

ESPACIOS Y MATERIALES PARA EL DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS INFORMALES DE 0 A 3 AÑOS

Glòria Olmos Martínez

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi doctoral i la seva utilització ha de respectar els drets de la persona autora. Pot ser utilitzada per a consulta o estudi personal, així com en activitats o materials d'investigació i docència en els termes establerts a l'art. 32 del Text Refós de la Llei de Propietat Intel·lectual (RDL 1/1996). Per altres utilitzacions es requereix l'autorització prèvia i expressa de la persona autora. En qualsevol cas, en la utilització dels seus continguts caldrà indicar de forma clara el nom i cognoms de la persona autora i el títol de la tesi doctoral. No s'autoritza la seva reproducció o altres formes d'explotació efectuades amb finalitats de lucre ni la seva comunicació pública des d'un lloc aliè al servei TDX. Tampoc s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant als continguts de la tesi com als seus resums i índexs.

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis doctoral y su utilización debe respetar los derechos de la persona autora. Puede ser utilizada para consulta o estudio personal, así como en actividades o materiales de investigación y docencia en los términos establecidos en el art. 32 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (RDL 1/1996). Para otros usos se requiere la autorización previa y expresa de la persona autora. En cualquier caso, en la utilización de sus contenidos se deberá indicar de forma clara el nombre y apellidos de la persona autora y el título de la tesis doctoral. No se autoriza su reproducción u otras formas de explotación efectuadas con fines lucrativos ni su comunicación pública desde un sitio ajeno al servicio TDR. Tampoco se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al contenido de la tesis como a sus resúmenes e índices.

WARNING. Access to the contents of this doctoral thesis and its use must respect the rights of the author. It can be used for reference or private study, as well as research and learning activities or materials in the terms established by the 32nd article of the Spanish Consolidated Copyright Act (RDL 1/1996). Express and previous authorization of the author is required for any other uses. In any case, when using its content, full name of the author and title of the thesis must be clearly indicated. Reproduction or other forms of for profit use or public communication from outside TDX service is not allowed. Presentation of its content in a window or frame external to TDX (framing) is not authorized either. These rights affect both the content of the thesis and its abstracts and indexes.



TESIS DOCTORAL

ESPACIOS Y MATERIALES PARA EL
DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS
INFORMALES DE 0 A 3 AÑOS

Glòria Olmos Martínez

2023



TESIS DOCTORAL

ESPACIOS Y MATERIALES PARA EL DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS INFORMALES DE 0 A 3 AÑOS

Glòria Olmos Martínez

2023

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓ

Dirigida por:
Àngel Alsina Pastells

Memoria presentada para optar al título de doctora por
la Universidad de Girona

LISTA DE PUBLICACIONES

Artículos de revistas

Olmos Martínez, G., y Alsina, Á. (2021). Conocimientos matemáticos del profesorado de la Escuela Infantil (0-3 años): efecto en el diseño de espacios para desarrollar las matemáticas informales. *Magister: revista de formación del profesorado e investigación educativa*. 33, 59-73. <https://doi.org/10.17811/msg.33.1.2021.59-73>

Publicaciones derivadas de congresos

Olmos Martínez, G., y Alsina, Á. (2020). La recerca educativa a l'Escola Bressol: el paper dels espais i dels materials per a fomentar el desenvolupament del pensament matemàtic dels infants. En Actes del Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM) en Tarragona – Reus: 13, 14 y 15 noviembre de 2020 (pp. 1-9). Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya. https://c2em.feemcat.org/aportacions/f4s1_2/

Olmos Martínez, G., y Alsina, Á. (2021). The didactic and mathematical knowledge of nursery school professionals: (re) thinking the spaces and materials of the school to boost the development of the mathematical thinking in the early ages (0-3). En M. Solà (coord.) *V Conference of Pre-doctoral Researchers Abstract Book*. 5, 159-161. Universidad de Girona. <http://hdl.handle.net/10256/20588>

Olmos-Martínez G. y Alsina, Á. (2022). Conocimientos sobre las matemáticas informales en la escuela infantil (0-3 años): analizando el efecto de una actividad de formación. *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 163-170). SEIEM.

LISTA DE ABREVIATURAS

Boletín Oficial del Estado (BOE).

Escuela Infantil Caputxins (C).

Centro de Innovación y Formación en Educación (CIFE).

Conocimiento Ampliado del Contenido (CAC).

Conocimiento de los contenidos matemáticos (C-CM).

Conocimiento Común del Contenido (CCC).

Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM).

Conocimiento Didáctico Matemático (CDM).

Conocimientos Didácticos de las Matemáticas de la Escuela Infantil (CD-MEI).

Conocimiento Especializado del Contenido (CEC).

Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI).

Congress of European Research in Mathematics Education (CERME).

Conocimiento del Horizonte matemático (CH).

Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC o PCK, en inglés).

Conocimiento del contexto educacional (CK).

Conocimiento pedagógico del currículo (CUK).

Conocimientos sobre las Formas de Aprendizaje de las Matemáticas en la primera infancia (C-FAM).

Conocimientos acerca de las Matemáticas Intuitivas e Informales (C-MIeI).

Conocimientos sobre las Orientaciones Curriculares (C-OCU).

Conocimientos sobre la Planificación y la Gestión del Aula (C-PGA).

Conocimiento de los procesos matemáticos (C-PM).

Escoles Bressol Municipals de Vic (EBMV).

Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM).

Educación Matemática Realista (EMR).

Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).

Early Years Mathematics (EYM).

Conocimiento pedagógico general (GPK).

Escuela Infantil Horta Vermella (HV).

Infantil 0 (I0).

Infantil 1 (I1).

Infantil 2 (I2).

Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI).

Knowledge Quartet (KQ).

Conocimiento de los estudiantes y sus características (LK).

Ley Orgánica de Calidad de la Educación de España (LOCE).

Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE).

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC).

Métodos Mixtos (MM).

Mathematics Teacher's Knowledge (MKT).

Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK).

Asociación Nacional para la Educación de la Primera Infancia (NAEYC).

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM).

National Mathematics Advisory Panel (NMAP).

Nacional Research Council (NRC).

Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE).

Conocimiento pedagógico del contenido (PCK).

Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA).

Conocimiento pedagógico del contenido (SMK).

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Escuela Infantil Serra Sanferm (SS).

Third International Mathematics and Science Study (TIMSS).

United Nations International Children's Emergency Fund (UNICEF).

United Nations Education, Scientific and Cultural Organization (UNESCO).

Conocimiento de los valores, propósitos y fines de la educación (VAK).

Zona de Desarrollo Próxima (ZDP).



Dr. Àngel Alsina Pastells, profesor catedrático de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Girona,

DECLARO:

Que el trabajo titulado Espacios, materiales y desarrollo de las matemáticas informales de los 0 a los 3 años, que presenta Gloria Olmos Martínez para la obtención del título de doctora, ha estado realizado bajo mi dirección.

Y, para que así conste y tenga los efectos oportunos, firmo este documento.

A Juan – Ignacio Olmos Urmeneta y a Gloria Martínez García,
Papá y mamá,
Que nunca me han dejado de querer y que han creído y confiado en mí.
Quienes siempre han mantenido viva la ilusión, enseñándome a conservar la mirada de niña.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer muy especialmente a Àngel Alsina Pastells el acompañamiento a lo largo del desarrollo de toda esta investigación. Sin dudarlo, Àngel se dispuso a emprender este camino juntos, confiando en mí. Por su comprensión, soporte, respeto, guía, trabajo y modelo, hoy puedo presentar este estudio.

También quiero expresar mi agradecimiento:

A todo el equipo educativo de las Escuelas Infantiles Municipales de Vic (EBMV) con quienes hemos compartido el significado de las primeras matemáticas en la Escuela Infantil y como favorecerlas. Junto con mi agradecimiento a los niños y las niñas de las EBMV y a sus familias. Sin su colaboración y participación no se podría haber desarrollado este estudio.

A los profesionales de la Universidad de Girona, especialmente a Joel Martí y a Judit Fullana, por sus orientaciones en la revisión de este trabajo. Junto a todos ellos he podido aprender y matizar aspectos metodológicos fundamentales. Además, quiero agradecer el apoyo de Elena Villarrubia y Elena Santamariña por todo el apoyo con el análisis de los datos.

A todos los profesionales con quien he tenido la oportunidad de intercambiar experiencias vinculadas a la educación o estudiantes con quienes he tenido ocasión de compartir aprendizajes y vivencias vinculadas al desarrollo de una investigación. A todas las personas que me he ido encontrando en el camino y que, de una forma u otra, han contribuido en mis aprendizajes y en el desarrollo de este estudio.

A mis compañeros doctorandos, Nataly Pincheira, Yeni Acosta y Jefferson Rodrigues quienes, con gran amabilidad, siempre me han tenido una mano y me han ofrecido su ayuda. Gracias por tanto.

A Roser Alemany, Marta Faja y Aida Blancafort, con quienes comparto profesionalmente la intensidad del trabajo en las escuelas y quienes me han ayudado y mostrado un gran apoyo en el desarrollo de esta tesis. Gracias por la comprensión, los aprendizajes compartidos, la flexibilidad, el compromiso y el amor que leo cada día en vuestras acciones.

A Marta Casellas y a Jordi Coma por enseñarme tanto. Y a Elisabeth Franquesa por buscar espacios compartidos donde dar visibilidad a este estudio y acompañarme. A todos ellos, gracias por creer y reconocer el valor de la pequeña infancia.

A Mar Beneyto Seoane, compañera y amiga. Por todos los momentos de debate y cuestionamiento compartido. Por las lágrimas, las risas y los abrazos. Por orientarme y acompañarme durante nuestras comidas y por poder apoyar mi cabeza en su hombro cuando lo he necesitado.

A todos mis amigos y amigas que, con un poco de resignación, han respetado mis espacios de estudio, me han ofrecido apoyo logístico con mis hijos y me han ayudado a tomar espacios de descanso y diversión. Muy especialmente, a Edgar, Sandra, Gala, Anna Defez, Sergi, Vero, David y Auri.

A mi familia, especialmente a mis padres, quienes han dedicado incontables horas a cuidar a mis hijos para que yo pudiese “hacer tesis” y quienes me han escuchado incasablemente en mis relatos y proyecciones. A mi madre, de quien he aprendido el valor de la persistencia y el trabajo y el no agobiarse yendo paso a paso. A mi padre quien, junto a mi hermana y mis hijos, compusieron y cantaron una canción sobre el doctorado que me hizo llorar de risa y emocionarme profundamente. A mi hermana Pilar, quien reiteradamente me ayuda en todo, con quien crecemos juntas y compartimos los buenos y malos momentos. A mi hermano Lucas, por estar siempre ahí misteriosamente, 365 días al año, 24 horas al día. Queriéndome en la libertad y el respeto, con la distancia justa para no perderme de vista, pero dejándome caer y aprender de cada vivencia. A mi hermano Álvaro, por todas sus visitas, momentos y viajes compartidos que han facilitado enormemente mi vida y la de mi familia. A mi hermano Alejandro, por apasionarse por cada palabra de esta investigación y conversar conmigo sobre pedagogía y psicología. A mi hermano Fede por cada llamada donde la distancia siempre se hace corta ofreciéndome siempre una resolución eficaz. A mi hermano Iñaki, persona de gran corazón y enorme generosidad, que me muestra la capacidad del amor. A todos ellos, gracias por el soporte y acompañamiento durante el desarrollo de este estudio y a lo largo de toda mi vida.

A mis suegros, Josep y Joana, quienes han hecho posible muchos momentos de estudio y trabajo en los que, sin mostrar su cansancio, generosamente, me han respetado y ayudado.

A Francesc Orenes Navarro, por todos sus consejos desinteresados vinculados al desarrollo de una tesis desde una perspectiva tan humana. A Francesc Orenes López, por

la gran oportunidad que me ha dado de aprender a su lado, reescribiendo un capítulo nuevo. Y a Francesc Orenes Olmos por todas las veces que le he mandado un S.O.S y me ha ayudado.

A Anna Matavacas, por su escucha y paciencia. Por cuidar a mis hijos y por querer compartir conmigo la vida, acompañándome desde que tengo 10 años.

A Beatriz Teixeira, por su alegría, generosidad y fuerza. Por todas las veces que nos reencontramos en verano, por sus risas acerca de mi horario flexible y por todas las aguadillas en la piscina. Gracias por esperar sin reproches, ese momento en que “vuelva a tener tiempo”.

A toda mi familia extensa, mis cuñadas y cuñados, sobrinos y sobrinas, a quienes, por extensión, no me puedo referir individualmente, pero a quienes estoy muy agradecida por la comprensión, sobre todo, de todos los tiempos robados: comidas a las que he llegado tarde o me he ido pronto, o cumpleaños a los que directamente no he asistido. Gracias por el apoyo y por todas las veces que me habéis preguntado y mostrado interés por mi tesis.

A mis hijos, Isaac y Jordi, quienes pacientemente han esperado que acabe. Quienes, sin duda, me han aportado y aportan las mejores y más complejas lecciones a aprender. A quienes quiero infinito, más allá del planeta de los dinosaurios.

A ti Isaac, quien de cerca has acompañado el tiempo y esfuerzo dedicado a este estudio, facilitando que pudiese hacerlo sin cuestionar su sentido, ni el momento. Apoyándome generosamente y teniendo una paciencia infinita. Gracias por tu compromiso y por todo tu amor.

NOTAS

La gran mayoría de docentes son mujeres y éste es un hecho sociológico indiscutible. Aunque estoy a favor del uso de un lenguaje respetuoso e inclusivo, por motivos de economía de texto y para facilitar una lectura fluida, utilizo términos como “niño”, “educadores” o “maestros” para referirme sin distinción a niños y niñas, educadores y educadoras, maestros y maestras, etc., como si fueran un genérico.

También, de una manera intencionada se utiliza el infinitivo impersonal con la finalidad de facilitar la lectura y estructurar el contenido con mayor rigurosidad. Ahora bien, cabe destacar que todas las aportaciones tienen sentido entendidas desde la globalidad del aprendizaje compartido con el Dr. Àngel Alsina, compañero que construye y comparte conmigo día a día su conocimiento, y me ayuda a entender las reflexiones y los aprendizajes que se van formulando a lo largo de este trabajo y en los que le prosiguen.

Las imágenes de esta tesis doctoral fueron tomadas según la legislación vigente en el transcurso del estudio. Llegado el momento de su publicación, 4 años más tarde, esta legislación se ha actualizado y también las medidas de protección del menor. Por ellos, siguiendo las recomendaciones del comité ético de la Universidad de Girona, se han retirado las imágenes. En futuras publicaciones, los autores ofreceremos los mismos contenidos documentados con imágenes que se ajusten a la legislación actual y que protejan al menor.

ÍNDICE

LISTA DE PUBLICACIONES.....	6
LISTA DE ABREVIATURAS	7
AGRADECIMIENTOS.....	14
ÍNDICE.....	20
ÍNDICE DE TABLAS	24
ÍNDICE DE FIGURAS.....	34
RESUMEN.....	48
RESUM.....	50
ABSTRACT	52
INTRODUCCIÓN.....	54
Capítulo 1. Definición del problema, pregunta de investigación y objetivos	58
Presentación	58
1.1. Definición del problema	58
1.2. Pregunta de investigación y objetivos	69
MARCO TEÓRICO	72
Presentación	74
Capítulo 2. Conocimientos del profesorado para enseñar matemáticas	76
Presentación	76
2.1 Modelo de conocimiento para la enseñanza: Mathematics Teacher’s Knowledge (MKT) ...	78
2.2 Modelo especializado de conocimiento del profesor: Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge (MTSK)	80
2.3 Modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)	82
2.4 Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM)	86
Capítulo 3. Conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI)	88
Presentación	88
3.1 Conocimientos acerca de las Matemáticas Intuitivas e Informales (C-MIeI)	92
3.1.1 Las cualidades sensoriales.....	101
3.1.2 Las cantidades continuas y discretas.....	128
3.1.3 Las posiciones, las formas y las figuras	152
3.1.4 Los atributos mensurables	173
3.2 Los Conocimientos Didácticos de las Matemáticas de la Escuela Infantil (CD-MEI)	184
3.2.1 Los conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia (C-FAM).....	185
3.2.2 Los conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil	211

3.2.3 Algunos diseños de espacios con materiales para la exploración, la manipulación y el juego libre.....	232
3.2.4 La oralidad en el primer ciclo de Educación Infantil: algunas consideraciones fundamentales	249
3.2.5 Los conocimientos sobre las orientaciones curriculares (C-OCU)	251
MÉTODO.....	256
Capítulo 4. Metodología	258
Presentación	258
4.1 Paradigma de investigación y metodología.....	258
4.2 Caracterización del estudio	267
4.3 Contexto de estudio	271
4.4 Descripción de la muestra.....	278
4.4.1 La categoría profesional	278
4.4.2 El tipo de contratación.....	279
4.4.3 El aula de referencia.....	279
4.4.4 La edad.....	280
4.4.5 Los años de experiencia.....	281
4.5 Definición de variables	282
4.5.1 El sentimiento de preparación	282
4.5.2 La formación	283
4.6 Técnicas de obtención de datos	284
4.6.1 Grupo de discusión.....	284
4.6.2 Observación no participante	287
4.6.3 Cuestionario	291
4.6.4 Recogida de información a través de documentos	304
4.7 Técnicas de análisis de datos	305
4.8 Consideraciones éticas	310
RESULTADOS	312
Capítulo 5. Resultados	314
Presentación.....	314
5.1 Conocimiento matemático de los profesionales de la Escuela Infantil antes de la formación .	315
5.1.1 Conocimientos Matemáticos Intuitivos e Informales (C-IeI).....	316
5.1.2 Conocimientos sobre las cualidades sensoriales.....	325
5.1.3 Conocimientos sobre los cantidades continuas y discretas	328
5.1.4 Conocimientos sobre las posiciones, las formas y las figuras	331

5.1.5 Conocimientos sobre los atributos mensurables	335
5.2 Conocimiento didáctico - matemático de los profesionales de la Escuela Infantil antes de la formación	340
5.2.1 Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia	341
5.2.2 Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales con contenido matemático en la Escuela Infantil.....	349
5.2.3 Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto	382
5.2.4 Conocimiento sobre las orientaciones curriculares.....	394
5.3 Conocimiento matemático de los profesionales de la Escuela Infantil después de la formación	396
5.3.1 Conocimientos matemáticos intuitivos e informales (C-IeI)	397
5.3.2 Conocimientos sobre las cualidades sensoriales	415
5.3.3 Conocimientos sobre las cantidades continuas y discretas.....	426
5.3.4 Conocimientos sobre la posición, las formas y las figuras	433
5.3.5 Conocimientos sobre atributos mensurables.....	443
5.4 Conocimiento didáctico-matemático de los profesionales de la Escuela Infantil después de la formación	455
5.4.1 Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia	456
5.4.2 Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales con contenido matemático en la Escuela Infantil.....	465
5.4.3 Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto	515
5.4.4 Conocimiento sobre las orientaciones curriculares.....	539
DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....	550
Capítulo 6. Discusión y conclusiones	552
Presentación	552
6.1 Discusión	553
6.1.1 Conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil.....	553
6.1.2 Conocimientos didáctico-matemáticos	560
6.2 Conclusiones e implicaciones didácticas	577
6.3 Limitaciones del estudio y perspectivas de futuro.....	594
ANEXOS.....	630

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Objetivos de la investigación.....	71
Tabla 2. Acciones matemáticas informales de 0 a 3 años para favorecer el desarrollo del pensamiento en torno a cualidades sensoriales.....	105
Tabla 3. Acciones matemáticas informales de 0 a 3 años para favorecer el desarrollo del pensamiento en torno a los números y las operaciones.	132
Tabla 4. Acciones matemáticas informales de 0 a 3 años para favorecer el desarrollo del pensamiento en torno a las posiciones y las formas.	160
Tabla 5. Contenidos de atributos mensurables que usan los niños de 0 a 3 años.	179
Tabla 6. Principios de la EMR.....	202
Tabla 7. Contenidos vinculados a las matemáticas intuitivas e informales.....	252
Tabla 8. Diseño y procedimiento de investigación.....	268
Tabla 9. Ratio alumno – profesional.	272
Tabla 10. Espacios educativos.....	277
Tabla 11. Título profesional	278
Tabla 12. Tipo de contratación.	279
Tabla 13. Aula de referencia.....	280
Tabla 14. Años de experiencia trabajando en EI.	281
Tabla 15. Diseño de los grupos de discusión Pre -Post.....	286
Tabla 16. Registro de observaciones no participantes.....	290
Tabla 17. Fases de diseño del cuestionario CDM-MAT0-3.....	292
Tabla 18. Diseño del cuestionario fase 1.....	292
Tabla 19. Diseño del cuestionario fase 2.....	295
Tabla 20. Diseño del cuestionario fase 3.....	296
Tabla 21. Diseño del cuestionario fase 4.....	301
Tabla 22. Diseño del cuestionario fase 5.....	303

Tabla 23. Códigos, categorías y subcategorías de los grupos de investigación.	307
Tabla 24. Resultados de investigación.....	314
Tabla 25. Necesidades formativas.	316
Tabla 26. Definiciones del término “matemáticas informales” previas a la formación.	317
Tabla 27. Aproximaciones al término “matemáticas informales” antes de la formación.	318
Tabla 28. Capacidades y contenidos destacados en el grupo de discusión previo a la formación.....	318
Tabla 29. Contenidos y capacidades matemáticas detectados en las imágenes por participante antes de la formación.	319
Tabla 30. Contenidos detectados antes de la formación por número de participantes.	321
Tabla 31. Contenidos no detectados o poco frecuentes antes de la formación.....	322
Tabla 32. Conceptos generales no específicos antes de la formación.	322
Tabla 33. Contenidos diseñados en torno al aprendizaje de las matemáticas en la EI antes de la formación.	323
Tabla 34. Acciones de reconocimiento de cualidades sensoriales.	325
Tabla 35. Objetivos vinculados al reconocimiento de cualidades sensoriales.	325
Tabla 36. Acciones de agrupar según las cualidades sensoriales.	326
Tabla 37. Objetivos vinculados a acciones de agrupar según las cualidades sensoriales.	326
Tabla 38. Acciones de emparejar según las cualidades sensoriales.	326
Tabla 39. Acciones de clasificar según criterios cualitativos.	326
Tabla 40. Objetivos vinculados a las acciones de clasificar según criterios cualitativos.	327
Tabla 41. Acciones de ordenar según criterios cualitativos.	327
Tabla 42. Objetivos vinculados a acciones de ordenar según criterios cualitativos....	327
Tabla 43. Acciones de seriar cualitativamente.	328

Tabla 44. Acciones de identificar cambios cualitativos.	328
Tabla 45. Acciones de comprender los principales cuantificadores.	329
Tabla 46. Acciones de contar elementos.	329
Tabla 47. Objetivos vinculados a acciones de contar elementos.	329
Tabla 48. Acciones de emparejar cantidades.	330
Tabla 49. Objetivos vinculados a acciones de emparejar cantidades.	330
Tabla 50. Acciones de seriar cantidades.	331
Tabla 51. Acciones de cambiar cantidades.	331
Tabla 52. Objetivos vinculados a las acciones de cambiar cantidades.	331
Tabla 53. Acciones de reconocimiento de la posición y de juzgar distancias.	332
Tabla 54. Objetivos vinculados a acciones de reconocimiento de la posición y de juzgar distancias.	332
Tabla 55. Acciones de reconocimiento de las propiedades geométricas elementales de las formas.	332
Tabla 56. Objetivos vinculados a acciones de reconocimiento de las propiedades geométricas elementales de las formas y las figuras.	332
Tabla 57. Acciones de relacionar contenidos espaciales elementales.	333
Tabla 58. Acciones de relacionar propiedades geométricas simples.	333
Tabla 59. Objetivos vinculados a acciones de relacionar propiedades geométricas simples.	333
Tabla 60. Acciones de emparejar según la forma.	334
Tabla 61. Acciones relativas a seriaciones según la forma.	334
Tabla 62. Objetivos vinculados a seriar por forma.	334
Tabla 63. Acciones relativas la observación de algunos cambios en la posición.	335
Tabla 64. Acciones relativas a la observación de algunos cambios de forma.	335
Tabla 65. Objetivos vinculados a los cambios por forma.	335
Tabla 66. Acciones relativas al reconocimiento de atributos mensurables.	336

Tabla 67. Objetivos vinculados a acciones relativas al reconocimiento de atributos mensurables.	336
Tabla 68. Acciones relativas a identificar el tiempo muestra.	336
Tabla 69. Acciones relativas a las clasificaciones según atributos mensurables.....	337
Tabla 70. Acciones relativas la ordenación de atributos mensurables.	337
Tabla 71. Objetivos vinculados a las acciones de ordenar según atributos mensurables.	337
Tabla 72. Acciones relativas a las correspondencias de elementos mensurables.....	337
Tabla 73. Seriaciones según atributos mensurables.	338
Tabla 74. Acciones referentes a las secuencias temporales.....	338
Tabla 75. Acciones relativas la observación de cambios sencillos a partir de las composiciones y descomposiciones.	339
Tabla 76. Acciones relativas a los procesos cognitivos.....	339
Tabla 77. Conceptos generales sin especificar.	339
Tabla 78. Objetivos vinculados a conceptos no específicos.....	340
Tabla 79. Conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.	341
Tabla 80. Necesidades formativas respecto al conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.....	342
Tabla 81. Sentimiento de preparación.	343
Tabla 82. Registro de observaciones no participantes con las propuestas analizadas.	345
Tabla 83. Necesidades formativas respecto los materiales.....	349
Tabla 84. Necesidades formativas respecto los diseños de los espacios y materiales con sentido matemático I.....	350
Tabla 85. Necesidades formativas respecto los diseños de los espacios y materiales con sentido matemático II.	351
Tabla 86. Número medio de contenidos por espacio antes de la formación.	354
Tabla 87. Grupo de discusión – Instalación artística.....	355

Tabla 88. Grupo de discusión – Juego heurístico.	357
Tabla 89. Grupo de discusión – mesa de experimentación.	367
Tabla 90. Grupo de discusión – construcciones.	373
Tabla 91. Grupo de discusión – el papel de adulto, antes de la formación.	382
Tabla 92. Grupo de discusión – conocimientos curriculares.	395
Tabla 93. Grupos de discusión posterior a la formación posterior a la formación.	397
Tabla 94. Impacto de la formación en relación con el conocimiento del término matemáticas informales.	399
Tabla 95. Concepto matemáticas informales como parte de la vida cotidiana.	399
Tabla 96. Concepto matemáticas informales como procesos intuitivos.	400
Tabla 97. Grupo de discusión: concepto matemáticas informales como procesos que emergen durante el juego libre.	400
Tabla 98. Documentación: las matemáticas intuitivas e informales.	401
Tabla 99. Capacidades y contenidos destacados en el grupo de discusión post.	405
Tabla 100. Contenidos y capacidades matemáticas detectados en las imágenes por participante pre y post formación.	406
Tabla 101. Contenidos detectados por número de participantes después de la formación.	408
Tabla 102. Contenidos no detectados o poco frecuentes después de la formación.	409
Tabla 103. Conceptos generales no específicos después de la formación.	410
Tabla 104. Impacto de la formación en la detección de contenidos en las imágenes. .	411
Tabla 105. Contenidos detectados muy frecuentes antes y después de la formación. .	412
Tabla 106. Contenidos detectados poco frecuentes antes y después de la formación. .	413
Tabla 107. Impacto de la formación en los objetivos diseñados por los participantes. .	413
Tabla 108. Reconocimiento de los atributos	416
Tabla 109. Acciones de reconocimiento de cualidades sensoriales.	416

Tabla 110. Descripción de objetivos vinculados al reconocimiento de cualidades sensoriales.....	417
Tabla 111. Agrupaciones de elementos por cualidades sensoriales.	417
Tabla 112. Acciones de agrupar según las cualidades sensoriales.	418
Tabla 113. Descripción de objetivos vinculados a las agrupaciones de elementos....	418
Tabla 114. Correspondencias cualitativas.	419
Tabla 115. Acciones de emparejar según las cualidades sensoriales.	419
Tabla 116. Descripción de los objetivos vinculados a emparejar cualidades sensoriales.	420
Tabla 117. Clasificaciones cualitativas.	420
Tabla 118. Acciones de clasificar según criterios cualitativos.	421
Tabla 119. Descripción de los objetivos vinculados a la clasificación sobre cualidades sensoriales.....	421
Tabla 120. Ordenaciones cualitativas.	422
Tabla 121. Acciones de ordenar según criterios cualitativos.	422
Tabla 122. Objetivos vinculados a las ordenaciones por colores.	423
Tabla 123. Seriaciones cualitativas.....	423
Tabla 124. Acciones de seriar cualitativamente.	424
Tabla 125. Descripción objetivos vinculados a las seriaciones cualitativas.....	424
Tabla 126. Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.	425
Tabla 127. Acciones de identificar cambios cualitativos.	425
Tabla 128. Comprensión de los principales cuantificadores y cantidades elementales.	426
Tabla 129. Acciones de comprender los principales cuantificadores.....	427
Tabla 130. Descripción de objetivos vinculados a la identificación de las cantidades.	428
Tabla 131. Inicio del conteo con una colección de elementos.	428

Tabla 132. Acciones de contar elementos.	428
Tabla 133. Distinción entre los nombres escritos y otros tipos de representaciones externas.	429
Tabla 134. Correspondencias cuantitativas.	430
Tabla 135. Acciones de emparejar cantidades.	430
Tabla 136. Descripción de objetivos vinculados a las correspondencias cuantitativas.	431
Tabla 137. Seriaciones cuantitativas.	431
Tabla 138. Acciones de seriar cantidades.	432
Tabla 139. Juntar, añadir, unir, sumar, sacar, separar, restar.	432
Tabla 140. Acciones de cambiar cantidades.	433
Tabla 141. Reconocer la posición relativa a la dirección y la distancia en el espacio.	434
Tabla 142. Acciones de reconocimiento de la posición y de juzgar distancias.	434
Tabla 143. Descripción de objetivos vinculados a identificación de la posición y la forma.	435
Tabla 144. Reconocer algunas propiedades geométricas elementales de las formas.	435
Tabla 145. Acciones de reconocimiento de las propiedades geométricas de las formas.	436
Tabla 146. Descripción de objetivos vinculados a las clasificaciones por formas.	436
Tabla 147. Relaciones espaciales elementales.	437
Tabla 148. Acciones de relacionar contenidos espaciales elementales.	437
Tabla 149. Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas de las formas.	438
Tabla 150. Acciones de relacionar propiedades geométricas simples.	438
Tabla 151. Objetivos vinculados a las relaciones simples por forma.	439
Tabla 152. Correspondencias por forma.	439
Tabla 153. Acciones de emparejar según la forma.	439

Tabla 154. Seriaciones por forma.....	440
Tabla 155. Acciones relativas para seriar según la forma.	440
Tabla 156. Descripción de objetivos vinculados a seriar según la forma.....	441
Tabla 157. Observación de algunos cambios en la posición.	441
Tabla 158. Acciones relativas la observación de algunos cambios en la posición.....	442
Tabla 159. Observación de algunos cambios de forma.	442
Tabla 160. Acciones relativas a la observación de algunos cambios de forma.....	443
Tabla 161. Objetivos vinculados a la observación de algunos cambios de forma.	443
Tabla 162. Reconocer los atributos mensurables de los objetos.	444
Tabla 163. Acciones relativas al reconocimiento de atributos mensurables.	444
Tabla 164. Descripción de objetivos vinculados al reconocimiento de atributos mensurables.	445
Tabla 165. Identificar el tiempo.	445
Tabla 166. Acciones relativas al reconocimiento del tiempo.	446
Tabla 167. Clasificaciones con atributos mensurables.	446
Tabla 168. Acciones relativas las clasificaciones con atributos mensurables.....	446
Tabla 169. Descripción de objetivos vinculados a la clasificación según los atributos mensurables.	447
Tabla 170. Ordenaciones según atributos mensurables.....	447
Tabla 171. Acciones relativas a la ordenación de atributos mensurables.....	448
Tabla 172. Descripción de los objetivos vinculados a la ordenación según atributos mensurables.	448
Tabla 173. Correspondencias según atributos mensurables.	449
Tabla 174. Acciones relativas a las correspondencias de atributos mensurables.	449
Tabla 175. Descripción de objetivos vinculados a as correspondencias según atributos mensurables.	450
Tabla 176. Seriaciones según atributos mensurables.	450

Tabla 177. Acciones relativas a las seriaciones de atributos mensurables.	450
Tabla 178. Descripción de objetivos vinculados a las seriaciones por atributos mensurables.	451
Tabla 179. Secuencias temporales.	451
Tabla 180. Acciones relativas a las secuencias temporales.	452
Tabla 181. Observaciones de cambios sencillos a partir de composiciones y descomposiciones.	452
Tabla 182. Observaciones de cambios sencillos a partir de composiciones y descomposiciones.	452
Tabla 183. Acciones vinculadas a las observaciones de cambios sencillos a partir de composiciones y descomposiciones.	453
Tabla 184. Procesos Cognitivos.	453
Tabla 185. Acciones relativas a los procesos cognitivos.	454
Tabla 186. Descripción de objetivos vinculados a los procesos cognitivos.	454
Tabla 187. Conceptos generales sin especificar.	455
Tabla 188. Acciones relativas a conceptos generales sin especificar.	455
Tabla 189. Conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.	457
Tabla 190. Necesidades formativas respecto al conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.	459
Tabla 191. Sentimiento de preparación.	460
Tabla 192. Registro de observaciones no participantes con las propuestas analizadas.	461
Tabla 193. Sentimiento de preparación para el diseño de los espacios y materiales con sentido matemático.	466
Tabla 194. Diseño de los espacios y de los materiales.	470
Tabla 195. Diseño de los materiales.	474
Tabla 196. Número medio de contenidos por espacio después de la formación.	477

Tabla 197. Número medio de contenidos por espacio antes y después de la formación.	478
Tabla 198. Grupo de discusión – Instalación artística post formación.....	478
Tabla 199. Grupo de discusión – Juego heurístico post formación.....	484
Tabla 200. Grupo de discusión – mesa de experimentación post formación.	498
Tabla 201. Grupo de discusión – construcciones después de la formación.....	508
Tabla 202. Grupo de discusión –el papel del adulto, reflexiones después de la formación.....	516
Tabla 203. Grupo de discusión –el papel del adulto: reflexiones después de la formación.....	532
Tabla 204. Dificultades después de la formación.	537
Tabla 205. El lenguaje matemático.	537
Tabla 206. Grupo de discusión – conocimientos curriculares después de la formación.	540
Tabla 207. Planificaciones 1-2 años.	544
Tabla 208. Planificaciones 2-3	545
Tabla 209. Planificaciones 0-1 años.	546

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Pilares de la Educación Matemática Infantil. Fuente: Alsina (2021, p. 7)	68
Figura 2. Dominios de Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Fuente: Hill et al. (2008, p.377)	78
Figura 3. Subdominios del MTSK Fuente: Rojas (2014, p. 59).....	81
Figura 4. Los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil. Fuente: Alsina y Delgado (2021, p. 6).....	89
Figura 5. Reconocimiento de las características sensoriales de los objetos. Identificar la textura. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.	106
Figura 6. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.....	107
Figura 7. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.....	107
Figura 8. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.....	107
Figura 9. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.....	108
Figura 10. Reconocimiento de las características sensoriales. Identificar a sonrisa. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.....	109
Figura 11. Reconocimiento de las características sensoriales. Identifica el color y la textura. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.	109
Figura 12. Reconocimiento de las características sensoriales. Identifica e observa como el objeto cae y repite la acción varias veces. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.	110
Figura 13. Reconocimiento de las características sensoriales. Identifica e observa el color de la flor y su olor. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.	110
Figura 14. Reconocimiento de la distancia. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 0-1 año.	111

Figura 15. Clasificando el material según un criterio cualitativo: todos los animales juntos; todos los troncos juntos; todos los bloques juntos... Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.	112
Figura 16. Correspondencias cualitativas (apareando – asociando) por imagen y por color. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 1-2 años.....	113
Figura 17. Ordenando los arcos de mayor a menor / En relación con los nins y los arcos, la imagen muestra la correspondencia por color y por cantidad. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.	113
Figura 18. Seriaciones. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.....	116
Figura 19. Composición y descomposición. Desarrollando intuitivamente el pensamiento de los patrones. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.....	117
Figura 20. Observando cambios de color. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 0-1 año.	118
Figura 21. Observando cambios en las proyecciones de la sombra y en los colores. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.....	119
Figura 22. Observar cambios y transformaciones en la textura, temperatura, color... Fuente: Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.	119
Figura 23. Observar cambios y transformaciones en la textura, temperatura, color... Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.....	120
Figura 24. Observar cambios y transformaciones en la textura, temperatura, color... Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.....	121
Figura 25. Repetir una acción y observar las consecuencias de esta. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 1-2 años.....	122
Figura 26. Repetir una acción y observar las consecuencias. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.....	123
Figura 27. Repetir una acción y observar las consecuencias. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.....	124
Figura 28. Pensamiento abstracto: Las piezas a modo de teléfono. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.....	125

Figura 29. Juego simbólico. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.	125
Figura 30. Juego Simbólico. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.....	126
Figura 31. Reconocer los principales cuantificadores – muchos, pocos, algunos... y algunas cantidades elementales: uno, dos... Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.....	133
Figura 32. Reconocer los principales cuantificadores – subitización con patrones de dedos y con elementos. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.....	135
Figura 33. Inicio del conteo. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.	137
Figura 34. Inicio del conteo. Fuente: EBMV Horta Vermella y Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.	138
Figura 35. Agrupaciones por color e inicio del conteo. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.	139
Figura 36. Experimentando con el descubrimiento de la permanencia del objeto. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.....	140
Figura 37. Experimentando con el descubrimiento de la permanencia del objeto. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 1-2 años.	140
Figura 38. Permanencia del objeto. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.	140
Figura 39. Representaciones escritas – asociando la cantidad. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.	142
Figura 40. Correspondencia cuantitativa: Un plato, un vaso y una cuchara para cada uno. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.	143
Figura 41. Comparando cantidades. Correspondencias cuantitativas, un plátano o medio dentro de un cuenco. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.....	144
Figura 42. Correspondencia cuantitativa: Una pelota en cada agujero. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 0-1 año.	144
Figura 43. Correspondencia cuantitativa: Una pelota en cada agujero. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.	144
Figura 44. Correspondencias cuantitativas. Fuente: EBMV Horta Vermella y Caputxins. Aula 2-3 años.....	147

Figura 45. Seriaciones cuantitativas. Fuente EBMV Serra Sanferm y Caputxins	148
Figura 46. Añadir, más. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.....	151
Figura 47. Observar cambios en las cantidades: Agrupar, reunir juntar... Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.....	152
Figura 48. Observar las distancias, voltear y rastrear. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.	158
Figura 49. Cambios de posición y dirección. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.	159
Figura 50. Cambios de posición y dirección. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.	161
Figura 51. Identificando posiciones: encima, delante, al lado... Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.	162
Figura 52. Identificando distancias: recorriendo distancias. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.....	163
Figura 53. Identificando las superficies. Fuente: EBMV Caputxins, Horta y Serra Sanferm. Aulas 1-2 años y de 2-3 años.	163
Figura 54. Explicación del Cuento “El pastel está muy arriba”. Fuente: EBMV Horta Vermella Aulas 1-2.....	164
Figura 55. Identificando la forma: cuerpos que ruedan. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas 0-1	164
Figura 56. Construcciones con formas diferentes. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.	165
Figura 57. Descubriendo posiciones. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.	166
Figura 58. Relaciones simples a partir de formas geométricas: correspondencias y seriaciones. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 1-2 años.	167
Figura 59. Jugando con las formas. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años...	169
Figura 60. Cambios de posición: dentro y fuera. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 1-2 años.....	170

Figura 61. Cambios de posición: apilar. Fuente: EBMV Horta Vermella y Serra Sanferm. Aula 2-3 años.....	170
Figura 62. Observando cambios en las formes: deformaciones. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.....	171
Figura 63. Sombras. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aula 2-3 y 0-1 años.	172
Figura 64. Construcciones de formas. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.....	173
Figura 65. Observando el volumen y las dimensiones. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 años.....	174
Figura 66. Identificando capacidades. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.....	175
Figura 67. Comparando pesos y volúmenes. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 0-1 años.	175
Figura 68. Comparando tamaños. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años....	176
Figura 69. Juzgando distancias. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 años.....	177
Figura 70. Juzgando capacidades. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 1-2 años.	178
Figura 71. Comparando el peso, el grosor y la longitud. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.....	178
Figura 72. Construyendo con diferentes materiales y estableciendo comparaciones sobre la longitud. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.....	180
Figura 73. Construyendo una fila muy larga. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.....	181
Figura 74. Comparando la capacidad. Fuente: EBMV Serra Sanferm y Horta Vermella. Aula 2-3 años.....	182
Figura 75. Composición y descomposición. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.	183
Figura 76. Llenando y vaciando, observando cambios en la capacidad. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.....	184
Figura 77. Aula de 2-3 años. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.	218
Figura 78. Aula 0-1 año. Fuente: EBMV Horta Vermella.	219

Figura 79. Aula 2-3 años. Fuente: EBMV Caputxins.	220
Figura 80. La presentación de los materiales. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.....	223
Figura 81. Presentación del espacio con el material clasificado, ordenado y accesible. Aula de 1-2 años. Fuente EBMV Serra Sanferm	224
Figura 82. Materiales naturales. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.....	225
Figura 83. Espacios con diferentes posibilidades de agrupación. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.....	226
Figura 84. Espacios polivalentes que se pueden transformar. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.	227
Figura 85. Dimensión y ubicación. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años....	229
Figura 86. Ejemplo de las dimensiones del material acorde con el niño. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.	231
Figura 87. Espacios seguros con la presencia del educador. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.....	232
Figura 88. Espacio de exploración. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.	236
Figura 89. Espacio de juego heurístico. Fuente: EBMV Caputxins. Aula de 0-1 años.	238
Figura 90. Mesa de experimentación. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.	239
Figura 91. Cocinita. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula de 2-3 años.	240
Figura 92. Land Art. Fuente: EBMV Horta Vermella. Espacio exterior.	242
Figura 93. Espacios de movimiento. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.	243
Figura 94. Experiencias en movimiento. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 0-1, 1-2 y 2-3 años.	244
Figura 95. Taller. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	246
Figura 96. Espacio de construcciones. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años	249
Figura 97. Integración de métodos. Elaboración propia a partir de Godino et al. (2011)	266

Figura 98. EBMV Caputxins.....	274
Figura 99. EBMV Horta Vermella	275
Figura 100. EBMV Serra Sanferm	276
Figura 101. Edad.	281
Figura 102. Preguntas del cuestionario bloque 1 – datos generales	298
Figura 103. ¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término “matemáticas informales”?	317
Figura 104. Contenidos y capacidades detectadas por los profesionales en las imágenes antes de la formación.	320
Figura 105. Contenidos detectados por los profesionales antes de la formación según el bloque de contenido.....	323
Figura 106. Objetivos Matemáticos descritos por los profesionales antes de la formación.	324
Figura 107. Formación Inicial en Didáctica de la Matemática para el Ciclo 0-3.....	343
Figura 108. Formación en didáctica de la matemática para el ciclo 0-3 versus la formación inicial.....	344
Figura 109. EBMV_C_PRE_1-2a_s3. Fuente: EBMV Caputxins.....	345
Figura 110. Observar los cambios de posición e identificar los primeros cuantificadores: mucho, poco. Fuente: EBMV Caputxins	346
Figura 111. Observar los cambios de posición e identificar capacidades. Fuente: EBMC Caputxins.....	347
Figura 112. Jugando a cocinitas hacemos una fila muy larga de limones. Fuente: EBMV Caputxins.....	348
Figura 113. Jugando a cocinitas hacemos una fila muy larga de limones. Fuente: EBMV Caputxins.....	348
Figura 114. El juego central de los trenes I. Fuente: EBMV Horta Vermella	352
Figura 115. EBMV_HV_PRE_2-3aX_s4. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	352
Figura 116. El juego central de los trenes III. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	353

Figura 117. El juego central de los trenes II. Fuente: EBMV Horta Vermella	353
Figura 118. Contenidos destacados por len las imágenes de Land Art.....	356
Figura 119. EBMV_SS_PRE_1-2aX_s8. Fuente: EBMV Serra Sanferm	358
Figura 120. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de juego heurístico.	360
Figura 121. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de juego simbólico.	362
Figura 122. EBMV_SS_PRE_2-3aX_s5. Fuente: EBMV Serra Sanferm	364
Figura 123. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de movimiento.	365
Figura 124. EBMV_HV_PRE_1-2aG_s3. Fuente: Horta Vermella	366
Figura 125. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de mesas de experimentación.....	370
Figura 126. Contenidos destacados por los profesinales en las imágenes de espacios de exploración.	372
Figura 127. EBMV_HV_PRE_2-3aB_s4. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	374
Figura 128. EBMV_HV_PRE_2-3aB_s4. Fuente: EBMV Horta Vermella	377
Figura 129. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de los espacios de construcción.....	378
Figura 130. EBMV_C_PRE_2-3B_s4. Fuente: EBMV Caputxins.....	379
Figura 131. Contenidos destacados por los profesinales en las imágenes de taller. ...	381
Figura 132. La observación del adulto que acompaña el juego con las bandejas de experimentación. Fuente: EBMV Caputxins.....	384
Figura 133. La observación del adulto que acompaña. Fuente: EBMV Serra Sanferm	385
Figura 134. La observación del adulto durante el juego simbólico en la tienda y del taller. Fuente: EBMV Caputxins	386

Figura 135. Intervenciones del adulto durante el juego de movimiento. Fuente: EBMV Horta Vermella.	387
Figura 136. El papel del educador como agente de gestión y reorganización de los espacios. Fuente: EBMV Horta Vermella	388
Figura 137. Intervenciones del adulto durante el juego libre en el aula de 1-2 años. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	389
Figura 138. Las intervenciones del adulto como apoyo en el aprendizaje de los niños. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	392
Figura 139. El papel del lenguaje como andamio de apoyo a las matemáticas emergentes. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	394
Figura 140. Objetivos planteados por los profesiones según bloques de contenido antes de la formación.	396
Figura 141. ¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término “matemáticas informales”?	398
Figura 142. Contenidos detectados por los profesionales en las imágenes después de la formación.....	407
Figura 143. Comparativa de objetivos diseñados antes y después de la formación....	414
Figura 144. Objetivos definidos por los profesionales de reconocimiento de cualidades sensoriales.....	417
Figura 145. Objetivos definidos por los profesionales relativos a agrupaciones cualitativas.....	418
Figura 146. Objetivos definidos por los profesionales en relación con las correspondencias cualitativas.	420
Figura 147. Objetivos definidos por los profesionales respecto a las clasificaciones cualitativas.	421
Figura 148. Objetivos definidos por los profesionales de ordenaciones cualitativas..	423
Figura 149. Objetivos definidos por los profesionales de seriaciones cualitativas.	424
Figura 150. Objetivos definidos por los profesionales en torno a la comprensión de los principales cuantificadores y de algunas cantidades elementales.	427

Figura 151. Objetivos definidos por los profesionales vinculados al conteo de elementos.	429
Figura 152. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las correspondencias cuantitativas.....	431
Figura 153. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las acciones de juntar, añadir, sumar... sacar, separar, restar.....	433
Figura 154. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a reconocer la posición relativa y la distancia.	435
Figura 155. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las acciones de relacionar propiedades geométricas simples.	436
Figura 156. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las relaciones simples por forma.	438
Figura 157. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a seriaciones por forma.	441
Figura 158. Objetivos vinculados a la observación de algunos cambios de forma.	443
Figura 159. Objetivos identificados por los profesionales vinculados al reconocimiento de atributos mensurables	445
Figura 160. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las clasificaciones a través de objetos mensurables.	447
Figura 161. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a la ordenación de atributos mensurables.	448
Figura 162. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las correspondencias de atributos mensurables.	449
Figura 163. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las seriaciones de atributos mensurables.	451
Figura 164. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones.	453
Figura 165. Acciones relativas a los procesos cognitivos	454

Figura 166. Acciones matemáticas durante el juego libre en el aula de 2-3 años. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	458
Figura 167. Matemáticas en el espacio de las construcciones del aula de 2-3 años. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	459
Figura 168. EBMV_SS_POST_1-2aG_s4. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	462
Figura 169. EBMV_HV_POST_2-3aX/B_5. Fuente: EBMV Horta Vermella	463
Figura 170. EBMV_SS_POST_2-3aB_10. Fuente: Serra Sanferm	464
Figura 171. EBMV_SS_POST_2-3a_s5. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	467
Figura 172. Espacio de construcciones EBMV Horta Vermella. Fuente: EBMV Horta Vermella	467
Figura 173. Cambios de posición / cerramientos. Fuente: EBMV Horta Vermella....	468
Figura 174. Comparación de atributos mensurables. Fuente: EBMV Horta Vermella	468
Figura 175. Agrupar, alinear y hacer correspondencias cuantitativas. Fuente: EBMV Horta Vermella	469
Figura 176. EBMV_HV_POST_0-1aX_4s. Fuente EBMV Horta Vermella.....	470
Figura 177. Presentación de espacios I. Fuente: EBMV Horta Vermella	471
Figura 178. Instalaciones artísticas. Fuente: EBMV Horta Vermella	472
Figura 179. Diferentes propuestas de juego heurístico. Fuente: EBMV Serra Sanferm	472
Figura 180. Apilando, hacienda filas y haciendo correspondencias por cantidades. Fuente EBMV Caputxins.	473
Figura 181. Comparando longitudes. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	475
Figura 182. Comparando longitudes. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	475
Figura 183. Ordenación por tamaños. Fuente: EBMV Caputxins.....	476
Figura 184. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de Land Art.	480
Figura 185. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Land Art.....	482

Figura 186. EBMV_SS_POST_2-3aB_s10. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	483
Figura 187. EBMV_SS_PRE_1-2aT_s8. Fuente EBMV Horta Vermella.....	483
Figura 188. EBMV_SS_PRE_1-2aG_s5. Fuente EBMV Serra Sanferm.	485
Figura 189. Contenidos detectados por los profesionales en las imágenes de juego heurístico después de la formación.....	487
Figura 190. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Juego Heurístico.	489
Figura 191. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de juego simbólico, después de la formación.....	491
Figura 192. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Juego Simbólico.	493
Figura 193. Contenidos detectados por los profesionales en las imágenes de movimiento, después de la formación.	495
Figura 194. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Movimiento.	497
Figura 195. EBMV_C_POST_1-2aG_s3.	499
Figura 196. Contenidos POST destacados en las imágenes de mesas de experimentación.	501
Figura 197. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en las mesas de experimentación.....	503
Figura 198. Contenidos POST destacados en las imágenes de espacios de exploración.	505
Figura 199. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el juego de exploración.	507
Figura 200. EBMV_SS_POST_2-3aX_s5. Fuente: EBMV Serra Sanferm, Horta Vermella y Caputxins.	509
Figura 201. Contenidos destectados por los profesionales en las imágenes de taller después de la formación.	512

Figura 202. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio del taller.....	514
Figura 203. EBMV_C_POST_1-2aT_s4 Primera parte.....	518
Figura 204. EBMV_C_POST_1-2aT_s4 Segunda parte. Fuente: EBMV Caputxins.	519
Figura 205. EBMV_C_POST_1-2aT_s4 Tercera parte.	519
Figura 206. La intervención del adulto durante el juego con bandejas de experimentación 1. Fuente EBMV Caputxins.	520
Figura 207. La intervención del adulto durante el juego con las bandejas de experimentación 2. Fuente: EBMV Caputxins.....	521
Figura 208. El acompañamiento del adulto como fórmula para reafirmar un conocimiento - 1. Fuente EBMV Horta Vermella.	522
Figura 209. El acompañamiento del adulto como fórmula para reafirmar un conocimiento – 2. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	522
Figura 210. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático - 1.	523
Figura 211. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 2. Fuente: EBMV Horta Vermella.....	524
Figura 212. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 3. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	527
Figura 213. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 3. Fuente EBMV Serra Sanferm.....	528
Figura 214. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 4. Fuente: EBMV Serra Sanferm.....	530
Figura 215. Tiempos para la gestión del aula_2. Fuente: EBMV Horta Vermella	531
Figura 216. Tiempos para la gestión del aula_1. Fuente: EBMV Serra Sanferm	531
Figura 217. La intervención del adulto en aula 0-1 primera parte. Fuente: EBMV Horta Vermella	534
Figura 218. La intervención del adulto en aula 0-1 primera parte. Fuente: EBMV Caputxins.....	535

Figura 219. El papel del educador cuando observa_1. Fuente: EBMV Serra Sanferm	536
Figura 220. El papel del educador cuando observa_2. Fuente EBMV Caputxins.	536
Figura 221. Objetivos detectados por los profesionales post formación.....	541
Figura 222. Objetivos detectados por los profesionales pre- post formación en el cuestionario.....	541
Figura 223. Objetivos post formación.	543
Figura 224. Documentaciones I. Fuente: EBMV Serra Sanferm.	547
Figura 225. Documentaciones II. Fuente: EBMV Caputxins.	547
Figura 226. Documentaciones III. Fuente: EBMV Serra Sanferm.	548

RESUMEN

La literatura en torno a la educación matemática infantil muestra la importancia de favorecer el desarrollo de los conocimientos matemáticos desde el primer ciclo (0-3 años) al ser, las primeras matemáticas intuitivas e informales, el eslabón necesario para acceder a las matemáticas formales. La Escuela Infantil, donde los niños son el centro de acción educativa, se convierte en el contexto perfecto, como una oportunidad única y decisiva para fomentar estas primeras matemáticas. Para ello, se requiere contar con profesionales conscientes de la necesidad de ofrecer contextos educativos que fomenten el desarrollo del pensamiento matemático. Profesionales formados para poder diseñar los espacios y materiales con propuestas diversificadas, de alta calidad y con sentido matemático.

La finalidad del estudio es determinar los conocimientos de los profesionales antes y después de un programa de formación para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de los 0 a los 3 años. En este sentido se pretende ayudar a los profesionales a replantear los espacios de las diferentes aulas desde la perspectiva de la educación matemática infantil y favorecer que los niños en el primer ciclo de la etapa de Educación Infantil (0-3 años) tengan la oportunidad de encontrar respuesta a sus necesidades de aprendizaje, juego, exploración y manipulación a la vez que desarrollan sus capacidades relativas a las matemáticas intuitivas e informales. De este modo, la finalidad del estudio es determinar qué conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos requieren los profesionales de las Escuelas Infantiles para promover contextos educativos que favorezcan el desarrollo de estas primeras matemáticas.

El marco teórico de esta investigación se fundamenta en los diferentes modelos de conocimiento y conjuntos de saberes especializados sobre los conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil caracterizando, desde un punto de vista disciplinar, el desarrollo de las matemáticas intuitivas e informales de los 0 a los 3 años en sus distintos bloques de contenido: las cualidades sensoriales (álgebra temprana), las cantidades continuas y discretas (números y operaciones), las posiciones y las formas y los atributos mensurables. Desde un punto de vista didáctico, haciendo un recorrido sobre las diferentes formas de aprender matemáticas que tienen los niños de los 0 a los 3 años, exponiendo los diferentes diseños de espacios y materiales que favorecen el desarrollo de estas primeras matemáticas y facilitando orientaciones curriculares y sobre el papel del adulto que acompaña y gestiona el desarrollo de las actividades.

Desde este punto de vista, a través de un diseño de investigación mixto, cuasiexperimental (Pre-Post), se realiza un análisis de los conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos de 28 profesionales de la Escuela Infantil, antes y después de una actividad de formación. En este sentido, el estudio consta de 3 fases: una primera fase de análisis de los conocimientos previos de los profesionales; una segunda fase de formación y una tercera fase en la que, con los mismos instrumentos de recogida de datos que en la primera fase (grupo de discusión, cuestionario, documentaciones y observaciones no participantes), se vuelven a recoger sus conocimientos acerca las primeras matemáticas.

Los principales resultados muestran el impacto de la formación con un incremento de los conocimientos después de la formación en todos los bloques de contenido referidos. Aun así, muestran también diferencias según el tipo de conocimiento y evidencian las lagunas formativas que presentan los profesionales.

Se concluye que es necesario replantear los programas de formación inicial y continúa para paliar las carencias formativas detectadas. Además, se aportan orientaciones sobre las formas de aprender matemáticas en las primeras edades, se define el papel del adulto que acompaña destacando los andamios a través del lenguaje y se muestran diseños de espacios y materiales que promueven acciones vinculadas a estas primeras matemáticas intuitivas e informales en los niños y las niñas.

RESUM

La literatura en educació matemàtica infantil mostra la importància d'afavorir el desenvolupament dels coneixements matemàtics informals des del primer cicle (0-3 anys) per ser les primeres matemàtiques, intuïtives i informals, necessàries per accedir a les matemàtiques formals. L'Escola Infantil, on el nen i la nena són el centre d'acció educativa, es converteix en el context perfecte, com una oportunitat única i decisiva, per fomentar aquestes primeres matemàtiques. Per això, cal comptar amb professionals conscients de la necessitat d'oferir contextos educatius que fomentin el desenvolupament del pensament matemàtic. Professionals formats per poder dissenyar els espais i els materials amb propostes diversificades, d'alta qualitat i amb sentit matemàtic.

La finalitat de l'estudi és determinar els coneixements dels professionals abans i després d'un programa de formació específic per fomentar el desenvolupament del pensament matemàtic dels nens dels 0 als 3 anys. En aquest sentit es pretén ajudar als professionals a replantejar els espais de les diferents aules des de la perspectiva de l'educació matemàtica infantil i afavorir que els nens del primer cicle de l'etapa d'Educació Infantil (0-3 anys) tinguin l'oportunitat de trobar resposta a les seves necessitats d'aprenentatge, joc, exploració i manipulació alhora que desenvolupen les seves capacitats relatives a les matemàtiques intuïtives i informals. D'aquesta manera, la finalitat de l'estudi és determinar quins coneixements matemàtics i didàctics matemàtics requereixen els professionals de les Escoles Infantils per promoure contextos educatius que afavoreixin el desenvolupament d'aquestes primeres matemàtiques.

El marc teòric d'aquesta investigació es fonamenta en els diferents models de coneixement i conjunts de sabers especialitzats sobre els coneixements per ensenyar matemàtiques a Educació Infantil caracteritzant, des d'un punt de vista disciplinar, el desenvolupament de les matemàtiques intuïtives i informals dels 0 als 3 anys en els diferents blocs de contingut: les qualitats sensorials (àlgebra primerenca), les quantitats contínues i discretes (números i operacions), les posicions i les formes i els atributs mesurables. Des d'un punt de vista didàctic, fent un recorregut sobre les diferents maneres d'aprendre matemàtiques que tenen els infants de 0 a 3 anys, exposant els diferents dissenys d'espais i materials que afavoreixen el desenvolupament d'aquestes primeres matemàtiques i facilitant orientacions curriculars i sobre el paper de l'adult que acompanya i gestiona el desenvolupament de les activitats.

Des d'aquest punt de vista, a través d'un disseny de recerca mixt, quasi-experimental (Pre-Post), es fa una anàlisi dels coneixements matemàtics i didàctic-matemàtics, de 28 professionals de l'Escola Infantil, abans i després d'una activitat de formació. En aquest sentit, l'estudi consta de 3 fases: una primera fase d'anàlisi dels coneixements previs dels professionals; una segona fase de formació i una tercera fase on, mitjançant els mateixos instruments de recollida de dades que a la primera fase (grup de discussió, qüestionari, documentacions i observacions no participants) es tornen a recollir els seus coneixements sobre les primeres matemàtiques.

Les dades mostren l'impacte de la formació amb un increment dels coneixements després de la formació en tots els blocs de contingut referits. Tot i així, mostren també diferències segons el tipus de coneixement i evidencien les llacunes formatives que presenten els professionals.

Es conclou que es necessari replantejar els programes de formació inicial i continua per pal·liar les mancances formatives detectades. A més, s'aporten orientacions sobre les maneres d'aprendre matemàtiques a les primeres edats, es defineix el paper de l'adult que acompanya destacant les bastides a través del llenguatge i es mostren dissenys d'espais i materials que promouen accions vinculades a aquestes primeres matemàtiques intuïtives i informals en els nens i les nenes.

ABSTRACT

Literature on early childhood mathematics education shows the importance of favoring the development of informal mathematical knowledge from the first cycle (0-3 years) as the first intuitive and informal mathematics is the necessary link to access formal mathematics. The pre-kindergarten, where girls and boys are the center of educational action, becomes the perfect context, as a unique and decisive opportunity, to promote these first mathematics. Due to this, it is necessary to have professionals aware of the need of offering educational contexts that foster the development of mathematical thinking. Professionals trained to be able to design spaces and materials with diversified proposals, of high quality and with mathematical sense.

The purpose of the study is to determine the knowledge of professionals before and after a specific training program to promote the development of mathematical thinking in children from 0 to 3 years of age. In this sense, it is intended to help professionals rethink the spaces of the different classrooms from the perspective of early childhood mathematics education and to encourage children in the first cycle of Early Childhood Education (0-3 years) to have the opportunity to find answers to their needs of learning, playing, exploring and manipulating while developing their intuitive and informal mathematical skills. In this way, the purpose of the study is to determine what mathematical and didactic knowledge is required by nursery school professionals to promote educational contexts that favor the development of these early mathematics.

The theoretical framework of this research is based on different models of knowledge and sets on specialized knowledge about the consciousness to teach mathematics in Early Childhood Education, characterizing, from a disciplinary point of view, the development of intuitive and informal mathematics from 0 to 3 years in its different content blocks: sensory qualities (early algebra), continuous and discrete quantities (numbers and operations), positions and shapes, and measurable attributes. From a didactic point of view, making a tour around different ways of learning mathematics that children from 0 to 3 years of age have, exposing the different designs of spaces and materials that favor the development of these first mathematics and facilitating curricular orientations and on the role of the adult who accompanies and manages the development of activities.

From this point of view, through a mixed, quasi-experimental (Pre-Post) research design,

an analysis of the mathematical and didactic-mathematical knowledge of 28 professionals from the Infant School is carried out, before and after a training activity. In this sense, the study consists of 3 phases: A first phase of analysis of the prior knowledge of the professionals; a second phase of training and a third phase where, through the same data collection instruments as in the first phase (discussion group, questionnaire, documentation and non-participant observations) their knowledge about early mathematics is collected again.

The data shows the impact of the training with an increase in knowledge after the training in all the referred content blocks. Even so, they also show differences according to the type of knowledge and show the training gaps that professionals present.

It concludes that's it's necessary to rethink programs of initial and continuing training to alleviate the training deficiencies detected. In addition, guidance is provided on the ways of learning mathematics in the early ages, the role of the accompanying adult is defined, highlighting the scaffolding through language, and designs of spaces and materials are shown to promote actions linked to these first intuitive and informal mathematics infants.

INTRODUCCIÓN

PRESENTACIÓN

Mis primeros recuerdos sobre las matemáticas están vinculados a unas escaleras, una libreta con largas divisiones, un lápiz, una goma y la mayoría de mis compañeros y compañeras jugando en el recreo. Concretamente en tercero de primaria. La sensación de exclusión ya formaba parte de mi desde hacía años.

Más adelante, en la Educación Secundaria y a lo largo de todo el Bachillerato, conocí a Lourdes, mi profesora particular de matemáticas y economía (aún sonrío cuando pienso en ella). Gracias a sus clases superé la selectividad con éxito. Aunque seguía odiando las matemáticas como en tercero de primaria, aprendí muchos trucos que me ayudaron a aprobar.

Ya en la carrera, descubrí gracias a Ángel Alsina, que las matemáticas y su didáctica eran mucho más que unos cálculos complejos que me hacían sentir incapacitada. Fue junto a él que me enamoré de la globalidad de esta disciplina y de su representación en el mundo.

Las matemáticas forman parte de todo e interdisciplinariamente están conectadas a todos los lenguajes desde el momento en que nacemos. El trabajo que aquí se presenta pretende acercar estas grandes desconocidas a los profesionales de las Escuelas Infantiles para que las descubran y las puedan promover en sus prácticas educativas por la incidencia que tienen en los posteriores aprendizajes de matemáticas a lo largo de toda la vida.

A continuación, se desarrolla un estudio que consta de seis capítulos. El Capítulo 1 presenta la definición del problema. En este se exponen los fundamentos que describen y contextualizan la necesidad de investigar los conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil con base en la literatura actual.

A continuación, se presenta la pregunta de investigación que gira en torno a los conocimientos (matemáticos y didáctico-matemáticos) de los profesionales de la Escuela Infantil sobre el diseño de los espacios y materiales para fomentar el desarrollo de las primeras matemáticas. También se plantean los objetivos formulados.

A este primer capítulo, le prosigue el marco teórico que contiene dos capítulos: el Capítulo 2, que hace referencia a los modelos de conocimiento para la enseñanza de matemáticas de los profesionales y, el Capítulo 3, que se centra en los conocimientos matemáticos de

la Escuela Infantil y los conocimientos didáctico-matemáticos vinculados a la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades.

El Capítulo 4 describe el método. En primer lugar, se presenta el paradigma interpretativo propio de esta investigación y se describe el método mixto. En él se explica cómo se ha formulado la combinación entre lo cualitativo y cuantitativo y el diseño cuasiexperimental (pre–post) que se ha implementado. También se hace una caracterización del estudio, se define ampliamente el contexto y se presenta la descripción de la muestra, las variables y las técnicas de obtención de datos: el cuestionario, el grupo de discusión, la documentación y la observación no participante. Finalmente, se describe como se ha desarrollado el análisis de datos.

El Capítulo 5 expone los resultados obtenidos a partir de las diferentes categorías de análisis establecidas. En él se hace una presentación de los resultados previos a la formación y otra relativa a los posteriores, respondiendo al diseño pre–post formulado.

El Capítulo 6, correspondiente a la discusión y conclusiones, establece la discusión con el marco teórico de referencia estableciendo un diálogo entre la teoría y los resultados obtenidos. A partir de este debate, a continuación, se definen las conclusiones que se desprenden del estudio destacando la necesidad de (re)repensar la formación inicial de los profesionales que trabajan en las Escuelas Infantiles y, en su defecto, impulsar programas de formación continua que acompañen estas carencias formativas.

Como punto final de la investigación, se presentan las limitaciones y perspectivas de futuro, las referencias bibliográficas y los anexos.

Capítulo 1. Definición del problema, pregunta de investigación y objetivos

Presentación

A continuación, como punto de partida de esta investigación, se presenta la definición del problema. En ella, se plantea la importancia de indagar en torno a los conocimientos de los profesionales de las Escuelas Infantiles en relación con el diseño de los espacios y materiales para favorecer el desarrollo de las matemáticas intuitivas e informales de los 0 a los 3 años. En este sentido, se aborda la temática desde una perspectiva global, se indaga y se ubica el estudio dentro del panorama actual y, a continuación, se formula la pregunta de investigación y se describen los objetivos de estudio.

1.1. Definición del problema

La importancia de la calidad educativa a lo largo de la vida de las personas es un hecho que ya no se discute. La educación es la base del progreso, del cambio y del conocimiento, siendo esta una herramienta para contribuir al desarrollo de la persona, tal como plantea Morin (2001).

Tampoco se discute que los tres primeros años de vida son de gran importancia para el desarrollo. Durante esta primera fase, los niños muestran mayor plasticidad cerebral y establecen todos los fundamentos que posibilitan los posteriores aprendizajes. Hoyuelos (2010) lo expresa de la siguiente manera:

Nadie parece negar hoy – ya es un tópico – la importancia neurológica, cognitiva, afectiva y social de los primeros años de vida. Existen enormes potencialidades que los niños y niñas poseen desde el nacimiento (p. 16)

El informe mundial de *United Nations International Children's Emergency Fund* (UNICEF, 2018) sobre el desarrollo del niño en la primera infancia, muestra que ya desde el embarazo hasta el inicio de la educación escolar formal existe una gran oportunidad, decisiva y única, de influir en el desarrollo del cerebro de los niños.

Durante los tres primeros años de vida tienen lugar procesos neurofisiológicos, que configuran las conexiones y las funciones del cerebro, por lo que son cruciales. Se sabe

que en estos tres primeros años el cerebro se desarrolla en un 80% y que en los siguientes dos años se desarrolla en un 10% más. Al mismo tiempo, se explica que las experiencias que tenga el niño afectarán a la formación de las conexiones (sinapsis) entre las neuronas para establecer las vías del cerebro que rigen o controlan nuestras respuestas intelectuales, emocionales, psicológicas y físicas a los estímulos (Bueno, 2019). Así pues, el desarrollo del cerebro en los tres primeros años de vida es el eje central del crecimiento y en este período deben ocurrir los eventos más importantes de su maduración.

En estas primeras edades, el juego, el trato amoroso o la estimulación de las capacidades lingüísticas, motoras e intelectuales, son esenciales para el desarrollo del potencial de los más pequeños. Está demostrado que los niños que crecen recibiendo alicientes cariñosos y en un entorno en el que se sienten protegidos, tienen más probabilidades de sobrevivir y crecer más saludables, de padecer menos enfermedades o trastornos, y de desarrollar al completo sus aptitudes cognitivas, lingüísticas, emocionales y sociales. Además, estos estímulos hacen que aumente la posibilidad de que sean buenos estudiantes cuando comiencen la escuela, y que tengan mayor autoestima en la etapa de la adolescencia. En definitiva, aumentan las posibilidades de convertirse en miembros creativos y productivos de la sociedad (UNICEF, 2018).

Malaguzzi (2020), iniciador e inspirador de la metodología educativa de las escuelas de Reggio Emilia (Italia), reconocidas mundialmente por su enfoque innovador sobre la educación, defiende que es importante que a todos los niños se les dé la oportunidad de desarrollar su potencial. Es por eso por lo que el maestro/educador debería reconocer y entender que cada niño utiliza un lenguaje diferente. Considerando estos antecedentes, se puede plantear que el primer ciclo educativo 0-3 es una gran oportunidad que puede contribuir muy significativamente al desarrollo del niño, siendo el motor de muchos aprendizajes que serán la base para los posteriores. De ello se desprende que la Escuela Infantil en general, y el maestro/educador en particular, tienen un papel fundamental en el acompañamiento al infante desde el punto de vista de la calidad educativa. Dicho de otra manera, sabiendo que estos tres primeros años de vida son tan importantes, la responsabilidad de ofrecer una educación de calidad yace también en las Escuelas Infantiles (0-3), como responsables de ofrecer contextos ricos en los cuidados, el bienestar y la calidad educativa, no solo asistencial. Y como apunta Hoyuelos (2010), la responsabilidad de los educadores y maestros pasa por plantearse las preguntas adecuadas

para tomar conciencia y reflexionar sobre qué contextos educativos se ofrecen y cómo se acompañan.

La paradoja yace en la dicotomía que existe entre la importancia de los tres primeros años de vida para el desarrollo humano y las políticas educativas que siguen sin favorecer este ciclo educativo (0-3) y que perpetúan diferencias muy significativas con los otros ciclos.

Muchos profesionales del primer ciclo de Educación Infantil aceptan recibir un reconocimiento más bajo porque pertenecen a un ciclo que se considera inferior. Las políticas educativas contribuyen y alimentan esta manera de entender el primer ciclo de infantil, que es el menos valorado, hecho que se evidencia en los sueldos, por ejemplo, que son inferiores que los del resto de las profesionales de la educación (Hoyuelos, 2010; Vila, 2018).

De alguna manera, las formas de pensar sobre esta etapa, de dirigirse o hablar a los niños o a los profesionales que se ocupan de ellos, pone en evidencia el menosprecio al que están sometidos. A menudo son políticas, comentarios afables y divertidos en la forma, pero poco considerados en el fondo (Vila, 2018 p. 6).

Esta dualidad escenifica la necesidad de la investigación en las Escuelas Infantiles como la oportunidad de seguir validando dicha importancia y la calidad de la educación, destacando el primer ciclo educativo 0-3 como el más significativo para el desarrollo humano. En ningún caso se defiende el hecho de que los niños tengan que estar escolarizados en la Escuela Infantil, ni permanecer en ella muchas horas, pero sí que es un espacio dentro del sistema educativo actual que ha de garantizar la máxima calidad educativa ya que está en juego el desarrollo de los más pequeños.

En este sentido, Hoyuelos (2010) habla sobre el cuestionamiento de los contextos educativos y de la definición de calidad educativa de la primera infancia en las Escuelas Infantiles:

Es necesario ofertar un medio, un tipo de educación coherente, que permita que todas esas capacidades encuentren una forma de desarrollo y de expresión. Esta primera idea nos permite cuestionarnos si cualquier lugar es adecuado para educar a los niños y niñas. (...) O lo que es lo mismo, los niños y niñas tienen derecho a un ámbito adecuado de calidad para poder desarrollar las enormes potencialidades que poseen. Calidad que, siempre, debe ser matizada y narrada (p. 16).

Este autor plantea la necesidad de ofrecer un contexto coherente que considere las diferencias y singularidades propias del desarrollo. Esta afirmación invita a plantear diversas preguntas genéricas: ¿qué contextos/medios educativos son necesarios en las aulas de 0-3 años para dar voz a todas las formas de expresión de los niños?, ¿cómo se puede dar voz y lugar a los cien lenguajes y formas de expresión de los niños para que puedan ir desarrollando su manera de comunicarse y la construcción de sus aprendizajes?

De forma más específica, en relación con la idoneidad de los lugares para la educación de los infantes, uno se puede plantear la siguiente pregunta: ¿todos los lugares/aulas/estancias/ambientes son adecuados para educar a los niños o para que los niños aprendan? Y, considerando el derecho de los niños a una educación de calidad, ¿qué se limita en el niño cuando no se favorece un ambiente educativo de calidad?

Centrados en esta última pregunta sobre las limitaciones subyacentes en el niño, Geist (2009) escribe cómo son los bebés y los niños pequeños (hasta los 3 años) desde un punto de vista psicológico, cognitivo, emocional y social, e identifica qué conceptos matemáticos están aprendiendo. El autor muestra la importancia y la responsabilidad del adulto en promover las matemáticas en las primeras edades como parte de una educación de calidad.

Geist defiende la importancia del conocimiento del adulto como responsable de facilitar y promover el pensamiento matemático del niño. En sus estudios, sugiere muchas veces que los adultos desconocen la importancia de estos conocimientos que, a menudo, pueden pasar desapercibidos en estas primeras edades.

También, Clements y Sarama (2015) también hacen referencia a los maestros como agentes que estructuran y preparan los contextos educativos en función a las trayectorias de aprendizaje. Para ellos, esta fase es clave porque en estos primeros años de vida, los contextos educativos que reciben los niños son de especial importancia para el desarrollo matemático de este.

Las orientaciones contemporáneas sobre educación matemática destacan la importancia de favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos desde las primeras edades. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos hace referencia a las matemáticas intuitivas e informales, y considera que son un eslabón necesario para acceder a las matemáticas formales (NCTM, 2003).

Anderson (1997), Clements (2004), Clements y Sarama (2015), Ginsburg et al. (1998), Fuson et al. (2009) y organismos americanos como la Asociación Nacional para la Educación de la Primera Infancia (NAEYC) junto a NCTM (2003) o bien el National Research Council (NRC, 2014) han ido incorporando también la idea de que los niños adquieren conocimientos matemáticos informales antes de los 3 años.

Fernández et al. (2004) defienden que desde los 4 meses de edad los niños ya muestran una curiosidad innata concerniente a los eventos cuantitativos y que espontáneamente construyen en su ambiente natural y sin instrucción formal unas matemáticas denominadas informales.

Goñi (2008) define la importancia de las matemáticas en tanto están en el mundo y en el ADN de las personas. Son importantes por sí mismas como un lenguaje que nos acerca a la comprensión del mundo en el que vivimos. Se necesitan para todo porque componen este todo. Y más aún, teniendo en cuenta los avances científicos, tecnológicos y los cambios sociales que estamos viviendo actualmente.

Frente a una sociedad cambiante, innovadora, tecnológica y científicamente avanzada, se necesita una educación que reorganice los contenidos y procesos para poder atender las necesidades sociales. Como dice Goñi, las matemáticas escolares están dejando de ser un conocimiento tradicional y arcaico. Si antes se consideraba una asignatura que no respondía a los fines sociales ni a los contextos cotidianos de las personas, ahora estamos ante al desarrollo de la competencia matemática; herramienta que facilita el desarrollo personal, social, profesional y académico, necesario para el crecimiento de una persona.

La evaluación por competencias a partir de pruebas internacionales que analizan la competencia matemática como TIMSS y PISA, ha demostrado que a aquellos niños que han podido desarrollar sus capacidades y los aprendizajes en los primeros años se les facilita el de los posteriores. Hay ejemplo de pruebas de evaluación que muestran este hecho; niños obteniendo mejores resultados, equivalentes a el avance de uno o dos años escolares (OCDE, 2007).

En esta línea de Castro et al. (2015), como resultado de diferentes investigaciones, defienden mediante fundamentos teóricos tanto la presencia como la relevancia de la actividad matemática en los niños desde el nacimiento. Del mismo modo, algunos autores como Geist (2014), Alsina (2015), Alsina y León (2016) y Alsina y Roura (2017)

establecen unas primeras rúbricas y expectativas por edades según el desarrollo del niño, siempre desde un punto orientativo.

Aun así, socialmente sigue existiendo un desconocimiento generalizado sobre la importancia de las matemáticas en las primeras edades, como si este conocimiento fuese propio de una etapa educativa más avanzada:

Los bebés y niños pequeños construyen matemáticas a través de la interacción con su entorno y con los objetos de ese entorno. Estas construcciones matemáticas que son de vital importancia a menudo pasan desapercibidas siendo desconocidas para los adultos que rodean al niño (Geist, 2014 p. 136).

Por ello, nos encontramos con la necesidad de seguir favoreciendo la investigación en educación matemática infantil en general, y la concerniente a los 0-3 años en particular.

De Castro (2016), en un estudio sobre las orientaciones curriculares como organizadoras de la investigación en educación matemática infantil, explica que hasta la época de los 80 no se encuentra apenas documentación relevante sobre la importancia curricular de las matemáticas en Educación Infantil. Incluso antes se encuentran documentaciones que rechazaban las prácticas matemáticas siendo contraproducentes para los niños pequeños.

Y no es hasta el 2000, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), que se incluye de manera explícita que ya desde el nacimiento hasta los cuatro años tienen lugar muchos desarrollos matemáticos importantes para los niños.

En los primeros documentos del National Council of teachers of Mathematics (NCTM, 1980, 1989, 1991) la primera franja de edad considerada es la de 5 a 9 años (etapa K-4). El punto de inicio es el Kindergarten, curso de adaptación a la escuela elemental (primaria) que niños y niñas comienzan a la edad de 5 años. En los años 80, las edades de 0-3 (incluso a 4) años están ausentes en estos documentos. A partir del año 2000, esta situación comienza a cambiar al incluirse la etapa Prekindergarten.” (de Castro, 2016 p. 40)

También de Castro (2016) apunta que es en el 2000 cuando se celebra, en Virginia, la Conferencia sobre Estándares para la Educación Matemática en *Kindergarten* y *Prekindergarten*, dando lugar a una publicación de Clements et al. (2004) en la que se proponen contenidos matemáticos adecuados para los niños de 2 años.

Es a partir del 2000, que empiezan a aparecer de forma más frecuente publicaciones sobre la relevancia de las matemáticas en la Escuela Infantil, definiendo modelos curriculares y expectativas de matemáticas por edades. Con anterioridad a esta fecha, existen diferentes publicaciones que representan un primer intento de desarrollar y articular contenidos, objetivos y metodologías para los profesionales vinculados a la educación matemática (NCTM 2003). Algunos ejemplos podrían ser las publicaciones del NCTM: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989) y *Principles and Standards for School Mathematics* (2003).

No cabe duda de la importancia de promover desde las Escuelas Infantiles una educación matemática de calidad donde no se trate de formar matemáticos, sino de formar personas que desde pequeños aprendan a usar progresivamente las matemáticas en diferentes contextos, además del escolar (Alsina, 2011b).

Llegados a este punto, se podría afirmar que los niños comienzan a desarrollar su pensamiento matemático desde que nacen (Alsina, 2015; Butterworth, 1999; Castro et al. 2013; Clements y Sarama, 2015; de Castro, 2011; Geist, 2014; Lago et al., 2003; Lago et al., 2012 citado en Castro et al., 2015; Lee, 2012; NRC, 2014, entre otros). Esto quiere decir que la competencia matemática se va desarrollando a medida que el niño va usando progresivamente las matemáticas en los diferentes entornos cotidianos y, a su vez, va adquiriendo más competencias en matemáticas.

Autores de prestigio y diversas instituciones de referencia internacional han ido extendiendo reflexiones sobre la importancia de la educación matemática en las primeras edades y, actualmente existe un acuerdo generalizado sobre la importancia de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático desde edades tempranas (Alsina 2015). De hecho, existen diversas investigaciones sobre la didáctica de las matemáticas en la Educación Infantil (Alsina, 2004, 2006, 2011a, 2011b, 2015; Canals, 1989; Castro y Castro, 2016; Chamarro, 2005; Clements y Sarama, 2015; de Castro, 2011, 2016; de Castro y Quiles, 2014; de Castro et al., 2015; Edo, 2012; Geist, 2014; Lee, 2012; NCTM, 2003, entre otros).

Aun así, la investigación en relación con las matemáticas en la Escuela Infantil es muy reciente y, como apunta el mismo de Castro (2016), da lugar a diferentes líneas de investigación consolidadas en el SEIEM:

- El análisis didáctico desde diferentes perspectivas teóricas (Femández, 2010; Font et al., 2010; Rico y Lupiáñez, 2013);
- La reflexión teórica sobre las matemáticas en 0 a 3 años (Tall, 2013; Sarama y Clements, 2009)
- Diseño de propuestas para el aula que desarrollen el currículo (Alsina, 2016; Margolinas, 2014; Salgado, 2015).
- El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015).
- El desarrollo de la competencia profesional de "mirar con sentido" en la Educación Infantil (Fernández et al., 2011; Gamoran et al., 2011; Llinares, 2012).

Y concluye diciendo:

En cualquiera de estos casos resulta evidente que es necesario un conocimiento profundo del contenido y los procesos matemáticos para que podamos desarrollar estas líneas de investigación. Se hacen necesarias también las revisiones de investigaciones sobre educación matemática en los primeros años en revistas generales de investigación en educación y en particular de Educación Infantil (de Castro, 2016 p. 48).

Alsina (2019a) explica que la investigación en educación matemática infantil en España goza de buena salud en la actualidad, ya que existe una producción sistemática de estudios que van apareciendo al largo de los años. Un ejemplo de ello es la reactivación del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI) en 2011, dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Está claro que hay facilidad de acceso a la producción científica que se va retroalimentado constantemente dentro de la producción internacional. En este sentido, esta producción internacional está desarrollando una tarea importante y se realiza la labor realizada por el grupo *Early Years Mathematics* (EYM) dentro del *Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME), con la presencia de estudios de autores españoles o las *POEM Conferences on Early Mathematics Learning* (Benz et al., 2018; Kortenkamp et al., 2014; Meaney et al., 2016).

No obstante, sigue existiendo la necesidad de continuar con esta labor y Alsina (2019a) expone lo que falta por hacer en este ámbito. Indica que los resultados de las investigaciones desarrolladas a lo largo de los años en educación matemática infantil,

revelan que se deberían continuar promoviendo cambios en la legislación educativa, en los procesos formativos de los profesionales y en la práctica escolar. A partir de los datos, expone los centros de interés en los que se debería focalizar la investigación en educación matemática infantil en las próximas décadas. Estos centros de interés se organizan y desarrollan alrededor de cuatro grandes ámbitos:

1. Análisis didáctico.
2. La formación del profesional – aprendizaje y desarrollo profesional.
3. La construcción y el conocimiento matemático, contenidos y procesos.
4. Interacción, contexto y práctica del profesor.

Actualmente sigue habiendo necesidad en cuanto a la investigación en este ámbito. Se necesita que se siga manifestando el valor de la educación en las Escuelas Infantiles y concretamente en la importancia del conocimiento matemático, que pasa muchas veces desapercibido o se infravalora. Ejemplo de ello es la publicación del *Libro Blanco de las Matemáticas* (2020) donde, como señala Alsina (2021), existe una ausencia de la etapa 0-6.

Por ello, de Castro (2016) explica el problema que genera la aparente trivialidad de los contenidos matemáticos relativos a la Educación Infantil, refiriéndose a la invisibilidad de conocimientos entorno a la enumeración de colecciones, la diferenciación entre conocimientos espaciales y geométricos, al razonamiento de los alumnos (Ruiz, 2001) y la enumeración (Margolinas, 2014).

En España, la subitización no aparece ni en el currículo de Educación Infantil LOGSE (MEC, 1991), ni en el de la LOCE (MECD, 2004). En el de la LOE (MEC, 2008) aparece la expresión "Estimación cuantitativa exacta de colecciones" (p. 1024) que podría referirse a la subitización pero de forma indirecta y algo confusa, pues el uso conjunto de las palabras "estimación" y "exacta" no permite hacerse una idea de qué se refiere el texto (de Castro, 2016 p. 46).

Los términos que se refieren a las matemáticas en las primeras edades son conceptos muy complejos y/o engloban matices importantísimos para poder comprender los procesos de aprendizaje de los niños que, aun y no siendo evidentes, se dan por sabidos. Por ejemplo, los conceptos de: numerosidad, subitización, unitización, cantinela, recta y banda numéricas.

Muchos de los términos que se emplean al hablar de las matemáticas en los primeros años tienen una gran complejidad en sí mismos (numerosidad, subitización, unitización) o términos económicos inventados para enfatizar una distinción crucial, como palabra número o secuencia de palabras número (o cantinela), para diferenciar entre el número, como concepto, y el número hablado o palabra número. También entre las representaciones es necesario diferenciar entre recta numérica y banda numérica o camino numérico (ruta numérica; NRC, 2009, p. 53), al ser la primera una representación continua y la segunda una representación discreta más adecuada para las primeras edades (NRC, 2009 citado por de Castro, 2016 p. 44).

La “invisibilidad curricular”, sumada al hecho de que se relativicen los contenidos de la Educación Infantil (empezando por los mismos profesionales del ámbito), dan lugar a concepciones erróneas sobre lo que son o deberían ser las matemáticas en la Escuela Infantil.

Suele pensarse que las matemáticas que se aprenden en la Educación Infantil son muy sencillas y que cualquiera puede enseñarlas (Castro y Castro 2016 p. 15).

Según Clements y Sarama (2015), las preguntas fundamentales e imprescindibles que deben plantearse y a las que los maestros deberían dar respuesta, giran entorno a qué matemáticas enseñar, cuando enseñarlas y cómo enseñarlas de manera que los aprendizajes sean significativamente útiles para los más pequeños.

Alsina (2021), tal y como muestra la Figura 1, explica que los pilares de la Educación Matemática Infantil son esas 5 preguntas claves de las que se deberían nutrir los profesionales: ¿para qué se enseña?, ¿por qué se enseña?, ¿cómo se enseña?, ¿cuándo se enseña? y ¿qué se enseña?



Figura 1. Pilares de la Educación Matemática Infantil. Fuente: Alsina (2021, p. 7)

Incipientemente, de estas grandes cuestiones se desprenden muchas otras sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades: ¿qué contenidos y cómo ofrecerlos?, ¿cómo y en base a qué se planifica la acción educativa?; ¿qué objetivos de aprendizaje han de formularse los acompañantes para que los niños puedan avanzar en su desarrollo desde la perspectiva que cada uno pueda desarrollar al máximo sus potencialidades?, ¿qué acompañamiento y cuál es el papel/rol del educador mientras el niño juega?

Considerando las diferentes posibilidades de estudio, se centra la mirada en los conocimientos de los profesionales respondiendo a las líneas de investigación presentadas por Castro (2016) y posteriormente por Alsina (2019a) donde se destaca la necesidad de indagar en el mismo. En este sentido, se pretende investigar la importancia del rol del adulto como facilitador de andamios (*scaffolding*), atribuyendo de nuevo al adulto la responsabilidad de garantizar la calidad de la educación (Geist, 2014).

Fernández et al. (2004) explican que, tradicionalmente, radica en los educadores/maestros la responsabilidad de guiar el desarrollo de los niños, siendo quienes más posibilidades tienen de influenciar en las habilidades y expectativas de los mismos.

En este sentido, se destaca la responsabilidad del educador/maestro de facilitar entornos educativos de calidad, para que el niño tenga la posibilidad de desarrollar al máximo su potencial.

Así mismo, Geist (2014) habla sobre la importancia del papel del adulto como facilitador de contextos educativos ricos en experiencias apropiadas a las necesidades de juego, exploración y desarrollo del niño.

Llegados a este punto, es natural que uno se pregunte: ¿cómo han de ser estos contextos educativos?, ¿en qué se basa la disposición de los espacios y materiales que se disponen en dichos contextos? y ¿qué conocimientos didácticos y disciplinares han de tener los profesionales que diseñan los contextos y las propuestas educativas?

En esta investigación se priorizan como objeto de estudio los conocimientos entorno a los diseños de las propuestas a partir de los espacios y materiales considerando que estos complementan los procesos de aprendizaje que van ligados a la vida cotidiana. En este sentido, se quiere destacar que la vida cotidiana es una parte imprescindible y primordial que ocupa el 80% de la vida en la Escuela Infantil. Por ello, aunque esta investigación se centre exclusivamente en las propuestas a partir de los diferentes espacios y materiales, como expone Azkona y Hoyuelos (2011), cabe destacar que son tan importantes estos como las actividades cotidianas referidas a las rutinas del día a día: alimentación, baño, sueño, etc. En palabras de Azkona y Hoyuelos:

No hay una valúa añadida ni nada es funcional, ni rutinario. Cada momento contiene —en sí mismo— una calidez educativa que privilegia la autonomía y el ritmo personal de cada niño y niña (Azkona y Hoyuelos, 2011, p. 160).

1.2. Pregunta de investigación y objetivos

Los antecedentes descritos sobre el panorama actual entorno a la educación matemática en la Escuela Infantil, sugieren muchas cuestiones diferentes. Sin embargo, en todas ellas existe un denominador común: el conocimiento del profesional sobre el desarrollo del pensamiento matemático en los niños de la Escuela Infantil. De esta manera, la finalidad de este estudio es analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de las Escuelas Infantiles para promover el desarrollo del pensamiento matemático en los niños.

Este planteamiento, junto con las aportaciones que apuntaba Hoyuelos y las actuales formas de planificar y disponer los ambientes educativos en las Escuelas Infantiles, siguiendo los modelos pedagógicos de Malaguzzi (modelo internacionalmente reconocido pero que poco a poco va sedimentando en las escuelas del país que apuestan por la innovación educativa), llevan a formular la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos matemáticos y didácticos tienen los profesionales de la Escuela Infantil para fomentar el desarrollo de las matemáticas intuitivas e informales, antes y después de un programa de formación continua?

De esta pregunta de investigación derivan dos objetivos generales de los que se desprenden diversos objetivos específicos que delimitan el alcance de este estudio. Estos objetivos buscan dar respuesta a la pregunta de investigación. Por lo tanto, es necesario conocer, describir y comprender los conocimientos matemáticos y didácticos que deberían tener los profesionales de la Escuela Infantil para el diseño de los espacios y materiales con sentido matemático.

A continuación, la Tabla 1 presenta los objetivos de investigación y su estructura.

Tabla 1. Objetivos de la investigación.

Fase 1: Pre-formación	
Objetivo general	
1. Analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático los niños de 0 a 3 años, antes de la formación.	
Objetivos específicos	
1.1 Analizar los conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 antes de la formación.	
1.2 Analizar los conocimientos didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 antes de la formación.	
Fase 2: Desarrollo de la formación	
Fase 3: Post-formación	
Objetivo general	
2. Analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático los niños de 0 a 3 años, posteriores a la formación.	
Objetivos específicos	
2.1 Analizar los conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 posteriores a la formación.	
2.2 Analizar los conocimientos didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 posteriores a la formación.	

Nota: En la fase 2 no se describen objetivos porque la segunda fase corresponde únicamente al desarrollo de la actividad formativa.

MARCO TEÓRICO

Presentación

A menudo se considera que las matemáticas que se aprenden en la Escuela Infantil son muy simples y cualquier maestro puede enseñarlas, pero la verdad es que contienen ideas profundas y de gran valor para el desarrollo del pensamiento matemático (de Castro, 2016). Como se describe en el Capítulo 1, las matemáticas en el primer ciclo de la Escuela Infantil tienen también su propio espacio y son muy necesarias para el desarrollo del pensamiento del niño.

Según el NCTM (2003) las decisiones que tomen los profesionales de la educación en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienen consecuencias importantes para los alumnos y para la sociedad. En este sentido, las decisiones deben basarse en un marco referencial de alta calidad.

A continuación, se presenta el marco teórico referente a los conocimientos que deberían tener los profesionales de las Escuelas Infantiles para fomentar el desarrollo de las matemáticas en estas primeras edades. El Capítulo 2 trata sobre los diferentes modelos de conocimiento de los profesionales para la enseñanza de las matemáticas y el Capítulo 3 destaca las aportaciones de Alsina y Delgado (2021, 2022) que tratan sobre los Conocimientos Matemáticos para la Escuela Infantil. Este conjunto de saberes contempla una dimensión disciplinar (matemática) y una dimensión didáctica con tres subcategorías cada una.

En los siguientes subapartados del Capítulo 3 se describen estas categorías destacadas por Alsina y Delgado (2021, 2022), centrándose ampliamente en aquellas en las que se focaliza este estudio. De este modo surgen los siguientes subapartados:

Respecto a los conocimientos matemáticos:

- Un subapartado que describe los conocimientos matemáticos intuitivos e informales.
- Cuatro subapartados, uno para cada bloque de contenido que integran estas primeras matemáticas intuitivas e informales: las cualidades sensoriales, las cantidades continuas y discretas, las posiciones y las formas y los atributos mensurables.

Respecto a los conocimientos didáctico-matemáticos:

- Un primer subapartado correspondiente a los conocimientos en relación con como aprenden matemáticas los niños de 0 a 3 años.
- Un segundo subapartado referente a los conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales.
- Un tercer subapartado profundizando en algunos diseños de espacios y materiales específicos.
- Un cuarto subapartado enfocado en el papel del adulto, la oralidad en el primer ciclo de Educación Infantil.
- Un quinto subapartado relativo a los conocimientos sobre las orientaciones curriculares.

Capítulo 2. Conocimientos del profesorado para enseñar matemáticas

Presentación

Como afirman Montes et al. (2018), el conocimiento profesional para enseñar matemáticas junto con la generación de marcos teóricos que sirven para investigar sobre los profesores ha sido uno de los puntos de interés de las investigaciones en educación matemática en los últimos años. En esta línea, Rojas et al. (2013, 2015) también consideran que estudiar el conocimiento del profesorado de matemáticas es un tema relevante en la actualidad. Explican los investigadores que los estudios se basan en el análisis de diversos aspectos como la naturaleza del contenido, las características que lo conforman, el grado de conocimiento matemático que tienen, etc. Ello provoca una amplitud y complejidad de análisis que requiere de la determinación y la concreción del tipo de conocimiento que se pretende ahondar.

Actualmente, encontramos diferentes modelos de conocimiento del profesorado a partir de las aportaciones de Shulman (1986). Los trabajos de Shulman sobre el conocimiento para la enseñanza han tenido un gran impacto en diferentes áreas como las ciencias, las sociales, las matemáticas, la ingeniería, la química, la educación especial, etc. (Rojas et al., 2013).

Shulman (1986) habla sobre el “paradigma perdido”, que hace referencia al contenido que enseña el profesor. El contenido que se enseña es la clave para determinar los conocimientos de los profesionales. Este autor diseñó y concretó el Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC o PCK, en inglés). Para Shulman (1987) el PCK es una integración de dos formas iniciales del conocimiento del profesor: conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico.

El PCK según Rojas et al. (2013), comprendía el conocimiento del contenido a enseñar, el conocimiento didáctico del contenido y conocimiento curricular.

El conocimiento del contenido hace alusión a la cantidad, a la comprensión y organización del conocimiento del profesor. En el contexto de la Escuela Infantil, se hace referencia a los contenidos específicos de las matemáticas intuitivas e informales.

El conocimiento didáctico representa el conocimiento de la materia para la enseñanza, concretamente las diferentes formas de mostrar y exponer los contenidos con la finalidad de facilitarlos y hacerlos comprensibles a los alumnos. En este sentido, el profesor ha de conocer las características de los alumnos y el contexto educativo, como también concretar con claridad sus metas educativas, bases filosóficas e históricas, e identificar el grado de dificultad en el aprendizaje, etc. En el contexto de la Escuela Infantil, se refiere a aspectos vinculados con el desarrollo evolutivo de los infantes; el contexto educativo propio de la Escuela Infantil con sus bases psicoeducativas; cómo se desarrolla el pensamiento matemático en los niños de los 0 a los 3 años; cómo se pueden ofrecer bastidas y soportes educativos de alta calidad en la escuela, etc.

Por último, el conocimiento curricular queda constituido por el conocimiento de materiales instruccionales válidos para enseñar. En la Escuela Infantil, se refiere a los aspectos vinculados directamente con las orientaciones curriculares y las aportaciones de las diferentes pedagogías en relación con el diseño de los espacios y materiales para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades.

En sus aportaciones, Shulman (1987) categorizó siete focos de estudio para analizar el conocimiento del profesional:

- 1) El conocimiento del contenido (SMK).
- 2) El conocimiento del currículo (CUK).
- 3) El conocimiento pedagógico del contenido (PCK).
- 4) El conocimiento pedagógico general (GPK).
- 5) El conocimiento de los estudiantes y sus características (LK).
- 6) El conocimiento del contexto educacional (CK).
- 7) El conocimiento de los valores, propósitos y fines de la educación (VAK).

Según Rivas Olivo y Godino (2010) la propuesta de Shulman (1987) mencionada anteriormente, ha sido importante en el desarrollo de investigaciones, formulaciones e implantaciones. Sus principios siguen reconocidos como las herramientas para diferenciar los componentes de conocimiento para la enseñanza que ha de tener un

profesor de matemáticas (Rojas et al., 2013). Aunque se ha cuestionado y reformulado, en cierta manera, este ha sido el modelo teórico más utilizado en la formación inicial y continua de profesionales a nivel internacional (Ball et al, 2008).

Considerando las diferentes investigaciones sobre modelos de conocimiento para enseñar matemáticas (Ball et al., 2008; Davis y Simmt, 2006; Pino-Fan y Godino, 2015; entre otras), en esta investigación se exponen de forma más amplia y detallada las aportaciones de los cuatro modelos de conocimiento más recientes:

- Modelo de conocimiento para la enseñanza: Mathematics Teacher’s Knowledge (MKT).
- Modelo especializado de conocimiento del profesor: Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge (MTSK).
- El modelo de Conocimiento Didáctico Matemático (CDM).
- El modelo de conocimiento Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM).

2.1 Modelo de conocimiento para la enseñanza: Mathematics Teacher’s Knowledge (MKT)

El modelo de conocimiento MKT, establecido por Hill et al. (2008) se define como el conjunto de conocimientos y habilidades que requieren los profesores para gestionar las tareas y problemas recurrentes en la enseñanza de las matemáticas, tal como se muestra en la Figura 2.

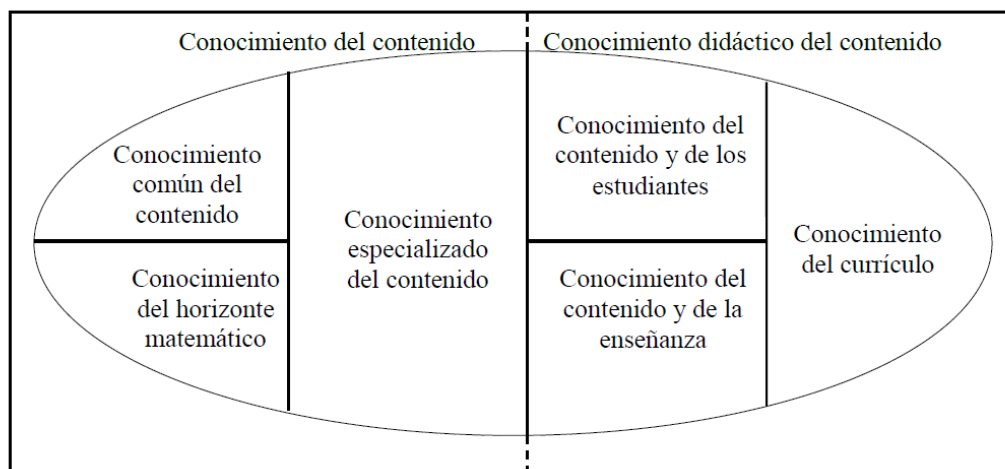


Figura 2. Dominios de Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Fuente: Hill et al. (2008, p.377)

En este modelo se describe el conocimiento del contenido como los conocimientos propios de la matemática. De nuevo, en el contexto de la Escuela Infantil, se hace alusión a los conocimientos disciplinares relativos a los cuatro bloques de contenidos (cualidades sensoriales, cantidades continuas y discretas, posiciones y formas y atributos mensurables). El conocimiento didáctico del contenido hace referencia a la integración simultánea de las ideas importantes de la materia con la manera en la que los estudiantes las adquieren (Ball et al., 2008). A grandes rasgos, se está hablando de cómo desarrollan los niños el pensamiento matemático y sus conocimientos.

Dentro del conocimiento del contenido se distinguen tres subdominios:

- El conocimiento común del contenido (CCC)
- El conocimiento del horizonte matemático (CH).
- El conocimiento especializado del contenido (CEC) paralelo a las dos anteriores.

La principal diferencia entre el conocimiento común y el conocimiento especializado se basa en el conocimiento profundo que desarrolla el profesional más allá del que tendría como parte de su propio conocimiento sin la especialización o estudios. Esta discriminación es compleja ya que se añade la dificultad de determinar cuáles son los conocimientos que provienen de la cultura “común” y cuáles son los que provienen de la especialización. En el contexto de la Escuela Infantil, esta discriminación sobre la naturaleza del contenido aún es más compleja porque como expone Castro (2016) se considera que cualquier persona, sea profesional o no, puede entender los contenidos que se desprenden de las acciones de los más pequeños.

En relación con el conocimiento del horizonte, los autores cuestionan si este tipo de conocimiento se clasifica dentro de este subdominio o por su naturaleza proyectiva, le corresponde ubicarse dentro de otro subdominio.

El conocimiento didáctico del contenido se divide de nuevo en tres subdominios:

- El conocimiento del contenido y de los estudiantes (CCE).
- El conocimiento del contenido y de la enseñanza (CCN).
- El conocimiento del currículo (CC).

Estas tres subcategorías relacionan el conocimiento matemático específico con el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, dificultades, preguntas, motivaciones... La primera, se centra en los aspectos metodológicos y cuestiones pedagógicas, como el diseño de las propuestas educativas. La segunda en las secuencias de un contenido o de las tareas. Y, por último, la tercera se refiere al conocimiento de los currículos y planes de estudios.

Las principales aportaciones de este modelo son: la validación empírica del PCK en matemáticas (Depaepe et al., 2013); la inclusión del subdominio de SCK (Flores et al., 2013); y la descripción del subdominio HCK (Muñoz-Catalan et al., 2015).

En relación con su aplicación en la etapa de Educación Infantil, destaca el estudio de Mosvold et al. (2011) en el que se analiza el conocimiento de una maestra de infantil (niños de 3 años). En esta investigación se determina que algunos elementos del MKT parecen ser aplicables al estudio del profesorado de infantil, aunque surgen dificultades para diferenciar (respecto a la tarea de enseñarlas) las matemáticas informales de cursos anteriores con las presentes en el contenido propio del curso.

2.2 Modelo especializado de conocimiento del profesor: Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)

Delgado y Vásquez (2019) exponen que el MTSK se presenta como un modelo analítico para estudiar el conocimiento que usa, posee o manifiesta el profesor de matemáticas, otorgando un lugar fundamental a la matemática sin dissociarla de su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este modelo tiene dos dominios de conocimiento distintos: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Como en el modelo anterior, estos dos grandes dominios se dividen en otros subdominios. Además, se incluyen como parte del modelo un dominio de las creencias de los profesionales sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Este modelo nace fruto de algunas limitaciones del modelo *MKT*. Según diferentes investigaciones (Carrillo et al., 2018) ha supuesto una importante fuente de

dificultades en la investigación. A grandes rasgos, explican la dificultad para identificar episodios de conocimiento según los subdominios, llevando a plantear problemas de operatividad para caracterizarlo y delimitarlo.

Las principales aportaciones son la especialización del conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2017); la definición del dominio de conocimiento matemático (Montes et al., 2013) y la especificidad del PCK respecto a las matemáticas (Carrillo et al., 2018)

En la Figura 3 se presentan los dominios y subdominios que definen el conocimiento del profesional bajo este modelo. Este modelo presenta un eje central con la incorporación de las creencias de los profesionales respecto a las matemáticas y a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En torno a este eje central se exponen 6 subdominios: tres para la categoría del conocimiento matemático y tres para el conocimiento didáctico del contenido. En el conocimiento matemático se encuentra el conocimiento de los temas, de la propia estructura matemática y de la práctica matemática. En el conocimiento didáctico del contenido se encuentra el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

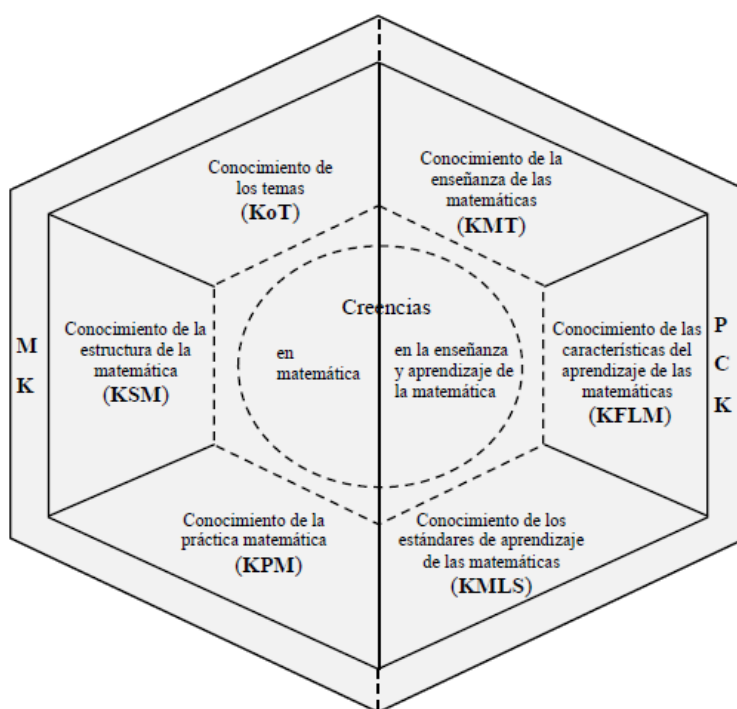


Figura 3. Subdominios del MTSK Fuente: Rojas (2014, p. 59).

Alsina y Delgado (2021, 2022) destacan la investigación de Muñoz-Catalán et al. (2017) basada en este modelo de conocimiento para el análisis de los conocimientos de los profesionales de infantil en relación con la resta, como ejemplo de una investigación propia de esta etapa educativa basada en MTSK.

2.3 Modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)

Godino et al. (2007) han desarrollado el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) que pretende ser una herramienta de análisis y de reflexión en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La finalidad de esta herramienta es poder analizar de manera sistemática y profunda el conocimiento del profesor de matemáticas. Más adelante, Godino (2009) establece diferentes facetas para el análisis del conocimiento: faceta epistemológica, faceta cognitiva, faceta afectiva, faceta interaccional, faceta mediacional y faceta ecológica. Cada faceta tiene diversos niveles de análisis que detallan y profundizan en la comprensión del conocimiento del profesional.

El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) surge a partir de la integración de las nociones teóricas del EOS (Godino 2002; Godino 2009; Godino, Batanero, Font, 2007; Godino y Pino-Fan 2013; Pino-Fan et al., 2013), de la noción de *proficiencia* en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) y del modelo del conocimiento matemático para la enseñanza, conocido como *MKT* (Hill et al., 2008).

Pino-Fan y Godino (2015), partiendo de este modelo, exponen que el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) interpreta y caracteriza los conocimientos del profesor a partir de tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática.

- La Dimensión Matemática del CDM parte de dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido.
- El Conocimiento Común del Contenido (CCC): conocimientos matemáticos, no necesariamente orientados a la enseñanza, que debe poner en juego para resolver problemas de un tema matemático (faceta epistémica). Son

conocimientos que puede tener un profesional o una persona adulta. (Pino-Fan et al., 2013)

- El Conocimiento Ampliado del Contenido (CAC): conocimientos avanzados de ese tema, siendo capaz de establecer conexiones con temas más avanzados del currículo, con los que el alumno se encontrará posteriormente (faceta epistémica). (Pino-Fan et al., 2013).

En este sentido, Pino-Fan y Godino (2015) exponen que el conocimiento ampliado del contenido dota al profesional de las bases matemáticas necesarias para plantear nuevos retos matemáticos en el aula relacionando el objeto matemático que se está desarrollando con otros conceptos matemáticas y, así, ofrecer las bastidas y acompañar a los alumnos hacia aprendizajes posteriores, más elaborados y complejos.

- La Dimensión Didáctica

Pino-Fan y Godino (2015) explican en su estudio que el conocimiento relativo al contenido matemático no es suficiente y que el profesional debe tener conocimiento sobre los diversos factores que influyen cuando se planifica e implementa la enseñanza. Para ello establecen seis categorías o facetas diferentes:

- Faceta epistémica: referente al conocimiento especializado de la dimensión matemática. Según Pino-Fan et al. (2013) el conocimiento del contenido especializado hace referencia a la identificación de los conocimientos puestos en juego (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) en la resolución de un problema. Incluye un conocimiento para la enseñanza con la capacidad por parte del profesional de resolver una tarea siguiendo diversos procedimientos y acciones. Debe de contar con varias maneras de representar un objeto matemático y disponer de distintos argumentos y justificaciones al momento de resolver una tarea matemática (González y Eudave, 2018).
- Faceta cognitiva: relativa al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes y al conocimiento que tienen los profesionales de los niños. En otras palabras, hace referencia al conocimiento de las características y las formas de pensar, explorar, desarrollarse, conocer y actuar en relación con el contenido matemático: “permite a los profesores planificar la enseñanza considerando los conocimientos previos de los alumnos

infiriendo su zona de desarrollo próximo” (González y Eudave, 2018, p. 38).

- Faceta afectiva: vinculada al conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes. Pino-Fan y Godino (2015) explican que los componentes afectivos son el conjunto de conocimientos necesarios para comprender y tratar los estados de ánimo, los aspectos motivacionales que conducen al niño a resolver una tarea matemática.
- Faceta interaccional: referente al conocimiento sobre las interacciones que surgen en el aula. Son los conocimientos necesarios para promover y valorar las interacciones entre los agentes implicados en el triángulo interactivo (profesional – niño – contenido de aprendizaje matemático) que se desarrollan en el contexto escolar (aula) durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. En esta faceta también se incluyen las normas (explicación, argumentación y fundamentación de las soluciones propuestas) que regulan la gestión de la clase (González y Eudave, 2018).
- Faceta mediacional: trata sobre el conocimiento de los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los niños. Hace referencia al dominio del profesional de utilizar las diferentes estrategias, recursos, materiales, entre otros, para diseñar, implementar, valorar y anticipar los contextos educativos y las bastidas que ofrecerá a los niños para favorecer su aprendizaje y desarrollo. También, se gestionan todos los elementos que configuran la práctica educativa: el tiempo y los recursos.
- Faceta ecológica: se define como el conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos y económicos. Estos aspectos indiscutiblemente forman parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se podría decir que es el conocimiento del contenido en relación al currículo y el contexto en que se desarrolla la práctica de enseñanza.

- La Dimensión Meta Didáctico-Matemática

Godino et al. (2013) explican que la Dimensión Meta Didáctico-Matemática hace referencia al grupo de conocimientos de las normas y metanormas o las llamadas restricciones contextuales. El conjunto de todo este compendio da lugar a la noción de Idoneidad didáctica definida por Godino (2009):

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino et al., 2006) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula (p. 23).

Godino (2009) considera que la idoneidad didáctica se define como un proceso de instrucción, articulado, coherente y sistemático compuesto por seis facetas diferentes:

- La idoneidad epistémica es relativa al grado de representatividad de los significados (que se lleva a cabo o que se pretenden) respecto un término concreto. En otras palabras, Font et al. (2010) explican que sirve para valorar si las matemáticas que se enseñan son “buenas matemáticas”.
- La idoneidad cognitiva expresa el grado en el que los significados se ubican en la Zona de Desarrollo Próximo ZDP de los niños y los patrones de atribución de sentido respecto al grado de relación entre los significados personales del niño y los pretendidos o implementados. Font et al. (2010) exponen lo siguiente:

“sirve para valorar, previamente si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar” (p. 17).

- La idoneidad interaccional hace referencia al grado en que se facilita la interacción entre la identificación de conflictos semióticos potenciales (detectados de antemano) y la resolución de los conflictos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- La idoneidad mediacional hace referencia al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje. Font et al. (2010) consideran que esta sirve para para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
- La idoneidad afectiva se concreta como el grado de implicación (interés, motivación...) de los niños, en este contexto de estudio, de interacción con los materiales y las propuestas de juego y exploración. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución

como con factores que dependen básicamente del niño y de su historia de vida. Font et al. (2010) hacen referencia a ella como la correspondiente a la emocionalidad y sirve para valorar la implicación (interés, motivación) de los niños versus la tarea de aprendizaje.

- La idoneidad ecológica es el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Font et al. (2010) consideran que sirve para valorar la adecuación de los procesos de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.

2.4 Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM)

Según Godino et al. (2018) diferentes investigaciones han utilizado el modelo de conocimiento CDM para el análisis de los conocimientos de los profesionales en matemáticas y se ha puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias (Pino-Fan et al., 2015; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan et al., 2016; Vázquez y Alsina, 2015). Fruto de los avances en las investigaciones, Godino et al. (2017) describen el nuevo modelo CCDM como una ampliación del modelo CDM. Esta ampliación incorpora el concepto de competencias didáctico-matemáticas del profesorado. En el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. De nuevo, se abre un nuevo paradigma para la investigación educativa que, como se ha expuesto en el inicio de este apartado teórico, denota la complejidad y profundidad que requiere el análisis del conocimiento del profesional.

Según Alsina y Delgado (2021, 2022) el CCDM, se ha aplicado en el profesorado de las etapas de primaria y secundaria. En Educación Infantil, se han utilizado los criterios de idoneidad didáctica (Moreira et al., 2018) siendo objeto de estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje, más que en el conocimiento del profesorado.

Como se ha descrito, las diferentes aportaciones teóricas se complementan y aparecen nuevos marcos propios de la innovación e investigación. Por ello, una vez

contemplados los diferentes modelos de conocimiento, se considera destacar los aspectos directamente vinculados al conocimiento matemático en la Escuela Infantil que, además, tienen una relación directa con el diseño de los espacios y materiales objeto de estudio de esta investigación.

Capítulo 3. Conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI).

Presentación

Gracias al estudio profundo de los diferentes modelos de conocimiento (PCK, MKT, MTSK, CDM, CCDM, entre otros) y a la revisión exhaustiva de las características de la enseñanza de las matemáticas en esta primera etapa, Alsina y Delgado (2021, 2022) han caracterizado los conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil. Según estos autores, este compendio de conocimientos busca ser una herramienta tanto para investigadores en educación matemática infantil como para los profesionales de esta etapa que requieran orientación sobre los conocimientos que deben poner en práctica.

Alsina y Delgado (2021,2022) explican que el estudio que han desarrollado sobre los diferentes modelos de conocimiento y las investigaciones que se desprenden de ellos, ponen de manifiesto que hay algunos componentes de los modelos de conocimiento del profesorado de matemáticas de primaria y secundaria que no se ajustan a la Educación Infantil. Cabe destacar que, mayormente, los diferentes modelos de conocimiento descritos hasta el momento no se desarrollan en la Escuela Infantil y las pocas investigaciones existentes, expuestas por Alsina y Delgado (2021, 2022), corresponden propiamente al segundo ciclo de Educación Infantil.

Frente a esta realidad, cabía la posibilidad de adaptar los modelos ya existentes al igual que Hundeland et al. (2017) o Mosvold et al. (2011) o considerando las aportaciones de Gasteiger y Benz (2018), valorar la creación de un conjunto específico de saberes adaptado a los seis primeros años.

El CEM-EI se presenta como respuesta a esta necesidad de tener un conjunto propio de conocimientos para toda la etapa de Educación Infantil y se estructura en diferentes apartados como se muestra en la Figura 4.

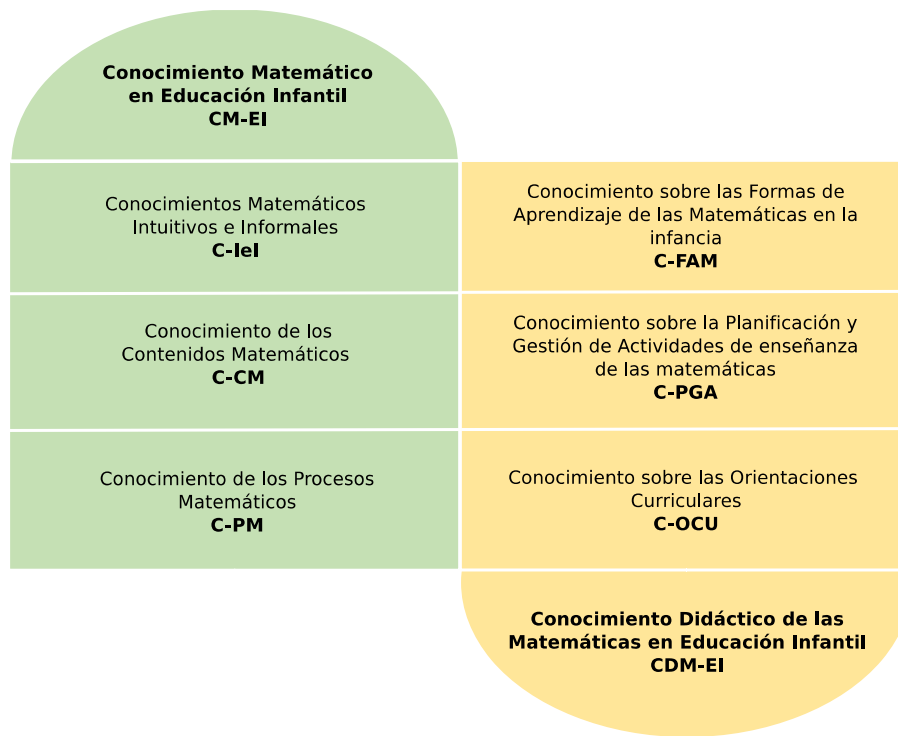


Figura 4. Los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil. Fuente: Alsina y Delgado (2021, p. 6).

Se observa que contiene:

- **Conocimiento Matemático en Educación Infantil:**
 - **Conocimientos Matemáticos Intuitivos e Informales (C-MIeI).**
Las matemáticas informales e intuitivas son la base necesaria para el desarrollo posterior de las matemáticas formales propias de niveles educativos superiores (Alsina, 2006, 2015; Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014). De este modo, Alsina y Delgado (2021, 2022) recomiendan que el profesorado de infantil tenga un amplio conocimiento de las matemáticas que los niños de la primera infancia usan en situaciones de exploración del entorno, manipulación y juego, además del papel que éstas desempeñan en su desarrollo. Para desarrollar esta subcategoría, parten de la categorización desarrollada por Alsina (2015) y Alsina y Roura (2017).
 - **Conocimiento de los Contenidos Matemáticos (C-CM).**
En los estudios de Alsina (2019c) se sintetizan las aportaciones de diversos autores y organismos internacionales y describe las cinco categorías de

conocimientos matemáticos que deberían adquirir los niños a lo largo de la etapa de Educación Infantil: Cualidades sensoriales (álgebra temprana) las cantidades continuas y discretas (números y operaciones), geometría, medida, y estadística y probabilidad. Alsina y Delgado (2021, 2022) explican que en este subdominio se incluye también el conocimiento de relaciones entre temas matemáticos ubicados en el mismo bloque de contenidos (conexiones intraconceptuales), así como las relaciones entre temas pertenecientes a diferentes bloques de contenidos (conexiones interconceptuales).

- Conocimiento de los Procesos Matemáticos (C-PM).

Para construir conocimiento y desarrollar habilidades matemáticas se requiere la realización de procesos como resolver problemas, modelizar, razonar, argumentar, comunicar, representar, etc. En esta línea, el conocimiento del profesorado de infantil radica en detectar aquello es un problema y por ende detectar las estrategias para resolverlos. También es importante preguntarse el “cómo”, el “porqué” y el “para qué” se argumenta, cuáles son los diferentes tipos de razonamiento, o cómo se utilizan los símbolos y el lenguaje para comunicar ideas matemáticas. Debido a la magnitud de esta investigación y las características del ciclo 0-3, en el que el lenguaje para comunicar ideas y la utilización con sentido de los símbolos prácticamente es nulo, se decide centrar el foco de este trabajo en los Conocimientos de Contenido Matemático (C-CM).

- Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil:

- Conocimiento sobre las Formas de Aprendizaje de las Matemáticas en la infancia (C-FAM).

Los conocimientos sobre las formas de aprendizaje hacen referencia a cómo aprenden matemáticas los niños en estas primeras edades. Para definir este aprendizaje, los autores se remiten a las aportaciones de numerosos autores reconocidos internacionalmente como Piaget, Ausubel, Pikler, Vygotsky, Aucouturier, Pestalozzi, Malaguzzi, Montessori, entre muchos otros y a las recientes aportaciones de la neurociencia (Bueno, 2019, Zabalza, 2018). En el apartado del marco teórico de referencia 3.2.1 se describen las aportaciones más significativas.

- Conocimiento sobre la Planificación y Gestión de Actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA)

Los conocimientos sobre la planificación de las actividades se basan en el principio de inclusión y parten de las aportaciones de los diferentes niveles del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM) planteado por Alsina (2018a, 2019b, 2020b). Este enfoque parte de diversas fuentes y destaca como pilares fundamentales:

- La Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygostsky, 1978)
- El Modelo Realista de Formación del Profesorado (Korthagen, 2001)
- La Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991).

En el apartado del marco teórico, contexto de esta investigación, se centra la atención en el diseño de los espacios y materiales como propuestas de juego, exploración y manipulación, siendo estos el eje central de este estudio.

- Conocimiento sobre las Orientaciones Curriculares (C-OCU)

Los conocimientos sobre las orientaciones curriculares, según los autores, corresponden al conocimiento sobre el currículo en los diferentes ámbitos que abarca: las bases psicopedagógicas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, la organización de la Educación Infantil por áreas, la evaluación (observación en el caso de la Escuela Infantil) y el conocimiento de los estándares de contenidos matemáticos que deberían aprender los niños de acuerdo con lo propuesto por organismos nacionales e internacionales.

Una vez se ha ahondado en los diferentes modelos de conocimiento, cabe resaltar que, como señalan Alsina y Delgado (2021, 2022), existen muy pocas investigaciones sobre el conocimiento para enseñar matemáticas en la etapa 0-6 y, menos aún, en el primer ciclo 0-3. A pesar de esta limitación, como expone Alsina (2019a), existe la necesidad de promover estudios sobre los conocimientos y destrezas de los profesionales de Educación Infantil.

Teniendo en cuenta las aportaciones de los diferentes modelos y el contexto de esta investigación, se considera la caracterización de conocimientos establecida por Alsina y Delgado (2021, 2022) acerca de los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI).

Para comenzar, es importante exponer que debido a la amplitud y la dificultad que conllevaría explorar cada una de las dimensiones y sus subdominios, esta investigación se focaliza en algunos aspectos concretos con base en los objetivos planteados. En este sentido, este estudio se focaliza en los conocimientos matemáticos acerca de las Matemáticas Intuitivas e Informales (C-MIeI) y los conocimientos didácticos sobre las formas de aprender (C-FAM); los conocimientos entorno la planificación y el diseño de los espacios (C-PGA) y, finalmente, sobre los conocimientos curriculares (C-OCU).

3.1 Conocimientos acerca de las Matemáticas Intuitivas e Informales (C-MIeI)

Una de las ideas presentes en la literatura en relación con las matemáticas en los primeros años, es el conocimiento matemático intuitivo e informal (Alsina, 2015). Según Alsina y Delgado (2021, 2022), el profesional de la Escuela Infantil debe tener un dominio de los conocimientos intuitivos e informales (C-MIeI). Esto corresponde al primer subdominio de conocimiento en que se centra este estudio.

Los conocimientos intuitivos e informales hacen referencia a las “primeras matemáticas” que los niños de 0 a 3 años aprenden y usan en el marco de sus experiencias cotidianas (Alsina, 2015). Se definen como situaciones educativas previas a la educación obligatoria, no reglada o no formal que nacen, emergen, intuitivamente de las experiencias de los niños. Aun así, en el contexto escolar, tienen un carácter intencional, planificado y regulado.

A lo largo del tiempo, se encuentran diferentes estudios que explican estas “primeras matemáticas” en edades muy tempranas. El término *matemáticas informales* fue incorporado por Baroody (1987) en el contexto de la educación matemática infantil para referirse a los conocimientos intuitivos que los niños recopilan entorno a experiencias informales. Este autor, señala que los niños aprenden muchos conocimientos matemáticos a partir de la vida cotidiana y de juegos que despiertan su interés, siendo este el punto de partida para el desarrollo del pensamiento matemático.

Cuando se parte del término “matemáticas informales”, en el contexto de la educación matemática infantil, se refiere a los conocimientos intuitivos que los niños

recopilan gracias a las experiencias informales, en contextos cotidianos. En este sentido, los niños aprenden muchos conocimientos matemáticos a partir de la exploración, la manipulación y el juego que despiertan su interés. Estas primeras matemáticas informales representan una gran elaboración matemática, pero tienen sus limitaciones ya que los procedimientos informales pueden llegar a ser ineficientes. Un ejemplo de esto ocurre en la aritmética: los niños pueden resolver situaciones aritméticas con cantidades pequeñas con estrategias de modelización directa y conteo, pero al aumentar las cantidades, los números empiezan a tener varias cifras y representar cantidades muy grandes que serán difíciles de manejar mediante sus estrategias informales. Kamii (1985) apuntaba este concepto también al desarrollar las teorías de Piaget (1963) y el pensamiento reflexionante.

La matemática informal se acepta como paso intermedio entre la matemática intuitiva (limitada e imprecisa) y la matemática formal (con sus símbolos) referente a la escuela primaria. En este sentido se puede relacionar con la matemática realista y el concepto de matematización progresiva presentado por Freudenthal.

Ginsburg y Baroody (2007) distinguen la matemática informal de la formal:

- La matemática informal trata sobre las nociones y procesos aprendidos en la dinámica diaria no escolar, los cuales se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social.
- La matemática formal se refiere a las habilidades y conceptos que se aprenden en las escuelas, y suele caracterizarse por una matemática más simbólica y escrita.

El conocimiento informal tiene también una clara relación con el mundo corpóreo al basarse en la intuición del niño que poco a poco, gracias a las interacciones con el mundo, las observaciones y las reflexiones, utiliza cada vez elementos más sofisticados para resolver las situaciones problemáticas. Según Baroody (1987), las matemáticas informales son relativas a la educación no obligatoria y las matemáticas formales aparecen en la educación primaria, por ejemplo, con la aritmética. Paradise (2017) lo explica exponiendo que aparecen muchas otras formas de aprender fuera de la escuela, de una manera más natural y espontánea a través de la observación y la imitación.

Cuando se refiere al concepto “matemáticas intuitivas”, en términos generales, la idea que destaca es que las matemáticas nacen de forma emergente e innata, por ejemplo, durante el juego y la exploración.

La posibilidad de que la matemática sea intuitiva mantiene una estrecha relación con el concepto de matemática informal. De hecho, según Baroody (1987) forma parte del conocimiento informal. También presenta una estrecha relación con la idea de que la matemática es un cuerpo emergente (matemática emergente) y que se da en los contextos reales o naturales de los niños (matemática realista).

Según Fischbein (1987) en la descripción del conocimiento intuitivo la experiencia tiene un papel muy importante. Se considera como un factor fundamental en la formación de intuiciones generando, con el tiempo de la experiencia acumulada, un sistema estable de representaciones o teorías que desarrolla el niño.

Fischbein (1987) caracteriza el conocimiento intuitivo como:

- Autoevidente: Las intuiciones se establecen como el proceso del que nace la teoría explicativa en tanto que aquello aparentemente real se explica sin tener que desarrollar ninguna justificación porque resulta evidente. Por ejemplo, que el todo es mayor que las partes o que dos puntos determinan una línea recta son evidencias que no requieren del desarrollo de una teoría para evidenciarlas, son autoevidentes.
- Certero: Las intuiciones son aceptados como ciertas, tienen lo que denomina certeza intrínseca. La evidencia y la certeza sean procesos estrechamente vinculados, pero no siempre son reducibles una a la otra. Que una teoría sea evidente no siempre quiere decir que sea cierta. En este sentido, no todo lo cierto es evidente, ni viceversa. Por lo tanto, el sentimiento de certeza no es un criterio absoluto de verdad objetiva, aunque, dentro del conocimiento intuitivo permanece como certero.
- Perseverante: Las intuiciones que se generan se afianzan fuertemente incluso, pueden permanecer enfrente a una posterior instrucción formal.
- Coercitivas: Las intuiciones se imponen subjetivamente sobre el individuo como absolutas y únicas representaciones o interpretaciones.

- Generadoras de teorías: Las intuiciones se configuran como teorías explicativas o parte de teorías generadas por los individuos en función de sus sistemas de creencias y conocimientos.
- Extrapolables: Las intuiciones se extrapolan. Este aspecto no siempre es evidente porque muchas veces, precisamente por su carácter autoevidente no se desarrolla de forma completa toda la teoría sobre la información en que se basa el hecho. Por ello, se puede considerar que en el conocimiento intuitivo la información es incompleta, se extrapola desde la intuición con certeza intrínseca.
- Globales: Las intuiciones parten de un conocimiento global y sintético opuesto al pensamiento analítico de naturaleza discursiva.
- Implícitas: Las intuiciones aparecen generalmente como conocimientos autoevidentes y autoconsistentes.

Ejemplo de estas primeras matemáticas intuitivas e informales se encuentra a Anderson (1997) que enumera diferentes vivencias entorno a la numeración y el conteo tales como: nombrar cantidades, reconocer números escritos, estimar cantidades, operaciones de suma y de resta con cantidades muy pequeñas, uso de números ordinales, estimar la igualdad numérica de dos colecciones, entre otros. En la misma línea, Ginsburg et al. (1998) hablan de la representación de los números escritos a partir de prácticas informales como poner las velas en el pastel de cumpleaños o indicar el número con los dedos (Alsina, 2015). Fernández et al. (2004) explican que, aproximadamente desde los cuatro meses, los niños muestran una curiosidad innata concerniente a los eventos cuantitativos y espontáneamente construyen en su ambiente natural y sin instrucción formal unas matemáticas denominadas informales. Sin embargo, dicha forma de pensamiento es imperfecta y totalmente distinta del pensamiento de los adultos.

Starkey y Cooper (1980) exponen que los niños recopilan una gran variedad de conocimientos relacionados a aspectos o temas que les interesan centrando en ellos su atención. A partir de estos intereses y actividades, que normalmente son cotidianas, es como se desarrolla el pensamiento matemático: ordenando y/o guardando juguetes o comestibles, construyendo con bloques, llevando a cabo representaciones, dibujando para grabar ideas elaboradas sobre las rutinas diarias.

El hecho de partir de los intereses de los niños como foco principal para que puedan atribuir un sentido a través del juego, de su cotidianidad, de sus conocimientos previos... hace que se mantenga una conexión con el aprendizaje experiencial de Froebel y Montessori, con el socioconstructivismo y el aprendizaje significativo, así como también la matemática realista siendo todas teorías pedagógicas que apuestan por esta premisa.

El NRC (2009) también hace referencia a estas matemáticas (las matemáticas intuitivas e informales) como un conjunto de conocimientos que los niños aprenden a través de sus experiencias y constituyen la base fundamental para aprender las matemáticas. Un ejemplo de ello podrían ser las nociones que experimenta un lactante al acercarse a su madre para tomar pecho (cerca – lejos) o los primeros aspectos cuantitativos que los niños identifican al soplar las velas de su cumpleaños (uno - dos- tres). Lago et al. (2012) consideran que las habilidades numéricas de los niños pequeños podrían determinar el nivel de comprensión posterior. Es importante conectar el aprendizaje informal con el formal porque se considera que los niños pequeños intentan dar sentido a las matemáticas formales y asimilarlas a partir de sus conocimientos informales previos. Las investigaciones más recientes plantean que, desde la cotidianidad, los niños pequeños pueden construir muchos conceptos matemáticos y estrategias informales amplias y sofisticadas (Castro et al., 2013). Clements y Sarama (2015), del mismo modo que Geist (2014) en la matemática emergente, hablan del desarrollo de las habilidades para las matemáticas al inicio de la vida. Los niños pequeños poseen desde su nacimiento ciertas competencias asociadas a las matemáticas; en relación con los números, el sentido espacial y los patrones. Explican que la mayoría de los niños adquiere un conocimiento considerable de los números y de otros aspectos de las matemáticas antes de ingresar en la escuela y que la importancia de esto radica en el conocimiento matemático con que los niños llegan al colegio. Esto está relacionado con su aprendizaje de las matemáticas durante los siguientes años, en la escuela primaria, secundaria e incluso en la universidad (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Alsina (2015) defiende la interacción que hacen los niños desde las primeras edades para interpretar la realidad e ir desarrollándose en su entorno cotidiano como una construcción del conocimiento matemático cada vez más elaborado. Se entienden las matemáticas de las primeras edades como intuitivas e informales, conjunto de

conocimientos que los niños aprenden a través de sus experiencias y que son fundamentales para aprender matemáticas escolares. En este punto, la experimentación y el juego libre con propuestas ricas y variadas en procesos y contenidos matemáticos, las propuestas de exploración de materiales y de observación de cambios son parte muy importante y tienen estrecha relación con diferentes eras que se exponen detalladamente en el apartado 3.2.1 respecto a las formas de aprender matemáticas en las primeras edades.

Aunque será a grandes rasgos, desarrollar este recorrido permite ver que los investigadores hablan sobre la importancia de estas primeras matemáticas; matemáticas informales por ser significativas y constituir el fundamento para el aprendizaje posterior de las matemáticas formales en el colegio. Lo que los niños aprenden en los primeros años de vida se consolida como fundamentos para los posteriores aprendizajes (NCTM, 2003; Fernández et al., 2004; NRC, 2009; Geist, 2009; Castro et al., 2013; Alsina, 2015; Clements y Sarama, 2015).

Castro et al. (2013) exponen los avances que ha habido en las investigaciones en relación con los conocimientos matemáticos de los niños más pequeños. Hay quien defiende una postura vinculada al desarrollo y al postulado de Piaget donde el inicio del conocimiento matemático en el niño es innato y está sujeto al desarrollo siendo, por ejemplo, el conocimiento lógico-matemático el origen propio del niño sin existir nada socialmente arbitrario o mediado en este campo (Kamii, 1985).

Los defensores de la primera postura se apoyan en que hay una evolución significativa de capacidades que se adquieren o despliegan por niños de diversas culturas a la misma edad aproximadamente. Esto explicaría un innato o temprano desarrollo de capacidades y estructuras cognitivas de los niños pequeños, como la cuantitativa y la espacial (...). Esta postura sostiene que los niños poseen un conocimiento informal de las matemáticas sorprendentemente amplio, complejo y sofisticado (Fuson, 1992; Ginsburt, 1977; Kilpatrick et al., 2001 en Castro et al., 2013 p. 2)

Por otro lado, hay quien plantea una postura opuesta en la que todo el conocimiento es adquirido:

La segunda postura explica las competencias que presentan los niños como resultado de diversas experiencias, el aprendizaje y el desarrollo se adquiere

por medio de la experiencia y la interacción con el medio (Newcombe, 2002), no existiendo ningún conocimiento previo (Castro et al., 2013, p. 2)

Esta segunda concepción recuerda a los planteamientos de Vygotsky (1984). Cole (1999) presenta las principales características de la psicología posvygotskiana destacando la acción mediada por el contexto: los individuos son agentes activos de su propio desarrollo, pero actúan en contextos que son enteramente de su propia elección, la mente surge de la actividad mediada “conjunta” de las personas siendo, en un sentido importante, co-construida y distribuida (Daniels, 2001).

Aun siendo dos posicionamientos contrapropuestos, ambos hacen referencia a estas matemáticas como conocimientos informales y tienen dos puntos en común. El primero, es que el conocimiento matemático es dinámico y creciente, que se va ampliando a medida que el niño va interaccionando con el medio y engranando conexiones entre los conocimientos de manera que se establecen los fundamentos y las bases para los posteriores aprendizajes. Planas y Alsina (2009) lo describen como las habilidades básicas que se van ampliando y conectando con otras habilidades más complejas a medida que avanza la escolaridad.

