https://doi.org/10.4324/9780203883389

Fernández, C., Baptista, P., y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial McGraw Hill.

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(3), 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Mahwah, NJ: Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology* (3rd ed). California, CA: Sage Publications.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII*, (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.

Lüken, M. (2016). Repeating patterning competencies in 3- and 4-year old kindergartners. En 13th *International Congress on Mathematical Education* (pp. 1–4). Hamburg.

Lüken, M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

McGarvey, L. M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning, 14*, 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six*. Ministry of Education Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

Ministry of Education Singapore (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6*. Ministry of Education.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2015). *De los principios a la acción: Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M. (1995). Las matemáticas en la sociedad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 6*, 45-58.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Papic, M.M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8

Papic, M., y Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart)* (Vol. 2, pp. 591–600). Hobart, Tasmania: MERGA.

Papic, M., Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-269. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pepin, B. (2015). *Enhancing mathematics/STEM education: A 'resourceful' approach*. Inaugural lecture, 27 November 2015, Technische Universiteit Eindhoven.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021b). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9,* 25-90. https://doi.org/10.3390/math9202590

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396. http://dx.doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31*, 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Sullivan, P., Clarke, D., y Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

Sullivan, P., Knott, L., y Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies, and student learning. En A. Watson, y M. Obtain (Eds.), *Task design in mathematics education, an ICMI study 22* (pp. 83-114). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_3

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 344-350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344

Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Nueva York: Teachers College Press.

Sterner, G., Wolff, U., y Helenius, O. (2019). Reasoning about Representations: Effects of an Early Math Intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research, 64*(5), 782-800. https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579

Thompson, P. W., Carlson, M. P., y Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 415-432. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9054-8

Twohill, A., Breen, S., Venkat, H., y Roberts, N. (2019). Task design for early algebra. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.). *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 185-186). Pretoria, South Africa: PME.

Wake, G. C. (2018). A case study of theory-informed task design: what might we, as designers, learn? En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). Gijón: SEIEM.

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.2
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019a). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., y Torbeyns, J. (2019b). Which early patterning activities count the most? En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 446-453). Pretoria, South Africa: PME.

UNICIENCIA Vol. 37, N° 1, pp. 1-20. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

4.6 Estudio [F]

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Mathematical knowledge of pre-service Early Childhood and Primary Education Teachers: an approach based on the design of tasks involving patterns. *Australian Journal of Teacher Education*, *47*(8), 50-69. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2022v47n8.4

Volume 47 | Issue 8 Article 4

2022

Mathematical Knowledge of Pre-Service Early Childhood and Primary Education Teachers: an Approach Based on the Design of Tasks Involving Patterns

Nataly Pincheira
University of Girona

Ángel Alsina
University of Girona

Australian Journal of Teacher Education

Mathematical Knowledge of Pre-Service Early Childhood and Primary Education Teachers: An Approach Based on the Design of Tasks Involving Patterns

Nataly Pincheira
Ángel Alsina
University of Girona, Spain

Abstract This study analyzes the mathematical knowledge of 40 pre-service Chilean Early Childhood and Primary Education teachers when designing mathematical tasks on patterns, in the context of teaching early algebra. Based on the domains of the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model, we have adopted a descriptive qualitative methodological approach that relies on the content analysis technique. The results show that pre-service teachers exhibit little mathematical knowledge in the description of the mathematical tasks they pose, addressing partial aspects of the subdomains of specialized content knowledge and knowledge of content and teaching. We conclude that training experiences should be given that allow students to further their acquisition of mathematical knowledge in order to achieve effective learning of the contents that early algebra promotes, such as patterns, in Early Childhood and Primary Education classrooms.

Keywords: Mathematical knowledge for teaching, design of tasks, early algebra, patterns, pre-service teachers, Early Childhood Education, Primary Education.

Introduction

In recent decades, early algebra has emerged as a proposal for curricular improvement, the goal being to promote the development of algebraic thinking from the initial years of schooling (Cai & Knuth, 2011; Carpenter et al., 2003; Kaput, 2000). This approach seeks to "algebrize" the curriculum in order to integrate algebraic thinking through all phases of schooling and facilitate a better understanding of mathematics (Kaput, 2000).

Early algebra has led to a growing transformation in terms of curricular adjustments, both for Early Childhood (ages 3 to 6) and Primary (ages 6 to 12) education. As a result, contemporary curricula (e.g., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2015; Ministry of Education [MINEDUC], 2012; 2018; Ministry of Education, Republic of Singapore, 2012; 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) have explicitly incorporated algebraic knowledge into their study plans from an early age (Pincheira & Alsina, 2021a).

This knowledge includes a study of patterns as a driver of early algebraic thinking, since it contributes to the development of mathematical representation and abstraction (Papic, 2015). Likewise, an early development of patterns and an understanding of their structure facilitate mathematical performance and provide an essential basis for promoting the process of generalization (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

This scenario of curricular changes and integration poses a real challenge for teachers in the early educational stages, and prompts them to build a solid base for understanding and dealing with experiences involving early algebra (NCTM, 2000). Against this backdrop, the design of mathematical tasks is part of the development of teaching practice to organize classes, since these tasks play an important role in classroom experiences for students and teachers alike (Wake, 2018). However, the design of tasks is influenced by the mathematical knowledge that teachers have for teaching (Sullivan et al., 2015). Therefore, when designing a task, teachers leave evidence of their mathematical knowledge and perception about the learning and teaching of mathematics (Thanheiser, 2015).

Based on the guidelines posed by early algebra for introducing algebraic knowledge into early levels of schooling and the importance of incorporating tasks that elicit the effective teaching of the knowledge derived from this content block, such as patterns, it is necessary to pay more attention to the mathematical knowledge demonstrated by teachers when designing these tasks, since teachers are the key to the opportunity to learn mathematics (Even & Ball, 2009).

From this perspective, this study focuses on the mathematical knowledge possessed by pre-service Early Childhood and Primary Education teachers, given the impact on the performance of their educational practices, which, by introducing the teaching of early algebra from the first years of schooling, are transformed into key agents for implementing the knowledge promoted by this field. From this point of view, we ask ourselves: What mathematical knowledge do pre-service Early Childhood and Primary Education teachers possess when designing mathematical tasks involving patterns?

Research on teachers' knowledge to teach mathematics has given rise to a variety of analysis models, including: the Knowledge Quartet (KQ) proposed by Rowland, Huckstep and Thwaites (2005); Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) raised by Ball, Thames and Phelps (2008); Didactic-Mathematical Knowledge and Competences (CCDM) model by Godino et al. (2017); and Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model proposed by Carrillo et al. (2018).

To answer the research question, we turn to the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model, since it considers a set of knowledge and skills that teachers need to manage the recurring tasks and problems involved in teaching mathematics (Ball et al., 2008). Based on this framework, the goal of our study is to analyze the mathematical knowledge that pre-service Early Childhood and Primary Education teachers evoke when designing a mathematical task to promote the study of patterns.

Theoretical Foundation

In the sections that follow, we discuss patterns as a mathematical object of the study, followed by the design of tasks as part of the development of teaching practice, and finally, the MKT model, which provides the theoretical/analysis tool used to delve into the nature of the mathematical knowledge involved in designing tasks. These three main areas will help us understand the aspects to consider when designing mathematical tasks involving patterns.

Mathematical Patterns

Early algebraic thinking is defined as "the reasoning engaged in by 5- to 12-year-olds as they build meaning for the objects and ways of thinking to be encountered within the later study of secondary school algebra" (Kieran, 2022, p.1131). Accordingly, a key element in general mathematical activity, and in algebraic thinking in particular, is the process of generalization (Kaput, 2008; Papic, 2015).

Generalization is a mental process that is regarded as a prerequisite for achieving mathematical abstraction, since "to generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity" (Dreyfus, 2002, p.35).

The recognition and analysis of mathematical patterns, defined as "any predictable regularity, usually involving numerical, spatial or logical relationships" (Mulligan & Mitchelmore, 2009, p.34), offers children the opportunity to observe and verbalize generalizations, and to register them symbolically (Threlfall, 1999). Various authors (e.g., Clements & Sarama, 2009; Mason et al., 2009) believe that the exploration of patterns lays the foundations to promote generalization and encourage algebraic thinking, since it allows children to coordinate their perceptive and symbolic inference skills such that they are able to build a plausible structure that is algebraically useful (Rivera, 2010). The ability to observe regularities is developed by children intuitively from the first years of schooling (Carpenter et al., 2003) through actions, behaviors, visual representations, musical melodies, and in other ways (Liljedahl, 2004). Accordingly, "patterns provide a way for children to recognize, order and organize their world" (NCTM, 2000, p.95).

Mulligan and Mitchelmore (2009) state that in mathematical patterns, it is necessary to differentiate between a pattern as an ordered sequence or serialization (e.g., ABABAB), and as a structure, that is, the rule or core underlying the pattern (e.g., AB). Thus, patterns exhibit a cognitive component linked to the recognition of their structure, and a meta-cognitive component associated with the ability to find and analyze patterns. The complexity of the repeating patterns is related to adding more elements and to the variability of the core pattern, that is, its color, orientation or shape (Liljedahl, 2004).

There is a series of tasks that can be used to operationalize work with patterns and develop skills. Lüken and Sauzet (2020) define these skills as "children's competencies regarding repeating patterns" (p. 29).

The most frequent tasks in the literature are: duplicating the same pattern; finding missing elements in a sequence; expanding the sequence; building the same pattern with different materials; identifying the unit of repetition; and inventing a pattern. The skills to make patterns that mobilize these tasks are: copy, interpolate, extend, abstract, or translate, recognize the unit of repetition, and create, respectively (Clements & Sarama, 2009; Lüken & Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019). The level of difficulty between the tasks is progressive (Lüken & Sauzet, 2020).

Various studies have reported that children progress in their pattern-making skills in Early Childhood Education and early Primary Education when working with mathematical patterns (e.g., Clements & Sarama, 2009; Lüken and Sauzet, 2020). At about the age of three or four, children are able to perform tasks that require copying skills, since they have a basic level of difficulty (Clements & Sarama, 2009; Rittle-Johnson et al., 2015). They are then successfully initiated in the interpolation and extension skills from the age of four (Clements & Sarama, 2009). Finally, at around the age of five or six, children develop the ability to identify the unit of repetition and transfer that knowledge to translate and create a certain pattern (Lüken & Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013).

According to Threlfall (2005), understanding the unit of repetition of a sequence is a crucial step in the mathematical development of children. However, identifying the unit of repetition is one of the most difficult tasks, even for nine-year-olds (Warren & Cooper, 2007).

Design of Mathematical Tasks

Mathematical tasks play a fundamental role in teaching, since student learning is determined by the type of task that is presented to them (Sullivan et al., 2010). According to Smith and Stein (1998), mathematical tasks should promote high levels of thinking in students. Thus, to achieve effective mathematics learning, teachers need to involve students in tasks that are challenging (NCTM, 2015).

By mathematical task we mean the information that drives the work with the students, including representations, context, questions and instructions (Sullivan et al., 2012). Designing tasks is part of the professional endeavor that teachers undertake as part of teaching mathematics (Llinares, 2011). Therefore, by working with mathematical tasks, teachers improve their mathematical knowledge and their capacity for mathematical-didactic design (Pepin, 2015).

Liljedahl et al. (2007) concluded that the design of a mathematical task constitutes a recursive process that involves both the creation of completely new tasks and the adaptation or refinement of existing tasks. According to Liljedahl et al. (2007), to develop this process, teachers must consider four phases: 1) *predictive analysis* is related to the personal experience that teachers have with solving the task, as well as to their experience using similar tasks. This experience helps with the design of the task and its implementation; 2) *testing* refers to the period of trying out or implementing the task in a classroom context. This phase allows analyzing a variety of interpretations and solutions in the task; 3) *reflective analysis* to evaluate the pedagogical aspects and decision-making put into practice in the previous phase; and 4) *the adjustment* is related to re-designing the task and/or its implementation. The interaction of the teaching staff in this recursive process allows them to broaden their knowledge and acquire a better understanding of the possibilities that the task provides for student learning.

Another important aspect to consider in the design of tasks is the proposal by Jones and Pepin (2016), who suggest that the design of mathematical tasks requires paying attention in terms of: what to design, that is, individual tasks, groups of tasks or task sequences; what tools are needed or beneficial to design the task and analyzing the possibilities and limitations of the tools or resources for the thematic area involved in the task; finally, under what conditions the task is designed, that is, the purpose of the task and who the agents involved in its design will be.

A mathematics task can be practiced through various teaching contexts. Alsina (2019; 2020) refers to the term teaching itineraries as an intentional sequence that begins in informal contexts and can be used to visualize mathematical ideas concretely (everyday life situations, manipulative materials and games); it continues in intermediate contexts that, through exploration and reflection, lead to the progressive schematization and generalization of mathematical knowledge (literary and technological resources); and ends in formal contexts, in which the representation and formalization of mathematical knowledge is practiced through conventional procedures and notations, thus completing the learning from the concrete to the symbolic (graphic resources and textbooks).

Thus, the design of mathematical tasks is something that teachers do on a daily basis, and that requires a broad view of what to consider for their development. From our point of view, designing a mathematical task requires teachers to know the learning objective that is intended to be addressed, and the teaching context on which the design of the task will be based. They must also have broad knowledge of the mathematical content to be taught and its didactics so as to consider sequences of tasks that enhance learning. Finally, they must be clear as to the depth of the content they want to present, based on the intended educational level of the task.

In the case of designing pattern tasks, it is important to consider the tasks for making patterns mentioned in the previous section: duplicate the same pattern; find missing elements of a sequence; expand a sequence; build the same pattern with different elements; identify the unit of repetition; invent a pattern (Clements & Sarama, 2009; Lüken & Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019).

Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

The MKT model proposed by Ball et al. (2008), emerges from the advances put forward by Shulman (1986,1987) in the framework of the teacher professional knowledge model. This model has been developed as an analytical tool of teacher knowledge and is defined as "the mathematical knowledge that teachers uses in the classrooms to produce instruction and student growth" (Hill et al., 2008, p.374).

MKT considers two major domains of mathematical knowledge for teaching: subject matter knowledge and pedagogical content knowledge.

Subject matter knowledge includes three sub-domains: common content knowledge (CCK), which refers to "mathematical knowledge and skill used in settings other than teaching" (Ball et al., 2008, p.399), that is, it corresponds to the management that can be achieved throughout the educational levels and that any person who faces a mathematical task possesses; specialized content knowledge (SCK), which refers to "mathematical knowledge and skill unique to teaching" (Ball et al., 2008, p.400), knowledge that is specific to the teacher and is used to develop teaching tasks related to: "how to accurately represent mathematical ideas, provide mathematical explanations for common rules and procedures, and examine and understand unusual solution methods to problems" (Hill et al., 2008, p.377-378); and the knowledge at the mathematical horizon, which is described as "awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum" (Ball et al., 2008, p.403), this knowledge allows the teacher to establish the way in which the mathematical contents are related to others in the mathematics curriculum throughout the various educational stages. In other words, this knowledge lets teachers know how the mathematics they teach relates to the mathematics that students will learn in later years so as to lay the foundations for what will come later.

Pedagogical content knowledge is also composed of three subdomains: knowledge of content and students (KCS), which is defined as the "content knowledge intertwined with knowledge of how students think about, know, or learn this particular content" (Hill et al., 2008, p.375), the knowledge that the teacher manages regarding students' knowledge, allowing them to predict situations and anticipate the concerns, attitudes or difficulties of the students; knowledge of content and teaching (KCT), which is defined as knowledge that "combines knowledge about teaching and knowing about mathematics" (Ball et al., 2008, p.401), this knowledge integrates specific mathematical knowledge, and pedagogical and didactic aspects of the teaching processes involved in student learning; and, finally, knowledge of curriculum, is "represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level, and the variety of instructional materials available in relation to those programs" (Ball et al., 2008, p.391), it is related to the orientations and approaches corresponding to the programs designed for each educational level in the area of mathematics and the materials available in relation to them.

The tools provided by the mathematical knowledge model for teaching (Hill et al., 2008) are very rich in the field of Mathematics Education, since they allow us to categorize the knowledge that a teacher must manifest in the development of their practice to teach mathematics.

For the purposes of our study, we will specifically draw from the subdomains of specialized content knowledge and content knowledge and teaching, as these are more critically linked to the design of mathematical tasks (Sullivan et al., 2015).

Some studies have analyzed the mathematical knowledge that teachers have of early algebra and teaching patterns. Bair and Rich (2011), for example, analyze specialized knowledge for the development of algebraic reasoning in pre-service Early Childhood and Primary Education teachers. The results reveal a lack of ability to exemplify the nature of the relationships between quantities, and difficulties establishing connections between different representations of a number sequence. McAuliffe and Lubben (2013) analyze a teacher's performance when planning and presenting an early algebra lesson on patterns. These authors note the difficulty of helping students move from focusing solely on the number pattern to simultaneously focusing on the function, a central transition in early algebra teaching.

Elsewhere, Wilkie (2014) analyzes the mathematical knowledge that 105 in-service teachers have of functions, relationships and variations. The results show that two-thirds of teachers exhibit knowledge of the content in pattern generalization tasks. However, less than half demonstrated a reasonable pedagogical knowledge of the content, especially when providing suitable examples for the development of functional thinking. In a subsequent study, Wilkie (2016) delves into mathematical knowledge for teaching functional thinking by generalizing patterns with 10 in-service Primary Education teachers. After a year-long intervention, the results reveal an increase in certain aspects of their mathematical knowledge: a greater capacity to generalize; and an improvement in the choice of representations and examples used in the lessons.

Likewise, Zapatera and Callejo (2017) analyze the mathematical knowledge of 40 pre-service teachers in the context of pattern generalization, obtaining as a result a low level of specialized knowledge, since they exhibit difficulties identifying the mathematical elements used by students, and in abstracting observed regularities to interpret the characteristics of understanding generalization.

Methodology

In keeping with the purpose of our research, which, as noted, consists of analyzing the mathematical knowledge that pre-service Early Childhood and Primary Education teachers possess when designing a mathematical task to promote the study of patterns, we designed a qualitative descriptive study (Creswell, 2009) that relies on the content analysis technique. This technique lays out a "strict and systematic set of procedures for the rigorous analysis, examination and verification of the contents of written data" (Cohen et al., 2011, p. 475). It is used to study the nature of discourse in detail, and is able to reveal the internal structure of texts by studying their semantic content (Rico & Fernández-Cano, 2013); in our case, the written productions corresponding to the tasks designed by the pre-service teachers.

To analyze the content, the following stages were considered:

1. Individual reading of each of the mathematical tasks to explore and organize the information present in each of them.
2. Determine analysis indicators from the review of the literature. In our case, we considered a series of components to observe in the design of tasks for teaching patterns based on the SCK and KCT subdomains of the MKT model (Ball et al., 2008).
3. Encode math tasks based on established components.
4. Systematize the information through statistical tables to facilitate the descriptive analysis.
5. Support the descriptive analysis by selecting examples of tasks that consider the components analyzed.

Participants and context

Forty pre-service teachers participated in the study. They were deliberately taken from the 2020 academic year, and 18 of them were pre-service Early Childhood Education teachers who were in their fifth semester of training (out of eight), and 22 were pre-service Primary Education teachers who were in their fifth semester of training (out of ten) at a university in southern Chile.

Specifically, the pre-service Early Childhood Education teachers were taking the Mathematics Didactics subject, which is a didactic-disciplinary course in which they receive didactic training on algebra and other areas of content. It should be noted that these participants had internship experience, and only took one previous related course on understanding mathematical logical thinking. As for the pre-service Primary Education teachers, they were taking the Learning and Teaching Algebra course, where they received specific didactic training on algebra to complement their disciplinary training. These participants previously took courses on teaching arithmetic and geometry, and had also taken part in internships.

Task design is part of the teacher training process, since both in their previous subjects, as well as during their internship, they had to plan class sessions, which required them to design mathematical tasks.

It should be noted that pre-service teachers of both Early Childhood Education and Primary Education take a mathematics test beforehand in order to be admitted into the program. This test ensures a baseline knowledge of mathematics to start studies in the Education Degree.

Design and procedure

In order to assess the mathematical knowledge of pre-service teachers, teaching situations have been formulated using "vignettes" (Tab. 1), which consist of placing the participants in a fictitious situation and from there posing semi-structured follow-up questions about the topic under investigation (Schoenberg & Ravdal, 2000), in our case the mathematical patterns.

The vignettes are based on situations that pre-service teachers of Early Childhood and Primary Education must face to propose a mathematical activity according to the objectives proposed by the Chilean school curriculum linked to early algebra in the Third Level (4-5 years of age) of Early Childhood Education (MINEDUC, 2018) and the First Year (6-7 years old) of Primary Education (MINEDUC, 2012). Objectives that share common teaching knowledge have been selected, although they differ in the degree of depth that each educational level deserves, such as working with patterns, with the intention of analyzing the transition and evolution that this content receives in accordance with the school curriculum.

Teaching situation for pre-service teachers of Early Childhood Education
A teacher of Early Childhood Education should address the following learning objective: *"Create sound, visual, gestural, body or other patterns of two or three elements"*. She has 30 minutes to carry out an activity with her students. As a pre-service teacher, if you had to recommend to Camila an activity to address this objective with her students, what would you propose? Describe and justify the activity that you would propose considering the concepts and procedures that will be implemented during the development of the activity, the possible orientations that must be addressed and anticipated to generate interaction, discussion and feedback with the students.
Teaching situation for pre-service teachers of Primary Education
The teacher of the first year of Primary Education should address the following learning objective: *"Recognize, describe, create and continue repetitive patterns (sounds, figures, rhythms ...) and numerical patterns up to 20, increasing and decreasing, using concrete, pictorial and symbolic material, manually and / or through educational software"*. You have 45 minutes to carry out an activity with your students. As a pre-service teacher, if you had to recommend to Carlos an activity to address this objective with his students, what would you propose? Describe and justify the activity that you would propose considering the concepts and procedures that will be implemented during the development of the activity, the possible orientations that must be addressed and anticipated to generate interaction, discussion and feedback with the students.

Table 1. Vignettes used in pattern teaching situations

The teaching situation presented in each vignette aims to place pre-service teachers in a teaching context, in order to show and describe the components of mathematical knowledge that they reveal through the design of a mathematical task.

The vignettes were presented to the participants, in the context of a regular class of the participants' training process (90-minute session), in the respective courses they were taking, with the authorization and collaboration of the academic trainers in charge. The development of the study also considered the informed consent of the participants.

For the design of the tasks, the pre-service teachers had access to the internet and mathematics textbooks, since the didactic training they receive promotes the design of tasks in different contexts, such as informal, intermediate and formal contexts (Alsina, 2019; 2020). The Internet and textbooks are used to search for activities in different contexts that let them design mathematical tasks based on the training received.

Data analysis

To analyze the responses of pre-service teachers, deductive analysis categories were established from the literature that consider the adaptation and evolution of the theoretical tools provided by the MKT model (Ball et al., 2008) in the context of the design of tasks for teaching patterns.

Thus, considering the aspects to observe in the design of a task involving patterns, we identified components of the subdomains of specialized content knowledge (SCK) and knowledge of content and teaching (KCT), since they are directly linked to this professional activity (Sullivan et al., 2015).

These components were first drafted and submitted for review by 4 experts in the field of Mathematics Didactics in Early Childhood and Primary Education from Chile and Spain, and then their comments and observations were considered for the elaboration of the final components. The expert judgment allowed us to adjust the designed components, shown in Table 2, in terms of clarity, to evaluate their formulation and wording, and in terms of coherence, to assess whether they are logically related to the subdomains of the MKT model that we intend to investigate in our study.

Specialized content knowledge
C1. Specify and expand the formal language of an algebraic nature associated with patterns based on the educational level.
C2. Manage the complexity and depth of a task involving patterns while understanding its potential.
C3. Identify theoretical concepts and/or mathematical properties of a task on patterns.
C4. Select and use various representations to present a task involving patterns, such as natural language, algebraic language, symbolic, graphical, or tabular representation.
C5. Present a variety of situations to which the study of patterns can be applied.
C6. Demonstrate rules for forming pattern sequences, numerical, geometric, or graphical regularities.
C7. Use definitions and/or properties to justify the validity of the results and procedures when solving a task involving patterns.
Knowledge of content and teaching
C8. Select sequences of tasks that can be used to acquire or reinforce algebraic knowledge through teaching itineraries, such as description of patterns, regularities and number relationships.
C9. Propose tasks that allow the regularities of a sequence and/or the rule for creating it to be described in natural language.
C10. Propose teaching strategies based on mathematical games to motivate the use of algebraic language and promote an understanding of patterns.

Table 2. Components of mathematical knowledge for teaching patterns when designing mathematical tasks

In order to analyze the data, the authors coded the written productions of the pre-service teachers based on the distribution of the presence or absence of the components.

Scores were assigned to identify the presence (1 point) or absence (0 points) of the components.

To guarantee the reliability of the coding process, the authors carried out a calibration process, through joint coding and debate sessions to standardize the criteria in order to then carry out the individual coding. The tasks designed were analyzed through cyclical and deductive reviews, considering the formulation of the task on a general level, the questions that were asked in the task and how the early algebraic content was steered to obtain the answers. This made it possible to evaluate the levels of inter-rater reliability, yielding a reliability coefficient greater than 85%, above the minimum acceptable (Tinsley & Brown, 2000).

For the coding process, the authors used a log sheet for the components described in Table 2 and evidence of the segments of the tasks, and then assigned the corresponding scores.

Finally, with regard to the examples selected, a criterion was established that involved showing excerpts from tasks that exhibited a greater presence of the components proposed in Table 2.

Results

According to our study objective, the results are based on the analysis of the mathematical tasks proposed by 18 pre-service teachers of Early Childhood Education and 22 of Primary Education, to promote the study of the patterns.

Mathematical knowledge that teachers possess when designing tasks involving patterns

The description of the mathematical tasks designed by the pre-service Early Childhood and Primary Education teachers made it possible to analyze the presence/absence of the components of MKT for patterns organized according to the SCK and KCT subdomains. Table 3 shows an overview of the distribution of both subdomains based on their presence in the tasks proposed for working with patterns in Early Childhood and Primary Education classrooms.

Subdomain of mathematical knowledge	Early Childhood Education Tasks	Primary Education Tasks
Specialized content knowledge (SCK)	83.3%	90.9%
Knowledge of content and teaching (KCT)	61.1%	45.4%

Table 3. Presence of MKT subdomains for teaching patterns in Early Childhood and Primary Education

Note that the SCK subdomain is more prevalent than KCT for both Early Childhood and Primary Education tasks (above 75%). In the case of KCT, its presence is higher in Early Childhood Education tasks (above 50%), while in Primary Education, its presence is low, being found in fewer than 50% of the tasks.

Analysis of the Components of SCK and KCT

To show the trends of each subdomain of the MKT model observed in the written productions of pre-service Early Childhood and Primary Education teachers when designing a mathematical task, our analysis focuses on the presence of MKT components for teaching patterns. The distribution of the presence of the components defined and validated in this study is presented below.

Components of SCK

Table 4 shows the presence of the components involved in the development of SCK. Note that in the case of the tasks proposed by pre-service Early Childhood Education teachers, three components (C5, C6 and C7) are below 25%, and in Primary Education only two (C5 and C6). This shows the participants' indifference to incorporating in the mathematical tasks a variety of situations in which to apply the study of early algebra, in this case: the use of patterns to determine a generality; presenting rules for creating sequences of patterns and numerical regularities; using definitions and/or properties to justify the validity of the results and procedures when solving an algebraic task.

Components	Early Childhood Education Tasks	Primary Education Tasks
C1. Specify and expand the formal language of an algebraic nature associated with patterns based on the educational level.	77.7%	90.9%
C2. Manage the complexity and depth of a task involving patterns while understanding its potential.	44.4%	54.5%
C3. Identify theoretical concepts and/or mathematical properties of a task on patterns.	44.4%	90.9%
C4. Select and use various representations to present a task involving patterns, such as natural language, algebraic language, symbolic, graphical, or tabular representation.	33.3%	54.5%
C5. Present a variety of situations to which the study of patterns can be applied.	11.1%	18.1%
C6. Demonstrate rules for forming pattern sequences, numerical, geometric, or graphical regularities.	5.5%	13.6%
C7. Use definitions and/or properties to justify the validity of the results and procedures when solving a task involving patterns.	16.6%	31.8%

Table 4. Presence of SCK components for teaching patterns in Early Childhood and Primary Education

Component 1 stands out with a significantly higher presence in relation to the other six components observed in the proposed Early Childhood Education tasks (77.7%), demonstrating that the participants were able to specify and expand the formal language of an algebraic nature for this level of education. Similarly, this component is prominent in the Primary Education tasks (90.9%), as is component 3 (90.9%). The presence of the latter shows that pre-service Primary Education teachers identified theoretical concepts and/or mathematical properties in the algebraic tasks they proposed, such as repetition patterns, number sequence, increasing and decreasing sequences, and others.

Components of KCT

In relation to the components that comprise this subdomain, Table 5 shows a greater presence in the tasks proposed by the pre-service Early Childhood Education teachers than in those of the Primary Education teachers. Component 8 is present in over 50% of the tasks proposed by the pre-service Early Childhood Education teachers, while the scope of the components is low in the Primary Education tasks, ranging between 18.1% and 45.4 %.

Component 1 shows that the participants mostly considered the selection of sequences of tasks that allow students to acquire algebraic knowledge over those that allow them to describe, using natural language, the regularities of a sequence and/or the rules for creating one (C9). Finally, we see that component 10, which is related to the implementation of strategies based on mathematical games to motivate the use of algebraic language and promote an understanding of early algebra, is the component that is present the least in this area of knowledge.

Component	Early Childhood Education Tasks	Primary Education Tasks
C8. Select sequences of tasks that can be used to acquire or reinforce algebraic knowledge through teaching itineraries, such as description of patterns, regularities and number relationships.	61.1%	45.4%
C9. Propose tasks that allow the regularities of a sequence and/or the rule for creating it to be described in natural language.	33.3%	22.7%
C10. Propose teaching strategies based on mathematical games to motivate the use of algebraic language and promote an understanding of patterns.	22.2%	18.1%

Table 5. Presence of KCT components for teaching patterns in Early Childhood and Primary Education

Below, Figure 1 provides an example of a task proposed by a Primary Education pre-service teacher, showing the presence of the components described above.

Through the game the following situation is modeled: Clap- stamp- say "A"- Clap- stamp- say "A"- Clap

Questions: How do we continue the sequence? What's next? What is the pattern? How many elements does the repeating pattern have? How do these elements repeat? The teacher should explain to his students that a pattern is a set of elements ordered according to a rule, which when repeated several times forms a sequence.
Can we form another pattern with these elements? What would the sequence look like?
Children represent the new sequence with math link cubes.

Figure 1: Extract task PF-10, Primary Education

With regard to SCK, the task put forth shows that the pre-service teacher proposes a rhythmic repetition pattern with three elements. Both the questions presented - What is the pattern? How many elements does the repeating pattern have? - and the way in which the definition of a pattern is formalized show that the task requires the formal language of an algebraic nature (C1) and identifies theoretical concepts related to the development of the early algebraic task (C3).

The task focuses on expanding the sequence, identifying the unit of repetition, and, finally, inventing a new pattern by rearranging the elements in the sequence, mobilizing the skills to make patterns gradually, extend, recognize the unit of repetition, and create a pattern, respectively. This makes it evident that the pre-service teacher can handle the complexity and depth of the task to teach patterns, understanding their potential (C2).

Another aspect observed in the task is that the pre-service teacher proposes various situations where the study of patterns (C5) can be applied, by suggesting the expansion of a sequence using a rhythmic pattern and then representing a pattern created with the multilink cubes. This last indication provides evidence for the presence of the C4 component, since the pre-service teacher considers the graphical representation of an ABC repetition pattern to carry out the task.

When designing the task, the teacher considers the use of the definition of pattern to justify the validity of the results, revealing the presence of the C7 component. However, the absence of the C6 component in the task designed is of note.

Regarding the KCT demonstrated in the task, there is an absence of component 8, since the task designed does not present a sequence of activities through teaching itineraries, it is only developed in an informal context, which allows visualizing the mathematical ideas around the patterns in a concrete manner through the game and manipulatives. However, the task can be used to describe in natural language the regularity of the sequence (C9) by prompting the identification of the unit of repetition.

Finally, the task promotes an understanding of patterns through game-based teaching strategies (C10), since the task begins by reproducing a sequence with a mathematical game that models a situation with a rhythmic pattern sequence.

As an example, Figure 2 shows the analysis of an extract from a task proposed by an Early Childhood Education pre-service teacher.

> To introduce the content, children can be shown a video (https://www.youtube.com/watch?v=-SxF9TZG5_w) that proposes sequences where they can complete the series with the missing term and go observing the pattern. The teacher of Early Childhood can guide the presentation of the video through the questions: What do you observe? What elements are repeated? What elements must we add to continue the sequence?
> Then the children can work on a worksheet by painting the geometric figures that form a pattern: blue triangle- green triangle, blue triangle- green triangle, blue triangle- green triangle. You can work with two different figures such as: yellow square-red circle, yellow square-red circle, yellow square - red circle. In both cases we are working with visual patterns of two elements (AB).
> Finally, the children are asked to get together in pairs to create gestural patterns of three elements (ABC), for example: surprise-sadness-anger. Each pair can present their composition. To reflect on the experience, the teachers may ask: Can you create a different pattern with the same gestures? How do we achieve this?

Figure 2: Extract task PF-04, Early Childhood Education

Regarding the SCK, the pre-service teacher proposes the task with repetition patterns of two and three elements. The design of the task and the questions formulated by the teacher exhibit the presence of components C1 and C3, since they use a formal language of an algebraic nature and identify theoretical concepts associated with the patterns based on the use of terms such as sequence, series, visual patterns, gesture patterns.

The first part of the task focuses on expanding a sequence, then duplicating a pattern, and, finally, inventing a pattern, mobilizing the skills of extending, copying, and creating, respectively. The presence of component C2 is evident, since the pre-service teacher handles the complexity and depth of the task to teach patterns, understanding their potential.

The design of the task also shows that the pre-service teacher handles a variety of situations to work in more detail with patterns (C5), such as, for example, the observation of patterns with two and three elements to extend a series, the use of visual patterns through geometric figures and the use of gesture patterns. However, there is no evidence of the use of various representations when planning the task (C4) or definitions to justify the validity of the results when solving the task (C7).

With regard to KCT, the description of the task reveals a sequence of activities proposed by the pre-service teacher to enhance the study of patterns through teaching itineraries (C8). The task begins at an intermediate context through the use of a technological resource (video), and progresses towards a formal context where the content is formalized with a worksheet. However, the task as presented does not consider informal contexts.

The task proposes continuing sequences, identifying the core of a pattern and creating patterns with two and three elements. In this sense, the task allows students to describe, using natural language, the regularities observed in each sequence (C9) through the questions that are posed, for example: What do you observe? What elements are repeated? What elements must we add to continue the sequence?

The design of the task lacks component C10, since the task does not consider game-based teaching strategies to motivate the use of algebraic language and promote an understanding of patterns.

Final Considerations

This research has analyzed the mathematical knowledge possessed by 40 pre-service Chilean Early Childhood and Primary Education teachers when designing mathematical tasks to teach patterns. It considers the fact that task design can be used to link the knowledge needed to perform various professional tasks, such as organizing mathematical content, interpreting learning and managing teaching (Llinares, 2011).

We focused on the design of mathematical tasks that can be used to work with patterns in the third level of Early Childhood Education (4-5 years of age) and the first year of Primary Education (6-7 years of age), in accordance with the learning objectives contained in the Chilean school curriculum for both learning stages (MINEDUC, 2012; 2018). In order to analyze these tasks, we relied on the MKT model (Ball et al., 2008), and more specifically on the SCK and KCT subdomains, since they are directly involved in the design of mathematical tasks (Sullivan et al., 2015).

The pre-service teachers have designed a variety of mathematical tasks on patterns based on specific teaching levels. These tasks encourage the observation of regularities involving different actions and representations (Liljedahl, 2004).

The analysis of the tasks designed to promote the study of patterns made it possible to accentuate aspects involving the mathematical knowledge of pre-service teachers, showing that the SCK subdomain is more developed than the KCT subdomain, attaining average presences of 87.1% and 53.2%, respectively. Despite the fact that both subdomains are above 50%, the description of the mathematical tasks consider partial aspects of this knowledge. In the area of SCK, for example, the component that involves demonstrating rules for creating sequences of patterns, or numerical, geometric or graphic regularities has the lowest presence in the mathematical tasks of Early Childhood (5.5%) and Primary (13.6%) Education. Another component that exhibits gaps in this subdomain is presenting a variety of situations in which the study of patterns can be applied, and using definitions or properties to justify the validity of the results and procedures in solving a pattern task, which is present in fewer than 50% of the tasks proposed for both school levels.

Regarding KCT, which is related to presenting tasks that can be used to describe, using natural language, the regularities of a sequence or the rule for creating it, its presence is below 50%, as is proposing teaching strategies based on mathematical games to motivate the use of algebraic language and promote an understanding of patterns.

Consequently, the low level of detail of mathematical knowledge displayed by the study participants has shown that the tasks designed to teach patterns do not guarantee a high cognitive potential, as Smith and Stein (1998) suggests. However, instructing the pre-service teachers to craft mathematical tasks has underscored their ability for mathematical-didactic design (Pepin, 2015).

In general terms, considering the results of various studies analyzed by Authors (Pincheira & Alsina, 2021b) as part of a systematic review of the mathematical knowledge of Early Childhood and Primary Education teachers to teach early algebra, our findings match those of similar research that analyzed SCK and KCT, which revealed that teachers are able to progress in the analysis of specific aspects of a pattern task (Bair & Rich, 2011) and have a good handle on the representations available to teach this content, such as manipulatives, function tables, and diagrams (McAuliffe & Lubben, 2013); however, the explanations they provide about the tasks selected to describe the relationships that lead to generalization are not always considered successful (Zapatera & Callejo, 2017).

Moreover, Wilkie (2014; 2016) and Wilkie and Clarke (2015) show that teachers identify pattern generalization strategies, but they exhibit problems in representing the generalizations symbolically.

These results provide evidence on the mathematical knowledge that pre-service teachers bring to bear to promote the teaching of patterns in Early Childhood and Primary education. More specifically, the analysis carried out has allowed us to identify the mathematical knowledge that should be addressed most urgently during the process of initial teacher training if we are to promote an ideal learning of patterns from the earliest levels of education.

However, the previous training received by teachers can influence the result of the tasks they propose, since preschool and primary education teachers do not exhibit uniform knowledge when designing mathematical tasks. In this regard, two limitations are considered: not having delved into the CCK of the teachers, as it would have allowed us to establish links with the SCK; and not having conducted follow-up interviews to identify and confirm the knowledge promulgated by the pre-service teachers in the design of the tasks.

Another limitation of our study is that it does not consider formative experiences in the design of mathematical tasks that promote progress and improvement of the initial proposal, as noted by Liljedahl et al. (2007). As a result, future studies will need to investigate educational resources and strategies that can be used to enhance the mathematical knowledge of pre-service teachers to ensure that patterns are taught effectively from the first years of school, since the quality of mathematics teaching depends on the knowledge of teachers (Ball et al., 2008), meaning that their professional development positively impacts the quality of teaching and student performance (Cohen & Hill, 2001). From this perspective, the development of skills to design challenging mathematical tasks that promote in-depth learning of this content block, accompanied by training experiences that provoke reflection around the analysis, implementation and redesign of these tasks, will allow pre-service teachers to progress towards the acquisition of the mathematical knowledge they need in order to teach patterns effectively.

References

ACARA (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Alsina, Á. (2019). Itinerarios de enseñanza de las matemáticas en educación primaria. *Aula de innovación educativa, 286*, 12-17.

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159. http://10.30612/tangram.v3i2.12018

Bair, S. L., & Rich, B. S. (2011). Characterizing the development of specialized mathematical content knowledge for teaching in algebraic reasoning and number theory. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(4), 292-321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Heinemann.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, Mª.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, 20, 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements D., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883389

Cohen, D. K., & Hill, H. C. (2001). *Learning policy: When State Education Reform Works.* Yale University Press.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge. https://doi.org/10.12987/yale/9780300089479.001.0001

Creswell, J. W. (2009). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3ª edition). Sage

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2

Even, R., & Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics the 15th ICMI Study* (Eds.), Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*, 105-121. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9345-z

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 1-20. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics, 26*(3), 24-42.

Liljedahl, P., Chernoff, E., & Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 239-249. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9047-7

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78*, 5-16.

Lüken, M., & Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 2*(2), 10–32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

McAuliffe, S., & Lubben, F. (2013). Perspectives on pre-service teacher knowledge for teaching early algebra. *Perspectives in Education*, *31*(3), 155-169.

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six*. Ministry of Education Singapore: Curriculum Planning and Development Division.
Ministry of Education Singapore (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6.* Ministry of Education.
Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM
National Council of Teachers of Mathematics (2015). *De los principios a la acción: Para garantizar el éxito matemático para todos*. NCTM
Papic, M.M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8
Pepin, B. (2015). *Enhancing mathematics/STEM education: A 'resourceful' approach*. Inaugural lecture, 27 November 2015, Technische Universiteit Eindhoven.
Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06
Pincheira, N. & Alsina, Á. (2021b). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9 , 2590.* https://doi.org/10.3390/math9202590
Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp.1-22). Comares.
Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897
Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., & Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31,* 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005
Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0
Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5
Schoenberg, N. E., & Ravdal, H. (2000). Using vignettes in awareness and attitudinal research. *International Journal of Social Research Methodology*, *3*(1), 63-74. https://doi.org/10.1080/136455700294932
Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 3, 344-350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2012). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. & O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies, and student learning. In A. Watson & M. Obtain (Eds.), *Task design in mathematics education, an ICMI study 22* (pp. 83-114). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_3

Thanheiser, E. (2015). Developing prospective teachers' conceptions with well-designed tasks: Explaining successes and analyzing conceptual difficulties. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 141-172. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9272-9

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18–30). Cassell.

Threlfall, J. (2005). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18–30). Continuum.

Tinsley, H. E. A. & Brown, S. D. (2000). *Handbook of applied multivariate statistics and mathematical modeling*. Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-012691360-6/50002-1

Wake, G. C. (2018). A case study of theory-informed task design: what might we, as designers, learn? En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). SEIEM.

Warren, E., & Cooper, T. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9-year-old students that support the transition from the known to the novel. *The Journal of Classroom Interaction Research Library, 4142*(7), 7–17.

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 397-428. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9251-6

Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal, 28*(2), 245-275. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0151-1

Wilkie, K. J., & Clarke, D. (2015). Pathways to Professional Growth: Investigating Upper Primary School Teachers' Perspectives on Learning to Teach Algebra. *Australian Journal of Teacher Education, 40*(4), 87-118. https://doi.org/10.14221/ajte.2015v40n4.6

Zapatera, A., & Callejo, M. L. (2017). Mathematical knowledge and professional noticing of prospective teachers in the context of pattern generalization. Characterization of Profiles. *Revista Complutense de Educación, 24* (1), 35-38. https://doi.org/10.5209/RCED.55070

Acknowledgments

This research was supported by the National Agency for Research and Development of the Government of Chile (ANID) through a PhD scholarship abroad, Folio No. 72200447, and the Department of Subject-Specific Didactics of the University of Girona.

4.7 Estudio [G]

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. *Revista de Investigación en Educación, 20*(2), 154-171. https://doi.org/10.35869/reined.v20i2.4222

UniversidadeVigo

Revista de Investigación en Educación, 2022, 20(2), 154-171
DOI: https://doi.org/10.35869/reined.v20i2.4222
https://revistas.webs.uvigo.es/index.php/reined
ISSN 1697-5200 | e-ISSN 2172-3427

Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil

Evaluation of knowledge for teaching early algebra during initial teacher training for Early Childhood Education teachers

Nataly Pincheira[1], **Ángel Alsina**[2]

[1] Universidad de Girona *nataly.pincheira@udg.edu*
[2] Universidad de Girona *angel.alsina@udg.edu*

Recibido: 13/6/2022
Aceptado: 24/10/2022

Dirección de contacto:
Nataly Pincheira
Plaça de Sant Domènec, 3
17004 Girona

Resumen

El objetivo de este estudio es presentar el proceso de construcción y validación de un instrumento para evaluar el conocimiento del futuro profesorado de Educación Infantil para enseñar álgebra temprana, desde el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*. Este proceso consta de cinco fases: 1) revisión de la literatura sobre el conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas desde la perspectiva del MKT y la enseñanza del álgebra temprana; 2) análisis del tratamiento otorgado al álgebra temprana en el currículo y los libros de texto de Educación Infantil; 3) construcción de la versión inicial del instrumento; 4) validación del instrumento a través del juicio de expertos y una prueba piloto; y 5) ajustes y construcción de la versión final del instrumento. Como resultado, se ha obtenido el Cuestionario MKT-álgebra temprana (3-6), conformado por seis ítems de respuesta abierta que permiten profundizar en el conocimiento para enseñar los contenidos matemáticos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Infantil: relaciones a partir del reconocimiento de atributos, seriaciones a partir de patrones de repetición y descripción de cambios cualitativos y cuantitativos. Se concluye que la aplicación del instrumento puede servir de orientación para apoyar el proceso de formación del profesorado de Educación Infantil sobre álgebra temprana.

Palabras clave

Conocimiento Matemático para la Enseñanza, Álgebra Temprana, Instrumento de Evaluación, Futuro Profesorado, Educación Infantil

Abstract

The objective of this study is to present the process of construction and validation of an instrument to evaluate the preservice teachers' knowledge to teach early algebra from the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model. This process consists of five phases: 1) review of the literature on teachers' knowledge to teach mathematics from the perspective of MKT and the teaching of early algebra; 2) analysis of the treatment given to early algebra in the Early Childhood Education curriculum and textbooks; 3) construction of the initial version of the instrument; 4) validation of the instrument through expert judgement and a pilot test; and 5) adjustments and construction of the final version of the instrument. As a result, the MKT-Early Algebra Questionnaire (3-6) has been obtained, made up of six open-ended items that allow us to deepen our knowledge in order to teach the mathematical contents that characterise early algebra in Early Childhood Education: relations based on the recognition of attributes, serialisation based on patterns of repetition and description of qualitative and quantitative changes. It is concluded that the application of this instrument can serve as a guide to support the training process for Early Childhood Education teachers in early algebra.

Key Words

Mathematical Knowledge for Teaching, Early Algebra, Evaluation Instrument, Pre-service Teachers, Early Childhood Education

1. INTRODUCCIÓN

La incorporación de conocimientos de naturaleza algebraica desde los primeros años de escolarización es una temática ampliamente discutida en la literatura bajo las directrices del *Early Algebra*, a partir de ahora, álgebra temprana. Esta propuesta curricular propone promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras edades para asegurar una mejor comprensión de las matemáticas en las etapas educativas posteriores (Cai y Knuth, 2011; Kaput, 2008).

En este contexto, se plantea introducir el álgebra temprana principalmente desde la Educación Primaria. Sin embargo, diversos autores y organismos promueven desde hace años que la enseñanza de este bloque de contenido trascienda a la Educación Infantil (e.g., Alsina, 2019; 2022; Clements y Sarama, 2015; NCTM, 2000; 2006). Asimismo, los currículos contemporáneos de Educación Infantil no han quedado ajenos a esta propuesta y se ha ido evidenciando una mayor presencia de conocimientos asociados a la actividad algebraica temprana (Pincheira y Alsina, 2021a).

Enseñar álgebra temprana en los primeros años implica iniciar el desarrollo de modos de pensamiento –relacional, funcional, etc.– que se manifiestan por medio de diversas tareas, como "el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelización, la justificación, el ensayo y error y la predicción" (Kieran, 2004, p. 149). Para alcanzar el desarrollo de dicha actividad matemática, Pincheira y Alsina (2021a) caracterizan los conocimientos involucrados en la resolución de tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en Educación Infantil: a) relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos; b) seriaciones a partir de patrones de repetición; y c) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

Desde este prisma, la nueva proyección que ha conocido la enseñanza del álgebra representa un desafío para el profesorado; por tanto, se requiere prestar especial atención a los conocimientos matemáticos que poseen y desarrollan durante su proceso de formación. Según Chapman (2014) "no sólo es importante lo que saben los profesores de matemáticas, sino también cómo lo saben y lo que son capaces de movilizar para la enseñanza" (p. 295).

