

**NIÑOS DE 3 AÑOS EMPEZANDO A DESARROLLAR LA COMPETENCIA MATEMÁTICA
A TRAVÉS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA TEMPRANA
3-YEAR-OLDS BEGINNING TO DEVELOP MATHEMATICAL COMPETENCE THROUGH
EARLY MATHEMATICAL MODELING**

María Salgado, Ph.D.

 <https://orcid.org/0000-0002-0309-241X>

Universidad de Santiago de Compostela (Santiago de Compostela, España)
maria.salgado@usc.es

Ángel Alsina, Ph.D.

 <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

Universidad de Girona (Girona, España)
angel.alsina@udg.edu

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Recibido: 3 de marzo de 2023

Aceptado: 2 de agosto de 2023

RESUMEN

Se analizan las habilidades de modelización matemática temprana que empiezan a emerger en un grupo de 20 niños de 2-3 años a partir de la resolución de un problema real. Adicionalmente, se describen los contenidos matemáticos que movilizan durante el proceso de modelización, cuya meta es generar un modelo concreto a partir del problema real planteado. Los resultados muestran: a) las habilidades del ciclo de modelización más frecuentes son las de Comprensión e Interpretación y, en menor medida, Estructuración, Matematización, Validación y Exposición/Presentación, mientras que Trabajo Matemático es muy escasa; b) los contenidos matemáticos que los niños movilizan se asocian al Álgebra Temprana (reconocimiento de cualidades y atributos para establecer relaciones); Números y Operaciones (reconocimiento de cantidades de elementos y comparaciones entre ellos); y c) Estadística y la Probabilidad (organización de datos en tablas de recuento). Se concluye que las habilidades del ciclo de modelización enriquecen la resolución de problemas y, más en general, promueven el desarrollo de la competencia matemática, por lo que se recomienda introducir este tipo de actividades desde los primeros niveles.



Palabras claves: Modelización matemática temprana, resolución de problemas, problemas reales, contenidos matemáticos, educación Infantil.

ABSTRACT

The early mathematical modeling skills that begin to emerge in a group of 20 children aged 2-3 years are analyzed through the resolution of a real-world problem. Additionally, the mathematical concepts they engage with during the modeling process are described, with the goal of generating a concrete model based on the real problem presented. The results indicate: a) the most frequent skills in the modeling cycle are Comprehension and Interpretation, and to a lesser extent, Structuring, Mathematization, Validation, and Presentation/Exposition, while Mathematical Work is quite limited; b) the mathematical concepts mobilized by the children are associated with Early Algebra (recognition of qualities and attributes to establish relationships); Numbers and Operations (recognition of quantities of elements and comparisons between them); and c) Statistics and Probability (organization of data in frequency tables). It is concluded that the skills in the modeling cycle enhance problem-solving and, more generally, promote the development of mathematical competence, hence it is recommended to introduce these types of activities from the early stages.

Keywords: Early mathematical modelling; problem solving; real problems; mathematical content; early Childhood Education.

INTRODUCCIÓN

Los currículos de Educación Infantil recogen cada vez de forma más explícita el enfoque competencial, que enfatiza la comprensión y uso del conocimiento aprendido en la escuela en situaciones de la vida en el que es necesario (Niss, 2002; OECD, 2003). Es el caso, por ejemplo, de la legislación educativa española de infantil que, en el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, en la que se impulsa el desarrollo de competencias tanto clave como específicas (p. 14563):

- a) Competencias clave: desempeños que se consideran imprescindibles para que el alumnado pueda progresar con garantías de éxito en su itinerario formativo, y afrontar los principales retos y desafíos globales y locales. Son la adaptación al sistema educativo español de las competencias clave establecidas en la Recomendación del Consejo de la Unión Europea de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente.

b) Competencias específicas: desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada área. Las competencias específicas constituyen un elemento de conexión entre, por una parte, las competencias clave y, por otra, los saberes básicos de las áreas y los criterios de evaluación.