El segundo punto en común son los conocimientos matemáticos informales que ejercen una gran influencia en el desarrollo matemático posterior (Castro et al., 2013). Aprender matemáticas supone acumular ideas e ir construyendo, sucesivamente, conocimientos más profundos y perfeccionados (NCTM, 2003).

El NCTM (2003) explica que desde el nacimiento hasta los cuatro años se producen desarrollos matemáticos muy importantes, sea cual sea el contexto de aprendizaje de los niños, y que es necesario que se acompañe esta necesidad innata de aprender. En este sentido, se hace alusión a la importancia de la calidad educativa y de las experiencias de los niños en tanto que el fundamento del desarrollo matemático de ellos se establece los primeros años de vida. También nos recuerdan que en ningún otro ciclo educativo el crecimiento cognitivo es tan notable como lo es en estos tres primeros años de vida. Hacen énfasis en la necesidad de que los padres, cuidadores, educadores... que estén al cargo de los niños durante estos primeros años de vida, conozcan las formas en que los niños aprenden matemáticas y tengan grandes expectativas en cuanto lo que pueden llegar aprender. Incluso plantean la necesidad de una evaluación inicial, al comienzo de la escolarización formal, para poder dotar

de apoyos suficientes a aquellos niños que de otro modo empezarían la escuela en cierta desventaja. En ningún caso especifican que esta evaluación se convierta en un sistema para clasificar a los niños por capacidades siendo lo ideal observar y recoger sus necesidades de apoyo.

Fernández et al. (2004) aportan en sus estudios su idea de que, aun siendo universales y dado que están presentes independientemente de la cultura y el grupo socio económico, los conocimientos matemáticos informales tienen una tasa de desarrollo que fluctúa como resultado de la influencia sociocultural. Clements y Sarama (2015) defienden también esta idea que nos lleva a destacar la importancia de estas primeras matemáticas:

Una brecha aún más grande y perjudicial se presenta entre los niños que crecen en comunidades con recursos económicos altos y aquellos que crecen en comunidades de escasos recursos. Especialmente para estos niños, el éxito de su aprendizaje y desarrollo a largo plazo requiere experiencias de alta calidad durante sus primeros “*years of promise*” (...) Desafortunadamente la mayoría de los niños de familias con bajos ingresos llegan al colegio con un conocimiento muy inferior al de sus compañeros de familias con ingresos medios, y la brecha de logros con respecto al conocimiento matemático se ensancha progresivamente durante la etapa comprendida entre *pre-kinder* y los 12 años de edad. (Clements y Sarama, 2015, p. 9).

Aunque parece que las posturas sobre el constructo del conocimiento matemático a veces son contradictorias, no cabe discutir que estas primeras matemáticas son de naturaleza intuitiva e informal. La influencia y la importancia de proporcionar contextos ricos de alta calidad educativa, con propuestas educativas en contenidos matemáticos es importante. Sin embargo, hay que tener en cuenta que se produce una distancia entre aquellos infantes que no han tenido la posibilidad de vivir el acceso a estos contextos educativos de alta calidad versus aquellos que, por su condición socioeconómico y cultural, sí han tenido.

De este modo, se destaca en relación con las matemáticas informales, que existe un acuerdo generalizado sobre la importancia de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático desde edades muy tempranas (Alsina 2015). Los estudios ponen de manifiesto la importancia de una educación que favorezca su desarrollo y

potencialidad avalando que se establece una relación directa entre los resultados que obtienen los alumnos en las pruebas competenciales de niveles superiores (en la educación obligatoria) y el hecho de haber gozado de una educación y cuidados de calidad en la primera infancia (OCDE, 2007).

De todos modos, este fundamento está lejos del concepto de *primarización* usado por Alsina (2009), para explicar que esta relación no puede confundirse con la idea de que la Escuela Infantil es o ha de convertirse en la preparación para el siguiente ciclo o etapa educativa:

Pienso que la «primarización» de la Educación Infantil ha dado lugar a estereotipos que han castrado durante mucho tiempo el verdadero trabajo que debe realizarse en esta etapa educativa para desarrollar el pensamiento matemático (Alsina, 2009, p. 30).

En síntesis, actualmente ya no se discute que la educación matemática tiene dentro del ciclo 0-3 una entidad propia con sus contenidos, procesos y métodos específicos. Estas matemáticas informales son el eslabón necesario y la base para poder construir aprendizajes posteriores y se merece destacar que no es una etapa preescolar con la finalidad de preparar a los niños para otra etapa superior, sino que en sí misma tiene sus finalidades propias (Alsina et al., 2008; Planas y Alsina, 2009), y responde a las necesidades de aprendizaje, de relación, de juego, de exploración, y de maduración. Todo ello está relacionado con el desarrollo del pensamiento matemático de los niños. En esta línea NCTM (2003) lo defiende de la siguiente manera:

A estas edades, si las matemáticas se conectan adecuadamente a su mundo son algo más que “prepararlos” para la escuela o adentrarles algo de aritmética elemental. Las experiencias matemáticas adecuadas estimulan al niño para explorar ideas relativas a patrones, formas, números y al espacio, con complejidad creciente (p. 77).

A continuación, se presentan los conocimientos en relación con las matemáticas intuitivas e informales en el primer ciclo de la Escuela Infantil. Alsina (2015) a partir de un estudio longitudinal con más de 700 niños durante el período entre los años 2011-2015, organiza las matemáticas intuitivas e informales que aprenden los niños de 0 a 3 años en los contextos de juego, exploración y manipulación con materiales. Para ello, establece una organización a partir de las actividades mentales planteadas por Canals

(1989) estableciendo un itinerario didáctico que empieza por el conocimiento físico y continúa con el conocimiento propiamente matemático a través de las relaciones y las operaciones diversas. En este sentido, establece las categorías de identificar, relacionar y operar. Cabe destacar que no aparecen conocimientos matemáticos intuitivos e informales referentes a la estadística y la probabilidad en tanto a que en dicho estudio no se observaron acciones relativas a estos contenidos (Alsina, 2015). De esta manera, se presentan cuatro grandes categorías de conocimientos matemáticos intuitivos e informales, asociados a diversos objetos matemáticos:

- Cualidades sensoriales
- Cantidades (continuas y discretas)
- Posiciones y formas
- Atributos mensurables

En esta investigación, se parte de las aportaciones de los diferentes autores de referencia internacional que, conjuntamente, dan forma a estas primeras matemáticas intuitivas e informales. A su vez, se presenta como se desarrolla el pensamiento matemático del niño desde que nace hasta los tres años y se hace un recorrido según va evolucionando sus capacidades en torno a las aportaciones de diferentes autores.

3.1.1 Las cualidades sensoriales

Alsina (2022) subraya que el conocimiento físico asociado a las cualidades sensoriales de los objetos es un conocimiento preliminar imprescindible para promover el conocimiento matemático, estableciendo diversos tipos de relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etc.) a partir de criterios cualitativos. Este mismo autor, anteriormente señala que el reconocimiento de las cualidades y atributos sensoriales y las relaciones de naturaleza cualitativa que los niños son capaces de establecer son el punto de partida para empezar el desarrollar el pensamiento algebraico a través del enfoque early algebra (Alsina, 2015).

El concepto de álgebra temprana aparece recientemente para diferenciar el álgebra que tradicionalmente se ha vinculado a la Educación Secundaria de modelos de pensamiento algebraico existentes en las primeras edades de escolarización (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000, 2008; Molina, 2009).

Actualmente existen numerosas investigaciones que exponen la necesidad de incorporar el álgebra en los currículos desde la Escuela Infantil en tanto que conceptualmente tiende a vincularse a la Educación Secundaria. A pesar de la importancia que está adquiriendo el álgebra temprana, no existe hoy en día un acuerdo en la literatura en relación con su caracterización, ni tampoco sobre los conocimientos que la configuran. Sin embargo, son varios los currículos de Educación Infantil y Primaria que han empezado a introducir de forma explícita conocimientos para promover el pensamiento algebraico en las primeras edades (Pincheira y Alsina, 2021).

De este modo, el álgebra temprana aparece como parte de una propuesta de cambio curricular en diferentes estudios durante las últimas décadas (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000) y algunos de ellos proponen su incorporación ya en los primeros años de escolarización (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Davis, 1985; Kaput y Blanton, 2001; NCTM, 2003; Vergnaud, 1988).

Cabe destacar que, en ningún caso, esta nueva corriente considera el álgebra como una asignatura más en los currículos de Educación Infantil (Kaput, 2000; Lins y Kaput, 2004). Por lo contrario, se destaca como la manera de pensar y actuar sobre los objetos, las relaciones, las estructuras y situaciones matemáticas (Carpenter et al., 2003; Kaput, 1998, 2000).

Godino y Font (2003), exponen que el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. Según los autores, a medida que se desarrolla este razonamiento se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico. Aunque hacen alusión directa a aspectos lejanos del ciclo 0-3 como las ecuaciones, las variables y las funciones, exponen que en su naturaleza yacen los procesos de representación, ordenación, seriación y clasificación, aspectos clave en el corazón de las matemáticas y palpables en cualquier nivel educativo en los que aparecen procedimientos como los de seriar, clasificar, relacionar (Alsina, 2015) a través de los patrones, el orden, la generalización y la abstracción.

En esta línea, Papic et al. (2011) explican que a través del proceso de generalización se inicia el pensamiento algebraico. Teniendo en cuenta que la generalización se considera una actividad humana innata que llevan a cabo los niños pequeños de forma natural

(Mason, 2008; Acosta y Alsina, 2018), se pudo determinar que en edades muy tempranas (Geist, 2014) y al tiempo que comienzan a hacer generalizaciones, se inicia el desarrollo del pensamiento algebraico definido como álgebra temprana (Alsina, 2019b).

Según Alsina (2019b), son diversos los motivos que han propiciado una desvinculación del conocimiento algebraico de las matemáticas en las primeras edades:

- Nomenclatura utilizada décadas atrás para denominar los conocimientos de naturaleza algebraica
- La presencia de la matemática moderna en el currículo.
- La ausencia de un bloque de contenidos de álgebra en el currículo de matemáticas en los primeros niveles educativos.

En relación con la primera de las causas, años atrás durante varias décadas, para hacer referencia a los conocimientos de naturaleza algebraica en las primeras edades se usaban los términos como el de “lógica”, “lógica matemática” o “razonamiento lógico-matemático” debido a las aportaciones de diferentes autores reconocidos internacionalmente como Montessori, Dienes o Piaget entre otros. El impacto de las teorizaciones de estos autores sigue hoy en día latente en la comunidad educativa y, en la actualidad de diversos países las orientaciones curriculares sobre educación matemática infantil mantienen esta nomenclatura refiriéndose a lógica matemática o al razonamiento lógico-matemático en lugar del álgebra.

La segunda causa explicada por Alsina (2019b) parte de la ausencia explícita del álgebra como bloque de contenidos en muchos currículos de matemáticas en las primeras edades. El origen proviene de la implementación de la matemática moderna, que conllevó la introducción de un lenguaje excesivamente formal donde se implantaron elementos de la teoría de conjuntos y del álgebra abstracta en las prácticas de enseñanza de las matemáticas de las primeras edades, provocándose así un rechazo significativo al álgebra (Kline, 1976 citado en Alsina 2019b).

Según Geist (2014), autor reconocido a nivel internacional por sus aportaciones en la investigación en matemáticas en las primeras edades y especialmente con los más pequeños, la mayoría del aprendizaje matemático en los primeros años de vida viene del conocimiento lógico-matemático de Piaget que se basa en las relaciones entre los objetos y hace referencia a la abstracción reflexiva o reflexionante.

Como se irá describiendo a continuación, Geist es un autor que hace referencia al postulado piagetiano de manera recurrente en su investigación. Esto puede parecer contradictorio con lo expuesto anteriormente, pero en su caso se considera complementario porque en las tendencias contemporáneas sobre álgebra temprana no se pretende omitir o disminuir lo que en su momento Piaget y sus colegas teorizaron (Alsina, 2015). De hecho, sigue siendo un referente presente en los currículos vigentes. Pero, como defiende Alsina (2019b), cabe matizar y conceptualizar debidamente para formar a los profesionales con el conocimiento necesario que les permita establecer las conexiones entre los contenidos. Alsina (2019b) explica que la consecuencia de estas dos primeras causas es la que da lugar a la tercera que conlleva a la ausencia de un bloque de contenidos de álgebra en el currículo de matemáticas en los primeros niveles. De esta manera, en lugar del álgebra se ha consolidado “la lógica matemática” o “el razonamiento lógico-matemático” destacando las acciones como las de identificar, discriminar, comparar, clasificar y ordenar atributos de los objetos.

Así, Alsina (2019b) realza el vacío que se ha generado al no vincular explícitamente el álgebra a las acciones. Por ejemplo, clasificar u ordenar en tanto que los expertos en su momento lo consideraban parte de la educación sensorial o del razonamiento lógico-matemático afianzándose estos términos en los contextos escolares y los currículos. Ello, conlleva a pensar en un cambio en la nomenclatura, pero como el mismo Alsina (2019b) explica, no se trata de simplemente un aspecto terminológico y va un paso más allá. Implica el conocimiento del profesional que promueve actividades y propuestas que faciliten acciones que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico, evidentemente adaptadas al nivel educativo correspondiente. En consecuencia, los maestros en formación tienen que construir esta visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y saber cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles (Godino y Font, 2003).

Alsina (2019b) expone también el debate existente entre las diferentes corrientes de la matemática moderna. Por un lado, se conceptualiza el álgebra temprana y, por otro lado, se define el pre-álgebra. La diferencia principal nace en las formas en que cada una de ellas toma para suavizar el impacto que hay en las transiciones entre los diferentes niveles educativos y en el modo en que se planifica el acompañamiento a las dificultades de aprendizaje de los alumnos.

Esta investigación se acoge a la definición que exponen Pincheira y Alsina (2021). Los investigadores definen el álgebra temprana como la capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemática, tales como números, geometría, medida, etc.

Según ellos, para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en los niños es necesario favorecer contextos educativos donde puedan experimentar con elementos u objetos a partir de:

- Reconocer los atributos a partir de las cualidades de los elementos.
- Establecer relaciones entre los elementos: clasificaciones, ordenaciones, correspondencias y seriaciones a partir de patrones de repetición.
- Describir cambios cualitativos en los elementos.

En la Tabla 2 se presentan los contenidos de este bloque organizados en función de las tres grandes capacidades descritas:

Tabla 2. Acciones matemáticas informales de 0 a 3 años para favorecer el desarrollo del pensamiento en torno a cualidades sensoriales.

Identificar (reconocer)	Relacionar (Comparar)	Operar (Transformar)
Reconocimiento de las características sensoriales de los objetos.	Clasificaciones por criterios cualitativos.	
	Correspondencias cualitativas.	Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.
Agrupaciones por criterios cualitativos.	Ordenaciones por criterios cualitativos.	
	Seriaciones.	

Fuente: Alsina (2015, p. 34)

Esta tabla muestra en la primera columna las dos acciones que hacen referencia a la capacidad de identificar, reconocer, las cualidades sensoriales (forma, color, tamaño, textura...) y los atributos de los objetos (esfera, amarilla, pequeña, rugosa...). A continuación, se describen ampliamente:

Reconocimiento de las características físicas de los objetos

Alsina (2015) explica que las acciones de mirar, tocar, palpar, acariciar, oler, lamer, morder, etc. permiten a los niños descubrir de qué están hechos los objetos e ir reconociendo sus cualidades sensoriales y captando algunos atributos (Figura 5).



Figura 5. Reconocimiento de las características sensoriales de los objetos. Identificar la textura.

Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.

Agrupaciones según atributos cualitativos

Al tiempo que descubren de qué están hechos los objetos, continua Alsina (2015), los niños van reconociendo que hay diferentes objetos que comparten las mismas características sensoriales (el color, el tamaño...). En ese momento, aparecen las primeras agrupaciones a partir de acciones tales como juntar, reunir, apilar... (Figuras 6, 7, 8 y 9). En el desarrollo de estas acciones, es importante acompañar al niño verbalizando las características comunes y observando la diferencia de los otros elementos no seleccionados. Todas estas acciones, están también directamente relacionadas con el conteo, como se describe más adelante en el correspondiente apartado.



Figura 6. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.



Figura 7. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.



Figura 8. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.



Figura 9. Agrupaciones por criterios cualitativos. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.

Geist (2014), expone que aproximadamente al año el niño empieza a crear categorías en su cerebro en función las cualidades que ha ido descubriendo ya en los primeros meses de vida, pudiendo agrupar estas categorías como por ejemplo en "cosas que son redondas" o "cosas que son suaves" o "las cosas sin esquinas" o "las cosas que no hacen ruidos fuertes cuando se golpean entre si porqué son suaves".

Son muchos los autores, Alsina (2015); Baroody (1987); Canals (1992); Clements y Sarama (2015); Ferrándiz et al. (2008); Geist (2014); Ginsburg et al. (1998); Goldschmied y Jackson (2007); Kamii (1985); Lakoff y Núñez (2000); Montessori (1914, 1982, 1986); Tall (2013); entre otros que exponen también este proceso por el que el niño, a través de los sentidos, observa las cualidades sensoriales de los objetos y poco a poco va identificando sus principales características y va relacionándolas entre sí (Figura 10).



Figura 10. Reconocimiento de las características sensoriales. Identificar a sonrisa. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.

Geist (2014) parte de la idea Piagetiana en relación con los diferentes tipos de conocimientos: el conocimiento físico, el conocimiento lógico-matemático y el conocimiento social o convencional. Expone que los niños están construyendo activa y rítmicamente el mundo que los rodea, actuando como científicos para construir el conocimiento físico de los objetos, aquel que se puede observar: propiedades físicas como forma, textura, el color, el olor e incluso la ley de la gravedad, entendiendo que cuando sueltas un objeto en el aire, este cae hasta llegar al suelo (Figuras 11 y 12).



Figura 11. Reconocimiento de las características sensoriales. Identifica el color y la textura. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.



Figura 12. Reconocimiento de las características sensoriales. Identifica e observa como el objeto cae y repite la acción varias veces. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 0-1 años.

Cada vez que tocan, ven, huelen, prueban o mueven algo, lo recuerdan de cierta manera (Sinclair y Kamil, 1995 en Geist, 2014) y construyen lo que Piaget llamó esquema. Para bebés y niños pequeños, estos esquemas son muy concretos y están directamente relacionados con sus sentidos y actividad motora, pero, en ningún caso son simples o carecen de importancia. El desarrollo de este pensamiento está estrechamente relacionado con la definición de álgebra temprana presentada por Alsina (2019b), como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas (Figura 13).

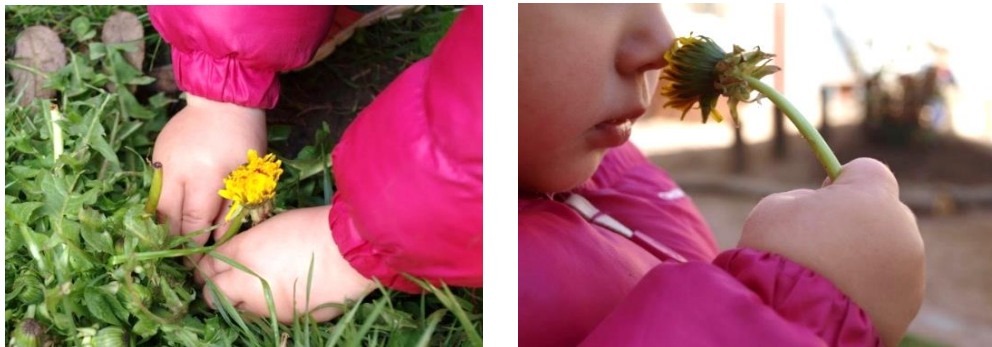


Figura 13. Reconocimiento de las características sensoriales. Identifica e observa el color de la flor y su olor. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.

Al tiempo que el niño identifica las características de los elementos y las define y reconoce, según Alsina (2015), también las relaciona y compara. La Tabla 2, presentada anteriormente, en la columna central, muestra las cuatro acciones que hacen referencia a la capacidad de relacionar las cualidades sensoriales y los atributos:

- Clasificaciones por criterios cualitativos.
- Correspondencias cualitativas.
- Ordenaciones por criterios cualitativos.
- Seriaciones.

Piaget y Inhelder (1975) en su explicación sobre el origen de las estructuras lógico-matemáticas determinan que en primer lugar el niño percibe las cualidades de los objetos a partir de las relaciones de similitud y diferencia. Según van comprendiendo las relaciones que se dan entre los objetos, aparece una estructura de pensamiento más elevada que les permite hacer clasificaciones y seriaciones (Geist, 2014). El factor determinante que favorece estas estructuras de pensamiento (esquemas sensoriomotores) es el movimiento. A través de su movimiento (tocar con la mano un móvil colgado del techo, coger un objeto del cesto de los tesoros...) y la relación que establece con y entre los objetos, desde muy pequeño el niño va construyendo conocimientos cada vez más complejos.

Geist (2014) explica que a través del movimiento el niño integra sus primeros aprendizajes matemáticos. Por ejemplo, cuando observa en los primeros meses de vida como se desplaza su mano por el suelo arriba y abajo gracias a sus movimientos (inicialmente espasmódicos). Otro ejemplo de ello es cuando el niño descubre las distancias de proximidad o lejanía entre él y su madre, o entre él y los objetos (Figura 14).

Actualmente, no se discute la relación existente entre el movimiento y la adquisición de aprendizajes en tanto que numerosos estudios de neuropsicología aplicada a la educación, muestran una relación existente entre los patrones básicos del movimiento, la lateralidad y el rendimiento matemático en la etapa de Educación Infantil (Barrero et al., 2016).

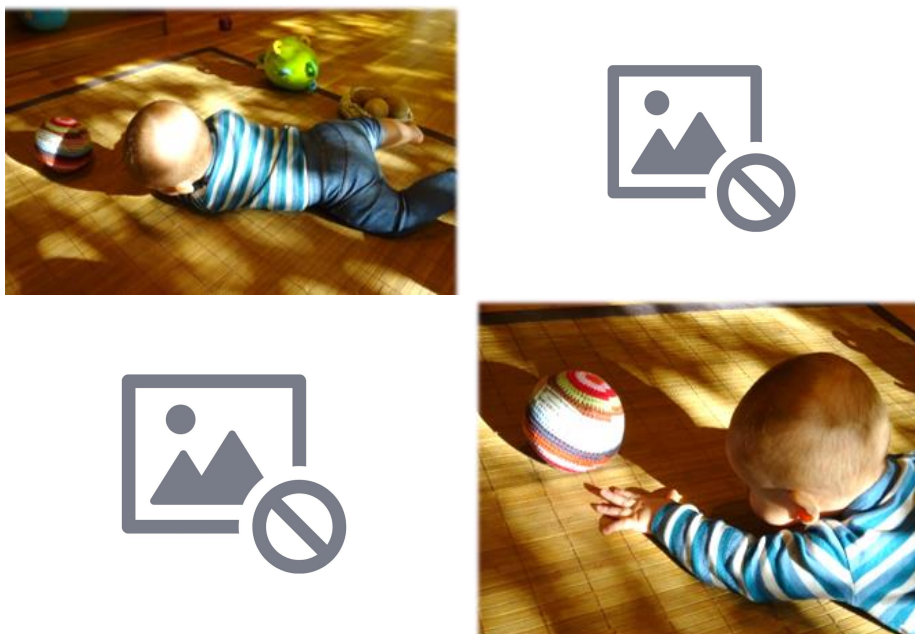


Figura 14. Reconocimiento de la distancia. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 0-1 año.

Clasificaciones según atributos cualitativos

Geist (2014) Presenta una escala por rangos de edades en la que nos brinda las aproximaciones del momento en que aparecen estas primeras acciones de relacionar las calidades sensoriales. Entre los 12 - 18 meses aparecen en los niños sus primeras las clasificaciones simples por un solo criterio cualitativo. Posteriormente, entre los 18 - 24 meses la clasificación acostumbra a ser más compleja y aparecen también clasificaciones múltiples con objetos de una misma colección, pero bajo criterios cualitativos diferentes.

En relación con las clasificaciones, que a menudo se confunden con las agrupaciones o las ordenaciones, van un paso más allá de la identificación de las calidades sensoriales. Implican un salto en el desarrollo del pensamiento matemático del niño (Geist, 2014). Cuando un niño es capaz de clasificar diferentes elementos esta relacionando las cualidades que ha identificado previamente (Alsina, 2015):

La principal diferencia entre clasificar y agrupar es que en el caso de las agrupaciones se trata de un conocimiento básicamente físico, mientras que en las clasificaciones el conocimiento que se ponen en juego ya es matemático, dado que relacionan objetos entre ellos (Alsina, 2015, p. 43) (Figura 15).



Figura 15. Clasificando el material según un criterio cualitativo: todos los animales juntos; todos los troncos juntos; todos los bloques juntos... Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.

Correspondencias según atributos cualitativos

Alsina (2015) explica que las correspondencias cualitativas hacen referencia a las asociaciones o apareamientos. Los niños asocian de una colección de objetos, según un criterio cualitativo concreto, y gracias a una relación matemática forman una pareja. Por ejemplo, cuando relacionan dos imágenes iguales en un domino de imágenes o por color (Figura 16).



Figura 16. Correspondencias cualitativas (apareando – asociando) por imagen y por color. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 1-2 años.

Ordenaciones por criterios cualitativos

En las ordenaciones por criterios cualitativos, el criterio que usan los niños para comparar los diferentes objetos es el de ver en qué objeto tiene más o menos cantidad el atributo que están comparando. Por ejemplo, si ordenan de mayor a menor una colección (Alsina, 2015). Según Geist (2014) entre los 24 - 30 meses, los niños empiezan a realizar sus primeras secuencias (Figura 17).



Figura 17. Ordenando los arcos de mayor a menor / En relación con los nins y los arcos, la imagen muestra la correspondencia por color y por cantidad. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.

Seriaciones cualitativas

Las seriaciones, en las primeras edades, se pueden considerar una actividad que implica una relación matemática donde se repite (correspondencia por copia) un patrón. Las seriaciones pueden ser de diferentes tipos. Castro (1995) defiende que los patrones implican una situación de repetición, pero pueden presentarse seriaciones crecientes o decrecientes. Mulligan, (2010) expone que un patrón matemático se constituye como cualquier regularidad predecible que implique operaciones numéricas, espaciales o relaciones lógicas (Castro y Ruiz, 2018). Steen (1988), citado por Clements y Sarama (2015) y más tarde por Castro y Ruiz (2018), se refirió a las matemáticas como la "ciencia de los patrones": patrones en número y espacio. El patrón es esencial para la abstracción de ideas, la generalización, las relaciones matemáticas y el desarrollo del razonamiento matemático en niños pequeños (English, 2004; Mulligan, Prescott y Mitchelmore, 2004; Waters, 2004 en Papic y Mulligan 2005).

Clements y Sarama (2015), exponen que el concepto de "patrón" va mucho más allá de los patrones repetidos secuenciales. Es la búsqueda para regularidades y estructuras matemáticas, un proceso, un dominio de estudio y un hábito mental importantísimo y no solo un contenido más. Se considera que los patrones en las primeras edades hacen referencia a la práctica de hacer seriaciones con dos elementos: por ejemplo, rojo -azul, rojo - azul. En este sentido, exponen que estas cadenas repetitivas pueden ser útiles, pero en ningún caso se pueden considerar como los únicos procedimientos a desarrollar. En consonancia, los profesionales deben ser muy conscientes sobre la importancia de crear y estructurar diferentes patrones. Por ello, realzan que el identificar y aplicar patrones ayuda a poner orden, hacer generalizaciones y a prever situaciones.

Castro y Ruiz (2018) explican que existen diferentes tipos de patrones dependiendo de los elementos que lo forman. Por un lado, el patrón puede ser numérico o geométrico. Por otro lado, puede ser de repetición (un motivo que se va repitiendo en secuencia) o de desarrollo/crecimiento (los elementos de la secuencia crecen en uno).

Clements y Sarama (2015) explican que la amplitud de formas en que se utiliza el término "patrones" denota la importancia de estos para el aprendizaje de las matemáticas y, al mismo tiempo denota también la complejidad que abarca el concepto. Estos autores, exponen 6 tipos diferentes de patrones correspondientes a diferentes ámbitos de las matemáticas:

- Patrones perceptuales, como patrones de dominó subitizados, patrones de dedos o patrones auditivos.
- Patrones en las palabras numéricas de conteo (Wu, 2007)
- El patrón de conteo “uno más”, que también conecta el conteo con aritmética.
- Patrones numéricos, como la representación mental de 3 como un triángulo; o un patrón similar de 5 que se pueden dividir en 2 y 3 y luego volver a unirlos para formar 5 nuevamente.
- Patrones aritméticos que son especialmente potentes y fáciles de ver para los niños: dobles ($3 + 3$, $7 + 7$), que permiten el acceso a combinaciones como $7 + 8$ y cinco (6 hechas como $5 + 1$, 7 como $5 + 2$, etc.), que permiten la descomposición en cinco (Parker y Baldrige, 2004).
- Patrones espaciales, como el patrón espacial de cuadrados o la composición de formas, incluidas las estructuras de matriz.
(Clements y Sarama, 2015, p. 304)

Según Castro y Ruiz (2018) los patrones y relaciones surgen en todas las ramas de las matemáticas ya sea números, álgebra, geometría, probabilidad o estadística. Los patrones están vinculados a determinadas acciones matemáticas:

- Reconocer: Descubrir situaciones matemáticas en diversos contextos.
- Visualizar: Ver patrones en datos y en situaciones no matemáticas.
- Verbalizar: Expresar en palabras la naturaleza de los patrones percibidos por la vista.
- Simbolizar: Formalizar en símbolos matemáticos las relaciones encontradas en los patrones.
- Analizar: Relacionar un patrón con otro, y predecir nuevos patrones.

(Liljedahl, 2004 citado en Castro y Ruiz, 2018, p. 91)

En la Escuela Infantil, las seriaciones / patrones tienden a ser muy simples. Según Geist (2014) aparecen entre los 30-36 meses aproximadamente. Clemens y Sarama (2015) también apuntan que en la Escuela Infantil los niños reconocen y duplican los patrones secuenciales simples. Destacan que, aunque esta tarea, en comparación con otras se presente como simple, requiere de un alto nivel de complejidad y es muy importante

favorecer patrones visuales, motrices y auditivos que ayuden en la generalización y el reconocimiento de las estructuras subyacentes.

Clements y Sarama (2015), presentan los conocimientos matemáticos que adquieren los niños de los 0 a los 8 años a partir de las “trayectorias de aprendizaje”. Los autores establecen un paralelismo entre el movimiento libre del niño y el desarrollo del pensamiento matemático. Los niños siguen procesos naturales por los que, en su evolución, aprendizaje y crecimiento, primero gatean, luego caminan, corren y saltan progresivamente. A modo de ello, siguen procesos naturales de desarrollo de pensamiento matemático, cada uno a su manera. El conocimiento de este proceso de desarrollo matemático favorece y permite a los profesionales construir ambientes que se adaptan a las necesidades reales de aprendizaje y desarrollo matemático de los niños.

Según Clements y Sarama (2015), la trayectoria de aprendizaje para los patrones, como muestran la Figuras 18 y 19, se puede establecer como:

- A los 2 años: “Generador de Patrones pre-explicito” donde el niño es capaz de detectar y usar una generalización de patrones de manera implícita pero no reconoce el patrón lineal secuencial de forma precisa y explícita. Por ejemplo, es capaz de repetir un patrón sencillo ABAB, con o sin errores, sin poder explicar que está haciendo o sin detectar el error cuando se le pregunta.
- A los 3 años: “Reconocedor de patrones”. De modo que el niño es capaz de reconocer un patrón simple expresando verbalmente un patrón que ha observado, por ejemplo, en un pantalón de rayas blancas y negras.



Figura 18. Seriaciones. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.



Figura 19. Composición y descomposición. Desarrollando intuitivamente el pensamiento de los patrones. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.

A su vez, mientras el niño observa los elementos, los manipula e identifica y compara las cualidades, también observa los cambios que se producen en ellos (Alsina, 2006; 2015).

Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato

Según Alsina (2015), la observación de cambios en los elementos desde un punto de vista matemático, se consideran como una operación en tanto que se produce una transformación de una situación inicial dando lugar a una situación final diferente. Son cambios que pueden presentar los mismos objetos o cambios en el entorno de estos, y que de alguna manera modifican las características del mismo objeto. Por ejemplo, como muestra la Figura 20, primero se le ofrece al niño una pelota de color verde y, en segundo lugar, otro exactamente igual, pero de color rosa; el niño identifica las pelotas iguales, pero de diferente color. De este modo, está identificando las cualidades color, textura, peso y forma. Todas ellas iguales menos el color que ha cambiado observando así los cambios de color.



Figura 20. Observando cambios de color. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 0-1 año.

Otro ejemplo ocurre cuando son los mismos objetos colocados en un contexto diferente. Los objetos de luz que se muestran o se “transforman” dando lugar a un nuevo y diferente aprendizaje. Aparece una nueva cualidad, solo visible en ese nuevo entorno donde el niño observa cambios en el propio elemento y en su entorno. Otro ejemplo, como muestra la Figura 21, podría ser si se colocan los bloques translúcidos a contraluz o no. De este modo, el niño puede observar una nueva dimensión, el bloque de metacrilato deja que pase la luz y proyecta sombras de color o, por lo contrario, deja pasar la luz, pero no genera ninguna sombra. De hecho, los bloques no se han transformado pero el contexto sí, lo que facilita nuevos descubrimientos.

Otros ejemplos ocurren a diario, tal y como muestran las Figuras 22, 23 y 24. Los niños observan cambios de diferentes índoles como por ejemplo en sus rostros o manos antes y después de comer o cuando se miran al espejo para lavarse la cara o las manos. Primero están sucias y secas y luego mojadas y limpias. De este modo, se encuentran numerosos ejemplos donde el niño identifica las cualidades, las compara y observa los cambios que se producen. Ocurre lo mismo cuando llueve o nieva y todo el entorno se transforma convirtiéndose en una gran oportunidad de aprendizaje por los cambios que se generan en todo (olores, texturas, sonidos...).



Figura 21. Observando cambios en las proyecciones de la sombra y en los colores. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.



Figura 22. Observar cambios y transformaciones en la textura, temperatura, color... Fuente: Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.

Por último, también existen cambios en los propios objetos debido a las transformaciones que pueden ocurrir sobre ellos. Por ejemplo, la nieve al derretirse, el barro al cambiar de forma o los colores al mezclarse.



Figura 23. Observar cambios y transformaciones en la textura, temperatura, color... Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 2-3 años.



Figura 24. Observar cambios y transformaciones en la textura, temperatura, color... Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.

Geist (2014) explica como los niños de tan solo un año intentan encontrar respuestas sistemáticamente a partir de las acciones que hacen repetidamente. Este proceso de repetición, no causal, es gracias a su intención de crear estructuras mentales organizadas. Los niños repiten las acciones e introducen nuevos métodos para comprobar la regularidad de los fenómenos observados y, nuevamente a partir de las respuestas que encuentran, se plantean nuevos problemas y nuevas preguntas que, de nuevo, convierten en nuevas acciones para resolver. Este proceso cíclico se va repitiendo y ampliando, hasta que da forma a los esquemas y estructuras de pensamiento de los niños (Figura 25).

Entonces, se concluye que estas estructuras mentales organizadas desde muy temprana edad se inician en el descubrimiento de las cualidades y atributos de los

objetos y su interacción, las relaciones fruto de la comparación, estableciendo esquemas de conocimiento superiores partiendo de conceptos no visibles que son fruto de la abstracción del pensamiento (conocimiento lógico – matemático). De este modo, y paralelamente, están aprendiendo a pensar en cosas, formando hipótesis, probando y resolviendo problemas (Bower, 1992; Brannon, 2002; Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu y Tsivkin, 1999; Jordan y Brannon, 2006; en Geist 2014).

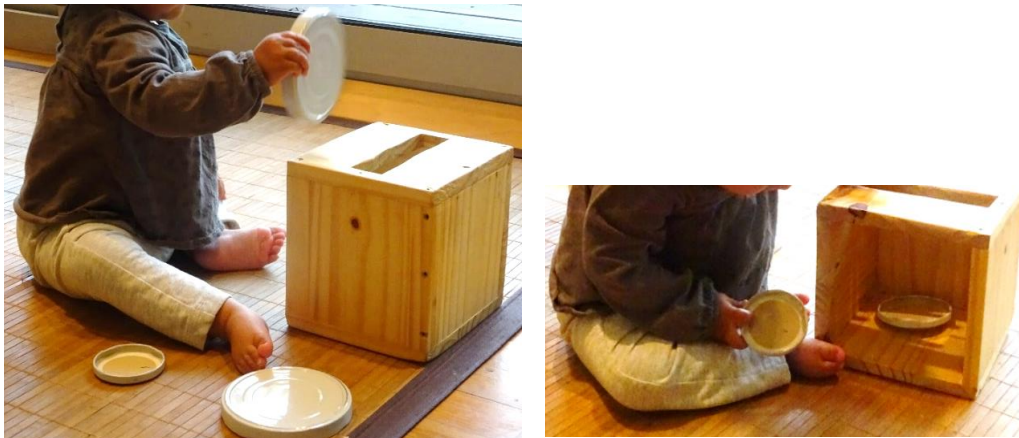


Figura 25. Repetir una acción y observar las consecuencias de esta. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 1-2 años.

Acosta y Alsina (2018) explican también este principio causa – efecto / acción – reacción, cuando en la primera infancia los niños empiezan a ser conscientes de los efectos de sus acciones que de manera intencionada buscan la complicidad y atención del adulto. Consecuentemente, dan lugar a una reacción. Es decir, se encuentran en una fase de exploración entre la acción y la reacción. Mason (2011) define este proceso como la toma de conciencia del niño de las consecuencias de sus propias acciones, como una capacidad para actuar, mediante la generalización (Alsina, 2019b).

Como detalla Geist (2014), los bebés y los niños se interesan por la observación de aquello desconocido, y sienten mucho más interés por los estímulos nuevos. Los elementos nuevos les fascinan mientras que los que son conocidos, o les resulta muy familiares, les generan más apatía y desinterés. Cognitivamente, los bebés están más tiempo observando los elementos nuevos y a los que ya conocen, los que su cerebro reconoce, no les presta tanta atención (Caulfield 2000; Xu et al., 2005; Geist 2014; Clements y Sarama 2015).

Algunos de los primeros pensamientos de los niños, explica Geist (2014), citando las teorías de Brannon et al. (2004), Brannon et al. (2006) y Wiebe (2006), se producen cuando los niños son capaces de distinguir entre objetos que han visto antes y los nuevos estímulos. Reconocen algo como familiar y son conscientes que ya han experimentado con este objeto.

En este primer año de vida, fruto del análisis exhaustivo que hacen los niños de las cualidades de los objetos y de las relaciones que se establecen entre ellos, descubren principios matemáticos fundamentales que son, también, un eslabón necesario e imprescindible para posteriores aprendizajes (Geist, 2014). Un ejemplo de ello es el principio de causalidad.

El principio de causalidad (6 - 9 meses aproximadamente) se refiere a la comprensión de la relación causa – efecto (Figuras 26 y 27). Comprender que acción puede dar lugar a otra acción. De este modo, el niño conoce que tiene el poder de hacer que sucedan cosas. Esta comprensión cambia la forma en que un bebé interactúa con su entorno porque es consciente de su capacidad de accionar sobre los objetos.



Figura 26. Repetir una acción y observar las consecuencias. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.

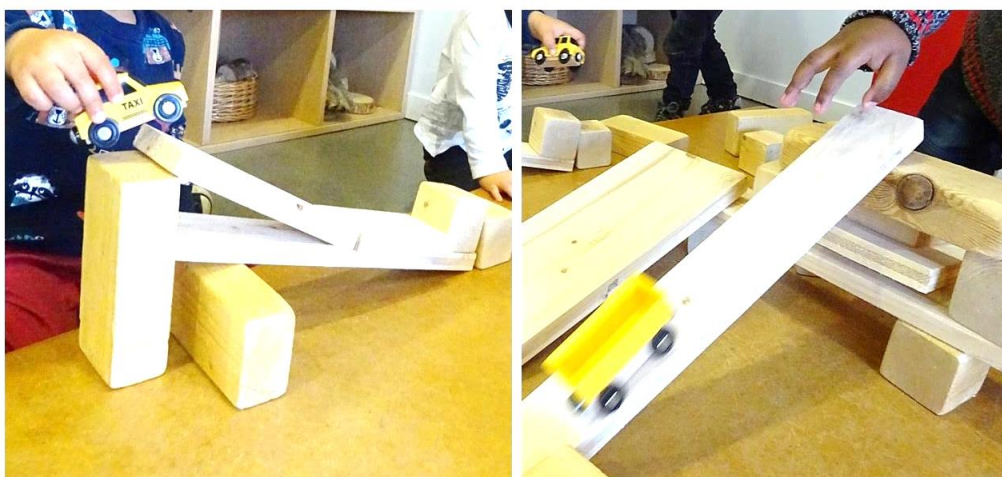


Figura 27. Repetir una acción y observar las consecuencias. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.

De 24 a 36 meses, según Geist (2014), los niños desarrollan un pensamiento representativo a través del lenguaje, dibujos y objetos. Este tipo de pensamiento representativo es muy importante en la construcción del pensamiento matemático. De nuevo aparece aquí el enlace con el concepto de álgebra temprana, porque las matemáticas se basan en él. La representación es el proceso que consiste en hacer que una cosa represente a otra, explica Geist, y propone como ejemplo el número 4 para representar IIII o la utilización de todo tipo de símbolos y signos para representar ideas más abstractas en matemáticas como la suma (+), la resta (-) y la multiplicación (x). La Figura 28 muestra como los niños de la Escuela Infantil utilizan el pensamiento abstracto cuando establecen que una pieza de corcho o madera puede ser un teléfono para hablar con mamá y papá o con una compañera.

Chamorro (2005) defiende el desarrollo de la función simbólica como un tema transversal que tiene su lugar y su razón de ser en cualquiera de los ámbitos de la matemática (el número, el espacio y la geometría y los atributos mensurables). Además, explica que es necesario que se introduzcan en la educación elemental. Por ello, reafirma que siempre ha de existir, para cualquier concepto matemático que se quiera introducir, un momento para la designación, representación o simbolización de todos los términos que implica ese concepto. De ahí el carácter eminentemente transversal del desarrollo de la función simbólica ya en sus inicios de la escolarización siendo fundamental en los primeros años de vida. Las Figuras 29 y 30 muestran ejemplo de los espacios de algunos tipos de juego simbólico que pueden aparecer en las aulas de 2 a 3 años en la Escuela Infantil.



Figura 28. Pensamiento abstracto: Las piezas a modo de teléfono. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.



Figura 29. Juego simbólico. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.



Figura 30. Juego Simbólico. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.

En síntesis, en el primer ciclo de Educación Infantil, el bloque relativo a las cualidades sensoriales tiene por objetivo el despertar el pensamiento algebraico: identificación de las cualidades y características de los elementos, las clasificaciones, ordenaciones, la observación de cambios en los elementos y el entorno, etc. (Alsina 2019b). Estas principales acciones permiten a los niños construir y ordenar su pensamiento elaborando cada vez un conocimiento más amplio sobre sus propias características, las del mundo que les rodea y sobre las interacciones que pueden establecer con ellos mismos, entre ellos y las otras personas, con los elementos y con el entorno en general (Geist, 2014).

Acosta y Alsina (2019) exponen qué tan importantes son todas estas acciones de reconocimiento del mundo y de sus cualidades, junto con el conocimiento de uno mismo y las consecuencias de sus propias acciones en tanto que forman parte del proceso de generalización innato que aparece en el desarrollo de estos descubrimientos:

Durante la primera infancia, los niños empiezan a tomar conciencia de los efectos de sus acciones: por ejemplo, desde el nacimiento sonríen, lloran, gritan e incluso emiten sonidos sugerentes y/o secuenciales para llamar la atención del adulto o

lograr su reconocimiento. Diferentes investigadores del comportamiento humano coinciden en que los bebés desarrollan formas tempranas de comprensión social que les permiten producir signos comunicativos intencionales e interpretar la importancia de los signos sociales, así como las acciones y eventos de su entorno mucho antes de que sean capaces de hablar (Ninio y Snow, 2018). Para Mason, estas acciones son “los momentos en los que el niño desarrolla el control sobre sus facultades mediante el desarrollo de su conciencia (como la capacidad de actuar), a través de la generalización (Mason, 2011, p. 567 en Acosta y Alsina, 2019, p. 1).

En este sentido, Clements y Sarama (2015) hablan sobre el desarrollo de las trayectorias de aprendizaje y dan importancia al conocimiento de los profesionales que acompañan a los niños en tanto que desde que nacen tienen competencias matemáticas relativas a los patrones que les rodea:

Como veremos, los niños pequeños tienen ciertas competencias similares a las matemáticas en números, sentido espacial y patrones desde el nacimiento (Clements y Sarama, 2009, p. 4).

En conclusión, se asume al término álgebra temprana para el ciclo 0-3 y se presenta una definición propia entendiendo el álgebra temprana en las primeras edades (0- 3) como el conjunto de procesos matemáticos informales (Baroody, 1987; Alsina, 2015) e intuitivos Fischbein (1987) que desarrollan los niños a través de las acciones de identificar y relacionar las cualidades de los elementos, los objetos y las características propias. Estos procesos se desarrollan con la exploración, el juego, la manipulación y la experimentación, en su contexto natural (Montessori, 1914; Ginsburg et al., 1998; Canals, 1992; Goldschmied, 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Alsina, 2006; Goldschmied y Jackson, 2007; Tall, 2013; Geist, 2014; Clements y Sarama, 2015). De este modo, va desarrollando el pensamiento y se van creando estructuras cada vez más elaboradas y sofisticadas (Piaget, 1963; Kamii, 1985, Geist, 2014). Adicionalmente, van adentrándose de manera innata en los procesos de generalización y abstracción (Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; Mason, 2008; Acosta y Alsina, 2020) las bases indispensables para el desarrollo del pensamiento algebraico de estadios superiores (Godino y Font, 2003; Kaput y Blanton, 2001; Alsina, 2019; Acosta y Alsina, 2020).

El álgebra temprana en el 0-3 incorpora acciones fundamentales e ideas lógicas como por ejemplo la de clasificar y seriar (Clements y Sarama, 2015), para desarrollar el

pensamiento matemático. Además, se encuentran en todos los ámbitos de la matemática, no solo en el bloque de las cualidades sensoriales en tanto que, estas acciones permiten entender por ejemplo los números y las formas. De este modo, existe un paralelismo entre el que se podría describir como el bloque de álgebra temprana (las cualidades sensoriales) y los bloques de contenidos de numeración, geometría y atributos mensurables (Alsina, 2004, 2015).

3.1.2 Las cantidades continuas y discretas

Según Lago et al. (2012) una de las preguntas más relevantes a las que se enfrentan todas las personas interesadas en el desarrollo del pensamiento matemático refiere a cómo los niños construyen el concepto de número. Las autoras explican que este interrogante puede ser problemático porque la mayoría del conocimiento de los niños pequeños es implícito e intuitivo y, a veces, es evidente mientras que en otras ocasiones no lo es.

De este modo, Lago et al. (2012) exponen que, al largo de la historia, en las diferentes investigaciones en relación con las capacidades de los más pequeños y los números, han aparecido algunas diferencias y sigue siendo un ámbito de estudio lleno de posibilidades y matices.

Aun así, las diferentes investigaciones defienden que las habilidades numéricas de los niños pequeños son la base de los posteriores aprendizajes, facilitando su comprensión. También se remarca la necesidad de potenciar la conexión de los aprendizajes informales con los formales, aunque ello no resulte tarea fácil. Así, se podría garantizar el aprendizaje significativo de las matemáticas en los diferentes niveles educativos. Además, añaden que para diseñar una estrategia educativa que favorezca las habilidades numéricas tempranas, no basta con determinar cuánto conocen los niños pequeños, sino también precisar cómo conocen.

Lago et al. (2012) explican que algunos autores como Wakeley et al. (2000), Mix, Huttenlocher y Levine (2002), Clearfield (2004) y Moore y Cocas (2006) se han mostrado contrarios al planteamiento de si los bebés tienen representaciones abstractas del número. Estos autores consideran que la representación del número no está presente en los primeros meses de vida y que se desarrolla a lo largo de los primeros años.

Ocurre lo mismo con el conteo. Piaget y Inhelder (1975) plantean que la construcción del concepto de número y el conteo va por etapas y, antes de integrar la noción de conservación del número, el niño debe integrar en un solo sistema la capacidad de clasificar a partir de agrupaciones, y de seriar a partir de relaciones de orden (Alsina, 2006; Castro 2006). En otras palabras, los niños deben aprender la lógica subyacente a la conservación del número antes que el conteo pudiera ser algo significativo (Clements y Sarama, 2015). Este procedimiento requeriría dos tipos de conocimientos combinados. Por un lado, la clasificación jerárquica (la capacidad de comprender que cada número incluye -agrupa- a todos los que le preceden). Por otro lado, la seriación, la capacidad de pronunciar el nombre de los números en secuencia relacionándolo con la cantidad de elementos correspondientes y, a su vez, entender que cuantitativamente que cada número, al contarlo progresivamente, es uno más que el anterior.

Castro (2006) explica también esta relación exponiendo que la acción de contar contiene ciertos requisitos o principios que hay que conocer y respetar como el orden estable de la secuencia convencional, la reciprocidad, la recitación de la secuencia correctamente, la no influencia del orden al señalar objetos, la cardinalidad y la abstracción.

También, Baroody (1988) hace referencia al hecho de que inicialmente, siguiendo la teoría de la absorción, se consideraba que el conocimiento matemático estructurado de forma jerárquica implicaba la organización de los contenidos y de las tareas de aprendizaje de forma gradual, siendo para el alumno un escalado de etapas de menor a mayor dificultad o complejidad. Posteriormente, de la mano de la teoría cognitiva, aparecen corrientes que, con una explicación más detallada sobre el aprendizaje significativo, postulan una integración de contenidos de manera integrada y globalizada.

Clements y Sarama (2015) explican que esta teorización de Piaget y sus colaboradores es poco afortunada porque ha dado a entender que en los primeros años de vida no hay lugar para los números. Ello, ha suscitado propuestas educativas que desestiman las oportunidades en la que desde la Escuela Infantil se pueden facilitar con el fin de favorecer estos conocimientos informales fundamentales.

Según Clements y Sarama (2015) esta argumentación piagetiana tiene su lógica inicial porque los niños deben conocer con profundidad estas capacidades (clasificar y seriar) para entender muy bien los números y llegar a ser muy habilidosos con ellos. Aun y así, no debe tomarse como una afirmación redundante y concluyen que los niños aprenden acerca del conteo y de los números mucho antes de dominar estas capacidades. Añaden que la práctica del conteo puede ayudar significativamente a desarrollar la habilidad de clasificar y seriar. De modo que, como Alsina (2015) expone, a medida que el niño desarrolla las capacidades de identificar, relacionar y operar con las cualidades de los objetos, estructuran y preparan su mente para identificar, relacionar y operar con números y viceversa, siendo estos bloques de contenido globalizados que se retroalimentan.

Salgado y Salinas (2011) hacen referencia a Verschaffel et al. (2007) para explicar que en la Escuela Infantil es donde se debe iniciar la construcción de los conocimientos numéricos porque son fundamentales en la educación matemática de las personas. Estos, explican que a lo largo de la historia los conocimientos numéricos han estado siempre presentes en la Escuela Infantil, aunque de diferentes formas. Primeramente, anterior a la década de los 70, el objetivo de la Escuela Infantil era enseñar a recitar y escribir la serie numérica. Posteriormente, en los setenta y ochenta, se priorizó la construcción de saberes (pre)numéricos, clasificar, ordenar, entre otros, como paso previo a la construcción del número. En la actualidad, se incide en que para la construcción del número es necesaria la actividad de contar.

Salgado y Salinas (2011) explican también que los niños en estas primeras edades recitan números, aunque no comprendan plenamente su representación, ni las relaciones que se establecen entre ellos. Poco a poco, van integrando y construyendo lo que representan. Remiten a Alsina et al. (2007) para destacar como habilidades fundamentales la clasificación, la ordenación, la organización espacial, la coordinación mano, nombre del número y trayectoria, el concepto de inclusión y el aprender, gracias a la abstracción y la representación, que los números se representan por signos convencionales.

Lago et al. (2012) presentan también otros autores como: Lipton y Spelke (2003), Brannon (2005), Xu et al. (2005), vanMarle y Wynn (2009), Izard et al. (2009) y McCrink y Wynn (2009), que postulan teorías entorno al hecho de que los bebés tienen representaciones abstractas no verbales del número y que las usan para:

- Discriminar cantidades.
- Ejecutar operaciones que implica ordenar cantidades o calcular los resultados de los problemas de adición y sustracción.

Lago et al. (2012) detallan que los autores favorables a la representación abstracta del número han concluido que entre los 4 y los 6 meses los bebés discriminan conjuntos con distintos valores cardinales, tanto en secuencias de objetos (figuras geométricas) como en sonidos (sílabas que se repiten) y en secuencias de acciones (muñecos que saltan). Además, esta discriminación se realiza estableciéndose un cierto patrón evolutivo. Por ejemplo, alrededor de los 6 meses la discriminación se produce solo cuando las cantidades se doblan, discriminado 4 de 8 y 16 de 32, pero no discriminan 4 de 6 ni 16 de 24. En cambio, la habilidad aumenta y a los 9 meses y ya pueden hacer discriminaciones 4 de 6 y 16 de 24 (en vanMarle y Wynn, 2009 en Lago et al., 2012).

El NCTM (2003) expone que, a partir de los 3 años, las programaciones de los procesos de enseñanza deberían capacitar a todos los alumnos a comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos. Esta afirmación, en el contexto de la Escuela Infantil puede entenderse como el hecho de naturalizar la presencia del número en el lenguaje de los profesionales que acompañan a los niños, así como en la grafía escrita, que forma parte del contexto real de los niños donde se hace visible en los cuentos, por ejemplo. Alsina et al. (2008) explican siguiendo este referente que, a lo largo de toda la etapa de la Educación Infantil, los niños deberían desarrollar el conocimiento y la comprensión de los números, sus modos de representación, las relaciones que se establecen entre ellos y los sistemas numéricos.

Las críticas y contra críticas a los diferentes estudios favorables han ido apareciendo a lo largo del tiempo y por eso las investigaciones se han ido mejorando y controlando las variables que daban lugar a replica. Ejemplo de ello son los estudios de Vilette (2002), Brannon (2006), Izard et al. (2009), Bryant y Nunes (2011), McCrink y Wynn (2004/2009), Dehaene-Lambertz (2007), McCrink y Wynn (2009) y Sarama y Clements (2009) en Lago et al. (2012).

A continuación, en la Tabla 3 se presentan según la clasificación de Alsina (2015) las acciones matemáticas informales de 0-3 años para favorecer el desarrollo de este tipo de pensamiento.

Tabla 3. Acciones matemáticas informales de 0 a 3 años para favorecer el desarrollo del pensamiento en torno a los números y las operaciones.

Identificar (reconocer)	Relacionar (Comparar)	Operar (Transformar)
Comprensión de los principales cuantificadores (muchos, pocos y algunos) y de algunas cantidades elementales (uno, dos...)	Correspondencias cuantitativas.	Cambios cuantitativos a partir de juntar, añadir, unir, reunir, agrupar, sumar... o quitar, separar, restar...
Inicio del conteo de los elementos de una colección.	Seriaciones.	
Distinción entre los números escritos y otros tipos de representaciones externas (dibujos, letras...)		

Fuente: Alsina (2015, p. 34)

En la primera columna de esta Tabla, se muestran las acciones relativas a identificar (reconocer) las cantidades.

Comprensión de los principales cuantificadores (muchos, pocos y algunos) y de algunas cantidades elementales (uno, dos...)

En la Escuela Infantil, expone Alsina (2015) el uso comprensivo de los principales cuantificados y las primeras cantidades elementales se desarrollan dentro de un contexto cotidiano y de juego durante prácticas informales en las que los niños ven, tocan e interactúan con las cantidades. Este autor, propone que las prácticas docentes partan de un significado real y contextualizado, en su ámbito más natural donde el niño observe las cantidades, tanto continuas como discretas, y progresivamente vaya reconociendo la cantidad de objetos que hay en una colección (Figura 31).



Figura 31. Reconocer los principales cuantificadores – muchos, pocos, algunos... y algunas cantidades elementales: uno, dos... Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.

Clements y Sarama (2015), dentro de la trayectoria de aprendizaje en relación con la Cantidad, número y subitización exponen la subitización como la capacidad de reconocer rápidamente y casi instantáneamente la numerosidad de un grupo en una colección pequeña de objetos. A partir de los seis meses, las investigaciones muestran que los niños tienen, a nivel intuitivo, la capacidad de reconocer la cantidad y el cambio de cantidad en determinados contextos. Ejemplo de ello es cuando a un niño de 6 meses, primero se le muestran tres láminas: la primera con dos puntos, la segunda con tres y la tercera con uno. A continuación, el niño oye tres golpes de tambor y entonces su mirada se dirige a la lámina que tiene dibujados tres puntos.

Las investigaciones muestran que esta es una de las principales habilidades que los niños deben desarrollar. De hecho, Clements y Sarama (2015) la destacan colocando en primer lugar frente las otras trayectorias que definen. Según ellos, tener un retraso en subitización perjudica notablemente el desarrollo del pensamiento matemático. Aun así, también

expresan que el conteo es en última instancia un método más general y poderoso para la comprensión del número y el cuantificar grupos.

Los autores definen la subitización perceptiva y la subitización conceptual. La primera se refiere a la capacidad de percibir un conjunto de elementos de forma intuitiva y simultánea de una colección muy pequeña (Clements, 1999 en Clements y Sarama, 2015). Por ejemplo, el número 3 al observar los tres puntos de un dado. La segunda, tienen un grado más de complejidad e implica ver las partes de dos conjuntos y ponerlas juntas para hallar el total, de nuevo, de forma instantánea. Por ejemplo, si en lugar de un dado, se lanzan dos y al momento, cuando se observan las dos caras, una con 4 puntos y otra con 3, se conoce el resultado 7 solo con mirarlas y de manera muy rápida. Se puede concebir como un proceso automatizado o, incluso, inconsciente.

En este sentido, las habilidades de subitización comienzan a desarrollarse a muy temprana edad, pero no por ello son simples habilidades matemáticas. Como expresan Clements y Sarama (2015):

La subitización introduce ideas básicas de cardinalidad – “cuántos hay”, “ideas de más” y “menos”, “ideas de las partes y el total junto con sus relaciones”, “la aritmética inicial” y, en general las ideas de cantidad (p. 20).

Los diferentes tipos de subitización pueden clasificarse según las cosas que se pueden subitizar:

- Patrones espaciales como el domino o los dados o las presentaciones de elementos en fila.
- Patrones temporales como los ritmos que se repiten en una canción
- Patrones asociados a la cinestesia vinculados al movimiento como, por ejemplo, patrones de dedos, rítmicos o auditivos – espaciales (Figura 32).



Figura 32. Reconocer los principales cuantificadores – subitización con patrones de dedos y con elementos. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.

Antes de los 3 años, los niños pueden distinguir colecciones de uno o más de un elemento. A partir de los tres y en adelante, serán capaces de distinguir dos, tres y, así sucesivamente. Aproximadamente a los 4 años, cuando el niño ya reconoce los 4 elementos, la subitización se conecta con el conteo (Clements y Sarama, 2015).

Según Clements y Sarama (2015), la trayectoria de aprendizaje para la subitización es sencilla y directa en tanto que consiste en aumentar la habilidad de los niños para subitizar números.

Entre los 0-1 años

- “Numérico pre-explicito” el niño no está habituado al número, sin conocimiento intencional, ni explícito del número.

Entre 1-2 años

- “Nominador de pequeñas colecciones” el niño identifica grupos de 1, 2 y a veces 3.

A los 3 años

- “Constructor de pequeñas colecciones” construye pequeñas colecciones entre 1-3, a veces 4, con el mismo número de otra colección, sin necesidad de emparejar uno a uno por correspondencia. Subitiza hasta 3 elementos y puede haber o no verbalización del proceso.

A partir de los 4 años

- “Subitizador perceptual hasta 4” reconociendo instantáneamente colecciones de 4 elementos mostradas por un tiempo breve y verbaliza los números.

Inicio del conteo de los elementos de una colección

Según Clements y Sarama (2015), el conteo es el primer algoritmo y el más básico e importante. Es el primer procedimiento que poco a poco los niños aprenden para resolver un problema matemático o cuántos objetos hay en un conjunto finito. Casi todo lo demás en cuanto a números, álgebra, etc. depende en alguna forma del conteo. Alsina (2015) expone que contar es la base de los primeros trabajos con números.

Según estos autores, el conocimiento numérico en las primeras edades incluye cuatro aspectos interrelacionados fundamentales:

- Reconocer y nombrar cuántos elementos hay en una colección pequeña (cuando es muy pequeña y ya se ha aprendido se hace por subitización).
- Aprender los nombres de los números y, eventualmente, la lista ordenada.
- Hacer la correspondencia uno a uno, enumerar los objetos.
- Entender que la última palabra que se designa para el último elemento de una colección refiere a cuántos objetos hay.

Al comienzo, en el aprendizaje del conteo los niños solo pueden decir algunos números, pero no necesariamente en secuencia. Luego, los niños aprenden a contar verbalmente utilizando siempre el mismo punto inicial y dicen una cadena de palabras. De hecho, en este momento se manifiesta que consideran las palabras del conteo verbal como una cadena y no como palabras separadas. Alsina (2015) expone la

importancia de distinguir cuando los niños usan retahílas para contar hasta una cantidad, por ejemplo 10, sin una comprensión significativa de esta acción que, en este caso, simplemente es memorística.

Poco a poco, aprenden a separar cada palabra de conteo y aprenden a contar hasta 10, luego hasta 20 y luego hasta números más grandes (Clements y Sarama, 2015).

Alsina (2015) lo explica a través del concepto de contaje analítico en el que todavía los niños no coordinan de forma adecuada las dos acciones necesarias para contar comprensivamente: tocar un objeto de una colección y, al tiempo, pronunciar la palabra adecuada de la recta numérica. De este modo, se puede considerar que el niño se inicia en el conteo significativo cuando desarrolla una correspondencia término a término.

Aproximadamente, a los 2-3 años, los niños comienzan a hacer esta correspondencia término a término (Geist, 2014; Alsina, 2015 y Clements y Sarama, 2015).

Posteriormente, los niños pueden empezar a contar iniciando en cualquier número y más adelante, los niños aprenden a hacer saltos en el conteo y a contar hasta 100 y más (Clements y Sarama, 2015).

Las Figuras 33, 34 y 35 muestran algunas de las acciones que desarrollan los niños en la Escuela Infantil vinculadas al conteo.

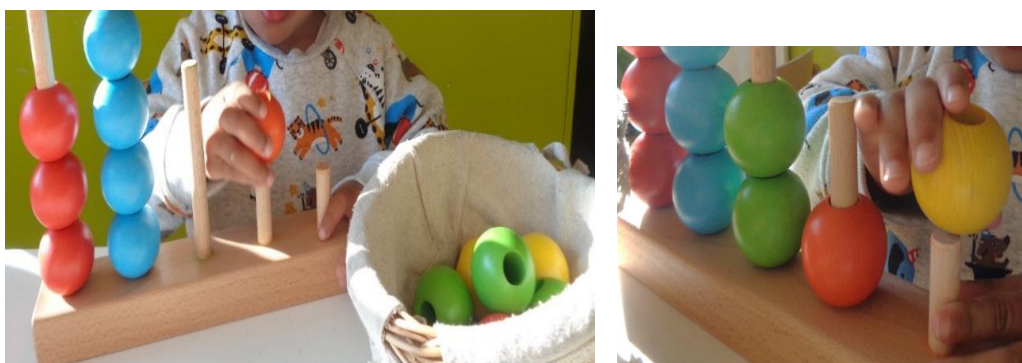


Figura 33. Inicio del conteo. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.



Figura 34. Inicio del conteo. Fuente: EBMV Horta Vermella y Serra Sanferm. Aulas de 2-3 años.

Para que este procedimiento de conteo sea significativo, los niños deben aprender a contar verbalmente y a comprender la mecánica del conteo. También deben entender el concepto de inclusión jerárquica de los números, o lo que es lo mismo la propiedad ordinal. De este modo, la complejidad de este aprendizaje comporta: coordinar el conteo verbal de objetos, señalando la correspondencia uno a uno y, a su vez, deben comprender que la última palabra del conteo nombra la cardinalidad del conjunto (Alsina, 2015 y Clements y Sarama, 2015).

En este punto, se observa claramente la relación con el álgebra temprana en tanto la capacidad de relacionar los objetos por sus cualidades, clasificar, hacer correspondencias y seriar, como acciones imprescindibles para el conteo.

En la Escuela Infantil, los niños van desarrollando y comprendiendo los significados de los números naturales y reconocen el número de objetos en grupos pequeños. Poco a poco, mediante el conteo van incorporando este conocimiento y van desarrollando también la capacidad de subitización reforzándose mutuamente (Clements y Sarama, 2015). Se considera que los niños muestran entre los 24 y 30 meses habilidades sobre el conteo e interiorizan el concepto de uno. Se expone que, aunque son capaces de empezar a reconocer la cantidad de elementos de una colección en estas primeras edades, no hacen sus agrupaciones por criterios cuantitativos sin tener presentes las características físicas de los objetos (Alsina, 2015).



Figura 35. Agrupaciones por color e inicio del conteo. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas de 2-3 años.

Como expone Geist (2014), cabe destacar que a partir de los 6 - 12 meses aproximadamente, los niños adquieren el principio de la permanencia del objeto, fundamental para el conocimiento matemático puesto que hace referencia a la comprensión del niño entorno la existencia de un objeto sin que pueda verlo. Esto les permite contar cantidades grandes sin que estos sean vivibles. El concepto de objeto de permanencia es el primer escalón hacia la representación. Cuando los niños conocen la existencia de las cosas, aun sin poderlas ver, significa que tienen integrado el concepto mental de que existen sin estar presentes. Esta comprensión permite que entiendan que los números son representaciones de los objetos incluso cuando no los vemos. En este sentido, para el niño sería muy difícil contar objetos a través del pensamiento abstracto si cuestiona su existencia porque no los ve (Figuras 36, 37 y 38, situaciones de juego vinculadas al descubrimiento de la permanencia del objeto).



Figura 36. Experimentando con el descubrimiento de la permanencia del objeto. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.



Figura 37. Experimentando con el descubrimiento de la permanencia del objeto. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 1-2 años.



Figura 38. Permanencia del objeto. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

Los niños, son capaces de entender que existen palabras que designan números y que estas se refieren a la cantidad. Empiezan a utilizar la correspondencia uno-a-uno para el conteo de objetos hasta 10. En ocasiones, poco a poco y con práctica, comprenden que la última palabra que ellos dicen en el conteo expresa la cantidad de objetos de la colección. Además, son capaces de comparar las cantidades de elementos y utilizan expresiones como más que, menos que, mayor y menor (Geist 2014; Alsina, 2015; Clements y Sarama, 2015).

Clements y Sarama (2015) explican que, en la trayectoria de aprendizaje para el conteo, esta es más compleja que la correspondiente a la subitización porque incorpora el conteo verbal, el conteo de objetos y las estrategias de conteo y en ella determinan que:

A partir del año

- “El Pre-Contador” (Verbal). Conteo no verbal. El niño expresa algunos nombres de los números, pero sin secuencia.
- “El Corista” (Verbal). Repite canciones o cadenas de palabras de números difíciles de diferenciar / separar
- Coloca objetos, acciones y palabras en la relación, muchos a uno (edad 1;8) o en la relación fuerte uno -a-uno (Edad 1)

A los 2 años

- “El Recitador” (Verbal). Cuenta verbalmente diciendo el nombre de números de forma separada, no siempre en el orden correcto.
- Correspondencia (edad 2:6). Contar dos objetos "dos, dos, dos".
- Si conoce más palabras que designan números que el número de objetos que tiene, las recita rápidamente hasta el final.
- Si hay más objetos que las palabras que designan números que conoce, reutiliza palabras que designan números hasta agotar el listado.

A los 3 años

- “El Recitador” (10) (Verbal) Cuenta verbalmente hasta 10 con algo de correspondencia hacia los objetos y es posible que tenga errores en la correspondencia.

- “El Correspondador” Mantiene correspondencias uno-a-uno entre nombres de números de conteo y los objetos. Por lo menos para grupos pequeños puestos en fila.
- Es posible que responda a cuántos objetos hay recontando los elementos del conjunto o no, respetando el orden y la asociación.

Distinción entre los números escritos y otros tipos de representaciones externas (dibujos, letras...)

Alsina (2015) expone la importancia de desarrollar habilidades como la motricidad fina y la direccionalidad, aspectos clave para la representación gráfica, antes de enseñar a los niños a escribir los números. En este sentido, el trabajo escrito debería empezarse a finales de la etapa de Educación Infantil o incluso al comienzo de la Educación Primaria.

El objetivo de la Escuela Infantil debería ser el de hacer visibles los números, del mismo modo que pasa con las letras de los cuentos de manera natural y contextualizada, para que los niños empiecen a distinguir este tipo de representación gráfica. De este modo, las prácticas educativas que se pueden llevar a cabo en la Escuela Infantil son para desarrollar las habilidades motrices, tanto fina como gruesa, para acompañar al niño a desarrollar capacidades necesarias para la escritura: prácticas de movimiento para integrar el sentido de la direccionalidad con todo el cuerpo, trabajos individuales que requieran coordinación óculo-manual, la precisión y fuerza al hacer la pinza, la concentración, etc., (Figura 39).



Figura 39. Representaciones escritas – asociando la cantidad. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

En la Tabla 3, en la columna central, se mostraban las dos acciones propias de la capacidad de relacionar cantidades que se presentan a continuación.

Correspondencias cuantitativas

Según Alsina (2015) el tipo de relación entre cantidades más habitual son las correspondencias, asociaciones o emparejamientos. En esta relación, no se tienen en cuenta las cualidades sensoriales sino las cantidades de dos colecciones distintas.

Por norma general, expone Alsina, en la Escuela Infantil todas estas situaciones de relación cuantitativa aparecen en un contexto de cotidianidad en situaciones espontáneas. Por ejemplo, cuando se reparten los baberos antes de comer o en el juego simbólico o cuando los niños ponen a cada muñeca en un carrito (Figuras 40, 41, 42 y 43).



Figura 40. Correspondencia cuantitativa: Un plato, un vaso y una cuchara para cada uno.
Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.



Figura 41. Comparando cantidades. Correspondencias cuantitativas, un plátano o medio dentro de un cuenco. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

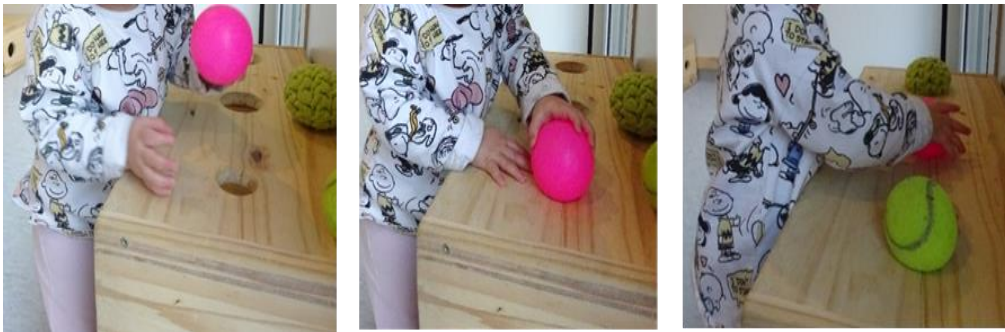


Figura 42. Correspondencia cuantitativa: Una pelota en cada agujero. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 0-1 año.



Figura 43. Correspondencia cuantitativa: Una pelota en cada agujero. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.

Según Clements y Sarama (2015), los niños en su primer año de vida comienzan a construir relaciones de equivalencia entre conjuntos de elementos. Se podría decir que son correspondencias que hacen de forma intuitiva.

A los 2-3 años, estas correspondencias que se presentan en sus actividades más cotidianas, ya tienen un carácter explícito. Geist (2014) también expone que a los 24-30 meses realizan ya correspondencias término a término de manera más concreta.

Clements y Sarama (2015) de nuevo, en la trayectoria de aprendizaje de la comparación, ordenación y estimación, exponen su complejidad porque la capacidad de comparar cantidades en estas primeras edades, está supeditada al conteo y la subitización, prácticas que los niños van aprendiendo poco a poco. Por ello, la dificultad de contar los elementos de dos conjuntos diferentes y compararlos y ordenarlos.

En la Escuela Infantil, los niños poco a poco “desarrollan la capacidad de comprender los números enteros, incluyendo los conceptos de correspondencia, conteo, cardinalidad y comparación. Los niños utilizan la correspondencia uno-a uno para solucionar problemas mediante el emparejamiento de conjuntos y la comparación de cantidades numéricas. Cuentan para determinar la cantidad numéricamente y comparar cuantitativamente (utilizando lenguaje como “más que” y “menos que”) y ordenan los conjuntos de acuerdo con el número de objetos que tienen” (Clements y Sarama, p.78) (Figura 44).

En la trayectoria de aprendizaje para la comparación, ordenación y estimación determinan que:

De 0 -1 año:

- “Correspondedor Muchos-a-Uno” Comparación. Pone objetos, palabras, o acciones en correspondencia uno a uno, uno a muchos o como una mezcla de los dos tipos de correspondencia.
- Pone una cantidad de bloques considerable en cada tarro de pastelillos.

A los 2 años:

- “Correspondedor Uno-a- Uno” Comparación. Pone objetos en correspondencia rígida uno-a-uno. Usa palabras para designar “mas,” “menos” o “lo mismo”

- Pone un bloque en cada tarro de pastelillos, pero le molesta que algunos bloques sobren, entonces busca otro tarro para poner todos los que le quedan.
- Muestra conocimiento de la relación "mayor que/menor que" cuando se trata de números pequeños (de 1 a 2 años).
- “Correspondedor de Objetos” Comparación. Pone objetos en correspondencia uno-a- uno, pese a no entender totalmente que esto genera grupos iguales (edad 2;8).
- Pone un bloque un bloque en cada caja y no le preocupan si sobran, pero no necesariamente sabe que tiene el mismo número de bloques que de cajas.
- “Comparador Perceptual” Comparación. Compara colecciones que son considerablemente diferentes en tamaño, por ejemplo, una colección de bloques es por lo menos el doble que la otra.
- Cuando se le muestran 10 bloques por un lado y 25 bloques, por el otro lado, señala la colección de 25 como la que más bloques tiene.
- Si las colecciones son similares y de pocos elementos, los compara con números muy pequeños.
- Compara las colecciones usando las palabras que designan números "uno" y "dos" (edad 2,8).
- Si se le muestran grupos de 2 y 4 bloques, señala el grupo de 4 como el que más bloques tiene.

A los 3 años:

- “Contador Ordinal Primero-Segundo” Número Ordinal. Identifica el "primer" objeto y, con cierta frecuencia, el "segundo" objeto en una secuencia.
- “Comparador No-verbal de Objetos Similares” (1 -4 objetos) Comparación. Compara colecciones de 1-4 objetos de manera verbal y no-verbal ("simplemente con mirarlos"). Los objetos deben ser iguales. Es posible que compare las colecciones más pequeñas usando las palabras que designan números "dos" y "tres" (edad 3,2), y "tres" y otras (edad 3,6).

- Puede transferir una relación de ordenamiento de un par de colecciones a otro. Identifica que los bloques de una colección y otra son iguales o diferentes y los relaciona.



Figura 44. Correspondencias cuantitativas. Fuente: EBMV Horta Vermella y Caputxins. Aula 2-3 años.

Seriaciones cuantitativas

Como describe Alsina (2015), la seriación más frecuente que realizan los niños pequeños son correspondencias "por copia" en las que se va construyendo una serie, partiendo de un modelo inicial y repitiendo elementos iguales (el patrón). En este tipo de seriaciones, expone, confluyen criterios de tipo cualitativo y cuantitativo, ya que aparecen de manera simultánea la combinación de elementos por un criterio cualitativo, una característica física del objeto (el color), y también un criterio cuantitativo (uno de cada) (Figura 45). Por esta razón, a nivel conceptual, se repite el contenido presentado en el apartado relativa al álgebra temprana donde se presentan las seriaciones cualitativas.



Figura 45. Seriaciones cuantitativas. Fuente EBMV Serra Sanferm y Caputxins

Por último, en la tercera columna de la Tabla 3 se mostraba, como principal acción a desarrollar en la Escuela Infantil en relación con las operaciones, la capacidad de observar.

Cambios cuantitativos a partir de juntar, añadir, unir, reunir, agrupar, sumar... o quitar, separar, restar...

Según Alsina (2015), las acciones de juntar, añadir, agrupar, quitar, separar, restar... están directamente relacionadas con la actividad de contar. Al tiempo que los niños empiezan a contar objetos concretos, uno a uno, y juegan con ellos, constantemente juntan, añaden, unen, agrupan, distribuyen, parten, separan, etc. Su juego es ir haciendo y deshaciendo con las colecciones de objetos agrupaciones distintas y de este juego aprenden conceptos aritméticos fundamentales. Mediante estos procesos aprenden a observar los cambios en las cantidades. Por ejemplo, cuando agrupan, reúnen, juntan, entre otros, descubren que al final hay más objetos. En el caso contrario, cuando quitan, reparten o separan, aprenden que el resultado final es menor.

Según Clements y Sarama (2015) las investigaciones muestran que los niños muy pequeños (5 meses) tienen intuitivamente la capacidad de identificar cambios en las cantidades. En este sentido, consideran que los estimadores intuitivos de la cantidad que usan los niños son innatos y que pueden facilitar el desarrollo posterior de la aritmética explícita.

Los mismos exponen que a los 2 años ya dan señales de saber que la adición representa aumentar y que retirar representa disminuir cantidad. Y a los 3 años, se consideran que los niños desarrollan un entendimiento explícito inicial de la adición y sustracción de números muy pequeños. Aunque, no es hasta los 4 años que los niños pueden resolver problemas de adicción con precisión (Clements y Sarama, 2015).

En este sentido, Clements y Sarama (2015) exponen que la aritmética está presente desde los primeros niveles y sostienen que aparecen en el juego de los niños, de manera intuitiva, las propiedades asociativas $[(a+b) + c = a + (b+c)]$ y conmutativa $(a+b = b+a)$. Estos autores consideran que los niños muy pequeños no conocen propiamente estas propiedades, pero las usan intuitivamente. Como ejemplo de ello, ilustran una situación en que los niños ponen dentro de una caja coches y camiones libremente sin contemplar cuál de ellos ponen primero. El resultado final de coches

y camiones no varía en función del orden en que los han guardado (propiedad conmutativa).

En la Escuela Infantil, los niños utilizan los significados de los números más pequeños para crear estrategias que resuelven problemas cotidianos, que responden a situaciones de su día a día. Clements y Sarama (2015) distinguen dos trayectorias de aprendizaje que se corresponden con la observación de cambios cuantitativos.

Referente a la trayectoria de aprendizaje para la adición y la sustracción, los autores exponen que:

A partir del primer año:

- “+/- Pre-Explícito” No se efectúan adiciones normalmente, pero muestra cierta sensibilidad delante de los cambios por adicción o sustracción de grupos. No muestra señales de entendimiento con respecto a la adicción o sustracción.

De los 2 a los 3 años:

- “+/- No Verbal” Adicciones de colecciones muy pequeñas mentalmente, nunca verbalmente. Por ejemplo, cuando agrupa colecciones de dos objetos que tiene en cestos separados.

En una segunda trayectoria, Clements y Sarama (2015), presentan el recorrido correspondiente a la composición y descomposición del número, como otro enfoque para la adición y sustracción que se utiliza juntamente con el conteo y la subitización.

La composición y descomposición la definen por la habilidad de los niños de relacionar las cantidades parte -todo. Los niños pequeños son capaces de reconocer estas relaciones en situaciones no verbales, intuitivas y perceptivas, haciendo sus propias representaciones y creaciones. Es a partir de los 4 o 5 años que, gracias a las situaciones de la vida cotidiana, han aprendido que un total se compone de partes más pequeñas y que, por lo tanto, la suma es más grande que sus partes. Sin embargo, aún no serán capaces de explicar esta propiedad de forma exacta, ni de manera verbal.

Componer y descomponer, explican Clements y Sarama (2015), es una práctica fundamental para entender el concepto de inclusión del número. Desarrollando esta habilidad, el niño puede ir observando las relaciones que se establecen entre los números y las cantidades que representan. Las propiedades de conmutatividad y asociatividad también están muy relacionadas con las acciones de componer y descomponer, de modo

que en la Escuela Infantil se considera que, de manera intuitiva, en las prácticas cotidianas y a través del juego, se pueden desarrollar muchas prácticas que ayuden a los niños a observar estas combinaciones entre elementos.

Referente a la trayectoria de aprendizaje para la composición y descomposición, los autores exponen que:

De los 0 a los 2 años:

- “Pre-Reconocedor de Parte-Todo” Reconoce partes y totales únicamente de forma no verbal. Reconoce que los conjuntos se pueden combinar en diferente orden, pero es posible que no reconozca de manera explícita que los grupos están aditivamente compuestos de grupos más pequeños.

Cuando se le muestran 4 bloques rojos y 2 bloques azules, puede apreciar todos los bloques e incluye rojos y azules, pero cuando se le pregunta cuántos hay en total, es posible que nombre un número pequeño, como el 1.

A los 3 -4 años:

- “Reconocedor Inexacto de Parte-Todo” Sabe que un todo es más grande que las partes, pero puede que no cuantifique de manera precisa. (El conocimiento intuitivo de la conmutatividad, y posteriormente, la asociatividad, con grupos físicos, después en contextos más abstractos, incluyendo números).

Cuando se le muestran 4 bloques rojos y 2 azules y se le pregunta cuántos hay en total, nombra un “número grande,” como 5 o 10.

Geist (2014) expone que los niños de entre 12-18 meses interiorizan el concepto “más”, asociado a la acción de aumentar la cantidad de elementos de una colección.

Las Figuras 46 y 47 muestran el juego de añadir mediante unos cubos de madera y un cilindro de plástico transparente. Que el pote sea transparente permite que el niño pueda ver la cantidad.



Figura 46. Añadir, más. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

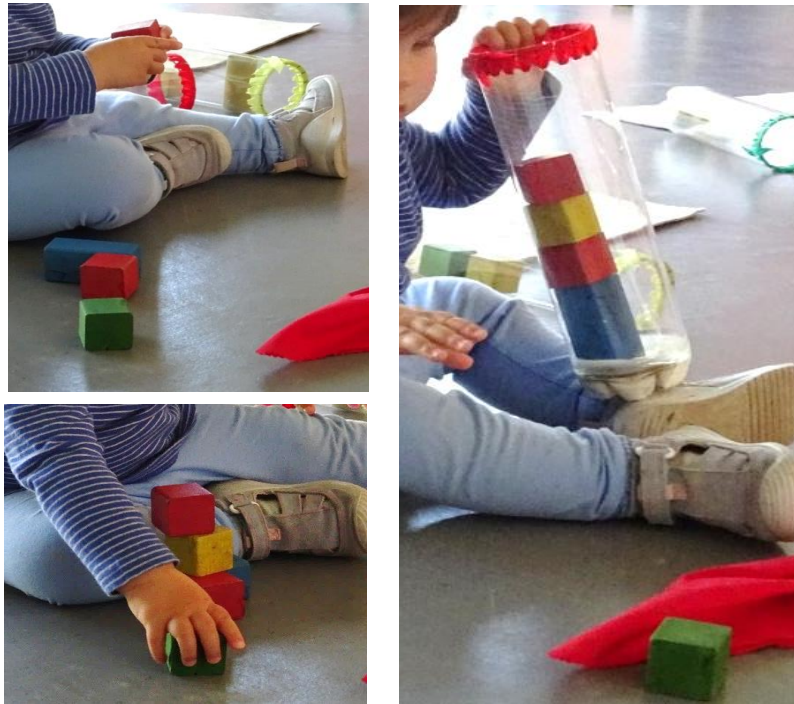


Figura 47. Observar cambios en las cantidades: Agrupar, reunir juntar...
Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

3.1.3 Las posiciones, las formas y las figuras

El pensamiento espacial y el reconocimiento de las figuras y las formas es fundamental porque es una habilidad humana esencial que contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas (Clements y Sarama, 2015) y tiene una fuerte relevancia en varios temas matemáticos, incluyendo la geometría, la medición y las relaciones parte-todo (NRC, 2014). Esto proporciona, por ejemplo, habilidades como las de conceptualizar las relaciones entre los elementos de un problema previo a su resolución. Diferentes investigaciones argumentan que el dominio del pensamiento espacial condiciona o avala otros dominios matemáticos más globales, ya que las funciones mentales que abarca el pensamiento espacial son muy amplias: categorizar figuras, formas y objetos, codificar las relaciones métricas que se establecen, representar, abstraer y transformar con los objetos, las posiciones y las formas (Clements y Sarama, 2015).

Fernández y Arias (2013) exponen que establecer relaciones posicionales y descubrir las formas de los elementos son dos capacidades que están estrechamente vinculadas. Establecer relaciones posicionales es un punto de partida para generar futuras

relaciones lógicas más complejas. Forma parte del conocimiento del medio y de crear estructuras de pensamiento matemático.

Estos autores explican cómo está vinculado el conocimiento de las posiciones con el movimiento, y a su vez como el movimiento está relacionado con el conocimiento de los objetos y sus características, entre ellas la forma. Estableciendo una relación prácticamente paralela, el conocimiento del espacio va ligado al conocimiento del entorno y de los objetos o elementos que lo configuran y viceversa. Del mismo modo que el conocimiento de los objetos, en cierta manera, está vinculado al espacio. Los investigadores dan como ejemplo el hecho de que un objeto no se ve igual estando en ubicaciones distintas y tampoco se ve igual estando quieto que estando en movimiento. Además, no es suficiente acercarse (desplazarse por el espacio) al objeto para conocerlo, ya que para conocerlo en su totalidad no basta con observarlo desde diferentes puntos, sino que hace falta tocarlo, olerlo, probarlo, manipularlo y experimentar con él. De esta manera, mientras el niño explora el objeto “busca” o establece nuevos puntos de referencia en el espacio y, además de manera interconectada, lo relaciona mentalmente, visualmente, etc. con otros objetos conocidos.

Diferentes autores, sostienen que los niños se sumergen en el espacio que les rodea, expresando sus relaciones con él de formas diversas: topológicas, proyectivas o métricas. A grandes rasgos, en los planteamientos de Piaget y Inhelder (1967) se presentaba, en relación con el conocimiento del espacio, la idea de que el niño pasaba por dos estadios diferentes: un estadio relativo al espacio sensoriomotor inicial (0-24 meses) seguido de un estadio del espacio representativo (2-12 años). En estos estadios, las relaciones topológicas aparecen en primer lugar y a continuación se daban las relaciones proyectivas. Las relaciones métricas aparecían indistintamente en los dos estadios.

Han sido diferentes autores como Vergnaud et al. (citados en Chamorro, 2005), que han reformulado y matizado las aportaciones de Piaget en tanto que las críticas que ha obtenido se centran concretamente en un punto: no se concibe ningún tipo de modelización del espacio como previo a otro. En este sentido, se considera que existen determinados conceptos (topológicos, proyectivos o métricos) que aparecen, o se reconocen en el niño, en diferentes momentos sin poder determinar claramente un orden preciso de aparición.

Castro (2006) expone que, según las diferentes ramas de la geometría, haciendo referencia a las relaciones con el espacio (topológicas, proyectivas o métricas), el niño en las primeras edades va desarrollando diferentes capacidades:

- Capacidades topológicas que, según Vecino (2005), se definen como el tipo de lugar: distinguir espacios completamente cerrados de espacios parcialmente cerrados (dentro, fuera, borde, abierto, cerrado, en...). Relaciones parte-todo. Capacidad para hacer construcciones, poner piezas en fila, juntar piezas a semejanza de un puzle (o puzles cuando ya es más mayor), etc. (Castro, 2006)
- Capacidades proyectivas que, según Vecino (2005), se definen como la orientación y la localización en el espacio: poder hacer juicios de distancia (cerca, lejos, junto a, al lado de, sobre, en frente, delante, detrás...). Desarrollar destrezas para moverse en el espacio con el propio cuerpo. Mover objetos y moverlos relacionadlos entre sí, mantener la dirección y la secuenciación coherente al reproducir una disposición lineal de diferentes objetos. Ir adquiriendo habilidades en el reconocimiento de que una ruta indirecta puede llevar al mismo punto que una línea recta. Tomar desvíos alrededor de un obstáculo para alcanzar una meta, etc. (Castro, 2006)
- Capacidades métricas que, según Vecino (2005), se definen como aquellas relativas a la medida y a la forma: El niño incorpora a través de los sentidos impresiones en relación con el objeto o los objetos que le rodean. Estas impresiones le servirán de modelo o marco de referencia para comparar las propiedades con los demás objetos que posteriormente vaya descubriendo. Durante estos primeros años, el niño utilizará modelos espaciales contruidos a partir de patrones sensoriales basados en sus experiencias con los objetos y poco a poco, pasará a utilizar aquellos patrones aceptados socialmente y de uso común. Estos patrones son entre otros: color, forma, tamaño. Para las formas se utilizan como patrones las figuras geométricas. Estos patrones se van asimilando a medida que realizan las actividades en su día a día, en el contexto de cotidianidad e incluso sin tener intencionalidad de enseñanza. Aun así, hay una gran diferencia en la riqueza de patrones asimilados entre los niños según hayan tenido, o no, una educación sensorial intencionada (Castro, 2006).

En cuanto a las relaciones métricas con el espacio, cabe destacar que comprende tanto a las relaciones proyectivas como a las topológicas. En este sentido, existe una interrelación

entre todas ellas y, aunque matemáticamente se expliquen o se desarrollen según se requiera de manera parcelada, en la mente del niño se integran conjuntamente (Vecino, 2005).

Según Fiol (1996), citada por Vecino (2005), esta autora considera fundamentales las siguientes preguntas ¿Cómo construyen los niños su conocimiento y comprensión del espacio?, ¿cómo identifican, reconocen propiedades y clasifican diferentes formas? y ¿cómo desarrollan sus representaciones externas o internas (pensamiento visual)? para plantearse las propuestas de enseñanza de la geometría.

En el contexto de la Escuela Infantil, como ocurre con los otros contenidos matemáticos, las experiencias de los niños se constituyen como la base para los posteriores aprendizajes y se convierten en los fundamentos de una geometría a posteriori mucho más sofisticada (Alsina, 2015; Castro, 2006). Se encuentran diferentes investigaciones que muestran que los bebés y los niños pequeños son capaces de codificar información espacial sobre objetos, formas, distancias, localizaciones y relaciones espaciales en edades muy tempranas (Alsina y Roura, 2017; Castro, 2006; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; NRC, 2014)

Según Clements y Sarama (2015), los niños pequeños desarrollan el razonamiento espacial a partir de dos perspectivas: a medida que examinan las formas de los objetos y cuando inspeccionan sus posiciones relativas. De manera holística, se conciben los tres tipos de relaciones con el espacio: topológicas, proyectivas y métricas. Alsina (2015), expone que en la Escuela Infantil los niños aprenden a situarse progresivamente en el espacio y a reconocer las formas a través de las diferentes situaciones. Como Pikler (1984) defiende, esas situaciones se dan gracias al movimiento libre y autónomo y a la interacción con los objetos. De este modo, la geometría en la Escuela Infantil es el bloque relativo a las posiciones y las formas (Alsina, 2015).

Según Castro (2006), el sentido espacial junto al vocabulario propio del mismo da lugar, entre otras cosas, a la comunicación de la posición de los objetos, facilitar y recibir instrucciones de localización, describir cambios y transformaciones en las figuras y formas cuando estas se dividen, se combinan o se mueven en el espacio, analizar figuras y encontrar las relaciones que hay entre los diferentes elementos. Para la autora, las primeras nociones espaciales abren la puerta al desarrollo de la geometría.

Según Castro (2006), conocer un objeto requiere realizar bien una serie de tareas relacionadas con él: reconocerlo entre otros objetos, encontrar diferencias al compararlo, caracterizarlo por algunos rasgos propios, reconocer propiedades que posee, nombrarlo. Esta autora, al tiempo que Alsina (2004), establece un paralelismo entre este contenido y el contenido numérico o el de media, considerando que la construcción del de su espacio es paralela a la del número en los diferentes planos evolutivos, con algunas diferencias como por ejemplo el esquema lógico-aritmético que procede de la acción de los sujetos sobre objetos discontinuos y el esquema espacial se forma a partir de la acción sobre los objetos continuos del mundo real. Como diría Alsina (2015) gracias al movimiento y la experiencia con el propio cuerpo. Geist (2014) también parte de los conceptos de posición y forma como los principales contenidos relacionados con el desarrollo del niño de los 0 a los 3 años. Explica que los niños son capaces de empezar a distinguir las distancias a través del movimiento de su cuerpo en los primeros días de vida. Por ejemplo, al tomar el pecho o el biberón van aprendiendo de manera instintiva los conceptos de cercanía o lejanía respecto a su madre cuando los alimenta y los sostiene en brazos. Lo mismo ocurre con las formas de los objetos que las comprenden gracias a la exploración de estas con el propio cuerpo (Alsina, 2015; Geist, 2014).

El movimiento se constituye también como parte fundamental para el desarrollo del pensamiento relativo a las posiciones y las formas (Alsina, 2015; Geist, 2014; Pikler, 1984). Un movimiento que nace en el interior a nivel neuronal, y que se muestra en el inicio de la vida a partir de los primeros reflejos y movimientos. Por ejemplo, el reflejo de moro, el palmar o el de búsqueda o los movimientos oculares que hacen los bebés explorando el entorno (Farré y Aribau, 2014; Goddard, 2015). Estos movimientos instintivos e innatos van tomando un sentido concreto a la vez que el niño va tomando más dominio y control sobre ellos (Goddard, 2015).

A medida que va desarrollando sus habilidades va perfeccionando el movimiento en sus acciones. Gracias a la capacidad de observar, relacionarse e interactuar con el medio a través del movimiento, el niño va tomando medidas sobre las distancias y las formas de los objetos. Por ello, existe una estrecha relación entre el dominio de los contenidos relacionados a las posiciones y las formas o el movimiento (Geist, 2014).

Fernández y Arias (2013) exponen que cualquier aprendizaje matemático en cualquier etapa educativa tiene que haber tenido un referente físico y visual que posteriormente será evocado por la persona para desarrollar una abstracción sobre él.

Diariamente, los bebés y los niños pequeños se muestran especialmente activos cambiando con frecuencia de postura, siendo cada vez más ágiles y veloces en sus desplazamientos al tiempo que adquieren más dominio de su equilibrio. Pikler (1984) y su equipo con sede en el Instituto Lóczy en Budapest, a través de sus investigaciones durante más de 60 años, establecen las fases de movimiento mediante la observación del movimiento libre del niño en el que el adulto acompaña sin interferir y sin adelantarse a su ritmo evolutivo. Estas fases se inician con la rotación de la cabeza y el descubrimiento de las manos en los primeros meses, y a partir de los 4 meses, aproximadamente, con la capacidad de sostener algunos objetos, primero con una mano y después con las dos.

Poco a poco, el niño va descubriendo su cuerpo. Gracias a su flexibilidad se agarra los pies y consigue pasar de la posición dorsal a la de costado y volver a la dorsal boca arriba. Cuando consigue dar este primer giro, amplía notablemente su visión hacia el costado, pudiendo observar mucho mejor los objetos que tiene a lado y lado. Después, ya puede volverse de la posición dorsal a la ventral y volver a la dorsal. Ponerse boca abajo es un gran logro que le permite descubrir los límites de su cuerpo y descubrir los elementos que cuando está boca arriba le quedaban escondidos por encima de su cabeza (detrás existe todo un mundo que no podía ver, si percibir). Voltar y desplazarse por el suelo dando giros se convierte en las primeras percepciones sobre todo el espacio que le rodea. Poco a poco, el niño va expandiendo su conciencia espacial. Según Ginsburg (1988), esta capacidad hace referencia a la comprensión de que vivimos en un mundo tridimensional donde los objetos tienen varias caras, una de frente, una de detrás y los lados.

Inicialmente en su movimiento, el niño realiza unos primeros giros que se producen a semejanza de las agujas de un reloj. Posteriormente, poco a poco será capaz de voltear sobre su cuerpo y trasladarse por el suelo de un lado al otro. Todos estos avances en el movimiento: jugar tumbado sobre el vientre, vueltas alternadas, rodar, reptar, gatear, todos los movimientos que llegará hacer para sentarse, arrodillarse con el tronco erguido, ponerse de pie y finalmente, empezar a caminar, están

estrechamente vinculados con el aprendizaje de las características del espacio, las posiciones y las formas de los objetos y de su cuerpo. Alsina (2015) explica la importancia y la relación que se establece entre el movimiento y estos contenidos matemáticos y expone que cuando el niño es capaz de desplazarse y recorrer distancias, es cuando existe un avance exponencial en el desarrollo de su pensamiento matemático en relación con el espacio. De hecho, el aprendizaje de las distancias, largas o cortas, inevitablemente se conquista recorriéndolas (Figura 48).



Figura 48. Observar las distancias, voltear y rastrear. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.

Según Alsina (2015), aprender a andar es uno de los momentos más significativos en tanto que el niño incrementa exponencialmente las oportunidades de conocer el espacio que le rodea e incrementa así su conocimiento del espacio. En este sentido, el autor expone que los niños cuando ya caminan tienen acceso a muchos más objetos, miran y tocan constantemente, y empiezan (a los 2 o 3 años) a desarrollar la capacidad de reconocer mentalmente algunas de las propiedades geométricas observadas.

Castro (2006) explica que los niños pequeños viven el espacio, lo exploran con los ojos y con las manos. Lo descubren a través de sus gestos, sus movimientos y sus marchas. A lo largo del segundo año de su vida el diálogo con el espacio se enriquece y entra en una nueva dimensión ya que el niño comienza a representar las cosas y aparece la capacidad

de abstraer y substituir las cosas por imágenes que, posteriormente, pueden ser formas (Figura 49).



Figura 49. Cambios de posición y dirección. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.

Poco a poco, el niño adquirirá las capacidades de conocer la posición del propio cuerpo en el espacio y conocer la posición relativa de distintos objetos como puntos de referencia en sus desplazamientos. Se podrá orientar cada vez mejor, apreciando distancias y dimensiones, en su contexto cotidiano, podrá ir diferenciando cada vez mejor las formas de los objetos y familiarizarse e ir accionando con ellos a través de las primeras agrupaciones y clasificaciones (Alsina, 2015; Berdonneau, 2008; Castro, 2006, Geist; 2014; Goldschmied y Jackson, 2007)

Según Clements y Sarama (2015), la orientación espacial es el conocimiento del lugar donde se encuentra el niño y cómo se puede desplazar por su alrededor. Esto implica la comprensión de las relaciones entre las diferentes posiciones en el espacio. En sus inicios, esta comprensión se basa en el conocimiento del niño respecto a su propia posición y sus movimientos alrededor de esta y desde una perspectiva abstracta que incluya ciertos “mapas y coordenadas”. Estos “mapas” están basados en el propio cuerpo del niño y en los objetos que le rodea y se estructuran como esquemas de conocimiento cada vez más elaborados y complejos. Esta competencia, según los autores, es esencial y no sólo está relacionada con el conocimiento matemático sino también a la forma como recordamos las cosas.

Poco a poco, el niño será más habilidoso recordando donde están sus juguetes y los pequeños recorridos que hace por sí mismo. Cabe destacar la importancia del lenguaje ya que, tal y como exponen Clements y Sarama (2015), el adulto que

acompaña al niño ha de poder utilizar el lenguaje propio a las posiciones en tanto que el niño lo podrá ir incorporando paulatinamente con su uso.

A los dos años, el niño tiene una considerable competencia espacial. Inicialmente, en su lenguaje aparecerán aspectos relativos a la posición (en, sobre, arriba, abajo...) y posteriormente en relación con la proximidad (al lado de, en la mitad de...). Por lo general, los niños utilizan más tempranamente y en mayor cantidad términos relativos a las posiciones que términos relativos a la numeración.

Por lo que se refiere a las formas, Alsina (2015), Clements y Sarama (2015) y Geist (2014) coinciden en que el aprendizaje de las formas no se da a través de la observación, aunque verlas y nombrarlas es una parte importante para el dominio de estas, sino que se construyen a través de la exploración y la manipulación. Son muchos los autores que hoy día defienden que los conceptos matemáticos, entre ellos las formas, cabe vivirlas desde la experiencia física, a través de la manipulación o experimentación con todo el cuerpo, para aprenderlos de manera significativa (Alsina, 2006, 2015; de Castro y Flecha, 2012; Geist, 2014, Goldschmied, 1986; Malaguzzi, 2020; NCTM, 2003).

A continuación, en la Tabla 4, se presentan las acciones matemáticas informales según la clasificación de Alsina (2015).

Tabla 4. Acciones matemáticas informales de 0 a 3 años para favorecer el desarrollo del pensamiento en torno a las posiciones, las formas y las figuras.

Identificar (reconocer)	Relacionar (Comparar)	Operar (Transformar)
Reconocimiento de la posición relativa, la dirección y la distancia en el espacio.	Relaciones espaciales elementales.	Cambios de posición (a través de giros, etc.)
Reconocimiento de algunas propiedades geométricas elementales de las formas.	Relaciones simples a partir de propiedades geométricas de las formas: clasificaciones, correspondencias y seriaciones.	Cambios de forma (a través de deformaciones, composición y descomposición de formas, etc.)

Fuente: Alsina (2015, p. 62).

En la primera columna de esta Tabla, se muestran las acciones relativas a identificar (reconocer) las posiciones y las formas.

Reconocimiento de la posición relativa, la dirección y la distancia en el espacio

Alsina (2015) parte de los conceptos de posición, dirección y distancia como los conceptos geométricos elementales de este bloque de contenido.

En primer lugar, presenta los conceptos de tipo topológico (lugar) que dan respuesta a la pregunta: *¿dónde?* Explica que los principales conceptos relativos a la posición en la Escuela Infantil giran alrededor de dos aspectos: por un lado, nociones geométricas vinculadas con la superficie abierta y cerrada y la línea abierta y cerrada (dentro, fuera y frontera) y, por otro lado, los conceptos relativos a nociones geométricas que se rigen por una relación de orden en el espacio (detrás, en medio de, delante, ultimo, encima, debajo...).

También explica que la dirección es un tipo de conocimiento espacial relacionado con los desplazamientos y, evidentemente, con las posiciones. Para ello, los niños pequeños necesitan inicialmente puntos de referencia que, poco a poco, van a ser capaces de ir relacionando entre ellos y construyendo y situando sus pequeñas rutas y lugares en lo que Piaget llamó esquema “mapa mental” del espacio (Figuras 50 y 51).



Figura 50. Cambios de posición y dirección. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.



Figura 51. Identificando posiciones: encima, delante, al lado... Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.

En la trayectoria de aprendizaje, Clements y Sarama (2015) determinan que, a lo largo de los dos primeros años, el niño se concibe como Usuario de camino y punto de referencia. Es capaz de usar una distancia de referencia y encontrar objetos lugares sin perder de vista el punto de referencia. Poco a poco, va adquiriendo más habilidad para ubicarse en el espacio, hasta que, a partir de los 2 años, aproximadamente, puede tener varios puntos de referencia y puede moverse en el espacio perdiéndolos de vista, siempre en su entorno cotidiano.

Según Geist (2014) los bebés de 6 a 12 meses aproximadamente son capaces de juzgar una distancia valorando cuándo algo está «cerca» o «lejos» según su alcance o fuera del mismo.

Según Alsina (2015), las primeras nociones referentes a la dirección que usan los más pequeños son: hacia delante, hacia atrás, hacia adentro, hacia afuera, etc. En relación con las distancias, expone que los desplazamientos promueven que los niños aprendan los conceptos vinculados a las distancias, cerca y lejos, en el que ya se integra un punto de referencia respecto a otro, y aparece el dominio de la posición relativa.

De los 0 a los 3 años, el niño es conocido también como *Deslizador simple* porque puede mover figuras de bloques de construcción o patrones de bloque y moverse hacia la ubicación que le interese cada vez con dominio más certero de los puntos de referencia (Clements y Sarama, 2015) (Figura 52).



Figura 52. Identificando distancias: recorriendo distancias. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.

Reconocimiento de algunas propiedades geométricas elementales de las formas y figuras

Indiscutiblemente, el reconocimiento de las formas, como se ha expuesto anteriormente, se inicia con las vivencias a través del cuerpo y la manipulación. No es hasta los 2 o 3 años que los niños adquieren la capacidad de ir interiorizando algunas formas y representarlas mentalmente (Alsina, 2015, p. 64).

Principalmente, sus acciones vinculadas al movimiento y la exploración de los objetos los niños descubrir sus propiedades y relacionarlos (Berdonneau, 2008; Goldschmied y Jackson, 2007). Alsina (2015) expone que es gracias a esta exploración, por ejemplo, como muestra la Figura 53, que los niños pueden percibir las superficies de los cuerpos geométricos (superficie plana y curva) y relacionarlas con los movimientos que provocan distinguiendo, por ejemplo, los cuerpos que ruedan de los que no.



Figura 53. Identificando las superficies. Fuente: EBMV Caputxins, Horta y Serra Sanferm. Aulas 1-2 años y de 2-3 años.

Lo mismo ocurre con los tipos de líneas (recta – curva) asociadas a los movimientos que realicen (Alsina, 2015). Este autor, apela a las metáforas como otra posibilidad de ayudar a los niños a construir conocimientos sobre las formas. De este modo, explica que se hace posible verbalizar y mostrar el parecido de una serpiente con una línea curva, el triángulo con una señal de tráfico o la esfera con una pelota. Aun así, sostiene que el vocabulario geométrico no se considera la finalidad para este primer ciclo educativo y sirve como andamio para los posteriores aprendizajes y, en todo caso, cabe acompañar los procesos de enseñanza y aprendizaje en estas primeras edades (Figuras 54 y 55).



Figura 54. Explicación del Cuento “El pastel está muy arriba”. Fuente: EBMV Horta Vermella Aulas 1-2.



Figura 55. Identificando la forma: cuerpos que ruedan. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aulas 0-1

Geist (2014) explica que los bebés antes de los dos años son capaces de identificar algunas formas y sus propiedades básicas. Un ejemplo es el efecto de rodar al golpear una pelota iniciando un juego con el adulto y pasarla. En esta práctica aparece en otros aprendizajes como el principio causa-efecto explicado anteriormente. De nuevo, se observa como todos los procesos están íntimamente conectados y relacionados entre sí.

Clements y Sarama (2015), exponen que los niños pequeños son sensibles a las figuras y las formas desde el primer año. También explican que, entre los 24 y 36 meses, tienen mucha información sobre objetos y sus experiencias, inventan fácilmente nuevas formas de hacer las cosas y pueden trabajar con sus compañeros para lograr objetivos comunes (Figura 56).



Figura 56. Construcciones con formas diferentes. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

En la segunda columna de la Tabla 4 se mostraban las acciones relativas a comparar posiciones y formas que se describen a continuación:

Relaciones espaciales elementales

Según Alsina (2015), las comparaciones a través de las relaciones espaciales aparecen junto con la comparación de las posiciones relativas. Los comparativos propios de estas primeras edades son: "más ... que", "menos ... que", "igual ... que", o "tanto ... como".

También, pueden relacionar la posición relativa de dos objetos estableciendo la comparación entre ellos. El ejemplo que propone el autor es el de una caja y una pelota ubicados en una misma estantería donde el niño puede observar que la caja está más arriba que la pelota.

Alsina (2015) destaca que estas relaciones tienen mucho que ver con la distancia, cerca y lejos. De nuevo se observa esta conexión entre contenidos. Así pues, explica que la distancia, la posición y la dirección forman los tres grandes conocimientos espaciales que permiten aprender a organizar el espacio.

Geist (2014) señala que los niños podrán valorar las distancias a modo que las puedan recorrer. En este sentido, las pueden comparar gracias a su experiencia a través del propio movimiento y estimas de manera innata el tiempo que han tardado o de la longitud que han recorrido. El autor destaca que, en cierta manera, el niño es capaz de ir identificando, valorando, juzgando y comparando las distancias, los recorridos y las posiciones.

De los 2 a los 3 años, Clements y Sarama (2015) presentan al niño como: Usuario de referencia local propia. En este caso, el niño es capaz de utilizar diferentes distancias para encontrar objetos o lugares cercanos incluso después de perder de vista el punto de referencia inicial siempre que el objeto o lugar sea conocido con anterioridad. Por ello, es capaz de iniciarse en la comparativa de las distancias y escoge los recorridos que mejor respondan a sus intereses del momento. A partir de estas edades, los niños son capaces de responder a las consignas de los adultos señalando objetos y ubicándolos en el espacio o, encontrarlos u ordenarlos a partir de imágenes reales del objeto.

En esta línea, Alsina (2015) subraya que son muchas las ocasiones en que un niño o el profesional que acompaña puede expresar su posición relativa o la posición relativa de los objetos de manera cotidiana y destaca que todas las relaciones espaciales que se dan en la Escuela Infantil “son un paso imprescindible para ir construyendo su esquema mental del espacio e ir dominándolo progresivamente” (p. 67) (Figura 57).



Figura 57. Descubriendo posiciones. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.



Relaciones simples a partir de propiedades geométricas de las formas y figuras: clasificaciones, correspondencias y seriaciones

Alsina (2015) describe la relación indisociable que existe entre las comparaciones de las formas y las comparaciones cualitativas. Los niños muchas veces accionan sobre los objetos y simultáneamente confluyen relaciones tanto cualitativas como de forma. Normalmente, comienzan a desarrollar referencias sobre álgebra temprana, pero a su vez hacen referencias al conocimiento de las formas y del espacio. Por ello, se considera necesario destacar las principales acciones que se pueden dar en estos tres primeros años de vida interpretados, esta vez, desde un punto de vista geométrico.

Geist (2014) explica que los niños de 12 a 18 meses aproximadamente tienen la capacidad de emparejar según la forma del mismo modo que emparejan según el color. De esta manera, son muchas las propuestas que se pueden llevar a cabo que facilitan de forma cotidiana la acción de emparejar por la forma. Por ejemplo, al recoger, al clasificar por forma, al hacer puzles de encajar, etc. (Figura 58).



Figura 58. Relaciones simples a partir de formas geométricas: correspondencias y seriaciones. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 1-2 años.

Clements y Sarama (2015) exponen que los niños juegan a comparar las formas y las figuras que encuentran a su alrededor, y a su manera, poco a poco son capaces de describirlas con sus propias palabras. Esta comparación puede llegar a ser muy compleja a causa de la congruencia, la simetría o las transformaciones. Por ejemplo, explican que un niño puede que hasta los 7 años aproximadamente, no reconozca dos formas iguales si están rotadas (congruencia). Por ello, destacan que las comparaciones durante los tres primeros años se desarrollan a través de la acción, cuando el niño sobrepone una Figura sobre la otra para comparar la forma. Aun así, a los dos años, los niños pueden ser capaces de distinguir dos formas iguales de diferente color, emparejarlas y reconocer figuras y formas iguales. De este modo, exponen que la capacidad de comparar formas implica desarrollar la capacidad para determinar la congruencia y la clasificación implica ir un paso más allá de la identificación, ya que el niño ha de analizar completamente la forma y relacionarla con otras iguales o con imágenes con la misma figura. Poco a poco, estas dos capacidades dan lugar a la posibilidad de identificar el todo y las partes. En este sentido, los niños muy pequeños identifican el todo y no las partes. Reconocer las partes de un todo implica la capacidad de identificar, distinguir, nombrar, describir, y cuantificar las partes de la forma y no es hasta los 4 – 5 años, aproximadamente, que los niños desarrollan esta habilidad.

De los 0 a los 2 años, aproximadamente, Clements y Sarama (2015) presentan en la trayectoria de aprendizaje de las formas al “Comparador de la Misma Figura” que hace referencia al niño que compara objetos e imágenes del mundo real y es capaz de igualar figuras y formas, incluso aquellas que tengan una pequeña variación en la orientación (posición).

A partir de los 3 años, aproximadamente, consideran al niño Reconocedor de Figuras Típicas y Comparador Similar ya que es capaz de reconocer y clasificar figuras y formas e incluso de nombrarlos (círculos y cuadrados). También, pueden hacer agrupaciones de figuras que se parezcan o que sean similares al compararlas, en las que visiblemente sean más evidentes las similitudes que las diferencias. Por ejemplo, una clasificación entre triángulos y rectángulos que no son iguales (Figura 59).



Figura 59. Jugando con las formas. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

Finalmente, en la tercera columna de la Tabla 4 se mostraban las acciones relativas a los cambios en la posición y la forma.

Cambios de posición (a través de giros, etc.)

Los cambios en la posición, como se ha descrito anteriormente, son cambios que se producen de manera natural al niño propios de su movimiento (Alsina, 2015) y curiosidad por el mundo que le rodea (Goldschmidt y Jackson, 2007).

Alsina (2015) expone que todos los desplazamientos y los giros que produce en los objetos son operaciones geométricas, transformaciones que le sirven de apoyo para los posteriores aprendizajes, como por ejemplo los que más adelante en un segundo ciclo de Educación Infantil desarrollará a través de las simetrías.

Además, como explica el autor, todos estos movimientos que produce el niño en el contexto de juego y exploración libre construyen una parte importante de su aprendizaje espacial. De esta manera, cada vez es más consciente de sus movimientos y es más capaz de anticiparse a los resultados que pueden aparecer como consecuencia de sus cambios de posición y orientación (Figura 60).



Figura 60. Cambios de posición: dentro y fuera. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 1-2 años.

En esta línea, Geist (2014), pone como ejemplo la capacidad que van desarrollando los niños gracias a la exploración y manipulación libre con bloques y que a partir de los 24-36 meses ya son capaces de apilar bloques de construcción. Esto significa que los niños van analizando las diferentes piezas y elaborando un conjunto de hipótesis cada vez más sofisticadas, que les permite establecer qué y cómo ir colocando los bloques para que la torre no se derrumbe (Figura 61). De modo que, los niños pueden formar torres apilando piezas de distintos tamaños e incluso, formar torres de cubos, ordenados por tamaño, con el cubo mayor abajo y el menor arriba (Geist, 2014).



Figura 61. Cambios de posición: apilar. Fuente: EBMV Horta Vermella y Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

Clements y Sarama (2015) explican de nuevo las trayectorias de aprendizaje en relación con los cambios de posición dentro de los que nombran: trayectoria de aprendizaje para las figuras 3D.

En ella, explican que durante el primer año el niño, *Pre-Compositor*, manipula las figuras como entes individuales y no las combina para componer una Figura más grande. Aproximadamente, a partir del año el niño lo denominan “Apilador” porque utiliza con sentido el concepto de “encima de” y apila (siendo su elección de los bloques muy poco precisa). A partir del año y medio, el niño Trazador de líneas pone de manifiesto el significado de “al lado de” y elabora filas de bloques. A partir de los 2 años, el niño Apilador con Congruencia es consciente de la relación de “encima de” apilando bloques congruentes o bloques que muestran una relación útil para elaborar las filas o la pilas.

Cambios de forma (a través de deformaciones, composición y descomposición de formas, etc.)

Alsina (2015) explica que los cambios en las formas son otro tipo de operaciones geométricas que se dan a través de las deformaciones, las composiciones y descomposiciones. Para Alsina (2015), las propuestas educativas en estos términos facilitan que el niño sea cada vez más consciente de qué acciones como estirar, proyectar, apilar, juntar, separar, unir, etc., dan lugar a los cambios de formas. En este sentido, presenta en primer lugar las deformaciones que produce el niño con los materiales como el barro o la plastilina que les permite ir transformando la forma (Figura 62).



Figura 62. Observando cambios en las formas: deformaciones. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

Alsina (2015), presenta las deformaciones que pueden observar los niños a través de proyecciones de luz (sombras) en espejos que reflejan las imágenes deformadas o través de disfraces que les cambia la forma de su propia semejanza (Figura 63).



Figura 63. Sombras. Fuente: EBMV Caputxins y Horta Vermella. Aula 2-3 y 0-1 años.

Finalmente, expone los cambios en las formas a través de las composiciones y descomposiciones a partir, sobre todo, de los juegos de construcción.

Clements y Sarama (2015) explican dentro de lo que nombran trayectoria de aprendizaje para las figuras 3D que a los 2 años el niño se puede definir como “Ensamblador de Piezas”. En este momento es cuando es capaz de construir verticales y horizontales (Castro y Flecha, 2012) dentro de una construcción semejante a un muro simple, pero dentro de un rango limitado de espacio.

A partir de los 3 – 4 años, aproximadamente, el niño al que llaman “Elaborador de Imágenes” 3D, según Clements y Sarama (2015), ya es capaz de utilizar con diferentes relaciones espaciales la construcción de bloques extendiéndose en múltiples direcciones y con múltiples puntos de contacto entre los componentes, produciendo arcos, encerramientos, esquinas y cruces. Aun así, es posible que utilice el ensayo y el error y que parta de elaboraciones simples. Como explica Alsina (2015), puede que elaboren alguna estructura simétrica (no con mucha frecuencia) y algunas repeticiones de estructuras sencillas, como puentes y torres con dos pisos (Figura 64).

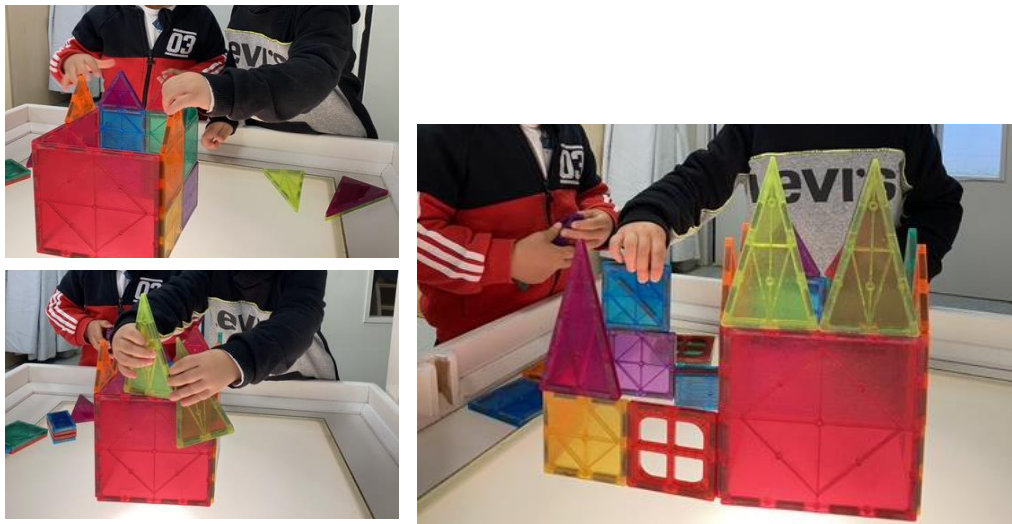


Figura 64. Construcciones de formas. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.

Siguiendo esta línea, encontramos diferentes autores que describen el juego a partir de bloques de construcciones como una gran oportunidad para que los niños desarrollen la capacidad de observar los cambios en las posiciones y las formas a través de la composición y descomposición, creando y recreando, haciendo, trajinando y transportando (Arnaiz, 2005; Arnaiz y Camps, 2005; Bonás, 2010; Castro, Barredo y González, 2011; Escorial y de Castro, 2011; Musons, 2005)

3.1.4 Los atributos mensurables

Castro (2006) explica que el aprendizaje de la medida viene dado por un largo proceso que tiene sus orígenes en la primera infancia, donde los niños desarrollan las capacidades perceptivas y motrices. Explica la autora que las tareas de medida de longitud, de peso, de capacidad, etc. que se llevan a cabo en la escuela deben fundamentarse en lo que considera la prolongación natural de las experiencias cotidianas; de juego, exploración y manipulación propias de la Escuela Infantil. Los niños, del mismo modo que ocurre con las cantidades discretas, son sensibles desde el momento en que nacen a estas magnitudes continuas. De los 0 a los 3 años viven muchas experiencias con los atributos mensurables al tiempo que juegan, exploran y manipulan los objetos y materiales (Alsina, 2015; de Castro et al., 2015). Aunque, en el primer ciclo de Educación Infantil, no puedan hacer valoraciones exactas sobre las cantidades

continuas (Clements y Sarama, 2015), viven constantemente en interacción con los elementos y experimentan los pesos, las longitudes, los volúmenes, el tiempo, la temperatura, etc. (Alsina, 2015) (Figura 65).

Alsina (2004) presenta la medida como “la parte de las matemáticas que incluye los contenidos y las actividades que se refieren al conocimiento de las magnitudes continuas o atributos mensurables que encontramos más a menudo en la vida cotidiana: longitud, superficie, volumen, capacidad, masa, tiempo, etc.” (p.188). Según Clements y Sarama (2015) la medida “se puede definir como el proceso de asignar un número a una magnitud o cantidad continua en relación algún atributo del objeto: la longitud, la masa, el volumen, la capacidad, la temperatura, etc.” (p. 265).

En este sentido, de Castro et al. (2015) explican que, en el contexto de la Escuela Infantil, la medición se utiliza para determinar y comparar “cuánto hay” así como para establecer comparaciones informales de atributos, pudiendo comparar objetos de tamaños claramente diferentes. Los niños aprenden a emplear expresiones como “más grande”, “más alto”, y “más largo”. Para ejemplificarlo, presentan la actividad cotidiana que aparece prácticamente siempre en todas las Escuelas Infantiles: cuando un niño juega con un cubo y una pala en el jardín (Figura 66). En ese momento, el niño realiza sus primeras aproximaciones a la noción de capacidad y al mismo tiempo, se pueden introducir conceptos como lleno/vacío, mucho/poco/algo y fomentar las comparaciones.



Figura 65. Observando el volumen y las dimensiones. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 años.



Figura 66. Identificando capacidades. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.

Bajo esta mirada, Alsina (2015) explica que en un primer momento descubren algunos de los atributos mensurables y, progresivamente, van incrementando sus conocimientos ampliando cada vez más su dominio. De acuerdo con de Castro et al. (2015), se considera que es un momento clave para ir introduciendo a partir de la comparación entre objetos el lenguaje “mas... que...”, “menos... que...” que aparece al interaccionar con dos objetos simultáneamente. Estas primeras comparaciones, dan lugar a las primeras clasificaciones y ordenaciones que son muy elementales.

Los diferentes autores coinciden en que estos comparativos aparecen a finales del primer ciclo de Educación Infantil. Sobre todo, a lo largo del segundo ciclo y destacan la necesidad de vivir experiencias estimulantes vinculadas a los diferentes atributos mensurables como base fundamental, parte también de la vida cotidiana y del mundo real desde edades tempranas (0-3 años) tal y como muestran las Figuras 67 y 68.



Figura 67. Comparando pesos y volúmenes. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 0-1 años.



Figura 68. Comparando tamaños. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

NRC (2014) explica que la medición es un aspecto fundamental de las matemáticas ya que “crea puentes entre dos áreas principales de las matemáticas escolares, la geometría y el número través de la unión del número a las dimensiones espaciales” (p. 37). Según Clements y Sarama (2015) la medida es un área muy importante de la matemática vinculada al mundo y al día a día de las personas, en tanto que la usan de manera consciente y que les ayuda a desarrollar otras áreas de las matemáticas como la lógica o el razonamiento. Además, explican que están conectadas directamente con los dominios de la geometría y el número.

Un ejemplo de ello se plasma en “La inteligencia se despierta usándola, el Salto a la Longitud”. Una experiencia donde, Gandini (2011) describe y documenta como cuatro niños de 5 años se convierten en investigadores, creadores y organizadores de una competición de salto de longitud. Desarrollando y conectado múltiples dominios, habilidades y capacidades a partir de la longitud gracias a la experiencia directa.

Geist (2014) presenta un recorrido de los 6 a los 36 meses en el que establece la manera en que el niño desarrolla las capacidades vinculadas a las magnitudes continuas. Explica cómo los bebés de los 6 a los 12 meses empiezan a valorar las distancias categorizando en su cerebro el concepto de cerca o lejos. De hecho, afirma que los bebés pueden valorar cómo de cerca o lejos están los objetos, según estén a su alcance o fuera del mismo (Figura 69).



Figura 69. Juzgando distancias. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 años.

Geist (2014) define también que de los 12 a los 24 meses, los niños son capaces de establecer las primeras comparaciones entre las diferentes capacidades introduciendo el concepto “más”. Por ejemplo, como muestra la Figura 70, las acciones que desarrollan los niños al jugar con diferentes materiales como agua o arena en las que, con diferentes recipientes, trasvasan el contenido de un recipiente a otro de distinto tamaño, estableciendo primeras comparaciones sobre las diversas capacidades de los diferentes recipientes incorporando la acción de añadir, vinculada al concepto de “más”.



Figura 70. Juzgando capacidades. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 1-2 años.

Finalmente, detalla que los niños de los 24 a los 36 meses ya usan el lenguaje comparativo donde aparece el concepto “más grande que...” o “más pequeño que...” estableciendo así múltiples comparaciones entre las diferentes medidas tanto en la longitud como en el peso y en la capacidad (Figura 71).



Figura 71. Comparando el peso, el grosor y la longitud. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

Alsina (2015) nuevamente detalla, así como se presenta en la Tabla 5, con los contenidos de atributos mensurables que usan los niños de 0 a 3 años, vinculados al ámbito de la medida en la Escuela Infantil.

Tabla 5. Contenidos de atributos medibles que usan los niños de 0 a 3 años.

Identificación de atributos medibles	Comparación de atributos medibles	Observación de cambios sencillos en atributos medibles
Reconocimiento de algunos atributos medibles de los objetos (tamaño, masa, capacidad, temperatura).	Relaciones simples a partir de atributos medibles de los objetos: clasificaciones, correspondencias y seriaciones.	Cambios en los atributos medibles a partir de composiciones y descomposiciones, etc.).
Identificación del tiempo (día, noche, mañana, tarde, etc.).	Secuencias temporales.	

Fuente: Alsina (2015, p. 74).

A continuación, se presentan según la clasificación de Alsina (2015), las acciones matemáticas informales de 0-3 años para favorecer el desarrollo del pensamiento sobre los atributos medibles.

Reconocimiento de algunos atributos medibles de los objetos (tamaño, masa, capacidad, temperatura, etc.)

El juego, la exploración y la manipulación de los diferentes materiales que se disponen al alcance los niños promueven múltiples acciones como las de tocar, observar, sopesar, llenar, vaciar, trasladar, etc. Al desarrollar estas acciones, los niños van descubriendo de manera intuitiva algunos de los atributos medibles de los objetos (Alsina, 2015).

Geist (2014) explica como a partir de los 6 meses, aproximadamente, el niño va estableciendo categorías sobre las longitudes en relación con las distancias. A medida que puede interactuar con los objetos y los materiales, va identificando diferentes categorías en relación con el peso, la temperatura, longitudes u otras magnitudes (Figura 72), y reconoce si pesa mucho o no, si está caliente o frío, del mismo modo que ocurre con las cualidades sensoriales y las cantidades discretas que, gracias a la vivencia, las va identificando.

Clements y Sarama (2015), al determinar las trayectorias de aprendizaje, de los 0 a los 3 años consideran al niño como un “Reconocedor de Cantidad de Volumen”. Durante este período, el infante identifica la capacidad o el volumen como un atributo. Con la aparición del lenguaje, el niño expresa sus acciones y sus observaciones. Por ejemplo, sabe donde caben muchos bloques o cuando uno pesa mucho. Por lo que se

refiere a la longitud, establecen que el niño de 2 años es un “Reconocedor de cantidades de Pre-Longitud”. Este no identifica la longitud como un atributo en tanto que todo lo que es rectilíneo lo puede concebir como largo. Explican que en esta etapa los niños intuitivamente comparan, ordenan y construyen con muchos tipos de materiales e incrementan paulatinamente el aprendizaje y el vocabulario relativo a los diferentes dominios vinculados a las medidas.



Figura 72. Construyendo con diferentes materiales y estableciendo comparaciones sobre la longitud. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.

Aun así, no es hasta los 3 años que se le considera “Reconocedor de Cantidades de Longitud”. En esta etapa, el niño ya identifica la longitud como un atributo o un descriptor del objeto. De este modo, el niño verbaliza sus conclusiones sobre los atributos mensurables que ha observado de los objetos. Por ejemplo, que todas las piezas son largas. En este momento, destacan la importancia de que los profesionales acompañen las observaciones e intervenciones de los niños a nivel oral, reforzando sus conversaciones y destacando los atributos mensurables “largos”, “altos” (Figura 73).



Figura 73. Construyendo una fila muy larga. Fuente: EBMV Horta Vermella.
Aula 2-3 años.

Identificación del tiempo (día, noche, mañana, tarde, etc.)

Alsina (2015) explica que de la misma forma que los niños van situándose en el espacio, aprenden progresivamente el tiempo. La literatura muestra como las rutinas les proporcionan este conocimiento que, día a día, se repite y les permite incorporarlo junto a las secuencias temporales. Numerosos autores de diferentes corrientes coinciden en la importancia del tiempo y las rutinas de la vida cotidiana en la Escuela Infantil (Altimir, 2007; Bassedas et al., 2006; Bosch, 2003; Borghi, 2019; David y Appell 2009; David, 2013; Sugrañes et al., 2012; Brazelton y Greenspan, 2005; Falk, 2013; Goddard, 2020; Jubete, 2008; Molina, 2007; Montessori, 1914; Òdena, 2007; Palou, 2016; Zabalza, 2009, entre otros).

Relaciones simples a partir de atributos mensurables de los objetos: clasificaciones, correspondencias y seriaciones

Alsina (2015) expone que las evidencias recogidas a través de las observaciones, documentaciones e interpretaciones muestran como los niños desarrollan clasificaciones, correspondencias y seriaciones bajo algún criterio centrado en las magnitudes.

Clements y Sarama (2015) explican que los niños de los 0 a los 3 años pueden identificar los objetos como “iguales” o “diferentes”, y los conceptos como “más” o “menos” en base solo a los atributos que ellos pueden medir sobre la longitud y el peso. En este sentido, no podrán alcanzar las medidas de aquellos elementos sobre los cuales, por sus dimensiones o características, no puedan accionar. De este modo, de manera consciente y con el objetivo de medir, no es hasta los 4 años, que los niños alinean físicamente dos objetos para determinar cuál de los dos es más largo o, por el contrario, si tienen la misma longitud. En este momento, consideran al niño un “Comparador Directo de longitud”. En este mismo sentido, establecen que el niño a los 4 años es un “Comparador Directo de Capacidades” ya que puede comparar dos recipientes de manera consciente. El niño vacía el contenido de un recipiente en otro para medir la capacidad y determinar a cuál de los dos le cabe más cantidad (Figura 74).



Figura 74. Comparando la capacidad. Fuente: EBMV Serra Sanferm y Horta Vermella. Aula 2-3 años.

Secuencias temporales

Alsina (2015) explica que las secuencias temporales están estrechamente vinculadas con el hecho de identificar las diferentes partes del día. En este sentido, hace referencia a relaciones de orden muy simples en el tiempo que parten, en primer término, de tener puntos de referencia (acciones o rutinas) que los niños llevan a cabo cada día. Por ejemplo, levantarse de la cama, desayunar, ir a la escuela, salir al patio, comer, descansar después de la comida, etc. Según Alsina (2015), consiste en empezar a asociar estos puntos de referencia con las diferentes partes del día. Aprenden que por la mañana van a la escuela, que a media mañana salen al patio, que

a mediodía comen, etc. Y, posteriormente, empiezan a ordenar estos puntos de referencia usando nociones como "antes de" y "después de" (Alsina, 2015 p. 79).

Este contenido junto con la identificación del tiempo, hacen referencia a aspectos estrechamente vinculados a la vida cotidiana y a la adquisición de rutinas.

Cambios en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones, etc.)

Alsina (2015) señala la existencia de un paralelismo entre las acciones de composición y descomposición a través del juego de los niños y las operaciones con atributos mensurables, en las que son capaces de ir observando los cambios que se producen respecto al elemento inicial. Por ejemplo, cuando construyen una torre con piezas, componen con diferentes elementos o vierten el contenido de dos botellas en una sola. Todas estas acciones, explica, son imprescindibles para ir avanzando en la práctica de las medidas (Figuras 75 y 76).



Figura 75. Composición y descomposición. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.



Figura 76. Llenando y vaciando, observando cambios en la capacidad. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

3.2 Los Conocimientos Didácticos de las Matemáticas de la Escuela Infantil (CD-MEI)

En cuanto a la Dimensión Didáctica Matemática se ha considerado imprescindible indagar en aspectos relativos al diseño de los espacios y materiales con contenido matemático y al acompañamiento de los profesionales a través del lenguaje verbal. De esta manera, se exploran los conocimientos sobre las distintas formas de aprendizaje de las matemáticas, el conocimiento del currículo y de los estándares, el conocimiento sobre la planificación, el diseño de los espacios, los materiales y a los apoyos que ofrece el profesional a partir de las observaciones y sus intervenciones.

De este modo se describen los subdominios:

- Los Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia (C-FAM).
- Los Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil. (C-PGA)
- Los Conocimientos sobre las orientaciones curriculares (C-OCU).

3.2.1 Los conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia (C-FAM)

Con el transcurso del tiempo, la enseñanza de las matemáticas se ha ido definiendo por los diferentes autores y corrientes psicológicas y pedagógicas de cada momento. Alsina y Delgado (2021, 2022) exponen que las aportaciones de los diferentes autores como Piaget, Ausubel, Pikler, Vygotsky, Aucouturier, Pestalozzi, Malaguzzi, Montessori, entre muchos otros, y las recientes aportaciones de la neurociencia (Bueno, 2019), explican cómo aprenden estas primeras matemáticas los niños. Newton y Alexander (2013) presentan un estudio partiendo de las principales teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje en la educación matemática en las primeras edades estableciendo diferentes eras en tramos de 20 años. De Castro (2016), presenta un resumen destacando sintéticamente lo más relevante de cada período enmarcando así una revisión muy clara sobre la evolución conceptual de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al largo de la historia.

A continuación, a modo de contextualización y sin profundizar ampliamente en ello ya que se escapa del alcance de este marco teórico, se presentan las diferentes eras o etapas que establecieron Newton y Alexander (2013). A través de su clasificación en el tiempo, se configura un esqueleto que permite ir engrandando las principales ideas que, hoy en día, siguen vigentes en los diferentes modelos pedagógicos y psicológicos en los que se fundamenta el concepto de matemáticas intuitivas e informales (Alsina, 2015). Se parte de esta primera clasificación de Newton y Alexander (2013) porque se remontan al 1900 para iniciar su recorrido y no es hasta el año 2000, como se ha descrito en el capítulo anterior, que aparecen con más fuerza e impacto investigaciones relativas a la matemática en las primeras edades, aun habiendo aportaciones de autores prestigiosos anteriores a la fecha también ya destacadas.

La conceptualización, a partir de este recorrido histórico, permite recoger las implicaciones didácticas actuales que surgen de dichas corrientes explicativas dando lugar a la descripción del conocimiento didáctico correspondiente al subdominio C-FAM del modelo de conocimiento CEM-EI.

Las eras que determinan Newton y Alexander (2013) son 6:

- La era del aprendizaje experiencial (1900-1920).
- La era de la disponibilidad (*readiness*) (1920-1940)
- La era del desarrollo cognitivo (1940-1960)
- La era del desarrollo con andamiaje social (1960-1980)
- La era del aprendizaje culturalmente situado (1980-2000)
- La era emergente del aprendizaje corpóreo (2000- 2020)

La Era del Aprendizaje Experiencial (1900-1920)

La era del aprendizaje experiencial parte de los planteamientos fomentados en del juego con materiales estructurados como los de Montessori o Froebel (de Castro, 2016) inspirados también en Pestalozzi.

Friedrich Froebel (1913) fue uno de los pedagogos que marcó un cambio significativo en la enseñanza moderna siguiendo el postulado de Pestalozzi. Especialmente, se destaca en el contexto de este estudio, su concepto de jardín de infancia y el desarrollo de la teoría del juego.

Para Froebel, el juego es la principal actividad que el niño debe desarrollar en la Escuela Infantil. Defiende la idea de un juego caracterizado por ser libre como la expresión más profunda de la existencia humana. De esta manera, considera que el juego es el medio por el que el niño relaciona su mundo interior y el mundo exterior que le rodea, siendo cada vez más consciente del mundo y descubriendo, de manera autónoma, los elementos y objetos. De esta manera, Froebel (1913), considera que es necesario para el desarrollo cognitivo y emocional del niño, promover el juego libre como actividad de aprendizaje y capacitarlo dándole autonomía. El juego es fundamental porque ayuda al niño a desarrollar ideas y a ponerlas en práctica, a adaptarse socialmente y a superar problemas de distinta índole: emocionales, de relación, cognitivos, lingüísticos... El juego como parte de la actividad innata del niño de explorar, se ha de desarrollar en contextos agradables, ha de ser voluntario, ha de tener un sentido concreto para el niño y ha de ser escogido espontáneamente.