Pese a la importancia que tiene el conocimiento matemático del profesorado, puesto que impacta positivamente en la calidad de la enseñanza que imparten y el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes (Blömeke y Delaney, 2012; Lane et al., 2015), las investigaciones se han centrado en analizar principalmente los conocimientos matemáticos del profesorado de Educación Primaria en formación y activo sobre álgebra temprana (e.g., Souza et al., 2020; Wilkie, 2014; Zapatera y Quevedo, 2022). Nuestro propósito es ampliar estas investigaciones hacia el profesorado de Educación Infantil, dado que ellos conforman el punto de partida desde donde se requiere introducir la enseñanza de este bloque de contenido.

Asumimos la importancia que tiene la implementación de acciones formativas y el desarrollo de herramientas que permitan caracterizar el conocimiento matemático del profesorado de Educación Infantil sobre la enseñanza del álgebra temprana. Desde esta perspectiva, el objetivo de nuestro estudio es construir y validar un instrumento para evaluar el conocimiento matemático para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. Para ello, nos situamos en el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching-MKT*) propuesto por Ball et al. (2008).

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Conocimiento matemático para la enseñanza

Los avances planteados por Shulman (1986,1987) en el marco del conocimiento profesional del profesorado para enseñar las diferentes asignaturas han dado paso, en el caso concreto de las matemáticas, al modelo MKT propuesto por Ball et al. (2008). Este modelo se ha desarrollado como una herramienta analítica del conocimiento del profesorado y se define como "el conocimiento matemático que se utiliza en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill et al., 2008, p. 374), e incluye tanto conocimiento propiamente disciplinar como conocimiento didáctico.

A partir del análisis de las prácticas del profesorado, Ball et al. (2008) determinaron las demandas matemáticas de la enseñanza que posteriormente conforman los componentes del modelo, proporcionando una base empírica de la relación positiva que constituye el conocimiento pedagógico del profesorado y los resultados de aprendizaje de los estudiantes. De este modo, el modelo MKT establece un mapa de dominio del conocimiento matemático para la enseñanza, que considera el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, como se ha indicado.

El conocimiento del contenido incluye tres subdominios: el *Conocimiento Común del Contenido* (CCK), que se refiere al "conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza" (Ball et al., 2008, p.399), es decir, corresponde al manejo que se puede alcanzar a lo largo de los niveles educativos y que posee cualquier persona que se enfrenta a una tarea matemática; el *Conocimiento Especializado del Contenido* (SCK), que se refiere al "conocimiento matemático y habilidad exclusiva para la enseñanza" (Ball et al., 2008, p.400), un conocimiento que es específico del profesorado y que se emplea para desarrollar tareas de la enseñanza alusivas a: "cómo representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema" (Hill et al., 2008, pp. 377-378); y el *Conocimiento del Horizonte*

Matemático, que se describe como "el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los temas matemáticos incluidos en el currículo" (Ball et al., 2008, p. 403), lo cual permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículum a lo largo de las diversas etapas educativas y ofrece una visión para entender las conexiones entre las diversas nociones de la matemática y/o con otras ciencias.

El conocimiento pedagógico del contenido se compone también de tres subdominios: el *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes* (KCS), que se define como el "conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular" (Hill et al., 2008, p. 375), es el conocimiento que maneja el profesor acerca de los saberes de los estudiantes, permitiéndole predecir situaciones y adelantarse a las inquietudes, actitudes o dificultades del alumnado; el *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* (KCT), se define como "el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático" (Ball et al., 2008, p. 401), este conocimiento integra el conocimiento matemático específico, y aspectos pedagógicos y didácticos de los procesos de enseñanza que intervienen en el aprendizaje de los estudiantes; y, finalmente, el *Conocimiento del Currículo*, que se refiere al conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes (Ball et al., 2008), es decir, está relacionado con las orientaciones y enfoques correspondientes a los programas diseñados para cada nivel educativo en el área de matemáticas.

Las herramientas teóricas que otorga el modelo MKT son de gran riqueza en el ámbito de la educación matemática, dado que permiten categorizar los conocimientos que debe manifestar el profesorado en el desarrollo de su práctica para la enseñanza de las matemáticas.

2.2. Investigaciones previas sobre el conocimiento del futuro profesorado y el profesorado en activo de Educación Infantil para enseñar álgebra temprana

Los estudios sobre el conocimiento matemático del profesorado de Educación Infantil para enseñar álgebra temprana son escasos. En el marco de una revisión sistemática desde la perspectiva del modelo MKT, Pincheira y Alsina (2021b) han informado que dichos estudios, en su mayoría, abordan aspectos generales sobre la enseñanza de las matemáticas y tangenciales respecto del álgebra temprana, centrándose principalmente en el análisis de situaciones de enseñanza que involucran patrones. En este apartado nos referiremos sólo a aquellos conocimientos que tienen estrecha relación con el álgebra temprana.

Bair y Rich (2011), por ejemplo, analizan el conocimiento especializado para el desarrollo del razonamiento algebraico en más de 5.000 futuros profesores de Educación Infantil y Primaria en cursos de formación durante un periodo de tres años. Los resultados revelan una falta de capacidad para ejemplificar la naturaleza de las relaciones entre cantidades y dificultades para establecer conexiones entre distintas representaciones de una secuencia numérica. Por otra parte, Noviyanti y Suryadi (2019) en un estudio con 35 profesores de Educación Infantil en activo evalúan el conocimiento matemático básico, evidenciando limitaciones en el conocimiento del contenido sobre el sentido numérico y los patrones. Gasteiger et al. (2020) analizan el conocimiento matemático de 149 profesores de Educación Infantil en activo y en formación, observando una incomprensión del término matemático "patrón regular", que los lleva a la toma de decisiones erróneas en un contexto de enseñanza sobre álgebra temprana. Asimismo, Cabral et al. (2020) desde una perspectiva amplia sobre la formación del profesorado en álgebra, realizan una experiencia formativa con dos parejas de profesores de Educación Infantil en formación, donde analizan el conocimiento matemático sobre patrones repetitivos y la capacidad de percibir el pensamiento algebraico de los niños de la Escuela Infantil. Los resultados revelan dificultades para entender los patrones repetitivos como un objeto matemático, sin embargo, abordan aspectos relevantes del pensamiento algebraico de los niños, presentando algunas limitaciones en su interpretación.

Los resultados de estas investigaciones reflejan que el profesorado de Educación Infantil en formación y activo, presenta una falta de dominio respecto de los conocimientos que se requieren para enfrentar tareas algebraicas tempranas e incorporar estrategias de enseñanza a su instrucción.

3. METODOLOGÍA

Para caracterizar el conocimiento matemático del profesorado de Educación Infantil para la enseñanza del álgebra temprana, se ha elaborado un cuestionario denominado MKT-álgebra temprana (3-6).

El proceso de elaboración del cuestionario ha considerado las siguientes fases: 1. Revisión de la literatura sobre el conocimiento matemático del profesorado de Educación Infantil y la enseñanza del álgebra temprana; 2. Análisis del tratamiento otorgado al álgebra temprana en el currículo y los libros de texto de Educación Infantil; 3. Construcción de la versión inicial del instrumento; 4. Validación del instrumento; 5. Ajustes y construcción de la versión final.

3.1. Construcción de la versión inicial del instrumento

En primer lugar, a partir de las fases 1 y 2 se han seleccionado tareas matemáticas y situaciones de enseñanza que atiendan a la caracterización del álgebra temprana para la Educación Infantil propuesta por Pincheira y Alsina (2021a), dando lugar a los ítems iniciales del cuestionario. En segundo lugar, considerando el modelo MKT (Ball et al., 2008) se ha indagado en aspectos iniciales de los dominios y subdominios que lo componen. Esto ha dado lugar al planteamiento de preguntas que nos aproximen al conocimiento matemático del profesorado en torno a las tareas y situaciones de enseñanza seleccionadas.

De este modo, la versión inicial del cuestionario ha sido conformada por seis ítems de respuesta abierta (Anexo 1), puesto que permiten obtener un mayor grado de detalle en las respuestas de los participantes (Álvarez, 2003). A su vez, la riqueza particular que aporta cada ítem en torno al conocimiento algebraico temprano ha dado lugar a un total de 22 preguntas que pretenden evaluar el conocimiento matemático del profesorado de Educación Infantil, como se aprecia en la Figura 1.

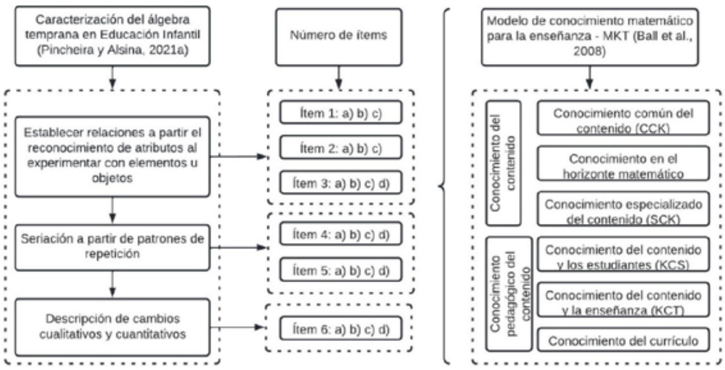


Figura 1. Estructura del cuestionario inicial

Cabe destacar que el cuestionario considera un primer apartado que recoge datos generales de identificación de los participantes, tales como, sexo, edad y estudios previos realizados.

3.2. Validación del instrumento mediante juicio de expertos y aplicación piloto

3.2.1. Juicio de expertos

La versión inicial del cuestionario se ha sometido a un proceso de validez del contenido a través del juicio de expertos y una aplicación piloto para establecer su fiabilidad.

En relación con el juicio de expertos, estos se seleccionaron según criterios de experiencia en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, más específicamente, con el modelo MKT y el estudio del álgebra temprana.

El juicio ha sido realizado por 12 expertos de Chile y España, proporcionándoles vía correo electrónico, el instrumento y una pauta para valorar el grado de adecuación de cada ítem de acuerdo con los dominios y subdominios del conocimiento matemático, considerando tres categorías para evaluar y sus respectivas puntuaciones de valoraciones: a) grado de correspondencia, en relación con la pertinencia o no pertinencia al modelo MKT (2: pertenece, 1: no pertenece); b) formulación, referido al lenguaje y claridad de cada ítem (3: adecuado, 2: a mejorar, 1: no adecuado; y c) pertinencia, vinculado con la coherencia del ítem respecto de cada subdominio (3: pertinente, 2: con dudas, 1: no pertinente).

De igual modo, se ha habilitado un último apartado para expresar comentarios, observaciones o propuestas de mejora para cada ítem en particular y a nivel general del cuestionario.

3.2.2. Aplicación piloto

A partir de la validación del juicio de expertos, se ha modificado el instrumento, dando lugar a la aplicación piloto del cuestionario, que se ha llevado a cabo en España con 10 futuros profesores de Educación Infantil. La muestra ha sido escogida a través de un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal (Fernández et al., 2014), puesto que el criterio de selección ha sido determinado por la posibilidad de acceder a este grupo.

Han participado estudiantes del segundo curso del Grado de Maestro de Educación Infantil de la Universidad de Girona que cursaban la asignatura de "Aprendizaje de las Matemáticas". El 40% de los participantes ha cursado el Bachillerato, el 50% ha realizado el ciclo formativo de grado superior y el 10% ambos estudios.

El cuestionario piloto ha sido respondido de manera voluntaria durante una clase lectiva del proceso de formación de los participantes (90 minutos), firmando previamente un consentimiento informado.

Las edades de los participantes fluctúan entre 19 y 24 años, siendo el 100% mujeres. Cabe destacar que dichos participantes no han recibido formación previa en el ámbito de la educación matemática, ni experiencias de prácticas pedagógicas.

Por otra parte, se ha analizado la consistencia interna y fiabilidad del cuestionario (coeficiente Alfa de Cronbach), usando el tratamiento de datos SPSS Stadistics 27. De acuerdo con Oviedo y Campo-Arias (2005) para que una escala tenga consistencia interna y se considere fiable debe darse un Alfa de Cronbach a partir de 0,7.

Asimismo, se ha determinado el índice de dificultad de los ítems (ID), definido como la razón entre el número de aciertos y el número de respuestas (Muñiz, 2017). Los valores que puede tomar el ID fluctúan entre 0 y 1, donde 0 indica un alto grado de dificultad del ítem y 1 un grado de máxima facilidad, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan.

4. RESULTADOS

En lo que sigue se describen los datos obtenidos a partir de la validación del instrumento, que considera la valoración del juicio de expertos y la aplicación piloto del cuestionario.

4.1. Valoración del juicio de expertos

La valoración otorgada por los 12 expertos respecto del grado de adecuación de los ítems con los dominios y subdominios del modelo MKT, a partir de las categorías de correspondencia, formulación y pertinencia, han permitido realizar un análisis descriptivo de las puntuaciones (Tabla 1). Dichas puntuaciones pueden fluctuar entre un mínimo de 3 y un máximo de 8 puntos, en cada ítem que conforma el cuestionario.

Se ha determinado la media, desviación típica y el coeficiente de variación (desviación típica/media aritmética*100) de cada uno de los ítems, con el objetivo de valorar cuáles deben ser mantenidos o eliminados para la siguiente versión del cuestionario.

Ítems		Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica	Coeficiente de variación
1	a)	6	8	7,66	0,651	8,498
	b)	6	8	7,66	0,651	8,498
	c)	6	8	7,50	0,674	8,986
2	a)	6	8	7,75	0,621	8,012
	b)	7	8	7,66	0,492	6,422
	c)	7	8	7,83	0,389	4,968
3	a)	6	8	7,66	0,651	8,498
	b)	7	8	7,75	0,452	5,832
	c)	7	8	7,75	0,452	5,832
	d)	7	8	7,83	0,389	4,968
4	a)	7	8	7,91	0,288	3,640
	b)	6	8	7,66	0,651	8,498
	c)	7	8	7,91	0,288	3,640
	d)	7	8	7,83	0,389	4,968
5	a)	7	8	7,75	0,621	8,012
	b)	7	8	7,75	0,452	5,832
	c)	6	8	7,66	0,651	8,498
	d)	7	8	7,91	0,288	3,641
6	a)	6	8	7,83	0,577	7,369
	b)	7	8	7,75	0,452	5,832
	c)	7	8	7,91	0,288	3,641
	d)	7	8	7,91	0,288	3,641

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de cada ítem según la valoración de expertos (n=12)

El criterio de eliminación de los ítems es que obtuvieran una media inferior a 7 puntos, u observar altos niveles de discrepancia en el coeficiente de variación, es decir, una variación superior al 25% (López y Sanz, 2021).

A partir del análisis estadístico de la Tabla 1, es posible observar que el instrumento no requiere de la eliminación de ítems. No obstante, se han recogido y analizado los comentarios aportados por los expertos, permitiendo ajustar los ítems:

Ítem 1: se modificó el enunciado y se mejoró la redacción de 1a), 1b), 1c).

Ítem 2: se corrigió la redacción de 2a), 2b), 2c).

Ítem 3: se mejoró la redacción de 3a), 3b), 3d) y se cambió el término "alumno" por "niño" en 2c).

Ítem 4: se modificó el enunciado correspondiente a la intervención de la maestra y la figura. Asimismo, se mejoró la redacción de 4b) y se cambió el término "alumna" por "niña" en 4c) y 4d).

Ítem 5: se modificó el enunciado y se mejoró la redacción de 5b), 5c), 5d).

Ítem 6: se modificó el enunciado, las figuras se enmarcaron en dos recuadros y se mejoró la redacción de 6a), 6b), 6c), 6d).

4.2. Valoración de la aplicación piloto del cuestionario

La aplicación piloto del cuestionario ha considerado inicialmente la lectura de las instrucciones para responder y el tiempo estimado para su aplicación.

Posteriormente, durante el transcurso de la aplicación se registraron, a través de notas de campo, las dudas que tenían los participantes (n=10) respecto de la redacción de los ítems y preguntas que conforma el cuestionario. Esto último ha permitido adecuar el instrumento para mejorar la comprensión de los enunciados: a) en la pregunta 4a) no quedaba claro si se refería a la descripción verbal de la serie o la representación de la misma; b) en relación con los ítems 2 y 6 se han ampliado las figuras; y c) se mejoró la redacción del ítem 5, puesto que el 40% presentó dificultades para entender el contexto en el que se desarrolla la tarea.

Respecto del tiempo, todos los participantes terminaron de responder el cuestionario antes del periodo asignado, por lo que se ha considerado que el tiempo estimado es adecuado.

Por otra parte, para analizar los resultados de las respuestas otorgadas por los futuros profesores de Educación Infantil, se establecieron criterios a través de una rúbrica según la pertinencia de las respuestas. Para ello, se ha realizado la codificación de los datos, de acuerdo con el grado de corrección de las respuestas, asignando puntuaciones: 2 si la respuesta es correcta, 1 si es parcialmente correcta y 0 si la respuesta es incorrecta, alcanzando el cuestionario una puntuación máxima de 44 puntos y un mínimo de 0 puntos.

A partir de los resultados obtenidos, no se observaron puntuaciones máximas y las puntuaciones totales fluctúan entre 14 y 34 puntos, con una media de 22 puntos, obteniendo un porcentaje de logro del 50%.

En relación con el grado de consistencia y fiabilidad del instrumento, se aplicó el Alfa de Cronbach, obteniendo un valor de 0,72, siendo aceptable. Este valor es favorable e indica que los ítems del cuestionario tienen coherencia interna.

Para calcular el ID del cuestionario, se consideraron las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, desestimando las preguntas no respondidas por los participantes. La Tabla 2 muestra un resumen estadístico de los datos:

Ítems	1			2			3				4				5				6			
ID	a)	b)	c)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)
(%)	44	71	0	40	60	60	60	70	67	13	100	0	0	60	11	38	11	40	10	0	38	17

Tabla 2. Índice de dificultad de los ítems del cuestionario

La dificultad media del cuestionario es del 37%, siendo el ítem 4a) el que presenta menor grado de dificultad, relacionado con el conocimiento común del contenido. Mientras que, los ítems que presentan mayor grado de dificultad son el 1c) vinculados con el conocimiento del horizonte matemático, el 4b) relacionado con el conocimiento especializado del contenido y, los ítems 4c) y 6b) asociados con conocimiento del contenido y los estudiantes.

En lo que sigue, se describe el análisis de los principales hallazgos, de acuerdo con las respuestas obtenidas en cada uno de los ítems.

4.2.1. Análisis ítem 1

Este ítem se toma a partir de las experiencias de aprendizaje propuestas en el programa pedagógico chileno de Educación Infantil (Mineduc, 2019). El propósito de los ítems 1a), 1b) y 1c) es evaluar el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del currículo y el conocimiento del horizonte matemático, respectivamente, vinculados con establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos.

En la Tabla 3, se evidencia que sólo el 40% de los participantes logran identificar los conocimientos matemáticos que deberían poner en práctica los niños y niñas para participar de la tarea propuesta. Mientras que 5 futuros profesores (50%) identifican correctamente el objetivo de la tarea, señalando por ejemplo, "identificar y reconocer las características sensoriales de los objetos al clasificar por atributos" (futuro profesor 8). Podemos inferir que tanto el conocimiento especializado del contenido como el conocimiento del currículo presentan limitaciones.

Ítem 1	Respuestas correctas	Respuestas parcialmente correctas	Respuestas incorrectas	No responde
a)	40	50	0	10
b)	50	10	10	30
c)	0	10	10	80

Tabla 3. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 1 (n=10)

Finalmente, se observa que un alto porcentaje (80%) de futuros profesores no responde al ítem 1c). Este ítem presenta un alto grado de dificultad, puesto que los futuros profesores no consiguen relacionar el contenido matemático abordado en el ítem con conceptos más avanzados del currículo escolar. Esto muestra un bajo dominio del conocimiento del horizonte matemático.

4.2.2. Análisis ítem 2

Este ítem se formula a partir del análisis de las tareas de los libros de texto de Educación Infantil (Pincheira et al., 2022). La finalidad de los ítems 2a), 2b y 2c) es evaluar el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes y, el conocimiento del contenido y la enseñanza, respectivamente, asociado con establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos.

Como se observa en Tabla 4, alrededor de la mitad de los futuros profesores respondieron correctamente. Las respuestas correctas se centran principalmente en el ítem 2b) referido a las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver la tarea y el ítem 2c) que atiende a las estrategias de enseñanza utilizadas para ayudar a los niños que han tenido dificultades en resolver la tarea. Entre las posibles estrategias, destaca por ejemplo el "realizar la actividad primero de manera vivencial y luego hacerlo en papel" (futuro profesor 1)

Ítem 2	Respuestas correctas	Respuestas parcialmente correctas	Respuestas incorrectas	No responde
a)	40	60	0	0
b)	60	30	10	0
c)	60	40	0	0

Tabla 4. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 2 (n=10)

Por otra parte, sólo el 40% del profesorado en formación logra identificar los contenidos matemáticos utilizados para dar solución a la tarea, como se aprecia en el ítem 2a). Esto muestra un bajo dominio del conocimiento especializado del contenido.

4.2.3. Análisis ítem 3

Este ítem se ha elaborado también a partir del análisis de las tareas de los libros de texto de Educación Infantil (Pincheira et al., 2022). El objetivo de los ítems 3a), 3b), 3c) y 3d) es evaluar el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del currículo, respectivamente, orientado a establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos.

Más del 50% de los futuros profesores logra identificar los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea que utiliza bandas de atributos (ítem 3a) y determinar las dificultades que podrían enfrentar los niños en su resolución (ítem 3b), como se aprecia en la Tabla 5.

Respecto de las dificultades, señalan por ejemplo que "los niños podrían no entender las etiquetas positivas y negativas de las bandas" (futuro profesor 10).

Ítem 3	Respuestas correctas	Respuestas parcialmente correctas	Respuestas incorrectas	No responde
a)	60	30	10	0
b)	70	30	0	0
c)	40	20	0	40
d)	10	30	40	20

Tabla 5. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 3 (n=10)

Sin embargo, los futuros profesores presentan un escaso manejo del conocimiento del contenido y la enseñanza, puesto que un bajo porcentaje de los participantes logra proponer otro recurso para abordar la tarea (40%). Asimismo, sólo el 10% consigue plantear el objetivo de la tarea, lo que nos revela una limitación en relación con el conocimiento del currículo.

4.2.4. Análisis ítem 4

Este ítem es adaptado del estudio propuesto por Acosta y Alsina (2020). El propósito de los ítems 4a), 4b), 4c) y 4d) es evaluar el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, respectivamente, vinculados con la seriación a partir de patrones de repetición.

En la Tabla 6, se aprecia que todos los participantes alcanzan un buen dominio del conocimiento común de contenido, logrando identificar el término 21 de la serie.

Ítem 4	Respuestas correctas	Respuestas parcialmente correctas	Respuestas incorrectas	No responde
a)	100	0	0	0
b)	0	10	90	0
c)	0	20	80	0
d)	60	40	0	0

Tabla 6. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 4 (n=10)

Por otra parte, en relación con el conocimiento del contenido y la enseñanza, el 60% de los futuros profesores mencionan estrategias de enseñanza adecuadas para conducir la tarea y las justifican, como por ejemplo, "volver a construir otra torre con los cubos Multilink para comparar los elementos de la serie y ver si coinciden los colores" (futuro profesor 7). Mientras que, tanto el conocimiento especializado del contenido como el conocimiento del contenido y los estudiantes son los que presentan un mayor grado de dificultad, pues ninguno de los futuros profesores consigue identificar los conocimientos necesarios para construir la seriación y describir las dificultades asociadas a la tarea.

4.2.5. Análisis ítem 5

Este ítem ha sido tomado del estudio propuesto por Tirosh et al. (2017). La finalidad de los ítems 5a), 5b), 5c) y 5d) es evaluar el conocimiento común del contenido, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del currículo, respectivamente, asociado con las seriaciones a partir de patrones de repetición.

De acuerdo con los resultados expuestos en la Tabla 7, se observa un escaso dominio de los conocimientos que se evalúan.

En relación con el conocimiento común del contenido, el 80% de los futuros profesores consigue determinar la unidad de repetición de cada serie, sin embargo, sólo el 10% logra justificar su respuesta, determinando que los patrones de las series corresponden al tipo AB, ABC y ABB.

Ítem 5	Respuestas correctas	Respuestas parcialmente correctas	Respuestas incorrectas	No responde
a)	10	80	0	10
b)	30	40	10	20
c)	10	60	20	10
d)	20	30	0	50

Tabla 7. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 5 (n=10)

La escasa cantidad de acierto (30%) se centra en el ítem 5b) referido a las posibles dificultades que enfrentarían los niños y niñas para resolver la tarea y ampliar las series, entre ellas destaca por ejemplo, que "los niños no continúan el patrón de forma correcta ya que las series están inacabadas" (futuro profesor 8).

Por otra parte, más de la mitad de los futuros profesores (60%) propone estrategias de enseñanza no concluyentes para ayudar a los niños que han tenido dificultades en resolver la tarea, como por ejemplo, "utilizar material manipulable y preguntas" (futuro profesor 5), puesto que no se especifica qué material sería apropiado utilizar y qué tipo de preguntas se podrían plantear.

Por último, sólo 2 de los futuros profesores (20%) consigue plantear el objetivo de la tarea en el ítem 5d). Cabe destacar que un alto porcentaje de los participantes (50%) no da respuesta a este ítem del cuestionario.

4.2.6. Análisis ítem 6

Este ítem fue tomado y adaptado del análisis de las tareas de los libros de texto de Educación Infantil. El propósito de los ítems 6a), 6b), 6c) y 6d) es evaluar el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del currículo, respectivamente, a partir de la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

A nivel general, este ítem es el que presenta mayor grado de dificultad, puesto que los futuros profesores que responden correctamente no superan el 30%, como se aprecia en la Tabla 8.

Las respuestas correctas se centran en el ítem 6c) que advierte de las estrategias de enseñanza utilizadas para ayudar a los niños que han tenido dificultades en resolver la tarea.

Ítem 6	Respuestas correctas	Respuestas parcialmente correctas	Respuestas incorrectas	No responde
a)	10	50	40	0
b)	0	50	50	0
c)	30	40	10	20
d)	10	50	0	40

Tabla 8. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 6 (n=10)

Ninguno de los futuros profesores logra describir las dificultades que enfrentarían los niños y niñas para resolver la tarea, que tienen relación con la comprensión del operador lógico y la representación del cambio cualitativo. Mientras que sólo el 10% de los futuros profesores consigue identificar los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea (ítem 6a) y plantear su objetivo (ítem 6d). En este último caso, un porcentaje considerable de participantes (40%) no responde al ítem.

4.3. Ajustes y construcción de la versión final del cuestionario

De acuerdo con las intervenciones realizadas por los futuros profesores durante el desarrollo de la aplicación piloto y el análisis de las puntuaciones, se ha mejorado el cuestionario en términos de redacción de los ítems y claridad de las figuras que lo componen.

La versión final del cuestionario, que hemos denominado MKT-álgebra temprana (3-6), ha quedado constituida por seis ítems de respuesta abierta y un total de 22 preguntas que evalúan el conocimiento matemático del profesorado de Educación Infantil para enseñar álgebra temprana desde los 3 a los 6 años de edad (Anexo 2).

5. CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha presentado el proceso de construcción y validación de un cuestionario, denominado MKT-álgebra temprana (3-6), cuya finalidad es evaluar el conocimiento matemático para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. Para dicho proceso, nos hemos situado desde la perspectiva del modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza propuesto por Ball et. al (2008).

La elaboración del cuestionario ha considerado la valoración del juicio de expertos y el análisis de la aplicación piloto del cuestionario, permitiendo por una parte, constatar que el instrumento es fiable y coherente respecto de los ítems que plantea, y por otra, ajustar y refinar los ítems hasta obtener la versión final.

El cuestionario ha quedado conformado por 6 ítems de respuesta abierta y un total de 22 preguntas, que permiten profundizar de manera holística en los contenidos matemáticos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Infantil (Pincheira y Alsina, 2021a), como son: a) establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos; b) seriaciones a partir de patrones de repetición; y c) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

A partir de la aplicación piloto del instrumento, hemos podido realizar un primer acercamiento al conocimiento matemático del profesorado de Educación Infantil sobre álgebra temprana. Los resultados obtenidos dejan entrever las limitaciones que presenta el profesorado en formación al enfrentarse a diversas situaciones de enseñanza, respecto de los dominios y subdominios del conocimiento matemático, especialmente el conocimiento del horizonte matemático, el conocimiento especializado del contenido y, conocimiento del contenido y los estudiantes. Estos resultados, aun parciales, reflejan similitudes con otros estudios (e.g., Bair y Rich, 2011; Cabral et al., 2021; Gasteiger et al., 2020) en relación con la falta de capacidad para establecer conexiones entre contenidos de naturaleza algebraica, incomprensión de los conocimientos matemáticos asociados al trabajo con patrones y limitaciones en la interpretación del pensamiento algebraico de los niños y niñas.

De acuerdo con la NCTM (2000), es importante construir una base sólida de comprensión y manejo de experiencias acerca del álgebra en Educación Infantil, puesto que esto contribuye al desarrollo profesional del profesorado al propiciar cambios en las prácticas pedagógicas que posibiliten a los niños y niñas mejorar la calidad de su aprendizaje, permitiendo avanzar hacia los desafíos que plantea el álgebra temprana. Sin embargo, para alcanzar este propósito es necesario desarrollar los conocimientos matemáticos necesarios durante la formación, tanto inicial como continua, del profesorado, para suscitar una enseñanza efectiva de este bloque de contenido.

A modo de conclusión, cabe señalar que el Cuestionario MKT-álgebra temprana (3-6) puede ser una herramienta útil para apoyar el proceso de formación del profesorado de Educación Infantil, ya que su aplicación permite detectar aquellos conocimientos matemáticos que requieren de una mayor profundización para lograr promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en esta etapa escolar.

Agradecimientos:

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio Nº 72200447.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. *https://doi.org/10.1177/1836939119885310*

Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia,* *8*(1), 1-19. *https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19*

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.

Álvarez, R. (2003). Las preguntas de respuesta abierta y cerrada en los cuestionarios. análisis estadístico de la información. *Metodología de Encuestas, 5*(1), 45-54.

Bair, S.L. y Rich, B.S. (2011). Characterizing the development of specialized mathematical content knowledge for teaching in algebraic reasoning and number theory. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 292-321. *https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345*

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. *https://doi.org/10.1177/0022487108324554*

Blanton, M., Brizuela, B.M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A.M., Stroud, R., Fonger, N.L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs* (pp. 27-49). Springer International Publishing. *https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2*

Blömeke, S. y Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: A review of the state of research. *ZDM, 44*(3), 223-247. *https://doi.org/10.1007/s11858-012-0429-7*

Cabral, J., Oliveira, H. y Mendes, F. (2021). Preservice Teachers' Mathematical Knowledge about Repeating Patterns and their Ability to Notice Preschoolers Algebraic Thinking. *Acta Scientiae (Canoas), 23*(6), 30-59. *https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6302*

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Springer. *https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4*

Chapman, O. (2014). Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. En J.-J. Lo, K.R. Leatham y L.R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Springer International Publishing. *https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_16*

Clements, H.D. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.

Fernández, C., Baptista, P. y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E. y Sprenger, P. (2020). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: a standardized situation-related measurement approach. *ZDM*, *52*, 193-205. *https://doi.org/10.1007/s11858-019-01103-2*

Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education,* *39*(4), 372-400. *https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372*

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J.J. Kaput, D.W. Carraher y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum. *https://doi.org/10.4324/9781315097435-2*

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*, 139-151.

Lane, K.L., Oakes, W.P., Powers, L., Diebold, T., Germer, K., Common, E.A. y Brunsting, N. (2015). Improving teachers' knowledge of functional assessment-based interventions:

Outcomes of a professional development series. *Education and Treatment of Children, 38*(1), 93-120. *https://doi.org/10.1353/etc.2015.0001*

López, E. y Sanz, R. (2021). Construcción y validación del cuestionario de autopercepción sobre las Competencias docentes del profesorado. *Educatio Siglo XXI, 39*(3), 157-186. *https://doi.org/10.6018/educatio.427461*

Mineduc. (2019). *Programa pedagógico para primer y segundo nivel de transición*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Muñiz, J. (2017). *Teoría clásica de los test.* (2ª Edición). Pirámide.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence.* NCTM.

Noviyanti, M.E.R.Y. y Suryadi, D.I.D.I. (2019). Basic Mathematics Knowledge of Early Childhood Teachers. *Journal of Engineering Science and Technology, 1*, 19-27.

Oviedo, H.C. y Campo-Arias, A. (2005). Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach; An Approach to the Use of Cronbach's Alfa. *Revista colombiana de Psiquiatría, 34*(4), 572-580. *https://doi.org/10.7705/biomedica.v26i4.327*

Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA 17*(1), 1-24. *https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522*

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática 33*(1), 153-180. *https://doi.org/10.24844/EM3301.06*

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021b). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9, 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590*

Souza Barboza, L.C., Ribeiro, A. J. y Pazuch, V. (2020). Aprendizagem Profissional de Professores dos Anos Iniciais: Explorando os Diferentes Significados do Sinal de Igualdade. *Acta Scientiae (Canoas), 22*(4), 71-120. *https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5418*

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. *https://doi.org/10.3102/0013189X015002004*

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22. *https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411*

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R. y Levenson, E. (2017). Preschool teachers' variations when implementing a patterning task. Paper presented at the 10th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME).

Wilkie, K.J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 397-428. *https://doi.org/10.1007/s10857-013-9251-6*

Zapatera, A., y Quevedo, E. (2021). The Initial Algebraic Knowledge of Preservice Teachers. *Mathematics*, *9*(17), 2117. *https://doi.org/10.3390/math9172117*

ANEXO 1

Ítems versión inicial del cuestionario

Ítem 1:

Una maestra propone a sus alumnos de 4 años el juego "Somos detectives". A continuación, se presenta un extracto de la planificación de la clase:

Los niños se organizan en grupos y observan cómo están dispuestos algunos materiales de la sala. Responden preguntas como: ¿Para qué sirven estos materiales?, ¿qué tienen en común?, ¿en qué se diferencian con los materiales del otro mueble?, ¿por qué creen que están juntos?, ¿en qué se parecen? Luego, cada grupo comparte sus ideas y, en conjunto, descubren cuáles son los criterios que se utilizaron al colocarlos. Finalmente, establecen acuerdos para proponer nuevos criterios para colocar los materiales y, en la medida de lo posible, los implementan para reorganizar el aula.

Preguntas:

a) ¿Qué contenidos matemáticos deben poner en práctica los alumnos para participar en la tarea propuesta por la maestra?
b) De acuerdo con el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál es el objetivo de la tarea?
c) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en el desarrollo de la tarea propuesta por la maestra?

Ítem 2:

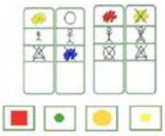
Una maestra propone a sus alumnos de 4 años la siguiente tarea:
"Une con una línea los elementos de la fila que pertenecen a cada grupo"

Preguntas:

a) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
b) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a los alumnos que han tenido dificultades para resolver la tarea?

Ítem 3:

Un maestro muestra a sus alumnos de 5 años las siguientes bandas de atributos y les indica que lean los atributos de cada banda y la relacionen con la pieza que corresponde de la parte inferior:



Preguntas:

a) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para dar una solución correcta a la tarea?
b) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué otro recurso utilizaría para que los alumnos desarrollen este tipo de tarea? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.
d) De acuerdo con el currículo de Educación Infantil, ¿cuál es el objetivo de la tarea?

Ítem 4:

Una maestra muestra a sus alumnos de 3 años un set de cubos encajables *Multilink*. El objetivo de la actividad es: "Construir una serie sencilla a partir de la manipulación libre del material propuesto".
A continuación, se describe la situación que ocurre con una alumna:

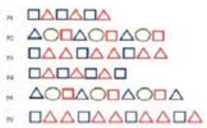
Alumna: ¡Una torre! Ahora toca la verde
Maestra: ¿Por qué toca la verde?
Alumna: Porque es verde, naranja, verde, naranja
Maestra: Pero en lugar de un cubo naranja has puesto uno amarillo

Preguntas:

a) Siguiendo la serie descrita por la alumna, ¿qué cubo debería ubicarse en el lugar 21? Explique cómo ha obtenido su respuesta.
b) ¿Qué contenidos matemáticos utiliza la alumna para construir la seriación?
c) Describa las posibles dificultades que han llevado a la alumna a responder de manera errónea.
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a la alumna a que se de cuenta de su error y lo supere? Justifique su respuesta.

Ítem 5:

La maestra lleva a cabo con sus alumnos de 5 años la siguiente tarea: en primer lugar, prepara cajitas con recortes de triángulos, cuadrados o círculos; al presentar la primera serie, escoge a uno de sus alumnos y coloca dos cajitas delante del niño, una con cuadrados azules y otra con triángulos rojos; seguidamente, pregunta: "¿qué sigue después?"
Con las series siguientes continúa interactuando de la misma manera con los alumnos de su clase.



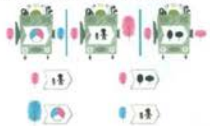
Preguntas:

a) Determine la unidad de repetición (el patrón) de cada serie. Justifique su respuesta
b) Describa las posibles dificultades a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?
d) De acuerdo con el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál es el objetivo de la tarea?

Ítem 6:

Un libro de texto de Educación Infantil propone la siguiente tarea a los alumnos de 5 años:
"Dibuja la figura que sale de la máquina"

Para responder la tarea los niños deben mirar los ejemplos de la parte superior, donde se ejemplifica el cambio que hace cada operador -color, tamaño y forma respectivamente- y, seguidamente, en la parte inferior dibujar una solución posible.



Preguntas:

a) ¿Qué contenidos matemáticos deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta?
b) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar aquellos alumnos que han tenido dificultades para resolver la tarea?
d) De acuerdo con el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál es el objetivo de la tarea?

ANEXO 2

Ítems versión final del cuestionario MKT-álgebra temprana (3-6)

Ítem 1:

Una maestra propone a los niños de 4 años el juego "Somos detectives". A continuación, se presenta un extracto de la planificación de la actividad:

Los niños se organizan en grupos y observan cómo están dispuestos algunos materiales de la sala. Responden preguntas como: ¿Para qué sirven estos materiales?, ¿qué tienen en común?, ¿en qué se diferencian con los materiales del otro mueble?, ¿por qué creen que están juntos?, ¿en qué se parecen? Luego, cada grupo comparte sus ideas y, en conjunto, descubren cuáles son los criterios que se utilizaron al colocarlos. Finalmente, establecen acuerdos para proponer nuevos criterios para colocar los materiales y, en la medida de lo posible, los implementan para reorganizar el aula.

Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben poner en práctica los niños para participar en la tarea propuesta por la maestra?
b) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?
c) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar se relaciona el contenido abordado en la tarea?

Ítem 2:

Una maestra propone a los niños de 4 años la siguiente tarea:

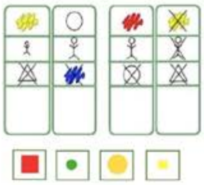
"Une con una línea los elementos de la fila que pertenecen a cada grupo"

Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben utilizar los niños para dar una solución correcta al problema planteado?
b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a los niños que han tenido dificultades para resolver la tarea?

Ítem 3:

Un maestro muestra a los niños de 5 años las siguientes bandas de atributos y les indica que lean los atributos de cada banda y las relacionen con la pieza que corresponde de la parte inferior:



Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben utilizar los niños para dar una solución correcta a la tarea?
b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué otro recurso utilizaría para que los niños desarrollen este tipo de tarea? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.
d) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?

Ítem 4:

Una maestra muestra a los niños de 3 años un set de cubos encajables *Multilink*. El objetivo de la actividad es: "Construir una serie sencilla a partir de la manipulación libre del material propuesto".
A continuación, se describe la situación que ocurre con una niña:

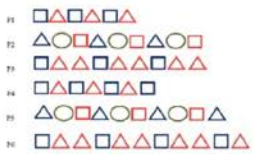
Niña: ¡Una torre! Ahora toca la verde
Maestra: ¿Por qué toca la verde?
Niña: Porque es verde, naranja, verde, naranja
Maestra: ¿Qué ha ocurrido en la mitad de la torre? (La maestra señala el error)

Preguntas:

a) Siguiendo la serie descrita verbalmente por la niña, ¿qué cubo debería ubicarse en el lugar 21? Explique cómo ha obtenido su respuesta.
b) ¿Qué contenido(s) matemático(s) ha utilizado la niña para construir la seriación?
c) Describa las posibles dificultades que han llevado a la niña a responder de manera errónea.
d) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a la niña a que se de cuenta de su error y lo supere? Justifique su respuesta.

Ítem 5:

Una maestra lleva a cabo con los niños de 5 años la siguiente tarea: en primer lugar, prepara cajitas con recortes de triángulos, cuadrados y círculos; luego presenta la primera serie (P1), escoge a un niño y coloca dos cajitas delante de él, una con cuadrados azules y otra con triángulos rojos; seguidamente, pregunta: "¿qué sigue después?"
Con las series siguientes continúa interactuando de la misma manera con los niños de su clase.



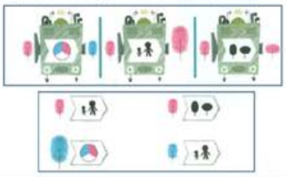
Preguntas:

a) Determine la unidad de repetición (el patrón) de cada serie. Justifique su respuesta.
b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos niños que han tenido dificultades para resolver la tarea?
d) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?

Ítem 6:

Un libro de texto de Educación Infantil propone la siguiente tarea a los niños de 5 años:
"Dibuja la figura que sale de la máquina de cambiar cualidades"

Para responder la tarea los niños deben mirar los ejemplos del recuadro superior, donde se ejemplifica el cambio que hace cada operador -color, tamaño y forma respectivamente- y, seguidamente, en el recuadro de la parte inferior dibujar una solución posible.



Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben utilizar los niños para responder de manera correcta?
b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar aquellos niños que han tenido dificultades para resolver la tarea?
d) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?

4.8 Estudio [H]

Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación primaria. (En revisión).

Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación primaria

Resumen

El objetivo de este estudio es presentar el proceso de construcción y validación de un instrumento para evaluar el conocimiento matemático sobre álgebra temprana del profesorado de educación primaria durante la formación inicial, con base en los dominios del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).* Para ello, se ha realizado un estudio instrumental que considera cuatro fases: 1) revisión de la literatura sobre el conocimiento matemático del profesorado de educación primaria y la enseñanza del álgebra temprana; 2) construcción de la versión inicial del instrumento; 3) validación del instrumento mediante juicio de expertos y aplicación piloto; y 4) ajustes y construcción de la versión final del instrumento. Como resultado, se ha obtenido el Cuestionario MKT-álgebra temprana (6-12 años), conformado por seis ítems de respuesta abierta. Se concluye que el instrumento puede ser una herramienta diagnóstica eficaz tanto para indagar en el conocimiento matemático del profesorado de educación primaria en el estudio del álgebra temprana, como para reflexionar en torno a prácticas de enseñanza que promueven el pensamiento algebraico en esta etapa escolar.

Palabras clave: conocimiento matemático para la enseñanza, álgebra temprana, instrumento de evaluación, futuro profesorado, educación primaria.

1. Introducción

La tardía incorporación del álgebra en educación secundaria y los problemas que esto ha generado en el desarrollo de la abstracción y generalización matemática de los estudiantes, ha impulsado la idea de introducir conocimientos de naturaleza algebraica y promover el pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolarización (Schliemann et al., 2012).

A partir de esta nueva concepción, surge el álgebra temprana (*early algebra*), como un enfoque que cultiva hábitos mentales que se centran en la estructura más profunda y subyacente de las matemáticas (Blanton y Kaput, 2005). Según Katz (2007), estos hábitos mentales consideran dos características centrales: a) generalizar, identificar, expresar y justificar la estructura, las propiedades y las relaciones matemáticas y; b) promover el razonamiento y las acciones basadas en las formas de generalización.

Para abordar tales características, a partir de una revisión de los currículos de diversos países que consideran explícitamente el álgebra temprana desde las primeras etapas escolares, Pincheira y Alsina (2021a) caracterizan los conocimientos involucrados en la resolución de tareas que promueven el pensamiento algebraico en la educación primaria: a) comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones; b) uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones; c) comprensión del cambio; y d) uso de variables para determinar una constante o incógnita. Así pues, el álgebra temprana ofrece la oportunidad a los estudiantes de analizar las relaciones entre cantidades de manera intuitiva e informal, identificar estructuras, explorar patrones y estudiar el cambio (Kieran, 2004; Carraher y Schliemann, 2019), lo cual tiene que ver con distintos modos de pensamiento algebraico, en especial el pensamiento relacional y el funcional.

Estas ideas, como se ha indicado, han sido abordadas por los currículos de matemáticas de educación primaria de diversos países como Estados Unidos, Australia o Singapur y Chile, entre otros, donde se ha asumido una mayor presencia de la actividad algebraica temprana, incorporando el álgebra como un estándar de contenido más (Pincheira y Alsina, 2021a).
De acuerdo con Strand y Mills (2014), el profesorado que introduce la enseñanza del álgebra temprana, es el responsable de facilitar a sus estudiantes la construcción de su comprensión algebraica, como es el caso del profesorado de educación primaria. No obstante, es probable que el profesorado, tanto en activo como en formación, hayan tenido pocas oportunidades para explorar el álgebra temprana durante su propio paso por la educación primaria. Por tanto, la única experiencia de enseñanza y aprendizaje que disponen sobre este eje de contenido es la que se entrega durante su proceso de formación.
Por otra parte, Ball et al. (2005) consideran que los docentes que poseen conocimientos matemáticos para la enseñanza están en mejores condiciones de favorecer el aprendizaje de los estudiantes, por lo que resulta necesario indagar en el conocimiento matemático sobre álgebra temprana del profesorado en formación de educación primaria.
Hohensee (2017) plantea que existe poca investigación para orientar sobre cómo formar al profesorado de educación primaria para enseñar álgebra temprana. En consecuencia, se requiere del desarrollo de herramientas de evaluación que permitan caracterizar el conocimiento matemático que posee el profesorado de educación primaria para llevar a cabo la instrucción de este bloque de contenido.
Desde esta perspectiva, el objetivo de nuestro estudio es construir y validar un instrumento para evaluar el conocimiento matemático sobre álgebra temprana del profesorado de educación primaria durante la formación inicial. Para ello, se ha considerado el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching-MKT*) propuesto por Ball et al. (2008).

2. Fundamentos teóricos

2.1 Conocimiento matemático para la enseñanza

La noción del conocimiento pedagógico del contenido fue introducida por Shulman (1986) como respuesta a lo que él denominó un punto ciego respecto del contenido que caracteriza la investigación sobre la enseñanza y la formación del profesorado. Las aportaciones de los trabajos propuestos por Shulman (1986, 1987) dieron lugar a un sólido campo de investigación en torno a lo que los profesores saben y cómo piensan sobre contenidos específicos.
A partir de estas ideas, Ball et al. (2008) identificaron un mapa de dominio de comprensión y habilidad matemática, conformando el modelo MKT. Dicho modelo surge como el resultado de un intento por redefinir y validar empíricamente el conocimiento pedagógico del contenido del profesorado de matemáticas.
El MKT se define como "el conocimiento matemático necesario para realizar las tareas recurrentes de enseñar matemáticas a los estudiantes" (Ball et al, 2008, p.399) y considera dos grandes dominios de conocimiento, como es, el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, cada uno conformado por tipos distintos de conocimiento denominados subdominios.
El conocimiento del contenido considera: el conocimiento común del contenido (CCK), definido como "el conocimiento matemático y la destreza matemática utilizados en

escenarios distintos a la enseñanza" (Ball et al, 2008, p.399), es decir, corresponde a un tipo de conocimiento que se utiliza en una amplia variedad de entornos para resolver correctamente problemas matemáticos; el conocimiento especializado del contenido (SCK) es "el conocimiento matemático y la habilidad propia de la enseñanza" (Ball et al., 2008, p.400), es decir, es un conocimiento que normalmente no se utiliza para fines distintos a la enseñanza y tienen relación con la forma de representar con precisión ideas matemáticas, así como el proporcionar explicaciones matemáticas, reglas y procedimientos (Hill et al., 2008); y el conocimiento en el horizonte matemático que tiene relación con la comprensión de las conexiones entre los temas matemáticos que conforman el plan de estudios (Ball y Bass, 2009).