En este artículo nos focalizamos en la competencia matemática y, más concretamente, en las prácticas que promueven su desarrollo en la etapa de Educación Infantil. Desde este enfoque competencial, Alsina (2012, 2014) recomienda inicialmente plantear la enseñanza de las matemáticas en infantil a través de procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y prueba, la comunicación, las conexiones y la representación, que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos (NCTM, 2003). Más adelante, Alsina y Salgado (2021a, 2021b) incorporan también la modelización matemática dentro del grupo de procesos matemáticos para trabajar los contenidos en Educación Infantil, siguiendo tanto los planteamientos de diversos organismos y autores que destacan la modelización como una de las competencias matemáticas imprescindibles (Niss, 2002; OECD, 2003), como algunos estudios preliminares que han implementado y analizado actividades de modelización en las aulas de infantil (Ruiz-Higueras y García, 2011; Ruiz-Higueras et al., 2013).

Para las primeras edades, Alsina y Salgado (2021b) proponen el término “modelización matemática temprana”, que conciben como

un proceso o ciclo que, en el marco de la resolución de problemas reales, ayuda a crear los primeros modelos para analizar, explicar y comprender la realidad, basado en un proceso de reflexión que implica constantes idas y venidas entre los contextos reales y las matemáticas que moviliza el alumnado de las primeras edades (p. 2).

En diversos estudios, Alsina y Salgado (2021a, 2021b), Alsina et al. (2021) han tratado de identificar tanto los elementos que intervienen durante el proceso de modelización como las características específicas de los modelos que pueden crear los niños de Educación Infantil. Estos estudios se han realizado partiendo de la base que la modelización matemática es un proceso no lineal e iterativo, por lo que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos (Carreira et al., 2011; Geiger, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Greefrath, 2011; Kaiser, 1995).

Desde este punto de vista, en este artículo se analiza qué habilidades de la modelización matemática temprana empiezan a emerger durante el primer nivel del segundo ciclo de infantil (2-3 años) a partir de la actividad “¿Cómo es el otoño en Galicia?”, que se ha desarrollado con un

grupo de 20 niños de 2-3 años. Adicionalmente, se describen también los contenidos matemáticos que movilizan durante el proceso de modelización, cuya meta es generar un modelo concreto a partir del problema real planteado.

MATERIALES Y MÉTODO

En los últimos años, se ha desarrollado una agenda de investigación en educación matemática acerca de la modelización matemática en los distintos niveles de la enseñanza (Kaiser y Sriraman, 2006), incluida la etapa de infantil (Alsina y Salgado, 2021a, 2021b; Alsina et al., 2021; Ruiz-Higueras y García, 2011; Ruiz-Higueras et al., 2013; Toalongo-Guamba et al., 2021). Alsina y Salgado (2022) subrayan que, en esta etapa, la modelización matemática temprana puede considerarse como una habilidad que aglutina las demás prácticas o procesos, puesto que cuando se propone una actividad de modelización matemática se ponen en juego el conjunto de prácticas o procesos matemáticos, como por ejemplo la resolución de un problema real o realista, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones o la representación.

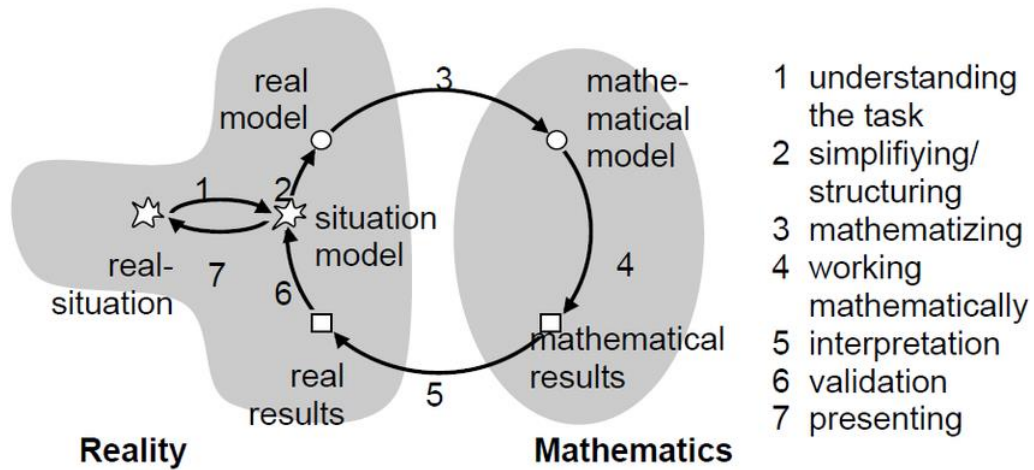
La modelización matemática utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borrromeo-Ferri, 2009), partiendo de la base que:

... no se trata solo de aplicar la matemática a la realidad sino de influir creativamente en la realidad a través de ella y de paso dar sentido (significado) a lo que se aprende matemáticamente, que puede ser interesante en sí, al margen de su uso directo (Alsina, C., 2011, p. 2).

Aunque no hay una única caracterización del proceso de modelización, el llamado “ciclo de modelización” de Blum y Leiß (2007) es el que se ha tomado de referencia. Este ciclo considera siete fases: comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación, exposición/presentación. La elección de este ciclo se debe a dos motivos principales (Alsina y Salgado, 2022): 1) los niños pueden partir de un punto del ciclo sin necesidad de seguir un orden establecido. Este ir y venir es lo que les permite perfeccionar progresivamente el modelo buscado; 2) en la fase final del ciclo (Exposing) los niños socializan el modelo con sus compañeros, pueden recoger las observaciones pertinentes y realizar los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar/afinar progresivamente el modelo. Esta es una característica especialmente relevante en la Educación Infantil, donde los procesos de interacción, negociación, diálogo están muy presentes para la co-construcción y reconstrucción del conocimiento matemático.

Figura 1.

Ciclo de Modelización



Fuente: Blum y Leiß (2007)

Alsina y Salgado (2021a, 2021b), Alsina et al. (2021) y Toalongo-Guamba et al. (2021) han descrito algunas de las habilidades que los niños de infantil ponen en juego en cada fase:

1. Comprensión: vinculan el contenido del problema con sus conocimientos previos, plantean preguntas sobre el problema, expresan el tipo de solución que generara, representan las características principales y, progresivamente, expresan el problema a sus compañeros y al maestro, además de comunicar que aporta la solución a su entorno.

2. Estructuración: identifican los datos del problema y, progresivamente, identifican también los que se pueden conocer y los desconocidos; además, hacen propuestas para simplificar el problema.

3. Matematización: substituyen los elementos del contexto real por objetos matemáticos y explican su uso; además, progresivamente, justifican dicho uso a partir de las características del problema e identifican todos los parámetros matemáticos presentes en el problema y las relaciones entre ellos.

4. Trabajo matemático: usan objetos matemáticos y estrategias para proponer soluciones del problema y obtener un modelo matemático inicial. Además, en función de la edad, operan con estos objetos para conseguir dicho propósito.

5. Interpretación: comparan la solución con el problema inicial y argumentan la validez de los resultados obtenidos y, progresivamente, comprueban la coherencia de la solución matemática llevada al contexto real inicial e identifican las posibles limitaciones o restricciones.

6. Validación: justifican el modelo propuesto mediante argumentos válidos y valoran si proporciona una solución parcial o total al problema inicial; además, identifican si el modelo es siempre válido o se requieren cambios para que sea generalizable a nuevas situaciones.

7. Exposición/presentación: comunican las decisiones tomadas a lo largo del proceso de modelización y el modelo obtenido aplicado al contexto real, usando distintos lenguajes y/o representaciones en función del nivel (dibujos, esquemas, tablas de valores, gráficos, símbolos); además, escuchan observaciones y/o sugerencias de los compañeros y/o del maestro, las analizan críticamente y responden adecuadamente. Asimismo, a medida que avanzan de nivel, reflexionan sobre las estrategias usadas cuando no consiguen obtener una solución y lo socializan.

Para analizar estas habilidades, se pueden utilizar diversos instrumentos (COMAP y SIAM, 2019; Frejd, 2013). Aquí se asume el instrumento *Rubric for the Evaluation of Mathematical Modelling Processes* (REMMP), diseñada y validada por Toalongo-Guamba et al. (2022), que sirve tanto para dar a conocer cómo se desarrolla la modelización matemática como para evaluar los procesos de modelización matemática en un nivel determinado. En la tabla 1 se presentan los indicadores específicos de Educación Infantil:

Tabla 1.