Para este autor, el maestro es un guía en el proceso de juego que acompaña a los infantes. También, cabe destacar que apostó por introducir en las Escuelas Infantiles

plantas, animales, materiales de construcción, utillajes sencillos con prácticas realistas y eminentemente experimentales.

Como se leerá más adelante en este marco teórico, el juego libre a través de propuestas con diferentes materiales sigue siendo un pilar pedagógico referente para el diseño de las propuestas de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas en las primeras edades.

Montessori (1914, 1982, 1986), apostaba por las propuestas de juego siguiendo las aportaciones de sus contemporáneos. Concretamente, desarrolló un área del currículo en el jardín de infancia al que denominó *Ejercicios de la vida diaria*. Estas propuestas son actividades de juego cotidianas o actividades utilitarias. Normalmente, parten de rutinas que los adultos desarrollan en sus prácticas también cotidianas con la finalidad de mantener y controlar el entorno en el que viven y trabajan. Montessori (1914, 1982, 1986) consideró que los niños desde muy pequeños observan la manera en que sus familiares llevan a cabo estas actividades cotidianas y por esta razón sienten curiosidad y ganas de imitarlos y aprender de ellos. A través de estas propuestas cotidianas de juego, Montessori consideraba que promovía capacidades o aptitudes como la autonomía, la concentración y la integración o absorción de contenidos y, a su vez, los capacitaba, haciéndoles sentir útiles y favoreciendo su autoestima y motivación.

Montessori (1914, 1982, 1986) presentó un método de la pedagogía científica aplicado a la infancia que sigue vigente a nivel internacional después de 40 años. En él estableció lo que denominó “las características universales de la infancia”. Estas características propias del niño eran:

- Todos los niños tienen una mente «absorbente».
- Todos los niños pasan por períodos «sensibles».
- Todos los niños quieren aprender.
- Todos los niños aprenden por medio del juego o trabajo, refiriéndose a la actividad en la escuela.
- Todos los niños pasan por diversas etapas de desarrollo.
- Todos los niños quieren ser independientes.

Según la autora, todos los niños inconscientemente tienen una mente capaz de absorber la información del entorno sobre el que aprenden de manera muy rápida. Para Montessori (1982) esta capacidad es única y propia de los más pequeños, concretamente de los 3 primeros años. Según ella, y como actualmente muestran las principales aportaciones en neurociencia (Bueno, 2019), las impresiones en el cerebro, altamente plástico y moldeable tienen una fuerte repercusión e impacto en el desarrollo del niño y forman las bases de los aprendizajes posteriores. De esta manera, todas las experiencias vitales son muy importantes durante estos primeros años de vida. Cabe destacar que se diferencia los tres primeros años, en los que el proceso de absorción de conocimientos es inconsciente, pero de mayor impacto. Los 3 siguientes (3-6) siguen siendo muy importantes, pero la mente absorbente se considera ya consciente y se da un proceso de maduración y razonamiento diferente.

Explica que los niños pasan por períodos sensibles y pasan por fases en que repiten una y otra vez la misma actividad sin una razón aparente. Para ella, esta repetición del niño que parece ajeno a todo lo demás y permanece concentrado únicamente en la actividad que desarrolla y que le interesa, representa un proceso de aprendizaje que acaba de forma natural cuando el niño pierde el interés. En ese momento, se considera que ha saciado su necesidad de aprender sobre ese elemento.

De esta manera, se destaca la capacidad de aprender de todos los niños, sin exclusión alguna, y se reconoce la necesidad del niño de hacer cosas repetidamente como método de aprendizaje y perfección de su conocimiento. Cuando repite continuamente una actividad está construyendo patrones automáticos y con el tiempo los integrará como imágenes en su mente.

La autora considera que estas imágenes mentales se pueden representar por medio del lenguaje y destaca la importancia de que los niños estén en contextos acompañados por los adultos que conversen y que los acompañen verbalmente en sus acciones.

Montessori expone seis períodos sensibles: sensibilidad al orden, sensibilidad al lenguaje, sensibilidad a caminar, sensibilidad a los aspectos sociales de la vida, sensibilidad a los pequeños objetos y sensibilidad a aprender a través de los sentidos.

1. Sensibilidad al orden: aparece al inicio de la vida, a partir del primer mes aproximadamente, y se desarrolla a lo largo de los dos primeros años. En este

sentido, la autora considera que los niños categorizan y clasifican todo lo que les rodea, ya sea de manera experimental o mental (Geist 2014). Por ello, destaca la necesidad de establecer espacios ordenados con los materiales bien estructurados y presentados de manera que el niño pueda reconocerlo, familiarizarse, darle un sentido coherente y desarrollar con autonomía la actividad de juego construyendo todo el esquema mental que incorpora la tarea.

2. Sensibilidad al lenguaje: Montessori consideraba que el lenguaje era muy importante para el desarrollo intelectual del niño y animaba a los adultos a conversar con los niños desde el primer momento. Apostaba por un lenguaje enriqueciendo que no escatime en su riqueza y pluralidad para ofrecer a los niños diversidad de palabras y estructuras lingüísticas. En sus aportaciones, destaca que los niños a los seis años ya tienen una estructura lingüística fuerte y consolidada con mucho vocabulario que ha ido absorbiendo desde su nacimiento; observando la cara, facciones, movimientos de labios y la lengua de los adultos mientras escucha los sonidos de las palabras.
3. Sensibilidad para caminar: la autora reconoce la importancia de seguir el ritmo de cada niño y respetar los logros que va haciendo poco a poco y destaca el movimiento del niño y su evolución hasta el momento de caminar. El niño, entre los 12 y los 15 meses, tiene la necesidad de caminar y de practicar sin parar su nueva habilidad. Puede caminar muchos kilómetros siempre que se le respete el ritmo de su movimiento y sus paradas.
4. La sensibilidad a los aspectos sociales de la vida: se desarrolla a partir de los dos años y medio. Los niños toman una cierta conciencia de que forman parte de un grupo social y por ello se despierta el interés por los otros niños. Esta curiosidad por el “otro” se despierta de manera natural y espontánea. Poco a poco, el niño va adquiriendo las pautas sociales convencionalmente establecidas por el grupo.
5. La sensibilidad a los pequeños objetos: apela al interés innato de los niños a, cuando tienen mayor movilidad, a explorar los objetos y elementos de su contexto, cogerlos y explorarlos, acercándolos, tocándolos, chupándolos, etc. de modo que van construyendo como es el mundo que les rodea y aprendiendo sobre las características de los elementos y de sus posibilidades con ellos.

6. Sensibilidad para aprender a través de los sentidos: desde el momento de su nacimiento, tu bebé recibe impresiones del mundo a su alrededor a través de sus cinco sentidos y va absorbiendo la información del entorno y aprendiendo sobre ella y de ella. De este modo, el aprendizaje comienza desde el nacimiento y los procesos fundamentales por los que los niños aprenden están establecidos en un momento muy temprano de la vida. Este concepto sigue latente hoy día, avalado por numerosas investigaciones tanto en neurociencia como en educación matemática (Alsina, 2019; Bueno, 2017; Clements y Sarama, 2015; Edo, 2016; Geist, 2014; Lee, 2012, entre otros). Primero están despiertos de forma más activa los sentidos de la vista y el oído y, poco a poco con el desarrollo del movimiento se va despertando el sentido del tacto y el gusto en función de la capacidad del niño de llevarse cosas a la boca.

Montessori (1982) al igual que Froebel consideran que el juego libre y espontáneo es una respuesta natural a su desarrollo. Todos los niños aprenden por medio de la participación activa, implicándose desde una perspectiva práctica y desde la autonomía. Se destaca por encima de otros saberes la capacidad del niño de resolver tareas con sus propias manos. Esto da lugar a la conexión entre el cerebro y el movimiento. Hay aspectos hoy día también muy presentes en neurociencia, concretamente en aspectos relacionados con el desarrollo neurofuncional y el aprendizaje (Ferré y Aribau, 2014), que, como considera Pikler (1985), confirman que el desarrollo de la mente se produce gracias al movimiento del niño. En esta línea, Montessori (1982) considera que el proceso de aprendizaje tiene tres partes: el cerebro, los sentidos y los músculos, y, en este sentido, en interacción dan lugar al aprendizaje.

La Era de la Disponibilidad (*readiness*) (1920-1940)

La era de la disponibilidad es el momento en que se considera que los niños tan pequeños no están preparados para el aprendizaje de las matemáticas hasta la educación primaria. Incluso, se creía que podía ser perjudicial para el niño (de Castro, 2016).

Como se ha podido leer en el capítulo anterior, esta concepción determinista está claramente revocada dando lugar a nuevas corrientes que impulsan el desarrollo del pensamiento matemático en edades muy tempranas a través de las prácticas escolares.

No se destacan implicaciones didácticas significativas para este estudio, aunque es importante matizar que su legado sigue latente y que aún hay huellas en la invisibilidad curricular y en las creencias peyorativas sobre las matemáticas en estas primeras edades, las cuales cabe ir desmitificando.

La Era del Desarrollo Cognitivo (19420-1940)

Hay una gran influencia de Piaget, que asume que la naturaleza del pensamiento y el razonamiento del niño preoperacional tiene ciertas limitaciones (conservación, reversibilidad, etc.) (de Castro, 2016).

El modelo teórico sobre la construcción del pensamiento matemático de Piaget ha sido con diferencia el más consolidado (de Castro et al., 2015). Piaget e Inhelder (2015) establece tres tipos de conocimiento:

1. El conocimiento físico se desarrolla alrededor de la descripción de los objetos y sus propiedades. Por ejemplo, si observamos dos fichas, una roja y una azul, el color, el peso y el hecho de que la ficha caerá cuando las sueltes en el aire, son conocimientos realmente observables que pertenecen a cada ficha.
2. El conocimiento lógico-matemático parte de la relación entre los objetos. Cuando observamos las dos fichas y creemos que son diferentes, la diferencia no es un concepto propio de un objeto. Necesitamos que la persona que los observa establezca dicha relación / comparación, entre ellos para observarla. La ficha roja es diferente de la azul únicamente cuando las comparo.
3. El conocimiento social o convencional tiene una naturaleza arbitraria. En el mundo hay una serie de conocimientos que se transmiten socialmente y de manera arbitraria. Hay conocimientos convencionales como por ejemplo que el árbol se llama árbol y en ello no existe ninguna relación física o lógica. Por lo tanto, es imprescindible la interacción con las personas que lo transmiten para aprender estos conocimientos. Aun así, el niño no necesita únicamente de los demás para aprender el concepto árbol, sino que también necesita la elaboración de su propio esquema lógico-matemático para clasificar los conceptos y relacionarlos. De este modo, se establece que el niño utiliza el mismo marco de referencia lógico-matemático para construir el conocimiento físico como el social (Kamii,1985).

El conocimiento físico se conquista a través de la observación, la abstracción empírica y el conocimiento lógico a través de la abstracción reflexiva. El conocimiento social a través de las convenciones transmitidas socialmente. Piaget explica que los dos primeros establecen entre ellos una relación de reciprocidad, no se pueden dar el uno sin el otro. La abstracción de las cualidades de los objetos es muy distinta a la abstracción del número. Para la abstracción de las cualidades se usa el término abstracción empírica o simple y para la abstracción de las propiedades numéricas se usa el término abstracción reflexionante. En la abstracción empírica, el niño se centra en las cualidades del objeto, seleccionando las que le interesa. En la abstracción reflexionante, el niño establece una relación entre los objetos creando una construcción del pensamiento. El niño necesita extraer las cualidades de los objetos (abstracción simple) para relacionarlas entre ellas (abstracción reflexionante) y viceversa. Necesita un marco conceptual, un esquema de pensamiento lógico-matemático construido mediante abstracción reflexionante para ir integrando las nuevas observaciones. Para decidir que el color es rojo, necesita poseer un esquema de pensamiento que le permita clasificar los colores y diferenciar el rojo de los otros (Kamii,1985).

El niño aprende las cantidades de manera diferente a los colores o las texturas. Determinar el color o la textura es una práctica de observación simple. Aun así, cuando el niño recoge estas observaciones construye esquemas de pensamiento donde clasifica su conocimiento, por ejemplo: liso, rugoso. Cuando aprende las cantidades 1, 2, 3... 1000 de un conjunto de fichas, aun siendo esta una práctica escolar vigente, el niño no parte de un conjunto de elementos y abstrae la cantidad de manera simple del conjunto de los elementos; los elementos propiamente no tienen en si la cantidad. En realidad, lo que el niño está haciendo es considerarlas numéricamente y establecer una relación entre ellas. Ninguna ficha por ella misma es 3 o 1000 y el número no es una condición directamente observable.

Si partimos de los números pequeños, uno se puede confundir y por lo que surge el proceso de subitización (Clements y Sarama, 2015). El 1, 2, 3, 4, 5, 6... son cantidades pequeñas y a simple vista se pueden identificar gracias a este proceso. En términos perceptivos, una vez desarrollado este proceso, el niño enseguida puede identificar la cantidad. Pero, cuando se presentan cantidades más grandes como el 1000 o el 100.000 es indiscutible que no se pueden aprender a partir de conjuntos de

números e imágenes. Esto lo explica más adelante Ginsburg y Baroody (2007). Los números no se aprenden mediante la abstracción empírica de los conjuntos existentes, sino mediante la observación reflexionante a medida que el niño construye relaciones, de hecho, como estas relaciones son elaboradas por el pensamiento, es posible comprender números como el 1.000.002 incluso sin haber visto o contado nunca semejante cantidad (Kamii,1985).

El niño progresa en la construcción del conocimiento lógico-matemático mediante la coordinación de las relaciones simples que ha creado a través de la observación y la interacción con los objetos. Las fichas son iguales (si por ejemplo se fija en la forma y el peso); las fichas son distintas (si se fija en el color); hay más fichas rojas que azules (si proporcionamos 4 de color rojo y dos de azules). Es a partir de estas relaciones que podrá extrapolarlas a otros contextos y realizar sus deducciones: hay más animales que vacas (Kamii,1985).

En este sentido, se observa como Piaget sigue siendo un referente importante que, con matices actualizados y nuevas incorporaciones como iremos viendo al largo del capítulo, aporta entendimiento al proceso de construcción mental que desarrolla el niño.

En las últimas décadas ha aparecido una revolución post-piagetiana por su carácter determinista (de Castro, et al., 2015) y se han dado lugar a nuevas concepciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático. Por ejemplo, los diferentes estudios sobre el conocimiento numérico de los bebés se contraponen a la postura sobre la conservación del número y la teoría de los estadios de Piaget (NRC, 2014). Aun así, sigue existiendo una fuerte influencia de sus teorías (por ejemplo, en relación con el concepto lógico-matemático) que se denotan perceptiblemente en los currículos (de Castro, 2016) y tienen el mérito de haber orientado durante muchos años a los profesionales de la educación matemática infantil (Alsina, 2015). Un claro ejemplo de ello se ve reflejado en el Estado Español donde las directrices curriculares establecidas por el ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, que en el artículo 4 define como uno de los objetivos: “iniciarse en las habilidades lógico-matemáticas, en la lecto-escritura y en el movimiento, el gesto y el ritmo” (BOE, 2008 p. 3).

Daniels (2003) presenta a Bidell (1992) como un autor que ha analizado cuidadosamente las cuestiones que permiten profundizar en la teoría de los estadios

de Piaget. Según Bidell (1992) existe una contradicción interna en la teoría de Piaget que abre una puerta poderosa a desarrollos teóricos que aparecen posteriormente con el socioconstructivismo. Por un lado, la teoría del desarrollo de los estadios de Piaget refleja un carácter totalmente individualista que se basa en una metáfora interaccionista donde la relación entre la persona y el mundo social se concibe como la de un individuo separado del mundo que interacciona con él. Por otro lado, la teoría constructiva del conocimiento de Piaget rechaza la tradición cartesiana del reduccionismo (tanto en su versión nativa como empirista) y manifiesta una relación relacional e incluso dialéctica del desarrollo (Bidell, 1992 en Daniels, 2003).

De esta manera, Bidell explica como el constructivismo de Piaget se contradice con el carácter individualista de su propia teoría. Según este autor, Vygotsky presenta dicha relación dialéctica entre lo personal y lo social, rechazando las nociones reduccionistas y matiza las aportaciones de Piaget.

Daniels también hace referencia a Smith (1996) exponiendo que como a Bidell, es otro autor que manifiesta el error de tildar a Piaget como un autor que postula un desarrollo individual asocial. Este recuerda las propias aportaciones de Piaget sobre el conocimiento humano en esencia colectivo y la vida social como factor esencial que influye en la creación y el crecimiento del conocimiento científico. También explica que la cooperación entre personas no se entiende únicamente como fruto de un intercambio, sino como un proceso que crea nuevas realidades y que transforma la naturaleza misma del individuo (Piaget, 1995 en Daniels, 2003).

Observar esta relación con el medio ofrece la posibilidad de determinar que los tres conocimientos, (el físico, el lógico-matemático y el convencional) que explica Piaget están estrechamente relacionados y se necesitan mutuamente para dar sentido y engranar el desarrollo del pensamiento, en este caso matemático, pero se podría vincular también al desarrollo del lenguaje.

La Era del Desarrollo con Andamiaje Social (1960-1980)

La era del desarrollo con andamiaje social está basada en las aportaciones de Vygotsky y Bruner entorno el socioconstructivismo. El paradigma socioconstructivista define el aprendizaje de las matemáticas como un proceso socialmente mediado donde los alumnos aprenden matemáticas elaborando

significados y atribuyendo sentidos a los contenidos que se les proporcionan y la interacción, la negociación, la comunicación y observación de los demás es fundamental para compartir significados y atribuir sentido al que se está construyendo mentalmente. La concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje (Coll, 2001) indica que los niños aprenden gracias a actividad mental constructiva que construyen y a las ayudas ajustadas que reciben de los profesionales que los acompañan (Coll y Rochera, 2000).

Bajo esta perspectiva, el profesional ha de saber qué construye mentalmente el niño para ofrecerle las bastidas ajustadas a su zona de desarrollo próximo (Coll y Rochera 2000). La concepción socioconstructivista da un gran valor a los conocimientos previos (Salé y Coll, 1999) de los niños desarrollados en los contextos informales de aprendizaje siendo infinitas las situaciones, en este caso matemáticas, que viven ya desde muy pequeños (Alsina, 2015). Y, aun siendo imprecisos o a veces “incorrectos”, son los esquemas de conocimiento que el niño construye y a partir de los que se fundamentaran y relacionaran los conocimientos nuevos de manera significativa.

Según Coll y Rochera (2000), el socioconstructivismo considera las ayudas que ofrecen los profesionales como necesarias e imprescindibles para que los significados que construyen los niños se aproximen cada vez más a los significados culturales que transmiten contenidos escolares. En este sentido, los autores hacen referencia a los mecanismos de influencia educativa como el núcleo que aporta información sobre como comprenden y construyen el conocimiento los niños, postulado que se basa en las teorías sociocultural del desarrollo y el aprendizaje de esta era.

Coll et al. (1999) hacen referencia a los mecanismos de influencia educativa como instrumentos para facilitar el proceso de construcción de significados y la atribución de sentido en los aprendizajes. De este modo, siempre se entiende que el proceso de aprendizaje va ligado estrechamente al de la enseñanza siendo los procesos de enseñanza y aprendizaje un todo en interacción constante. En este todo, la tarea del maestro es regular su nivel de ayuda para que sea contingente. Es decir, que se ajuste a la necesidad del alumno de manera efectiva y constante su actividad mental constructiva. Son mecanismos interpsicológicos, que se dan en la actividad conjunta entre el profesor y el alumno. Se presentan dos tipos de mecanismos de influencia educativa: el proceso de construcción progresiva de sistemas de significados

compartidos y el traspaso progresivo de responsabilidad y control del profesor a los alumnos.

Colomina et al. (2001) exponen que el contenido de aprendizaje da lugar a la interactividad entre profesor y alumno dentro de un contexto determinado definiendo de esta manera el concepto de actividad conjunta. La actividad conjunta hace referencia a las acciones que se van construyendo en la interacción con relación al contenido en un contexto determinado entre el alumno y el profesor (el profesor determina las ayudas y los ajustes de ésta con relación al nivel de competencia del alumno respecto del contenido o tarea a desarrollar). En la actividad conjunta se toman en consideración los intercambios entre profesor y alumno, así como los de grupos de alumnos entre iguales.

Los autores también explican que el lenguaje se considera una forma específica de actividad y constituye una parte muy importante en la construcción por parte de ambos en la actividad conjunta. En este sentido, manifiestan que la actividad autoestructurante del alumno no se genera de forma individual sino como parte de la actividad interpersonal.

Chamorro (2005) expone que aprender matemáticas significa construir matemáticas y que este proceso de construcción parte de diferentes aspectos clave:

- La acción del niño como constructor.
- El transitar de un estado de equilibrio (con unos determinados conocimientos previos adquiridos) a uno de desequilibrio en el cual, los conocimientos iniciales (estadio de equilibrio) pueden ser refutados, modificados, reforzados, ampliados... pero nunca serán obviados. Es decir, los conocimientos previos (en este caso los informales relativos al ciclo 0-3) siempre serán el sustento de los nuevos conocimientos (Brousseau, 1998).
- Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social como facilitadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es una idea básica de la psicología social que consideraba preciso tener en cuenta lo que un individuo puede hacer con la ayuda de otros, en tanto que los aprendizajes ocurren en contextos sociales en interacción constante entre niños y entre niños y adultos. Es así como se conceptualizó el concepto de Zona de Desarrollo Próxima (ZDP)

como la distancia entre el nivel de desarrollo actual (inicial y de confort) que se establece cuando el niño resuelve por el mismo una situación problemática sin necesidad de ayuda y el nivel de desarrollo potencial, como aquel donde el niño necesita ser acompañado por el adulto o en colaboración con otros niños más avanzados Vygotsky (1988).

Acosta y Alsina (2020) exponen, en este sentido, que desde un enfoque socioconstructivista se fomenta la posibilidad de que el niño construya su propia realidad y destacan la importancia de que se promuevan las hipótesis que realizan los niños valorándose todas sus producciones y sus pensamientos con curiosidad, respeto y admiración.

La Era del Aprendizaje Culturalmente Situado (1980-2000)

Rogoff (1993), presenta su teoría de la participación guiada basándose principalmente en el modelo sociocultural de Vygotski, dándole continuidad a través de sus investigaciones y escritos, y considerando las aportaciones teóricas de algunos elementos de la teoría de Piaget y de aspectos generales de la psicología, la educación y la antropología (López et al., 2007).

Lee (2012) expone que Rogoff (1995) introdujo algunos matices a las aportaciones de Vygotsky sobre la teoría sociocultural. Expone que esta autora indagó en la naturaleza de las interrelaciones de los niños durante el desarrollo en el aprendizaje y fue la propulsora del concepto de “participación guiada” para explicar las relaciones entre las personas a medida que van compartiendo significados. Además, definió al alumno como aprendiz proporcionándole una consideración un tanto diferente por su consideración cultural.

Según Rogoff (1993), de manera muy sintética, considera que las teorías de Vygotski y sus contemporáneos se centran en los niños en interacción con otros niños y personas al participar conjuntamente de una actividad social concreta. Según esta autora, "neovygotkiana" (Lee, 2012), Vygotski (1978, 1988) conceptualizaba el desarrollo cognitivo de los niños como resultado de las interacciones con otros miembros de la sociedad más expertos (en la tarea a desarrollar y herramientas a utilizar como el lenguaje). Esta conceptualización, aunque con una pretensión clara por parte de Vygotski de analizar la actividad conjunta sin fisuras entre los agentes

del proceso de enseñanza y aprendizaje, es concebida por Rogoff (1993) como una apuesta que, si no se entiende bajo el carácter mutuamente constituyente de tales procesos, el enfoque sociocultural puede ser asimilado en ocasiones a otros enfoques que examinan sólo una parte del problema eludiendo aspectos indisociables al niño, como su cultura y contexto familiar. Por ejemplo, la autora expone que resulta incompleto entender, al analizar una actividad conjunta entre diferentes alumnos, que el desarrollo se da en unos niños mientras que los otros miembros de su grupo o sus comunidades culturales no lo hacen. De esta manera, establece que la influencia educativa puede darse en una u otra dirección, y que, a su vez, pueden ser calculadas las contribuciones relativas de cada una de las partes. De nuevo, pone como ejemplo un proceso compartido entre padre e hijo en el que se puede analizar la interacción del padre al niño o del niño al padre. Ello explica que resulta incompleto centrarse sólo en la relación entre el desarrollo individual y la interacción social sin tener en cuenta la actividad cultural en la que tienen lugar las acciones individuales e interpersonales. Para complementar las aportaciones de Vygotsky expone tres conceptos clave: la metáfora del aprendizaje, la participación guiada y el concepto de apropiación participativa.

La metáfora del aprendizaje proporciona un modelo en el plano de la actividad conjunta o comunitaria que incluye la presencia de individuos activos que participan con otros en una actividad culturalmente organizada con la finalidad de contribuir en el desarrollo de los niños menos experimentados (Rogoff, 1993). Esta aportación amplía la mirada dando más espacio a otros tipos de destrezas para incluir la participación en diferentes actividades culturalmente organizadas. De esta manera, explica que la idea de aprendizaje se focaliza en la atención sobre la naturaleza de la actividad en cuestión y sus relaciones con otros aspectos de la comunidad: cultura y familia.

El concepto de participación guiada se refiere a los procesos (y sistemas) implicados mutuamente en las relaciones entre individuos que participan de la actividad conjunta y que destaca, les resulta o ha de resultar significativa. En este sentido, le añade una fuerte importancia a la interacción cara a cara y añade la participación conjunta. Participación que ejemplifica bajo la expresión “codo con codo” destacando, de esta, que es muy frecuente en la vida cotidiana (Rogoff, 1993).

López et al. (2007) explican en su investigación sobre las aportaciones de Rogoff que esta autora tiene en consideración tanto el mundo social como el individual, contemplándolos como dos mundos interdependientes e inseparables, en los que está inmerso el individuo. Como ejemplo, explica que el niño al comenzar la escuela llega con un conjunto de conocimientos previos adquiridos en el contexto familiar y social que lo han rodeado en sus primeros años siendo aspectos fundamentales que lleva consigo el “aprendiz” y que, en cierta manera, canalizaran sus nuevos conocimientos escolares. Por ello, realza la importancia de cómo se acompaña y guía a los niños en sus primeras edades. De esta conceptualización nace el término “guía”, término que define dentro de la participación guiada, se refiere a la acción de acompañar y que contempla la cultura y los valores sociales.

La Era Emergente del Aprendizaje Corpóreo (2000- 2020).

En esta era se encuentran las aportaciones más recientes de la neurociencia, de la cognición corpórea (o encarnada), de la matemática realista y de las matemáticas intuitivas e informales.

- La Cognición Corpórea.

Descrita por Lakoff y Núñez (2000) donde plantean la teoría *embodied cognition* o “cognición encarnada” o “cognición corpórea” que explica que la mayoría de los conceptos abstractos proceden de situaciones concretas (de Castro et al., 2015). Es decir, la situación concreta encarna un concepto abstracto que se va formando a medida de la experiencia en dicha situación. Son conceptos corpóreos porque los conceptos matemáticos nacen gracias a las experiencias sensoriales y la percepción del entorno (se observa su origen Piagetiano).

Metafóricamente, hacen referencia al cuerpo para explicar que las experiencias son la carne y el concepto abstracto matemático es el esqueleto, los huesos. El proceso de abstracción matemático va descarnando la carne del cuerpo para llegar a los huesos, a los conceptos corpóreos, que representa el concepto matemático abstracto.

Para explicar este proceso utilizan diferentes metáforas y así se determina que, en todos los casos, los conceptos matemáticos hacen referencia a acciones de la vida cotidiana, por ejemplo:

- Una colección de objetos del mismo tamaño son los números. El concepto abstracto es número y la experiencia es la interacción con una colección de objetos.
- Juntar varias colecciones de objetos es sumar y restar es quitar una colección que forma parte de una colección mayor”.
- Un solo objeto es la unidad (el número 1), es la colección menor.

Tall (2013) es otro referente internacional que sigue la línea de la concepción corpórea o encarnada definiendo “tres mundos matemáticos”: Un primer mundo corpóreo, que se basa en la percepción y la interacción con objetos y las reflexiones o relaciones que se establecen a partir y entre estos objetos. Un segundo mundo simbólico, que hace de puente entre lo corpóreo (encarnado) y lo simbólico, dando lugar a este proceso de desencarnar capas para llegar al hueso, donde los símbolos pueden ser las operaciones o los conceptos que se van construyendo en la mente. Y un tercer mundo formal axiomático, donde los conceptos ya están asumidos, contruidos dentro del cuerpo teórico que establece ya los razonamientos y proposiciones ya deducidas y demostradas, siendo construidas ya las teorías y utilizadas en su propio fin. (Tall, 2009, 2013; de Castro et al., 2015)

En el primer mundo, donde empieza el pensamiento matemático, el niño parte de su percepción del entorno a través de la observación y acción con el medio. Poco a poco, va evolucionando el constructor de su mente pasando por el desarrollo del mundo simbólico hasta el mundo formal con un razonamiento matemático deductivo (Tall, 2009, 2013; de Castro et al., 2015).

Del mismo modo que Lakoff y Núñez (2000) y bajo el legado de Piaget, dejando de lado su carácter determinista, Tall (2013) concluye que el pensamiento tiene origen corpóreo en nuestra experiencia sensoriomotora. El conocimiento matemático empieza gracias a la percepción de las propiedades de los objetos, de la experimentación con ellos, y de las operaciones con las colecciones de objetos, llegando poco a poco a un nivel de desarrollo estructural más alto, como por ejemplo en la aritmética.

De Castro et al. (2015) exponen que aplicar el enfoque de la cognición corpórea a la Educación Infantil tiene mucho sentido en tanto que muchos conceptos matemáticos parten directamente de su origen metafórico.

De este modo, se entiende que para el diseño de las prácticas educativas escolares (0-3), se parta de contextos donde los niños experimenten con materiales que den lugar a los conceptos matemáticos. Un ejemplo, jugar con grandes cantidades de objetos agrupándolos, metiéndolos en recipientes, añadiendo, quitando... estableciendo de este modo una base para el aprendizaje del número siendo como metáfora, “el número es una colección de objetos” (de Castro et al., 2015).

Enlazando este concepto con los expuestos en la era 1, del aprendizaje experiencial, se observa cómo sigue siendo una necesidad que el niño parta de contextos libres en entornos de juego para experimentar y así construir y encarnar los conceptos corpóreos. Si se parte de Goldschmied (1986) un ejemplo de ello vendría a ser el juego heurístico o las mesas de experimentación presentados hace años. Goldschmied, especialista en el aprendizaje de los 0 a los 3 años y en la formación de profesionales, presentó y desarrolló una serie de propuestas de experimentación y manipulación a través del juego con materiales, sobre el descubrimiento de objetos y de las acciones que podían hacer con ellos: el cesto de los tesoros, el juego heurístico y las mesas de experimentación (Goldschmied y Jackson, 2007).

En la actividad cotidiana de los niños, el cesto de los tesoros y el juego heurístico potencian la exploración y la manipulación de los objetos. Estas dos acciones son básicas en el desarrollo infantil y se presentan correlativamente en el crecimiento evolutivo de los más pequeños. Exploración y manipulación permiten el descubrimiento de cualidades de los objetos, el reconocimiento de elementos idénticos y el establecimiento de relaciones entre ellos (Edo, 2012).

- La Educación Matemática Realista.

Van den Heuvel-Panhuizen (2003) explica que desde este enfoque se asume que el aprendizaje de las matemáticas parte de contextos y situaciones problemáticas reales. Este autor señala que los alumnos deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones problemáticas de la vida diaria, contextos reales y que tengan un sentido para ellos. Cabe destacar que matiza claramente el término realista concretando que el concepto realista no es más

que una intención de hacer alusión a contextos o situaciones problemáticas que el niño pueda imaginar.

El mundo de fantasía de los cuentos de hadas e incluso el mundo formal de las matemáticas pueden ser contextos muy adecuados para los problemas, siempre que sean 'reales' en la mente de los alumnos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003 p. 10)

Según Van den Heuvel-Panhuizen (2003), la educación matemática realista avala al niño como artífice que desempeña un papel activo en el desarrollo de los conocimientos y cómo los conocimientos pueden evolucionar durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este autor parte de la creencia de que las matemáticas, como cualquier otro cuerpo de conocimiento, es el producto de la actividad humana y la actividad social y relaciona esta creencia con EMR y la era de Freudenthal (1987) que fue un defensor de que las estructuras matemáticas no son un compendio ajeno, sino que emergen de la realidad y se expanden continuamente en el individuo en un proceso de aprendizaje colectivo. En otras palabras, en EMR los estudiantes son vistos como participantes activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar dentro del contexto social del aula (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Alsina et al. (2016) explican que Freudenthal (1905-1990) y su equipo de colaboradores desarrollaron los planteamientos de la Educación Matemática Realista (EMR) en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrecht (Holanda). De hecho, relatan que se denomina Instituto Freudenthal en tanto que se reconoce a este autor como fundador de esta perspectiva.

Alsina (2009) interpreta y sintetiza los seis principios de la EMR a partir de la Freudenthal (1991) desarrollando una Tabla explicativa donde define y describe como se pueden trabajar las matemáticas (Tabla 6).

Tabla 6. Principios de la EMR.

1. Principio de Actividad	Las matemáticas se consideran una actividad humana y su finalidad es matematizar el mundo que nos rodea. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema	Matematizar implica principalmente llevar a cabo procesos de generalización y formalización. La generalización requiere sobre todo reflexionar, y la formalización conlleva modelizar, esquematizar, simbolizar y definir.
---------------------------	--	--

2. Principio de Realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales: situaciones problemáticas de la vida cotidiana o situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero no necesariamente es siempre así. Es preciso que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para transformarse en modelos matemáticos.
3. Principio de Niveles	Los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión: Situacional: en el contexto de la situación. Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. General: exploración, reflexión y generalización. Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.	A través de la esquematización progresiva (profesor) y la reinención guiada (aprendiz): las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.
4. Principio de Reinención guiada	El aprendizaje se interpreta como un proceso que, bajo la supervisión de una persona más experta, permite reconstruir el conocimiento matemático intuitivo e informal hacia el conocimiento matemático formal.	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los alumnos muestren sus estrategias a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.
5. Principio de Interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendizaje son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los alumnos son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.
6. Principio de Interconexión	Los bloques de contenido matemático (numeración, álgebra, geometría, medida, estadística y probabilidad) no pueden ser tratados como entidades separadas.	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados

Fuente: Alsina (2009, pp. 3- 4)

Como muestra la Tabla 6, uno de los conceptos básicos de EMR es la idea de Freudenthal (1971) de las matemáticas como actividad humana, “Principio de Actividad”. Las matemáticas parten de la actividad de resolver problemas y buscar problemas y de organizar, accionar, desde la realidad matemática.

Freudenthal afirma que “no hay matemáticas sin matematizar” (Freudenthal, 1973 p. 134 en Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Según el autor esta definición tiene fuertes implicaciones tanto en los objetivos como en la enseñanza de las matemáticas, considerando que las matemáticas se pueden hacer mejor haciendo la propia actividad y no un proceso cerrado o desvinculado. A este proceso el autor le llama matematizar la realidad e incluso, expresa la necesidad de matematizar la misma matemática.

Otro principio fundamental gira alrededor al concepto de realidad donde las matemáticas tienen sentido en los contextos reales y cotidianos de los niños: “Principio de Realidad”. La aplicación didáctica que detalla esta teoría parte de basar las propuestas educativas en representaciones concretas, como representaciones perceptivas concretas o de contextos reales con objetos u otros materiales a modo de introducción. Son conceptos que más adelante se trabajarán con representaciones más formales, y aunque en la realidad para el ciclo 0-3 no se desarrollan, son parte de sistemas con reglas ya explícitas, naturalizadas en los diferentes contextos, como pueden ser los números naturales (Braithwaite y Goldstone, 2013 en de Castro et al., 2015). De este modo, se considera que la instrucción ha de partir, desde el sentido común, en ambas representaciones informales – formales, empezando con las concretas y, paulatinamente, transitar hacia las formales.

Se considera que, con el paso del tiempo, el niño evoluciona su manera de construir el pensamiento a través de la “matematización” para llegar a estructuras formales matemáticas (de Castro et al., 2015). Ello está vinculado al siguiente principio, Principio de Niveles.

También, se destaca el “Principio de Reinención Guiada”. Van den Heuvel-Panhuizen, (2003) haciendo referencia a Freudenthal (1991), explica como realizó el proceso de aprendizaje debe ser guiado:

Se debe ofrecer a los alumnos un entorno de aprendizaje en el que puedan construir conocimiento matemático y tengan posibilidades de llegar a niveles más altos de comprensión (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003 p. 11).

La Reinención Guiada consiste en promover que los niños reinventen las matemáticas guiadas por el profesor, con la ayuda de diversos materiales, favoreciendo así el desarrollo de la comprensión conceptual (Van Reeuwijf, 2001 en de Castro et al., 2015).

De este modo, se ofrecen oportunidades a los niños para que construyan sus representaciones libremente y pasen de estrategias informales, intuitivas, a representaciones más formales.

La Reinención Guiada va acompañada del concepto de Matemización Progresiva (Freudenthal, 1991 en Van den Heuvel-Panhuizen, 2003) y al Principio de Interacción en el que se destaca que el niño aprende gracias a la interacción social con sus iguales y los profesionales que los acompañan formulando conjuntamente cuestiones y descubrimientos que les ayudan a avanzar.

Finalmente, el Principio de Interconexión presenta la idea de unas matemáticas globalizadas indisociables donde, el niño aprende, al mismo tiempo, aspectos vinculados a los diferentes contenidos matemáticos (numeración, álgebra, geometría, medida, estadística y probabilidad) y, por ello, las situaciones problemáticas deben vincular estos diferentes contenidos.

- La Matemática Emergente.

Planteada por Geist (2014), un autor referente a nivel internacional, que describe las matemáticas emergentes haciendo referencia a que los niños comienzan a construir una comprensión matemática desde el día en que nacen. Esta comprensión ocurre a través de las interacciones con su entorno y a través de su actuación mental y física sobre los objetos. Explica que los bebés y los niños pequeños construyen matemáticas desde el inicio gracias a la interacción con el entorno estableciendo vínculos con sus cuidadores a través de la mirada y la sonrisa. Por ejemplo, a los 8 meses los bebés comienzan a mostrarse interesados por los objetos y se establecen relaciones de juego a través de ellos; entre los 18-24 meses establecen relaciones con otros niños a través de los objetos y entre los 24 y 36 meses, ya tienen mucha información sobre objetos y sus experiencias pudiendo así inventar fácilmente nuevas formas de hacer las cosas, por ejemplo, con el juego simbólico.

De entrada, estas matemáticas no se pueden enseñar a un niño ya que emergen y deben ser construidas por ellos mismos. Esto no quiere decir que el maestro, en la escuela, no tenga un papel muy importante en facilitar este proceso al ofrecer diferentes oportunidades y materiales para promover la construcción de esta matemática. De este modo, presenta también el concepto de apoyo emergente donde, la tarea del docente, en los escenarios de aprendizaje, tiene una fuerte implicación.

En este sentido, alude a que los primeros conceptos matemáticos, que se desarrollan durante los primeros tres años de vida, surgen gracias al propio desarrollo de los niños y a través de sus interacciones con el medio ambiente.

De Castro et al. (2015) retoman la teoría de Geist (2014) y explican que la matemática emergente parte de que los niños nacen con un dispositivo cerebral para el aprendizaje de las matemáticas (Butterworth, 1999) que les permite aprender matemáticas desde que nacen combinando las teorías que apuestan por el desarrollo cognitivo y la importancia de las interacciones con el mundo y las personas.

De Castro et al. (2015) explican que las matemáticas emergentes van tomando terreno a medida que avanzan las investigaciones y publicaciones sobre el conocimiento matemático de los bebés y el desarrollo cerebral. Al tiempo explican el paralelismo entre alfabetización y matemática emergentes presentado por Buys (2010). Este autor, considera que la matemática emergente consiste en el proceso gradual y espontáneo mediante el cual los niños van conectando elementos autónomos de conocimiento de modo natural por ejemplo en el conteo de los más pequeños:

- Reconocer “dos”, “tres” o “muchos” como propiedades de colecciones de objetos;
- Comenzar a recitar la secuencia numérica;
- Simbolizar números por medio de los dedos;
- Imitar el conteo de objetos

Carruthers y Worthington (2008) tienen una línea de investigación y de trabajo en el aula inspirada en estudios previos sobre alfabetización emergente, en la que abordan con los niños la representación numérica desde el primer ciclo de Educación Infantil (lo que no suele recomendarse en los documentos curriculares) y estimulan a los pequeños para que representen cantidades. Al principio, estas representaciones resultan muy complejas de interpretar por el adulto, pero estas autoras han encontrado que niños de 0 a 3 años desarrollan un tipo de “marcas dinámicas” que, si bien no sirven para comunicar cantidades eficientemente, sí muestran aspectos relacionados con la cantidad que el niño juzga relevantes.

- Las Matemáticas Intuitivas e Informales (MIeI)

Como se ha descrito en el apartado 3.1 Las Matemáticas Intuitivas e Informales, el concepto de matemáticas informales o intuitivas (Alsina, 2015) acuña las aportaciones de los diferentes autores y corrientes a lo largo del tiempo. De modo que el concepto de matemáticas intuitivas e informales contiene muchas de las aportaciones expuestas en las diferentes eras en tanto que se nutren, complementan y redefinen con el transcurso del tiempo gracias a la investigación psicológica y pedagógica. De esta manera, la primera característica a destacar es que la MIeI acoge las diferentes aportaciones de los diferentes autores de las diferentes eras: era del aprendizaje experiencial (1900-1920) con las aportaciones por ejemplo de Froebel o Montessori; era del desarrollo cognitivo (1940-1960) de Piaget (y post-piagetiana) y su redefinición en el tiempo; la era del desarrollo con andamiaje social (1960-1980) de Vygotsky y Bruner; la era del aprendizaje culturalmente situado (1980-2000) de Rogoff y la era emergente del aprendizaje corpóreo (2000- 2020) donde se sitúa la cognición corpórea con autores como Tall (2013), las matemáticas emergentes con Geist (2014) y las informales o intuitivas con Alsina (2015), Barody (1987), Clements y Sarama (2015) o Ginburg, et al. (1998), entre otros.

A continuación, se presenta una síntesis con las principales implicaciones didácticas que se desprenden de su definición.

- Las MIeI son conocimientos intuitivos que parten de una curiosidad innata que se desarrollan en contextos naturales, cotidianos y de manera espontánea.
- Las MIeI en las Escuelas Infantiles han de partir del carácter intencional, planificado y regulado propios de los contextos educativos de calidad.
- Los adultos que acompañan a los niños necesitan conocimientos sobre las MIeI, qué matemáticas son capaces de aprender los niños y como se puede facilitar su aprendizaje, con altas expectativas por parte del cuidador.
- La MIeI necesitan bastidas a través del lenguaje como elemento que ayuda para construir el pensamiento matemático.
- El niño posee una gran capacidad para aprender a través del juego, la exploración y las actividades cotidianas y su desarrollo cognitivo se inicia en

los primeros meses de vida siendo estos primeros años los más importantes para favorecer los posteriores aprendizajes.

- Las MIEI parten de un pensamiento imperfecto diferente al del adulto, pero son matemáticas amplias y sofisticadas, que aparecen ya en los primeros meses y que a medida que el niño va incorporando aprendizajes, son cada vez más elaboradas.
- Las MIEI incluyen diferentes contenidos matemáticos relativos a: los números y las operaciones, la medida, la geometría, la posición y el espacio, la forma, las relaciones y los cambios y son accesibles a todos los niños.
- La importancia de favorecer las MIEI se consolida a través de numerosas investigaciones que avalan la necesidad de incorporar una visión de calidad matemática a las propuestas que se ofrecen en las escuelas por ser las bases que sustentan y facilitan los posteriores aprendizajes.

De este modo, para favorecer las MIEI en estas primeras edades cabe tener en cuenta las siguientes consideraciones o aspectos clave:

- Las matemáticas informales e intuitivas existen en el ciclo educativo 0-3 desde su inicio
- Requieren de un profesional preparado que acompaña preparando las propuestas, conocedor de los contenidos de las MIEI y que acompaña también con el lenguaje verbal
- Curiosidad innata de los infantes
- Contextos naturales y cotidianos de aprendizaje
- El juego libre, la experimentación y la manipulación como principio activo para el aprendizaje
- El carácter intencional y planificado de las propuestas educativas

La importancia de favorecer las MIEI se consolida a través de numerosas investigaciones que avalan la necesidad de incorporar una visión de calidad matemática a las propuestas que se ofrecen en las escuelas por ser las bases que sustentan y facilitan los posteriores aprendizajes. Diferentes autores (Alsina 2015; Castro, 2015; Clements y Sarama, 2015; Froebel, 1913; Goldschmied y Jackson, 2007;

Geist, 2014; Lee, 2012; Malaguzzi, 2020; Montessori, 1982, entre los muchos descritos), presentan la importancia de la presencia de un profesional que observe a los niños (Hoyuelos, 2007, 2011, 2020; Malaguzzi 2020) y les ofrezca contextos educativos que promuevan el juego y la exploración como medio para desarrollar estas primeras matemáticas. Profesionales que dispongan materiales acordes con sus necesidades de desarrollo, juego y exploración (Goldschmied y Jackson, 2007, Edo, 2012).

En palabras de Castro et al. (2009) se asume que en las primeras edades la actividad infantil es gracias a la exploración y la experimentación sensorial a través del juego con los materiales y objetos. Un juego entendido en su sentido más puro como fuente de expresión de las capacidades del niño que desarrolla todo su potencial de manera innata y libremente:

El jugar, el juego, constituye el más alto grado de desenvolvimiento del niño durante esta época; porque el juego es manifestación espontánea de lo interno, inmediatamente provocada por una necesidad del interior mismo. El juego es el más puro y espiritual producto de esta fase de crecimiento humano. (...) Del juego manan las fuentes de todo lo bueno. El niño que juega tranquilamente, con espontánea actividad, resistiendo a la fatiga, llegará a ser de seguro un hombre también activo, resistente, capaz de sacrificarse por su propio bien y por el de los demás. ¿No es, pues, la más hermosa manifestación de la vida infantil en este período la del niño que juega, la del niño entregado enteramente a su juego? (Froebel. 1913, p. 56).

Con el tiempo, muchos autores han ido avalando la importancia del juego como el escenario idóneo y el mecanismo perfecto para que los niños desarrollen una gran cantidad de aprendizajes elevando el juego de categoría y reconociéndolo como medio natural para construir esquemas de conocimiento ampliamente sofisticados (Alsina, 2015; Baroody, 1997; Borghi, 2019; Chamorro, 2005; de Castro y Quiles, 2014; Edo, 2012; Frabboni (2009); Lee, 2012; Montessori, 1914; UNICEF, 2004, Ruiz de Velasco Gálvez y Abad, 2019. entre muchos otros).

Por ello, se requiere de profesionales que diseñen propuestas que previamente estén pensadas y planificadas con materiales debidamente escogidos y con una intencionalidad clara (Geist, 2014) con el fin de dar respuesta a la curiosidad innata y espontánea del niño (Clements y Sarama, 2015, Montessori, 1982). También se requiere de profesionales

que conozcan y promuevan todos los contenidos matemáticos informales e intuitivos y tengan dominio sobre como aprenden matemáticas y cómo se puede facilitar que aprendan los niños de los 0 a los 3 años (Alsina, 2015). Profesionales que comprendan la importancia del lenguaje y de los andamios que se pueden ofrecer con buenas y sugerentes preguntas (Lee, 2012; Rogoff 1993) y, a su vez, dispongan los ambientes de aprendizaje en espacios de juego ricos y diversos donde el niño pueda explorar y manipular libremente (Frabboni, 2009) desde el inicio de su vida (Geist, 2014).

Según Hoyuelos (2007, 2020), los profesionales de la educación deberían tener un perfil de investigador en acción y en búsqueda permanente, con ganas de dar sentido a su trabajo y que consideren este una aventura. Una aventura en la que cabe tener en cuenta las cien mil posibilidades de aprendizaje y en la que el profesional muestre una actitud activa a la hora de aprender y reaprender al lado de los niños, viviendo y sintiendo la escuela como un gran campo de investigación (Malaguzzi, 2020).

En la Escuela Infantil, los espacios con las propuestas a través de materiales tienen una gran importancia porque son los elementos de primer orden en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los niños (Moreno, 2013; Borghi, 2019). Por ello es muy importante e imprescindible un trabajo previo de clasificación, selección y utilización de los mimos (Alsina, 2004).

Difícilmente, el profesional será capaz de acertar en sus propuestas si no desarrolla la capacidad de observar desde la curiosidad que plantea Hoyuelos y Malaguzzi. Las ganas de mirar profundamente al niño y las acciones que desarrolla, sus intereses y motivaciones, su momento evolutivo y su necesidad de juego, movimiento, expresión, etc. Por ello, como premisa imprescindible se promueve un profesional despierto, curioso, presente, que se haga preguntas y que tenga ganas de investigar y crecer junto a sus alumnos (Malaguzzi, 2020) apasionado por aquello que vive diariamente junto a ellos y que le invita a crear nuevos retos de aprendizaje.

Malaguzzi consideraba imprescindible que en las Escuelas Infantiles se vivieran experiencias reales dando lugar a conocimientos vinculados con la realidad donde no se excluyera ningún niño, ni su peculiaridad. Por ello, promovía propuestas educativas inclusivas, acorde con el principio de inclusión presentado en la introducción de este marco teórico, que partían de la realidad de todos los integrantes del grupo, dando como resultado respuestas y conclusiones reales. De este modo, los profesionales deben basarse

en la observación y el descubrimiento de las diferentes formas que tienen los niños de participar y adaptar los contextos educativos a su realidad, interés, motivación, mirada, lenguaje, etc.

En esta línea, Lee (2012) explica que el papel de los educadores tiene que ser el de aprendices al lado de los niños y que promuevan entornos ricos en oportunidades para la resolución de problemas. Para ello, plantea la necesidad de que los profesionales estén a disposición de observar, escuchar, evaluar y preguntar a los niños para dar respuesta a su curiosidad creciente facilitando así los materiales más adecuados.

Y es que, en este sentido, de Castro et al. (2015) junto a muchos otros autores como: Alsina, 2015; Alsina y León, 2016; Clements y Sarama, 2015; Castro, 2006; de Castro y Quiles, 2014; Edo, 2012; Geist, 2014; Goldschmied y Jackson, 2007; Montessori, 1982, etc. presentan a los profesionales de la Escuela Infantil como creadores de entornos de propuestas ricas y diversas, favorecedores del desarrollo del pensamiento matemático.

El entorno físico influye decisivamente en como siente su trabajo el personal de la Escuela Infantil y en la calidad de la experiencia que puede ofrecer a las niñas (Goldschmied y Jackson, 2007, p. 29).

3.2.2 Los conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil

En primer lugar, para poder definir los conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil, cabe clarificar algunas cuestiones previas que ubiquen exactamente a que refiere en esta investigación el concepto espacio. De este modo, se especifica brevemente a que hace referencia el concepto espacio y, en segundo lugar, se detalla ampliamente cómo se planifica y bajo qué criterios se organiza. Finalmente, se presentan los ocho espacios seleccionados con sus propuestas de materiales, propios de las Escuelas Infantiles, objeto de estudio de esta investigación.

Battini (1982) e Iglesias (2009), entre otros autores que se irán exponiendo a lo largo de este apartado, han centrado sus investigaciones en el diseño de los espacios educativos y de los ambientes escolares como agente decisivo en el aprendizaje de los niños. Los conceptos espacios y ambientes se utilizan frecuentemente como sinónimos de un mismo concepto. Aunque, según Iglesias (2009), tienen un matiz diferente. El término espacio

hace referencia únicamente a los elementos físicos y el término ambiente al conjunto de elementos físicos y las relaciones que se establecen en él.

Iglesias (2009), explica que el concepto espacio tiene muchas acepciones según el ámbito de estudio que ocupe su definición y sentido, pero por norma general cuando uno hace referencia al espacio está pensando en algo físico ligado a los objetos que lo ocupan. Iglesias expone que, aun así, cuando entramos en un espacio, por ejemplo, en la escuela, las paredes, el mobiliario, la distribución, la decoración, los materiales, etc. hablan de la vida interior que en ella subyace, las relaciones que se dan entre los infantes y los adultos que los acompañan, sus intereses y motivaciones, su forma de organizarse, etc.

Cuando entramos por primera vez en la casa de alguien podemos descubrir muchas facetas de su personalidad y de su modo de vida simplemente observando cómo es el lugar en el que vive. El tipo de muebles, la decoración, los libros y discos, los cuadros (...) Si todo está escrupulosamente ordenado, midiendo todas las distancias, controlando que todas las combinaciones resulten armoniosas desde la estética "al uso", eso nos dice algo. Si, por el contrario, los elementos se distribuyen en el espacio de un modo original, en función de nuestras preferencias y necesidades, sin ningún orden aparente, creando contrastes que nos llaman la atención pero que reflejan un ambiente "lleno de personalidad", eso nos dice una cosa distinta. (...) De todo ello se puede intuir una sensibilidad estética, espiritual, un modo de concebir la vida y la funcionalidad de los elementos de los cuales nos rodeamos. (...) El ambiente habla, aunque nosotros permanezcamos callados (Battini, 1982, citado en Iglesias, 2009 p. 237).

Por ello, en esta investigación, cuando se hace referencia al diseño de los espacios y sus materiales se contempla siempre como ambiente de aprendizaje (Battini, 1982, en Iglesias, 2009) donde, además de las consideraciones físicas, se integran las relacionales. Los conceptos espacio y ambientes toman este sentido compartido porque, sobre todo, la mirada de esta investigación pretende dar respuestas a la vivencia y experiencia del niño.

Para el niño el espacio es lo que siente, lo que ve, lo que hace en él. Por lo tanto, el espacio es sombra y oscuridad, es grande, grandísimo o, por el contrario, pequeño, es poder correr o tener que estar quieto, es ese sitio donde uno puede ir para mirar, leer, pensar. El espacio es encima, debajo, es tocar o no llegar a tocar, es ruido fuerte, fuerte demasiado a, por el contrario, silencio, es tantos colores, todos juntos

a la vez, o un solo color grande o, ningún color (Battini, 1982, citado en Iglesias, 2009 p. 237).

Anna Lía Galardini en una entrevista de Pujol (2010) explica que los espacios hablan y tienen un lenguaje silencioso pero eficaz que comunica las ideas y los valores de los profesionales que los han preparado. Por ello, destaca que estos están al servicio de la infancia y que han de tener mucha calidad. Además, manifiesta que los espacios de una escuela están directamente relacionados con su proyecto educativo y marcan el tempo y la calidad del juego y aprendizaje de los niños. Abad (2006), también hace referencia a esto y explica que en las escuelas de Reggio Emilia el espacio y el material se consideran un agente educativo más. En relación con este concepto, se ha desarrollado la idea de que el espacio y el material es visto como un “maestro” aliado con los profesionales donde el diálogo entre la pedagogía y la arquitectura es imprescindible (Cavallini et al., 2017). En palabras de Zabalza (2014): “los espacios definen nuestro contexto de vida, nos vinculan a la realidad del aquí y ahora, nos permiten ser más autónomos o nos niegan esa posibilidad, nos acercan o alejan de los demás, nos excitan o nos tranquilizan. Son el fondo sobre el que todo ocurre, pero un fondo que interactúa con el resto de los elementos y los condiciona” (Zabalza, 2014 p. 14).

Para poder diseñar los espacios o ambientes de juego, exploración y manipulación en la Escuela Infantil es necesario partir de algunos conceptos o indicadores que faciliten al profesional poder establecer criterios que le ayuden a seleccionar y disponer los materiales acordes las necesidades que observe en sus alumnos. Por ello, a parte del conocimiento matemático referido y el conocimiento sobre cómo aprenden matemáticas los niños en la Escuela Infantil, descrito anteriormente, es imprescindible el conocimiento sobre cómo se planifican y diseñan los espacios y materiales de la Escuela Infantil.

El diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil corresponde, en parte, a lo que Alsina y Delgado (2021, 2022) denominan conocimiento sobre la planificación y gestión de las actividades. De hecho, a parte de la vida cotidiana que ocupa un 80% del día a día en la escuela y tiene un gran valor educativo, el resto de las propuestas educativas se fundamentan en los espacios de juego, exploración y manipulación, tanto interiores como exteriores. De este modo, se encuentran muchas aportaciones de diferentes autores (Abad, 2006; Alsina, 2006; Alsina, 2015; Amorós y Hortal, 2018; Antón, 2016; Ceppi y Zini, 2009; Bautista, 2010; Bassedas et al., 2006, Borghi, 2019; Ceballos, et al., 2018, Clements y Sarama, 2015; Castro, 2006; de Castro y Quiles, 2014; Decroly, 1965; Edo,

2012, 2016; Froebel, 1913; Geist, 2014, Goldschmied, 1986; Goldschmied y Jackson, 2007; Lee, 2012; Malaguzzi, 2020; Montessori, 1982, Cardo y Vila, 2005; Vecchi, 2013, entre otros) que exponen que el aprendizaje en las primeras edades surge a través de la observación, la exploración, la manipulación y el juego del niño a través de diferentes materiales. Estos autores se suman a muchos otros que explican como la curiosidad innata del niño le lleva a jugar, explorar y manipular sobre el contexto, siendo este el motor de todos sus aprendizajes y destacan la importancia del diseño y calidad de los espacios y materiales. Por ello, manifiestan la importancia de pensar y repensar las propuestas de materiales de juego y exploración con la finalidad de atender las diferentes necesidades de aprendizaje de los niños de investigar, conocer, probar, tantear, descubrir, etc. según su momento evolutivo y su disposición al juego en cada momento.

Un ejemplo de ello es la propuesta de Lee (2012), en la que se presenta al niño como un ser que, de manera innata, tiene muchas ganas de conocer el mundo haciendo de este juego exploratorio (ya en edades muy temprana) su medio para desarrollar la habilidad de resolver problemas cotidianos. Para ello, necesitará experiencias manipulativas que le permitan descubrir cómo funcionan las cosas: lo que son y lo que no son. Así, se convierte en seres capaces de comparar, contrastar y clasificar, desarrollando, poco a poco, la creatividad y la habilidad de razonamiento. En este sentido, expone que para que crezcan cognitivamente y desarrollen destrezas en dominios matemáticos, deben encontrar problemas y tratar de resolverlos. Concretamente, habla de la posibilidad de crear ambientes donde puedan explorar el espacio y los materiales, de forma abierta, durante el tiempo necesario y con el acompañamiento del adulto (Britz, 1993 citado en Lee, 2012).

Moreno (2013) explica que son muchos los materiales pueden utilizarse como un recurso en el proceso de enseñanza/aprendizaje, aunque no todo material cuando se concibe se diseña con este fin. La mayoría de los materiales en Educación Infantil son cotidianos y se adaptan a finalidades pedagógicas o educativas. En este sentido, el papel del profesional parte de su creatividad, imaginación, investigación y experiencia para seleccionar los materiales acordes las necesidades y características de los niños.

Actualmente las escuelas de Reggio Emilia, conocidas mundialmente como de las mejores escuelas de Educación Infantil, se fundamentan metodológicamente la pedagogía de Loris Malaguzzi (Hoyuelos, 2006), que se basa en: las teorías socioconstructivistas de Vygotsky y otros referentes pedagógicos mundialmente conocidos como Dewey, Piaget, Bruner, Rosseauau, Froebel, Pestalozzi y Montessori (citado en Kahn, 2003). De hecho, el

Ministerio de Educación (2011) publica la *Guía para proyectar y construir Escuelas Infantiles* y, posteriormente, la Generalitat de Cataluña (2017) publica el libro *Despertando miradas entorno al espacio escolar*; ambos documentos, fundamentados en la pedagogía de Reggio Emilia como modelo inspirador para el diseño de las Escuelas tanto en sus espacios interiores y exteriores como en sus diferentes propuestas de juego, exploración y manipulación.

En las escuelas de Reggio se parte del concepto de *laboratorio para el aprendizaje* donde los niños, a través del juego, desarrollan procesos de investigación junto con los adultos que los acompañan. Según Malaguzzi (2020), lo más importante de estos procesos es el desarrollo de la creatividad y la libertad de acción, aspecto que se puede vincular al papel del juego libre que expone Froebel (1913), Montessori (1982), Alsina, (2015), Clements y Sarama (2015 o Geist (2014), entre otros.

En esta línea, de Castro (2008) exponen cómo en los diseños de los espacios y materiales se pueden favorecer contenidos matemáticos, pero destacan que la interacción del niño es libre y la actividad infantil no está dirigida. Por ello la importancia de favorecer escenarios de aprendizaje múltiples que den respuesta a las diferentes necesidades de juego y exploración.

En este sentido, encontramos a Goldschmied y Jackson (2007), entre otros, que hablan del educador como el profesional que dispone los materiales al alcance de los niños para que estos desarrollen la actividad siendo, el papel del adulto, el de observar e intervenir cuando sea necesario. La pedagogía de Lóczy, de un modo más purista todavía, también se refiere al profesional como un agente observador de la experiencia del niño que dispone los ambientes de juego y exploración en función el momento evolutivo del niño. Y, sin intervenir, va observando el desarrollo del niño para ir acondicionando, según su evolución, los espacios y materiales (Falk, 2008). Abad (2006) habla de escenarios polivalentes y plosensoriales que se extienden como contexto de relaciones que se construyen y reconstruyen permanentemente y donde las oportunidades de experimentación, encuentro, comunicación y acción configuran el todo alrededor del aprendizaje que emerge en el niño. De este modo, vinculado directamente a las matemáticas informales y toda su conceptualización, se entiende que las matemáticas emergen en los contextos educativos ricos y plurales gracias a las interacciones con los elementos y las relaciones entre estos y gracias a las relaciones y construcciones con los demás integrantes del grupo, infantes y adultos que acompañan dando así una importancia

al ambiente como agente interlocutor (Cavallini et al., 2017) junto a todas las relaciones que surgen entre las personas que lo habitan. Iglesias (2009) explica que en función de cómo estén organizados físicamente los espacios y en función de la selección de los materiales que se dispongan, se va a construir un determinado ambiente para el aprendizaje que condiciona necesariamente la dinámica que se genere y los aprendizajes que se desarrollaran. En esta misma línea, se encuentran diferentes estudios que interpretan estas primeras acciones matemáticas a partir de diseños de espacios y materiales (Acosta y Alsina, 2016; Alsina y León, 2016; Alsina y Martínez, 2016; de Castro, 2011; de Castro y Quiles, 2014, entre otros)

La selección de los materiales es un punto clave que ofrece un espacio rico en contenidos, es estimulante y armónico, y responde a los criterios de diseño de espacios definidos anteriormente (luz, color, naturaleza, polisensorialidad...). De ellos, cabe valorar diferentes aspectos como la confortabilidad, seguridad y multifuncionalidad para que sean de calidad y se ajusten a las necesidades de los más pequeños (Abad, 2006).

Ceppi y Zini (2009) explican que, para cada sentido y sensación, como el olor, tacto, color, luz, sonido..., ha de existir un equilibrio armónico que genere bienestar y no saturación. Por ello, la importancia de seleccionar en función del interés del contenido, los materiales justos y adecuados.

Los materiales, como objetos grandes y pequeños y con una gran cantidad de cualidades que categorizan a partir de las percepciones táctiles, han de ser manejables, plurales y tienen que facilitar la tactilidad y que diferentes las sensaciones. Estas sensaciones tienen que ser lo más naturales posibles. Por ello, los materiales han de ser reales y naturales: maderas, gomas, fibras, papales, metales, resinas... preparados para favorecer las exploraciones sensoriales. Materiales armónicos, de manera que se presenten con un criterio no solamente estético, sino que cuide el decoro para que no se genere el caos. En este sentido, consideran que un aula / escuela debe contener diferentes ambientes que entre todos ellos den respuesta a esta polisensorialidad. No contemplan que un único ambiente responda a una gran cantidad de estímulos sensoriales diferentes en tanto que, como todos los sentidos, el tacto, necesita espacios de escucha y pausa.

Diferentes autores Ceppi y Zini (2009) o Borghi (2019) entre muchos otros, explican la importancia de presentar los diferentes materiales de acuerdo con una serie de

características específicas para que favorezcan el desarrollo global de aptitudes lingüísticas, motrices, emocionales y psicológicas.

Llegados a este punto, una de las principales cuestiones en las que cabe centrarse también es la manera en que se ha de plantear el diseño de los espacios y materiales y bajo qué criterios el profesional ha de guiarse. Y es que, en este sentido, “existe una vinculación clara entre el concepto de infancia que se tenga y la manera de organizar los espacios y materiales” (Martín, 2016, p. 186).

El Departamento de Educación de la Generalitat de Catalunya (2017) a partir de la guía presentada anteriormente, invita a reflexionar sobre los espacios escolares como espacios artísticos y de aprendizaje. Con ella, quiere promover una nueva aproximación sobre cómo y dónde subyacen los procesos de enseñanza y aprendizaje. En esta guía, se describen los fundamentos teóricos y modelos que pueden servir como inspiración y ayuda para la transformación y la mejora de los centros educativos. Siguiendo la pedagogía de Reggio, se destaca que el diseño de los espacios refleja la vida en la escuela y presentan una serie de atributos (Polivalente, Accesible, Polisensorial, Vivencial, Saludable, Comunitario y Estético) como conceptos clave y fundamentales para el diseño de los espacios y los materiales.

Basándose en la literatura referenciada a lo largo de este marco de referencia, a continuación, se presentan los diferentes conceptos clave a modo de indicadores para poder identificar cómo han de ser los diseños de los espacios y materiales de las Escuelas Infantiles.

Polisensorialidad

Según Ceppi y Zini (2009) en su publicación *Niños, espacios y relaciones: metaproyecto de ambientes para la infancia*, obra basada en las Escuelas Infantiles de Reggio Emilia con las aportaciones de autores reconocidos por su larga trayectoria en ellas, como Branzi, Rinaldi, Vecchi, Petrillo, Bruner, entre otros, explican que el concepto polisensorial, es muy recurrente. Malaguzzi lo utilizaba para explicar el diseño de los espacios de las escuelas y la selección de materiales. Este término, según los autores, no responde a la idea de concebir un espacio rico solamente en una gran cantidad de estímulos, sino que debe estar acompañado de valores sensoriales diferentes donde cada uno pueda sintonizar según sus propias características individuales. Espacios plurales que den respuestas a necesidades plurales. Iglesias (2009) explica que el aula ha de estar dividida u organizada

en diferentes zonas de juego y trabajo, que ofrezcan diversidad de opciones. Una diversidad que responda a: la estructuración, la forma de agrupamientos, la posición corporal y el movimiento y el contenido.

De este modo, se considera que la calidad del espacio dependerá de diferentes factores que cabe valorar conjuntamente y que, en cierto modo, se verá condicionado por la subjetividad del que dispone el material y de las observaciones e interpretaciones que desarrolle durante las observaciones en las diferentes sesiones de juego.

La calidad de un ambiente es el resultado de una multiplicidad de factores: influye la forma de los espacios, la organización funcional, el conjunto de las percepciones sensoriales (luz, color, régimen acústico y micro climático, sugerencias táctiles). “La lógica que regula tales percepciones no es invoca. Las preferencias cromáticas, táctiles, olfativas y de luz mutan de individuo en individuo y están muy influenciadas por las diferencias subjetivas, no referibles a valores estándares comunes a todos.” (Ceppi y Zini, 2009, p. 17) (Figura 77).



Figura 77. Aula de 2-3 años. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

Iluminación

Malaguzzi (2020) explica que en las escuelas Reggio Emilia se prima el juego en espacios abiertos e iluminados. Por ello, los edificios tienen grandes cristaleras y ventanales en lugar de paredes para que entre la luz natural. Hall et al. (2014) explican la importancia de esta iluminación natural y de la gestión de la luz (natural y artificial) en las Escuelas de Reggio como valor fundamental para favorecer ambientes que favorecedores de aprendizaje. De hecho, la luz es un elemento más que se ofrece como propuesta de juego y exploración (Figura 78).



Figura 78. Aula 0-1 año. Fuente: EBMV Horta Vermella.

Accesibilidad y Autonomía

En la pedagogía de Reggio Emilia, se defiende que los espacios y materiales sean accesibles y fomenten el trabajo colectivo, con herramientas y materiales siempre al alcance de todos. Con ello, se da lugar a su visión de niño capaz y autónomo, generador de su propio aprendizaje (Malaguzzi, 2020; Rinaldi, 2001, 2009, 2021). De este modo, todo lo que se dispone en un aula es flexible y adaptable a las necesidades de los infantes y debe promover su autonomía (Borghi, 2019). La composición del espacio físico se

concibe acogedor y debe propiciar encuentros, comunicación y relaciones. En esta misma línea, visualizar al niño como un ser capaz, Falk (2008) presentando la pedagogía de Lóczy, Pikler, expone que lo más importante es generar entornos ricos y adaptados a las necesidades de los niños con los materiales disponibles y accesibles para que ellos, de forma independiente sin intervención directa, puedan explorar y accionar con los elementos y su propio cuerpo.

Alsina (2015) explica que “las acciones que realizan los niños en situaciones de exploración del entorno, manipulación, experimentación y juego libre ponen de manifiesto un sinfín de habilidades y actitudes que contribuyen a favorecer el desarrollo de su autonomía” (p. 85). Por ello es imprescindible y necesario que los diseños de espacios, los materiales se dispongan al alcance de los niños.

Así, se desprende que la accesibilidad de los materiales es también un requisito fundamental (Bautista, 2010; Casellas et al., 2016; Cancio, 2005; Goldschmied y Jackson, 2007; Iglesias, 2009; Jubete, 2008; Montessori, 1982; Malaguzzi, 2020; Rinaldi, 2021, entre otros). Se considera que los materiales han de organizarse y estar disponibles para la libre elección de los niños y que han de ser asequibles para que los puedan utilizar de forma autónoma e independiente. Aun así, como expone Iglesias (2009) no todos los materiales han de estar siempre disponibles, cabe valorar en qué momento se encuentra el grupo, las necesidades individuales de los niños y las de toda el aula, como saber escoger que materiales son más propicios para el momento en que se encuentran y sus intereses (Figura 79).



Figura 79. Aula 2-3 años. Fuente: EBMV Caputxins.

Estética y Belleza. Estimulantes y Atractivos.

Cancio (2005) expone que los espacios y materiales tienen que ser atractivos tanto estéticamente como funcionalmente y tienen que llamar la atención del infante e invitarlo a interactuar con él. Iglesias (2009) defiende que es importante que sean sugerentes, que la disposición del espacio se organice según algún criterio lógico (forma color, tamaño, utilidad...) y que tiene que estar estructurado previamente en cuanto a la disposición y a las posibles combinaciones de los objetos y recursos para dar lugar a una propuesta atractiva y provocadora. Bautizta (2010) realza la importancia del carácter motivador de las aulas ya sea por su forma, textura, color u otras características particulares.

En relación con el color, Ceppi y Zini (2009), exponen que escoger materiales con diferentes características cromáticas que se dispongan en un ambiente delicado y sereno es muy significativo. Esto, daría lugar a un ambiente colorido (no saturado) donde los niños podrían contemplar, habitar y manipular ese paisaje cromático.

Hay que destacar que, por lo que refiere al olfato, Ceppi y Zini (2009) manifiestan que a este sentido se le asocian las emociones más profundas y directas siendo es el sentido que se comunica con la parte más antigua del cerebro. La percepción de un olor tiene un poder evocador y es capaz de despertar rápidamente la imagen y el recuerdo de un ambiente. Inevitablemente, los olores se asocian a la identidad de un material. En ese sentido, los ambientes se pueden identificar a través de perfumes, diferentes para cada uno, y pueden cambiar con el tiempo y las ocasiones.

En referencia al sonido, Ceppi y Zini (2009), destacan que los ambientes se pueden definir por sonidos, y según cada persona se pueden percibir como familiares, aunque muchas veces no seamos conscientes de ello. En este sentido, abarcan conceptos muy complejos que ahondan en la geometría del sonido, las dinámicas sonoras, las localizaciones acústicas, la cultura del sonido, etc. dando lugar a una nueva línea de investigación con un amplio ámbito de estudio. Por este motivo se descarta como parte de esta investigación y se excluye del análisis de los espacios y materiales, pero se reconoce la condición indispensable del sonido ya que en la Escuela Infantil también es un generador de bienestar, calidez y armonía. Como exponen Casellas et al. (2016), el tono, la mirada, la postura y el microclima o el ambiente que se genera en la escuela, surgen de la combinación de los elementos, entre ellos el sonido, que han de favorecer la calma. De este modo, se consigue que los niños pueden estar concentrados. Como decía Malaguzzi

(2020) en las escuelas de Reggio, los profesionales deben adaptar el “modo investigación” y hablar en voz baja para no interferir en los diálogos de los niños ni en sus propuestas de exploración y juego.

La estética es también un elemento fundamental. Crear espacios armónicos y bellos que despierten la sensibilidad por la estética es un punto significativo. Tanto la colocación como la calidad de los materiales son imprescindibles. Se disponen con un sentido estético entorno a la luz, el color, el espacio, etc., teniendo en cuenta hasta el mínimo detalle con la finalidad de aportar belleza (Cavallini et al., 2017; Ceppi y Zini, 2009). Diferentes autores hacen referencia a este concepto dando valor al sentido estético como un elemento clave para generar ambientes agradables y cálidos en los que los niños estén a gusto y sientan satisfacción al entrar (Goldschmied y Jackson, 2007). Malaguzzi (2020) habla de la estética entendida como un lenguaje más, que se encuentra y se transfiere entre los cien mil lenguajes que pertenecen a los niños. Casellas et al. (2016) entienden la estética como una activadora de aprendizaje y una fuente directa de bienestar y confort. Para ellas, el sentido estético y bello se despierta gracias a la disposición cuidadosa y ordenada de los espacios y materiales. Según las autoras, la belleza es sinónimo de amor y una manera de demostrar a los más pequeños el gran valor de su actividad. Cuando el profesional habilita el aula y el material cuidando los detalles de su presentación, lo hace como muestra de respeto y estima hacia los niños, que son merecedores de una exquisita presentación. Martín (2016) entiende que la Escuela Infantil tiene que estar estéticamente arreglada para provocar placer sensorial y ofrecer calidad y belleza tanto en el edificio como en el mobiliario o los materiales. Zabalza (2009) presenta la estética y la belleza como una dimensión vinculada a la alta calidad en el diseño de los ambientes educativos (Figura 80).

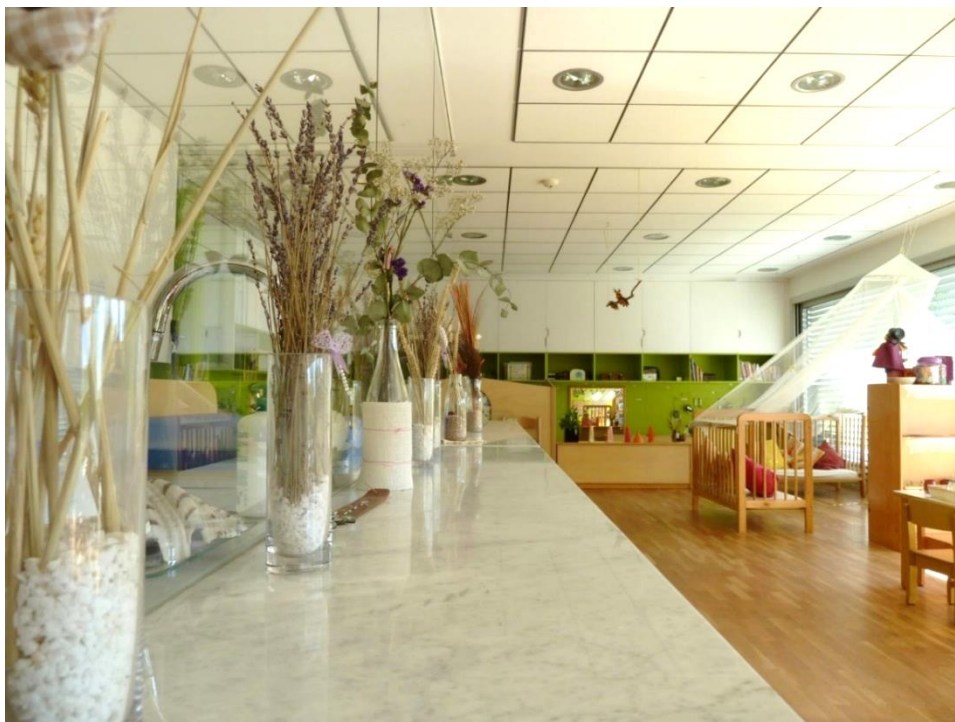


Figura 80. La presentación de los materiales. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

Orden e Intencionalidad

Montessori (1982) fue una de las grandes promotoras del orden como fuente de conocimiento para el niño y establecía el orden como un eje vertebrador del trabajo (juego) del niño en las diferentes propuestas de práctica diaria.

Diferentes autores como Cardo y Vila (2005) o Alsina y León (2018), haciendo referencia a Abad y Ruiz de Velasco (2014) en el contexto de las instalaciones artísticas, exponen que los objetos se presentan organizados para que los niños integren el orden inicial como referencia y les aporte seguridad para moverse e interactuar con el espacio y los objetos al mismo tiempo. Según Casellas et al. (2016), la disposición ordenada mediante la clasificación de los materiales, siguiendo algún criterio específico, genera el orden externo que aporta calma y seguridad a los niños y les ayuda a generar estructuras de pensamiento. En este sentido, los ambientes desordenados son propensos a generar más caos y conflicto entre los niños. A su vez, los ambientes ordenados ayudan a estructurar su pensamiento y a generar las hipótesis sobre los criterios que se han utilizado para ordenarlos. Gracias al orden y la clasificación de los materiales, los espacios adquieren una gran carga de intencionalidad e invitan al niño a jugar y explorarlos.

También, cabe destacar las aportaciones de numerosos autores que recogen la importancia y el valor de la actividad de recoger como sinónimo de ordenar, que realmente en muchas ocasiones hace referencia a la acción de clasificar o aparear según algún criterio. Por ello avalan la idea de que, en las rutinas diarias, después del tiempo de juego, exploración y manipulación, se invierta un tiempo en acompañar a los niños a recoger (Alsina, 2006; Goldschmied y Jackson, 2007; Clements y Sarama, 2015; Jubete, 2008; Vasconcellos, 2009). Aunque la inversión de tiempo es mayor, recogiendo se practica y se abren las puertas a la estructuración del pensamiento matemático y se desarrolla el lenguaje estético del que habla Malaguzzi (2020) (Figura 81).



Figura 81. Presentación del espacio con el material clasificado, ordenado y accesible. Aula de 1-2 años. Fuente EBMV Serra Sanferm

Naturaleza

Otro factor imprescindible en la arquitectura y diseño de los espacios y materiales de las Escuelas Infantiles de Reggio es el contacto con la naturaleza. Galardini (2010) recuerda que los entornos naturales son una fuente de belleza y de exploración donde se esconde una gran riqueza que va vinculada al despertar de emociones incomparables. Ceppi y Zini (2009) explican la importancia de ofrecer a los niños espacios naturales en tanto que despiertan una cantidad intangible de sensaciones, emociones y vivencias muy ricas e

indispensables para la infancia. En este sentido, existen numerosas aportaciones, clásicas y contemporáneas, que hablan de la importancia del contacto con la naturaleza en los espacios exteriores y de las incorporaciones de elementos naturales en los espacios interiores ya que componen la condición natural del niño (Frabboni et al., 1980; Goldschmied y Jackson, 2007; Borghi, 2019; Vila y Cardo, 2005; entre otros). En esta misma línea, se encuentran diferentes autores como Alsina (2015), Clements y Sarama (2015), Edo (2012), Geist (2009, 2014), entre otros, que explican la importancia de ofrecer materiales de calidad y de origen natural que ofrezcan información real sobre sus cualidades y características (Figura 82).



Figura 82. Materiales naturales. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años.

Colectividad e Individualidad

Cavallini et al. (2017) fundamentándose en las aportaciones de grandes referentes arquitectónicos y pedagógicos de la red de Escuelas Infantiles de Reggio (Cagliari et al., 2016; Malaguzzi, 1981; Rinaldi, 2011; Vecchi, 2011; Zini, 2010, entre otros) presentan “Las Arquitecturas de la Educación: El Espacio de lo Posible. La Cultura del Habitar en la Experiencia de las Escuelas Municipales de Educación Infantil de Reggio Emilia”. En este estudio exponen algunas de las principales características de los espacios y ambientes de estas escuelas italianas. Hablan de espacios circulares porque definen el espacio de forma no jerárquica y facilitan la colaboración y el contraste entre todos los participantes. Los espacios son abiertos y se configuran mediante transparencias que promueven a ver las cosas desde diferentes puntos de vista. En otras palabras, favorecen las relaciones dentro del aula, la variación de luces y sombras y permiten tejer un imaginario de formas relacionales entre los más pequeños y los adultos. Estos espacios permiten trabajar de

forma individual tanto con gran grupo como en uno pequeño, en el aula o fuera de ella. Los investigadores presentan el “Atelier” y la “Piazza”, fundamentales en las escuelas de Reggio, y destacan la importancia de todos los espacios por su valor cotidiano: el jardín y la cocina y todos los posibles escenarios de aprendizaje como lo son las mesas, las gradas, las tarimas, los muebles, el suelo... Espacios y superficies que se prestan al aprendizaje de los niños; aprendizajes muy diversos que requieren del acompañamiento desde la sensibilidad estética y calidad.

Bautista (2010) habla de la importancia de los materiales con carácter de colectividad en tanto que puedan tener un uso individual o colectivo. Alsina y León (2018) haciendo referencia a Abad y Ruiz de Velasco (2014) en el contexto de las instalaciones artísticas, explican la posibilidad de ofrecer una gran cantidad de materiales no estructurados que se utilicen por varios niños a la vez. Esta aportación, se refiere a las propuestas que parten de instalaciones artísticas, puede extrapolarse a los diferentes ambientes de un aula donde, como explica Malaguzzi (2020), los infantes puedan traficar, intercambiar, explorar, o manipular los materiales. O como dicen Casellas et al. (2016) que permitan trabajar con todo el grupo, con el grupo reducido o individualmente (Figura 83).



Figura 83. Espacios con diferentes posibilidades de agrupación. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

Transformación

También, Ceppi y Zini (2009), explican que los niños habitan los espacios transformándolos constantemente, construyendo lugares imaginarios y/o reales. Por ello, los espacios y su composición a través de los materiales deben permitir esta flexibilidad y transformación. Deben contemplar la posibilidad de que el niño pueda hacer y deshacer, tantear, investigar y probar mientras se observan los cambios en los diferentes procesos (Alsina, 2015, Clements y Sarama, 2015). En definitiva, un ambiente escolar flexible y transformable, que genere interacción e incentive la cultura de aprendizaje. Por ello, se le da importancia a la polisensorialidad a través de diversos estímulos: olor, sonido, clima, ambiente, luz, color, transparencia y una gran diversidad de materiales. Los ambientes educativos han de facilitar constantemente esta construcción y narración:

El ambiente escolar debe ser flexible en el tiempo y manipulable; también debe mutar, ser modificado por los procesos de autoaprendizaje de los niños y a su vez interactuar con estos procesos y modificarlos. Evolución entonces como condición operativa y cultural del espacio (Ceppi y Zini, 2009 p. 19) (Figura 84).



Figura 84. Espacios polivalentes que se pueden transformar. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.

Dimensión y Ubicación

Alsina y León (2016) hacen referencia a Brousseau (1983) y Gálvez (1985) para determinar tres tipos de espacios en función del tamaño en los que se desarrolla la actividad:

- Microespacio: donde las interacciones están sujetas a ambientes pequeños dentro de un mismo espacio (aula) y donde la manipulación parte de objetos pequeños.
- Mesoespacio: donde aparecen los desplazamientos de los niños y se integra todo el edificio o más de una de sus estancias.
- Macroespacio: alude a aquellos espacios donde los niños no pueden, con los medios “normales” obtener una visión global y simultánea de todo el espacio.

En este sentido, tratando la relación existente entre los lugares donde se ubican los materiales, el juego y la exploración de los niños, Ceppi y Zini (2009), exponen que cualquier lugar es un buen escenario para habilitar los materiales (Cavallini et al., 2017), tanto en vertical como en horizontal. Destacan el suelo como el preferido por los niños. Clements y Sarama (2015) defienden la importancia de los puntos de referencia para situarse en el espacio y la necesidad de partir de entornos reales para avanzar hacia la organización espacial general y la orientación y estructuración espacial en particular. Martín (2016) añade la necesidad de valorar las dimensiones de los espacios y las distancias y hace referencia a la distribución como elemento clave vinculado a los principios pedagógicos que cada proyecto educativo sostiene. Esta idea está muy vinculada al concepto de “plaza para el aprendizaje” de Malaguzzi (2020) que se refiere a la escuela como un gran laboratorio en el que los niños recorren los diferentes espacios investigando en función de sus intereses (Figura 85).



Figura 85. Dimensión y ubicación. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

Adaptabilidad y Polivalencia. Manipulación y Experimentación.

Cancio (2005) define que los espacios y materiales deben ser adecuados al momento evolutivo del niño, adaptados a sus aptitudes, características y necesidades y que potencien y favorezcan la actividad motora, cognitiva, afectiva y social. Además, explica que los materiales tienen que facilitar las posibilidades de acción del niño para que pueda desarrollarse. Por ello, el material ha de ser polivalente y se tiene que poder utilizar en varias propuestas de juego, exploración y manipulación facilitando la descubierta de su multifuncionalidad y sus diversas posibilidades (Bautista, 2010).

Desde esta perspectiva, Alsina (2010, 2016) explica que es necesario partir de contextos de aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos partiendo del juego, la experimentación y la manipulación como la base para el aprendizaje. La selección de materiales debe contemplar estas acciones que deben partir de materiales adecuados en peso, forma, volumen, tamaño, etc. que respondan a las posibilidades de juego, manipulación y exploración de los niños. Ejemplo de ello fueron las famosas propuestas de Goldschmied y Jackson (2007) donde presentaron de manera secuenciada los materiales: primero el cesto de los tesoros para los más pequeños (a partir de los 6

meses, aproximadamente), posteriormente el juego heurístico (a partir de los 12-18 meses, aproximadamente) y finalmente las bandejas de experimentación (a partir de los 24 meses, aproximadamente). Para Edo (2012), estas propuestas de reconocido valor son una muestra de las posibilidades de ofrecer a los niños materiales ricos y variados, acordes a sus intereses y necesidades como también a la exploración y la manipulación que permiten el descubrimiento de las cualidades de los objetos, el reconocimiento de los elementos idénticos y el establecimiento de relaciones entre ellos. Por lo tanto, explica, son imprescindibles en el desarrollo infantil.

Iglesias (2009) habla de la capacidad del profesional de saber escoger en cada momento el material y su disposición adecuada en función del momento, observando e interpretando qué necesidades tienen los niños en función de la diversidad de sus intereses y su momento evolutivo. Además, explica la diferencia que existe entre los diferentes momentos del curso. Por ejemplo, cuando al inicio del curso los infantes se están familiarizando con los espacios y los materiales, o cuando los compañeros y los profesionales a mediados o finales de curso ya se han familiarizado y sienten la comodidad del juego libre y de la exploración y su desarrollo ha sido significativamente creciente. Por ello, tanto los espacios como los materiales han de poder transformarse y adaptarse al contexto y a la realidad que diariamente dibujan los niños. Galardini (2010) expone que cuando un espacio contiene objetos diversos y estimulantes para el juego y estos están bien dispuestos y son de fácil acceso para los niños mayor es su implicación y concentración aprovechando al máximo sus competencias.

Cardo y Vila (2005) explican la importancia de manipular y experimentar entre las distintas necesidades básicas de la primera infancia. Acciones similares, pero con matices diferentes en tanto que se complementan por ser la manipulación la que permite la experimentación.

Alsina y Martínez (2016) explican que es necesario saber elegir con criterio los materiales que se pueden manipular para que generen interés y promuevan el aprendizaje facilitando estos procesos de exploración e investigación. Estos autores toman a los investigadores Decroly (1965), Dienes (1970), Freinet (1968), Mialaret (1984), Montessori (1964), Piaget e Inhelder (2015) como un ejemplo de literatura clásica que avala la importancia de favorecer ambientes con materiales manipulativos.

La revisión de la literatura clásica pone de relieve la importancia histórica de la manipulación de materiales como un aspecto esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La manipulación es una necesidad para la adquisición de conocimientos matemáticos ya que establece los fundamentos que permiten desde la infancia ir construyendo progresivamente los conceptos matemáticos, que son abstractos (Alsina y Martínez 2016 p. 129).

Martín (2016) subraya que los materiales manipulativos son indispensables para la exploración de los niños y que todas las aulas deberían tenerlos integrados. En este sentido, se encuentran diversos autores (Alsina, 2006; Goldschmied y Jackson, 2007; Clements y Sarama, 2015; Edo, 2012; Geist, 2014, entre otros) que presentan propuestas diseñadas para la manipulación y exploración de materiales con sentido matemático.

Cabe destacar que Iglesias (2009) señala también la importancia de tener en cuenta la influencia de la cantidad de los materiales que se disponen; lo importante no es que existan muchos materiales, sino que los materiales de los que se dispongan sean suficientes para desarrollar un juego rico que facilite, en función del interés, el trabajo individual o colectivo. En este sentido, Cardo y Vila (2005) explican que el material debe ser a la medida de los niños, que puedan manipularlo y explorarlo fácilmente (Figura 86).



Figura 86. Ejemplo de las dimensiones del material acorde con el niño. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 0-1 año.

Seguridad

Alsina (2004), Cancio (2005), Ceppi y Zini (2009), Clements y Sarama (2015); Geist (2014), Iglesias (2009); Martín (2016), Borghi (2019), entre otros, hablan de la importancia de que los espacios y los materiales reúnan las normas correspondientes de seguridad, limpieza e higiene, condición indispensable para garantizar el bienestar y la salud de los niños. Por ello, los materiales que se ofrecen y que están al alcance de los más pequeños, aun y siendo de procedencia natural, no pueden representar un peligro. El adulto que acompaña ha de estar presente en la regulación de la actividad (Figura 87).



Figura 87. Espacios seguros con la presencia del educador. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

3.2.3 Algunos diseños de espacios con materiales para la exploración, la manipulación y el juego libre

Diferentes autores como Ceppi y Zini (2009) o Malaguzzi (2020), plantean que los ambientes educativos han de presentarse y orgnaizarse como microespacios delimitados y diferenciados donde los niños pueden descubrir, interactuar, explorar, jugar y compartir libremente. Por ejemplo, describen aulas formadas por entre 4 o 5 microespacios que, conjuntamente, intentan dar una respuesta polisensorial, rica y de calidad. En estas aulas,

los niños circulan libremente seleccionando, según sus intereses, las propuestas que responden a sus necesidades (Abad, 2006; Azkona y Hoyuelos, 2011; Bassedas et al., 2006; de Castro et al., 2009; de Castro y Quiles, 2014; Galardini, 2010; Goldschmied y Jackson, 2007; Edo, 2012; Jubete, 2008; Malaguzzi, 2020; Rinaldi, 2009; entre otros). Algunos ambientes que se pueden encontrar en la Escuela Infantil son:

- Espacios con materiales de exploración
- Espacios de juego heurístico
- Espacios con mesas de experimentación
- Espacios de juego simbólico
- Espacios de movimiento
- Espacios de taller
- Espacios de construcciones
- Espacios con instalaciones artísticas

Espacios con diferentes materiales de exploración

Thió et al. (2016) exponen que, desde muy pequeños y de forma innata y espontánea, los niños pretenden descubrir lo que el mundo les ofrece y tienen interés y curiosidad por lo que les rodea. El niño comienza a explorar libremente, a manipular los objetos, a interactuar con ellos y a combinarlos. Esta idea, como se ha descrito en diferentes ocasiones, viene avalada por diferentes e innumerables investigaciones y aportaciones de diferentes autores clásicos y contemporáneos. Cuando los niños se acercan y escogen un elemento, lo tocan, lo examinan, lo chupan, muerden, lo voltean, lo hacen rodar, lo sostienen, lo tumban, lo golpean o lo tiran están aprendiendo sobre a entender el mundo. Lo experimentan a través de los sentidos: vista, olfato, tacto, gusto y sonido, y, a su vez, están aprendiendo también a pensar en cosas, formando hipótesis y probándolas (Alsina, 2006; Clements y Sarama, 2015; Edo, 2012; Geist, 2014; Goldschmied y Jackson, 2007; Lee, 2012, etc.).

Thió et al. (2016) explican que, en la Escuela Infantil, este proceso se conoce como exploración y, por ello se diseñan espacios con materiales que faciliten dicho término. La exploración, según Cardo y Vila (2005), está vinculada ineludiblemente a la manipulación y se da cuando el niño investiga y desarrolla aptitudes que van más allá de la manipulación

ya que se convierten en un proceso exploratorio o científico. En este sentido, Geist (2014) o Alsina (2015) hablan de la capacidad del niño de construir su pensamiento, estructurar y elaborar ideas a partir de la manipulación, la exploración y el juego. Por ello, es importante ofrecer espacios que conduzcan a la manipulación y a la exploración, y que sean ricos, variados y de alta calidad (Clements y Sarama, 2015).

Thió et al. (2016) explican que existe una progresión del juego de exploración hacia las capacidades perceptivas y de movimiento del niño. Estas autoras, desarrollan una categorización de las fases por donde pasa el desarrollo del juego exploratorio del niño destacando que encontrarse en una fase no significa la superación de la anterior. Por lo tanto, estas fases se consideran la pauta para observar qué tipo de juego exploratorio desarrolla el niño:

- Exploración sensorial.
- Manipulación y observación del comportamiento de los objetos.
- Manipulación para poner en relación unos objetos con otros.
- Experimentación para obtener u observar transformaciones de las cosas.
- Anticipación y creación de expectativas sobre lo que puede ocurrir.
- Expresión de hipótesis y confrontación con las de otros y con los resultados de la experiencia.
- Extracción de conclusiones provisionalmente definitivas.
- Invención de artilugios.

Destacan de esta evolución del juego de exploración, el juego del cesto de los tesoros, el juego heurístico y las bandejas de experimentación introducidas por Goldschmied (1981, 1987). Edo (2012) vincula el cesto de los tesoros a “la primera situación didáctica vinculada a contenidos matemáticos y con un amplio recorrido de aplicación escolar” (p. 73). Del mismo modo que el espacio de exploración, el cesto de los tesoros contiene un conjunto de objetos y materiales muy variados con la finalidad de potenciar los sentidos del tacto, olfato, gusto, oída y visita (Edo, 2012). El cesto de los tesoros es una propuesta de exploración para niños de entre 6 a 10- 12 meses (Alsina, 2006; Edo, 2012; Goldschmied y Jackson, 2007).

Por otro lado, Alsina (2004) presenta los rincones de la naturaleza como propuestas de espacios y ambientes, dando continuidad a la propuesta del cesto de los tesoros. Así, a partir del año aproximadamente, los niños han madurado motrizmente, se desplazan y tienen más fuerza. A lo largo de toda la escolaridad siguen desarrollando las competencias de manipular y explorar objetos y elementos (Alsina 2006, 2015; Geist, 2014).

De este modo, se encuentran diferentes autores que definen los espacios o ambientes de exploración (Alsina, 2006; Edo, 2012; Geist, 2014; Goldschmied y Jackson, 2007; Thió et al., 2016; Cardo y Vila, 2005, entre otros) como muestra la Figura 88, a partir del diseño de espacios con materiales de origen natural, normalmente no estructurados ni comercializados, de diferentes características, ordenados y expuestos al alcance de los niños: objetos naturales (piñas, calabazas secas o grandes, conchas, castañas grandes, piedras de río, piezas de corcho...); objetos de madera (cajas pequeñas, cilindros, cuentas de colores, anillas, huevos, cuencos....); objetos de materiales naturales (ovillos de lana, cestos de diferentes tamaños...); objetos de metal (moldes, anillas, botes, tazas...); objetos de ropa (telas, pelotas, anillas...). Mediante la exploración y la manipulación de estos materiales, el niño puede descubrir de que están hechos, como son los mismos (Geist, 2014; Goldschmied y Jackson, 2007), que cualidades sensoriales tienen, las cantidades, las magnitudes, las posiciones y las formas mientras identifican, agrupan, aparean, clasifican, etc. (Alsina, 2006, 2015).

Las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños en los espacios de exploración están vinculadas a las capacidades de identificar, relacionar y observar cambios en las cualidades sensoriales, las posiciones y las formas, en los números y las operaciones y en los atributos mensurables (Alsina, 2015).



Figura 88. Espacio de exploración. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula 2-3 años.

Espacios de juego heurístico

El juego heurístico forma parte de las propuestas de exploración que se presentan con un diseño específico del material a diferencia del espacio de exploración y del cesto de los tesoros. Se considera como la continuación natural del cesto de los tesoros. Esta propuesta de juego y exploración es una actividad destinada especialmente a los niños de uno a dos años (Alsina, 2006; Goldschmied y Jackson, 2007; Edo, 2012,).

El juego heurístico, como presenta la Figura 89, permite experimentar con diferentes objetos. El reto es descubrir qué pueden hacer con los diferentes elementos desarrollando acciones como poner, sacar, vaciar, llenar, tapar, destapar, encajar, alinear, estirar, agrupar, desagrupar, colgar, descolgar... Según Goldschmied y Jackson (2007) para garantizar un juego de calidad hay que disponer de tiempo y espacio suficientes y garantizar una variedad de mínimo 15 materiales diferentes. En este caso, los objetos han de ser fácilmente combinables entre ellos y manipulables. De nuevo, se encuentran elementos naturales, de metal, de madera, de ropa como, por ejemplo: potes, tapones de corcho, tapas, trozos de cadenas, pelotas pequeñas, cintas, cuerdas, envases, anillas, boles, trozos de mangueras, rulos...

El juego heurístico, según las aportaciones de autores como Alsina (2004, 2015), Goldschmied y Jackson (2007) y Edo (2012) entre otros, consta de tres fases:

- En la primera fase, el adulto selecciona los materiales más adecuados y los tiene clasificados en bolsas o cajas para guardarlos clasificados. Los dispone en el espacio de juego agrupando una selección (la que considere más adecuada para el momento y en función de las necesidades y características que los niños) y crea tantos microespacios como infantes vayan a desarrollar el juego.
- La segunda fase consiste en que los niños exploren los distintos materiales y empiecen a descubrir todas sus cualidades, pudiendo manipular, apilar, rodar, moldear, emparejar, y un sinfín de posibilidades que les ofrecen. En esta fase el adulto observa e interviene en momentos precisos para gestionar los posibles conflictos que puedan surgir, cubrir las necesidades de los niños que puedan aparecer o apoyar sus hazañas con el lenguaje.
- La tercera fase, también muy importante, es la recogida de material que hace que se facilite la clasificación de los materiales en las bolsas o cajas donde se guardan. En esta fase el adulto debe servir de guía, acompañando y nombrando la tarea de recoger y clasificar.

Las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños en los espacios de juego heurístico están vinculadas a capacidades como identificar, relacionar y observar cambios en las cualidades sensoriales, las posiciones y las formas, en los números y las operaciones y en los atributos mensurables (Alsina, 2015).



Figura 89. Espacio de juego heurístico. Fuente: EBMV Caputxins. Aula de 0-1 años.

Espacios con mesas de experimentación

Los espacios con mesas de experimentación proporcionan un lugar acotado donde los niños pueden explorar con libertad los diferentes materiales que se les dispone. Para Edo (2012), esta es la continuidad de las propuestas de exploración del cesto de los tesoros y el juego heurístico. Se consideran mesas de experimentación científicas (Vega, 2006) donde se generan hipótesis que se observan y comprueban. Se presentan los diferentes elementos ordenados y sin mezclar para que sean los niños que observen las reacciones y la relaciones entre los elementos. Además, se facilitan diferentes utensilios para desarrollar acciones de diferente índole. La finalidad es hacer hipótesis y comprobar, a partir del material inespecífico, normalmente un material continuo, que se dispone dentro de una bandeja como, por ejemplo: arena de playa, agua, serrín, pan rallado, harina, arroz, chocolate en polvo, pasta de sopa, lentejas, pechinas, hojas secas triturada, piel de naranja o limón triturados, maíz, arena, etc. junto con los diferentes contenedores y utensilios para favorecer la experimentación: recipientes, cucharillas, espátulas, tubos de ensayo, goteros... (Alsina, 2006; 2015; Edo, 2012; Goldschmied y Jackson, 2007; Cardo y Vila, 2005), como muestra la Figura 90.

Las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños en los espacios de juego a partir de las mesas de experimentación están vinculadas a capacidades como identificar, relacionar y observar cambios en las cualidades sensoriales, las posiciones y las formas, en los números y las operaciones y en los atributos mensurables (Alsina, 2015).



Figura 90. Mesa de experimentación. Fuente: EBMV Serra Sanferm. Aula 2-3 años.

Espacios de juego simbólico

Ruiz y Abad (2019) explican que previamente al juego simbólico tiene lugar el juego pre-simbólico. Es una fase anterior, vinculado al movimiento y acciones como esconderse, envolverse, perseguirse, reunir y destruir. Lee (2012) explica que a los 2-3 años es cuando, aproximadamente, aparece el juego simbólico e imaginativo porque los niños comienzan a imitar sus propias acciones y las de los que están a su alrededor y comienzan a plantearse situaciones problemáticas en las que deben hacer elecciones razonables y lógicas en lo que respecta a los roles, los recursos y a las acciones que desarrollan. Ruiz y Abad (2019) explican el juego simbólico como la representación del mundo real a través del juego en el que los objetos no tienen la función original para la que fueron creados y pasan adquirir nuevos usos. La mayor finalidad es la socialización, la expresión de todo lo que pasa en su mundo interno vinculado al contexto. La psicomotricidad y el simbolismo están sumamente ligados en este juego. Al principio el juego simbólico surge de forma

individual utilizando por ejemplo un bloque de madera como teléfono y, poco a poco según su maduración y evolución, aparecerán las relaciones y complicidades de juego.

Para los diferentes espacios de juego simbólico no es necesario un gran atrezzo. Apelan a la imaginación del niño y proponen materiales cotidianos con los que suscitar a la imaginación. Para ello, presentan las instalaciones artísticas que se definen a continuación como una propuesta específica.

De este modo, los ambientes o espacios de juego simbólico reproducen situaciones cotidianas del hogar o de la vida práctica: la cocinita, la zona de baño para las muñecas y cambiador de ropa, una tienda de alimentos o un taller mecánico, entre otros (Goldschmied y Jackson, 2007; Borghi, 2019) como muestra la Figura 91. Estos espacios han de ser diversos y ofrecer complementos para favorecer una propuesta rica de juego como escenario donde, a través del movimiento, el juego libre, la expresión y comunicación, reproduzcan simbólicamente e imiten situaciones cotidianas como cocinar, dar de comer, bañar, vestir los muñecos o a sí mismos y a sus compañeros de juego. Ello permite desarrollar las capacidades de identificar, relacionar y observar cambios en las cualidades, cantidades, posiciones, formas y atributos mensurables (Alsina, 2004).



Figura 91. Cocinita. Fuente: EBMV Horta Vermella. Aula de 2-3 años.

Espacios con instalaciones artísticas

Las instalaciones artísticas, según Ruiz y Abad (2019) propician acciones que se enfocan desde dos conceptos clave: el espacio y la reutilización de objetos. Parten de la preparación intencionada de escenarios de juego con objetos no estructurados y/o de desecho. Se inspiran en el arte contemporáneo donde el juego deviene del arte y el arte es un juego. De este modo, se convierten en ambientes lúdicos que proponen ir más allá de lo que se considera estrictamente manipulativo, perceptivo o sensorial. Por ello, las presentan como una propuesta de juego simbólico a los 2-3 años, aproximadamente y pre-simbólico, de 1 a 2 años, donde los niños evocan las emociones expresándose a partir del arte, de su interior. Estos espacios, como se presentan en la Figura 92, se inspiran en la Land Art de arte contemporáneo, que se basa en la creación de obras en plena naturaleza, utilizando (casi siempre) los materiales que encontramos en ella (palos, piedras, etc.) y en la fundamentación pedagógica inspirada en la práctica psicomotriz Aucouturier. Una nueva forma de vincular el movimiento con el arte, la expresión y las relaciones a través del juego libre y simbólico o presimbólico (Ruiz y Abad, 2016).

Las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños en los espacios con instalaciones artísticas (Land Art) están vinculadas a las capacidades de identificar, relacionar y observar cambios en las cualidades sensoriales, las posiciones y las formas, en los números y las operaciones y en los atributos mensurables (Alsina, 2015).



Figura 92. Land Art. Fuente: EBMV Horta Vermella. Espacio exterior.

Espacios de movimiento

Como se ha descrito a lo largo del capítulo, junto con el juego libre, la experimentación y a manipulación, el movimiento es imprescindible para el desarrollo físico, emocional, relacional y está vinculado a la adquisición de muchas áreas de aprendizaje como la lectura, las matemáticas y al desarrollo cognitivo (Bassedas et al., 2006; Herrero, 2020; Pikler, 2018, entre muchos otros).

Los espacios de movimiento (Figura 93) incorporados en las aulas, en las salas polivalentes o de psicomotricidad o en los exteriores están diseñados específicamente como retos a conquistar con todo el cuerpo, como pueden ser rampas y toboganes, cajones de diferentes tamaños para subirse encima o ponerse dentro, túneles donde esconderse, bloques gigantes donde subirse o intentar arrastrar, hamacas o columpios para balancearse, colchonetas donde tumbarse y rodar, gatear y arrastrarse, pelotas gigantes y pelotas pequeñas, telas de diferentes tamaños y colores, puentes y cilindros, bancos, espalderas o estructuras donde trepar, etc. (Thió et al., 2016).



Figura 93. Espacios de movimiento. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 1-2 años.

Alsina (2015) explica que la habilidad motriz es una práctica que garantiza, junto con el juego, la exploración y la manipulación, el acceso a las primeras ideas matemáticas intuitivas e informales. De este modo, señala que vivir y experimentar con todo el cuerpo los diferentes materiales y espacios es imprescindible. En este sentido, Herrero (2020) expresa la vinculación entre el cuerpo, la emoción y la actividad cognitiva en la que el movimiento es el mecanismo y hace posible el engranaje del desarrollo humano, destacando, el primer ciclo educativo 0-3, como el más significativo.

Más que nunca, en ninguna otra etapa de la vida, este período se caracteriza por la globalidad. Esta indisolubilidad de la vinculación entre el cuerpo, la emoción y la actividad cognitiva en la estructuración de la personalidad del individuo va a ser el punto de partida para la intervención psicomotriz, como técnica que actúa para favorecer el desarrollo de todas las potencialidades del sujeto. La única vía para hacerlo es utilizar el cuerpo, la acción, el movimiento, como instrumentos de relación del sujeto consigo mismo, con las otras personas, y con su entorno. El acto motor se convierte en un recurso adaptativo en la interacción del sujeto con su medio. El cuerpo es el medio de comunicación, el instrumento por el que nos

expresamos, y a través de él, de su acción sobre el medio, el niño va a poder acceder a la representación mental de la experiencia, a la progresiva internalización del mundo externo, proceso que se inicia en esta etapa de inteligencia sensoriomotora (Herrero, 2020, p. 88).

De hecho, como señalan Bassedas et al. (2006), al largo de los primeros años de vida existen numerosos cambios en el desarrollo del movimiento. Los niños, durante los primeros meses de vida y de forma completamente dependiente, producen movimientos descontrolados y descoordinados. En su desarrollo, van adquiriendo cada vez más autonomía e independencia en el movimiento, siendo éste cada vez más coordinado, sofisticado, preciso y complejo. Durante los primeros meses, sus reflejos involuntarios van desapareciendo y se convierten en acciones cada vez más controladas (Goddard, 2017). A lo largo del primer año, van precisando los movimientos del cuerpo y desarrollando la habilidad motriz que les permite coger con las manos y explorar los objetos, y su propio cuerpo. A medida que van creciendo, van desarrollando las habilidades de cambiar sus posturas, sentarse, desplazarse por medio del gato y explorar, así, su entorno.

Por ello, están vinculadas a los contenidos relacionados con las posiciones y a formas a las capacidades de: identificar, relacionar y observar cambios en las cualidades sensoriales, en los números y las operaciones y en los atributos mensurables surgen gracias a las acciones y al movimiento del niño en interacción con los objetos, su propio cuerpo y el medio (Alsina, 2015).

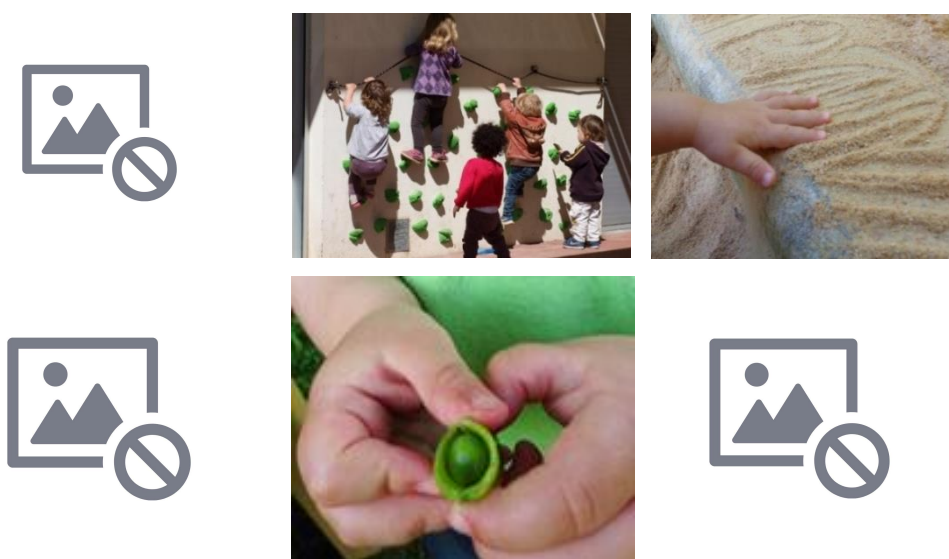


Figura 94. Experiencias en movimiento. Fuente: EBMV Caputxins. Aulas de 0-1, 1-2 y 2-3 años.

Espacios de taller

Hoyuelos (2020) explica que Loris Malaguzzi, a finales de la década de 1960, inventó el taller en las Escuelas Infantiles de Reggio Emilia. Para Malaguzzi, explica Hoyuelos, el concepto de taller era bastante más amplio de lo que corresponde a las propuestas plásticas. De hecho, lo consideró como un espacio destinado a romper con la cotidianidad pedagógica de las escuelas y como metáfora de la complementariedad de los cien lenguajes de los niños.

Borghi (2019) explica que el taller se configura como un contexto cultural en el que los niños utilizan instrumentos que favorecen la percepción y la organización del pensamiento y donde, los lenguajes, la expresión, es el vehículo de la interpretación de la experiencia.

Ruozzi (2011) relata que en las Escuelas Maternales (0-3) de Reggio Emilia se constituye el taller como la posibilidad de ofrecer a los niños de la Escuela Infantil nuevos procedimientos y situaciones diferentes a las vivencias y experiencias que tienen los niños con sus familias, en tanto que se ofrecen materiales y técnicas específicas de un taller de creación e investigación. Por ello, cada “Escuela Maternal dispone de un taller-laboratorio donde desarrollar actividades expresivas, perceptivas, gráficas, pictóricas y plásticas” (p. 39).

Hoyuelos (2020) y Vecchi (2013) presentan el taller como un espacio en el que los materiales plásticos tradicionales como la arcilla, la pasta de sal, las ceras, la témpera, los lápices, el agua... se fusionaban con otras formas y lenguajes tomando una dimensión innovadora e investigadora. Este concepto de taller requiere que responda de manera natural, a la contemporaneidad del momento. Por ello, las tecnologías y sus infinitas posibilidades, a través de un ordenador, cámaras, microscopios digitales, proyectores de luz, vídeo cámaras o cámaras de fotografía, impresoras... junto con las tradicionales propuestas de taller de plástica (pintura, arcilla, acuarela, papel, cartón...), se constituyen como la oportunidad de generar nuevas propuestas acorde con la cultura actual, estableciendo nuevos contextos de aprendizaje con nuevos lenguajes. De modo que, se presenta el taller como un espacio pensado con cuidado y sensibilidad estética, organizado en base a diferentes centros de interés y con la presencia de diferentes propuestas a partir de varios materiales, instrumentos y dispositivos tecnológicos para observar y crear imágenes (Palandri, 2010; Vecchi, 2013).

En esta línea, Malaguzzi expresaba:

El taller parte de un diseño complejo, un lugar añadido en el que deben profundizar y ejercitar la mano y la mente, afinar la vista, la aplicación gráfica y pictórica, sensibilizar el buen gusto y el sentido tético, realizar proyectos complementarios de las actividades disciplinarias de la clase, buscar motivaciones y teorías de los niños bajo la simulación, ofrecer una variada gama de instrumentos, técnicas y materiales de trabajo, favorecer argumentaciones lógicas y creativas, familiarizarse con las semejanzas y diferencias de los lenguajes verbales y no verbales (Catini, 2011, p. 87).

Así, como se observa en la Figura 95, los talleres o *ateliers* son espacios con diferentes soportes para la creación. Por ejemplo: mesas, caballitos de pintura de madera o de metacrilato (para ver la translucidez de los materiales), soportes gigantes en horizontal o vertical para trazar líneas o dibujos en gran formato y en diferentes posiciones, el mismo suelo, la luz, los materiales diversificados y múltiples utensilios, como pinturas de diferentes composiciones y diferentes colores para pintar con los dedos o con pincel, barro (blanco, negro y marrón), papeles de diferentes tamaños, colores y texturas, cartones, cartulinas, ceras duras, ceras blandas, tizas, rotuladores y pinceles de diferentes grosores, elementos para incrustar, moldear, recortar, sesgar... (Borghini, 2005; Riera et al., 2014; Vecchi, 2013). En estos espacios, los niños pueden experimentar con el mayor número de elementos posibles, creando y formulando hipótesis e investigando sobre las diferentes posibilidades de creación, aproximándoles al despertar de los sentidos.



Figura 95. Taller. Fuente: EBMV Horta Vermella.

Los espacios de construcciones

El juego de construcción con bloques de madera está considerado como un juego de exploración y manipulación adecuado para el desarrollo de los niños de 2 a 6 años (de Castro, 2011). En la literatura infantil, expone de Castro (2011), aparece frecuentemente el juego de construcción como fuente para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los niños. Bonàs (2010) explica que construir es una acción que permite hacer, formar, crear y recrear alguna cosa, avanzando, creciendo.

Por ello, se encuentran diferentes autores (Arnáiz, y Camps, 2005; Bonàs, 2010; de Castro, Barredo y González, 2011; Chalufour y Worth, 2004; Clements y Sarama, 2015; de Castro y Escorial, 2006; Gura, 1992; Hirsch, 1996; Kamii, Miyakawa y Kato, 2004; Kersh, Casey y Young; 2008; Majón- Cabeza, 2019; Michelet, 1977; Miyakawa y Nagahiro, 2005, entre otros) que, siguiendo y evolucionando los diseños de Froebel, desarrollan e impulsan propuestas de juego a partir de las construcciones.

Estos espacios, en su variante clásica y originaria, están formados por una gran cantidad de piezas de madera lisas y de formas geométricas regulares, clasificadas según un criterio específico como puede ser la forma o con alguna composición elaborada por el adulto o de un juego iniciado. Existe la posibilidad de presentar piezas grandes para fomentar las construcciones colaborativas o piezas pequeñas que fomentan más el juego individual (Arnaiz y Camps, 2005, Bonàs 2010). Bonàs (2010) explica que al principio suelen jugar de manera individual, pero finalmente suelen buscar la interacción a partir del juego colectivo donde construyen conjuntamente.

Una de las características fundamentales es que, normalmente, aunque se presentan variaciones según los intereses del profesional que diseña el espacio, todas las piezas del material (menos la más pequeña) pueden componerse utilizando otras piezas más pequeñas del propio material (de Castro, 2011; Olmos y Alsina 2021). De Castro y Escorial (2006) consideran que los niños de dos años necesitan piezas sencillas como pilares y Tablas cuadradas pesadas y grandes con el fin de dar estabilidad a la construcción (Figura 96).

de Castro, et al. (2011) explican que el juego de las construcciones contiene diferentes fases: transporte, apilamientos, puentes, cerramientos, patrones y simetrías, representación. Con estas acciones, se desarrollan aspectos relacionados con las repeticiones, la equivalencia, las posiciones relativas de una pieza con respecto a las

contiguas y la composición y descomposición de las formas constituyéndose como una actividad fundamental para el sentido espacial y la formas.

Los apilamientos, que pueden ser verticales u horizontales, corresponden a las acciones de los niños de poner una pieza sobre las otras reiteradas veces. En primer lugar, tienden a añadir siempre una pieza más y, cuando se les acaban buscan nuevas piezas, aunque sean diferentes, para seguir construyendo (de Castro, 2011). En este sentido, su interés es dar continuidad repitiendo la acción de añadir una más sin fijarse específicamente en la forma de la construcción (Miyakawa y Nagahiro, 2005)

Una vez conquistados los apilamientos, el juego de los niños evoluciona con la aparición de los puentes. Con ellos, aparecen las simetrías y el juego del equilibrio avanza todavía más. La simetría puede aparecer a partir de los 2 años aproximadamente de manera muy intuitiva (Castro y Quiles, 2014). Posteriormente, los cerramientos son el siguiente estadio de evolución del juego que surge después de haber conquistado los apilamientos y los puentes (Castro, 2011).

La fase representativa corresponde al momento en que, al final del juego o durante, con el acompañamiento del profesional, verbalizan lo que han hecho, en este sentido, es recomendable que le pongan nombre a lo que han estado construyendo (Arnaiz y Camps, 2005).

de Castro (2011) defiende que el papel del profesional que acompaña es clave en tanto que sus intervenciones pueden enriquecer el juego de construcción. Éste tiene la responsabilidad de valorar la idoneidad de su intervención valorando las diferentes posibilidades:

- Construir proponiendo modelos para los niños
- Construir jugando con los niños y dar ideas
- Plantear retos, problemas y proporcionar materiales complementarios (fotografías, libros, cuentos)

Arnaiz y Camps (2005) explica que las intervenciones del maestro o la maestra están directamente vinculadas al ciclo educativo donde se desarrolla la actividad poniendo de ejemplo la posibilidad de evitar ciertas caídas o gestionar el clima del grupo. De Castro et al. (2011) hablan de la importancia de dar ejemplo porqué, con frecuencia, tienden a transportar los materiales. En este sentido, apelan a la intervención en tanto que van a surgir ciertos conflictos que no van a ser capaces de solucionar ellos mismos. El maestro

tiene que estar presente para poder analizar las construcciones infantiles y ofrecer los apoyos necesarios para adecuar el material que les ofrece (Clements y Sarama, 2015).



Figura 96. Espacio de construcciones. Fuente: EBMV Caputxins. Aula 2-3 años

3.2.4 La oralidad en el primer ciclo de Educación Infantil: algunas consideraciones fundamentales

Galardini (2010) expone que los adultos que acompañan a los niños en la Escuela Infantil tienen la responsabilidad de producir condiciones de aprendizaje organizando los espacios y materiales mediando con los niños, recogiendo sus aportaciones e invitaciones para seguir produciendo nuevos escenarios de aprendizaje estimulantes y facilitadores de conocimiento en función de los intereses de estos.

De hecho, Malaguzzi (2020) presenta la metáfora de la escuela como un gran laboratorio para el aprendizaje donde, simulando una plaza, se disponen diferentes ambientes bien estructurados, ricos, variados y polisensoriales, que dan respuesta a las diferentes necesidades de juego, exploración, relación, seguridad, intimidad, manipulación, movimiento, etc. (Casellas et al. 2016). Una vez diseñados y ubicados en estos escenarios para el aprendizaje, destaca al profesional como un observador con sabiduría dialógica (Hoyuelos, 2011). El profesional conoce la forma de proponer experiencias que cuadran

con la complejidad de las capacidades infantiles y que sabe respetar los tiempos de los niños. De esta forma, puede hacerlos dueños subjetivos de sus propios ritmos de aprendizaje.

También, cabe destacar que las Escuelas de Reggio Emilia parten del concepto *escucha* como una forma activa que da valor al mensaje que transmiten todos los niños. Por ello, los profesionales registran con fotos o vídeos y tomando notas lo que los niños producen y procuran hacer preguntas reflexivas para que los niños puedan elaborar sus propios pensamientos (Malaguzzi 2020). De este modo, se necesitan profesionales que conozcan el contenido (Alsina, 2015) y que observen documenten y recojan las acciones de los niños como medio para poder analizar y reflexionar sobre los posibles nuevos retos que ofrecerá a los niños (Acosta y Alsina, 2015; Hoyuelos, 2006, Malaguzzi 2020).

En este sentido, no se puede obviar que el papel del educador en el diseño de los espacios y materiales es importante y clave para los objetivos vinculados a las necesidades de juego, exploración, manipulación, aprendizaje y relación de los niños. Aun así, durante el desarrollo de la actividad, también es fundamental su presencia como observador activo, escuchando y documentando las acciones para interpretarlas (Rinaldi, 2001; Malaguzzi, 2020) y favoreciendo la presencia del lenguaje en tanto este es una pieza clave en este ciclo educativo, donde se va construyendo el pensamiento y la capacidad de decodificar la realidad y la propia experiencia (Zabalza, 2009). Godino, et al. (2015) exponen la necesidad de encontrar el equilibrio perfecto entre las teorías que postulan sobre el aprendizaje de las matemáticas, basado en la construcción del alumno en el que el profesor tiene mayormente un papel de facilitador, y las teorías en un extremo opuesto que sitúan el papel del profesor como protagonista, transmisor del conocimiento. Este punto intermedio se basa en la necesidad de reconocer la dialéctica compleja entre la indagación por parte del estudiante y la transmisión del conocimiento matemático por parte del profesor.

Alsina (2015), sobre el contexto de la Educación Infantil, presenta la necesidad de que los profesionales acompañen a los alumnos formulando buenas preguntas como si fuesen andamios que fundamenten nuevos aprendizajes y faciliten múltiples conexiones. Así, la escuela se compara con una obra en construcción (Malaguzzi, 2020) que está viva y que diariamente ofrece nuevas posibilidades y oportunidades de aprendizaje a través de sus contextos y relaciones.

3.2.5 Los conocimientos sobre las orientaciones curriculares (C-OCU)

Alsina y Delgado (2021, 2022) exponen que los conocimientos sobre el currículo incluyen de manera indisoluble al proceso de enseñanza y aprendizaje tres aspectos fundamentales: el conocimiento sobre las bases psicopedagógicas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, la organización de la Educación Infantil por áreas en lugar de asignaturas (conocimiento de uno mismo y autonomía personal, conocimiento del entorno y comunicación y lenguajes) y la evaluación (inicial y formativa). Además, añaden, consideran imprescindible que los profesionales tengan conocimientos de los estándares de contenidos matemáticos que deberían aprender los niños de acuerdo con lo propuesto por organismos nacionales e internacionales. En este sentido, de Castro (2016) y Margolinas (2014) plantean la necesidad de dar visibilidad a todos los contenidos curriculares referentes a las matemáticas informales en tanto su invisibilidad es un obstáculo en la práctica educativa.

De esta manera, se destaca como imprescindible que los profesionales conozcan los contenidos curriculares y, además, los entiendan como un ente interconectado siguiendo el Principio de Interconexión propuesto por Freudenthal (1991) en tanto que, los bloques de contenido matemático no pueden ser tratados como entidades separadas (Alsina, 2009). Las matemáticas no son una colección fragmentada de bloques de contenido, aunque con frecuencia se dividen y presentan así. Por el contrario, constituyen un campo integrado de conocimiento y, desde este marco, el profesorado (y progresivamente el alumnado) tendría que reconocer la misma estructura matemática en contenidos aparentemente diferentes. En el paralelismo entre los diferentes bloques de contenido matemático que se presenta en Alsina (2004), se expone que hay unas mismas capacidades matemáticas que se repiten: identificar (definir o reconocer); relacionar (comparar); y operar (transformar), lo único que varía es el tipo de contenido: cualidades sensoriales, cantidades, posiciones y formas, atributos mensurables (Alsina, 2004). Además, existen numerosas relaciones entre los diferentes bloques de contenido que aparecen de forma interconectada en las diferentes propuestas de juego y exploración.

Este estudio parte de la ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil. Se trata de la

orden vigente que determinaba las orientaciones curriculares que se aplicaban cuando se desarrolló esta investigación.

A continuación, en la Tabla 7, se identifican los contenidos curriculares que aparecen vinculados a las matemáticas intuitivas e informales.

Tabla 7. Contenidos vinculados a las matemáticas intuitivas e informales.

Orden ECI/3960/2007 en ciclo 0-3.	Currículum de Educación Infantil de Cataluña (2012).
Área 1. Conocimiento de sí mismo y autonomía personal.	Área 1. Conocimiento de uno mismo y de los demás.
Reconocimiento de la imagen propia y de los otros. Identificación de sí mismo, de su nombre y de objetos personales, a través de rótulos, fotografías, juegos de esconderse y aparecer, de espejos o de canciones (p.9)	Identificación como persona, conocimiento de algunas características personales propias para alcanzar el grado de seguridad afectiva y emocional correspondiente a su momento madurativo (p. 52).
Identificación y expresión de emociones básicas propias y ajenas, como alegría o miedo, iniciando actitudes de empatía para aprender, con ayuda, a vivir juntos (p.9).	Descubrimiento e identificación de las propias necesidades fisiológicas (gana, sed, sueño, etc.) mostrando un control progresivo de las mismas (p. 52).
Exploración e identificación de algunas partes del propio cuerpo y del de los demás, señalándolas y nombrándolas en juegos y actividades cotidianas como vestirse, desvestirse, aseo personal, reconociendo algunas características propias y consiguiendo progresiva competencia (p.9)	Dominio progresivo del control y de la coordinación óculo-manual, así como de las habilidades manipulativas necesarias para explorar objetos y para ser cada vez más activo y autónomo en las diferentes situaciones cotidianas (vestirse, ponerse los zapatos, etc.) (p. 52).
Percepciones sensoriales diversas: visuales, táctiles, auditivas..., en situaciones educativas cotidianas como juegos, corros, comidas o aseos. Expresión de preferencias (p.9).	Dominio progresivo de las posibilidades expresivas, perceptivas y motoras del propio cuerpo y utilización de los recursos personales de que dispone en la vida cotidiana. (p. 52).
Exploración y toma de conciencia de sus posibilidades, intereses y limitaciones motrices en actividades como gatear, andar, subir y bajar, saltar, deslizarse o rodar, disfrutando con sus logros (p.10).	Progreso en el dominio de la coordinación y el control dinámico del cuerpo, aumentando su autonomía en los desplazamientos, en el uso de los objetos y en la orientación en el espacio cotidiano. (p. 52).
Adaptación progresiva del tono, equilibrio y coordinación de movimientos a las características de los objetos que se le ofrecen y a diferentes acciones como chupar, golpear, apretar, enroscar, encajar, juntar o pedalear, mostrando iniciativa y curiosidad por aprender nuevas habilidades (p.10).	
Participación en actividades de imitación de acciones de la vida cotidiana y de juego simbólico, disfrutando con ellas y desarrollando la capacidad de organización y anticipación de la acción (p. 10).	
Área 2. Conocimiento del entorno.	Área 2. Descubrimiento del entorno.
Exploración y observación de objetos y materiales presentes en el medio a través de la realización de acciones como acariciar, golpear, recoger, arrastrar, enroscar, abrir, soplar..., verbalizando los	Orientación con autonomía en los espacios habituales y cotidianos e iniciación en el uso de términos relativos al espacio (aquí, allá, dentro, fuera, arriba, abajo) (p. 55).

procesos al descubrir sensaciones, características y utilidades (p. 15).

Anticipación de algunos efectos de sus acciones sobre objetos, animales o plantas, mostrando interés por su cuidado y evitando situaciones de riesgo (p. 15).

Interés por la indagación sobre elementos y materias (agua, arena...), descubriendo algunos de sus atributos y cualidades como frío, caliente, seco, mojado, grande o pequeño. Establecimiento de algunas semejanzas y diferencias. Clasificaciones atendiendo a un criterio y ordenaciones de dos o tres elementos por tamaño (p. 15).

Realización de acciones sobre elementos y colecciones como juntar, distribuir, hacer correspondencias y contar elementos, aproximándose a la cuantificación no numérica (muchos, pocos, algunos) y numérica (uno, dos y tres), manifestando satisfacción por los logros conseguidos (p. 15).

Anticipación de algunas rutinas o actividades diarias experimentando las primeras vivencias del tiempo (como hora de comer o del patio) y estimación intuitiva de su duración (p. 15).

Reconocimiento y verbalización de algunas nociones espaciales básicas como abierto, cerrado, dentro, fuera, arriba, abajo, interior y exterior (p. 15).

Interés por observar los elementos de la naturaleza (tierra, agua, nubes, etc.) y animales y plantas, y descubrir algunas de sus características. Identificación de algunos fenómenos del medio natural (día y noche, sol, lluvia...) y establecimiento de algunas relaciones con actividades y situaciones habituales (p. 15).

Interés por la indagación sobre elementos y materias (agua, arena...), descubriendo algunos de sus atributos y cualidades como frío, caliente, seco, mojado, grande o pequeño (p. 16).

Establecimiento de algunas semejanzas y diferencias. Clasificaciones atendiendo a un criterio y ordenaciones de dos o tres elementos por tamaño (p. 16).

Interés por observar los elementos de la naturaleza (tierra, agua, nubes, etc.) y animales y plantas, y descubrir algunas de sus características (p. 16).

Participación en juegos de imitación de situaciones de la vida cotidiana representando diferentes oficios, papeles o roles para iniciarse en la comprensión del mundo que le rodea, disfrutando con ellos (p. 16).

Orientación a las secuencias temporales en las que se organiza la vida diaria e iniciación al uso de términos relativos a la organización del tiempo (mañana, tarde, ahora, después, hoy, mañana) (p. 55).

Observación y actuación sobre la realidad inmediata, a partir de las propias vivencias, estableciendo relaciones entre objetos según sus perceptivas características (p. 55).

Observación y exploración del entorno físico y social, planificando y ordenando la propia acción, constatando sus efectos y estableciendo relaciones entre la propia actuación y las consecuencias que se derivan (p. 55).

Observación y constatación de algunos de los cambios y modificaciones a los que están sometidos todos los elementos del entorno (personas, animales, plantas y objetos) (p. 55).

Interés y curiosidad por el medio físico y social, explorando las características de objetos, materiales y elementos del entorno natural, formulando preguntas sobre algunos eventos y representando vivencias y situaciones mediante el juego simbólico (p. 55).

Iniciación en la diferenciación de algunas cualidades sensoriales fruto de la exploración de los objetos materiales, elementos del entorno natural y de la comparación de sus propiedades. Inicio de las primeras clasificaciones, ordenaciones y correspondencias en función de las características y los atributos (p. 55).

Reconocimiento de secuencias espaciales, temporales y lógicas e iniciación en el uso de las primeras nociones cuantitativas en situaciones cotidianas (p. 55).

Percepción y exploración, mediante la manipulación, de las características de materiales diversos (ceras, agua, arena, masas, arcilla...), utilización de diferentes instrumentos (pinceles, esponjas, rodillos...) y descubrimiento de texturas, colores, olores, en la realización de producciones plásticas (p. 22).

Descubrimiento y experimentación de las posibilidades expresivas y comunicativas del propio cuerpo (gestos, movimientos, miradas, llanto, sonrisa...), en actividades individuales y de grupo (p. 22).

Expresar y comunicar experiencias, hechos, emociones, sentimientos y vivencias mediante la manipulación y transformación de diferentes materiales plásticos (p. 22).

Iniciación en la utilización de técnicas básicas (modelado, dibujo, pintura, collage, estampaciones.) y destrezas (arrugar, pegar...), cuidando materiales, instrumentos y espacios, y mostrando interés y respeto por las producciones propias y de los demás (p. 22).

Identificación e imitación de sonidos cotidianos y discriminación de sus rasgos distintivos y de algunos contrastes básicos (ruido-silencio, largo-corto, fuerte-suave), disfrutando con las realizaciones propias o de sus compañeros (p. 22).

Exploración de las posibilidades sonoras de la voz, del propio cuerpo, de objetos cotidianos y de instrumentos musicales para producir sonidos, ritmos sencillos mostrando confianza en las propias posibilidades (p. 22).

Representación de personajes, hechos y situaciones mediante juegos simbólicos, disfrutando en las actividades de dramatización, imitación, danza y en otros juegos de expresión corporal (p. 22).

Iniciación en el descubrimiento y uso del lenguaje corporal, verbal, musical y plástico (p. 58).

Interés por algunas de las técnicas más básicas (pintura, modelado, dibujo, etc.) de los distintos lenguajes expresivos y formas de representación (p. 58).

Reconocimiento, retención y memorización de canciones, dichos sencillos, cantos y juegos de regazo y participar de forma activa, siguiendo la tonada, reproduciendo el gesto, etc. (p. 58).

Reconocimiento y participación activa en danzas sencillas con una progresiva coordinación general del cuerpo y sentido del ritmo (p. 59).

Fuente: Elaboración propia a partir de la Orden ECI/3960/2007 de 19 de diciembre de 2010 y del Currículum de Educación Infantil de Cataluña (2012).

Haciendo un análisis de estos contenidos, se observa que existen numerosos contenidos relativos a los distintos bloques definidos por Alsina (2004) pero se presentan de manera muy generalizada y no facilita que los profesionales puedan identificarlos claramente.

La ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, establece que el currículum está organizado en tres áreas: el conocimiento de sí mismo; el conocimiento del entorno y la comunicación, los lenguajes y la representación.

En las distintas áreas, aparecen contenidos de las distintas áreas vinculados a las matemáticas intuitivas e informales. Aun así, su redacción y presentación hacen necesario un análisis y una interpretación para poder determinar en qué modo aparecen porque, fácilmente, se pueden asociar únicamente al área de descubierta del entorno.

En su concreción, en el currículo de Cataluña (2012), definido también por tres áreas: área de descubierta de uno mismo y de los demás; área de descubierta del entorno y área de comunicación y lenguajes, aparecen estas primeras matemáticas de forma muy globalizada. En gran parte, los profesionales han de conocer profundamente a qué matemáticas refieren para poder identificarlas, extraerlas o interpretarlas.

En ambos documentos las matemáticas intuitivas e informales aparecen de forma integrada en las tres áreas curriculares y se pueden vehicular con las tres capacidades presentadas como las principales acciones matemáticas de los 0 a los 3 años que se vienen describiendo: identificar / definir o reconocer; comparar y relacionar y transformar u observar cambios (Alsina, 2016b). Aun así, aparecen algunas lagunas como, por ejemplo, del mismo modo que ocurre en el segundo ciclo (3-6), no se hace referencia al reconocimiento, descripción y ampliación de patrones (Alsina, 2019a) aspecto fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático. Ello, junto con la dificultad de identificar claramente las matemáticas en las diferentes áreas, nace el cuestionamiento de si el currículum de Educación Infantil para el ciclo 0-3, respecto a la educación matemática, es un instrumento facilitador donde los profesionales apoyan sus prácticas educativas y desde donde las fundamentan.

MÉTODO

Capítulo 4. Metodología

Presentación

El método de investigación es un elemento clave para la construcción de un conocimiento válido sobre aquello que se pretende investigar. El método define el conjunto de técnicas e instrumentos y el tipo de análisis de los datos que se utiliza en el estudio bajo un mismo paradigma. De forma coherente ha de permitir la obtención de los datos y la construcción de los resultados de investigación. Conocer en qué consisten los diferentes métodos, cuáles son sus características y seleccionar uno u otro acorde el objeto de estudio resulta fundamental para el investigador.

El presente capítulo, en primer lugar, presenta el paradigma de investigación y la metodología de este estudio justificando su elección. A continuación, se caracteriza y define el contexto, se describe la muestra, se destacan las variables y se explicitan las técnicas de obtención de datos. Finalmente, se desarrolla el proceso de análisis de datos y se detallan las consideraciones éticas que se han contemplado.

4.1 Paradigma de investigación y metodología

El presente estudio parte del paradigma interpretativo. Ricoy (2006) explica que este es uno de los paradigmas dominantes en ciencias sociales. Este paradigma se considera simbólico, cualitativo, naturalista, humanista y fenomenológico, en el que el hombre, un ser social, es quien construye la realidad de manera subjetiva. Su principal finalidad es describir los acontecimientos que suceden en la vida de un grupo, destacando especialmente la organización social. En este sentido, González (2001) lo describe como el paradigma comprensivo y de carácter interpretativo basado en teorías y prácticas de interpretación, que buscan comprender lo que ocurre en diferentes contextos humanos en función de lo que las personas interpretan sobre ellos y los significados que otorgan a lo que les sucede.