Por otra parte, el conocimiento pedagógico del contenido está integrado por: el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) que es "un conocimiento que combina el saber sobre los estudiantes y el saber de las matemáticas" (Ball et al., 2008, p.401), más concretamente, se refiere al conocimiento que maneja el profesorado sobre las concepciones y conceptos erróneos comunes de los estudiantes, así como las dificultades específicas que enfrentan para abordar un contenido matemático específico; el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) es aquel que "combina el saber sobre la enseñanza y el saber sobre las matemáticas" (Ball et al., 2008, p.401), es decir, es el conocimiento que tiene el profesorado acerca de cómo diseñar la instrucción y la toma de decisiones sobre la instrucción, como la selección de ejemplos, materiales, métodos o técnicas de enseñanza; y por último el conocimiento del currículo vinculado con el conocimiento de los contenidos en relación con el plan de estudios diseñados para cada nivel educativo en el área de las matemáticas.

La categorización de los subdominios del modelo MKT, permite examinar los conocimientos del profesorado en el aspecto práctico (Ng, 2011). No obstante, dicha categorización responde a diversos estilos o enfoques de enseñanza, ya sea en una discusión de toda la clase, una tarea escrita o un cuestionario (Ball et al., 2008).

2.2 Investigaciones previas sobre el conocimiento del futuro profesorado y el profesorado en activo de educación primaria para enseñar álgebra temprana

Los estudios sobre el conocimiento del profesorado de educación primaria acerca del álgebra temprana y su enseñanza son escasos. Dichos estudios, han sido abordados desde distintas perspectivas teóricas del conocimiento del profesor, aportando evidencia acerca de los conocimientos que manejan el futuro profesorado y profesorado en activo, para enfrentarse a tareas de índole algebraico y conducir su enseñanza.

Desde el enfoque Onto-semiótico de la Cognición y de la Instrucción Matemática-*EOS* (Godino et al., 2007), por ejemplo, Castro (2011), evalúa la competencia de análisis didáctico sobre tareas de razonamiento algebraico elemental en futuros profesores de Educación Primaria, en el contexto del diseño de una unidad didáctica. Las actividades relacionadas con el razonamiento algebraico que proponen los futuros profesores sugieren un carácter aritmético principalmente, seguido de actividades de índole geométrico y de medición. Se reporta, además, que los profesores en formación no están del todo preparados para asumir la inclusión curricular del álgebra temprana en la escuela elemental. En esta misma línea, Aké (2013) evalúa el razonamiento algebraico elemental de 40 futuros profesores de Educación Primaria. Los resultados sugieren que no están familiarizados con los procesos de desarrollo de ideas algebraicas, considerando las propiedades y relaciones que subyacen en las actividades matemáticas elementales.

Desde la perspectiva del modelo de conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009),por ejemplo, Godino et al. (2015) evalúa el razonamiento algebraico elemental en 597 futuros profesores de Educación Primaria. En el análisis de los conocimientos de índole algebraico se detectan carencias en los conocimientos sobre ecuaciones, relaciones y funciones, mientras que en el análisis de los conocimientos didácticos se observa un déficit del conocimiento epistémico y conocimiento sobre aspectos instruccionales. Asimismo, Mejías (2019) evalúa el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra en 121 profesores en activo de Educación Primaria, determinando que dicho conocimiento es insuficiente. Las limitaciones que presentan tienen relación con la escasa argumentación matemática frente a una justificación o interpretación algebraica y deficiencias en el tratamiento de contenidos algebraicos.

Por otra parte, Pincheira y Alsina (2021b), en el marco de una revisión sistemática desarrollada desde la perspectiva del modelo MKT, informan que los estudios sobre el conocimiento matemático se centran principalmente en el profesorado en activo, abordando distintas áreas de conocimiento propias de la enseñanza de este bloque de contenido.

Wilkie (2014), por ejemplo, analiza el conocimiento matemático de 105 profesores en activo sobre las funciones, relaciones y variaciones, a través de un cuestionario. El análisis de las respuestas reveló que dos tercios del profesorado demuestra tener conocimiento del contenido en tareas de generalización de patrones. Sin embargo, menos de la mitad demostró un conocimiento pedagógico del contenido razonable, especialmente al proporcionar ejemplos adecuados para el desarrollo del pensamiento funcional.

Trivilin y Ribeiro (2015) analizan los conocimientos que anuncian y demuestran 10 profesores en activo sobre el signo igual, evidenciando limitaciones para reconocer sus significados, como la noción operativa y la noción de equivalencia. A su vez, se evidenciaron dificultades para determinar las implicaciones de la enseñanza de los diferentes significados del signo de igualdad en el currículo. No obstante, en esta misma línea, Souza et al. (2020) y Souza et al. (2021), dan cuenta de notables progresos en el desarrollo del conocimiento matemático de un grupo de 6 profesores en activo a través de una intervención, al transitar entre su significado operacional, de equivalencia y relacional.

Ferreira et al. (2017) identifican el conocimiento matemático de 14 profesores en activo al discutir sobre tareas con potencialidad algebraica. Los resultados evidencian poca familiaridad con cuestiones centrales del pensamiento algebraico vinculadas a la generalización de la aritmética, tales como, las relaciones numéricas, las propiedades de las operaciones y los significados del signo de igualdad. Se observan deficiencias en la identificación de errores y el reconocimiento de la naturaleza de un error.

Por otra parte, respecto de los estudios que analizan el conocimiento matemático del futuro profesorado de educación primaria, McAuliffe y Lubben (2013) analizan el desempeño de un profesor al diseñar e impartir una lección de álgebra temprana sobre patrones. Estos autores, destacan la dificultad para ayudar a los alumnos a pasar de centrarse únicamente en el patrón numérico a un enfoque simultáneo en la función, una transición central en la enseñanza del álgebra temprana.

Di Bernardo et al. (2017) aplican un cuestionario para acceder a los conocimientos matemáticos que tienen 60 futuros profesores para interpretar la producción de los estudiantes en el contexto de una tarea algebraica. Los resultados evidencian las dificultades para asignar el significado semántico involucrado en la resolución de una tarea de reparto equitativo por los estudiantes. Asimismo, Zapatera y Callejo (2017) analizan el conocimiento matemático de 40 futuros profesores en el contexto de la generalización de patrones,

obteniendo como resultado un bajo nivel de conocimiento, puesto que presentan dificultades al identificar los elementos matemáticos usados por los estudiantes y para abstraer regularidades observadas para interpretar las características de la comprensión de la generalización.
Oliveira et al. (2021) analizan los aspectos del pensamiento funcional que presentan 164 futuros profesores al iniciar su programa de formación. Los resultados revelan una carencia de estrategias exitosas para generalizar las relaciones funcionales y, dificultades para comprender y conectar las diferentes representaciones de las funciones.
Los resultados de estos estudios evidencian que, tanto el profesorado en activo como en formación presentan falencias respecto de los conocimientos matemáticos que se requieren para abordar tareas algebraicas tempranas y promover el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria.

3. Metodología

De acuerdo con el objetivo de la investigación, se ha realizado un estudio instrumental (Montero y León, 2002) que consiste en el diseño y adaptación de pruebas, así como el estudio de sus propiedades psicométricas. Para efectos de nuestro estudio, se ha elaborado un cuestionario que considera cuatro fases (Figura 1):

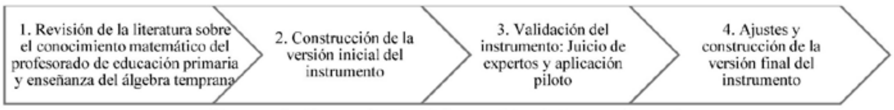


Figura 1. Fases de la elaboración del cuestionario

3.1 Construcción de la versión inicial del instrumento

Los ítems iniciales del cuestionario emergen a partir de la fase 1, donde se han seleccionado tareas matemáticas que atiendan a la caracterización del álgebra temprana para la educación primaria propuesta por Pincheira y Alsina (2021a). Luego, a partir de la riqueza particular que ofrece cada tarea matemática seleccionada, se ha indagado en aspectos iniciales de los dominios y subdominios que conforman el modelo MKT (Ball et al., 2008) a través del planteamiento de preguntas abiertas, dado que permiten obtener un mayor grado de detalle en las respuestas de los participantes (Álvarez, 2003). Tales preguntas tienen por objetivo situar al futuro profesorado en situaciones de enseñanza que permitan aproximarnos a su conocimiento matemático sobre la enseñanza del álgebra temprana.
Así pues, la versión inicial del cuestionario (fase 2) considera seis ítems y un total de 22 preguntas de respuesta abierta (Anexo 1), como se aprecia en la Figura 2. Asimismo, se considera un primer apartado que recoge datos generales de identificación de los participantes: género, edad y estudios previos.

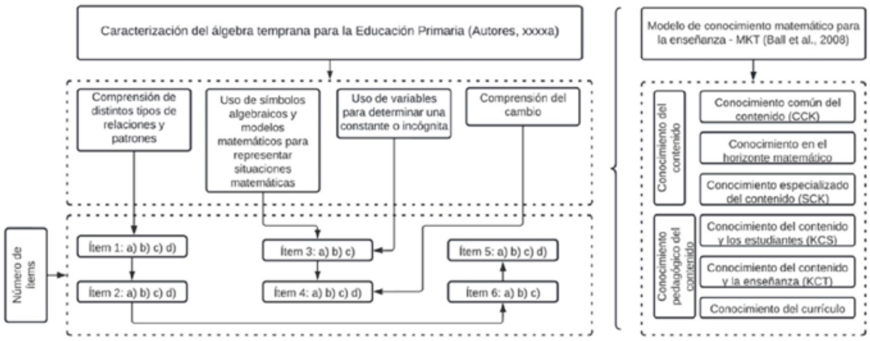


Figura 2. Estructura del cuestionario inicial

3.2 Validación del instrumento mediante juicio de expertos y aplicación piloto

Una vez construida la versión inicial del cuestionario, durante la fase 3 se ha sometido a un proceso de validez de contenido mediante el juicio de expertos y la aplicación piloto para establecer su fiabilidad.

3.2.1 Juicio de expertos

El juicio de expertos se ha llevado a cabo por un total 12 investigadores con una amplia experiencia en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, conocedores del modelo MKT y del estudio del álgebra temprana.
Para efectuar dicha validación, se ha proporcionado a los expertos vía correo electrónico, el instrumento y una pauta de valoración que mide el grado de adecuación de cada ítem según los dominios y subdominios del conocimiento matemático, de acuerdo con tres categorías: a) el grado de correspondencia, vinculado con la pertinencia o no pertinencia al modelo MKT (2: pertenece, 2: no pertenece); b) la formulación, asociado al lenguaje y claridad de cada ítem (3: adecuado, 2: a mejorar, 1:no adecuado); y por último la pertinencia, que tiene relación con la coherencia del ítem respecto de cada subdominio del modelo MKT (3: pertinente, 2: con dudas, 1:no pertinente). Asimismo, la pauta considera un apartado final para expresar comentarios, propuestas de mejora u observaciones, tanto a nivel general del cuestionario como para cada ítem en particular.

3.2.2 Aplicación Piloto

La validación del juicio de expertos ha permitido realizar una primera modificación al instrumento, para posteriormente realizar la aplicación piloto del cuestionario con 10 futuros profesores.
La selección de la muestra considera un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal (Fernández et al., 2014), dado que el criterio de selección ha sido determinado por la posibilidad de acceder a este grupo.

En el momento de la aplicación piloto, los 10 futuros profesores estudian el tercer curso del Grado de Maestro de educación primaria en una universidad española. Por tanto, la aplicación piloto del cuestionario se ha llevado a cabo durante una clase lectiva (90 minutos) del proceso de formación de los participantes en la asignatura "Matemáticas II" y ha sido respondido de manera voluntaria, firmando previamente un consentimiento informado.
De los 10 futuros profesores, 7 son mujeres y 3 hombres, y sus edades fluctúan entre 20 y 22 años. El 100% de los participantes ha cursado el Bachillerato: el 90% corresponde a humanidades y ciencias sociales, y el 10% a ciencia y tecnología. Asimismo, los participantes han realizado una asignatura previa denominada "Matemáticas I" donde han recibido instrucción sobre la numeración y el cálculo.
Respecto a la consistencia interna y fiabilidad del cuestionario (coeficiente Alfa de Cronbach), se ha determinado utilizando el tratamiento de datos SPSS Stadistics 27. Para ello, se ha tenido en cuenta que para que una escala tenga consistencia interna y se considere fiable, debe darse un Alfa de Cronbach superior a 0.7 (Oviedo y Campo-Arias, 2005).
Por último, se ha analizado el índice de dificultad de los ítems (ID), definido por Muñiz (2017) como la relación entre el número de sujetos que responden correctamente el ítem y los que han intentado resolverlo. Los valores del ID pueden fluctuar entre 0 y 1, donde 0 indica un alto grado de dificultad y 1 un grado de máxima facilidad, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan.

4. Resultados

A continuación, se describen los datos obtenidos a partir de la valoración del juicio de expertos y la aplicación piloto del cuestionario.

4.1 Juicio de expertos

Las valoraciones establecidas por los 12 expertos en relación con el grado de adecuación de los ítems del cuestionario con los dominios y subdominios del modelo MKT, han permitido realizar un análisis descriptivo de las puntuaciones (Tabla 1). En cada ítem que integra el cuestionario, dichas puntuaciones pueden fluctuar entre un mínimo de 3 y un máximo de 8 puntos.
Se ha determinado la media, desviación típica y el coeficiente de variación (desviación típica/media aritmética*100) en cada ítem, con el objetivo de valorar cuáles deben ser mantenidos o eliminados.
Como criterio de eliminación de los ítems se ha establecido que obtuvieran una media inferior a 7 puntos u observar altos niveles de discrepancia en el coeficiente de variación, es decir, una variación superior al 25% (López y Sanz, 2021).

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de cada ítem según la valoración de expertos (n=12)

Ítems		Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica	Coeficiente de variación
1	a)	6	8	7.41	0.996	8.812
	b)	7	8	7.91	0.228	2.882
	c)	7	8	7.91	0.228	2.882
	d)	7	8	7.75	0.452	5.832
2	a)	7	8	7.91	0.288	3.640
	b)	6	8	7.66	0.651	8.498
	c)	7	8	7.66	0.492	6.422

	d)	7	8	7.83	0.389	4.968
3	a)	7	8	7.83	0.389	4.968
	b)	6	8	7.50	0.674	8.986
	c)	7	8	7.83	0.389	4.968
4	a)	7	8	7.91	0.288	3.641
	b)	7	8	7.83	0.389	4.968
	c)	7	8	7.75	0.452	5.832
	d)	7	8	7.83	0.389	4.968
5	a)	7	8	7.75	0.621	8.012
	b)	7	8	7.75	0.452	5.832
	c)	7	8	7.83	0.389	4.968
	d)	7	8	7.91	0.288	3.640
6	a)	7	8	7.75	0.622	8.026
	b)	7	8	7.91	0.288	3.640
	c)	7	8	7.83	0.389	4.968

El análisis estadístico de la Tabla 1, muestra que el instrumento no precisa de la eliminación de ítems. Sin embargo, las aportaciones de los comentarios y observaciones de los expertos indican que los ítems deben ser reformulados como sigue:
Ítem 1: en la pregunta 1c) y 1d) se ha cambiado el término estrategias y contenidos, por estrategias de enseñanza y conceptos, respetivamente. A su vez, se ha mejorado la redacción de 1a), 1b) y 1d).
Ítem 2: se ha modificado la pregunta 2a), pues varios evaluadores han indicado que la tarea ya plantea reglas generales; por tanto, se debe focalizar la pregunta en cuales de estas reglas son correctas. Finalmente, se ha mejorado la redacción de 2b) y 2d).
Ítem 3: en 3a) se ha planteado la pregunta en tercera persona, luego se ha mejorado la redacción de 3b) y en 3c) se ha especificado que nos referimos al currículo de educación primaria.
Ítem 4: se ha modificado la redacción de 4b), en 4c) se ha cambiado el término estrategia por estrategia de enseñanza. En la pregunta 4d), se ha hecho referencia explícita al currículo de educación primaria y se ha agregado la justificación de la respuesta.
Ítem 5: se ha mejorado la redacción de 5a) y 5b). Asimismo, al igual que en el ítem anterior, se ha agregado el término estrategia de enseñanza y currículo de educación primaria en 5c) y 5d), respectivamente.
Ítem 6: se ha mejorado la redacción de 6a), 6b) y la puntuación de 6c).

4.2 Aplicación piloto del cuestionario

La aplicación piloto del cuestionario se ha llevado a cabo con una muestra de 10 futuros profesores de educación primaria. Al inicio de la aplicación se ha dado lectura a las instrucciones sobre cómo responder el instrumento, el tiempo estimado y el objetivo de su aplicación.
Luego, se han tomado notas de campo a partir de los comentarios y dudas que han manifestado los participantes en el transcurso de la aplicación, respecto de la redacción de los ítems y preguntas que conforman el cuestionario.
Dichas notas, han permitido adecuar el instrumento y mejorar la comprensión de los enunciados, como sigue: en el ítem 1 se ha unificado la terminología del contexto de la tarea refiriéndose sólo a euros y en el ítem 2 se ha ampliado la figura y la tabla propuesta, puesto que no eran legibles para los participantes.

Asimismo, se ha considerado que el tiempo estimado para responder al cuestionario es adecuado, puesto que todos los futuros profesores terminaron de responder el instrumento en el periodo asignado (90 minutos).
Por otra parte, el análisis de los resultados de las respuestas otorgadas por los futuros profesores de educación primaria, se ha llevado a cabo a partir de la construcción de una rúbrica donde se establecieron criterios según la pertinencia de las respuestas.
Los datos se han codificado asignado puntuaciones de acuerdo con el grado de corrección de las respuestas: 2 puntos si la respuesta es correcta, 1 punto si la respuesta es parcialmente correcta y 0 si la respuesta es incorrecta, por tanto, el cuestionario considera una puntuación máxima de 44 puntos y un mínimo de 0 puntos.
De acuerdo con los resultados obtenidos, los puntajes totales de cuestionario fluctúan entre 12 y 34 puntos, con una puntuación media de 23,6 puntos, alcanzando un porcentaje de logro del 54%.
El grado de consistencia y fiabilidad del instrumento se ha obtenido aplicando el Alfa de Cronbach, obteniendo un valor de 0.73, siendo aceptable. Este valor es favorable e indica que el instrumento permite realizar mediciones estables y consistentes, respecto de los ítems que componen el cuestionario.
Por otra parte, para calcular el ID del instrumento, se han clasificado las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas; y no se han considerado las preguntas que se presentan sin respuesta. En la Tabla 2 se observa el resumen estadístico de los datos:

Tabla 2. Índice de dificultad de los ítems del cuestionario

Ítem	1				2				3			4				5				6		
ID	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)
(%)	70	44	40	0	70	0	40	60	80	50	38	90	44	44	67	44	29	14	29	38	88	25

El cuestionario presenta una dificultad media del 46%. Por un lado, los ítems 1d) y 2b), asociados al conocimiento del horizonte matemático y el conocimiento especializado del contenido, respectivamente, son los que presentan mayor grado de dificultad. Por otro lado, los ítems que presentan menor grado de dificultad son 1a), 2a), 3a) y 4a), todos ellos vinculados al conocimiento común del contenido, así como el 6b), que tiene relación con el conocimiento del contenido y los estudiantes.
En lo que sigue, de acuerdo con las respuestas obtenidas en cada uno de los ítems que conforman el cuestionario, se describe el análisis de los principales hallazgos:

4.2.1 Análisis ítem 1

Este ítem es tomado y adaptado del estudio propuesto por Souza et al. (2020). La finalidad de los ítems 1a), 1b), 1c) y 1d) es evaluar el conocimiento común del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza y el conocimiento del horizonte matemático, respectivamente, centrados en la comprensión de distintos tipos de relaciones.
La Tabla 3 muestra que la gran mayoría de las respuestas correctas se concentran sólo en el ítem 1a), referido a la comprensión del significado del signo igual. El 70% de los futuros profesores logra analizar en la tarea propuesta cada una de las respuestas de un grupo de

alumnos, justificando por qué son o no correctas, demostrando un buen dominio del conocimiento común del contenido.

Tabla 3. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 1 (n=10)

Ítem 1	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	Sin respuesta
a)	70	10	20	0
b)	40	0	50	10
c)	40	60	0	0
d)	0	40	50	10

Respecto del ítem 1b), referido a identificar las dificultades que evidencian los alumnos para resolver la tarea, y 1c), en relación con las estrategias de enseñanza utilizadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea, no superan el 40% de respuestas correctas. Entre las posibles estrategias, destaca por ejemplo "el uso de material manipulativo podría facilitar la comprensión algebraica al desarrollar el problema con una caja con monedas y analizar sobre las posibles soluciones" (futuro profesor 9).
En consecuencia, podemos inferir que tanto el conocimiento del contenido y los estudiantes, como el conocimiento del contenido y la enseñanza presentan limitaciones.
Por último, el ítem 1d) es el que presenta un mayor grado de dificultad en relación con el conocimiento del horizonte matemático, puesto que ninguno de los participantes logra relacionar el contenido abordado en la tarea con otros conceptos más avanzados del currículo escolar.

4.2.2 Análisis ítem 2

Este ítem es formulado a partir de una tarea propuesta por Demonty et al. (2018). El propósito de los ítems 2a), 2b), 2c) y 2d) es evaluar el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, y el conocimiento del contenido y la enseñanza, respectivamente, relacionados con la comprensión de patrones.
Más del 50% de los futuros profesores logran analizar las respuestas que plantean los alumnos, justificando por qué son o no correctas (ítem 2a) y determinar estrategias de enseñanza para ayudar a los alumnos que no han sabido resolver la tarea (ítem 2d), como se aprecia en la Tabla 4.

Tabla 4. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 2 (n=10)

Ítem 2	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	Sin respuesta
a)	70	30	0	0
b)	0	40	50	10
c)	40	20	40	0
d)	60	20	20	0

No obstante, se observa un escaso dominio del conocimiento especializado del contenido, puesto ninguno de los participantes identifica los contenidos y propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder a la tarea de generalización de patrones (ítem 2b).

Asimismo, en el ítem 2c) sólo el 40% de los participantes consigue determinar las dificultades que enfrentar los estudiantes que han respondido de manera errónea la tarea, lo que nos revela una limitación respecto del conocimiento del contenido y los estudiantes. Entre las posibles dificultades señalan, por ejemplo, "no saber escribir una regla general que represente la sucesión dada" (futuro profesor 8).

4.2.3 Análisis ítem 3

Este ítem es extraído de la investigación de Di Bernardo et al. (2017). El objetivo de los ítems 3a), 3b) y 3c) es evaluar el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del currículo, respectivamente, asociados con el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, así como el uso de variables para determinar una constante o incógnita.
En la Tabla 5, se aprecia que el 80% de los futuros profesores alcanzan un buen dominio del conocimiento común del contenido, logrando resolver el problema planteado.

Tabla 5. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 3 (n=10)

Ítem 3	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	Sin respuesta
a)	80	10	10	0
b)	50	10	40	0
c)	30	30	20	20

Por otra parte, en relación con el conocimiento especializado del contenido, el 50% de los futuros profesores explica adecuadamente si las producciones de las respuestas de los alumnos son matemáticamente correctas o no. Mientras que, el conocimiento del currículo es el que presenta mayor grado de dificultad, puesto que sólo el 30% de los futuros profesores consigue plantear el objetivo de la tarea en el ítem 3d). Otro, 30% de los futuros profesores responde de manera parcialmente correcta, pues mencionan que el objetivo se encuentra vinculado con la resolución de problemas, pero no especifican el uso de las ecuaciones. Un ejemplo de esto se evidencia en la respuesta del futuro profesor 3, quien propone "trabajar las matemáticas a través de la resolución de problemas".

4.2.4 Análisis ítem 4

Este ítem es formulado a partir del estudio propuesto por Tanisli y Kose (2013). El propósito de los ítems 4a), 4b), 4c) y 4d) es evaluar el conocimiento común del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del currículo, respectivamente, vinculados con la comprensión del cambio y el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.
Como se observa en la Tabla 6, un alto porcentaje de los futuros profesores (90%) alcanza un buen dominio del conocimiento común del contenido, puesto que resuelven el problema aplicando la generalización como lenguaje de modelado, logrando determinar que la estatura de Pedro es $n+4$, donde n representa la estatura de Clara.

Asimismo, más de la mitad de los futuros profesores (60%) identifican correctamente el nivel escolar para el que es pertinente la tarea, señalando por ejemplo el futuro profesor 5: "el problema es pertinente para sexto de primaria porque aparece el uso de incógnitas". Podemos inferir que los participantes presentan cierto dominio del conocimiento del currículo.

Tabla 6. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 4 (n=10)

Ítem 4	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	Sin respuesta
a)	90	0	10	0
b)	40	30	20	10
c)	40	20	30	10
d)	60	20	10	10

Sin embargo, sólo el 40% de los participantes consigue describir las posibles dificultades que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea (ítem 4a) y determinar estrategias para ayudar a estos alumnos a resolver la tarea (ítem 4c). Por tanto, se advierte un escaso dominio tanto del conocimiento del contenido y los estudiantes, como del conocimiento del contenido y la enseñanza.

4.2.5 Análisis ítem 5

Este ítem es tomado del estudio propuesto por Ferreira et al. (2017). La finalidad de los ítems 5a), 5b), 5c) y 5d) es evaluar el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza y el conocimiento del currículo, respectivamente, orientados a la comprensión de distintos tipos de relaciones.
A nivel general, este ítem es el que presenta mayor grado de dificultad, puesto que los futuros profesores que responden correctamente no superan el 40%, como se observa en la Tabla 7.
La escasa cantidad de aciertos se centran en el ítem 5a) que advierte de los contenidos y propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea, evidenciando un escaso dominio del conocimiento especializado del contenido. Entre las respuestas de los futuros profesores destacan las propiedades de las operaciones: "propiedad conmutativa, propiedad asociativa y elemento neutro de la suma" (futuro profesor 6).

Tabla 7. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 5 (n=10)

Ítem 5	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	Sin respuesta
a)	40	10	40	10
b)	20	20	30	30
c)	10	40	20	30
d)	20	50	0	30

Por otra parte, tanto el conocimiento del contenido y los estudiantes, como el conocimiento del currículo es limitado, puesto que sólo 2 futuros profesores (20%) describen correctamente las posibles dificultades que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea (ítem 5b) y mencionan el nivel escolar pertinente para abordar el problema (ítem 5d). De igual modo, el dominio del conocimiento del contenido y la enseñanza es insuficiente, ya que el ítem 5c), sólo un futuro profesor menciona estrategias enseñanza idóneas para orientar a los alumnos que han dado una respuesta errónea a la tarea.

4.2.6 Análisis ítem 6

Este ítem se ha formulado a partir del estudio propuesto por Souza et al. (2020). El objetivo de los ítems 6a), 6b) y 6c) es evaluar el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes y el conocimiento del contenido y la enseñanza, respectivamente, asociados con la comprensión de distintos tipos de relaciones.
En la Tabla 8, se muestra que el mayor número de aciertos se centra en ítem 6b), puesto que el 70% de los futuros profesores logra describir las posibles dificultades que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea. Entre las posibles dificultades, señalan por ejemplo que, “los alumnos no conocen el significado de la igualdad” (futuro profesor 1) y “no consideran la relación de equivalencia y el elemento de “=” en la operación” (futuro profesor 4). Se infiere un buen manejo del conocimiento del contenido y los estudiantes.

Tabla 8. Distribución por porcentaje de las respuestas otorgadas al ítem 6 (n=10)

Ítem 6	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	Sin respuesta
a)	30	40	10	20
b)	70	0	10	20
c)	20	20	40	20

Los ítems 6a) y 6c) presentan un alto grado de dificultad, pues las respuestas correctas no superan el 30%. Los futuros profesores presentan dificultades para determinar los contenidos y propiedades matemáticas involucrados en la resolución de la tarea, así como para mencionar estrategias de enseñanza para ayudar a los alumnos a resolver la tarea.
En consecuencia, el conocimiento especializado del contenido y, el conocimiento del contenido y la enseñanza, presentan grandes limitaciones.

4.3 Ajuste y construcción de la versión final del cuestionario

A partir de la valoración del juicio de expertos y la aplicación piloto del instrumento, se ha mejorado el cuestionario en términos de formulación de los ítems y de claridad en las preguntas que lo componen, dando lugar a la versión definitiva (fase 4).
La versión final del cuestionario, que hemos denominado MKT-álgebra temprana (6-12), ha quedado conformada por seis ítems de respuesta abierta y un total de 22 preguntas que evalúan el conocimiento matemático del profesorado en formación de educación primaria para enseñar álgebra temprana desde los 6 a los 12 años de edad (Anexo 2).

5. Consideraciones finales

En este estudio se ha presentado el proceso de construcción y validación de un cuestionario para evaluar el conocimiento matemático sobre álgebra temprana del profesorado de educación primaria durante la formación inicial.

Dicho instrumento se fundamenta en el modelo MKT propuesto por Ball et al. (2008) y permite profundizar en los contenidos matemáticos que caracterizan el álgebra temprana en educación primaria (Pincheira y Alsina, 2021a): a) comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones; b) uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones; c) comprensión del cambio; y d) uso de variables para determinar una constante o incógnita.
El proceso de validación del instrumento ha considerado la valoración del juicio de doce expertos y la aplicación piloto a diez futuros profesores de educación primaria. A partir de ello se ha establecido la fiabilidad y coherencia interna de los ítems que conforman el cuestionario, así como el ajuste y refinamiento de estos mismos en términos de claridad para alcanzar una mejor comprensión de sus enunciados. De este modo, la versión final de cuestionario, denominado MKT-álgebra temprana (6-12), considera 6 ítems de respuesta abierta conformados por un total de 22 preguntas.
Las respuestas otorgadas por el profesorado en formación en la aplicación piloto del cuestionario, han permitido realizar una primera aproximación al conocimiento matemático para enseñar álgebra temprana. Los resultados obtenidos muestran las limitaciones que presentan el profesorado al enfrentarse a diversas situaciones de enseñanza propias de la instrucción que se debe realizar para abordar la enseñanza de este bloque de contenido en educación primaria, respecto de los dominios y subdominios del conocimiento matemático.
Dichas limitaciones, responden principalmente al conocimiento del horizonte matemático, el conocimiento especializado del contenido y, el conocimiento del contenido y la enseñanza. Estos resultados, aun parciales, evidencian similitudes con otros estudios (e.g., Di Bernardo et al 2017; Ferreira et al., 2017; Wilkie, 2014; Zapatera y Callejo, 2017) en relación con: a) la falta de capacidad para establecer conexiones entre los distintos significados del signo de igualdad, como operador y como expresión de equivalencia; b) incomprensión de los conocimientos matemáticos asociados al a la generalización de patrones; y c) dificultades para determinar implicaciones para la enseñanza de las relaciones numéricas y las propiedades de las operaciones, vinculadas con la generalización de la aritmética.
Blömeke y Delaney (2012) plantean que los conocimientos del profesorado son esenciales para el logro de las matemáticas de los estudiantes, no obstante, el profesorado de educación primaria tiene poca experiencia acerca de cómo enseñar álgebra temprana (Blanton y Kaput, 2011). Desde esta perspectiva, consideramos que es necesario proporcionar experiencias en la formación, tanto inicial como continua del profesorado de educación primaria, que les permita desarrollar los conocimientos matemáticos requeridos para llevar a cabo el proceso de instrucción del álgebra temprana de manera idónea.
Tales experiencias, deberían incorporar reformas que atiendan a la enseñanza del álgebra temprana de acuerdo con las exigencias que plantea el currículo escolar, puesto que la formación inicial del profesorado se vuelve más reflexiva si se dirige explícitamente hacia la práctica escolar (Gellert, 2005).
Concluimos que el cuestionario MKT-álgebra temprana (6-12) puede ser una herramienta de diagnóstico eficaz tanto para indagar en el conocimiento matemático que maneja el profesorado en formación de educación primaria sobre álgebra temprana, como para reflexionar en torno a prácticas de enseñanza que promueven el pensamiento algebraico en esta etapa escolar.
Finalmente, al igual que la validación de otros instrumentos que evalúan el conocimiento algebraico del profesorado (e.g., Aké, 2013; Mejías 2019), el cuestionario presenta una perspectiva global de los conocimientos algebraicos tempranos que se requieren valorar en

una muestra limitada con futuros profesores. Por tanto, en futuras líneas de investigación se deberá indagar en el conocimiento matemático del profesorado considerando una muestra superior.

Agradecimientos:
Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio Nº 72200447.

6. Referencias

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Álvarez, R. (2003). Las preguntas de respuesta abierta y cerrada en los cuestionarios. análisis estadístico de la información. *Metodología de Encuestas, 5*(1), 45-54.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. In M. Neubrand (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (pp. 11-29). Münster: WTM-Verlag.

Ball, D.L., Hill, H.C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knowsmathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(3), 14-22 and 43-46.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blanton M. L., y Kaput J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton M. L., y Kaput J. (2011). Functional Thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (pp. 5-23), Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blömeke, S., y Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: A review of the state of research. *ZDM, 44*(3), 223-247. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0429-7

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2019) Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf

Demonty, I., Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 99,* 1–19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Di Bernardo, R., Carotenuto, G., Mellone, M., y Ribeiro, M. (2017). Prospective Teachers' Interpretative Knowledge on Early Algebra. *Cadernos de Pesquisa*, *24*(esp.), 208-222.

Fernández, C., Baptista, P., y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Ferreira, M. C. N., Ribeiro, M., y Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. *Zetetiké*, 25(3), 496-514.

Gellert, U. (2005). La formación docente entre lo teórico y lo práctico. En I. Gómex-Chacón y E. Planchart (Eds.), *Educación Matemática y formación de profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica* (pp. 73-83). Universidad de Deusto.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education 39,* 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Neto, T., Blanco, T. F., Contreras, Á., Díaz-Batanero, C., Estepa, A., y Lasa, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de educación*, *370*, 199-228.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(3), 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Katz, V. J. (2007). *Algebra: Gateway to a Technological Future*. The Mathematical Association of America.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*, 139-151.

López, E., y Sanz, R. (2021). Construcción y validación del cuestionario de autopercepción sobre las Competencias docentes del profesorado. *Educatio Siglo XXI, 39*(3), 157-186.

McAuliffe, S., y Lubben, F. (2013). Perspectives on pre-service teacher knowledge for teaching early algebra. *Perspectives in Education*, *31*(3), 155-169.

Mejías, C. (2019). *Evaluación del los Conocimiento para la Enseñanza del Álgebra en Profesores en Ejercicio de Educación Primaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Girona]. https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/17137

Montero, I., y León, O.G. (2002). Clasificación y descripción de las metodologías de investigación en psicología. *Revista Internacional de Psicología Clínica y de la Salud, 2*(3), 503-508.

Muñiz, J. (2017). *Teoría clásica de los test.* Segunda Edición. Pirámide.

Ng, D. (2011). Indonesian primary teachers' mathematical knowledge for teaching geometry: implications for educational policy and teacher preparation programs. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, *39*(2), 151-164. https://doi.org/10.1080/1359866X.2011.560648

Oliveira, H., Polo-Blanco, I., y Henriques, A. (2021). Exploring prospective elementary mathematics teachers' knowledge: a focus on functional thinking. *Journal on Mathematics Education*, *12*(2), 257-278.

Oviedo, H. C., y Campo-Arias, A. (2005). Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach; An Approach to the Use of Cronbach's Alfa. *Revista colombiana de Psiquiatría, 34*(4), 572-580.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021b). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9, 2590.* https://doi.org/10.3390/math9202590

Schliemann A., Carraher D. W. y Brizuela B. M. (2012). Algebra in elementary school. En L. Coulange y J. P. Drouhard (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives* (pp. 109-124). Special Issue of Recherches en Didactique des Mathématiques.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Souza, L. C., Pazuch, V., y Ribeiro, A. J. (2021). Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. *Zetetike, 29*, 1-25.

Souza, L. C., Ribeiro, A. J., y Pazuch, V. (2020). Aprendizagem Profissional de Professores dos Anos Iniciais: Explorando os Diferentes Significados do Sinal de Igualdade. *Acta Scientiae. (Canoas), 22*(4), 71-120.

Strand, K., y Mills, B. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Algebra. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 385-432. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol11/iss2/8

Tanisli, D., y Kose, N. Y. (2013). Pre-Service Mathematic Teachers' Knowledge of Students about the Algebraic Concepts. Australian Journal of Teacher Education, 38(2). http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2013v38n2.1

Trivilin, L. R., y Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 38-59.

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 397-428.

Zapatera, A., y Callejo, M. L. (2017). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educación, 24*(1), 35-38.

Anexo 1: Ítems versión inicial del cuestionario

Ítem 1:

La maestra estaba analizando las respuestas de los alumnos de su clase de 4° año:
Los hermanos Arturo y Cecilia recibieron de su tía la misma cantidad de dinero. Arturo decidió guardar 20 euros en su hucha y guardar una cantidad de dinero para llevar a la escuela. Cecilia guardó en su hucha 16 euros y separó lo restante para comprar algunos adhesivos.
Como ambos niños recibieron la misma cantidad de dinero, podemos establecer la igualdad:

$$20 + \_\_\_ = 16 + \_\_\_$$

Determine el valor que cada niño separó para sus gastos. Explique cómo llegó al resultado.

Carlos, Joaquín y Cristina:
"Arturo llevó a la escuela 10 euros y Cecilia separó 14 para comprar sus adhesivos.
Nosotros pensamos que, si recibieron la misma cantidad, entonces Cecilia se gastó 4 euros más que su hermano y creemos que se llevó 10 euros, porque en el colegio sólo se puede llevar un máximo de 10 euros. Así que tenemos 20 + 10 = 30 y 16 + 14 = 30"

Santiago, Raquel y Carolina
"Arturo llevó a la escuela 36 euros y Cecilia gastó los mismos 36 euros en adhesivos, porque tenían la misma cantidad.
Llegamos a esta respuesta, juntando los valores que aparecen en la cuenta: 20+16"

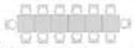
Paula, Mateo y Mauricio
"Arturo llevó a la escuela 5 reales y su hermana gastó 9 reales en adhesivos. Nosotros pensamos que, si ambos recibían la misma cantidad y él guardaba 4 reales más en su hucha, entonces Cecilia tenía 5 euros más 4 euros para gastar en pegatinas. Obtenemos esta respuesta haciendo 20 + 5 = 16 + 9, porque Arturo ahorró 4 euros más que su hermana"

Preguntas:
a) ¿Cuál(es) respuesta(s) debería aceptar la maestra como correctas? ¿Porqué?
b) ¿Qué dificultades presentan los alumnos del curso para resolver el problema?
c) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?
d) ¿Con cuáles contenidos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

Ítem 2:

La maestra expone el siguiente problema a sus alumnos de 6° grado:

Los padres de Esteban están organizando una fiesta de cumpleaños para él. Se ponen en contacto con el Sr. Gómez, el encargado del catering. Tiene unas pequeñas mesas cuadradas. Él propone ponerlas una al lado de la otra para formar una mesa larga en la que se sentarán todos los invitados, como se muestra a continuación:



Algunos ejemplos de la regla elaborada por los alumnos son las siguientes:

Alumnos	Presentación visual	Regla sugerida
Alumno 1		Número de sillas = (número de mesas x 2) + 2
Alumno 2		Número de sillas = (número de mesas - 2) x 2 + 6
Alumno 3		Cada vez que añades una mesa, tienes 2 sillas más Número de sillas = Número de mesas + 2

Preguntas:
a) Escriba una regla que sirva para encontrar el número de sillas para cualquier número de mesas que tenga. Justifique su respuesta.
b) ¿Qué contenidos y/o propiedades matemáticas deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?
c) Describa las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?

Ítem 3:

El maestro plantea a sus alumnos de quinto grado la siguiente situación:

Carlitos es un niño y le gustan los dulces. Tiene una caja con 28 caramelos dentro. Todos los días el come el doble de caramelos que el día anterior. En tres días Carlitos se ha comido todos los dulces.
Luego, pregunta a sus alumnos: ¿Cuántos caramelos ha comido Carlitos cada día?
Dos alumnos señalan cómo han resuelto el problema.

Teresa: "El primer día Carlitos se come una porción de caramelo y no sabemos cuánto vale... [Teresa dibuja un cuadrado], el segundo día come el doble que el primero, así que dos porciones [dibuja dos cuadrados] ... el tercer día el doble que el segundo, es decir, cuatro raciones [dibuja cuatro cuadrados]. Ahora los veintiocho caramelos hacen las divisiones entre las siete porciones que he identificado, y sé el valor de cada porción..."

Lucas: "Tomé los caramelos que tenía la caja y los dividí por siete, el resultado es 4 que corresponden a los caramelos que come cada día. Entonces, el 1° día se come 4, el 2° día se come 8 y el tercer día se come 16."

Preguntas:
a) Resuelve el problema planteado por el maestro. Justifique su respuesta.
b) Explique si las producciones de los alumnos las considera matemáticamente correctas o no. Justificar la idoneidad o insuficiencia de la racionalidad matemática mostrada por los alumnos.
c) De acuerdo con el currículo escolar ¿Cuál es el objetivo de la tarea propuesta a los alumnos?

Ítem 4:

Durante el desarrollo de una clase se discute la siguiente situación:

"Pedro es 4 cm más alto que Clara. Si Clara mide n cm, ¿cuánto mide Pedro?"

A continuación se muestra el diálogo entre tres alumnos:
Luis: La altura de Pedro es 4n
Pilar: No. La altura de Pedro es de 104 cm.
María: Creo que la altura de Pedro es x+4

Preguntas:
a) Determine la estatura de Pedro. Justifique su respuesta.
b) Describa las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea el problema.
c) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?
d) De acuerdo al currículo escolar, ¿Para qué nivel escolar considera pertinente este problema?

Ítem 5:

El maestro solicita a sus alumnos completar la siguiente tabla, entregando la siguiente instrucción:
"Marca las siguientes expresiones numéricas de acuerdo a su veracidad o falsedad justificando su elección"

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24			
46 + 27 – 27 = 27			
0 x 1 = 0			
□ + 0 = □			

Algunas respuestas de los alumnos fueron las siguientes:

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24	x		Porque es el mismo resultado, sólo ha cambiado el orden

	V	F	Justifica
46 + 27 – 27 = 27		x	Porque 46+27= da 79 y 79 menos 27 da 46

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24		x	Los cálculos no son hechos, el resultado nunca tiene multiplicación. Por lo tanto está incorrecto!

	V	F	Justifica
46 + 27 – 27 = 27		x	Está incorrecto porque 27-27 da 0 y sobra el 46 que es el resultado

	V	F	Justifica
0 x 1 = 0	x		Todo x 1 es igual al primer número

	V	F	Justifica
□ + 0 = □	x		El cuadradito es cero, por eso el resultado es el cuadradito.

Preguntas:
a) ¿Qué contenidos y/o propiedades matemáticas deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?
b) Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.
c) ¿Qué estrategias utilizaría usted como profesor para orientar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea a la tarea?
d) ¿Para qué nivel escolar considera pertinente este problema, de acuerdo al currículo escolar actual?

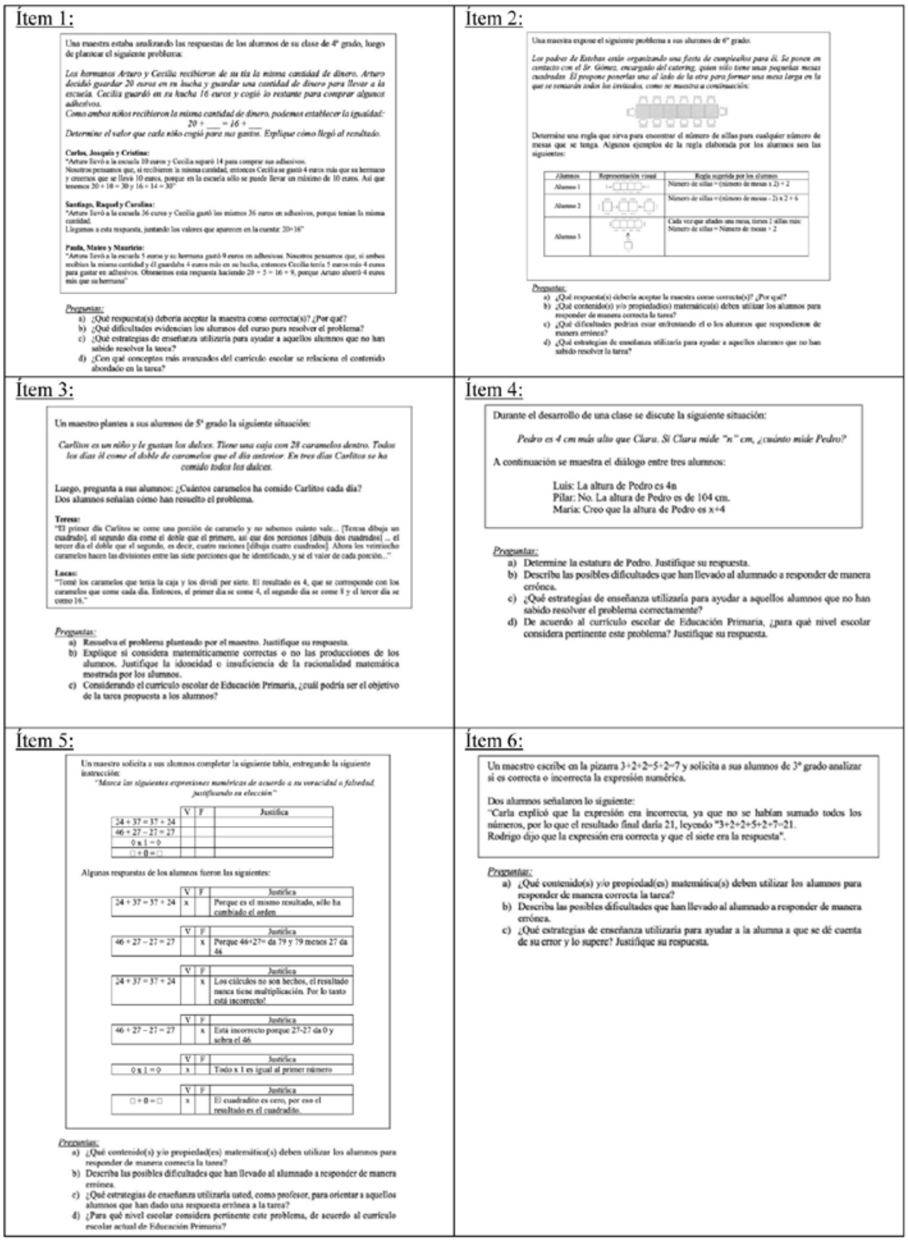
Ítem 6:

El maestro escribe en la pizarra 3+2+2=5+2=7 y solicita a sus alumnos de 3° grado analizar si es correcta o incorrecta la expresión numérica.

Dos alumnos señalaron lo siguiente:
"Carla explicó que la expresión era incorrecta, ya que no se habían sumado todos los números, por lo que el resultado final daría 21, leyendo "3+2+2+5+2+7=21". Rodrigo dijo que la expresión era correcta y que el siete era la respuesta".

Preguntas:
a) ¿Qué contenidos y/o propiedades matemáticas deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?
b) Describa las posibles dificultades que han llevado a lo(s) alumnos(s) a responder de manera errónea.
c) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a la alumna a que se de cuenta de su error y lo supere? Justifique su respuesta.

Anexo 2: Ítems versión final del cuestionario MKT-álgebra temprana (6-12)



Ítem 1:

Una maestra estaba analizando las respuestas de los alumnos de su clase de 4º grado, luego de plantear el siguiente problema:

Los hermanos Arturo y Cecilia recibieron de su tía la misma cantidad de dinero. Arturo decidió guardar 20 euros en su hucha y guardar una cantidad de dinero para llevar a la escuela. Cecilia guardó en su hucha 16 euros y cogió lo restante para comprar algunos adhesivos.
Como ambos niños recibieron la misma cantidad de dinero, podemos establecer la igualdad:
20 + ___ = 16 + ___
Determine el valor que cada niño cogió para sus gastos. Explique cómo llegó al resultado.