Indicadores del instrumento REMMP para la Educación Infantil

Componentes	Indicadores de Educación Infantil (3-6 años)
1. Comprensión	1.1 Relaciona el contenido de la situación problemática con sus conocimientos previos.
	1.2 Plantea preguntas referentes a la situación problemática.
	1.3 Enuncia el tipo de solución que generaría la situación problemática, por ejemplo: un patrón, un número, un gráfico, etc.
	1.4 Representa a través de dibujos las características principales de la situación problemática.
2. Estructuración	2.1 Identifica los principales elementos de la situación problemática.
	2.2 Propone ideas y/o supuestos que contribuyen a la simplificación de la situación problemática.
3. Matematización	3.1 Sustituye los elementos reales por objetos matemáticos.
	3.2 Explica la utilización de objetos matemáticos.

Componentes	Indicadores de Educación Infantil (3-6 años)
4.Trabajo matemático	4.1 Emplea diversas estrategias acordes a su edad que permitan proponer soluciones a la situación problemática. 4.2 Utiliza objetos matemáticos acordes a su edad para solucionar la situación problemática. 4.3 Obtiene un modelo matemático inicial como consecuencia del trabajo previo.
5. Interpretación	5.1 Compara la solución con la situación problemática inicial. 5.2 Argumenta la validez de los resultados obtenidos.
6. Validación	6.1 Justifica el modelo propuesto mediante argumentos válidos. 6.2 Valora si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total a la situación problemática inicial.
7.Exposición/ presentación	7.1 Explica el porqué de las decisiones tomadas a lo largo de cada una de las fases del proceso. 7.2 Explica el modelo obtenido aplicado en la situación del contexto real, sus alcances y limitaciones mediante un lenguaje acorde a su edad. 7.3 Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, esquemas, dibujos, gráficas, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc. 7.4 En caso de uso de tecnología en alguna o varias fases del proceso expone claramente en qué momento, cómo y para qué la utilizó. 7.5 Escucha observaciones y/o sugerencias planteadas por compañeros y/o Maestro 7.6 Responde a las observaciones y/o sugerencias de compañeros y Maestro utilizando un lenguaje acorde a su edad.

Fuente: Toalongo-Guamba et al. (2022)

Para evaluar la modelización matemática temprana en infantil a partir del instrumento REMMP, se trata de analizar la presencia o ausencia de los distintos indicadores de cada fase del ciclo de modelización, a partir de evidencias que pueden ser en forma de transcripciones de secuencias, imágenes, etc. Ello permite identificar en qué punto se encuentran los niños de un determinado nivel, y también como van desarrollando sus habilidades a medida que se van diseñando e implementado actividades de modelización matemática en el aula.

Descripción y análisis de la actividad: ¿cómo es el otoño?

La actividad se ha llevado a cabo en un aula con 20 alumnos (12 niños y 8 niñas) del primer nivel del 2º ciclo de Educación Infantil (2-3 años) de un centro público de Galicia. Es el primer año de escolarización de este grupo de alumnos en la escuela y su primer contacto con las matemáticas.

El grupo-aula ha escogido el tema “otoño” motivado por la llegada de un email; a partir del mismo, se ha definido el problema a ser estudiado y se ha abordado durante 11 días no consecutivos del mes de noviembre de 2021, siguiendo las etapas clásicas de un proceso de modelización como el que muestra la Figura 1: 1) motivación (día 1); 2) desarrollo del ciclo de modelización (día 2 a 10); y 3) comprobación y contraste del modelo (día 11).

La maestra tutora, que es una de las investigadoras, se ha encargado de recoger en imágenes, entrevistas individuales, notas de campo y grabaciones de vídeos toda la secuencia. A posteriori, se han transcrito datos sobre los que se realiza el análisis de contenido, que pretende encontrar evidencias de la presencia de procesos de modelización matemática temprana.