Diferentes investigadores como Pérez Serrano (1994), Ballester (2001), González (2003), Ricoy (2006) y Martínez González (2001) coinciden en las características de este paradigma:

- Investigación naturalista que estudia las situaciones ubicándolas en el mundo real, tal y como se desenvuelven naturalmente.

- Perspectiva holística que estudia la totalidad como un sistema de relaciones complejo más allá que la suma de sus partes.
- Proporciona datos cualitativos con una descripción detallada con profundidad y anotaciones directas que captan las experiencias y perspectivas personales.
- El investigador tiene contacto directo con la gente o la situación estudiada.
- Sensibilidad hacia el contexto ubicando los resultados en el contexto social, histórico y temporal.
- Neutralidad empática. La objetividad absoluta es imposible el interés final es comprender, interpretar y compartir.

El paradigma interpretativo está relacionado con la metodología cualitativa (Latorre, et al., 2003), así como también puede vincularse con los métodos mixtos (MM), que es el que se usa en este estudio. Fàbregues (2015) explica que los métodos mixtos pueden acogerse a diferentes paradigmas. El método de investigación para desarrollar este estudio parte, principalmente, de la investigación cualitativa, pero tiene pequeñas incursiones propias de la metodología cuantitativa que ayudan a describir e integrar los datos recogidos. Castro y Godino (2011) exponen que hay diferentes investigadores que defienden la idea de que una pregunta de investigación ha de responderse mediante datos y técnicas cualitativas y cuantitativas.

Es conocido de antaño que existía una clara contraposición entre los estudios cuantitativos versus los cualitativos (Fàbregues 2015). La discusión entre la parte empírica y cuantificable y la parte descriptiva y narrativa daban lugar a la invalidación de una versus la otra.

Como señalan Traag y Franssen (2016), del debate entre la división históricamente existente entre los métodos cuantitativos-cualitativos se extrae el hecho de que se ha transformado dicha concepción y se empieza a considerar que la combinación de ambos métodos puede dar lugar a una comprensión más amplia versus los temas de investigación particulares que a menudo se limitan a un solo método. Bryman (2012) expone que la integración metodológica es posible más allá de la discusión entre paradigmas.

Traag y Franssen (2016) explican que un enfoque cualitativo produce una descripción más rica y profunda, que se incorpora y adentra más en el contexto, pero que puede desencadenar cuestiones que requieran de un análisis cuantitativo, lo que, a su vez,

posiblemente, pueda requerir nuevamente de un análisis más cualitativo. Bamberger (2012) hace énfasis sobre la idea de que es poco frecuente encontrar una única metodología de investigación que contemple absolutamente todas las complejidades del funcionamiento de las estructuras del mundo real.

De este modo, se plantean la posibilidad de viajar continuamente entre métodos cualitativos y cuantitativos. Se abre la perspectiva y la mirada hacia el valor que se pueden aportar ambos conceptos. Así, se observa una transición que pasa de este debate histórico a otra perspectiva que permite llegar a la complementación y la matización. En lugar de invalidarse entre sí, se enfatiza el avance que supone este hecho para la investigación (Traag y Franssen 2016).

Afortunadamente, al observar la distribución de publicaciones en revistas, algunas de las revistas más generales, como *American Sociological Review* y *American Journal of Sociology*, sí incluyen publicaciones desde ambas perspectivas (aunque la perspectiva cuantitativa parece estar más presente). Las revistas más especializadas, como *Cultural Sociology* y *Social Forces*, se centran en la investigación cualitativa y cuantitativa, respectivamente. Al menos, hay algunos foros comunes de discusión, aunque hay margen de mejora (Traag y Franssen, 2016, p. 1).

Fàbregues (2015) señala que los métodos mixtos se han convertido en uno de los ámbitos metodológicos más populares de los últimos 30 años gracias a las muchas publicaciones que han ido apareciendo estos últimos años, que comparten el propósito de superar las disputas históricas entre ambos métodos. Destaca las ventajas de combinarlas y de resolver así problemas de investigación que lo requieren. Del mismo modo, Traag y Franssen (2016) afirman que ya se han publicado numerosos estudios de alcance internacional y que se celebran periódicamente conferencias exclusivamente focalizadas en esta aproximación metodológica consolidándose los MM en la comunidad académica con un lenguaje y una manera propia de entender y de hacer investigación.

En esa misma línea, Dellinger y Leech (2007) analizan la validez de los MM en la investigación, y explican que durante los años 90 las investigaciones con diseños mixtos fueron muy útiles en campos como la educación, enfermería, medicina, psicología y comunicación (Pereira 2011).

En el contexto español, Castro y Godino (2011) presentan un estudio bibliométrico donde analizan la presencia de los MM en relación con las ponencias y comunicaciones presentadas en las SEIEM, haciendo aportaciones significativas que avalan las investigaciones mixtas en el campo de la educación matemática. Como síntesis del estudio, destacan un incremento en las publicaciones de las SEIEM que parten de MM, ocupando el segundo lugar después de los métodos cualitativos. En relación con las temáticas, destacan la geometría, la didáctica de la estadística, el desarrollo del pensamiento numérico y algebraico, el estudio de procesos genéricos y, por último, la didáctica del análisis e historia de la educación matemática. Se encuentran algunas investigaciones sobre los conocimientos de los profesionales, pero no en el nivel de Educación Infantil.

En lo que concierne a los niveles educativos, aparecen con diferencia más publicaciones sobre los niveles educativos más altos como la universidad, la secundaria obligatoria seguidos de la primaria y, en último término, la Educación Infantil. Aun así, aparecen ya algunos estudios mixtos en Educación Infantil.

En este sentido, concretamente en el contexto de la Escuela Infantil, se encuentran algunos estudios iniciales sobre el papel de los materiales manipulativos en la adquisición de los primeros conocimientos matemáticos intuitivos e informales (Alsina y Martínez, 2016) y en torno a las acciones matemáticas que llevan a cabo niños de 0-3 años en instalaciones artísticas (Alsina y León, 2016).

Castro y Godino (2011) defienden la necesidad de parametrizar y concretar los criterios de las revisiones metodológicas porque se observa poca rigurosidad en las investigaciones mixtas y establecen diferentes recomendaciones:

- Justificar adecuadamente la pertinencia del uso de un enfoque mixto de investigación.
- Usar adecuadamente los métodos cualitativos y cuantitativos.
- Integrar de manera coherente los resultados e interpretaciones de los datos y técnicas de análisis cualitativos y cuantitativos.

Por ello, describen también las características de los estudios cuantitativos, cualitativos y mixtos, y proporcionan una guía de reflexión metodológica, junto con algunas recomendaciones para incrementar el rigor metodológico en la investigación en

educación matemática. En el siguiente apartado, se describen los criterios de calidad para las investigaciones mixtas que han sido establecidos en esta guía y se contextualizan dando rigor y validando ética y metódicamente esta investigación.

Fàbregues (2015) destaca que los MM son relativamente recientes, en tanto a que aparecen a principios del siglo XX, instaurándose como métodos a finales de siglo y estableciendo un debate de su definición. Con la aparición de la publicación del *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (Tashakkori y Teddlie, 2003) se produjo el mayor punto de inflexión del cual no hubo retorno. Los diferentes investigadores se adentraron en las discusiones sobre la definición de los MM y sus características, de las que actualmente ya no existe tanta controversia dado a las numerosas publicaciones que detallan la definición y los componentes claves.

Para exponer sus principales rasgos, se parte de la caracterización que presentan Creswell y Tashakkori (2007) y Teddlie y Tashakkori (2010), citados por Fàbregues (2015), y se sitúan en el contexto de esta investigación adaptando los contenidos a la Escuela Infantil y al proceso de esta investigación. De modo que, a continuación, se presenta la narración de las características sobre MM expuestas por Fàbregas (2015) y se integran las principales acciones que se han llevado a cabo en esta investigación explicando así, cómo se concreta el método de investigación en este contexto de estudio y cuál es el diseño o procedimiento aplicado.

Las características que presenta Fàbregues (2016) son:

- Los MM disponen de un conjunto de procedimientos de análisis y criterios de calidad específicamente de MM. Para guiar el proceso de esta investigación se han seguido los *Indicadores de calidad metodológica en trabajos de investigación - Guía para la Reflexión Metodológica* – presentados por Godino et al. (2011). Esta guía es una pauta simplificada elaborada a partir de diferentes fuentes metodológicas, en concreto de Ramos-Álvarez y Catena (2004), Bucla-Casals (2003), Bryman et al. (2008), Creswell (2009), Simon (2004) y Schoenfeld (2008). Esta pauta proporciona una serie de “orientaciones en relación con la calidad en la aplicación de los métodos de investigación en el campo de la Didáctica de la Matemática, aplicable a trabajos realizados bajo los enfoques cuantitativos, cualitativos y mixtos” (Godino et al., 2011 p. 47).

Los indicadores que proporcionan hacen referencia a todos los apartados concernientes a un trabajo de investigación y para ello establecen diferentes bloques de contenido:

- a. Antecedentes y motivación de la investigación
- b. Desarrollo teórico
- c. Diseño metodológico
- d. Datos, análisis, resultados, discusión y conclusiones
- e. La comunicación de los resultados a la comunidad científica
- f. Referencias bibliográficas
- g. Visión global

Para cada uno de los bloques se presentan indicadores que ofrecen la posibilidad de reflexionar entorno a la calidad y rigurosidad del método de investigación. Para llevar a cabo esta investigación se han revisado de forma precisa las pautas y orientaciones concernientes a los MM que requieren una integración de los métodos cualitativos y cuantitativos.

- Los MM aceptan que más de un paradigma pueda constituir la base filosófica. En este caso, el paradigma interpretativo es el que se ajusta mejor a les intenciones de esta investigación, ya que ofrece la posibilidad de establecer una aproximación a la realidad contemplando su gran complejidad, de manera empática y natural, describiendo, compartiendo e interpretando los conocimientos que se comparten en el claustro de profesionales de la escuela desde su práctica diaria. En este sentido, la investigación que se lleva a cabo parte, en primer lugar, de un proceso de análisis de las necesidades formativas de los profesionales en relación con sus conocimientos. A partir de este análisis, y acorde con el marco teórico referencial, se lleva a cabo una formación que da lugar a una planificación en la que los profesionales diseñan espacios y materiales de contenido matemático con el fin de incorporarlo en las aulas. Con la implementación de estos nuevos materiales o los rediseños ya existentes, los profesionales pasan a una fase de acción en la que ejecutan la planificación. En ella, los profesionales observan cómo se desarrolla el juego de los niños y documentan las acciones matemáticas que llevan a cabo. Finalmente, se realiza una nueva sesión de formación en la que, con los diferentes profesionales, reflexionan sobre los diseños

elaborados y las nuevas propuestas y acciones matemáticas que llevan a cabo los niños.

- Los MM conceden una importancia central a la pregunta de investigación. En este sentido, la pregunta de investigación define el tipo de diseño que va a implementarse, la estrategia de muestreo y las técnicas de recogida de datos y análisis. Es a partir de la pregunta inicial que se promueve el diseño de este estudio con la finalidad de responder a los objetivos de investigación. Retomando la pregunta de investigación: ¿Qué conocimientos matemáticos y didácticos tienen los profesionales de la Escuela Infantil para fomentar el desarrollo de las matemáticas intuitivas e informales, antes y después de un programa de formación continuada? se observa que está directamente enfocada a conocer los conocimientos didáctico disciplinares de los profesionales en el ámbito del conocimiento matemático, concretamente en el ciclo 0-3. Para dar respuesta a ella, se plantea toda la estructura de la investigación, desde el paradigma y el método de investigación hasta el contexto de estudio, los instrumentos y momentos de recogida de datos, así como el proceso formativo que se ha llevado a cabo.
- Los MM integran las metodologías cualitativas y cuantitativas en las fases de recogida de datos, análisis de la información e interpretación. Ello permite combinar diferentes instrumentos y trazar el análisis de la información de manera complementaria para responder con mayor profundidad a la pregunta de investigación.
- Los MM otorgan valor a los resultados contradictorios que provienen de los análisis cuantitativos o cualitativos. Siendo una investigación con diferentes instrumentos y diferentes momentos de recogida de datos, es importante partir de un método que contemple la posibilidad de obtener resultados contradictorios que se expliquen a partir de la concreción del propio método dando esta visión holística, natural, compleja y empática que tiene en cuenta el propio paradigma interpretativo. En este estudio, la intención es profundizar ampliamente en el conocimiento y las prácticas educativas, comprender y compartir los contextos educativos.

Por lo que se refiere al método cualitativo, se asumen las palabras de Sandín (2003), que define la metodología cualitativa como comprensiva, interpretativa, hermenéutica y experiencial. En cuanto a la interpretación cuantitativa, se pretende describir los datos recogidos en los cuestionarios, contextualizar y profundizar en su interpretación para

complementar las aportaciones cualitativas y descriptivas de los otros datos ya sean del propio cuestionario o de los otros instrumentos de recogida de información.

Cabe destacar también que Castro y Godino (2011), en su caracterización MM en didáctica de las matemáticas, exponen la complejidad de este proceso explicativo:

Los métodos mixtos ofrecen ventajas cuando se investigan preguntas complejas: el análisis estadístico provee una valoración numérica de las respuestas, mientras que los datos cualitativos y su interpretación ofrecen comprensión de los aspectos no cuantificables. Sin embargo, el proceso es costoso en recursos y en tiempo, además de la dificultad para justificar, vincular y equilibrar las dos componentes” (Castro y Godino, 2011 p. 114).

A fin de seguir las recomendaciones de Godino et al. (2011) se presenta la Figura 97 que muestra la integración de los métodos en los que se combinan los métodos cualitativos y cuantitativos en este estudio. En ella, se especifica como se han integrado en la metodología los aspectos propios de la investigación cuantitativa partiendo de una investigación cualitativa. Tanto los antecedentes como las motivaciones y el desarrollo teórico son propios de una investigación cualitativa pero el diseño metodológico que integran ambos métodos.

Tal y como se observa en la figura, se parte de una metodología cualitativa y el diseño de la investigación es propio a un estudio de este ámbito. En este sentido, se han seleccionado unos instrumentos de recogida de datos: cuestionario, grupos de discusión, observación no participante y análisis de documentos, propios de las investigaciones cualitativas y que se pueden integrar en las investigaciones mixtas. El cuestionario recoge las variables a las que se les da un trato propio de la metodología cuantitativa. Además, este cuestionario, descrito ampliamente en el apartado 4.6.3, formula una serie de preguntas abiertas que, a partir de un análisis categórico deductivo con categorías establecidas de antemano sobre los contenidos matemáticos en las Escuela Infantil, permite, por un lado, una descripción de los datos y una interpretación cualitativa de los mismos y, por otro lado, un estudio de las frecuencias de aparición interpretadas desde un punto de vista cuantitativo. De modo que el cuestionario está compuesto mayormente por variables continuas y/o categóricas que permiten un resumen cuantitativo de la información.

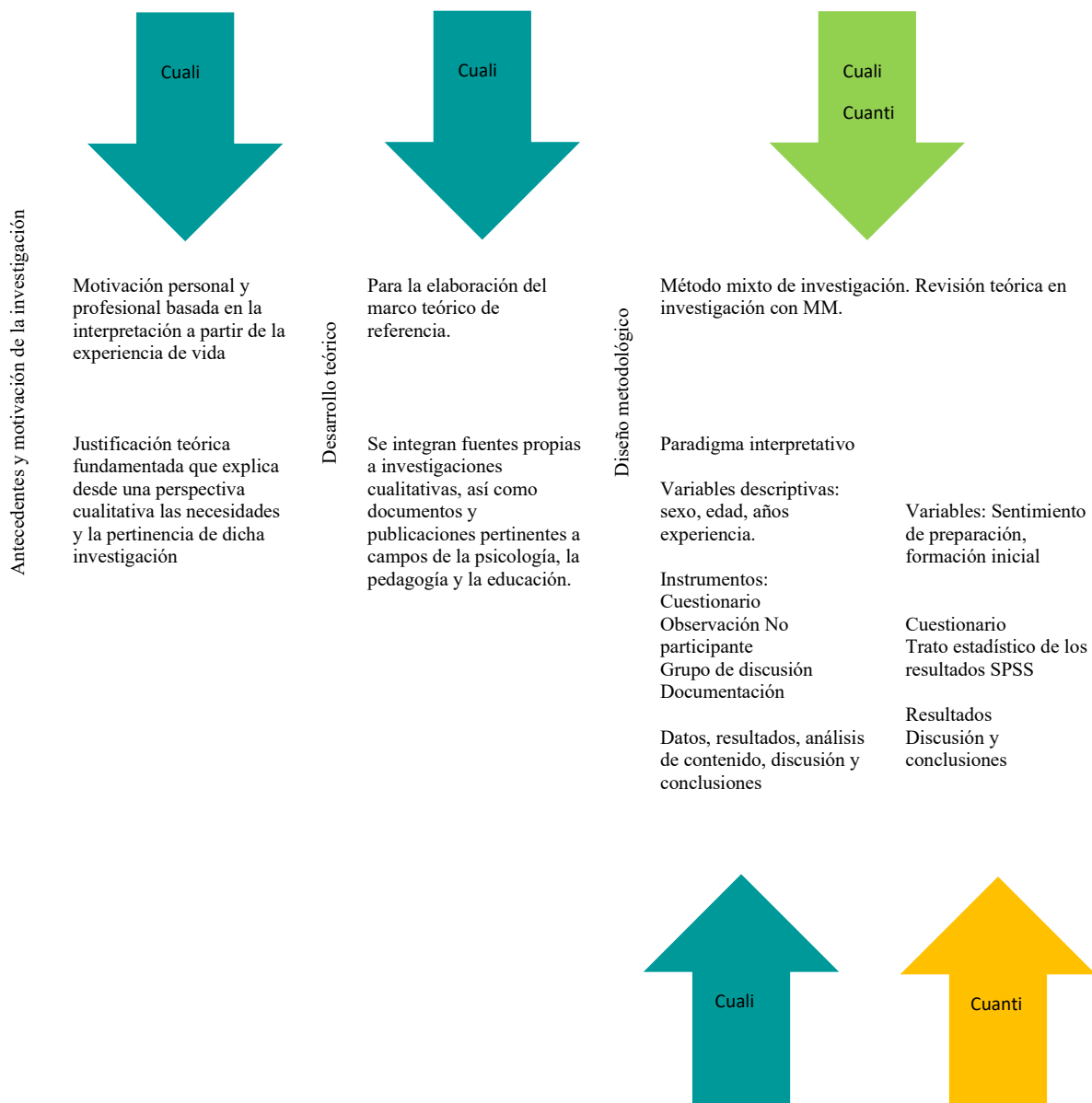


Figura 97. Integración de métodos. Elaboración propia a partir de Godino et al. (2011)

- Los MM usan lógicas deductivas e inductivas en un mismo estudio. Esta característica permite poder generar categorías de manera deductiva y de manera inductiva. En relación con los métodos cualitativos, Rodríguez et al. (1996), consideran que la identificación de problemas en la investigación cualitativa son consecuencia también de la interacción entre la inducción y la deducción:

El investigador con su entrada en el contexto educativo encuentra una oportunidad para revisar su teoría o sus creencias y experiencias ante un fenómeno a la luz de la información que extrae de su propia realidad (Rodríguez et al. 1996 p. 103).

De esta manera, la categorización mixta responde tanto a los MM como a los métodos cualitativos.

En este sentido, esta investigación se construye sobre una categorización mixta. Previamente y partiendo del marco teórico, para el análisis de los datos se establecieron 28 categorías correspondientes a los contenidos matemáticos que aparecen en el ciclo educativo 0-3. Al mismo tiempo, se pretendía dar respuesta aquellas aportaciones que saliesen de este marco conceptual acogiendo las aportaciones de los profesionales como parte de sus conocimientos.

4.2 Caracterización del estudio

Se ha diseñado un estudio cuasiexperimental (Creswell, 2009), sin grupo control en el que, antes y después de una actividad de formación, se han analizado los conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil. La mayoría de los autores, exponen León y Montero (2003), coinciden y se remontan a señalar las obras de Campbell y Stanley (1966) y Cook y Campbell (1979) como las mayores aportaciones clásicas en el análisis cuasiexperimental desarrolladas recientemente por Creswell (2009).

Los diseños más recurrentes en el ámbito de la educación según Bisquerra, (2004); Latorre et al. (2003) y León y Montero (2003) son:

Los diseños de grupos no equivalentes:

- Grupo único sólo postest.
- Grupo único pretest-postest.
- Dos grupos sólo postest.
- Dos grupos pretest-postest.

Series temporales interrumpidas:

- Diseño simple.
- Dos grupos no equivalentes.
- Retirada de tratamiento.
- Replicaciones múltiples

Diseños de sujeto único:

- Diseño AB.
- Diseño ABA.

- Línea base múltiple.

León y Montero (2003) exponen que este tipo de estudios se caracterizan por el hecho de que el investigador no puede manipular la variable independiente a su voluntad, ni puede asignar a los sujetos aleatoriamente las condiciones experimentales. Lo que sí puede es introducir un proceso de recogida de datos que guarde gran similitud con el contexto y a su vez, se puede establecer qué variables existen y las correlaciones entre estas, determinando cómo han incidido en los resultados.

En cuanto al contexto de investigación, la descripción de la muestra y la definición de variables se recoge en el apartado 4.3 Contexto de estudio, donde se describe ampliamente cómo se ha precedido.

En relación con la estructura de la investigación y el proceso de recogida de datos, el objetivo de este estudio parte de un diseño con grupo único pretest – postest. Para dar respuesta a la pregunta de investigación con relación a qué conocimientos tienen los profesionales de la Escuela Infantil para diseñar los espacios de juego, exploración y manipulación con la finalidad de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños, esta investigación plantea una fase previa (pretest) a la formación y una fase posterior (postest). En su totalidad, se desarrolla a partir de 2 objetivos generales que se estructuran en diferentes fases.

Para cada fase se han determinado unos objetivos específicos y unos instrumentos de recogida de datos concretos que responden a estos objetivos generales. La Tabla 8 muestra los objetivos generales de investigación, los específicos y los instrumentos correspondientes, así como también el diseño y estructura del proceso de investigación por fases.

Tabla 8. Diseño y procedimiento de investigación.

Fase 1: Pre formación	
Objetivo general	
1. Analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático los niños de 0 a 3 años, antes de la formación.	
Objetivos específicos	Instrumentos
1.1 Analizar los conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 años antes de la formación.	- Cuestionario - Grupo de discusión

1.2 Analizar los conocimientos didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 años antes de la formación.	- Observación no participante - Cuestionario - Grupo de discusión
---	---

Fase 3: Post Formación

Objetivo general

2. Analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático los niños de 0 a 3 años, posteriores a la formación.

Objetivos específicos	Instrumentos
2.1 Analizar los conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 posteriores a la formación.	- Cuestionario - Grupo de discusión - Documentación
2.2 Analizar los conocimientos didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3 posteriores a la formación.	- Observación no participante - Cuestionario - Grupo de discusión - Documentación

Como recoge la tabla anterior, en primer lugar, se parte de un proceso de análisis de las necesidades formativas de los profesionales en relación con sus conocimientos. Para ello, se utilizan diferentes instrumentos de recogida de datos descritos en el apartado de técnicas de obtención de datos:

- Cuestionario
- Grupo de discusión.
- Observación no participante.
- Análisis de documentación

A partir de este análisis y acorde con el marco teórico referencial, se lleva a cabo una segunda fase de formación específica para proporcionar los conocimientos necesarios para avanzar en el diseño de los espacios y materiales con contenido matemático. La formación, bajo el título de *Observación, documentación e interpretación de acciones matemáticas en la Escuela Infantil (0-3 años)*, fue a cargo del Doctor Àngel Alsina, director de esta tesis. Los objetivos y contenidos fueron:

- 1) aprender a observar, documentar e interpretar acciones matemáticas de los niños de 0 a 3 años;

- 2) profundizar en el significado actual de la educación matemática infantil y las principales líneas de innovación;
- 3) conocer las orientaciones curriculares acerca de las matemáticas de Educación Infantil y dominar los contenidos que lo integran; y
- 4) contemplar las nociones básicas de Didáctica de las Matemáticas en relación con la propia especialidad.

La formación comprendía 15 horas: 9 horas presenciales y 6 horas no presenciales de trabajo en equipo. De forma presencial, se llevaron a cabo tres sesiones de tres horas cada una: las dos primeras sesiones relacionaban la práctica educativa con la teoría propia de la disciplina. En ellas se presentaban los contenidos propios de la formación y, a su vez, se analizaban las prácticas educativas de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Girona como ejemplo para la identificación de los contenidos del curso.

En las 9 horas de trabajo diferido, los profesionales tenían que, por un lado, conceptualizar las acciones matemáticas presentes en las propuestas que ya se llevaban a cabo, ya que muchas veces se desconocía la matemática implícita de estas propuestas que se presentaban a los niños. Por otro lado, tenían que enriquecer estos espacios con contenido matemático y/o crear nuevos materiales y propuestas que favorecieran el desarrollo del pensamiento matemático en estas primeras edades. En la tercera sesión de formación, eminentemente práctica, los profesionales mostraron el análisis de sus prácticas a través de presentaciones con imágenes de los diferentes espacios y materiales, y también, presentaron los cambios en los materiales y espacios, así como los nuevos materiales creados.

Después de la formación, se repite el mismo proceso de recogida de datos para poder analizar los cambios que se han producido en los conocimientos de los profesionales de las EBMV.

En el caso de esta investigación se desestima el grupo control ya que se acuerda con la dirección del centro que todos (o prácticamente todos) los profesionales de las EBMV participen del proceso de investigación en tanto que va vinculado a una formación y la voluntad de mejorar la práctica educativa de las escuelas.

4.3 Contexto de estudio

Las Escuelas Infantiles Municipales de Vic (EBMV) son el contexto de estudio de esta investigación. En Vic, una población de más de 40.000 habitantes, situada en el centro de Catalunya (España) hay tres Escuelas Infantiles Municipales desde el curso 2008- 2009. Nacieron con el objetivo de crear un servicio educativo de calidad para la primera infancia. La apertura de estas Escuelas Infantiles públicas, todas de doble línea, significó un reto importante debido a que se abrían de golpe y sin ningún antecedente municipal en la ciudad. La línea de trabajo y de desarrollo del proyecto educativo que se ha llevado a cabo desde el inicio ha sido un trabajo transversal, cooperativo y compartido entre los profesionales de los tres equipos que configuran las escuelas. La base de este trabajo compartido ha sido la formación continua, hecha conjuntamente y en el lugar de trabajo. Esta formación ha sido la clave para construir, cohesionar y transformar el proyecto educativo de las escuelas.

Tal y como exponen Casellas et al. (2016), la formación se convirtió en un elemento generador de procesos que ha provocado el cuestionamiento de los métodos utilizados hasta el momento y también ha encaminado los cambios constantes de mejora en la calidad del trabajo.

Con el objetivo de crear una cultura de infancia compartida, durante los cursos (2009-2013) las EBMV han implementado un proyecto basado en la pedagogía de los espacios y de los materiales como elemento educativo. A lo largo de todo el proceso de transformación, han recibido el apoyo y el asesoramiento de Francesca Daboli y Paola Soggia, profesionales del Centro de Innovación y Formación en Educación (CIFE) de la Universidad de Vic. Se trata de un proyecto con una fuerte influencia de la pedagogía de Loris Malaguzzi y de las Escuelas Infantiles de Reggio Emilia, con una concepción de niño «capaz» y con potencialidades, verdadero protagonista de su aprendizaje.

Siguiendo esta línea de trabajo que enmarca los espacios y materiales como agente educativo, se pretende analizar desde un punto de vista matemático, el diseño de estos espacios y materiales.

Las tres EBMV son de doble línea. El equipo de profesionales está constituido por una dirección, compartida para las tres EBMV, una coordinación en cada centro y un equipo de 10 o 11 profesionales por escuela. La plantilla de profesionales que configura estos

equipos, el curso 2017-18 momento en que se recogieron los datos, era de 32 profesionales, 5 que se encontraban desarrollando substituciones y 27 en plantilla; 17 con titulación de Magisterio y 15 con titulación de Técnico en Educación Infantil. Desde las EBMV se prioriza la formación como eje vertebrador del proyecto educativo y, parte del convenio laboral así lo recoge. De esta manera, todo el personal fijo participa de las formaciones y el personal en substitución estaba invitado también a hacerlo.

El número de plazas que se ofrecen en cada escuela es de 82 plazas en EBMV Horta Vermella (HV) y EBMV Caputxins (C) y 79 en EBMV Serra Sanferm (SS), siendo la oferta total para la ciudad de 243 plazas municipales.

La ratio establecida profesional – aula, parte de una metodología de trabajo que se basa en la pareja educativa, de este modo, como se observa en la Tabla 9 la ratio alumno – profesional, se constituye de la siguiente manera:

Tabla 9. Ratio alumno – profesional.

Aula de referencia	Número de plazas por aula	Número total de plazas por nivel	Número de profesionales por aula	Número de profesionales por nivel
0-1 años	8	16	1,5	3
1-2 años	13	26	2	4
2-3 años	20	40	2	4
Total plazas escuela: 82 (HV y C) y 79 (SS)				
Total profesionales escuela: 11 (HV y C) y 10 (SS)				
Total plazas de las 3 escuelas: 243				
Total profesionales trabajando (curso 2016-17): 37				

Estas ratios niño - profesionales permiten una atención muy personalizada, que se adapta a las necesidades del grupo y permite la individualización y la atención a la diversidad.

Hoyuelos (2010) explica que en Reggio Emilia se desarrolla la idea de la pareja educativa. Esta concepción organizativa, analizada e investigada por Loris Malaguzzi, consiste en que dos personas compartan las responsabilidades de acompañar a un único grupo durante la mayor parte de la jornada laboral dotando las aulas de alta calidad educativa.

En relación con los espacios, las tres escuelas tienen diferentes espacios interiores y exteriores pensados para acompañar al niño en su desarrollo educativo, para garantizar su seguridad física y la higiene, y para potenciar las relaciones entre niños, profesionales y familias.

Los edificios, como se pueden ver en las Figuras 98, 99 y 100, son de una sola planta. Las escuelas tienen acceso directo a la calle. Todos los espacios de uso de los niños tienen luz natural exceptuando las salas oscuras para jugar con la luz y la oscuridad. Cada centro tiene una habitación pequeña sin ventana donde acuden los niños en pequeño grupo y desarrollan propuestas de luz, magia y color.

Las tres escuelas tienen un jardín y todas las aulas tienen salida directa a estos.



Figura 98. EBMV Caputxins



Figura 99. EBMV Horta Vermella



Figura 100. EBMV Serra Sanferm

Las EBMV disponen de los diferentes espacios educativos tal y como se puede ver Tabla 10. En cada escuela se encuentran, por un lado, las aulas de cada nivel educativo y, por otro lado, espacios comunes como la sala polivalente, el comedor, el taller de luz y el atelier.

Tabla 10. Espacios educativos.

Espacios	EBMV Caputxins	EBMV Horta Vermella	EBMV Serra Sanferm
Número de aula	6	6	5
	2 de 0-1	2 de 0-1	3 de 1-2
	2 de 1-2	2 de 1-2	2 de 2-3
	2 de 2-3	2 de 2-3	
Sala polivalente	Si	Si	Si
Comedor	Si	Si	Si
Taller de la luz	Si	Si	Si
Atelier	Si	Si	Si
Espacio exterior	Si	Si	Si

Siguiendo el modelo de Reggio Emilia, los espacios tanto interiores como exteriores son amplios y en ellos se disponen los materiales al alcance de los niños.

Sobre los materiales, se define en el proyecto educativo de las EBMV que se presentan siguiendo unos criterios pedagógicos y estéticos que acogen la diversidad. Son materiales que fomentan un juego rico, constructivo, creativo y de exploración, que permiten el tanteo y el descubrimiento. Por lo tanto, son materiales de calidad que se acercan al máximo posible a su origen natural y que aportan información real al niño.

Se parte siempre de materiales con diversas texturas, que ofrecen la posibilidad de que el niño se encuentre con muchas sensaciones y percepciones, dejando a menudo el plástico de lado ya que proporciona una respuesta uniforme y empobrecida. Se dibujan espacios y materiales planificados, pensados, nutritivos y polisensoriales, que ofrecen al niño la oportunidad de dialogar con los diferentes lenguajes, y donde el adulto deja que el niño sea el constructor de su propio aprendizaje.

Bajo este concepto, la función del profesional es velar y planificar previamente estos espacios y materiales para que sean interesantes, adecuados, acogedores, provocadores, bonitos, ordenados según unos criterios estéticos, comunicadores y reveladores. Su tarea

parte de la observación de las necesidades e intereses de los niños y la intención es que estos espacios y materiales de juego y trabajo se sitúen en la Zona de Desarrollo Próximo (Vygotsky, 1988) del aprendizaje del niño.

4.4 Descripción de la muestra

En este estudio participan 32 profesionales de las EBMV. De estos 32, se desestimaron los resultados de 4 porqué estuvieron de baja y no completaron el curso, por lo tanto, no se pudo recoger la información posterior a la formación.

Para describir la muestra se consideraron las siguientes características:

- La categoría profesional.
- El tipo de contratación.
- El aula de referencia.
- La edad.
- Los años de experiencia.

4.4.1 La categoría profesional

Las categorías profesionales se dividen en dos: Técnicos de Educación Infantil (46.4%) o Maestros (53.6%). En este sentido, la formación inicial de los profesionales está muy equilibrada entre unos y otros (Tabla 11).

De este modo, los Técnicos en Educación Infantil y Maestros se encuentran prácticamente a la par. En los cuestionarios ningún maestro anotó su doble titulación, si así fuera por caso. Estos datos coinciden con el hecho de que, para componer las parejas educativas de las distintas aulas de las EBMV, el criterio es: un profesional con titulación universitaria en Magisterio y un cotutor con titulación en Ciclo Formativo como Técnico.

Tabla 11. Título profesional

	N	Pct.	Pct. Válido
TEI	13	46.4	46.4
Maestra	15	53.6	53.6
Total	28	100.0	100.0

4.4.2 El tipo de contratación

Los profesionales, según el contrato, también se dividen en dos categorías: personal en plantilla con contrato indefinido o personal en sustitución. En este sentido, se observa una plantilla muy consolidada con un personal fijo del 82.1% y un personal en sustitución de solo un 17.9% (Tabla 12).

Tabla 12. Tipo de contratación.

	N	Pct.	Pct. Válido
En plantilla	23	82.1	82.1
Sustitución	5	17.9	17.9
Total	28	100.0	100.0

4.4.3 El aula de referencia

El personal está repartido en los tres centros, en sus diferentes aulas correspondientes a los tres niveles como se ha mostrado en el apartado 4.3 Contexto de estudio. En las tres escuelas se trabaja con la figura de pareja educativa, eso quiere decir que la mayor parte de la jornada son dos profesionales por aula, a excepción de aquellos momentos en que baja la ratio infantil o los niños duermen y no se requiere de más personal. De este modo, la estructuración horaria de los profesionales garantiza que en las aulas de 1-2 años y de 2-3 años sean dos docentes en el aula, a excepción de la media hora de la llegada de 9.00h a 9.30h; de la media hora de salida de 16.30h a las 17.00h y de los mediodías, momento en que los niños duermen de las 13.00h a las 15.00h y solo hay un profesional.

Teniendo en cuenta que las tres escuelas son de doble línea, para cada nivel hay dos profesionales, siendo 4 en total. En las aulas de los más pequeños, 0-1, esta ratio es menor y en lugar de 2 docentes en cada aula, son 3 docentes para las 2 aulas. En la Tabla 13 se puede observar la distribución de la plantilla por aulas de referencia.

Tabla 13. Aula de referencia.

	N	Pct.	Pct. Válido	Pct. Acumulado
0-1	5	17.9	17.9	17.9
1-2	14	50.0	50.0	67.9
2-3	9	32.1	32.1	100.0
Total	28	100.0	100.0	

Los profesionales de las aulas de 0-1 son un 17.9%. Ello corresponde a las 4 aulas que hay de bebés, dos en EBMV Horta Vermella y dos en EBMV Caputxins. Como ya se ha descrito, Serra Sanferm no tiene aula de bebés. En este caso hubo una baja en el personal y la muestra de la investigación no corresponde al número de profesionales del centro en su totalidad: en lugar de participar 6 profesionales, participaron 5.

Los profesionales de las aulas de 1-2 años son un 50% correspondientes a las 7 aulas de esta edad, 2 de EBMV Horta Vermella, 2 de EBMV Caputxins y 3 de la EBMV Serra Sanferm que no tiene aula de bebés, pero tiene un aula más de 1-2 años. En este caso no hubo ninguna baja en el personal y la muestra de la investigación corresponde al número de profesionales.

Los profesionales de las aulas de 2-3 años son un 32.1% correspondientes a las 6 aulas de las 3 escuelas. En este caso, hubo 3 bajas de profesionales y en lugar de participar 12 profesionales, participaron 9.

4.4.4 La edad

Los profesionales tienen una edad comprendida entre 23 y 60 años. El 25% de los participantes en el estudio corresponden a la franja de 20 a 29 años, un 57.1% corresponden a la franja de edad de 30 a 39 y un 17.9% corresponde a la franja de edad de 40 a 60 años. Tal y como se observa en la Figura 101, los profesionales se encuentran mayormente en una franja de edad media, con más de 30 años y menos 40.

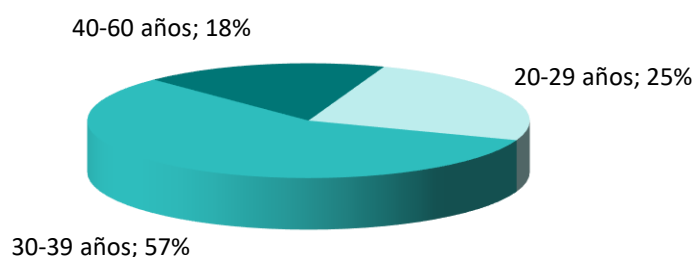


Figura 101. Edad.

4.4.5 Los años de experiencia

En cuanto a los años de experiencia, la muestra está compuesta por profesionales con diferentes años de experiencia como se expone en la Tabla 14.

Los porcentajes más destacados son: un 39.3% de profesionales con menos de 5 años de experiencia y un 35.7% con más de diez años, pero menos de 14. También hay un 14.3% que tienen una experiencia entre 5 y 9 años y un 10.7% que tienen una experiencia de más de 14 años. En total hay un 60.7% de la plantilla que tiene más de 5 años de experiencia y un 46.4% que tienen más de 10 años de experiencia.

Tabla 14. Años de experiencia trabajando en EI.

	N	Pct.	Pct. Válido	Pct. Acumulado
Menos de 5 años	11	39.3	39.3	39.3
5-9 años	4	14.3	14.3	53.6
10-14 años	10	35.7	35.7	89.3
Más de 14 años	3	10.7	10.7	100.0
Total	28	100.0	100.0	

4.5 Definición de variables

El análisis metodológico se ha realizado siguiendo las orientaciones establecidas en la *Guía para la Reflexión Metodológica* – presentada por Godino et al. (2011) y teniendo en cuenta las características de las investigaciones mixtas presentadas en la SEIEM reflejada en el estudio de Castro y Godino (2011) donde establecen para dicho método variables mixtas cuantitativas cualitativas.

En este caso, se han contemplado dos variables para el diseño de los espacios y materiales bajo criterios matemáticos y didáctico-matemáticos:

- El sentimiento de preparación
- La formación.

4.5.1 El sentimiento de preparación

Para controlar esta variable se lleva a cabo una recogida de información a partir de los diferentes instrumentos de recogida de datos: el cuestionario, el grupo de discusión y las observaciones no participantes con la finalidad de contrastar la información desde un punto de vista mixto, antes y después de la formación.

En relación con el cuestionario CDM-MAT03 se ha planteado la siguiente pregunta antes y después de la formación: *¿Cuánto preparado te sientes para diseñar los espacios y materiales bajo criterios matemáticos según título profesional?*

Los datos recogidos se han correlacionado con la formación inicial (técnico en Educación Infantil o graduado en Magisterio) y con la formación continuada para el diseño de espacios y materiales y en relación con el desarrollo del pensamiento matemático e los 0 a los 3 años. En este sentido, el cuestionario recogía la formación inicial y la continua relativa a estos dos ámbitos.

Por lo que se refiere al grupo de discusión, desde un punto de vista cualitativo, se preguntó a los participantes si podían explicar qué expectativas tenían respecto a la formación que se les iba a proporcionar en el ámbito de la matemática (0-3), necesidades y dificultades. También, se les preguntó en qué se basaban para diseñar los espacios y materiales con fines matemáticos.

Referente a las observaciones no participantes se analiza la intervención del profesional durante el desarrollo de la propuesta educativa sobre la interacción con los niños a través del lenguaje con contenido matemático.

Al mismo tiempo, también se ha correlacionado el sentimiento de preparación con el conocimiento específico de las matemáticas informales. Para recoger el conocimiento específico del concepto matemáticas informales se ha preguntado directamente a partir del cuestionario: *¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término "matemáticas informales"?* una pregunta cerrada con opción a responder si o no, iba acompañada de una pregunta abierta que daba lugar a información cualitativa: *En caso afirmativo, ¿podrías explicar brevemente a qué se refiere?*

Sobre el grupo de discusión, desde la variante cualitativa, se recogen categorías deductivas que hacen referencia al conocimiento que tienen sobre las matemáticas informales. Esta información aparece cuando se les pregunta: *¿Qué cambios crees que podrías introducir en el diseño de los espacios y materiales gracias a la formación específica que vas a recibir? ¿Cómo diseñas los espacios y materiales y en qué te basas para hacerlo?*

Sobre las observaciones no participantes nuevamente se analiza la intervención del profesional durante el desarrollo de la propuesta educativa con relación a la interacción con los niños a través del lenguaje con contenido matemático.

4.5.2 La formación

Para controlar esta variable se lleva a cabo una recogida de información a partir del cuestionario. En él se recoge la formación inicial y continua, y tal y cómo se ha descrito en el punto anterior se relaciona con el sentimiento de preparación. A su vez, también se especifica si la formación inicial o la continua incluía contenidos específicos en la didáctica de las matemáticas y/o en el diseño de espacios y materiales para el ciclo educativo 0-3.

Los datos recogidos se han correlacionado con la formación inicial (técnico en Educación Infantil o graduado en magisterio) y con la formación continuada (para el diseño de espacios y materiales y en relación con el desarrollo del pensamiento matemático e los 0 a los 3 años).

4.6 Técnicas de obtención de datos

Esta investigación parte de cuatro instrumentos o técnicas de recogida de datos tal y cómo se ha presentado en apartado 4.2 Caracterización del estudio.

A continuación, se presenta para cada una de estas el diseño y procedimiento que se ha desarrollado a lo largo del estudio.

4.6.1 Grupo de discusión

Los grupos de discusión, tomando la definición de Bisquerra (2004), se concretan como una técnica cualitativa que utiliza la entrevista grupal para recopilar información relevante sobre el problema de investigación. En estos, varias personas responden a cuestiones a modo de conversación. Quintanal y García (2012) destacan de estos el ambiente relajado, confortable y agradable que se debe propiciar en la conversación para que los participantes respondan a las preguntas y discutan sus ideas y comentarios desde la tranquilidad y la confortabilidad de poder expresar libre y cómodamente sus ideas. Según Bisquerra (2004), el grupo de discusión es una modalidad de entrevista grupal. El contenido de los grupos de discusión difiere de las entrevistas por la interacción de los participantes que conjuntamente hablan sobre un tema o lo desarrollan y complementan, verifican, contrastan, refuerzan ideas, se hacen preguntas, muestran las tendencias en sus opiniones, la recurrencia de un tema y hacen valoraciones.

Según Bisquerra (2004) y Quintanal y García (2012) exponen que cabe tener en consideración las ventajas y los inconvenientes de los grupos de discusión.

Las ventajas de los grupos de discusión son:

- Flexibilidad: su carácter no estructurado permite la flexibilidad necesaria para que el investigador pueda explorar aquellos temas que considere necesarios.
- Contenido rico y que permite profundizar debido a la interacción de los participantes.
- Alta calidad subjetiva: las discusiones de grupo tienen un gran valor en contenido subjetivo.
- Los costos son relativamente bajos.
- Se pueden enriqueciéndose y reorientándose conforme avanza el proceso de investigación.

Los inconvenientes son:

- No permiten la individualización: no permiten profundizar en la opinión de cada uno de los miembros participantes.
- Pueden limitar la expresión de la opinión, ya sea por motivos actitudinales o porque el ritmo de la sesión hace que se cambie el tema tratado y no se haya podido dar la opinión. con más facilidad.
- Cabe contemplar las dificultades en la expresión y comunicación dentro de un grupo. Hay personas que, delante del grupo, les resulta fácil, natural y espontaneo comunicar, pero para otras, puede ser difícil e incómoda.
- El análisis de datos es más complejo y laborioso.
- Pueden aparecer cambios en las opiniones de los participantes que modifican o incluso invierten su posicionamiento delante de un tema tras interactuar y escuchar la opinión del grupo.

El moderador del grupo de discusión tiene la responsabilidad de tomar estas consideraciones, acompañar a los participantes a expresar sus opiniones y preguntar, recapitular y verificar las aportaciones que van apareciendo.

En esta investigación se han llevado a cabo dos grupos de discusión con 11 participantes del equipo educativo de las EBMV. Del total de los 28 participantes de la investigación se ha escogido 11 aleatoriamente para poder llevarlos a cabo. En un inicio, se planteó la posibilidad de hacer 3 grupos de discusión con todos los participantes de la investigación, pero la disposición del equipo era más limitada en tanto que les restaba horas de trabajo no lectivo que necesitaban para desarrollar su práctica profesional. Viendo las dificultades de acceso, se estimó reducir el número de grupos de discusión y de participantes. De este modo, siguiendo el planteamiento cuasiexperimental se realizó uno, en la primera fase (pre - formación) y el otro, en la fase (post – formación). De los 11 participantes 6 eran maestras de Educación Infantil y 5 eran técnicas en Educación Infantil.

Para diseñar los grupos de discusión, tal y como se recoge en la Tabla 15, se formularon 4 preguntas que pretendían ahondar en cuestiones vinculadas a los conocimientos de los profesionales para el diseño de los espacios y materiales con sentido matemático. Estas 4 preguntas generales, que se plantearon una a una para poder dedicarles el tiempo suficiente a cada una, facilitaron una conservación abierta que fluidamente generó nuevas

preguntas espontaneas. También se les facilitaron las diferentes imágenes de los espacios y materiales ofrecidos mediante el cuestionario y se les preguntó por sus diseños.

Durante el desarrollo de los grupos de discusión, el papel del investigador fue registrar con una grabadora e ir tomando apuntes de registro y, principalmente, conducir las intervenciones y moderar con la finalidad de contemplar las consideraciones teóricas apuntadas por Bisquerra (2004) y Quintanal y García (2012). De este modo, se reformulaban preguntas, se observaban las aportaciones y se anotaban, se interpelaba directamente a los participantes que se mostraban más retraídos, se producían recapitulaciones para verificar haber comprendido las aportaciones de los participantes.

Tabla 15. Diseño de los grupos de discusión Pre -Post.

Diseño del grupo pre – formación	Diseño del grupo post – formación
¿Qué esperas de la formación que inicia este curso en enseñanza de matemáticas para el ciclo 0-3?	¿Qué dificultades encuentras actualmente una vez que has hecho la formación en enseñanza de matemáticas para el ciclo 0-3?
¿Qué cambios crees que vas a poder introducir a partir de la formación que se llevará a cabo este curso en la enseñanza de las matemáticas?	¿Qué cambios estás introduciendo con respecto a la formación que se ha llevado a cabo en la enseñanza de las matemáticas para el ciclo 0-3?
¿En qué te basas cuando configuras espacios y seleccionas los materiales para trabajar aspectos matemáticos?	¿En qué te basas cuando configuras espacios y seleccionas los materiales para trabajar aspectos matemáticos?
¿Cuál es el papel del adulto que acompaña la actividad?	¿Cuál es el papel del adulto que acompaña la actividad?

Los grupos de discusión duraron prácticamente 2 horas. Para codificar la información de los grupos de discusión se numeró a los participantes del 1 al 11 y se estableció un código que permite identificar sus intervenciones. El código utilizado para los grupos de discusión se ha diseñado nombrando primero el instrumento, a continuación, destacando el momento en que se ha llevado a cabo (previo o posterior a la formación) y, finalmente, el número de participante. Por ejemplo: GD-PRE-1.

El principal objetivo de los grupos de discusión es establecer las primeras categorías que se complementaran, validaran, ampliaran y contrastaran con los datos recogidos mediante los cuestionarios, las observaciones no participantes y el análisis de documentación.

4.6.2 Observación no participante

La investigación cualitativa puede realizarse no solo preguntando a las personas implicadas, sino también observando. Para responder ciertos interrogantes, la observación puede ser la técnica más apropiada (Rodríguez et al., 1996). Se puede preguntar a los profesionales sobre sus conocimientos del mismo modo que se podría preguntarles por el clima en las aulas. Ahora bien, seguramente si se observa directamente lo que sucede en las aulas, se pueden ver los resultados en directo. La observación permite recoger información sobre un hecho tal y como sucede e implica más que mirar, consiste en observar de forma sistemática la situación (Quintanal y García, 2012; Rodríguez et al., 1996).

Las ventajas de las observaciones según Quintanal y García (2012) y Rodríguez et al. (1996) son:

- Permiten recoger datos sobre el espacio y su organización. Sobre cómo se organizan las personas, las interacciones que se dan en el espacio y el tiempo, los recursos, técnicas y prácticas que se llevan a cabo en una situación concreta y los comportamientos verbales y no verbales.
- Permiten contrastar información allí donde se sospeche una posible desviación o distorsión en frente el recuerdo que afecte a los datos.
- Permiten recoger información de los participantes que posiblemente no recogeríamos mediante otras técnicas. Esto sucede cuando los participantes no conocen la importancia de sus comportamientos o no son conscientes de la repercusión, ni origen de estos e incluso no son capaces de traducirlos en palabras.
- Permiten recoger la información de los participantes cuando estos no se expresan a través del lenguaje.
- No precisan de una colaboración tan activa de los participantes como requieren otras técnicas.

Los inconvenientes son:

- No todos los acontecimientos son observables.
- Puede haber cierta resistencia a la presencia del observador y por ellos se recomienda utilizar más técnicas en la recogida de datos.

Rodríguez et al. (1996) exponen que bajo el epígrafe de *sistemas de observación* existen diferentes tipologías. Estos autores, presentan una clasificación en función de técnicas específicas o instrumentos habituales de observación. Los diferentes tipos de observación en función de los instrumentos que presentan son:

- Sistemas categoriales: sistemas cerrados en los que la observación se realiza siempre desde categorías preestablecidas. La identificación del problema se hace desde una teoría o modelo explicativo del fenómeno, actividad o conducta que va a ser observada. El problema parte de un plan para contrastar dicho modelo explicativo y las hipótesis que de él se desprenden, mientras que la observación es el procedimiento para recoger las evidencias que se necesitan para desarrollar ese plan.
- Sistemas descriptivos: son sistemas de observación abiertos donde el observador busca descripciones detalladas y copiosas que permitan validar los esquemas de referencia que utiliza para explicar el fenómeno en cuestión. Según el grado de estructuración se encuentran las observaciones estructuradas, las semiestructuradas y las no estructuradas. La diferencia radica en el grado de precisión que se determina en tanto que lo que se pretende observar, no siempre resulta tan evidente. Según los autores, el observador, a menudo, combina ambos enfoques de modo que puede iniciar su estudio a partir de registros poco definidos de lo que se pretende observar para continuar más tarde desde un enfoque más preciso. Se comienza por una observación descriptiva y no se tiene muy claro aún qué debe observarse y el problema no está lo suficientemente definido como para que la atención se centre en aspectos particulares y significativos. Posteriormente, se sigue con una observación focalizada que responde a cuestiones que son fruto de reflexiones sobre hechos ya observados. Finalmente, se culmina con una observación selectiva (observando aquello que permite contrastar las hipótesis plantea).
- Sistemas narrativos: permiten realizar una descripción detallada del fenómeno que se observa y permiten la identificación de patrones de conducta de los acontecimientos específicos observados, así como la comprensión de los mismos, que más tarde podrán ser comparados con otros casos de forma que se puedan constatar los patrones identificados.
- Sistemas tecnológicos: son sistemas abiertos y fácilmente adaptables a otros sistemas de observación. Las dimensiones del problema quedan registradas de

forma permanente permitiendo una continua revisión de las mismas. El observador puede reproducir tantas veces como necesite la escena observar. Se puede indagar en cualquier tipo de problema y puede plantearse en diferentes formatos: grabación en audio, fotografía, diapositiva o vídeo. El observador debe adoptar el medio que utiliza, la frecuencia del registro, el plano y la selección del lugar de la observación.

Quintanal y García (2012) explican que, según el grado de participación del investigador, se le otorgan diferentes roles:

- Ser un participante completo. Esto sucede cuando el investigador es un miembro más del grupo y conoce muy bien su dinámica.
- Ser un participante observador. Cuando el investigador pertenece al grupo y el resto de los miembros son conocedores del papel del observador.
- Ser un observador no participante. Cuando el investigador no es miembro del grupo que observa tampoco participa en sus dinámicas.

El sistema de observación que se ha llevado a cabo en esta investigación, desde el punto de vista del instrumento que se ha utilizado, es una observación tecnológica a través de los registros de vídeos e imágenes.

Desde el grado de estructuración, se ha realizado una investigación semiestructurada, en tanto que la dinámica de registro ha sido anotar lo que se ha considerado necesario para la investigación obviando o desestimando quehaceres no determinantes para el estudio.

En relación con el grado de participación, se ha desarrollado una observación no participante. Aunque la investigadora es un miembro activo de las EBMV y conoce muy bien las dinámicas de los diferentes grupos observados, los registros en vídeo han sido no participantes. En este sentido, el criterio para registrar los vídeos, con la finalidad de no interferir en la práctica docente aludiendo al posible sesgo del observador y de la cámara, se determinó que fuesen los propios profesionales que filmasen su práctica educativa. Además, se contempló que, de los registros de vídeo para la investigación, se tendrían en cuenta los correspondientes a las últimas sesiones registradas, desestimando los primeros. De esta manera, siguiendo las consideraciones de Rodríguez et al. (1996) los participantes se acostumbran a la cámara y la integran como parte de su cotidiano.

La consigna para los profesionales fue gravar un mínimo de 3 -5 sesiones de juego libre donde se recogía lo que sucedía en las aulas durante el desarrollo de las propuestas de juegos por ambientes.

Siguiendo las consideraciones éticas descritas al final de este capítulo, se realizaron los derechos de registro de las imágenes tanto de los profesionales como de los niños participantes. En este sentido, los profesionales que decidieron grabar las sesiones lo hicieron de forma voluntaria. La única condición que se acordó fue el registro de sesiones consecutivo durante la misma semana y/o semanas si decidían hacer más de 5 registros. Con ello se pretendía que se sintieran cómodos en el actuar, naturales y transparentes, acostumbrándose a la cámara.

Las filmaciones podían ser de plano general o de primer plano. En este sentido, el profesional escogía en función del espacio, de las propuestas que se desarrollaban y del interés de observar ese espacio de juego determinado. De hecho, a lo largo de la investigación, se ha pretendido respetar los intereses de los participantes y, por ello, los registros de vídeo paralelamente pretendían ser registros para la autoobservación de los propios profesionales por si deseaban hacer sus propias observaciones y reflexiones independientes a esta investigación.

La Tabla 16, recoge el número de sesiones registradas por centro y por grupo (pre y post) y las sesiones seleccionadas para su observación. En el caso de la EBMV Horta Vermella, posteriormente a la formación, el equipo decidió mezclar los grupos y trabajar por niveles. Las otras dos escuelas lo siguieron haciendo por aulas.

El criterio para llevar a cabo la observación no participante de las sesiones registradas ha sido ser el último registro realizado y siempre que, con anterioridad, se hayan hecho mínimo 2 registros previos consecutivos. De este modo, se pretende eliminar el sesgo que puede producir la presencia de la cámara.

Tabla 16. Registro de observaciones no participantes.

EBMV	Aula / Nivel Educativo	Número de Sesiones Registrada PRE	Seleccionados Pre	Número de Sesiones Registrada POST	Seleccionados Post
	Xics (0-1a)	0	0	12	1
	Graoners (1-2a)	3	1	3	1
C	Tafaners (1-2a)	0	0	4	1
	Belluguets (2-3a)	4	1	8	1
	Xerramecs (2-3a)	4	1	6	1

Total		11	3	33	6
HV	Xics (0-1a)	0	0	6	1
	Graponers (1-2a)	0	0		
	Tafaners (1-2a)	3	1	8	1
	Belluguets (2-3a)	4	1	10	1
	Xerramecs (2-3a)	3	1		
Total		10	3	24	3
SS	Xics (0-1a)	8	1	10	1
	Graponers (1-2a)	0	0	4	1
	Tafaners (1-2a)	0	0	0	0
	Belluguets (2-3a)	0	0	14	3
	Xerramecs (2-3a)	3	1	10	1
Total		11	2	38	6
Total EBMV		32	8	95	15

Como muestra la Tabla 16, la cantidad de filmaciones en el estudio previo a la formación fue menor que en el posterior. En la previa se recogieron un total de 32 filmaciones, de las cuales se analizaron 8 según el criterio establecido. Posterior a la formación, se recogieron un total de 95 filmaciones y se analizaron 15 según el mismo criterio.

El objetivo de analizar las observaciones no participantes es triangular la información recogida mediante los grupos de discusión, el cuestionario y la documentación.

4.6.3 Cuestionario

Para llevar a cabo esta investigación se ha diseñado el cuestionario CDM-MAT0-3 (Anexo 1). La Tabla 17 recoge las 5 fases que se han contemplado para su diseño, validación y construcción.

Las dos primeras fases tratan sobre la revisión de literatura e investigaciones que permiten diseñar el instrumento. En este sentido, la fase 1 hace alusión a los aspectos metodológicos necesarios para diseñar el instrumento mientras que la fase 2 hace referencia al marco conceptual que se ha considerado (Rincón, et al., 1995). Las fases 3,

4 y 5 se relacionan específicamente con la construcción y validación del instrumento (Vásquez y Alsina, 2015)

Tabla 17. Fases de diseño del cuestionario CDM-MAT0-3.

Fase 1 presentación de una revisión teórica sobre espacios y materiales en la Escuela Infantil en relación con las matemáticas informales.
Fase 2 análisis del tratamiento otorgado al diseño de los espacios y materiales con contenido matemático en el currículo de Educación Infantil 0-3.
Fase 3 construcción de la versión piloto del instrumento.
Fase 4 revisión mediante el juicio de expertos y aplicación piloto.
Fase 5 construcción de la versión final del instrumento

Fase 1: Diseño del cuestionario

La Tabla 18 muestra el objetivo planteado en esta primera fase de desarrollo del cuestionario, la tarea desarrollada y como se ha concretado en el cuestionario.

Tabla 18. Diseño del cuestionario fase 1.

Objetivo	Tarea desarrollada	Cuestionario
Conocer los tipos de cuestionarios, finalidades y estructuras según los expertos en metodología de investigación en educación y diseñar el cuestionario y su estructura general acorde con lo indagado, des de un punto de vista metodológico y con unos criterios de fiabilidad del método.	Lectura y revisión de las aportaciones sobre el diseño, construcción y validación de cuestionarios en diferentes fuentes tales como manuales de investigación en educación e investigaciones educativas.	Diseño y estructura del cuestionario en bloques de contenido. Planteamiento semi-estructurado con preguntas cerradas y abiertas. Procedimiento de administración y calendario a seguir. Preguntas referidas al bloque 1 del cuestionario CDM-MAT0-3. (edad, aula de referencia, titulación, formación continuada, sentimiento de preparación, etc.)

Rodríguez et al. (1999) definen el cuestionario como una forma de encuesta caracterizada por una batería de preguntas que se formulan para recoger un número alto de datos, sobre todo cuantitativos, aunque también puede ser de gran utilidad en la investigación cualitativa. Según los autores, el cuestionario es pertinente cuando el investigador necesita recoger información de un número grande de personas, con un coste mínimo de tiempo y manteniendo un mismo formato común.

Los principales rasgos de los cuestionarios son:

- El cuestionario es un procedimiento de exploración de ideas y creencias generales sobre algún aspecto de la realidad.
- El cuestionario se considera como una técnica más, no la única ni la fundamental, en el desarrollo del proceso de recogida de datos.
- En la elaboración del cuestionario se parte de los esquemas de referencia teóricos y experiencias definidas por un colectivo determinado en relación con el contexto del que son parte.
- El análisis de los datos del cuestionario permite que la información se comparta por participantes en la investigación.
- La administración del cuestionario no produce rechazo alguno entre los miembros de determinado colectivo, sino que es mayoritariamente aceptado y se le considera una técnica útil en el proceso de acercamiento a la realidad estudiada (Rodríguez et al., 1999: 185-186).

Fox (1980) señala las siguientes consideraciones que se han contemplado para su desarrollo:

- Limitación de la extensión del cuestionario para que los sujetos preguntados tengan que dedicar el menor tiempo posible a la tarea de contestarlo.
- Estructuración del modelo de respuesta en el mayor grado posible para reducir al mínimo lo que tienen que escribir los sujetos.
- Redacción del material introductorio de un modo elocuente y sincero para que los sujetos conozcan la finalidad de la investigación y el uso que se hará de los datos y se convenzan de que es una finalidad útil y profesionalmente deseable.
- Arbitrar algún sistema para que los sujetos conozcan, si lo desean, los resultados de la investigación, de modo que el intercambio de información sea una calle de dos direcciones y no de una sola. (Fox, 1980, p. 610)

Cohen y Manion (1990) presentan algunas cuestiones a modo de indicadores para facilitar la formulación de las preguntas de un cuestionario:

- ¿Es importante y relevante su contenido para alcanzar el objetivo formulado?
- ¿La pregunta está bien estructurada?
- ¿La pregunta está bien dirigida pensando con el propósito de investigación?

- ¿La pregunta es válida para estimular las informaciones concretas que se desean recoger?
- ¿La pregunta está planteada de una manera breve y clara?
- ¿Su formulación es sencilla y sin ambigüedades?
- ¿Evita condicionar o sugerir la respuesta a dar?
- ¿Evita irritar o poner nervioso al encuestado/a?
- ¿Intenta no caer en la indiscreción?
- ¿Evita provocar o dar lugar a situaciones de indignación?
- ¿Está adaptada a la comprensión para posibles encuestados/as?
- ¿Evita expresiones academicistas o técnicas y términos o palabras equívocas?
- ¿Está en consonancia con el tipo de vocabulario de los/as encuestados/as?
- ¿Intenta exigir poco de la memoria?
- ¿Evita que el encuestado/a tenga que hacer cálculos mentales numéricos?
- ¿La su redacción mecanográfica es absolutamente impecable?
- ¿La su presentación formal es clara, espaciada y completa?
- ¿Está bien "filtrada", es decir, será contestada sólo por aquellos que pueden o deben responderla?
- ¿La ubicación es lógica en el conjunto de todo el cuestionario?
- ¿Está bien "situada" desde una perspectiva psicosociológica?
- ¿Está bien relacionada en caso de no ser independiente?
- ¿Está preparada para que la respuesta sea fácil y rápida?
- ¿Están las respuestas concebidas de una manera exhaustiva?
- ¿Es difícil hacerla más cerrada?
- ¿Está codificada, es decir, pensada para facilitar su tabulación?
- ¿Manipula la respuesta del encuestado/a?

Teniendo en cuenta estas características y consideraciones, se ha diseñado el cuestionario “CDM-MAT0-3” para recoger información acerca de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales a través de los espacios y materiales.

Los cuestionarios han mantenido un carácter anónimo, pero a los participantes se les asignó un código para poder identificar y emparejar los cuestionarios de la fase pre con la fase post.

Las preguntas que se pueden plantear en un cuestionario pueden ser abiertas o cerradas (Rodríguez et al., 1999; Bisquerra, 2004 y Quintanal y García, 2012) y, en este caso, se han planteado ambas. Por un lado, en las preguntas cerradas la respuesta ya viene dada y el participante tan sólo tiene que elegir. Por otro lado, las preguntas abiertas permiten complementar las preguntas cerradas a modo que el participante exprese su opinión, añada datos y clarifique sus respuestas seleccionadas (Beneyto, 2018).

El diseño del cuestionario ha sido estructurado, partiendo de un orden, con un mismo nivel de preguntas, en igualdad de condiciones y con el mismo formato. En él, se encuentran diferentes bloques de contenido.

El tipo de cuestionario es personal, con la presencia del encuestador y semiestructurado ofreciendo preguntas cerradas, pero dejando la posibilidad de que los participantes añadan alguna respuesta.

En la construcción del cuestionario se diferencian dos bloques de contenido:

1. Primer bloque de contenido: hace referencia a aspectos generales de los maestros y educadores a quienes se les aplicó el cuestionario. Estas preguntas permiten definir la muestra y controlar las variables que se consideraron a priori.
2. Segundo bloque de contenido: se analizan conocimientos didácticos-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través de los espacios y materiales y en relación al currículo y a las programaciones.

Fase 2: Revisión y análisis de la literatura

La Tabla 19, recoge nuevamente los objetivos de esta fase de construcción del cuestionario, las tareas desarrolladas y como se plasman las preguntas en el cuestionario.

Tabla 19. Diseño del cuestionario fase 2.

Objetivo	Tarea desarrollada	Cuestionario
Conceptualizar las matemáticas informales, contenidos y capacidades para desarrollar el pensamiento matemático en la Escuela Infantil 0-3	Revisión teórica las matemáticas informales en la Escuela Infantil.	Bloque 2 pregunta 1: Has tenido la oportunidad de leer/escuchar información acerca del término “matemáticas informales” Bloque 2 pregunta 2:

<p>Analizar el tratamiento otorgado al diseño de los espacios y materiales con contenido matemático en el currículo de Educación Infantil 0-3</p>	<p>Revisión teórica de diferentes investigaciones en relación con los conocimientos de los profesionales entorno a las matemáticas y los procesos de enseñanza y aprendizaje.</p> <p>Revisión teórica sobre espacios y materiales en la Escuela Infantil en relación con las matemáticas informales.</p>	<p>En caso afirmativo, ¿podrías explicar brevemente a qué se refiere?</p> <p>Bloque 2 pregunta 3: Observa los diferentes espacios y materiales que se muestran e indica los contenidos y las capacidades matemáticas que trabaja en ellos.</p> <p>Bloque 2 pregunta 4: En las programaciones donde tu diseñas los espacios y materiales de tu aula se reflejan objetivos entorno al aprendizaje de las matemáticas</p> <p>Bloque 2 pregunta 5: En caso afirmativo, enumera 2 objetivos y describe 2 de las acciones matemáticas que contemplan. En caso negativo, explica los motivos</p>
---	--	---

Para formular las preguntas que hacen referencia al segundo bloque del Cuestionario CDM-MAT0-3, se revisó la literatura sobre los diferentes modelos de conocimiento, como se ha podido recoger en el marco teórico de esta investigación. En este sentido, las preguntas se han centrado en el conjunto de saberes recogidos dentro de los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI) de Alsina y Delgado (2021, 2022) desarrollados ampliamente en el marco teórico de referencia de esta tesis.

Fase 3: construcción de la versión piloto del instrumento.

La Tabla 20 muestra el objetivo de esta fase, las tareas desarrolladas y su concreción plasmada en el cuestionario.

Tabla 20. Diseño del cuestionario fase 3.

Objetivo	Tarea desarrollada	Cuestionario
<p>Construir la versión piloto del instrumento.</p>	<p>Se plantea un cuestionario inicial con diferentes preguntas, partiendo del marco teórico y de las diferentes fuentes en investigación y metodología que facilitaban pautas sobre cómo elaborar un cuestionario. Se revisó juntamente con el director</p>	<p>Se elabora un cuestionario con dos bloques de contenido un bloque relativo a datos generales, que incluye toda la información concerniente a las variables que se pretenden controlar y, un segundo bloque de contenido que pretende</p>

de tesis hasta concretar un primer modelo. recoger los conocimientos matemáticos y didácticos.

La Fase 3 de construcción de la versión piloto del instrumento, consistió en elaborar una primera versión para poderla ofrecer a un grupo de expertos que pudiesen validar el instrumento.

El bloque 1 recoge las preguntas concernientes a la descripción de la muestra y a las variables que se consideran susceptibles a inferir en los resultados:

- La categoría profesional (titulación)
- El sentimiento de preparación para el diseño de los espacios y materiales con contenidos matemáticos.
- La formación inicial y la formación continua.

Las otras preguntas de este mismo bloque son relativas a la descripción de la muestra y facilitan información sobre su heterogeneidad y contexto. Ejemplo de ello son el aula de referencia, el sexo, edad, años de experiencia... (Figura 102).

Cuestionario "CDM-MAT0-3"

Instrumento de recogida de información sobre los conocimientos didáctico-disciplinares, los comportamientos y la valoración de los profesionales de la Escuela Infantil en relación con las matemáticas informales para el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil para la Tesis Doctoral "Espacios, materiales y desarrollo de las matemáticas informales en la Escuela Infantil"

Por favor, contesta las preguntas que se detallan a continuación en silencio y si tiene alguna duda diríjase al encuestador.

1. Identifica la fecha y la hora:
2. Identifica el tipo de contratación laboral
 - a. Personal en plantilla ()
 - b. Personal en sustitución ()
3. Marca el aula de referencia del curso 2016-17:
Lactantes 1-2 2-3 Grupo heterogéneo
4. Sexo (marca con una X): Femenino () Masculino ()
5. ¿Cuál es tu edad?
6. ¿Cuántos años de experiencia trabajando en la Escuela Infantil tienes?
7. ¿Cuál es tu título profesional?
8. ¿Cuán preparado te sientes para diseñar los espacios y materiales bajo criterios matemáticos? (marque con una X)
Muy preparado ()
Medianamente preparado ()
Poco preparado ()
No me siento preparado ()
9. ¿En el diseño de los espacios y materiales que planificas presentas de manera consciente contenidos matemáticos con el objetivo de acercar estos contenidos a los alumnos? (marque con una X)
Si () No ()
10. ¿En tu formación universitaria como maestra o de instituto como educadora tuviste cursos de didáctica de las matemáticas para el ciclo educativo 0-3? (marque con una X)
Si () No ()
11. ¿En tu formación como maestra o de instituto como educadora tuviste cursos de diseño de espacios y materiales para el ciclo educativo 0-3? (marque con una X)
Si () No ()
12. ¿Durante los años que llevas trabajando como maestra o educadora del ciclo educativo 0-3 has realizado algún curso de formación continua en didáctica de las matemáticas?
Si () No ()

Figura 102. Preguntas del cuestionario bloque 1 – datos generales

El Bloque 2 recoge los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través de los espacios y materiales. Para desarrollar las preguntas del

cuestionario se ha partido del nuevamente de los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI) de Alsina y Delgado (2021, 2022). Como se ha presentado en el marco teórico de referencia, presenta diferentes dimensiones con todas sus especificaciones. Ello ha servido para poder discriminar dos tipos de preguntas: unas, relativas a una Dimensión Matemática y otras concernientes a una Dimensión Didáctica Matemática.

En la Dimensión Matemática era necesario saber los conocimientos matemáticos de los profesionales porque, al tratarse de propuestas acordes con el nivel educativo, se podría considerar que cualquier adulto podría enseñarlas. Para poder determinar si los profesionales tienen un conocimiento que va más allá, un conocimiento especializado, se ha diseñado una pregunta genérica y específica de este nivel educativo, apelando al concepto de matemáticas informales. Este concepto se encuentra ampliamente desarrollado en el apartado 3.1 del marco teórico en el que se observa que el conocimiento de este implica un dominio especializado de las matemáticas en las primeras edades.

En un primer momento se formula una pregunta cerrada que permite cuantificar los datos recogidos.

1. ¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer / escuchar información acerca del término “matemáticas informales”?

A continuación, se pregunta:

2. En caso afirmativo, ¿podrías explicar brevemente a qué se refiere?

La pregunta abierta permite contrastar si realmente conocen o no el término y analizar en qué grado de profundidad lo conocen en comparación con el marco referencial.

Al tiempo, para poder recoger más información sobre el conocimiento específico de los profesionales en el diseño de los espacios y materiales con contenido matemático, se plantea la siguiente pregunta:

4. ¿Cuándo haces las programaciones de los espacios y materiales de tu aula, se reflejan objetivos entorno al aprendizaje de las matemáticas?

Esta pregunta de respuesta cerrada, sobre la que el participante ha de responder marcando sí o no, permite de nuevo, desde un punto de vista cuantitativo,

proporcionar datos cuantitativos que determinen el dominio a nivel curricular en las programaciones. Y, a su vez, elaborar comparativas pre-post.

Seguidamente, se les vuelve a preguntar de forma abierta para poder contrastar, ampliar y validar la información si realmente programan con un nivel de conciencia matemático. Para ello, de nuevo, se establece una descripción cualitativa de los datos que en contraposición con el marco teórico de referencia permite determinar si conocen o no currículum del primer ciclo de Educación Infantil, o si lo concretan en sus programaciones acorde con el diseño de los espacios y materiales que proponen en sus aulas.

En relación con la Dimensión Didáctica el cuestionario se centra en dar respuesta al objetivo de esta investigación, el diseño de los espacios y materiales. Por ello, concreta la siguiente pregunta:

3. Observa los diferentes espacios y materiales que se muestran e indica los contenidos y las capacidades matemáticas que se trabaja en ellos.

En este caso, se proporciona una batería de tres imágenes diferentes correspondientes a tres espacios de las propias aulas de las diferentes Escuelas Infantiles Municipales de Vic y correspondientes a los tres niveles.

A cada participante se la asigna una batería de 3 imágenes de manera aleatoria.

Con la descripción de los contenidos y las capacidades que hacen los profesionales, por un lado, desde un punto de vista cuantitativo, se puede cuantificar la frecuencia de aparición de cada contenido y capacidad y determinar así los más recurrentes por cada espacio. También, se pueden establecer comparativas entre espacios y en relación con los conocimientos pre y post a la formación.

Desde un punto de vista cualitativo, se puede determinar qué nivel de conocimiento tienen los profesionales en términos explicativos y de desarrollo de la pregunta:

- Alto nivel de conocimiento: los profesionales describen los espacios y materiales desde la totalidad de elementos (capacidades y contenidos) descritos en interacción y como un conjunto de elementos en interacción desarrollado como un compendio bien estructurado.
- Nivel medio: los profesionales exponen solo parte de los contenidos y de forma parcelada, y establecen solo algunas relaciones. Encuentran algunas

acciones y contenidos evadiendo el cómputo total que se pueden llevar a cabo y las relaciones subyacentes que se establecen entre ellos.

- Nivel bajo: los profesionales encuentran aisladamente algunos contenidos y capacidades, sin establecer relación alguna entre ellos, como una enumeración de acciones o una colección de contenidos y capacidades independientes.

Los conocimientos didácticos se recogen también en las observaciones no participantes y los grupos de discusión con la finalidad de triangular los datos, contrastar y complementar la información desde un punto de vista cualitativo.

Fase 4: Revisión mediante el juicio de expertos

En esta fase se propuso a un total de 10 expertos de diferentes universidades y Escuelas Infantiles que validasen el cuestionario.

La Tabla 21, muestra los objetivos de esta fase, las tareas desarrolladas y su concreción plasmada en el cuestionario.

Tabla 21. Diseño del cuestionario fase 4

Objetivo	Tarea desarrollada	Cuestionario
<p>Crear una plantilla de revisión. Seleccionar un grupo de expertos pertinentes para la revisión. Contactar con los expertos y facilitarles la plantilla de revisión.</p>	<p>Mediante correo electrónico se consultó con diferentes expertos a fin de validar este cuestionario y determinar si era pertinente para su finalidad. Se creó una plantilla de revisión según los criterios establecidos en fuentes bibliográficas e investigaciones concernientes.</p>	<p>Construcción de una pauta de valoración del cuestionario donde los expertos, para cada pregunta y contenido del cuestionario pueden aportar una revisión y sugerir cambios.</p>

La selección del grupo de expertos fue contemplando que sus especialidades fueran vinculadas a la materia de estudio de esta investigación. Por ello, el grupo de expertos seleccionados fueron:

Cinco expertos en el diseño de espacios y materiales en las Escuelas Infantiles:

- 1 formadora en el diseño espacios y materiales del Departamento de Educación.
- 1 formadora de Reggio Emilia experta en el diseño espacios y materiales de las Escuelas Infantiles – Formador del Departamento de Educación.
- 1 formadora de Reggio Emilia experta en el diseño espacios y materiales de las Escuelas Infantiles – Profesora de la Universidad de Vic.

- 1 directora Escuela Infantil Municipal y profesora asociada de la Universidad de Vic.
- 1 doctora en educación y profesora de la Universidad de Vic, en la especialidad de magisterio en Educación Infantil.

Cinco expertos en la didáctica o didáctica de las matemáticas en la Escuela Infantil:

- 1 profesor de la Universidad de Girona del departamento de didácticas específicas en matemáticas.
- 1 profesora de la Universidad de Barcelona departamento de didácticas específicas en matemáticas.
- 1 profesor de la Universidad de Vic del Departamento de Didáctica de las Artes y de las Ciencias.
- 1 directora de las Escuelas Infantiles Municipales de Girona vinculadas directamente a la investigación en el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades.
- 1 directora de las Escuelas Infantiles Municipales de Girona vinculadas directamente a la investigación en el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades.

Vía correo electrónico, se envió la solicitud a los diferentes expertos con la finalidad de que pudiesen hacer una revisión. Para ello, se facilitó un texto introductorio que contextualizaba la investigación y explicaba la finalidad del cuestionario, se les proporcionaba un ejemplo de cuestionario, y se les ofrecía una plantilla de respuesta y validación donde los expertos podían hacer una corrección y aportación de cada una de las preguntas a modo de análisis del grado de correspondencia, pertinencia y la formulación. Se reenvió el mail 3 veces dejando 15 días naturales entre envío y envío a título de recordatorio. En el Anexo 2 se recoge ejemplo del correo electrónico e instrucciones de corrección junto la plantilla de validación.

Por lo que se refiere a la plantilla de validación, cabe destacar que se revisa el grado de correspondencia, la formulación y la pertinencia.

Una vez valoradas todas las aportaciones de los expertos que revisaron el cuestionario, se consideró suficiente la revisión en tanto que sus aportaciones consolidaban el instrumento más que cuestionarlo. De este modo, se da lugar a la fase de construcción

de la versión final del instrumento, en la que se incorporaron las aportaciones que hicieron los diferentes expertos.

Fase 5: Construcción de la versión final del instrumento

La Tabla 22 muestra el objetivo de esta fase, las tareas desarrolladas y su concreción plasmada en el cuestionario.

Tabla 22. Diseño del cuestionario fase 5.

Objetivo	Tarea desarrollada	Cuestionario
Construir la versión final del instrumento.	Recogidas las aportaciones de los diferentes expertos e incorporadas al cuestionario y, consensuado con el director de tesis, se considera válido el instrumento y se procede su administración.	Consultar cuestionario final anexo 1

Concretamente, las aportaciones de los expertos destacaban que, en los tres ámbitos: pertinencia, correspondencia y formulación, el cuestionario responde adecuadamente y está muy bien planteado. Las aportaciones que se plantearon fueron incorporadas de forma ágil en el cuestionario. En concreto, se estimó, en relación con la correspondencia respecto al bloque 1 junto la opción de marcar el nivel (0-1, 1-2 y 2-3), la posibilidad de introducir una casilla para marcar un grupo heterogéneo.

En relación con la formulación, se estimó la posibilidad de un cambio en el género en tanto que inicialmente el cuestionario estaba formulado en femenino singular. Por ello, se produce un cambio en el género y se formulan las preguntas a modo impersonal sin hacer alusión al género.

También, se consideró oportuno añadir una pequeña introducción al cuestionario y llevar a cabo una presentación del este a nivel oral.

Finalmente, en relación con la formulación, se apunta que hay una pregunta con ciertas dificultades de comprensión. Concretamente, la pregunta del bloque 2 que se refiere al análisis de las imágenes a partir de contenidos y capacidades. Por ello, se corrige la pregunta y se reformula de manera más clara.

En la primera fase, previa a la formación, se administró el cuestionario a los 30 profesionales de la muestra. Posteriormente, se administró 28 en tanto hubo 2 bajas

durante el curso. Por lo tanto, 2 de los cuestionarios previos se descartaron siendo la muestra final del estudio de 28 participantes.

Para poder analizar la información y presentar los resultados, se numeró cada cuestionario asignándoles un número del 1 al 30 y se determina que el código que se va a utilizar en la presentación de resultados sigue el mismo criterio que en el grupo de discusión: primero se nombra el instrumento, a continuación, se destaca el momento en que se ha llevado a cabo (previo o posterior a la formación) y, finalmente, el número de participante. Por ejemplo: C-PRE-1.

4.6.4 Recogida de información a través de documentos

Quintanal y García (2012) exponen que el análisis de documentos puede servir para acceder a información que, mediante otras técnicas, resultaría muy complejo o no sería viable. Definen esta técnica como la que se utiliza para revisar de forma sistematizada fuentes documentales con la finalidad de otorgarles un trato “científico”. Las fuentes documentales consultadas pueden ser primarias o secundarias. El análisis del contenido conlleva al cumplimiento de ciertas condiciones que se han considerado:

- Objetividad, analizando las evidencias documentales.
- Sistematización, estableciendo claramente un criterio de análisis categórico.
- Cuantificable, traduciendo los datos para que puedan ser tratados estadísticamente.
- Manifiesto, aplicándose sobre el contenido manifiesto, dejando fuera los aspectos implícitos o soterrados.

Según estos autores, el procedimiento de análisis parte de:

- Definir el objeto de análisis, determinando los objetivos perseguidos por la investigación, la elección del tipo de documento y las unidades de contenido dentro del documento que se van a considerar.
- Definir la naturaleza del análisis, concretando las unidades de muestreo, unidades de contexto y unidades de registro.
- Definir las categorías y determinar el sistema de codificación. Las categorías deben ser exhaustivas, mutuamente excluyentes, homogéneas, productivas, significativas y replicables.

En concreto, en esta investigación, se parte de fuentes documentales primarias. Para este trabajo se toman las fichas de planificación de material y diseños de espacios elaboradas por los profesionales después de la formación. También se recogen las presentaciones que elaboraron posteriormente a la formación para exponer los nuevos diseños de espacios y materiales. No se han podido analizar los documentos antes de la formación debido a su inexistencia. Antes de la formación, los profesionales no planificaban utilizando soporte documental los espacios y materiales con contenido matemático.

El objetivo de este análisis documental es triangular con la información recogida mediante el grupo de discusión y el cuestionario para validar, refutar, complementar las categorías establecidas. En este sentido, el análisis documental se centra en detallar qué contenidos y capacidades matemáticas presentan los profesionales después de la formación, en qué frecuencia aparecen y como los desarrollan. Así mismo, se recoge qué tipos de materiales y espacios se diseñan y con qué frecuencia aparecen y contenido aparecen.

4.7 Técnicas de análisis de datos

Según Rodríguez et al. (1999), “la recogida de datos no es suficiente en sí misma, los datos no son más que un material bruto a partir del cual el investigador debe realizar las operaciones oportunas que lleven a estructurar el conjunto de información en un todo coherente y significativo” (p. 197). Definen el análisis de datos como un conjunto de manipulaciones, transformaciones operaciones, reflexiones, comprobaciones que se realizan sobre los datos a fin de extraer el significado relevante en relación con un problema de investigación. En este sentido, se tiene que examinar sistemáticamente todos los datos recogidos a partir de los diferentes instrumentos, delimitar partes y descubrir las relaciones entre las mismas y las relaciones con el todo.

Para llevar a cabo el análisis de los datos cualitativos en esta investigación, se parte de un análisis de contenido temático. Piñuel (2002) define el análisis de contenido como el conjunto de procedimientos interpretativos de productos “comunicativos (mensajes, textos o discursos) que proceden de procesos singulares de comunicación registrada previamente, y que, basados en técnicas de medida, a veces cuantitativas, a veces cualitativas (lógicas basadas en la combinación de categorías) tienen por objeto elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones mismas en que se han

producido aquellos textos, o sobre las condiciones que pueden darse para su empleo posterior” (p. 2). Este proceso conlleva una codificación que permite destacar las características relevantes de un mensaje como unidades de contenido que permiten su posterior descripción, análisis preciso y agrupación. Para codificar, es necesario definir el universo, el ámbito o las unidades de análisis y las categorías de análisis (Saldaña, 2013).

Con la finalidad de establecer el proceso de análisis, se determina comenzar por el grupo de discusión. El debate – coloquio que se desarrolló antes de la formación con los diferentes participantes fue el comienzo de la recogida de información y, a su vez, facilitó el diseño de la formación. Al tiempo, el grupo de discusión fue el último contacto con los participantes y permitió recoger información muy relevante para este estudio. Ambos momentos fueron claves para recoger información cualitativa sobre las necesidades formativas, los conocimientos que expresaban tener y en los que les gustaría profundizar. Se determina que la información que se recoge de estos grupos de discusión es muy próxima, rica y diversa, y puede establecer las categorías que van a dar lugar al esqueleto de análisis de esta investigación. Para ello, se comienza con el análisis de los grupos de discusión a partir del método de análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990; López, 2002). En primer lugar, se transcriben los datos, obteniendo los datos sucios. A continuación, se van definiendo las diferentes códigos y categorías (Saldaña, 2013).

Según Saldaña (2013) existen diferentes tipos de codificaciones: estructurales, descriptivas, de atributos, in vivo, etc. En el caso de esta investigación se parte de las codificaciones estructurales porque vienen directamente de categorías que responden a la pregunta de investigación. Para ello, se establecen a priori códigos (conceptos) vinculados directamente con la pregunta de estudio. A cada código, se le atribuyen diferentes categorías y subcategorías respondiendo al conjunto teórico de conocimiento matemático y didáctico en Educación Infantil presentado por Alsina y Delgado (2021, 2022). A cada categoría o subcategoría, se le asignan los segmentos de información vinculantes. Todos los segmentos similares se colocan juntos para una codificación más precisa y para su análisis posterior. Los segmentos de información que no responden a ninguna categoría preestablecida dan lugar a nuevas categorías de tipo deductivo que complementan la estructura inicial planteada.

Este proceso de codificación y categorización se desarrolla a partir de 4 etapas:

- 1°. Una vez transcritos los grupos de discusión se van comparando los datos y estableciendo los primeros códigos. A estos códigos se les va asignando fragmentos de texto que, a su vez, permiten ir redefiniendo los códigos iniciales. Estos códigos, se agrupan en las categorías establecidas. Las categorías que se van estableciendo son de carácter inicialmente inductivas y se complementan con nuevas categorías que aparecen de carácter deductivo.
- 2°. Se repite el procedimiento para desarrollar la integración de cada categoría con sus propiedades, determinado al máximo los conceptos que contienen.
- 3°. Se procede a una nueva repetición para delimitar bien las categorías refinando los conceptos y estableciendo posibles subcategorías.
- 4°. Para cada categoría se establecen definitivamente sus subcategorías y, concretamente, siguiendo el proceso de saturación de los indicadores, se recogen tres evidencias de cada subcategoría.

Las categorías que se establecen mediante el análisis de los grupos de discusión se estructuran y organizan en la Tabla 23.

Tabla 23. Códigos, categorías y subcategorías de los grupos de investigación.

CÓDIGO	CATEGORIA	SUBCATEGORIAS
Conocimiento matemático de los profesionales de la Escuela Infantil.	Conocimientos matemáticos intuitivos e informales.	Conocimiento específico del desarrollo del pensamiento matemático de los niños de los 0 a los 3 años.
	Conocimiento de los contenidos matemáticos.	Conocimiento sobre las capacidades y contenidos matemáticos que pueden desarrollar los niños de los 0 a los 3 años.
Conocimiento didáctico de los profesionales de matemáticas de la Escuela Infantil.	Conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza de las matemáticas.	Conocimiento sobre los materiales que se pueden ofrecer a los niños de los 0 a los 3 años.
		Conocimiento sobre qué, cómo y cuándo presentar los materiales para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los 0-3 años.
	Conocimiento sobre las orientaciones curriculares.	Conocimiento sobre la planificación y gestión del aula.
	Conocimiento entorno al papel del educador que acompaña los aprendizajes matemáticos de los niños de los 0-3 años.	Conocimiento entorno a los objetivos de aprendizaje de los 0-3 años entorno las matemáticas informales.
		Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto durante el desarrollo del juego del niño.

Una vez desarrollado el análisis de los grupos de discusión, se continúa con el mismo procedimiento para el análisis cualitativo de los cuestionarios. En este caso, se parte de un proceso de categorización mixta: inductiva porque se basa en las categorías previas correspondientes a los grupos de discusión y deductiva porque aparecen nuevas. Para ello, se repite el procedimiento anterior.

Para el análisis de las observaciones no participantes mediante los vídeos, se ha utilizado igualmente el método de análisis de contenido. En este caso, se ha seguido un método de anotación manual y se ha desarrollado un registro, etiquetando y anotado los segmentos, categorizando de este modo la información y siguiendo el mismo procedimiento que para los grupos de discusión.

Como se describe en el apartado 4.6.2 Observación no participante, en el que se presenta el registro de observaciones no participantes, se analizan 8 sesiones antes de la formación y 15 después de la formación. Para distinguir cada uno de los vídeos, se les ha asignado un código que responde a: NOMBRE DE LA ESCUELA_ MOMENTO EN QUE SE HACE EL REGISTRO (PRE/POST) NIVEL EDUCATIVO Y AULA_ NÚMERO DE SESIÓN. Por ejemplo: EBMV_HV_PRE_1-2aG_s5

Para poder recoger las evidencias, se ha transcrito el discurso de los profesionales durante la sesión registrando los minutos en que hacen las intervenciones correspondientes y se selecciona la imagen que acompaña el texto.

Para el análisis de las documentaciones, nuevamente, se ha seguido con el mismo procedimiento de análisis de contenido. Para ello se ha seguido el método manual de anotación del mismo modo que con los vídeos.

Para el análisis cuantitativo de los datos recogidos en el cuestionario, se han transformado los datos textuales en datos numéricos dándoles un tratamiento estadístico tal y como se ha definido en el apartado 4.6.3 Cuestionario, con el objetivo de contrastar y complementar las conclusiones obtenidas por vías cualitativas (Rodríguez et al., 1996)

El análisis estadístico se ha desarrollado mediante el programa SPSS gracias al soporte técnico de la asesoría AOResearch, aplicando la ley orgánica 15/1999 de Protección de Datos y de acuerdo con las buenas prácticas biométricas.

En general, el análisis estadístico se ha realizado describiendo las categorías según el número y el porcentaje de casos de cada categoría. Las variables continuas han estado descritas mediante estadísticos de tendencia central como la mediana y la desviación estándar. El análisis bivariado se ha realizado mediante Tablas de datos cruzadas. La inferencia estadística se ha trabajado con un nivel de confianza del 95%.

Previo a cualquier inferencia, se ha utilizado el test de Kolmogorov-Smirnov para evaluar la distribución de las variables. Según los resultados del test, se han utilizado test paramétricos (chi cuadrado, T-Student, etc.) o no paramétricos (Exacto de Fisher, Mann-Whitney, etc.).

El objetivo de análisis a través del cuestionario es triangular la información con los datos recogidos mediante los grupos de discusión, las observaciones no participantes y los documentos analizados, verificando, ampliando, contrastando las categorías.

Tanto el análisis cualitativo como cuantitativo del contenido del cuestionario y de los otros instrumentos o técnicas (análisis de documentación y observaciones no participantes) sirve para refinar, complementar, verificar, contrastar y/o refutar las categorías establecidas en el análisis del grupo de discusión.

Este procedimiento de triangulación tiene 3 finalidades:

1. Confirmar las categorías de los grupos de discusión.
2. Refinarlas.
3. Establecer categorías nuevas.

Para la triangulación se ha procedido a desarrollar el siguiente procedimiento:

- a) Para confirmar las categorías: se procede a visualizar los vídeos (observación no participante) tantas veces como sea necesarias para detectar los fragmentos y situaciones, etc. correspondientes donde, se evidencien o confirmen las categorías establecidas en el grupo de discusión. Al tiempo, se procede hacer lo mismo con los datos recogidos mediante los cuestionarios y la documentación.
- b) Para refinar categorías: se procede a una nueva visualización de los vídeos para ajustar las categorías de los grupos de discusión en función de si se puede mejorar. Al tiempo se vuelve a revisar la información categorizada de la documentación y del cuestionario.

- c) Para las nuevas categorías, se sigue el mismo procedimiento de saturación donde han de confluír mínimo 3 indicadores o evidencias. En este sentido, se contrasta la información procedente de todos los instrumentos o técnicas.

4.8 Consideraciones éticas

En el desarrollo de esta investigación se ha considerado los principios éticos que se describen en la *Guía Ética para la Investigación en Educación* elaborada por la Asociación Británica de Investigación Educativa (2019) y en el Protocolo para la Protección de la Infancia elaborado por la Universidad de Girona. En este sentido, se han contemplado los siguientes aspectos: el consentimiento, la transparencia, el derecho a retirarse, la privacidad y el almacenamiento de los datos y la divulgación de la investigación.

Por ello, en primer lugar, se informó a todos los participantes y se garantizó la disponibilidad y acceso a toda la información que precisasen vinculada al objeto de estudio. Además, el acceso al campo se negoció y consensuó con la dirección y coordinación de los centros, así como con los miembros de los tres equipos educativos. De hecho, se informó a los profesionales del estudio y participaron aquellos que dieron su consentimiento expreso y facilitaron el acceso al campo (observaciones no participantes) que ellos mismos consideraron. Del mismo modo, se solicitó el consentimiento a las familias a las que debidamente se les informó de los procedimientos y de los fines de la investigación.

En segundo lugar, se ha garantizado la confidencialidad y la protección de datos referentes a la identidad de los participantes siendo conscientes de la responsabilidad que conlleva la obtención y el análisis de los datos obtenidos. En este sentido, el cuestionario era anónimo y se emparejó el pre y el post mediante las preguntas del bloque 1 relativas a la descripción de la muestra. Además, delante de la publicación de imágenes donde fácilmente se reconoce al niño o la niña porque muestra claramente su rostro, se informó a la familia y se le solicitó un consentimiento expreso para su publicación. Se puede consultar el anexo número 3 como muestra del documento que firmaron los participantes concedores de la investigación, expresando su consentimiento. También, cabe destacar, que, a lo largo de este trabajo, los nombres de los participantes han sido debidamente protegidos, cambiando los nombre por una inicial.

También se informó a los participantes de su derecho a retirarse de la investigación en cualquier momento y, a lo largo del estudio, se les comunicó periódicamente el proceso de la investigación. En este sentido, a lo largo del estudio, se han llevado a cabo registros del proyecto e informes de seguimiento que han estado a disposición de los participantes y autoridades durante toda la investigación.

RESULTADOS

Capítulo 5. Resultados

Presentación

A continuación, se presentan los resultados según los objetivos de investigación planteados. Para cada uno de los objetivos específicos, la Tabla 24 muestra las categorías establecidas antes y después de la formación. A partir de estas categorías, se van describiendo los resultados obtenidos. En primer lugar, se presentan todos los resultados obtenidos antes de la formación. A continuación, se presentan los resultados obtenidos después de la formación y se van realizando las comparaciones entre el pre y el post a medida que se van exponiendo (por orden según las categorías establecidas).

Tabla 24. Resultados de investigación.

Fase 1: Pre formación	
Objetivo general	
1. Analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático los niños de 0 a 3 años, antes de la formación.	
Objetivos específicos	Categorías
1.1 Analizar los conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3.	<ul style="list-style-type: none">- Conocimiento Matemático Intuitivo e Informal.- Conocimiento de las cualidades sensoriales.- Conocimiento de los números y las cantidades.- Conocimiento de las posiciones y las formas.- Conocimiento de los atributos mensurables.
1.2 Analizar los conocimientos didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3.	<ul style="list-style-type: none">- Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia.- Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil.- Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto durante el desarrollo del juego del niño.- Conocimiento sobre las orientaciones curriculares.
Fase 3: Post Formación	
Objetivo general	
2. Analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático los niños de 0 a 3 años, posteriores a la formación.	

Objetivos específicos	Categorías
2.1 Analizar los conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3.	<ul style="list-style-type: none"> - Conocimiento Matemático Intuitivo e Informal. - Conocimiento de las cualidades sensoriales. - Conocimiento de los números y las operaciones. - Conocimiento de las posiciones y las formas. - Conocimiento de los atributos mensurables.
2.2 Analizar los conocimientos didácticos de los profesionales de la Escuela Infantil para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 0 a 3.	<ul style="list-style-type: none"> - Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia. - Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil. - Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto durante el desarrollo del juego del niño. - Conocimiento sobre las orientaciones curriculares.

5.1 Conocimiento matemático de los profesionales de la Escuela Infantil antes de la formación

Como se ha descrito en el cuarto capítulo, se recogen aportaciones que destacan tanto en los grupos de discusión como en los cuestionarios sobre el conocimiento matemático de los profesionales de la Escuela Infantil antes de la formación. En cuanto a la documentación, se evidencia que no existen informes previos a la formación. Tampoco se hacen planificaciones o programaciones que describan cuales son los contenidos u objetivos que se plantean los profesionales para el diseño de los espacios y materiales.

Para exponer con detalle los resultados, se establecen diferentes categorías correspondientes a este ámbito que parten de los *Conocimiento para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI)* descritos por Alsina y Delgado (2021, 2022):

- Conocimiento Matemático Intuitivo e Informal (C-IeI).
- Conocimiento de las cualidades sensoriales.
- Conocimiento de los números y las operaciones.
- Conocimiento de las posiciones y las formas.
- Conocimiento de los atributos mensurables.

Para cada una de las categorías, se añaden los datos obtenidos a través de los diferentes instrumentos: en primer lugar, se presentan los resultados de los grupos de discusión, seguidamente, se presentan los resultados del cuestionario (primero desde un punto de vista cuantitativo y, a continuación, desde un punto de vista cualitativo).

5.1.1 Conocimientos Matemáticos Intuitivos e Informales (C-IeI)

Antes de la formación, los profesionales muestran la necesidad de incorporar conocimientos específicos sobre qué son las matemáticas intuitivas e informales. Este hecho queda reflejado en la Tabla 25, en la que se muestra cómo los profesionales expresaban la necesidad de comprender las matemáticas que pueden desarrollar los niños y las niñas de 0 a 3 años.

Tabla 25. Necesidades formativas.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-4 GD-PRE-5	HV	Espero conectar conocimientos teóricos con las acciones y relacionar la práctica que ejercemos durante nuestro día a día junto a los niños con la teoría que explica lo que están haciendo. Necesitamos saber identificar las acciones matemáticas que ellos realizan y reconocerlas. Sé que hay matemáticas en todas partes porque es un hecho estudiado, pero no sé explicarlas ni detectarlas conscientemente.
GD-PRE-6	HV	Lo que más me inquieta cuando un niño está apilando es saber qué proceso está haciendo. Permanencia del objeto. Sé detectar qué proceso está siguiendo, pero no sé qué hay detrás de eso. ¿Cómo se está construyendo el pensamiento de ese niño? Quiero dar respuesta a esta pregunta a través de esa formación.
GD-PRE-7	HV	Sí y más ahora que queremos profundizar en la documentación; diarios, aula, con las mesas de experimentación, con las huchas, con el heurístico. Necesitamos saber qué acción matemática está haciendo el niño y qué representa. Sabes que todo es matemática, pero no sabes qué matemáticas, ni cómo se representan. Son siempre los mismos genéricos. Y eso nos pasa con las libretas del aula; ves que todo es matemática, pero no sabemos explicarlo porque no lo sabemos.

Los datos recogidos en el cuestionario reafirman esta necesidad de conocer qué matemáticas corresponden a los niños de los 0 a los 3 años. En relación con la pregunta formulada a través del cuestionario: *¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término "matemáticas informales"?* los resultados, desde un punto de vista cuantitativo, muestran que antes de la formación solo 5 (17.9%)

manifestaban haber leído o escuchado sobre las matemáticas informales, versus 22 (82.1%) que expresaron no haber tenido oportunidad (Figura 103).

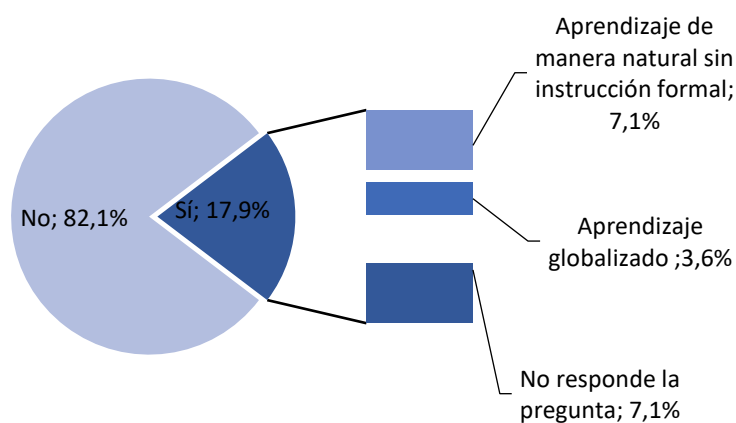


Figura 103. ¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término “matemáticas informales”?

En caso de responder afirmativamente, se pedía a los participantes que aportasen una definición del concepto. Recogiendo la información cualitativa, se desprende que de estos 5 (17.9%) que responden afirmativamente, solo 2 son capaces de aportar una aproximación a la definición (7.1%). En ambos casos, como muestra la Tabla 26, apuntan ideas vinculadas a las matemáticas informales, pero no desarrollan una definición completa.

Tabla 26. Definiciones del término “matemáticas informales” previas a la formación.

PARTICIPANTE	CITA
C-PRE -29	Son aquellas que se tratan en la vida cotidiana y de una manera llana: como cuando pedimos si quiere más, cuando necesitas algo lleno o vacío, cuando se va a construir algún elemento u objeto de forma específica: cantidades para hacer un pastel o construir alguna cosa.
C-PRE- 26	Me interesa todo lo que puede ayudar a trabajar con los niños. Lo que he ido conociendo me ha hecho ver la importancia que tiene el orden, las seriaciones, las asociaciones, las clasificaciones... llevarlo todo a la cotidianidad y a dar herramientas necesarias a los niños.

Los 4 (14.4%) restantes que afirmaron haber leído o escuchado el término “matemáticas informales”, no son capaces de aportar ninguna definición que añada información (Tabla 27). De este modo, encontramos que únicamente 2 (7.1%) profesionales de 28 son

capaces de responder haciendo una aproximación vinculante al concepto de matemáticas informales.

Tabla 27. Aproximaciones al término “matemáticas informales” antes de la formación.

PARTICIPANTE	CITA
C-PRE-31	He buscado información y he leído algún libro que me ha caído en las manos.
C-PRE-7	Durante el cuarto curso de carrera asistí a unas jornadas de matemáticas impartidas por el profesor Toni Martín: “Los algoritmos tradicionales han muerto” y en ellas había un pequeño apartado dedicado a las matemáticas dentro de la etapa 0-3, así como también de segundo ciclo de infantil y primaria.
C-PRE-3	Se entiende que las matemáticas están implícitas en muchas disciplinas, pero algunos contenidos se trabajan sutilmente en segundo término. Creo que se trata de todos los contenidos matemáticos que se pueden trabajar a partir de las diferentes materias, disciplinas que estrictamente no forman parte de las matemáticas.

En términos generales, los datos recogidos en el grupo de discusión previo a la formación muestran que los profesionales entendían como capacidades las acciones de: llenar, vaciar, poner, quitar y discriminar los tamaños. Como contenidos, destacaron el reconocimiento de los colores, las texturas, mas, menos, mucho, las formas, el peso y el tamaño. Antes de la formación, los participantes detallaron, en parte, algunos contenidos y algunas capacidades propias de estas matemáticas informales (Tabla 28).

Tabla 28. Capacidades y contenidos destacados en el grupo de discusión previo a la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-3	HV	Cuando pienso en las matemáticas en la escuela me vienen pues, llenar, vaciar, poner encima, debajo, mas, menos, mucho, 1, 2, 3... los colores, las texturas. El peso, si pesa mucho o poco.
GD-PRE-5	HV	Si yo pienso en los colores, las texturas, los pesos de los objetos, el cesto de los tesoros, el juego heurístico, la mesa de experimentación y los números también, aunque no se ven.
GD-PRE-1	HV	Yo creo que las capacidades y los contenidos es lo mismo. Es decir, la capacidad de llenar un vaso con arena y vaciarlo y el contenido de lleno y vacío. Por eso encontramos los pesos cuando cogen los materiales, los colores cuando los observan... Si claro. Es verdad.
GD-PRE-8	HV	Entonces las capacidades o contenidos son llenar, vaciar, más, menos, mucho, reconocer los colores, las texturas, las formas de las cosas, el peso, si son grandes o pequeñas... si pesa mucho o poco.

Mediante el cuestionario, se pedía a los participantes que listasen los contenidos y las capacidades matemáticas que podían aparecer en la Escuela Infantil. Una de las preguntas

se basaba en observar una batería de imágenes con espacios y materiales e indicar los contenidos y capacidades matemáticas que se trabajaban en ellos. Otra de las preguntas fue detallar los objetivos matemáticos que establecían en las programaciones para el diseño de los espacios, los materiales y sus contenidos vinculados. Según el marco teórico de referencia expuesto en el capítulo 2, en el primer ciclo de Educación Infantil se pueden destacar 29 contenidos vinculados a los 4 bloques de los contenidos referenciados: cualidades sensoriales (álgebra temprana), cantidades continuas y discretas (números y operaciones), posición y forma y atributos mensurables. Los datos que se presentan a continuación parten de la identificación o no de estos 29 contenidos y capacidades.

Por un lado, la primera tarea de identificar los diferentes contenidos y capacidades matemáticas de las baterías de imágenes, como recoge la Tabla 29, contiene el primer cuestionario que presenta una media de 12.5 contenidos/capacidades por participante.

Tabla 29. Contenidos y capacidades matemáticas detectados en las imágenes por participante antes de la formación.

Total contenidos	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p- valor
Primer Cuestionario	28	5	9	12.5	13	16	20	3.9	0.501

Los contenidos y capacidades que encuentran los participantes responden a los contenidos que se destacan en el grupo de discusión. Como se observa en la Figura 104, se destacan el número de profesionales que ha detectado contenidos vinculados a cada bloque.

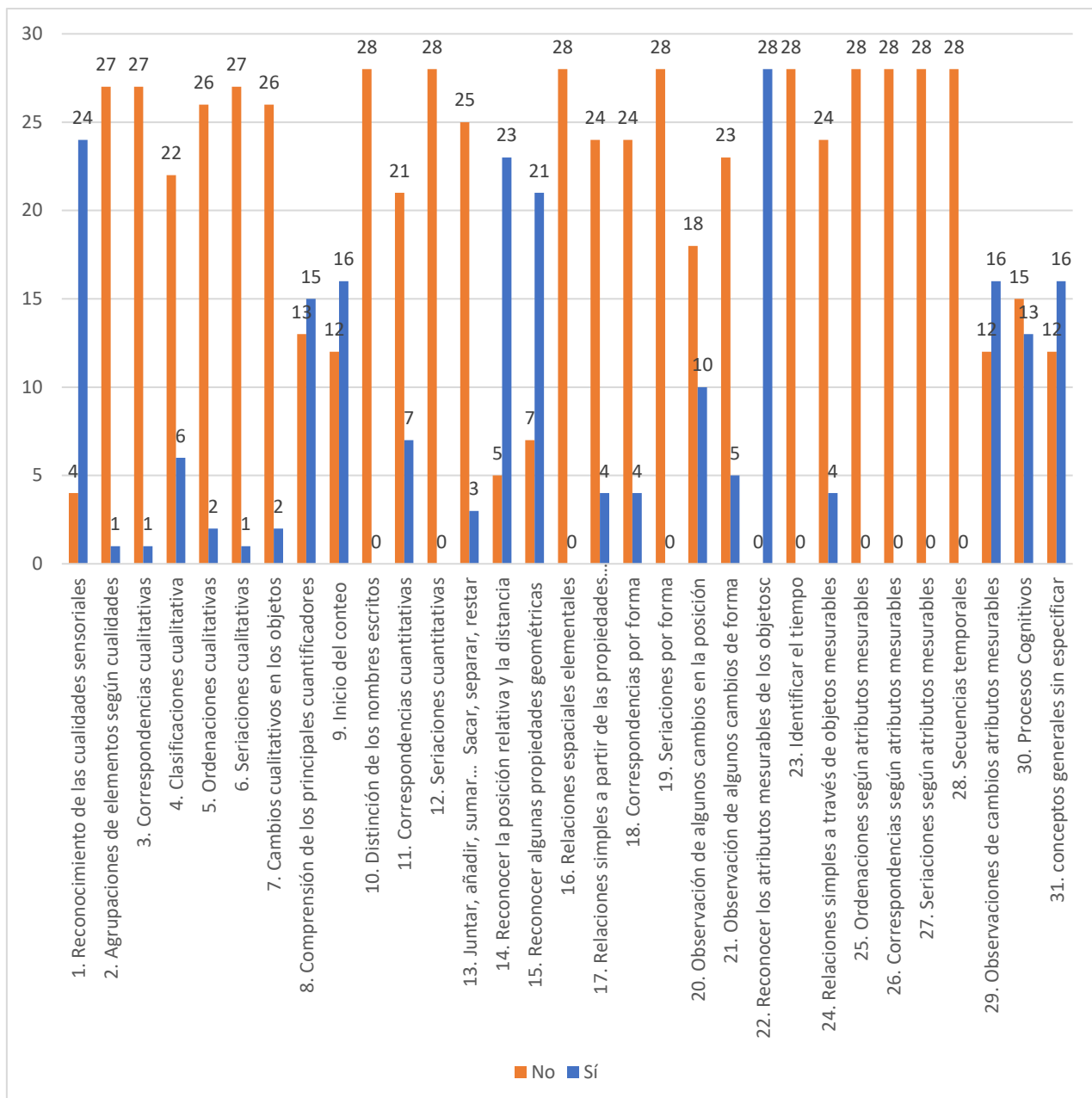


Figura 104. Contenidos y capacidades detectadas por los profesionales en las imágenes antes de la formación.

Los datos que aporta la Figura 104 muestran los contenidos que se han detectado mayormente contra a otros que no han sido detectados. Cabe destacar que, para identificar los contenidos existentes en las matemáticas intuitivas e informales y partiendo del marco teórico de referencia como se ha descrito en el capítulo 2, los contenidos y capacidades matemáticas propias de estas primeras edades son 29, repartidos en los distintos bloques de contenidos descritos. De la totalidad de contenidos y capacidades, los que han presentado mayor frecuencia de aparición son: reconocer atributos mensurables,

reconocer las cualidades sensoriales, reconocer la posición y reconocer la forma. De todos ellos destacan los tres primeros, los que la mayoría o todos los participantes tienen en consideración. La Tabla 30 muestra por orden de aparición, de mayor a menor, los contenidos y el número de participantes que los han destacado. En este sentido, se recogen resultados muy diversos en función del bloque de contenido (cualidades sensoriales, cantidades continuas y discretas, posición y forma y atributos mensurables) o la capacidad (identificar, relacionar y observar cambios).

Tabla 30. Contenidos detectados antes de la formación por número de participantes.

Contenidos detectados	Número de participantes
- Reconocer los atributos mensurables de los objetos	28 (100%)
- Reconocimiento de las cualidades sensoriales	24 (86.4%)
- Reconocimiento de la posición	23 (82.8%)
- Reconocimiento de la forma	21 (75.6%)
- Observación de cambios a partir de atributos mensurables	16 (48%)
- Inicio del conteo	16 (48%)
- Principales cuantificadores	15 (54%)
- Observación de cambios en la posición	10 (36%)
- Correspondencias cuantitativas	7 (25.2%)
- Clasificaciones cualitativas	6 (21.6%)
- Observación de algunos cambios de forma	5 (18%)
- Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas	4 (14.4%)
- Correspondencias por forma	4 (14.4%)
- Relaciones simples a través de objetos mensurables	4 (14.4%)

La Tabla 30 muestra cómo solo los 7 primeros (13%) contenidos de los 29 existentes, son detectados por como mínimo la mitad de los profesionales (15; 50%), o más. Los otros contenidos restantes son detectados por menos de la mitad de los profesionales.

Como dato a destacar, se observa que la capacidad de reconocer estos contenidos es más recurrente versus la de observar, que es menor. Todos los profesionales reconocen atributos mensurables, reconocen las cualidades prácticamente todos, (24 de 28; 86.4%), reconocimiento de la posición 23 (82.8%) y reconocimiento de la forma 21 (75.6%).

El gráfico anterior muestra también que existen contenidos propios de las matemáticas informales en el primer ciclo de Educación Infantil que no aparecen o aparecen de forma

poco recurrente, mencionados por 3 (10.8%), o menos, profesionales. En la Tabla 31, se muestra la poca frecuencia o inexistencia de aparición de los 15 contenidos restantes.

Tabla 31. Contenidos no detectados o poco frecuentes antes de la formación.

Contenidos detectados	Número de participantes
- Juntar, añadir, sumar... Sacar, separar, restar	3 (10.8%)
- Ordenaciones cualitativas	2 (7.1%)
- Cambios cualitativos en los objetos	2 (7.1%)
- Agrupaciones de elementos según cualidades	1 (3.6%)
- Correspondencias cualitativas	1 (3.6%)
- Seriaciones cualitativas	1 (3.6%)
- Distinción de los nombres escritos	0 (0%)
- Seriaciones cuantitativas	0 (0%)
- Relaciones espaciales elementales	0 (0%)
- Seriaciones por forma	0 (0%)
- Identificar el tiempo	0 (0%)
- Ordenaciones según atributos mensurables	0 (0%)
- Correspondencias según atributos mensurables	0 (0%)
- Seriaciones según atributos mensurables	0 (0%)
- Secuencias temporales	0 (0%)

Como muestra el gráfico anterior de forma notable, destacan las aportaciones de otros conceptos generales no específicos y procesos cognitivos básicos. En este sentido, 13 (46.4%) participantes presentaron como parte de las matemáticas informales procesos cognitivos básicos y 16 (57.14%) participantes hicieron alusión a otros aspectos generales no específicos. La Tabla 32 muestra a modo de ejemplo estas aportaciones generales no específicas como la imaginación, la creatividad, la formular hipótesis, el proceso de ensayo y error, etc.

Tabla 32. Conceptos generales no específicos antes de la formación.

PARTICIPANTE	CITA
C-PRE-5	La abertura que ofrece este espacio y el respeto por cada proceso del niño. La estructura mental del niño y su imaginación.
C-PRE-13	Desarrollar la creatividad y la imaginación
C-PRE-11	Formular hipótesis, ensayo – error

Por otro lado, en el primer cuestionario como muestra la Tabla 33, delante de la tarea de detallar los objetivos y las acciones matemáticas que pueden planificar los profesionales en los diferentes espacios y materiales, los resultados muestran que hubo participantes que no expusieron ningún objetivo con sentido matemáticos

Tabla 33. Contenidos diseñados en torno al aprendizaje de las matemáticas en la EI antes de la formación.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar
Primer Cuestionario	28	0	0	1.3	1	2	4	1.2

En términos generales, si analizamos la frecuencia de aparición de los contenidos en las baterías de imágenes facilitadas en los cuestionarios, como muestra la Figura 105, se observa que el bloque de contenido más recurrente es el relativo a los atributos mensurables. A este le prosigue el bloque de contenido de cantidades continuas y discretas (números y operaciones) y el de posición y forma. Finalmente, aparecen con menos frecuencia el bloque de contenidos de las cualidades sensoriales.

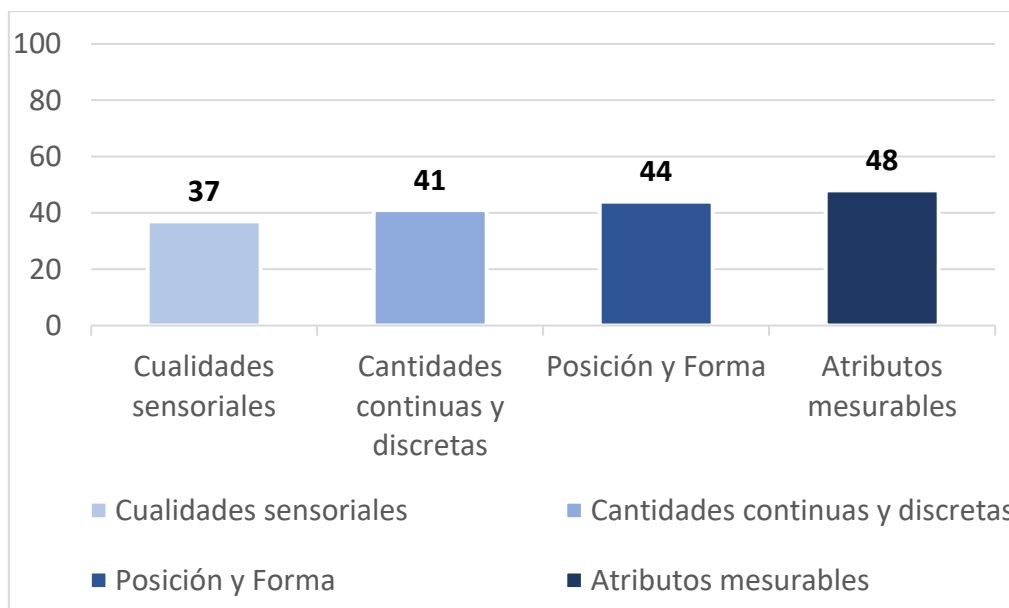


Figura 105. Contenidos detectados por los profesionales antes de la formación según el bloque de contenido.

La Figura 106 que se presenta a continuación, muestra en qué contenidos se centran los objetivos descritos por algunos de los participantes. Esta vez, destacan los objetivos vinculados a las clasificaciones cualitativas 8 (28.60%), el inicio del conteo 5 (17.90%), las correspondencias cuantitativas 6 (21.40%) y, finalmente, al reconocimiento de los atributos mensurables 3 (10.70%). Los otros contenidos relativos a las matemáticas informales no aparecen en los objetivos antes de la formación o aparecen en menos de un 10%.

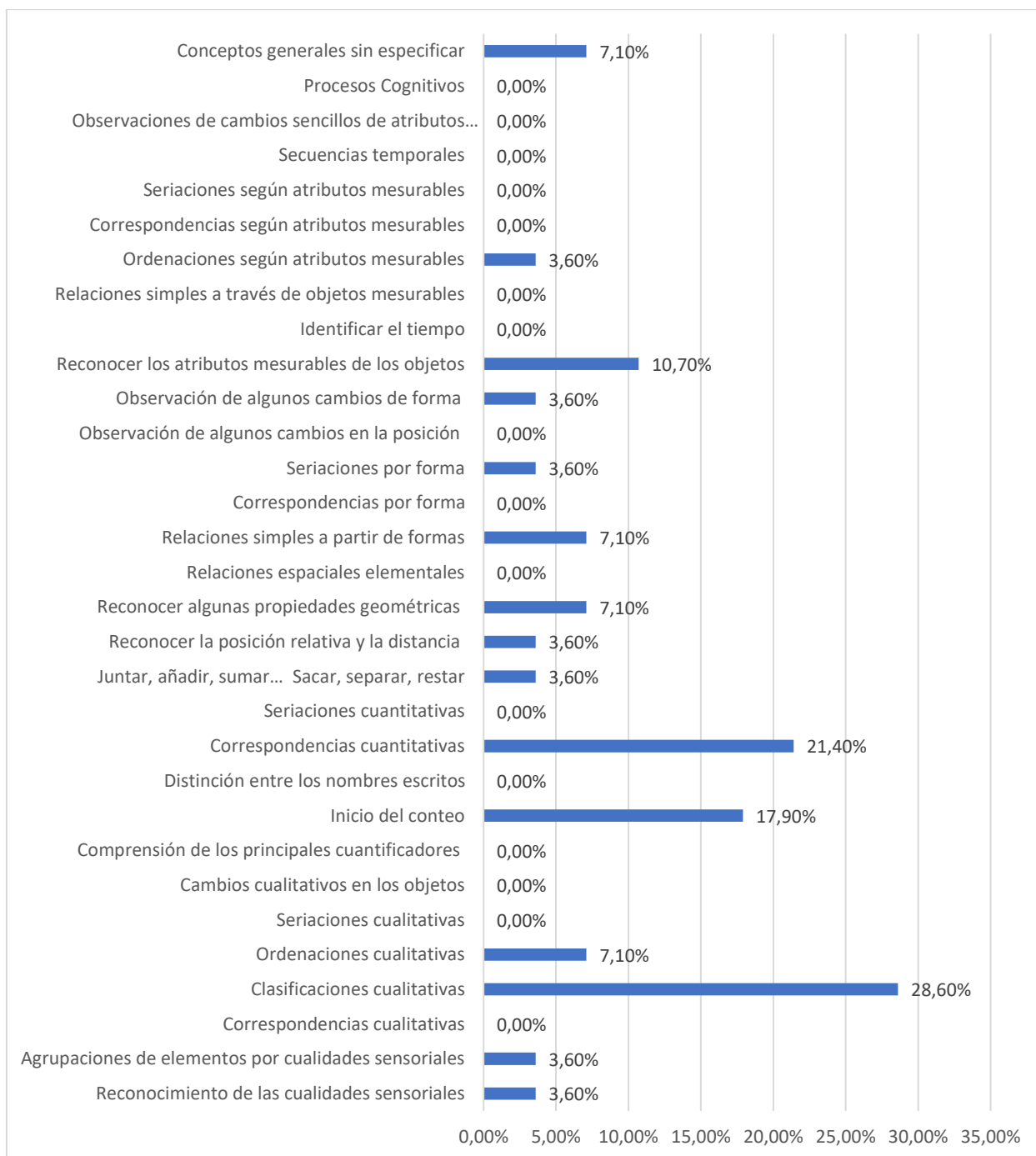


Figura 106. Objetivos Matemáticos descritos por los profesionales antes de la formación.

A continuación, para poder profundizar en las diferencias y similitudes detectados, se presentan los resultados en función de los bloques de contenido. En primer lugar, se presentan los resultados relativos a los contenidos y a las capacidades detectadas en las imágenes de los diferentes espacios y, seguidamente, se presentan los resultados de los objetivos y contenidos matemáticos que prevén los profesionales en sus programaciones.

5.1.2 Conocimientos sobre las cualidades sensoriales

Reconocimiento de los atributos. Como muestran los resultados de la Tabla 34, en el primer cuestionario la mayoría de los participantes (24; 85.7%) detectaron alguna acción vinculada al reconocimiento de las cualidades sensoriales. De este modo, solo 4 participantes (14.3%) no detectaron en ninguna imagen acciones de reconocer cualidades.

Tabla 34. Acciones de reconocimiento de cualidades sensoriales.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Reconocimiento de las cualidades sensoriales	No	4	14.3
	Sí	24	85.7

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones, solo 1 (3.57%) participante presentó contenidos y objetivos vinculados a este bloque de contenido (Tabla 35).

Tabla 35. Objetivos vinculados al reconocimiento de cualidades sensoriales.

Participante	Cita
C-PRE-2	Reconocer las calidades sensoriales de los materiales de la panera de los tesoros.

Agrupaciones de elementos por cualidades sensoriales. La Tabla 36 muestra que en el primer cuestionario solo 1 participante (3.6%) identificó en las imágenes una acción de agrupar por cualidades sensoriales. La gran mayoría, 27 participantes (96.4%), o fueron capaces de identificar ninguna acción de agrupar por cualidades sensoriales.

Tabla 36. Acciones de agrupar según las cualidades sensoriales.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Agrupaciones de elementos de las cualidades sensoriales	No	27	96.4
	Sí	1	3.6

Sobre los diseños de los espacios y materiales, se puede observar que en las planificaciones ejecutadas antes de la formación solo 1 (3.6%) participante detalló contenidos y objetivos vinculados a este ámbito (Tabla 37).

Tabla 37. Objetivos vinculados a acciones de agrupar según las cualidades sensoriales.

Participante	Cita
C-PRE-29	Agrupar diferentes materiales en un contenedor. Según el color, la textura...

Correspondencias cualitativas. La Tabla 38, detalla que antes de la formación, 27 (96.4%) participantes no identificaron acciones de emparejar según las cualidades sensoriales siendo únicamente 1 participante (3.6%), que detectó esta acción.

Tabla 38. Acciones de emparejar según las cualidades sensoriales.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Correspondencias cualitativas	No	27	96.4
	Sí	1	3.6

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones anteriores a la formación no aparece en ningún cuestionario.

Clasificaciones cualitativas. Como se expone en la Tabla 39, antes de la formación la mayoría de los participantes, en concreto 22 (78.6%), no identificaron las acciones de clasificar según este criterio frente a 6 (21.4%) que sí los detectaron.

Tabla 39. Acciones de clasificar según criterios cualitativos.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Clasificaciones cualitativas	No	22	7.6
	Sí	6	21.4

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones anteriores a la formación, 8 (28.6%) participantes manifestaban objetivos vinculados a la acción de clasificar con las cualidades sensoriales (Tabla 40).

Tabla 40. Objetivos vinculados a las acciones de clasificar según criterios cualitativos.

Participante	Cita
C-PRE-6	Clasificar cada material por las cualidades
C-PRE-10	Clasificar el material por ser igual y ordenarlo. Clasificar todas las piezas de madera en una cesta todas juntas.
C-PRE-12	Clasificar los coches según el color
C-PRE-13	En la mesa se preparan diferentes materiales donde el niño ha de clasificar como puede ser en un cesto con las bolas de colores y una caja donde se pondrán las bolas clasificadas por colores.
C-PRE-14	Clasificar los diferentes materiales – separar los de madera de los de metal.
C-PRE-21	Clasificar los materiales en el momento de recoger.
C-PRE-25	Clasificar los materiales (juego heurístico)
C-PRE-29	Distribuir los diferentes materiales

Ordenaciones cualitativas. Como se detalla en la Tabla 41, antes de la formación fueron 26 (92.9%) participantes los que no detectaron acciones de ordenación cualitativa a través de las imágenes. Antes de la formación hubo 2 (7.1%) participantes que hicieron referencia a alguna acción de ordenación cualitativa.

Tabla 41. Acciones de ordenar según criterios cualitativos.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Ordenaciones cualitativas	No	26	92.9
	Sí	2	7.1

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones, 2 (7.1%) participantes presentan objetivos vinculados (Tabla 42).

Tabla 42. Objetivos vinculados a acciones de ordenar según criterios cualitativos.

Participante	Cita
C-PRE-4	Ordenar los materiales por calidades sensoriales
C-PRE-16	Ordenar por colores

Seriaciones cualitativas. Concretamente, la Tabla 43 muestra que antes de la formación, solo 1 (3.6%) participante incidió en una acción de este ámbito. Esto significa que 27 (96.4%) participantes no detectaron ninguna acción relativa a este contenido.

Tabla 43. Acciones de seriar cualitativamente.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Seriaciones cualitativas	No	27	96.4
	Sí	1	3.6

En relación con el diseño de los espacios y materiales, no aparece la planificación en ningún cuestionario previo a la formación.

Cambios en los objetos y entorno inmediato. En la Tabla 44 se expone que antes de la formación 26 (92.9%) participantes no identificaron acciones de observar cambios en las cualidades, frente a 2 (7.1%) que sí.

Tabla 44. Acciones de identificar cambios cualitativos.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.	No	26	92.9
	Sí	2	7.1

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no aparece ningún objetivo ni contenido vinculado a la observación de cambios en los elementos.

5.1.3 Conocimientos sobre los cantidades continuas y discretas

Los principales cuantificadores y cantidades elementales. Concretamente, la Tabla 45 muestra que antes de la formación, 13 (46.4%) participantes no identificaron contenidos vinculados a la comprensión de los principales cuantificadores mientras que 15 (53.6%) participantes sí los consideraron.

Tabla 45. Acciones de comprender los principales cuantificadores.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Comprensión de los principales cuantificadores y de algunas cantidades elementales	No	13	46.4
	Sí	15	53.6

En relación con el diseño de los espacios y materiales, no aparece en la planificación de ningún cuestionario previo a la formación.

Inicio del conteo. La Tabla 46 detalla que antes de la formación 12 (42.9%) profesionales no identificaron el contenido de conteo en las imágenes presentadas versus 16 (57.1%) que sí que lo hicieron.

Tabla 46. Acciones de contar elementos.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Inicio del conteo con una colección de elementos.	No	12	42.9
	Sí	16	57.1

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones 5 (17.9%) participantes reflejan en sus objetivos contenidos vinculados a este ámbito (Tabla 47).

Tabla 47. Objetivos vinculados a acciones de contar elementos.

Participante	Cita
C-PRE-4	Contar los objetos.
C-PRE-16	Contar los tapones metálicos y las huchas.
C-PRE-14	Numerar los elementos de un espacio
C-PRE-17	Familiarizar al niño con el conteo (construcciones)
C-PRE-21	Identificar el número de niños que participan Contar: los vasos, los niños...

Distinción entre los nombres escritos y otros tipos de representaciones externas.

Específicamente, los datos manifiestan que no se identifican contenidos vinculados a este bloque. En esta misma línea, en la planificación de los diseños de espacios y materiales ningún profesional expone ningún objetivo o contenido vinculado a la distinción de los números respecto a otras representaciones gráficas.

Correspondencias cuantitativas. En la Tabla 48 se puede observar que antes de la formación 7 (25%) participantes identifican contenidos vinculados a esta en relación con los 21 (75%) participantes restantes que no detectan esta posibilidad de acción.

Tabla 48. Acciones de emparejar cantidades.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Correspondencias cuantitativas	No	21	75.0
	Sí	7	25.0

Como muestra la Tabla 49 en relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones 6 (21.4%) participantes hacen alusión a estos contenidos en sus objetivos.

Tabla 49. Objetivos vinculados a acciones de emparejar cantidades.

Participante	Cita
C-PRE-2	Dar dos platos a cada niño.
C-PRE-8	Hacer correspondencias matemáticas en el momento de poner la mesa en la cocinita: a cada silla le corresponde un plato.
C-PRE-14	Ser capaces de hacer correspondencias: un plato, un vaso, un cubierto, una silla.
C-PRE-15	Hacer correspondencias entre los materiales que hay en la mesa de la cocinita, los platos, cucharas, sillas y vasos.
C-PRE-20	Hacer correspondencias cuando juegan en el espacio de juego simbólico y ponen la mesa. Dos platos para dos muñecas. Dos sillas para dos platos. Dos vasos para dos servicios.
C-PRE-25	Hacer correspondencias cuando ponen la mesa: dos platos, dos vasos, dos cucharas, dos sillas.

Seriaciones cuantitativas. La Tabla 50 presenta que, antes de la formación, ningún participante hizo identificó este contenido.

Tabla 50. Acciones de seriar cantidades.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Seriaciones cuantitativas	No	28	100,0
	Sí	0.0	0.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no se presentan objetivos ni contenidos vinculados a la capacidad de seriar con las cantidades.

Juntar, añadir, unir, sumar, sacar, separar, restar... Concretamente, la Tabla 51 refleja que antes de la formación solo 3 (10.7%) participantes hacen referencia a este tipo de contenido y la extensa mayoría, 25 participantes (89.3%), no lo identificaban.

Tabla 51. Acciones de cambiar cantidades.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Juntar, añadir, unir o reunir, agrupar, sumar... Sacar, separar, restar.	No	25	89.3
	Sí	3	10.7

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones anteriores a la formación hubo 1 (3.6%) participante que representó contenidos relativos a estas acciones (Tabla 52).

Tabla 52. Objetivos vinculados a las acciones de cambiar cantidades.

Participante	Cita
C-PRE-18	Ordenar de pequeño a grande, según su tamaño, los utensilios.

5.1.4 Conocimientos sobre las posiciones, las formas y las figuras

Reconocimiento de la posición relativa y la distancia. De forma detallada, la Tabla 53 destaca que antes de la formación hubo 23 (82.1%) profesionales que detectaron este contenido en las baterías de imágenes.

Tabla 53. Acciones de reconocimiento de la posición y de juzgar distancias.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Reconocer la posición relativa a la dirección y la distancia en el espacio.	No	5	1.9
	Sí	23	82.1

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones antes de la formación, hubo 1 (3.6%) participante que indicó este contenido en sus objetivos (Tabla 54).

Tabla 54. Objetivos vinculados a acciones de reconocimiento de la posición y de juzgar distancias.

Participante	Cita
C-PRE-8	Identificar las diferentes situaciones espaciales. (encima, debajo, dentro, fuera)

Reconocimiento de algunas propiedades geométricas de las formas y figuras. De forma detallada, la Tabla 55 muestra que antes de la formación 7 (25,0%) participantes no identificaron este contenido mediante las imágenes versus 21 (75%) que sí.

Tabla 55. Acciones de reconocimiento de las propiedades geométricas elementales de las formas.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Reconocer algunas propiedades geométricas elementales de las formas	No	7	25.0
	Sí	21	75.0

Contrariamente, en relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones anteriores a la formación hubo 2 (7.1%) participantes que indicaron este contenido en sus objetivos (Tabla 56).

Tabla 56. Objetivos vinculados a acciones de reconocimiento de las propiedades geométricas elementales de las formas.

Participante	Cita
C-PRE-15	Construir nuevas formas
C-PRE-27	Reconocer la forma de círculo en la que están sentados los niños

Relaciones espaciales elementales. La Tabla 57 presenta como no hubo ningún profesional antes de la formación que hiciese alusión a este contenido.

Tabla 57. Acciones de relacionar contenidos espaciales elementales.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Relaciones espaciales elementales	No	28	100.0
	Sí	0.0	0.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones tampoco hubo ningún participante que indicara ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas de las formas y figuras: clasificaciones. La Tabla 58 expone que antes de la formación solo 4 (14.3%) participantes identificaron contenidos vinculados a este bloque frente a 24 (85.7%) participantes que no los identificaron.

Tabla 58. Acciones de relacionar propiedades geométricas simples.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas	No	24	85.7
	Sí	4	14.3

En relación con el diseño de los espacios y materiales, la Tabla 59 muestra que en las planificaciones destacan solo 2 (7.1%) profesionales que los expusieron.

Tabla 59. Objetivos vinculados a acciones de relacionar propiedades geométricas simples.

Participante	Cita
ED 10	clasificar las piezas y aprender las diferencias de las piezas redondas, cuadradas...
Ed 20	Clasificar por la forma.

Correspondencias por forma. De forma detallada, la Tabla 60 deja ver que antes de la formación 4 (14.3%) participantes los destacaron frente 24 (85.75) profesionales que no detectaron este tipo de contenidos.

Tabla 60. Acciones de emparejar según la forma.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Correspondencias por forma	No	24	85.7
	Sí	4	14.3

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no hubo objetivos relativos a este contenido.

Seriaciones por forma. Tal y como se presenta en la Tabla 61, antes de la formación no hubo ningún participante que hiciera referencia a este contenido

Tabla 61. Acciones relativas a seriaciones según la forma.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Seriaciones por forma	No	28	100.0
	Sí	0.0	0.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, como muestra la Tabla 62, en las planificaciones solo 1 participante hace alusión a un objetivo de este ámbito.

Tabla 62. Objetivos vinculados a seriar por forma.

Participante	Cita
ED 21	Hacer construcciones con materiales de diferentes formas (cuadrados, redondas, líneas, torres...) formando mándalas y composiciones alternando las piezas en series.

Observación de algunos cambios en la posición. En la Tabla 63 se expone que antes de la formación hubo 10 (35.7%) participantes que hicieron referencia a este contenido frente a 18 (64.3%) que no lo hicieron.

Tabla 63. Acciones relativas la observación de algunos cambios en la posición.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Observación de algunos cambios en la posición	No	18	64.3
	Sí	10	35.7

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones, no se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Observación de algunos cambios de forma a través de las deformaciones, composición y descomposición de las formas. Como se puede observar en la Tabla 64, solo 5 (17.9%) participantes identifican algún contenido relativo a los cambios de forma versus 23 (82.1%) que no lo hace.

Tabla 64. Acciones relativas a la observación de algunos cambios de forma.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Observación de algunos cambios de forma	No	23	82.1
	Sí	5	17.9

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones solo 1 (3.6%) participante describe sus objetivos con este contenido. (Tabla 65).

Tabla 65. Objetivos vinculados a los cambios por forma.

Participante	Cita
C-PRE-23	Hacer construcciones apilando, haciendo filas, torres, puentes, cercados...

5.1.5 Conocimientos sobre los atributos mensurables

Reconocer los atributos mensurables de los objetos: tamaño, masa, capacidad, temperatura...). La Tabla 66 recoge que todos los participantes, 28 (100%), identifican algún contenido relativo al reconocimiento de los atributos mensurables.

Tabla 66. Acciones relativas al reconocimiento de atributos mensurables.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Reconocer los atributos mensurables de los objetos	No	0.0	0.0
	Sí	28	100.0

Aun así, en relación con el diseño de los espacios y materiales como se muestra en la Tabla 67, en las planificaciones solo 3 (10.7%) participantes describen sus objetivos con este contenido.