Carlos, Joaquín y Cristina:
"Arturo llevó a la escuela 10 euros y Cecilia separó 14 para comprar sus adhesivos.
Nosotros pensamos que, si recibieron la misma cantidad, entonces Cecilia se gastó 4 euros más que su hermano y creemos que se llevó 10 euros, porque en la escuela sólo se puede llevar un máximo de 10 euros. Así que tenemos 20 + 10 = 30 y 16 + 14 = 30"

Santiago, Raquel y Carolina:
"Arturo llevó a la escuela 36 euros y Cecilia gastó los mismos 36 euros en adhesivos, porque tenían la misma cantidad.
Llegamos a esta respuesta, juntando los valores que aparecen en la cuenta: 20+16"

Paula, Mateo y Mauricio:
"Arturo llevó a la escuela 5 euros y su hermana gastó 9 euros en adhesivos. Nosotros pensamos que, si ambos recibían la misma cantidad y él guardaba 4 euros más en su hucha, entonces Cecilia tenía 5 euros más 4 euros para gastar en adhesivos. Obtenemos esta respuesta haciendo 20 + 5 = 16 + 9, porque Arturo ahorró 4 euros más que su hermana"

Preguntas:
a) ¿Qué respuesta(s) debería aceptar la maestra como correcta(s)? ¿Por qué?
b) ¿Qué dificultades evidencian los alumnos del curso para resolver el problema?
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?
d) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar se relaciona el contenido abordado en la tarea?

Ítem 2:

Una maestra expone el siguiente problema a sus alumnos de 6º grado:

Los padres de Esteban están organizando una fiesta de cumpleaños para él. Se ponen en contacto con el Sr. Gómez, encargado del catering, quien sólo tiene unas pequeñas mesas cuadradas. Él propone ponerlas una al lado de la otra para formar una mesa larga en la que se sentarán todos los invitados, como se muestra a continuación:

Determine una regla que sirva para encontrar el número de sillas para cualquier número de mesas que se tenga. Algunos ejemplos de la regla elaborada por los alumnos son las siguientes:

Alumnos	Representación visual	Regla sugerida por los alumnos
Alumno 1		Número de sillas = (número de mesas x 2) + 2
Alumno 2		Número de sillas = (número de mesas - 2) x 2 + 6
Alumno 3		Cada vez que añades una mesa, tienes 2 sillas más: Número de sillas = Número de mesas + 2

Preguntas:
a) ¿Qué respuesta(s) debería aceptar la maestra como correcta(s)? ¿Por qué?
b) ¿Qué contenido(s) y/o propiedad(es) matemática(s) deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?
c) ¿Qué dificultades podrían estar enfrentando el o los alumnos que respondieron de manera errónea?
d) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?

Ítem 3:

Un maestro plantea a sus alumnos de 5º grado la siguiente situación:

Carlitos es un niño y le gustan los dulces. Tiene una caja con 28 caramelos dentro. Todos los días él come el doble de caramelos que el día anterior. En tres días Carlitos se ha comido todos los dulces.

Luego, pregunta a sus alumnos: ¿Cuántos caramelos ha comido Carlitos cada día?
Dos alumnos señalan cómo han resuelto el problema.

Teresa:
"El primer día Carlitos se come una porción de caramelo y no sabemos cuánto vale... [Teresa dibuja un cuadrado], el segundo día come el doble que el primero, así que dos porciones [dibuja dos cuadrados] ... el tercer día el doble que el segundo, es decir, cuatro raciones [dibuja cuatro cuadrados]. Ahora los veintiocho caramelos hacen las divisiones entre las siete porciones que he identificado, y sé el valor de cada porción..."

Lucas:
"Tomé los caramelos que tenía la caja y los dividí por siete. El resultado es 4, que se corresponde con los caramelos que come cada día. Entonces, el primer día se come 4, el segundo día se come 8 y el tercer día se come 16."

Preguntas:
a) Resuelva el problema planteado por el maestro. Justifique su respuesta.
b) Explique si considera matemáticamente correctas o no las producciones de los alumnos. Justifique la idoneidad o insuficiencia de la racionalidad matemática mostrada por los alumnos.
c) Considerando el currículo escolar de Educación Primaria, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea propuesta a los alumnos?

Ítem 4:

Durante el desarrollo de una clase se discute la siguiente situación:

Pedro es 4 cm más alto que Clara. Si Clara mide "n" cm, ¿cuánto mide Pedro?

A continuación se muestra el diálogo entre tres alumnos:

Luis: La altura de Pedro es 4n
Pilar: No. La altura de Pedro es de 104 cm.
María: Creo que la altura de Pedro es x+4

Preguntas:
a) Determine la estatura de Pedro. Justifique su respuesta.
b) Describa las posibles dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea.
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema correctamente?
d) De acuerdo al currículo escolar de Educación Primaria, ¿para qué nivel escolar considera pertinente este problema? Justifique su respuesta.

Ítem 5:

Un maestro solicita a sus alumnos completar la siguiente tabla, entregando la siguiente instrucción:
"Marca las siguientes expresiones numéricas de acuerdo a su veracidad o falsedad justificando su elección"

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24			
46 + 27 – 27 = 27			
0 x 1 = 0			
□ + 0 = □			

Algunas respuestas de los alumnos fueron las siguientes:

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24	x		Porque es el mismo resultado, sólo ha cambiado el orden

	V	F	Justifica
46 + 27 – 27 = 27		x	Porque 46+27= da 79 y 79 menos 27 da 46

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24		x	Los cálculos no son hechos, el resultado nunca tiene multiplicación. Por lo tanto está incorrecto!

	V	F	Justifica
46 + 27 – 27 = 27		x	Está incorrecto porque 27-27 da 0 y sobra el 46

	V	F	Justifica
0 x 1 = 0	x		Todo x 1 es igual al primer número

	V	F	Justifica
□ + 0 = □	x		El cuadradito es cero, por eso el resultado es el cuadradito.

Preguntas:
a) ¿Qué contenido(s) y/o propiedad(es) matemática(s) deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?
b) Describa las posibles dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea.
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría usted, como profesor, para orientar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea a la tarea?
d) ¿Para qué nivel escolar considera pertinente este problema, de acuerdo al currículo escolar actual de Educación Primaria?

Ítem 6:

Un maestro escribe en la pizarra 3+2+2=5+2=7 y solicita a sus alumnos de 3º grado analizar si es correcta o incorrecta la expresión numérica.

Dos alumnos señalaron lo siguiente:
"Carla explicó que la expresión era incorrecta, ya que no se habían sumado todos los números, por lo que el resultado final daría 21, leyendo "3+2+2+5+2+7=21.
Rodrigo dijo que la expresión era correcta y que el siete era la respuesta".

Preguntas:
a) ¿Qué contenido(s) y/o propiedad(es) matemática(s) deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?
b) Describa las posibles dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea.
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a la alumna a que se dé cuenta de su error y lo supere? Justifique su respuesta.

Nataly Pincheira:

Gracias por enviar el manuscrito "Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de educación primaria" a Revista de Investigación en Educación:

URL del manuscrito: https://revistas.uvigo.es/index.php/reined/authorDashboard/submission/4450
Nombre de usuario/a: nataly_pincheira

Tenga en cuenta que en el sistema no se reflejarán cuestiones como la asignación de personas revisoras. Las notificaciones pertinentes serán realizadas por el Editor-Jefe.

Si tiene alguna duda puede ponerse en contacto conmigo. Gracias por elegir esta editorial para mostrar su trabajo.

Dr. D. Alberto José PAZO LABRADOR

Revista de Investigación en Educación

4.9 Estudio [I]

Mathematical knowledge of early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers. (En revisión).

Mathematical knowledge of early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers

Abstract

This study analyzes the mathematical knowledge to teach early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers, from the perspective of the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model. The research adopts a mixed exploratory-descriptive methodological approach, based on the application of the MKT-early algebra questionnaire (3-6), consisting of six open-ended items that place teachers in various teaching situations reflecting the knowledge that characterizes early algebra at this stage of schooling. The analysis of the answers given by the pre-service teachers of early childhood education revealed a level general of insufficient mathematical knowledge, with the common content knowledge exhibiting fewer limitations compared to the other subdomains that comprise the model, and the horizon content knowledge the weakest. We conclude that it is necessary to offer teacher training programs that deepen the didactics of early algebra and provide tools to further the effective teaching of this content block in early childhood education.

Keywords: mathematical knowledge for teaching, early algebra, pre-service teacher, early childhood education.

Introduction

A growing research agenda in early algebra suggests that early childhood education children can acquire elementary algebraic notions and reason algebraically. According to Kieran et al. (2016), studies have focused primarily on explaining students' opportunities to explore and discern mathematical relationships, patterns, and arithmetic structures through processes of observation, conjecture, generalization, representation, justification, and communication. On a related topic, the "algebraization" of the curriculum, a term proposed by Kaput (2000) to refer to the integration of algebraic reasoning or thinking throughout schooling, has begun to be incorporated into some contemporary early childhood education curricula (e.g., Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority [ACARA], 2022; Ministry of Education [MINEDUC], 2018; Ministry of Education, Republic of Singapore, 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), since they have integrated the teaching of algebra as a content block starting with this stage of education (Pincheira & Alsina, 2021a).

The latter means "teachers can help students build a solid foundation of understanding and experience as a preparation for more sophisticated work in algebra in the middle grades and high school" (NCTM, 2000, p. 39). However, to ensure that children benefit from such learning experiences involving early algebra, early childhood education teachers need to have specific knowledge (Mosvold et al., 2011), since they are a key agent in eliciting the development of algebraic thinking as a capacity to make and express generalizations (Kaput, 2008; Pinto y Cañadas, 2021).

Despite the interest in researching the development of algebraic thinking in early childhood education, and advances in early algebra in curricular terms, research on how to guide

teachers towards the effective teaching of early algebra at this school stage (3-6 years old) is not as advanced.
The literature notes the need to conduct studies that analyze the mathematical knowledge of early algebra of early childhood education teachers (e.g., Cabral et al., 2020; Pincheira & Alsina, 2021b), since there is little evidence on the development of this knowledge to implement knowledge of early algebra (Walkoe et al., 2022). Consequently, studies are needed that can be used to evaluate and track key aspects of mathematical knowledge in order to carry out the instructional process involved in this content block.
Lane et al. (2015) note that the knowledge of teachers is directly related to student learning. Based on this, we posit the question: what mathematical knowledge does an early childhood education teacher mobilize in order to teach early algebra?
Given this interrogatory, the objective of our study is to analyze the mathematical knowledge of pre-service teachers for teaching early algebra in early childhood education. To achieve this goal, we take the perspective of Ball et al. (2008) and use the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model as an analytical tool. The data obtained will provide the starting point to determine those central aspects that should be considered in the initial training of early childhood education teachers to teach early algebra.

Theoretical foundation

Mathematical knowledge for teaching

In the field of teacher knowledge, the research contributions proposed by Shulman (1986, 1987) showed a lack of emphasis on both teacher training and evaluation, as well as on effective teaching practices. Shulman (1986) introduced the concept of content knowledge, referring to "the amount and organization of knowledge per se in the mind of the teacher" (p.9), and pedagogical knowledge, defined as a "particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability" (p.9). By distinguishing between the two concepts, this author intended to bridge the gap between content and pedagogy.
Ball et al. (2008), in an effort to refine and empirically validate the notions proposed by Shulman (1986, 1987), developed a model of knowledge specific to mathematics teachers, called Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). This model has been developed as an analytical tool of teacher knowledge and is defined as "the mathematical knowledge that teachers uses in the classroom to produce instruction and student growth" (Hill et al., 2008, p.374); that is, it refers to the multiple dimensions of knowledge on which a teacher relies when implementing the teaching of mathematics.
The MKT model represents a map of the mastery of mathematical comprehension and ability that considers two main constructs: knowledge of the subject and pedagogical knowledge of the content. On the one hand, knowledge of the subject integrates: common knowledge of content (CCK), defined as "knowledge that is used in the work of teaching in ways in common with how it is used in many other professions or occupations that also use mathematics" (Hill et al., 2008, p.377); knowledge of specialized content (SCK), which is "mathematical knowledge that allows teachers to engage in particular teaching tasks, including how to accurately represent mathematical ideas, provide mathematical explanations rules and procedures, and examine and understand unusual solution methods to problems" (Ball et al., 2005); and horizon content knowledge, defined as "an awareness of

how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum" (Ball et al., 2008, p.403).
And on the other hand, pedagogical knowledge of the content considers: knowledge of content and students (KCS), defined as "knowledge that combines knowing about students and knowing about mathematics" (Ball et al., 2008, p.401), that is, the knowledge that can be used to anticipate and interpret how students think when confronted with a certain mathematical task; knowledge of content and teaching (KCT), described as that which "combines knowing about teaching and knowing about mathematics" (Ball et al., 2008, p.401) and which refers to the mathematical knowledge of how to design the instruction, that is, how to use different methods and procedures in order to develop the instruction; and finally, knowledge of the content and curriculum related to content knowledge as it pertains to the curriculum designed for each educational level in the area of mathematics.

Mathematical knowledge of early algebra in early childhood education teachers

Some recent studies have begun to analyze the mathematical knowledge that early childhood education teachers have of general aspects of early algebra typical of this stage of schooling, focusing mainly on knowledge of mathematical patterns (Pincheira & Alsina, 2021b).
For example, Bair and Rich (2011), in a longitudinal study with more than 5000 pre-service early childhood and primary education teachers, analyzed the knowledge of specialized content for teaching in relation to algebraic reasoning and number sense. These authors identified problems exemplifying the nature of the relationships between quantities and establishing connections between the representations of a number sequence. Similarly, Noviyanti and Suryadi (2019) evaluated the basic mathematical knowledge of 35 in-service early childhood education teachers on patterns and the number sense of mathematical relationships. The results reveal limitations in content knowledge in both constructs.
Pincheira and Alsina (2022b) analyzed the specialized content knowledge and the knowledge of content and teaching of 18 pre-service early childhood education teachers when designing mathematical tasks on repetition patterns. The results reveal problems in the specialized knowledge to identify theoretical concepts of a task on patterns, demonstrate rules of sequence formation and poor management of teaching situations in which to apply the study of patterns. They also indicate deficiencies in the knowledge of content and teaching to propose teaching strategies that promote an understanding of patterns and the use of early algebraic language.
In summary, the data on the mathematical knowledge mobilized by pre- and in-service early childhood education teachers are scarce, and reflect a limited knowledge to promote the effective teaching of early algebra at this stage of schooling.

Methodology

In keeping with the purpose of the research that, as indicated, consists of analyzing the mathematical knowledge of pre-service teachers for teaching early algebra in early childhood education, we employed a mixed methodological approach of an exploratory-descriptive type (Creswell, 2014).

Participants and context

The study involved 60 students majoring in early childhood education in a university in Spain. The sample was selected by considering a non-probabilistic sampling of an accidental or causal nature (Fernández et al., 2014), since the selection criterion was determined by the possibility of joining this group.

The ages of the participants ranged from 18 to 25, with 59 women (98.3%) and 1 man (1.7%). As for their previous education, 49 (81.6%) of them completed high school, 25 (41.7%) completed vocational training, and 14 (23.3%) completed both.

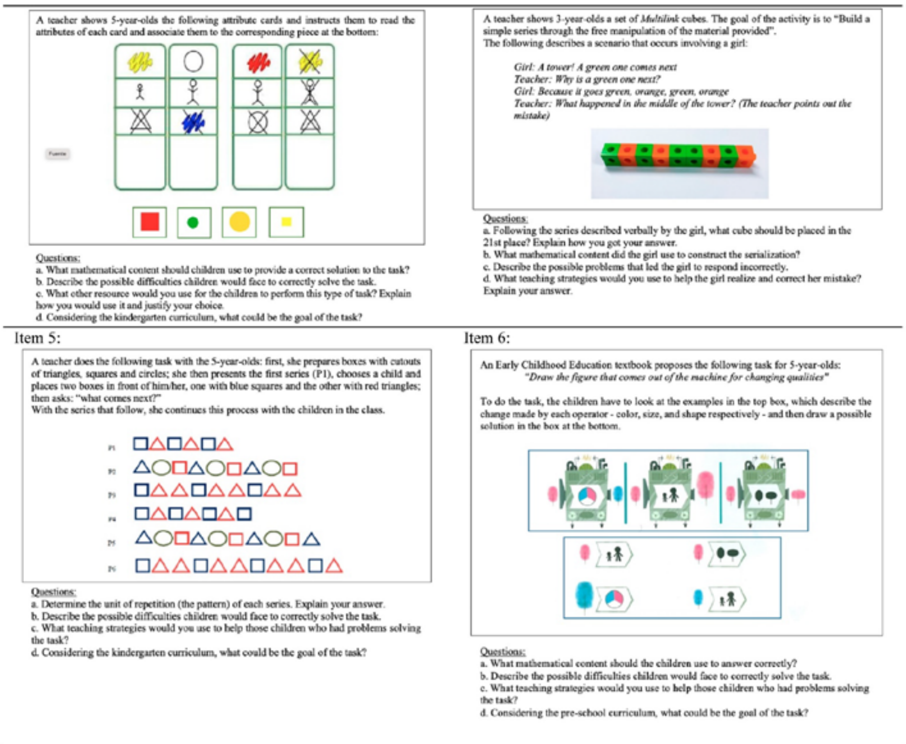
At the time of the study, in 2022, the participants were in the second year of their studies, out of a total of four, and were taking the "Learning mathematics" course. In general, in this first course in the field of mathematics education, pre-service teachers receive general training on early childhood mathematical education (skill-based planning and managing of teaching practices; presence of mathematics in the kindergarten curriculum). They then study the content, assessment indicators, resources and strategies for teaching early algebra to students aged 3 to 6 years, and other content blocks, such as numbering and calculation, geometry, measurement, and statistics and probability.

Design and procedure

The data were obtained by administering the MKT-early algebra (3-6) questionnaire described in Pincheira and Alsina (2022a), where the validity and reliability of the instrument were analyzed, yielding a Cronbach alpha of 0.72. This instrument consists of six open-ended exercises (Table 1) that place pre-service teachers in various teaching situations that can provide an integrated analysis of the mathematical contents that characterize early algebra in early childhood education (Pincheira & Alsina, 2021a): a) establish relationships based on the recognition of attributes when experimenting with elements or objects (items 1, 2 and 3); b) seriation based on repetition patterns (items 4 and 5); and c) description of qualitative and quantitative changes (items 6).

Table 1 Items that make up the MKT early algebra questionnaire (3-6)

Item 1: A teacher proposes to 4-year-olds playing the game "We are detectives". Below is an excerpt from the planning activity: The children are separated into groups and observe how some materials in the room are arranged. They answer questions such as: What are these materials used for? What do they have in common? How are they different from the materials of the other piece of furniture? Why do they think they are grouped together? How are they alike? Then, each group shares their ideas and, together, they discover what criteria were used to arrange them. Finally, they establish agreements to propose new criteria to arrange the materials and do their best to implement them to reorganize the classroom. Questions: a. What mathematical content should the children employ to take part in the task proposed by the teacher? b. Considering the kindergarten curriculum, what could be the goal of the task? c. With what more advanced concepts of the school curriculum is the content in the task related?	Item 2: A teacher proposes the following task to 4-year-olds: *"Use a line to join the elements of the row that belong to each group"*  Questions: a. What mathematical content should the children use to provide a correct solution to the problem posed? b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task. c. What teaching strategies would you use to help children who had problems solving the task?
Item 3:	Item 4:



A teacher shows 5-year-olds the following attribute cards and instructs them to read the attributes of each card and associate them to the corresponding piece at the bottom:

Questions:
a. What mathematical content should children use to provide a correct solution to the task?
b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task.
c. What other resource would you use for the children to perform this type of task? Explain how you would use it and justify your choice.
d. Considering the kindergarten curriculum, what could be the goal of the task?

A teacher shows 3-year-olds a set of *Multilink* cubes. The goal of the activity is to "Build a simple series through the free manipulation of the material provided".
The following describes a scenario that occurs involving a girl:

Girl: A tower! A green one comes next
Teacher: Why is a green one next?
Girl: Because it goes green, orange, green, orange
Teacher: What happened in the middle of the tower? (The teacher points out the mistake)

Questions:
a. Following the series described verbally by the girl, what cube should be placed in the 21st place? Explain how you got your answer.
b. What mathematical content did the girl use to construct the serialization?
c. Describe the possible problems that led the girl to respond incorrectly.
d. What teaching strategies would you use to help the girl realize and correct her mistake? Explain your answer.

Item 5:

A teacher does the following task with the 5-year-olds: first, she prepares boxes with cutouts of triangles, squares and circles; she then presents the first series (P1), chooses a child and places two boxes in front of him/her, one with blue squares and the other with red triangles; then asks: "what comes next?"
With the series that follow, she continues this process with the children in the class.

P1
P2
P3
P4
P5
P6

Questions:
a. Determine the unit of repetition (the pattern) of each series. Explain your answer.
b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task.
c. What teaching strategies would you use to help those children who had problems solving the task?
d. Considering the kindergarten curriculum, what could be the goal of the task?

Item 6:

An Early Childhood Education textbook proposes the following task for 5-year-olds:
"Draw the figure that comes out of the machine for changing qualities"

To do the task, the children have to look at the examples in the top box, which describe the change made by each operator - color, size, and shape respectively - and then draw a possible solution in the box at the bottom.

Questions:
a. What mathematical content should the children use to answer correctly?
b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task.
c. What teaching strategies would you use to help those children who had problems solving the task?
d. Considering the pre-school curriculum, what could be the goal of the task?

The items on the questionnaire provide an insight into the mathematical knowledge involved in teaching early algebra in early childhood education, giving rise to a total of twenty-two questions that are based on the MKT model (Ball et al., 2008), allowing us to investigate the domains and subdomains that compose it, as shown in Table 2.

Table 2 Domains and subdomains of the MKT model to be evaluated in the items that make up the questionnaire

Items		Content knowledge			Pedagogical knowledge of the content		
		CCK	SCK	HCK	KCS	KCT	KCC
1	a. What mathematical content should the children employ to take part in the task proposed by the teacher?		x				
	b. Considering the kindergarten curriculum, what could be the goal of the task?						x
	c. With what more advanced concepts of the school curriculum is the content in the task related?			x			
2	a. What mathematical content should the children use to provide a correct solution to the problem posed?		x				
	b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task.				x		

	c. What teaching strategies would you use to help children who had problems solving the task?					x	
3	a. What mathematical content should children use to provide a correct solution to the task?		x				
	b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task.				x		
	c. What other resource would you use for the children to perform this type of task? Explain how you would use it and justify your choice.					x	
	d. Considering the kindergarten curriculum, what could be the goal of the task?						x
4	a. Following the series described verbally by the girl, what cube should be placed in the 21st place? Explain how you got your answer.	x					
	b. What mathematical content did the girl use to construct the serialization?		x				
	c. Describe the possible problems that led the girl to respond incorrectly.				x		
	d. What teaching strategies would you use to help the girl realize and correct her mistake? Explain your answer.					x	
5	a. Determine the unit of repetition (the pattern) of each series. Explain your answer.	x					
	b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task.				x		
	c. What teaching strategies would you use to help those children who had problems solving the task?					x	
	d. Considering the kindergarten curriculum, what could be the goal of the task?						x
6	a. What mathematical content should the children use to answer correctly?		x				
	b. Describe the possible difficulties children would face to correctly solve the task.				x		
	c. What teaching strategies would you use to help those children who had problems solving the task?					x	
	d. Considering the early childhood education curriculum, what could be the goal of the task?						x

CCK: Common Content Knowledge; SCK: Specialized Content Knowledge; HCK: Horizon Content Knowledge; KCS: Knowledge of Content and Students; KCT: Knowledge of Content and Teaching; KCC: Knowledge of Content and Curriculum.

It is important to note that the questionnaire was administered in the context of a regular class in the training process of the participants (90-minute session), with the authorization and collaboration of the professor in charge of the "Learning mathematics" course. The researchers also obtained the informed consent of the participants, who collaborated and responded to the questionnaire voluntarily.

Data analysis

After the data were gathered, the answers to the questionnaire provided by the pre-service early childhood education teachers were analyzed. The results provided an insight into the mathematical knowledge of early algebra of the teachers in question, from the perspective of the MKT model (Ball et al., 2008).

The analysis of the data considered quantitative and qualitative aspects. The former estimated the variable "degree of correctness of the answers" by assigning a score of 2 if the answer was correct, 1 if it was partially correct and 0 if it was incorrect. To assign these scores, criteria were established using an evaluation rubric based on the relevance of the answers, such that the maximum score on the questionnaire was 44 points and the minimum was 0 points. This rubric was submitted to the judgment of experts in didactics of mathematics and early algebra.

As for the qualitative analysis, the various answers given by the pre-service teachers were categorized using the content analysis technique (Krippendorff, 2013). Thus, comparisons were made between the data from different categories, such as "types of errors in the answers", "justifications provided by the teachers", "problems finding the right answer", and others.

To ensure the reliability of the coding process, the answers to the questionnaire were successively reviewed in a cyclical and deductive manner (Bisquerra, 2009). Then, a triangulation was carried out based on continuous reviews of the responses, ending with a discussion, by the authors, of the disagreements involving the coding process until a consensus was reached.

Results

The following describes the data obtained, showing, first, an analysis of the total scores of the questionnaire and, second, an analysis of the results obtained in relation to the domains and subdomain of the mathematical knowledge for teaching.

Total questionnaire score

The total questionnaire scores were analyzed based on the degree of correctness of the answers given by the 60 pre-service early childhood education teachers.

The total scores on the questionnaire ranged from 8 to 34 points, with no maximum scores reported (44 points). The average score was 18 points, which is less than half of the maximum score, with a standard deviation of 5.0 points. Likewise, the percentage of right answers on the questionnaire was 41%.

Figure 1 shows that the median questionnaire score was low, 17.6, meaning the median was slightly closer to the first quartile. Therefore, the values of the total questionnaire scores were slightly more concentrated in the lower half of the box.

We also see that the amplitudes of the top and bottom "whiskers" are relatively similar. This indicates some similarity between the extremes of the distribution of total scores. We do, however, see the presence of an outlier in the top area of the box, corresponding to an extreme observation that deviates from the bulk of the data; in this case, it corresponds to a pre-service teacher who obtained a total score of 34 points out of a possible 44 points.

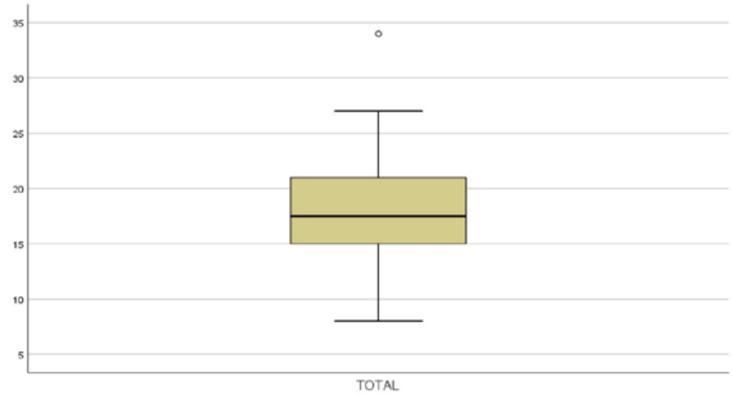


Fig. 1. Distribution of total scores and median score on the questionnaire

Comparison of the domains and subdomains of mathematical knowledge to teach early algebra

To establish a comparison between the subdomains of mathematical knowledge to teach early algebra, the total scores for the questionnaire were recoded based on the type of knowledge based on a normalized scale of 0 to 100, since the number of items differs for each subdomain.
Figure 2 shows the scores obtained by the pre-service early childhood education teachers in the different subdomains of knowledge. In general, we see that the normalized scores obtained in the common content knowledge subdomain are higher than in the other knowledge subdomains. This is in contrast to the subdomain of mathematical horizon content knowledge, which yielded the lowest score on the questionnaire.

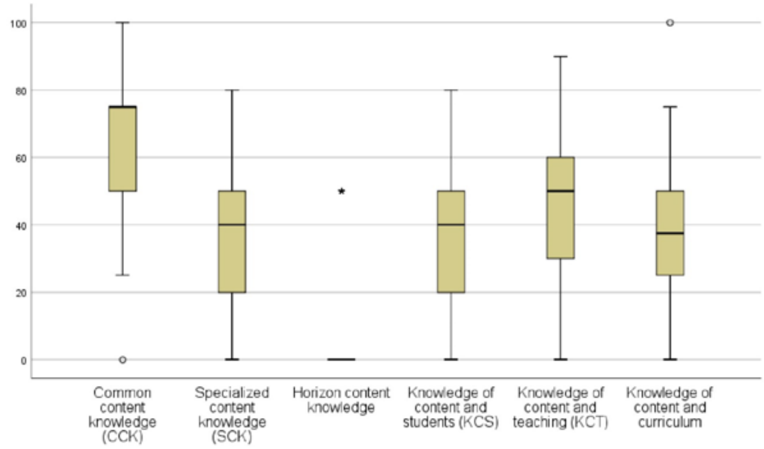


Fig. 2 Distribution of normalized scores by subdomains of mathematical knowledge

By considering more specifically the domain of knowledge of the subject, it is possible to observe that more than 50% of the pre-service teachers exhibit high normalized scores, above 75%, in the common content knowledge subdomain. Regarding the specialized content knowledge, the distribution of the normalized scores coincides with the knowledge of content and student subdomain, part of the pedagogical knowledge domain. In both subdomains, the normalized scores are concentrated in the upper area of the box, between 40% and 50%. Similarly, in the knowledge of the content and teaching, the median is closer to the third quartile, with the normalized scores clustering between 50% and 60%, in the top half of the box.

Finally, regarding the knowledge of the curriculum, 50% of the pre-service teachers failed to exceed 38% of the normalized scores.

As Figure 2 shows, there are differences between the scores obtained for the different subdomains of mathematical knowledge. To delve into these differences and determine if they are statistically significant, pairs of subdomains were compared by applying a non-parametric sign statistic for paired samples with a 95% confidence level, as seen in Table 3.

Table 3 Wilcoxon Signed-Rank test of the scores obtained in relation to the different subdomains of the MKT model

	Common content knowledge	Specialized content knowledge	Mathematical horizon knowledge	Knowledge of content and students	Knowledge of content and teaching
Specialized content knowledge	0.000	-	-	-	-
Mathematical horizon knowledge	0.000	0.000	-	-	-
Knowledge of content and students	0.000	0.000	0.000	-	-
Knowledge of content and teaching	0.000	0.000	0.000	0.041	-
Knowledge of the curriculum	0.000	0.000	0.000	0.897	0.358

The Wilcoxon rank tests applied to the different subdomains of knowledge are mostly <0.05. Therefore, the different subdomains of knowledge that were compared to one another show significant differences in their scores; whereas the comparison between knowledge of the curriculum and knowledge of content and students, as well as knowledge of the curriculum and knowledge of content and teaching, exhibit similar scores.

Analysis of the subdomains of mathematical knowledge for teaching

To delve into the subdomains of the mathematical knowledge of the participants, we analyzed the correctness of the answers to the MKT-early algebra questionnaire (3-6) and the explanations given in the answers to the different items that comprise it.

Common content knowledge

The set of items focused on evaluating the common content knowledge (4a and 5a) analyzes the answers the pre-service teachers gave when solving seriation tasks based on repetition patterns. In item 4a, the pre-service teachers were expected to identify the term in a series of two elements (green cube-orange cube) based on an indicated position, and in item 5a, to identify the repetition unit in six seriations proposed (P1 to P6) of two and three elements. The degree of correctness of the answers given for these items is shown in Figure 3.

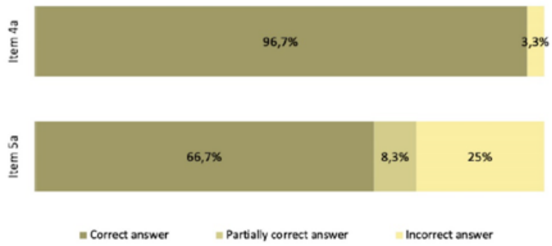


Fig. 3 Composition of the different types of answers for the common content knowledge by degree of correctness

The percentage of correct answers in the common content knowledge block exceeds 66.7%. An analysis of the answers to item 4a shows a high percentage of correct answers (96.7%), meaning most of the pre-service teachers were able to specify and justify that a green cube belonged in position 21 of the series; while only 3.3% answered incorrectly, stating it should be an orange cube.

In the case of item 5a, the partially correct answers (8.3%) are due to the lack of justification for the answer given. More specifically, the pre-service teachers noticed that in series P1 and P4, the repeating unit is blue square-red triangle, in series P2 and P5, it is blue triangle, gray circle and red square, and in series P3 and P6, it is blue square, red triangle, red triangle. However, they do not specify that the proposed series correspond to patterns of type AB, ABC and ABB, respectively. Meanwhile, 25% of the participants gave another answer or failed to accurately identify the repetition unit of the series.

Specialized content knowledge

To evaluate the specialized content knowledge, we focused on the mathematical content that pre-service teachers must be able to identify in order to solve certain situations involving algebraic teaching. This includes establishing relationships (classify, group, compare) based on the recognition of attributes, seriations with repetition patterns, and descriptions of qualitative changes.

To analyze this knowledge, the questionnaire considers five items (1a, 2a, 3a, 4b and 6a) that pose questions such as, "What mathematical content should children use to correctly answer the task?" Figure 4 shows the degree of correctness of the answers provided for these items.

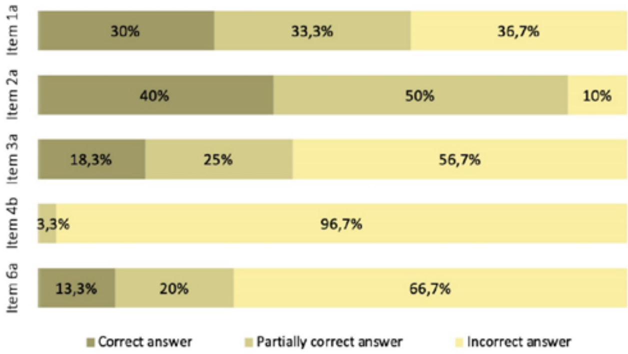


Fig. 4 Composition of the different types of answers for the specialized content knowledge by degree of correctness

The results show that items 1a and 2a, which correspond to the mathematical content related to establishing relationships by recognizing attributes, yielded a higher percentage of correct answers. However, this is not significant, since the correct answers do not exceed 40%. Items 3a and 6a show greater limitations, since the number of correct answers is below 18.3%. In the case of item 4b, involving mathematical content on series with repetition patterns, it yielded a high percentage of incorrect answers (96.7%), being one of the most difficult items on the questionnaire.

In general, an analysis of the arguments presented shows that much of the content identified is generic. For example, many of the answers focus on content, such as algebra, early algebra, logic, mathematical logic, relationships and series. The pre-service teachers did not analyze the contents of the task they were provided. They also gave answers that did not correspond to mathematical content, but to mathematical processes, such as problem solving and representation. This thus reveals confusion on the part of the pre-service teachers between mathematical content and the mathematical processes involved in the teaching situations presented.

More specifically, unlike items 4b and 6a, the arguments for items 1a, 2a and 3a show a more detailed analysis of the mathematical content; for example, they mentioned aspects such as classification of elements, description of attributes and qualities, establishing similarities and differences based on a comparison of objects, grouping elements by two or three attributes, and more.

Finally, a low percentage (13.3%) managed to adequately identify in item 6a that the mathematical content associated with the task is related to direct logical operators and the representation of qualitative changes, while 20% only mentioned very generically that the content involves change, and a large percentage failed to identify the mathematical content of the task.

Mathematical horizon knowledge

Knowledge of the mathematical horizon was assessed using item 1c of the MKT-early algebra questionnaire (3-6). To analyze this knowledge, the participants were asked to establish links between the mathematical content involved in the teaching situation and others

proposed in the extension of the curriculum, based on the question: to what other more advanced concepts in the curriculum can the content presented in the task be associated?
The teaching situation requires establishing relationships of classification and grouping of elements based on recognizing attributes (shape, color, size, etc.). Participants are thus expected to relate the content addressed in the task with the idea of class inclusion and the notion of part-whole, a key element in building the concept of number.
The results show that item 1c was one of the most difficult items in the questionnaire, since no correct answers were provided. 88.3% of participants responded incorrectly to the item, offering nonsensical arguments.
Only seven pre-service teachers (11.7%) gave a partially correct answer, arguing that the content presented in the task is related to the sense of belonging or not.

Knowledge of content and students

To respond to the set of items focused on evaluating the knowledge of content and students, the pre-service teachers need to anticipate how the children think in relation to the errors or difficulties they might encounter when faced with a certain algebraic task.
To analyze this knowledge, the questionnaire proposes five items (2b, 3b, 4c, 5b and 6b) that investigate issues such as "describe the possible difficulties that the children would have correctly solving the task". The degree of correctness of the answers given for these items is shown in Figure 5.

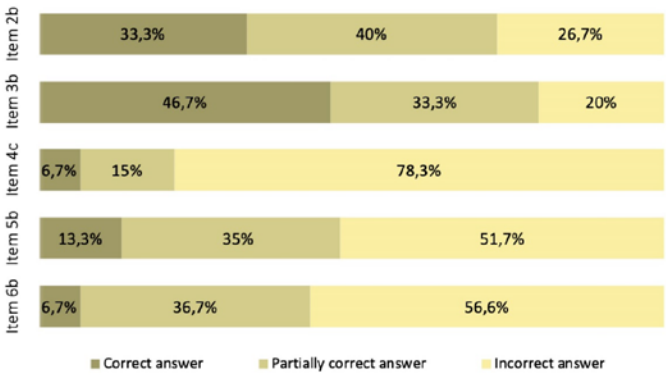


Fig. 5 Composition of the different types of answers for the knowledge of content and students by degree of correctness

In general, the results show that the percentage of correct answers is low, since they are below 46.7% in all the items proposed. Likewise, starting with item 4c, the percentage of incorrect answers is above 51.7%, where the most frequent arguments are that the difficulties the children face is not having acquired the prior knowledge needed to solve the task or not understanding the problem statement. In particular, the pre-service teachers exhibit limitations in terms of the knowledge of content and students.
Items 2b and 3b, which consider the potential difficulties children might face when solving tasks involving establishing relationships based on attribute recognition, yielded a slightly higher percentage of correct answers compared to the other items. In the case of item 2b, the

arguments presented made it possible to determine that 33.3% of the teachers noted that the possible difficulties have to do with identifying the category of each set of elements and establishing membership relationships with the elements.

Meanwhile, an analysis of the arguments given in item 3b shows that 46.7% of teachers determined that the potential difficulties are related to recognizing negative attributes and discriminating the shapes, color and size of the elements proposed in the cards. In both items, 2b and 3b, the arguments present in the partially correct answers mention that the difficulties are centered around experiencing the elements proposed in the teaching situations and their characteristics in general.

Items 4c and 5b analyze the difficulties with serialization tasks with repetition patterns. The small percentage of right answers for item 4c (6.7%) provides evidence that links the difficulties with the systematic reproduction of the pattern when extending the AB type series. 15% were of the view that the difficulties may be related to an inadequate understanding of the pattern. The remaining 78.3% failed to identify possible difficulties in the development of the task.

A similar situation is evident in the arguments presented for item 5b, where only 13.3% of the right answers propose that the difficulties involve the extension of the repetition pattern, especially in series P4, P5 and P6, which do not end in a complete repetition unit. A large percentage of the pre-service teachers failed to identify difficulties relevant to the object of study (51.7%), and the remaining 35% believed that the difficulties are related only to work with repetition patterns.

Finally, only 6.7% of the answers given for item 6b, which involves the description of qualitative change, were correct. The arguments given in these answers posit that the possible difficulties are related to the understanding of the logical operator and the representation of qualitative changes. 36.7% of the answers stated, at a very general level, that the difficulties are related to an understanding of change. The remaining 56.6% failed to identify possible difficulties for the object of study.

Knowledge of content and teaching

To evaluate the knowledge of content and teaching, we focused on the use of different methods and procedures that can be used to provide instruction.

The questions asked that allow us to analyze this knowledge were: What teaching strategies would you use to help children who had problems solving the task? What resource would you use to help children solve this type of task? Explain how you would use it and justify your choice. These questions are asked in items 2c, 3c, 4d, 5c and 6c of the questionnaire. Figure 6 shows the degree of correctness of the answers provided for these items.

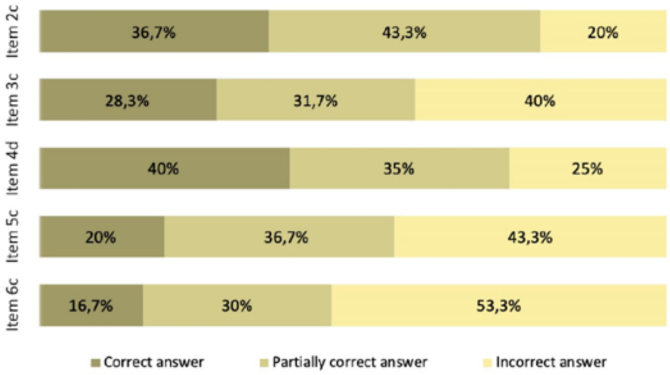


Fig. 6 Composition of the different types of answers for the knowledge of content and teaching by degree of correctness

The results show that the pre-service teachers have a low level of knowledge of content and teaching, since the percentage of correct answers was below 40% for all the items. We did, however, see a high percentage of partially correct answers in which the teachers mention teaching strategies to address the instruction that are not entirely conclusive, as well as teaching resources; however, they do not go into detail as to how and why they would implement them in the classroom.

The arguments given in the answers to item 2c, involving the recognition of attributes to establish relationships, reveal that teachers have problems establishing strategies that allow children to respond correctly to the task. 36.7% managed to describe possible teaching strategies as per the instructions in the task. Most of them suggested approaching the task experientially through manipulatives (fruits and toys) and asking questions of the type, What can we do with these objects? What characteristics do they have? in order to establish similarities and differences between the elements in each set of objects. A high percentage (43.3%) mentioned strategies on a very general level, but these are inconclusive; specifically, they mention working with concrete materials, providing examples through different objects, without specifying. The remaining 20% provided inadequate or meaningless strategies and resources.

Regarding item 3c, an analysis of the answers revealed that only 28.3% of the participants proposed another teaching resource to address the recognition of attributes to establish relationships, explaining and justifying their choice. They mainly proposed working with manipulatives, such as Dienes blocks, attribute blocks and others, undertaking the task initially without considering the negation of attributes. As in the previous item, a considerable percentage of responses (31.7%) were limited to mentioning only one resource, but did not detail how to use it. The remaining 40% did not mention any alternative resources.

Continuing on, an analysis of the arguments given in item 4d made it possible to show that 40% of the participants proposed and justified appropriate teaching strategies to correct the error presented in the AB series with repetition patterns. They included comparison with another term-to-term series, followed by orally expressing the terms of the sequence according to the established pattern. 35% mentioned possible strategies, such as asking leading questions and using manipulatives to continue the sequence, without giving more details about their choice, while 25% offered strategies that do not adequately address the mistake.

In item 5c, the arguments presented showed that only 20% of the participants provided adequate strategies to help children who had problems extending the series proposed. Notable among them was proposing series in increasing order of difficulty, using other manipulatives such as Multilink cubes or colored cards, and expressing the series orally. By contrast, a large percentage (43.3%) gave meaningless strategies to deal with the task and 36.7% offered inconclusive strategies.

Finally, item 6c, which focused on proposing teaching strategies to address the ideas of change, returned a low percentage of right answers (16.7%). They proposed the use of concrete materials, mainly mentioning the machine for changing qualities, followed by describing changes using everyday situations (night and day – a tree in autumn and spring). 30% proposed strategies like the ones mentioned above in a very general way, as well as others such as posing direct questions, using examples to describe qualitative changes, without detailing what specific materials, questions and examples would be appropriate. Finally, a high percentage of answers (53.3%) proposed inadequate strategies to address the study of change.

Knowledge of the curriculum

The set of items focused on evaluating the knowledge of the curriculum delved into central aspects of the early childhood education curriculum that pertain to a certain teaching situation.

To analyze their knowledge of the curriculum, they were asked questions of the type: considering the preschool curriculum, what could be the goal of the task? These questions are set out in items 1d, 3d, 5d and 6d. To answer the question, the teachers were expected to bring to bear their knowledge of the contents proposed in the curriculum and its intended purpose.

The degree of correctness of the answers given for these items is shown in Figure 7.

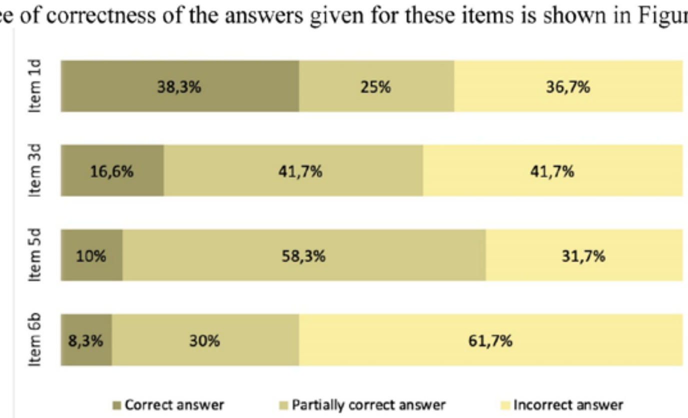


Fig. 7 Composition of the different types of answers for the knowledge of curriculum by degree of correctness

The results reveal that the teachers have poor knowledge of the curriculum, since they exhibited difficulties interpreting the intentionality of teaching situations and linking them clearly with the guidelines set out in the curriculum. The percentage of correct answers to the proposed items was below 38.3%.

An analysis of the responses to item 1d shows that only 38.3% of the participants were able to recognize that the purpose of the task was to establish different relationships (classification, ordering) based on recognizing two or more attributes at once (shape, color, size, and others). 25% of the participants stated very generically that the goal of the task involved establishing relationships, while a large percentage (36.7%) failed to determine the goal of the task.

Regarding item 3d, an analysis of the answers showed that a small percentage (16.6%) correctly identified the goal of the task, which was to positively or negatively recognize attributes based on working with cards. A high percentage (41.7%) was able to identify the recognition of attributes as the goal of the task. Similarly, 41.7% set a goal that does not correspond to the description of the task.

An analysis of the arguments given for item 5d showed that a low percentage of pre-service teachers (10%) correctly recognized that the goal of the task was to expand sequences with AB, ABC and ABB repetition patterns. A considerable percentage (58.3%) mentioned, very generally, that the goal involved working with patterns, while 31.7% failed to identify a goal.

Finally, the arguments presented for item 6d showed that only 8.3% responded correctly, by stating that the goal of the task had to do with introducing logical operators and expressing qualitative changes. Conversely, a high percentage (61.7%) failed to propose a goal for the task, while 30% only recognized that the goal of the task was related to establishing changes.

Final considerations

In this study, we analyzed partial aspects of the mathematical knowledge of 60 pre-service early childhood education teachers to teach early algebra, from the perspective of the MKT model (Ball et al., 2008). We did so by administering the MKT-early algebra questionnaire (3-6) proposed by Pincheira and Alsina (2022a) and analyzing the answers given by the pre-service teachers to the different questions that comprise it.

As Mosvold et al. (2011) suggest, analyzing the mathematical knowledge for teaching of early childhood education teachers requires formulating teaching situations specific to this stage of schooling. By adhering to these guidelines through the questionnaire, the pre-service teachers were given tasks and situations involving manipulation and games typical of early childhood education that allow children to experience early algebraic ideas.

The study delved into the domains and subdomains of the MKT model, showing that the mathematical knowledge of early algebra of pre-service early childhood education teachers is insufficient, since the average percentage of correct answers does not exceed 26.6%.

As concerns the domain of knowledge of the subject, the interpretation of the results indicates that the subdomain of common knowledge that is required to be implemented to solve serialization tasks with repetition patterns obtained better scores compared to the other subdomains evaluated. As in the study by Cabral et al. (2020), most of the participants successfully identified the structure of the sequences; however, certain problems are observed when the sequence does not end in a complete repeat unit. This last finding agrees with the results obtained by Noviyanti and Suryadi (2019), who showed that early childhood education teachers exhibit some limitations in understanding the basic knowledge associated with working with series.

Regarding the subdomain of specialized content knowledge, we identified a lack of ability in pre-service teachers to adequately identify the mathematical content that is involved in an early algebra task, especially in tasks with repetition patterns and the study of change. Similar studies in this same area of knowledge (e.g., Bair & Rich, 2011; Pincheira & Alsina, 2022b) have concluded that early childhood education teachers have problems establishing connections between different representations of a sequence and identifying theoretical concepts in pattern tasks. Likewise, the knowledge of the mathematical horizon is one of the most complex subdomains for pre-service early childhood education teachers, given their problems establishing links between different types of mathematical relationships, such as classification and grouping, in addition to other topics in the curriculum.

We also identified considerable limitations in the domain of pedagogical knowledge of the content. In the case of the subdomain of knowledge of content and students, the pre-service teachers have problems anticipating children's thinking in relation to errors or difficulties they might have when doing a certain algebraic task. This coincides, for example, with the results obtained by Cabral et al. (2020), who stated that teachers exhibit limitations interpreting and perceiving the algebraic thinking of early childhood education children, especially in tasks involving repetitive sequences.

Regarding the subdomain of knowledge of content and teaching, teachers have insufficient knowledge to propose teaching strategies and resources that allow children to overcome their difficulties with algebraic tasks. Pincheira and Alsina (2022b) reached a similar conclusion regarding knowledge of content and teaching, noting that pre-service early childhood education teachers exhibit difficulties selecting sequences of tasks that can be used to acquire or reinforce algebraic knowledge, as well as game-based teaching strategies to motivate the development of early algebra tasks.

Finally, their knowledge of the curriculum is also insufficient, since most of the teachers could not identify the purpose of the tasks proposed in the questionnaire and relate them to the purpose pursued by the early childhood education curriculum. Perhaps the answer to this complexity is that the preschool curriculum in use in Spain explicitly considers guidance related to the representation of attributes of elements and collections, establishing grouping, classification, order and quantification relationships, and omitting work with patterns and the description of qualitative and quantitative changes (Alsina, 2022).

According to Branco and Ponte (2014), teachers must know algebra and what is required to teach it in the early years of schooling in order to mobilize their didactic knowledge and their professional identity in their future practice. Against this backdrop, the situation regarding the mathematical knowledge of pre-service early childhood education teachers for teaching early algebra is worrisome and calls for reflection on what aspects to consider when training teachers to promote the development of the mathematical knowledge needed to teach early algebra in early childhood education.

We need to offer training programs to early childhood education teachers that allow them to develop this mathematical knowledge based on the following areas of action: a) subjects focused on the study of early algebra as a mathematical object, to analyze the specific aspects of this content block and how to teach it; and b) provide tools that allow teachers to reflect on their own teaching practice and their discursive interaction in the early childhood education classroom. Consequently, the effective incorporation of early algebra in early childhood education requires transforming teacher training to ensure it can respond to the new challenges involved in teaching this content standard. Considering the general pedagogical guidelines for training mathematics teachers (Lewis, 2016), and specifically for teaching early algebra in early childhood education (Alsina, 2022), it would be advisable to focus the training, for example, on the analysis and discussion of real classroom situations, to provide insights to pre-service teachers and thereby strengthen the development of the mathematical knowledge they can employ. It would also be advisable to further analyze the design, implementation and redesign of early algebra tasks focused on the ability to make and express generalizations (Kaput, 2008), in order to determine in depth, the mathematical activity that children must bring to bear in their early childhood education in order to identify the solution process for an early algebra task.

Acknowledgments

This research was supported by the National Agency for Research and Development of the Government of Chile (ANID) through a PhD scholarship abroad, Folio No. 72200447, and the Department of Subject-Specific Didactics of the University of Girona.

References

Alsina, Á. (2022). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Épsilon – Revista de Educación Matemática, 111,* 67-89.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2022). Mathematics curriculum. Retrieved January 20, 2023, from https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/?layout=1

Bair, S. L., & Rich, B. S. (2011). Characterizing the development of specialized mathematical content knowledge for teaching in algebraic reasoning and number theory. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 292-321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*, 14-22.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bisquerra, R. (2009). Metodología de la investigación educativa. La Muralla.

Branco, N., & Ponte, J. (2014). Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. In J. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 379-408). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Cabral, J., Oliveira, H., & Mendes, F. (2021). Preservice Teachers' Mathematical Knowledge about Repeating Patterns and their Ability to Notice Preschoolers Algebraic Thinking. *Acta Scientiae.* (Canoas*),* *23*(6), 30-59. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6302

Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches.* (4th edition). Sage Publications.

Fernández, C., Baptista, P., & Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. Springer.

Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology* (3rd edition). Sage Publications.

Lane, K. L., Oakes, W. P., Powers, L., Diebold, T., Germer, K., Common, E. A., & Brunsting, N. (2015). Improving teachers' knowledge of functional assessment-based interventions: Outcomes of a professional development series. *Education and Treatment of Children, 38*(1), 93-120. https://doi.org/10.1353/etc.2015.0001

Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction? *ZDM Mathematics Education 48*, 571-580. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0792-x

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministry of Education Singapore (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6.* Ministry of Education.

Mosvold, R., Bjuland, R., Fauskanger, J., & Jakobsen, A. (2011). Similar but different–investigating the use of MKT in a Norwegian kindergarten setting. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1802-1811). CERME.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Noviyanti, M., & Suryadi, D. (2019). Basic Mathematics Knowledge of Early Childhood Teachers. *Journal of Engineering Science and Technology*, *1*, 19-27.

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021b). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9, 2590.* https://doi.org/10.3390/math9202590

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2022a). Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. *Revista de Investigación en Educación, 20*(2), 154-171. https://doi.org/10.35869/reined.v20i2.4222

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2022b). Mathematical knowledge of pre-service early childhood and primary education teachers: an approach based on the design of tasks involving patterns. *Australian Journal of Teacher Education, 47*(8), 50-69. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2022v47n8.4

Pinto, E., & Cañadas, M.C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal 33*, 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Walkoe, J., Walton, M., & Levin, M. (2022). Supporting Teacher Noticing of Moments of Algebraic Potential. *Journal of Educational Research in Mathematics, 32*(3), 271-286. https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.271

Dear Sra. Pincheira,

Thank you for submitting your manuscript,
"Mathematical knowledge of early algebra exhibited by pre-service early childhood education teachers", to Mathematics Education Research Journal

The submission id is: MERJ-D-23-00065
Please refer to this number in any future correspondence.

During the review process, you can keep track of the status of your manuscript by accessing the following web site:

https://www.editorialmanager.com/merj/

Your username is: Nataly_Pincheira
If you forgot your password, you can click the 'Send Login Details' link on the EM Login page at https://www.editorialmanager.com/merj/.

Springer offers authors the option of making their articles available with open access via our Open Choice programme. We advise you to familiarise yourself with the details of Springer Open Choice in advance, to be able to decide quickly should your paper be accepted for publication. Further information can be found at www.springer.com/openchoice.

With kind regards,

Journals Editorial Office MERJ
Springer

4.10 Estudio [J]

Mathematical knowledge of primary school teachers for teaching early algebra. (En revisión).

Mathematical knowledge of primary school teachers for teaching early algebra

Abstract

The mathematical knowledge of pre-service primary school teachers to teach early algebra is analyzed from the perspective of the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model. The data were obtained using the MKT-Early Algebra Questionnaire (6-12), consisting of six open-ended items that place pre-service teachers in various teaching situations involving the knowledge that characterizes early algebra at this stage of schooling. Our analysis of the answers of 76 pre-service teachers shows: a) in general, insufficient mathematical knowledge for the different subdomains of knowledge; b) more specifically, common content knowledge exhibits the highest scores, and knowledge at the mathematical horizon the lowest. We conclude that it is necessary to provide teacher training programs that analyze the didactics of algebra and offer tools to further the effective teaching of this content standard in primary education.

Keywords: mathematical knowledge for teaching, early algebra, pre-service teacher, primary education.

1. Introduction

Promoting algebraic activity and the development of algebraic thinking in the early stages of schooling is one of the purposes pursued by early algebra, as a proposal for curricular change. The challenge of teaching algebra in primary school arises from the urgent need to foster learning experiences that prepare students for the more formal study of algebra in higher grades (Cai et al., 2011).

Algebraic thinking is conceived as a way of thinking (Blanton and Kaput, 2011; Cañadas et al., 2019) and is not restricted to working with algebraic symbolism, that is, it does not focus on the use of letters and their manipulation (Radford, 2011). From a broad perspective, guaranteeing the development of algebraic thinking involves the study of structures and the analysis of numerical relationships that result from arithmetic, the study of functions and joint relationships, change and modeling as a mastery of expression and formalization of generalizations (Kaput, 2008; Kieran, 2004).

Curriculum guidelines in various countries (e.g., Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority [ACARA], 2015; Ministry of Education [MINEDUC], 2012; Ministry of Education, Republic of Singapore, 2012; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) have explicitly established the progressive knowledge of algebra in primary education curricula (Pincheira and Alsina, 2021). Ensuring the success of new curricular proposals that promote the study of algebra from a very early age requires teachers who are capable of providing students with opportunities to develop age-appropriate algebraic thinking in their daily experiences (Stephens et al., 2017).

According to Santagata and Lee (2021), the effects on student learning and the quality of instruction are closely related to the mathematical knowledge of the teachers. Therefore, promoting the development of algebraic thinking in students directly challenges the teaching staff, since they require broad knowledge of the subject; that is, a solid understanding of various elements and concepts associated with early algebra, as well as pedagogical

knowledge that lets them present effective learning experiences to achieve this kind of thinking.
Updating both the mathematical and pedagogical knowledge associated with teaching algebra poses a challenge during the initial training of primary school teachers, who need instruction that reflects the transformation demanded by early algebra (Kim and Kim, 2022). Few studies have explored the mathematical knowledge of teachers in the field of early algebra (Hohensee, 2017). Consequently, studies are needed that can be used to evaluate and track key aspects of mathematical knowledge in order to carry out the instructional process involving this content block in the primary school classroom.
Malara and Navarra (2009) assert that teachers play a fundamental role in the early teaching of algebra, since they are responsible for making decisions about its instruction. Based on this, we ask ourselves: what mathematical knowledge do pre-service primary school teachers mobilize to teach early algebra?
To answer this question, we consider the perspective of Ball et al. (2008) and use the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model as an analytical tool.
When seen in this light, the goal of our study is to analyze the mathematical knowledge for teaching early algebra of pre-service primary education teachers, and subsequently to report on those aspects that must be considered in the initial training of primary education teachers to teach early algebra.

2. Framework

2.1 Mathematical Knowledge for Teaching model

The MKT model emerges from the notions proposed by Shulman (1986, 1987) in relation to knowledge of the subject and pedagogical knowledge. Ball et al. (2008), in an effort to deliver analysis tools specific to the teaching of mathematics, define mathematical knowledge for teaching as "the mathematical knowledge that teachers use in classrooms to produce instruction and student growth" (Hill et al., 2008, p.374).
MKT considers two major domains of mathematical knowledge for teaching: content knowledge and pedagogical knowledge of the content.
Content knowledge includes three subdomains: *common content knowledge* (CCK), which refers to "the mathematical knowledge and skill used in settings other than teaching" (Ball et al., 2008, p.399), meaning it corresponds to the knowledge that can be achieved over the course of one's education, and that is possessed by anyone when doing a mathematical task; *specialized content knowledge* (SCK), which refers to "mathematical knowledge and skill unique to teaching" (Ball et al., 2008, p.400), knowledge that is specific to the teacher and that is used to perform teaching tasks alluding to: "the mathematical knowledge that allows teachers to engage in particular teaching tasks, including how to accurately represent mathematical ideas, provide mathematical explanations for common rules and procedures, and examine and understand unusual solution methods to problems" (Hill et al., 2008, p.377-378); and *knowledge at the mathematical horizon*, which is described as "awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum" (Ball et al., 2008, p.403), which allows establishing the way in which mathematical content relates to other content in the curriculum throughout the various educational stages, and offers a vision to understand the connections between the various notions of mathematics with other sciences.

The pedagogical knowledge of content also consists of three subdomains: *knowledge of content and students* (KCS), which is defined as "content knowledge intertwined with knowledge of how students think about, know, or learn this particular content."(Hill et al., 2008, p.375), is the knowledge that teachers have about the knowledge of students, allowing them to predict situations and anticipate the concerns, attitudes or difficulties of the students; the *knowledge of content and teaching* (KCT), defined as that which "combines knowing about teaching and knowing about mathematics"(Ball et al., 2008, p.401), which integrates specific mathematical knowledge, and pedagogical and didactic aspects of the teaching processes involved in student learning; and, finally, *knowledge of the curriculum*, is "represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level" (Ball et al., 2008), is related to the methods and approaches corresponding to the programs designed for each educational level in the area of mathematics and the materials available in relation to them.

According to Blömeke et al. (2015), the teachers' MKT could predict perceptual interpretation as well as the ability to make decisions and teach mathematics. The description given by the subdomains of the MKT model lets us categorize the knowledge that a teacher must exhibit over the course of their practice to teach mathematics, from different teaching approaches, whether in a class-wide discussion, a written task or a questionnaire (Ball et al., 2008).

2.2 Knowledge of early algebra of primary school teachers

In recent years, several studies have shown that the knowledge of primary school teachers is not sufficient to ensure the adequate teaching of early algebra. The different theoretical approaches in which these studies are framed have yielded a holistic look at the knowledge that pre-service and in-service teachers have at their disposal to deal with algebraic tasks and promote the development of algebraic thinking.

Castro (2011), for example, based on the onto-semiotic approach to cognition and mathematical instruction (Godino et al., 2007), evaluates the skills of 28 pre-service teachers to didactically analyze algebraic reasoning tasks by having them design a teaching unit. The results reveal that pre-service teachers are not ready to assume the curricular inclusion of early algebra in primary school, since they prioritize a procedural and numerical approach in the units designed. Likewise, Aké (2013) evaluates the algebraic reasoning of 40 pre-service primary school teachers through a questionnaire, finding that they exhibit problems developing algebraic ideas, since they associate the use of algebraic knowledge primarily with symbolic manipulation.

Elsewhere, from the perspective of the didactic-mathematical knowledge model (Godino et al., 2009), Mejías (2019) evaluates the didactic-mathematical knowledge for teaching algebra in 121 in-service primary education teachers, revealing deficiencies in the processing of algebraic content and limitations in justifying and interpreting mathematical ideas of an algebraic nature.

Different areas of knowledge specific to the teaching of early algebra have been addressed within the framework of the MKT model proposed by Ball et al. (2008). McAuliffe and Lubben (2013), for example, analyze the performance of a pre-service primary school teacher when designing and teaching an early algebra lesson on patterns. These authors note limitations involving the specialized content knowledge, given the teacher's difficulties guiding the students through a numerical pattern while simultaneously focusing on the function. Likewise, Wilkie (2014) analyzes the mathematical knowledge of 105 in-service primary school teachers for teaching functional thinking. The results reveal adequate content knowledge for pattern generalization tasks; however, the pedagogical knowledge of teachers is limited, since they fail to provide adequate learning experiences involving functions, relationships and variables.

Trivilin and Ribeiro (2015) analyze the knowledge stated and exhibited by ten in-service teachers on the different meanings of the equal sign. Certain limitations are noted in recognizing the notions of operation and equivalence. Difficulties are also evident in determining the implications of teaching the different meanings of the equals sign in the curriculum.

Ferreira et al. (2017) identify the mathematical knowledge of 14 in-service teachers when discussing tasks with algebraic potential. The results show little familiarity with core questions of algebraic thought related to the generalization of arithmetic, such as number relationships, the properties of operations and the meanings of the equal sign. However, deficiencies are noted in identifying errors and recognizing the nature of a mathematical error.

Bernardo et al. (2017) administer a questionnaire to determine the mathematical knowledge that 60 pre-service teachers have to interpret student output in the context of an algebraic task. The results show the difficulties in assigning the semantic meaning involved in the students' solution to an equitable distribution task. Likewise, Zapatera and Callejo (2017) analyze the mathematical knowledge of 40 pre-service teachers in the context of pattern generalization, obtaining as a result a low level of knowledge, since they exhibit difficulties identifying the mathematical elements used by students, and in abstracting observed regularities to interpret the characteristics of understanding generalization.

More recently, Barboza et al. (2020) and Barboza et al. (2021) probe the mathematical knowledge of six in-service primary school teachers in relation to the meanings of the equal sign. These studies report remarkable advances in the development of the mathematical knowledge of teachers, since they begin to consider relational thinking from the resignification of the equal sign, by transiting between the operational and equivalence meanings, and subsequently to the relational meaning.

Oliveira et al. (2021) analyze the knowledge involving functional thinking of 164 teachers at the start of their training program. The results reveal a lack of successful strategies to generalize functional relationships, and problems understanding and connecting the different representations of functions (Cañadas et al., 2019; Pinto and Cañadas, 2021).

Taking into account the research that has been carried out in the field, there are significant shortcomings regarding the knowledge of pre- and in-service teachers for dealing with and teaching algebraic tasks.

3. Methodology

In accordance with our study objective, we have adopted a mixed methodological approach of the descriptive exploratory type, since it considers the systematic integration of qualitative and quantitative variables to interpret a phenomenon (Creswell, 2014); in our case, an analysis of the mathematical knowledge of pre-service primary education teachers for teaching early algebra.

3.1 Participants and context

The study participants were 76 students majoring in Primary Education in a Spanish public university who were selected through a non-probabilistic sampling of an accidental or causal nature (Fernández et al., 2014), since the selection criterion was determined by the ability to access this group.
Of the participants, 77.6% were women and 22.4% were men, and their ages ranged between 20 and 28. In relation to the participants' previous training, 75 (98.7%) graduated from high school, 6 (7.9%) completed vocational training and 5 (6.6%) completed both.
The research was conducted in 2022 during the third academic year of the five-year degree as part of the "Mathematics II" course. In this course, pre-service teachers analyze the teaching contents and strategies of the thematic blocks on measurement, space and form, relationships and change.
It should be noted that in the previous year, the participants had taken the "Mathematics I" course, where they received instruction on teaching numbers and calculation, statistics and probability.

3.2 Design and procedure

The data were obtained after administering the questionnaire called MKT-early algebra (6-12), described in Pincheira and Alsina (under review). An analysis of the reliability of the internal consistency of the instrument yielded a Cronbach's alpha of 0.73.
The instrument, proposed by Pincheira and Alsina (2021), consists of six open-answer items that consider various teaching situations that showcase the knowledge that characterizes algebra in primary education, as shown in Table 1:

Table 1.
Categories of knowledge mobilized by the items in the MKT-Early Algebra Questionnaire (6-12)

Characterization of early algebra for primary education	Questionnaire items					
	1	2	3	4	5	6
Understanding different types of relationships and patterns	x	x			x	x
Using algebraic symbols and mathematical models to represent mathematical situations			x	x		
Understanding change				x		
Use of variables			x			

The items in the questionnaire were taken and adapted from previous research that delves into core aspects of knowledge for teaching early algebra in primary education (Barboza et al., 2020; Demonty et al., 2018; Bernardo et al., 2017; Tanisli and Kose, 2013; Ferreira et al., 2017). Table 2 shows the questionnaire items.

Table 2.
Items on the MKT-Early Algebra questionnaire (6-12)

Item 1:	Item 4:

A teacher was analyzing the answers of the students in her 4th grade class after giving them the following problem:

Arturo and Cecilia, who are siblings, got the same amount of money from their aunt. Arturo decided to save 20 euros in his piggy bank and save part of the money to take to school. Cecilia put 16 euros in her piggy bank and used the rest to buy some stickers.
Since both children got the same amount of money, we can write the equation:

20 + ___ = 16 + ___

Determine how much each child used for their expenses. Explain how you arrived at the result.

Carlos, Joaquín and Cristina:
"Arturo took €10 to school and Cecilia set aside €14 to buy her stickers.
We think that, if they got the same amount, then Cecilia spent 4 euros more than her brother and we think she took €10, because you can only take a maximum of 10 euros to school. So we get 20 + 10 = 30 and 16 + 14 = 30"

Santiago, Raquel and Carolina:
"Arturo took €36 to school and Cecilia spent the same €36 on stickers, because they had the same amount. We arrived at this answer by adding the numbers that are given in the statement: 20+16"

Paula, Mateo and Mauricio:
"Arturo took 5 euros to school and his sister spent 9 euros on stickers. We think that, if they both got the same amount and he put €4 more in his piggy bank, then Cecilia had €5 plus €4 to spend on stickers. We get this answer by setting 20 + 5 = 16 + 9, because Arturo saved €4 more than his sister"

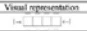
Questions:
a. What answer(s) should the teacher accept as correct? Why?
b. What difficulties do the students in the course exhibit when solving the problem?
c. What teaching strategies would you use to help those students who were unable to solve the task?
d. What advanced concepts from the school curriculum are relevant to the content addressed in the task?

Item 2:

A teacher poses the following problem to her 6th graders:

Esteban's parents are throwing a birthday party for him. They get in touch with Mr. Gomez, the caterer, who only has a few small square tables. He suggests putting them side by side to form a long table where all the guests can sit, as shown below:

Determine a rule that can be used to find the number of chairs for any number of tables. Some examples of the rule that the students came up with are as follows:

Student	Visual representation	Rule suggested by the students
Student 1		Number of chairs = (number of tables x 2) + 2
Student 2		Number of chairs = (number of tables - 2) x 2 + 6
Student 3		Every time you add a table, you have 2 more chairs: Number of chairs = Number of tables + 2

Questions:
a. What answer(s) should the teacher accept as correct? Why?
b. What mathematical content and/or properties should students use to answer the task correctly?
c. What difficulties might affect the students who responded incorrectly?
d. What teaching strategies would you use to help those students who were unable to solve the task?

Item 3:

A teacher explains the following situation to his 5th graders:

Carlitos is a child who likes sweets. He has a box with 28 candies inside. Every day, he eats twice as many sweets as the day before. In three days, Carlitos has eaten all the sweets.

He then asks his students: How many candies did Carlitos eat each day?
Two students describe how they solved the problem.

Teresa:
"The first day Carlitos eats some of the candies, and we don't know how many... [Teresa draws a square], the second day he eats twice as many as the first, so two servings [draws two squares] ... the third day twice as many as the second, so four servings [draws four squares]. Now the twenty-eight candies are divided among the seven servings I identified, and I knew the value of each serving..."

Lucas:
"I took the candies he had in the box and divided them by seven. The result is 4, which is how many candies he eats every day. The first day, then, he eats 4, the second day he eats 8, and the third day he eats 16."

Questions:
a. Solve the problem presented by the teacher. Explain your answer.
b. Explain whether or not you consider the pupils' work product to be mathematically correct. Justify the appropriateness or insufficiency of the mathematical rationale shown by the students.
c. Considering the primary school curriculum, what might be the goal of the task proposed to the students?

Over the course of a class, the following situation is discussed:

Pedro is 4 cm taller than Clara. If Clara is "n" cm tall, how tall is Pedro?

Below is the discussion among three students:

Luis: Pedro is 4n tall
Pilar: No. Pedro is 104 cm tall.
Maria: I think Peter's height is x+4

Questions:
a. Determine Pedro's height. Explain your answer.
b. Describe the potential difficulties that led the students to answer incorrectly.
c. What teaching strategies would you use to help those students who were unable to solve the problem correctly?
d. Judging by the primary education school curriculum, what grade do you think this problem is appropriate for? Explain your answer.

Item 5:

A teacher asks his students to complete the following table, giving them the following instructions:
"Mark the following numerical expressions as true or false. Explain your answer"

	T	F	Explanation
24 + 37 = 37 + 24			
46 + 27 − 27 = 27			
0 x 1 = 0			
□ + 0 = □			

Some of the students' answers were as follows:

	T	F	Explanation
24 + 37 = 37 + 24	x		Because it's the same result, only the order changed

	T	F	Explanation
46 + 27 − 27 = 27		x	Because 46+27= makes 79 and 79 minus 27 makes 46

	T	F	Explanation
24 + 37 = 37 + 24		x	Calculations are not facts, the result never involves multiplication. So it's wrong!

	T	F	Explanation
46 + 27 − 27 = 27		x	It is incorrect because 27-27 gives 0, so there's 46 left over

	T	F	Explanation
0 x 1 = 0	x		Any number x 1 is equal to the number

	T	F	Explanation
□ + 0 = □	x		The square is zero, so the result is the square.

Questions:
a. What mathematical content and/or properties should students use to answer the task correctly?
b. Describe the potential difficulties that led the students to answer incorrectly.
c. What teaching strategies would you use as a teacher to guide those students who answered the task incorrectly?
d. Judging by the Primary Education school curriculum, what grade do you think this problem is appropriate for? Explain your answer.

Item 6:

A teacher writes on the board 3+2+2=5+2=7 and asks his 3rd graders to analyze whether the numerical expression is right or wrong.

Two students note the following:
"Carla explained that the expression is wrong, since not all the numbers were added together, so the final result would give 21, reading 3+2+2+5+2+7=21.
Rodrigo said the expression was right and seven was the answer".

Questions:
a. What mathematical content and/or properties should students use to answer the task correctly?
b. Describe the potential difficulties that led the students to answer incorrectly.
c. What teaching strategies would you use to help the student realize and correct her mistake? Explain your answer.

These items let us investigate the mathematical knowledge involved in teaching early algebra in primary education, giving rise to a total of twenty-two questions that are based on the MKT model (Ball et al., 2008), allowing us to research the domains and subdomains that comprise it (Table 3).

Table 3.
Domains and subdomains of the MKT model evaluated by the items that comprise the questionnaire

Questionnaire items		Content knowledge			Pedagogical knowledge of the content		
		CCK	SCK	HCK	KCS	KCT	KCC
1	a. What answer(s) should the teacher accept as correct? Why?	x					
	b. What difficulties do the students in the course exhibit when solving the problem?				x		
	c. What teaching strategies would you use to help those students who were unable to solve the task?					x	
	d. What advanced concepts from the school curriculum are relevant to the content addressed in the task?			x			
2	a. What answer(s) should the teacher accept as correct? Why?	x					
	b. What mathematical content and/or properties should students use to answer the task correctly?		x				
	c. What difficulties might affect the students who responded incorrectly?				x		
	d. What teaching strategies would you use to help those students who were unable to solve the task?					x	
3	a. Solve the problem presented by the teacher. Explain your answer.	x					
	b. Explain whether or not you consider the pupils' work product to be mathematically correct. Justify the appropriateness or insufficiency of the mathematical rationale shown by the students.		x				
	c. Considering the primary school curriculum, what might be the goal of the task proposed to the students?						x
4	a. Determine Pedro's height. Explain your answer.	x					
	b. Describe the potential difficulties that led the students to answer incorrectly.				x		
	c. What teaching strategies would you use to help those students who were unable to solve the problem correctly?					x	
	d. Judging by the primary education school curriculum, what grade do you think this problem is appropriate for? Explain your answer.						x
5	a. What mathematical content and/or properties should students use to answer the task correctly?		x				
	b. Describe the potential difficulties that led the students to answer incorrectly.				x		
	c. What teaching strategies would you use as a teacher to guide those students who answered the task incorrectly?					x	

	d. Judging by the primary education school curriculum, what grade do you think this problem is appropriate for? Explain your answer.						x
6	a. What mathematical content and/or properties should students use to answer the task correctly?		x				
	b. Describe the potential difficulties that led the students to answer incorrectly.				x		
	c. What teaching strategies would you use to help the student realize and correct her mistake? Explain your answer.					x	

CCK: Common Content Knowledge; SCK: Specialized Content Knowledge; HCK: Horizon Content Knowledge; KCS: Knowledge of Content and Students; KCT: Knowledge of Content and Teaching; KCC: Knowledge of Content and Curriculum.

The questionnaire was administered during a 90-minute session of the participants' training process. The application relied on the permission and collaboration of the professor in charge of the "Mathematics II" course. To answer the questionnaire, the pre-service primary education teachers voluntarily agreed after signing an informed consent that guaranteed the confidentiality of the answers given and ensured that their answers would not affect their grade in the course.

3.3 Analysis of the data

Out study focuses on analyzing the answers of the pre-service primary school teachers on the MKT-Early Algebra Questionnaire (6-12). The analysis of the data considered quantitative and qualitative aspects. From a quantitative perspective, the variable "degree of correctness of the answers" was utilized by assigning a score of 2 if the answer is correct, 1 if it is partially correct and 0 if the answer is incorrect. These scores were assigned based on a protocol that was submitted to the judgment of experts in didactics of mathematics and early algebra, which agreed on criteria based on the relevance of the answers. As a result, the maximum score possible on the questionnaire was 44 points, and the minimum was 0.
Then, from a qualitative perspective, the answers were categorized using the content analysis technique (Krippendorff, 2013). This made it possible to draw comparisons between the data using different categories, such as "types of errors in the answers", "justifications or arguments presented by the pre-service teachers", "problems finding the right answer", and more.
To ensure the reliability of the coding process, the answers to the questionnaire were successively reviewed in a cyclical and deductive manner (Bisquerra, 2009). Then, a triangulation was carried out based on continuous reviews of the responses, ending with a discussion by the authors of the disagreements involving the coding process until a consensus was reached.

4. Results

In keeping with the purposes of the study, we now describe the data obtained from a general analysis of the total scores on the questionnaire. We will then present an analysis of the results in relation to the domains and subdomains of mathematical knowledge for teaching.

4.1 Total questionnaire score

To analyze the total scores on the questionnaire, the answers of the 76 pre-service primary education teachers were categorized by the degree of correctness. The scores ranged from 9 to 35 points, with no maximum scores, meaning no pre-service teacher answered all the questions on the questionnaire correctly.
The average score was 24 points, slightly above the theoretical average of 22 points, yielding a success rate of 54.5%, with a standard deviation of 5.6 points.
Figure 1 shows that the median score is the same as the average score (24 points), meaning the data distribution is symmetrical. The total scores received by the pre-service primary school teachers on the questionnaire were were between 20 and 28 points.
The whiskers are slightly different, with a longer lower whisker than upper whisker. The ends of the distribution are thus slightly different, meaning there are low scores that deviate from the bulk of the data. Finally, we note there are no outliers; that is, there are no extreme scores.

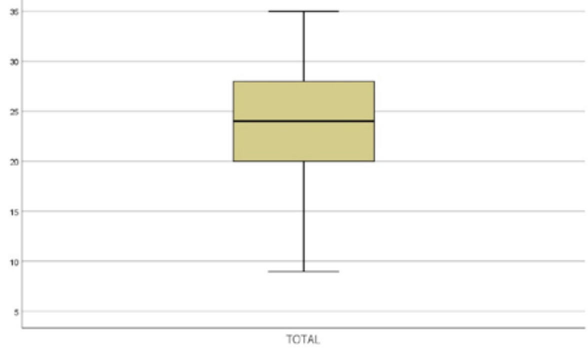


Figure 1. Distribution of total scores and median score on the questionnaire

4.2 Comparison of the domains and subdomain of mathematical knowledge for teaching early algebra

To establish a comparison between the subdomains of mathematical knowledge to teach early algebra, the total scores for the questionnaire were recoded based on the type of knowledge as per a normalized scale of 0 to 100, since the number of items differs for each subdomain.
Figure 2 shows the scores of the pre-service primary school teachers in the different subdomains of knowledge. In general, we see that the subdomain of common content knowledge received a higher score compared to the other subdomains of knowledge, with over 50% of the participants exceeding a normalized score of 87.5%. The subdomain of knowledge at the mathematical horizon received the lowest score on the questionnaire.

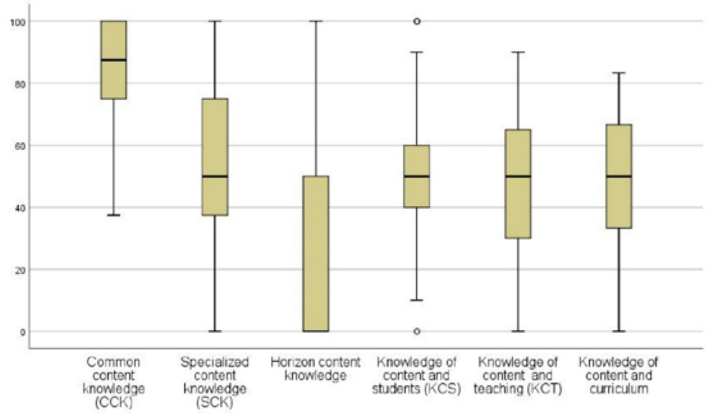


Figure 2. Distribution of normalized scores by subdomains of mathematical knowledge

If we consider more specifically the domain of subject knowledge, we notice that the subdomain of common knowledge achieves a maximum normalized score of 100%, while the high normalized scores exhibited by the knowledge at the mathematical horizon and specialized knowledge are further removed from the bulk of the data. In the case of the latter, the median is closer to the first quartile, and therefore the normalized scores are concentrated in the lower part of the box, between 37.5% and 51.2%.
Elsewhere, regarding the pedagogical knowledge of the content, the normalized scores of the subdomain of the knowledge of content and students show a symmetric distribution of the normalized scores. In addition, there are two outliers, at the upper and lower ends of the box, with minimum normalized scores that reach the minimum and maximum score, respectively. Finally, for the subdomains of knowledge of content, teaching and curriculum, the maximum normalized scores achieved by the pre-service teachers do not exceed 90% and 83.3%, respectively. However, knowledge of content and teaching exhibits normalized scores that are slightly clustered at the top of the box, while the normalized scores for knowledge of the curriculum are concentrated in the center of the box, at around 50%.
As seen in Figure 2, there are differences between the scores obtained for the different subdomains of mathematical knowledge. To delve into these differences and determine if they are statistically significant, pairs of subdomains were compared by applying a non-parametric sign statistic for paired samples with a 95% confidence level, as shown in Table 4.

Table 4.
Wilcoxon Signed-Rank test of the scores obtained in relation to the different subdomains of the MKT model

	Common content knowledge	Specialized content knowledge	Mathematical horizon knowledge	Knowledge of content and students	Knowledge of content and teaching
Specialized content knowledge	0.000	-	-	-	-

Knowledge at the mathematical horizon	0.000	0.000	-	-	-
Knowledge of content and students	0.000	0.720	0.000	-	-
Knowledge of content and teaching	0.000	0.160	0.000	0.45	-
Knowledge of the curriculum	0.000	0.812	0.000	0.724	1

The results of the Wilcoxon rank tests applied to the different subdomains of knowledge are mostly <0.05. Therefore, the different subdomains of knowledge that were compared to one another obtain significant differences in their scores.
However, the comparison between specialized content knowledge and the subdomains of knowledge of content and students, knowledge of content and teaching, and knowledge of the curriculum, show similar values. The same thing is reflected between the knowledge of content and students and the subdomains of knowledge of content and teaching, and knowledge of the curriculum, as well as knowledge of the curriculum and knowledge of content and teaching.

4.2.1 Knowledge of content

Common content knowledge
To evaluate the common content knowledge, we focus on the answers that the pre-service teachers gave when solving algebraic tasks that require understanding different types of arithmetic relationships, figurative patterns, change and the use of symbols and variables to represent mathematical situations.
To analyze this knowledge, four situations were presented with potential answers from primary education students and questions of the type: a) What answers should the teacher accept as correct? Why? and, b) Solve the problem posed by the teacher. Explain your answer. These questions are posed in items 1a, 2a, 3a and 4a. Figure 3 shows the degree of correctness of the answers provided for these items.

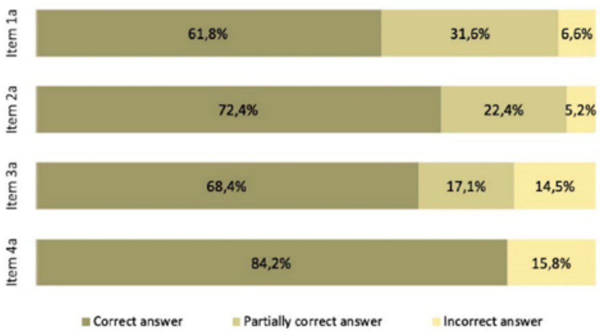


Figure 3. Distribution of answers for the common content knowledge by degree of correctness

The percentage of correct answers in the common content knowledge block exceeds 61.8%. An analysis of the answers to item 1a shows that over 50% of the teachers understood the meaning of the equal sign as an operator and expression of equivalence, when they recognized the answers by Carlos, Joaquín and Cristina, and Paula, Mateo and Mauricio as correct. The incorrect answers (31.6%) were attributed to those teachers who did not provide adequate justification as to why they accepted these answers as correct.
Regarding item 2a, 72.4% of the pre-service teachers identified as correct the answers of students 1 and 2, since they were able to determine a general rule to represent the problem based on the dependent variable "*number of chairs*" and the independent variable "*number of tables*"; while 22.4% did not justify their response or gave an inadequate justification.
In item 3a, more than 60% of the pre-service teachers solved the problem correctly, stating that on the first, second and third day, the results were 4, 8 and 16 candies, respectively. An analysis of the arguments reveals the different strategies used by the pre-service teachers to solve the situation correctly, most notably trial and error, the use of a first-degree equation and the representation of the situation in a graphic form, such as boxes, that adhere to a certain structure to distribute the candies. The pre-service teachers who gave a partial answer determined the number of candies, but did not provide any justification for solving the problem, or their argument was inadequate.
In item 4a, 84.2% of the pre-service teachers correctly identified Pedro's height as "n +4", showing that "n" represents Clara's height, while 15.8% failed to identify the indicated height.

Specialized content knowledge

The set of items focused on evaluating the specialized content knowledge consider how the pre-service teachers reflect on the contents and properties that must be mobilized to solve an algebraic task, as well as the analysis and justification of mathematical situations.
To analyze this knowledge, the questionnaire proposes four items (2b, 3b, 5d and 6a) that delve into questions of the type: What content and/or mathematical properties should students use to correctly answer the task? Explain if you think the output of the students is mathematically correct or not. Justify the appropriateness or insufficiency of the

mathematical rationale shown by the students. Figure 4 shows the degree of correctness of the answers provided for these items.

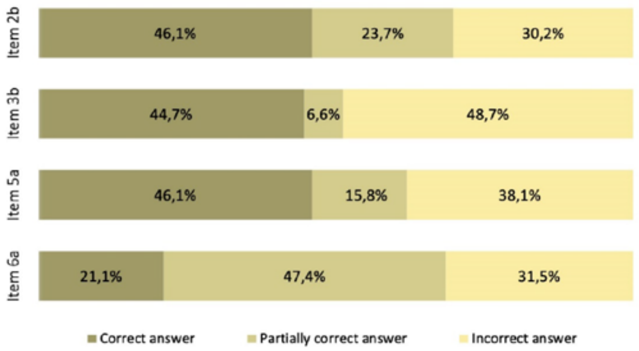


Figure 4. Distribution of answers for the specialized content knowledge by degree of correctness

The percentage of right answers linked to specialized content knowledge was below 46.1%. Note that items 2b and 5a involving the mathematical contents or properties associated with generalizing relationships through algebraic notation and understanding different types of relationships between numbers, and the construction of generalizations about their properties, respectively, exhibit a higher percentage of correct answers. They are followed by item 3b, which involves assessing the mathematical rationale expressed in a mathematical situation. Meanwhile, item 6a, related to the mathematical content on the meanings of the equal sign, exhibits greater limitations since the percentage of right answers was less than 21.1.

An analysis of the arguments presented in item 2b shows that the majority of teachers recognized that the content involved in the teaching situation is related to discovering the rule of succession or expressing the generalization of succession. However, a high percentage of the pre-service teachers (30.2%) failed to identify the mathematical content associated with the teaching situation, and 23.7% very generically identified expressions with letters and mathematical sequences as content.

In item 3b, the arguments presented show that the majority of pre-service teachers (48.7%) failed to determine the student outputs that were mathematically correct. Only 44.7% considered Teresa's output as mathematically correct, stating that she distributed the candies according to the stipulated conditions and with help from a pictorial representation, while Lucas's output considers an intuitive resolution, without justifying the answer. 6.6% of the pre-service teachers explained which outputs they considered mathematically correct; however, they did not justify the adequacy or insufficiency of the mathematical rationale shown.

In item 5a, 46.1% of the pre-service teachers pointed out that the mathematical contents are related to the properties of the operations; more specifically, they mention the commutative property, associative property, the identity element of multiplication and the identity element of addition. 15.8% were only able to identify one of these properties, while 38.1% failed to identify the mathematical content or properties present in the task.

Finally, an analysis of the arguments in item 6a shows that a low percentage of the pre-service teachers (21.1%) identified the equality relationship, equivalence relationship and associative property contents. The majority of the pre-service teachers (47.4%) identified only one content, while a high percentage (31.5%) failed to identify the contents or properties present in the task.

Knowledge at the mathematical horizon

Item 1d enabled us to evaluate the knowledge at the mathematical horizon. To analyze this knowledge, we focused on the links that teachers establish between the mathematical contents involved in the teaching situation and others proposed in the extension of the curriculum, through the question: What advanced concepts from the school curriculum are relevant to the content addressed in the task?

The teaching situation requires exploring the different meanings of the equal sign, such as its operational meaning, equivalence meaning, and relational meaning. Therefore, the participants were expected to relate the content presented in the task with the notion of first-degree equations and functions.

The results show that item 1d was one of the most difficult on the questionnaire, since only 9 pre-service teachers (11.8%) answered it correctly; 56 of them (73.7%) answered incorrectly, offering nonsensical arguments; and only 11(14.5%) gave a partially correct answer, stating that the content presented in the task is related to working with equations and problem-solving.

4.2.2 Pedagogical knowledge of the content

Knowledge of content and students

To assess the knowledge of content and students, the pre-service teachers were asked to anticipate students' thinking in relation to errors or difficulties they might have in dealing with a given algebraic task.

The questions asked that allow us to analyze this knowledge are: What difficulties do the students in the course exhibit when solving the problem? What difficulties could the students who answered it incorrectly be facing? Describe the possible difficulties that led the students to answer incorrectly. These questions are raised in items 1b, 2c, 4b and 5b of the questionnaire. Figure 5 shows the degree of correctness of the answers provided for these items.

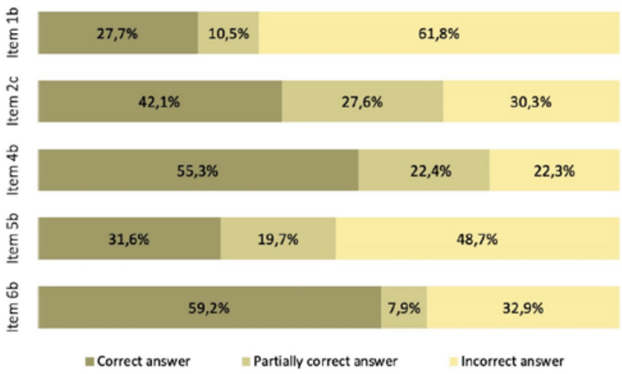


Figure 5. Distribution of answers for the knowledge of content and students by degree of correctness

The results show a low mastery of knowledge of content and students, since the percentage of right answers was below 55.3% for all the items.

Item 1b addresses the possible difficulties that fourth-graders experience when solving a problem involving the meanings of the equal sign. This item shows a high percentage of incorrect answers (61.8%), most of which mention that the difficulties presented by the students are not having enough data to solve the problem, the difficulty represented by the problem statement, and understanding the statement. Only 27.7% of the pre-service teachers responded correctly, stating that Santiago, Raquel and Carolina's answer shows a lack of understanding the equal sign as equivalence, making it difficult for the students to realize that the problem has several possible solutions. The remaining 10.5% mentioned in a very general way that the possible difficulties have to do with the understanding of the equal sign.

The arguments presented in item 2c show that 42.1% of the pre-service teachers identified that the difficulty faced by the student who answered incorrectly has to do with the representation of generalization through an algebraic expression. The arguments presented in the partially correct answers (27.6%) mention that the difficulties are centered around finding an algebraic expression or understanding the series. A high percentage of the pre-service teachers (30.3%) failed to identify the difficulties.

In item 4b, 55.3% of the pre-service teachers stated that the difficulties exhibited by the students were related to the use and interpretation of variables to represent an unknown amount, such as Pedro's height; more specifically, in the case of Luis, he interpreted the expression "4 cm higher than Clara" as "4 times higher than Clara", Pilar assumed a height that was not given, and María used another variable to represent Pedro's height. 22.4% of the participants mentioned in passing that the difficulties of the students have to do with creating an algebraic expression based on a problem, while 22.3% failed to identify the difficulties the students experienced solving the task.

The arguments presented in item 5b show that 48.7% of the participants failed to describe the possible difficulties that led students to answer incorrectly, while only 31.6% of the pre-service teachers identified as a problem the lack of knowledge of equivalence expressions and the properties of operations.

Finally, item 6b had a high percentage of right answers (59.2%) that show that the possible difficulties that led students to answer incorrectly are related to the interpretation of the equal sign; while 7.9% of the pre-service teachers only mentioned the difficulty of the addition operation, and 32.9% failed to identify any difficulties.

Knowledge of content and teaching

To respond to the set of items focused on evaluating the knowledge of content and teaching, the pre-service teachers were tested on the use of different methods and procedures that are involved in the teaching practice.
This knowledge is reflected in five items on the questionnaire (1c, 2d, 4c, 5c and 6c), which consider questions such as: What teaching strategies would you use to help the students who were unable to solve the task? or, What teaching strategies would you use as a teacher to guide those students who answered the task incorrectly?
The degree of correctness of the answers given for these items is shown in Figure 6.

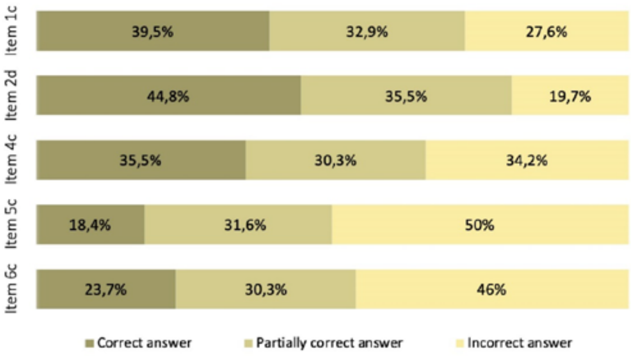


Figure 6. Distribution of answers for the knowledge of content and teaching by degree of correctness

In general, the results show that the percentage of correct answers is low, since they are below 44.8% in all the items proposed. There is a high percentage of partially correct answers, where the pre-service teachers mention teaching strategies and resources that are not entirely conclusive, such as the use of manipulatives, since they do not explain how they would implement them in the classroom and why they are appropriate.
For the arguments given in the answers to item 1c, which involves understanding the meaning of the equal sign as an operator and as an expression of equivalence, 39.5% of the pre-service teachers were able to describe possible teaching strategies relevant to the task, including the use of manipulatives, such as coins, to analyze different cases where equality applies. A high percentage (32.9%) mentioned strategies on a very general level, but they were inconclusive; more specifically, they mentioned working with manipulatives, using a diagram to represent the problem presented in the task and analyzing the concept of equivalence in depth, without specifying the elements and concepts proposed. The remaining 27.6% suggested meaningless strategies for dealing with the task.
Regarding item 2d, an analysis of the correct answers revealed that 44.8% of the participants proposed adequate teaching strategies to help the students who were unable to solve the

problem, which involves determining a general rule from a given sequence. The main idea proposed was the use of a table of values to describe the relationship between the "number of chairs and "number of tables" variables, representing the situation live in the classroom with chairs and tables, making predictions and establishing conjectures, and checking random values for different cases once the general rule is established. As with the previous item, a considerable percentage of responses (35.5%) referred to strategies that are not entirely conclusive, mentioning, for example, the use of manipulatives to understand the sequence without detailing what materials to use. The remaining 19.7% did not mention any adequate teaching strategies.

Moving on, an analysis of the arguments presented in item 4c revealed that 35.4% of the pre-service teachers proposed appropriate teaching strategies to help those students who did not understand the notion of variable to represent an unknown constant. They included observing the difference between the heights of the students and proposing conjectures, as well as asking guided questions that prompt reflection, such as, what does it mean for Pedro to be 4 cm taller than Clara? How can we represent this idea? Does "4cm taller" mean the same as "4*n*"? What does the letter "*n*" represent in the expression provided? By contrast, 34.2% of the pre-service teachers suggested inadequate strategies to help those students who were unable to solve the task, while 30.4% offered inconclusive strategies, such as giving other examples, helping them visually by using diagrams and manipulatives, without specifying the types of examples or diagrams, or what the most appropriate manipulative would be for this situation.

For item 5c, the task that deals with the development of generalized arithmetic, 50% of the participants did not provide adequate strategies to guide those students who responded incorrectly, being the item that posed the greatest difficulty in relation to knowledge of content and teaching. Only 18.4% of the pre-service teachers gave adequate strategies, including analyzing the content of the properties of the operations using manipulatives, such as scales, for example. The partially correct answers (31.6%) gave inconclusive strategies, such as providing simpler examples, analyzing numerical sentences with the whole class, and the use of manipulatives was again proposed, without specifying what kind.