Tabla 67. Objetivos vinculados a acciones relativas al reconocimiento de atributos mensurables.

Participante	Cita
C-PRE-2	Llenar y vaciar, observar si entra o no, que cantidades de material puede entrar, al igual que puede salir, o si solo sabe vaciar.
C-PRE-13	En la mesa de experimentación los niños tienen potes de diferentes tamaños y han de llenarlos y hacer traspasos con la tierra. Identificar si pesa o no los botes al llenarlos, ver si se llenan o no, cuanta arena cabe, etc.
C-PRE-20	Identificar las piezas de construcción los diferentes tamaños grande y pequeño.

Identificar el tiempo. La Tabla 68 muestra que antes de la formación no hubo ningún contenido vinculado a la identificación del tiempo.

Tabla 68. Acciones relativas a identificar el tiempo muestra.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Identificar el tiempo	No	28	100.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Clasificaciones simples a través de objetos mensurables. La Tabla 69 recoge que solo 4 (14.3%) participantes identifican algún contenido relativo a las clasificaciones con atributos mensurables versus 24 (85.7%) que no lo hace.

Tabla 69. Acciones relativas a las clasificaciones según atributos mensurables.

		Primer Cuestionario		
		N	Pct	
Relaciones simples a través de objetos mensurables:	No	24	85.7	
Clasificaciones según atributos mensurables				
		Sí	4	14.3

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Ordenaciones según atributos mensurables. La Tabla 70 presenta que ningún participante identificó ningún contenido referente a este ámbito.

Tabla 70. Acciones relativas la ordenación de atributos mensurables.

		Primer Cuestionario		
		N	Pct	
Ordenaciones según atributos mensurables	No	28	100.0	
		Sí	0.0	0.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones solo 1 (3,6%) participante define un objetivo vinculado a este ámbito (Tabla 71).

Tabla 71. Objetivos vinculados a las acciones de ordenar según atributos mensurables.

Participante	Cita
C-PRE-26	Ordenar los objetos de grande a pequeño

Correspondencias según atributos mensurables. La Tabla 72 muestra que ningún profesional identifica contenidos concernientes a las correspondencias según los atributos mensurables.

Tabla 72. Acciones relativas a las correspondencias de elementos mensurables.

		Primer Cuestionario		
		N	Pct	
Correspondencias según atributos mensurables	No	28	100.0	
		Sí	0.0	0.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Seriaciones según atributos mensurables. Como se presenta en la Tabla 73 ningún profesional detectó ningún contenido vinculado a las seriaciones con atributos mensurables.

Tabla 73. Seriaciones según atributos mensurables.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Seriaciones según atributos mensurables	No	28	100.0
	Sí	0.0	0.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Secuencias temporales. Lo mismo ocurre con las secuencias temporales. La Tabla 74 muestra que ningún profesional ha indicado contenidos referentes a este ámbito.

Tabla 74. Acciones referentes a las secuencias temporales.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Secuencias temporales	No	28	100,0
	Sí	0.0	0.0

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones tampoco se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones. La Tabla 75 detalla que 12 (42.9%) participantes no detectan contenidos correspondientes a este ámbito mientras que 16 (57.1%) sí lo hacen.

Tabla 75. Acciones relativas la observación de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de las composiciones y descomposiciones.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones.	No	12	42.9
	Sí	16	57.1

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Procesos Cognitivos. La Tabla 76 recoge que 13 (46.4%) participantes identifican algún contenido relativo a los procesos cognitivos. Los 15 (53.6%) restantes no lo hacen.

Tabla 76. Acciones relativas a los procesos cognitivos.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Procesos Cognitivos	No	15	53.6
	Sí	13	46.4

En relación con el diseño de los espacios y materiales, en las planificaciones no se encuentra ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Conceptos generales sin especificar. La Tabla 77 muestra que solo 16 (57.7%) participantes, más de la mitad de los profesionales, detectan algún contenido relativo no específico. De lo contrario, 12 (42.9%) no detallan ninguno.

Tabla 77. Conceptos generales sin especificar.

		Primer Cuestionario	
		N	Pct
Conceptos generales sin especificar	No	12	42.9
	Sí	16	57.1

En relación con el diseño de los espacios y materiales, se observa que 2 (7.1%) participantes exponen dos objetivos generales no específicos o vinculantes a ninguno de

los contenidos referentes a los 4 bloques de contenido determinados en el marco teórico. (Tabla 78).

Tabla 78. Objetivos vinculados a conceptos no específicos.

Participante	Cita
C-PRE-12	Explorar y manipular diferentes materiales y utensilios y descubrir las acciones que se pueden hacer con ellos
C-PRE-2	jugar con los materiales libremente desarrollando su imaginación y creatividad.

5.2 Conocimiento didáctico - matemático de los profesionales de la Escuela Infantil antes de la formación

En referencia al conocimiento didáctico de los profesionales de la Escuela Infantil antes de la formación, como se ha descrito en el séptimo capítulo, se recogen aportaciones del grupo de discusión, del cuestionario y de las observaciones no participantes.

Para exponer detalladamente los resultados se establecen diferentes categorías correspondientes a este ámbito que se basan en los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI) descritos por Alsina y Delgado (2021):

- Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia.
- Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil.
- Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto durante el desarrollo del juego del niño.
- Conocimiento sobre las orientaciones curriculares.

Para cada una de las categorías se aportan los resultados obtenidos a través de los diferentes instrumentos. En primer lugar, se presentan los resultados de los grupos de discusión. Seguidamente, se presentan los resultados del cuestionario; primero desde un punto de vista cuantitativo y después desde el punto de vista cualitativo. Finalmente, con el objetivo de triangular toda la información, se presentan las aportaciones recogidas mediante las observaciones no participantes.

5.2.1 Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia

Sobre el conocimiento de las formas de aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades, antes de la formación los participantes del grupo de discusión mostraron la necesidad de conocer la forma en que aprenden las matemáticas los niños de los 0 a los 3 años. Como expone la Tabla 79, durante el grupo de discusión los participantes expresaron que para preparar los espacios y materiales partían de la observación del niño y del momento evolutivo en que este se encontraba. En este sentido, no se expresan conocimientos específicos sobre como aprenden matemáticas los niños en estas primeras edades, pero sí se hace alusión sobre como aprenden y se desarrollan durante los primeros años a través del juego, la exploración y la manipulación. De todos modos, en ningún momento hacen referencias a las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños en estas primeras edades.

Tabla 79. Conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-5	HV	Los niños de estas edades aprenden jugando. En eso se basa nuestro proyecto y en eso basamos todas las propuestas, independientemente del contenido. Nosotros ponemos los espacios y los niños acuden a ellos para desarrollar sus juegos y experimentos. Es un aprendizaje globalizado que al tiempo hacen de todo. (...) que si matemáticas, música, ciencia, lenguaje, etc.
GD-PRE-3	HV	Sí, es que todo parte del juego y de sus exploraciones. Hay que preparar espacios diferentes para dar respuesta a sus necesidades de juego. Ver en qué momento está el niño y poder jugar con ello. (...) a eso me refiero, a observar si por ejemplo ya camina, si está en un momento de juego simbólico o no, qué cosas le despiertan interés... a partir de ahí preparas espacios que den respuesta a sus intereses y necesidades.
GD-PRE-1	HV	El juego, explorar, observar, tocar, manipular... nuestro trabajo es poner materiales diferentes y los niños aprenden gracias a lo que hacen con ellos. Claro, cada niño tiene intereses diferentes y jugará con unas cosas u otras, por eso es tan importante que pongamos varias propuestas a la vez. Que si uno no quiere jugar con los coches porque no le gustan pueda ir a las construcciones, a la cocinita o al taller.

De manera generalizada, los profesionales manifestaron necesidades formativas entorno al conocimiento didáctico matemático (Tabla 80). Al no reconocer con seguridad y conocimiento qué matemáticas desarrollaban los niños en estas primeras edades, no

podían preparar los espacios más allá de lo que ya conocían: las mesas de experimentación y el cesto de los tesoros. Manifiestan la necesidad de conocer con más profundidad y conciencia qué matemáticas aparecen en los niños y como se van desarrollando para poder preparar las propuestas acordes su evolución.

Tabla 80. Necesidades formativas respecto al conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-7	HV	Es que no podemos saber qué matemáticas están haciendo si no las conocemos. Es decir, sabemos grandes titulares, como propuestas que utilizamos dentro de las matemáticas: las mesas de experimentación o el cesto de los tesoros. Pero también sabemos que hay más matemáticas, seguro, pero no sabemos explicarlas porqué tampoco las vemos. Y es eso, que no las vemos o no pensamos en ellas porque no las conocemos. Y yo creo que hablo un poco en nombre de todas. Entonces preparamos las propuestas con esa mirada y no salimos de ello. Necesitamos saber las matemáticas que pueden hacer los niños y entonces podremos preparar mejor los materiales que les ofrecemos.
GD-PRE-2	HV	Queremos valorar y poner conciencia de la matemática en los espacios y materiales, así como en el día a día en la escuela, no solo con materiales sino también en todo el día. Los vemos jugar, los vemos que hacen la acción que toca, pero poner realmente más conciencia y mirar al niño con otros ojos después de la formación. Si sabemos qué acciones matemáticas hacen los niños y cual viene después podremos preparar los espacios en función de su juego, lo mismo que hacemos con el movimiento, hacerlo con las matemáticas. Ahora sabemos cómo el niño se desarrolla en función de su evolución en el movimiento. Nosotros, vamos transformando los espacios en función de su evolución en el movimiento y sabemos que viene después de cada acción. Primero rueda, después se pone de rodillas, se balancea, gatea, los diferentes gateos, se sienta, se pone de pie... y así, lo mismo que sabemos identificar y prever que pasará con el movimiento lo queremos saber con las matemáticas. Qué hace cuando hace una torre y que viene después.
GD-PRE-4	HV	Es que necesitamos saber identificar las acciones matemáticas que ellos realizan y reconocerlas. Yo no sé si lo he estudiado, pero no me acuerdo de mucho.

En referencia al cuestionario, se recogieron los datos entorno al sentimiento de preparación de los profesionales preguntándoles cuán preparados se sentían para diseñar espacios y materiales bajo criterios matemáticos. Para valorar sus respuestas, se presenta la Tabla 81 donde se muestran los resultados según la formación inicial en Técnico Superior en Educación Infantil o Magisterio. De los resultados, destacan los datos que muestran la inexistencia de diferencias significativas entre el sentimiento de preparación

entre los profesionales en función a su formación inicial. También, muestran que solo 2 (7.1%), ambos con formación inicial en magisterio, se sienten muy preparados; 16 (57.1%) poco más de la mitad, se sienten medianamente preparados y, poco preparados 10 (35.7%).

Tabla 81. Sentimiento de preparación.

		Título profesional		Total
		TSEI	Maestra	
Sentimiento de preparación	Muy preparado	N	0	2
		% Vertical	0%	13.3%
	Medianamente	N	6	10
		% Vertical	46.2%	66.7%
	Poco	N	7	3
		% Vertical	53.8%	20.0%
Total		N	13	15
		% Vertical	100.0%	100.0%

Nota: No existen diferencias significativas según la formación del maestro/a (p-valor = 0.106 calculado mediante Chi Cuadrado con un nivel de confianza del 95%).

Vinculado al sentimiento de preparación, se preguntó a los profesionales si habían recibido formación inicial o continua en didáctica de las matemáticas para el ciclo 0-3. Sobre la formación inicial, la Figura 107 muestra que 16 (57.10%) profesionales expresan haber recibido formación específica, mientras que un 12 (42.9%) responden que no.

Sobre la formación continua, ningún profesional indica haber recibido este tipo de formación en didáctica de las matemáticas durante los años que lleva trabajando.

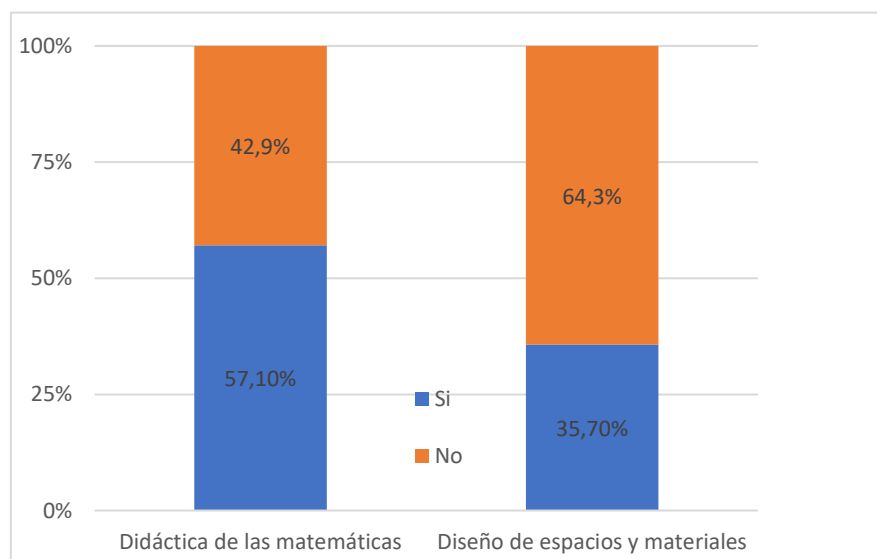


Figura 107. Formación Inicial en Didáctica de la Matemática para el Ciclo 0-3

Analizando los datos, podemos observar que existen diferencias significativas entre la formación inicial y la formación específica en didáctica de las matemáticas para el ciclo 0-3. En este sentido se recoge que, como muestra la Figura 108, 2 TSEI expresan haber recibido una formación inicial específica en didáctica de las matemáticas para el ciclo 0-3, frente a 11 que expresa no haberla recibido. Contrariamente, la mayoría de los profesionales con formación en magisterio expresan haber recibido formación inicial en este ámbito (Sí 14 frente a 1 No).

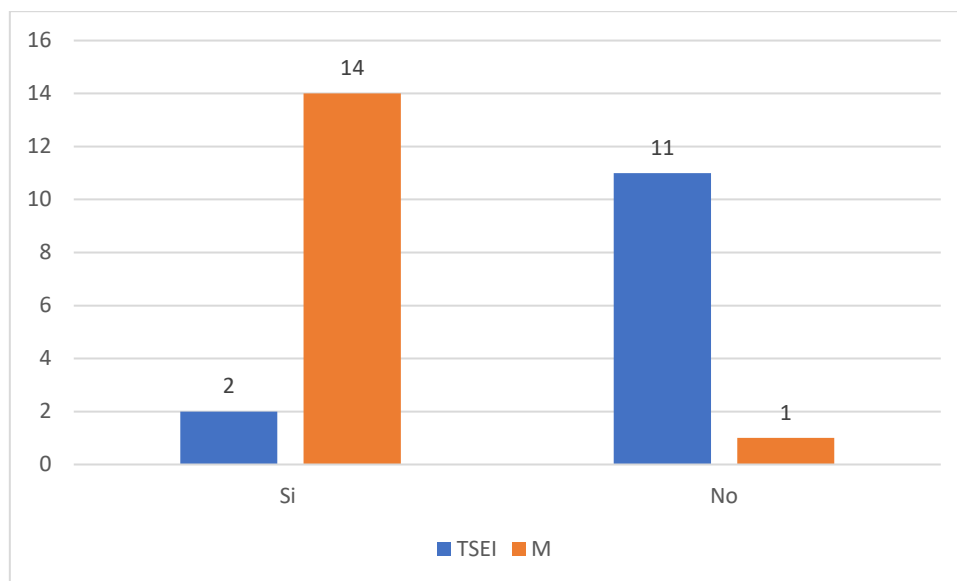


Figura 108. Formación en didáctica de la matemática para el ciclo 0-3 versus la formación inicial.

En cuanto a las observaciones no participantes, se destaca que antes de la formación hubo muchos menos profesionales que facilitaron el acceso a sus aulas para poder registrar las sesiones que llevaban a cabo. Se pueden consultar estos datos en el apartado 4.6.2. Observación no participante. En dicho cuadro, se observa que en ningún centro se permitió el acceso de los grupos con infantes de 0 a 1 año. De los grupos con infantes de 1-2 años (7 grupos en total) solo 3 grupos permitieron las observaciones. Finalmente, de los grupos con infantes de 2-3 años (6 grupos en total) 5 facilitaron las filmaciones. En total, del conjunto de las 3 EBMV se pusieron a disposición 32 vídeos antes de la formación (11 de EBMV Caputxins y Serra Sanferm y 10 de EBMV Horta Vermella). De estos 32 vídeos, según el criterio de análisis establecido, se han analizado 8.

En términos generales, el resultado de este análisis muestra que el niño va descarnando los conceptos corpóreos que representan el concepto matemático abstracto a partir de las diferentes experiencias de juego, exploración y manipulación. Ejemplo de ello,

como recoge la Tabla 82, son las diferentes propuestas que han presentado en las que, a través del juego, la exploración y la manipulación, el niño acaba formulando sus hipótesis y va adquiriendo sus propias respuestas.

Tabla 82. Registro de observaciones no participantes con las propuestas analizadas.

EBMV	Aula / Nivel Educativo	Propuesta Analizada
CAPUTXINS	Xics (0-1a)	0
	Graponers (1-2a)	Bandejas de experimentación
	Tafaners (1-2a)	0
	Belluguets (2-3a)	Juego simbólico mediante la cocinita
	Xerramecs (2-3a)	Taller de arcilla blanca
HORTA VERMELLA	Xics (0-1a)	0
	Graponers (1-2a)	0
	Tafaners (1-2a)	Espacio de movimiento
	Belluguets (2-3a)	Juego con vías de tren
	Xerramecs (2-3a)	Mesa de construcción
SERRA SANFERM	Xics (0-1a)	Juego heurístico
	Graponers (1-2a)	0
	Tafaners (1-2a)	0
	Belluguets (2-3a)	0
	Xerramecs (2-3a)	Juego simbólico mediante una tienda

Un ejemplo de estas propuestas se muestra en la Figura 109 donde se observa como las propuestas de los profesionales vienen del concepto de este primer mundo corpóreo, o matemática emergente, que nace de la percepción y la interacción con objetos y las reflexiones o relaciones que se establecen a partir y entre estos objetos.

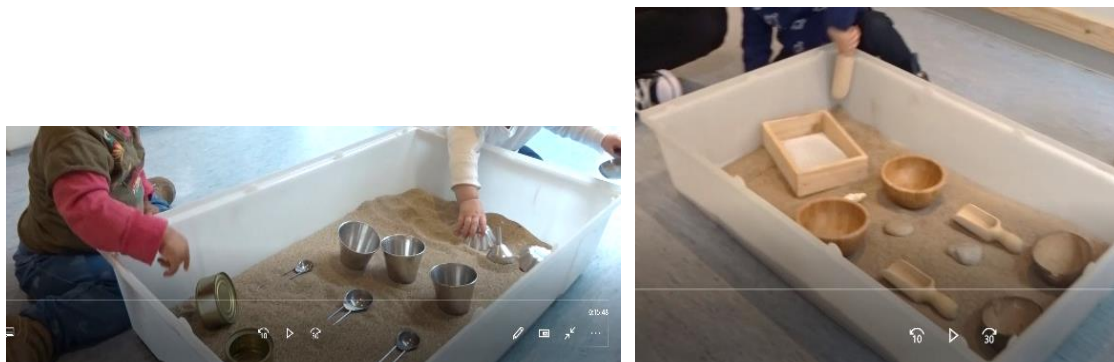


Figura 109. EBMV_C_PRE_1-2a_s3. Fuente: EBMV Caputxins

Se presenta el espacio de bandejas de experimentación. El diseño de la propuesta consiste en 2 bandejas de arena con diferentes contenedores. En una bandeja se presentan contenedores y utensilios metálicos con tres elementos de cada: 3 potes de color dorado, 3 potes de color metálico, 3 cucharas metálicas, 3 flaneras, 3 embudos. La otra bandeja de arena contiene contenedores y utensilios de madera. En este caso, se presentan 4 cuencos, de 2 tipos de madera diferentes, 1 sedán, 2 palas de madera, 2 piedras y 2 conchas. Los niños libremente experimentan con los materiales y manipulan los objetos formulando sus hipótesis y descubriendo las cualidades y propiedades de los diferentes elementos mediante el ensayo y error. Así empieza el pensamiento matemático; gracias a las propuestas de experimentación y manipulación a través del juego con materiales, entorno al descubrimiento de objetos y de las acciones que podían hacer con ellos.

Los resultados también muestran que los profesionales presentan en sus propuestas, a partir de contextos reales, elementos cotidianos mediante los cuales los niños aprenden matemáticas. En la Figura 110 se observa como a partir del juego que desarrolla la niña con la arena, la maestra aprovecha para formular preguntas y acompañar esta situación cotidiana con sentido matemático.



Figura 110. Observar los cambios de posición e identificar los primeros cuantificadores: mucho, poco.
Fuente: EBMV Caputxins

Como muestra el diálogo, la educadora aprovecha que a la niña se le ha caído arena fuera de la caja e incorpora los conceptos matemáticos vinculados a la acción de la pequeña. Observa los cambios de posición e identifica los primeros cuantificadores: mucho y poco.

En este sentido, algunos profesionales consideran que el aprendizaje de las matemáticas de estas primeras edades es un proceso que, bajo la supervisión de una persona más experta, permite re-construir el conocimiento matemático intuitivo e informal hacia el conocimiento matemático formal. Por ello, acompañan las observaciones que hacen del

desarrollo de las propuestas incorporando el lenguaje como una herramienta que acompaña la acción de los niños. En las filmaciones, así como se presenta más adelante en el apartado 5.2.3 Conocimientos sobre el papel del lenguaje, antes de la formación existen algunos profesionales que intervienen durante el juego de los niños verbalizando algunas acciones o acompañando su juego con alguna pregunta. Por ejemplo, la Figura 111 presenta la situación de la niña que llena el cuenco de tierra y la maestra explica lo que está haciendo a partir de los conceptos matemáticos de posición (dentro - fuera) o de mediada (lleno – vacío).



Min. 09:08

Maestra: ¡Mira! A va poniendo tierra dentro. Cada vez hay más tierra. Has visto Aran, como el coco que está muy lleno de tierra.

Figura 111. Observar los cambios de posición e identificar capacidades. Fuente: EBMC Caputxins.

Aun así, hay que destacar que antes de la formación, de los 8 vídeos analizados en los que intervienen 16 profesionales, predominan los que están en silencio observando las acciones de los niños o, únicamente, intervienen en la gestión de los conflictos y del aula. Como ejemplo, se muestra la Figura 112 en la que hay una batería de imágenes que han registrado las educadoras con el objetivo de observar el juego. En esta secuencia hay dos niñas jugando a las cocinitas y mientras una da de comer a una muñeca, la otra construye una fila de cascaras de limón. La educadora que filma la imagen final de la composición que ha hecho la niña para destacar su creación (Figura 113). Aun así, durante su observación permanece en silencio. Incluso, cuando la niña le dice: “Mira A, ya se lo ha comido todo. Mira, se lo ha comido todo. Se lo ha comido todo, todo”, ella no dice nada. Se desconoce si la maestra hace algún gesto detrás de la cámara porque no queda registrado.



Figura 112. Jugando a cocinitas hacemos una fila muy larga de limones. Fuente: EBMV Caputxins



Figura 113. Jugando a cocinitas hacemos una fila muy larga de limones. Fuente: EBMV Caputxins

5.2.2 Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales con contenido matemático en la Escuela Infantil

En referencia al conocimiento de los profesionales para diseñar los espacios y materiales con contenido matemático en estas primeras edades, los resultados muestran que los profesionales de las EBMV manifiestan, antes de la formación, la necesidad de incorporar más recursos, herramientas, contenidos o ideas para incorporarlos en los diseños de sus espacios y materiales.

Concretamente, como se describe en la Tabla 83, en el grupo de discusión antes de la formación, los profesionales explicaban la voluntad adquirir nuevos recursos, descubrir e incorporar nuevos materiales o repensar como utilizar mejor los que ya tienen pero que desconocen todas sus posibilidades.

Tabla 83. Necesidades formativas respecto los materiales.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-5	HV	Herramientas recursos, nuevos aprendizajes para proporcionar los distintos materiales en la didáctica de las matemáticas.
GD-PRE-4	HV	Descubriremos nuevos materiales de entrada no convencionales. Materiales que tenemos al alcance y que no les hemos sacado el máximo zumo posible.
GD-PRE-2	HV	Sacar más jugo a los materiales que ya tenemos y conocer otros nuevos.
GD-PRE-8	HV	Nuevos recursos y materiales, ya sea crearlos o de los que ya tenemos sacar más zumo y después poder observar los procesos matemáticos que está haciendo el niño del aspecto matemático

Los resultados también muestran que los profesionales diseñan los espacios y los materiales en función del momento evolutivo de los niños y bajo criterios estéticos y de belleza. En este sentido, explican que parten de la observación del niño respecto su evolución madurativa, su juego y sus intereses. Y, en base a ello preparan los espacios. Los espacios siempre deberían cumplir con un criterio estético, que sean bonitos y atractivos, que estén ordenados y que sean accesibles a los niños para que de manera autónoma puedan coger los materiales. Y aunque los espacios respondan a un criterio estético, de ordenación o clasificación de los materiales, los profesionales no consideran que corresponda a un contenido matemático. En este sentido, la mayoría expresan abiertamente que no diseñan los espacios pensando en las matemáticas a las que pueden

aparecer. Piensan en el juego que el niño va a desarrollar en cada espacio o con cada material y en que este sea un espacio accesible, que facilite la autonomía, agradable y cuidado desde el punto de vista estético (Tabla 84).

Tabla 84. Necesidades formativas respecto los diseños de los espacios y materiales con sentido matemático I.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-5	HV	<p>Observamos en qué momento evolutivo están los niños y niñas y ponemos los materiales que necesitan. Matemáticamente hablando no nos basamos en... (risas)</p> <p>No, no, no directamente en mates no. Lo que sí hacemos mucho es pensar que sean bonitos, cuidados, que estén bien pensados para que despierten ganas de jugar y sean confortables. Ya sabes, nos encanta que todo sea muy bonito, acogedor, ponemos puntas y blondas a todo.</p>
GD-PRE-4	HV	<p>Pensamos en el momento evolutivo, nos fijamos para diseñar los espacios en eso. Que sea adecuado a la edad del niño. Que tenga la posibilidad de jugar o explorar con materiales que le despierten interés acorde con lo que puede hacer.</p> <p>(...) Siempre hay un criterio, ordenado por colores, o con una correspondencia, por ejemplo, si pones tres cuencos en la mesa de experimentación intentarás, si las tenemos (risas), poner tres cucharas. Y pondrás los elementos que combinen, tres de metal, tres de madera... no sé, lo hacemos porque queda ordenado y bien presentado.</p>
GD-PRE-2	HV	<p>En el momento evolutivo y los intereses de los niños. Sí, en el momento madurativo y en las necesidades de los niños. Eso es siempre y cuantas veces cambiamos un espacio porque resulta que lo hemos pensado y no es adecuado para la edad en ese momento. Tu colocas un material pensando que harán un juego y ves que no están a punto y aparece un caos. Entonces cambias el material y pones otro que responda a su momento evolutivo, a sus necesidades. Cuando los espacios y materiales están bien pensados y responden a sus necesidades, funciona. Los niños juegan y están super bien, concentrados, cada uno con su juego, no hay conflictos, tu puedes ir acompañando. (...)</p> <p>Siempre, siempre, han de ser espacios estéticos, muy bien cuidados. Para genera calma y que el juego sea tranquilo han de estar muy bien pensado los delimitados, ordenados.</p>
GD-PRE-7	HV	<p>De hecho, muchos de nosotros hemos hecho la formación con Francesca y Paola sobre espacios y materiales y en el proyecto tenemos muy claro cómo hay que preparar los espacios y cuando viene alguien nuevo, se lo enseñamos. Todos lo hacemos igual, vayas al aula que vayas, al cole que vayas, siempre tenemos claros los criterios que usamos, de orden, autonomía, de presentación, que sean bonitos, que no estén sobrecargados, que los cambias cada vez que lo necesitas...</p>
GD-PRE-3	HV	<p>A veces se puede solapar algo que sea muy bonito puede hacer no pensar tanto con algo que sea tan bueno para trabajar. A veces hacemos mucho por la estética más que la funcionalidad</p>

Dos de los participantes en el grupo de discusión comparten que presentan sus diseños con intencionalidad para despertar un juego matemático o que en sus presentaciones se incorporan a conciencia algunos contenidos matemáticos como las cualidades sensoriales y las formas geométricas (Tabla 85).

Tabla 85. Necesidades formativas respecto los diseños de los espacios y materiales con sentido matemático II.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-3	HV	Nos basamos en el material: tamaño, textura, peso, forma color... tú puedes poner las constricciones con todas las piezas del mismo color, todas de color rojo y de plástico y es mucho más interesante que tengan texturas diferentes y formas, y tamaños diferentes. En cómo este material puede hacerlo actuar con planos, con pendientes... cuál puede ser el tipo de material.
GD-PRE-4	HV	Nosotros hemos pensado en las cualidades de los materiales, tonos, texturas... las relaciones especiales, si colocas una rampa, cómo, para que poniendo la rampa y lleguen... Con la geometría de los materiales, que pueden ser unos más grandes, unos más pequeños, y cómo se presentan estos materiales con forma de cubo... cilindros.

Los resultados obtenidos en las observaciones no participantes muestran que, en términos generales, la mayoría de los profesionales tienen la capacidad de diseñar y planificar los espacios y materiales bajo criterios referidos en el marco teórico para diseñar los espacios y materiales de la Escuela Infantil según la polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética y belleza, orden e intencionalidad, naturaleza, colectividad e individualidad, transformación, dimensión y ubicación, adaptabilidad y polivalencia y seguridad. De hecho, un 35.7% de los profesionales expresaron mediante el cuestionario que habían recibido formación específica sobre el diseño de los espacios y materiales. En este sentido, desde el curso 2009-2010 al 2013-2014, todos los profesionales de las EBMV desarrollaron una formación específica con formadores de Reggio Emilia sobre los diseños de los espacios y materiales y así lo reconocen en el grupo de discusión.

A excepción, cabe destacar que en una de las observaciones no participantes se detecta un diseño del espacio que no cumple con los criterios de orden e intencionalidad, dimensión y ubicación. En concreto, la sesión de juego con trenes realizada en la EBMV Horta Vermella, como muestra la Figura 114, donde se presentan 3 espacios de juego: uno central con las vías de tren y los trenes, un espacio de cuentos con un pequeño sofá y tipi y una mesa con 4 sillas y una propuesta Montessori en cada sitio. Se detecta que el espacio de los trenes no está delimitado ocupando la zona central del aula. Tampoco

presenta ningún soporte que acote el espacio, ni ayude en su redimensión. Además, no se presenta el material ordenado, las vías están en el suelo y los trenes también.

Ello, como se muestra en la Figura 115, hace que sea un espacio de paso, donde transitan los niños y los adultos sorteando las vías, los trenes y los propios niños. En ocasiones, los infantes que juegan con los trenes se aíslan de todo el movimiento que se genera alrededor. Otras veces, deambulan por el espacio sin desarrollar ningún juego por el caos que se genera al ser un lugar tan de paso.



Figura 114. El juego central de los trenes I. Fuente: EBMV Horta Vermella



Figura 115. EBMV_HV_PRE_2-3aX_s4. Fuente: EBMV Horta Vermella

En ocasiones, para los niños que juegan, este movimiento no les impide seguir jugando concentrados. Un ejemplo es el caso de M, que permanece toda la sesión jugando con los trenes, estirado en el suelo, sin hacer caso de todo lo que ocurre en su exterior. Tampoco se da a lo largo de la sesión ninguna interacción con él, ni por parte de los compañeros/as, ni por parte de los profesionales (Figura 116).

A veces, como se recoge en la Figura 117, los niños que se acercan a jugar si encuentran algunas vías sueltas. La cogen y no saben qué hacer con ellas. Por ejemplo, G encuentra unas vías y las levanta, las arrastra, se las pone en la cabeza, las golpea con el suelo y acaba por marcharse sin desarrollar ningún juego.



Figura 117. El juego central de los trenes II. Fuente: EBMV Horta Vermella



Figura 116. El juego central de los trenes III. Fuente: EBMV Horta Vermella

Los resultados también muestran que, en función del espacio o del material presentado, los profesionales son capaces de reconocer diferentes capacidades y contenidos matemáticos. Un ejemplo de ellos se recoge en la Tabla 86, en la que se muestra que existen diferencias significativas en la detección de contenidos según el espacio. La media

de contenidos detectados es superior en los espacios de juego simbólico (5.22), de juego heurístico (5.11), de construcciones (5.1) y de instalaciones artísticas (4.11) frente a los espacios de exploración con una media de (3.9), las mesas de experimentación (3.1) y movimiento (2).

Tabla 86. Número medio de contenidos por espacio antes de la formación.

	Primera entrevista		
	N	Media	Std Deviation
INSTALACIONES ART.	9	4.11	1.36
TALLER	9	3.78	1.3
J. HEURÍSTICO	11	5.11	1.53
MOVIMIENTO	10	2	1.41
J. SIMBÓLICO	9	5.22	1.39
CONSTRUCCIONES	10	5.1	1.91
MESAS EXP.	10	3.1	1.73
EXPLORACIÓN	10	3.9	1.45
	P-valor	0	

A continuación, con el objetivo de concretar estos resultados, se presenta para cada uno de los espacios analizados las aportaciones de los profesionales; tanto el grupo de discusión, como en el cuestionario y en las observaciones no participantes. Hay que destacar que, siguiendo las consideraciones éticas que se han contemplado en este estudio, las observaciones no participantes fueron totalmente voluntarias y fueron los profesionales quienes decidieron facilitar las filmaciones. Por ello, no se tienen filmaciones de todos los ambientes.

Las Instalaciones Artísticas. En el grupo de discusión, los profesionales expresaron que este era un espacio emergente en las EBMV. Algunas personas de los equipos habían empezado a desarrollar estas propuestas, pero no en todos los centros se estaban llevando a cabo. Algunos profesionales explicaban que las imágenes que habían visto de estos espacios les resultaban sugerentes y tenían ganas de llevar a cabo estas propuestas. Por ello, estaban buscando los materiales y la manera de incorporarlos en sus jardines (Tabla 87).

Tabla 87. Grupo de discusión – Instalación artística.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-10	HV	He visto este espacio a Caputxins y he pensado que era fabuloso. Yo aún no he tenido la oportunidad de montar un espacio así. Me pregunto si la documentación que han hecho es real, quiero decir, si las composiciones de los niños y niñas son estos, si son espontaneas o la maestra está allí dirigiendo porqué la foto del corazón es brutal. ¿La habéis visto no? No sé, quieres decir que esa no la hicieron juntos.
GD-PRE-8	HV	Estamos pensando que en el “Mans a l’Horta” vamos a pedir al jardinero troncos para poder hacer las bases y nos hemos organizado para preparar los materiales en cestos (piedras, tronco, pechinas...) y las flores, tenemos que buscar la flores. Hemos pensado un espacio concreto del jardín donde ponerlos. Allí donde está la tarima blanca, al lado de la puerta azul. Es un espacio que queda recogido y delimitado, que no van mucho y seguro que les llama la atención.
GD-PRE-1	HV	Es una propuesta muy bonita, tenemos que probar a ver cómo nos funciona, no la hemos hecho nunca aquí. Yo cuando respondí el cuestionario conocía la propuesta porqué la había visto y leí la publicación del Facebook, pero no la había hecho. Pero pensé como si la hubiese hecho.

En el cuestionario, como muestra la Figura 118, se observa que antes de la formación los profesionales detectaron mayormente el reconocimiento de las cualidades sensoriales y el reconocimiento de atributos mensurables, (88.9%), el inicio del conteo (55.6%), las clasificaciones cualitativas (33.3%) y las clasificaciones según los atributos mensurables. Los otros contenidos no se detectan en este espacio de juego y manipulación.

En este caso, no se recoge ninguna filmación para las observaciones no participantes de este espacio.

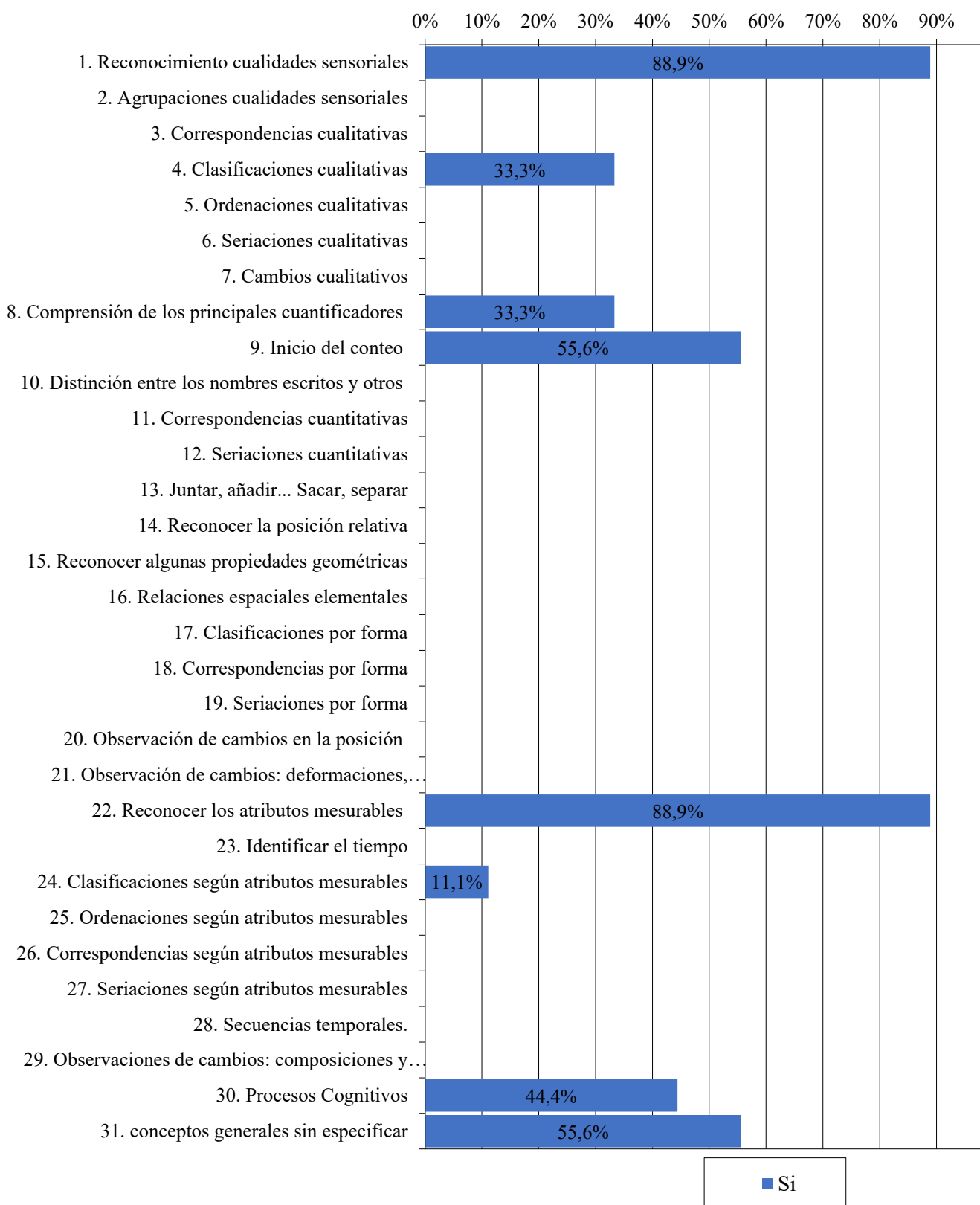


Figura 118. Contenidos destacados por len las imágenes de Land Art.

Juego Heurístico. En el grupo de discusión, sobre el juego heurístico, los profesionales explicaron que años atrás se habían llevado a cabo sesiones de juego heurístico, tal y como las definía Goldschmied, pero que no sabían muy bien porqué las dejaron de hacer. En este sentido, habían convertido el juego heurístico en un material más del aula, que se utilizaba de manera permanente en los espacios de 1-2 años y que al que los niños podían acceder durante el juego libre (Tabla 88).

En referencia a las acciones que podían desarrollar los niños con estos materiales destacaron: meter y sacar, llenar y vaciar, la identificación de las formas y de los tamaños, la sonoridad de los materiales y las cualidades sensoriales.

Tabla 88. Grupo de discusión – Juego heurístico.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-6	HV	Hace años hacíamos sesiones en la sala polivalente de juego heurístico. Yo lo recuerdo. Luego con todo el cambio lo dejamos de hacer, no sé, era todo un lío ir, venir (...) vaya no sé. Sí hacíamos aquello de las bolsas, con los materiales que tenían que recoger los niños. Y nos dijeron que no podíamos hacer servir cadenas. ¿No os acordáis? (...) Lo que pueden hacer es llenar los potes, muchas veces comprueban si hacen ruido, notar de qué están hechos, normalmente los potes son de metal, los de la leche de los lactantes y los materiales que les damos de madera. Las cadenas les encantaban, pero ahora no podemos tener porqué se oxidan y por seguridad.
GD-PRE-8	HV	Yo creo que lo integramos en los espacios de juego cuando dijimos que todos los materiales tenían que ser accesibles a los niños. Que los pusimos al alcance. Son las huchas que tenemos, con tapones, tapas, anillas, piedras... claro ahora son todo huchas, quizá ha perdido lo que quería decir de juego heurístico, pero valoramos que el juego que podían hacer eran las misas y lo acordamos todos el ponerlo en las aulas. (...) Meter, sacar, llenar, vaciar, ver cuanto pesa... lo que más les gusta es llenar los potes y volverlos a vaciar. No paran y si hace ruido les gusta mucho más. También las formas de los materiales, como recortamos las tapas como huchas a veces las piezas no les pasa por el agujero.
GD-PRE-9	HV	Yo llegué más tarde, nunca he visto sesiones de juego heurístico propiamente como me las habían explicado, pero sí que tenemos material heurístico en las aulas presentados, bueno el que tenemos. No sé qué más podríamos poner. (...) Y los tamaños, son diferentes, los pesos, las formas... la verdad es que les gusta mucho este material, se rompe mucho de tanto que lo usan, cada año hacemos muchos nuevos.

Gracias a las observaciones no participantes, se puede ver la presentación de un espacio de juego heurístico (Figura 119) con diferentes materiales combinables entre sí: un cesto con calabazas pequeñas y unas flaneras metálicas; un cesto con anillas de madera y un bote para ponerlas como si fuera una hucha. Unos cilindros y unas pelotas de madera; unos botes metálicos y unas telas; un bote metálico con una abertura de hucha junto a una cesta llena de tapas de potes de conservas; unos troncos de madera y unos prismas rectangulares, también de madera; y, finalmente, unos cilindros grandes de cartón duro.



Figura 119. EBMV_SS_PRE_1-2aX_s8. Fuente: EBMV Serra Sanferm

La Figura 119 muestra como el profesional ha preparado los materiales respondiendo a los criterios de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza y naturaleza, orden y intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, polivalencia y seguridad. Aun así, el criterio de manipulación no acaba de garantizarse en su máxima expresión, en tanto que la distribución de los materiales no facilita la combinación entre ellos, sino que contrariamente los invita a hacer combinaciones solo con los materiales más cercanos. Un ejemplo de ellos son las maderas que están organizadas de tal modo que invitan a hacer construcciones y no tienen ningún material cercano para combinar. Lo mismo ocurre con unos potes con unas telas, unas huchas con unas tapas, unos cuencos metálicos con unas pelotas. El desarrollo de esta

sesión se presentará en el apartado siguiente, 5.2.3 que hace referencia al conocimiento sobre el papel del adulto que proporcionará una visión global y detallada de la sesión.

Del cuestionario, como muestra la Figura 120, se desprende que antes de la formación los profesionales detectaron con mayor frecuencia los contenidos relacionados a identificar la posición relativa (66.7%) y las cualidades sensoriales (61.1%), seguido del reconocimiento de las propiedades geométricas (50%) y el inicio del conteo (50%). Con menor frecuencia, aparecen los contenidos de observación de cambios en los atributos mensurables (38.9%), los cambios en la posición (11.1%) y las clasificaciones de atributos mensurables (5.6%). Los otros contenidos y capacidades no se detectan.

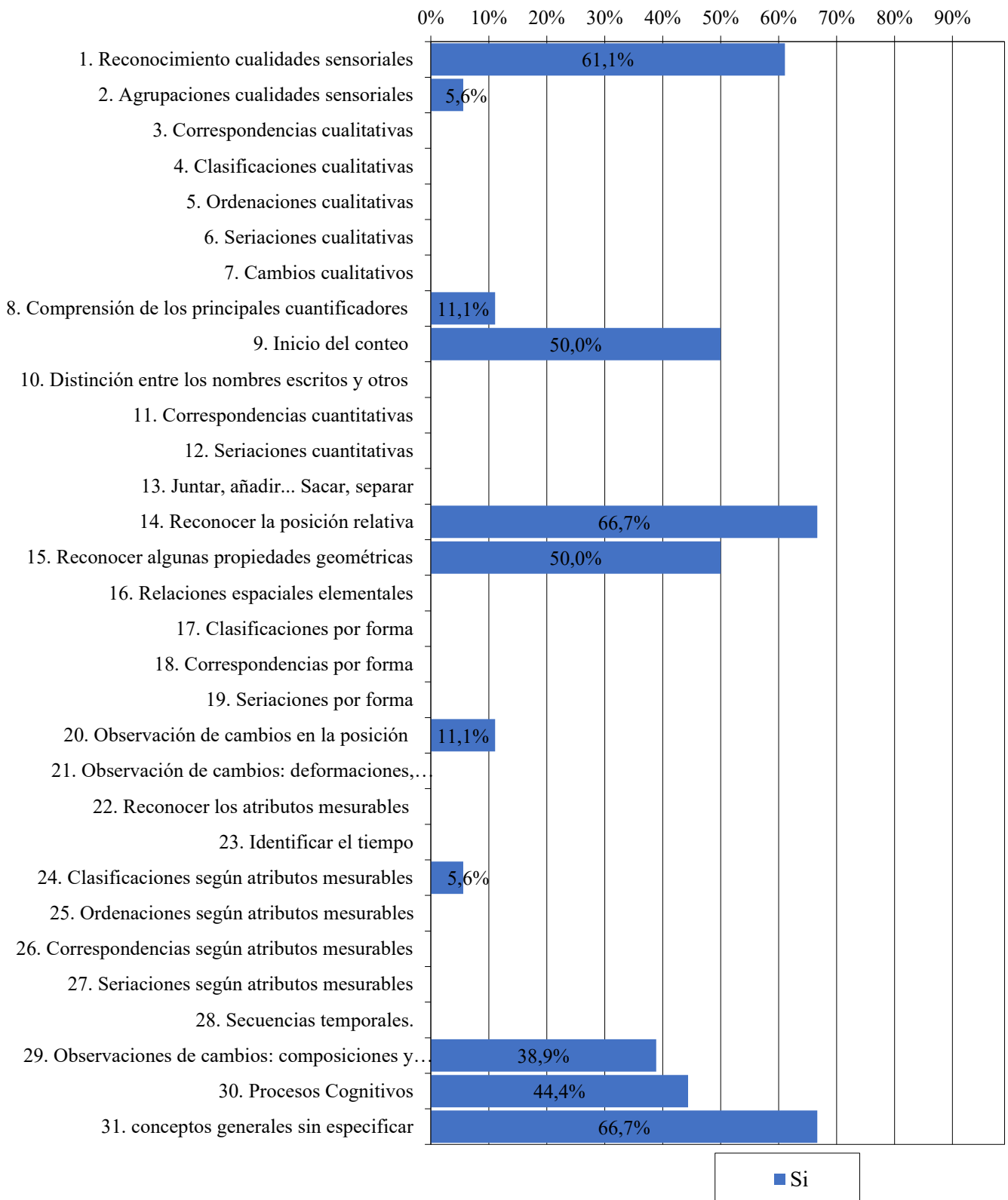


Figura 120. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de juego heurístico.

Juego Simbólico. Referente al grupo de discusión, cabe destacar que antes de la formación no hubo tiempo para compartir las reflexiones sobre este espacio de juego. Por ello, la información que se presenta nace del cuestionario y de la observación no participante.

Del cuestionario, como muestra la Figura 121, se desprende que antes de la formación los profesionales detectaron el reconocimiento de los atributos mensurables (88.9%) como la acción que más identificaban, junto al inicio del conteo (77.8%) y al reconocimiento de las cualidades sensoriales (55.6%). Identificado por menos de la mitad de los profesionales, aparecen con la misma frecuencia (44.4%) las correspondencias cuantitativas, la identificación de las propiedades geométricas elementales y el reconocimiento de las posiciones. Con mucha menor frecuencia, aparecen las correspondencias por forma (22.2%), las acciones de juntas, añadir, separa, quitar... (11.1%) y la observación de cambios en los atributos mensurables (4%).

Los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.

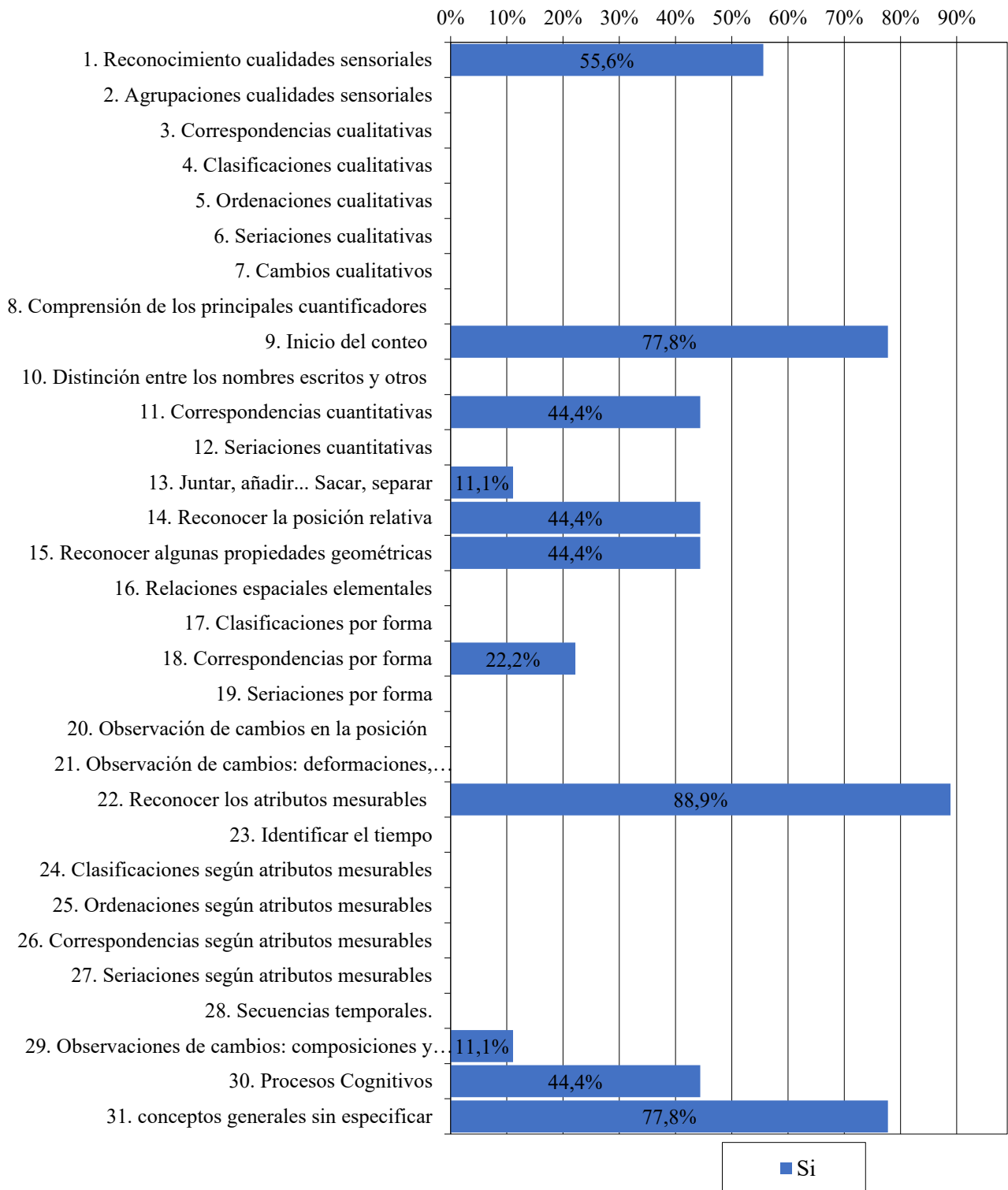


Figura 121. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de juego simbólico.

En las observaciones no participantes, se recogen aportaciones de dos aulas distintas, una de la EBMV Serra Sanferm y otra de EBMV Caputxins, las cuales se consideran para el análisis por petición de los profesionales. Tomando esta vez el ejemplo de EBMV Serra de Sanferm, los resultados muestran nuevamente que los profesionales preparan los espacios de juego simbólico respondiendo a los criterios de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza y naturaleza, orden y intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, manipulación, polivalencia y seguridad. Los espacios están bien delimitados y presentados de forma atractiva acorde con las necesidades de juego simbólico de los niños del grupo. En este sentido, las observaciones que se han realizado revelan que los niños permanecen concentrados jugando en el espacio y desarrollando acciones cotidianas como dar de comer a las muñecas o comprar en el supermercado. El desarrollo de la sesión se comentará con detalle en el siguiente apartado (5.2.3 Conocimiento sobre el papel del profesional). En este punto de la investigación, se destaca la adecuación del diseño del espacio respecto a estos criterios. Cabe destacar que la imagen que se muestra para ejemplificar corresponde, evidentemente, a la registrada en la observación no participante. Como limitación, se realiza la poca actividad en el momento de disponer la cámara en tanto que permite registrar las interacciones que se dan en el espacio, pero no permite ver con claridad el diseño de este.

Como muestra la Figura 122, se presenta el espacio de juego simbólico mediante dos microespacios: una cocinita y una tienda. La educadora dispone la cámara para observar el juego que se desarrolla en la tienda. En ella hay un pequeño mueble que funciona como mostrador, dos cajas colgadas de la pared que representan estanterías y bolsas de la compra. También hay cajas y botes de diferentes elementos propios de un supermercado.



Figura 122. EBMV_SS_PRE_2-3aX_s5. Fuente: EBMV Serra Sanferm

Movimiento. En relación con el espacio de movimiento y referente al grupo de discusión, cabe destacar que antes de la formación no hubo tiempo para compartir las reflexiones sobre a este espacio de juego. Por ello, la información que se presenta nace del cuestionario y de la observación no participante.

En cuanto al cuestionario, se presenta la Figura 123 que muestra como los contenidos que identifican los profesionales aluden mayormente a la identificación de la posición (60%). A continuación, con un 40% aparecen la identificación de las propiedades geométricas, la observación de cambios en la posición y el reconocimiento de las cualidades sensoriales. Finalmente, con un 10% se encuentra el inicio del conteo.

Los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.



Figura 123. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de movimiento.

Sobre las observaciones no participantes, se recogen las aportaciones de un grupo de 1 a 2 años de l'EBMV Horta Vermella. En la Figura 124 se presenta un espacio de juego de movimiento con un balcón central para subir y bajar, dos escalones para subir y una rampa para bajar. Un cubo Pikler de movimiento para trepar, meterse dentro, etc. Una colchoneta para estirar-se, rodar, descansar... el aula también tiene una mesa con 4 materiales

distintos para encajar: un juego comercializado con diferentes formas y colores, otro juego comercializado de cubos rosa perforados para encajar, un cubo metálico con pinzas para encajar y un cubo de madera con un tornillo para atornillar.

A grandes rasgos y analizando los criterios para el diseño de los espacios y materiales referenciados teóricamente, se considera que los resultados de las observaciones muestran las capacidades los profesionales para preparar el espacio de movimiento respondiendo a los criterios de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza y naturaleza, orden y intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, polivalencia y seguridad. Los espacios están bien delimitados y presentados, pero no han resultado atractivos ya que se observa que ningún niño acude a los espacios de movimiento centrales: el balconcito y el colchon. Únicamente, un niño entra dentro del cubo Pikler y después sale. Los otros niños, pasean por el espacio y se entretienen con las propuestas específicas que hay encima de la mesa. El desarrollo de esta sesión se explica en el apartado 5.2.3 haciendo incapié en el papel del profesional que acompaña. Cabría profundizar más en cuáles son las razones por las que los niños no han acudido a los diferentes espacios de movimiento y ampliar el estudio con más observaciones no participates de estos espacios.



Figura 124. EBMV_HV_PRE_1-2aG_s3. Fuente: Horta Vermella

Mesas de experimentación. Referente al grupo de discusión, los profesionales explicaron el debate que existe en el equipo sobre la posibilidad de ofrecer este tipo de material a niños menores de 2 años. Comparten lo que propuso en su momento Eleonor

Goldschmied que categorizó el cesto de los tesoros como propuesta para niños de seis meses a un año, el juego heurístico para los niños de doce a veintidós meses y las mesas de experimentación, como continuidad a estas propuestas para niños de dos a tres años. En este sentido consideran esta práctica dentro de sus propuestas para niños más pequeños de 1 a 2 años. Destacan como fundamental seleccionar bien el material que se dispone dentro de la mesa para que sea adecuado según la edad.

La reflexión giraba alrededor de que los niños a partir de los 18 meses, aproximadamente, disfrutaban jugando con la arena u otros materiales discontinuos que se pueden poner en la mesa de experimentación. Defienden que las acciones que hacen los niños son las de llenar y vaciar comprobando las capacidades, volcar, tirar, explorar las cualidades sensoriales, las texturas, los olores, los colores, etc. Como se puede ver en la Tabla 89 explican también los inconvenientes y ventajas de la propuesta.

Tabla 89. Grupo de discusión – mesa de experimentación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-3	HV	Las mesas de experimentación siempre las hemos tenido y para cuando son más pequeños ponemos bandejas o cestos en el suelo para que puedan llegar. Normalmente ponemos tierra tanto a grandes como a pequeños. Y para los mayores también ponemos mazorcas de maíz, arroz, sal, bueno la sal la tuvimos que dejar de poner porque era peligroso. Dicen que si un niño se come una cucharada de sal puede morir.
GD-PRE-6	HV	Sí, la verdad es que sobre todo los pequeños acostumbran a llevárselo a la boca y tienes que vigilar más. Lo ideal es ofrecer la propuesta cuando ya no están tanto en esta fase de explorar con la boca. A veces en el grupo de “Graponers” (pequeños de 1-2a) tienes que estar todo el rato diciendo a la boca no. Y entonces ves que no es lo mejor. Pero al estar mezclados con los mayores, y al haber las otras propuestas, no son tantos los que van. (...) Es un espacio que siempre tenemos, en el nivel 1-2 y en el de 2-3 con algún material u otro expuesto. Y vamos cambiando en función del momento. Por ejemplo, en carnaval ponemos confeti, en temporada de mazorcas ponemos el maíz o las pipas de girasol cuando hay en los campos. También ponemos la tierra, de diferentes colores si la tenemos. Cuantos viajes a la playa eh Natalia (risas). Claro en función del material les cuesta más o menos llenar los potes. La clave está en poner los materiales bien. Seleccionar bien qué utensilios y potes pones. A veces ponemos coladores o embudos y la arena no pasa (risas).
GD-PRE-11	HV	Ah y lo tiran al suelo. Sí, eso sí es muy pesado. Las primeras veces que poner el material te pasas el rato barriendo. Lo tiran al suelo. Luego lo aprenden, pero la verdad es que lo tiran constantemente. (...) Es un material que gusta mucho, les encanta experimentar con la tierra, observan como cae, la tocan con la mano, con las cucharas y cucharones, la intentan poner dentro de los potes y todo el rato los llenan y vuelven a vaciar.

(...)

Dentro ponemos muchas cosas diferentes, antes sí que poníamos sal con el proyecto de Garbancito (Patufet) y arroz también. Ahora con lo de los alimentos no, ya no ponemos. Estás más limitado en cuanto a qué poner. Nos cuesta encontrar elementos, a ver si la formación nos da más ideas.

En las observaciones no participantes realizadas al grupo de 1-2 años de EBMV Caputxins, se observa el juego de exploración que realizan niños de 18 a 24 meses. Los profesionales ponen dos bandejas en el suelo con arena. En una de las bandejas hay materiales de madera y de bambú y en los otros materiales metálicos. Como muestra la Figura 109 anteriormente presentada, los materiales que disponen clasificados en las dos bandejas de arena. En una bandeja se presentan contenedores y utensilios metálicos con tres elementos de cada: 3 potes de color dorado, 3 potes de color metálico, 3 cucharas metálicas, 3 flaneras, 3 embudos. La otra bandeja de arena contiene contenedores y utensilios de madera. En este caso, se presentan 4 cuencos, de 2 tipos de madera diferentes, 1 sedán, 2 palas de madera, 2 piedras y 2 conchas.

La presentación del espacio y la disposición del material responde a los criterios de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza y naturaleza, orden e intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, polivalencia y seguridad. Los espacios están bien delimitados y presentados, y son atractivos en tanto que los niños se acercan a explorarlos y desarrollan su juego concentrados.

El desarrollo de la sesión se presenta ampliamente desgranado en el apartado 5.2.3 en el que se podrá comprobar cómo los niños gozan y están concentrados en su juego de exploración con este material. Y, a su vez, mediante la intervención del profesional, se comprueba cómo en varias ocasiones, efectivamente, se les cae la arena fuera de la bandeja. Del mismo modo, se podrá observar cómo el referente adulto acompaña sus acciones verbalmente con contenido matemático.

En el cuestionario, como muestra la Figura 125, se recoge la forma en que se reparten los contenidos identificados por los profesionales en este ambiente. Por un lado y con mucha más frecuencia de aparición que los restantes, se encuentra el contenido vinculado a el reconocimiento de atributos mensurables (80%). A continuación, y con la mitad de casos (40%), se encuentran los contenidos referidos a el reconocimiento de cualidades sensoriales, la observación de cambios en los atributos mensurables y las

correspondencias cuantitativas. Se destaca también el inicio del conteo, con un 30% seguido de la clasificación de atributos mensurables y las clasificaciones cuantitativas (20%). Y, finalmente, con un 10% de frecuencia de aparición, se presentan los contenidos referidos a los cambios de posición y al reconocimiento de las propiedades geométricas.

Nuevamente, los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.

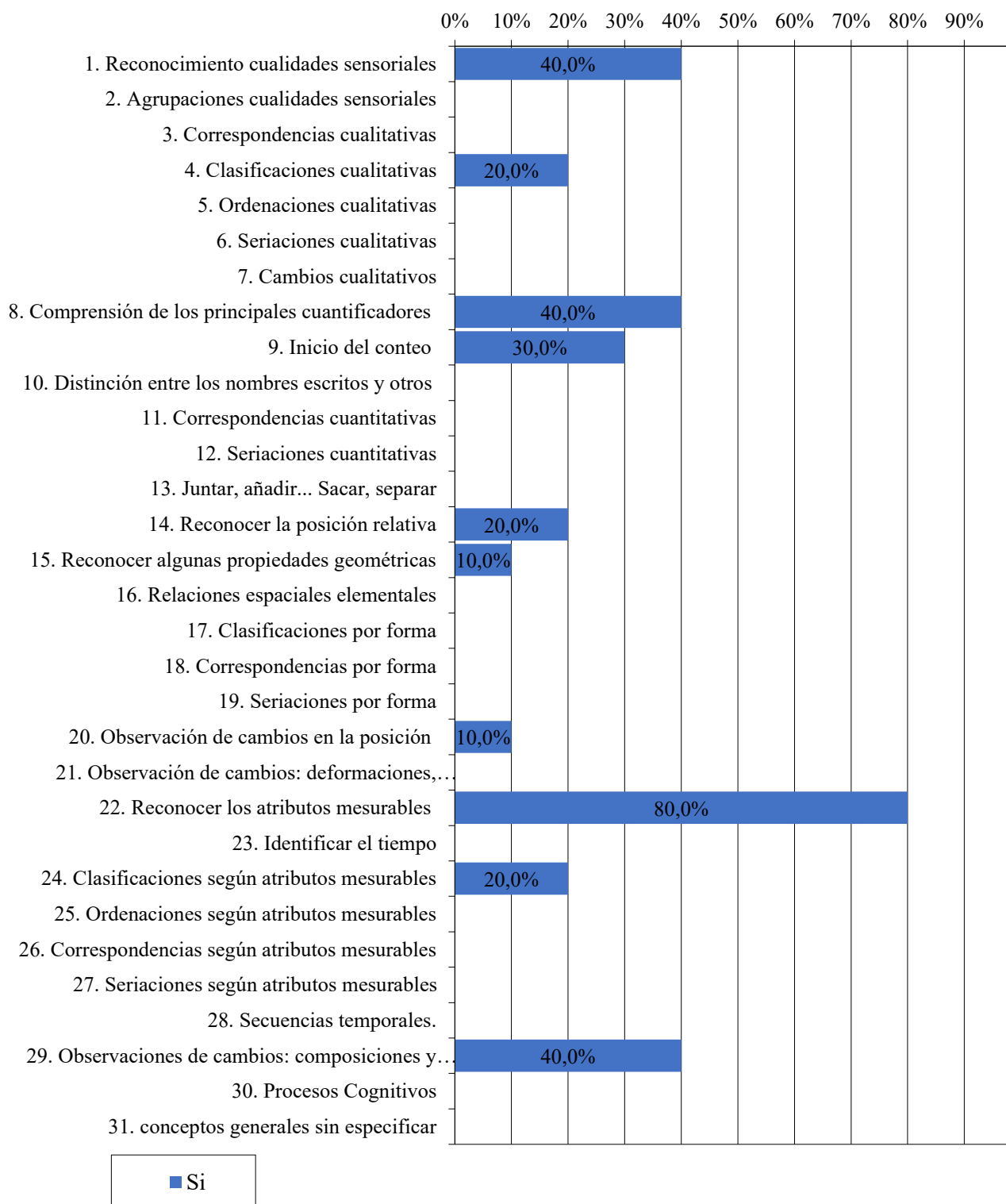


Figura 125. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de mesas de experimentación.

Espacio de exploración. Respecto al espacio de exploración y en relación con el grupo de discusión, cabe destacar que antes de la formación no hubo tiempo a compartir las reflexiones de a este espacio de juego. Tampoco se tuvo acceso a las observaciones no participantes en tanto que ningún profesional valoró filmar una propuesta así. Por ello, la información que se presenta nace únicamente del cuestionario. Como muestra la Figura 126, los contenidos mayormente identificados son con un 60% de aparición: el reconocimiento de la posición relativa, el reconocimiento de las propiedades geométricas y la observación de cambios en los atributos mensurables. Muy de cerca aparecen con un 50% de frecuencia el reconocimiento de las cualidades sensoriales. A continuación, con un 30% se muestran la observación de cambios en la posición y, finalmente, con un 10% se encuentran los contenidos vinculados al inicio del conteo. De nuevo, los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.

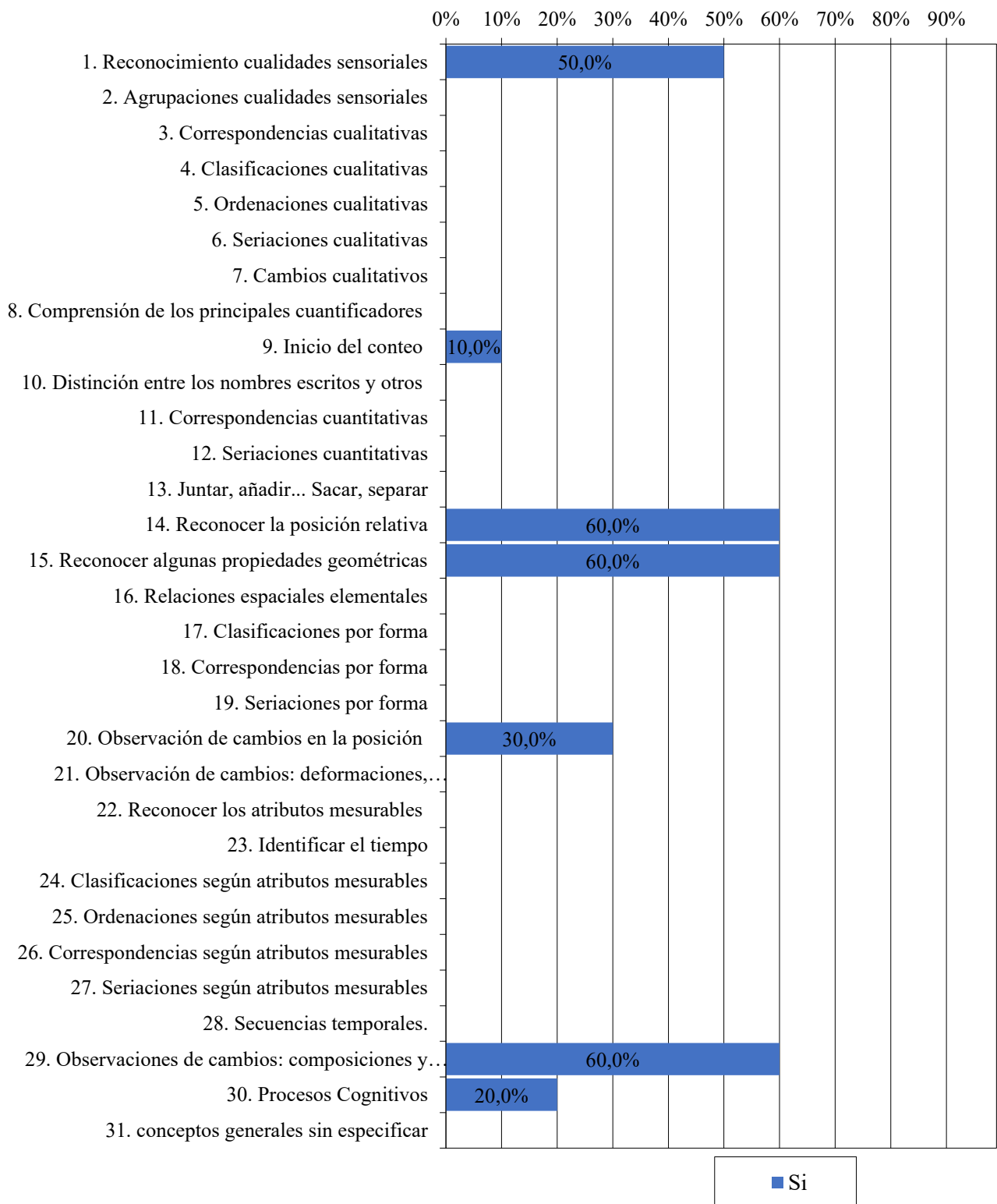


Figura 126. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de espacios de exploración.

Espacio de construcción. Respecto al espacio de construcción en el grupo de discusión, muestra la Tabla 90 que este tipo de material no siempre funciona. Exponen que siempre se ha considerado un espacio fundamental y que a veces funciona muy bien. Por lo tanto, lo presentan en las aulas tanto de 1-2 como de 2-3 años. Aun así, reconocen que no siempre funciona o responde a lo que han planificado. Muchas veces es un espacio que no responde a las necesidades de juego de los niños y muchas veces no les llama la atención. Esto lo atribuyen, en parte, a que posiblemente los otros espacios del aula que se presentan simultáneamente despiertan más interés. También hablan de la modelización en tanto que, si algún niño desarrolla algún juego más elaborado, llama la atención a otros niños que se suman a su juego. Entonces, añaden la necesidad de la presencia del referente adulto para iniciar juego e invitar a los niños. También, explican los diferentes materiales que pueden presentar en este espacio: troncos, piezas de madera de diferentes formas y medias, otros materiales como pechinas, rodajas de madera, tubos, conos y cilindros de cartón duro, casas de manera, piezas y bloques translúcidos, etc.

Tabla 90. Grupo de discusión – construcciones.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-1	HV	<p>El espacio de construcciones es fundamental. Siempre lo ponemos en las aulas de medianos y grandes, con una tarima o con un soporte, pero siempre esta. Lo que cambia mucho son los materiales, ponemos tanto piezas y bloques translúcidos como materiales de madera para construcción, como elementos más naturales que complementan las construcciones (pechinas, troncos, rodajas, piedras...)</p> <p>(...)</p> <p>Depende del año funciona mucho o no. A veces cambias mil veces el espacio y ves que no acaba de funcionar. Ves que los niños prefieren la cocinita, las mesas de experimentación o el espacio de motricidad fina, antes que las construcciones.</p> <p>Otras veces hacen unas creaciones súper elaboradas que incluso te sabe mal decirles que ha llegado la hora de salir al jardín. Están dos o tres súper concentrados creando algo. Y es muy chulo lo que acaba pasando.</p>
GD-PRE-8	HV	<p>Vamos poniendo diferentes materiales para ver que les llama más la atención. Siempre tenemos las piezas de madera más clásicas y normalmente hacemos alguna presentación con los materiales como dejando un juego iniciado. Para que ellos lo continúen. Hay muchas posibilidades y vamos cambiando los materiales y las presentaciones. Hay veces que el espacio funciona mucho y que funciona super bien y otras que no hay manera.</p>
GD-PRE-11	HV	<p>Claro hay niños que les encanta y que pasan largos ratos haciendo filas, apilando torres y viéndolas caer, haciendo sus creaciones y te las enseñan. Normalmente, cuando funciona más es porque hay algún niño que le gusta y se suman a su juego alguno más. Y luego ya cada día van un rato.</p>

También funciona mucho cuando te pones en el espacio con ellos y les invitas, durante unos días va haciendo y se despierta un interés por el juego. Luego imitan y van creando. Sí que a veces has de empezarlo tu y como motivarlos.

Como se obreva en la Figura 127, en la sesión de juego de la EBMV Horta Vermella del grupo de 2 a 3 años se presentan 5 espacios de juego simultáneos. La cocinita como propuesta de juego simbólico, la mesa de experimentación con diferentes maderas para hacer construcciones, un espacio con un sofá y cuentos, un espacio taller con una mesa y con piedras para pintarlas con agua utilizando pinceles, un espacio de Land Art con elementos naturales para construir mándalas y, finalmente, una mesa pequeña con una propuesta de construcción con piezas magnéticas. El espacio que la cámara capta mejor y que se observa con profundidad es la mesa de experimentación con maderas de construcción.



Figura 127. EBMV_HV_PRE_2-3aB_s4. Fuente: EBMV Horta Vermella.

Nuevamente, analizando los criterios para el diseño de los espacios y materiales referenciados teóricamente, se considera que, a grandes rasgos, como muestra la imagen anterior, los profesionales preparan los espacios del aula respondiendo a los criterios de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza y naturaleza, orden y intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, manipulación, polivalencia y seguridad. Los espacios están bien delimitados y bien presentados. Aun así, el espacio de construcciones dentro de la mesa de experimentación

no ha resultado atractivo. A lo largo de toda la sesión, han sido pocas las veces que los niños se han acercado y, cuando lo han hecho, el juego que han desarrollado apenas a durado un par de minutos. Como muestra la secuencia que se presenta a continuación (Figura 128), en diferentes momentos algún niño acude a la mesa pero en seguida vuelve a marcharse.



Minuto: 00:47

El maestro que estaba al lado de la mesa de construcciones observando en silencio el juego de la niña que empezaba a manipular las piezas, se levanta para acompañar la gestión de los materiales que hay encima de la mesa, ha oído revuelo en aquel espacio y va a acompañar la gestión. Acto seguido la niña se marcha a otro espacio.



Minuto: 02:25 A la mesa de construcción acuden diferentes niños, pero ninguno se queda más de unos momentos.



Minuto 04:48

Alrededor de la mesa de construcción se encuentran varios niños y niñas. Uno de ellos empieza a hacer una torre. La educadora le observa y le dice: *oh, que torre más alta*. Otro niño al ver la torre la golpea haciéndola caer. La educadora se levanta a ordenar las piezas y los niños siguen jugando. El juego de P es construir torres, los otros niños le observan y manipulan las piezas sin desarrollar ninguna construcción.

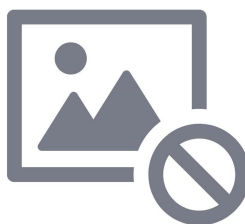


Minuto 05:31 La educadora acude a la mesa donde están las bandejas Montessori a ordenar los materiales que se han ido esparciendo. La gestión y el acompañamiento verbal que ofrece a los niños les invita a poner bien los materiales para poder jugar debidamente. En la mesa de construcciones quedan dos niños. Llevan jugando en ella apenas 3 minutos. La mesa queda vacía hasta el final de la sesión.



Minuto 07:18 Una niña se detiene, hace una torre y se marcha. Por su lado, de vez en cuando, pasa alguien, pero no se detiene a jugar.

Minuto 08:17 La educadora pone dentro de la mesa algunas piezas que ha encontrado esparcidas por otros espacios. Simplemente, las pone dentro, no las coloca de ninguna manera atractiva, ni las clasifica siguiendo ningún criterio. Las deja dentro.



Minuto 08:52

E pasa por al lado de la mesa, toca las piezas acariciándolas y mirándolas, se marcha. No se detiene a jugar con ellas.

Figura 128. EBMV_HV_PRE_2-3aB_s4. Fuente: EBMV Horta Vermella

Como muestra la Figura 129, los contenidos mayormente identificados son los relativos al reconocimiento de los atributos mensurables (90%), seguidos de la observación de cambios por forma y de la comprensión de los principales cuantificadores (50%). Con valores aproximados a estos, destacan con un 40% de recurrencia las clasificaciones por forma, el reconocimiento de las posiciones y de las cualidades sensoriales. Con un 20% aparecen las correspondencias por forma, el inicio del conteo y las acciones de sumar, añadir, restar, separar, etc. Finalmente, con un 10% destacan las correspondencias cuantitativas y las seriaciones cualitativas. De nuevo, los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.

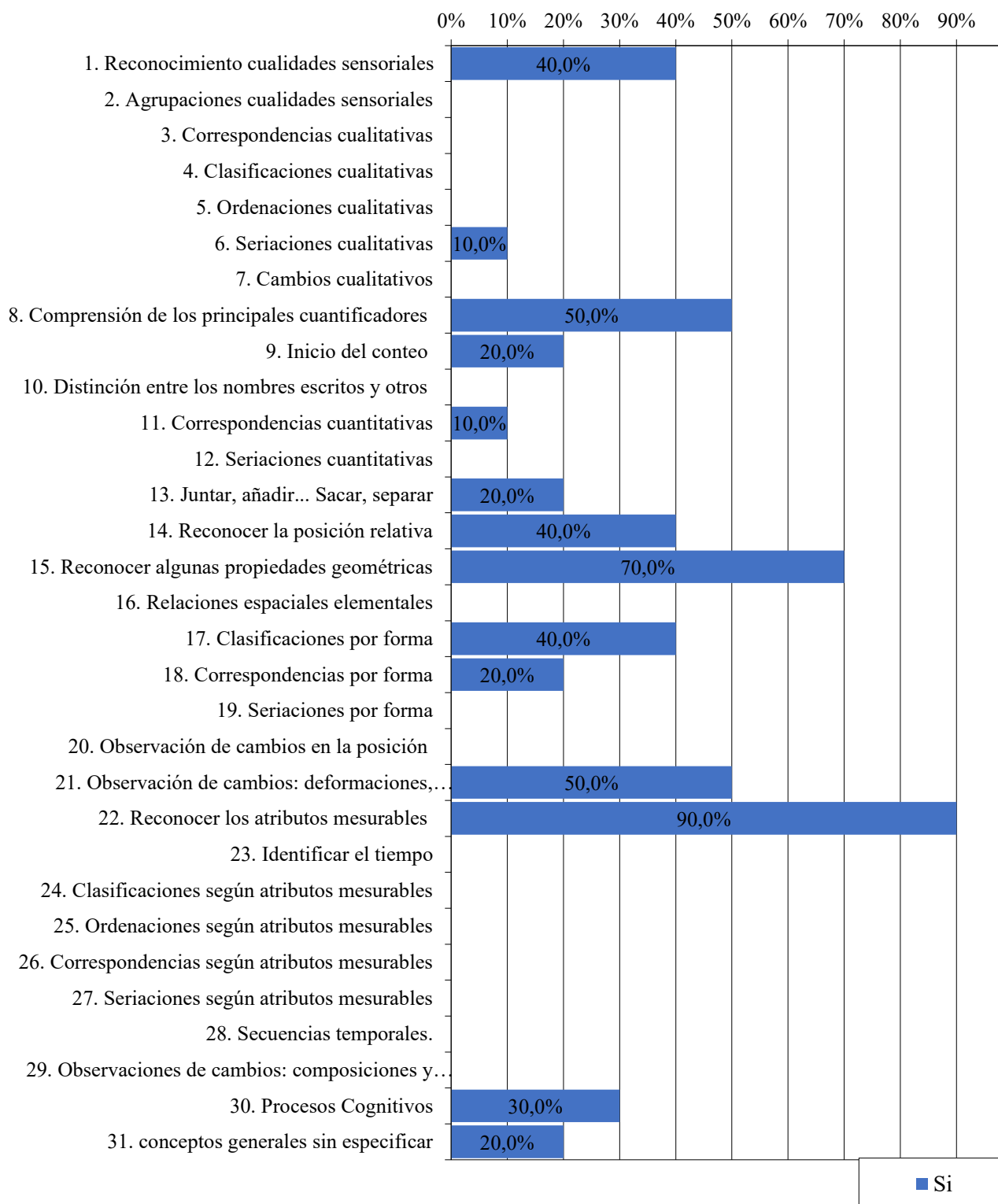


Figura 129. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de los espacios de construcción.

Taller o Atelier. Perteneciente al espacio de taller, en el grupo de discusión no se pudo reflexionar sobre este tipo de propuesta por falta de tiempo. Por ello, únicamente se presentará la información perteneciente al cuestionario y a las observaciones no participantes.

En relación con las observaciones no participantes, se destaca que el diseño del espacio responde a los criterios para el diseño de los espacios y materiales correspondientes al marco teórico. Como muestra la imagen, los profesionales preparan los espacios del aula considerando la polisensorialidad, la iluminación, la accesibilidad y autonomía, la estética belleza y naturaleza, el orden y intencionalidad, la colectividad e individualidad, la transformación, la adaptabilidad, la manipulación, la polivalencia y la seguridad (Figura 130).



Figura 130. EBMV_C_PRE_2-3B_s4. Fuente: EBMV Caputxins

En esta sesión se presenta el espacio de taller dentro del aula. Este espacio tiene una mesa y cuatro sillas. En cada sitio se dispone una madera como soporte del barro blanco. En el centro se presenta un pote con 4 herramientas para el barro, todas iguales. El desarrollo completo de la sesión se presentará en el bloque de contenido 5.2.3 presentando el contenido relativo al papel del adulto que acompaña.

Sobre los datos del cuestionario y como presenta la Figura 131, los contenidos y capacidades detectados se reparten en el reconocimiento de las cualidades sensoriales (77.8%) y, en segundo lugar, aparece el reconocimiento de los principales cuantificadores (55.6%) seguido de la identificación de la posición relativa y de las propiedades geométricas (44.4%). Con un 33.3% se recoge el reconocimiento de los atributos

mensurables. Por debajo, se encuentran la observación de cambios (22.7) y con valores muy aproximados, destacan las correspondencias cuantitativas (22.2) y las ordenaciones cualitativas (22). Finalmente, con un 11% se muestran las clasificaciones cualitativas y la observación de cambios en la posición relativa. Hay que destacar que, del mismo modo que en los espacios anteriores, los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.



Figura 131. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de taller.

5.2.3 Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto

La visión de los profesionales de las EBMV sobre su papel e intervención durante el desarrollo del juego de los niños se basa, como se describe en la Tabla 91, en la idea de acompañar el juego de los niños desde su mismo plano, sentados en el suelo, observando las acciones que llevan a cabo, gestionando los conflictos que puedan aparecer, reordenando los espacios y los materiales cuando se van desordenando y acompañando a los niños, pero sin interferir o irrumpir en su juego. En este sentido, destaca la importancia de no irrumpir en el juego de los niños ni romper su creatividad o acción.

También, se relata la importancia de documentar las acciones de los niños mediante fotografías para poder hacer las visualizaciones que se ofrecen a las familias.

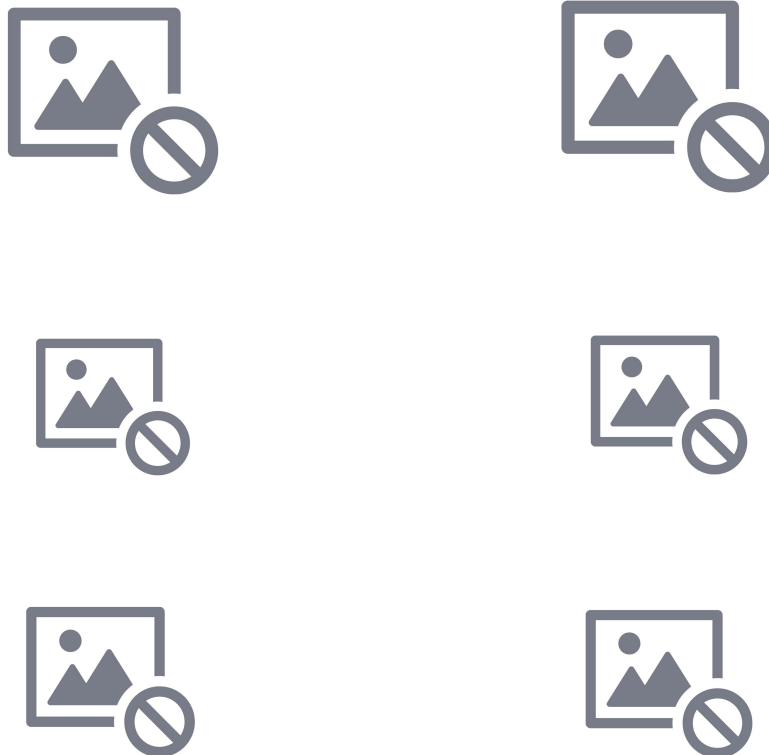
Tabla 91. Grupo de discusión – el papel de adulto, antes de la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-10	HV	Nuestro papel es acompañar lo que hacen los niños sin interferir, observar, documentar, preparar los materiales, reconducir los conflictos, pensar en las propuestas. Estar presentes en los diferentes momentos e ir dando soporte a lo que hacen. Sobre todo, acompañar su juego y observar y documentar.
GD-PRE-11	HV	Nosotros documentamos las propuestas para hacer las visualizaciones, y también acompañamos su juego. Estamos presentes, siempre que podemos nos colocamos de manera que podamos ver dos o tres espacios, en el suelo, a su altura, y así podemos acompañar la gestión. Estamos ahí observando y acompañando el juego.
GD-PRE-5	HV	Nuestro papel consiste en observar, documentar, gestionar el aula, interactuar con los niños, estamos a su lado, mirando, observando, dejando que desarrollen su juego libre, sin interferir. Y como dice Núria también recogemos, nos pasamos el día recogiendo.
GD-PRE-3	HV	Sí, nosotras observamos su juego, acompañamos, preparamos el material, vamos ordenando, estamos en el suelo, a su altura, gestionamos los conflictos, documentamos, siempre vamos con la cámara haciendo fotos. Y no interferimos en su juego. Lo importante es estar presente y observar lo que hacen, gestionar y no interferir en sus creaciones para que sean ellos los que están concentrados haciendo sus propuestas. A veces, nos saben mal parar el juego porque ya es hora de salir.
GD-PRE-9	HV	Muchas veces, en los claustros, hablamos de la importancia de documentar y observar, anotar las observaciones. De hecho, compramos unos libretas para poner en el espacio de luz y el taller, pero no las usamos. Las reflexiones las hacemos después, cuando tenemos tiempo, sí que a partir de las fotos reflexionamos y hacemos las visus. También hacemos las observaciones iniciales de los niños.

(...)

Durante el juego de los niños estamos a su lado, jugamos con ellos, pero miramos de no interferir en sus juegos o creaciones. Cuando les hablamos o decimos cosas irrumpe en lo que están haciendo por ellos mismos.

También, en las observaciones no participantes se recoge que la observación del juego de los niños es una parte importante de la tarea del profesional. En este sentido, **el papel del educador se interpreta como agente que observa el juego**. La maestra (M) acompaña a la alumna (A) observando su juego con las bandejas de experimentación con arena. Ella permanece a su lado observando el juego. Cuando A tira arena fuera de la bandeja, M aprovecha y le explica a A que fuera no puede caer. Al tiempo, refuerza en su diálogo los conceptos de dentro y fuera, y de cantidad. Gran parte de la sesión observa en silencio el juego de los niños. Aun así, hace algunas intervenciones como muestra la secuencia de la Figura 132.



Minuto: 06:37. Ha caído fuera de la caja. Hemos de intentar que caiga dentro. La tierra la ponemos dentro, que fuera, nos ponemos de pie y patinamos con el suelo lleno de tierra. Ponla aquí dentro... no sé si ha caído mucha, ¿eh? ¿Pones un poco más?



Minuto: 08:16 ¿Que se ha caído fuera? ¿Qué ha caído aquí en el pie?

Minuto: 08:29 ¿Done más ha caído la tierra?



Minuto: 15:38

Mira que tierra más pequeña. ¡Oh, que pequeña!

Figura 132. La observación del adulto que acompaña el juego con las bandejas de experimentación.

Fuente: EBMV Caputxins

En esta sesión, como ilustra la Figura 133, en el aula de 1-2 años de la EBMV Caputxins, los niños y niñas van explorando los materiales libremente por el espacio de juego heurístico. La educadora (R) permanece a un lado observando sin intervenir hasta el minuto 04:16 cuando aparece un conflicto por un pote metálico. Desde su posición, sentada en el suelo, pide al niño que busque otro pote y devuelva el pote que tenía a su compañera. Ella va observando cómo se desarrolla el juego permanece en silencio. No toma nota de las acciones de los niños, ni verbaliza sus acciones. Los mira con simpatía

les sonríe cuando estos la miran y, mayormente, les sigue observando, les hace muestras de cariño, les acaricia, les sonríe, est a presente y disponible para ellos. Los niños y las niñas siguen su juego de manipulación y exploración de los elementos.



Figura 133. La observación del adulto que acompaña. Fuente: EBMV Serra Sanferm

La Figura 134 presenta una secuencia de imágenes que muestra cómo se desarrolla una sesión de juego libre. Las imágenes muestran dos espacios de juego simultáneos: El taller y la tienda. Respecto al taller, se destaca que el barro blanco es muy duro. Cuesta de deformar. Con pequeños pellizcos la niña lo consigue, pero el niño no.  l lo desliza como una plancha. Va mirando todo el rato alrededor. Ella construye una pequeña fila de trozos que ha ido separando y chafando con los deditos. Tampoco utilizan en ningún momento los instrumentos que han dispuesto para ello encima de la mesa.

Otros niños están jugando en el espacio de la tienda. Un niño juega a las compras, va contando muchas veces 1,2,3... haciendo ver que utiliza la caja registradora. Los tres niños llenan y vacían los cestos de la compra, parece que uno sea el vendedor y los otros dos le compran cosas. No hay en toda la sesión de 18 minutos ninguna intervención por parte del adulto. Únicamente se acercan un momento a recoger unas piezas del suelo.

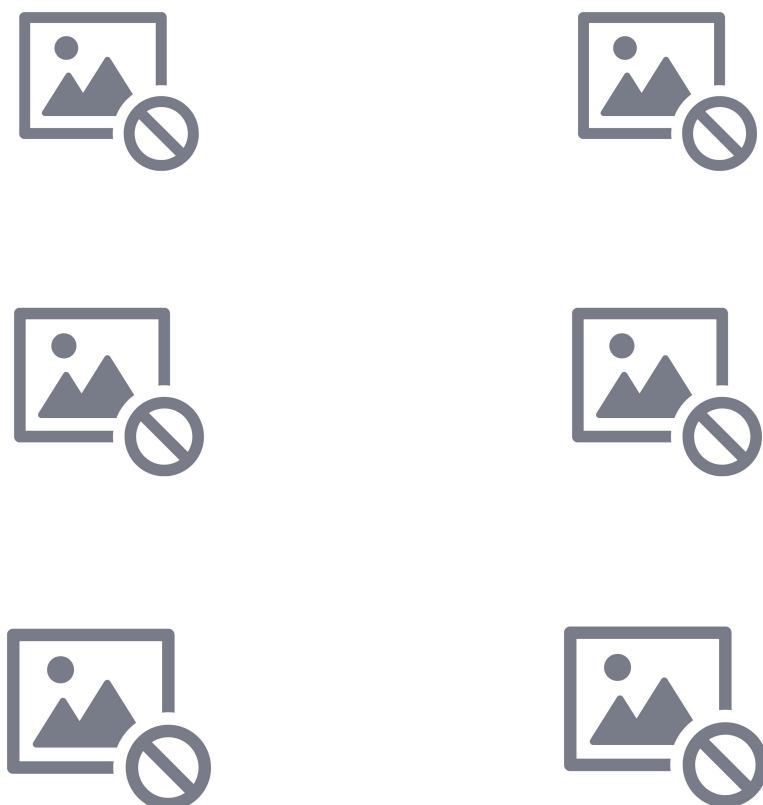
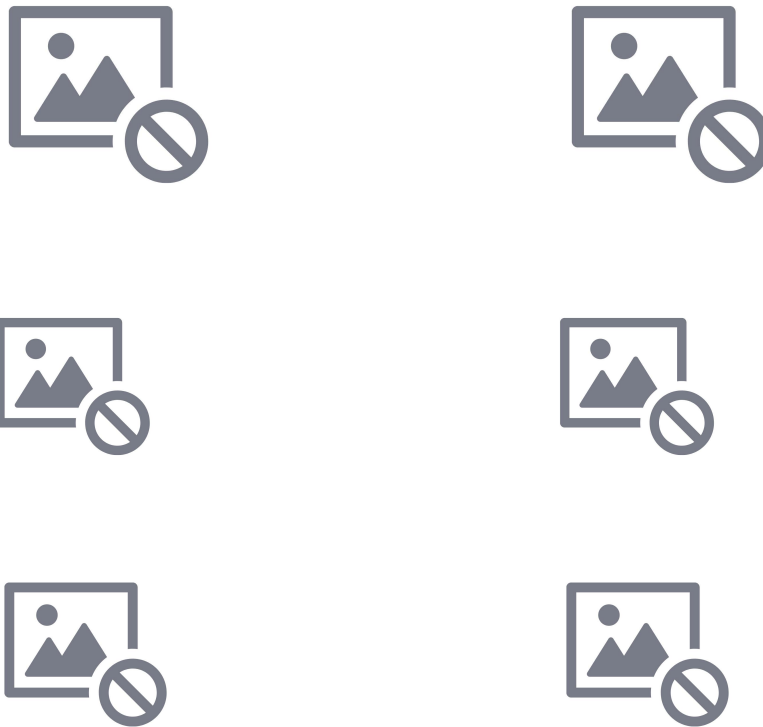


Figura 134. La observación del adulto durante el juego simbólico en la tienda y del taller. Fuente: EBMV Caputxins

Del mismo modo que en el grupo de discusión, las observaciones no participantes destacan **el papel del educador como agente que favorece la autonomía**. Como muestra la Figura 135, M, la maestra, observa al alumno (K) que se ha metido dentro del cubo Pikler y no puede salir. Durante 10 minutos, aproximadamente, le observa y le anima a salir, pero en ningún momento lo hace ella por él.



Minuto 01:27

La educadora pregunta al niño: ¿Cómo has entrado? ¿A ver, como has entrado aquí dentro? ¿Cómo has entrado?... Has de sentarte y pasar por aquí. Tú puedes hacerlo. Has de sentarte o no podrás salir.

Minuto: 05:11

Tat... ¿No puedes salir? Si que puedes. Has de pasar por dentro del agujero tal y como has entrado

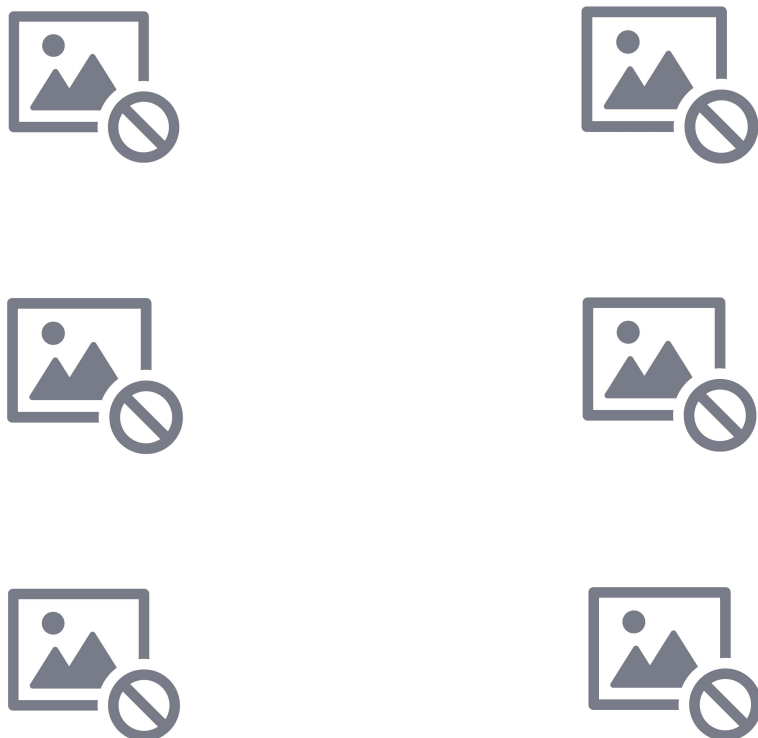
Minuto: 07:23

¡Ole Kl, Tat! ¡Has podido! ¡Tú puedes va! ¡Venga! ¿Quién ha podido salir de dentro del cubo? Chocala!

Figura 135. Intervenciones del adulto durante el juego de movimiento. Fuente: EBMV Horta Vermella.

El papel del educador como agente de gestión y reorganización de los espacios es también uno de los elementos que se recoge tanto en el grupo de discusión como en las observaciones no participantes. En este caso, la maestra se ubica en un lado central del aula para ir observando el juego de los niños. Desde su posición acompaña visualmente los niños que juegan en el espacio de los trenes y en el de la mesa con las diferentes propuestas Montessori. Lo hace a lo largo de toda la sesión que dura 17 minutos. En ningún momento toma notas del desarrollo del juego de los niños. La secuencia de imágenes que se muestra a continuación, Figura 136, describe el rol del adulto como

observador en la que las diferentes intervenciones de la maestra son de gestión de aula y de muestras de afecto a los niños y niñas.



Minuto: 00:40. Explica que las vías son para jugar en el centro y que no las puede pasear por el espacio.

Minuto: 01:27. La maestra observa en silencio las transiciones y el desarrollo del juego de los niños.

Minuto: 02:12. La maestra gestiona un conflicto por las vías. G quiere los trenes y las vías que tiene su compañero. La maestra le explica que ahora no puede coger esas vías y que puede

Minuto: 05:10. La maestra recoloca las bandejas Montessori porque se han mezclado los materiales. Explica a K que podrá jugar con ellos cuando un compañero o compañera suya acabe el juego y se levante.

Minuto: 09:46 - 10:45. La Maestra gestiona otros conflictos por los materiales que hay encima de la mesa explicando que no pueden llevárselos y que tienen que esperar a jugar con ellos hasta que los compañeros que hay sentados hayan acabado y se hayan levantado. Ordena los materiales y los presenta de nuevo.

Minuto: 09:31. La Maestra acompaña a K a sonarse, le invita a coger de forma autónoma el pañuelo y a sonarse. Cuando el niño acaba ella completa la acción acabando de limpiar al niño.

Minuto: 11:39. N acaba su propuesta de juego en la mesa y se levanta dirigiéndose a la maestra y se abrazan.

Figura 136. El papel del educador como agente de gestión y reorganización de los espacios. Fuente: EBMV Horta Vermella

Durante la sesión de juego, en el espacio de motricidad fina (Figura 137) donde hay una mesa que contiene diferentes juegos de encajar según la forma, la maestra interviene solo para poner orden; cuando algún niño se lleva el material de la mesa o cuando se mezclan entre ellos. En el minuto 7:45, dos de los niños golpean las piezas entre sí y contra la mesa, mientras uno de ellos intenta encajar correctamente las piezas. La maestra les explica que el juego no sirve para golpear y les pide que no lo repitan. Los invita a que jueguen con otro juego y cuando el niño que hace el encaje finalmente lo consigue, la educadora que está observando no verbaliza nada.



Figura 137. Intervenciones del adulto durante el juego libre en el aula de 1-2 años. Fuente: EBMV Horta Vermella

Las intervenciones del adulto como apoyo en el aprendizaje de los niños.

Los niños juegan libremente manipulando los materiales que se les han presentado en la sesión de juego heurístico. La educadora interviene en algunas ocasiones puntuales acompañando la acción del niño.

En la secuencia de imágenes de la Figura 138, se observa como el niño se dirige a la educadora con una madera en la mano. Ella, al verlo, le formula una pregunta y añade palabras a su acción. Durante toda la sesión lleva a cabo tres intervenciones más tal y como se describe en la secuencia.



Minuto 05:35

El niño se dirige a la educadora con una madera en la mano y se la acerca. La educadora le pregunta: ¿qué has encontrado? y sigue diciendo: Una madera muy bonita, que preciosa.



Minuto 07:28

La educadora ofrece a un niño que estaba llorando un pote y un cesto lleno de maderitas y le dice: mira, ¿qué tenemos aquí? el niño las coge y ella dice: ¿verdad que hay muchas? El niño deja de llorar y va cogiendo las maderas y las va explorando.







Minuto 09:50

La educadora observa un niño que se acerca sacudiendo un pote que contiene algunos elementos que suenan con el movimiento del niño. Le pregunta: *¿Qué hay aquí dentro? ¿quieres que lo abramos?* Acompaña sus palabras con el movimiento, coge el pote y lo abre mostrándole al niño lo que hay dentro. Y continúa: *¿Oh, mira que hay?* Juntos vacían el bote que contenía las tapas metálicas de los potes de conserva y acompaña al niño, tapando el pote, a que vuelva a llenarlo.

Minuto 14:13

El niño que estaba llenando el pote con las tapas metálicas acaba y lo vuelve a sacudir haciéndolo sonar. La educadora dice: *¿qué suena?* El niño le da el pote a la educadora y ella pregunta: *¿qué quieres sacarlos de dentro?* El niño se la mira e intenta sacar la tapa del pote. Finalmente le ofrece el pote como asistiendo. La educadora saca la tapa del pote y lo deja en el suelo, pero con la tapa superpuesta para que sea el mismo niño quien la retire. El niño la retira y empieza buscar tapas de nuevo.

Figura 138. Las intervenciones del adulto como apoyo en el aprendizaje de los niños. Fuente: EBMV Serra Sanferm.

En este sentido, la secuencia muestra la importancia y el valor del lenguaje del adulto como andamio de apoyo a las matemáticas emergentes. En el grupo de discusión se plantea la reflexión sobre la importancia de la observación y el acompañamiento de los niños. En este sentido, antes de la formación, son escasas las intervenciones mediante preguntas o aportaciones que faciliten y favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático. Aun así, se han podido observar algunas intervenciones puntuales y algunos diálogos que van un paso más allá de la observación. En la secuencia de imágenes que

se muestra en la Figura 139, se recoge un dialogo que establece una educadora con una niña invitándola a jugar desarrollando un juego simbólico en la tienda.



Minuto 01:38

Los niños se van repartiendo en los diferentes espacios y van desarrollando sus propios juegos. La niña acude a la educadora y le da un abrazo. La educadora, después de abrazar a la niña, la invita a jugar señalándole la tienda. La educadora se dirige a la tienda y pregunta: ¿qué compraremos? Un niño responde: ¿qué quieres comprar? Y la educadora sigue estableciendo un dialogo: A ver... ¿qué tienes para comprar? El niño le da un pan y la educadora añade: ¿Qué tienes queso? – Sí, responde el niño mostrándole unas piezas. La educadora le dice: dame 1 trozo por favor. Gracias. ¿Qué quieres un poco?



Minuto 02:53 Se acerca una niña a la educadora con un cesto lleno de productos y esta le dice: ¿oh, que tienes aquí? cogiendo el cesto y mirando en su interior. Mira, ponme también zanahoria por favor, añade como si la niña le hubiese preparado su cesto de la compra. La niña va a buscar las zanahorias y las mete dentro del cesto y la educadora dice: Ya me has traído las zanahorias. Otro niño pone algo en el cesto y la educadora le pregunta: ¿Qué es esto? Uy cuantas cosas. Gracias, dice mientras los niños le dan el cesto.



Minuto 03:31. Y la educadora vuelve a preguntar: ¿Cuándo debo? Y la niña responde: 3 euros

La educadora cuenta poco a poco y con el gesto acompaña haciendo ver que deja en el mostrador 3 monedas: uno, dos y tres. Mientras la niña observa atentamente.



Minuto 04:09

Cuando acaba, la niña le dice: No, eran cinco. A ello responde la educadora, siguiendo el mismo procedimiento que antes: ah, pues, cuatro y cinco. Añade dos nuevamente con un gesto pausado al mismo tiempo que cuenta. La niña, hace el gesto de coger las monedas y se va detrás del mostrador, como si fuera a guardarlas a caja. Cuando llega allí le dice a la educadora: ¿Quieres el tiquete? Y la educadora responde: Sí, gracias. La niña hace como si le entregase un tiquete y la educadora se despide diciéndole adiós y le pide que ahora, vuelva a recoger todas las cosas en su sitio por si otro niño quiere jugar de nuevo a comparar. La niña vuelve detrás del mostrador y va colocando las cosas.

Figura 139. El papel del lenguaje como andamio de apoyo a las matemáticas emergentes. Fuente: EBMV Serra Sanferm.

5.2.4 Conocimiento sobre las orientaciones curriculares

Referente a los conocimientos curriculares antes de la formación, los resultados muestran que no se ha utilizado ningún instrumento que aporte información específica sobre los conocimientos curriculares.

Por lo que se refiere al grupo de discusión, los profesionales afirman que en sus programaciones, normalmente, no aparecían de manera explícita los contenidos matemáticos. De hecho, se generó un debate en el que se habló sobre cómo en las programaciones no aparecían explícitamente los contenidos y objetivos matemáticos. Pero que, al preparar los espacios, se podrían servir de algunos momentos que les permitiera reflexionar sobre ello (Tabla 92). Hay que destacar que en ningún momento hicieron referencia al currículo y que al preguntar por las programaciones pensaban en la preparación del espacio más que en el hecho de programar en base un currículo.

Tabla 92. Grupo de discusión – conocimientos curriculares.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-PRE-5	HV	Cuando pongo el material no me paro a pensar explícitamente los aspectos matemáticos que se están trabajando porque en nuestro cotidiano y en todas las propuestas y materiales de manera natural ya aparecían.
GD-PRE-11	HV	No pienso en ello, no lo hago tan consciente. Más bien sabemos que las mates están, las ordenamos con un criterio, pero no con un objetivo de juego específico. Es decir, que los presentamos con una coherencia, donde tiene mucho que ver la estética, pero en el juego que hará al niño no pensamos tanto en el objetivo. Y cuando lo vemos jugar es muchas veces que vemos las mates que están pasando, es verdad, nos pasa eso. No programamos, no tenemos programaciones de matemáticas. (...) Hasta ahora hemos hecho mucha formación nos espacios, piensas en que todo quede bien y estético y funcional pero cuando está montando no piensan en las matemáticas, no acabas de caer. Pero cuando ves a los niños que hacen las acciones apenas.
GD-PRE-1	HV	Cuando programo pienso en que todo esté ordenado. De hecho, esto es planificar porqué programar las sesiones de juego no lo hacemos. Lo que miramos es que no haya muchos materiales porque no juegan bien. Que las cosas estén bien puestas, por ejemplos las piezas ordenadas con algún criterio, que haya todos los elementos necesarios para jugar (por ejemplo, en la cocinita, utensilios y botes, platos, vasos, cucharas...). Coloco las cosas de manera correcta, ordenada.
GD-PRE-6	HV	De entrada, si tenemos que montar un espacio no pienso en los aspectos matemáticos. Si ponemos trenes no pensamos con las matemáticas, sabes que está, pero no pienso en ello. Sé que está, pero no pienso que en la vía del tren después será larga... o corta...

Los resultados obtenidos en el cuestionario, contrariamente, muestran que 19 (67.9%) profesionales manifiestan haber desarrollado sus programaciones de los espacios y materiales con contenidos matemáticos y 9 (32.1%) manifiesta no haberlo hecho. A los profesionales que afirmaban programar bajo objetivos matemáticos, se les pedía que describiesen 2 objetivos y 2 acciones matemáticas vinculadas a cada objetivo.

Valorando los objetivos que se desarrollaron, desde un punto de vista cualitativo, y tomando los datos que muestran la Figura 140, se encuentran los objetivos vinculados a los diferentes bloques de contenidos. En total, los profesionales describieron 37 objetivos. En este sentido, se observan diferencias significativas entre los distintos contenidos; 12

objetivos vinculados a las cualidades sensoriales, 12 a cantidades continuas y discretas y 7 y 6 a las posiciones y las formas y a los atributos mensurables, respectivamente.

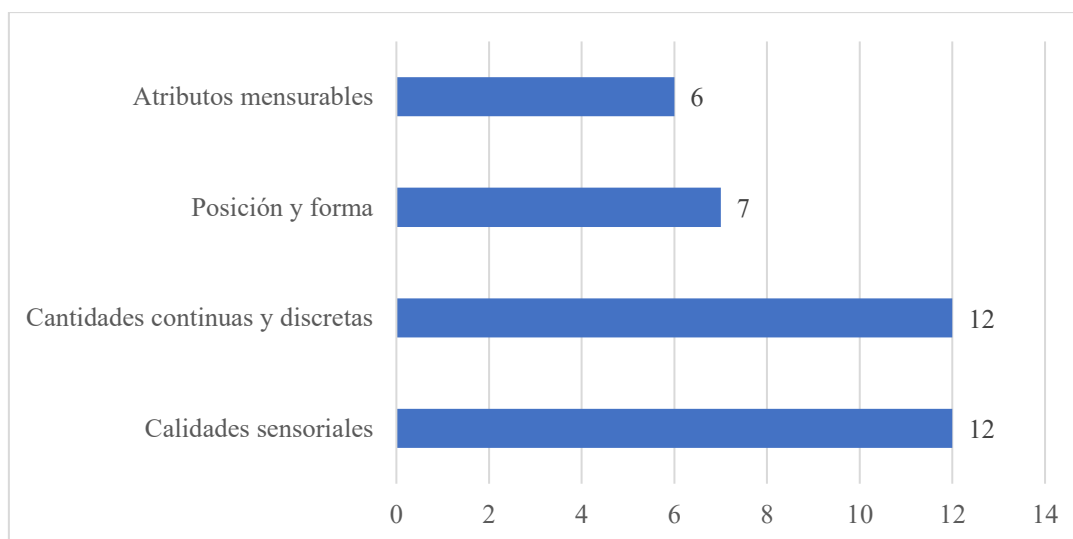


Figura 140. Objetivos planteados por los profesionales según bloques de contenido antes de la formación.

5.3 Conocimiento matemático de los profesionales de la Escuela Infantil después de la formación

En cuanto al conocimiento matemático de los profesionales de la Escuela Infantil después de la formación y como se ha descrito en el cuarto capítulo, se recogen aportaciones significativas tanto en los grupos de discusión como en los cuestionarios.

Además, se añade la documentación como instrumento de recogida de información ya que, previo a la formación no existía ni documentación, ni planificaciones, ni programaciones que describieran qué contenidos u objetivos hay con sentido matemático. Pero, posteriormente a la formación, los profesionales incorporaron documentaciones a sus prácticas para el diseño de los espacios y materiales.

Para exponer detalladamente los resultados, se parte nuevamente de las dos categorías correspondientes a este ámbito:

- El Conocimiento Matemático Intuitivo e Informal (C-IeI)
- Conocimiento de las cualidades sensoriales.
- Conocimiento de los números y las operaciones.

- Conocimiento de las posiciones y las formas.
- Conocimiento de los atributos mensurables.

Para cada una de las categorías se aportan los datos obtenidos por los diferentes instrumentos. En primer lugar, se presentan los resultados de los grupos de discusión, seguidamente se presentan los resultados del cuestionario; primero desde un punto de vista cuantitativo y después desde el punto de vista cualitativo. Finalmente, se aportan los datos correspondientes a las documentaciones.

5.3.1 Conocimientos matemáticos intuitivos e informales (C-IeI)

Después de la formación, los profesionales incorporan nuevos conocimientos específicos entorno a qué son las matemáticas intuitivas e informales correspondientes a los niños de los 0 a los 3 años.

La Tabla 93, muestra cómo los profesionales ya no expresan la necesidad de comprender qué matemáticas podían desarrollar los niños de 0 a 3 años. En este sentido, fueron capaces de reflexionar y compartir los diferentes conocimientos correspondientes a los diferentes bloques de contenido y expresaban tener muy claros los contenidos y capacidades que se pueden desarrollar a partir de las propuestas de juego y experimentación en el primer ciclo de Educación Infantil.

Tabla 93. Grupos de discusión posterior a la formación posterior a la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-7	HV	Tengo muy claros los contenidos y las capacidades que se pueden desarrollar. Antes de la formación nos hacíamos un lío. Creo que, y hablo por todos diría, que nos ha quedado marcado que los niños pueden identificar, relacionar y observar con todos los contenidos: medida, de calidades sensoriales, de posiciones y formes y de...
GD-POST-5	HV	Si tenemos muy claros los contenidos de identificar, relacionar y “operar” con las cantidades, con los colores y las calidades de los objetos, con las formas y con los cambios de posición.
GD-POST-1	HV	Tengo presente los contenidos y capacidades que los niños pueden desarrollar que son todos estos que dicen. Los voy viendo día a día. Es una estructura fácil, aunque has de pensarla. Yo creo que de memoria todo el cuadro que nos pasó Àngel no me lo sé, pero sí que me ha quedado muy claro que tenemos tres grandes capacidades de identificar, relacionar y los cambios de las cosas y que, como contenidos, hemos de pensar no solo en las calidades sensoriales

sino también en la posición y las formas, en las medidas y en los números.

Frente a la pregunta: *¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término "matemáticas informales"?*, desde un punto de vista cuantitativo, los resultados revelan que después de la formación un 89,3% manifestaban haber leído o escuchado sobre las matemáticas informales versus un 10,7% que expresaron no haber tenido oportunidad (Figura 141).

POST FORMACIÓN

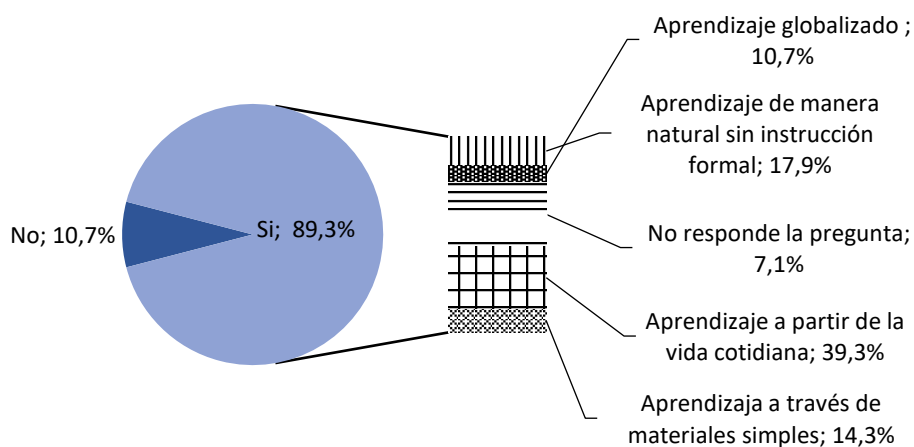


Figura 141. ¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término “matemáticas informales”?

Desde un punto de vista cualitativo, tal y como también muestra el gráfico anterior, existe un 39.5% de definiciones que vinculan las matemáticas intuitivas a las que aparecen en la vida cotidiana. Un 17.9% las vinculan a aquellas que aparecen sin instrucción formal. Un 14.3% lo relaciona con las matemáticas que aparecen gracias a propuestas simples pero específicas mediante materiales como las bandejas de Montessori. Finalmente, un 10.7% se refieren a ellas como las matemáticas globalizadas, que se encuentran de manera transversal en todas las propuestas. Un 10.7% no responde a la pregunta.

Como muestra la Tabla 94, el análisis de resultados comparativo entre el cuestionario pre y post, presenta que existen diferencias significativas entre el primer y el segundo cuestionario.

Tabla 94. Impacto de la formación en relación con el conocimiento del término matemáticas informales.

		Sí	No	Total
Primero	N	5	23	28
	% Vertical	17,9%	82,1%	100,0%
Segundo	N	25	3	28
	% Vertical	89,3%	10,7%	100,0%

Nota: (p-valor = 0,000 calculado mediante McNemar con un nivel de confianza del 95%).

Antes de la formación, 23 (82.1%) profesionales no conocían las matemáticas informales. Después de la formación manifiestan no conocerlo solo 3 (10.7%). En este sentido, una extensa mayoría, 25 (89.3%) profesionales, expresan conocer las matemáticas informales propias de este ciclo después de la formación.

Nuevamente, desde el punto de vista cualitativo y en caso de responder afirmativamente, se pedía a los participantes que aportasen una definición del concepto. Analizando esta información, se desprende que del 89.3%, el 71.5% son capaces de aportar elementos que se aproximan a la definición. Un 39.3% las vinculan a la vida cotidiana (Tabla 95).

Tabla 95. Concepto matemáticas informales como parte de la vida cotidiana.

PARTICIPANTE	CITA
C-POST-3	Son aquellas matemáticas que están presentes en el contexto diario del aula y en la escuela en cualquier situación: ya sea en las rutinas, en los espacios de juego, en el jardín y en sus relaciones. Hay que ser consciente y tenerlas en cuenta para poder profundizar en ellas.
C-POST-16	Las matemáticas informales son las matemáticas que los niños aprehenden en la cotidianidad, sin la finalidad de aprenderlas como tal. Es decir, cuando repartimos un pastel o cuando ponemos la mesa o cuando repartimos la comida, hay implícitas unas matemáticas informales.
C-POST-23	Son las matemáticas que a través de las propuestas cotidianas los niños aprenden, descubren y experimentan las cualidades sensoriales de los objetos y hacen relaciones, clasificaciones, ordenaciones, seriaciones, agrupaciones y correspondencias.

Un 17.9% habla de las matemáticas informales como aquellas relativas a procesos intuitivos, sin instrucción formal (Tabla 96).

Tabla 96. Concepto matemáticas informales como procesos intuitivos.

PARTICIPANTE	CITA
C-POST-8	Lo relacionado con todo lo vivido en el entorno y que inconscientemente no asumimos como matemáticas formales (las de la escuela) pero que en el fondo sí que lo son. La formalidad de las matemáticas académicas no deja entrever que vivimos rodeados de matemáticas en todo momento-lugar, así como en todo lo que hacemos diariamente.
C-POST-10	No son matemáticas formales porque nacen de manera innata en los niños. Aparecen en su día a día con el juego

Un 14.3% vincula el término matemáticas informales a aquellas matemáticas que se construyen mediante el juego libre con materiales diseñados con sentido matemático (Tabla 97).

Tabla 97. Grupo de discusión: concepto matemáticas informales como procesos que emergen durante el juego libre.

PARTICIPANTE	CITA
C-POST-14	Son las matemáticas a través de los materiales simples, con intencionalidad matemáticas, que los niños aprenden, descubren y experimentan las cualidades sensoriales de los objetos y hacen relaciones, clasificaciones, ordenaciones, seriaciones, agrupaciones y correspondencias jugando, intuitivamente.

Analizando los documentos que aportaron los participantes de la formación, se observan los cambios que han introducido en relación con los contenidos formativos introducidos. Estos documentos permiten analizar qué aspectos de la formación han destacado y cómo los han incorporado en las aulas.

Concretamente, correspondiente a lo que sería propiamente la definición de matemáticas informales e intuitivas, sobresalen aportaciones que destacan este proceso natural del niño de descubrir de manera intuitiva los conceptos matemáticos a través del contexto y de su propio cuerpo.

Presentaban las documentaciones por grupos y, en función del nivel educativo de referencia de los profesionales, aportaban una descripción que acompañaba las imágenes que exponían. A continuación, en la Tabla 98 se muestran las presentaciones donde los profesionales refieren a las matemáticas informales en las primeras edades.

Tabla 98. Documentación: las matemáticas intuitivas e informales.

PARTICIPANTES

DOCUMENTACIÓN

EBMV_C_X/P_0-1



Carlota 14 meses



On sou
Matemàtiques?

CITA

¿Dónde estáis matemáticas?

El título de nuestra presentación que representa como el niño encuentra las matemáticas en todo aquello que le rodea, las descubre a través del juego con su propio cuerpo en este caso.

EBMV_SS_X/G/T_1-2

PRACTICANT L'OBSERVACIÓ AMB SENTIT
MATEMÀTIC



CITA

Practicando la observación con sentido matemático. En un inicio elaboramos este material para el juego libre del aula. Después de la formación vimos que lo podíamos ampliar y utilizar también el juego libre del niño como propuesta matemática. Lo hemos presentado de diferentes formas para observar a los niños y ver que acciones matemáticas hacían. Poco a poco, también lo hemos ampliado y

modificado para ir ofreciendo más propuestas de juego y nuevas posibilidades de que los niños descubran cada vez más cosas.

PECES DE FUSTA I ANIMALS



EBMV_HV_X_2-3



CITA

Piezas de madera con animales. Las construcciones eran materiales que normalmente poníamos en las aulas de 2-3 años y también de 1-2 años y no teníamos la conciencia de qué matemáticas aparecían en el juego. Lo que hemos hecho a partir de la formación es observar y documentar, es decir, centrar la mirada en qué contenidos matemáticos aparecían con el juego libre de los niños. En este caso Oriol está haciendo un cercado para los animales. Observamos las relaciones espaciales de posición, dentro – fuera.



CITA

Nuestro ejercicio también ha sido ir documentando, a partir de las propuestas que ya teníamos en las aulas, las acciones matemáticas que hacían los niños y las niñas en el juego libre. Hasta antes de la formación no teníamos conciencia de estas matemáticas y ahora las vemos aparecer espontáneamente en los juegos de los niños. Por eso la portada de nuestra presentación tiene esta imagen. A priori no habíamos pensado que el triángulo espejo fuese para hacer este juego pero los niños hicieron una fila con los animales resiguiendo el borde de la base del triángulo. Antes de la formación podíamos ver que hacían estos tipos de juego pero no lo relacionábamos tan claramente con los aprendizajes de las matemáticas.



CITA

Dentro de los momentos de juego libre ofrecemos a los niños materiales y propuestas que están pensados para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Ya en las primeras edades de vida, y de manera innata, los niños van creando estructuras de pensamiento, elaborando aprendizajes. En esta ocasión, Helena agrupa los vuelos pequeños y los grandes e inicia el conteo diciendo: "Un, dos, tres" con la mano. Luego prepara la mesa colocando los cubiertos junto al plato.

Fuente: EBMV Caputxins, Horta Vermella y Serra Sanferm

A continuación, se presentan los resultados obtenidos con relación a los conocimientos de los profesionales de la Escuela Infantil sobre las capacidades y contenidos matemáticos que pueden desarrollar los niños de los 0 a los 3 años en la escuela después de la formación. A su vez, se contrastan los resultados previos con los posteriores para valorar el impacto de la formación.

Para presentar los resultados, se sigue el procedimiento habitual de presentación. En primer lugar, se presentan los datos correspondientes al grupo de discusión posterior a la formación; a continuación, se aportan los datos cuantitativos y cualitativos del cuestionario; y, finalmente, se exponen los datos correspondientes a las documentaciones.

En términos generales, los datos recogidos en el grupo de discusión muestran que los profesionales, una vez desarrollada la formación, podían hablar con seguridad y aportar

una definición clara y completa sobre las capacidades y contenidos propios de las matemáticas informales (Tabla 99).

Tabla 99. Capacidades y contenidos destacados en el grupo de discusión post.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-2	HV	Lo cierto es que ahora después de la formación, cuando los veo jugar, sí miro qué aspectos matemáticos hay en los diferentes espacios y en las acciones que hacen y entiendo, es como que soy consciente de lo que está pasando, de lo que está haciendo el niño de manera espontánea, pero con mucho sentido.
GD-POST-8	HV	Es que es esto, un cambio en la mirada, ahora me siento más capaz de sacar contenidos matemáticos en las acciones que hacen los niños y ya no es lo de las mates están en todas partes, sino que podemos explicarlo como están. Los niños las desarrollan constantemente, de manera natural, innata y las puedo ver y explicar. Aparecen en sus acciones, las llevan dentro.
GD-POST-7	HV	Ahora puedo introducir vocabulario matemático adecuado y poner nombre a los conceptos o procesos matemáticos que puedan intervenir en el aula con los niños y niñas y durante el día a día porque veo como aparecen y las reconozco. Pienso mira, ahora está construyendo y relacionando los diferentes pesos, por ejemplo, o en el movimiento veo las distancias... llevo gafas matemáticas.

En el cuestionario, se pedía que los participantes listasen los contenidos y capacidades matemáticas que podían aparecer en la batería de imágenes de los espacios y materiales. También, se les pedía que detallaran los objetivos matemáticos que establecían en las programaciones para el diseño de los espacios y materiales y con sus contenidos vinculados.

En términos generales, los resultados cuantitativos muestran que, en la primera tarea de identificar los diferentes contenidos y capacidades matemáticas de las baterías de imágenes y sin diferenciar los contenidos por bloques, existen algunas diferencias significativas entre el primer cuestionario y el segundo. Como recoge la Tabla 100, el primer cuestionario presenta una media de 12.5 contenidos/capacidades y el segundo aumenta sensiblemente con una media de 13.7. En relación con los mínimos contenidos detectados, en el primer cuestionario aparecen un mínimo de 5, mientras que en el segundo aparecen 3. Ahora bien, si se observan los máximos, en el primer cuestionario se detectaron 20 contenidos y en el segundo 38.

Tabla 100. Contenidos y capacidades matemáticas detectados en las imágenes por participante pre y post formación.

Total contenidos	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer Cuestionario	28	5	9	12,5	13	16	20	3,9	0,501
Segundo cuestionario	28	3	7	13,7	12	16	38	8,0	

Cabe destacar que, en el segundo cuestionario, aparece una desviación estándar el doble de grande que en el primer cuestionario lo que revela mayor dispersión en los resultados.

Esta dispersión de los resultados puede explicarse mediante el análisis de los resultados separando los contenidos por bloques: cualidades sensoriales, cantidades continuas y discretas, posición y forma y atributos mensurables. Los resultados muestran que, en función del bloque de contenido, existen diferencias significativas entre el primer y el segundo cuestionario.

Concretamente, como se observa en la Figura 142, destaca el número de profesionales que ha detectado contenidos vinculados a cada bloque.

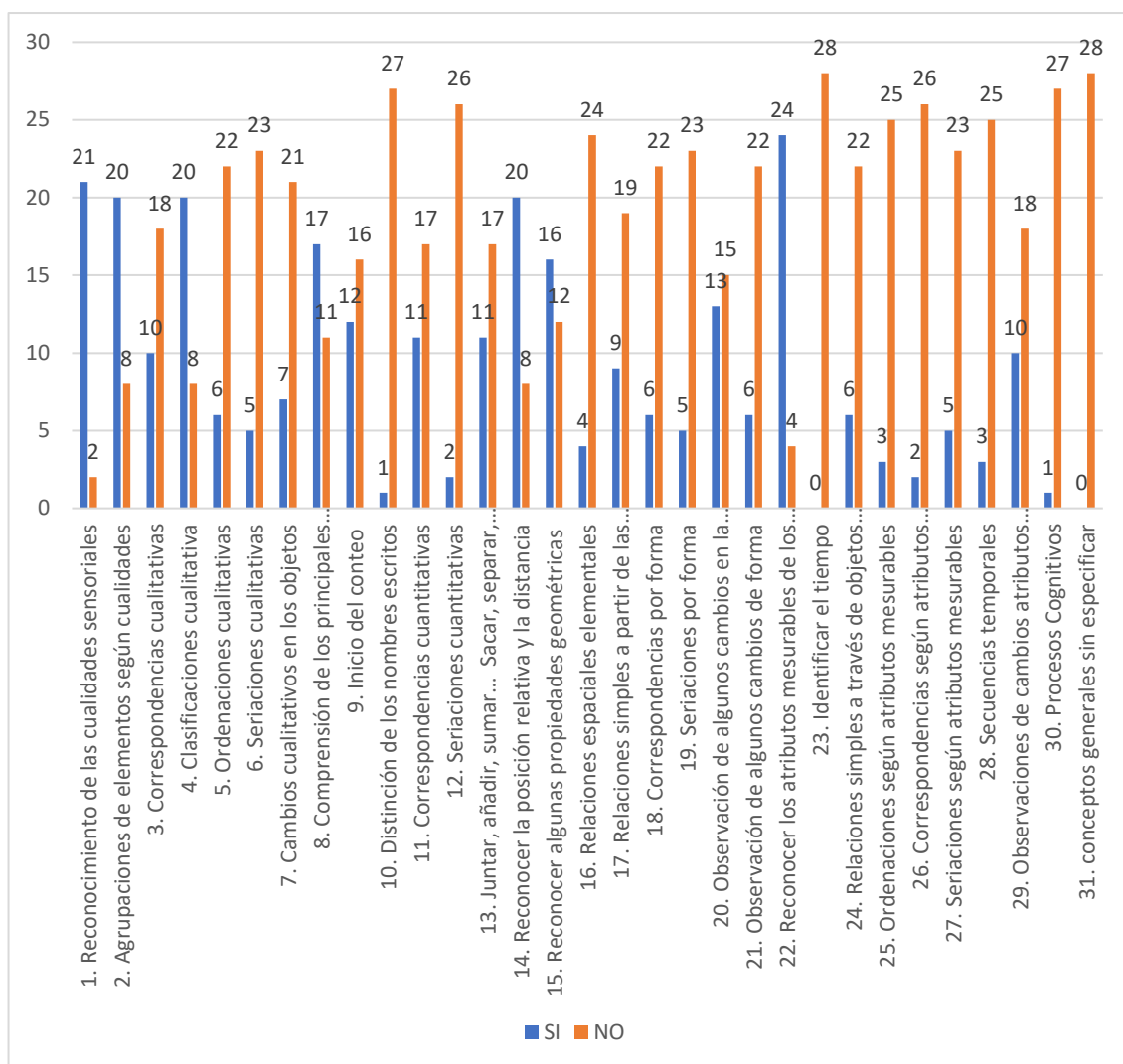


Figura 142. Contenidos detectados por los profesionales en las imágenes después de la formación.

Los datos muestran que siguen existiendo algunos contenidos que sobresalen encima de otros, pero que todos los contenidos, en mayor o menor frecuencia con excepción de dos, han sido identificados en las baterías de imágenes.

Los contenidos que han presentado mayor frecuencia de aparición siguen siendo: reconocer atributos medibles y reconocer las cualidades sensoriales. A estos se les añade prácticamente todos los otros contenidos, que pasan de aparecer con poca frecuencia a aparecer con más frecuencia. La Tabla 101, muestra por orden de aparición, de mayor a menor, los contenidos y el nombre de participantes que los han destacado.

Tabla 101. Contenidos detectados por número de participantes después de la formación.

Contenidos detectados	Número de participantes
- Reconocer los atributos mensurables de los objetos	24
- Reconocimiento de las cualidades sensoriales	21
- Agrupaciones de elementos según cualidades	20
- Clasificaciones cualitativas	20
- Reconocer la posición relativa y la distancia	20
- Comprensión de los principales cuantificadores	17
- Reconocer algunas propiedades geométricas	16
- Observación de algunos cambios en la posición	13
- Inicio del conteo	12
- Correspondencias cuantitativas	11
- Juntar, añadir, sumar... Sacar, separar, restar	11
- Correspondencias cualitativas	10
- Observaciones de cambios atributos mensurables	10
- Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas	9
- Cambios cualitativos en los objetos	7
- Ordenaciones cualitativas	6
- Correspondencias por forma	6
- Observación de algunos cambios de forma	6
- Relaciones simples a través de objetos mensurables	6
- Seriaciones cualitativas	5
- Seriaciones por forma	5
- Seriaciones según atributos mensurables	5

En la Tabla anterior, se puede ver que 13 de los 29 contenidos de las matemáticas informales de los 0 a los 3 años (prácticamente la mitad de los contenidos), son detectados por 10 o más participantes. Esos contenidos son: el reconocimiento de los atributos mensurables de los objetos, el reconocimiento de las cualidades sensoriales, las agrupaciones de elementos según cualidades, las clasificaciones cualitativas, reconocer la posición relativa y la distancia, la comprensión de los principales cuantificadores, reconocer algunas propiedades geométricas, la observación de algunos cambios en la posición, el inicio del conteo, las correspondencias cuantitativas: Juntar, añadir, sumar... Sacar, separar, restar, etc., las correspondencias cualitativas y las observaciones de cambios atributos mensurables.

Estos contenidos se corresponden a los que previamente a la formación ya se detectaban. Ejemplo de ello son los atributos mensurables y las cualidades sensoriales. Los datos muestran que la lista de contenidos detectados ha aumentado por la cantidad de contenidos que se han identificado y por el número de participantes que lo hacen.

Cabe destacar que se encuentran 9 contenidos que han sido detectados por entre 9 y 5 profesionales: las relaciones simples a partir de las propiedades geométricas, los cambios cualitativos en los objetos, las ordenaciones cualitativas, las correspondencias por forma, la observación de algunos cambios de forma, las relaciones simples a través de objetos mensurables, las seriaciones cualitativas, las seriaciones por forma y las seriaciones según atributos mensurables.

La Figura anterior (142) evidencia el hecho de que después de la formación, todos los contenidos relativos a las matemáticas informales en el primer ciclo de Educación Infantil son detectados por algún participante, exceptuando algunos pocos. La Tabla 102 muestra por orden de aparición, de mayor a menor, los contenidos y su poca frecuencia. El contenido relativo a la identificación del tiempo es el único no detectado por ningún participante. El siguiente contenido, menos frecuente, es el relativo a la distinción de los números escritos, utilizado por un único participante. Seguidamente, se encuentran las seriaciones cuantitativas y las correspondencias según atributos mensurables, detectado por 2 participantes. Las secuencias temporales y las ordenaciones según atributos mensurables las han identificado 3 participantes. Finalmente, 4 profesionales han detectado las relaciones espaciales elementales.

Tabla 102. Contenidos no detectados o poco frecuentes después de la formación.

Contenidos detectados	Número de participantes
- Relaciones espaciales elementales	4
- Ordenaciones según atributos mensurables	3
- Secuencias temporales	3
- Seriaciones cuantitativas	2
- Correspondencias según atributos mensurables	2
- Distinción de los números escritos	1
- Identificar el tiempo	0

Como muestra la citada Figura, destacan las aportaciones a otros conceptos generales no específicos. Los procesos cognitivos básicos prácticamente han desaparecido después de la formación. En este sentido y como muestra la Tabla 103, solo 1 participante hace una aportación correspondiente a los procesos cognitivos.

Tabla 103. Conceptos generales no específicos después de la formación.

Procesos Cognitivos		1
Conceptos generales sin especificar		0
Participante	Cita	
C-POST-7	El taller es un espacio de ensayo y error abierto al aprendizaje constante.	

A continuación, para valorar el impacto de la formación se presenta la comparativa entre los dos cuestionarios. La Tabla 104 muestra que de 29 contenidos matemáticos que se describen para el ciclo 0-3, 22 han incrementado su frecuencia de aparición en el segundo cuestionario. De los 7 contenidos restantes, que han disminuido su frecuencia en el segundo cuestionario, cabe destacar que todos exceptuando uno (identificar el tiempo) tienen una frecuencia de aparición alta. En otras palabras, la mayoría de los profesionales detectan dichos contenidos antes de la formación y lo siguen haciendo después. Por ejemplo: el reconocimiento de las cualidades sensoriales que pasa de 24 profesionales a 21, reconocer la posición relativa y la distancia pasa de 23 a 20 y reconocer los atributos mensurables de los objetos pasa de 28 a 24 participantes.

El mayor incremento de contenidos detectados se encuentra en las agrupaciones de elementos según cualidades que aumenta significativamente respecto a los otros contenidos. Pasa de detectarlo solo un profesional en el previo a la formación a 20 en el posterior.

Las relaciones simples a partir de las propiedades geométricas y las correspondencias cualitativas también aumentan considerablemente. Concretamente, aumentan en 9 profesionales junto a las seriaciones por forma aumentan; las seriaciones según atributos mensurables lo hacen en 5 y las seriaciones cualitativas, las relaciones espaciales elementales y las ordenaciones según atributos mensurables aumentan en 4 y 3 participantes.

Como muestra la Tabla, los otros contenidos que aumentan lo hacen en 4 o menos participantes. El único contenido que ni aumenta ni disminuye es el relativo a la identificación del tiempo que no aparece ni antes ni después de la formación.