Finally, as in item 5c, item 6c, which focused on proposing strategies to shift from the operational meaning of the equal sign to its equivalence meaning, resulted in a high percentage of incorrect answers (46%) and a low percentage of correct answers (23.7%). The latter are directly linked to the use of manipulatives, such as Cuisenaire strips and Multilink cubes, to explain number decompositions and analyze the associative property. The remaining 30.3% of the arguments were partially correct, since they proposed generic strategies such as practicing numerical equality through meaningful activities.

Knowledge of the curriculum

The set of items focused on evaluating the knowledge of the curriculum delves into central aspects of the primary school curriculum that pertain to a certain teaching situation.

To analyze the knowledge of the curriculum, questions were posed of the type: Judging by the current primary school education curriculum, what grade do you think this problem is appropriate for? Considering the primary school curriculum, what might be the goal of the task proposed to the students? These questions are presented in items 3c, 4d and 5d. To

answer the question, the teachers were expected to bring to bear their knowledge of the contents proposed in the curriculum and its intended purpose.
The degree of correctness of the answers given for these items is shown in Figure 7.

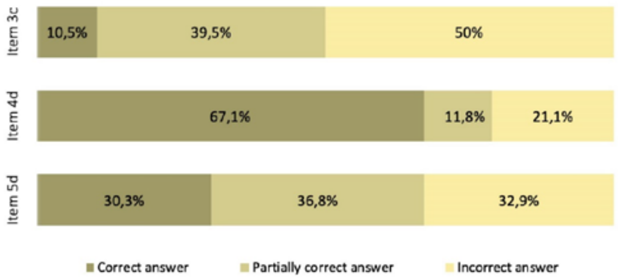


Figure 7. Distribution of answers for knowledge of the curriculum by degree of correctness

The results show certain limitations in the knowledge of the curriculum, with the pre-service teachers exhibiting difficulties in item 3c to interpret the intentionality of the teaching situation. Only 10.5% said that the purpose of the task has to do with establishing relationships of equality by determining unknown variables; 39.5% stated very generically that the purpose of the task is problem solving; and 50% failed to establish the objective of the teaching situation.
Regarding item 4d, a high percentage of the pre-service teachers (67.1%) stated that the teaching situation is relevant for 5th and 6th grades, adequately justifying the relevance of the variables; 11.8% gave a partially correct answer, since they adequately identified the school level, but did not justify their response; and 21.1% failed to identify the school level to which the teaching situation is relevant.
Finally, the answers given for item 5d show that 30.3% of the pre-service teachers considered the problem appropriate for 3rd and 4th grades, justifying the adequate introduction of the properties of the operations at this level, while 36.8% identified the level, but did not justify their response. Likewise, a high percentage of the pre-service teachers (32.9%) failed to identify the appropriate school level at which this teaching situation may be presented.

5. Final considerations

In this study, we analyzed partial aspects of the mathematical knowledge of 76 pre-service primary education teachers to teach early algebra, from the perspective of the MKT model (Ball et al., 2008). We did this by administering the MKT-Early Algebra questionnaire (6-12), designed and previously validated (Pincheira and Alsina, in review), and reviewing the answers of the pre-service teachers to the different questions that comprise it.
The study delved into the domains and subdomains of the MKT model, revealing that the mathematical knowledge of the pre-service primary school teachers to teach algebra is insufficient, given the average percentage of correct answers (42.8%).
In relation to the domain of knowledge of the subject, the interpretation of the results shows that the subdomain of common content knowledge (CCK) is better situated in comparison to the other subdomains of knowledge. For example, the pre-service teachers identified the

general rule to establish a relationship between variables, established relationships with numerical expressions, solved problems involving the meanings of the equal sign, and so on. This agrees with other studies (e.g., Ferreira et al., 2017; Barboza et al., 2020, 2021; Trivilin and Ribeiro, 2015; Zapatera and Callejo, 2017) where teachers successfully answered tasks involving the different meanings of the equal sign, pattern generalization and the use of variables.

The specialized content knowledge (SCK) reveals limitations, since the pre-service primary school teachers did not correctly identify mathematical contents and properties in tasks involving relationships between numbers and the construction of generalizations about their properties, the use of variables and relationships between covariant quantities. Along these lines, other studies identify similar results regarding specialized knowledge, where the selection of examples presented by the teachers to describe relationships that lead to generalization are not always successful (McAuliffe and Lubben, 2013), difficulties assigning the semantic meaning of division required in the solution of an algebraic task that involves an equitable distribution (Bernardo et al., 2018), the operational, equivalence and relational meaning of the equal sign in a mathematical expression (Ferreira et al., 2017; Barboza et al., 2020; 2021; Trivilin and Ribeiro, 2015), and the identification of recursive and explicit generalization strategies in the development of functional thinking (Wilkie, 2014, 2016).

As for the knowledge at the mathematical horizon, it exhibits major limitations since the pre-service teachers did not establish connections between the contents of a task based on the generalization of arithmetic that explores the different meanings of the equal sign - operational, relational and as an expression of equivalence - with other contents in the school curriculum. The study by Barboza et al. (2021) analyzes this same area through the relationships established by teachers in tasks that involve relational thinking, finding little connection with the work required in subsequent years.

Limitations are also evident in the mastery of pedagogical knowledge of the content. In the case of knowledge of content and students (KCS), we found that the teachers had problems anticipating student errors in arithmetic generalization tasks, finding similarities with the studies of Demonty et al. (2018) and Barboza et al. (2020) and other studies that delve into possible student errors related to functional relationships (Wilkie, 2014, 2016). Likewise, in the knowledge of content and teaching (KCT), we found that the strategies proposed by the educators to teach an algebraic task were not entirely conclusive, since they exhibited difficulties determining implications for learning number relationships and the properties of operations involving the generalization of arithmetic, as well as generalization tasks that employ covariable relationships focused on the development of functional thinking. This last point shows similarities with the results of Wilkie's (2014) study with in-service primary education teachers, which reveals the difficulties of helping students generalize the relationship between the input and output numbers of a function machine.

Regarding the knowledge of the curriculum, we observed that the pre-service primary education teachers were sometimes limited in their ability to interpret the intentionality of a teaching situation and link it with the guidelines proposed in the curriculum, as in the studies by Trivilin and Ribeiro (2015) and Wilkie (2014).

Notably, the study relies on the MKT-early algebra questionnaire (6-12) to analyze all the subdomains of the MKT model for teaching early algebra, offering a broader overview than previous studies.

According to Strand and Mills (2014), teachers who introduce early algebra teaching, such as primary school teachers, are responsible for facilitating their students' ability to build their algebraic understanding. From this perspective, on the one hand, the results of the research favor a global reflection on the set of mathematical and pedagogical knowledge that pre-service primary school teachers must develop to teach early algebra; and, on the other hand, it encourages a discussion of what characteristics teacher training should consider to promote the mathematical knowledge that is demanded to teach early algebra in primary education.

We accept that the teaching of early algebra in primary education represents a restructuring of teaching practice (Hohensee, 2017), which thus implies changes in teacher training. Given this, it is necessary to offer training programs to primary education teachers that focus on the following areas of action: a) subjects designed to analyze algebra in depth as a mathematical object, as well as its didactics. To achieve this, we believe it necessary to incorporate Blanton's (2008) guidelines on how to structure the instruction of early algebra in the primary education classroom through four elements: represent (teachers must provide multiple ways for students to systematically represent algebraic situations); ask (pose questions that encourage students to think algebraically); listen (this involves catering to and developing student thinking); and generalize (that is, help students to develop and justify their own generalizations). Moreover, professional training tasks are needed based on teaching practice in relation to the different algebraic contents that are required to be taught in primary education, considering the general guidelines on the training of primary education teachers (Lui and Bonner, 2016), and those specific to the teaching of this content block (Alsina, 2019). These professional tasks should consider the design and implementation of early algebraic tasks focused on the ability to make and express generalizations (Kaput, 2008), as well as on presenting algebraic ideas, determining an example to express a specific algebraic approach, evaluating explanations of an algebraic nature, and asking productive mathematical questions that promote the development of algebraic thinking.

In conclusion, the analysis of our results has made it possible to identify the mathematical knowledge that must be urgently addressed in the initial training of teachers. In this regard, one limitation of the study was our evaluation of partial and initial aspects of the different subdomains of the MKT model, focusing only on the essential aspects that characterize each subdomain for the different items that comprise the questionnaire.

In the future, therefore, we will endeavor to design further inquiries to analyze the actions that pre-service teachers employ in the primary education classroom to teach early algebra through their pedagogical practices, and to craft interviews that allow us to determine their mathematical and pedagogical knowledge for teaching algebra to young schoolchildren.

Acknowledgments

This research was supported by the National Agency for Research and Development of the Government of Chile (ANID) through a PhD scholarship abroad, Folio No. 72200447, and the Department of Subject-Specific Didactics of the University of Girona.

References

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barboza, L., Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2021). Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. *Zetetike, 29,* 1-25. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8656716

Barboza, L., Ribeiro, A., & Pazuch, V. (2020). Primary School Teacher's Professional Learning: Exploring Different Meanings of the Equals Signal. *Acta Scientiae, 22*(4), 71-97. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5418

Bernardo, R. D., Carotenuto, G., Mellone, M., y Ribeiro, M. (2017). Prospective Teachers' Interpretative Knowledge on Early Algebra. *Cadernos de Pesquisa, 24*(esp.), 208-222. https://doi.org/10.18764/2178-2229.v24n.especialp208-222

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M., y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer.

Blömeke, S., Hoth, J., Döhrmann, M., Busse, A., Kaiser, G. & König, J. (2015). Teacher change during induction: Development of beginning primary teachers' knowledge, beliefs and performance. *International Journal of Science and Mathematics Education 13*(2), 287-308. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9619-4.

Cai, J., Ng S. F., & Moyer, J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. In J. Cai, & E., Knuth (Eds.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* (pp. 25-41). Springer.

Cañadas, M.C., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development, 42*(3), 469–478. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569

Castro, W. F. (2011). Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada]. http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf

Creswell, J. W. (2014). Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches. *Research design Qualitative quantitative and mixed methods approaches* (4ª edition). Sage Publications.

Demonty, I., Vlassis, J., & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 99,* 1–19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Fernández, C., Baptista, P., y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Ferreira, M. C. N., Ribeiro, M., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. *Zetetiké*, *25*(3), 496-514. https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648585

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education 39,* 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*, 139-151.

Kim, D., & Kim, Y. (2022). Interview study on preservice teachers' knowledge for teaching early algebra. *Journal of Educational Research in Mathematics, 32*(3), 287-308. https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.287

Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology* (3ª edition). Sage Publications.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(3), 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Lui, A., & Bonner, S. (2016). Preservice and inservice teacher's knowledge, beliefs, and instructional planning in primary school mathematics. *Teaching and teacher education, 56*, 1-13.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2009). The analysis of classroom-based processes as a key task in teacher training for the approach to early algebra. In B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 235–262). Springer.

McAuliffe, S., & Lubben, F. (2013). Perspectives on pre-service teacher knowledge for teaching early algebra. *Perspectives in Education*, *31*(3), 155-169.

Mejías, C. (2019). *Evaluación del los Conocimiento para la Enseñanza del Álgebra en Profesores en Ejercicio de Educación Primaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Girona]. https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/17137

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six*. Ministry of Education Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Oliveira, H., Polo-Blanco, I., & Henriques, A. (2021). Exploring prospective elementary mathematics teachers' knowledge: a focus on functional thinking. *Journal on Mathematics Education*, *12*(2), 257-278.

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., & Alsina (en revisión). Evaluación del conocimiento matemático para enseñar álgebra temprana en educación primaria.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Radford, L. (2011). Grade 2 students' no-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-320). Springer.

Santagata, R., & Lee, J. (2021). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: a study of novice elementary school teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 33-60. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09447-y

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M., & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*. National Council of Teachers of Mathematics.

Strand, K., & Mills, B. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Algebra. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 385-432. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol11/iss2/8

Tanisli, D., & Kose, N. Y. (2013). Pre-Service Mathematic Teachers' Knowledge of Students about the Algebraic Concepts. *Australian Journal of Teacher Education, 38*(2), 1-18. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2013v38n2.1

Trivilin, L. R., & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 38-59.

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 397-428.

Zapatera, A., & Callejo, M. L. (2017). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educación, 24*(1), 35-38.

Dear Mrs Pincheira Hauck,

The PDF for your manuscript, "Mathematical knowledge of primary school teachers for teaching early algebra" is ready for viewing.

In order to formally submit your manuscript to the journal, you must approve the PDF.

Please access the journal's Editorial Manager site.

Your username is: npincheirah22
If you forgot your password, you can click the 'Send Login Details' link on the EM Login page at
https://www.editorialmanager.com/jmte/

Click "Author Login".

In your main menu, you will see there is a category entitled "Submission Waiting for Author's Approval". Click on that category, view your submission and approve it. In the unlikely case of conversion issues you may submit your manuscript data as a PDF file.

Your manuscript will then be formally submitted to the journal.

Thank you very much.

With kind regards,
Springer Journals Editorial Office
Journal of Mathematics Teacher Education

4.11 Estudio [K]

Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (Aceptado). Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Para encabezado, a cumplimentar por el editor

Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico

Nombre y Apellidos autor (lugar de trabajo)
Nombre y Apellidos autor (lugar de trabajo)
Nombre y Apellidos autor (lugar de trabajo)

Fecha de recepción: A cumplimentar por el editor
Fecha de aceptación: A cumplimentar por el editor

Resumen

En este artículo se presenta una actualización de la didáctica del álgebra en Educación Infantil. En la primera parte, se analizan los principales conocimientos de álgebra en edades tempranas a partir de una revisión de los currículos de educación infantil de diversos países; se definen los distintos modos de pensamiento algebraico propios de esta etapa, considerando estudios recientes de la investigación en educación matemática infantil; y se vinculan tales conocimientos con los modos de pensamiento algebraico. En la segunda parte, se describen prototipos de tareas para abordar los conocimientos que caracterizan la introducción del álgebra en educación infantil. Se concluye que estos vínculos permiten evitar desajustes entre las aportaciones de la investigación en educación matemática infantil en torno al pensamiento algebraico y las directrices curriculares que guían la práctica del profesorado.

Palabras clave

álgebra temprana, pensamiento algebraico, pensamiento relacional, pensamiento recursivo, pensamiento funcional, educación infantil

Abstract

This article presents an update on the teaching of early algebra in Early Childhood Education. In the first part, we analyse the main early knowledge at ages based on a review of early childhood education curricula in different countries; we define the different modes of algebraic thinking characteristic of this stage, considering recent research studies in early mathematics education; and we link such knowledge with the modes of algebraic thinking. In the second part, prototype tasks are described to address the knowledge that characterises the introduction of algebra in Early Childhood Education. It is concluded that these links help to avoid mismatches between the contributions of research in early childhood mathematics education on algebraic thinking and the curricular guidelines that guide teachers' practice.

Keywords

early algebra, algebraic thinking, relational thinking, recursive thinking, functional thinking, early childhood education

Para logotipo en pie de página par, a cumplimentar por el editor

Título del artículo, negrita, tamaño 11
Inicial del nombre. Apellidos (tamaño 10, color RGB 0,92,90)

1. Introducción

En las últimas décadas, los currículos han ido integrando nuevos conocimientos para tratar de dar respuesta a las demandas sociales contemporáneas, que requieren una ciudadanía con un conjunto de conocimientos y habilidades que les permitan desarrollarse con la máxima plenitud en un mundo complejo (Morin, 1999, 2019; Rocard et al., 2007). Fruto de ello, los currículos de matemáticas de diversos países han incorporado nuevos estándares de contenido desde los 3 años, como la estadística y la probabilidad o el álgebra (e.g., National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2003; Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2020).

En este artículo nos focalizamos en el álgebra y, más concretamente, en el álgebra temprana que aquí se refiere a una propuesta de cambio curricular cuya meta es introducir modos de pensamiento algebraico en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas desde las primeras edades de escolarización (Carraher y Schliemann, 2019; Kaput, 2008; Zapatera, 2018). El pensamiento algebraico es definido por Blanton (2008) como "una forma de pensar que impregna todas las dimensiones de las matemáticas y es el núcleo de lo que los niños deberían hacer habitualmente en las matemáticas escolares" (p. xii). En el contexto de la educación infantil, el desarrollo del pensamiento algebraico se lleva a cabo principalmente a partir de conexiones intradisciplinares, es decir, integrando el álgebra temprana en otros bloques de contenido como puede ser la aritmética o la geometría (Autor, xxxx), a través de los procesos que moviliza, como notar, generalizar, justificar y representar (Chimoni et al., 2021).

A pesar de que la explicitación del álgebra temprana en los currículos de las primeras etapas es reciente (Autores, xxxx), como se acaba de indicar, cabe señalar que existe una larga tradición de desarrollar conocimientos de naturaleza algebraica previos a la generalización y el simbolismo ya desde la etapa de educación infantil, como por ejemplo diversos tipos de relaciones de equivalencia, de orden, etc. Diversos autores clásicos de reconocido prestigio, como Montessori (1914), Piaget (1941), Dienes (1971a, 1971b) y Dienes y Golding (1976), entre otros, jugaron un papel esencial en la construcción progresiva de un cuerpo de conocimientos asociados al álgebra en los primeros niveles escolares, aunque bajo otras nomenclaturas como la educación sensorial, el razonamiento lógico-matemático y la lógica, respectivamente, al no existir todavía el término "álgebra temprana" que se usa en la actualidad. Este fenómeno dio lugar a la génesis de una didáctica asociada al pensamiento algebraico que, además de ir organizando el contenido a enseñar, fue definiendo también una forma de enseñarlo cercana a las niñas y los niños y respetuosa con sus necesidades y posibilidades de aprendizaje: la manipulación, la experimentación y el juego, principalmente. En Canals (1989), por ejemplo, se puede encontrar una interpretación de las aportaciones de estos autores clásicos: dentro de los capítulos de "lógica", por un lado, se definen los conocimientos asociados al pensamiento algebraico que el alumnado de 3 a 5 años puede ir aprendiendo; y, por otro lado, se describen algunos materiales manipulativos para promover el aprendizaje de estos conocimientos. Posteriormente, Autor (xxxx, xxxx, xxxx), Chamorro (2005) y, Castro y Castro (2016), entre otros, sin referirse explícitamente al álgebra por las razones que se acaban de señalar, han ido aportando datos tanto referentes a la organización de conocimientos vinculados al pensamiento algebraico de 3 a 6 años como las formas de enseñarlos, a través de recursos diversos como la exploración del entorno, la manipulación de materiales, el juego, los recursos literarios, tecnológicos y gráficos. Otros autores que sí se han referido explícitamente al álgebra, incluso han ampliado el rango de edad: Clements y Sarama (2009) han definido trayectorias de aprendizaje para "patrones y estructuras (incluyendo el pensamiento algebraico)" desde los 2 años; Geist (2014) ha concretado conceptos emergentes de "patrones, razonamiento y álgebra" que los niños y las niñas van desarrollando desde los

0 años; Autor (xxxx) ha documentado las matemáticas intuitivas e informales sobre "cualidades sensoriales", "cantidades", "posiciones y formas" y "atributos mensurables" vinculadas al pensamiento algebraico, de los 0 hasta los 3 años; etc.

A raíz de estas distintas aportaciones, junto con el análisis de diversos currículos contemporáneos de educación infantil que han incorporado explícitamente el álgebra temprana, Autores (xxxx) han caracterizado este enfoque como:

> La capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemáticas, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos (p. 175-176).

Paralelamente a todo este esfuerzo para caracterizar y organizar los conocimientos asociados al desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil, otros autores se han focalizado en indagar acerca de las características específicas de este modo de pensamiento (e.g., Kaput, 2008; Radford, 2011). Estas aportaciones han dado lugar a la concreción de modos distintos de pensamiento algebraico en educación infantil: relacional, recursivo y funcional (Lenz, 2022; Luken y Sauzet, 2020; Wijns, et al., 2019a).

Con el propósito de avanzar en la comprensión del pensamiento algebraico en educación infantil y, en consecuencia, promover una didáctica que fomente de manera eficaz el desarrollo de los distintos modos de pensamiento algebraico, el objetivo de este trabajo es cruzar la caracterización y organización del conocimiento algebraico en educación infantil con los modos de pensamiento algebraico. En otras palabras, se pretende definir qué conocimientos de álgebra temprana se vinculan con cada modo de pensamiento algebraico y, posteriormente, ofrecer orientaciones didácticas para trabajar dichos conocimientos y poder desarrollar los distintos modos de pensamiento algebraico en el aula.

2. Marco conceptual

En esta sección, se revisan los principales conocimientos de álgebra en edades tempranas a partir de una revisión de los currículos de diversos países que explicitan este bloque de contenidos desde la etapa de educación infantil. Seguidamente, se define el pensamiento algebraico y los distintos modos de pensamiento que se movilizan en esta etapa escolar.

2.1 El álgebra temprana en el currículo de educación infantil

Diversas investigaciones informan que los niños y las niñas pueden desarrollar conocimientos vinculados con el álgebra en edades tempranas -principalmente, a través de la indagación y exploración del entorno, la manipulación, la experimentación y el juego-, adquiriendo nociones algebraicas elementales, tales como la agrupación y clasificación de objetos, el reconocimiento y análisis de patrones de repetición, entre otras (e.g., Autor, xxxx; Rittle-Johnson et al., 2015). Asimismo, los currículos contemporáneos de educación infantil han asumido la importancia de los contenidos vinculados con el álgebra temprana, incorporado de manera progresiva conocimientos de naturaleza algebraica a partir de esta etapa escolar (Autores, xxxx).

La Tabla 1, muestra los contenidos que promueven las orientaciones curriculares de educación infantil para abordar el estudio del álgebra en edades tempranas.

Currículo	Contenido	
NCTM (2003): álgebra (Pre-K-2): 3-8 años	Comprender patrones, relaciones y funciones	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades. Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.
	Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números. Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
	Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas	Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.
	Analizar el cambio en diversos contextos	Describir cambios cualitativos, como “ser más alto”. Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.
ACARA (2020): patrones y álgebra: 4-6 años	Ordenar y clasificar objetos familiares y explicar la base de estas clasificaciones. Copiar, continuar y crear patrones con objetos y dibujos.	
NEL (2013): Relaciones y patrones: 4-6 años	Emparejar, clasificar y comparar cosas por un atributo (por ejemplo según el color, la forma o tamaño) Poner las cosas en orden según el tamaño o la longitud y eventos de secuencia Reconocer, extender y crear patrones simples (por ejemplo: patrón AB)	
MINEDUC (2018): Núcleo pensamiento matemático: 4-6 años	Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos Experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por dos o tres atributos a la vez (forma, color, tamaño, función, masa, materialidad, entre otros) y seriar por altura, ancho, longitud o capacidad para contener.	

	Emplear cuantificadores, tales como: "más que", "menos que", "igual que", al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas.
MEFP (2022): Área conocimiento del entorno: 3-6 años	Establecer distintas relaciones entre los objetos a partir de sus cualidades o atributos, mostrando curiosidad o interés. Cualidades o atributos de objetos y materiales. Relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación.

Tabla 1. Contenidos propuestos en los currículos de educación infantil para abordar la enseñanza del álgebra temprana

A partir de los contenidos expuestos en la Tabla 1, es posible observar que las aportaciones preliminares de autores como Piaget, Montessori y Dienes, vinculadas con las relaciones de equivalencia y de orden a través del reconocimiento de atributos, así como la introducción de operadores, son reconocidas por los currículos contemporáneos de educación infantil e incorporados de manera explícita en el bloque de contenidos que aborda el estudio del álgebra en edades tempranas.

Los principios y estándares del NCTM (2003) de Estados Unidos, por ejemplo, plantean abordar conocimientos algebraicos a partir de los 3 años a través de la clasificación de objetos, reconocimiento de patrones, representación de situaciones numéricas, exploración de funciones y el análisis del cambio. Por otra parte, el currículo australiano (ACARA, 2020) promueve que los niños y niñas de 4 a 6 años, ordenen y clasifiquen objetos con base en distintos criterios y profundicen en el trabajo con patrones de repetición, copiando, extendiendo y creando patrones con objetos y dibujos. El currículo de Singapur (Nurturing Early Learners [NEL], 2013), manifiesta que a partir de los 4 años los niños y niñas reconozcan relaciones de orden, clasificación y comparación de objetos por atributos, y exploren patrones simples. El currículo chileno de educación infantil (Ministerio de educación [MINEDUC], 2018) propone que los niños y niñas (4 a 6 años) establezcan relaciones entre objetos al clasificar por dos o tres atributos a la vez, indaguen en el estudio de los patrones, por medio de la creación de patrones sonoros, visuales, gestuales y corporales de dos o tres elementos y, empleen cuantificadores, tales como: "más que", "menos que", "igual que", al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas. Por último, en España, el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación infantil (MEFP, 2022) señala algunos saberes asociados con el álgebra temprana, como el reconocimiento de cualidades y atributos de los objetos para comparar semejanzas y diferencias y establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones y correspondencias) junto con el uso de cuantificadores y la funcionalidad de los números en la vida cotidiana, mientras que los patrones se omiten y las referencias al cambio son mínimas.

De acuerdo con Kilpatrick (2011), la obtención de buenos resultados en la implementación de los contenidos que promueven las directrices curriculares para introducir la enseñanza del álgebra desde edades tempranas, depende de cómo se considere el currículo: no se producen cambios si se concibe como un listado de contenidos, mientras que conlleva cambios profundos si se aprecia como un conjunto de experiencias para los estudiantes.

2.2 Modos de pensamiento algebraico temprano en educación infantil

El pensamiento algebraico se puede definir desde múltiples perspectivas (Carraher y Schliemann, 2019): por ejemplo, para Godino y Font (2003) es concebido como la ciencia de los patrones y el orden, es una forma de razonar que supone establecer generalizaciones y regularidades en diversas situaciones matemáticas. No obstante, hay un consenso en la literatura para afirmar que el pensamiento algebraico se inicia mediante una conciencia estructural que se desarrolla en los niños y las niñas, de manera temprana, a través de los patrones (Clements y Sarama, 2015; McGarvey, 2012; Luken y Sauzet, 2020; Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2015; Wijns et al., 2019a; entre otros). Para autores como Kieran (2022), el pensamiento algebraico es un tipo de razonamiento en el que participan los niños y las niñas de 5 a 12 años a medida que construyen el significado de los objetos y las formas de pensar que se encontrarán en el estudio posterior del álgebra de la escuela secundaria.

Sin embargo, es importante destacar que el pensamiento algebraico implica el desarrollo de distintos modos o formas particulares de pensamiento (Kieran, 2004) que permiten avanzar hacia el aspecto central del álgebra temprana, la generalización (Kaput, 2008): el pensamiento relacional, el pensamiento recursivo y el pensamiento funcional.

2.2.1. El pensamiento relacional en educación infantil

El pensamiento relacional o pensamiento centrado en las relaciones se define ampliamente como el proceso de hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y patrones significativos que subyacen a la información (Dumas et al., 2013). Este modo de pensamiento es importante para el desarrollo del álgebra temprana, puesto que presta atención a las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, en lugar de centrarse exclusivamente en los procedimientos de cálculo (Carpenter et al., 2005). Molina y Ambrose (2008) afirman que el pensamiento relacional posee una visión estructural más que operativa de los elementos matemáticos, estableciendo relaciones entre ellos y utilizándolos para encontrar una solución a una tarea. En consecuencia, se caracteriza por utilizar relaciones entre elementos matemáticos y se refiere a la relación entre igualdad y desigualdad (Lenz, 2022).

En este contexto, el pensamiento relacional se ha asociado a la relación entre los números, el uso de las propiedades básicas de las operaciones y la comprensión de los significados del signo igual (Carpenter et al., 2005; Castro y Molina, 2017). Adicionalmente, el pensamiento relacional se encuentra estrechamente relacionado con las representaciones simbólicas y el uso de notación algebraica. Sin embargo, los niños y niñas en educación infantil no tienen suficiente experiencia con las representaciones simbólicas. Según Lenz (2022), en educación infantil es posible estimular el pensamiento relacional utilizando representaciones sin notación algebraica, con la ayuda de objetos reales y manipulables, a través de la comprensión de la igualdad, las comparaciones de más-menos y las relaciones parte-todo, introduciendo poco a poco la noción de variable al profundizar en las cualidades y los cuantificadores.

Desde la perspectiva de Piaget (1941), las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos, permiten al niño construir el conocimiento lógico-matemático. En esta línea, Dienes (1971a) señala que:

> Para facilitar al niño la adquisición de la abstracción que supone la teoría de los estados y los operadores, sugerimos el empleo lo más temprano posible de muchos operadores distintos de diferente naturaleza. Si el niño no adquiere más que experiencia de operadores de carácter aritmético, llegará a creer que no existe otra clase de operadores. Es evidente que no es así. (p. 9)

En concreto, cuando Dienes hace mención a "operadores distintos de diferente naturaleza", se está refiriendo a situaciones de transformación y juegos de diferencias a partir de los Bloques Lógicos, en los que se comparan semejanzas y diferencias de los objetos a partir de cualidades como el color, la forma, el grosor o el tamaño. Desde este punto de vista, más adelante, Autor (xxxx) afirma que:

> … relacionar cualidades sensoriales implica comparar los elementos de una o diversas agrupaciones entre sí a partir de un criterio de tipo cualitativo preestablecido (por ejemplo: tener la misma forma, tener el mismo color, etc.), pero nuevamente este trabajo sensorial permite desarrollar el razonamiento lógico-matemático de manera que poco a poco se pueden extrapolar e inferir estos conocimientos cualitativos hacia otros cuantitativos, a partir de actividades que implican clasificar, ordenar, hacer parejas, etc., por criterios cuantitativos, utilizando comparativos como más que, menos que, igual que, tanto como, etc. (p. 80)

Si consideramos, pues, que tal como se ha señalado en la introducción, diversos autores clásicos como Montessori, Piaget y Dienes promovieron una didáctica asociada al pensamiento algebraico que se iniciaba desde lo cualitativo (educación sensorial, cualidades sensoriales, atributos, etc.) para avanzar seguidamente hacia lo cuantitativo (cuantificadores, números y relaciones entre números, etc.), asumimos que en educación infantil es recomendable iniciar el desarrollo del pensamiento relacional a través de tareas de experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones cualitativas y cuantitativas (Autores, xxxx).

2.2.2. El pensamiento recursivo y el pensamiento funcional en educación infantil

El pensamiento recursivo permite predecir un elemento desconocido en una secuencia de valores haciendo uso de la relación entre elementos consecutivos (Luken y Sauzet, 2020). De acuerdo con Wijns et al. (2019a), pensar recursivamente implica anticipar solo el elemento sucesor (el +1) de una secuencia. En cambio, el pensamiento funcional implica identificar y abstraer la regla subyacente de una secuencia (Luken y Sauzet, 2020; Wijns et al., 2019a). Papic y Mulligan (2007) enfatizan la necesidad de una intervención docente específica para desarrollar desde una edad temprana la capacidad de concentrarse en la estructura. En este sentido, la exploración, reconocimiento y análisis de patrones son actividades apoyadas por investigadores, diseñadores de currículos y matemáticos, como una base para el desarrollo del pensamiento algebraico (Tirosh, et al., 2019; Clements y Sarama 2007).

Cuando hablamos de patrón, si bien en la literatura sus definiciones varían, en la revisión de Wijns et al. (2019a) se aprecia un acuerdo general que considera dos aspectos clave: la regularidad y la previsibilidad. Sarama y Clements (2009) destacan que, para que un patrón muestre regularidad debe presentar una estructura debidamente ordenada que siga un curso iterativo o cambiante, según una regla subyacente que facilita la previsibilidad. La percepción de dicha previsibilidad permite avanzar del pensamiento recursivo al pensamiento funcional. Estos modos de pensamiento son posibles de desarrollar en una escolarización no formal, a través de tareas de enseñanza vinculadas a la seriación con patrones de repetición (Papic, 2007; Autores, xxxx). Desde este contexto de la educación infantil, se ha constatado que la exploración de patrones de repetición puede contribuir a la concienciación de la estructura subyacente (Björklund y Pramling, 2014; Mcgarvey, 2012; Papic, 2007, Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2015; Starkey et al. 2004; Tirosh et al., 2019; Zipper et al., 2020) para así avanzar hacia una manera más sofisticada de pensamiento algebraico. Por este motivo, la estructura, entendida como unidad de repetición, a veces se separa del patrón en las definiciones para enfatizar su importancia (Gripton, 2022).

Desde esta perspectiva, autores como Clements y Sarama (2015); Lüken y Sauzet (2020), Rittle-Johnson et al. (2013); Wijns et al. (2019a), entre otros, determinan una serie de tareas para hacer patrones estrechamente vinculadas con la capacidad para identificar o no la unidad de repetición, con la finalidad de dejar de entender el patrón como una alternancia rítmica y regular de atributos, para focalizar la atención en los núcleos que lo conforman (Papic et al., 2011). Bajo esta mirada, el reconocimiento de dicha estructura, regla o unidad de repetición otorga un orden de dificultad creciente en consonancia con el pensamiento recursivo y funcional (Autor et al., en prensa; Autor et al., xxxx). A partir de las aportaciones de los autores anteriormente señalados, Autor et al. (en prensa) y Autor et al. (xxxx) otorgan un orden de dificultad creciente a las habilidades para hacer patrones con la finalidad de analizar tareas matemáticas en libros de texto de educación infantil. Dichas habilidades son: 1) copiar, 2) interpolar, 3) extender, 4) abstraer o traducir, 5) reconocer la unidad de repetición; y 6) inventar un patrón. Las tareas que movilizan las habilidades mencionadas se detallan a continuación: 1) duplicar el mismo patrón; 2) encontrar elementos faltantes de una secuencia; 3) ampliar la secuencia; 4) construir el mismo patrón con diferentes elementos; 5) identificar la unidad de repetición; e 6) inventar un patrón, respectivamente. En la Figura 1 se muestran las habilidades para hacer patrones y las tareas matemáticas que las movilizan.

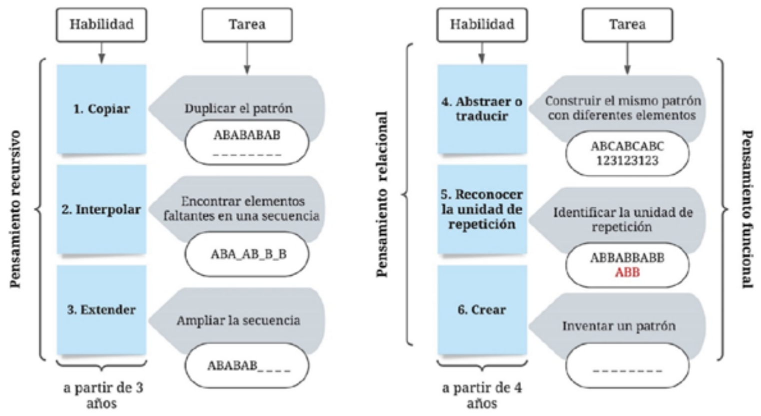


Figura 1. Habilidades para hacer patrones y tareas matemáticas. Fuente: Autor et al. (en revisión)

Cabe destacar que, por un lado, las tareas 1, 2 y 3 "enfatizan la organización recursiva de elementos en lugar de repetir unidades" (Mcgarvey, 2012, p.334), pudiendo resolverse de manera exitosa haciendo uso de la estrategia de emparejamiento de apariencia uno a uno (Collins y Laski, 2015); por otro lado, las tareas 4, 5 y 6 fomentan un enfoque más directo en la estructura (Tirosh et al., 2019), requiriendo que los niños y niñas usen estrategias de similitud relacional (Rittle-Johnson et al., 2013). Por este motivo, se considera que una experiencia temprana con patrones permite también promover el pensamiento relacional. No obstante, pese a que en la tarea 4 (construir el mismo patrón con diferentes elementos) se precisa un pensamiento más abstracto (Rittle-Johnson et al., 2015; Sarama y Clements, 2009), existen autores como Lüken (2018) y Wijns et al. (2019b) que difieren. Lüken (2018) alega que, para este tipo de tareas, los niños pueden recurrir a una estrategia de alternancia, ya que perciben el patrón como una secuencia de colores sin captar la estructura de repetición; y Wijns et al. (2019b) explica que los alumnos también pueden establecer una correspondencia término a término si no existe un espacio prudencial entre el patrón modelo y el patrón a construir con diferentes elementos. En cualquier caso, en este artículo se asume la tarea 4 como la frontera entre el pensamiento recursivo y funcional.

Por otra parte, el desarrollo del pensamiento funcional también se vincula con la noción de cambio (Warren y Cooper, 2005). La incorporación de ideas vinculadas con el cambio en educación infantil, permite a los niños "comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo" (NCTM, 2003, p. 99). Por ejemplo, "describir cambios cualitativos, como ser más alto o describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año" (NCTM, 2003, p. 94), es fundamental para entender el desarrollo de las funciones en las etapas escolares posteriores.

El cambio, entendido como la variación o transformación que experimenta un determinado objeto matemático, de un estado inicial a otro final, a partir de un operador (Autores, en revisión) se puede abordar desde distintos enfoques. De acuerdo con autores como Dienes (1971a) y Autor (xxxx), entre otros, en educación infantil se promueven diversos tipos de cambios, ya sean: a) aritméticos, por ejemplo, al añadir una cantidad determinada a una cantidad inicial; b) geométricos, por ejemplo, un giro es un operador que actúa en la posición y; c) de atributos físicos, por ejemplo, cuando se pintan las paredes blancas de una casa de color rojo, se usa un operador que convierte en rojo lo que era blanco. Castro et al. (2017) afirman que los niños y niñas de educación infantil pueden realizar análisis de situaciones estudiando el cambio. En consecuencia, el pensamiento funcional se puede estimular a partir de la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (Autores, xxxx).

A partir de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana, la Figura 2 muestra una panorámica general de los distintos modos de pensamiento algebraico que se movilizan en educación infantil.

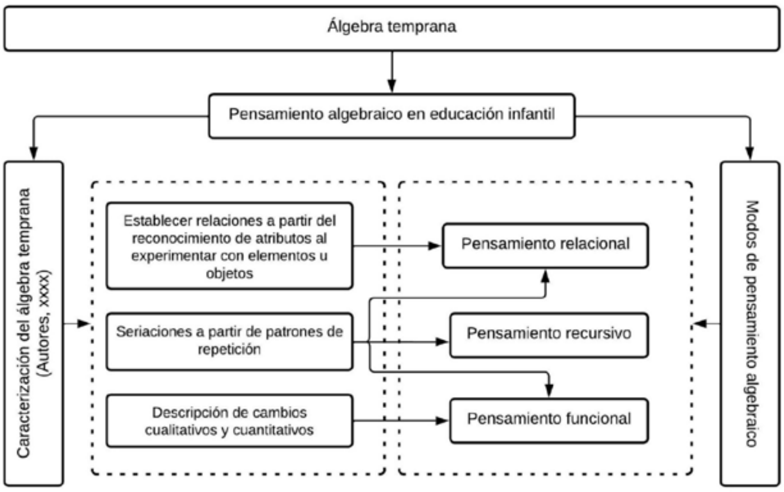


Figura 2. Panorámica general de los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en educación infantil. Fuente: elaboración propia

2.2.3 Vinculando los conocimientos algebraicos con los modos de pensamiento algebraico en educación infantil

Como se ha indicado en los apartados anteriores, en la educación infantil es posible iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico y promover distintos modos de pensamiento a través de una serie de tareas matemáticas de acuerdo con los distintos conocimientos algebraicos que se introducen en esta etapa escolar.

A modo de síntesis, la Tabla 2 muestra de manera más específica la vinculación de los distintos conocimientos que se deben abordar para la enseñanza del álgebra en educación infantil y los modos de pensamiento algebraico que movilizan.

Modos de pensamiento algebraico	Establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos					Seriaciones a partir de patrones de repetición: identificación, construcción y representación del patrón						Descripción de cambios cualitativos-cuantitativos	
	Agrupar	Clasificar	Ordenar	Correspondencia	Comparar	Duplicar el patrón	Encontrar el elemento faltante	Ampliar la secuencia	Construir el mismo patrón con diferentes elementos	Identificar la unidad de repetición	Inventar un patrón	Reconocer cambios	Aplicar cambios
Pensamiento Relacional	x	x	x	x	x				x	x	x		
Pensamiento Recursivo						x	x	x					
Pensamiento Funcional									x	x	x	x	x

Tabla 2. Vinculación de conocimientos y modos de pensamiento algebraico. Fuente: elaboración propia

En la Tabla 2 se pone de manifiesto que, para poder ayudar a las niñas y a los niños de 3 a 6 años a desarrollar los distintos modos de pensamiento algebraico, es imprescindible diseñar e implementar tareas que permitan establecer relaciones, tareas de seriaciones a partir de patrones de repetición y tareas que impliquen la descripción de cambios, con todas sus variantes. Este es un dato relevante que debería ser considerado para evitar desajustes entre las aportaciones de la investigación en educación matemática infantil en torno al pensamiento algebraico y las directrices curriculares que guían la práctica del profesorado.

3. Tareas para trabajar el álgebra temprana en educación infantil

A partir de las aportaciones recientes que se han descrito en la sección anterior, resulta evidente que la enseñanza del álgebra temprana en educación infantil requiere una actualización que pasa por implementar tareas que contribuyan al desarrollo de los distintos modos de pensamiento algebraico que se movilizan en esta etapa escolar, a saber: pensamiento relacional, pensamiento recursivo y pensamiento funcional.

Con base en ello, a continuación, se presentan prototipos de tareas y recursos a partir de los conocimientos que promueve la caracterización del álgebra en educación infantil (Autores, xxxx). Cabe destacar que, en la práctica, estos prototipos de tareas requieren de una planificación y una gestión que promueva el desarrollo de las formas particulares de pensar algebraicamente de los niños y niñas de educación infantil, a través del planteamiento de retos y de preguntas que inviten a razonar y argumentar; la comunicación y la representación o bien las conexiones tanto intradisciplinares como interdisciplinares (NCTM, 2003).

3.1 Establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos

Una relación implica comparar elementos por medio de semejanzas o diferencias a partir de un criterio. El trabajo desarrollado en educación infantil permite establecer distintos tipos de relaciones: a) relaciones de equivalencia o clasificaciones en una agrupación de elementos por semejanzas; b) relaciones de orden u ordenaciones en una organización de elementos por diferencias y, c) correspondencias donde determinados elementos de una agrupación A se asocian con uno o más elementos de una agrupación B (Autor, xxxx).

Las Tablas 3 y 4 presentan, a modo de ejemplo, dos prototipos de tareas para trabajar relaciones a partir del reconocimiento de atributos.

Título: "La bandeja sorpresa"	
Objetivo: Establecer clasificaciones al reconocer atributos de material no estructurado.	**Contenidos matemáticos:** Reconocimiento de atributos de diversos elementos u objetos a partir de sus cualidades (color, forma, tamaño). Clasificaciones de diferentes elementos u objetos. Iniciación al conteo. Empleo de cuantificadores para establecer comparaciones.

Tabla 3. Tarea para establecer clasificaciones a partir del reconocimiento de atributos

Material necesario (Figura 3):

Figura 3. (a) Bandeja con diversos elementos: piñas de pino, piedrecillas y castañas; (b) Clasificación de los elementos. Fuente: elaboración propia.

Experiencia:

- Presentar a los niños y niñas diversos elementos, como se aprecia en la Figura 3a y ponerlos a su alcance para que jueguen libremente.
- Iniciar el diálogo sobre las características observadas en los materiales manipulados.
- Invitar a los niños y niñas a describir, tales características: color, forma, tamaño, peso, etc.
- Proponer a los niños y niñas formar grupos los elementos a partir de un criterio establecido, como se muestra en la Figura 3b.
- Fomentar, a través del diálogo conjunto, el conteo y uso de cuantificadores para comparar los distintos grupos de elementos.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cómo son los elementos que observamos?, ¿qué características tienen en común?, ¿en qué se diferencian?
- ¿Qué grupos podríamos formar?, ¿qué criterios establecieron para formar los grupos?, ¿los elementos se podrían organizar de otra manera? ¿cómo sería?
- ¿Cuántos grupos de elementos formaron?, ¿Cuántos elementos tiene cada grupo? ¿qué grupo tiene más elementos?, ¿qué grupo tiene menos elementos?
- ¿Hay más o menos piñas que castañas?, ¿hay más o menos castañas que piedrecillas?, ¿hay igual cantidad de piñas que de piedrecillas? ¿por qué?

Título: "La cesta de frutas: buscando la otra mitad"	
Objetivo: Establecer relaciones de correspondencia al reconocer atributos de frutas.	**Contenidos matemáticos:** Reconocimiento de atributos de diversos elementos u objetos a partir de sus cualidades (color, forma, tamaño). Comparaciones de elementos u objetos a partir de un criterio. Correspondencia entre elementos u objetos. Noción de cantidad: entero y mitad.

Tabla 4. Tarea para establecer relaciones de correspondencia a partir del reconocimiento de atributos

Material necesario (Figura 4):

Figura 4. (a) Cesta con frutas; (b) correspondencia establecida entre las mitades de cada fruta. Fuente: elaboración propia.

Experiencia:

- Reunir a los niños y niñas en pequeños grupos de trabajo.
- Presentar a cada grupo una cesta con distintas frutas partidas por la mitad, por ejemplo: manzana, limón, naranja, pomelo, mandarina, como se observa en la Figura 4a.
- Iniciar el diálogo sobre las características de las frutas estableciendo semejanzas y diferencias a partir de la observación y manipulación.
- Invitar a los niños y niñas a describir, tales características: color, forma, tamaño, etc.
- Proponer a los niños y niñas encontrar las mitades, luego juntar cada parte hasta completar la fruta entera, como se muestra en la Figura 4b.
- Fomentar, a través del diálogo conjunto, las acciones que han desarrollado.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cómo son las frutas que observamos?, ¿qué características tienen en común?, ¿en qué se diferencian?
- ¿Cómo podemos encontrar la otra mitad (pareja) de cada fruta?, ¿qué estrategia haz utilizado?
- Si juntamos las mitades (parejas), ¿qué tenemos?

Pensamiento algebraico que promueven las tareas:

Las tareas de las Tablas 3 y 4 permiten iniciar el desarrollo del pensamiento relacional, puesto que a partir de objetos reales y manipulables se establecen relaciones cualitativas y cuantitativas por medio del reconocimiento de atributos. Más específicamente, en la Tabla 3 se presenta un prototipo de tarea de clasificación que introduce una relación de equivalencia a través de una agrupación de elementos, mientras que en la Tabla 4 se muestra una relación de correspondencia, a través de la asociación de elementos según sus atributos.

3.2 Seriaciones a partir de patrones de repetición: identificación, construcción y representación del patrón

La identificación de patrones de repetición implica la observación y el reconocimiento de regularidades en secuencias iterativas de objetos o datos (Autor, xxxx). En las Tablas 5 y 6, se muestran propuestas de prototipos de tareas para abordar el trabajo con patrones.

Título: "En busca del que falta"	
Objetivo: Completar los elementos faltantes en la seriación presentada siguiendo la secuencia propuesta.	**Contenidos matemáticos:** Observación de patrones de repetición. Identificación del elemento que falta del patrón (AB).

Tabla 5. Tarea de encontrar el elemento faltante de una seriación

Material necesario (Figura 5):

Figura 5. Cajas con frutas de juguetes y cartulina. Fuente: elaboración propia.

Experiencia:

- Poner el material al alcance de los niños y las niñas y proponerles colocar en el espacio en blanco de la cartulina, el elemento que correspondería para seguir la seriación, como se aprecia en la Figura 5.
- Observar y documentar si los escolares son capaces de interpolar el patrón (AB).
- Invitar a los niños y niñas a describir la seriación completada.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cómo has descubierto cuál era la fruta o verdura que tocaba colocar en los espacios en blanco de la primera seriación?
- Si después de un plátano, viene una zanahoria y después otro plátano y otra zanahoria. Después del plátano: ¿cuál tocaría? ¿por qué?, ¿notas algo que siempre sucede?

Título: "Espirales de repetición"	
Objetivo: Inventar un patrón y extenderlo a partir de la manipulación de material no estructurado.	**Contenidos matemáticos:** Identificación de patrones. Creación de seriaciones atendiendo a la combinación de criterios cualitativos y/o cuantitativos.

Tabla 6. Tarea de inventar un patrón de repetición

Material necesario (Figura 6):

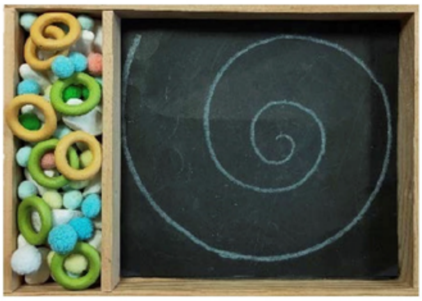


Figura 6. Piedras, argollas de colores, pompones de lana y cartulina con dibujo de espiral. Fuente: elaboración propia

Experiencia:

- Presentar el material (Figura 6) a los niños y las niñas y dejar un espacio de tiempo para que lo manipulen libremente.
- Proponerles en parejas crear patrones con los elementos proporcionados, para posteriormente extenderlos siguiendo la espiral.
- Documentar y registrar las interacciones que se producen durante la toma de decisiones.

Preguntas intencionadas:

- ¿Qué piezas utilizaremos para definir el patrón central?
- En un patrón ABC, ¿cómo son las 3 primeras piezas?
- En un patrón ABB hay una pieza diferente y dos iguales, y en un patrón AAB ¿cómo son las piezas?, ¿notas algo que siempre sucede?
- ¿Qué te parece más fácil, extender un patrón ABC o un patrón AB? ¿por qué?
- ¿Puedes construir otra seriación con los mismos elementos? ¿cómo sería?
- ¿Puedes describir tu nueva seriación con palabras?, ¿puedes describir la seriación utilizando símbolos en lugar de palabras?

Pensamiento algebraico que promueven las tareas:

La primera tarea de seriación propuesta (Tabla 5) corresponde a encontrar elementos faltantes de una secuencia. Dicha tarea promueve el pensamiento recursivo, ya que permite anticipar solo el elemento sucesor de la secuencia. En cambio, la segunda tarea de inventar patrones (Tabla 6), permite avanzar hacia la consciencia de la estructura subyacente, como es la unidad de repetición, promoviendo el pensamiento relacional y el funcional.

3.3 Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos

El estudio del cambio considera tres etapas: el estado inicial, el cambio o transformación a partir de un operador, y el estado final, que es distinto al inicial, salvo cuando el operador es neutro (Autor, xxxx). En las Tablas 7 y 8 se muestran algunas posibles tareas para abordar el cambio.

Título: "Proyectando mi personaje en la oscuridad"	
Objetivo: Aplicar cambios cualitativos.	**Contenidos matemáticos:** Observación de cambios. Introducción de operadores directos para realizar cambios (forma, color, tamaño, grosor).

Tabla 7. Tarea para describir cambios cualitativos

Material necesario (Figura 7):

Figura 7. (a) Bandeja con vasos de plástico, papel transparente, rotulador y linternas; (b) Proyección con el uso de la linterna. Fuente: elaboración propia.

Experiencia:

- Invitar a los niños y niñas a formar un círculo y sentarse en el suelo para escuchar atentamente la lectura de un cuento.
- Presentar una bandeja con linternas y vasos de plástico cubiertos con papel transparente, como se aprecia en la Figura 7a. Cada vaso tiene dibujado un personaje del cuento sobre el papel transparente, por ejemplo, un animal, una persona, un objeto, etc.
- Invitar a cada uno de los niños y niñas a escoger un vaso y una linterna, y descubrir un personaje.

- Los niños y niñas manipulan el material y juegan libremente.
- A partir de preguntas guiadas se invita a descubrir qué ocurre con el personaje al ser proyectado en la pared, como se observa en la Figura 7b.
- Finalmente, el profesor o profesora relata nuevamente el cuento. Los niños y niñas participan del relato e interactúan proyectando el personaje asignado.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cuáles son los personajes del cuento?
- ¿Cómo es tu personaje?, ¿qué características tiene?
- ¿Qué le ocurre al personaje si lo proyectamos en la pared con la ayuda de la linterna?
- ¿Qué sucede si acercamos el vaso a la pared?, ¿y si lo alejamos?, ¿notas algo que siempre sucede?, ¿cómo se transforma el personaje?, ¿qué características tienen ahora?

Título: "Observando el crecimiento del ajo"	
Objetivo: Reconocer cambios cuantitativos.	**Contenidos matemáticos:** Observación de cambios en el entorno cercano. Empleo de cuantificadores para describir cambios. Uso de tablas para registrar datos.

Tabla 8. Tarea para describir cambios cuantitativos

Material necesario (Figura 8):

Figura 8. Ajos, envases de cristal, tierra y agua. Fuente: elaboración propia.

Experiencia:

- Poner el material al alcance de los niños y las niñas, como se observa en la Figura 8.
- Proponer a cada uno de los niños y niñas plantar un ajo en un envase de cristal.
- Mientras ejecutan la acción, realizar preguntas que permitan generar hipótesis sobre lo que sucederá con el ajo en los días próximos.
- Observar día tras día los cambios en el crecimiento del ajo.
- Medir el crecimiento del ajo y registrar los datos en una tabla de valores.

- Comprobar o refutar las hipótesis planteadas.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cuánto tiempo pensáis que demorará en crecer cada ajo plantado?, ¿todos los ajos crecerán en igual tamaño al mismo tiempo?
- ¿Cómo podemos saber cuánto crecen?, ¿qué herramienta podemos utilizar para medir el crecimiento del ajo?, ¿cómo podemos organizar la información del crecimiento del ajo?
- Si conocemos la medida del tallo de un ajo, ¿podremos predecir la longitud que tendrá mañana?, ¿cómo podemos representar esa cantidad desconocida?
- ¿Cuánto más creció hoy el ajo en comparación con ayer? ¿y si comparamos su crecimiento con tres días atrás?

Pensamiento algebraico que promueven las tareas:

Las tareas de las Tablas 7 y 8, plantean situaciones de cambios a partir de un operador. Para su desarrollo, requieren de la aplicación de cambios cualitativos y reconocimiento de cambios cuantitativos, respectivamente. Por tanto, promueven el desarrollo del pensamiento funcional, permitiendo a futuro introducir la noción de función.

4. Consideraciones finales

La enseñanza del álgebra desde la educación infantil permite que "los profesores puedan ayudar a los alumnos a construir una sólida base de comprensión y experiencia, como preparación para un trabajo más complejo en álgebra en los niveles medios y en la escuela secundaria" (NCTM, 2003, p.39). Por tanto, promover el desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil implica atender a una variedad de conocimientos algebraicos tempranos: 1) establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos; 2) seriaciones a partir de patrones de repetición; 3) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (Autores, xxxx; NCTM; 2000; ACARA, 2020; NEL, 2013; MINEDUC, 2018), lo que representa un desafío para el profesorado. Sin embargo, la adquisición de tales conocimientos no supone una dificultad para los niños y niñas de esta etapa escolar, puesto que se ha evidenciado que desde temprana edad son capaces de desarrollar competencias matemáticas amplias y sofisticadas (Clements y Sarama, 2015).

En términos generales, el pensamiento algebraico se fundamenta en la comprensión tanto de conceptos algebraicos, como una concienciación de la estructura y las relaciones matemáticas (Chimoni et al., 2021), danto lugar a otros modos de pensamiento. En educación infantil, los modos de pensamiento algebraico que se movilizan son: el pensamiento relacional, pensamiento recursivo y pensamiento funcional (Lenz, 2022; Luken y Sauzet, 2020; Wijns, et al., 2019a).

Diversos autores (e.g., Lenz, 2022; Carpenter et al., 2005) informan que es posible iniciar el desarrollo del pensamiento relacional mediante la comprensión de la igualdad, las comparaciones de más-menos y las relaciones parte-todo, con la ayuda de objetos reales y manipulables, puesto que permiten profundizar en el uso de cuantificadores y descripción de cualidades a partir del reconocimiento de atributos. Por otro lado, el reconocimiento y análisis de patrones de repetición conforman una base importante en el desarrollo del pensamiento algebraico. En este contexto, las distintas tareas para hacer patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al. 2013; Wijns et al., 2019a) ofrecen la oportunidad de movilizar modos de pensamiento algebraico específicos de acuerdo al nivel de sofisticación de la tarea, es decir, según requieran o no de la identificación de la unidad de repetición para su desarrollo (Autor et al., en prensa; Autor et al., xxxx). En tal caso, las tareas de duplicar un patrón, encontrar elementos faltantes de una secuencia y ampliar una secuencia, movilizan el pensamiento recursivo, puesto que requieren de la predicción de un elemento desconocido en una secuencia de valores haciendo uso de la relación entre elementos consecutivos (Luken y Sauzet, 2020). Mientras que, las tareas de construir el mismo patrón con diferentes elementos, identificar la unidad de repetición e inventar un patrón, se focalizan en el uso de estrategias de similitud relacional para su desarrollo (Rittle-Johnson et al., 2013), movilizando el pensamiento relacional. Asimismo, dichas tareas requieren del reconocimiento de la estructura o núcleo para su desarrollo, movilizando el pensamiento funcional (Wijns et al., 2019a).

Este último modo de pensamiento, también se moviliza a partir de la transformación de situaciones matemáticas que están relacionadas y cambian (Warren y Cooper, 2005), asentando las bases para el posterior estudio de las funciones y variables (NCTM, 2003).

Para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil, es necesario contar con profesores capaces de implementar en sus prácticas pedagógicas tareas que incorporen los distintos modos de pensamiento propios de esta etapa escolar. Sin embargo, las tareas de pensamiento algebraico por sí solas no les otorgarán a los niños y niñas las habilidades necesarias para pensar algebraicamente. La forma en que se utilizan estas tareas en la instrucción es igualmente importante.

Así pues, a partir de los conocimientos que promueve la caracterización del álgebra en edades tempranas propuesta por Autores (xxxx), en este artículo se han descrito algunos ejemplos de tareas que ofrecen orientaciones didácticas para fomentar el pensamiento relacional, recursivo y funcional. Con ello, se espera proporcionar las herramientas necesarias para que progresivamente las niñas y los niños de las primeras edades desarrollen conocimientos y habilidades que les permitan analizar relaciones matemáticas cualitativas y cuantitativas, ser consientes de la estructura, comprender el cambio, resolver problemas que permeen en distintos ámbitos del conocimiento matemático y avanzar hacia el proceso de generalización.

Agradecimientos:

Este trabajo fue apoyado por xxxxxx; xxxxxxx; y xxxxxx.

Bibliografía

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2020). *The Australian Curriculum: Mathematics*. Recuperado de https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Blanton, M.L. (2008). *Algebra in elementary classrooms: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Björklund, C., y Pramling, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education, 22* (1), 9-104. https://doi.org/10.1080/09669760.2013.809657

Canals, Mª. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari*. Eumo.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. ZDM Mathematics Education, 37(1), 53–59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Castro, E., y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.* Pirámide.

Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática, 19*(2), 67-94.

Chamorro, M.C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil.* Pearson-Prentice.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2021). The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development*, *44*(3), 503-552. https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280

Clements, D. H., y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461–555). Information Age Publishing.

Clements, H. D., y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* Routledge.

Clements, H.D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad.* Learning Tools LLC.

Collins, M. A., y Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly, 32*, 204-214.

Dienes, Z.P. (1971a). *Estados y operadores. 2: Iniciación al álgebra.* Teide

Dienes, Z.P. (1971b). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos.* Teide

Dienes, Z.P., y Golding, E. (1976). *Los primeros pasos en matemáticas. 1: lógica y juegos lógicos.* Teide.

Dumas, D., Alexander, P.A., y Grossnickle, E.M. (2013). Relational reasoning and its manifestations in the educational context: A systematic review of the literature. *Educational Psychology Review, 25*(3), 391-427.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8.* Upper Saddle River, NJ: Pearson. http://dx.doi.org/10.14507/er.v0.1104.

Godino, J.D., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/

Gripton, C. (2022). Pattern in early years mathematics curriculum: a 25-year review of the status, positioning and conception of pattern in England. *Research in Mathematics Education.* https://doi.org/10.1080/14794802.2021.2010237

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The MathematicsEducator, 8*, 139-151.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 1-20. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kilpatrick, J. (2011). En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 125-130). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education,* 1-17. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6

Lüken, M. M. (2018). Is patterning a mathematical activity? -An analysis of young children's strategies in working with repeating patterns. *A mathematics education perspective on early mathematics learning-*POEM 2018. Kristiansand.

Lüken, M.M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(4), 310–337.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil*. Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Molina, M., y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61–80.

Montessori, M. (1914). *El método de la pedagogía científica aplicado a la educación de la infancia en las Case dei Bambini.* Araluce.

Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* UNESCO.

Morin, E. (2019). *Pensar la complejidad. Crisis y metamorfosis.* Publicacions de la Universitat de Valencia.

National Council Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).

Nurturing Early Learners [NEL]. (2013). *A Curriculum for Kindergartens in Singapore.* Volume 6. Ministry of Education. Republic of Singapore.

Papic, M. (2007). Promoting Repeating Patterns with Young Children—More than Just Alternating Colors. *Australian Primary Mathematics Classroom, 12*, 8-13.

Papic, M., y Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice* (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart) (Vol. 2, pp. 591–600). MERGA.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Thinking. *Journal for Research for Mathematics Education, 42,* 237-269. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Piaget, J. (1941). *Génesis de las estructuras lógicas elementales.* Guadalupe.

Le développement des quantites chez l'enfant. París: Delachaux et Niestlé.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). PME.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31,* 101–112.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walwerg Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). Informe Rocard-Enseñanza de las ciencias ahora: Una nueva pedagogía para el futuro de Europa. *Comisión europea*.

Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Título del artículo, negrita, tamaño 11

Inicial del nombre. Apellidos (tamaño 10, color RGB 0,92,90)

Starkey, P., Klein, A., y Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 99–120.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E.S., Barkai, R., y Tabach, M. (2019). Preschool teachers' knowledge of repeating patterns: focusing on structure and the unit of repeat. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22,* 305–325. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9395-x

Warren, E., y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019a). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. M. Robinson, H. P. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical learning and cognition in early childhood: Integrating interdisciplinary research into practice* (pp. 139–161). Springer.

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019b). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly, 49*, 152-163. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números, Revista de Didáctica de las matemáticas*, *97*, 51-67.

Zippert, E.L., Douglas, A., y Rittle-Johnson, B. (2020). Finding patterns in objects and numbers: Repeating patterning in pre-K predicts kindergarten mathematics knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology, 200*. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104965

Autores. (en prensa).

Autores. (en revisión).

Autor. (xxxx).

Autor. (xxxx).

Autor. (xxxx).

Autor. (xxxx).

Autor. (xxxx).

Autor. (xxxx).

Autores. (xxxx).

Autores. (xxxx).

Título del artículo, negrita, tamaño 11
Inicial del nombre. Apellidos (tamaño 10, color RGB 0,92,90)

Nombre Primer Apellido Segundo Apellido. centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
Email: si se considera oportuno.

Nombre Primer Apellido Segundo Apellido. centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
Email: si se considera oportuno.

Nombre Primer Apellido Segundo Apellido. centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
Email: si se considera oportuno.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

D. Israel García Alonso
Director de la revista ***Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas***,

INFORMA de que el siguiente artículo, cuya coautora es **Dª. Nataly Pincheira,** está ACEPTADO para su publicación en esta revista.

Artículo

Título: Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico.

Autores:

Nataly Pincheira, Ángel Alsina y Yeni Acosta

Volumen: ---

Páginas: ---

Enlace web: ---

"Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas", presenta las siguientes características:

- **Editada por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas**
- **ISSN: 1887-1984**
- **Dirección electrónica:** http://sinewton.es/revista-numeros/
- **Acceso libre**
- **Aparece en las siguientes bases de datos bibliográficas:** Latindex, Dialnet, *DICE, INRECS, Scientific Indexing Services (SIS)*
- **Es recensionada en** *Mathematics Education Database*

Y para que así conste a los efectos oportunos, expido y firmo el presente informe de aceptación a petición del/a interesado/a en San Cristóbal de La Laguna, a 25 de mayo de 2023.

Israel García Alonso
Director de *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*
Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas "Luis Balbuena Castellano", antigua "Isaac Newton"

Informe Número: 2023 -34

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

EN ESTE CAPÍTULO SE DISCUTEN LOS RESULTADOS Y SE EXPONEN LAS CONCLUSIONES GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN, CONSIDERANDO LOS PRINCIPALES RESULTADOS Y LAS CONCLUSIONES DE LOS ESTUDIOS EXPUESTOS EN EL CAPÍTULO ANTERIOR. EL CAPÍTULO SE ENCUENTRA CONFORMADO POR TRES SECCIONES. EN PRIMER LUGAR, SE RESPONDE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y SE DISCUTE LA CONSECUCIÓN DE LOS CORRESPONDIENTES OBJETIVOS PROPUESTOS EN LA TESIS DOCTORAL. EN SEGUNDO LUGAR, SE DESCRIBEN LAS IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE. FINALMENTE, SE PRESENTAN LAS LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS QUE SURGEN DEL PROCESO DE LA TESIS DOCTORAL.

5.1 Pregunta de investigación y objetivos de la investigación

Con base en la pregunta planteada, el objetivo general de la Tesis Doctoral es caracterizar el conocimiento matemático que movilizan los futuros profesores de educación infantil y primaria para la enseñanza del álgebra en edades tempranas. Para ello, se ha asumido el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) propuesto Ball et al. (2008), puesto que brinda herramientas teóricas a partir de los distintos subdominios que lo componen, para caracterizar los conocimientos que el profesorado requiere para la enseñanza idónea del álgebra en edades tempranas.

Considerando los objetivos específicos que contribuyen a la caracterización del conocimiento del profesorado, en la Tabla 5-6 se describe la conexión de estos y los estudios que conforman los resultados de la Tesis Doctoral.

Tabla 5-1
Relación entre los objetivos y estudios desarrollados en la Tesis Doctoral

Objetivos específicos de la Tesis	Estudios										
	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]	[F]	[G]	[H]	[I]	[J]	[K]
OE_1. Recopilar y sintetizar los antecedentes aportados en investigaciones previas sobre el conocimiento matemático del profesorado de educación infantil y primaria para enseñar álgebra en edades tempranas, incluyendo una revisión sistemática de los estudios realizados bajo el enfoque del MKT.	x										
OE_2: Identificar el tratamiento otorgado al álgebra en los currículos y en los libros de texto de educación infantil y primaria.		x	x	x							
OE_3: Describir las tareas matemáticas diseñadas por los futuros profesores para promover los inicios del pensamiento algebraico en educación infantil y primaria, y analizar el conocimiento matemático que moviliza el profesorado a partir de su diseño.					x	x					
OE_4: Construir instrumentos para evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas en futuros profesores de educación infantil y primaria.							x	x			
OE_5: Evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas de los futuros profesores de educación infantil y primaria.									x	x	
OE_6: Proponer orientaciones didácticas para abordar la enseñanza del álgebra en edades tempranas.											x

Fuente: Elaboración propia

5.1.1 Objetivo específico 1

***OE1**. Recopilar y sintetizar los antecedentes aportados en investigaciones previas sobre el conocimiento matemático del profesorado de educación infantil y primaria para enseñar álgebra en edades tempranas, incluyendo una revisión sistemática de los estudios realizados bajo el enfoque del MKT.*

Este objetivo ha sido abordado en el estudio [A], a través de una revisión sistemática que ha proporcionado evidencias sobre la forma en que se ha conceptualización y estudiado empíricamente el Conocimiento Matemático para la Enseñanza-MKT en la producción científica.

Se ha identificado que los estudios empíricos que se han llevado a cabo en relación con la enseñanza del álgebra en las primeras edades se centran principalmente en el conocimiento matemático del profesorado de educación primaria. Las investigaciones sobre el conocimiento matemático del profesorado de educación infantil son mínimas, abordando la enseñanza del álgebra de manera tangencial, puesto que se centran en la enseñanza de las matemáticas a nivel general.

Por otra parte, el conocimiento especializado, seguido del conocimiento común y el conocimiento del contenido y los estudiantes, son los que se profundizan mayoritariamente en la producción científica, mientras que una menor proporción de estudios indagan en el conocimiento del contenido y la enseñanza, el conocimiento del currículo y el conocimiento del horizonte matemático.

Se observa que el profesorado presenta limitaciones en el conocimiento del contenido, más específicamente el conocimiento común (CCK), al enfrentarse directamente a la resolución de tareas algebraicas, por ejemplo, la generalización de patrones (e.g., Noviyanti y Suryadi, 2019; Zapatera y Callejo, 2018) la representación de la igualdad en expresiones matemáticas (e.g., Barboza et al., 2020) y la resolución de ecuaciones de primer grado (e.g., Bernardo et al., 2018). Respecto del conocimiento especializado (SCK), se observan limitaciones para justificar ideas matemáticas donde interviene el pensamiento algebraico (e.g., Bair y Rich, 2011), seleccionar ejemplos y representaciones adecuadas para abordar tareas de patrones y funciones (e.g., McAuliffe y Lubben, 2013), e identificar estrategias para generalizar relaciones funcionales (e.g., Wilkie y Clarke, 2015).

Por otra parte, al profundizar en el conocimiento pedagógico del contenido del profesorado, más específicamente en el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), la producción científica se centra en cómo los profesores entienden los posibles errores y dificultades de los alumnos al resolver una tarea algebraica desde el enfoque de la aritmética generalizada y el pensamiento funcional (e.g., Barboza et al., 2020, 2021; Oliveira et al., 2021; Wilkie, 2014). Para abordar el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), la producción científica progresa en las estrategias de enseñanza adecuadas para explorar las relaciones funcionales y en las experiencias de aprendizaje que moviliza el profesorado para el desarrollo del pensamiento algebraico (Barboza et al., 2020, 2021; Wilkie, 2016). Por último, respecto del conocimiento del currículo, las investigaciones indagan en la comprensión que tiene el profesorado sobre el plan de estudios y su impacto en las decisiones que involucran experiencias de aprendizaje en torno al pensamiento algebraico, por ejemplo, la inclusión de los significados del signo igual en los planes de estudio (Trivilin y Ribeiro, 2015).

Otro aspecto importante a destacar es que los estudios empíricos desarrollados profundizan en diversas áreas de contenido esenciales del *Early Algebra*, tales como la aritmética generalizada y el pensamiento relacional, a través del signo igual y sus significados, así como los patrones o la noción de función a través del pensamiento funcional. Siendo este último, el que alcanza la mayor predominancia.

5.1.2 Objetivo específico 2

***OE2**: Identificar el tratamiento otorgado al álgebra en los currículos y en los libros de texto de educación infantil y primaria.*

Este objetivo ha sido abordado en los estudios [B], [C] y [D]. El estudio [B] se ha centrado en analizar la incorporación de los contenidos algebraicos tempranos en los currículos de educación infantil y primaria. Mientras que los estudios [C] y [D], profundizan en las tareas matemáticas que promueven los libros de texto para abordar el pensamiento algebraico en estas etapas escolares.

De acuerdo con Chopping et al. (2018), la interpretación que realiza el profesorado sobre el currículo impacta en sus prácticas de enseñanza y en su desarrollo profesional. Por tanto, el tratamiento y evolución que reciben los contenidos en el currículo, vinculados con la enseñanza el álgebra en las etapas de educación infantil y primaria, sientan las bases para el profesorado en cuanto a la forma en que suscitará el desarrollo del pensamiento algebraico en sus estudiantes.

Se ha observado que el tratamiento del álgebra en educación infantil se ve marcada por las relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos, seguido de las seriaciones con patrones de repetición. Mientras que el estudio del cambio es otro elemento que se encuentra presente en los currículos, no obstante, alcanza una presencia menor en comparación con los anteriores.

En educación primaria, los currículos profundizan mayoritariamente en la comprensión de distintos tipos de relaciones matemáticas y el trabajo con patrones. Asimismo, se evidencia la incorporación al trabajo con variables, modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas y el cambio.

Se ha evidenciado que todos los currículos analizados enfatizan en la importancia del trabajo con patrones y relaciones matemáticas como base para construir un itinerario algebraico desde la educación infantil a la educación primaria.

Por otra parte, se ha focalizado la mirada en el libro de texto como un elemento donde se formaliza el aprendizaje, puesto que es un recurso de enseñanza que influye considerablemente en el proceso de instrucción en el aula, conformando un elemento de apoyo para el profesorado en la preparación de la clase (Even y Olsher, 2014; Porter, 2002).

En relación con las tareas matemáticas presentes en los libros de texto de educación infantil que promueven el pensamiento algebraico, se aprecia una predominancia de tareas que requieren establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos, por medio de la comparación de elementos a partir de criterios cualitativos y cuantitativos. De acuerdo con Lenz (2022) las tareas que profundizan en las cualidades y los cuantificadores, por medio de comparaciones y otras relaciones, permite introducir poco a poco la noción de cuasi variable e iniciar el desarrollo del pensamiento relacional.

Se observa una menor presencia de tareas que implican seriaciones con patrones de repetición, mientras que las tareas de cambio son mínimas, lo que es preocupante, puesto que ambos contenidos son esenciales para impulsan el pensamiento funcional (Castro et al., 2017; NCTM, 2000; Warren y Cooper, 2005). Las tareas con patrones de repetición que se movilizan principalmente son ampliar una secuencia, cuya resolución requiere de la organización recursiva de elementos en lugar de identificar la estructura

(McGarvey, 2012). Le siguen las tareas que implican construir el mismo patrón con diferentes elementos e identificar la unidad de repetición. La resolución de estas tareas precisa un pensamiento más abstracto, es decir, para ser resuelta requiere el uso de estrategias de similitud relacional de los elementos al enfocarse en su estructura (Rittle-Johnson et al., 2013; Tirosh et al., 2019), promoviendo la transición al pensamiento funcional (Wijns et al., 2019).

En relación con las tareas matemáticas presentes en los libros de texto de educación primaria que promueven el pensamiento algebraico, predominan las tareas de relaciones basadas en reglas (Demosthenous y Stylianides, 2014), que promueven principalmente el reconocimiento de patrones en sucesiones, así como el cambio y las relaciones de un conjunto de datos que requieren de la generalización de reglas para ser resueltas, fomentando el pensamiento funcional (Kaput, 2008). Seguidas de tareas de relaciones conocidas-desconocidas (Demosthenous y Stylianides, 2014) vinculada con las relaciones entre cantidades, que se fundamenta en la resolución de problemas para la introducción al álgebra y la descripción de lenguajes de modelización (Kaput, 2008). La resolución de estas tareas implica el tratamiento de las variables, símbolos y modelos matemáticos para representar situaciones. Por último, se observa una menor presencia de tareas de relaciones aritméticas situadas (Demosthenous y Stylianides, 2014), centradas en la estructura de la aritmética, atendiendo al comportamiento de las operaciones aritméticas y propiedades como objetos matemáticos, lo que se destaca en la literatura como aritmética generalizada (Carpenter et al., 2003b; Kaput, 2008).

Finalmente, consideramos que el tratamiento que se realiza al álgebra en los libros de texto de educación infantil y primaria, no se encuentra totalmente alineado con lo establecido en las orientaciones curriculares.

5.1.3 Objetivo específico 3

***OE3**: Describir las tareas matemáticas diseñadas por los futuros profesores para promover los inicios del pensamiento algebraico en educación infantil y primaria, y analizar el conocimiento matemático que moviliza el profesorado a partir de su diseño.*

Este objetivo ha sido abordado a partir de los estudios [E] y [F], en los que se ha tomado como objeto central las tareas que diseña el futuro profesorado.

El diseño de tareas matemáticas forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza, puesto que desempeñan un rol importante en las experiencias de aula tanto para los estudiantes como profesores (Wake, 2018). No obstante, el diseño de tareas se ve influenciado por los conocimientos matemáticos que posee el profesorado para la enseñanza (Chamoso y Cáceres, 2019; Sullivan et al., 2015). Por tanto, en el diseño de una tarea, el profesorado deja evidencia de su conocimiento matemático y percepción sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática (Thanheiser, 2015).

Se ha observado que las tareas que diseña el futuro profesorado para abordar los inicios del pensamiento algebraico a través de los patrones de repetición en educación infantil, predomina el contexto informal, es decir, se abordan a través de experiencias reales, recursos lúdicos y material manipulativo (Alsina, 2020). Mientras que, las tareas diseñadas por el profesorado de educación primaria se plantean en un contexto formal a través de recursos gráficos y simbólicos (Alsina, 2020).

Por otra parte, las tareas diseñadas por los futuros profesores para abordar los patrones de repetición, responden a un bajo nivel de demanda cognitiva, centrándose principalmente en tareas de memorización (Smith y Stein, 1998), al proponer mayoritariamente tareas que impliquen ampliar una secuencia, seguidas de tareas que requieren copiar el patrón. Tales tareas no requieren de la identificación de su estructura, es decir, del reconocimiento de la unidad de repetición (Rittle-Johnson et al., 2013).

Sullivan et al. (2015) asegura que el diseño de tareas, permite aproximarnos al conocimiento especializado (SCK) y el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT). En este contexto, las tareas diseñadas por el profesorado exponen dificultades en el conocimiento especializado, tanto en el manejo de la complejidad y profundidad de la tarea sobre patrones para comprender su potencialidad, como en la precisión del lenguaje formal asociado al trabajo con patrones. Asimismo, se evidencian deficiencias en el conocimiento del contenido y la enseñanza en relación con la selección de secuencias de tareas que permitan profundizar en la comprensión de los patrones.

5.1.4 Objetivo específico 4

OE4: Construir instrumentos para evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas en futuros profesores de educación infantil y primaria.

Este objetivo se ha abordado en los estudios [G] y [H], dando lugar a dos instrumentos que permiten evaluar el conocimiento matemático para enseñar álgebra en edades tempranas durante la formación inicial del profesorado de educación infantil y primaria, respectivamente.

Para el diseño de ambos instrumentos se han considerado las experiencias de los estudios previos que profundizan en el conocimiento matemático del profesorado para la enseñanza del álgebra en las etapas de educación infantil y primaria, así como el análisis de las orientaciones curriculares y libros de texto. Estos datos permitieron dar inicio a la construcción de la versión piloto de los instrumentos: Cuestionario MKT - álgebra temprana (3-6) y Cuestionario MKT-álgebra temprana (6-12).

En la construcción de los cuestionarios intervienen dos aspectos centrales, como es la selección de tareas y los aspectos a evaluar de los dominios y subdominios del modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al., 2008). Así pues, se construye la versión piloto de ambos cuestionarios, conformados por seis ítems de respuesta abierta cada uno, algunos provenientes de investigaciones previas, tareas de libros de texto y otros de elaboración propia.

Posteriormente, los cuestionarios se han sometido a un proceso de validación que considera el juicio de 12 expertos en didáctica de la matemática y la aplicación piloto de los cuestionarios a un grupo de 10 futuros profesores de educación infantil y primaria, respectivamente. A partir del análisis de los resultados, observaciones y comentarios recibidos en dicho proceso se han modificado los ítems, quedando conformado ambos cuestionarios por seis ítems y un total de veintidós preguntas cada uno, garantizando la consistencia interna y fiabilidad de los cuestionarios, así como validez del contenido (Muñiz, 2017).

5.1.5 Objetivo específico 5

***OE5**: Evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas de los futuros profesores de educación infantil y primaria.*

Este objetivo ha sido abordado en los estudios [I] y [J], donde el primero de ellos responde a la evaluación del conocimiento matemático del profesorado de educación infantil y el segundo, da respuesta a la evaluación del conocimiento matemático del profesorado de educación primaria.

Se ha aplicado el Cuestionario MKT - álgebra temprana (3-6) a 60 futuros profesores de educación infantil, evidenciando el conocimiento matemático que movilizan para la enseñanza temprana del álgebra. Se observa que el subdominio del conocimiento común del contenido (CCK) se encuentra mejor evaluado en comparación con los otros subdominios de conocimiento. Por ejemplo, los futuros profesores identifican con éxito la estructura de una secuencia, sin embargo, presentan algunas dificultades cuando la secuencia no acaba en una unidad completa de repetición. Esto concuerda con otros estudios que aseguran que el profesorado de educación infantil presenta algunas limitaciones para comprender conceptos básicos asociado con las seriaciones (e.g., Cabral et al., 2021; Noviyanti y Suryadi, 2019). Respecto del conocimiento especializado del contenido (SCK), al igual que en el estudio de Bair y Rich (2011), se observan limitaciones en la identificación de contenidos matemáticos involucrados en una tarea algebraica, más específicamente en tareas donde intervienen patrones de repetición y el cambio.

En cuanto al conocimiento del horizonte matemático, recibe las puntuaciones más bajas en relación con los otros subdominios de conocimiento, puesto que el profesorado de educación infantil no logra establecer conexiones entre los distintos tipos de relaciones matemáticas que se abordan en esta etapa escolar, con otros temas del currículo escolar.

Por otra parte, los futuros profesores mantienen dificultades para anticiparse a los errores o dificultades que enfrentan los estudiantes frente a una tarea de secuencias repetitivas, demostrando un bajo dominio del conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS). En esta misma línea, Cabral et al. (2021) exponen las debilidades del profesorado en formación de educación infantil para interpretar y percibir el pensamiento algebraico de los estudiantes, en relación con este contenido. Asimismo, se observa un conocimiento insuficiente para establecer estrategias de enseñanza y recursos apropiados para abordar tareas de índole algebraico, dejando entrever un conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) limitado.

Por último, en relación con el conocimiento del currículo, la finalidad de las tareas propuestas en el cuestionario no logra ser percibida por el profesorado en formación, puesto que no logra vincularlas con lo propuesto en el plan de estudios. Creemos que la respuesta a esta complicación radica en el currículo español de educación infantil, puesto que sólo considera orientaciones vinculadas con la representación de atributos, omitiendo el trabajo con patrones y descripción de cambios (Alsina, 2022b; Alsina y Pincheira, 2022).

Por otra parte, el Cuestionario MKT-álgebra temprana (6-12) ha sido aplicado a 76 futuros profesores de educación primaria. Al igual que en el caso de los futuros profesores de educación infantil, se observa que el conocimiento común del contenido (CCK) se encuentra mejor evaluado en comparación con los otros subdominios de conocimiento. Por ejemplo, identifican una regla general para establecer una relación entre variables, identifican relaciones en expresiones numéricas, entre otras. Esto concuerda con otros estudios (e.g., Barboza et al., 2020, 2021; Trivilin y Ribeiro, 2015; Zapatera y Callejo, 2018) donde el profesorado enfrenta de manera exitosa tareas vinculadas con los diferentes significados del signo igual o generalización de patrones.

En relación con el conocimiento especializado del contenido (SCK) presenta limitaciones, puesto que el profesorado de primaria no identifica correctamente los contenidos, propiedades o bien no entrega justificaciones ideas matemáticas frente a tareas donde intervienen relaciones entre los números y la construcción de generalizaciones sobre sus propiedades, uso de variables o relaciones entre cantidades covariables. En esta misma línea, otros estudios identifican resultados similares respecto del conocimiento especializado, donde la selección de ejemplos que presenta el profesorado para describir relaciones que conducen a la generalización no siempre son exitosas (McAuliffe y Lubben, 2013), dificultades para asignar el significado semántico involucrado en la resolución de una tarea de reparto equitativo (Bernardo et al., 2018), el significado de equivalencias del signo igual en una expresión matemática (Barboza et al., 2020; Trivilin y Ribeiro, 2015) o la identificación de estrategias de generalización recursiva y explícitas en el desarrollo del pensamiento funcional (Wilkie, 2014, 2016).

En cuanto al conocimiento del horizonte matemático, presenta grandes limitaciones, puesto que los futuros profesores no establecen conexiones entre los contenidos de una tarea fundamentada en la generalización de la aritmética, donde se exploran los diferentes significados del signo igual, con otros contenidos del currículo escolar. El estudio de Barboza et al. (2021), profundiza en esta misma línea a través de las relaciones que establecen los docentes en tareas que involucran el pensamiento relacional, determinando una escasa conexión con el trabajo requerido de los años posteriores.

Respecto del conocimiento del contenido y los estudiantes (SCK) se observa que el profesorado presenta dificultades para anticiparse a los errores de los estudiantes en tareas de generalización aritmética, encontrando similitudes con los estudios de Demonty et al. (2018) y Barbosa et al. (2020) y otros estudios que profundizan en los posibles errores de los estudiantes vinculados con las relaciones funcionales (Wilkie, 2014, 2016). Asimismo, en el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) se observa que las estrategias de enseñanza que propone el profesorado para abordar la instrucción de una tarea algebraica no son del todo concluyentes.

En relación al conocimiento del currículo, se observa que en ocasiones el futuro profesorado de educación primaria presenta limitaciones para interpretar la intencionalidad de una situación de enseñanza y vincularla con las orientaciones propuestas en el plan de estudio, al igual que en el estudio de Trivilin y Robeiro (2015), y Wilkie (2014).

Finalmente, se concluye que el conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en las primeras edades del futuro profesorado tanto de infantil como primaria, se caracteriza por presentar menores limitaciones respecto del conocimiento común del contenido y mayores dificultades en el conocimiento del horizonte matemático.

5.1.6 Objetivo específico 6

***OE6**: Proponer orientaciones didácticas para abordar la enseñanza del álgebra en edades tempranas.*

Este objetivo ha sido abordado en el estudio [K], que ha dado lugar al diseño de diversas tareas que permiten promover modos de pensamiento algebraico en educación infantil, a partir de los contenidos propios de la enseñanza del álgebra en esta etapa escolar. Las tareas que se movilizan en el estudio son: tareas de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos, tareas de seriación con patrones de repetición y tareas que impliquen la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

Es importante señalar que, tales tareas requieren de una planificación y gestión que promueva el pensamiento algebraico a través del planteamiento de retos y preguntas que inviten a razonar y argumentar (Blanton, 2008; Pinto et al., 2023).

Por otra parte, en educación primaria, consideramos seguir avanzando en la línea que lo han hecho otros autores (e.g., Cañadas y Pinto, 2021; Pinto y Ayala-Altamirano, 2021) que han profundizado en orientaciones para abordar la aritmética generalizada y el pensamiento funcional, considerando los procesos de generalización, representación y justificación.

5.2 Contribuciones de la investigación e implicaciones para la formación inicial docente

Las ideas presentadas en esta Tesis Doctoral buscan aportar, desde diferentes perspectivas, al progreso y transferencia del conocimiento matemático del profesorado sobre la enseñanza del álgebra en edades tempranas, de manera que puedan permear en la formación inicial del profesorado de educación infantil y primaria.

La investigación se centra en el objeto matemático álgebra desde la perspectiva del *Early Algebra*, destacando seis contribuciones principales:

a) La revisión sistemática de la literatura sobre los conocimientos del profesorado de educación infantil y primaria aportados en las investigaciones previas acerca de la enseñanza del álgebra en edades tempranas (desde el modelo MKT), constituye un referente teórico que puede ser de gran utilidad para el desarrollo de investigaciones futuras en esta temática.

b) La contrastación curricular realizada sobre el tratamiento otorgado al álgebra en las etapas de educación infantil y primaria entre los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile, deja en evidencia los vínculos que se requieren establecer entre ambas etapas educativas para asegurar la enseñanza efectiva de este bloque de contenidos.

A partir de la revisión curricular se ha caracterizado el álgebra, considerando categorías de conocimiento propias de cada etapa escolar para abordar su enseñanza en edades tempranas. Esta caracterización puede contribuir al diseño e implementación de prácticas de enseñanza más alineadas con los propósitos que persigue el *Early Algebra* para la educación infantil y primaria.

c) El análisis de las tareas algebraicas en los libros de texto chilenos de educación infantil y primaria, podría resultar de interés y ser utilizada para sugerir propuestas de mejora en los libros de texto, en relación con el tratamiento otorgado a la actividad algebraica temprana en ambas etapas escolares. A su vez, los hallazgos encontrados ofrecen la oportunidad al profesorado de adaptar, complementar y profundizar en las tareas que no han sido abordadas por los libros de texto, de modo que sea posible integrar la totalidad de los conocimientos necesarios para promover el desarrollo del pensamiento algebraico en las aulas de educación infantil y primaria.

d) El análisis de las tareas matemáticas que diseña el profesorado en formación de educación infantil y primaria, permite explorar el desempeño instruccional de dichas tareas y conocer qué conocimientos matemáticos pone en juego el profesorado cuando diseña una tarea algebraica temprana de patrones. A su vez, los hallazgos encontrados ofrecen la oportunidad de identificar los saberes matemáticos deben abordarse con mayor urgencia en la formación inicial del profesorado.

e) La construcción de los Cuestionarios MKT-álgebra temprana (3-6) y MKT-álgebra temprana (6-12) para evaluar el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido sobre álgebra en edades tempranas. Tales instrumentos, pueden ser una herramienta útil para apoyar el proceso de formación del profesorado, puesto que su aplicación permite detectar aquellos conocimientos matemáticos que requieren de una mayor profundización para lograr promover el desarrollo del pensamiento algebraico en las etapas de educación infantil y primaria.

f) Las orientaciones didácticas propuestas para abordar los conocimientos que caracterizan la enseñanza del álgebra en edades tempranas y su vinculación con los distintos modos de pensamiento que promueven. Tales orientaciones, pueden ser discutidas y analizadas durante la formación del profesorado y servir de guía para el trabajo que deben desarrollar estos profesores en su práctica futura.

Está ampliamente aceptado que estudiantes piensen algebraicamente desde los primeros niveles de escolarización, la verdadera cuestión es cómo podemos preparar al profesorado para suscitar y guiar dicho pensamiento algebraico. De acuerdo con Carraher et al. (2008) el profesorado es el encargado de ayudar a llevar el carácter algebraico a las matemáticas elementales. Sin embargo, para alcanzar tales propósitos el profesorado debe conocer el álgebra y lo que implica su enseñanza en los primeros años para poder movilizar sus conocimientos didácticos y su identidad profesional en su práctica futura (Branco y Ponte, 2014).

De acuerdo con Blanton (2008):

> Las tareas matemáticas que promueven el pensamiento algebraico por sí solas no les darán a los estudiantes las habilidades que necesitan para razonar algebraicamente. La forma en que se utilizan estas tareas en la instrucción es igualmente importante. (p. 93)

Asumimos que la enseñanza del álgebra en edades tempranas representa una reestructuración en la práctica docente, por tanto, implica cambios en la formación del profesorado de las etapas escolares iniciales.

Los resultados que se han presentado en esta memoria se centran en caracterizar el conocimiento matemático del profesorado para la enseñanza del álgebra en edades tempranas. En este contexto, la situación respecto de los conocimientos matemáticos del profesorado en formación de educación infantil y primaria para la enseñanza del álgebra temprana es preocupante e incentiva la reflexión en relación con ¿qué aspectos debe considerar la formación del profesorado para propiciar el desarrollo de los conocimientos matemáticos que demanda la enseñanza del álgebra temprana en educación infantil y primaria? ¿cómo se deberían orientar las prácticas de este bloque de contenido?

En este sentido, es necesario ofrecer programas de formación al profesorado de educación infantil y primaria que permitan el desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para desarrollar con éxito la enseñanza del álgebra en edades tempranas, a partir de las siguientes líneas de acción:

a) asignaturas centradas en el estudio del álgebra como objeto matemático, para profundizar en los contenidos específicos de este bloque de contenido y su didáctica de acuerdo a los requerimientos que demanda su enseñanza en los primeros niveles de escolarización. Para ello consideramos necesario incorporar las ideas de Blanton (2008), sobre cómo guiar la instrucción del álgebra en el aula. La autora propone cuatro elementos de instrucción importantes, que se deben tener en cuenta para guiar el pensamiento algebraico en las aulas de clase:

- Representar: el profesorado debe proporcionar múltiples formas para que los estudiantes representen sistemáticamente situaciones algebraicas.
- Preguntar: realizar preguntas que alienten a los estudiantes a pensar algebraicamente
- Escuchar: escuchar y desarrollar el pensamiento de los estudiantes
- Generalizar: ayudar a los estudiantes a desarrollar y justificar sus propias generalizaciones.

b) proporcionar herramientas que permitan al profesorado reflexionar sobre su propia práctica docente y su interacción discursiva en el aula de educación infantil y primaria. En consecuencia, incorporar el álgebra y movilizar el desarrollo del pensamiento algebraico de manera efectiva desde los primeros niveles educativos, requiere transformar la formación del profesorado para ponerla al servicio de los nuevos desafíos que implica la enseñanza de este estándar de contenido.

Considerando las orientaciones pedagógicas generales para la formación del profesorado de matemáticas (Lewis, 2016) y específicas para la enseñanza del álgebra en educación infantil y primaria (Alsina, 2019b, 2022a), sería recomendable centrar la formación a partir de:

- el análisis y discusión de situaciones reales de aula, ya que permiten situar al profesorado en formación y con ello fortalecer el desarrollo del conocimiento matemático que moviliza.

- Asimismo, es recomendable también profundizar en el diseño de tareas como una acción que promueve el desarrollo del conocimiento matemático del profesorado para enseñanza del álgebra en edades tempranas. Como formadores, se debe guiar el diseño, implementación y rediseño de tareas algebraicas tempranas focalizadas en la capacidad de hacer y expresar generalizaciones (Kaput, 2008), permitiendo determinar en profundidad la actividad matemática que deben poner en juego los estudiantes en educación infantil y primaria para enfrentar el desarrollo de una tarea algebraica temprana.

Cabe destacar que, es necesario establecer una estrecha coordinación entre la formación del profesorado de educación infantil y primaria para garantizar la continuidad de los objetivos establecidos en las orientaciones curriculares, lograr una enseñanza eficaz y el desarrollo del pensamiento algebraico del álgebra desde las primeras edades, que asegure las bases para su posterior profundización en la educación secundaria.

5.3 Limitaciones y perspectivas futuras

Una vez finalizada la investigación, es posible ver en perspectiva algunas limitaciones que presenta el estudio:

En cuanto a los cuestionarios que se han construido para evaluar el conocimiento matemático para enseñar álgebra en futuros maestros de educación infantil y primaria, si bien han considerado todas los dominios y subdominios del Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al., 2008), lo hace de manera inicial o parcial, centrándose sólo en algunos aspectos. Puesto que realizar un estudio en mayor profundidad hubiese requerido, por ejemplo, la observación de la instrucción que llevan a cabo los participantes durante el desarrollo de sus prácticas pedagógicas; el análisis de las interacciones que se dan al interior del aula; así como la revisión de planificaciones y desarrollo de entrevistas, condiciones a las que durante el transcurso de la investigación no fue posible acceder. Por tanto, se decidió evaluar aspectos parciales o iniciales de los distintos subdominios que componen el Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza.

Como línea futura de investigación, sería apropiado diseñar un programa de intervención a partir de los resultados obtenidos que permitan mejorar y desarrollar el conocimiento matemático del profesorado de educación infantil y primaria sobre álgebra y, posteriormente, medir su efecto.

Por otra parte, respecto del diseño de tareas que realizan los participantes, se ha profundizado sólo desde la perspectiva de los patrones, como objeto matemático que promueve los inicios del pensamiento algebraico y contenido articulador del álgebra en las etapas de educación infantil y primaria. Sería conveniente analizar en futuras investigaciones las tareas que diseñan los futuros profesores para promover la enseñanza de otros contenidos algebraicos tempranos en los niveles de educación infantil y primaria, al tratarse de un aspecto clave en la formación universitaria que reciben los futuros profesores.

Otra línea de indagación, posible de abordar en futuras investigaciones, son el conocimiento algebraico del profesorado de educación infantil y primaria, puesto que de este depende la instrucción que llevará a cabo para movilizar la enseñanza el álgebra en edades tempranas.

Asimismo, consideramos importante abordar el *Professional Noticing* del profesorado en formación y activo, como constructo que permite el reconocimiento del pensamiento algebraico que muestran los niños en las aulas de educación infantil y primaria, a través de acciones tales como: el prestar atención a las estrategias que utilizan los estudiantes, interpretar su comprensión y la tomar decisiones que realiza el profesorado acerca de cómo responder a los estudiantes.

Finalizamos esta Tesis Doctoral, con el anhelo de haber aportado y entregado pistas que contribuyan a la mejora de la formación inicial y continua del profesorado de educación infantil y primaria en relación con la enseñanza del álgebra en las primeras edades. Esperamos que las investigaciones en esta temática sigan en aumento y contribuyan cada vez más a desarrollar una comprensión profunda de cómo guiar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de escolarización.

REFERENCIAS

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022a). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, *22*, 91-110.

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022b). El pensamiento algebraico en educación infantil: Estrategias didácticas para promover y evaluar las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *11*(2), 1-37. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf.*

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto: De 3 a 6 años*. Horsori.

Alsina, Á. (2012). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de los 0 a los 6 años: Propuestas didácticas* (2a. ed). Octaedro.

Alsina, Á. (2019a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años*. Graó.

Alsina, Á. (2019b). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *8*(1), 1-19. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19

Alsina, A. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM - Revista de Educação*

Matemática, *3*(2), 127-158. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2022a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3 a 6 años)*. Graó.