Tabla 104. Impacto de la formación en la detección de contenidos en las imágenes.

Contenidos detectados	N. Cuestionario 1	N. Cuestionario 2	N. Incremento
Agrupaciones de elementos según cualidades	1	20	19
Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas	0	9	9
Correspondencias cualitativas	1	10	9
Seriaciones por forma	0	5	5
Seriaciones según atributos mensurables	0	5	5
Seriaciones cualitativas	1	5	4
Relaciones espaciales elementales	0	4	4
Ordenaciones según atributos mensurables	0	3	3
Secuencias temporales	0	3	3
Juntar, añadir, sumar... Sacar, separar, restar	3	11	8
Cambios cualitativos en los objetos	2	7	5
Clasificaciones cualitativas	6	20	14
Ordenaciones cualitativas	2	6	4
Seriaciones cuantitativas	0	2	2
Correspondencias según atributos mensurables	0	2	2
Distinción de los números escritos	0	1	1
Correspondencias cuantitativas	7	11	4
Correspondencias por forma	4	6	2
Relaciones simples a través de objetos mensurables	4	6	2
Observación de algunos cambios en la posición	10	13	3
Observación de algunos cambios de forma	5	6	1
Comprensión de los principales cuantificadores	15	17	2

Reconocimiento de las cualidades sensoriales	24	21	-3
Reconocer la posición relativa y la distancia	23	20	-3
Reconocer los atributos mensurables de los objetos	28	24	-4
Reconocer algunas propiedades geométricas	21	16	-5
Inicio del conteo	16	12	-4
Observaciones de cambios atributos mensurables	16	10	-6
Identificar el tiempo	0	0	0

En la Tabla anterior, también se pueden destacar aquellos contenidos que tanto en el cuestionario inicial como en el final muestran una frecuencia alta de aparición. Estos contenidos, sobre todo responden al bloque de cualidades sensoriales, al reconocimiento de los atributos mensurables, a la posición relativa y a la forma (Tabla 105).

Tabla 105. Contenidos detectados muy frecuentes antes y después de la formación.

Contenidos detectados	N.	N.
	Cuestionario 1	Cuestionario 2
Reconocer los atributos mensurables de los objetos	28	24
Reconocimiento de las cualidades sensoriales	24	21
Reconocer la posición relativa y la distancia	23	20
Reconocer la posición relativa y la distancia	23	20
Reconocer algunas propiedades geométricas	21	16

En este sentido, como se ha descrito en el apartado de presentación de resultados anteriores a la formación, en el grupo de discusión previo a la formación, ya aparecían estos contenidos como los más conocidos por los profesionales.

Como muestra la Tabla 106, los contenidos con menor frecuencia de aparición son aquellos referentes a las relaciones simples a partir de propiedades geométricas; las seriaciones por forma, las seriaciones según atributos mensurables, las relaciones espaciales elementales, las ordenaciones según atributos elementales, las secuencias temporales, las seriaciones cuantitativas, las correspondencias cuantitativas y la distinción de números escritos.

Tabla 106. Contenidos detectados poco frecuentes antes y después de la formación

Contenidos	N. Cuestionario 1	N. Cuestionario 2
Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas	0	9
Seriaciones por forma	0	5
Seriaciones según atributos mensurables	0	5
Relaciones espaciales elementales	0	4
Ordenaciones según atributos mensurables	0	3
Secuencias temporales	0	3
Seriaciones cuantitativas	0	2
Correspondencias según atributos mensurables	0	2
Distinción de los números escritos	0	1

En cuanto a los contenidos detectados en los objetivos expuestos por los profesionales después de la formación y como muestra la Tabla 107, se observan cambios significativos en comparación entre el pre y el post formación. En este sentido, la media de objetivos matemáticos diseñados antes de la formación era de 1.3 y posteriormente a la formación pasa a ser de 3.5.

Tabla 107. Impacto de la formación en los objetivos diseñados por los participantes.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar
Primer cuestionario	28	0	0	1.3	1	2	4	1.2
Segundo cuestionario	28	1	2	3.5	3	5	8	1.8

Nota: Existen diferencias significativas entre la primera y el segundo cuestionario (p -valor = 0,000 calculado mediante T-Student para muestras emparejadas con un nivel de confianza del 95%).

La Figura 143 que se presenta a continuación, presenta por cada contenido el número de participantes que antes y después de la formación ha destacado algún objetivo vinculado a este.

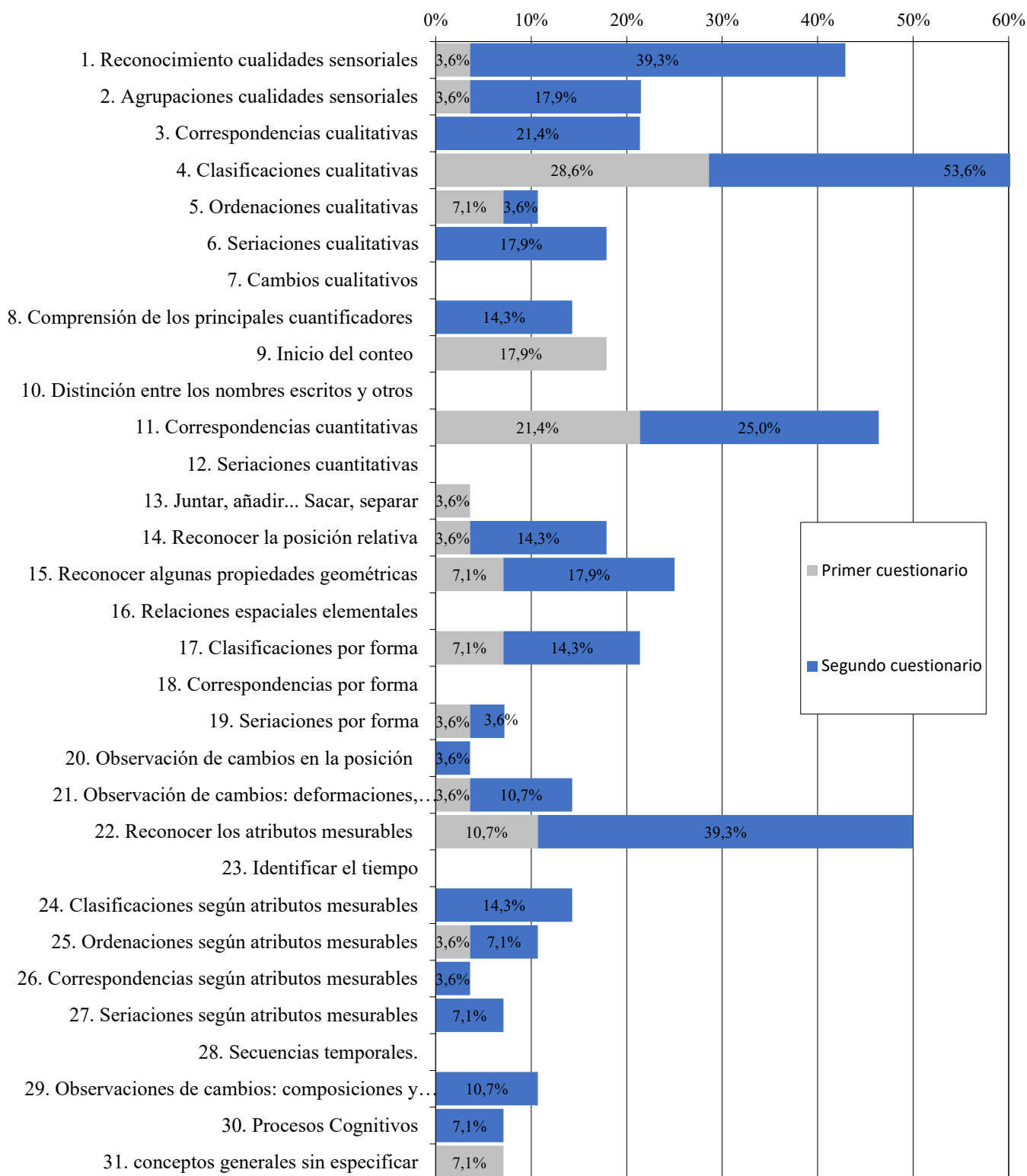


Figura 143. Comparativa de objetivos diseñados antes y después de la formación.

Los datos del gráfico (Figura 143) muestran que en prácticamente todos los contenidos aumenta el número de objetivos diseñados después de la formación. Destacan por su mayoría los objetivos vinculados al reconocimiento de las cualidades sensoriales, las clasificaciones cualitativas, las correspondencias cuantitativas y el reconocimiento de los atributos mensurables.

En términos globales, se observa que existen contenidos que nunca se han vinculado a ningún objetivo. Estos corresponden a los mismos que no se detectan o que se detectan poco en las imágenes: los cambios cualitativos, las seriaciones cuantitativas, la identificación del tiempo y las secuencias temporales.

Tampoco se presentan contenidos que tengan relación con las correspondencias por forma y las relaciones espaciales elementales que, contrariamente, sí aparecen en los contenidos detectados en las imágenes.

A continuación, para profundizar en las diferencias y similitudes detectadas, se presentan los resultados en función de los bloques de contenido. En primer lugar, se exponen los resultados relativos a los contenidos y capacidades detectados en las imágenes de los diferentes espacios y, seguidamente, se presentan los resultados de los objetivos y contenidos matemáticas que prevén los profesionales en sus programaciones antes y después de la formación.

5.3.2 Conocimientos sobre las cualidades sensoriales

En referencia a las cualidades sensoriales, cabe destacar que existen algunas diferencias entre el pre y el post. Por un lado, hay contenidos con una fuerte recurrencia y otros poco frecuentes. Ejemplo de ello son las ordenaciones, seriaciones y observaciones de cambios cualitativos que, ni antes ni después de la formación, aparecen de manera recurrente. Por lo contrario, la identificación de cualidades sensoriales aparece de forma mayoritaria, tanto en el primer cuestionario como en el segundo: 24 profesionales (85.7%) y 26 (92,9%), respectivamente, identificaban este contenido. Se destaca que en todos los contenidos de este bloque hay un aumento después de la formación que, en términos generales, corresponde a una tasa de crecimiento de un 154.05% (de 37 contenidos detectados antes a de la formación se pasa a 94 después). Los contenidos que han tenido mayor crecimiento son las agrupaciones de elementos según las cualidades sensoriales

que han pasado de solo 1 (3.6%) participante a 20 (72%), seguido de estas las clasificaciones cualitativas 6 (21.6%) a 20 (72%).

A continuación, se presentan detalladamente los resultados de cada contenido y capacidad.

Reconocimiento de los atributos. En la Tabla 108 no se observan cambios significativos antes y después de la formación respecto al reconocimiento de las cualidades sensoriales obteniendo, en prácticamente todos los valores, mucha similitud.

Tabla 108. Reconocimiento de los atributos

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer Cuestionario	28	0	1	1.7	2	3	3	1.0	0.692
Segundo cuestionario	28	0	1	1.9	2	2	4	0.9	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Como muestran los datos de la Tabla 109 en el primer cuestionario, la mayoría de los participantes, 24 (85.7%) detectaron alguna acción vinculada al reconocimiento de las cualidades sensoriales y, en el segundo, fueron 26 (92.9%). De este modo, solo 4 participantes (14.3%) no detectaron en ninguna imagen acciones de reconocer cualidades y en el segundo fueron 2 participantes (7.1%).

Tabla 109. Acciones de reconocimiento de cualidades sensoriales.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Reconocimiento de las cualidades sensoriales	No	4	14.3	2	7.1
	Sí	24	85.7	26	92.9

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 144, existe un aumento significativo después de la formación en tanto que, en el cuestionario pre, solo 1 (3.6%) participante presentó contenidos y objetivos vinculados a este bloque de contenido frente a 10 (36%) participantes del cuestionario post. De esta manera, en las planificaciones aumenta su aparición en un 32.9%.

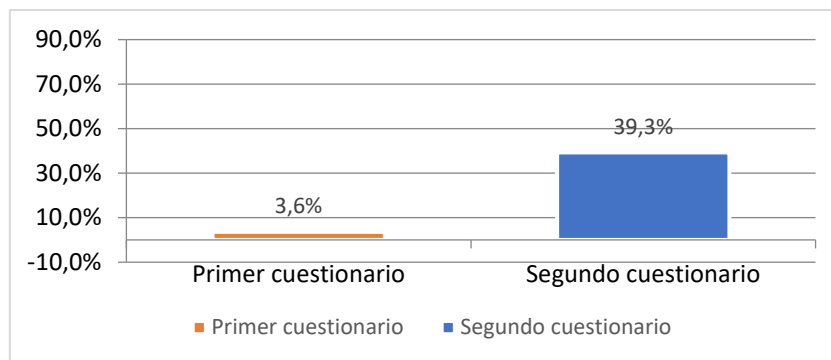


Figura 144. Objetivos definidos por los profesionales de reconocimiento de cualidades sensoriales.

En la Tabla 110 se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 110. Descripción de objetivos vinculados al reconocimiento de cualidades sensoriales.

Participante	Cita
C-POST-10	En las instalaciones de meso espacio, las diferentes cualidades de los materiales y elementos como la tierra.
C-POST-16	Descubrir las cualidades sensoriales. Experimentar a través de los sentidos las cualidades de los objetos y de los materiales (a partir de la observación, la comparación, la combinación de los objetos y la manipulación.)
C-POST-19	Identificar las cualidades sensoriales, reconocer las cualidades de la tierra y de los materiales en la mesa de experimentación.

Agrupaciones de elementos por cualidades sensoriales. La Tabla 111 muestra cambios significativos antes versus después de la formación siendo la media, en primer lugar 0 y en segundo lugar 1.

Tabla 111. Agrupaciones de elementos por cualidades sensoriales.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer Cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	1	0.2	0.000
Segundo Cuestionario	28	0	0	1.0	1	1	3	0.8	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 112, presenta que en el primer cuestionario solo 1 participante (3.6%) identificó en las imágenes una acción de agrupar por cualidades sensoriales mientras que en el segundo fueron 20 (71.4%) participantes que la identificaron. En este caso, antes de la

formación, 27 participantes (96.4%) no fueron capaces de identificar ninguna acción de agrupar por cualidades sensoriales mientras que después de la formación. Solo fue una minoría, 8 (28.6%) participantes quienes no las detectó.

Tabla 112. Acciones de agrupar según las cualidades sensoriales.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Agrupaciones de elementos de las cualidades sensoriales	No	27	96.4	8	28.6
	Sí	1	3.6	20	71.4

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 145, se muestra un pequeño aumento en tanto que antes de la formación solo 1 (3.6%) de los participantes detalló contenidos y objetivos vinculados a este ámbito mientras que, después de la formación, lo hacen 4 (17.9%).

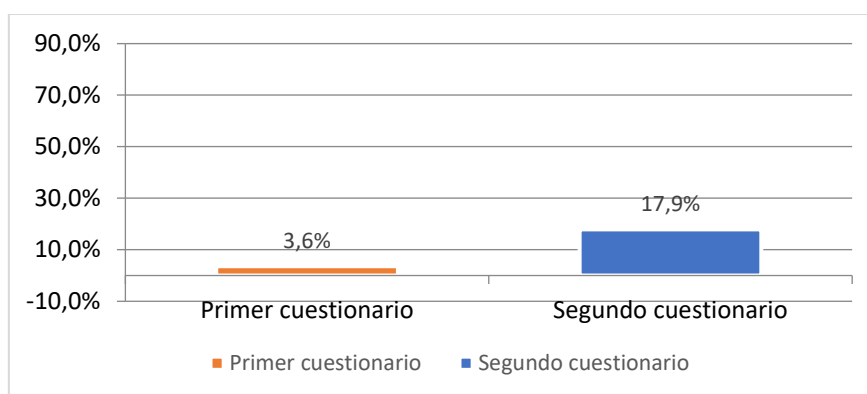


Figura 145. Objetivos definidos por los profesionales relativos a agrupaciones cualitativas.

En la Tabla 113 se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 113. Descripción de objetivos vinculados a las agrupaciones de elementos.

Participante	Cita
C-POST-2	Agrupar elementos según sus cualidades en el espacio de construcciones.
C-POST-6	Agrupar las piezas por colores.
C-POST-8	Que puedan agrupar por colores

Correspondencias cualitativas. La Tabla 114, nuevamente presenta cambios significativos entre ambos cuestionarios pasando de una media de 0 en el primer cuestionario a una media de 0.4 en el segundo.

Tabla 114. Correspondencias cualitativas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	1	0.2	0.003
Segundo cuestionario	28	0	0	0.4	0	1	2	0.6	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 115, detalla que antes de la formación 27 (96.4%) participantes no identificaron acciones de emparejar según las cualidades sensoriales mientras que después de la formación fueron 18 (64.3%) que no lo hicieron. Por lo contrario, hay que destacar que antes de la formación 1 participante (3.6%) detectó esta acción mientras que después de la formación lo hicieron 10 (35.7%) participantes.

Tabla 115. Acciones de emparejar según las cualidades sensoriales.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Correspondencias cualitativas	No	27	96.4	18	64.3
	Sí	1	3.6	10	35.7

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 146, se pasa de no aparecer en la planificación en ningún cuestionario previo a la formación a aparecer en las planificaciones de 6 (21.4%) participantes, después de la formación.

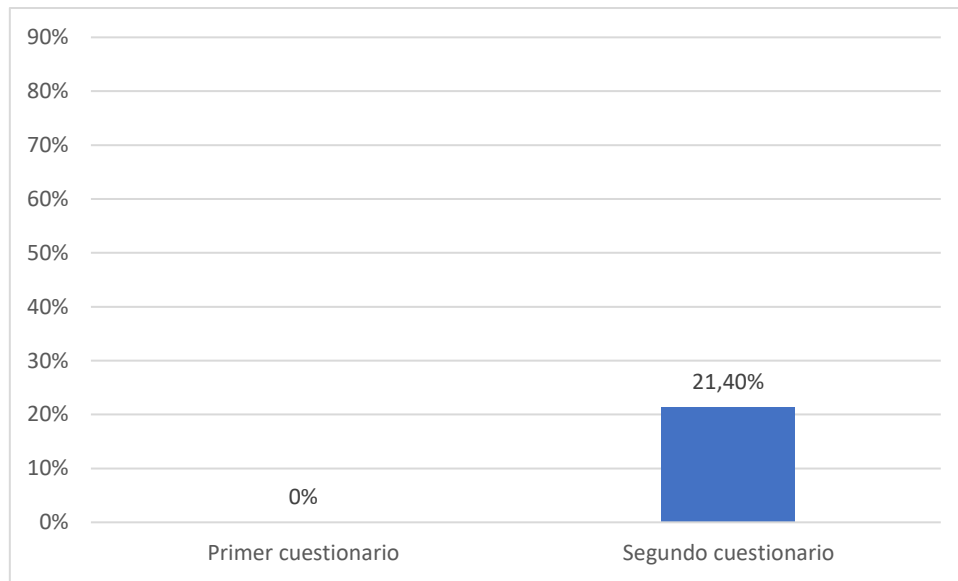


Figura 146. Objetivos definidos por los profesionales en relación con las correspondencias cualitativas.

En la Tabla 116 se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 116. Descripción de los objetivos vinculados a emparejar cualidades sensoriales.

Participante	Cita
ED 3	Con las piezas de construcciones que hagan la correspondencia por color con las piezas y madera del mismo color.
ED 10	Por ejemplo, cuando diseñamos el espacio de los mini mundos con los “nins” de colores, las anillas y los cubiletes, con el objetivo que los niños hagan las correspondencias de los muñecos / cubiletes, es decir, del mismo color.
ED 27	En el espacio de los cuentos hay 16 casitas de madera pintadas. De cada color hay una grande y una pequeña. En el momento de recoger los niños relacionan que las dos amarillas van juntas y, así, sucesivamente por todos los colores.

Clasificaciones cualitativas. La Tabla 117, muestra también diferencias significativas entre el primer y segundo cuestionario donde la media del primero 0.2 pasa a ser 1.1 en el segundo.

Tabla 117. Clasificaciones cualitativas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.2	0	0	1	0.4	0.000
Segundo cuestionario	28	0	0	1.1	1	2	3	0.9	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Antes de la formación y como se expone en la Tabla 118, la mayoría de los participantes, 22 (78.6%), no identificaron acciones de clasificar según este criterio. Después de la formación, fueron 8 (28.6%) los que no las identificaron. Por lo contrario, después de la formación, 20 (71.4%) participantes identificaron esta acción frente a 6 (21.4%) que no lo habían hecho antes.

Tabla 118. Acciones de clasificar según criterios cualitativos.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Clasificaciones cualitativas	No	22	78.6	8	28.6
	Sí	6	21.4	20	71.4

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 147, se muestra un aumento significativo en tanto que antes de la formación 8 (28.6%) de los participantes manifestaban contenidos vinculados a clasificar con las cualidades sensoriales. Después de la formación pasan a contemplar este contenido 15 (53.6%) participantes.

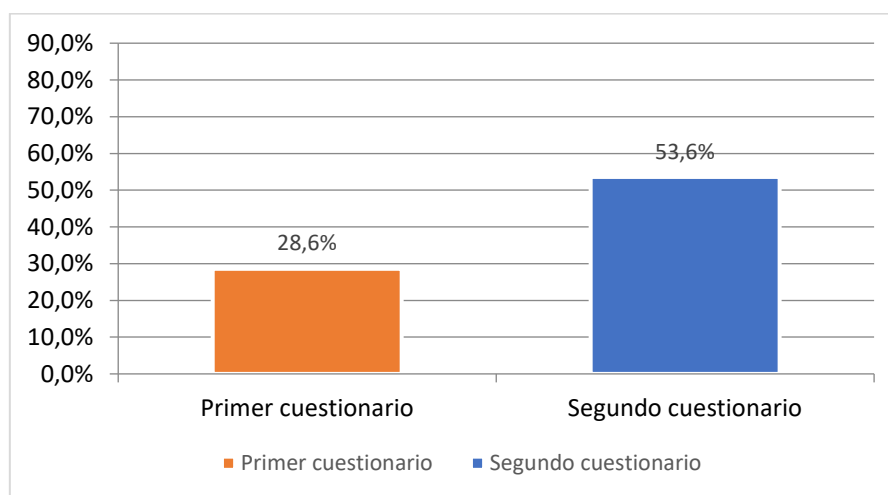


Figura 147. Objetivos definidos por los profesionales respecto a las clasificaciones cualitativas.

En la Tabla 119 se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 119. Descripción de los objetivos vinculados a la clasificación sobre cualidades sensoriales.

Participante	Cita
C-POST-11	Clasificar los elementos según criterios cualitativos: por colores
C-POST-17	Clasificar los materiales en cestos en los diferentes espacios del aula según el tipo de material, piezas, conos, troncos...

C-POST-21 Clasificaciones de los materiales en el momento de recoger. Cundo se recoge el material tiene su lugar: animales, piezas de madera, cilindros...

Ordenaciones cualitativas. La Tabla 120, no muestra cambios significativos entre los cuestionarios pre y post formación.

Tabla 120. Ordenaciones cualitativas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	P-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.3	0.112
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	0	2	0.7	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Como se detalla en la Tabla 121, antes de la formación había 26 (92.9%) participantes que no detectaron acciones de ordenación cualitativa a través de las imágenes. Después de la formación, siguieron siendo la mayoría que no las detectaron, 22 (78.6%) participantes. En este caso, antes de la formación hubo 2 (7.1%) participantes que referenciaron alguna acción de ordenación cualitativa y después de la formación fueron 6 (21.4%).

Tabla 121. Acciones de ordenar según criterios cualitativos.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Ordenaciones cualitativas	No	26	92.9	22	78.6
	Sí	2	7.1	6	21.4

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 148, disminuye en tanto que los profesionales que exponen objetivos con contenidos vinculados a este ámbito pasan de ser de 2 (7.1%) a ser 1 (3.6%).

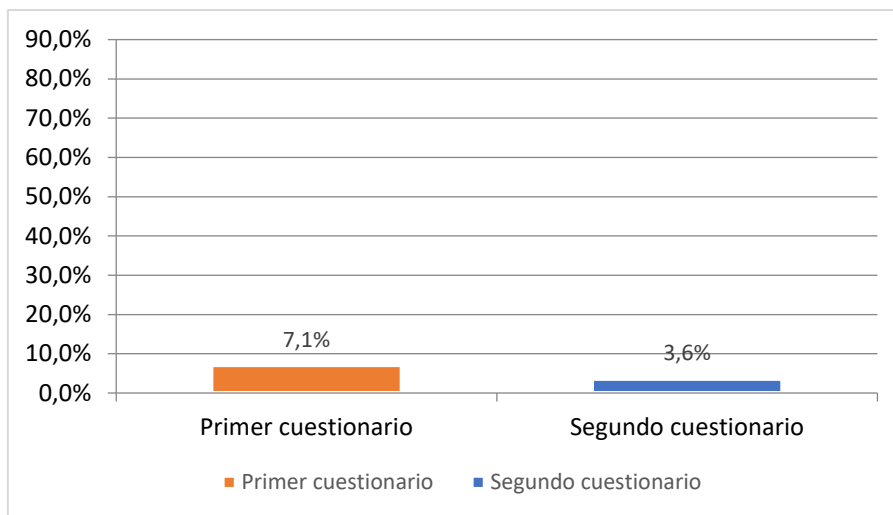


Figura 148. Objetivos definidos por los profesionales de ordenaciones cualitativas.

En la Tabla 122 se recoge la única aportación.

Tabla 122. Objetivos vinculados a las ordenaciones por colores.

Participante	Cita
C-POST-4	Que puedan ordenar por colores

Seriaciones cualitativas. La Tabla 123, no muestra cambios significativos entre los cuestionarios pre y post formación presentando valores prácticamente idénticos.

Tabla 123. Seriaciones cualitativas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	1	0.2	0.079
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	0	2	0.7	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente, la Tabla 124 muestra que antes de la formación solo 1 (3.6%) participante incidió en una acción de este ámbito. Después de la formación, aumenta levemente y pasan a ser 5 (17.9%) los que lo hacen. Esto significa que antes de la formación 27 (96.4%) participantes no detectaron ninguna acción relativa a este contenido y después de la formación, seguía siendo la mayoría que no lo hicieron 23 (82.1%).

Tabla 124. Acciones de seriar cualitativamente.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Seriaciones cualitativas	No	27	96.4	23	82.1
	Sí	1	3.6	5	17.9

Referente a los cambios cualitativos, el segundo cuestionario tampoco muestra un incremento significativo respecto al primero, obteniendo nuevamente datos muy similares antes y después de la formación.

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 149, se pasa de no aparecer en la planificación en ningún cuestionario previo a la formación a aparecer en las aportaciones de 5 (17.9%) participantes después de la formación.

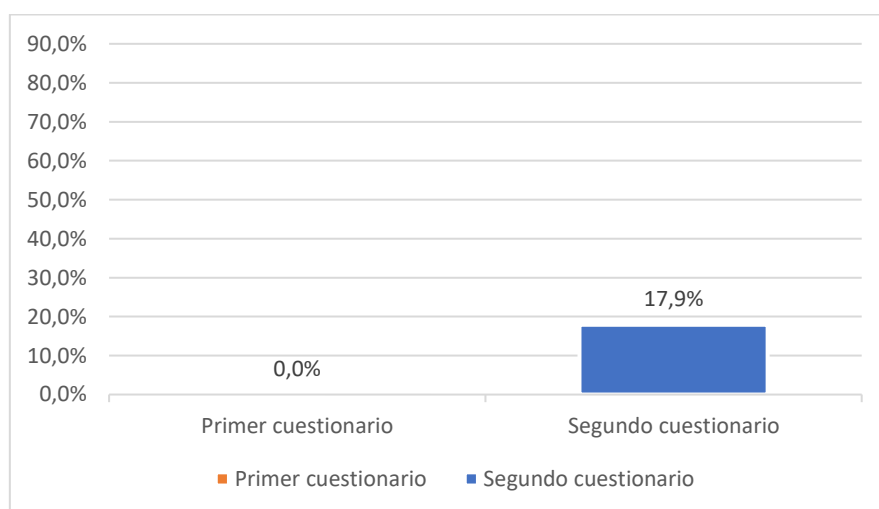


Figura 149. Objetivos definidos por los profesionales de seriaciones cualitativas.

En la Tabla 125 se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 125. Descripción objetivos vinculados a las seriaciones cualitativas.

Participante	Cita
C-POST-18	Comparar las cualidades sensoriales en el espacio de construcciones: seriar con los prismas de 3 longitudes diferentes y de colores diferentes y los muñecos de madera de diferentes colores.
C-POST-19	Hacer una seriación teniendo en cuenta el color.

C-POST-20 Seriaciones, comparando cualidades sensoriales, en el espacio de construcciones por ejemplo con repeticiones de dos elementos de diferentes cualidades: una pierda, una concha, una pierda, una concha...

Cambios en los objetos y en el entorno inmediato. Por lo que refiere a la observación de cambios en los objetos se recoge un leve aumento después de la formación respecto antes, pasando de una media de 0.1 a 0.3 (ver Tabla 126).

Tabla 126. Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.3	0.064
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	1	2	0.6	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

En la Tabla 127, se expone que antes de la formación 26 (92.9%) participantes no identificaron acciones de observar cambios en las cualidades de los elementos versus 2 (7.1%) que si lo hicieron. Después de la formación, 7 (25%) participantes identifican estas acciones frente a 21 (75%) que siguen sin hacerlo.

Tabla 127. Acciones de identificar cambios cualitativos.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.	No	26	92.9	21	75.0
	Sí	2	7.1	7	25.0

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, no aparece ningún objetivo ni contenido vinculado a la observación de cambios en los elementos, ni en el entorno inmediato.

5.3.3 Conocimientos sobre las cantidades continuas y discretas

Referente al bloque de contenido de las cantidades continuas y discretas (números y operaciones), no existen diferencias significativas entre el cuestionario pre y post en tanto que el incremento de contenidos no se considera relevante. Los contenidos que presentan mayor aumento son los que hacen referencia a las correspondencias cuantitativas que pasa de 7 (25.2%) a 11 (39.6%) y los vinculados a las acciones de juntar, sumar, añadir, restar, sacar y separar donde de 3 (10.8%) pasan a 11 (39.6%). Se destaca que no en todos los contenidos de este bloque presentan un aumento y en algunos bloques o ha bajado sensiblemente o el aumento ha sido poco significativo ya que hay contenidos muy poco visibles. En términos generales, este aumento corresponde a una tasa de crecimiento de un 31.71% (de 41 contenidos detectados antes a de la formación se pasa a 54 después).

A continuación, se presentan detalladamente los resultados de cada contenido y capacidad.

Los principales cuantificadores y cantidades elementales. La Tabla 128 muestra que no existen cambios significativos entre los dos cuestionarios pre y post a la formación, presentando valores muy similares respecto a los contenidos que identifican los profesionales en las imágenes de los espacios y materiales, sobre el reconocimiento de los principales cuantificadores y cantidades elementales.

Tabla 128. Comprensión de los principales cuantificadores y cantidades elementales.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.7	1	1	2	0.7	0.224
Segundo cuestionario	28	0	0	1.1	1	2	4	1.2	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente, la Tabla 129 muestra como antes de la formación, 13 (46.4%) participantes no identificaron contenidos vinculados a la comprensión de los principales

cuantificadores, mientras que 15 (53.6%) participantes si los consideraron. Posterior a la formación, 11 (39.3%) participantes siguieron sin identificarlos y aumenta en 2 participantes que sí que los identifican.

Tabla 129. Acciones de comprender los principales cuantificadores.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Comprensión de los principales cuantificadores (muchos, pocos...) y de algunas cantidades elementales (1, 2,3)	No	13	46.4	11	39.3
	Sí	15	53.6	17	60.7

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 150, se pasa de no aparecer en la planificación en ningún cuestionario previo a la formación a aparecer las planificaciones de 4 (14,3%) participantes después de la formación.

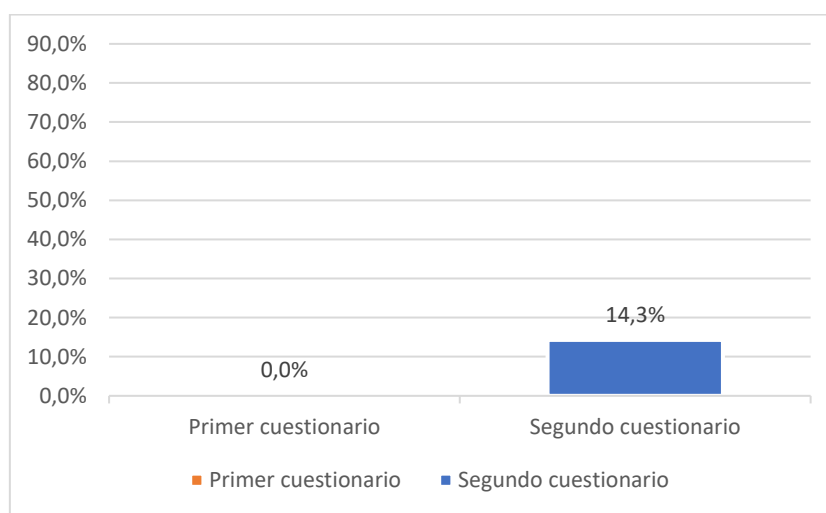


Figura 150. Objetivos definidos por los profesionales en torno a la comprensión de los principales cuantificadores y de algunas cantidades elementales.

En la Tabla 130 se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 130. Descripción de objetivos vinculados a la identificación de las cantidades.

Participante	Cita
GD-POST-13	Identificar las cantidades: muchos, pocos, algunos...
GD-POST-24	Identificar los cuantificadores: muchos, pocos... Por ejemplo, ponemos mucho tomate en el plato, poca sopa...
GD_POST-26	En los jugos de agua identificar por criterios cuantitativos los elementos: muchos, pocos, ninguno.

Inicio del conteo. La Tabla 131 muestra que tampoco se han producido cambios significativos antes y después de la formación en la identificación de contenidos vinculados a este bloque.

Tabla 131. Inicio del conteo con una colección de elementos.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	1.0	1	2	3	1.1	0.100
Segundo cuestionario	28	0	0	0.5	0	1	2	0.6	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 132 detalla que antes de la formación, 12 (42.9%) profesionales no identificaron el contenido de conteo en las imágenes presentadas versus 16 (57.1%) que sí lo hicieron. Después de la formación, los datos se invierten y sucede al revés: 12 (42.9%) profesionales los identifican y 16 (57.1%) no lo hacen.

Tabla 132. Acciones de contar elementos.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Inicio del conteo con una colección de elementos.	No	12	42.9	16	57.1
	Sí	16	57.1	12	42.9

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, la Figura 151 muestra que se sigue la misma tendencia. En el primer cuestionario, 5 (17.9%)

participantes reflejan contenidos vinculados a este ámbito en sus objetivos. Después de la formación, ningún participante los concreta.

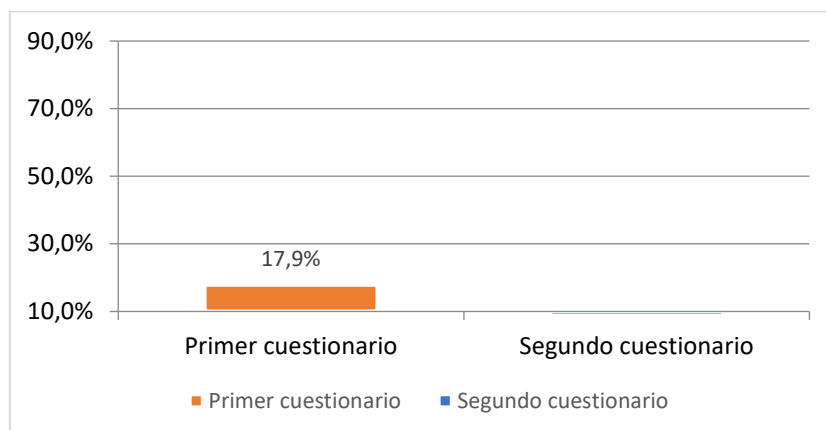


Figura 151. Objetivos definidos por los profesionales vinculados al conteo de elementos.

Distinción entre los nombres escritos y otros tipos de representaciones externas.

Nuevamente, la Tabla 133 revela que no existen diferencias significativas entre los contenidos identificados antes y después de la formación respecto a este bloque.

Tabla 133. Distinción entre los nombres escritos y otros tipos de representaciones externas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	0.0	0.317
Segundo cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	1	0.2	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Específicamente, los datos manifiestan que ni antes ni después de la formación se identifican los contenidos vinculados a este bloque, exceptuando 1 participante que detectó un contenido específico después de la formación. En esta misma línea y dentro de la planificación de los diseños de espacios y materiales, ningún profesional expone ni uno de los objetivos o contenidos vinculados a la distinción de los números respecto a otras representaciones gráficas.

Correspondencias cuantitativas. La Tabla 134 muestra que no hay cambios significativos en la identificación de contenidos antes y después de la formación a través de las imágenes resultando los valores encontrados muy similares.

Tabla 134. Correspondencias cuantitativas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.3	0	1	1	0.4	0.205
Segundo cuestionario	28	0	0	0.5	0	1	3	0.7	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

En la Tabla 135 y antes de la formación, 7 (25%) participantes identifican contenidos vinculados a esta acción y después de la formación aumenta en 4 participantes, siendo 11 (39.3%) que los detectan. Por lo contrario, antes de la formación, 21 (75%) participantes no detectan esta posibilidad de acción en las imágenes y después de la formación no lo detectan 17 (60.7%) participantes.

Tabla 135. Acciones de emparejar cantidades.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Correspondencias cuantitativas	No	21	75.0	17	60.7
	Sí	7	25.0	11	39.3

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 152 se detecta un ligero aumento; antes de la formación 6 (21.4%) participantes hacen alusión a estos contenidos en sus objetivos descritos y después de la formación lo hacen 7 (25%).

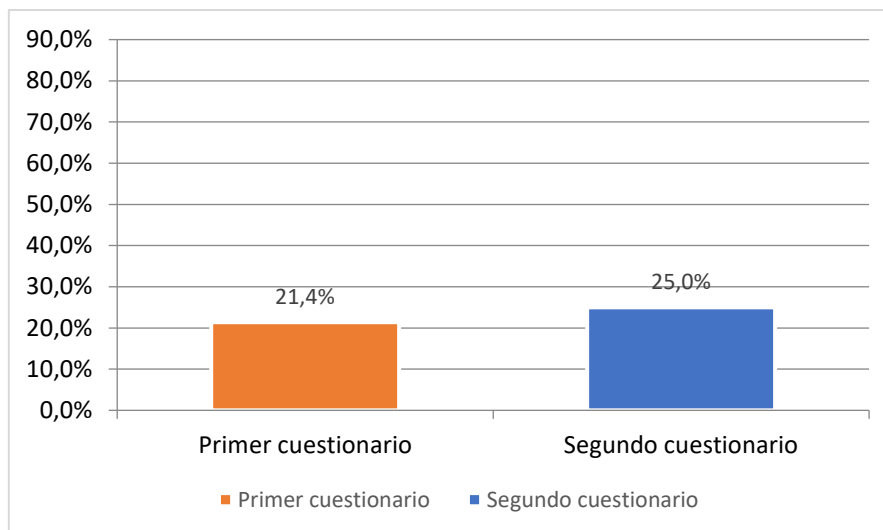


Figura 152. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las correspondencias cuantitativas.

En la Tabla 136, se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 136. Descripción de objetivos vinculados a las correspondencias cuantitativas.

Participante	Cita
C-POST-10	La mesa de la cocinita siempre preparada para 2 niños, por lo que hay una correspondencia entre el plato, los cubiertos, la silla y los vasos. Uno de cada par cada silla.
C-POST-28	Relacionan que cuando ponemos la mesa en la cocinita del aula, cada plato corresponde a una silla. Y que cada plato corresponde a un vaso y a una cuchara. Los niños lo tienen preparado así y en el momento de recoger colocan los platos, las cucharas, los vasos correspondientes delante de las 4 sillas que hay alrededor de la mesa.
C-POST-23	Correspondencias en el momento de poner la mesa. Un vaso, un plato, una cuchara, una silla.

Seriaciones cuantitativas. La Tabla 137 presenta la no existencia de cambios significativos antes y después de la formación en relación con las seriaciones con cantidades.

Tabla 137. Seriaciones cuantitativas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	0.0	0.154
Segundo cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.3	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 138 indica que, antes de la formación, ningún participante identificó este contenido y, después de la formación, 2 participantes lo identificaron a través de las imágenes.

Tabla 138. Acciones de seriar cantidades.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Seriaciones cuantitativas	No	28	100.0	26	92.9
	Sí	0.0	0.0	2	7.1

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, no se presentan objetivos ni contenidos vinculados a la capacidad de seriar con las cantidades ni antes, ni después de la formación.

Juntar, añadir, unir, sumar, sacar, separar, restar... La Tabla 139 presenta la existencia de cambios significativos respecto a la identificación de contenidos relativos a estas acciones.

Tabla 139. Juntar, añadir, unir, sumar, sacar, separar, restar...

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.3	0.012
Segundo cuestionario	28	0	0	0.5	0	1	2	0.6	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente en la Tabla 140, se refleja el hecho de que, antes de la formación, solo 3 (10.7%) participantes hacen referencia a este tipo de contenido y, después de la formación, lo hacen 11 (39.3%) participantes. Por el contrario, antes de la formación no identificaban este contenido 25 participantes (89.3%), una extensa mayoría. Después de la formación, aun siendo la mayoría, la cifra disminuye y pasan a no identificarlo 17 (60.7%) participantes.

Tabla 140. Acciones de cambiar cantidades.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Juntar, añadir, unir o reunir, agrupar, sumar... Sacar, separar, restar.	No	25	89.3	17	60.7
	Sí	3	10.7	11	39.3

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, la Figura 153 muestra que antes de la formación hubo 1 (3.6%) participante que representó contenidos relativos a estas acciones y, después de la formación, no hubo ninguno.

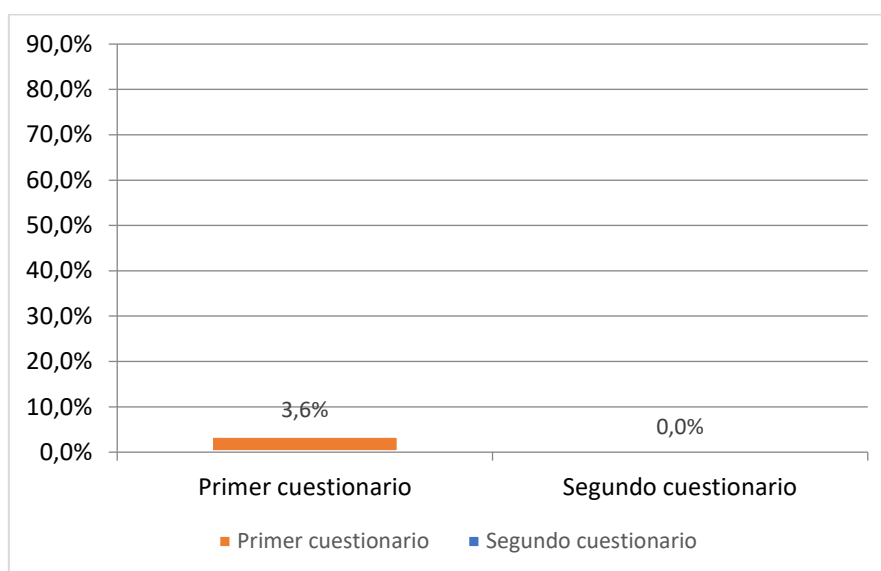


Figura 153. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las acciones de juntar, añadir, sumar... sacar, separar, restar...

5.3.4 Conocimientos sobre la posición, las formas y las figuras

En relación con los contenidos vinculados a la geometría, se recoge que no existen cambios muy significativos entre los contenidos detectados antes y después de la formación. De 67 contenidos antes de la formación, se pasa a 79 contenidos detectados después de la formación. Esto representa una tasa de crecimiento de 17.91%. Los datos muestran también cierta disparidad. Por un lado, hay dos contenidos que los profesionales

detectan con más frecuencia: el reconocimiento de la posición relativa y la distancia y el reconocimiento de las formas que, aunque bajan sensiblemente después de la formación, pasando de 23 (82.8%) a 20 (72%) y de 21 (75.6%) a 16 (57.6%) respectivamente. Por otro lado, los otros contenidos del bloque que, aunque aumentan sensiblemente, siguen siendo poco visibles y en ningún caso llegan a superar el 35% de identificación. A excepción, encontramos la observación de cambios en la posición que tiene más recurrencia tanto antes, como después de la formación: de 10 (36%) pasa a 13 (46.8%) profesionales.

A continuación, se presentan detalladamente los resultados de cada contenido y capacidad.

Reconocimiento de la posición relativa y la distancia. La Tabla 141 muestra valores muy similares antes y después de la formación. Por lo tanto, muestra la no existencia de cambios significativos antes y después de la misma en este ámbito mediante la detección de contenidos por imágenes.

Tabla 141. Reconocer la posición relativa a la dirección y la distancia en el espacio.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	1	1.4	1	2	3	1.0	0.320
Segundo cuestionario	28	0	0	1.2	1	2	5	1.2	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 142 destaca que antes de la formación hubo un mayor número de participantes que indicaron estos contenidos en las imágenes: antes 23 (82.1) versus después 20 (71.4%).

Tabla 142. Acciones de reconocimiento de la posición y de juzgar distancias.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Reconocer la posición relativa a la dirección y la distancia en el espacio.	No	5	17.9	8	28.6
	Sí	23	82.1	20	71.4

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como presenta la Figura 154, antes de la formación hubo 1 (3.6%) participante que indicó este contenido en sus objetivos y, después de la formación, pasaron a ser 4 (14.3%).

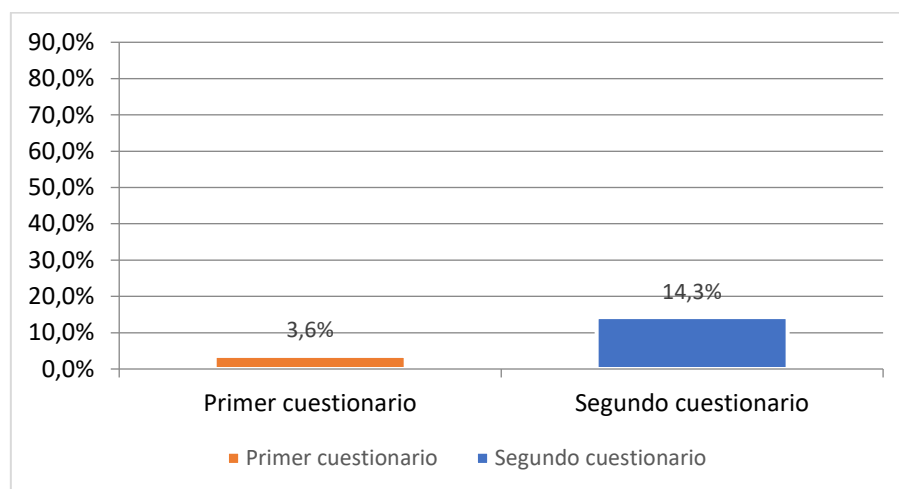


Figura 154. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a reconocer la posición relativa y la distancia.

En la Tabla 143, se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 143. Descripción de objetivos vinculados a identificación de la posición y la forma

Participante	Cita
C-POST-7	Identificar las posiciones y las formas. Todos los niños dentro de la sala, todos los cubiletes fuera del cesto, todas las arandelas dentro de los cubiletes...
C-POST-19	Identificar las posiciones haciendo una fila con las diferentes piezas.
C-POST-25	Espacio de movimiento: situación espacial: encima, debajo, delante, detrás, superficie horizontal...

Reconocimiento de algunas propiedades geométricas de las formas y figuras. La

Tabla 144 muestra cambios sensiblemente significativos antes y después de la formación respecto a los contenidos vinculados a este ámbito presentando datos muy similares.

Tabla 144. Reconocer algunas propiedades geométricas elementales de las formas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	1.3	1	2	3	0.9	0.180
Segundo cuestionario	28	0	0	0.9	1	2	3	1.0	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 145 muestra que, antes de la formación, 7 (25.0%) participantes no identificaron este contenido mediante las imágenes. Después de la formación, no lo identificaron 12 (42.9%), aumentando prácticamente el doble los participantes que obviaron este contenido en la lectura de imágenes.

Tabla 145. Acciones de reconocimiento de las propiedades geométricas de las formas.

	Primer cuestionario		Segundo cuestionario		
	N	Pct	N	Pct	
Reconocer algunas propiedades geométricas elementales de las formas	No	7	25.0	12	42.9
	Sí	21	75.0	16	57.1

Por el contrario, en las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como presenta la Figura 155, antes de la formación hubo 2 (7.1%) participantes que indicaron este contenido en sus objetivos. Después de la formación, pasaron a ser el 5 (17.9%).

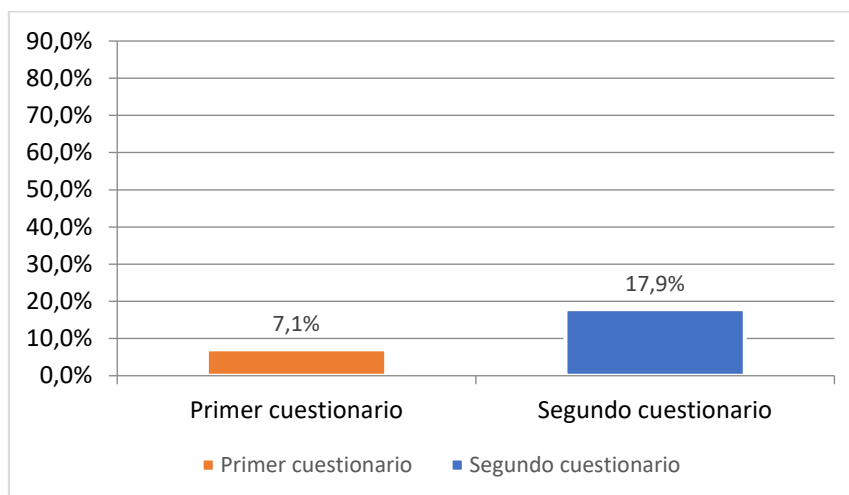


Figura 155. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las acciones de relacionar propiedades geométricas simples.

En la Tabla 146, se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 146. Descripción de objetivos vinculados a las clasificaciones por formas.

Participante	Cita
C-POST-5	Comparar las formas, clasificar, tenemos pots de diferentes formas, circunferencias y cuadrados, y tapas de estos pots también con diferentes formas.
C-POST-12	Clasificaciones por formas en el espacio de construcciones.

Relaciones espaciales elementales. La Tabla 147 muestra cambios significativos antes y después de la formación. En este sentido, la Tabla 148 presenta la evolución de que, antes de la formación, ningún profesional hiciese alusión a estos contenidos a 4 (14.3%) participantes que lo hacen después de la formación.

Tabla 147. Relaciones espaciales elementales.

	N	Min.	Pct		Mediana	Pct		Desviación estándar	p-valor
			25	Media		75	Máx.		
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	0.0	0.040
Segundo cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.4	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Tabla 148. Acciones de relacionar contenidos espaciales elementales.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Relaciones espaciales elementales	No	28	100.0	24	85.7
	Sí	0	0.0	4	14.3

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, ni antes ni después de la formación, los participantes indicaron ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas de las formas: clasificaciones. La Tabla 149 muestra los cambios sensiblemente significativos antes y después de la formación en la identificación de estos contenidos por parte de los participantes. La media pasa de 0.1 antes de la formación a 0.3 después de la formación manteniéndose la desviación estándar prácticamente igual.

Tabla 149. Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas de las formas.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.4	0.117
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	1	1	0.5	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente, en la Tabla 150 se presenta que antes de la formación solo 4 (14.3%) participantes identificaron contenidos vinculados a este bloque mientras que, después de la formación, fueron 9 (32.1%) participantes que los destacaron. Antes de la formación, 24 (85.7%) participantes no los identificaron mientras que después de la formación fueron 19 (67.9%) que no los detecta.

Tabla 150. Acciones de relacionar propiedades geométricas simples.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas	No	24	85.7	19	67.9
	Sí	4	14.3	9	32.1

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 156, aumentan sensiblemente los participantes que identifican las acciones vinculadas a relacionar formas geométricas. En el primer cuestionario destacan 2 (7.1%) profesionales y en el segundo 4 (14.3%) participantes.

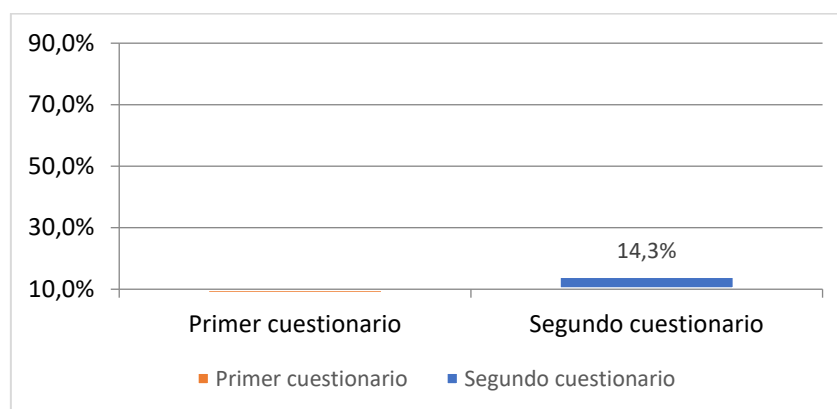


Figura 156. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las relaciones simples por forma.

En la Tabla 151, se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 151. Objetivos vinculados a las relaciones simples por forma.

Participante	Cita
C-POST-8	Identificar y comparar las diferencias de las formas: proporcionar a los niños diferentes objetos de corcho y con formas diferentes, como pueden ser, esferas, tapones, cubos y prismas y que jugando libremente comparen las cosas que pueden hacer los objetos de diferentes formas.
C-POST-23	La relación del material permite comparar diferentes aspectos como la forma: los cilindros, el cubo, el prisma...

Correspondencias por forma. La Tabla 152 presenta que no existen cambios significativos antes y después de la formación.

Tabla 152. Correspondencias por forma.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p- valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.4	0.459
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	0	2	0.5	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel .de confianza del 95%

La Tabla 153 muestra que la identificación de acciones vinculadas a este contenido solo aumenta en dos participantes. Concretamente, antes de la formación 4 (14.3%) participantes los destacaron y después de la formación lo hicieron 6 (21.4%). Por lo contrario, destaca que antes de la formación 24 (85.75) profesionales no detectaron contenidos vinculantes y después de la formación seguía siendo la mayoría, 22 (78.6%) participantes.

Tabla 153. Acciones de emparejar según la forma.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Correspondencias por forma	No	24	85.7	22	78.6
	Sí	4	14.3	6	21.4

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, los participantes no indicaron ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito ni antes ni después de la formación.

Seriaciones por forma. La Tabla 154 muestra que existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación en la identificación de este contenido en las imágenes de los espacios y materiales. La media pasa de 0.0 en el cuestionario previo a 0.2 en el posterior.

Tabla 154. Seriaciones por forma.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0,020
Segundo cuestionario	28	0	0	0,2	0	0	1	0,4	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente, tal y como se presenta en la Tabla 155, antes de la formación no hubo ningún participante que hiciera referencia a este contenido y después de la formación fueron 5 (17.9%) participantes que los identificaron.

Tabla 155. Acciones relativas para seriar según la forma.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Seriaciones por forma	No	28	100.0	23	82.1
	Sí	0	0.0	5	17.9

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 157, no se presentan cambios respecto a los objetivos planificados. En este sentido, solo 1 (3,6%) participante hace alusión a un objetivo de este ámbito.

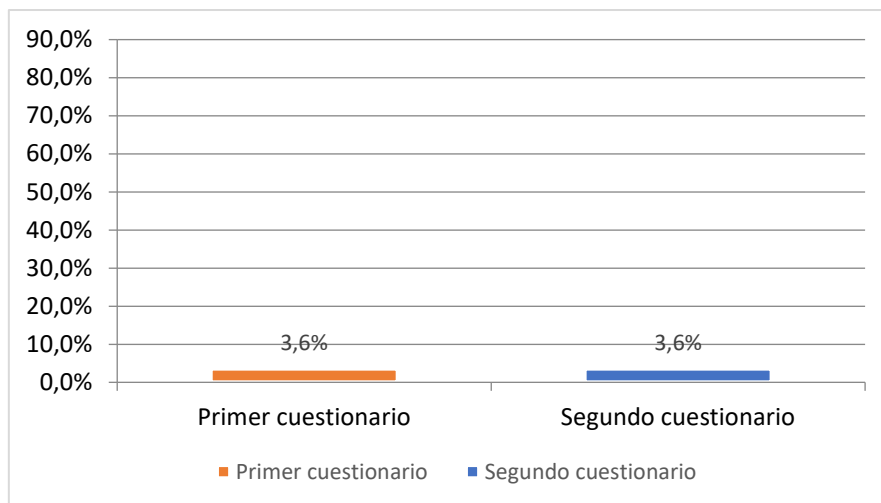


Figura 157. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a seriaciones por forma.

En la Tabla 156, se recoge la única aportación realizada.

Tabla 156. Descripción de objetivos vinculados a seriar según la forma.

Participante	Cita
C-POST-5	Seriar según la forma: cubo, prisma, cono, cubo prisma, cono...por ejemplo con las piezas de construcciones.

Observación de algunos cambios en la posición. La Tabla 157 muestra que existen pequeños cambios en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación en la identificación de este contenido. La media pasa de 0,4 en el cuestionario previo a 0.7 en el posterior.

Tabla 157. Observación de algunos cambios en la posición.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.4	0	1	2	0.6	0.254
Segundo cuestionario	28	0	0	0.7	0	1	3	0.9	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente, tal y como se presenta en la Tabla 158, antes de la formación hubo 10 (35.7%) participantes que hicieron referencia a este contenido. Después de la formación fueron 13 (46.4%) participantes que los identificaron.

Tabla 158. Acciones relativas la observación de algunos cambios en la posición.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Observación de algunos cambios en la posición	No	18	64.3	15	53.6
	Sí	10	35.7	13	46.4

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, ni antes, ni después de la formación, los participantes indicaron ningún objetivo o contenido vinculado a este ámbito.

Observación de algunos cambios de forma a través de las deformaciones, composición y descomposición de las figuras. La Tabla 159 muestra que no existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación en la identificación de este contenido en las imágenes de los espacios y materiales.

Tabla 159. Observación de algunos cambios de forma.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.2	0	0	1	0.4	0.695
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	0	2	0.5	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente y como se presenta en la Tabla 160, aumenta solo 1 (3.6%) participante que identifica algún contenido relativo a los cambios de forma a través de las imágenes.

Tabla 160. Acciones relativas a la observación de algunos cambios de forma.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Observación de algunos cambios de forma	No	23	82.1	22	78.6
	Sí	5	17.9	6	21.4

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 158, cabe destacar que después de la formación aumenta sensiblemente y pasa de 1 (3.6%) participante antes de la formación a 3 (10.7%) participantes después de la formación.

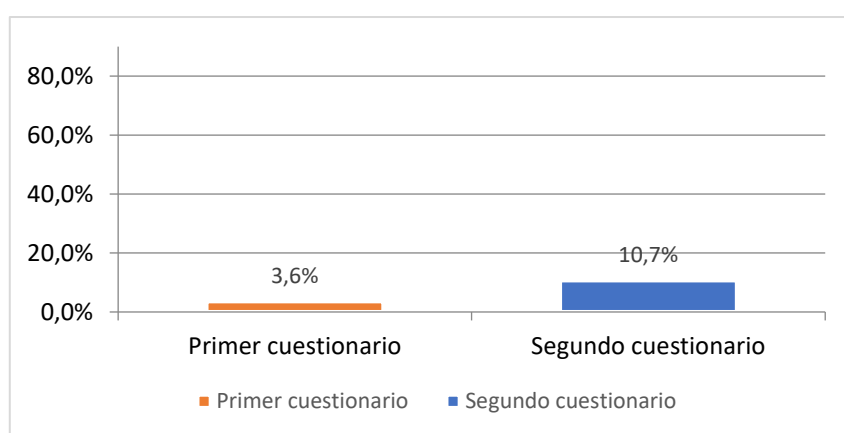


Figura 158. Objetivos vinculados a la observación de algunos cambios de forma.

En la Tabla 161, se recoge las aportaciones realizadas por los participantes.

Tabla 161. Objetivos vinculados a la observación de algunos cambios de forma.

Participante	Cita
C-POST-17	Que los niños observen cambios en la forma, componiendo y descomponiendo torres en el espacio de construcciones.
C-POST-4	A partir de la composición y descomposición de los materiales observan cambios en la forma y en la posición.
C-POST-7	Observa cambios en la forma, componiendo y descomponiendo torres en el espacio de construcciones.

5.3.5 Conocimientos sobre atributos mensurables

Sobre los atributos mensurables, se presentan unas frecuencias de aparición muy dispares. Por un lado, se destaca el reconocimiento de los atributos mensurables ya que antes de la formación todos los participantes, 28 (100%), lo identifican. Después de la formación, lo

siguen haciendo una extensa mayoría, 24 (86.4%). Por otro lado, hay contenidos invisibles o muy poco visibles. Por ejemplo, el contenido de identificar el tiempo, no se reconoce ni antes ni después de la formación, siendo este el único contenido invisible para todos los participantes junto a las clasificaciones, las ordenaciones, las correspondencias, las seriaciones y las secuencias temporales que presentan frecuencias de aparición muy bajas inferiores al 20%.

Reconocer los atributos mensurables de los objetos: tamaño, masa, capacidad, temperatura...). La Tabla 162 presenta que existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación en la identificación de este contenido en las imágenes de los espacios y materiales. Antes de la formación hubo una mayor cantidad de contenidos detectados en este ámbito. Concretamente, la media preformación es de 2.3 y la de post formación es de 1.6.

Tabla 162. Reconocer los atributos mensurables de los objetos.

Primer cuestionario	28	1	2	2.3	2	3	3	0.6	0.004
Segundo cuestionario	28	0	1	1.6	2	2	4	1.0	

La Tabla 163 recoge que todos los participantes, 28 (100%), identifican algún contenido relativo al reconocimiento de los atributos mensurables antes de la formación. Después de esta, lo hicieron 24 (85.7%) siendo aún una extensa mayoría.

Tabla 163. Acciones relativas al reconocimiento de atributos mensurables.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Reconocer los atributos mensurables de los objetos: tamaño, masa, capacidad, temperatura...)	No	0	0.0	4	14.3
	Sí	28	100.0	24	85.7

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, tal y como muestra la Figura 159, aumentan también los participantes que identifican este tipo de contenidos en sus objetivos. En el primer cuestionario destacan 3 (10.7%) profesionales y en el segundo 11 (39.3%) participantes.

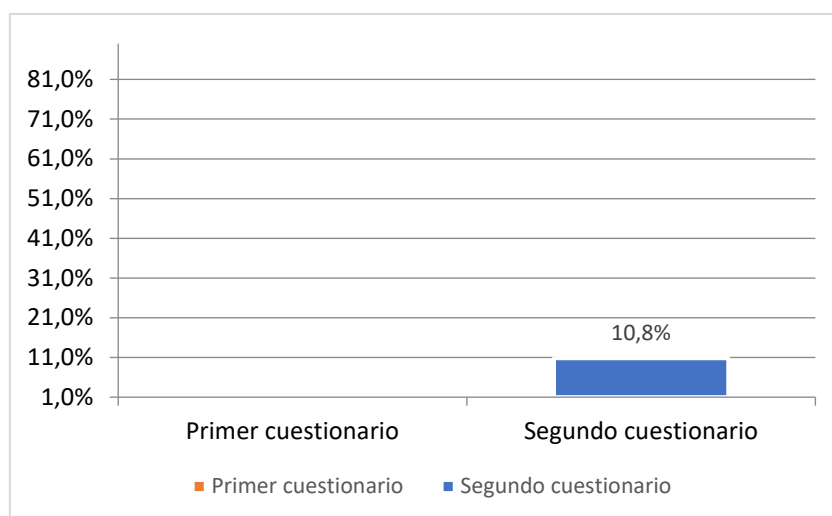


Figura 159. Objetivos identificados por los profesionales vinculados al reconocimiento de atributos mensurables

En la Tabla 164, se recogen algunas las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 164. Descripción de objetivos vinculados al reconocimiento de atributos mensurables.

Participante	Cita
C-POST-11	Reconocer la capacidad lleno - vacío. En las instalaciones de meso espacio de Xavier Abad.
C-POST-17	Reconocer las diferentes longitudes de los materiales
C-POST-20	En el espacio de construcciones: identificar los atributos mensurables, masa lleno - vacío.

Identificar el tiempo. La Tabla 165 muestra que existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación. De hecho, este contenido no se detecta ni antes, ni después de la formación.

Tabla 165. Identificar el tiempo.

	N	Mín.	Pct		Pct		Desviación estándar	p- valor
			25	Media	Mediana	75		
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	NA
Segundo cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 166 recoge que, en ningún cuestionario (ni antes ni después de la formación) se identifican contenidos vinculados a este ámbito.

Tabla 166. Acciones relativas al reconocimiento del tiempo.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Identificar el tiempo	No	28	100.0	28	100.0

En las planificaciones y en relación con el diseño de los espacios y materiales, no se presentan objetivos con contenidos relativos a este concepto.

Relaciones simples a través de objetos mensurables: clasificaciones. La Tabla 167 expone que no existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación. En este sentido, antes de la formación hubo una media de 0.1 y después de la formación de 0.3.

Tabla 167. Clasificaciones con atributos mensurables.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.4	0.403
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	0	2	0.7	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 168 muestra que, antes de la formación, 24 (85.7%) participantes, identifican algún contenido de este ámbito mientras que después de la formación, aunque lo siguen haciendo la mayoría, lo hacen 22 (78.6%).

Tabla 168. Acciones relativas las clasificaciones con atributos mensurables.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Relaciones simples a través de objetos mensurables: Clasificaciones según atributos mensurables	No	24	85.7	22	78.6
	Sí	4	14.3	6	21.4

En relación con el diseño de los espacios y materiales, se presentan objetivos con contenidos relativos solo en el segundo cuestionario por parte de 4 (14.30%) participantes, (Figura 160).

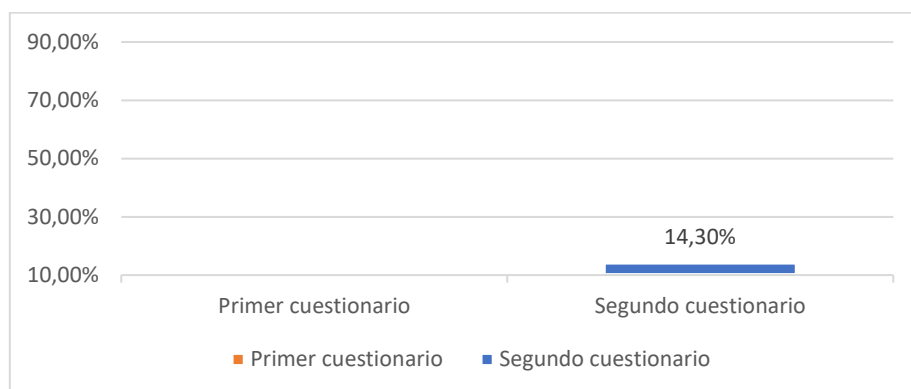


Figura 160. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las clasificaciones a través de objetos mensurables.

En la Tabla 169, se recogen algunas de las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 169. Descripción de objetivos vinculados a la clasificación según los atributos mensurables.

Participante	Cita
C-POST-9	Clasificar los materiales del espacio de construcciones por tamaños adjuntando una imagen que identifique donde va.
C-POST-1	Clasificar los potes según su capacidad: potes llenos y potes vacíos.
C-POST-23	Por ejemplo, en la tarima de construcciones, clasificar el material siguiendo un criterio matemático. Poniendo también el nombre en cada pieza para ir diciendo de manera correcta. Ordenar siempre el material en el mismo sitio para favorecer la clasificación. Las relaciones entre los materiales permiten comparar sus tamaños, pesos, longitudes y que los puedan clasificar.

Ordenaciones según atributos mensurables. La Tabla 170 presenta que tampoco existen cambios significativos en las aportaciones que aparecen en el primer cuestionario y el segundo. La media pasa de 0.0 a 0.1.

Tabla 170. Ordenaciones según atributos mensurables.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	0.0	0.078
Segundo cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	2	0.4	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

Concretamente, en el primer cuestionario y como muestra la Tabla 171, todos los participantes, 28 (100%), identifican algún contenido relativo al reconocimiento de los atributos mensurables antes de la formación. Después de esta, lo hicieron 25 (89.3%) siendo aún una extensa mayoría.

Tabla 171. Acciones relativas a la ordenación de atributos mensurables.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Ordenaciones según atributos mensurables	No	28	100.0	25	89.3
	Sí	0	0.0	3	10.7

En relación con el diseño de los espacios y materiales, aumenta solo en un participante después de la formación tal y como muestra la Figura 161.

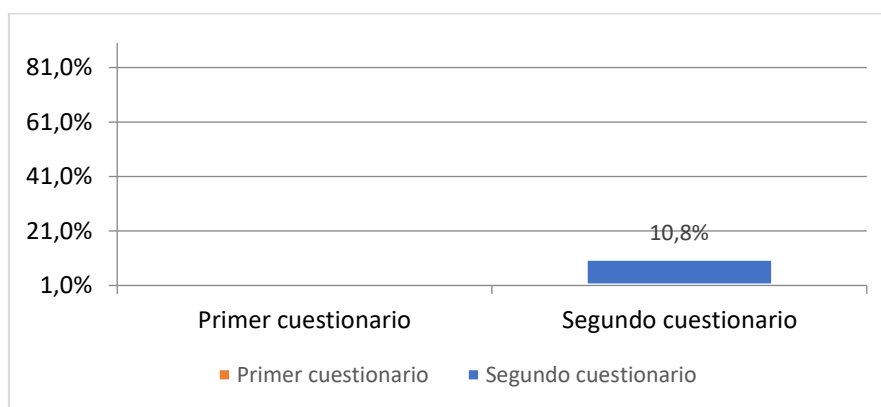


Figura 161. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a la ordenación de atributos mensurables.

En la Tabla 172 se recogen las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 172. Descripción de los objetivos vinculados a la ordenación según atributos mensurables.

Participante	Cita
C-POST-12	Ordenaciones con botellas de diferentes tamaños
C-POST-10	En el espacio de construcciones donde hay piezas de diferentes tamaños y formas. Se pueden clasificar según sus formas y se pueden ordenar según sus tamaños de pequeño a grande.

Correspondencias según atributos mensurables. La Tabla 173 muestra que no existen cambios significativos entre las aportaciones de los participantes antes y después de la formación. Concretamente, la media preformación es de 0.0 y la post formación es de 0.1.

Tabla 173. Correspondencias según atributos mensurables.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0,154
Segundo cuestionario	28	0	0	0,1	0	0	2	0,5	

P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 174 revela que solo 2 (7.1%) participantes identificaron 2 acciones versus este contenido después de la formación.

Tabla 174. Acciones relativas a las correspondencias de atributos mensurables.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Correspondencias según atributos mensurables	No	28	100.0	26	92.9
	Sí	0	0.0	2	7.1

En relación con el diseño de los espacios y materiales, solo un participante vincula un objetivo a estos contenidos después de la formación. Así lo muestra la Figura 162.

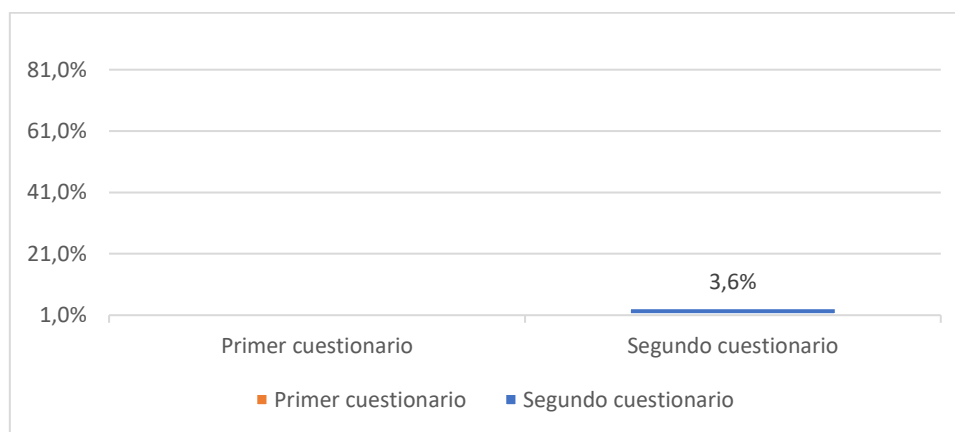


Figura 162. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las correspondencias de atributos mensurables.

En la Tabla 175 se recoge la única aportación realizada.

Tabla 175. Descripción de objetivos vinculados a as correspondencias según atributos mensurables.

Participante	Cita
C-POST-1	Identificar dos objetos y hacer una correspondencia según el peso. Uno grande y uno pequeño.

Seriaciones según atributos mensurables. La Tabla 176 muestra que existen cambios significativos entre los cuestionarios de antes y después de la formación en la identificación de este contenido en las imágenes. En este sentido, antes de la formación hubo una media de 0.0 y después de la formación, de 0.3.

Tabla 176. Seriaciones según atributos mensurables.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	0.0	0.020
Segundo cuestionario	28	0	0	0.3	0	0	2	0.6	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 177 recoge que 5 (17.9%) identifican algún contenido relativo a las seriaciones según atributos mensurables después de la formación. Antes de la formación, ningún participante lo hizo.

Tabla 177. Acciones relativas a las seriaciones de atributos mensurables.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Seriaciones según atributos mensurables	No	28	100.0	23	82.1
	Sí	0	0.0	5	17.9

En relación con el diseño de los espacios y materiales, 2 (7.1%) participantes después de la formación vinculan un objetivo a estos contenidos tal y como muestra la Figura 163.

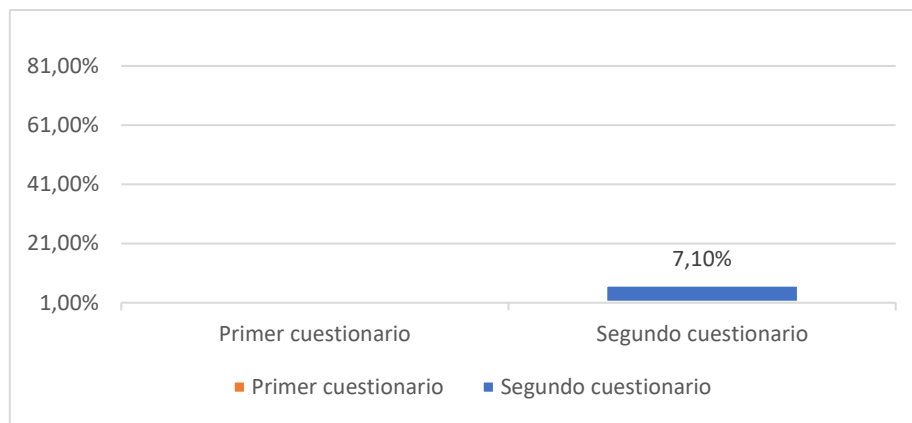


Figura 163. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las seriaciones de atributos mensurables.

En la Tabla 178 se recogen las aportaciones de los profesionales.

Tabla 178. Descripción de objetivos vinculados a las seriaciones por atributos mensurables.

Participante	Cita
C-POST-12	Seriaciones con botellas de diferentes tamaños
C-POST-19	Los niños van haciendo seriaciones con los prismas (corto -largo)

Secuencias temporales. La Tabla 179 muestra que no existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación. En este sentido, antes de la formación destaca la media de 0.0 y después de la formación 0.1.

Tabla 179. Secuencias temporales.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	0.0	0.078
Segundo cuestionario	28	0	0	0.1	0	0	1	0.3	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 180 recoge que solo después de la formación 3 (10.7%) participantes identificaron contenidos vinculados a las seriaciones.

Tabla 180. Acciones relativas a las secuencias temporales.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Secuencias temporales.	No	28	100.0	25	89.3
	Sí	0	0.0	3	10.7

Observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones. La Tabla 181 presenta que no existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación. Concretamente, la media preformación es de 0.6 y la post formación es de 0.4.

Tabla 181. Observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones.

	N	Min.	Pct		Media	Mediana	Pct		Desviación estándar	p-valor
			25	Máx.			75	Máx.		
Primer cuestionario	28	0	0	0.6	1	1	2	0.6	0.110	
Segundo cuestionario	28	0	0	0.4	0	1	2	0.6		

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 182 recoge que antes de la formación 12 (42.9%) participantes no identifican contenidos de este ámbito mientras que 16 (57.1%) sí lo hacen. Posteriormente a la formación, baja sensiblemente la identificación de estos contenidos y pasan a no identificarlos 18 (64.3%) y a identificarlos 10 (35.7%).

Tabla 182. Observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones.	No	12	42.9	18	64.3
	Sí	16	57.1	10	35.7

En relación con el diseño de los espacios y materiales, 3 (10.7%) participantes después de la formación vinculan un objetivo a estos contenidos tal y como muestra la Figura 164.

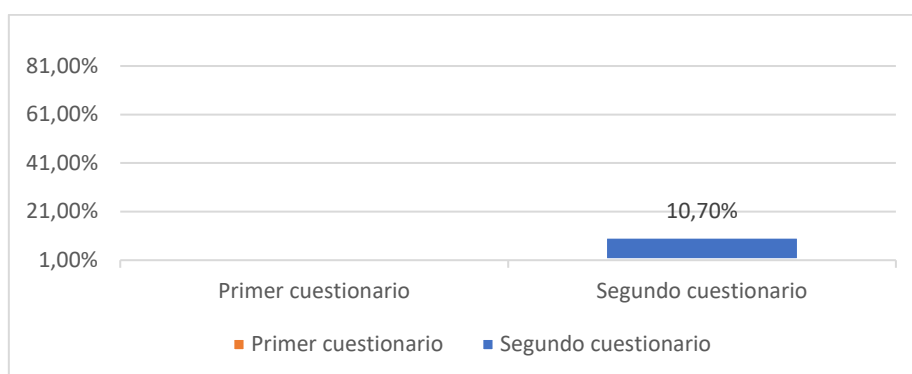


Figura 164. Objetivos definidos por los profesionales vinculados a las observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones.

En la Tabla 183 se recogen las aportaciones realizadas por los profesionales.

Tabla 183. Acciones vinculadas a las observaciones de cambios sencillos en los atributos mensurables a partir de composiciones y descomposiciones.

Participante	Cita
C-POST-1	Acciones de llenar y vaciar, observar los cambios en la masa, si hay mucho o poco.
C-POST-17	A través de la acción y del juego como llenar, vaciar, hacen comparaciones (de capacidad: lleno-vacío, de masa, peso-ligero, de longitud, largo-corto, de altura, alto-bajo, y así pueden clasificar, ordenar, seriar, hacer correspondencias.
C-POST-24	Observar los cambios de en las diferentes capacidades en las acciones de llenar y vaciar o longitudes en el momento de hacer filas con piezas.

Procesos Cognitivos. La Tabla 184 muestra que existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación. Concretamente, la media preformación es de 0.9 y la post formación es de 0.0.

Tabla 184. Procesos Cognitivos.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.9	0	2	3	1.1	0.000
Segundo cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	1	0.2	

P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 185 expone que antes de la formación, 13 (46.4%) participantes apuntan contenidos vinculados a procesos cognitivos. Contrariamente, después de la formación solo los identifica 1 (3.6%) participante.

Tabla 185. Acciones relativas a los procesos cognitivos.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Procesos Cognitivos	No	15	53.6	27	96.4
	Sí	13	46.4	1	3.6

En relación con el diseño de los espacios y materiales, 2 (7.1%) participantes después de la formación vinculan un objetivo a estos contenidos tal y como muestra la Figura 165.

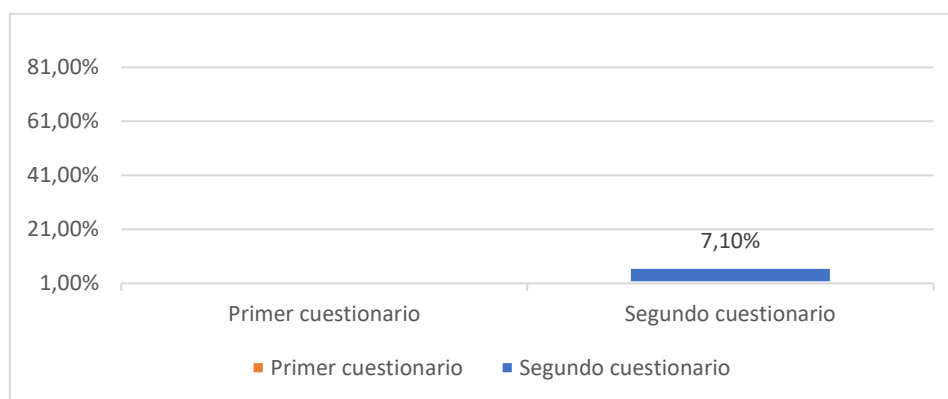


Figura 165. Acciones relativas a los procesos cognitivos

La Tabla 186 muestra las aportaciones de los profesionales.

Tabla 186. Descripción de objetivos vinculados a los procesos cognitivos.

Participante	Cita
C-POST-23	Valoro la importancia de poner el nombre a cada pieza y el hecho de ir nombrándolo de manera correcta con la compañera y los niños.
C-POST-3	El objetivo sería que hagan una seriación. Ofrecer un juego iniciado al niño y hacerles preguntas, por ejemplo, ¿y este? ¿Por qué no lo pones?

Conceptos generales sin especificar. La Tabla 187 muestra que existen cambios significativos en las aportaciones de los participantes antes y después de la formación. En

este sentido, antes de la formación hubo mayor cantidad de contenidos detectados en este ámbito. Concretamente, la media preformación es de 0.9 y la post formación es de 0.0.

Tabla 187. Conceptos generales sin especificar.

	N	Min.	Pct 25	Media	Mediana	Pct 75	Máx.	Desviación estándar	p-valor
Primer cuestionario	28	0	0	0.9	1	2	3	1,0	0.000
Segundo cuestionario	28	0	0	0.0	0	0	0	0,0	

Nota: P-valor calculado mediante Mann Whitney no paramétrico para muestras independientes con un nivel de confianza del 95%

La Tabla 188 refleja que después de la formación ningún participante destaca ningún contenido, ni objetivo sin especificar mientras que, antes de la formación, fueron 16 (57.1%) los contenidos detectados y 2 los objetivos (7.2%).

Tabla 188. Acciones relativas a conceptos generales sin especificar.

		Primer cuestionario		Segundo cuestionario	
		N	Pct	N	Pct
Conceptos generales sin especificar	No	12	42.9	28	100.0
	Si	16	57.1	0	0.0

5.4 Conocimiento didáctico-matemático de los profesionales de la Escuela Infantil después de la formación

Una vez desarrollada la formación, mediante los diferentes instrumentos de recogida de datos, se vuela a recoger información sobre los conocimientos didácticos matemáticos de los profesionales de las EBVM. En este caso y como se ha descrito en el cuarto capítulo, se recogen aportaciones del grupo de discusión, el cuestionario, las observaciones no participantes y la documentación.

Para exponer detalladamente los resultados, se parte de las diferentes categorías correspondientes a este ámbito y que parten de los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CEM-EI) descritos por Alsina y Delgado (2021):

- Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia.
- Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil.
- Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto durante el desarrollo del juego del niño.
- Conocimiento sobre las orientaciones curriculares.

Siguiendo la estructura establecida para la presentación de los resultados antes de la formación, para cada una de las categorías se aportan los datos obtenidos por los diferentes instrumentos. En primer lugar, se presentan los resultados del grupo de discusión, seguidamente se presentan los resultados del cuestionario, primero desde un punto de vista cuantitativo y, seguidamente, desde el punto de vista cualitativo. A continuación, se muestran los datos provenientes de las documentaciones y, finalmente, con el objetivo de triangular toda la información, se presentan las aportaciones recogidas mediante las observaciones no participantes.

5.4.1 Conocimientos sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia

Los participantes del grupo de discusión mostraron haber incorporado conocimientos sobre como aprenden matemáticas los niños en estas primeras edades. Como expone la Tabla 189, durante el grupo de discusión, a diferencia del grupo antes de la formación, expresaron conocimientos específicos sobre como aprenden matemáticas aludiendo a las capacidades de identificar, relacionar y observar cambios con las cualidades sensoriales, las posiciones y las formas, los números y las operaciones y los atributos mensurables.

También hicieron referencia sobre que, a través de la observación, el juego, la experimentación y la manipulación, los niños en estas primeras edades accionan sobre los objetos y el entorno inmediato construyendo el pensamiento matemático. Así mismo, explican que ahora sienten más seguridad y tienen mayor conocimiento para identificar

las acciones que hacen los niños y como pueden facilitar su desarrollo mediante los espacios y materiales.

Tabla 189. Conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-1	HV	Los niños y las niñas aprenden matemáticas jugando, explorando y manipulando los materiales. Lo que hacen es primero observar y gracias a esta observación y juego que llevan a cabo van identificando y relacionando las cualidades sensoriales, las posiciones y las formas y los pesos, medidas, longitudes. Y también las cantidades. Los números son muy pequeños todavía, pero si hay mucho o quieren más sí que lo aprenden con el juego y con la vida cotidiana.
GD-POST-3	HV	Si y con la observación. Desde muy pequeños empiezan con la observación al entorno y luego con la manipulación y experimentación y juego que van desarrollando las acciones de identificar y agrupar, relacionar y observar las cualidades, la posición relativa y la distancia, las formas, los números y las magnitudes.
GD-POST-11	HV	Aprenden con el cuerpo, con el movimiento, con las acciones que hacen con el juego de identificar, clasificar y observar los cambios en las cosas. En todo aquello de la lista, que no me la sé de memoria y que siempre que documentamos acciones matemáticas la tengo que coger. Pero tengo claro que aprenden muchas matemáticas jugando, cada día, haciendo comparaciones, clasificando, identificando como son las cosas, observando cómo cambian con la experimentación y la manipulación.
GD-POST-4	HV	Hemos aprendido a poder conciencia a como aprenden los niños y las niñas matemáticas. Desde que nacen están haciendo matemáticas de una manera natural. Porqué están en su entorno y antes lo decíamos, pero no las podíamos explicar porqué era como muy general. Ahora las podemos identificar. Con el movimiento de los bebés, todo lo de la posición y la distancia, pero también como observan desde que nacen las cualidades. Las exploran y aunque no haya el lenguaje lo están absorbiendo. Y poco a poco, van creciendo y sus acciones matemáticas son cada vez más elaboradas. Cogen y manipulan, exploran, experimentan con los materiales, hacen sus teorías y las comprueban. Tenemos aquella rúbrica que nos dio Ángel con todas las acciones como por edades, más o menos, que nos va muy bien para saber en qué momento se encuentra el niño o la niña. Esto nos ha ayudado a poder entender que va antes y que viene después y nos ayuda a pensar mejor el material.

Ejemplo de esta transformación el conocimiento de los profesionales se recoge en las documentaciones que elaboran después de la formación donde son capaces de identificar las acciones matemáticas que lleva a cabo el niño mientras está jugando, explorando y manipulando los materiales. Las Figuras 166, 167 y 168 muestran tres de las documentaciones que se realizaron en las diferentes escuelas identificando las acciones matemáticas que empeñaban los niños. En ellas, destacaban mediante imágenes las acciones y las indicaban brevemente. En la exposición que llevaron a cabo en la última sesión de formación para presentar sus trabajos a todo el claustro, las definían también oralmente de forma breve.



Figura 166. Acciones matemáticas durante el juego libre en el aula de 2-3 años. Fuente: EBMV Serra Sanferm



Figura 167. Matemáticas en el espacio de las construcciones del aula de 2-3 años. Fuente: EBMV Horta Vermella

Aun así, como se recoge en la Tabla 190, expresaron que seguían sintiendo la necesidad de desarrollar más formación específica que les ayudase a incorporar con más seguridad estos conocimientos y practicar la observación de las acciones matemáticas, en tanto que necesitaban todavía apoyarse en los documentos proporcionados en la formación para poder interpretar las acciones que recogían de los niños.

También, explicaron que sentían dificultades en relación con su papel durante el desarrollo de la actividad. En este sentido, presentan sus dudas sobre la intervención del adulto durante el desarrollo del juego del niño. Estas dificultades se presentan ampliamente detalladas en el apartado 5.4.3. Conocimientos sobre el papel del lenguaje.

Tabla 190. Necesidades formativas respecto al conocimiento en torno las formas de aprendizaje de las matemáticas.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-2	HV	Todavía hay momentos en los que me falta fluidez para interpretar las acciones matemáticas que surgen en los espacios, materiales y propuestas.
GD-POST-10	HV	A mí me cuesta el tema del vocabulario, pensar cuáles son las acciones que están haciendo me cuesta ver, mejor dicho, poner su nombre y saber qué está haciendo.
GD-POST-3	HV	Creo que nos falta agilidad en la interpretación de las acciones y que cuando queremos preparar un espacio nos puede condicionar porque como aun no tenemos claro toda la rúbrica sin mirarla o todas las

		acciones y capacidades sin mirar la lista, sentimos cierta inseguridad. (...) Quizás a veces esperas unos contenidos y surgen otros y eso nos ha enseñado a ser más flexibles ya abrir la mente ya dar más tiempo a los niños.
GD-POST-1	HV	A la hora de identificar las acciones matemáticas, su secuencia y cuáles son más importantes.

En referencia al cuestionario, se recogieron los datos entorno al sentimiento de preparación de los profesionales y se les preguntó lo preparados que se sentían para diseñar espacios y materiales bajo criterios matemáticos. Para valorar sus respuestas, se presenta la Tabla 191 en la que se muestran los resultados según la formación inicial en Técnico Superior en Educación Infantil o Magisterio. De estos resultados, se destaca que los datos revelan la no existencia de diferencias significativas del sentimiento de preparación entre los profesionales en función de su formación inicial. De toda la formación inicial en magisterio, solo 4 (14.2%) participantes se sienten muy preparados. De los 24 (85.61%) restantes, prácticamente todos se sienten medianamente preparados y ningún profesional se siente poco preparado respecto a los 10 (35.7%) que se sentían así antes de la formación. Por ello, se considera que existe un incremento notable en el sentimiento de preparación.

Tabla 191. Sentimiento de preparación.

		Título profesional		Total
		TSEI	Maestra	
Sentimiento de preparación	Muy preparado	N	0	4
		% Vertical	0%	14.2%
	Medianamente	N	13	11
		% Vertical	46.4%	39.2%
	Poco	N	0	0
		% Vertical	0%	0%
Total		N	13	15
		% Vertical	100.0%	100.0%

Nota: No existen diferencias significativas según la formación del maestro/a (p-valor = 0,106 calculado mediante Chi Cuadrado con un nivel de confianza del 95%)

En cuanto a las observaciones no participantes, se destaca que después de la formación hubo muchos profesionales que facilitaron el acceso a sus aulas para poder registrar

las sesiones que llevaban a cabo. Se pueden consultar la Tabla 16 en apartado 4.6.2 donde se observa que, contrariamente a lo que pasó antes de la formación en la que los grupos con infantes de 0 a 1 años no facilitaron ninguna filmación, después de la formación se facilitaron 12 sesiones de la EBMV Caputxins y 6 de EBMV Horta Vermella. Antes de la formación, de los grupos con infantes de 1-2 años, solo 3 grupos permitieron las observaciones de los 7 grupos que hay en total. Después de la formación, entre todos facilitaron 29 filmaciones. Finalmente, los 6 grupos con infantes de 2-3 años, facilitaron muchas más filmaciones que antes de la formación, 48 para ser precisos. En total, antes de la formación presentaron 32 vídeos entre las tres escuelas, mientras que después de la formación presentaron 85. De estos 85 vídeos, siguiendo el criterio de análisis establecido, se han analizado 15.

En términos generales, el resultado de este análisis muestra que todos los profesionales basan sus prácticas docentes en ofrecer experiencias a los niños a partir de materiales que facilitan la aproximación de los niños a los contenidos matemáticos y que se sienten cómodos compartiendo sus trabajos para poner en común sus aprendizajes.

Se destaca también que han incorporado el diseño de nuevos espacios y materiales con un sentido matemático específico y que han reorientado los materiales y rediseñado los espacios para dotarlos conscientemente de sentido matemático. La Tabla 192, presenta el contenido de las diferentes propuestas que han presentado para su análisis. De ella se observa que, a través del juego, la exploración y la manipulación, el niño formula sus propias hipótesis y sus respuestas.

Tabla 192. Registro de observaciones no participantes con las propuestas analizadas.

EBMV	Aula / Nivel Educativo	Propuesta Analizada
CAPUTXINS	Xics (0-1a)	Juego Heurístico
	Graponers (1-2a)	Material de motricidad fina
	Tafaners (1-2a)	Mesa de experimentación
	Belluguets (2-3a)	Construcciones
	Xerramecs (2-3a)	Construcciones
HORTA VERMELLA	Xics (0-1a)	Material de exploración
	Graponers (1-2a)	Material de exploración / instalación
	Tafaners (1-2a)	artística
	Belluguets (2-3a)	Construcciones

	Xerramecs (2-3a)	
SERRA SANFERM	Xics (0-1a)	Juego heurístico
	Graponers (1-2a)	Juego heurístico
	Tafaners (1-2a)	Juego heurístico
	Belluguets (2-3a)	Construcciones / Land Art
	Xerramecs (2-3a)	Construcciones / Material de motricidad fina

Como ejemplo de estas propuestas, se presentan las Figuras 168, 169 y 170 en las que se observa las propuestas de los profesionales. Estas, pretenden facilitar el desarrollo de estas primeras matemáticas mediante materiales diseñados específicamente con esta finalidad.



Figura 168. EBMV_SS_POST_1-2aG_s4. Fuente: EBMV Serra Sanferm

En esta imagen, se presenta un espacio con 5 alfombras. En cada una de ellas hay diferentes materiales. En una, cubos de madera de colores diferentes: rojo, verde, amarillo y azul. En otra, una cesta con pelotas de colores rojo, verde, amarillo y azul. En la tercera, potes de pelotas transparentes con un detalle de color rojo, verde, amarillo y azul. En la cuarta, dos cestas con telas y peces también de colores, esta vez, los mismos que los anteriores, pero sin el verde. Y en la última alfombra, se presentan cintas de tela

enrolladas de diferentes longitudes. Esta propuesta, que ha sido diseñada específicamente así, tiene como objetivo proporcionar materiales que faciliten la exploración de las diferentes longitudes y tamaños mediante las cintas y las telas de colores, las correspondencias por colores con las pelotas, los pots, las piezas y las telas, y la identificación de los principales cuantificadores con los pots transparentes, entre otros.



Figura 169. EBMV_HV_POST_2-3aX/B_5. Fuente: EBMV Horta Vermella

En esta imagen, se presenta un espacio con una mesa baja. Siguiendo la gama cromática y las diferentes longitudes de los prismas, se disponen las piezas con un sentido cromático en círculo. Además, se acompañan de pequeñas figuritas que provocan el juego de hacer correspondencia por color.



Figura 170. EBMV_SS_POST_2-3aB_10. Fuente: Serra Sanferm

En esta imagen, se presenta un espacio con un material diseñado y creado específicamente después de la formación a partir de una instalación artística. Este material, presentado en forma de mándala, contiene diferentes piezas de madera:

- 36 discos: 18 pequeños y 18 grandes (6 de color blanco, 5 naranjas y 6 verdes respectivamente)
- 12 esferas pequeñas partidas por la mitad (4 blancas, 4 verdes y 4 naranjas).
- 12 esferas grandes partidas por la mitad (4 blancas, 4 verdes y 4 naranjas).
- 18 marcos con orificio pequeño (6 de color blanco, 5 naranjas y 6 verdes).
- 18 marcos con orificio grande (6 de color blanco, 5 naranjas y 6 verdes).
- 6 cuerdas de 100cm (3 gruesas y 3 delgadas).
- 6 cuerdas de 50cm (3 gruesas y 3 delgadas).
- 6 bases redondas de mimbre.

Las capacidades y contenidos con los que se pretendía trabajar eran múltiples. Entre ellos, se destaca la correspondencia por color, forma, por tamaño y por cantidad, la composición y descomposición de filas y torres, los agrupamientos y la identificación de longitudes y formas.

Como se expone en el grupo de discusión, las preparaciones de las propuestas vienen, en parte, de los conocimientos que han incorporado mediante la formación. Concretamente, en el apartado 5.4.2 Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales, se recogen ampliamente sus consideraciones y actuaciones al respecto.

Los resultados muestran que los profesionales acompañan los espacios de juego y exploración con su presencia. También, en muchos casos, el papel del educador ha cambiado respecto al papel que desempeñaban antes de la formación. En este sentido, aparecen más intervenciones que se hacen a través de preguntas estimulantes que funcionan de bastida para desarrollar nuevos aprendizajes. Todo ello se desarrolla ampliamente en apartado 5.4.3 Conocimientos sobre el papel del lenguaje donde se pueden observar los diálogos e intervenciones que desarrollan.

5.4.2 Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales con contenido matemático en la Escuela Infantil

En cuanto al conocimiento de los profesionales para diseñar los espacios y materiales con contenido matemático en estas primeras edades y después de la formación, los resultados muestran que los profesionales de las EBMV manifiestan haber incorporados nuevas ideas y recursos para planificar sus propuestas de juego, exploración y manipulación con sentido matemático. En este sentido, se han cumplido las expectativas que tenían sobre la formación en relación con la necesidad de incorporar nuevos recursos e ideas para diseñar materiales con contenido matemático. Ahora no solo preparan los espacios y los materiales desde un punto de vista estético, sino que además le añaden el sentido matemático.

Concretamente, y como se describe en la Tabla 193, en el grupo de discusión después de la formación, los profesionales manifiestan haber adquirido nuevos recursos. Han descubierto e incorporado nuevos materiales y han repensado como utilizar mejor los que ya tienen. También, expresan que después de la formación se sienten mucho más seguros para diseñar los espacios y los materiales con propuestas matemáticas.

Tabla 193. Sentimiento de preparación para el diseño de los espacios y materiales con sentido matemático.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-2	HV	Hemos incorporado cambios en las propuestas de los materiales que ponemos en los espacios de las estancias, más enriquecidos, con mayor conciencia matemática. Ahora los pienso con un sentido matemático. (...) La formación nos ha permitido ver nuevos recursos y materiales y, sobre todo, repensar como presentamos los que ya tenemos o como los podemos enriquecer para dar mayor sentido matemático.
GD-POST-10	HV	La forma de presentar los materiales, no ponerlo simplemente porque estéticamente queda bien sino porque tenemos presentes que dará pie a unos aprendizajes u otros. (...) Ahora tengo muy claros los contenidos y me baso con los contenidos que he aprendido y que dan un sentido al material que presentas, como los conoces los preparas para que den sentido y escoges un material y no otros.
GD-POST-9	HV	La presentación en las propuestas, en los materiales que invitan a realizar acciones matemáticas pensadas previamente con objetivos, como por ejemplo iniciar una seriación. (...) Me fijo en ofrecer un material que facilite aspectos matemáticos y que por tanto los niños puedan desarrollar cualquiera de los 4 bloques de contenidos que hemos aprendido. (...) Tengo en cuenta los distintos aspectos matemáticos que puedo llegar a trabajar. Cualidades sensoriales, posiciones y formas, atributos medibles y cantidades.

En las observaciones no participantes y en las documentaciones, se recogen algunos de estos materiales que presentaban con anterioridad a la formación, aunque enriquecidos con un sentido matemático más consciente. Ejemplo de ello, son los espacios de construcciones. Este espacio se presenta como propuesta de análisis y reflexión en las tres escuelas.

En la escuela de la Serra de Sanferm, las educadoras han preparado un espacio con un soporte circular y una caja con las piezas de construcción de diferentes longitudes (Figura 171). Durante el desarrollo de la sesión, que se presentará ampliamente descrito en el siguiente apartado 5.4.3 Conocimientos sobre el papel del lenguaje del y la intervención del adulto después de la formación, se observa como el espacio ha sido diseñado específicamente con maderas de diferentes longitudes. La educadora, al observar la acción de la niña que selecciona todas las piezas cortas, le pregunta si puede poner una madera en su fila mientras le ofrece una larga, y la niña responde que no. A partir de ahí, establecen un diálogo sobre la longitud de la madera y la selección de la niña. Al tiempo, acompaña la acción de la niña en el momento de hacer la correspondencia cuantitativa.



Figura 171. EBMV_SS_POST_2-3a_s5. Fuente: EBMV Serra Sanferm

Lo mismo ocurre en el espacio de las construcciones de la escuela Horta Vermella. Como se observa en la Figura 172, se presentan nuevos diseños mediante una combinación intencionada de materiales para que se desarrollen acciones como las de seriar, apilar, clasificar por formas y desarrollar cerramientos provocando cambios de posición. La documentación que ha llevado a cabo el maestro del aula refleja diferentes acciones que han desarrollado los niños en este espacio (Figuras 173, 174 y 175).



Figura 172. Espacio de construcciones EBMV Horta Vermella. Fuente: EBMV Horta Vermella



Figura 173. Cambios de posición / cerramientos. Fuente: EBMV Horta Vermella



Figura 174. Comparación de atributos mensurables. Fuente: EBMV Horta Vermella



Figura 175. Agrupar, alinear y hacer correspondencias cuantitativas. Fuente: EBMV Horta Vermella

La Figura 176 muestra un material nuevo que se ha diseñado para el aula de 0-1 años con la finalidad de mejorar la propuesta. Previamente a la formación, el nuevo material era un cajón con diferentes cilindros huecos para encajar dentro los cilindros de madera. Las educadoras han enriquecido este material pintando el borde de los cilindros huecos con colores que corresponden a las telas y con diferentes texturas que usaron para forrar cada uno de los cilindros de madera. De esta manera, los niños podían identificar los colores y las diferentes texturas.

Los resultados, como presenta la Tabla 194, también muestran que los profesionales han incorporado materiales nuevos con sentido matemático y que lo hacen pensando en el momento evolutivo de los niños y bajo criterios estéticos y de belleza. En este sentido, explican que parten de la observación del niño respecto su evolución madurativa, su juego y sus intereses. En base a ello, preparan los espacios respondiendo a un objetivo, en este caso matemático, donde el criterio estético sigue siendo importante. Los materiales son bonitos, atractivos, están ordenados y son accesibles para los niños. Así, de manera

autónoma pueden coger los materiales y sienten interés de explorarlos y jugar con ellos. Destacan también la importancia de los espacios y materiales delimitados para que permitan llevar a cabo la propuesta de manera concentrada y desarrollando un juego rico y elaborado.



Figura 176. EBMV_HV_POST_0-1aX_4s. Fuente EBMV Horta Vermella.

Tabla 194. Diseño de los espacios y de los materiales.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-4	HV	Creo que la presentación de los materiales debe ser atractiva para los niños, estimulante, bonita, cuidada, que tenga en cuenta sus necesidades de juego y su momento evolutivo. Y tener en cuenta que en el espacio que se presente debe estar libre de otros estímulos, que otros materiales que interfieran en la propuesta matemática concreta. Por ejemplo, que los espacios que presentamos estén bien delimitados para que cuando los niños y las niñas están haciendo una propuesta de concentración no se distraigan con facilidad porque al lado hay una estructura de muchos movimientos.
GD-POST-10	HV	En el momento de presentar el material ya quieres que pueda buscar una manera de hacer que ocurra algo... tienes un objetivo matemático y así puedes acompañarlo. Presentas el material como siempre, bonito, accesible, estético, variado... pero ahora además miras qué matemáticas puedes facilitar teniendo en cuenta los 4 bloques de contenido y piensas qué acciones van a desarrollar.
GD-POST-2	HV	La formación me ha permitido incorporar cambios en las propuestas de los materiales que ponemos en los espacios de las estancias, más enriquecidos, con mayor conciencia matemática. La forma de presentar los materiales, no ponerlo simplemente porque estéticamente queda bien sino porque tenemos presente que dará pie a unos aprendizajes u otros, invitan a realizar acciones matemáticas pensadas. Por ejemplo, con una seriación que pones en las construcciones con la intención que ellos la sigan.

Las Figuras 177, 178 y 179 son tres propuestas, de entre muchas, que se utilizan como ejemplo de estos materiales que han creado nuevos. En la presentación se observa la intención de delimitar el espacio del material para ayudar a la concentración y desarrollo de la acción. Al tiempo, se puede apreciar el sentido estético, la belleza de las propuestas y la calidad de los materiales. Los materiales que ofrecen tienen un criterio matemático de ordenación, clasificación o correspondencia.

En la Figura 177 se presentan unas tarimas con unas hueveras y unos huevos de madera pintados de colores. Este material invita a hacer correspondencias por color. Está ubicado en un lateral del aula colindante, con un espacio amplio donde se desarrollan simultáneamente diferentes propuestas a la vez en microespacios.



Figura 177. Presentación de espacios I. Fuente: EBMV Horta Vermella

En la Figura 178 se presenta una instalación artística ubicada en la sala polivalente como propuesta de macro espacio. En primer lugar, se invita a los niños a desplazarse a la sala polivalente y aquellos que muestren interés podrán ir a jugar. Se desplazarán hasta allí un grupo pequeño (máximo 8 infantes) junto a uno de los referentes del aula. En este caso y como se recoge de las observaciones no participantes, no se combina esta propuesta con otra. Si los niños se muestran cansados o se observa que tienen otras necesidades de juego, se les ofrece la posibilidad de volver al aula. Allí, se encuentran con las otras propuestas y espacios. La exclusividad de la propuesta da lugar a que los niños desarrollen acciones concretas de llenar y vaciar los vasos, agrupar las plumas y los vasos, relacionar por colores y trazar dibujos con el dedo encima de la tierra.

La Figura 179 presenta diferentes propuestas diseñadas por el equipo de la escuela Serra Sanferm con la finalidad de propiciar la manipulación y la exploración de este material

heurístico. En este sentido, en todas ellas se observa como se cambia la disposición del material, pero siempre las propuestas se presentan delimitadas con la finalidad de facilitar la combinación entre los elementos que se presentan conjuntamente.



Figura 178. Instalaciones artísticas. Fuente: EBMV Horta Vermella



Figura 179. Diferentes propuestas de juego heurístico. Fuente: EBMV Serra Sanferm

La Figura 180 recoge la presentación del espacio de construcciones de la escuela de Caputxins. Este contiene una tarima con diferentes discos de madera, prismas de madera, cilindros de cartón y figuras de animales. Al lado, hay un mueble con diferentes materiales de construcción, clasificados según su forma y tamaño. Al fondo, se observa como otros compañeros están jugando en otros espacios y con otros materiales. Durante la sesión de juego, se observa que los tres niños que han acudido al espacio de las construcciones están concentrados haciendo filas, correspondencias cuantitativas y torres muy altas. La concentración en este espacio dura 14 minutos, tiempo en que se desempeñan estas acciones ajenas a todo lo que les rodea.



Figura 180. Apilando, hacienda filas y haciendo correspondencias por cantidades. Fuente EBMV Caputxins.

La Tabla 195 revela que los profesionales dan importancia al tipo de material que ofrecen. Buscan que sea natural, de calidad, que ofrezca el descubrir los diferentes contenidos y capacidades de los diferentes bloques temáticos: las cualidades sensoriales, las posiciones y las formas, los números y las operaciones y los atributos mensurables previendo las acciones que van a poder desarrollar los niños. Muestran la inquietud de ir incorporando, poco a poco, todos los contenidos que han aprendido y que pueden ofrecer a los niños en estas primeras edades.

Tabla 195. Diseño de los materiales.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-1	HV	Doy mucha importancia al tipo de material, ya las posibilidades de juego que tiene. Las cualidades sensoriales de los objetos (color, textura...) todos los atributos medibles que se pueden trabajar (gordo, pequeño, corto, largo, alto, bajo...) la capacidad: lleno, hueco, la masa... Los cambios de posiciones y espacio que se pueden hacer, el número de elementos que hay para poder trabajar las cuantificaciones...
GD-POST-5	HV	Yo también pienso en ello, con los materiales, el tamaño, los colores, la estética, la forma... en general en todo, ya que los materiales tienen unas cualidades y debe colocarse de modo que hablen por sí mismos. El niño en cuanto ve las propuestas de juego va a poder hacer unas acciones que están vinculadas a lo que les has presentado. Cuando presento el material tengo que prever que pueden hacer, que acciones va a poder desarrollar y pensar de qué manera puedo facilitararlo. (...) También para trabajar diferentes capacidades y contenidos matemáticos sobre todo pensados previamente pero claro, dejando la mente abierta a contenidos que surgen de la espontaneidad del niño. Espacios basados estéticamente en un material estético que permita trabajar diferentes contenidos y capacidades matemáticas.
GD-POST-7	HV	Me baso en que el material sea lógico, ordenado y ofrezca posibilidades de que se conviertan en situaciones o contextos de reflexión y debate donde tengan que ver aspectos matemáticos. Quiero ir mirando que puedan ir desarrollando todos los contenidos que nos facilitó Àngel y para ello voy mirando qué vamos haciendo. Poco a poco, aún falta mucho. Pero poco a poco vamos pensando en todo.

Nuevamente, en sus documentaciones se recogen evidencias de esta mirada matemática más despierta, más consciente, más presente en sus diseños y en su propuesta (Figuras 181, 182 y 183).

La Figura 181 presenta la documentación que presentaron en la última sesión de formación las educadoras del aula de 2-3 años de la EBMV Serra Sanferm. De ella se extrae la idea de que, gracias al material facilitado, los maros y las cuerdas, los niños

podían hacer acciones como la de comparar las longitudes. De esta actividad destaca que antes de la formación, nunca habían visto la comparación de longitudes en la escuela, en tanto no habían presentado un material que facilitase esta acción.

CO R C R OS S R S



Figura 181. Comparando longitudes. Fuente: EBMV Serra Sanferm

La Figura 182 recoge la documentación de una educadora del aula de 1-2 años de la Serra de Sanferm. En ella, se muestran los materiales facilitados para desarrollar el juego heurístico presentados en la Figura 180. Estos, facilitan acciones como las de llenar y vaciar, comparando las capacidades, los primeros cuantificadores. En este caso, al tener el material unos detalles de color amarillo, rojo y verde, se facilita la correspondencia cualitativa.

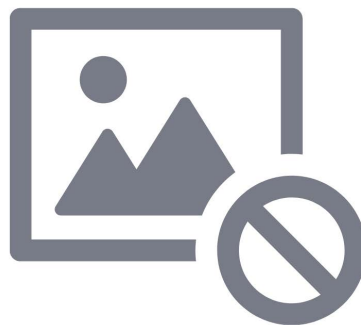


Figura 182. Comparando longitudes. Fuente: EBMV Serra Sanferm

La Figura 183 muestra la documentación que ha elaborado la maestra del aula de 2-3 años de Caputxins. En ella, se puede identificar la acción de ordenar según tamaño, de pequeño a grande. Para ello, se enriqueció el espacio de las construcciones con diferentes cilindros de diferentes longitudes para propiciar esta acción.



Figura 183. Ordenación por tamaños. Fuente: EBMV Caputxins

En las observaciones no participantes y como se ha podido ver en las diferentes imágenes presentadas en este apartado y en las documentaciones también facilitadas, los resultados muestran que los profesionales tienen la capacidad de diseñar y planificar los espacios y materiales siguiendo los criterios referidos en el marco teórico para el diseño de los espacios y materiales de la Escuela Infantil según los conceptos de: polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética y belleza, orden e intencionalidad, naturaleza, colectividad e individualidad, transformación, dimensión y ubicación, adaptabilidad y polivalencia y seguridad. En este sentido, todas las observaciones no participantes analizadas cumplen con estas características.

Los resultados también muestran que, en función del espacio o material presentado, los profesionales son capaces de reconocer diferentes capacidades y contenidos matemáticos. Un ejemplo de ello se recoge en la Tabla 196 en la que se muestra que después de la formación existen algunas diferencias en la detección de contenidos según el espacio. La media de contenidos detectados se ordena de la siguiente forma: los espacios de instalaciones artísticas (6), juego heurístico (5.65) y mesas de experimentación (5.38). A continuación, se encuentra el juego simbólico (4.60), seguido del juego de exploración

(4.45) y el taller (4.09). Finalmente, por debajo, se encuentra el espacio de movimiento (3.02).

Como recoge la Tabla 196, el número de participantes que analiza el espacio de construcciones es muy inferior en tanto que los participantes no tuvieron tiempo a acabar de complementar el cuestionario. De hecho, desarrollaban de forma más amplia las respuestas; con mayor contenido y con el mismo tiempo que en el cuestionario de antes de la formación. Por ello, dejaron un espacio por analizar. En el cuestionario pre, se analizaron 78 espacios en total y en el post 70. El análisis en el pre fue más breve y en el post fue más desarrollado.

Tabla 196. Número medio de contenidos por espacio después de la formación.

	Segunda entrevista		
	N	Media	Std Deviation
INSTALACIONES ART.	10	6.00	4.06
TALLER	11	4.09	2.43
J. HEURÍSTICO	10	5.65	3.83
MOVIMIENTO	8	3.13	1.13
J. SIMBÓLICO	10	4.60	1.78
CONSTRUCCIONES	2	1.00	0.0
MESAS EXP.	8	5.38	3.02
EXPLORACIÓN	11	4.45	1.86
	P-valor	0.097	

La Tabla 197 presenta la comparativa pre-post del análisis de contenidos de los diferentes espacios y materiales antes y después de la formación. En ella, se observa cómo la media de contenidos detectados por espacio aumenta en todos los espacios a excepción del juego simbólico y del espacio de las construcciones que tienen un número inferior de participantes.

Tabla 197. Número medio de contenidos por espacio antes y después de la formación.

	Primera entrevista			Segunda entrevista		
	N	Media	Std Deviation	N	Media	Std Deviation
INSTALACIONES ART.	9	4.11	1.36	10	6.00	4.06
TALLER	9	3.78	1.30	11	4.09	2.43
J. HEURÍSTICO	10	5.11	1.53	10	5.65	3.83
MOVIMIENTO	10	2.00	1.41	8	3.13	1.13
J. SIMBÓLICO	9	5.22	1.39	10	4.60	1.78
CONSTRUCCIONES	10	5.10	1.91	2	1.00	0.0
MESAS EXP.	10	3.10	1.73	8	5.38	3.02
EXPLORACIÓN	10	3.90	1.45	11	4.45	1.86
	P-valor		0	0.097		

A continuación, y con el objetivo de concretar y ampliar estos resultados mediante la misma estructura que en el apartado de resultados previo a la formación, se presenta para cada uno de los espacios analizados las aportaciones de los profesionales del grupo de discusión, del cuestionario, de las observaciones no participantes y se añade las documentaciones.

Las Instalaciones Artísticas. En el grupo de discusión, los profesionales expresaron que les había despertado mucho interés este tipo de propuestas y que antes de la formación las desconocían tal y como se les habían presentado. Hacen referencias a Abad y la información que han buscado para completar sus diseños. También, explican que el juego de los niños les sorprendió mucho ya que era realmente interesante ver todas las acciones matemáticas que se habían desarrollado a partir de una propuesta pensada específicamente con este fin. Destacan también la belleza de las propuestas, aunque hubiese complejidad para montarlas y recogerlas. En general hacen una valoración muy positiva y se animan a seguir haciendo este tipo de propuestas e incluso a ampliarlas (Tabla 198).

Tabla 198. Grupo de discusión – Instalación artística post formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-12	HV	Hago una valoración muy positiva de este espacio porque, aunque montar y desmontar es mucho trabajo vale la pena. La propuesta es preciosa y los niños y las niñas están haciendo matemáticas todo el rato. Claro las acciones a qué dan lugar son matemáticas. Ya sé que eso pasa con todo, pero es que los ves haciendo eso, matemáticas.

No sé si me explico. En la que hicimos en la sala, identifican los colores, los clasifican, agrupan las plumas, o las cañas, llenan los vasos y los vacían... en la de la Serra igual, todas las acciones que veíamos eran de identificar, relacionas las formas, los pesos, las longitudes. A mi me encantó, yo quiero ese material también.

GD-POST-7	HV	Nosotros buscamos a X. Abad porque À. lo presentó y encontramos muchas propuestas. Son súper interesantes. Buscadlas y encontraréis muchas y muy chulas. Entonces lo que hicimos fue buscar, y seleccionamos la de los pósitos que hicimos en la sala de luz y la de la tierra en la sala polivalente. Las dos para montar y desmontar tela. Pero funcionaron súper bien. Y es eso, están haciendo matemáticas. No es que hagan juego simbólico y también aparezcan las matemáticas. Es que hacían eso, matemáticas, cuando no identifican un color, están relacionándolo, o están identificando cantidades o atributos mensurables, su juego es matemático. Claro antes quizá no lo podía ver, ahora llevo estas gafas matemáticas que dice G. y veo matemáticas en todas partes. (risas) Yo también creo que hay que seguir desarrollando este tipo de propuestas.
GD-POST-3	HV	A mí me impactó mucho el material de la Serra, fue una pasada. Claro lo construyó B. seguro. Pero estaba tan bien pensado. Las longitudes de las curdas y las esferas. Son cosas que no habíamos puesto nunca y el tipo de juego que favorecen es matemático. Yo creo que hemos de ampliar mucho más y aprovechar mucho más este tipo de recurso. Yo les pediré que nos dejen el de la Serra pero aquí tenemos que hacer también más. Fue muy bien. Los pósitos no tanto, no funcionó tanto o no hicieron lo que nosotros esperábamos. Pero podemos mejorar mucho las propuestas y hacer más. Y los mándalas también, tenemos que ampliar los que tenemos y construir mejor el espacio de fuera. Bueno, eso ya es un objetivo de este año, ¿no?

En el cuestionario y, como muestra la Figura 184, se observa que después de la formación se detectaron con mayor o menor frecuencia todos los contenidos matemáticos, a excepción de la identificación del tiempo. Por encima del 70%, aparecen los contenidos de reconocer las cualidades sensoriales (92.9%), el reconocimiento de los atributos mensurables (85.7%) y las agrupaciones por cualidades sensoriales, las clasificaciones cualitativas y el reconocimiento de la posición (71.4%).

Alrededor del 50% se encuentra la comprensión de los principales cuantificadores (60.7%) y la observación de cambios en la posición (46.40%).

Por debajo del 30% destacan la observación de cambios en las cualidades (25%), las ordenaciones cualitativas (21.4%), las seriaciones cualitativas (17.9%), las relaciones espaciales (14.30%), las seriaciones cuantitativas (7.1%) y la distinción entre números escritos y otras representaciones (3.5%).

Los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.



Figura 184. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de Land Art.

Comparando los contenidos detectados antes y después de la formación y como muestra la Figura 185, se observa un incremento en prácticamente todos los contenidos y capacidades matemáticas, exceptuando el relativo a la identificación del tiempo. Los contenidos que ya se detectaban antes de la formación incrementan sensiblemente. Por ejemplo, la identificación de las cualidades sensoriales pasa de 88.9% antes de la formación a 92.9% después de la formación o lo hacen notablemente, como la comprensión de los principales cuantificadores que pasa de 33.3% a 60.7%, prácticamente el doble. En este sentido, aparecen contenidos con mucha más presencia que antes de la formación. Ejemplo de ello, son las agrupaciones cualitativas y el reconocimiento de la posición y la distancia (71.4%), el reconocimiento de las formas geométricas (57.10%) y las correspondencias cuantitativas (39.3%).

Siguen apareciendo algunos contenidos pocos visibles que antes de la formación eran invisibles, pero que aun así empiezan a aparecer. Por ejemplo, las clasificaciones según atributos mensurables (21.4%) y las ordenaciones o seriaciones de los distintos bloques, que aparecen sensiblemente.

Hay que destacar que el inicio del conteo y el reconocimiento de los atributos mensurables, que aparecían con más del 50% antes de la formación, disminuyen sensiblemente. El inicio del conteo pasa de 55.6% a 42.9% y el reconocimiento de los atributos mensurables de 88.9% a 85.7%.

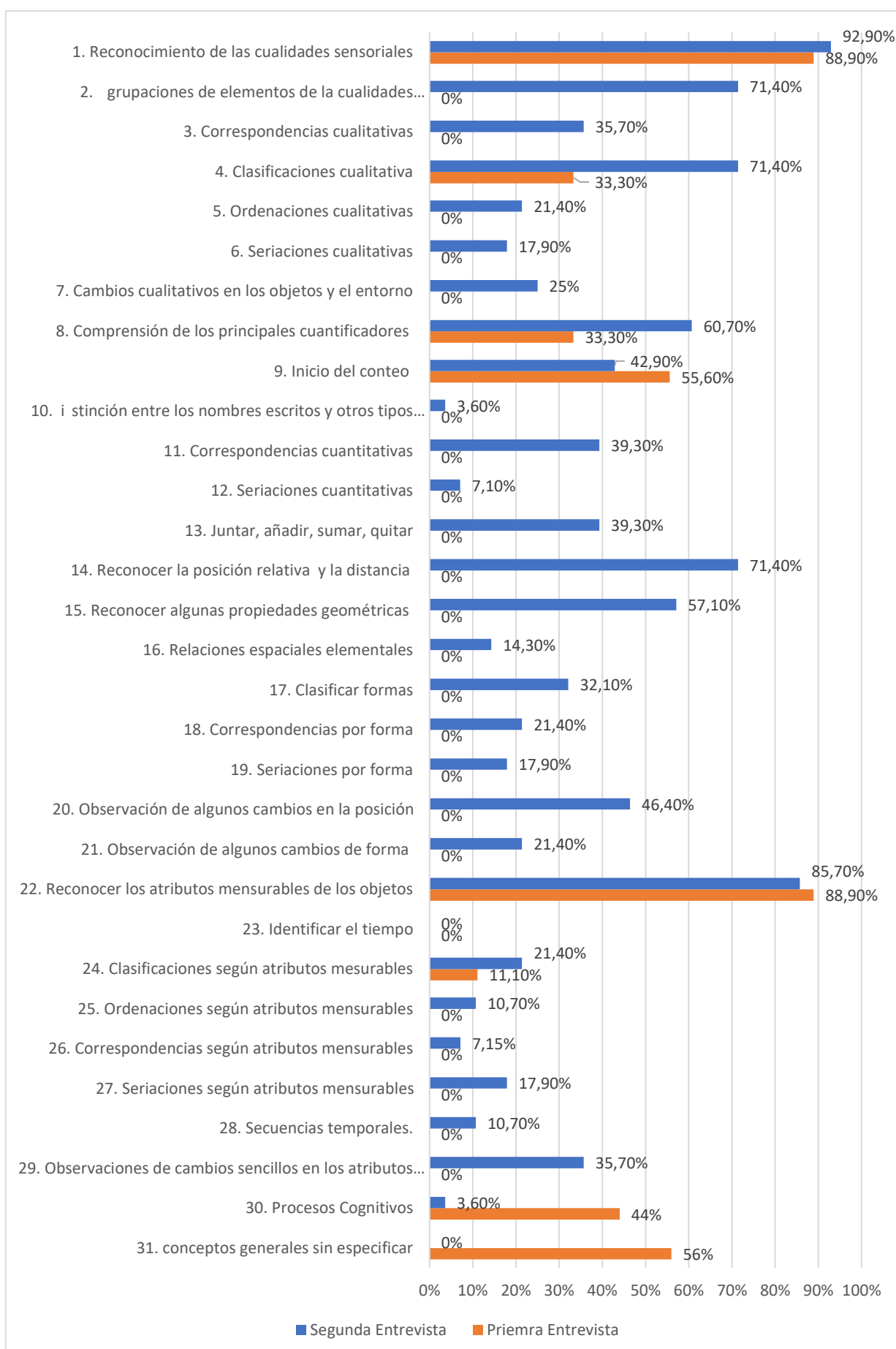


Figura 185. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Land Art. 482

Gracias a las observaciones no participantes en las que se recogen aportaciones de la EBMV Serra Sanferm y la Horta Vermella que diseñan 2 instalaciones artísticas diferentes, se puede afirmar que los resultados muestran que los profesionales preparan los espacios respondiendo a los criterios de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza y naturaleza, orden y intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, manipulación, polivalencia y seguridad, como muestran las ilustraciones 186 y 187.

Ampliamente, el desarrollo de las sesiones se comentará en el siguiente apartado 5.4.3 El conocimiento sobre el papel del lenguaje.



Figura 186. EBMV_SS_POST_2-3aB_s10. Fuente: EBMV Serra Sanferm



Figura 187. EBMV_SS_PRE_1-2aT_s8. Fuente EBMV Horta Vermella.

Juego Heurístico. En el grupo de discusión referente al juego heurístico, los profesionales expresaron haber descubierto, gracias a la formación, la importancia del juego heurístico y del planteamiento que debía tener esta propuesta (Tabla 199). De hecho, explican que antes de la formación fueron transformando el juego heurístico hasta el punto de que había desaparecido. Añadieron la importancia de buscar y preparar bien los materiales para poder ofrecerles a los niños propuestas con elementos variados que combinen bien entre ellos y sean fácilmente manipulables. Aprovecharon el grupo de discusión para consensuar algunos acuerdos: tomaron la decisión de ubicar un espacio compartido en la escuela donde centralizar todos los materiales heurísticos; crearon una comisión que se encargaría de dinamizar la búsqueda de materiales y documentarse y acordaron que antes de finalizar el curso debían tener todo a punto para comenzar el curso que viene con un nuevo modelo de propuesta.

Tabla 199. Grupo de discusión – Juego heurístico post formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-3	HV	Claro, el juego heurístico que hacíamos nosotros no tenía nada que ver con lo que hemos visto en la formación. Nosotros hace mucho tiempo que no hacemos sesiones de juego heurístico así y, cuando les ponemos elementos heurísticos ponemos siempre los mismos. La huchas y las tapas o las anillas. Podemos seguir ofreciendo las huchas que tenemos, pero aparte podemos facilitar sesiones de juego heurístico, en las aulas de 1 a 2 años, con materiales variados, con más elementos para que combinen entre ellos. Necesitamos ampliar mucho más material. (...) Si ponemos otros materiales, esto, que combinen bien, por ejemplo, potes, conos, anillas, chapas, conchas, cadenas, tapones de corcho, cucharas, tubos... no sé, más cosas que se os ocurre...
GD-POST-7	HV	Si materiales que combinen bien entre ellos para que puedan hacer diferentes acciones entre ellos, que den juego. A veces les ponemos cosas que no acaban de funcionar porque no tenemos nada más y claro, que no pueden hacer gran cosa. Tenemos que ampliar el material que tenemos. Podemos hacer una circular a las familias y les pasamos la lista de lo que queremos y que nos traigan cosas. (...) Podemos crear un espacio común, en el almacén o la habitación de cochecitos, donde ponerlo todo. Clasificado y quien quiera hacer una sesión lo va a buscar y lo trae.
GD-POST-9	HV	Botellas. Ángel también enseñó muchas sesiones con botellas y con tetrabriks de leche. A mi estéticamente no me gustaba, pero jugaban mucho. (...) También podemos ir a buscar nosotros cosas, también. Y entre todos enseguida podemos tener muchas cosas. ¿Dónde lo ponemos? (...) Podemos hacer una comisión que se encargue de buscar la información, la circular, el espacio y, como siempre, que vaya

impulsando, seguimiento. Así seguro que lo hacemos y no queda a medias.

En las observaciones no participantes, se observa qué materiales usar y cómo los han preparado en la escuela de la Serra Sanferm. La Figura 188, muestra la preparación de una de las sesiones. En diferentes alfombras ponen tubos transparentes con un detalle de color verde, azul, naranja y amarillo, maderas de distintos colores, en combinación con los potes, unas cintas negras de diferentes longitudes y unas telas de color amarillo, azul y rojo.

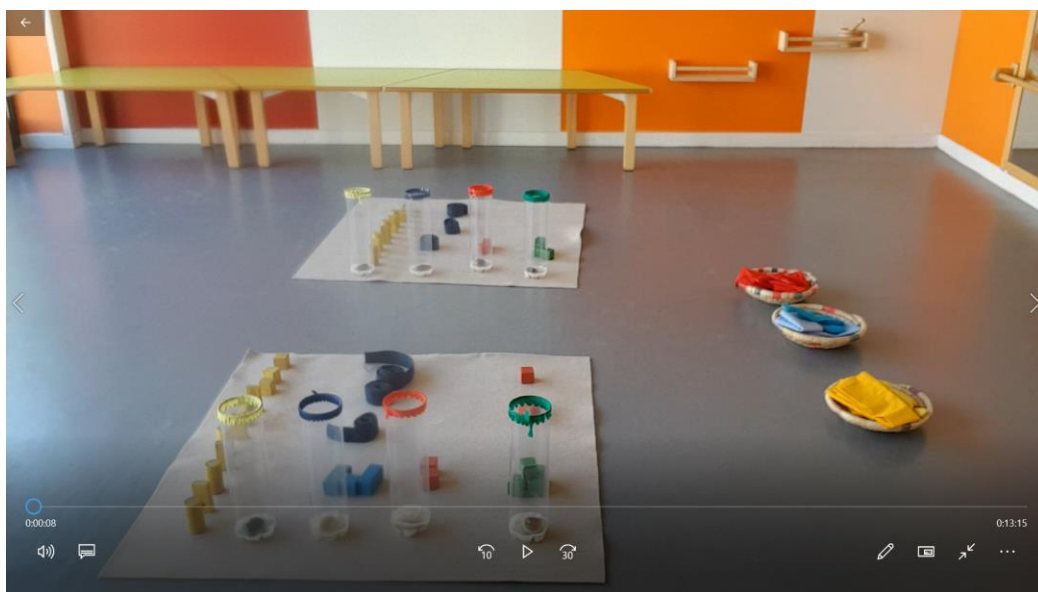


Figura 188. EBMV_SS_PRE_1-2aG_s5. Fuente EBMV Serra Sanferm.

La Figura 188 muestra como el profesional ha preparado los materiales respondiendo a los criterios estéticos, con cierta polisensorialidad, una correcta iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza, orden y intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, polivalencia y seguridad. Aun así, el criterio de manipulación sigue sin acabar de garantizarse en su máxima expresión en tanto que la combinación de los elementos no es muy variada. En este sentido, los niños pueden meter y sacar elementos de los potes, hacer torres con las piezas, o alinearlas con las cintas y taparlas o destaparlas con las telas. Añadir nuevos materiales, desde el punto de vista del

juego heurístico, puede facilitar mayor polisensorialidad y, además, facilitar otras acciones, retos e hipótesis.

El desarrollo de esta sesión, se presentará en el apartado siguiente referente al conocimiento sobre el papel del adulto que proporcionará una visión global y detallada de la sesión.

Del cuestionario y como muestra la Figura 189, destaca que después de la formación, aparecen prácticamente todos los contenidos identificados menos la distinción de nombres escritos y la identificación del tiempo. También, siguen apareciendo contenidos poco frecuentes como la observación de cambios cualitativos (25%) junto a las seriaciones, correspondencias y ordenaciones cualitativas, cuantitativas, por forma y de atributos mensurables con valores inferiores al 20%.

Con mayor frecuencia aparecen el reconocimiento de los atributos mensurables (65.60%), las clasificaciones cualitativas (60%) y las agrupaciones cualitativas (50%).

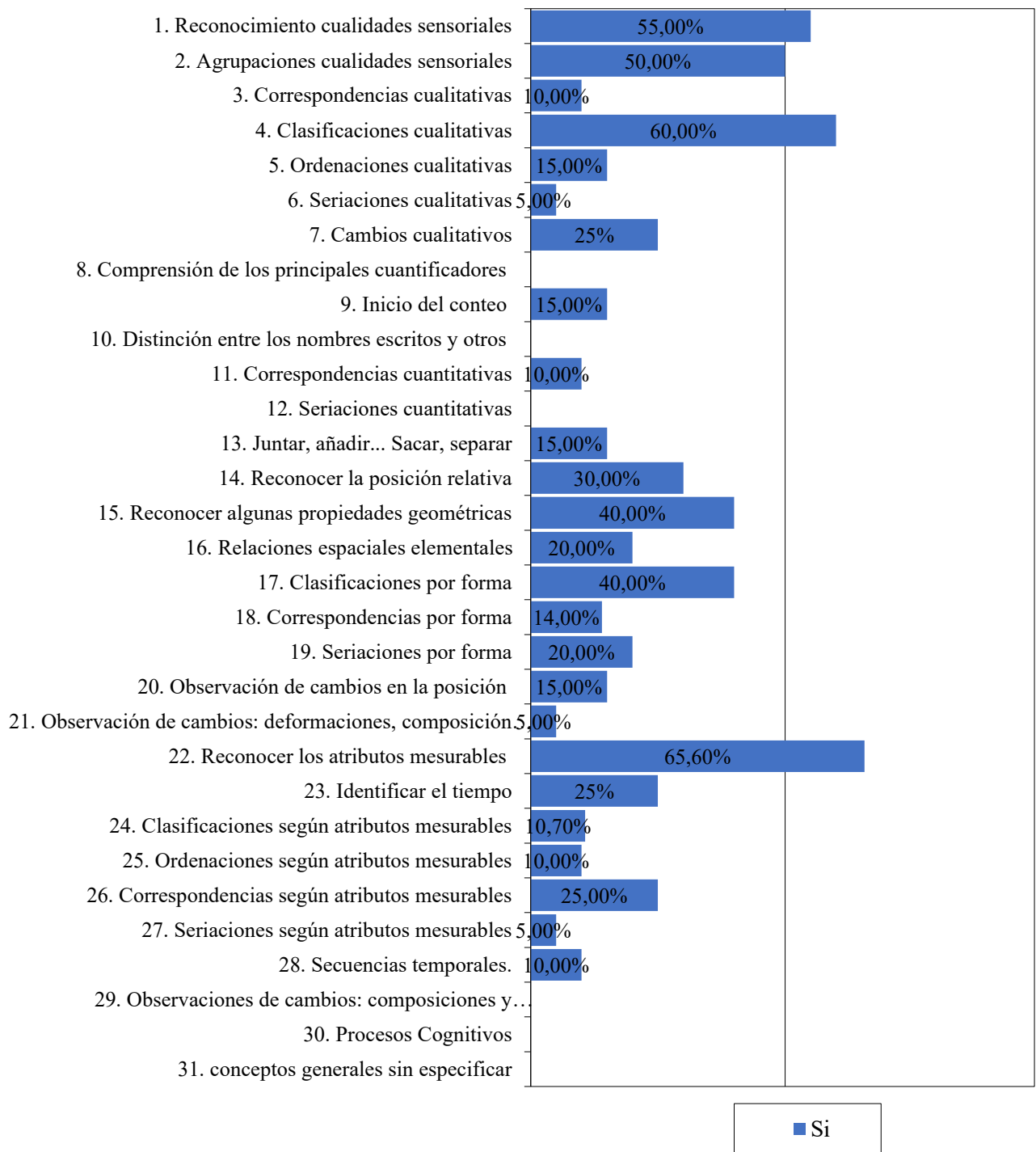


Figura 189. Contenidos detectados por los profesionales en las imágenes de juego heurístico después de la formación.

Comparando los contenidos detectados antes y después de la formación se observan unos resultados muy dispares (Figura 190). Por un lado, después de la formación, aparecen prácticamente todos los contenidos identificados menos la distinción de nombres escritos y la identificación del tiempo mientras que, antes de la formación, había contenidos poco visibles o invisibles. También, siguen apareciendo contenidos poco frecuentes como la observación de cambios cualitativos (25%).

Por otro lado, destacan con frecuencia algunos contenidos que antes de la formación no aparecían: el reconocimiento de los atributos mensurables (65.60%), las clasificaciones cualitativas (60%) y las agrupaciones cualitativas (50%).

Siguen apareciendo algunos contenidos poco frecuentes. Por ejemplo: las seriaciones, correspondencias y ordenaciones cualitativas, cuantitativas, por forma y de atributos mensurables con valores inferiores al 20%.

Finalmente, se encuentran bastantes contenidos que antes de la formación destacan más que después de la formación. El reconocimiento de la posición relativa pasa de 67% a 30%; el reconocimiento de las cualidades sensoriales pasa de 61% a 55%; reconocimiento de las propiedades geométricas de 50% a 40% al igual que las clasificaciones por forma, la observación de cambios en atributos mensurables pasa de 39% a 10% y, finalmente, el inicio del conteo de 39% al 10%.

Cabe destacar también que los procesos cognitivos y los conceptos generales desaparecen.