Alsina, Á. (2022b). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: Contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Épsilon – Revista de Educación Matemática*, *111*, 67-89.

Alsina, Á., y Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: Un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Didácticas Específicas*, *16*, 113-129.

Alsina, Á., y Pincheira, N. (2022). Luces y sombras del álgebra temprana en el currículo español (3-12 años). *Revista Suma*, *99*, 17-26.

Alsina, A., y Pincheira, N. (2022). El cambio: Un conocimiento esencial del álgebra temprana: Change: Essential knowledge of early algebra. *Revista Científica Ecociencia*, *9*(6), 49-76. https://doi.org/10.21855/ecociencia.96.737

Anglada, L., y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yañez, M. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2020). *The Australian Curriculum: Mathematics*.

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Bair, S. L., y Rich, B. S. (2011). Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and

Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 292-321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barboza, L. C. D. S., Pazuch, V., y Ribeiro, A. J. (2021). Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. *Zetetike*, *29*, e021009. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8656716

Barboza, L. C. D. S., Ribeiro, A. J., y Pazuch, V. (2020). Primary School Teacher’s Professional Learning: Exploring Different Meanings of the Equals Signal. *Acta Scientiae*, *22*(4), 71-97. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5418

Bernardo, R. D., Carotenuto, G., Mellone, M., y Ribeiro, M. (2018). Prospective teachers’ interpretative knowledge on early algebra. *Cadernos de Pesquisa*, *24*(esp.), 208. https://doi.org/10.18764/2178-2229.v24n.especialp208-222

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 5-23). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., y Dougherty, B. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*.

National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgreb, P., Willis, C., Davis, F., y Confrey, J. (2007). Early Algebra. En V. J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a Technological Future* (pp. 7-14). Mathematical Association of America.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., y Kim, J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Blömeke, S., y Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: A review of the state of research. *ZDM*, *44*(3), 223-247. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0429-7

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (1998). The role of algebraization in the study of a mathematical organization. En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Vol. II* (CERME, pp. 135-145).

Branco, N., y Ponte, J. (2014). Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. En J. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 379-408). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Cabral, J., Oliveira, H., y Mendes, F. (2021). Preservice Teachers' Mathematical Knowledge about Repeating Patterns and their Ability to Notice Preschoolers Algebraic Thinking. *Acta Scientiae*, *23*(7), 30-59. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6302

Cai, J., Ng, S. F., y Moyer, J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* (pp. 25-41). Springer.

Cañadas, M. C., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En Encarnación. Castro, E. Catro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, y M. Torroalbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-2018). Comares.

Cañadas, M. C., y Pinto, E. (2021). Prácticas en el aula de educación primaria relacionadas con el pensamiento algebraico. *Uno: Revista en Didáctica de las matemáticas*, *94*, 19-27.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003a). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003b). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53-59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Schwarz, J. L. (2008). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Lawrence Erlbaum

Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo del pensamiento relacional mediante el trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, *19*(2), 67-94.

Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]*. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf

Castro-Rodriquez, E., y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. En Encarnación. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87-107). Ediciones Pirámides.

Chamoso, J. M., y Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *18*, 59-69.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: Insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 57-76. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x

Choppin, J., Roth McDuffie, A., Drake, C., y Davis, J. (2018). Curriculum ergonomics: Conceptualizing the interactions between curriculum design and use. *International Journal of Educational Research*, *92*, 75-85. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.015

Clements, D. H., y Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach* (0 ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883389

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (Eighth edition). Routledge.

Collins, M. A., y Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, *32*, 204-214. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.04.004

Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed). SAGE Publications.

Creswell, J. W., y Plano Clark, V. L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (Third Edition). SAGE.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher Quality and Student Achievement. *Education Policy Analysis Archives*, *8*, 1. https://doi.org/10.14507/epaa.v8n1.2000

Darling-Hammond, L., Wei, R. C., y Johnson, C. M. (2009). Teacher Preparation and Teacher Learning: A Changing Policy Landscape. En G. Sykes, B. Schneider, y D. N. Plank, *Handbook of Education Policy Research* (pp. 613-636). American Educational Research Association and Routledge.

Davis, R. B. (1985). ICME-5 report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of*

Mathematical Behavior, *4*, 195-208.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. Journal for Research in Mathematics Education, 42(4), 308- 345. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0308

Demonty, I., Vlassis, J., y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(1), 1-19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Demosthenous, E., y Stylianides, A. (2014). Algebra-related tasks in primary school textbooks. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 369-376). PME.

Dienes, Z. P. (1971a). *Estados y operadores. 1: Operadores aditivos*. Teide.

Dienes, Z. P. (1971b). *Estados y operadores 2: Iniciación al álgebra.* Editorial Teide.

Dienes, Z. P., y Golding, E. (1976). *Los primeros pasos en matemáticas. 1: Lógica y juegos lógicos.* Teide.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2

Dumas, D., Alexander, P. A., y Grossnickle, E. M. (2013). Relational Reasoning and Its Manifestations in the Educational Context: A Systematic Review of the Literature. *Educational Psychology Review*, *25*(3), 391-427. https://doi.org/10.1007/s10648-013-9224-4

Even, R., y Olsher, S. (2014). Teachers as participants in textbook development: The

Integrated Mathematics Wiki-book Project. En Y. Li y G. Lappan (Eds.), *Mathematics Curriculum in School Education* (pp. 333-350). Springer.

Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E., y Sprenger, P. (2020). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: A standardized situation-related measurement approach. *ZDM*, *52*(2), 193-205. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01103-2

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta edición). McGraw-Hill Education.

Hiebert, J., y Grouws, D. A. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students’ Learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Information Age Publishing.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers’ Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Hill, H. C., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers’ Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational*

Research Journal, *42*(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(3), 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education*, *38*(3), 258-288.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-135). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). 1 What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra In The Early Grades* (1st ed., pp. 5-18). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum.

Katz, V. J. (Ed.). (2007). *Algebra: Gateway to a technological future*. Mathematical Association of America.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390-419).

New York: Macmillan Publishing Company. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*, 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Information Age Publishing.

Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching. En J. Cai y E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016a). *Early algebra*. Springer Berlin Heidelberg.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016b). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Kim, D.-W., y Kim, Y. (2022). Interview study on preservice teachers' knowledge for teaching early algebra. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *32*(3), 287-308. https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.287

LaCampagne, C., Blair, W., y Kaput, J. J. (1995). *The algebra initiative colloquium: Vol*

1: Plenary and reactor papers. Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement. Vol 2: Working group papers ED385437.pdf Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf

Lane, K. L., Oakes, W. P., Powers, L., Diebold, T., Germer, K., Common, E. A., y Brunsting, N. (2015). Improving Teachers' Knowledge of Functional Assessment-based Interventions: Outcomes of a Professional Development Series. *Education and Treatment of Children*, *38*(1), 93-120. https://doi.org/10.1353/etc.2015.0001

Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: An interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1181-1197. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6

Liljedahl, P. (2004a). *Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. Focus on learning problems in mathematics, 26(3), 24-42. 26*(3), 24-42.

Liljedahl, P. (2004b). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*(3), 24-82.

Lins, R., y Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal, *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Proceedings of the 12th ICMI study conference, pp. 47-70). Kluwer Academic Publishers.

Lüken, M. M. (2018). *Is patterning a mathematical activity? An analysis of young children's strategies in working with repeating patterns*. A mathematics education perspective on early mathematics learning- POEM 2018POEM 2018.

Lüken, M. M., y Sauzet, O. (2021). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Malara, N. A., y Navarra, G. (2009). The analysis of classroom-based processes as a key task in teacher training for the approach to early algebra. En B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars*. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. En N. Bernarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (ed.), And the rest is just algebra (pp. 97-117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Mason, J., Stephens, M., y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

Maxwell, J. A. (2016). Expanding the History and Range of Mixed Methods Research. *Journal of Mixed Methods Research*, *10*(1), 12-27. https://doi.org/10.1177/1558689815571132

McAuliffe, S., y Lubben, F. (2013). Perspectives on pre-service teacher knowledge for teaching early algebra. *Perspectives in Education*, *31*(3), 155-169.

McGarvey, L. M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Mejías, C. (2019). *Evaluación del los Conocimiento para la Enseñanza del Álgebra en Profesores en Ejercicio de Educación Primaria [Tesis de doctorado, Universidad de Girona]*. https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/17137

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2018). *Bases curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministry of Education, Republic of Singapore. (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six. Singapore*. Curriculum Planning and Development Division.

Ministry of Education, Republic of Singapore. (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Sigapore: Numeracy: Volumen 6*. Ministry of Education.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61-80.

Molina, M., y Castro, E. (2021). Third Grade Students' Use of Relational Thinking. *Mathematics, 9*(2), 187. https://doi.org/10.3390/math9020187

Montessori, M. (1914). *El método de la pedagogía científica aplicado a la educación de la infancia en las Case dei Bambini*. Araluce.

Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Muñiz, José. (2017). *Teoría clásica de los tests*. Ediciones Pirámide.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ng, D. (2011). Indonesian primary teachers' mathematical knowledge for teaching geometry: Implications for educational policy and teacher preparation programs. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, *39*(2), 151-164. https://doi.org/10.1080/1359866X.2011.560648

Noviyanti, M., y Suryadi, D. (2019). Basic Mathematics Knowledge of Early Childhood Teachers. *Journal of Engineering Science and Technology*, *1*, 19-27.

Oliveira, H., Polo Blanco, I., y Henriques, A. (2021). Exploring ploring prospective elementary mathematics teachers' knowledge: A focus on functional thinking. *Journal on Mathematics Education*, *12*(2), 257-278. https://doi.org/10.22342/jme.12.2.13745.257-278

Onwuegbuzie, A. J., Johnson, R. B., y Collins, K. M. (2009). Call for mixed analysis: A philosophical framework for combining qualitative and quantitative approaches. *International Journal of Multiple Research Approaches, 3*(2), 114-139. https://doi.org/10.5172/mra.3.2.114

Papic, M. M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Papic, M., y Mulligan, J. T. (2007). Proceedings of the 30th annual conference of the

Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice. En J. Watson y K. Beswich (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice* (Vol. 2, pp. 591-600). Merga.

Piaget, J. (1941). *Génesis de las estructuras lógicas elementales*. Guadalupe.

Piaget, J. (1953). How children from mathematical concepts. *Scientific American*, *189*(5), 74-79.

Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: Un análisis desde los libros de texto. *PNA*, *17*(1), 1.24.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pinto, E. (2021). La construcción y justificación de ideas matemáticas generales por un niño de 5 años: El rol de las representaciones manipulativas. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, *6*(2), 144-164. https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16011

Pinto, E., y Ayala-Altamirano, C. (2021). Álgebra más allá de letras y números: Oportunidades para desarrollar el pensamiento algebraico en la Educación Primaria. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, *4*(4), 35-48. https://doi.org/10.30612/tangram.v4i4.15415

Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *12*(3), 173-184. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6643

Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pinto Marín, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M., y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *41*(1), 149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(5), 631-674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Porter, A. C. (2002). Measuring the Content of Instruction: Uses in Research and Practice. *Educational Researcher*, *31*(7), 3-14. https://doi.org/10.3102/0013189X031007003

Poth, C., y Munce, S. E. (2020). Commentary—Preparing today's researchers for a yet unknown tomorrow: Promising practices for a synergistic and sustainable mentoring approach to mixed methods research learning. *International Journal of Multiple Research Approaches, 12(1),* 56-64. https://doi.org/10.29034/ijmra.v12n1commentary

Radford, L. (2011a). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking* (4th ed., pp. 17-24). PME.

Radford, L. (2011b). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 303-322). Springer Berlin Heidelberg.

https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina, *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Comares.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, *31*, 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 376-396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Santagata, R., y Lee, J. (2021). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: A study of novice elementary school teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(1), 33-60. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09447-y

Shorten, A., y Smith, J. (2017). Mixed methods research: Expanding the evidence base. *Evidence Based Nursing*, *20*(3), 74-75. https://doi.org/10.1136/eb-2017-102699

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching.

Educational Researcher, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra In The Early Grades* (pp. 133-160). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Reflections on Practice: Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344-350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., y Gardiner, A. M. (2015). Just Say Yes to Early Algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Stephens, A. C. (2008). What “counts” as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(1), 33-47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.12.002

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M. L., y Brisuela, M. B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). National Council of Teachers of Mathematics.

Sullivan, P., Knott, L., y Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies, and student learning. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education* (pp. 83-114). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_13

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 141-164. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9269-y

Teddlie, C., y Tashakkori, A. (2009). *Foundations of mixed methods research: Integrating quantitative and qualitative approaches in the social and behavioral sciences*. SAGE.

Thanheiser, E. (2015). Developing prospective teachers' conceptions with well-designed tasks: Explaining successes and analyzing conceptual difficulties. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 141-172. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9272-9

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Cassell.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E. S., Barkai, R., y Tabach, M. (2019). Preschool teachers' knowledge of repeating patterns: Focusing on structure and the unit of repeat. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(3), 305-325. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9395-x

Trivilin, L. R., y Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: Um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 38-59. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. En A. F. Coxforf y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19).

Wagner, S., y Kieran, C. (Eds.). (1989). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (1.ª ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044378

Wake, G. C. (2018). A case study of theory-informed task design: What might we, as designers, learn? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, F. Alonso, F. J. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). SEIEM.

Walkoe, J., Walton, M., y Levin, M. (2022). Supporting Teacher Noticing of Moments of Algebraic Potential. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *32*(3), 271-286. https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.271

Warren, E., y Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: A Case Study of Early Algebra Teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Warren, E., y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds’ thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171-185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019). Four-year olds’ understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 152-163. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019). Young children’s patterning competencies and mathematical development: A review. En K. M.

Robinson, H. P. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical learning and cognition in early childhood: Integrating interdisciplinary research into practice* (pp. 139-161). Springer.

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(5), 397-428. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9251-6

Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: Changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 245-275. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0151-1

Wilkie, K. J., y Clarke, D. (2015). Pathways to Professional Growth: Investigating Upper Primary School Teachers' Perspectives on Learning to Teach Algebra. *Australian Journal of Teacher Education*, *40*(4), 87-118.

Zapatera, A., y Callejo, M. L. (2018). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educación*, *29*(4), 1217-1235. https://doi.org/10.5209/RCED.55070

ANEXOS

Cuestionario álgebra temprana para el profesorado en formación de Educación Infantil

Datos de identificación:

1. Género (marque con una X): (__) Femenino (__) Masculino (__) Otro

2. Edad: _____ años

3. Estudios previos realizados (marque con una X):

(__) Bachillerato: (__) Artes

(__) Ciencia y tecnología

(__) Humanidades y ciencias sociales

(__) Ciclo formativo de grado superior (indicar nombre del ciclo):

____

____

Instrucciones para responder el cuestionario:

- En cada uno de los ítems debe considerar un tiempo máximo de 10 minutos para responder.
- Imagine que usted se enfrenta a situaciones reales de aula, responda de acuerdo a lo que usted haría o diría en aquel momento.
- Sus respuestas son confidenciales y voluntarias.
- Agradecemos que responda la mayor cantidad de preguntas que le sea posible.

Ítem 1:

Una maestra propone a los niños de 4 años el juego “Somos detectives”. A continuación, se presenta un extracto de la planificación de la actividad:

Los niños se organizan en grupos y observan cómo están dispuestos algunos materiales de la sala. Responden preguntas como: ¿Para qué sirven estos materiales?, ¿qué tienen en común?, ¿en qué se diferencian con los materiales del otro mueble?, ¿por qué creen que están juntos?, ¿en qué se parecen? Luego, cada grupo comparte sus ideas y, en conjunto, descubren cuáles son los criterios que se utilizaron al colocarlos. Finalmente, establecen acuerdos para proponer nuevos criterios para colocar los materiales y, en la medida de lo posible, los implementan para reorganizar el aula.

Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben poner en práctica los niños para participar en la tarea propuesta por la maestra?

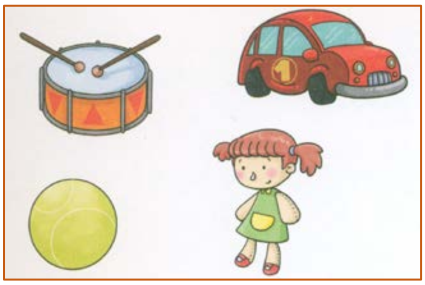
b) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?

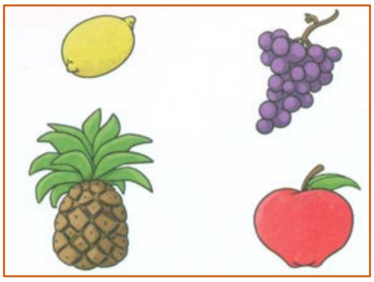
c) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar se relaciona el contenido abordado en la tarea?

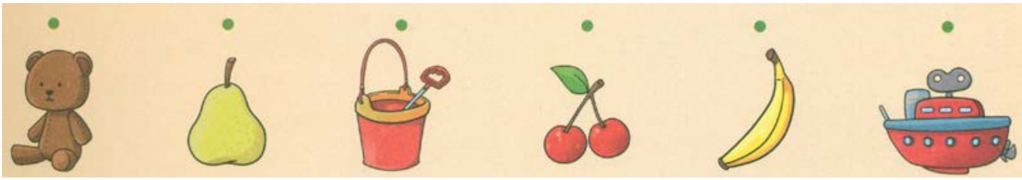
Ítem 2:

Una maestra propone a los niños de 4 años la siguiente tarea:

"Une con una línea los elementos de la fila que pertenecen a cada grupo"







Preguntas:

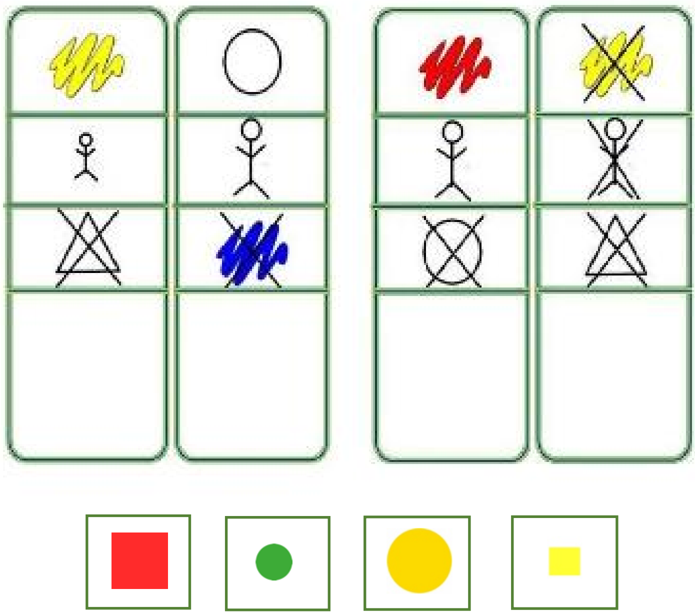
a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben utilizar los niños para dar una solución correcta al problema planteado?

b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.

c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a los niños que han tenido dificultades para resolver la tarea?

Ítem 3:

Un maestro muestra a los niños de 5 años las siguientes bandas de atributos y les indica que lean los atributos de cada banda y las relacionen con la pieza que corresponde de la parte inferior:



Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben utilizar los niños para dar una solución correcta a la tarea?

b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.

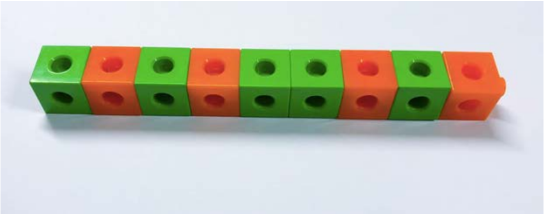
c) ¿Qué otro recurso utilizaría para que los niños desarrollen este tipo de tarea? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.

d) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?

Ítem 4:

Una maestra muestra a los niños de 3 años un set de cubos encajables *Multilink*. El objetivo de la actividad es: "Construir una serie sencilla a partir de la manipulación libre del material propuesto".
A continuación, se describe la situación que ocurre con una niña:

Niña: ¡Una torre! Ahora toca la verde
Maestra: ¿Por qué toca la verde?
Niña: Porque es verde, naranja, verde, naranja
Maestra: ¿Qué ha ocurrido en la mitad de la torre? (La maestra señala el error)



Preguntas:

a) Siguiendo la serie descrita verbalmente por la niña, ¿qué cubo debería ubicarse en el lugar 21? Explique cómo ha obtenido su respuesta.

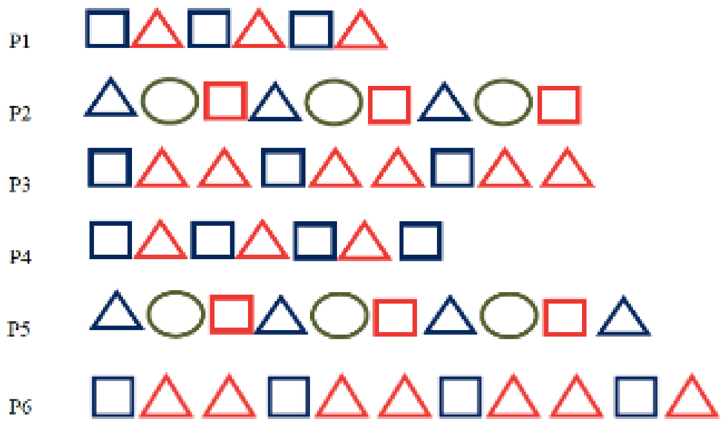
b) ¿Qué contenido(s) matemático(s) ha utilizado la niña para construir la seriación?

c) Describa las posibles dificultades que han llevado a la niña a responder de manera errónea.

d) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a la niña a que se de cuenta de su error y lo supere? Justifique su respuesta.

Ítem 5:

Una maestra lleva a cabo con los niños de 5 años la siguiente tarea: en primer lugar, prepara cajitas con recortes de triángulos, cuadrados y círculos; luego presenta la primera serie (P1), escoge a un niño y coloca dos cajitas delante de él, una con cuadrados azules y otra con triángulos rojos; seguidamente, pregunta: “¿qué sigue después?”
Con las series siguientes continúa interactuando de la misma manera con los niños de su clase.



Preguntas:

a) Determine la unidad de repetición (el patrón) de cada serie. Justifique su respuesta.

b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.

c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos niños que han tenido dificultades para resolver la tarea?

d) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?

Ítem 6:

Un libro de texto de Educación Infantil propone la siguiente tarea a los niños de 5 años:
“Dibuja la figura que sale de la máquina de cambiar cualidades”

Para responder la tarea los niños deben mirar los ejemplos del recuadro superior, donde se ejemplifica el cambio que hace cada operador -color, tamaño y forma respectivamente- y, seguidamente, en el recuadro de la parte inferior dibujar una solución posible.

Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) matemático(s) deben utilizar los niños para responder de manera correcta?

b) Describa las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea.

c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar aquellos niños que han tenido dificultades para resolver la tarea?

d) Considerando el currículo escolar de Educación Infantil, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea?

Cuestionario álgebra temprana
para el profesorado en formación de Educación Primaria

Datos de identificación:

1. Género (marque con una X): (__) Femenino (__) Masculino (__) Otro

2. Edad: _____ años

3. Estudios previos realizados (marque con una X):

(__) Bachillerato: (__) Artes

(__) Ciencia y tecnología

(__) Humanidades y ciencias sociales

(__) Ciclo formativo de grado superior (indicar nombre del ciclo): ________________

____

Instrucciones para responder el cuestionario:

- En cada uno de los ítems debe considerar un tiempo máximo de 10 minutos para responder.
- Imagine que usted se enfrenta a situaciones reales de aula, responda de acuerdo a lo que usted haría o diría en aquel momento.
- Sus respuestas son confidenciales y voluntarias.
- Agradecemos que responda la mayor cantidad de preguntas que le sea posible.

Ítem 1:

Una maestra estaba analizando las respuestas de los alumnos de su clase de 4º grado, luego de plantear el siguiente problema:

Los hermanos Arturo y Cecilia recibieron de su tía la misma cantidad de dinero. Arturo decidió guardar 20 euros en su hucha y guardar una cantidad de dinero para llevar a la escuela. Cecilia guardó en su hucha 16 euros y cogió lo restante para comprar algunos adhesivos.
Como ambos niños recibieron la misma cantidad de dinero, podemos establecer la igualdad:

$$20 + \_\_\_ = 16 + \_\_\_$$

Determine el valor que cada niño cogió para sus gastos. Explique cómo llegó al resultado.

Carlos, Joaquín y Cristina:
"Arturo llevó a la escuela 10 euros y Cecilia separó 14 para comprar sus adhesivos.
Nosotros pensamos que, si recibieron la misma cantidad, entonces Cecilia se gastó 4 euros más que su hermano y creemos que se llevó 10 euros, porque en la escuela sólo se puede llevar un máximo de 10 euros. Así que tenemos 20 + 10 = 30 y 16 + 14 = 30"

Santiago, Raquel y Carolina:
"Arturo llevó a la escuela 36 euros y Cecilia gastó los mismos 36 euros en adhesivos, porque tenían la misma cantidad.
Llegamos a esta respuesta, juntando los valores que aparecen en la cuenta: 20+16"

Paula, Mateo y Mauricio:
"Arturo llevó a la escuela 5 euros y su hermana gastó 9 euros en adhesivos. Nosotros pensamos que, si ambos recibían la misma cantidad y él guardaba 4 euros más en su hucha, entonces Cecilia tenía 5 euros más 4 euros para gastar en adhesivos. Obtenemos esta respuesta haciendo 20 + 5 = 16 + 9, porque Arturo ahorró 4 euros más que su hermana"

Preguntas:

a) ¿Qué respuesta(s) debería aceptar la maestra como correcta(s)? ¿Por qué?

b) ¿Qué dificultades evidencian los alumnos del curso para resolver el problema?

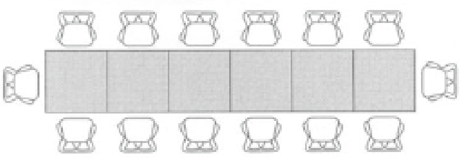
c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?

d) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar se relaciona el contenido abordado en la tarea?

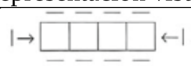
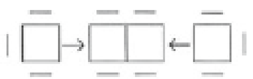
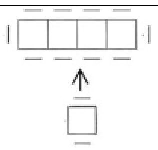
Ítem 2:

Una maestra expone el siguiente problema a sus alumnos de 6º grado:

Los padres de Esteban están organizando una fiesta de cumpleaños para él. Se ponen en contacto con el Sr. Gómez, encargado del catering, quien sólo tiene unas pequeñas mesas cuadradas. Él propone ponerlas una al lado de la otra para formar una mesa larga en la que se sentarán todos los invitados, como se muestra a continuación:



Determine una regla que sirva para encontrar el número de sillas para cualquier número de mesas que se tenga. Algunos ejemplos de la regla elaborada por los alumnos son las siguientes:

Alumnos	Representación visual	Regla sugerida por los alumnos
Alumno 1		Número de sillas = (número de mesas x 2) + 2
Alumno 2		Número de sillas = (número de mesas - 2) x 2 + 6
Alumno 3		Cada vez que añades una mesa, tienes 2 sillas más: Número de sillas = Número de mesas + 2

Preguntas:

a) ¿Qué respuesta(s) debería aceptar la maestra como correcta(s)? ¿Por qué?

b) ¿Qué contenido(s) y/o propiedad(es) matemática(s) deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?

c) ¿Qué dificultades podrían estar enfrentando el o los alumnos que respondieron de manera errónea?

d) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver la tarea?

Ítem 3:

Un maestro plantea a sus alumnos de 5º grado la siguiente situación:

Carlitos es un niño y le gustan los dulces. Tiene una caja con 28 caramelos dentro. Todos los días él come el doble de caramelos que el día anterior. En tres días Carlitos se ha comido todos los dulces.

Luego, pregunta a sus alumnos: ¿Cuántos caramelos ha comido Carlitos cada día?
Dos alumnos señalan cómo han resuelto el problema.

Teresa:
"El primer día Carlitos se come una porción de caramelo y no sabemos cuánto vale... [Teresa dibuja un cuadrado], el segundo día come el doble que el primero, así que dos porciones [dibuja dos cuadrados] ... el tercer día el doble que el segundo, es decir, cuatro raciones [dibuja cuatro cuadrados]. Ahora los veintiocho caramelos hacen las divisiones entre las siete porciones que he identificado, y sé el valor de cada porción..."

Lucas:
"Tomé los caramelos que tenía la caja y los dividí por siete. El resultado es 4, que se corresponde con los caramelos que come cada día. Entonces, el primer día se come 4, el segundo día se come 8 y el tercer día se como 16."

Preguntas:

a) Resuelva el problema planteado por el maestro. Justifique su respuesta.

b) Explique si considera matemáticamente correctas o no las producciones de los alumnos. Justifique la idoneidad o insuficiencia de la racionalidad matemática mostrada por los alumnos.

c) Considerando el currículo escolar de Educación Primaria, ¿cuál podría ser el objetivo de la tarea propuesta a los alumnos?

<u>Ítem 4:</u>

Durante el desarrollo de una clase se discute la siguiente situación:

Pedro es 4 cm más alto que Clara. Si Clara mide "n" cm, ¿cuánto mide Pedro?

A continuación, se muestra el diálogo entre tres alumnos:

Luis: La altura de Pedro es 4n
Pilar: No. La altura de Pedro es de 104 cm.
María: Creo que la altura de Pedro es x+4

<u>Preguntas:</u>

a) Determine la estatura de Pedro. Justifique su respuesta.

b) Describa las posibles dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea.

c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema correctamente?

d) De acuerdo al currículo escolar de Educación Primaria, ¿para qué nivel escolar considera pertinente este problema? Justifique su respuesta.

Ítem 5:

Un maestro solicita a sus alumnos completar la siguiente tabla, entregando la siguiente instrucción:

"Marca las siguientes expresiones numéricas de acuerdo a su veracidad o falsedad, justificando su elección"

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24			
46 + 27 – 27 = 27			
◊ x 1 = ◊			
□ + 0 = □			

Algunas respuestas de los alumnos fueron las siguientes:

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24	x		Porque es el mismo resultado, sólo ha cambiado el orden

	V	F	Justifica
46 + 27 – 27 = 27		x	Porque 46+27= da 79 y 79 menos 27 da 46

	V	F	Justifica
24 + 37 = 37 + 24		x	Los cálculos no son hechos, el resultado nunca tiene multiplicación. Por lo tanto está incorrecto!

	V	F	Justifica
46 + 27 – 27 = 27		x	Está incorrecto porque 27-27 da 0 y sobra el 46

	V	F	Justifica
◊ x 1 = ◊	x		Todo x 1 es igual al primer número

	V	F	Justifica
□ + 0 = □	x		El cuadradito es cero, por eso el resultado es el cuadradito.

Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) y/o propiedad(es) matemática(s) deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?

b) Describa las posibles dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea.

c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría usted, como profesor, para orientar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea a la tarea?

d) ¿Para qué nivel escolar considera pertinente este problema, de acuerdo al currículo escolar actual de Educación Primaria?

Ítem 6:

Un maestro escribe en la pizarra 3+2+2=5+2=7 y solicita a sus alumnos de 3º grado analizar si es correcta o incorrecta la expresión numérica.

Dos alumnos señalaron lo siguiente:
"Carla explicó que la expresión era incorrecta, ya que no se habían sumado todos los números, por lo que el resultado final daría 21, leyendo "3+2+2+5+2+7=21.
Rodrigo dijo que la expresión era correcta y que el siete era la respuesta".

Preguntas:

a) ¿Qué contenido(s) y/o propiedad(es) matemática(s) deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea?

b) Describa las posibles dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea.

c) ¿Qué estrategias de enseñanza utilizaría para ayudar a la alumna a que se dé cuenta de su error y lo supere? Justifique su respuesta.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN INFANTIL		
		Respuesta correcta (2 puntos)	**Respuesta parcialmente correcta (1 punto)**	**Respuesta incorrecta (0 puntos)**
Ítem 1	a)	Identifica dos o más contenidos matemáticos que deben poner en práctica los niños para participar de la tarea. Los contenidos matemáticos presentes en la tarea son: a) describir atributos de objetos, tales como, forma, color, tamaño, función, entre otros; b) describir semejanzas y diferencias al comparar objetos, considerando dos o tres atributos a la vez; c) agrupar elementos por dos o tres atributos que tienen en común (forma, color, tamaño, función, entre otros); d) nombrar criterios utilizados para clasificar elementos.	Identifica sólo uno de los contenidos matemático que deben poner en práctica los niños para participar de la tarea.	No logra identificar contenidos matemáticos presentes en la tarea o los que identifican no corresponden con la tarea.
	b)	Reconoce que el objetivo de la tarea es experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por dos o tres atributos a la vez (forma, color, tamaño, función, materialidad, entre otros)	Reconoce que el objetivo se encuentra vinculado con la experimentación de objetos, pero no identifica la relación de clasificación por atributos.	No logra identificar el objetivo o el objetivo que plantea no responde a la descripción de la tarea.
	c)	Identifica la teoría de conjuntos y el sentido de pertenencia o no pertenencia de este.	Sólo identifica la teoría de conjuntos, pero no reconoce el sentido de pertenencia o no pertenencia.	No logra realizar conexiones con otros contenidos más avanzados del currículo escolar

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN INFANTIL		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 2	a)	Identifica dos o más contenidos matemáticos que deben utilizar los niños para dar una solución correcta al problema. Los contenidos matemáticos presentes en la tarea son: clasificación, relación de pertenencia, reconocimiento de elementos que forman parte de una agrupación.	Identifica sólo uno de los contenidos matemático que deben utilizar los niños para dar una solución correcta al problema.	No logra identificar contenidos matemáticos presentes en la tarea o los que identifican no corresponden con la tarea.
	b)	Identifica las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver el problema, que tienen relación con identificar la categoría de cada conjunto y, establecer la relación entre el conjunto y los elementos.	Menciona a nivel muy general que las posibles dificultades que enfrentan los niños para resolver el problema se pueden relacionar con la experimentación con objetos.	No logra identificar posibles dificultades.
	c)	Menciona estrategias de enseñanza para ayudar a los niños que tienen dificultades en resolver la tarea, entre ellas destaca, el uso de material manipulativo para establecer clasificaciones y relaciones de pertenencia de objetos, y establecer preguntas que orienten a una respuesta correcta, por ejemplo: ¿para qué sirve un juguete?, ¿para qué sirve una fruta?	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar a los niños que tienen dificultades para resolver la tarea, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a los niños que tienen dificultades para resolver la tarea.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN INFANTIL		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 3	a)	Identifica dos o más contenidos matemáticos que deben utilizar los niños para dar una solución correcta a la tarea. Los contenidos matemáticos presentes en la tarea son: reconocimiento de atributos a partir de bandas, reconocimiento de elementos que no forman parte de una agrupación, lectura de etiquetas afirmativas y negativas.	Identifica sólo uno de los contenidos matemático que deben utilizar los niños para dar una solución correcta a la tarea.	No logra identificar contenidos matemáticos presentes en la tarea o los que identifican no corresponden con la tarea.
	b)	Identifica las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea, que tienen relación con reconocer la negación del atributo, discriminación de forma, color y tamaño de objetos.	Menciona a nivel muy general que las posibles dificultades que enfrentan los niños para resolver el problema se pueden relacionar con la experimentación con objetos.	No logra identificar posibles dificultades.
	c)	Menciona un recurso apropiado para que los niños desarrollen este tipo de tarea, por ejemplo, bloques lógicos de Dienes, bichitos.	Menciona un recurso, pero no explica como lo utilizaría y no justifica su elección.	No menciona ningún recurso alternativo o menciona uno que no es apropiado para abordar la tarea.
	d)	Reconoce que el objetivo de la tarea es reconocer atributos a partir de bandas.	Reconoce que el objetivo se encuentra vinculado con el reconocimiento de atributos, pero no especifica el trabajo con bandas.	No logra identificar el objetivo o el objetivo que plantea no responde a la descripción de la tarea.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN INFANTIL		
		Respuesta correcta (2 puntos)	**Respuesta parcialmente correcta (1 punto)**	**Respuesta incorrecta (0 puntos)**
Ítem 4	a)	Especifica que el cubo que debería ubicarse en el lugar 21 es verde y explica cómo ha obtenido la respuesta.	Especifica que el cubo que debería ubicarse en el lugar 21 es verde, pero no explica cómo ha obtenido la respuesta.	Entrega otra respuesta.
	b)	Identifica dos o más contenidos matemáticos utilizados para construir la seriación. Los contenidos matemáticos utilizados son: patrón de repetición, núcleo o unidad del patrón, construcción de un patrón de repetición.	Identifica sólo uno de los contenidos matemático utilizados por la niña para construir la seriación.	No logra identificar contenidos matemáticos.
	c)	Identifica las posibles dificultades que han llevado a la niña a responder de manera errónea, estas tienen relación con la reproducción sistemática del núcleo del patrón e identificar la unidad de repetición.	Menciona a nivel muy general que las posibles dificultades que han llevado a la niña a responder de manera errónea tienen relación con el trabajo con patrones de repetición.	No logra identificar posibles dificultades.
	d)	Menciona estrategias de enseñanza adecuadas y justifica su respuesta. Entre ellas destaca, el realizar la serie con otros recursos siguiendo el mismo patrón.	Menciona estrategias de enseñanza adecuadas, pero no las justifica.	Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a la niña a que se dé cuenta del error y lo supere.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN INFANTIL		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 5	a)	Determina la unidad de repetición de cada serie y justifica su respuesta. Estas son: P1-P4: Patrón AB P2-P5: Patrón ABC P3-P6: Patrón ABB	Determina la unidad de repetición, pero no justifica su respuesta.	No logra identificar las unidades de repetición de las seriaciones.
	b)	Describe posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea, estas tienen relación con extender el patrón especialmente en aquellas seriaciones que no terminan en una unidad completa de repetición P4, P5 y P6.	Menciona a nivel muy general que las posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea tiene relación con extender el patrón, pero no especifica las seriaciones que no terminan en una unidad completa de repetición.	No logra identificar posibles dificultades.
	c)	Menciona como estrategias de enseñanza realizar series con otros recursos siguiendo el mismo patrón.	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar a los niños que tienen dificultades para resolver la tarea, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a los niños que tienen dificultades para resolver la tarea.
	d)	Reconoce que el objetivo de la tarea es ampliar una secuencia con patrones de repetición.	Reconoce que el objetivo se encuentra vinculado al trabajo con patrones, pero no especifica que se requiere ampliar una secuencia.	No logra identificar el objetivo o el objetivo que plantea no responde a la descripción de la tarea.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN INFANTIL		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 6	a)	Identifica dos o más contenidos matemáticos que utilizar los niños para responder de manera correcta. Los contenidos matemáticos presentes en la tarea son: a) operadores lógicos; b) operadores lógicos directos; c) cambios cualitativos; d) representación de cambios cualitativos.	Identifica sólo uno de los contenidos matemático que deben utilizar los niños para responder de manera correcta a la tarea.	No logra identificar contenidos matemáticos presentes en la tarea o los que identifican no corresponden con la descripción de la tarea.
	b)	Describe posibles dificultades que enfrentarían los niños para resolver de manera correcta la tarea, estas tienen relación con la comprensión del operador lógico y la representación del cambio cualitativo.	Menciona a nivel muy general que las dificultades tienen relación con la comprensión del cambio.	No logra identificar posibles dificultades.
	c)	Menciona como estrategia de enseñanza el observar cambios en situaciones de la vida cotidiana.	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar a los niños que tienen dificultades para resolver la tarea, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a los niños que tienen dificultades para resolver la tarea.
	d)	Reconoce que el objetivo de la tarea es introducir los operadores lógicos a través de la máquina de cambiar cualidades o bien expresar adecuadamente cambios cualitativos.	Reconoce que el objetivo se encuentra vinculado con descripción de cambios, pero no identifica la relación con los operadores lógicos o cambios cualitativos.	No logra identificar el objetivo o el objetivo que plantea no responde a la descripción de la tarea.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN PRIMARIA		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 1	a)	El grupo de Carlos, Joaquín y Cristina y, la del grupo de Paula, Mateo y Mauricio han dado una respuesta correcta, puesto que los estudiantes para responder comprenden el significado del signo igual como operador y como expresión de una equivalencia.	Reconoce los grupos que han dado una respuesta correcta, pero no justifica. O bien, otorga una justificación inadecuada.	Reconoce como correcta la respuesta de Santiago, Raquel y Carolina.
	b)	Identifica posibles dificultades presentes en la respuesta de Santiago, Raquel y Carolina, que tienen relación con: la comprensión del signo de igualdad como un operador equivalente y entender que el problema tiene varias posibles soluciones.	Menciona a nivel muy general que las posibles dificultades que evidencian los alumnos del curso para resolver el problema tienen relación con la comprensión del sigo de igualdad.	No logra identificar posibles dificultades.
	c)	Menciona estrategias de enseñanza para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido responder la tarea, entre ellas destaca, el uso de material manipulativo (por ejemplo: monedas de plástico) para simular el problema con preguntas que orienten a la solución, así como registrar los posibles resultados en una tabla de valores.	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar a los alumnos que no han sabido responder la tarea, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias de enseñanza poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido responder la tarea.
	d)	Identifica las ecuaciones de primer grado y las funciones.	Sólo identifica las ecuaciones, pero no reconoce las funciones.	No logra identificar conexiones con otros contenidos más avanzados del currículo escolar.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN PRIMARIA		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 2	a)	Los alumnos 1 y 2 han dado una respuesta correcta, pues son capaces de determinar una regla general para representar la variable dependiente, Nº de sillas, e independiente, Nº de mesas.	Reconoce que los alumnos 1 y 2 han dado una respuesta correcta, pero no justifica. O bien, otorga una justificación inadecuada.	Reconoce como correcta la respuesta del alumno 3.
	b)	Identifica dos o más contenidos y/o propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea. Estos son: a) descubrir una regla que explique una sucesión dada; b) representar generalizaciones usando expresiones con letras y ecuaciones.	Identifica sólo uno de los contenidos y/o propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea.	No logra identificar contenidos y/o propiedades matemáticas presentes en la tarea. O bien, los que identifica no corresponden con la tarea.
	c)	Identifica que las dificultades del alumnado que respondieron de manera errónea tienen relación con la representación de la generalización a través de una expresión algebraica.	Menciona a nivel muy general que las dificultades del alumnado tienen relación con plantear una expresión algebraica a partir de un problema.	No logra identificar dificultades.
	d)	Como estrategia de enseñanza se podrían: a) ubicar los valores de la relación existente entre el número de sillas y número de mesas en una tabla de valores; b) representar la situación con las mesas y sillas haciendo predicciones, hasta deducir la regla general.	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar al alumno que no han sabido responder la tarea, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias de enseñanza poco adecuadas para ayudar al alumno que no han sabido responder la tarea.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN PRIMARIA		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 3	a)	Para determinar cuántos caramelos se han comido diariamente se debe plantear una ecuación de primer grado con una incógnita: $x + 2x + 4x = 28$ $7x = 28$ $x = 4$ El primer día se comen 4 caramelos, el segundo día se comen 8 caramelos y el tercer día se comen 16 caramelos.	Determina la cantidad de caramelos que se comen diarios, pero no argumenta su respuesta u otorga un argumento inadecuado.	Plantea una respuesta o argumentaciones erróneas.
	b)	La producción de Teresa se considera matemáticamente correcta, puesto que para responder el problema ha realizado un reparto de los caramelos de acuerdo a las condiciones establecidas en la tarea. Mientras que la producción de Lucas considera una resolución de manera intuitiva sin justificar su respuesta.	Explica cuáles de las producciones de los alumnos son matemáticamente correctas, pero no justifica la idoneidad o insuficiencia de la racionalidad matemática mostrada por los alumnos.	No logra determinar las producciones de los alumnos que son matemáticamente correctas.
	c)	Reconoce que el objetivo de la tarea es resolver problemas estableciendo relaciones de igualdad para determinar datos desconocidos.	Reconoce que el objetivo se encuentra vinculado con la resolución de problemas, pero no especifica el uso de igualdades o ecuaciones.	No logra identificar el objetivo o el objetivo que plantea no corresponde a la descripción de la tarea.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN PRIMARIA		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 4	a)	La estatura de Pedro es $n + 4$, donde “n” representa la estatura de Clara.	Determina la estatura de Pedro, pero no justifica su respuesta.	No logra identificar la estatura de Pedro.
	b)	Identifica las dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea, que tienen relación con el uso e interpretación de variables para representar un número desconocido.	Menciona a nivel muy general que las dificultades del alumnado tienen relación con el uso de letras para representar una cantidad desconocida.	No logra identificar dificultades.
	c)	Como estrategias de enseñanza se podrían utilizar preguntas guiadas, tales como: ¿Qué significa 4 cm más?, ¿Qué significa 4 veces más?, ¿Significa 4 más que la altura de Clara?, ¿equivale a decir 4 veces la altura de Pedro?, ¿Por qué 104 cm? ¿Cómo se te ha ocurrido esta respuesta?, ¿Sabes cuánto mide Clara? Entonces, ¿cómo puedes afirmar esto?	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar al alumno que no han sabido resolver el problema correctamente, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias de enseñanza poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido responder la tarea.
	d)	El problema es pertinente para el tercer ciclo de Educación Primaria, justificando la adecuada introducción del concepto de variables.	Identifica el nivel para el que es pertinente el problema, pero no justifica su respuesta.	No logra identificar el nivel escolar que es pertinente para abordar el problema o el nivel que identifica no es correcto

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN PRIMARIA		
		Respuesta correcta (2 puntos)	**Respuesta parcialmente correcta (1 punto)**	**Respuesta incorrecta (0 puntos)**
Ítem 5	a)	Identifica dos o más contenidos y/o propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea. Estos son: las propiedades de las operaciones, propiedad conmutativa, propiedad asociativa, elemento neutro de la multiplicación y elemento neutro de la adición.	Identifica sólo uno de los contenidos y/o propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea.	No logra identificar contenidos y/o propiedades matemáticas presentes en la tarea. O bien, los que identifica no corresponden con la tarea.
	b)	Identifica que las dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea tienen relación con comprensión de las propiedades de las operaciones y significado del signo igual.	Menciona a nivel muy general que las dificultades del alumnado tienen relación con las propiedades de las operaciones.	No logra identificar dificultades.
	c)	Menciona estrategias de enseñanza para orientar a los alumnos que han dado una respuesta errónea, entre ellas destaca, el uso de material manipulativo como balanzas y preguntas guiadas.	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar al alumno que no han sabido responder la tarea, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias de enseñanza poco adecuadas para ayudar al alumno que no han sabido responder la tarea.
	d)	El problema es pertinente para segundo ciclo de educación primaria, justificando la adecuada introducción de las propiedades de las operaciones en este nivel de acuerdo a las orientaciones curriculares.	Identifica el nivel para el que es pertinente el problema, pero no justifica su respuesta.	No logra identificar el nivel escolar que es pertinente para abordar el problema o el nivel que identifica no es correcto.

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO SOBRE ÁLGEBRA TEMPRANA PARA EDUCACIÓN PRIMARIA		
		Respuesta correcta **(2 puntos)**	**Respuesta parcialmente correcta** **(1 punto)**	**Respuesta incorrecta** **(0 puntos)**
Ítem 6	a)	Identifica dos o más contenidos y/o propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea. Estos son: a) relación de igualdad, b) relación de equivalencia, c) significado del signo igual y d) propiedad asociativa de la adición.	Identifica sólo uno de los contenidos y/o propiedades matemáticas que deben utilizar los alumnos para responder de manera correcta la tarea.	No logra identificar contenidos y/o propiedades matemáticas presentes en la tarea. O bien, los que identifica no corresponden con la tarea.
	b)	Identifica que las dificultades que han llevado al alumnado a responder de manera errónea tienen relación con la comprensión del signo igual.	Menciona a nivel muy general que las dificultades del alumnado tienen relación con la adición de números naturales	No logra identificar dificultades.
	c)	Menciona estrategias de enseñanza para ayudar a la alumna a superar el error, entre ellas destaca el material concreto, como por ejemplo, el uso de regletas para presentar las distintas descomposiciones de un número.	Menciona algunas nociones que implican estrategias para ayudar al alumno que no han sabido resolver el problema correctamente, pero estas no son concluyentes.	Menciona estrategias de enseñanza poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido responder la tarea.