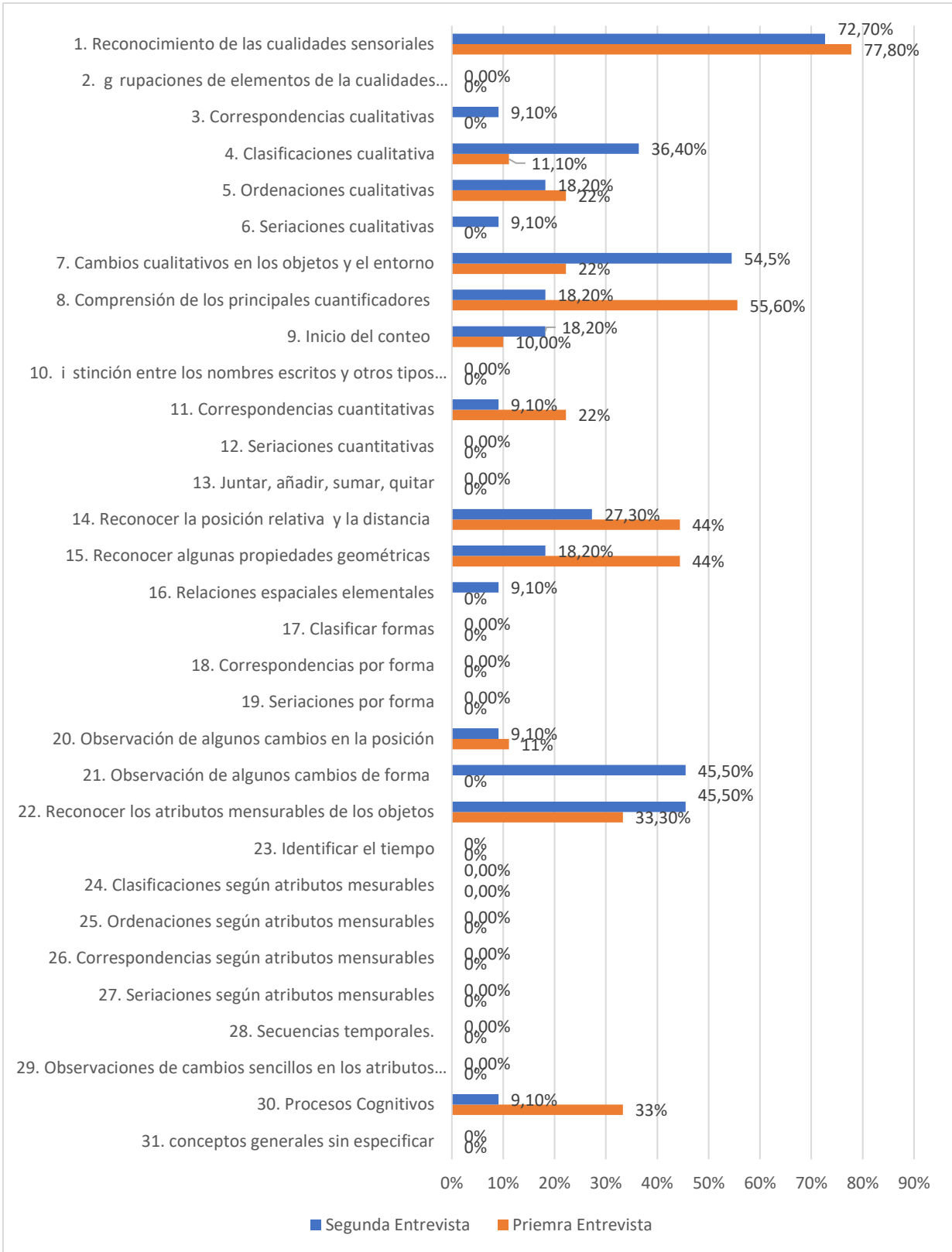


Figura 190. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Juego Heurístico.

Juego Simbólico. Referente al grupo de discusión, cabe destacar que, después de la formación, tampoco hubo tiempo de compartir las reflexiones de este espacio de juego. No se recogió ninguna observación no participante de este espacio ya que los profesionales no facilitaron ninguna sesión para su análisis. Por ello, la información que se presenta nace únicamente del cuestionario.

Como muestra la Figura 191, se desprende que después de la formación existen muchos contenidos poco detectados o invisibles en este espacio. Los profesionales detectaron con mayor frecuencia solo dos contenidos en este espacio: el reconocimiento de los principales cuantificadores (70%), seguido del reconocimiento de las cualidades sensoriales (60%).

Con valores aproximados entre el 40% y el 50%, destacan las correspondencias cualitativas (40%) y cuantitativas (50%), el inicio del conteo (40%) y el reconocimiento de los atributos mensurables (50%).

Con un 30% aparece el reconocimiento de la posición relativa.

Con valores de 20% destacan las clasificaciones de atributos mensurables, la observación de cambios en los atributos mensurables y de la posición y las clasificaciones cualitativas.

Con valores de 10% se encuentran las correspondencias por formas, el reconocimiento de las propiedades geométricas y las ordenaciones y correspondencias de atributos mensurables.

Los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.

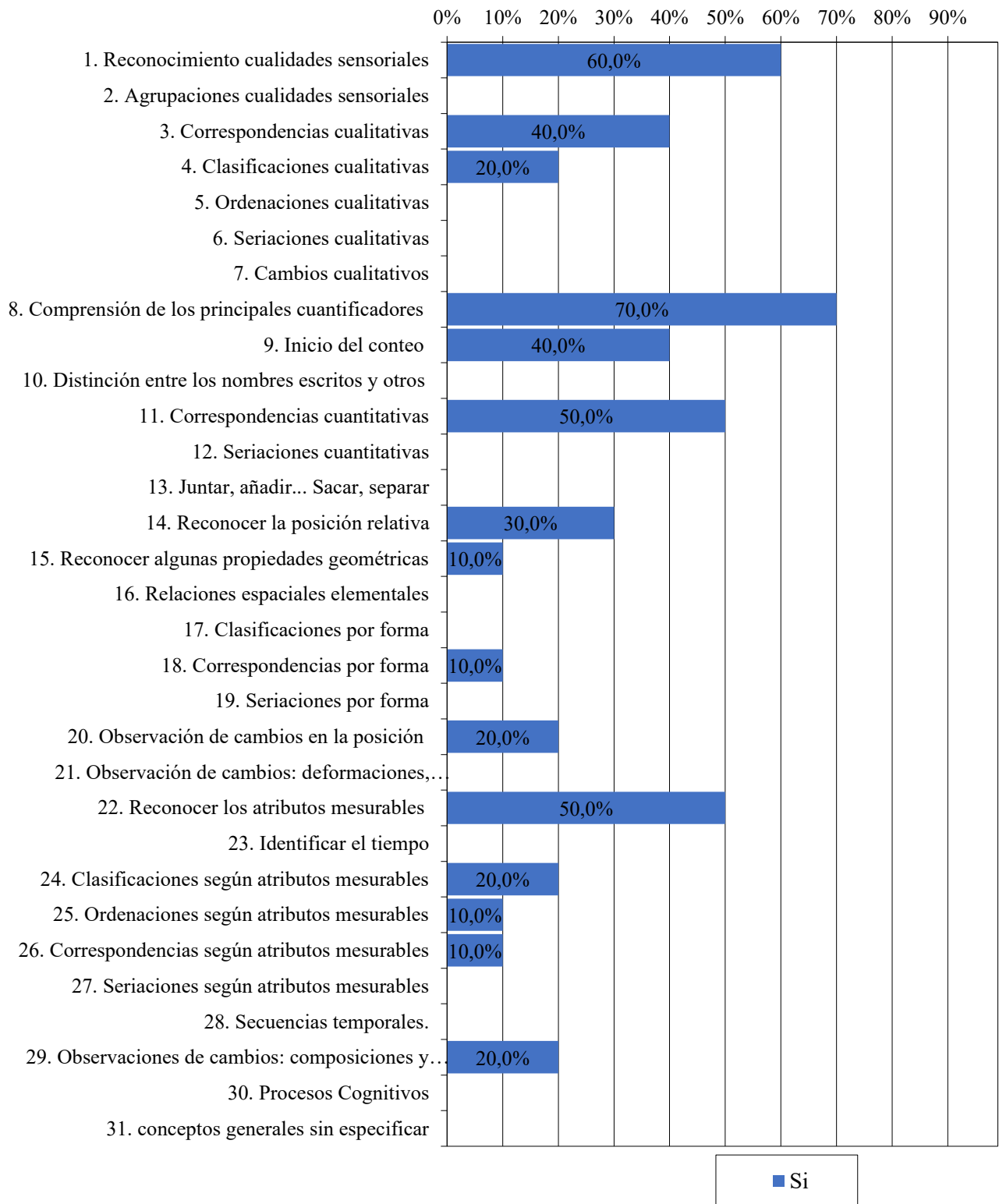


Figura 191. Contenidos destacados por los profesionales en las imágenes de juego simbólico, después de la formación.

Comparando los contenidos detectados antes y después de la formación como muestra la Figura 192, se observa que algunos contenidos han aumentado sensiblemente, otros han aparecido con fuerte presencia y otros han disminuido. En general, se considera que han aumentado ya que aparecen algunos contenidos con fuerza, como por ejemplo el reconocimiento de los principales cuantificadores (70%) y las correspondencias cualitativas (40%). También, en menor medida, las clasificaciones cualitativas y el reconocimiento de los atributos mensurables (20%) junto a las ordenaciones y correspondencias según atributos mensurables (10%).

Además, aumenta sensiblemente la observación de cambios según atributos mensurables, pasando de 11% al 20%; la observación de cambios según las cualidades sensoriales de 55,6% a 60% y las correspondencias cualitativas de 40% a 50%.

Contrariamente, se encuentran también 6 contenidos de los que bajan sus valores de aparición después de la formación. Concretamente, el reconocimiento de los atributos mensurables pasa de 88.9% a 50% junto al inicio del conteo que pasa de 77.8% a 40%. Con valores más parecidos, la identificación de la posición y de las propiedades geométricas elementales pasan de 44% a 33% y de 44% a 10%, respectivamente. Finalmente, la observación cambios en los atributos mensurables pasan de 22% a 10%.

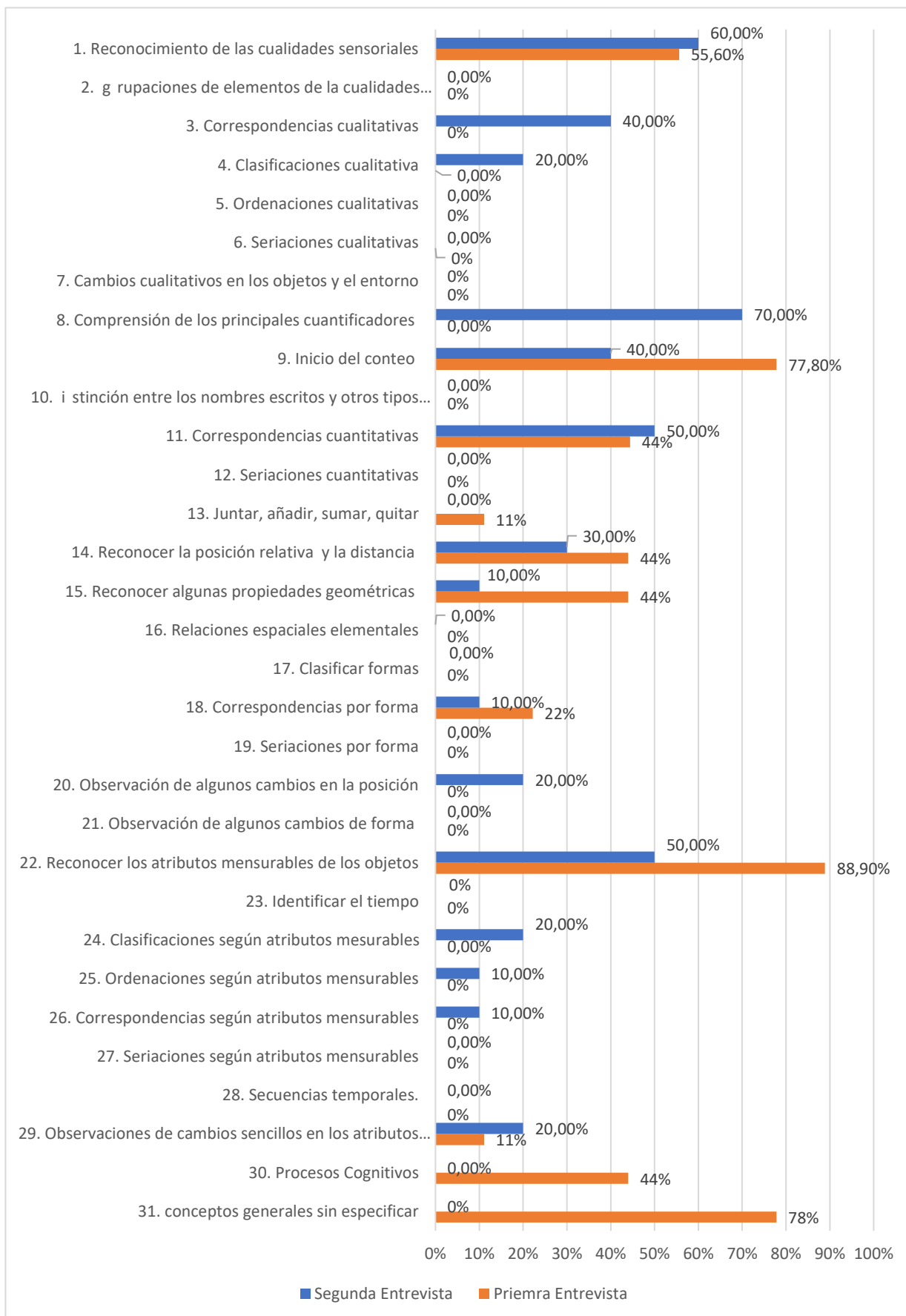


Figura 192. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Juego Simbólico.

Movimiento. En relación con el espacio de movimiento y referente al grupo de discusión, cabe destacar que después de la formación no hubo tiempo de compartir las reflexiones de este espacio de juego. Los profesionales tampoco facilitaron filmaciones para desarrollar el análisis mediante las observaciones no participantes. Por ello, la información que se presenta nace únicamente del cuestionario.

Como muestra la Figura 193, después de la formación siguen siendo pocos los contenidos y capacidades que se identifican en el espacio de movimiento. Destacan con un 75% el reconocimiento de la posición relativa y la distancia y con un 62.5% el reconocimiento de las propiedades geométricas y de los atributos mensurables y la observación de los cambios de posición.

Con un 25% apunta la comprensión de los principales cuantificadores y con frecuencias mucho inferiores, 12.5%, se encuentran las ordenaciones de atributos mensurables y el reconocimiento de las cualidades sensoriales.

Los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.

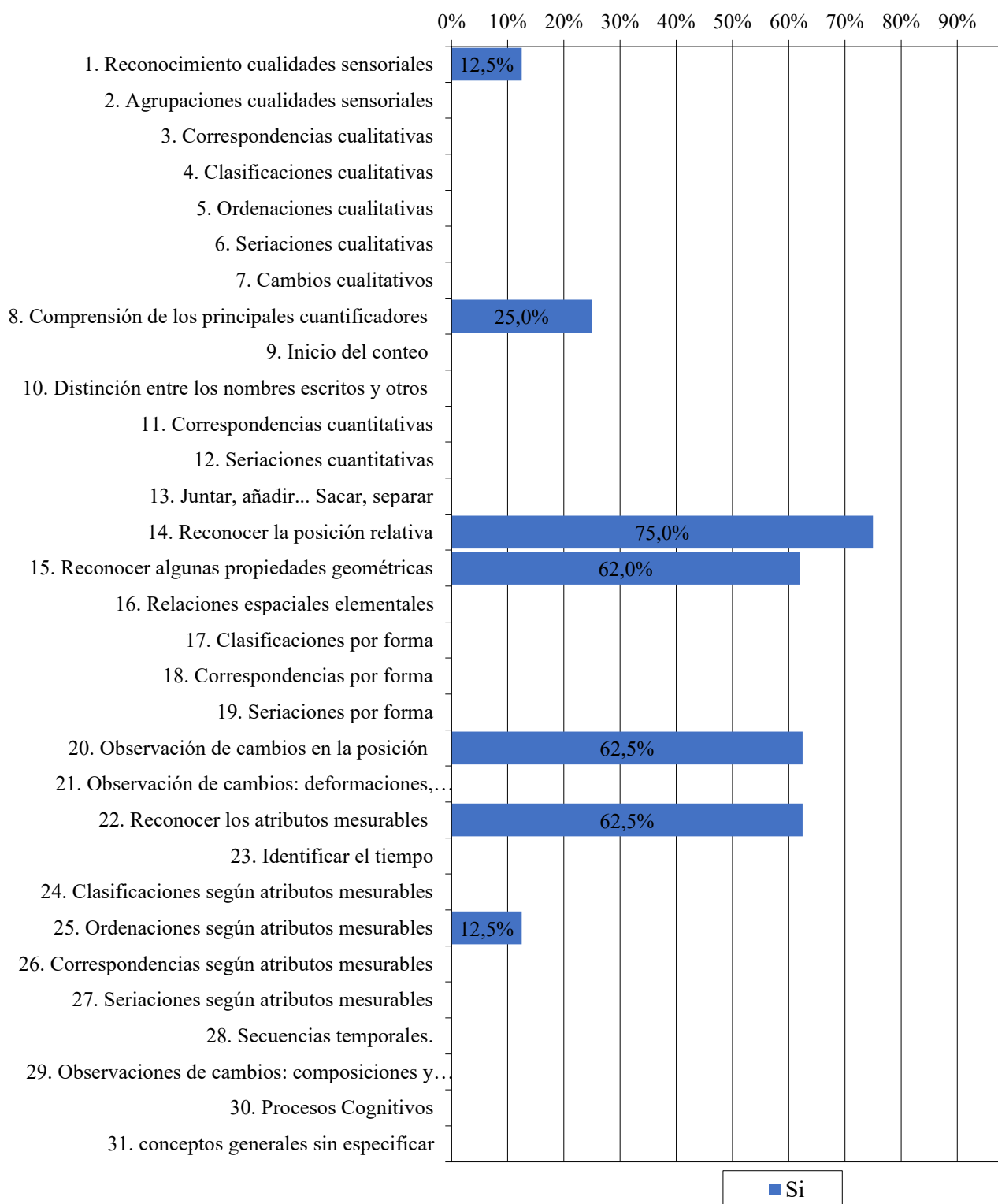


Figura 193. Contenidos detectados por los profesionales en las imágenes de movimiento, después de la formación.

Comparando los contenidos detectados antes y después de la formación como muestra la Figura 194, se observa que aumentan los contenidos detectados en este espacio de juego. Por un lado, se recoge que la frecuencia de aparición de algunos contenidos aumenta sensiblemente. Por ejemplo, la observación de cambios en la posición pasa de 40% a 62.5% y del mismo modo lo hace el reconocimiento de las propiedades geométricas (40%-62.5%). Con mayor frecuencia de aparición, el reconocimiento de la posición relativa pasa de 60% a 75%.

Por otro lado, aparecen algunos contenidos que no habían sido detectados antes de la formación. Con mucha frecuencia, el reconocimiento de los atributos mensurables (62%). Con menor frecuencia, la comprensión de los principales cuantificadores (25%), las clasificaciones cualitativas (20%), las ordenaciones según atributos mensurables (12%) y las correspondencias según atributos mensurables (10%).

Finalmente, destaca que antes de la formación aparecían los contenidos de correspondencias según las cualidades sensoriales con un 10% que desaparece después de la formación. También, los contenidos vinculados al reconocimiento de las cualidades sensoriales bajan su aparición pasando de 40% al 12.5%.

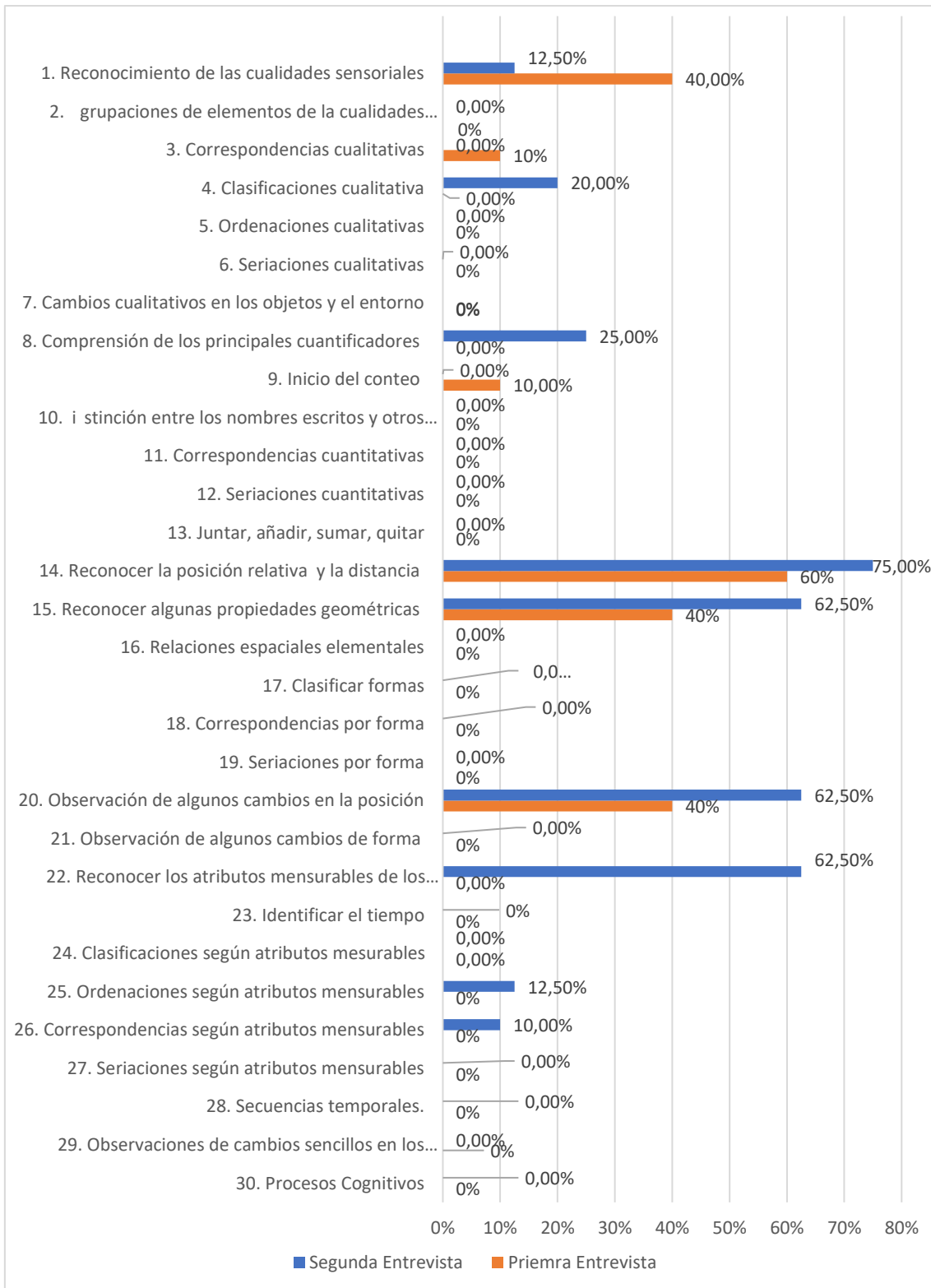


Figura 194. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio de Movimiento.

Mesas de experimentación. Referente al grupo de discusión y como se recoge en la Tabla 200, los profesionales explicaron que después de la formación consolidaban la idea de ofrecer este tipo de material a niños menores de 2 años. En este sentido, antes de la formación compartían el debate de si era pertinente o no. Después de la formación, exponen haber reforzado la idea de no establecer edades y valorar el momento evolutivo del niño y del grupo en cada propuesta.

También debaten sobre los materiales que pueden ofrecer dentro de la mesa volviendo a salir el cuestionamiento sobre la ética si utilizar o no alimentos para su exploración. Manifiestan que el proyecto educativo de las EBMV no contempla la utilización de alimentos para su exploración, pero que la variedad de recursos con los que podrían contar si se modificase este parámetro sería más amplio y rico. Acuerdan que ampliaran la gama de materiales que ahora ponen y que ofrecerán algunos alimentos en seco que pueden reutilizarse muchas veces para minimizar el impacto en beneficio de la sostenibilidad.

Como ejemplo de los materiales que destacan exponen: las pieles de naranja y añaden las de limón, las vainas de guisantes, las mazorcas de maíz, el arroz, los diferentes tipos de arena (de playa, negra, blanca y roja), las avellanas, las castañas, las hojas y las bellotas en la época de otoño y las flores, plantas aromáticas y otras hierbas en la primavera, entre otros. Dedicaron gran parte del tiempo a debatir sobre qué materiales podían seleccionar y ofrecer a los niños. No profundizaron en las acciones que podían hacer los niños, ni tampoco en qué se fundamentaban para preparar los materiales.

Tabla 200. Grupo de discusión – mesa de experimentación post formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-1	HV	Las mesas de experimentación son un espacio con muchas posibilidades. La lastima es que no podemos utilizar alimentos. La sal es perjudicial para la salud y los otros alimentos no los podemos usar porque pedagógicamente no podemos. En la formación vimos que usaban materiales que aquí no podemos usar, pero tenemos que encontrar otros materiales para no estar poniendo siempre lo mismo. (...)
GD-POST-5	HV	Si pensamos hay muchos: piles de naranjas, podemos poner de limón, mandarina, frutos de otoño castañas, bellotas, avellanas, hojas, palos, piedras, etc. También podemos poner algunos alimentos que duren mucho tiempo, arroz, o las mazorcas de maíz. (...)
GD-POST-12	HV	Sí y hay tierra de muchos colores diferentes: negra, roja, blanca, de playa y de diferentes grosores. En primavera podemos poner flores y plantas aromáticas con tijeras. También podemos poner girasoles, en Caputxins los utilizan.

En las observaciones no participantes, realizadas al grupo de 1-2 años de EBMV Caputxins, se observa el juego de exploración que realizan niños de 18 a 24 meses. Los profesionales ponen una mesa de experimentación con un montón de naranjas secas, a trozos y molida. Como muestra la Figura 195, los materiales que disponen para explorar la piel de la naranja son cuencos y cucharas de metal y de madera de diferentes tamaños, mazos de mortero de diferente grosor y medias cañas o dispensadores de grano a granel de madera.

La presentación del espacio y la disposición del material responde a los criterios de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética belleza y naturaleza, orden e intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, polivalencia y seguridad. Los espacios están bien delimitados y presentados, y son atractivos en tanto que los niños se acercan a explorarlos y desarrollan concentrados su juego. El desarrollo de la sesión se presenta ampliamente desgranado en el apartado 5.4.3 en el que se podrá comprobar cómo gozan los niños y lo concentrados que están en su juego de exploración con este material, y, a su vez, la intervención del profesional que acompaña.



Figura 195. EBMV_C_POST_1-2aG_s3.

En el cuestionario y como representa la Figura 196, se recoge que sigue habiendo mucha más frecuencia de aparición en algunos contenidos respecto a otros y aparecen muchos contenidos sin identificar. En primer lugar, destaca con un 100% de profesionales que identifican el contenido de reconocimiento de las cualidades sensoriales. Con bastante frecuencia (87.5%) aparecen los contenidos de reconocimiento de atributos mensurables y la observación de cambios en los atributos mensurables. Con menor frecuencia, con un 50%, surgen las clasificaciones cualitativas. Por debajo, con 37.5%, el reconocimiento de los principales cuantificadores y la observación de cambios en la posición. Finalmente, con solo un 25%, destaca el inicio del conteo, las acciones de juntar, añadir, separar, restar, etc., y el reconocimiento de la posición relativa y la forma. Por último, muy poco visible, con un 25%, se recogen las agrupaciones según las cualidades sensoriales.

De nuevo, los otros contenidos y capacidades no son considerados por los profesionales.



Figura 196. Contenidos POST destacados en las imágenes de mesas de experimentación.

Comparando los contenidos detectados antes y después de la formación como muestra la Figura 197, se observa que los contenidos detectados en este espacio de juego aumentan en prácticamente todos los contenidos detectados antes de la formación y aparecen algunos nuevos. Por ejemplo, la observación de cambios en los atributos mensurables pasa de 40% a 87.5% y del mismo modo lo hace el reconocimiento de las propiedades geométricas de 40% a 100%. Con menor frecuencia de aparición, las clasificaciones cualitativas pasan de 20% a 50% y el reconocimiento de la posición relativa pasa de 10% a 25%. también aumentan sensiblemente la observación de cambios de posición (10% a 37%), el reconocimiento de la posición relativa y la distancia (20% a 25%) y el reconocimiento de los atributos mensurables (80% a 87.5%).

Hay que destacar también, algunos contenidos que aparecen tímidamente que antes no aparecían. Las correspondencias cuantitativas y las acciones de añadir, juntar, sumar, restar, quitar, dividir, etc., aparecen con un 25%. Y las acciones de agrupar elementos con un 12.5%.

Finalmente, se recogen algunos contenidos que bajan sensiblemente su frecuencia de aparición, como por ejemplo el inicio del conteo que pasa de 30% a 25% y el reconocimiento de los principales cuantificadores que pasa de 40% a 37.5%.

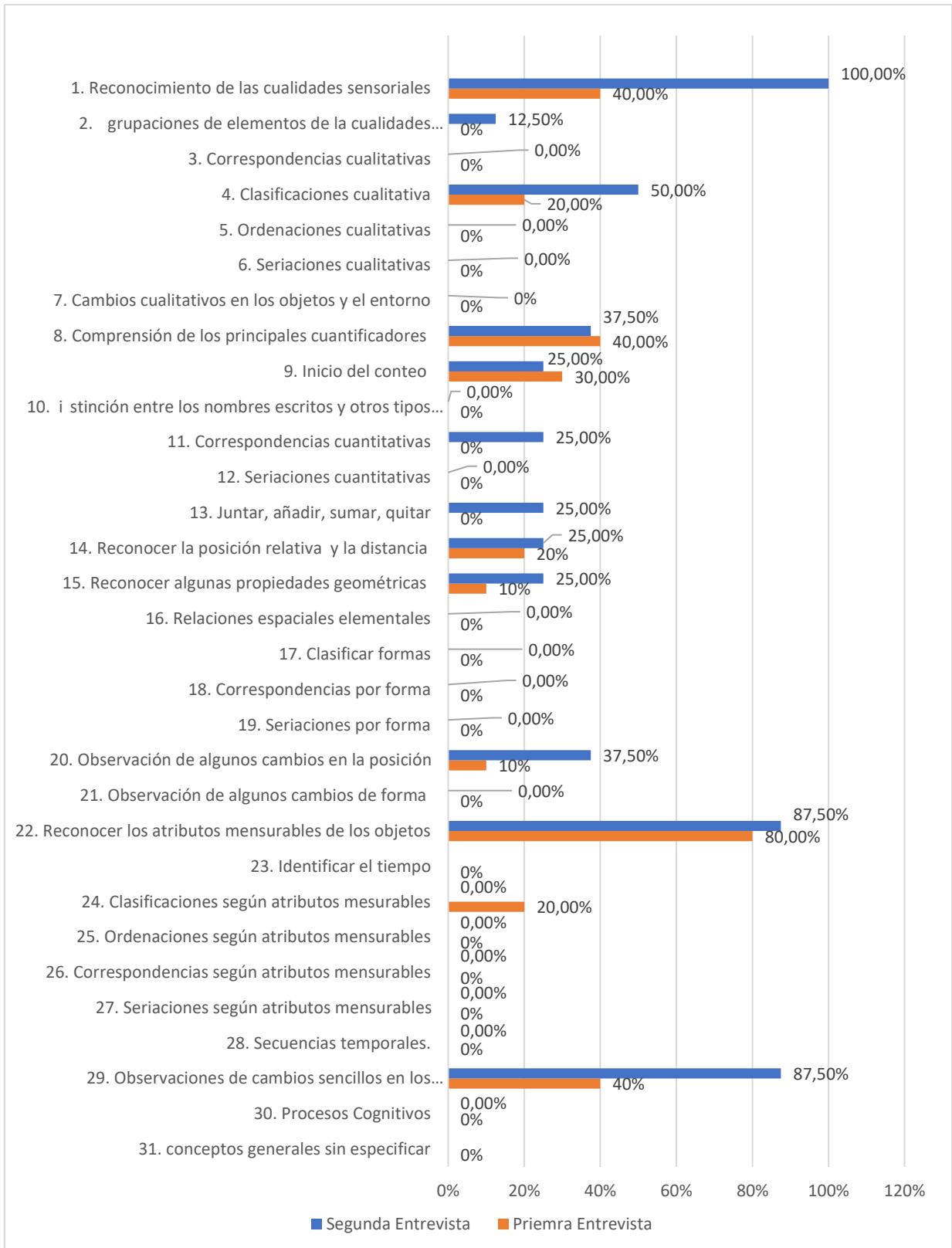


Figura 197. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en las mesas de experimentación.

Espacio de exploración. Respecto al espacio de exploración y en cuanto al grupo de discusión, cabe destacar que después de la formación no hubo tiempo a compartir las reflexiones de este espacio de juego. Tampoco se tuvo acceso a observaciones no participantes en tanto que ningún profesional valoró filmar una propuesta así. Por ello, la información que se presenta nace únicamente del cuestionario. Como muestra la Figura 198, los contenidos mayormente identificados son: el reconocimiento de las cualidades sensoriales (90%), las agrupaciones cualitativas (72.7%) y el reconocimiento de los atributos mensurables (63.6%).

Con mucha menos intensidad, aparecen las clasificaciones cualitativas y el reconocimiento de la distancia y la posición relativa (36.4%).

Por debajo del 30% se encuentran el reconocimiento de los principales cuantificadores y la observación de cambios en la posición (27.3%).

Por debajo de 20%, con un 18.2%, se recogen las seriaciones cualitativas, las acciones de añadir, juntar, sumar, restar, separar, quitar, etc. Y el reconocimiento de las propiedades geométricas.

Finalmente, inferior al 10%, con un 9.1%, se observa la comprensión de los principales cuantificadores, las ordenaciones cualitativas, la observación de cambios cualitativos y las clasificaciones según atributos mensurables.

Los otros contenidos y capacidades no son identificados por los profesionales.



Figura 198. Contenidos POST destacados en las imágenes de espacios de exploración.

Comparando los contenidos detectados antes y después de la formación como muestra la Figura 199, se observa que aparecen contenidos nuevos. Aun así, los que ya existían antes de la formación, menos el reconocimiento de las cualidades sensoriales, disminuyen en su frecuencia de aparición. Concretamente, el reconocimiento de las cualidades sensoriales pasa de 50% a un 90% de frecuencia. Las agrupaciones cualitativas (72.7%) y el reconocimiento de los atributos mensurables (63.6%) antes de la formación no se identificaban. Lo mismo ocurre con las clasificaciones cualitativas (36.4%), la comprensión de los principales cuantificadores (27.3%), las acciones de añadir, juntar, sumar, restar, separar, quitar, etc. (18.2%) o las ordenaciones y seriaciones cualitativas (9.1%).

Por otro lado, algunos contenidos desaparecen después de la formación o baja su frecuencia de aparición. Por ejemplo, la observación de cambios en los atributos mensurables, antes de la formación tenía un 60% de recurrencia y después, ningún profesional lo indica. El reconocimiento de la posición relativa pasa de 60% a 36.4% y el reconocer las formas geométricas pasa de 60% a 18.2%.



Figura 199. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el juego de exploración.

Espacio de construcción. Respecto al espacio de construcción en el grupo de discusión y como muestra la Tabla 201, se comparte que, aunque no han visto en la formación un espacio de construcciones como del que disponen en las EBMV, han podido descubrir que este tipo de material no siempre funciona. Destacan la importancia de seleccionar bien el material e iniciar algunas propuestas pensado en las posibles acciones que podrán ejecutar los niños. También explican la importancia de ser el modelo y ser un apoyo para el juego del niño o iniciar dejar las propuestas plateadas con juegos iniciados, para que los niños puedan completar las acciones y a partir de ahí, desarrollar más. Al mismo tiempo, explican cómo la formación les ha ayudado a incorporar conocimientos sobre qué acciones podrán hacer los niños con estos materiales y que todo ello ha facilitado que pudiesen plantear mejor las propuestas e incluso acompañar mejor el juego de los niños.

Tabla 201. Grupo de discusión – construcciones después de la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-6	HV	No recuerdo exactamente haber planteado nada concreto o específico en la formación sobre las construcciones. Es que no se si vimos un espacio, así como lo tenemos nosotros. Yo no recuerdo. O sea, que os niños hacían construcciones si, por ejemplo, recuerdo las torres con los envases de leche. Pero no recuerdo un espacio de construcciones propiamente. Lo que si, viendo todas las acciones de la rúbrica, puedes pensar mejor como pones los materiales en la tarima para favorecer según qué acciones como por ejemplo algunos patrones simples. O yo pongo ahora muchas veces las cosas con simetrías o por parejas y dejo algunas por acabar de completar. Luego ellos lo van acabando y hacen nuevas.
GD-POST-9	HV	Con las instalaciones artísticas también hacían construcciones, pero es verdad que no recuerdo yo tampoco un espacio así. Lo que sí, es que hemos podido ver como los niños pueden hacer muchas cosas con las construcciones pero que nosotros tenemos que estar ahí. Acompañarlos y hacer de modelo porque sino es un espacio que cuesta. No siempre se disponen a jugar por eso la presentación de los materiales con propuestas iniciadas y nuestro apoyo es importante. Luego cuando ya han cogido ritmo, cuando ya han encontrado el jugo, pueden estar mucho rato, es brutal lo que acaban haciendo, pero hay que pensar muy bien el material y estar presente al comienzo.
GD-POST-12	HV	Yo creo que lo que nos ha aportado mucho la formación es poder ver que con los materiales de construcciones pueden hacer cosas como hace filas, aparear por cantidades o por colores o por formas, las primeras seriaciones, aunque muy simples y con errores, las torres y montar y desmontar, comprobar los pesos, las formas... claro ello hace que pienses el material diferente porque puedes ver la acción que harán. Y también que los acompañes diferente, ahora más o menos podemos hacer otras afirmaciones con más sentidos, más allá de qué bien o qué bonito. Aun me cuesta eh por eso.

Como muestra la Figura 201, se observan diferentes espacios de construcciones de las 3 EBMV que ocupan un lugar del aula de 2 a 3 años. En estos se presenta un espacio delimitado con un soporte; como por ejemplo una tarima o una mesa baja, junto a un mueble con piezas de madera de diferentes formas, tamaños y pesos clasificadas o propuestas de juego iniciadas. En el caso de la EBMV Serra Sanferm y Caputxins junto a estas piezas, en la tarima se presentan animales de la selva. En el caso de la Serra, justo delante de las construcciones, hay unas vías de tren y unos trenes y al lado una mesa con un espejo y otros cubos de madera de diferentes colores.

Analizando los criterios para el diseño de los espacios y materiales referenciados teóricamente y como muestra la Figura 200, se considera que los profesionales preparan los espacios del aula respondiendo a los criterios de polisensorialidad, iluminación, autonomía, estética, belleza y naturaleza, orden e intencionalidad, colectividad e individualidad, transformación, adaptabilidad, manipulación, polivalencia y seguridad. En el caso de la Serra, los espacios no acaban de estar del todo delimitados o bien presentados, en tanto que las vías del tren están muy cerca la tarima de construcciones. Durante la observación no participante, se recoge cómo esas vías permanecen en el suelo toda la sesión y prácticamente ningún niño acaba jugando con ellas; los que están en la tarima, al desplazarse alrededor, las pisan o las saltan.



Figura 200. EBMV_SS_POST_2-3aX_s5. Fuente: EBMV Serra Sanferm, Horta Vermella y Caputxins.

Durante las diferentes sesiones que se presenta ampliamente detalladas en el siguiente apartado (5.4.3 conocimientos sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto), el profesional ha permanecido al lado de los niños, observando su juego e interactuando con ellos y formulándoles preguntas o apoyando sus acciones.

Los datos obtenidos mediante el cuestionario en relación con el espacio de construcciones no pueden tomarse como referentes para analizar el impacto de la formación ya que, después de la formación, solo dos participantes analizaron este espacio por falta de tiempo. Al extenderse más en el desarrollo del análisis de los otros espacios, los participantes no tuvieron tiempo de finalizar el cuestionario. Por ello, no es pertinente establecer una comparativa entre el antes y el después debido al sesgo existente.

En este sentido, se destaca que ambos participantes coinciden en su análisis e identifican los mismos contenidos: las agrupaciones de elementos según sus cualidades sensoriales, las correspondencias, las clasificaciones, ordenaciones y seriaciones cualitativas, las comprensión de los principales cuantificadores, las correspondencias, seriaciones y observaciones de cambio de tipo cuantitativo, el reconocimiento de la posición, la distancia y las clasificaciones y seriaciones por forma y las observaciones de cambios en la distancia.

Los únicos contenidos en los que difieren son la identificación de cambios de tipo cualitativo, en la distinción de nombres escritos y otras formas de expresión, en las correspondencias por forma y en la observación de cambios a partir de las composiciones y descomposiciones, capacidades que identifica solo uno de los dos profesionales.

Los otros contenidos no son identificados por ninguno de los dos.

Taller o Atelier. En cuanto al espacio de taller, en el grupo de discusión no se pudo reflexionar sobre este tipo de propuesta por falta de tiempo. Tampoco se dispone de observaciones no participantes en tanto que los profesionales priorizaron el análisis de otros espacios a diferencia de antes de la formación que si lo consideraron. Por ello, únicamente se presentará la información perteneciente al cuestionario

Referente a los datos del cuestionario y como presenta la Figura 201, los contenidos y capacidades detectados se reparten entre el reconocimiento de las cualidades sensoriales (72.7%). En segundo lugar, aparece la observación de cambios de tipo cualitativo (54.5%).

A continuación, con la misma frecuencia, un 45%, aparecen los contenidos vinculados a la observación de cambios en las formas y al reconocimiento de los atributos mensurables. Por debajo del 30% aparece el reconocimiento de la posición relativa (27.3%) y por debajo de 20% el inicio del conteo y el reconocimiento de las propiedades geométricas elementales (18.2%). Finalmente, por debajo de 10%, con un 9.1%, se encuentra las correspondencias y seriaciones cualitativas, las correspondencias cuantitativas, las clasificaciones por forma y la observación de cambios en la posición y otros procesos cognitivos.



Figura 201. Contenidos detectados por los profesionales en las imágenes de taller después de la formación.

Comparando los contenidos detectados antes y después de la formación, como muestra la Figura 202, se observa que los contenidos detectados en este espacio de creación disminuyen en prácticamente todos los contenidos detectados antes de la formación y aparecen algunos nuevos.

Por ejemplo, bajan sensiblemente: el reconocimiento de las cualidades sensoriales que pasa de 77.8% a 72.7%, las ordenaciones cualitativas que van de 22% a 18.20%, las correspondencias cualitativas del 22% a 9% y los cambios de posición del 11% al 9.10%. Bajan con mayor intensidad el reconocimiento de la posición relativa y la distancia, de 44% a 27% y el reconocimiento de las propiedades geométricas elementales, del 44% al 18.20% junto a los procesos cognitivos del 33% al 9.1%.

De otro modo, aumentan sensiblemente el inicio del conteo, pasando de un 10% a un 18.2% y el reconocimiento de los atributos mensurables de un 33.30% a un 45.50%.

Aumentan en mayor medida las clasificaciones cualitativas, de un 11.1% pasan a un 36.40% y las observaciones de los cambios cualitativos, de 11.1% a 36.40%.

Finalmente, aparecen tímidamente después de la formación, las relaciones espaciales elementales, las seriaciones y correspondencias cualitativas, todos ellos con un 9.10%.



Figura 202. Contenidos detectados por los profesionales PRE – POST en el espacio del taller.

5.4.3 Conocimiento sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto

La visión de los profesionales de las EBMV sobre su papel e intervención durante el desarrollo del juego de los niños ha cambiado después de la formación. Antes de la formación, una gran mayoría consideraba que su papel consistía fundamentalmente en acompañar a los niños desde la observación, interviniendo básicamente en los momentos en que surgía algún conflicto o de gestión de aula. Así se describía en el grupo de discusión previo a la formación y se recogía en la mayoría de las observaciones no participantes. La idea de acompañar el juego de los niños desde su misma altura, sentados en el suelo, observando las acciones que llevan a cabo, gestionando los conflictos que puedan aparecer, reordenando los espacios y los materiales cuando se van desordenando y acompañando a los niños, pero sin interferir o irrumpir en su juego. En este sentido, destacaban la importancia de no irrumpir el juego de los niños, ni romper su creatividad o acción. También, destacaban la importancia de documentar las acciones de los niños mediante fotografías para poder hacer las visualizaciones que se ofrecen a las familias.

Como se describe en la Tabla 202, han modificado las creencias sobre su rol en tanto que reconocen tener un papel fundamental en las posibles intervenciones que pueden aportar a los niños durante sus creaciones y juegos. De este modo, exponen haber recogido de la formación la importancia de formular buenas preguntas que sirvan de apoyo para los niños y poder ampliar aún más sus conocimientos para facilitarles la construcción del pensamiento matemático. Exponen que estas buenas preguntas han de ser formuladas en el momento adecuado y sin excederse ni intervenir en la acción del niño. Es decir, hay que formularlas cuando han acabado la acción para no interrumpir. También, explican la complejidad de hacer buenas preguntas y de encontrar el buen momento. Siguen destacando la importancia de su trabajo previo, en la preparación de los espacios y materiales y la observación como elemento clave para saber disponer los espacios y materiales adecuados acorde las diferentes necesidades de los niños y del grupo. Por último, refuerzan la importancia de la documentación, no solo con carácter informativo, sino también pedagógico y reflexionan sobre la importancia de mejorar sus documentaciones en sus prácticas.

Tabla 202. Grupo de discusión –el papel del adulto, reflexiones después de la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-11	HV	<p>Con la formación me he dado cuenta del cambio en la mirada que tengo que hacer. Es decir, me explico, yo antes ya estaba presente en aula, pero observaba mucho a los niños y niñas sin interferir. Siempre piensas que no quieres interrumpir aquello que están haciendo. Ángel nos ha hecho ver que no siempre ha de ser así. Que no se trata de interrumpir sino de acompañar. De la importancia de hacer pequeñas intervenciones, las justas, con buenas preguntas o aportaciones que ayuden a ampliar el conocimiento que estás haciendo a reforzarlo. Claro nosotras siempre estábamos calladas. O lo intentas. Bueno sí que hablas con ellos, pero cuando vienen y te dicen cosas, o porqué les felicitas por alguna cosa que has visto que han hecho o que te sorprende...</p>
GD-POST-7	HV	<p>Es importante saber observar y saber observar y saber hacer las intervenciones justas. Yo pensaba como tú, que lo importante era dejarle siempre su espacio y no interferir. Y ahora he visto que es importante acompañar también algunas de sus acciones. Sin pasarse como dice Ángel. Tengo que coger práctica porqué hacer buenas preguntas no es fácil.</p> <p>(...)</p> <p>Es que con las preguntas o las pequeñas intervenciones refuerzas lo que está haciendo y le ayudas a arraigar o fortalecer el conocimiento. Nunca lo había planteado así, siempre era como desde que ellos van construyendo su pensamiento mientras van haciendo. Ver que puedes ayudarles, buscando bien el momento y la intervención, y que es importante, me ha sorprendido y aún tengo que ir asimilándolo. Necesitamos práctica ¿verdad? (risas) ya lo entiendo, pero necesito pensarlas preguntas no me salen.</p>
GD-POST-9	HV	<p>Si estamos en el aula con los niños, de vez en cuando vamos interviniendo en lo que podemos y en momento que pensamos que ya está de la acción. Yo creo que cuando Ángel explica que hay que hacerlas en los buenos momentos y con equilibrio, no todo el rato preguntando, se refiere a cuando justo han acabado una cosa, para ver si puedes estirar del hilo o reforzar lo que acaban de hacer, más allá de felicitarlos. No es fácil.</p> <p>(...)</p> <p>Cuando han acabado, no justo cuando lo están haciendo, para no interrumpir la acción. Es que si le hablas cuando están haciendo una cosa muchas veces la dejan de hacer. Igual que cuando les haces fotos, tienes que ir con cuidado porqué cuando hacemos documentaciones, aunque están muy acostumbrados, a veces dejan de hacer lo que estaban haciendo porqué te ven.</p> <p>(...)</p> <p>Las buenas preguntas no siempre las tienes. A veces les dices cosas muy obvias, repites los colores o lo que acaban de hacer. A mí no siempre me salen buenas preguntas. Es que a veces no se me ocurren.</p>
GD-POST-1	HV	<p>Si el tema de las documentaciones es también muy importante. Es la observación que hacemos documentada. Y tenemos que observar, estar presentes, conscientes. Tenemos trabajo aquí, porqué aun vamos documentando pensado en las libretas o en las reuniones de familias. Y las documentaciones pedagógicas, de reflexión, no las hacemos. Bueno ahora hemos hecho los vídeos de mates, pero no los vamos a analizar nosotros. Tenemos pendientes, hacer buenas preguntas y documentar más. Es que es clave, es importante.</p>

Toda la razón, y documentar las acciones matemáticas, estamos aprendiendo porqué con todo lo que hemos hecho y con las fichas que hemos hecho y aún vamos con la chuleta. Pero es verdad que si observamos a los infantes y documentamos sus acciones y vamos haciendo, cada vez lo haremos más automático y fácil. Y pienso que es esto que decís, que hay que encontrar el equilibrio entre intervenir mucho y no intervenir nada. Y que las intervenciones han de ser de calidad, no decir por decir, y eso no es fácil. Pensar las buenas preguntas en cada momento es también complicado. Y a veces vale mas no decir nada.

En las observaciones no participantes, se vuelve a demostrar que la observación del juego de los niños es una parte importante de la tarea del profesional. En este sentido, **el papel del educador se interpreta como agente que observa el juego y se añade que interviene en ciertos momentos.** En la secuencia de imágenes que se prestan a continuación, se observa como la maestra observa las acciones que desarrollan los niños e interviene en determinados momentos. Sus intervenciones pretenden dejar espacio a los niños para que completen sus acciones y, una vez terminadas, les formula preguntas que les ayuda pensar o repensar y resolver nuevas situaciones problemáticas.

En la Figura 203 se ve a A, una niña del grupo de 1-2 años de la escuela de Caputxins, que está haciendo un encaje con piezas de diferentes colores y formas. La maestra va observando como la niña, concentrada, va configurando todo el encaje. Cuando acaba, esperando su momento, le formula diferentes preguntas que sirven de apoyo para sus aprendizajes. En el diálogo, también se observa como la maestra no interviene a cada momento. Se espera a que A acabe.

En las Figuras 204 y 205, se observa cómo las preguntas que hacen las maestras y las educadoras sirven para ayudar a los niños a construir este pensamiento matemático. En el caso de la Figura 204 se ve como la niña (E) correlaciona el color azul de las bolas. Gracias a la intervención del adulto, ella puede repensar su actuación y modificarla.

En la Figura 205, la maestra le formula una pregunta abierta al alumno S cuando ha acabado de correlacionar los objetos con su imagen y se da cuenta que falta uno. La maestra no responde directamente la pregunta del niño, sino que le formula una nueva pregunta para ayudarle a descubrir por sí mismo como resolver el problema.



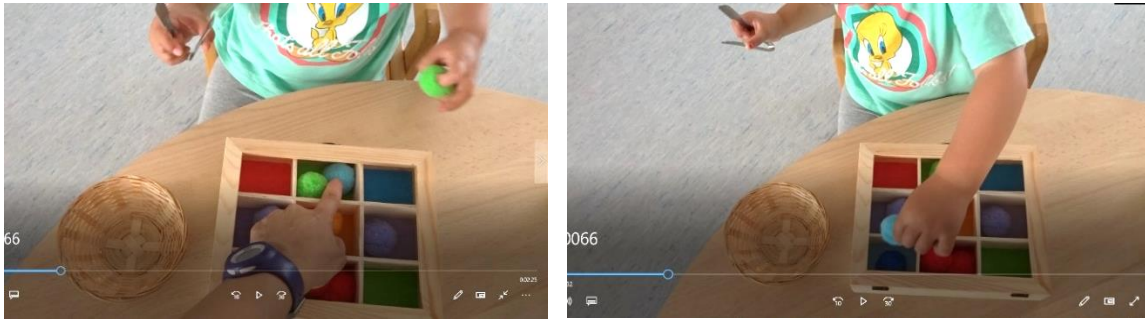
Minuto 00:21. A está haciendo un encaje con diferentes piezas de diferentes colores y dice: Falta una pieza. Y la maestra responde: ¿Falta una pieza? ¿Qué falta un prisma? A coge uno y cuando lo va a colocar oye como su compañera, que está haciendo una torre va contando: uno, dos, tres, cuatro, cinco. A medida que va colocando las piezas. Se le caen varias veces y repite el procedimiento. La maestra observa en silencio.

Minuto 01:58. La compañera se ha marchado a jugar a otro espacio y A decide hacer ella la torre.

Minuto 02:18. Mira. Dice A señalando la torre que ha hecho. La maestra responde: ¿Qué has hecho A? A no dice nada sigue su juego con las piezas del encaje. Esta vez las va sacando y una a una las va correlacionando. Cuando acaba dice: Ya está. Entonces la maestra le pregunta:

Minuto 04:17 La maestra le pregunta: ¿Cuál es el triángulo A? A ello, A responde señalando con el dedo. Y luego le pregunta: ¿Cuál tiene forma de cuadrado? A señala el que tiene la forma de cuadrado y sigue cogiendo y sacando piezas, intercambiando los triángulos. La maestra le pregunta: ¿Este que tienes en la mano de qué tiene forma? ¿Tiene forma de cuadrado o de triángulo? A ello A responde: Triángulo. ¿Y de qué color? Pregunta la maestra. Verde dice A. ¿Y el que tiene la forma cuadrada, de qué color es? Vuelve a preguntar la maestra. Naranja, responde.

Figura 203. EBMV_C_POST_1-2aT_s4 Primera parte.



Minuto 00:23

E está apareando las bolas por colores. Cuando la maestra observa que ha colocado una bola azul en un cajetín verde le dice: ¿Y este E, de qué color es? E responde: Azul. Y la maestra le dice: ¿dónde está el color azul? Entonces E se da cuenta y cambia la bola de color y la pone dentro el cajetín azul.

Figura 204. EBMV_C_POST_1-2aT_s4 Segunda parte. Fuente: EBMV Caputxins



02:08 S está apareando los materiales según su forma. Va colocando cada material en el cajetín que le corresponde según la imagen. Cuando coloca el último material observa que en el cesto no queda ninguno pero que hay un cajetín vacío y dice: ¿dónde es uno? ¿dónde es uno? Y la maestra le dice: ¿Qué falta uno, S? Y S dice: Sí. ¿Ya no quedan? Vuelve a preguntar la maestra ¿Qué ha pasado? ¿Cuál falta? Sigue preguntando y S va diciendo: uno, falta uno. S va mirando alrededor como buscando y la maestra le dice: ¿Dónde puede estar el que falta? Y S mira al suelo y lo encuentra diciendo ¡Aquí está! Y lo coloca en su sitio.

Figura 205. EBMV_C_POST_1-2aT_s4 Tercera parte.

La sesión de juego con los niños 1-2 años de la escuela de Caputxins es otro ejemplo de este tipo de intervención, en la que el adulto acompaña desde la intervención con algunas preguntas o afirmaciones en algunos momentos determinados. Como muestra la Figura 206, la maestra observa el juego del alumno P y le acompaña con pequeñas aportaciones sobre poniendo algunas palabras a las cualidades sensoriales que P está descubriendo con su exploración. De este modo, va reforzando y ayudándole a estructurar su pensamiento.



Figura 206. La intervención del adulto durante el juego con bandejas de experimentación 1. Fuente EBMV Caputxins.

La sesión de juego continúa, y la maestra sigue observando el juego de los niños. A continuación, se muestra la secuencia de imágenes, Figura 207, en las que se recoge el acompañamiento a otra niña que juega en la mesa de experimentación y como la maestra va acompañando verbalmente sus acciones sin interferir en su juego.





03:24 P se ha marchado y la maestra se fija en el juego de otra niña F. Cuando observa que ha llenado la lata le dice: OH mira, que está muy llena. La has llenado mucho. Hasta arriba. F sonrío y da la vuelta a la lata vaciándola de nuevo. La maestra al ver la acción le dice: ¿has vaciado tota la lata? Ahora está vacía. Y F la vuelve a coger y vuelve a empezar a llenarla. La maestra al verlo, le vuelve a decir: ¿la vuelves a llenar? ¡Carai la llena muy llena! Casi, hasta arriba... y sigue llenando el pote. Y la maestra acompañando su acción: está muy llena, ya no cabe, lo has llenado hasta arriba. Ya no cabe más. Y F dice: Más, más. y la maestra responde: ¿Qué puedes hacer para que quepa más? Y F vuelve a vaciar la lata. Y la maestra le dice: la has vaciado. Ya no queda dentro de la lata. ¿dónde está ahora la naranja? Y F señala la naranja de dentro de la mesa de experimentación y vuelve a empezar a llenar la lata y la maestra le dice: la vuelve a llenar, muy bien.

Figura 207. La intervención del adulto durante el juego con las bandejas de experimentación 2.

Fuente: EBMV Caputxins

La intervención del adulto puede tener muchos matices y consideraciones. A continuación, se van describiendo como se han llevado a cabo las intervenciones de los diferentes profesionales destacando algunas características comunes. Las Figuras 208 y 209, en las que se observa el juego con material de exploración que se lleva a cabo en la escuela de Horta Vermella en el grupo de niños de 1 a 2 años, se muestra como la maestra acompaña a los niños en su juego de aparear los huevos según el color. El alumno E va haciendo las correspondencias y la maestra le observa y le va respondiendo. E, va haciendo uso de la palabra para ir asegurando que aquello que está haciendo es correcto, pero la maestra no le responde directamente, sino que le formula nuevas preguntas para que sea el mismo que se responda y cuando lo hace, la maestra le reafirma su acción. De este modo, se destaca **la intervención del adulto como andamio que reafirma la acción del niño**. En las diferentes secuencias se observa el respeto que la maestra mantiene en relación con las acciones del niño; no le corrige, ni tampoco se anticipa o le da la respuesta, espera a que sea el niño y le apoya.

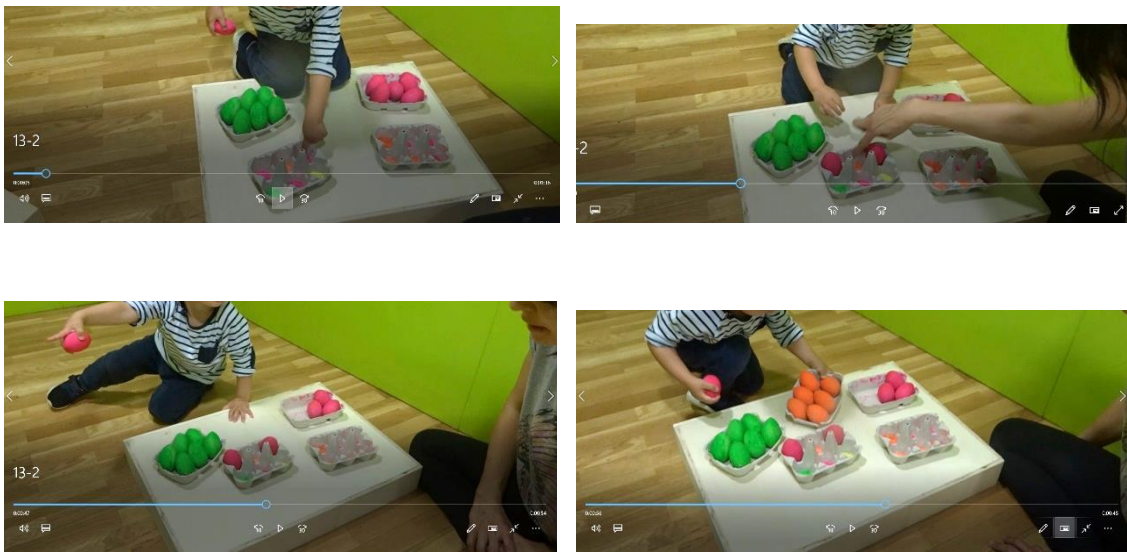


Figura 208. El acompañamiento del adulto como fórmula para reafirmar un conocimiento - 1. Fuente EBMV Horta Vermella.

Del mismo modo que en la secuencia anterior, la alumna R va apareando los huevos con sus compartimentos adecuado según el color. Entre ella y la maestra se establece un diálogo que acompaña las acciones de la niña, pero sin interferir en su juego; promoviendo que sea ella misma quién resuelva la tarea y reafirmado a través del lenguaje sus acciones.



Minuto 00:24
 R está colocando los huevos según los colores cuando coloca un huevo amarillo en un compartimento verde, le dice a la maestra que tiene al lado: ¿Este va aquí? La maestra responde: ¿A ver, míralo bien? Y R dice: No y la maestra dice: No. ¿Y de qué color es? Pregunta de nuevo la maestra. R dice: Verde. Y la maestra dice: Verde. Reafirmando el color.

Figura 209. El acompañamiento del adulto como fórmula para reafirmar un conocimiento – 2. Fuente: EBMV Horta Vermella

Los resultados muestran cómo **la intervención del adulto puede ser el eslabón** que les hace falta a los niños para resolver situaciones o problemas matemáticos. En este sentido se encuentran diferentes actuaciones por parte de los profesionales que favorecen la autonomía de los niños y sin resolverles directamente el problema que están resolviendo, les facilitan el eslabón necesario para poderlo desarrollar satisfactoriamente.

Ejemplo de ello, es la situación en que se encuentra el alumno Z cuando está haciendo la correspondencia con los huevos y las hueveras según el color. Z, ha ido colocando uno a uno todos los huevos correctamente por colores hasta que le queda un hueco ros y solo tiene dos huevos naranjas. La maestra, ha ido observando cómo ha ido completando las acciones y cuando Z está a punto de acabar, le queda un solo huevo naranja y un hecho rosa. Z se queda observando unos minutos y, cuando parece que va a desistir, la maestra le pregunta y señala el hueco animándole a pensar de nuevo. Entonces le ofrece el apoyo necesario para que pueda resolver el enigma por él mismo (Figura 210).



Minuto 00:23

La maestra observa como Z va haciendo las correspondencias por color con los huevos. Uno a uno los va colocando todos hasta que queda un solo hueco vacío de color rosa.

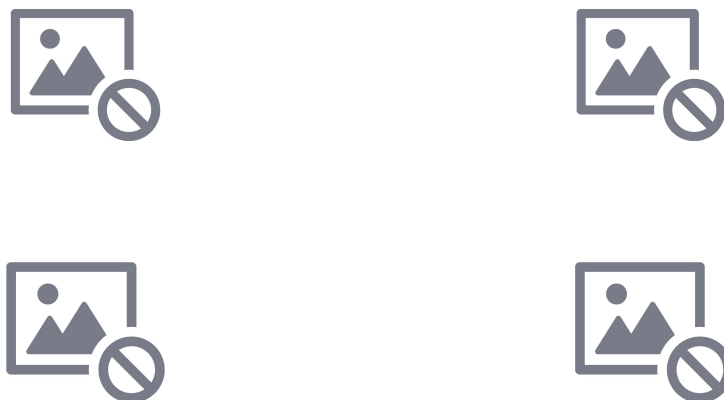
La maestra señalándolo le dice: ¿Y aquí? ¿Qué falta aquí? Z señala el hueco vacío y la maestra le dice: Un de color... rosa.

Minuto 0:35

La maestra preguntando al tiempo que señala los huevos: ¿Qué falta uno? ¿Qué lo encuentras el qué falta? Z observa las dos hueveras y permanece unos instantes observando. Entonces coge un huevo naranja y lo coloca en el hueco rosa que estaba vacío. La maestra le dice: ¿aaah? Y Z decide volver a cogerlo. La maestra le ofrece una huevera más donde aparecen 3 huevos de 3 colores diferentes y le dice: Mira, ella tenía más. ¿Qué lo encuentras?

Figura 210. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático - 1.

En la Figura 211, se observa los alumnos Y, M y J que están haciendo unas construcciones con el material que han preparado los profesionales. Seguramente, los profesionales no se esperaban que hicieran este tipo de juego ya que el material estaba diseñado y pensado para hacer correspondencias por colores. Aun así, el juego que establecen es muy rico y la maestra aprovecha, al tiempo que los observa, para formularles algunas preguntas que les inviten a pensar.



Minuto 00:00

Y le dice a la educadora: Mira un castillo de la princesa. ¡Qué bonito! ¿qué has puesto ahora aquí arriba? Responde la educadora. ¡La princesa! Dice Y.

¡Ahh! Acompaña la educadora. Y añade: Habéis hecho 3 construcciones o 3 castillos muy diferentes eh. ¿Tu que has puesto aquí encima K?.

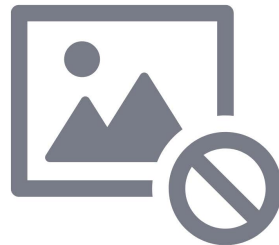
Un cavallero sin casco. Rresponde K.

Oh un cavallero sin casco? !Carai! Responde la educadora. Y sigue: Y tu, ¿que es esto que pones, Y?. A ello responde Y: Unas escaleras para bajar la princesa. Uno, dos, tres cruatro y cinco... va contando los escalones y haciendo el gesto de bajar con las figuras.

Figura 211. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 2. Fuente: EBMV Horta Vermella

La Figura 212 muestra cómo las preguntas y los retos que pueden plantear los profesionales a los niños pueden servir como eslabón que refuerza sus creencias y sus conocimientos. En este caso, la educadora observa que la alumna T selecciona todas las piezas cortas de madera del cajón y va componiendo una fila al tiempo que hace la correspondencia para cada pieza corta un muñeco. Entonces, entre otras intervenciones que va haciendo, le pregunta si quiere poner una pieza que le ofrece, siendo esta más larga que las otras. Con esta pregunta “trampa”, ofrece un nuevo reto a la niña que repiensa y

reafirma el criterio que estaba usando. Además, le pide que le explique porque no la quiere, a lo que la niña responde hábilmente cogiendo otra pieza y enseñándole que no son iguales. A todo ello, con un tono dulce, la educadora va formulando preguntas y reafirmando las afirmaciones que hace la niña mientras la escucha.



Minuto 00:16

T mientras va colocando los muñecos encima de las maderas explica: Yo pongo los muñecos encima. Y la educadora responde: ¿Tus pones los muñecos encima? Y le pregunta: ¿Encima de dónde? ¿T, encima de dónde los pones? Al tiempo que los va colocando T responde: Encima de las construcciones. Y la educadora afirma: Ah, encima de las construcciones.

Minuto 00:54

T va cogiendo las maderas de la caja una a una. Cada vez que coloca una madera pone encima un muñeco. Al verlo, la educadora le pregunta: ¿Qué son iguales las piezas que colocas debajo los muñecos? La niña responde que no. Y la educadora le dice señalando las piezas: ¿T, son iguales las piezas que pones debajo de los muñecos? A ello T responde: Sí.

Minuto 01:29

A continuación, la educadora le ofrece una pieza de mayor longitud y le pregunta: ¿Y esta? ¿Quieres poner está aquí? T responde que no y la aparta. La educadora le dice: ¿Ah no? ¿No quieres poner esta? ¿Son iguales? T responde que no y coge otra pieza de la misma longitud que la pieza que ha descartado y se las enseña diciéndole: estas sí que son iguales. La educadora le reafirma lo que T ha dicho: Sí, estas sí que son iguales.

Figura 212. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 3. Fuente: EBMV Serra Sanferm

La Figura 213 presenta una secuencia de juego compartido entre la educadora del grupo de 2-3 años de la Serra Sanferm y la alumna B. En ella, B pesca peces de colores de dentro de una caja. Mediante un dialogo de preguntas abiertas, la educadora acompaña a B a descubrir cuantos peces hay de cada color y la invita a compararlos. En todo momento, la educadora va apoyando a la niña, valorando sus aportaciones y haciéndole nuevas y buenas preguntas, sugerentes, que le generen nuevos problemas a resolver y que expandan refuerzan sus conocimientos, haciéndole pensar y felicitándole por sus aportaciones, reafirmando sus conocimientos y asegurándose de la comprensión por parte de la niña.

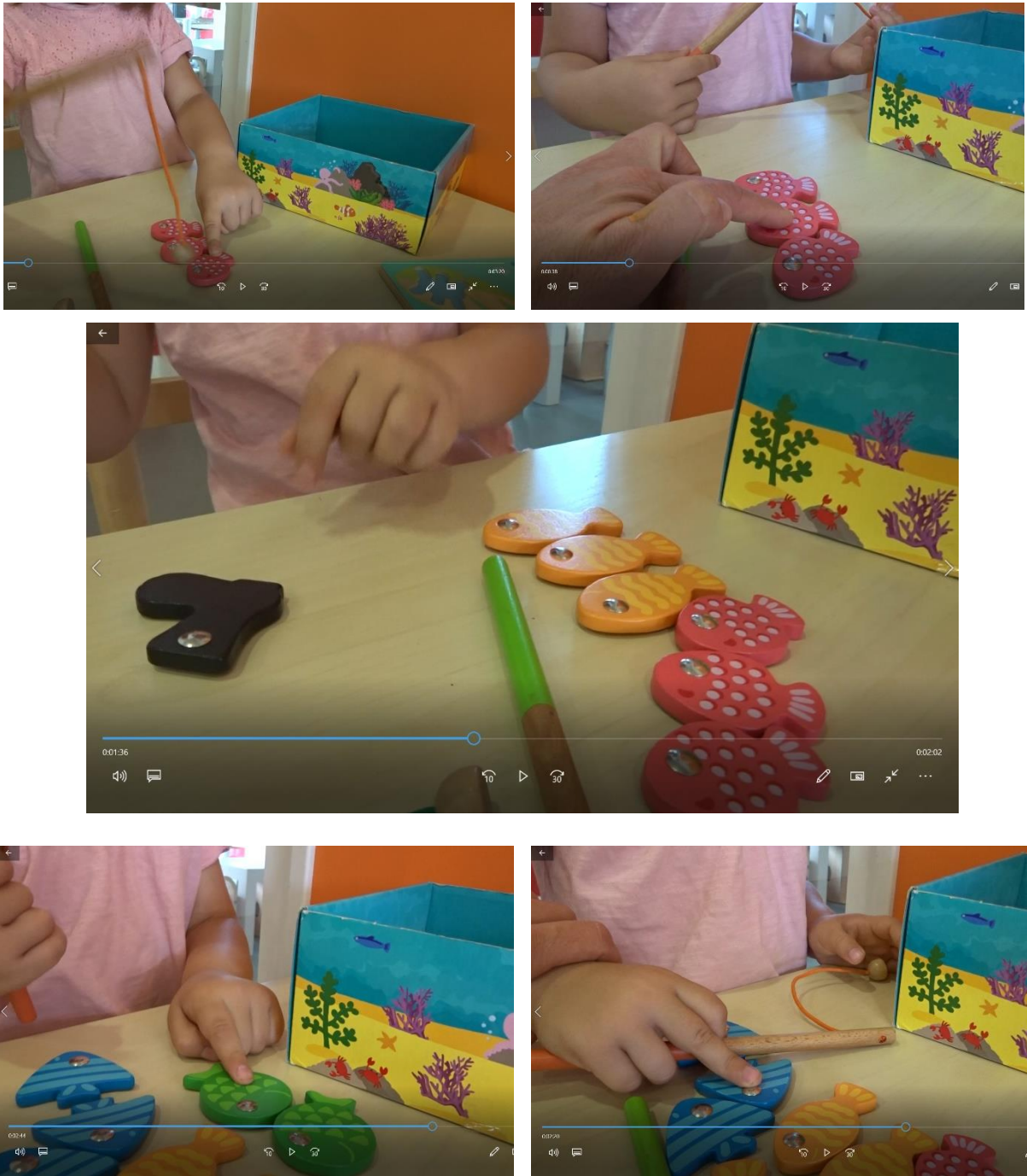


Figura 213. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 3. Fuente EBMV Serra Sanferm.

Se presenta un espacio con una mesa pequeña con una silla. En ella se ha presentado una caja de cartón que simula el fondo del mar y dentro diferentes elementos de madera con un pequeño botón metálico. Al lado hay una caña de pescar con un imán en la punta para ir pescando los diferentes elementos de dentro de la caja. Concretamente hay 3 peces rosas, 3 azules, 2 verdes y un zapato.

B está pescando los peces. Cuando ha sacado dos los pone de lado y empieza un dialogo con la educadora:

B: ¡Son iguales! Mientras señala el par de peces.

Educadora: ¡Son iguales, sí!

B: Mira aquí va otro.

Educadora: ¿Aquí hay otro?

B: Sí

Educadora: ¿Cuántos hay rosas? Se hace un silencio. s señala con el dedo y dice: un, un, un...

Educadora: ¿Los contamos?

B: Sí

Educadora: ¿me ayudas? ¿Va los contamos? Mira B, (la educadora acompaña a B a mirarla) Y mientras señala los peces dice: no, dos y...

B: Tres

Educadora: ¿Hay? ¿Cuántos hay?

B: Tres

Educadora: Muy bien, tres.

B: Mira he sacado otro pez.

Educadora: ¿Otro pez? ¿Y de qué color es?

B: Naranja.

Educadora: Otro naranja.

B: Y otro naranja.

Educadora: Y ahora otro naranja. ¿Y cuantos hay naranjas? ¿Los volvemos contar?

B: Sí.

educadora: u es va, ahora tu. Con el dedo. ¿e ayudas? a educadora señala los peces y dice: uno, dos y...
: r es...

Educadora: ¿Cuántos hay?

B: Tres.

Educadora: Tres, muy bien.

B: Mira he sacado un zapato.

Educadora: ¡Has sacado un zapato! ¿Y cuantos hay?

B: Uno, solo hay uno.

Educadora: ¿Solo hay uno?

B: Sí, solo hay uno.

Educadora: ¿Solo uno, no hay más?

B: No.

Educadora: No. ¿Y ahora que peces coges?

B: No.

Educadora: No. ¿Y ahora que peces coges?

B: Los azules.

Educadora: Los azules.

B: Y otro azul.

Educadora: ¿Cuántos hay de azules B? B mira como si quisiera contar

La educadora le dice: Va con el dedo y cuentas tu. Yo te ayudo.

q ue señala con su dedo junto a la educadora dicen: uno, dos y ...

B: tres.

Educadora: ¡Hay tres! ¿Y ahora que peces quedan aquí dentro?

B: Los verdes

Educadora: ¿Y cuantos hay de color verde?

B: tres

Educadora: ¿Tres? Volvamos a contar. Va tú, coge mi dedo y cuentas tu.

B señalando con el dedo y dice: uno y dos.

Educadora: ¿Cuantos hay?

: mmm...

Educadora: ¿Sí, quizá hay dos B?

B: Sí, dos.

La Figura 214 muestra otro ejemplo. Gracias al acompañamiento de la maestra se refuerzan los aprendizajes de los niños. En este caso, la maestra establece un diálogo con Ian sobre la altura de su torre e invita al niño a compararlo con otro referente en altura. Para resolverlo, a I, no le falta imaginación y compara su torre con una grúa como las de la calle. Aun así, antes de continuar, acude otro niño y golpea las piezas derrumbando toda la construcción. La maestra acude a gestionar el conflicto emergente.



Minuto 06:27

La maestra, observando el juego ve que el alumno I está haciendo una torre muy alta y se ha quedado sin piezas. La maestra le dice: I si necesitas más piezas puedes venir aquí a buscarlas. Y le señala el mueble con los diferentes materiales. Entonces se inicia un diálogo entre ellos.

I: Quiero hacer una torre muy alta- Señalando con los brazos arriba.

Maestra: ¿Con esta que tienes en las manos? Le señala su pieza. I intenta colocarla y la torre se tambalea, entonces se aparta. Al ver el movimiento de la torre, la maestra pregunta sonriendo:

¿Qué ha pasado? I, sigue observando su torre. ¿Y qué estás haciendo?

I: una grúa.

Maestra: ¿Es una grúa?

I: Sí. Que levantan maderas muy altas

Maestra: ¿oh? de estas tan altas? ¿Como? ¿Como de alta?

I. Es una grúa como las que hay en la calle.

Maestra: ¿Cómo las de la calle? Carai, muy muy altas.

I: Sí. Muy altas. Muy altas, altas.

Minuto 08:01

Al tiempo, el juego de otros dos niños ha ido evolucionando. Juntos han ido podiendo los animales en uno de los estantes del mueble, apareando un animal a cada pieza.

Figura 214. La intervención del adulto como eslabón para seguir desarrollando pensamiento matemático – 4. Fuente: EBMV Serra Sanferm.

Como muestra la imagen anterior, los profesionales no siempre pueden dar continuidad a las acciones de los niños ya que la gestión del aula lo impide. En la imagen anterior, la conversación con I y lo que ella podía despertar en él, queda truncado por una acción cotidiana en la escuela y requiere también del acompañamiento del profesional. Como este, hay numerosos momentos en los que la presencia del adulto no puede darse, ya que está en la gestión o el acompañamiento de otra situación a la que ha dado prioridad.

Y, K y J estaban explicando a la educadora como eran sus castillos. Y empieza a verbalizar cuantos muñecos tiene su castillo y los diferentes personajes. La educadora le pregunta si los castillos son todos iguales y cuando K responde que no y añade que J no tiene rojo, llega un compañero que tambalea la mesa y se cae parte de las construcciones. A ello, se ríen todos (Figura 215).



Figura 215. Tiempos para la gestión del aula_2. Fuente: EBMV Horta Vermella

Otro ejemplo de ello es la Figura 216 en la que, mientras I conversa con la maestra y construye su torre alta, otros dos alumnos han ido evolucionando su juego que comienza con la creación de unas hileras de animales que han ido seleccionando y poniendo de forma creativa en el estante. Del mismo modo ocurre en la Figura 217, en la que se observa que los niños hacen una acción la cual no puede ser acompañada por el profesional del aula ya que está ausente en ese momento, acompañando otra situación.

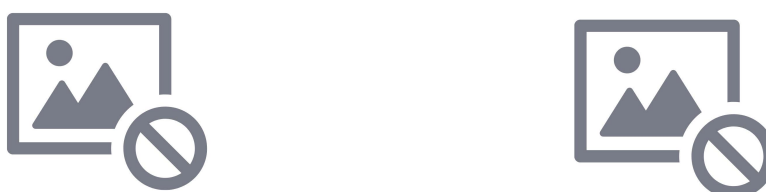


Figura 216. Tiempos para la gestión del aula_1. Fuente: EBMV Serra Sanferm

En la Tabla 203, se expone el debate que surgió en el grupo de discusión sobre la intervención del adulto en aula de los más pequeños. Los profesionales del grupo de 0-1 años, exponen que antes de la formación no se habían planteado poner palabras a las cualidades de los objetos o a las acciones que desarrollaban los niños. En este sentido, la formación les había generado ciertas dudas, pero habían probado acompañar las acciones de los niños en algunos momentos puntuales. En este sentido, les parece que describir la acción o material puede resultar un tanto artificial, el niño la descubre y no saben hasta qué punto en estas edades es necesario poner una palabra que lo acompañe. Explican que cuando los observan y de forma natural les cuentan las cosas que ven en ellos y en sus acciones, no lo hacen con un objetivo matemático o de ayudar a desarrollar o a estructurar el pensamiento; lo hacen como parte del reconocerlos, observarlos y acompañarlos.

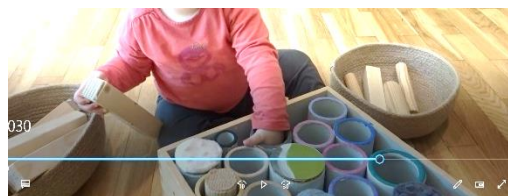
También explican que siguen cuestionándose si es necesario o no utilizar palabras que acompañen algunas acciones o cualidades de los objetos. Apelan que siempre habían considerado que el niño necesita descubrir por el mismo, sin interrupciones. Explican que el niño va construyendo el pensamiento, de igual modo, sin que el adulto introduzca sus palabras en el aprendizaje.

Tabla 203. Grupo de discusión –el papel del adulto: reflexiones después de la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-3	HV	<p>Antes de la formación claro que hablábamos en el aula de los bebés, pero conversábamos con ellos, les cantábamos canciones, les explicábamos sobre todo anticipando lo que íbamos hacer, pero creo que nunca nos habíamos planteado el verbalizar algunas de sus acciones con un sentido para desarrollar el pensamiento matemático. Te sale de manera natural decirles cosas o celebrar sus hazañas. Pero no lo hacíamos con esta conciencia. Claro, ahora después de la formación es como que forzamos a veces decirles cosas. Decir cosas referentes a lo que están haciendo o descubriendo. No es tan natural.</p> <p>(...)</p> <p>Pero hemos incorporado, en algunas sesiones, sobre todo con los materiales que hemos hecho nuevos. Vamos probando.</p>
GD-POST-7	HV	<p>Yo creo que el tema está en que no lo hacemos de manera consciente. Antes claro que verbalizábamos algunas cosas. Por ejemplo, si un niño se daba la vuelta le decíamos: <i>mira, te has girado, oh...</i> y así. Pero no lo hacíamos porque considerásemos que eso le ayudaba a estructurar su conocimiento matemático, nos salía, era de sorprendernos junto a ellos. Ahora, vamos, poco a poco y como decíamos antes, en ciertos momentos, incorporando algunas palabras a sus acciones.</p>
GD-POST-6	HV	<p>De hecho, lo que hemos hecho es ser conscientes de una cosa que hacíamos de manera espontánea y descubrir que eso tienen un valor en las matemáticas. Y como tienen un valor, pues ahora somos más</p>

conscientes y lo hacemos más o algo mejor. Más conscientes, creo que esa es la palabra. Aun así, a nosotros y lo hemos hablado con Caputxins, nos genera ciertas dudas. No sabemos hasta qué punto es importante. O sea, van a descubrir que es rugoso igualmente sin que nosotros digamos: *oh, que rugoso*. Siempre hemos pensado que iban construyendo su pensamiento ellos mismos y que lo mejor era observar en silencio. Claro ahora nos choca. Pero vamos probando.

En las observaciones no participantes, se recoge cómo las profesionales de los más pequeños han creado algunos materiales específicos y han desarrollado sesiones donde intervienen describiendo las acciones de los niños y los materiales que les han ofrecido (Figuras 217 y 218).



Minuto 00:06

El alumno X coge una madera y la observa. La maestra le dice: X, ¿qué has cogido un cilindro? ¿Has cogido un cilindro? Has cogido el más delgado de todos, eh. ¿Verdad que es muy fino? Sí, es muy muy fino.

Minuto 00:29

La maestra, que observa el juego de los dos niños, le pregunta a la alumna N: ¿Qué está vacío el cesto, N? ¿Qué está vacío?

Minuto 00:42

En su respuesta, N coge un cilindro del otro cesto y la maestra dice: Oh, has encontrado el cilindro más delgado de todos. Sí, tienes el cilindro más delgado.

Minuto 00:43

A N se le cae el bastoncito al suelo y la maestra le dice: ¿oh, que rueda? ¿Has visto como rueda el cilindro?

Minuto 00:51

N coge otro cilindro y la maestra le dice: Has cogido otro cilindro, este es más grueso. N lo pone dentro del cesto y coge otro. La maestra le dice: Carai, este es aún más grueso.

Minuto 1:18

N coge un prisma y la maestra le dice: ¿Qué has cogido un prisma, ahora? Y ¿Qué tiene este prisma? ¿Cómo es? Ay, ¿qué tiene aquí?

N va jugando con el prisma a mételo y sacarlo de dentro de los tubos. Mientras lo hace, la maestra refuerza sus acciones verbalizando: ¿Qué lo has puesto dentro del tubo? Dentro del tubo N. Ole ahora dentro de otro tubo. ¿Qué lo quieres poner aquí dentro? Ahora está vacío este tubo. No hay ningún prisma dentro

Figura 217. La intervención del adulto en aula 0-1 primera parte. Fuente: EBMV Horta Vermella



Minuto 03:03: En el aula se han dispuesto tubos de color rosa y de color gris, botellas sensoriales de diferentes colores y chapas metálicas. La alumna V está haciendo una torre, en la base ha puesto la botella, luego pone el tubo gris y el rosa. Y así hasta encajar 5 tubos. Cuando se la acaban la maestra le pregunta: ¿Quieres más? ¿Necesitas más? Y le ofrece unos cuantos tubos más.

Minuto 04:04: V sigue jugando con los tubos y la maestra le dice: ¡Ahora tienes muchos, eh! Mientras V los va apilando la maestra va contando: uno, dos y tres. ¿Cuántos hay? ¿Hay tres? Sí, hay tres.

Minuto 04:58: V sigue apilando tubos y la maestra verbaliza: Ahora tienes cuatro. Uy, cuantos tienes. Tienes muchos.

Figura 218. La intervención del adulto en aula 0-1 primera parte. Fuente: EBMV Caputxins

Finalmente, de las observaciones no participantes hay que destacar que se han recogido evidencias de 3 profesionales que consideran la intervención como algo vinculado a la gestión del aula y sus aportaciones son en ese sentido. Durante el desarrollo de las sesiones, permanecen sentados cerca de los niños, observándolos, y no intervienen ofreciendo apoyo o describiendo las acciones o poniendo palabras de soporte que facilite desarrollar más ampliamente la acción del niño. Ejemplo de ello son las Figuras 219 y 220.

En la primera secuencia, se presenta una sesión de juego heurístico llevada a cabo en la escuela de Serra Sanferm con niños de 1-2 años. En ella, transcurridos 18 minutos de sesión y estando presente dos referentes en aula, las intervenciones se realizan para acompañar la gestión del grupo y reordenar el material. En ningún momento se observa en esta sesión, ni en ninguna otra, tomar notas sobre las acciones de los niños o ponerse junto a ellos a investigar conjuntamente desarrollando algún conocimiento compartido.



C está poniendo las pelotas dentro del pote. Ha puesto 5 cuando solo caben 4. Aun así, se levanta y muestra a la educadora que está a su lado lo que ha hecho. Ella no le dice nada. Está presente observando en silencio.
D está poniendo las piezas dentro de los pote. Hace corresponder las amarillas, pero las azules no. Se dedica a llenar y vaciar el pote. En toda la sesión no recibe ningún input por parte de los referentes.

Figura 219. El papel del educador cuando observa_1. Fuente: EBMV Serra Sanferm

En la segunda secuencia, se observa a dos niños que están jugando con las construcciones. Uno de ellos, hace una composición seleccionando los animales que le interesan y desechando los que no. La sesión dura 14 minutos y en ningún momento la maestra, que observa su juego, hace ninguna intervención.



Minuto 08:10: En la tarima se encuentran dos niños jugando con los animales. Uno de ellos observa como el otro esta poniendolos en fila. Selecciona los animales que le interesa y los va colocando uno al lado del otro. Durante su composición va hablando en voz baja, no se puede entender lo que dice pero se interpreta que va explicando lo que está haciendo. Es como un parlotear para si mismo.

Minuto 12:23: El compañero que hasta el momento observaba, le ofrece unos animales que ha encontrado encima de la tarima. El niño los coge e incorpora uno de ellos en la fila de animales mientras que el otro lo tira desestimándolo. Verbaliza alguna cosa a su compañero que no se llega a comprender, pero es como si le explicase por qué no lo incorpora. La maestra sigue observando en silencio.

Minuto 14:21: El niño ha hecho una fila de animales, seleccionando unos y desestimando otros. Cuando acaba se lo explica a su compañero mostrándole la fila y señalando los animales, recorriendo el lardo de toda la fila. En el suelo se observa los animales que no ha utilizado y que ha lanzado lejos de su composición. La maestra observa en silencio.

Figura 220. El papel del educador cuando observa_2. Fuente EBMV Caputxins.

Los resultados que muestra la Tabla 204, también muestran que después de la formación, los profesionales siguen expresando dificultades en cuanto al desempeño de su papel. Se preguntan cómo hacer buenas preguntas y con qué criterio determinar su intervención. A estas dificultades, se le añade la falta de tiempo como elemento que dificulta la incorporación de cambios en la práctica educativa.

Tabla 204. Dificultades después de la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-1	HV	Sobretudo tengo dudas en cuál debe ser nuestro papel. En el sentido de hasta dónde debe llegar nuestra intervención sin solapar las acciones de los niños. Y es que no tenemos tiempo, ni de hacer materiales, ni de ir planteando nuevas propuestas, ni de documentar debidamente.
GD-POST-8	HV	Lo que más cuesta es estirar el hilo de las propuestas, hacer buenas preguntas para que los niños encuentren por sí mismos respuestas.
GD-POST-7	HV	Intentar hacer buenas preguntas a lo largo de las propuestas, esto es. A mí también. Y el tiempo, claro.
GD-POST-4	HV	Cómo proporcionarles preguntas sin interferir en su juego también porque nunca sabes cuándo es el momento de hacerla. Todo lo podríamos desarrollar mucho mejor si tuviésemos más horas. No podemos con tantas cosas y las mates siempre son aquello de va, hay que pensar y sacar tiempo.

En el análisis de la documentación y como recoge la Tabla 205, se observa que en las fichas de planificación los profesionales incluyen un apartado específico, dónde se especifica el lenguaje matemático que corresponde al material y las posibles preguntas que podrían formular a los niños durante el desarrollo de la sesión, con la finalidad de ofrecer andamios para el aprendizaje.

Tabla 205. El lenguaje matemático.

Material	Lenguaje matemático	Preguntas
El cesto de los tesoros	Cualidades sensoriales: (tacto) suave, rugoso, esponjoso... Atributos medibles: tamaño/volumen, masa, temperatura y longitud. Posición: dentro, fuera El nombre de los colores, rugoso, fino, suave, hace ruido, frío, cálido, metálico, de futa, de plástico, transparente, te veo a través, no te veo a través, pesa mucho, poco, ligero, pesado hay muchos, pocos, algunos, 1, 2,3... dentro fuera... rodaja, no rodaja.	¿Que lo coges? que hay muchos? ¿Pocos? que están dentro de la cesta? que están a salvo?... ¿de qué color son? ¿Azul? ¿Verde?... que es muy rugoso? ¿Es blando, duro? ¿Es de madera? ¿Es de plástico? ¿Es de piedra? ¿Es de metal? ¿Qué redondez? ¿Que pesa? ¿Qué es ligero? ¿Qué lo coges con las dos manos? ¿Con una mano? ¿Qué lo cambias de mano? ¿Qué lo estrechas muy fuerte? ¿Qué te lo pones en la boca? ¿Qué se deshace?

Material de construcción, círculos brillantes	- El niño observa y manipula y así percibe las cualidades sensoriales y los atributos medibles. A través del juego, observará el desplazamiento de los círculos. También con la presentación del material se pueden encontrar composiciones hechas que invitarán a la descomposición.	- Este círculo es más grande que el otro (cuando el niño en t - ¿Que roda este círculo? Y ahora da vueltas (cuando la educadora lo hace girar). - Ahora has puesto otro círculo encima y has hecho una torre más alta.
Botellas sensoriales con elemtos	- El niño puede observar las cualidades sensoriales y a través de la manipulación observa cómo el objeto de dentro cambia de posición. - El adulto verbaliza la cantidad que hay dentro.	- ¿Qué hay dentro de la botella? - Hay una atornilla marrón y blanca... - Hay (1,2 o 3) atornilla/es. - ¿Qué ha pasado con la atornilla? ¿Está arriba? Y ahora, ¿ha ido abajo? - En el caso de que el niño coja dos botellas y las observe simultáneamente comparándolas entre ellas, la educadora verbalizaría los cuantificadores básicos (más que, menos que).
Material heurístico	Color: verde, rosa... Tamaño: grande, pequeño. Textura: fino, rugoso 1,2,3... muchas, pocas, alguna, ninguna. Dentro, fuera, sobre, debajo. Lleno, vacío	¿De qué color es? ¿Cogemos todos los del mismo color? ¿Qué son iguales? Qué pasa si ponemos este (poniendo otro de un color diferente) ... ¿Cuántos tenemos? ¿Hay muchos? ¿Pocos? ¿Cuántos hay? Los contamos... 1, 2, 3... ¿Está lleno, vacío, cabe alguno más? ¿Ponemos aquí todos los grandes? ¿Están dentro? ¿Quedan a salvo? ¿No queda ninguno? Todos los grandes están aquí fuera, todos los pequeños los ponemos dentro...
Material de exploración	Capacidad: vacío y lleno, Conteo: 1 un elemento, 2 elementos..., un elemento en cada agujero, el peso. Las cualidades sensoriales de los objetos: textura, color, temperatura...	¿Cuál es este elemento? ¿A qué agujero lo pondrías? ¿Qué son iguales? (Qué pasa si ponemos este (poniendo otro de un elemento diferente) ... ¿Cuántos elementos hay dentro de cada agujero? ¿Cuántas castañas hay? ¿Están todos los agujeros llenos? ¿Los hay vacíos? ¿Qué elemento nos falta? ¿La canasta está llena o vacía? ¿Cuál pesa más la castaña o el tapón? ¿Cómo es la pechera? ¿Es rugosa o fina? Rodola? ¿No roda?
Cubos translúcidos	Los colores, el concepto de transparente, pasa la luz, te veo a través de... arriba, abajo, alto, bajo, El nombre de las diferentes figuras geométricas y de los cuerpos geométricos.	- ¿Con qué estás jugando? ¿Qué haces? ¿Por qué? ¿Qué crees que es eso? ¿Señalando el reflejo de las piezas? ¿Qué color ves? (A través del metacrilato de colores) - Verbalizar la cantidad de piezas que están apilando. - ¿Quién está allí? (lejos y cerca) - Veo que pones muchas piezas. ¿Cuántas hay? ¿Y cuántos niños hay? ¿Dónde están?

Cajas de cartón	dentro/fuera, arriba/abajo, sobre/bajo, abierto/cerrado, delante/detrás, lados, lleno/vacío, abierto/cerrado, alto/bajo, grande/pequeño. Pesado y ligero	<p>¿Quién se esconde dentro de esta caja? ¿Y fuera? ¿Cuántos cabe dentro de la caja? ¿Qué podemos poner dentro?</p> <p>¿Cómo está la caja? La caja está abierta / cerrada</p> <p>¿Qué puedes hacer con las cajas? ¿Se pueden apilar? ¿Cómo lo puedes hacer? Si quisieras hacer un castillo muy alto ¿qué necesitarías?</p> <p>¿Lo arrastras? ¿Puedes tú solo/a? ¿cuántos sueldo para arrastrarla? ¿Pesa? ¿No pesa?</p> <p>¿Dónde estás? ¿Me ves? ¿Por qué no? ¿Ves en? ¿Y cómo lo harás para encontrarlo?</p> <p>Ahora estás encima/dentro/detrás/ante la caja!</p>
Pañuelos y telas de colores	Color: azul, amarillo, rojo Tamaño: grande, pequeño, Longitud: corto, largo	<p>¿Dónde lo pones este pañuelo? En este grupo son todos de color... ¿Son iguales? ¿El pañuelo está plano en el suelo?</p> <p>-después de arrugar-: ¿y ahora cómo está? Ahora lo desplegamos, ¿será grande o pequeño?</p> <p>¿Cuántos pañuelos hay? ¿Qué puedes hacer con estos pañuelos? ¿Cuáles tienes que ir a buscar para poner dentro de este cesto? ¿Puedes poner otro que no sea? ¿Este lo podemos poner aquí? ¿Cómo los has ordenado? ¿Por qué? ¿Los podemos ordenar así?</p>
	<p>Cuantificadores: muchos, pocos, uno, dos, ninguno... Capacidades: lleno, vacío Sensorial: el color (gama cromática) Posición: dentro y fuera Forma cilíndrica del bote/ redonda anilla rodadura, no rodadura. Superficie curva. conteo uno a uno - trepar / poner dentro del bote.</p>	<p>¿El bote está lleno? ¿Está vacío? ¿Las traemos todas? ¿Dejamos una? ¿hay alguna más?</p> <p>¿Ponemos todas las anillas? ¿Queda alguna o ninguna?</p>

5.4.4 Conocimiento sobre las orientaciones curriculares

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en el grupo de discusión, el cuestionario y las documentaciones. En el caso de las observaciones no participantes, los resultados muestran que no se ha podido encontrar información específica sobre los conocimientos curriculares.

En referencia al grupo de discusión, como recoge la Tabla 206, los profesionales expusieron que no utilizaban el currículo de Educación Infantil para programar. Después de la formación, planifican de manera consciente los espacios y materiales con contenido

matemático, pero la hacen a partir de las documentaciones que se les facilitó en la formación. Consideran que es más fácil, práctico y funcional.

También, explican que nunca habían programado los espacios utilizando el currículo antes de la formación y que después de la formación, han incorporado las fichas para planificar los espacios y diseñar los materiales con sentido matemático.

Tabla 206. Grupo de discusión – conocimientos curriculares después de la formación.

PARTICIPANTE	ESCUELA	CITA
GD-POST-7	HV	Ahora cuando diseño los espacios pienso en los objetivos matemáticos, no solo en el diseño del espacio. Y también en los materiales que tengo o que puedo preparar. Programar con unas programaciones vinculadas al currículo, no lo hacemos. Nunca hemos programado los espacios mirando el currículo. Lo que hemos incorporado en relación con esto son la fichas que hemos elaborado para la formación. Claro ahí tenemos lo que correspondería la programación y lo vamos ampliando.
GD-POST-2	HV	Si la formación nos ha servido también para planificar estos espacios y pensar bien qué contenidos y objetivos tienen, pero el currículo de infantil no lo miramos. No sé ni si lo tenemos. Es que todo aquello de los objetivos y contenidos, así como viene en el círculo no va demasiado bien.
GD-POST-9	HV	Lo que hacemos es con los apuntes, el cuadro resumen que nos dio Ángel y con aquello podemos ver las capacidades y contenidos. Luego pensamos los objetivos y hacemos las fichas. Es rápido, práctico y funcional. No tenemos tampoco tiempo de profundizar en lo que dice el currículo.

Los datos obtenidos en el cuestionario aportan información específica sobre los objetivos que definen los profesionales en sus planificaciones o programaciones. Específicamente, se destaca que los 28 (100%) profesionales manifiestan desarrollar de manera consciente objetivos en las programaciones de espacios y materiales con sentido matemático. Analizando los objetivos que han descrito los profesionales después de la formación, como muestra la Figura 221, se encuentran un total de 95 objetivos vinculados a los diferentes bloques de contenidos. En ella se observan diferencias significativas entre los distintos bloques de contenido, habiendo 43 objetivos vinculados a las cualidades sensoriales, 23 a los atributos mensurables, 18 a las posiciones y las formas y 11 a las cantidades continuas y discretas.

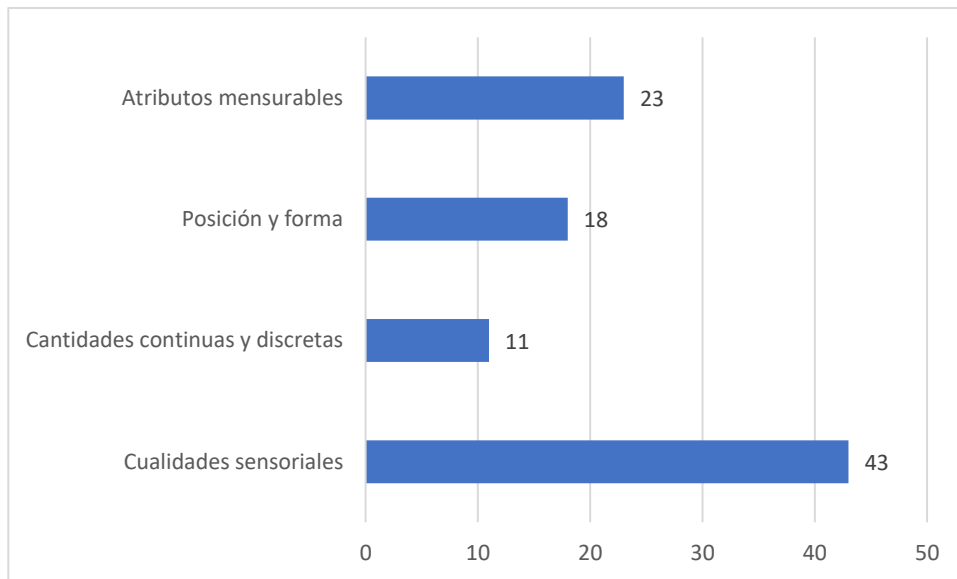


Figura 221. Objetivos detectados por los profesionales post formación.

Al comparar los resultados previos con los posteriores a la formación, destaca el aumento de objetivos que han facilitado después de la formación. En la Figura 222 se recoge el incremento en todos los bloques de contenido. El incremento más significativo se ha producido en el bloque relativo a las cualidades sensoriales que ha pasado de 6 objetivos antes de la formación a 43 después, con una tasa de crecimiento del 616.67%. El que ha tenido menor crecimiento, ha sido el bloque de cantidades continuas y discretas que de 7 ha pasado a 11, incrementando un 57.14%. Posición y forma han aumentado en 6, con una tasa de crecimiento del 50%. Finalmente, los atributos mensurables han pasado de 12 a 23, creciendo un 91.67%.

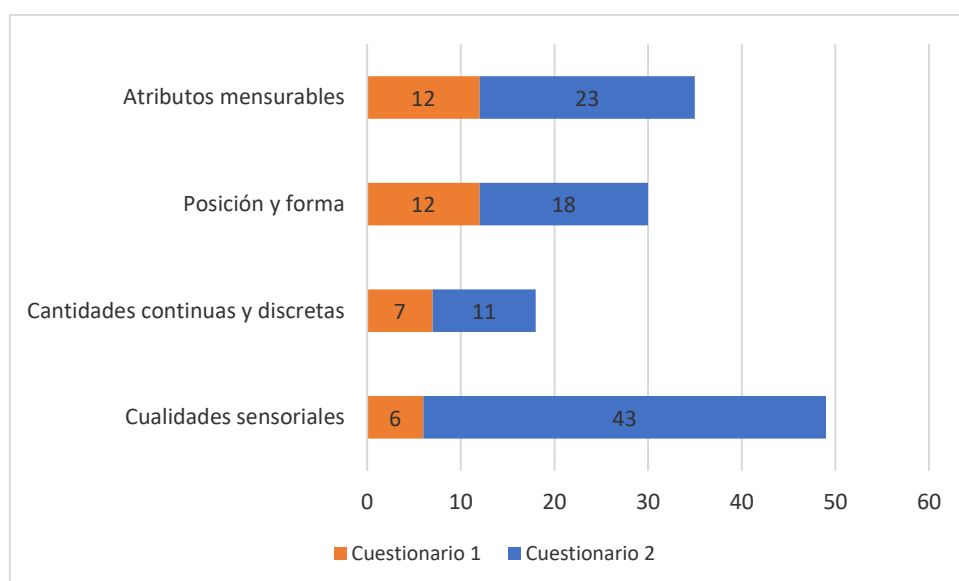


Figura 222. Objetivos detectados por los profesionales pre- post formación en el cuestionario.

Los objetivos específicos recogidos en el cuestionario se presentan descritos en el apartado 4.6.3 en el que, para cada uno de los conocimientos presentados en relación con los diferentes bloques de contenido, se han destacado los objetivos definidos por los profesionales.

El análisis de las documentaciones da lugar a la Figura 223. En esta, se recogen los objetivos que han planteado los profesionales para planificar sus propuestas mediante sus fichas de planificación de materiales. En el nivel de Infantil 0 (I0) han planificado actividades vinculadas, mayormente, al reconocimiento de las cualidades sensoriales (10), a reconocer la posición (7), a la forma (8) y a identificar los atributos mensurables (6).

Los profesionales de Infantil 1 (I1) han planteado un mayor número de actividades que Infantil 0 (I0), con un mayor número y diversidad de contenidos matemáticos. Concretamente, los únicos contenidos que no destacan en este nivel son la observación de cambios cualitativos, la distinción de números versus otras formas de representación gráfica, las seriaciones cuantitativas, la identificación del tiempo y las secuencias temporales.

Finalmente, en el nivel de Infantil 3 (I3), aumentan significativamente el número de contenidos respecto a Infantil 0 (I0) e Infantil 1 (I1). Concretamente, han aparecido todos los contenidos de todos los bloques temáticos referidos, a excepción de las secuencias temporales. Claramente, aumentan las propuestas diseñadas a medida que avanzan los cursos de la Escuela Infantil.

Las Tablas 207, 208 y 209 ilustran algunas de las planificaciones que han elaborado los profesionales de la Escuela Infantil. En ellas, se observan los objetivos matemáticos que persiguen; los contenidos, las capacidades, el diseño del material y las preguntas o intervenciones, andamios que pueden prever. Cabe destacar que se presentan tal y como las han elaborado los profesionales.

Las Figuras 224, 225 y 226 muestran las documentaciones que han desarrollado los profesionales a partir de estas actividades que han planteado. En estas, se recoge la observación que hace el profesional de las acciones que empeñan los niños en sus juegos y exploraciones.

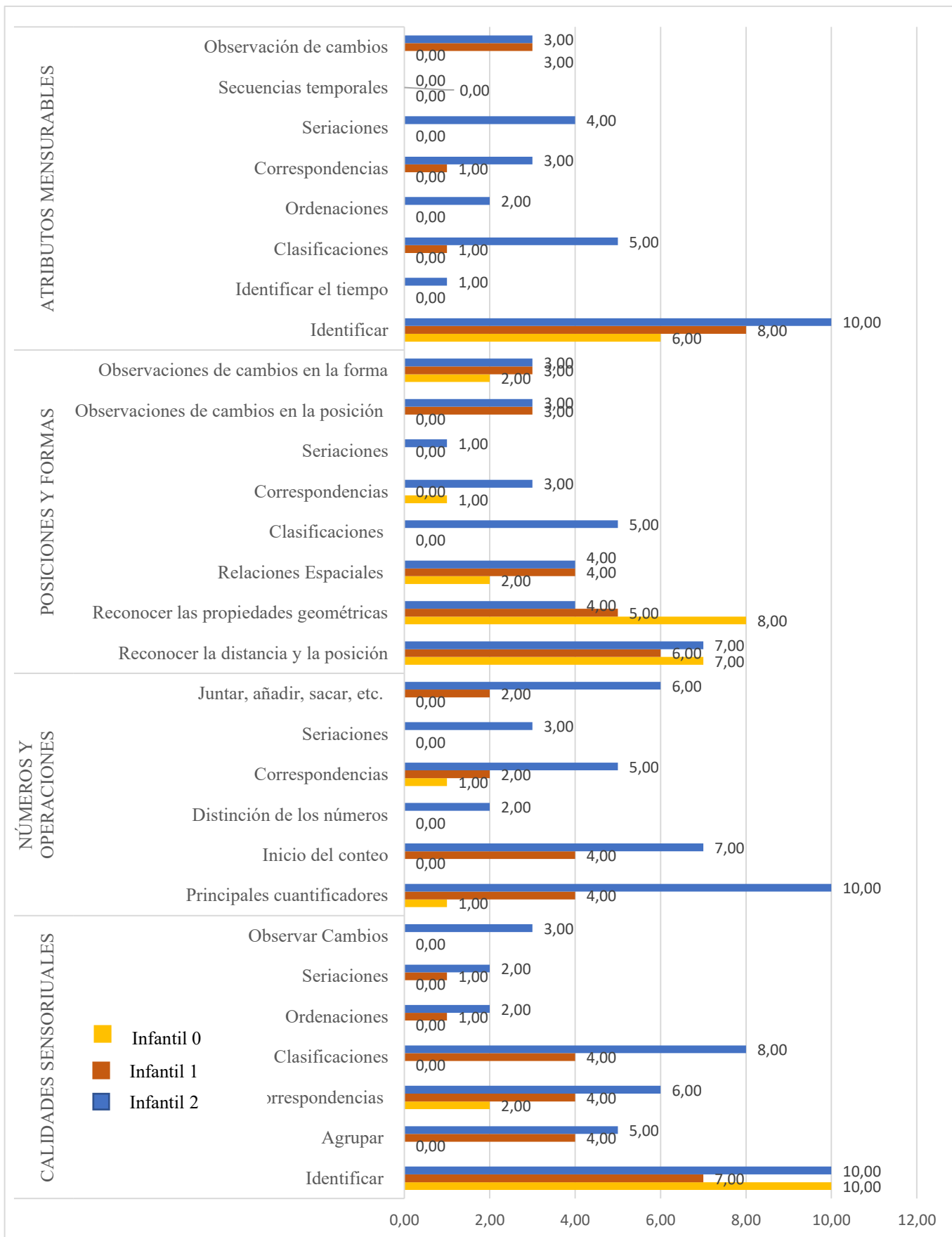


Figura 223. Objetivos post formación.

Tabla 207. Planificaciones 1-2 años.

NOMBRE DEL MATERIAL:

Encaje

NIVEL: Infantil 1

AULA: Zona polivalente

CAPACIDADES MATEMÁTICAS:

RECONOCER POSICIÓN DEL CUERPO

IDENTIFICAR ATRIBUTOS MEDIBLES

IDENTIFICACIÓN DE CUALIDADES SENSORIALES

CONTENIDOS MATEMÁTICOS:

Reconocimiento de la posición relativa, la dirección y la distancia en el espacio (dentro y fuera, sobre y debajo).

Reconocimiento de algunos atributos medibles de longitud y de gruesa de los objetos (grueso y delgado, largo cortos).

Reconocer las cualidades sensoriales: El color.

OTRAS CAPACIDADES Y CONTENIDOS

COMPARAR LOS ATRIBUTOS MEDIBLES O SEGÚN ATRIBUTOS CUALITATIVOS: clasificaciones, seriaciones (con un patón) en otro nivel o muy a final de cursos.

RECONOCER CARACTERÍSTICAS SENSORIALES: Si añadiéramos otros elementos como cuerdas: (rígido o modelable).

IMAGEN DEL MATERIAL:



LENGUAJE MATEMÁTICO:

Posición: sobre, bajo.

Medida: grueso- delgado, largo y corto agujero ancho o estrecho.

POSIBILIDAD DE DIÁLOGO Y PREGUNTAS

Teniendo en cuenta el nivel al que está dirigida la propuesta, ofreceremos preguntas sin esperar una respuesta verbal, buscando la respuesta a través del gesto por parte del niño. Si se cree adecuado se ofrecerán diferentes modelos por parte del adulto (aquí no pasa, el bastón es grueso...).

¿Pesa? Pones una pesa gruesa. Es larga. ¡Que gruesa! Esta quizás es más delgada. ¿Dónde ponemos las gruesas?

¿O las delgadas? Aquí ponemos las gruesas y aquí las delgadas.

Nota: Fuente EBMV Serra Sanferm

Tabla 208. Planificaciones 2-3

NOMBRE DEL MATERIAL:
SERIOACIONES

NIVEL: Infantil 2
AULA: Xerramecs

CAPACIDADES MATEMÁTICAS:

CONTENIDOS MATEMÁTICOS:

COMPARAR CUALIDADES SENSORIALES

Seriaciones según el criterio cuantitativo.

COMPARAR LAS CANTIDADES

Seriaciones según la posición y la forma.

Observar los cambios de tipo cuantitativo: añadir, sacar...

Reconocer la posición relativa: junto a, debajo de...

OTRAS CAPACIDADES Y CONTENIDOS

IDENTIFICAR LAS CUALIDADES SENSORIALES: el color.

RECONOCER LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS: La línea recta.

IMAGEN DEL MATERIAL:



LENGUAJE MATEMÁTICO:

Conteo: 1,2,3...

muchos, pocos, algunos, ninguno.

Lleno, vacío.

Grande/pequeño.

Color.

Sobre/bajo – arriba/bajo.

POSIBILIDAD DE DIÁLOGO Y PREGUNTAS

¿Qué puedes hacer con este material?

¿Por qué lo has puesto aquí?

¿Qué pasa si pulsamos este (poniendo un botón que no sigue el patrón)

¿Cuántos tenemos? ¿Hay muchos? ¿Pocos? ¿Les contamos? 1, 2, 3...

¿Cómo está el cesto? ¿Está lleno, vacío?

¿Qué más podrías hacer con este material?

¿Se pueden cambiar los patrones de repetición de uno o de dos elementos?

Nota: Fuente EBMV Caputxins

Tabla 209. Planificaciones 0-1 años.

NOMBRE DEL MATERIAL:
CAJA CON PRISMOS Y CILINDROS

NIVEL: Infantil 0
AULA: Xics

CAPACIDADES MATEMÁTICAS:

IDENTIFICAR LAS CUALIDADES SENSORIALES

COMPARAR LAS CUALIDADES SENSORIALES

IDENTIFICAR CANTIDADES

COMPARAR LAS CANTIDADES

IDENTIFICAR LAS FORMAS Y LAS POSICIONES

COMPARAR LAS POSICIONES Y LAS FORMAS

CONTENIDOS MATEMÁTICOS:

Reconocer las cualidades sensoriales: los colores, las texturas.

Correspondencias cualitativas y cuantitativas: una pieza en cada agujero, ser de la misma textura y/o color.

Reconocer algunas propiedades geométricas elementales de las formas Bidimensional, figuras geométricas.

Tridimensionales: prismas y cilindros.

Identificar las cantidades elementales: 1,2,3

Relaciones espaciales elementales, dentro – fuera.

OTRAS CAPACIDADES Y CONTENIDOS

IDENTIFICAR LAS ATRIBUTOS MEDIBLES Reconocer los atributos medibles de las cosas: tamaño grande - pequeño, longitud, alto - bajo, masa, ligero – pesado.

IMAGEN DEL MATERIAL:



LENGUAJE MATEMÁTICO:

Los colores y la descripción de las texturas

Figuras geométricas redonda o círculo

Tridimensionales: prismas y cilindros

Relaciones especiales elementales: dentro - fuera

Identificar las cantidades elementales: 1,2,3

POSIBILIDAD DE DIÁLOGO Y PREGUNTAS

Ponemos palabras a sus acciones, cuando el niño explora el objeto de la Cesta, describimos las cualidades sensoriales del objeto y el nombre del objeto.

¿De qué color es? ¿Qué son iguales?

¿De qué forma es?

¿Que lo puedes coger? ¿Dónde lo pondremos a este? ¿Has visto? ¿Son iguales? ¿Este es como este? Hay dos iguales. Uno es más largo. El otro es más corto.

Es aquí dentro, está aquí fuera.

Nota: Fuente EBMV Horta Vermella



Comparación de atributos mensurables
Perímetro: Comparando la longitud de las cuerdas con el perímetro de la base de mimbre, los círculos, el cuerpo y la columna.

Figura 224. Documentaciones I. Fuente: EBMV Serra Sanferm.



Figura 225. Documentaciones II. Fuente: EBMV Caputxins.



Clasificación y discriminación.

Figura 226. Documentaciones III. Fuente: EBMV Serra Sanferm.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Capítulo 6. Discusión y conclusiones

Presentación

La investigación que se ha realizado ha puesto de manifiesto que la educación matemática tiene un valor fundamental dentro del ciclo 0-3 con una entidad propia, con sus contenidos, procesos y métodos específicos. Durante los tres primeros años de vida, aparecen las primeras matemáticas, informales e intuitivas, como el eslabón necesario y la base para poder desarrollar los posteriores aprendizajes (NCTM, 2003). Sin tener un carácter formal, aparecen, se aprenden y construyen a partir de los espacios y materiales de juego, de exploración y de manipulación y de las propias rutinas y acciones de la vida cotidiana.

Los tres primeros años de vida, como base de todo el desarrollo, son fundamentales por su impacto e incidencia a lo largo de toda la vida, y van a sostener al niño, al joven y al adulto. Como los cimientos de una casa, hay que procurar que sean sólidos y de alta calidad. Por ello, las personas responsables al cuidado de los niños en este primer ciclo educativo han de ser conocedoras de su gran responsabilidad y actuar con conocimiento y conscientes del valor de su trabajo. En este sentido, reconocer la importancia de las primeras matemáticas y dotar de conocimiento a los profesionales de las Escuelas Infantiles para que faciliten su desarrollo es, también, valorar la calidad de las prácticas educativas propias de las Escuelas Infantiles, dignificando la labor de los profesionales que las integran.

Por ello, reconocer e identificar qué conocimientos tienen los profesionales de las Escuelas Infantiles para diseñar las propuestas de juego, exploración y manipulación para favorecer estas primeras matemáticas ha sido la finalidad principal de esta investigación.

Los siguientes apartados parten de la respuesta a la pregunta de investigación creando un diálogo entre el marco teórico de referencia elaborado y los resultados obtenidos, generando así una discusión y, seguidamente, presentando las conclusiones.

Finalmente, en el tercer apartado de este capítulo, se recogen las limitaciones de la investigación y las futuras líneas o perspectivas de futuro a que dan lugar los avances de este estudio.

6.1 Discusión

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, la literatura y los datos muestran que cabe ahondar en diferentes subdominios de conocimiento vinculados a aspectos disciplinares y didácticos (Ball et al., 2008; Godino et al., 2017; Carrillo et al., 2018; Alsina y Delgado, 2021; 2022). Por ello, se van a ir tratando con la finalidad de presentar el debate existente la teoría y los resultados obtenidos. Con la pretensión de organizar la información se arma el cuerpo de este apartado siguiendo la misma estructura que se ha utilizado en la presentación de los resultados. En primer lugar, se abordan los aspectos vinculados al conocimiento matemático y, a continuación, a los aspectos didáctico-matemáticos.

En relación con el Conocimiento Matemático, este estudio se ha centrado en los Conocimientos Matemáticos Intuitivos e Informales (C-IeI) propios del primer ciclo de Educación Infantil. En este sentido, los conocimientos de los contenidos y de los procesos matemáticos corresponden a las matemáticas propias del segundo ciclo de Educación Infantil.

En lo concerniente a los Conocimientos Didáctico-Matemáticos, acorde con los contenidos que se introdujeron en la formación, se ha analizado el Conocimiento sobre la Planificación y Gestión de Actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA), concretamente, vinculado al diseño de los espacios y materiales. Además, se ha considerado oportuno indagar entorno al Conocimiento sobre las Formas de Aprendizaje de las Matemáticas en la infancia (C-FAM), y al Conocimiento sobre las Orientaciones Curriculares (C-OCU) siendo, ambos subdominios, necesarios para diseñar las propuestas de juego, exploración y manipulación a través de los espacios y materiales.

6.1.1 Conocimientos matemáticos de los profesionales de la Escuela Infantil

En cuanto a los **Conocimientos Matemáticos**, en términos generales, los resultados muestran la clara necesidad de que los profesionales conozcan las matemáticas informales o intuitivas propias de estas primeras edades y su importancia delante la repercusión que tienen a lo largo de toda la vida como base de los posteriores aprendizajes. Diferentes profesionales apelan a su importancia (Alsina, 2006, 2015;

Baroody, 2007; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014) y recomiendan que el profesorado de infantil tenga un amplio conocimiento sobre ellos. Claramente, los resultados evidencian que después de la formación los profesionales han incorporado mejoras en los diseños de sus espacios y materiales porque gracias a la formación, han incorporado conocimientos sobre los contenidos matemáticos que pueden favorecer en estas primeras edades.

Balfanz (2004) expone que, en las aulas de Infantil, todavía existen profesionales sin un conocimiento profundo del contenido matemático. Los profesionales de las EBMV, antes de la formación, expresaron sus inquietudes y necesidades formativas respecto el vacío que sentían al preparar los espacios y materiales con contenido matemático. Concretamente, los resultados cualitativos y cuantitativos expuestos en los apartados 5.1.1 y 5.3.1 sobre los conocimientos en general de estas primeras matemáticas, muestran que los profesionales requerían incorporar conocimiento específico entorno a qué referían las matemáticas intuitivas e informales correspondientes a este ciclo educativo y expresaban la necesidad de comprender qué matemáticas podían desarrollar los niños de 0 a 3 años.

Después de la formación, los profesionales ya no expresaban la necesidad de comprender qué matemáticas podían desarrollar los niños en estas edades y fueron capaces de reflexionar y compartir los diferentes conocimientos correspondientes a los diferentes bloques de contenido. Al mismo tiempo, expresaban tener muy claros los contenidos y capacidades que se pueden desarrollar a partir de las propuestas que les ofrecían. Concretamente, la mayoría de los profesionales (89%), después de la formación, conocía y definía a qué se referían estas primeras matemáticas mientras que antes, solo un (17%) manifestaba conocerlas y, solo dos profesionales, de forma parcial, podían definir las.

A continuación, se interpretan los resultados correspondientes a los distintos bloques de contenido.

Las cualidades sensoriales

Respecto a las cualidades sensoriales, los resultados obtenidos han evidenciado que todos los contenidos de este bloque aumentan después de la formación con una tasa de crecimiento del 154.05% (de 37 contenidos detectados antes de la formación se pasa a 94 después). En este sentido, las aportaciones de los diferentes autores avalan como a través de la observación, la manipulación, la experimentación y el juego libre, los niños

desarrollan desde edades muy tempranas (Geist 2014) el pensamiento algebraico a partir de las acciones de identificar, reconocer, ordenar, comparar, seriar, etc. cualidades sensoriales (Alsina, 2015; Baroody, 1987; Canals, 1992; Clements y Sarama, 2015; Goldschmied y Jackson, 2007; Ginsburg, et al., 1998; Lakoff y Núñez, 2000; Montessori, 1914; Piaget, 1963; Tall, 2013). Este conjunto de acciones da lugar al inicio del proceso de generalización (Papic Mulligan y Mitchelmore, 2011) que nace como una actividad humana innata que llevan a cabo los niños de forma natural (Mason, 2008; Acosta y Alsina, 2020) y se define como álgebra temprana (Alsina, 2019).

Aun así, los datos presentan también que existen diferencias entre el pre y el post en función del contenido o la capacidad a la cual se refiere. Por un lado, aparecen contenidos con una fuerte recurrencia y otros poco frecuentes. Ejemplo de ello son las ordenaciones, seriaciones y observaciones de cambios cualitativos, que ni antes ni después de la formación aparecen de manera recurrente. Ello puede explicarse por la desvinculación del conocimiento algebraico de las matemáticas en las primeras edades que presenta Alsina (2019) donde muestra el vacío que se ha generado al no vincular explícitamente al álgebra a las acciones, por ejemplo, de clasificar, ordenar o seriar y donde expone la necesidad de dar un paso más allá fomentando el desarrollo del conocimiento del profesional para que promueva actividades y propuestas que faciliten acciones que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico, evidentemente, adaptadas al nivel educativo correspondiente.

Por lo contrario, la identificación de cualidades sensoriales aparece tanto en el primer cuestionario como en el segundo, con una extensa mayoría, 24 (86.4%) y 26 (93.6%) profesionales que respectivamente identificaban este contenido.

Las aportaciones teóricas explican la importancia de incorporar el álgebra temprana en los primeros años de escolarización (Davis, 1985; Vergnaud, 1988; Kaput y Blanton, 2001; Carpenter, Franke y Levi, 2003; NCTM, 2003) destacando que esta es la manera de pensar y actuar sobre los objetos, las relaciones, las estructuras y situaciones matemáticas (Carpenter et al., 2003; Carraher, et al., 2000; Kaput, 1998, 2000) que nacen y hacen los niños pequeños.

Como se ha expuesto, Alsina (2015) presenta el paralelismo entre el álgebra y el objeto matemático de las cualidades sensoriales siendo el razonamiento algebraico un conjunto de capacidades que implican representar, generalizar y formalizar patrones y

regularidades (Godino y Font, 2003). Aspectos vinculados a los procedimientos de seriar, clasificar, relacionar (Alsina, 2015) claves en el corazón de las matemáticas y palpables en cualquier nivel educativo. Por ello no es de extrañar que en la formación se introdujeran contenidos directamente vinculados al álgebra temprana y estos fueran fácilmente incorporados por los profesionales. De todos modos, no todos los contenidos fueron incorporados de la misma manera por todos los participantes y se contemplan como fundamentales por ser la manera de pensar y actuar sobre los objetos, las relaciones, las estructuras y situaciones matemáticas.

Las cantidades continuas y discretas

En relación con las cantidades continuas y discretas (números y operaciones) cabe destacar que no existen grandes diferencias entre los datos pre y post en tanto que la tasa de crecimiento es de un 31.71% (de 41 contenidos detectados antes a de la formación se pasa a 54 después). Por tanto, se observa un menor impacto de la formación.

Los conocimientos de los profesionales aumentan sensiblemente en lo que refiere a las correspondencias cuantitativas y a los contenidos vinculados a las acciones de juntar, sumar, añadir, restar, sacar y separar. Aun así, en relación con el conteo, después de la formación se presenta una sensible bajada en la frecuencia de aparición. Ello podría explicarse porque antes de la formación, delante del desconocimiento por parte de la mayoría de los profesionales sobre qué matemáticas son propias del ciclo 0-3, con el fin de proporcionar una respuesta, apelaban a sus creencias sobre las matemáticas en general y al conocimiento socialmente más extendido vinculado a esta área: el número y el conteo.

También se presentan contenidos muy poco visibles. De hecho, todos los contenidos exceptuando el reconocimiento de los principales cuantificadores, son reconocidos por menos de un 45% de los profesionales. Esta aparente dificultad de reconocer los contenidos vinculados a las cantidades continuas y discretas (números y operaciones) por parte de los profesionales, puede estar vinculada a las creencias que ciertos contenidos son propios de edades más avanzadas (Castro y Castro, 2016). También puede explicarse por la concepción de que la representación del número no está presente en los primeros meses de vida y se desarrolla a lo largo de los primeros años (Clearfield, 2004; Wakeley, et al., 2000) o a la creencia de que la construcción del concepto de número y del conteo va por etapas y, antes de integrar la noción de conservación del número, el niño debe integrar en un solo sistema la capacidad de clasificar y de seriar (Piaget y

Inhelder, 1971). Clements y Sarama (2015) explican que esta teorización de Piaget ha dado a entender que en los primeros años de vida no hay lugar para los números. De hecho, Lago et al. (2012) explican que a lo largo de la historia aparecen diferencias y siguen siendo un ámbito para la investigación las capacidades de los niños de estas primeras edades y los números.

Según Clements y Sarama (2015) la argumentación Piagetiana tiene su lógica inicial porque los niños deben conocer con profundidad estas capacidades (clasificar y seriar) para entender muy bien los números y llegar a ser muy habilidosos con ellos. Aun así, no debe tomarse como redundantes y concluyen que los niños aprenden acerca del conteo y de los números mucho antes de dominar estas capacidades y añaden, también, que la práctica del conteo puede ayudar significativamente a desarrollar la habilidad de clasificar y seriar. Según Alsina (2015) las aportaciones de Piaget tienen un claro sentido pues destacan que la noción de la cantidad, asociada al número, se integra cuando se ha adquirido la doble capacidad de la clasificación jerárquica y, a su vez, la seriación. Ello no quiere decir que a medida que el niño desarrolla las capacidades de identificar, relacionar y operar con las cualidades de los objetos, estructura y prepara su mente para identificar, relacionar y operar con números y viceversa, siendo procesos paralelos que se retroalimentan.

También, cabe destacar que el contenido relativo a la distinción entre números escritos y otras formas de representación escrita, de acuerdo con la literatura, no aparece ni antes, ni después de la formación. Ello es propio dado que éste es un contenido directamente vinculado al segundo ciclo de Educación Infantil (Alsina, 2015), no obstante, cabe considerarlo en la Escuela Infantil como parte de la naturalización del número en los contextos reales de las Escuelas, del mismo modo que ocurre con las palabras en los cuentos y los textos en las documentaciones. La representación gráfica del número forma parte de la vida de los niños y aunque no sea un objetivo en la tarea escolar infantil, este debe formar parte de sus contextos de forma espontánea y natural. Obviarlos u ocultarlos pensando que son propios de estadios superiores únicamente lo convierte en un obstáculo a su aprendizaje (Clements y Sarama, 2015). Lejos de querer primarizar la Escuela Infantil que durante mucho tiempo ha arraigado grandes estereotipos que han dañado fuertemente lo que se debería hacer en la etapa 0-6 (Alsina, 2009), mediante los cuentos, en las prácticas educativas diarias mediante rutinas, en la Escuela Infantil, los números escritos pueden aparecer y formar parte del contexto real de los niños. Como se ha

expuesto en el marco de referencia, según Alsina (2015) no es un objetivo escribir, ni reconocer los números escritos, hasta finales del segundo ciclo de Educación Infantil o primer ciclo de Educación Primaria.

Las posiciones, las formas y las figuras.

En relación con las posiciones, las formas y las figuras, la tasa de crecimiento es de 17.91% (de 67 contenidos detectados antes de la formación se pasa a 79 contenidos detectados después de la formación). Ello se explica porque la cantidad de contenidos detectados antes de la formación era muy superior y después de la formación se mantiene. En este sentido los contenidos que mayoritariamente se han detectado son el reconocimiento de la posición relativa y la distancia y el reconocimiento de las formas. De todos modos, siguen existiendo muchos contenidos muy poco visibles como, por ejemplo, relacionar y observar posiciones o figuras que no llegan a superar, en ningún caso, el 35% de frecuencia de aparición.

Estos resultados son altamente preocupantes, al considerar que el pensamiento espacial y el reconocimiento de las figuras es fundamental porque forma parte de una habilidad humana esencial que contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas (Clements y Sarama, 2015). Además, tiene una fuerte incidencia en aspectos matemáticos, incluyendo la geometría, la medición, y las relaciones parte-todo (NRC, 2014). Como se ha expuesto en el marco teórico, son muchas las investigaciones que avalan como el dominio del pensamiento espacial condiciona otros dominios matemáticos más globales porque las funciones mentales que abarca el pensamiento espacial son muy amplias: categorizar, representar, abstraer, etc. (Clements y Sarama, 2007).

Como también se ha descrito, Fernández y Arias (2013) señalan que establecer relaciones posicionales y descubrir las figuras y formas son dos capacidades que están estrechamente vinculadas entre sí y vinculadas al movimiento (Alsina, 2015). El marco teórico de esta investigación presenta la definición de movimiento libre con sus fases de desarrollo presentadas y desarrolladas por Pikler (1985) junto con el desarrollo del conocimiento espacial y de las figuras al ser, diferentes autores, que vinculan el conocimiento de las posiciones y las figuras con el despertar y el despliegue del movimiento. En este sentido apuntan la importancia de que para aprender estas matemáticas hace falta vivirlas, la experiencia física, a través de la

manipulación o experimentación con todo el cuerpo (Alsina, 2006, 2015; Castro, 2006; de Castro y Flecha, 2012; Fernández y Arias, 2013; Geist, 2014, Goldschmied, 1990; Malaguzzi, 2001; NCTM, 2003).

Estableciendo una relación prácticamente paralela, el conocimiento del espacio va ligado al conocimiento del entorno y de los objetos o elementos que lo configuran y viceversa. Del mismo modo que el conocimiento de los objetos, en cierta manera, está vinculado al espacio siendo, la observación y el movimiento el mecanismo que permite descubrirlos.

La literatura muestra que los niños pequeños son sensibles a las figuras y las formas desde el primer año (Clements y Sarama, 2015) y que los bebés antes de los dos años son capaces de identificar algunas figuras y sus propiedades básicas (Geist, 2014) llegando a, entre los 24 y 36 meses, tener mucha información sobre la figuras y formas de los objetos y las distancias, reconociendo el espacio a partir de los diferentes puntos de referencia que han identificado y juzgando las distancias. De este modo, los niños pequeños, viven el espacio, lo exploran con los ojos, con las manos, a través de sus gestos, sus movimientos y sus marchas y, durante el segundo año de su vida, el diálogo con el espacio y las figuras se enriquece entrando en una nueva dimensión gracias a la capacidad de abstracción y representación de las figuras, espacios y distancias (Castro, 2006).

Los atributos mensurables

Los resultados muestran, en términos generales, una tasa de crecimiento poco significativa, de 10.42%. Antes de la formación se identificaron 48 contenidos respecto a este bloque y después de la formación fueron 53. Ello, junto con el hecho de que las frecuencias de aparición son muy dispares, resulta sorprendente porque los autores exponen que de los 0 a los 3 años se viven muchas experiencias donde aparecen los atributos mensurables durante el juego, la exploración y la manipulación de los objetos y los materiales (Alsina, 2015; de Castro, et al., 2015). Aunque, en el primer ciclo de Educación Infantil, los niños no puedan hacer valoraciones exactas sobre las cantidades discontinuas (Clements y Sarama, 2015), viven constantemente en interacción con los elementos y experimentan los pesos, las longitudes, los volúmenes, el tiempo, la temperatura, etc. (Alsina, 2015).

De hecho, el reconocimiento de los atributos mensurables, tanto antes como después de la formación, lo identifican una extensa mayoría. Aun así, hay contenidos que no se han

identificado o se han identificado de manera muy débil siendo las frecuencias de aparición muy bajas, inferiores al 20%. Por ejemplo, las clasificaciones, las ordenaciones, las correspondencias y las seriaciones (todos estos contenidos exceptuando las clasificaciones, antes de la formación no se identificaban y, después de la formación, a excepción de las seriaciones, pasan a hacerlo solo entre 2 y 3 profesionales, siendo el incremento poco significativo). Esta disparidad en la frecuencia de los resultados, como se ha descrito, podría explicarse por el carácter introductorio de la formación.

Otro dato significativo es que el contenido de identificar el tiempo no se reconoce ni antes ni después de la formación, siendo este el único contenido invisible para todos los participantes. La literatura expone como se adquiere esta capacidad mediante las rutinas, día a día, gracias a la repetición que les permite incorporarlo junto a las secuencias temporales. Por ello, numerosos autores de diferentes corrientes coinciden en la importancia del tiempo y las rutinas de la vida cotidiana en la Escuela Infantil.

6.1.2 Conocimientos didáctico-matemáticos

En cuanto a los **conocimientos didáctico-matemáticos**, en términos generales, se destaca que los profesionales de las EBMV han incorporado nuevos conocimientos didácticos sobre como aprenden matemáticas los infantes, sobre el diseño de los espacios y los materiales con contenido matemático y sobre cómo acompañar el juego de los niños. En este sentido, los profesionales de la Escuela Infantil, como se ha descrito en los resultados, han reflexionado sobre sus prácticas y han incorporado elementos de mejora a partir de la planificación de nuevos materiales, revisando y mejorando los que ya tenían e incorporando también la documentación pedagógica como herramienta para identificar las acciones matemáticas de los niños.

De hecho, la documentación pedagógica ha servido, como exponen Acosta y Alsina (2016), para observar y analizar las prácticas educativas y para interpretar, confrontar, dejar constancia visual y compartir las acciones matemáticas que desarrollan los niños. Siendo, además, el instrumento que ha permitido compartir, reflexionar y concertar diferentes puntos de vista, tomar conciencia de cómo los infantes construyen matemáticas y tomar decisiones sobre la mejora educativa.

A continuación, se presenta el debate existente entre la teoría y los resultados obtenidos referente a los conocimientos sobre las siguientes cuestiones: las formas de aprendizaje

de las matemáticas; la planificación y el diseño de los espacios y los materiales para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades; el papel del lenguaje y la intervención del adulto y las orientaciones curriculares.

Conocimiento sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas.

Antes de la formación, los profesionales mostraron la necesidad de conocer como aprenden matemáticas los niños de los 0 a los 3 años. En este sentido partían principalmente de la observación del niño y del momento evolutivo en que éste se encontraba para diseñar los espacios y sus propuestas. Durante el grupo de discusión no hacían alusión directa a los referentes teóricos para explicar o definir como aprenden los niños, pero, mediante las observaciones no participantes, se podía comprobar con qué criterios diseñaban los diferentes espacios o ambientes de juego.

Después de la formación, los profesionales mostraron haber incorporado conocimiento sobre como aprenden matemáticas los niños en estas primeras edades. Expresaron conocimientos específicos sobre como aprenden matemáticas aludiendo a las capacidades de identificar, relacionar y observar cambios con las cualidades sensoriales, las posiciones y las figuras, las cantidades continuas y discretas y los atributos mensurables.

Los datos recogidos mediante los diferentes instrumentos han señalado que, antes y después de la formación, los profesionales consideraban que los niños en estas primeras edades aprenden y se desarrollan gracias al juego, la exploración y la manipulación. Los niños libremente experimentan con los materiales y manipulan los objetos formulando sus hipótesis y descubriendo las cualidades y propiedades de los diferentes elementos mediante el ensayo y error.

Los resultados también han evidenciado que los profesionales presentan en sus propuestas elementos cotidianos mediante los cuales los niños aprenden matemáticas a partir de contextos reales.

Todo ello responde a las aportaciones teóricas sobre la importancia experiencial y el juego libre, la autonomía del niño y el respeto por sus intereses. En este sentido, se observa que las propuestas de los profesionales, aunque de una manera ciertamente inconsciente, parten del concepto de este primer mundo corpóreo (Tall 2013), o matemática emergente que nace de la percepción y la interacción con objetos (Geist, 2014) y las reflexiones o relaciones que se establecen a partir y entre estos objetos (Alsina, 2015).

De todos modos, antes de la formación, no se refirieron a las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños en estas primeras edades como punto de partida para sus diseños y propuestas. De manera generalizada los profesionales manifestaron necesidades formativas entorno a cómo aprenden los niños matemáticas porque al no reconocer con seguridad qué matemáticas desarrollan los niños en estas primeras edades, solo recordaban algunas propuestas muy consolidadas como el juego heurístico o el cesto de los tesoros.

Contrariamente, después de la formación, fueron capaces de explicar cómo aprenden matemáticas los niños, concretamente referenciaron como a través de la observación, el juego, la experimentación y la manipulación los niños en estas primeras edades accionan sobre los objetos y el entorno inmediato construyendo el pensamiento matemático.

También compartieron tener mayor seguridad y mayor conocimiento para identificar las acciones que hacen los niños y como pueden facilitar su desarrollo mediante los espacios y materiales. Ejemplo de ello se recoge en las documentaciones que elaboran después de la formación donde son capaces de identificar las acciones matemáticas que llevan a cabo los niños.

Aun así, seguían sintiendo la necesidad de desarrollar más formación específica que les ayudase a incorporar con más seguridad estos conocimientos y practicar la observación de las acciones matemáticas, dado que necesitaban todavía apoyarse en los documentos proporcionados en la formación para poder interpretar las acciones que recogían de los niños.

En este sentido, los datos entorno al sentimiento de preparación muestran ciertas contradicciones antes de la formación. Por un lado, más de la mitad de los profesionales se sentían medianamente preparados (57%) aun así, solo un 42% expusieron haber recibido formación específica en este ámbito.

Por otro lado, la mayoría de los técnicos en Educación Infantil expresaban no haber recibido formación inicial en este ámbito (no 39% frente a sí 7%), mientras que los profesionales con formación en magisterio expresaron haber recibido formación inicial en este ámbito (sí 50% frente a no 3%). Pero los datos muestran que los profesionales formados en magisterio se sienten medianamente preparados, siendo solo 2 los que se sentían preparados.

Sorprendentemente, por lo que se refiere a la formación continua, ningún profesional indicó haber recibido formación continua en didáctica de las matemáticas durante los años que llevaba trabajando, habiendo el 47% de los profesionales con más de 10 años de experiencia.

Ello invita a pensar que bastantes profesionales pensaban que las matemáticas de estas primeras edades son simples y cualquiera puede enseñarlas (de Castro, 2016) en tanto se sentían medianamente preparados sin haber recibido formación específica.

Conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales.

En cuanto a los **conocimientos sobre la planificación y el diseño de los espacios y materiales**, antes de la formación, los profesionales necesitaban incorporar más recursos y herramientas para enriquecer sus propuestas con contenido matemático y mejorarlas o para diseñar nuevos espacios y materiales con contenido matemático. En este sentido, antes de la formación, se basaban en sus conocimientos sobre la evolución madurativa del niño, sus intereses y necesidades específicas y en términos estéticos o de belleza, no considerando propiamente los aspectos matemáticos. De hecho, la mayoría de los profesionales de las EBMV habían recibido una formación continua específica durante 4 años sobre el diseño de los espacios basada en las de Reggio Emilia con la pedagogía de Loris Malaguzzi (Hoyuelos, 2006) centrada en el niño. De esta manera, en las EBMV existía lo que Galardini (2010) expone cuando habla del lenguaje silencioso de los espacios que transmiten y comunican las ideas y los valores de los profesionales que los han preparado, definiendo el proyecto educativo del centro y la imagen del niño que integran.

En parte, por ello, cuando diseñan sus propuestas, piensan en el juego que el niño va a desarrollar, en que este sea un espacio accesible y respetuoso con sus intereses y necesidades, que facilite la autonomía, que sea agradable y cuidado, sugerente y atractivo y de mucha calidad (Casellas et al., 2016). Tienen un concepto compartido en el claustro sobre cómo han de prepararse estos espacios y es que, en este sentido, como expone Martín (2016), existe una vinculación entre el concepto de infancia que tienen y la manera de organizar, seleccionar y presentar los espacios y materiales.

De modo que, tanto en las observaciones no participantes como en las documentaciones, se ha podido ver que una extensa mayoría de profesionales tienen la capacidad de diseñar y planificar los espacios y materiales con los criterios referidos en el marco teórico para diseño de los espacios y materiales de la Escuela Infantil según los conceptos de polisensorialidad, iluminación, accesibilidad y autonomía, estética y belleza, orden e intencionalidad, naturaleza, colectividad e individualidad, transformación, dimensión y ubicación, adaptabilidad y polivalencia y seguridad. En este sentido, se corresponde con lo que la literatura expresa sobre la importancia y la calidad de los materiales que tienen que ser naturales y de calidad, pensados y diseñados según unos criterios específicos. Donde la selección de los materiales no es casual sino calve para ofrecer un espacio rico en contenidos, estimulante y armónico, respondiendo a los criterios de diseño de espacios definidos anteriormente como la confortabilidad, seguridad y multifuncionalidad (Abad, 2006; Ceppi y Zini, 2009).

Después de la formación, los profesionales manifiestan haber incorporado nuevas ideas y recursos para planificar sus propuestas de juego, exploración y manipulación con sentido matemático. En este sentido, las expectativas que tenían sobre la formación en relación con la necesidad de incorporar nuevos recursos e ideas para diseñar materiales con contenido matemático se han cumplido. De hecho, los resultados muestran que preparan los espacios y los materiales siguiendo su concepción sobre el espacio, enriquecida de esta mirada matemática. Antes de la formación, aunque los espacios respondieran a un criterio de ordenación o clasificación de los materiales, los profesionales lo vinculaban a un sentido estético y no matemático y, por lo tanto, disponían los materiales sin contemplar qué acciones matemáticas iba a desempeñar el niño. Después de la formación, ya conocen qué matemáticas refieren a estas primeras edades y como las aprenden los niños y, por lo tanto, diseñan sus propuestas con este conocimiento, buscando que además estos materiales permitan descubrir los diferentes contenidos y capacidades de los diferentes bloques temáticos.

De hecho, las evoluciones de los materiales rediseñados o los nuevos espacios diseñados ofrecen la posibilidad a los niños de desarrollar acciones que antes no podían desarrollar porque no tenían un material que lo facilitase. Por ejemplo, las acciones de medir longitudes con los tubos de cartón de diferentes alturas y con las cuerdas de diferentes longitudes presentadas en las instalaciones artísticas, o los apareamientos por formas y

colores y la composición de las primeras seriaciones con los materiales diseñados específicamente para ello.

Acorde con ello, los profesionales destacan tanto antes como después de la formación, la importancia de que los espacios y materiales estén delimitados para que permitan llevar a cabo la propuesta con concentración desarrollando un juego rico, elaborado y respetuoso con las acciones de los niños. Espacios que se adaptan en función de cómo se desarrolla el juego y que se modifican de una sesión a la otra o reajustan durante la sesión (ejemplo de ello son los espacios de construcciones o las sesiones de juego heurístico o de instalaciones artísticas que han ido evolucionando a lo largo de las sesiones o los espacios de motricidad fina que se reordenan para poder volver a centrar la tarea cuando el material se ha dispersado, en la misma sesión).

Los resultados también muestran que los profesionales pueden documentar las acciones que desarrollan los niños gracias a estos conocimientos disciplinares y que, estos procesos de observación y documentación, les ayuda a mejorar sus propios diseños y propuestas.

Ejemplo de ello son las documentaciones mostradas en las que los profesionales identifican, en función del material que han diseñado, las acciones que desempeñan los niños. Y es que, en este sentido, diferentes autores como Battini (1982) e Iglesias (2009), entre otros, han determinado que el diseño de los espacios educativos son agentes decisivos en el aprendizaje de los niños y, en cierta manera, condicionan el aprendizaje. Ello, acorde con los resultados, explica que las propuestas de espacios y materiales inciden en las acciones matemáticas que desarrollan los niños, pues los profesionales son capaces de identificar diferentes capacidades y contenidos matemáticos en función del espacio y el material específico.

Cabe destacar, también, que los resultados muestran que, en función del conocimiento matemático que tenga el profesional, éste será capaz o no de identificar las acciones matemáticas que desarrolle el niño. En este sentido, antes de la formación existen diferencias en la detección de contenidos según el espacio de juego. Después de la formación, la media de contenidos detectados incrementa mostrando valores más próximos entre los diferentes espacios: instalaciones artísticas (6), juego heurístico (5.65), mesas de experimentación (5.38), juego de exploración (4.45) y el taller (4.09). Aun así, los contenidos que se detectan en cada uno de los espacios son diferentes, determinando

que el material y el espacio condicionan las acciones que los niños pueden desarrollar en ellos (Martín, 2016).

Por ejemplo, por un lado, de los espacios con mesas de experimentación destaca que, tanto antes como después de la formación, no aparecen ni las agrupaciones de elementos, ni las seriaciones y ni las ordenaciones cualitativas. Por otro lado, destacan los espacios con instalaciones artísticas, donde los profesionales detectaron todos los contenidos definidos por Alsina (2004, 2015). De hecho, la literatura muestra que este tipo de propuestas propician acciones sobre el espacio y el conocimiento y la utilización de objetos (Ruiz y Abad, 2016, 2019) y los profesionales destacaron que era muy interesante ver todas las acciones matemáticas que se habían desarrollado a partir de este tipo de propuesta, pensada específicamente con este fin.

También, cabe destacar que la formación desarrollada permitió a los profesionales de las EBMV cambiar su concepción sobre el juego heurístico, el de movimiento y el de las construcciones. Por ejemplo, el equipo de las EBMV había inconscientemente involucrado las propuestas de juego heurístico a espacios de exploración, otra propuesta educativa matemática, pero con unas finalidades y características sensiblemente diferentes. Específicamente, la literatura explica que el juego heurístico ha de permitir experimentar con diferentes objetos donde el reto es descubrir qué se puede hacer con ellos desarrollando diferentes acciones como poner, sacar, vaciar, etc., ofreciendo una variedad de mínima de 15 materiales diferentes fácilmente combinables entre ellos y manipulables (Goldschmied y Jackson, 2007).

Otro ejemplo, referente al espacio de construcciones. En el grupo de discusión previo a la formación, los profesionales expresaron su voluntad de impulsar estos tipos de propuestas porque las consideraban muy importantes, pero no sabían con seguridad como diseñarlas para despertar interés. De Castro (2011) explica que una posible respuesta al desinterés podría venir por la presentación o tipo de materiales que se plantea dado que varía según los intereses del profesional que diseña el espacio. Por lo tanto, sin el conocimiento adecuado, pueden presentarse espacios que no respondan a lo que los niños necesitan en cada momento. Como expone la literatura, el juego de las construcciones contiene diferentes fases (transporte, apilamientos, puentes, cerramientos, patrones, simetrías y representación) y cabe adaptarlos a materiales según el momento en que se encuentran los niños (de Castro, Barredo y González, 2011), por ejemplo, a los dos años

aproximadamente, pueden necesitar piezas sencillas como pilares y tablas cuadradas, pesadas y grandes con el fin de dar estabilidad a la construcción (Castro y Escorial, 2006).

Finalmente, se observa también la necesidad de dar continuidad a la formación en tanto se recogen diferentes evidencias que muestran aún carencias entorno los conocimientos didáctico-matemáticos. Ejemplo de ello, entorno a las propuestas de movimiento, juego simbólico, heurístico y de taller. En cuanto a los espacios de movimiento, la formación ha permitido que los profesionales comprendan la vinculación del movimiento con el desarrollo de otros contenidos vinculados no únicamente al área de las posiciones. Aun así, tanto antes como después de la formación, existen muchos contenidos y capacidades que no se identifican destacando, con mucha más frecuencia, los contenidos relativos a la posición. Este dato es preocupante por la gran vinculación que existe entre el desarrollo del conocimiento matemático y el movimiento del niño. El cuerpo es el medio de comunicación, el instrumento para expresarse, y, a través de él y de su acción sobre el medio, el niño va a poder acceder a la representación mental de la experiencia y a la progresiva internalización del mundo externo. Este proceso se inicia en esta etapa de inteligencia sensoriomotora a través del movimiento (Herrero, 2020, p. 88).

Referente al espacio de juego simbólico, los resultados muestran cierta disparidad. Por un lado, aparecen contenidos identificados por los profesionales que antes de la formación no identificaban y, por otro, hay contenidos que bajan en sus valores de aparición después de la formación. Además, antes de la formación, se recogen aportaciones de dos aulas distintas, donde los profesionales piden que se consideren para el análisis estos espacios, pero, después de la formación, ningún profesional solicita un análisis de los espacios de juego simbólico y ello, conlleva, a no poder recoger, ni contrastar cambios en sus prácticas, ni diseños. Este hecho, más la notable bajada de algunos de los contenidos detectados, invita a pensar que la formación ha introducido nuevos ejemplos de propuestas específicas para el desarrollo de las matemáticas en estas primeras edades que se han preferido explorar y contemplar, versus los que se desprenden propiamente del juego simbólico.

En relación con el juego heurístico, los profesionales expresaron haber descubierto su importancia y el planteamiento que debía tener esta propuesta. Aun así, los materiales que prepararon no eran muy variados. La cantidad de materiales que ofrecían no eran muchos y favorecían únicamente algunas acciones como las de meter y sacar o hacer torres con

las piezas. Variar más los materiales, ofreciendo unos 15 como expresan los autores, incrementaría y facilitaría otras acciones, retos e hipótesis, entre otros (Goldschmied y Jackson, 2007).

Respecto al taller, los datos obtenidos no son suficientes para mostrar si los profesionales tienen el conocimiento didáctico especializado en el diseño de los espacios de taller con contenido matemático. Únicamente se puede destacar que después de la formación identifican parcialmente algunos contenidos, otros no los identifican, y que el reconocimiento de las cualidades sensoriales es el más destacado.

Conocimientos sobre el papel del lenguaje y la intervención del adulto

Como se ha ido describiendo a lo largo de todo el estudio, el papel del educador en el diseño de los espacios y materiales es importante y clave para favorecer propuestas de alta calidad. Aun así, durante el desarrollo de la actividad, también es fundamental su presencia como observador activo, escuchando y documentando las acciones para interpretarlas (Rinaldi, 2001; Malaguzzi, 2021) y haciendo las intervenciones pertinentes de apoyo al aprendizaje. Por ejemplo, en numerosas ocasiones, los resultados muestran, como los profesionales pueden ofrecer apoyos o andamios a los niños a través de sus intervenciones. Por ejemplo, cuando delante de la acción de contar elementos (uno, dos y tres), se puede formular la pregunta reforzando la cantidad: *¿cuántos hay?* y esperar la respuesta del niño para asegurar que ha integrado la cantidad tres. Esta práctica, definida por ejemplo por Clements y Sarama (2015) como *scaffolding* se convierte en un arte. El arte de formular buenas preguntas (Alsina, 2015) que sean sugerentes, pertinentes y den opción a los niños de seguir explorando y ampliando su conocimiento.

Los datos obtenidos muestran que la visión de la mayoría de los profesionales de las EBMV sobre su papel e intervención durante el desarrollo del juego de los niños se modifica substancialmente gracias a la formación desarrollada durante esta investigación. Como se describe en el apartado 5.2.3 sobre los conocimientos del papel del lenguaje y la intervención del adulto, antes de la formación, muchos de los profesionales acompañaban el juego de los niños observando las acciones que llevaban a cabo, gestionando los conflictos y reordenando los materiales, mostrándose cercanos y disponibles, pero sin interferir o irrumpir en su juego. En este sentido, los datos muestran que los profesionales, antes de la formación consideraban altamente importante su tarea de diseñar los espacios y los materiales según los conceptos referidos (polisensorialidad,

estética, iluminación, etc.) y el mantenerse en un segundo plano. Ello, responde, en parte, a lo que diferentes autores manifiestan sobre la importancia de la observación, como por ejemplo Goldschmied y Jackson (2007), entre otros, que hablan del educador como el profesional que dispone los materiales al alcance de los niños para que estos desarrollen la actividad siendo los protagonistas del mismo. Ahora bien, el papel del adulto, también apuntan, corresponde a observar e intervenir solo cuando sea necesario.

La pregunta más recurrente a lo largo de la formación, que expresan en los grupos de discusión y en la valoración de sus necesidades formativas, tanto antes como después de la formación, precisamente parte de este: “solo cuando sea necesario” que apuntan Goldschmied y Jackson (2007). De hecho, los resultados, muestran que después de la formación, los profesionales siguen expresando ciertas dificultades en cuanto al desempeño de su papel porque se preguntan: *¿cómo hacer buenas preguntas?* y *¿con qué criterio determinar la intervención?*

Vinculado a ello, los resultados también muestran que los profesionales no se habían planteado poner palabras a las cualidades de los objetos o a las acciones que desarrollaban los niños porque sentían un cierto recelo a intervenir al considerar que el niño necesita descubrir por el mismo, sin interrupciones, construyendo el pensamiento internamente, sin necesidad alguna de que el adulto ponga palabras a sus acciones. De hecho, algunos profesionales expresaban incluso, después de la formación, que tenían ciertas dudas, pero que habían probado de acompañar las acciones de los niños en algunos momentos puntuales y les parecía que describir la acción del niño puede resultar un tanto artificial.

Y es que, en este sentido, después de la formación siguen apareciendo algunos profesionales que consideran la intervención únicamente como algo vinculado a la gestión del aula. La literatura señala que, con la finalidad de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático, delante las acciones de los niños y a su debido momento, cuando el niño ha desarrollado la acción, se pueden formular muchas preguntas abiertas a modo de andamio para el aprendizaje (Alsina, 2016; Geist, 2014, Clements y Sarama, 2015). Preguntas abiertas, de múltiples respuestas que favorezcan el desarrollo de nuevos retos, hipótesis y creaciones favoreciendo una escuela viva, en construcción donde diariamente se ofrecen nuevas posibilidades y oportunidades de aprendizaje a través de sus contextos y relaciones, donde los profesionales investigan y se formulan preguntas junto a los niños (Malaguzzi, 2020).

Los datos también muestran que los profesionales han creado materiales específicos y han desarrollado sesiones donde intervienen describiendo las acciones de los niños y los materiales que les han ofrecido. Además, que los profesionales incluyen en sus planificaciones un apartado específico donde se describe el lenguaje matemático que corresponde al material y las posibles preguntas que podrían formular a los niños durante el desarrollo de la sesión, con la finalidad de ofrecer estos andamios.

La intervención del adulto puede tener muchos matices y consideraciones. Algunas veces parten de las mismas situaciones cotidianas que se plantean como retos matemáticos donde aparecen los contenidos de los diferentes bloques. Otras veces, aparecen en sus juegos y las preguntas permiten a los niños reafirmar el contenido o ir estructurando las ideas sobre aquello que están observando.

En diferentes secuencias, se observa el respeto que los profesionales muestran en relación con las acciones de los niños. No les corrigen, ni tampoco se anticipan o les dan la respuesta; esperan a que sean los niños que completen la acción y les apoyan o les formulan nuevas preguntas.

En este sentido, acorde con las aportaciones teóricas como por ejemplo de Alsina (2015) o Contreras (2015), los profesionales destacan la importancia de formular buenas preguntas, interesantes y con sentido, encontrando el momento adecuado para hacerlas. Los autores, se refieren a la necesidad de encontrar el equilibrio perfecto entre las teorías que postulan el aprendizaje de las matemáticas basado en la construcción del alumno y las teorías en un extremo opuesto que sitúan el papel del profesor como un agente protagonista, transmisor del conocimiento. La complejidad de encontrar este punto intermedio es la gran responsabilidad del profesional que debe tener la mirada abierta y la escucha necesaria para responder ante la compleja situación de respetar el juego y expresión libre del niño y favorecer mediante andamios su conocimiento matemático.

Los resultados muestran que este tipo de intervenciones, respetuosas con las capacidades de los niños y favorecedoras de autonomía, resultan ser el eslabón necesario para poder desarrollar satisfactoriamente algunos de los retos que se les plantea a los niños mediante las propuestas.

Conocimientos sobre las Orientaciones Curriculares

Los conocimientos acerca del currículo contemplan el conocimiento sobre las bases psicopedagógicas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, la organización de la

Educación Infantil por áreas, la evaluación y el conocimiento de los estándares de contenidos matemáticos que deberían aprender los niños de acuerdo con lo propuesto por organismos nacionales e internacionales (Alsina y Delgado, 2021).

La ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establecía el currículo y se regulaba la ordenación de la Educación Infantil en el momento en que se desarrolló esta investigación, determinaba que el ciclo educativo 0-3 se organizaba en tres áreas: el conocimiento de sí mismo, el conocimiento del entorno y la comunicación, los lenguajes y la representación. Las matemáticas informales aparecen de forma integrada en las tres áreas curriculares, aunque hay algunas lagunas (Alsina, 2021). De estas orientaciones curriculares se desprende que los diferentes contenidos de las distintas áreas se encuentran vinculados los diferentes contenidos matemáticos correspondientes a las matemáticas intuitivas e informales. Aun así, la exposición curricular invita a pensar que los contenidos matemáticos únicamente se encuentran en el área de descubierta del entorno. En el paralelismo entre los diferentes bloques de contenido matemático que presenta Alsina (2004, 2015), claramente se muestran las conexiones entre los diferentes bloques de contenido, con unas mismas capacidades matemáticas que se repiten (identificar, relacionar y operar) y se integran en la globalidad del día a día en la escuela por medio de las rutinas y de los juegos de exploración y manipulación, entre otros. Dado que las matemáticas no son una colección fragmentada de bloques de contenido, aunque con frecuencia se dividen y presentan así, en el marco de referencia de esta investigación se han identificado los contenidos curriculares que aparecen de manera integrada en las diferentes áreas para poder determinar de qué modo aparecen vinculados.

La tarea de identificar los contenidos matemáticos vinculados a las diferentes áreas busca contribuir y ayudar a los profesionales a visibilizarlos e incorporarlos con un sentido matemático específico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Escuelas Infantiles. Castro (2016) y Margolinas (2014) plantean la necesidad de dar visibilidad a todos los contenidos curriculares referentes a las matemáticas informales ya que su actual invisibilidad puede ser un obstáculo en la práctica educativa. De hecho, los resultados muestran que los profesionales no hacen ninguna aportación directa vinculada currículo en sus programaciones. Los profesionales expusieron que, ni antes, ni después de la formación, utilizaban el currículo de Educación Infantil para programar los espacios y materiales. Después de la formación planificaron de manera consciente los espacios y

materiales con contenido matemático, pero, lo hacían a partir de las documentaciones que se les había facilitado en la formación dado que era más fácil, práctico y funcional.

Este dato es sorprendente considerando la finalidad del currículo, tanto estatal como autonómico, de establecer los conocimientos propios de cada ciclo y ayudar en su concreción en las aulas suscitando a la pregunta de: ¿por qué hay tanta distancia entre este instrumento y la práctica diaria en las aulas?

Una posible respuesta a esta pregunta podría explicarse por la dificultad de identificar claramente los contenidos matemáticos en el currículo. De hecho, si los profesionales no conocían a qué se referían estas primeras matemáticas informales, difícilmente podrían detectarlas y entrelazadas en las diferentes áreas del currículo. El ejercicio de identificar estas matemáticas parte del conocimiento disciplinar que uno tenga. Aun así, los profesionales pudieron, antes de la formación, plasmar algunos objetivos matemáticos que contemplaban en sus programaciones.

De hecho, cuando se les plantea a los profesionales si en sus programaciones aparecen de manera consciente objetivos matemáticos, los datos muestran que, antes de la formación, más del 60% de los profesionales manifiestan haber desarrollado sus programaciones de acuerdo con objetivos matemáticos. En total, se presentaron 37 objetivos en los que se observan diferencias significativas entre los distintos contenidos, habiendo mayor incidencia en los objetivos vinculados a las cualidades sensoriales y a las cantidades continuas y discretas

Después de la formación, en cambio, todos los profesionales 28 (100%) manifestaron desarrollar de manera consciente objetivos en sus programaciones pasando de 37 objetivos a 95.

Según Alsina (2015) se observa que todos los contenidos que se presentan en el currículo estatal hacen alusión a las matemáticas informales y corresponden a las tres capacidades presentadas como las principales acciones matemáticas de los 0 a los 3 años que se vienen describiendo: identificar, relacionar y observar cambios. Aun así, destaca que, en España, aunque existen muchas evidencias que promueven y apelan a una educación matemática infantil de alta calidad que contemple todos los conocimientos matemáticos importantes, siguen existiendo omisiones en las orientaciones curriculares que no los contempla todos Alsina (2020). De hecho, el mismo Alsina (2013, 2019) desarrolló un análisis de los conocimientos matemáticos presentes en el currículo de

Educación Infantil (ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre) donde presentó las principales omisiones detectadas para el primer ciclo 0-3 en el cual se podría incluir la comprensión de patrones sencillos como imprescindibles para favorecer el desarrollo progresivo del pensamiento algebraico.

Referente a las programaciones, el incremento más significativo se ha producido en el bloque relativo a las cualidades sensoriales que ha pasado de 12 (32.14%) objetivos antes de la formación a 43 (45%) después, con una tasa de crecimiento del 616.67%. Este dato se explica porque el despertar del pensamiento algebraico parte de las situaciones cotidianas en el día a día de la escuela mediante las rutinas y los juegos de los niños, donde, de manera natural, aparecen las acciones de identificar de las cualidades y las propiedades de los elementos, clasificar, ordenar y observar los cambios en los elementos y el entorno, etc. (Alsina 2019). Ello permite a los niños construir y ordenar su pensamiento elaborando un conocimiento amplio sobre las características propias y la de los elementos en relación con las personas y el mundo (Geist, 2014) estableciendo, así, la base de todos los posteriores aprendizajes. Esta base se inicia con la identificación de las cualidades y se estructura sobre todo con la creación de las relaciones que se establecen con los elementos (clasificaciones, comparaciones, ordenaciones, etc.). La capacidad de desarrollar estas acciones, se puede considerar el inicio del pensamiento algebraico temprano que desarrollan los niños de los 0 a los 3 años, que poco a poco, se irá ampliando, consolidando y vinculando con otras áreas y dominios de conocimiento matemático (geometría o la medida) y, a su vez, irá proporcionando diferentes estructuras de pensamiento como base de conocimiento de otras áreas como, por ejemplo, el lenguaje.

Haciendo un análisis de los contenidos curriculares en España y Cataluña, se observa que existen numerosos vacíos como en el caso del álgebra temprana, donde no se hace referencia al reconocimiento, descripción y ampliación de patrones (Alsina, 2019a) siendo estas capacidades de gran importancia para incorporar acciones fundamentales, como por ejemplo la de clasificar y seriar que permite al niño adentrarse, de manera innata y desde que nace (Clements y Sarama, 2015) en los procesos de generalización y abstracción (Papico Mulligan y Mitchelmore, 2011; Mason, 2008; Acosta y Alsina, 2020).

De acuerdo con la literatura, los resultados muestran que los profesionales desconocen, antes de la formación, la amplitud del álgebra temprana y, por lo tanto, no promueven, planifican, ni programan, de manera consciente, actividades y propuestas que las faciliten.

Después de la formación, aparece un cambio significativo en las programaciones y aparecen de manera frecuente aspectos vinculados al reconocimiento de las cualidades (39%) y las clasificaciones.

Otro dato significativo en relación con las programaciones curriculares de los profesionales se refiere a las cantidades discretas y continuas. En términos generales, la presencia de bloque de cantidades continuas y discretas en las programaciones de los profesionales ha incrementado sensiblemente (57.14%). Analizando estos resultados, se observa que de forma muy modesta algunos objetivos han aumentado, otros han disminuido y otros no aparecen ni antes ni después de la formación. Estos datos confrontan con las aportaciones de Alsina (2015) que expresa la presencia en el primer ciclo 0-3 de la identificación y el uso comprensivo de cuantificadores (muchos, pocos y algunos) y de cantidades elementales (uno, dos y tres) así como la comparación de cantidades, básicamente a través de un tipo de relación cuantitativa elemental (las correspondencias cuantitativas) y la observación de cambios sencillos que se producen a nivel cuantitativo en los objetos y en el entorno inmediato.

A lo largo de esta investigación se ha profundizado ampliamente en los conocimientos que debe tener el profesional para ayudar a los niños a construir el sentido numérico y a utilizarlo en su contexto real y se ha observado que las bases de esta construcción nacen ya en los primeros meses de vida cuando el niño, desde muy pequeño, es capaz de distinguir las primeras cantidades (Geist, 2014). Es a partir de los tres primeros años, donde se debe iniciar la construcción de los conocimientos numéricos estableciéndose una clara vinculación entre las experiencias de aprendizaje de alta calidad que tienen los niños en estas primeras edades y su repercusión en los aprendizajes posteriores (Clements y Sarama, 2015). Por ello, el currículo debe aportar claramente las prácticas educativas y los contenidos específicos que deben potenciarse en estas primeras edades.

Como se ha descrito, la vinculación estrecha entre el álgebra temprana y la construcción del número es fundamental en la medida que la primera facilita la segunda. Por ello, el vacío curricular que aparece respecto al álgebra temprana tiene una afectación directa al desarrollo de los contenidos vinculados a los números y a las operaciones. Los documentos curriculares vigentes sirven para ayudar a los profesionales a orientar y diseñar sus prácticas educativas como el eslabón necesario para destacar la importancia de este contenido y borrar los clichés tradicionalistas. En este

sentido, lamentablemente, aún siguen latentes prácticas escolares que potencian aspectos muy alejados a las reales necesidades de los niños como, por ejemplo, la escritura de las cantidades.

Al mismo tiempo, cabe considerar que, en las programaciones de los profesionales, el bloque de contenidos que ha tenido un menor crecimiento ha sido relativo a la posición y forma que solamente ha aumentado en 6, con una tasa de crecimiento del 50%. Según Alsina (2015), deberían aparecer en las acciones matemáticas de los 0 a los 3 años las capacidades de identificar, comparar y relacionar y transformar u observar cambios en las posiciones y en las figuras. Por ello, en los objetivos que plantean los profesionales de las Escuelas Infantiles deberían formar parte de sus planificaciones o programaciones. Además, como se ha expuesto, la literatura avala que este conocimiento es altamente necesario por la vinculación con las otras áreas de la matemática y emerge, de manera natural, mediante el movimiento libre, la observación, la experimentación, la manipulación y el juego.

Contrariamente a lo que debería suceder, los datos muestran que este bloque de contenido no es prioritario para los profesionales y, aunque en prácticamente todas las capacidades descritas por Alsina (2004, 2015) aumenta un poco la visibilidad de estos objetivos, lo hace de manera muy poco significativa.

Los niños, del mismo modo que ocurre con las cantidades discretas, son sensibles desde el momento en que nacen a las magnitudes continuas. De los 0 a los 3 años viven muchas experiencias con los atributos mensurables desarrollando las capacidades perceptivas y motrices (Castro, 2006) siendo capaces, a partir de los 6 meses aproximadamente, de valorar ciertas magnitudes como las longitudes (Geist, 2014).

Diferentes autores como Castro, et al. (2015) o Clements y Sarama (2015) consideran que los tres primeros años son clave para que el niño desarrolle la capacidad de establecer comparaciones entre las capacidades, los volúmenes, y las distancias e ir introduciendo a partir de la comparación entre objetos el lenguaje comprensivo que ayuda a integrar estas comparaciones (más que, menos que, igual que). En este sentido, los datos muestran que, después de la formación, este bloque de contenido ha crecido sólo en un 91.67% y se considera que los valores que se desprenden de los objetivos programados en los cuestionarios son bajos.

Por lo que se refiere al análisis de las documentaciones, donde se recogen también los objetivos que han planteado los profesionales en sus nuevas prácticas después de la formación, los resultados muestran que contrariamente a los datos obtenidos de las programaciones descritas en los cuestionarios, aparecen en sus planificaciones, de manera interconectada, más objetivos y más diversificados.

Por lo que se refiere a las cualidades sensoriales, entre todos los profesionales de las 3 EBMV se han planificado 68 actividades que están vinculadas con este dominio, siendo las ordenaciones, las seriaciones y las observaciones de cambios cualitativos las capacidades y contenidos con menor presencia. Además, estos 3 solo aparecen en Infantil 1 e Infantil 2.

Por lo que se refiere a las cantidades continuas y discretas, se han descrito 47 actividades propias de este bloque de contenido. En general, a diferencia de la identificación de los principales cuantificadores, que aparece en los tres niveles, predominan estos contenidos en Infantil 2 y, con menor medida, en Infantil 1.

Respecto a las posiciones y las figuras, se han planificado 71 actividades enfocadas a este bloque de contenido y, en este caso, exceptuando las clasificaciones, las correspondencias y las seriaciones, aparecen en los tres niveles educativos.

Finalmente, referente a los atributos mensurables, se han planificado 46 propuestas educativas que contienen algún objetivo de este ámbito. En este caso, mayormente los objetivos de este bloque corresponden a Infantil 1 e Infantil 2, siendo, únicamente el contenido de identificar los atributos mensurables, propio de Infantil 0.

En resumen, en el nivel de Infantil 0 (I0) han planificado actividades vinculadas mayormente al reconocimiento de las cualidades sensoriales (10) versus los otros dominios: reconocer la posición (7) y la forma (8) e identificar los atributos mensurables (6).

Los profesionales de Infantil 1 (I1) han planteado un mayor número de actividades que Infantil 0 con mayor número y diversidad de contenidos matemáticos. Concretamente, los únicos contenidos que no destacan en este nivel son la observación de cambios cualitativos, la distinción de números versus otras formas de representación gráfica, las seriaciones cuantitativas, la identificación del tiempo y las secuencias temporales.

Finalmente, en el nivel de Infantil 3 (I3), aumentan significativamente el número de contenidos respecto a Infantil 0 e Infantil 1. Concretamente, han aparecido todos los contenidos de todos los bloques temáticos referidos a excepción de las secuencias temporales.

Esta clara diferencia entre los datos obtenidos en los cuestionarios y los datos extraídos de las planificaciones de los profesionales pone en evidencia la distancia que existe entre la planificación y la programación. Los profesionales pasaron de no programar los espacios a incorporar las fichas de planificación y diseñar los materiales con sentido matemático de una manera ágil y cercana a su práctica. De hecho, los profesionales manifestaron, cuando hablan de sus programaciones, que les costaba vincular sus conocimientos al currículo, un instrumento alejado de su día a día y difícil de interpretar.

De lo contrario, cuando presentan las fichas que han utilizado para planificar, donde sintetizan sus propuestas educativas y las vinculan a las planificaciones semanales que llevan a cabo, aparecen de manera consolidada los contenidos introducidos en la formación. Este hecho dispone la necesidad de buscar caminos y nuevas fórmulas para que el currículo de Educación Infantil será un instrumento cercano a los profesionales de las Escuelas Infantiles, con un lenguaje que les permita reconocer claramente las acciones que van a observar y a favorecer en sus aulas a través de las propuestas que van a diseñar.

6.2 Conclusiones e implicaciones didácticas

La discusión entre los datos obtenidos y los resultados da lugar a diferentes conclusiones, a partir de las cuales se plantean distintas implicaciones didácticas. Estas implicaciones didácticas se formulan en forma de 15 “principios” que se consideran básicos para poder llevar a cabo, de manera adecuada, la mejora de las prácticas educativas respecto al desarrollo del pensamiento matemático en la primera infancia.

1. Los conocimientos de los profesionales determinan sus prácticas educativas y la formación es la clave para dotar a los profesionales de los conocimientos matemáticos y didácticos necesarios para favorecer el desarrollo de las primeras matemáticas.

La formación es una oportunidad real para planificar y desarrollar nuevas propuestas de espacios y materiales o mejorar las existentes con sentido matemático (i.e. el grupo

de discusión en torno al juego heurístico). Existe una clara vinculación entre el conocimiento del profesional y las propuestas que ofrece a los niños y como las acompaña.

Los profesionales de las Escuelas Infantiles carecían de la formación inicial necesaria para conocer, amplia y profundamente, a qué se refieren y qué contenidos integran las primeras matemáticas. Unas matemáticas, como se ha descrito, fundamentales e imprescindibles. En este sentido, cabe plantearse ¿cómo un profesional puede favorecer a partir de las propuestas educativas (espacios y materiales) el desarrollo de capacidades vinculadas a las primeras matemáticas si no las conoce?

De hecho, las propuestas que ofrecían los profesionales a los niños, antes de la formación, carecían de una mirada consciente hacia las acciones matemáticas que desarrollaban o podrían desarrollar los niños, si los espacios estuviesen pensados desde esta conciencia matemática.

Según la literatura, existen propuestas ricas en oportunidades para el desarrollo de las primeras matemáticas, pero los profesionales o no las conocían o todavía no habían incorporado sus potencialidades respecto al sentido matemático. Por ejemplo, las instalaciones artísticas, el espacio del movimiento, el juego simbólico, el juego heurístico, las construcciones o el taller. Todo ello hace plausible la necesidad de desarrollar más específicamente los programas de formación matemático - didáctico, tanto inicial como continua.

Los datos muestran que la formación desarrollada durante la investigación ha dado lugar a un claro incremento de los conocimientos de los profesionales donde gracias a estos nuevos contenidos matemáticos y didácticos incorporados, los profesionales han podido planificar y desarrollar nuevas propuestas de espacios y materiales o mejorar las existentes. De esta manera se constata la existencia de la vinculación entre los conocimientos de los profesionales y el diseño de los espacios y materiales que ofrecen a los niños (Björklund y Barendregt, 2016).

2. Los conocimientos didácticos de los profesionales condicionan el diseño de los espacios y de los materiales y, por lo tanto, las acciones que los niños van a poder desarrollar.

Los datos han mostrado que algunos materiales pueden ayudar a desarrollar todos los bloques de contenido versus otros que facilitan más la comprensión de algunos bloques en concreto. Por ejemplo, por un lado, se encuentran las mesas de experimentación que, como se ha descrito, facilitan mayormente el desarrollo de las habilidades vinculadas a las cualidades sensoriales - álgebra temprana y a los atributos mensurables. Aun así, y sobre todo en función del material y utensilios que se dispongan, también vehiculan aprendizajes relativos a las posiciones y a las formas y a las cantidades continuas y discretas.

Por otro lado, las instalaciones artísticas son una propuesta específica que facilita las acciones vinculadas al desarrollo de estas primeras matemáticas intuitivas e informales correspondientes a todos los diferentes bloques de contenido.

De este modo, en función del diseño del espacio y del material, se puede favorecer el desarrollo de algunas capacidades y habilidades en concreto. Son muchos los recursos que se han recogido como muy válidos y positivos para favorecer el desarrollo de las matemáticas intuitivas e informales en las primeras edades y se valora el seguir promocionado este tipo de propuestas e incluso ampliarlas. Por ejemplo, el juego heurístico, el taller, las construcciones o los espacios de exploración. Para ello, cabe seguir profundizando en las diferentes propuestas que ofrecen autores como Abad (2006) y seguir ayudando a los profesionales a detectar qué acciones matemáticas pueden emprender los niños y como ellos las pueden acompañar.

En este sentido, cabe tener muy presente este diálogo entre la pedagogía y la arquitectura que apuntan los diferentes autores (Abad, 2006; Cavallini et al., 2017) y se considera que la formación inicial, o en su defecto la continuada, tiene que incorporar los conocimientos sobre el diseño de los espacios y materiales vinculados a las acciones y procesos matemáticos que van a poder desarrollar los niños y cómo, a través de los materiales y su disposición, se pueden favorecer en más o menos medida.

De hecho, es muy importante considerar que, a parte de la vida cotidiana que ocupa un 80% del día a día en la escuela y tiene un gran valor educativo, la gran mayoría de las propuestas educativas se fundamentan en los espacios de juego, exploración y manipulación libre, siendo este el motor de muchos aprendizajes. Los diferentes autores destacan la importancia del diseño y calidad de los espacios y materiales y realzan la importancia de pensar y repensar las propuestas de materiales de juego y exploración con

la finalidad de atender las diferentes necesidades de aprendizaje de los niños como investigar, conocer, probar, tantear, descubrir, etc. según su momento evolutivo y su disposición al juego en cada momento.

3. La formación ha incrementado el sentimiento de preparación de los profesionales y les ha dado mayor seguridad; ambos aspectos han ayudado en la mejora de la calidad educativa.

Después de la formación, los profesionales se sienten más preparados y tienen mayor seguridad para desarrollar y analizar sus propuestas con lo que podría llamarse conciencia matemática. Una conciencia matemática que explican como parte del crecimiento que han hecho gracias a la formación, que les ha facilitado un cambio de mirada, una mayor riqueza en el vocabulario específico y una mayor comprensión del proceso de construcción del pensamiento matemático por parte de los niños.

Incorporar esta conciencia matemática ha facilitado una predisposición favorable a la observación de su práctica educativa y ha generado, como muestran los datos de las observaciones no participantes, un nuevo y gran interés por incorporar procesos de documentación y reflexión sobre sus prácticas educativas en este ámbito. Este proceso reflexivo y de auto-observación por parte de los profesionales es imprescindible para mejorar sus propuestas educativas y el desarrollo de sus intervenciones y, para desarrollarlo, el profesional ha de sentirse preparado, seguro y dispuesto. El camino para incorporar esta seguridad y confianza es la formación.

4. Los conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos de los profesionales han resultado ser insuficientes aun habiendo recibido formación inicial y continuada. Además, los resultados muestran que siguen arraigadas creencias equívocas sobre qué matemáticas desarrollan los niños en las primeras edades y como se pueden favorecer.

A lo largo de la historia, la literatura ha ido incorporando nuevas investigaciones que han ido aportando y matizando las diferentes teorías sobre las formas de aprender matemáticas durante la infancia (0-3). Ello ha generado nuevos conocimientos sobre las capacidades de los niños y su desarrollo.

Los datos recogidos mediante los diferentes instrumentos antes de la formación reflejan cómo los profesionales describían de forma recurrente solo algunos de los contenidos

matemáticos mientras que, una vez desarrollada la formación, podían hablar con seguridad y aportar una definición clara y completa sobre las capacidades y contenidos propios de las matemáticas informales. Al mismo tiempo, todos los contenidos aparecían identificados en menor o mayor medida constatando así los contenidos y capacidades que se identifican en el marco de referencia. No obstante, la diferencia entre bloques de contenido y capacidades es plausible y sigue respondiendo a una necesidad de formación más amplia.

La formación, de la mano de la investigación, debe actualizar sus contenidos y debe tratar aspectos tan importantes como la vinculación de los procesos de seriar y clasificar (vinculados al bloque de las cualidades sensoriales - álgebra temprana) con la construcción del número y la capacidad para contar. Además, ha de ayudar a romper las creencias tan arraigadas sobre, por ejemplo, que los números y las operaciones son parte de estadios superiores y fruto exclusivo de una consecución de estadios o fases por los que debería pasar el niño. Sobre todo, es necesario proporcionar los conocimientos específicos sobre cómo se construyen los diferentes conceptos, por ejemplo, el concepto de número, y las habilidades que integra. Junto a ello, cabe proporcionar herramientas, acorde con el primer ciclo educativo, sobre cómo incorporar propuestas de alta calidad que, en función las necesidades de juego, exploración y manipulación de los infantes ayuden a ejercitar las destrezas y habilidades necesarias para sentar las bases que facilitaran los posteriores aprendizajes ayudando así a los niños ser más habilidosos con los números y las operaciones (Clements y Sarama, 2015).

También es necesaria una formación específica en el ámbito de la medición como aspecto fundamental de las matemáticas (Clements y Sarama, 2015), a través de la unión del número con las dimensiones espaciales, vinculada al mundo y al día a día de las personas, dado que la usan de manera inconsciente y les ayuda a desarrollar otras áreas de las matemáticas, como la lógica o el razonamiento.

Como se ha descrito, los conocimientos de los profesionales eran insuficientes tanto desde un punto de vista matemático como didáctico – matemático, por lo tanto, se considera necesario revisar los programas de formación inicial para ayudar a los profesionales de las Escuelas Infantiles, tanto a Maestros como a Técnicos Superiores de Educación Infantil, a incorporarse a las escuelas con los conocimientos necesarios para identificar y

conocer todos los contenidos y capacidades propias de las matemáticas intuitivas e informales.

En su defecto, cabe reforzar los programas de formación continua y dotar a los centros de recursos y de profesionales específicos que puedan acudir a las Escuelas Infantiles a compartir estos conocimientos necesarios e imprescindibles para garantizar la calidad educativa en este sentido.

5. La formación debe desarrollarse ampliamente siendo algo más que la transmisión de contenidos. Ha de dar espacios de vinculación real entre la teoría y la práctica y, además, ha de perdurar en el tiempo facilitando la revisión de la propia práctica.

El impacto de la formación continua llevada a cabo en esta investigación se valora muy positivamente y se considera un buen punto de partida para introducir los conocimientos matemáticos que un profesional de la Escuela Infantil debería tener para garantizar la calidad en este ámbito. Aun así, los datos muestran que todavía, después de la formación, existen contenidos poco visibles y los profesionales explicitan la necesidad de seguir formándose. De este modo, se destaca la importancia de dar continuidad a la formación con la implementación y la consolidación de los contenidos, diseñando una continuidad más larga en el tiempo. Una vez introducidos los contenidos y desarrolladas las primeras prácticas e implementaciones en el aula, los profesionales necesitan volver a contrarrestar la teoría con la práctica, ir desgranando los contenidos y reforzarlos poco a poco para poder integrarlos. Necesitan gozar de más espacios y tiempos para poder investigar en sus prácticas diarias y poder seguir reforzando, implementado y consolidando los nuevos conocimientos introducidos mediante la práctica reflexiva.

Los profesionales de la Escuela Infantil no únicamente requieren un conocimiento más profundo y específico sobre los contenidos matemáticos, sino que también necesitan conocer específicamente como construye el niño el pensamiento matemático y cómo evolucionan sus capacidades. La formación debe contemplar un cierto recorrido en el tiempo, ha de vincular la teoría con la práctica educativa y ha de facilitar la (re)introducción de los nuevos conocimientos, ejercitarlos y revisarlos mediante procesos de reflexión compartida. Proceso que debe llevarse a cabo de manera cíclica ofreciendo varias oportunidades a los profesionales (o estudiantes que se preparan para serlo) de repensar sus prácticas y analizar los procesos que están llevando a cabo.

También cabe considerar que la formación ha servido para conocer en profundidad qué conocimientos y necesidades tienen los profesionales respecto este ámbito, pero introducir los contenidos propios a estas edades no ha sido suficiente para romper con la mayoría de las creencias que se arraigan fuertemente en los profesionales o para transformar ampliamente sus conocimientos. Por lo tanto, es necesario una formación más profunda y específica que les ayude a comprender la complejidad del debate existente entre lo que seguramente aprendieron en sus formaciones iniciales y los nuevos descubrimientos que avalan y reconocen la importancia de facilitar propuestas vinculadas con todos los bloques de contenido (i.e. con las cantidades continuas y discretas, en la línea de lo que se ha descrito en el marco teórico de esta investigación).

Por todo ello, se considera que esta formación no puede ser puntual y requiere de un recorrido largo en el tiempo que facilite a los profesionales introducir los cambios, implementarlos, revisarlos y consolidarlos.

6. Los resultados dispares, tanto a nivel cualitativo como cuantitativo, muestran que no existía suficiente coherencia y continuidad en las prácticas educativas.

Actualmente es muy necesario que en las Escuelas Infantiles se impulsen mecanismos de reflexión y revisión de la propia práctica. De hecho, los datos obtenidos presentan, tanto a nivel cualitativo como cuantitativo, disparidad en los resultados. Esta disparidad muestra que aún se requiere de muchos tipos de debate donde discutir, reflexionar, compartir y determinar qué propuestas, tiempos, diseños, espacios y materiales se van a ofrecer a los niños y como se debe acompañarlos.

De esta manera, se considera necesario e imprescindible también, para dar continuidad y coherencia a todo el ciclo educativo 0-3, que en los claustros de las Escuelas Infantiles se promueva el desarrollo de un proyecto educativo de centro, elaborado mediante programas de formación compartido por todos los profesionales del claustro. En él cabe definir profunda y detalladamente qué concepto de niño sostienen y cómo pretenden dar respuesta a sus intereses y necesidades, en todos los sentidos, desde un punto de vista de bienestar físico, psicológico, emocional y educativo (UNESCO, 2017) y, especificando también, las prácticas para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático como pilar del mismo proyecto educativo. De esta manera, garantizar que en los claustros se brinden oportunidades para reflexionar en torno a qué cambios introducir en sus prácticas

educativas para ir mejorando su atención a la infancia y a las familias y, para garantizar que los diferentes profesionales trabajan bajo una misma mirada educativa.

7. Los profesionales de la Escuela Infantil requieren incorporar los Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil establecidos en el conjunto de saberes CEM-EI para la Escuela Infantil.

Dada la importancia de estas primeras matemáticas, se considera que los profesionales de las Escuelas Infantiles deben conocerlas y valorarlas para poder ofrecer prácticas educativas acorde con lo establecido y que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de estas primeras edades. Por lo tanto, la formación inicial, y en su defecto la continua, debe incluir conocimientos matemáticos y didácticos.

Alsina y Delgado (2021, 2022) establecen, para toda la etapa 0-6, el conjunto de saberes que comprenden los conocimientos matemáticos y didáctico - matemáticos que deberían conocer profundamente los profesionales de esta etapa. En este conjunto de saberes presentan, referente al ámbito matemático, los Conocimientos Matemáticos Intuitivos e Informales (C-MIeI), los Conocimientos de los Contenidos Matemáticos (C-CM) y los Conocimientos de los Procesos Matemáticos (C-PM). En relación con el ámbito didáctico – matemático señalan: el Conocimiento sobre las Formas de Aprendizaje de las Matemáticas en la infancia (C-FAM), el Conocimiento sobre la Planificación y Gestión de Actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA) y el Conocimiento sobre las Orientaciones Curriculares (C-OCU).

Los datos han mostrado que, de este conjunto de saberes, para el ciclo educativo 0-3, los profesionales requieren incorporar conocimientos específicos. En este sentido, presentaban carencias significativas en su formación y expresaban la necesidad de subsanar estas carencias. En el análisis de los datos se establecen las diferentes categorías de análisis en función las necesidades formativas que explicitan los profesionales y acorde con el marco teórico de referencia, respecto el conjunto de saberes presentado por Alsina y Delgado (2021, 2022),

En conclusión, los resultados muestran, que del conjunto de saberes presentados por Alsina y Delgado (2021, 2022) se confirman todas las categorías de conocimiento establecidas para la Escuela Infantil con matices.

Por un lado, se determina que los Conocimientos Matemáticos Intuitivos e Informales (C-MIeI) son los propios de las primeras matemáticas de la Escuela Infantil y que los Conocimiento de los Contenidos Matemáticos (C-CM) y los Conocimientos de los Procesos Matemáticos (C-PM) son propios del segundo ciclo (3-6) pero se desestiman. Ello no es de extrañar porque el conjunto de saberes que comprende toda la etapa 0-6 y la Escuela Infantil corresponde al ciclo 0-3. En relación con los Conocimientos Matemáticos Intuitivos e Informales (C-MIeI) se constatan de nuevo los 4 bloques de contenido definidos por Alsina (2015): cualidades sensoriales (álgebra temprana), cantidades continuas y discretas, posiciones y figuras y atributos mensurables junto a las capacidades de identificar, relacionar y observar los cambios. Los datos obtenidos muestran que los profesionales detectaban conocimientos referentes a todos los bloques descritos por Alsina (2015), pero la facilidad y frecuencia con la que lo hacen es diferente.

Por otro lado, referente a los conocimientos didáctico – matemáticos, se reafirman los tres subdominios presentados por Alsina y Delgado (2021, 2022) y se matizan considerando: (1) el Conocimiento sobre las Formas de Aprendizaje de las Matemáticas en la infancia (C-FAM); (2) el Conocimiento sobre la Planificación y Gestión de Actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA) donde, en concreto se explicita la planificación y el diseño de los espacios y los materiales y el papel del lenguaje y la intervención del adulto y, (3) el Conocimiento sobre las Orientaciones Curriculares (C-OCU). Como se describe, los resultados presentan la necesidad de concretar explícitamente que, en relación con los C-PGA, cabe destacar y matizar que la planificación y gestión del aula se refiere también al diseño de los espacios y materiales como la metodología acorde con el desarrollo y las necesidades de juego, exploración y manipulación de los niños. Además, es necesario concretar y definir el papel del adulto que acompaña y su nivel de intervención mediante el lenguaje.

8. Existe una clara vinculación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico-matemático.

Tal y como se ha descrito, la formación ha sido un elemento que ha ayudado a los profesionales a profundizar en el diseño de los espacios porque al descubrir las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños en estas primeras edades, les ha resultado más fácil diseñar las propuestas. Son un ejemplo de ello los datos que responden al análisis del espacio de las construcciones. De nuevo, se observa la clara vinculación entre

el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico – matemático como tándem para la formación de los profesionales. Y es que, en este sentido, después de la formación, se ha conseguido este impulso que los profesionales buscaban y han sido capaces de preparar los diferentes espacios, como por ejemplo el de construcciones, con mayor conciencia matemática.

En este sentido, los resultados muestran que los conocimientos disciplinares de los profesionales han determinado el diseño de sus propuestas de espacios y materiales y que los conocimientos matemáticos condicionan en cierta manera los conocimientos didácticos – matemáticos. De esta manera, sin los conocimientos matemáticos difícilmente los profesionales pueden diseñar los espacios o propuestas de materiales que van a ofrecer porque necesita el dominio sobre el contenido para planificar con criterio sus propuestas. Así se reafirma que los profesionales de las Escuelas Infantiles necesitan incorporar conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos como apuntan Alsina y Delgado (2021, 2022) en su conjunto de saberes imprescindibles.

De este modo, se observa que el conjunto de conocimientos presentados por Alsina y Delgado (2021, 2022) se retroalimenta y, como dos vasos comunicantes, tienen una repercusión directa uno versus el otro. Ello se explica porque en función de los conocimientos disciplinares de los profesionales crearan unos diseños que van a promover un tipo de acciones concretas u otras. Y al revés, en función de los diseños, los niños van a poder desarrollar unas acciones que mediante el conocimiento didáctico-matemático, el profesional va a poder apoyar a través de andamios, dando lugar a nuevos y más desarrollados o complejos aprendizajes. Además, ambos conocimientos van a poder permitir una reflexión profunda de las propias prácticas facilitando los procesos de mejora educativa (Hoyuelos, 2011).

9. Los profesionales requieren del conocimiento específico sobre el origen y la finalidad de las diferentes propuestas educativas. Un conocimiento profundo y vinculado a las acciones matemáticas que pueden desarrollar los niños a través de los materiales.

Se considera la fundamental e imprescindible que los profesionales conozcan el origen y la finalidad de las propuestas para diseñarlas con criterio en función los objetivos específicos que se persigan. Además, se requiere de este conocimiento para poder innovar sin perder de vista el origen y sentido de las propuestas. Tanto el cesto de los tesoros,

como el juego heurístico y las mesas de experimentación son propuestas muy arraigadas y fundamentadas en el desarrollo de las primeras matemáticas. Goldschmied (1986) hace una profunda aproximación a las acciones matemáticas y al sentido de estas propuestas y las desarrolla fundamentándolas acorde con la evolución y aprendizaje del niño. Son propuestas tan extendidas que fácilmente se tiene acceso a muchos ejemplos de preparación y diseño de los materiales. Buscando simplemente por internet con un buscador como Google, en 0,34 segundos obtienes 65000 resultados que, de manera superficial, en pocos minutos, te construyen una imagen sobre como presentar materiales. Las redes sociales tienen un alto impacto también en la comunidad educativa, y fácilmente se obtienen nuevos diseños de espacios y materiales que pueden ayudar, a priori, a innovar. Todos estos recursos son de gran utilidad para coger ideas y para repensar con nuevas propuestas los espacios. Aun así, es imprescindible y necesaria una formación que contemple el sentido y el porqué de las propuestas, porque, de otra forma, los profesionales pueden perderse atraídos por el diseño estético de las propuestas, de las nuevas tendencias y confundirse. Ofrecer unos materiales, de calidad y bien presentados y pensar que están dando respuestas a las necesidades heurísticas que planteaba Goldschmied (1986) y, en realidad, estar promoviéndolas solo parcialmente. Por ello se concluye que la innovación ha de ir siempre de la mano del conocimiento profundo y arraigado en los orígenes de las propuestas para poder evolucionarlas manteniendo su esencia y todo su sentido.

10. La formación debe ayudar a los profesionales a vincular el proceso del desarrollo del movimiento libre del niño con la construcción del pensamiento matemático puesto que, al tiempo que el niño se mueve, va incorporando y estructurando sus conocimientos matemáticos.

Existe una vinculación entre el desarrollo del pensamiento matemático con el desarrollo del movimiento del niño desde los primeros meses (Clements y Sarama, 2015). El niño va asimilando la complejidad de todo lo que le rodea desde sus primeros movimientos espasmódicos (Goddard, 2020). Su desarrollo es un conjunto de dominios altamente sofisticados, es el procesamiento de una gran cantidad de información que percibe mediante todos los sentidos y que, poco a poco, gracias a la observación, al tocar, al oler, al sentir, al moverse, al desplazarse, al sostener, etc. va descubriendo y estructurando en su pensamiento (Geist, 2014). Por lo tanto, son necesarios e imprescindibles el tiempo y

la libertad en el movimiento para que pueda, a su ritmo, ir recogiendo y procesando todo este conocimiento que está construyendo.

De este modo, en el contexto de la Escuela Infantil, cabe promover y facilitar los conocimientos matemáticos y vincularlos a las prácticas educativas respetuosas con los diferentes ritmos en el movimiento, y su importancia. Vinculando el conocimiento matemático al desarrollo del movimiento y promoviendo la necesidad de una práctica acorde con los ritmos individuales de los niños, sin anticiparse y respetando los tiempos y sus capacidades de movimiento. No anticiparse al movimiento del niño dejando que sea éste quién se desplace y haga sus propias conquistas, le permite gozar del tiempo necesario para desarrollar sus movimientos e ir elaborando sus aprendizajes (tanto a nivel interior desde el movimiento neuronal como exterior, con el movimiento de las partes de su cuerpo). De modo que es necesario una formación que se base en el respeto al tiempo que necesitan, no solo para moverse, sino para desarrollarse en su sentido más amplio (Pikler, 1985).

Además, se considera que este respeto por el despertar del movimiento de cada niño, único y singular, acorde con el desarrollo de cada uno, es el mismo respeto que debería proporcionarse delante de todos los posteriores aprendizajes siendo, como expresaba Montessori (1982), cualquier ayuda innecesaria un obstáculo para el aprendizaje. En este sentido, nuevamente, el primer ciclo de Educación Infantil define unos cimientos fundamentales para el desarrollo humano que deberían mantenerse a lo largo de toda la escolarización.

11. La formación continua ha ayudado a los profesionales de las EBMV a descubrir la importancia de las matemáticas propias de la Escuela Infantil y el valor que tienen para el desarrollo humano.

Los datos muestran que tanto los Maestros como los Técnicos Superiores en Educación Infantil, antes de la formación, aún manifestar no haber recibido formación específica en didáctica de las matemáticas (ni inicial, ni continua) y presentar carencias en sus conocimientos, se sentían preparados para la enseñanza de las matemáticas. Ello, acorde con la literatura, responde a la idea de que las matemáticas propias de las primeras edades son sencillas y cualquiera puede enseñarlas. En este sentido, la literatura y los datos recogidos muestran que estas matemáticas intuitivas e informales no son simples, ni cualquiera puede enseñarlas. Contienen ideas profundas y de gran valor para el

desarrollo del pensamiento matemático (de Castro, 2016) y, por lo tanto, deben incluirse en los planes de formación inicial de manera profunda y amplia.

Después de la formación, los resultados muestran que los profesionales han transformado sus creencias respecto la importancia de estas primeras matemáticas, dándoles valor e incorporándolas en sus prácticas educativas.

12. Los profesionales requieren de las condiciones sociolaborales que les permita gozar del tiempo necesario para planificar, preparar y reflexionar en torno al diseño de los espacios y materiales y sobre su práctica educativa.

Los resultados muestran las inquietudes de los profesionales respecto a sus necesidades no solamente formativas sino también organizativas. En este sentido, la literatura muestra que la Escuela Infantil es la gran olvidada (Hoyuelos, 2010) y sus profesionales son los que menos reconocimiento tienen (Vila, 2018) y, en consecuencia, sus condiciones sociolaborales son inferiores a la de los maestros de segundo ciclo de Educación Infantil y Primaria.

Considerando que los tres primeros años de vida son los más importantes para el desarrollo humano (Bueno, 2019) sería necesario y de justicia dotarles de las condiciones sociolaborales pertinentes (en horarios, tiempos y número de profesionales). En este sentido se considera que difícilmente de forma continuada o consolidada, los profesionales de las Escuelas Infantiles pueden desarrollar propuestas educativas que impliquen una alta planificación y preparación del espacio (desde la documentación, la búsqueda de los materiales, la preparación y presentación y la posterior recogida) si en sus condiciones sociolaborales no se contempla el tiempo y los profesionales para ello. Cabe considerar que, aunque no forma parte explícita de este estudio, como se ha mencionado en la primera parte, aún sigue siendo el primer ciclo educativo 0-3 el menos reconocido socialmente y con unas condiciones laborales muy por debajo de lo que exige y requiere el acompañamiento de los niños en estos primeros años. De modo que, se concluye, que de la mano de los conocimientos necesarios que otorgan y dan valor y calidad a este primer ciclo, es imprescindible y necesario ofrecer los recursos (humanos y materiales) que faciliten su implementación.

En esta línea, cabe destacar que en la Escuela Infantil no siempre los profesionales pueden dar continuidad o acompañar las acciones de los niños porque la gestión del aula lo impide y en numerosas ocasiones, la presencia del adulto no puede darse porque está en la gestión

o el acompañamiento de otra situación a la que ha dado prioridad. Esta realidad plantea de nuevo las condiciones sociolaborales de las Escuelas Infantiles donde la ratio establecida sigue siendo un despropósito a la calidad educativa y de acompañamiento deseado. Por lo tanto, se considera imprescindible y altamente necesario seguir promoviendo la investigación que de valor y el reconocimiento merecido a este ciclo educativo y que promueva cambios en las políticas educativas.

A modo de ejemplo, se destaca que los profesionales aprovecharon el grupo de discusión de después de la formación para consensuar algunos acuerdos y tomar nuevas decisiones que facilitasen la disposición de los materiales y su versatilidad. Por ejemplo, conocedores de la importancia de variar los materiales, acordaron ubicar un espacio compartido en la escuela para todos los materiales heurísticos y componer entre todos un almacén de recursos más amplio. También crearon una comisión que se encargaría de dinamizar la búsqueda de materiales y documentarse y acordaron que antes de finalizar el curso debían tener todo a punto para el curso que viene comenzar con un nuevo modelo de propuesta. De nuevo, este hecho invita a pensar la importancia del tiempo de que disponen los profesionales de las Escuelas Infantiles para planificar los espacios y los materiales con sentido matemático y los recursos para crear y buscar estos materiales. Una tarea fundamental que se convierte en la base del juego, exploración y manipulación de los niños pero que, normalmente, depende del compromiso, amor y dedicación extra que añade el profesional a su trabajo por ser las condiciones sociolaborales de las Escuelas Infantiles tan precarias.

De este modo, se concluye también que los profesionales necesitan más tiempo para poder seguir repensando los espacios y como crear nuevos diseños, así como para planificar el desarrollo de las sesiones y reflexionar sobre su práctica y documentarla.

13. La mayoría de los profesionales de las EBMV ha pasado de la observación pasiva a la observación activa replanteándose cuál es la intervención justa del adulto que acompaña.

El profesional que acompaña como referente educativo al niño desarrolla un papel importante en relación con la selección de los materiales y la preparación de los espacios (Martin, 2016). También como agente que observa el juego y que ofrece puentes hacia nuevos conocimientos mediando con sus intervenciones. La literatura avala la necesidad plausible de ofrecer andamios mediante buenas preguntas o nuevos retos (Alsina, 2015;

Contreras, 2016; Galardini, 2010; Malaguzzi, 2020, entre otros) que sean sugerentes, pertinentes y den opción a los niños de seguir explorando y ampliando su conocimiento.

Estas intervenciones, como se recoge en los resultados, parten del dejar espacio y el tiempo necesario a los niños para que completen sus acciones y, una vez terminadas, se les ayuda pensar o repensar y resolver nuevas situaciones problemáticas mediante la intervención del adulto.

Estas intervenciones, que por norma general suelen ser preguntas abiertas, facilitan que los niños puedan corregir o reforzar sus conocimientos siendo el puente a nuevos conocimientos o dominios. Por ejemplo, el caso de una niña que está apareando por colores y confunde el azul con el verde y la maestra pregunta *¿dónde está el color azul?* Ello facilita a la alumna que vuelva a mirar todas las piezas, pueda identificar el error y modificar su acción sin que la maestra le explicite su equivocación. Como esta, en las diferentes observaciones no participantes, se han descrito numerosas intervenciones de los profesionales ofreciendo estos diálogos facilitadores de aprendizajes.

De este modo, se considera que las intervenciones de los adultos son fundamentales y pueden favorecer el desarrollo del pensamiento matemático siendo, también, un eslabón único e imprescindible para el aprendizaje. Y acorde con la literatura, se considera que la presencia del lenguaje, de manera justa y equilibrada, puede ser una pieza clave en este ciclo educativo, donde además se va construyendo el pensamiento y la capacidad de decodificar la realidad y la propia experiencia (Zabalza, 2009). Por ello, se considera que cabe reforzar, tanto en la formación inicial como en la continua, aspectos vinculados al papel del lenguaje como mediador en el aprendizaje, en su valor y trascendencia. También concretando y facilitando ejemplos de propuestas que puedan ayudar a los profesionales a determinar cuánto, cómo y cuándo intervenir. Y, en este sentido, ayudar a evolucionar la concepción sobre la observación pasiva y facilitar mecanismos sobre observación activa, donde el profesional aprenda a observar, teniendo claros los fines y los medios que puede utilizar y, como señala Malaguzzi (2020), investiga junto a los niños, cuestionándose y aprendiendo a su lado, formulándose preguntas sugerentes, estimulantes y atractivas.

14. Los resultados muestran una clara desvinculación entre las prácticas escolares observadas y el currículum de Educación Infantil.

Los resultados obtenidos muestran que existe una desvinculación entre los profesionales de las Escuelas Infantiles y el currículum de Educación Infantil. De hecho, los profesionales expresan no utilizarlo, ni antes ni después de la formación, para sus programaciones, ni planificaciones. Por ello, cabe la necesidad de investigar profundamente porque aparece esta distancia y como pueden establecerse nuevos puentes de diálogo y trabajo entre las prácticas educativas y el currículum (el instrumento facilitador de los principales estándares y que los profesionales han de tomar como referente). Una propuesta sería ayudar a los profesionales a detectar qué aspectos matemáticos esconde el currículum en el despliegue de sus objetivos y capacidades, y vincularlos a los definidos por Alsina (2015).

Pero como señala Alsina (2019) existe una ausencia de contenidos curriculares en este ámbito en los primeros niveles porque considera únicamente “la lógica matemática” o “el razonamiento lógico-matemático” y no favorece que se los contemple por su invisibilidad.

Por lo tanto, en primer lugar, es necesario que el currículum de Educación Infantil contemple todos los contenidos propios a las matemáticas intuitivas e informales y también facilite orientaciones explícitas sobre cómo aprenden los niños matemáticas en estas primeras edades y el proceso de gestión de las actividades (diseños de espacios y materiales y descriptivos sobre el papel del adulto que acompaña).

En segundo lugar, se requiere de formación específica que ayude a acercar este instrumento a los profesionales. Seguramente, este proceso conlleve a un replanteamiento curricular y a cómo se introduce éste en la formación de los profesionales ya que, cuando se plantean las programaciones, los profesionales conciben el currículum como algo alejado de su práctica y muy costoso.

En consecuencia, sería necesario transformar los currículos e incluir claramente identificables todos los contenidos relativos a las MIEI para que, en la formación inicial donde se aprende los estándares de contenido y se profundiza en el diseño de las programaciones mediante el currículum, se fomente esta visión completa. Además, cabe destacar el papel central del álgebra temprana (calidades sensoriales) en la actividad matemática y en el desarrollo del conocimiento, además de la conexión con el pensamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles (Godino y Font, 2003) y contenidos.

15. Existe la necesidad de seguir investigando en el ámbito del conocimiento matemático y didáctico - matemático en la Escuela Infantil.

La investigación en educación tiene una gran responsabilidad en avalar, reforzar, extender y consolidar el valor de estos primeros años de vida considerando y reconociendo los profesionales que trabajan en estos contextos y favoreciendo prácticas educativas de alta calidad, acorde con la responsabilidad que representa acompañar el desarrollo de los más pequeños.

También se considera fundamental seguir desarrollando investigaciones centradas en el en este dominio en las primeras edades que sigan aportando información sobre cómo promover el aprendizaje de estas primeras matemáticas en relación con los diferentes bloques de contenido.

En este sentido el papel de la investigación como puente de divulgación sigue siendo necesario e imprescindible. La responsabilidad de los investigadores en el ámbito de la educación yace en aportar mejoras a las prácticas educativas que tengan incidencia directa en los niños, de su bienestar y de la calidad de sus aprendizajes.

Por ello, se destaca la necesidad de seguir promoviendo la investigación educativa que ayude a romper las creencias tan arraigadas que menoscaban las primeras matemáticas dándoles poca consideración o considerando que cualquiera puede enseñarlas. De este modo, una investigación que refuerce: (1) Que el álgebra temprana forma parte del conocimiento de los niños de los 0 a los 3 años como base del posterior conocimiento algebraico. Donde los niños de los 0 a los 3 años empiezan por reconocer o identificar las cualidades de los elementos, a relacionarlas (aparear, seriar, clasificar...) y a compararlas, siendo estas capacidades los fundamentos para estructurar el pensamiento y el eslabón necesario para los futuros aprendizajes. (2) Que se dé lugar a los números y las operaciones considerando las nuevas aportaciones sobre cómo se construye el concepto de número y las habilidades que integra, vinculadas al álgebra temprana, junto con proporcionar las herramientas necesarias para, acorde con el primer ciclo educativo, incorporar propuestas de alta calidad que ayuden a naturalizar la presencia del número y a ejercitar estas habilidades asentando unas buenas bases. (3) Que se reconozca y defina la relación entre el movimiento del niño y la construcción del pensamiento matemático estableciendo así unos criterios sobre prácticas educativas respetuosas. Unas prácticas que contemplen los diferentes ritmos en el despertar de los movimientos de los niños y se

vinculen a sus aprendizajes matemáticos y, como modelo respetuoso de los diferentes ritmos de aprendizaje, sirva también para niveles superiores. (4) Que siga promoviendo la presencia y el reconocimiento de los contenidos vinculados a las posiciones y las formas y de los atributos mensurables. Ambos bloques de contenidos fundamentales y estrechamente relacionados con el álgebra temprana y los números y las operaciones.

6.3 Limitaciones del estudio y perspectivas de futuro.

Las limitaciones de esta investigación están vinculadas principalmente a la metodología y a las actuaciones.

En cuanto a la metodología, en un inicio, se consideró oportuno considerar las variables edad y género de los profesionales. De hecho, diferentes estudios en el ámbito de la educación analizan el impacto de estas variables y se consideró interesante tenerlos en cuenta. Con la voluntad de incorporar estos datos, se introdujeron como posibles variables independientes pero los resultados han determinado que, en lo referente a este estudio, no procedía considerarlas. De hecho, respecto al género, solo un profesional era de sexo masculino; por ello, no se podían contrastar diferencias. En relación con la edad, no se han detectado diferencias significativas entre los rangos de edades preestablecidos; por lo tanto, en lugar de contemplarlos como variables, se han incorporado al estudio como parte de la descripción de la muestra. Así mismo, también se considera una limitación la dimensión de la muestra ya que, al no ser más extensa, no permite generalizar o extrapolar los resultados.

Otra limitación metodológica corresponde al hecho de que, después de la formación, el tiempo que se facilitó a los profesionales fue el mismo que el que se les ofreció antes. Para certificar el estudio cuasi experimental, se contempló preservar las mismas condiciones antes de la formación que después. Con la mejor voluntad, se ofreció el cuestionario a los mismos participantes y se les pidió que contestasen el mismo cuestionario (tanto antes como después de la formación) y en las mismas condiciones. Ello condicionó en parte los resultados porque aquellos profesionales que habían incorporado nuevos conocimientos y, por tanto, sentían mayor seguridad en desarrollarlos, no tuvieron tiempo de contestar todas las preguntas y, por consiguiente, en la identificación de contenidos, quedaron espacios por responder.

Ello hace que, en algunos casos, el análisis previo de los espacios de construcciones y juego simbólico no se pueda contrastar de forma precisa con los resultados del cuestionario post.

Lo mismo ocurrió con los grupos de discusión, cuya intención era poder discutir con los profesionales entorno a todos los espacios para poder contrastar la información mediante las observaciones no participantes y los datos de los cuestionarios, pero, el tiempo facilitado para llevarlos a cabo estaba limitado por aspectos organizativos del propio centro y no se pudo tener en cuenta la información.

En cuanto a las actuaciones, las limitaciones están estrechamente vinculadas con las consideraciones éticas dado que se ofreció a los profesionales la posibilidad de participar del estudio de forma voluntaria y, se les expuso que solo participarían aquellos profesionales que lo desearan en las observaciones no participantes. De este modo, se garantizaba que el acceso al campo fuese respetuoso con las necesidades y voluntades de los profesionales. Además, para garantizar que este acceso fuese agradable, debido a las resistencias iniciales que expresaron algunas personas del equipo ante la posibilidad de filmar sus prácticas educativas, se les pidió que fuesen ellos mismos los que seleccionasen los momentos en que se disponían, seleccionando ellos las propuestas de espacios y materiales a analizar. En este sentido, se consideró oportuno también considerar los intereses de los profesionales, quienes podrían aprovechar el análisis del contenido para mejorar sus prácticas educativas.

Para llevar a cabo las observaciones no participantes, como condición, únicamente se les pedía que se filmasen como mínimo durante 3 sesiones seguidas para paliar el efecto cámara y recoger así su mayor espontaneidad. En este sentido, los profesionales se sintieron respetados y facilitaron el acceso al campo siendo ellos mismos quienes escogían el espacio que filmaban. Este hecho conllevó que no se pudieron obtener observaciones no participantes de todos los espacios ya que no se pautó en ningún momento, por lo tanto, no se pudo triangular la información de la misma manera, respecto a todos los espacios preestablecidos en el cuestionario.

Otra limitación vinculada a las actuaciones desarrolladas vino determinado por el tiempo y por aspectos organizativos. En un primer momento, cuando se diseñó el estudio, se consideró desarrollar tres grupos de discusión antes de la formación; uno en cada centro, y tres grupos de discusión después de la formación, nuevamente, uno

en cada centro. Las preguntas que formalizar en los diferentes centros tenían que ser las mismas; de este modo, se conseguía una amplia y profunda mirada sobre las aportaciones de todos los profesionales.

El desarrollo de la investigación no permitió llevarlas a cabo; la calendarización del estudio no encajaba con los tiempos de los claustros que, siendo muy ajustado el tiempo de trabajo no lectivo de los centros, expresaron la necesidad ajustar y replantear los grupos de discusión. Acorde también con las consideraciones éticas, donde se expresa claramente que la investigación ha de partir y respetar los intereses y necesidades de los participantes, se contempló la posibilidad de, al ser tres Escuelas Infantiles diferentes, pero con un mismo proyecto y equipo educativo, llevar a cabo los grupos de discusión en un único centro en representación de los tres. En este sentido, se escogió el que mayor disposición presentó y que con mayor facilidad se dispuso a facilitar a participar de los grupos de discusión. De este modo, del total de la muestra de 28 profesionales, se formó un grupo de discusión de 11 personas, poco menos de la mitad.

Se considera que los datos que se han recogido en este estudio han permitido comprender los conocimientos matemáticos y, parcialmente, los didácticos. Si se tienen en cuenta todos los conocimientos didácticos y matemáticos, la envergadura del estudio sería muy amplia. Por ello, se centró la investigación en algunos de los conocimientos matemáticos y algunos de los conocimientos didácticos. Los resultados han mostrado claramente la necesidad de validar estos conocimientos, incorporando todos los subdominios que tiene en consideración la literatura y profundizando aún más en los resultados.

En esta línea, sería muy interesante analizar de cada uno de los espacios y materiales descritos, ampliar el estudio e identificar las acciones que desarrollan los niños en ellos para poder detectar, concretamente, qué acciones favorecen.

También sería necesario poder desarrollar más ampliamente algunos conocimientos que se han abordado pero que los datos muestran la necesidad de seguir profundizando. Junto con los contenidos matemáticos sería interesante incluir los procesos para ampliar los conocimientos sobre las formas de aprender matemáticas y contrastarlas. O profundizar en el estudio sobre los currículos internacionales, centrándose exclusivamente en el primer ciclo de Educación Infantil e indagar en

nuevos mecanismos para acercarlos de forma positiva a los profesionales y valorar los conocimientos de los profesionales en este ámbito.

De hecho, a partir del conjunto de conocimientos que presentan Alsina y Delgado (2021, 2022) sería interesante desarrollar un estudio longitudinal que permitiera validar sus aportaciones y determinar un nuevo modelo de conocimiento para el profesional de la Escuela Infantil especializado en la matemática y su didáctica. Con ello, junto con un estudio más amplio que contemplase toda la etapa 0-6, se obtendría un visión muy completa, profunda y amplia de los programas de formación inicial para los profesionales de magisterio en Educación Infantil, en este ámbito.

Además, se considera imprescindible desarrollar nuevos estudios que aporten información y permitan profundizar sobre la formación inicial de los profesionales de la Escuela Infantil para validar los contenidos de estos programas de formación acorde con las actuales innovaciones y transformaciones, tanto de contenido como de proceso, en que se basa el desarrollo de las primeras matemáticas. Una formación amplia que facilite la integración de todos los contenidos, que dé lugar a ejercitarlos de manera significativa, a través de prácticas emergentes, con espacios reflexivos y de consolidación de los contenidos introducidos. Que transfiera a las prácticas educativas y que sea tanto para maestros como para técnicos de Educación Infantil donde, del conjunto de saberes en que se instruye a los futuros profesionales, pase a ser un conocimiento altamente reconocido con los créditos suficientes para desplegarse amplia y profundamente.

De este modo, se estima la necesidad de desarrollar un programa de formación continua que parta de la formación que se ha desarrollado en este estudio y que se amplíe ayudando en la implementación y consolidación de los aprendizajes promovidos. De hecho, este era un objetivo inicial en este estudio, pero, de nuevo, la dimensión de éste, no permitió desarrollarlo. La formación en el claustro de las EBMV continuó, pero no se acompañó de un estudio longitudinal. En este sentido, se considera que sería interesante poder analizar el impacto de la formación a largo plazo para determinar qué modelos formativos son necesarios para implementar estos conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos.

Finalmente, sería muy interesante añadir nuevas investigaciones a las ya existentes sobre el valor de las prácticas educativas en estas primeras edades y vehiculando

líneas de continuidad entre el primer ciclo de Educación Infantil y el segundo ciclo. Actualmente sigue existiendo, en todos los sentidos, una rotura que los desconecta y que genera grandes diferencias entre ambos ciclos que deberían erradicarse. Por un lado, la semilla que se planta en el primer ciclo de Educación Infantil podría arraigar y mantenerse a lo largo de toda la etapa, incorporando, en el segundo ciclo aspectos muy interesantes del primer ciclo. Por otro lado, acercando posiciones en las condiciones sociolaborales que inciden directamente en las prácticas educativas y en el valor y el reconocimiento que se otorga a los profesionales en las Escuelas Infantiles.

Cualquier profesional que trabaja en una Escuela Infantil debe estar adecuadamente pagado, y sus derechos laborales convenientemente reconocidos como una forma de valorar su importantísima labor educativa con los niños y niñas desde el nacimiento... Es muy importante que la etapa (0-6) contenga una identidad propia en cuanto a organización, objetivos e intencionalidad educativa (Azkona y Hoyuelos, 2011, p.160).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abad, J. (2006). La escuela como ámbito estético según la pedagogía reggiana. .
Aula de Infantil, 1, 10-16. <https://rb.gy/2i8h4t>
- Abad, J., y Ruiz de Velasco, A. (2014). Contexto de simbolización y juego. La propuesta de las instalaciones. *Aula de Infantil*, 77, 11-15. <https://rb.gy/iormux>
- Acosta, Y., y Alsina, Á. (2015). Acciones matemáticas en la escuela infantil en un marco de reflexión y transformación docente. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 4(2), 1-21. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2015.1-21>
- Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, 45(1), 14-29. <https://doi.org/10.1177/1836939119885310>
- Alsina, Á. (2004). *Com desenvolupar el pensament matemàtic dels 0 als 6 anys*. (2ª Ed.). Eumo Editorial.
- Alsina, Á. (2009). Un análisis optimista de la educación matemática en la formación de maestros de educación infantil. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 30-43. <https://rb.gy/5iecq8>
- Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum and Educational Practice. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education* 2, 100-153. <https://rb.gy/eyy7rv>
- Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2016a). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Revista Épsilon*, 33(92), 7-29. <https://rb.gy/r4szur>
- Alsina, Á. (2016b). El currículo del número en educación infantil. Un análisis desde una perspectiva internacional. *PNA*, 10(3), 135-160. <https://doi.org/10.30827/pna.v10i3.6086>
- Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20. <https://doi.org/10.14422/pym.i376.y2018.002>

- Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 85-108. <https://mdc.ulpgc.es/cdm/ref/collection/numeros/id/1178>
- Alsina, Á. (2019b). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8, 1-19 <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19>
- Alsina, Á. (2019c). Estableciendo niveles de adquisición de conocimientos matemáticos importantes de 3 a 6 años: Rúbrica ACMI 3-6. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8, 17-43. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2019.17-43>
- Alsina, Á. (2020a). La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 23(2), 373-387. <https://rb.gy/kxqphe>
- Alsina, Á. (2020b). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159. <https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018>
- Alsina, Á. (2021). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 9, (2), 1-20. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2020.1-20>
- Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.
- Alsina, Á., y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional. Una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 218-235. <https://rb.gy/gymq6m>
- Alsina, Á., y Berciano, A. (2018). Developing informal mathematics in Early Childhood Education. *Early Child Development and Care*, 190, (13), 2013-2031. <https://doi.org/10.1080/03004430.2018.1555823>
- Alsina, Á., y Delgado, R. (2021). Identificando los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil: un primer paso para el desarrollo profesional. *ReviSeM: Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 6, 1-23 <https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16003>

- Alsina, Á., y Delgado, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad (MES)*, 5, 18-37. <https://rb.gy/i6onju>
- Alsina, Á., y León, N. (2016). Acciones matemáticas de 0 a 3 años a partir de instalaciones artísticas. *Educatio Siglo XXI*, 34, 33-62. <https://doi.org/10.6018/j/263801>
- Alsina, Á., y Martínez, M. (2016). La adquisición de conocimientos matemáticos intuitivos e informales en la Escuela Infantil: el papel de los materiales manipulativos. *RELAdEI. Revista Latinoamericana de Educación Infantil*, 5(2), 127-136. <https://rb.gy/zmtnwy>
- Alsina, Á., y Roura, D. (2017). Estableciendo niveles de adquisición de conocimientos matemáticos informales antes de los 3 años: diseño, construcción y validación de una rúbrica. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(1), 32-52. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2017.32-52>
- Alsina, Á., Aymerich, C., y Barba, C. (2008). Una visión actualizada de la didáctica de la Matemática en la educación infantil, *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 47, 10-19. <https://rb.gy/6f8e08>
- Alsina, Á., Novo, M.L., y Moreno, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(1), 1-20. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2016.1-20>
- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M., Giménez, J., y Torra, M. (2007). *Enseñar matemáticas*. Graó.
- Altimir, D. (2007). El temps. En M. Jubete (Ed.), *El valor educatiu de les coses de cada dia*. (pp. 43-48). Editorial Rosa Sensat.
- Altimir, D. (2010). *¿Cómo escuchar a la infancia?* Octaedro.
- Amorós, E., y Hortal, A. (2018). *44 experiencias en 0-3*. Graó.
- Anderson, A. (1997). Families and mathematics: A study of parent-child interactions. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28 (4), 484-511. <https://doi.org/10.2307/749684>

- Anton, M., Fusté, S., Llenas, P., Martín, L., Masnou, F., Oller, M., Palou, S., y Thió, C. (2016). *Planificar la etapa 0-6. Compromiso de sus agentes y práctica cotidiana*. Graó.
- Arnáiz, V. (2005). Cambio en las inteligencias. *Aula de infantil*, 28, 5-6. <https://rb.gy/yttazn>
- Arnáiz, S., Basterrechea, M., y Carreño, S. (2011). *Guía para proyectar y construir escuelas infantiles*. Federación Española de Municipios y Provincias. Ministerio de Educación y Ciencia. <https://rb.gy/7dc4tc>
- Arnáiz, V., y Camps, V. (2005). Taller de construcciones. ¿Cómo lo hacemos? *Aula de Infantil*, 26, 7-10.
- Azkona, J. M., y Hoyuelos P., A. (2011). Reflexiones sobre la calidad en las escuelas infantiles. *Tarbiya: Revista de investigación e innovación educativa*, 42, 157-186. <https://revistas.uam.es/tarbiya/article/view/273>
- Ball D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Balfanz, R. (1999). Why do we teach young children so little mathematics? Some historical considerations. En J.V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 3-10). NCTM y NAEYC.
- Ballester, L. (2001). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Universidad de las Islas Baleares. <https://rb.gy/nd1htp>
- Bamberger, M. (2012). Introducción a los métodos mixtos de la evaluación de impacto. *Notas sobre evaluación de impacto*, 3, 1-42. <https://rb.gy/kdeu3o>
- Baroody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.
- Baroody, A. (1988). Mental-addition development of children classified as mentally handicapped. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 369-388 <https://doi.org/10.1007/BF00312453>
- Barrero, M., Vergara, E., y Martín, P. (2015). Avances neuropsicológicos para el aprendizaje matemático en educación infantil: la importancia de la lateralidad y

- los patrones básicos del movimiento. *Educación Matemática en la Infancia*, 4(2), 22-31. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2015.22-31>
- Bassedas, E., Huguet, T., y Solé I. (2006) Aprender y enseñar en educación infantil. Graó.
- Bastable, V., y Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165-184). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-8>
- Battini, E. (1982). Modificaciones, eliminazione, cambiamento riguardante gli spazi attuali, gli arredi attuali in funzione delle attivita' e della natura della vita scolastica. En Comune di Módena (Eds.), *L'organizzazione materiale dello spazio scolastico*. Comune di Modena: documento mimeografiado (pp. 23-30).
- Bautista, J.M. (2010). *Los materiales como mediadores*. <https://rb.gy/rzfzvtv>
- Benz, C., Steinweg, A.S., Gasteiger, H., Schöner, P., Vollmuth, H., y Zöllner, J. (2018). *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM3 Conference, 2016*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78220-1>
- Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años)*. Graó.
- Bidell, T. (1992). Beyond interactionism in contextualist models of development. *Human Development*, 35, 306-315. <https://doi.org/10.1159/000277224>
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.
- Björklund, C., y Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 359-377. <https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066426>
- Bonàs, M. (2010). El espacio vacío. Tiempos y espacios de posibilidades. *Aula de Innovación educativa*, 193-194, 32-35.
- Booth, T., Ainscow, M., Black-Hawkins, K., Vaughan, M., y Shaw, L. (2000). *Guía para la evaluación y mejora de la educación inclusiva*. Editado por CSIE y Consorcio Universitario para la Educación Inclusiva. <https://rb.gy/botnor>
- Borghi, B.Q. (2005). *Los talleres en educación infantil. Espacios de crecimiento*. Graó.
- Borghi, B.Q. (2019). *Educación en el 0-3. La práctica reflexiva en los nidi d'infanzia. Espacios de crecimiento*. Graó.

- Bosch, E. (2003). *¿Quién educa a quién?: Educación y vida cotidiana*. Laertes
- Brazelton, T., y Greenspan, S. (2005). *Las necesidades básicas de la infancia. Lo que cada niño precisa para vivir, crecer y aprender*. Graó.
- Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford University Press.
- Bryman, A., Becker, S., y Sempik, J. (2008). Quality criteria for quantitative, qualitative and mixed methods research: A view from social policy. *International Journal of Social Research Methodology*, 11 (4), 261-276. <https://doi.org/10.1080/13645570701401644>
- Brousseau, G. (1998) *Theory of the Didactic Situation*. La Pensée Sauvage.
- Buela-Casals, G. (2003). Evaluación de la calidad de los artículos y de las revistas científicas: Propuesta del factor de impacto ponderado y de un índice de calidad. *Psicothema*, 15(1), 23-35. <https://rb.gy/2a6u48>
- Bueno, D. (2019). *Neurociencia para educadores*. Ediciones Octaedro.
- Buys, K. (2010). Años de preescolar. Numerización emergente. En M. Van de Heuvel-Panhuizen, (Ed.), *Los niños aprenden matemáticas: Una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria* (pp. 47-56). Correo del Maestro y La Vasija.
- Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. Macmillan.
- Cagliari, P., Castagnetti, M., Giudici, C., Rinaldi, C., Vecchi, V., y Moss, P. (2016). *Loris Malaguzzi and the Schools of Reggio Emilia. A selection of his writings and speeches*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315778631>
- Campbell, D., y Stanley, J. (1966) *Experimental and quasi-experimental designs for research*. Rand Mc.
- Canals, M. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari*. Eumo.
- Cardo, C., y Vila, B. (2005). *Material sensorial (0-3 años) Manipulación y experimentación*. Graó.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Heinemann.

- Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM e IAP.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila D. Y., y Muñoz-Catalán, M. C., (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 22, 185-206. <https://doi.org/10.4000/adsc.748>
- Casellas, M., Gamissans, M., Martínez, M., y Olmos, G. (2016). Un repte de creació en transformació constant. *Infància: educar de 0 a 6 anys*, 208, 15-20.
- Castro, E. (1995). *Exploración de Patrones Numéricos mediante ConFiguraciones Puntuales*. (Tesis doctoral. Universidad de Granada). <https://rb.gy/sjo5ds>
- Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Latinoamericana (PEL)*, 39(2), 119-135. <https://rb.gy/jipxdh>
- Castro, E., y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.
- Castro, E., Cañadas, M.C., y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(2), 1-11. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2013.1-11>
- Castro, E., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). *Patrones en números Figurados. Aplicación para la enseñanza*. Síntesis. <https://rb.gy/nd1htp>
- Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En, M. Marín et al. (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99). Ciudad Real: SEIEM.
- Cavallini, I., Quinti, B., Rabotti, A., y Tedeschi, M. (2017). Las arquitecturas de la educación: el espacio de lo posible. La cultura del habitar en la experiencia de las escuelas municipales de educación infantil de Reggio Emilia. *Revista*

- Internacional de Educación para la Justicia Social (RIEJS)*, 6(1), 181-197.
<https://doi.org/10.15366/riejs2017.6.1.010>
- Caulfield, R. (2000). Number Matters: Born to Count. *Early Childhood Educational Journal*, 28(1), 63-65. <https://doi.org/10.1023/A:1009503821839>
- Ceballos, N., Susinos, T., y García, M. (2018). Espacios para jugar, para aprender. Espacios para relacionarse. Una experiencia de voz del alumnado en la escuela infantil (0-3 años). *Estudios pedagógicos*, 44(3), 117-135.
<https://doi.org/10.4067/S0718-07052018000300117>
- Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics*. NGA Center y CCSSO.
http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf
- Ceppi, G., y Zini, M. (2009). *Niños, espacios, relaciones. Metaproyecto de ambiente para la infancia*. Red Solare.
- Chamorro, M.C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Pearson Educación.
- Chalufour, I., y Worth, K. (2004). *Building structures with young children*. Redleaf Press.
- Carruthers, E., y Worthington, M. (2008). *Children's mathematics: Making marks, making meaning* (2ª edición). Sage.
- Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. En D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410609236>
- Clements, H.D., y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.
- Clements, D.H., Sarama, J., y DiBiase, A.M. (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410609236>
- Cohen L., y Manion, L (1990). *Métodos de investigación educativa*. Muralla.
- Cole, M. (1999). *Psicología cultural: una disciplina del pasado y del futuro*. Ediciones Morata.

- Coll, C. (2001). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y del aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Eds.). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar* (157-186). Alianza Editorial.
- Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onorubia, J., Solé, I., y Zabala, A. (1999) El constructivismo en el aula (9ª Ed.). Graó.
- Coll, C., y Rochera, M. J. (2000). Actividad conjunta y traspaso del control en tres secuencias didácticas sobre los primeros números de la serie natural. *Infancia y aprendizaje*, 23(92), 109-130. <https://doi.org/10.1174/021037000760087801>
- Colomina, R., Onrubia, J., y Rochera, M.J. (2001). Interactividad, mecanismos de influencia educativa y construcción del conocimiento en el aula. En C. Coll, A. Marchesi y J. Palacios (Eds.), *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la Educación Escolar* (pp.437-458). Alianza Editorial.
- Creswell, J.W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed approaches*. Sage.
- Davoli, F., y Soggia, P. (2012). Espacios y materiales para investigar el mundo. *Cuadernos de pedagogía*, 423, 26-29. <https://rb.gy/zwabau>
- Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 195-208.
- Davis, B., y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4>
- Daniels, H. (2003). *Vygostky y la pedagogia*. Paidós.
- Decret 101/2010, de 3 d'agost, *d'ordenació dels ensenyaments del primer cicle de l'educació infantil*. Generalitat de Catalunya. (2012). <https://rb.gy/lmkvod>
- Decroly, O. (1965). *Iniciación general al método Decroly*. Losada
- Delgado-Rebolledo, R., y Espinoza-Vásquez, G. (2019). El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 253-262). SEIEM.

- Dellinger, A.B., y Leech, N.L. (2007). Toward a unified validation framework in mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research*, 1(4), 309-32
<https://doi.org/10.1177/1558689807306147>
- Den Heuvel-Panhuizen, V. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.
<https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc>
- Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12-25.
<https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.03.001>
- De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta*, 14, 47-65.
- De Castro, C. (2016). El estudio de documentos curriculares como organizador de la investigación en educación matemática infantil. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 39-52). Málaga: SEIEM. [DeCastro2016Estudio \(uniandes.edu.co\)](http://DeCastro2016Estudio.uniandes.edu.co)
- De Castro, C., Barrero, D., y González, B. (2011). Posibilidades del juego de construcción para el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Infantil. *PULSO. Revista de Educación*, 34, 103-124. <https://rb.gy/fd9rck>
- De Castro, C., y Escorial, B. (2006): «El juego de construcción: Una experiencia matemática para la escuela infantil». *INDIVISA Revista*, 15, 15-17.
<https://rb.gy/5puuru>
- De Castro, C., y Flecha, G. (2012). Buscando indicadores alternativos para describir el desarrollo del juego de construcción con niños de 2 y 3 años. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM (pp. 455-472). Ciudad Real: SEIEM. <https://rb.gy/cx0ajr>

- De Castro, C., Flecha, G., y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 26, 89-108. <https://rb.gy/ksfscv>
- De Castro, C., González, A., y Escorial, B. (2009). El aprendizaje de las matemáticas a los tres años: Narración reflexiva sobre la construcción de un mercado medieval. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 70, 53-65. <https://rb.gy/il0dti>
- De Castro, C., y Quiles, O. (2014). Construcciones simétricas con 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil*, 77, 32-36. <https://rb.gy/rr4oqg>
- Departament d'Educació (2017). *Despertem mirades a l'entorn de l'espai escolar*. Direcció General d'Educació Infantil i Primària. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Servei de Comunicació i Publicacions. <http://hdl.handle.net/20.500.12694/592>
- Dienes, Z. P. (1970). *Iniciación a lógica y conjuntos*. Teide
- Dodd-Nufrio, A. T. (2011). Reggio Emilia, Maria Montessori, and John Dewey: Dispelling teachers' misconceptions and understanding theoretical foundations. *Early Childhood Education Journal*, 39(4), 235-237. <https://doi.org/10.1007/s10643-011-0451-3>
- Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 80, 71-84. <https://rb.gy/mfmdqy>
- Edo, M. (2016). Emergencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil. Juego y Matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 53-66). Málaga: SEIEM. <https://rb.gy/meumiy>
- Escorial, B., y de Castro, C. (2011). La gran torre: Matemáticas en la Educación Infantil a través de un proyecto de construcción. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 135-156. <https://rb.gy/3pkwpb>
- Falk, J. (2008). *Lóczy, educación infantil*. Octaedro.
- Falk, J. (2013). Si tocamos el cuerpo del bebé. En J. Falk (Ed.), *Bañando al bebé. El arte del cuidado* (pp. 7-16). Asociación Pikler-Lóczy de Hungría.

- Fernández, M. (2006). Los matemáticos deben ser conscientes de la importancia de tender puentes con la sociedad. *Matematicalia: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, 2(4), 2. <https://rb.gy/6yruah>
- Ferré, J., y Aribau, E. (2014). *El desarrollo neurofuncional del niño y sus trastornos*. Lebón.
- Fernández, C. (2010). Análisis epistemológico de la secuencia numérica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 59-87. <https://rb.gy/mkeaae>
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Reidel.
- Frabboni, F., Galleti, A., y Savorelli, C. (1980). *El primer abecedario: el ambiente*. Editorial Fontanella.
- Freinet, C. (1968). *Essai de psychologie sensible appliquée à l'éducation*. Delachaux et Niestle.
- Gálvez, G. (1985). *Aprendizaje de la orientación espacial en el espacio urbano. Una propuesta para la enseñanza de la geometría en la enseñanza primaria*. (Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela). <https://rb.gy/wzf4ml>
- Fàbregues, S. (2015). *La conceptualización y operacionalización de la calidad de la investigación basada en métodos mixtos: Un estudio de casos múltiples de cuatro disciplinas*. (Tesis doctoral Universitat Autònoma de Barcelona). <https://rb.gy/ek71uy>
- Ferri, G. (2019). La documentació educativa, entre mite i realitat. En G. Ferri (Ed.), *I ara què? Escrits d'un inconformista pedagògic*. (pp. 33 - 63). Rosa Sensat. <https://rb.gy/ehrlp3>
- Fernández, B., y Arias, J.R. (2013). La Expresión Corporal como fuente de aprendizaje de nociones matemáticas espaciales en Educación Infantil. *RETOS. Nuevas Tendencias en Educación Física, Deporte y Recreación*, 24, 158- 164. <https://rb.gy/smkk46>

- Fernández, K., Gutiérrez, I., Gómez, M., Jaramillo, L., y Orozco, M. (2004). El pensamiento matemático informal de niños en edad preescolar. *Zona próxima*, 5, 42-73. <https://rb.gy/q1cofz>
- Fernández, C., Valls, J., y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M.M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. <https://rb.gy/gmzguh>
- Flores, E., Escudero, D., y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Middle East Technical University. <https://rb.gy/1tepyw>
- Font, V., Planas, N., y Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105. <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). MacMillan. <https://rb.gy/juyjic>
- Fuson, K. C., Clements, D. H., y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. NCTM y NAEYC.
- Frabboni, F. (2009). La escuela infantil entre la cultura de la infancia y la ciencia pedagógica y didáctica. En M. Zabalza (Ed.), *Calidad en educación infantil*. (pp. 63 - 94). Narcea S.A. Ediciones.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. En H.G. Steiner (Ed.), *The Teaching of Geometry at the Pre-College Level* (pp. 137-159). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-5896-3_10
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2_2
- Freudenthal, H. (1987) Mathematics starting and staying in reality. En I. Wirszup y R. Street (Eds.), *Proceedings of the USCMP Conference on Mathematics Education*

- on Development in School Mathematics around the World*. NCTM.
<https://rb.gy/cgfv8y>
- Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Froebel, F. (1913). *La educación del hombre*. Daniel Jorro.
- Gandini, L. (1993). Fundamentals of the Reggio Emilia approach to early childhood education. *Young Children*, 49(1), 4-8. <https://rb.gy/qi027p>
- Gandini, L. (2011). La inteligencia se despierta usándola: El salto a la longitud. En Escuelas Infantiles de Reggio Emilia, *La inteligencia se construye usándola*. (pp. 141 - 161). Ediciones Morata S.L.
- Garzon Castro, P., Calvo Alvarez, M. I., y Orgaz Baz, M. B. (2016). Inclusive education. Attitudes and strategies of teachers. *Revista Española de Discapacidad-REDIS*, 4(2), 25-45. <https://doi.org/10.5569/2340-5104.04.02.02>
- Gasteiger, H., y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 109-117.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.002>
- Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.
- Ginsburg, H. P. (1977). *Children's arithmetic: the learning process*. Van Nostrand.
- Ginsburg, H. (1988). *Piaget's theory of intellectual development* (3ª Ed.). Prentice-Hall, Inc.
- Ginsburg, H., y Baroody, A. (2007). *Test de Competencia Numérica Básica*. TEA Ediciones.
- Ginsburg, H. P., Klein, A., y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research and practice. En I.E. Siegel y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Child psychology in practice* (Vol. 4, pp. 401-476). John Wiley y Sons.
- Goddard, S. (2015). *Reflejos, aprendizaje y comportamiento. Vida y Kinesiología*. ING Ediciones.
- Goddard, S (2020). *El niño bien equilibrado*. (3ª Ed.) ING Ediciones.

- Godino J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22 (2/3) 237-284. <https://rb.gy/ped83v>
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31. <https://rb.gy/qkvet8>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R., y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, G. D'Amore y M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249-269). Universidad de la Sabana. <https://rb.gy/oc04uh>
- Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H., y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 8(1), 46-74. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46>
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252. <https://rb.gy/jjpd9q>
- Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C., y Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en educación matemática. XV Simposio de la SEIM* (pp. 33-50). Ciudad Real: SEIEM. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.19>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>

- Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. <https://rb.gy/9qxivst>
- Godino, J. D., y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). Antalya, CERME. <https://rb.gy/dbdprm>
- Goldschmied, E. (1986). El joc heurístic. *Infancia*, 33, 11-15.
- Goldschmied, E. y Jackson, S. (2007). *La educación infantil de 0 a 3 años*. Morata.
- González, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *ISLAS*, 45(138), 125-135.
- González, J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: nuevas respuestas para viejos interrogantes. *Cuestiones pedagógicas*, 15, 227-246. <https://rb.gy/do8lvx>
- González, J., y Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 54, 25-45. <https://rb.gy/gf9pqb>
- Goñi, J. M. (2008). *3-2 Ideas Clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Graó.
- Gura, P. (1992). *Exploring learning: Young children and blockplay*. Paul Chapman Publishing.
- Hall, K., Cunneen, M., Horgan, M., Cunningham, D., Murphy, R y Ridgway, A. (2014). *Loris Malaguzzi and the Reggio Emilia experience*. Bloomsbury Publishing.
- Herrera, B. (2000). Intervención psicomotriz en el Primer Ciclo de Educación Infantil: estimulación de situaciones sensoriomotrices. *RIFOP: Revista interuniversitaria de formación del profesorado: continuación de la antigua Revista de Escuelas Normales*, 37, 87-102. <https://rb.gy/mmx9dg>
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers Topic-Specific Knowledge

- of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>
- Hirsch, E. (1996). *The Block Book*. NAEYC.
- Hoyuelos, A. (2004). *La ética en el pensamiento y obra pedagógica de Loris Malaguzzi. Rosa Sensat*. Octaedro.
- Hoyuelos, A. (2006). *La estética en el pensamiento y obra pedagógica de Loris Malaguzzi*. Octaedro.
- Hoyuelos, A. (2007). Documentación como narración y argumentación. *Aula de Infantil*, 39, 5-9.
- Hoyuelos, A. (2010). La identidad de la educación infantil. *Educação*, 35(1), 15-23.
<https://doi.org/10.5902/198464441600>
- Hoyuelos, A. (2011). Introducción. Educación infantil: una canción a varias voces. Tarbiya, *Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 42, 5-12.
<https://revistas.uam.es/tarbiya/article/view/258>
- Hoyuelos, A. (2013). Aprender en la escuela. *Infancia: educar de 0 a 6 años*, 137, 32-38.
- Hoyuelos, A. H. (2020). *Loris Malaguzzi: una biografía pedagógica*. Morata.
- Hundeland, P.S., Erfjord, I., y Carlsen, M. (2017). A kindergarten teacher's revealed knowledge in orchestration of mathematical activities. En T. Dooley, y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME 10* (pp. 1853 - 1860). DCU Institute of Education and ERME.
- Iglesias, L. (2009). La organización de los espacios en la educación infantil. En M. Zabalza (Ed.), *Calidad en la educación infantil* (pp. 235 - 286). Narcea S.A. Ediciones.
- Jubete, M. (2008). *Espais i temps per al joc*. Associació de Mestres Rosa Sensat.
- Kahn, L. (2003). *Escritos conferencias y entrevistas*. El Croquis.
- Kamii, C. K. (1985). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Aprendizaje Visor.

- Kamii, C., Miyakawa, Y. y Kato, Y. (2004). The development of lógico mathematical knowledge in a block-building activity at ages 1-4. *Journal of Research in Childhood Education*, 19(1), 44-57. <https://doi.org/10.1080/02568540409595053>
- Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J., y Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders' performance on a state fourth-grade assessment. En R. Speiser, C. Maher, y C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the Qorth American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 99-108).
- Kersh, J., Casey, B. M., y Young, J. M. (2008). Research on spatial skills and block building in girls and boys. En B. Spodek y O. N. Saracho (Eds.), *Contemporary perspectives on mathematics in Early Childhood Education* (pp. 233-251). Information Age Publishing.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell. B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. National Academy Press. Disponible en: http://www.nap.edu/openbook.php?record_id=9822
- Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. Siglo XXI Editores S.A.
- Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410600523>
- Lago, M. O., Jiménez, L., y Rodríguez, P. (2003). El bebé y los números. En I. Enesco (Ed.), *El desarrollo del bebé: cognición, emoción y afectividad* (pp. 147-170). Alianza.

- Lago, M.O., Rodríguez, P., Escudero, A., y Dopico, C. (2012). ¿Hay algo más que contar sobre las habilidades numéricas de los bebés y los niños? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 38-53. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2012.38-53>
- Lakoff, G., y Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Latorre, A., Del Rincón, D., y Arnal, J. (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Ediciones experiencia.
- Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 42, 27-41. <https://doi.org/10.1007/s13158-010-0003-9>
- Lee, S. (2012). La historia de Emma: Estudio de caso sobre el desarrollo de la resolución de problemas desde los 8 meses a los 2 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(2), 64-71. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2012.64-71>
- León, O. G., y Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en Psicología y Educación* (3ª ed.). McGraw-Hill.
- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10, 53-62. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.18>
- Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Click, M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (pp.47-70). Kluwer Academic Publishers.
- López, G. C. H., Palacio, C. R., y Nieto, L. A. R. (2007). Las prácticas educativas familiares como facilitadoras del proceso de desarrollo en el niño y niña. *El agora usb*, 7(2), 233-240.
- Malaguzzi, L. (1981). Un'organizzazione partecipata. En A.A.V.V. (2010). *Una città, tanti bambini. Memorie di una storia presente* (pp. 114-115). Reggio Children.
- Malaguzzi, L. (2020). *La educación infantil en Reggio Emilia. Associació de Mestres Rosa Sensat*. (6ª Ed.). Ediciones Octaedro.

- Manjón-Cabeza, A. G. (2019). El juego de construcción para el desarrollo del pensamiento matemático en un aula de 2-3 años. *Edma 0-6: Educación matemática en la infancia*, 8(1), 58-88. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.58-88>
- Margolinas, C. (2014). ¿Saberes en la escuela infantil? Sí, pero ¿cuáles? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(1), 1-20. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2014.1-20>
- Martin, L. (2016). Mirando dentro de la escuela: la organización del espacio y los materiales. En M. Antón (Ed.), *Planificar la etapa 0-6*. Graó.
- Martínez, R.A. (2007). *La Investigación en la Práctica Educativa: Guía Metodológica de Investigación para el Diagnóstico y Evaluación en los Centros Docentes*. Ministerio de Educación y Ciencia. Dirección General de Educación, Formación Profesional e Innovación Educativa
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah.
- Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. En M. Sherin, V. Jacobs y R. Philipp (eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35-50). Outledge.
- McCray, J., y Chen, J.Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26, 291-307 <https://doi.org/10.1080/02568543.2012.685123>
- Meaney, T., Helenius, O., Johansson, M.L., Lange, T., y Wernberg, A. (2016). *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM2 Conference*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4>
- Michelet, A. (1977). *Los útiles de la infancia*. Herder.
- Miyakawa, Y., Kamii, C., y Nagashiro, M. (2005). The development of logicomathematical thinking at ages 1-3 in play with blocks and an incline. *Journal of Research in Childhood Education*, 19(4), 292-301. <https://doi.org/10.1080/02568540509595072>

- Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan: Un texto base para psicólogos, enseñantes y padres*. Visor
- Molina, P. (2007). El valor educatiu dels moments rutinaris. En M. Jubete (ed.), *El valor educatiu de les coses de cada dia* (pp. 18-26). Rosa Sensat.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185- 3194). ERME.
- Montes, M., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 5-20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.226>
- Montessori, M. (1914). *El manual personal de la Dra. Montessori*. Complejo Educativo de Desarrollo Integral.
- Montessori, M. (1964). *L'enfant*. Monthier
- Montessori, M. (1982). *El niño*. Diana S.A.
- Montessori, M. (1986). *La mente absorbente del niño*. Diana S.A.
- Moreira, C. B., Gusmão, T. C., y Font, V. (2018). Mathematical tasks for the development of space perception in early childhood education: potentials and limits. *Bolema, Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 231-254. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a12>
- Moreno, F. M. (2013). La manipulación de los materiales como recurso didáctico en educación infantil/The Manipulation of Materials as a Teaching Resource in Childhood Education. *Estudios sobre el mensaje periodístico*, 19, 329-337. https://doi.org/10.5209/rev_ESMP.2013.v19.42040
- Morín, E. (2001). *Los Siete Saberes Necesarios a la Educación del Futuro*. Magisterio.
- Mosvold, R., Bjuland, R., Fauskanger, J., y Jakobsen A. (2011). Similar but different - investigating the use of MKT in a Norwegian kindergarten setting. En M. Pytlak,

- T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the CERME 7*, (pp. 1802-1811). University of Rzeszów.
- Mulligan, J. (2010). Reconceptualising early mathematics learning. En C. Glascoine, y K-A. Hoad (Eds.), *Teaching mathematics? Make it count: proceedings of the Australian Council for Educational Research (ACER) Numeracy Conference* (pp. 47-52). Australian Council for Educational Research (ACER). <https://rb.gy/ag4ghv>
- Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M.A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 589-605. <https://rb.gy/612uy6>
- Muñoz-Catalán, M. C., Liñan-García, M., y Ribeiro, M. (2017). Conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, 24, 4-19. <https://doi.org/10.18764/2178-2229.v24n.especialp4-19>
- Musons, E. (2005). ¿Cómo ayudan a aprender las construcciones? *Aula de Infantil*, 26, 23-24.
- National Association for the Education of Young Children and National Council for Teachers of Mathematics [NAEYC y NCTM]. (2002). Early childhood mathematics: Promoting good beginnings. A joint position statement. <https://rb.gy/mezqfe>
- National Association for the Education of Young Children and National Council for Teachers of Mathematics [NAEYC y NCTM]. (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 1-23. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.1-23>
- National for Council Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. NCTM.
- National for Council Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.

- National for Council Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Department of Education.
- National Research Council. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. The National Academies Press.
- National Research Council. (2014). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(1), 21-48. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2014.21-48>
- Newcombe, N. S. (2002). The nativist-empiricist controversy in the context of recent research on spatial and quantitative development. *Psychological Science*, 13, 395-401. <https://doi.org/10.1111/1467-9280.00471>
- Newton, K.J., y Alexander, P.A. (2013). Early mathematics learning in perspective: Eras and forces of change. En L.D. English y J.T. Mulligan (eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning, Advances in Mathematics Education* (pp. 5-28). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_2
- Ódena, P. (2007). El valor educatiu dels moments rutinaris. En M. Jubete (ed.), *El valor educatiu de les coses de cada dia* (pp. 27-34). Rosa Sensat.
- Olmos, G., y Alsina, Á. (2021). Conocimientos matemáticos del profesorado de la Escuela Infantil (0-3 años): efecto en el diseño de espacios para desarrollar las matemáticas informales. *Magister: revista de formación del profesorado e investigación educativa*, 33(1), 59-73 <https://doi.org/10.17811/msg.33.1.2021.59-73>
- Oppermann, E., Anders, Y., y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174-184. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2007). *PISA 2006, Science competence for tomorrow's world*. OECD.

- Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. «BOE» núm. 5, de 05 de enero de 2008 Ministerio de Educación y Ciencia. <https://rb.gy/nagb4j>
- Palandri, A. (2010). Un día en el taller del "Area Blu". *Cuadernos de pedagogía*, 397, 68-71.
- Palou, S. (2016). La vivencia emocional de la infancia. M. Anton (coord.), *Planificar la etapa 0-6. Compromiso de sus agentes y práctica cotidiana* (pp. 57-68). Graó.
- Papic, M., y Mulligan, J. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. En P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, y A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice, proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 609-616). MERGA.
- Papic, M.M., Mulligan, J.T., y Mitchelmore, M.C. (2011). Assessing the development of preschoolers Mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237>
- Pereira, Z. (2011). Métodos mixtos de investigación en sistemas organizacionales. *Information Technology, Learning, and Performance Journal*, 21(1), 19-29.
- Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa: retos e interrogantes. I. Métodos*. Muralla.
- Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT*, 8(2), 1-49 <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p1>
- Pino-Fan, L., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal*

- of Mathematics, Science y Technology Education*, 11(6), 1429-1456.
<https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a>
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-32.
<https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8>
- Piaget, J. (1965). *Child's Conception of Number*. W. W. Norton & Company, Inc.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. W. W. Norton & Company, Inc.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (2015). *Psicología del niño*. (18ª ed). Morata.
- Pikler, E. (1984). *Moverse en libertad. Desarrollo de la motricidad global*. Narcea S.A. Ediciones
- Pikler, E. (2018). La competencia del bebé. En E. Herrán (Ed.), *Claves de la educación Pikler-Lóczy. Compilación de 20 artículos escritos por sus creadoras* (pp. 59-72). Asociación Pikler-Lóczy de Hungría United Nations Educational Scientific and Cultural Organization.
- Piñuel, J. L. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística*, 3(1), 1-42.
- Planas, N., y Alsina, Á. (2006). Argumentos para los futuros maestros en torno al conocimiento matemático. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 42, 51-63. <https://rb.gy/cphr9y>
- Planas, N., y Alsina, Á. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas: infantil, primaria, secundaria y educación superior*. Graó.
- Pujol, M. (2010). Entrevista a Anna Lia Galardini. *Cuadernos de Pedagogía*, 397, 61- 64
- Quintanal, J., y García, B. (2012). *Fundamentos básicos de metodología de investigación educativa*. Editorial CCS.
- United Nations Education, Scientific and Cultural Organization, UNESCO. (1994). Declaración de Salamanca de principios, política y práctica para las necesidades educativas especiales. http://www.unesco.org/education/pdf/SALAMA_S.PDF.

- United Nations International Children's Emergency Fund, UNICEF. (2004). Informe Anual del UNICEF 2004. UNICEF. <https://rb.gy/sjj6py>
- United Nations International Children's Emergency Fund, UNICEF. (2018). Informe anual 2017: Para cada niño una oportunidad. UNICEF. <https://rb.gy/57e01o>
- Ramos-Álvarez, M. M., y Catena, A. (2004). Normas para la elaboración y revisión de artículos originales experimentales en ciencias del comportamiento. *International Journal of Clinical and Health Psychology*, 4(1),173-189. <https://rb.gy/u6ans5>
- Ramis, A. (2021). *De 0 a 3 nada de pantallas*. Octaedro.
- Real Sociedad Matemática Española [RSME] y Fundación Ramón Areces (2020). *El Libro Blanco de las Matemáticas*. Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. <https://rb.gy/cjtf9>
- Rico, L., Lupiáñez, J.L., y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Comares.
- Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação*, 31(1), 11-22. <https://rb.gy/is73ql>
- Riera, M., Ferrer, M., y Ribas, C (2014). La organización del espacio por ambientes de aprendizaje en la Educación Infantil: significados, antecedentes y reflexiones. *RELADEI. Revista Latinoamericana de Educación Infantil*, 3(2), 19-39. <https://rb.gy/f3ithf>
- Rivas, M., y Godino, J. D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere*, 14(48), 189-205. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35616720018>
- Rinaldi, C. (2009). *In dialogo con Reggio Emilia. Ascoltare, ricercare e apprendere*. Reggio Children.
- Rinaldi, C. (2011). Conversation about architecture and pedagogy. En V. Vecchi (Ed.), *Art and creativity in Reggio Emilia. Exploring the role and potential of ateliers in early childhood education* (pp. 95-101). Routledge.
- Rinaldi, C. (2001). *Escuelas Infantiles de Reggio Emilia: Historia, filosofía y un proyecto de trabajo*. Novedades Educativas.

- Rinaldi, C. (2001) The pedagogy of listening: The listening perspective from Reggio Emilia. *Children in Europe*, 1, 1-4.
- Rinaldi, C. (2021). *En diálogo con Reggio Emilia: Escuchar, investigar y aprender*. Morata. <https://doi.org/10.4324/9780367854539>
- Rinaldi, C. (2009). El ambiente de la infancia. En Reggio Children y Domus Academy Research Center (Eds.), *Niños, espacios y relaciones: Metaproyecto de ambiente para la infancia* (pp. 114-120). Red Solare de School of Art and Communication.
- Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). SEIEM
- Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 4, 47-64. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i4.74>
- Rojas, N., Flores., P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema, Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 143-167. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos (Tesis doctoral Universidad de Granada). <https://rb.gy/lxddze>
- Rogoff, B. (1993). *Aprendices del Pensamiento. El desarrollo cognitivo en el contexto social*. Paidós.
- Rogoff, B. (1995). Observing sociocultural activity on three planes: Participatory appropriation, guided participation, and apprenticeship. En J. V. Wertsch, P. del Río, y A. Alvarez (Eds.), *Sociocultural studies of mind* (pp. 139-164). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139174299.008>
- Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255– 281.
- Ruiz de Velasco, Á. y Abad, J. (2019). *El juego simbólico*. (8ª ed.). Graó.

- Ruiz, L. (2001). La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos. En M.C. Chamorro (Ed.), *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 229-262). MECD.
- Ruozzi, M. (2011). Arcilla en la escuela maternal. En Escuelas Infantiles de Reggio Emilia (Ed.), *La inteligencia se construye usándola* (pp. 36-46). Morata.
- Rodriguez, G., Gil, J., y Garcia, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Algibe.
- Saldaña, J. (2013). *The Coding manual for Qualitative Researchers*. Sage.
- Sale, I., y Coll, C. (1999). Los profesores y la concepción constructivista. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onorubia, I. Solé, y A. Zabala (Eds.), *El constructivismo en el aula* (pp. 7-24). Graó.
- Salgado, M. (2015). La práctica docente en educación infantil desde el enfoque de la educación matemática realista y los procesos matemáticos. (Tesis doctoral. Santiago de Compostela). <https://rb.gy/ftkcg0>
- Salgado, M., y Salinas, M.J. (2011). Competencias numéricas de los niños/as al comenzar la Educación Infantil. En M.M. Moreno y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM* (pp. 439-451). SEIEM. <https://rb.gy/oelvg7>
- Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones*. Mc Graw Hill.
- Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087905460_016
- Schoenfeld, A. H. (2008). Research methods in (mathematics) education. En Lyn English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education, second edition* (pp. 467-519). Routledge.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard. *Educational Review*, 57(1), 1-22.
<https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Simon, M. A. (2004). Raising issues of quality in mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 157-163.
<https://doi.org/10.2307/30034910>
- Starkey, P., y Cooper, R. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210(4473), 1033-1035. <https://doi.org/10.1126/science.7434014>
- Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240(4852), 611-616.
<https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611>
- Sugrañes, E., Alós, M., Andrés, N., Casal, S., Castrillo, C., Medina, N., y Yuste, M. (2012). *Observar para interpretar. Actividades de vida cotidiana para la educación infantil (2-6)*. Graó
- Tall, D. (2009). Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (v. 2, pp. 220-225). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202>
- Vecino, F. (2005). El espacio como modelo teórico para el desarrollo de las geometrías. Situaciones de introducción a las mismas. En C. Chamorro (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 279-314). Pearson
- Traag, V. Y., y Franssen, T. (2016). *Revealing the quantitative-qualitative divide in sociology using bibliometric visualization*. Leiden University Disponible en:
<https://www.cwts.nl/blog?article=n-q2v294>
- Vasconcellos, H. (2009). El currículo high/scope para niños y niñas entre 2 y 3 años. En M. Zabalza (Ed.), *Calidad en la educación infantil* (pp. 177 - 188). Narcea S.A. Ediciones.

- Vásquez C., y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104>
- Vecchi, V. (2011). Dialoghi con i luoghi. En A.A.V.V (Ed.), *Lo stupore del conoscere. I cento linguaggi dei bambini* (pp. 7-8). Reggio Emilia.
- Vega, S. (2006). *Ciencia 3-6 Laboratorios de ciencias en la escuela infantil*. Graó.
- Vecchi, V. (2013). *Arte y creatividad en Reggio Emilia*. Morata.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Eds.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). La Pense Sauvage.
- Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2007). Whole Number and Operations. Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.557-628). Information Age Publishing Inc.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harward University Press.
- Vygotsky, L. S. (1988). Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*, 10, 103-117. <https://rb.gy/rqbqtw>
- Vila, B. (2018). Amb els infants i per als infants. *Infància: educar de 0 a 6 anys*, 223, 4-8.
- Zabalza, M. A. (2009). *Calidad en la educación infantil*. Narcea S.A. Ediciones.
- Zabalza, M. A. (2014). Tiempos y espacios en la educación infantil. *RELAdEI. Revista Latinoamericana de Educación Infantil*, 3(2), 13-15. <https://rb.gy/nsepki>
- Zabalza, M. A. (2018). Neurociencias y educación infantil. *RELAdEI. Revista Latinoamericana de Educación Infantil*, 7(1), 9-14. Recuperado a partir de <https://revistas.usc.gal/index.php/reladei/article/view/5255>
- Zini, M. (2010). Conversation about architecture and pedagogy. En Vecchi, V. Art y Creativity in Reggio Emilia (Eds.), *Exploring the role and potential of ateliers in early childhood education* (pp. 101-107). Routledge.

ANEXOS

ANNEXO 1

Cuestionario “CDM-MAT0-3”

Instrumento de recogida de información sobre los conocimientos didáctico-disciplinares, los comportamientos y la valoración de los profesionales de la Escuela Infantil en relación con las matemáticas informales para el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil para la Tesis Doctoral” Espacios, materiales y desarrollo de las matemáticas informales en la Escuela Infantil”

Por favor, contesta las preguntas que se detallan a continuación en silencio y si tiene alguna duda diríjase al encuestador.

Bloque 1. Datos generales

1. Identifica la fecha y la hora:
2. Identifica el tipo de contratación laboral
 - a. Personal en plantilla ()
 - b. Personal en sustitución ()
3. Marca el aula de referencia del curso 2016-17:
Lactantes 1-2 2-3 Heterogéneo
4. Sexo (marca con una X): Femenino () Masculino ()
5. ¿Cuál es tu título profesional?
6. ¿Cuán preparado te sientes para diseñar los espacios y materiales bajo criterios matemáticos? (marque con una X)
Muy preparado ()
Medianamente preparado ()
Poco preparado ()
No me siento preparado ()
7. ¿En el diseño de los espacios y materiales que planificas presentas de manera consciente contenidos matemáticos con el objetivo de acercar estos contenidos a los alumnos? (marque con una X)

Si ()

No ()

8. ¿En tu formación universitaria como maestra o de instituto como educadora tuviste cursos de didáctica de las matemáticas para el ciclo educativo 0-3?
(marque con una X)

Si ()

No ()

9. ¿En tu formación como maestra o de instituto como educadora tuviste cursos de diseño de espacios y materiales para el ciclo educativo 0-3? (marque con una X)

Si ()

No ()

10. ¿Durante los años que llevas trabajando como maestra o educadora del ciclo educativo 0-3 has realizado algún curso de formación continua en didáctica de las matemáticas?

Si ()

No ()

Bloque 2.

1. ¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término “matemáticas informales”?

Si ()

No ()

2. En caso afirmativo, ¿podrías explicar brevemente a qué se refiere?

3. Observa los diferentes espacios y materiales que se muestran e indica los contenidos y las capacidades matemáticas que trabaja en ellos.

Identifique la selección de imágenes que se le ha asignado

- a. CDM-03-F1 ()
- b. CDM-03-F2 ()
- c. CDM-03-F3 ()

4. ¿En las programaciones donde diseña los espacios y materiales de tu aula se reflejan objetivos entorno al aprendizaje de las matemáticas? (marque con una X)

Si ()

No ()

5. En caso afirmativo, enumera 2 objetivos y describe 2 de las acciones matemáticas que contemplan. En caso negativo, explica los motivos

Muchas gracias por tu colaboración

CDM-03-F1



Espacio de Juego
Simbólico



Espacio Land Art



Espacio de juego
heurístico

CDM-03-F2



Espacio de juego
heurístico



Espacio de
movimiento



Mesa de
experimentación

CDM-03-F3



Espacio de exploración



Espacio de construcción



Taller

ANNEXO 2

Estimado/a,

En el marco de la realización de la tesis doctoral: “Espacios, materiales y desarrollo de las matemáticas informales en la Escuela Infantil”, realizada por Glòria Olmos y dirigida por el Dr. Àngel Alsina de la Universidad de Girona (España), pretendemos indagar acerca del diseño de los espacios de aprendizaje y los materiales de las aulas de la Escuela Infantil. La finalidad de este estudio es replantear los espacios de las diferentes aulas desde la perspectiva de la educación matemática infantil para favorecer que los niños en el primer ciclo de la etapa de Educación Infantil (0-3 años) tengan la oportunidad de encontrar respuesta a sus necesidades de aprendizaje y de juego y a la vez desarrollar sus capacidades relativas a las matemáticas informales.

Por un lado, recogemos como las orientaciones contemporáneas sobre educación matemática destacan la importancia de favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos informales desde las primeras edades, probablemente debido a que se ha demostrado que aquellos niños que han podido desarrollar sus capacidades y los aprendizajes en los primeros años han obtenido mejores resultados, equivalentes a un avance de uno o dos años escolares, en pruebas de evaluación como TIMSS y PISA (OECD, 2007).

Baroody (1987) Hugues (1986) son los primeros autores que se refieren a las matemáticas informales destacando que en las primeras edades existe una gran riqueza en las actividades cotidianas y en los conocimientos sobre temas que interesan a los niños a partir de los cuales se desarrolla el pensamiento matemático. Posteriormente el NCTM (2003) hace referencia a las matemáticas intuitivas e informales destacando que considera que son un eslabón necesario para acceder a las matemáticas formales. Más recientemente, de Castro, Flecha y Ramírez (2015) como resultado a diferentes investigaciones empiezan a destacar ya con fundamentos teóricos la preséncienla y la relevancia de la actividad matemática en los niños y niñas ya des del nacimiento. Del mismo modo, algunos autores como Geist (2014), Alsina (2015), Alsina y León (2016) y Alsina y Roura (en prensa) establecen primeras rúbricas y expectativas por edades según el desarrollo del niño, siempre des de un punto orientativo.

Por otro lado, Loris Malaguzzi y su pedagogía reconocida mundialmente por su enfoque innovador sobre la educación proyectó la escuela como un lugar donde los niños están ocupados con diferentes propuestas y donde el adulto plantea los espacios y los materiales y observa y documenta las acciones de los niños para seguir ofreciendo nuevas oportunidades desde un segundo plano (Hoyuelos, 2006). Dentro de esta forma de entender los procesos educativos incluimos autores como Hoyuelos (2011), Dewey, Montessori, Freinet, Ferrer Guardia, Neil y Rogers, -citados en Colom, Bernabeu, Dominguez y Sarramona (1997) Martín (2000), Loughlin y Sunia (2002), Borghi (2005) entre otros reconocidos autores que nos plantean que el papel del educador es producir condiciones de aprendizaje sustancialmente enriquecidas y nos hablan de éste como facilitador de escenarios para el constructo del alumno a partir del ambiente, el contexto de aprendizaje, el diseño de los espacios y de los tiempos.

Al unísono, en relación al diseño de espacios y materiales en las Escuelas Infantiles entorno a las matemáticas informales sigue siendo una temática poco tratada en la investigación de la educación matemática en la Escuela Infantil y pretendemos ampliar este campo de investigación centrándonos en análisis de los conocimientos de los profesionales que trabajan en la Escuela Infantil y que diseñan los espacios y materiales y, a su vez, en el análisis de los espacios y materiales que se plantean en las Escuelas Infantiles para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales.

En este sentido, nuestro objetivo actual es el de diseñar un cuestionario “CDM-MAT0-3” para recoger información acerca de los conocimientos didáctico-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales a través de los espacios y materiales, al considerar que el dominio del profesor en relación a los conocimientos que debe enseñar es un elemento clave, con efectos directos en el aprendizaje de sus alumnos, pues un profesor no puede enseñar lo que no sabe bien (Vásquez y Alsina 2015).

Le pedimos, como experto/a, su colaboración con el fin de valorar la recogida de información sobre los conocimientos didáctico-disciplinares, los comportamientos y la valoración de los profesionales de la Escuela Infantil en relación a las matemáticas informales para el diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil.

1. El grado de correspondencia

¿Considera que es correspondiente la información que se recoge en el primer bloque de contenido que se refiere a aspectos generales de los maestros y educadores a quienes se aplicará el cuestionario?

¿Considera que es correspondiente la información que se recoge en el segundo bloque de contenido para el análisis de los conocimientos didácticos-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través de los espacios y materiales? ¿y en relación a las matemáticas informales? ¿Y en relación a las programaciones?

¿Considera que es correspondiente la información que se recoge en el tercer bloque de contenido para recoger información entorno a las opiniones y la valoración de los contenidos matemáticos que se pueden ofrecer en la Escuela Infantil por parte de los profesionales?

2. La formulación

El lenguaje que se utiliza para la formulación de las cuestiones referidas a los diferentes bloques de contenidos:

- Primer bloque de contenido: se refiere a aspectos generales de los maestros y educadores a quienes se aplicará el cuestionario.
- Segundo bloque de contenido: se pretende analizar conocimientos didácticos-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través de los espacios y materiales y en relación a las matemáticas informales y a las programaciones.
- Tercer bloque de contenido: se plantean cuestiones entorno a sus opiniones para conocer cómo valoran los contenidos matemáticos que se pueden ofrecer en la Escuela Infantil.

3. Pertinencia

¿Hasta qué punto se considera que las cuestiones planteadas son relevantes para: a) Analizar los conocimientos didáctico-disciplinares de los profesionales de la Escuela

Infantil sobre los espacios y materiales para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales; b) analizar las creencias que tienen los profesionales sobre las matemáticas informales en la Escuela Infantil; y c) Analizar los espacios y materiales que se plantean en las Escuelas Infantiles para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales.

4. Otros aspectos que nos recomiende incluir o excluir en el cuestionario sobre los conocimientos didáctico-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales a través de los espacios y materiales, Estaríamos muy agradecidos si nos pudiera devolver el material antes del 19 de mayo de 2017 (fecha aproximada). Para cualquier duda o cuestión a abordar, no dude en ponerse en contacto con Glòria Olmos Martínez (gloriaolmos.elprat@gmail.com)

A continuación, se muestra la plantilla de validación que se facilitó al grupo de expertos.

Plantilla de validación CDM-MAT-03

1. El grado de correspondencia

¿Considera que es adecuada la información que se recoge en el primer bloque de contenido referida a aspectos generales de los maestros y educadores a quienes se aplicará el cuestionario?

SI NO

Justifique su respuesta por favor:

Si fuese necesario ¿cuál sería el cambio que sugiere?

¿Considera que adecuada la información que se recoge en el segundo bloque de contenido para el análisis de los conocimientos didácticos-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través de los espacios y materiales?

<p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifique la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p> <p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifique la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p>
--

¿Considera que es adecuada la información que se recoge en el segundo bloque de contenido para el análisis de los conocimientos didácticos-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil sobre las matemáticas informales?

<p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifique la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p>
--

<p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifique la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p> <p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifique la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p>
--

¿Considera que es adecuada la información que se recoge en el segundo bloque de contenido para el análisis de los conocimientos didácticos-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil sobre las programaciones?

<p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifique la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p> <p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifique la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p>

El lenguaje que se utiliza para la formulación de las cuestiones referidas a los diferentes bloques de contenidos es correcto y se ajusta a las cualidades de una investigación:

Bloque 1 del cuestionario: datos generales

<p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifica la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p>

Bloque 2 del cuestionario: conocimientos didáctico-disciplinares.

<p>SI <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p><i>Justifica la respuesta</i></p> <p><i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i></p>

3. Pertinencia

¿Hasta qué punto se considera que las cuestiones planteadas son relevantes para analizar los conocimientos didáctico-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil sobre los espacios y materiales para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales?

1: muy poco relevantes; 2: poco relevantes; 3: algo relevantes 4: relevantes; 5: muy relevantes:

1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	5 <input type="checkbox"/>
<i>Justifica la respuesta</i>				

relevantes para analizar los espacios y materiales que se plantean

1 <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/>	5 <input type="checkbox"/>
<i>Justifica la respuesta</i>				
<i>Si fuese necesario, ¿cuál sería el cambio que sugiere?</i>				

4. Otros aspectos que nos recomiende incluir o excluir en el cuestionario sobre los conocimientos didáctico-disciplinares de los profesionales de la Escuela Infantil para fomentar el desarrollo de las matemáticas informales a través de los espacios y materiales,

--

ANNEXO 3



Ajuntament de Vic



Benvolguts pares / mares,

Us comuniquem que les escoles bressol municipals de Vic estan formant part d'un procés d'investigació vinculat al disseny dels espais i materials i al desenvolupament de les accions matemàtiques dels infants. Aquesta investigació es porta a terme des de la Universitat de Girona com a part del programa de doctorat de dirigit per Dr. Àngel Alsina i Pastells.

Aquest procés de recerca està vinculat a la formació en didàctica de les matemàtiques que s'està iniciant aquest curs 2017-18 amb el mateix Dr. Àngel Alsina i Pastells per a tot l'equip educatiu, procés que ens permet com equip aprofundir en els coneixements didàctics i disciplinar de les matemàtiques per al primer cicle d'educació infantil.

Per aquest motiu, la direcció d'aquest centre demana el consentiment als pares, mares o tutors/es legals per poder enregistrar imatges, individuals o de grup, on apareguin i siguin clarament identificables els seus fills i filles, pel treball d'investigació i les publicacions que se'n derivin de la mateixa. Les imatges, que seran captades durant la realització d'activitats escolars seran utilitzades o publicades únicament amb la finalitat de recerca, innovació o divulgació educativa.

El dret a la pròpia imatge està reconegut a l'article 18.1 de la Constitució i regulat per la Llei Orgànica 1/1982, de 5 de maig, sobre el dret a l'honor, a la intimitat personal i familiar i a la pròpia imatge, així com per la Llei Orgànica 3/1985, de 29 de maig, que la modifica i per la Llei Orgànica 15/1999, de 13 de desembre, de Protecció de Dades de caràcter personal.

Dades de l'alumne/a i del pare, mare o tutors

Nom i cognoms de l'alumne/a o alumnes:

Nom i cognoms del pare/mare o tutor/a legal de l'alumne/a:

DNI o passaport del pare/mare o tutor/a legal de l'alumne/a:

Marqueu amb una "X" si autoritzeu la captació d'imatges dels vostres fills i filles durant la realització d'activitats escolars i extraescolars, així com la seva utilització per a les finalitats esmentades.

Signatura del pare/mare o tutor/a,

Vic, ___ de _____ de 20__

Benvolgut/da educador/a,

Com ja sabeu, les escoles bressol municipals de Vic estan formant part d'un procés d'investigació vinculat al disseny dels espais i materials i al desenvolupament de les accions matemàtiques dels infants. Aquesta investigació es porta a terme des de la Universitat de Girona com a part del programa de doctorat de dirigit per Dr. Àngel Alsina i Pastells.

Aquest procés de recerca està vinculat a la formació en didàctica de les matemàtiques que s'està iniciant aquest curs 2017-18 amb el mateix Dr. Àngel Alsina i Pastells per a tot l'equip educatiu, procés que ens permet com equip aprofundir en els coneixements didàctics i disciplinar de les matemàtiques per al primer cicle d'educació infantil.

Per aquest motiu, la direcció d'aquest centre us demana el consentiment per a poder enregistrar imatges, individuals o de grup, on aparegueu i sigueu clarament identificables, pel treball d'investigació i les publicacions que se'n derivin de la mateixa. Les imatges, que seran captades durant la realització d'activitats escolars seran utilitzades o publicades únicament amb la finalitat de recerca, innovació o divulgació educativa.

El dret a la pròpia imatge està reconegut a l'article 18.1 de la Constitució i regulat per la Llei Orgànica 1/1982, de 5 de maig, sobre el dret a l'honor, a la intimitat personal i familiar i a la pròpia imatge, així com per la Llei Orgànica 3/1985, de 29 de maig, que la modifica i per la Llei Orgànica 15/1999, de 13 de desembre, de Protecció de Dades de caràcter personal.

Dades de la persona que autoritza

Nom i cognoms:

DNI o passaport:

Marqueu amb una "X" si autoritzeu la captació d'imatges durant la realització d'activitats escolars, així com la seva utilització per a les finalitats esmentades.

Signatura

Vic, ___ de _____ de 20__