Etapas 1. Motivación

Día 1. Selección del tema, búsqueda de datos y definición del problema

En asamblea, la maestra lee un email al grupo-aula. El remitente es de un colegio del Caribe en el que hay escolarizado un niño que el curso pasado estaba en nuestro colegio, y nos han escrito para preguntarnos cómo es el otoño en Galicia. Después de la lectura, se plantea al alumnado ¿qué es Galicia? Con la ayuda de la maestra, se les indica que es la zona donde vivimos, y que Sigüeiro en concreto forma parte de Galicia, es un punto pequeño. A partir de aquí, el alumnado manifiesta sus creencias y se delimita el problema al estudio del entorno próximo, para dar una respuesta al colegio caribeño.

En un primer momento, para la búsqueda de datos, se opta por salir a las instalaciones exteriores del colegio. En la zona de arboleda, primero observan y a continuación se les invita a que cojan elementos que consideren propios del otoño: hojas, frutos, etc. (Figura 2).

Figura 2.

Recogiendo elementos del entorno en el colegio



A medida que el alumnado recoge, selecciona y clasifica elementos, atendiendo a criterios individuales y creencias, obtienen una primera aproximación para caracterizar el otoño de Galicia, pudiéndose evidenciar aspectos de la fase de Comprensión de un ciclo de modelización; en concreto, el Indicador 1.1 de la rúbrica REMMP (Relaciona el contenido de la situación problemática con sus conocimientos previos).

En el aula, todos afirman que no hay mucha “cantidad de otoño”, por lo que la maestra les invita a que por la tarde busquen en el parque o de camino a casa más elementos característicos de esta estación, para poder ayudar a dar una respuesta más completa al problema.

Etapa 2. Desarrollo del ciclo de modelización.

Esta fase transcurre del 2º día al 10º, como se ha indicado. A medida que se suceden los días, el alumnado va trayendo al aula elementos del entorno propios de la estación a los que denominan “Tesoros del otoño”. A medida que llegan los tesoros, el alumnado los describen, organizan y analizan, avanzando en la fase de Estructuración del problema: van identificando atributos comunes a dos o más elementos y caracterizándolos como propios de la estación. Este proceso es paulatino y el de Matematización es gradual, atendiendo al número de elementos que van llegando.

Día 2. El intruso.

La maestra incorpora a los “Tesoros del otoño” un membrillo, sin decirles a los niños de qué se trata, simplemente que lo ha encontrado de camino al colegio. Lo que intenta provocar con

este elemento es romper con la monotonía y similitud de los elementos encontrados en el colegio y añadir nuevos atributos, propios de la estación. A partir de la observación e interacción con el membrillo (Figura 3), descubren propiedades y nuevas cualidades y atributos que amplían la caracterización del otoño.

Figura 3.

Observando e interactuando con un membrillo



Durante esta sesión se identifican algunas evidencias de la fase de Matematización, pero no de Trabajo Matemático propiamente. Así, por ejemplo, una niña utiliza objetos matemáticos para describir el membrillo, lo cual se corresponde con el Indicador 3.1 (Substituye los elementos reales por objetos matemáticos).

Maestra.- ¿Lo observamos? ¿Lo tocamos? ¿cómo es?

Ao P.- Verde

Maestra- Es verde, y también es de otoño. ¿Recordáis qué nos pidieron los niños del colegio del Caribe?

Aa A- El otoño.

Maestra- El otoño en Galicia, que le dijéramos cómo es... Y tenemos “esto” y castañas y hojas. ¿Son iguales las castañas y esto?

Aa A.- No, una es pequeña y otra grande.

Maestra.- Vale. Y las dos son de otoño. En otoño hay cosas pequeñas y grandes, muy bien Aa A.

Adicionalmente, como se muestra a continuación, se puede evidenciar el indicador 5.2 (Argumenta la validez de los resultados obtenidos y avanza en la interpretación, llegando a argumentar sus respuestas a través de la acción).

Aa A.- Y las dos están duras.

Maestra.- Ah, muy bien, ¿qué significa dura?

Aa A.- No rompe.

Maestra.- No rompe, fijaros no cambia su forma.

Aa EP.- Y esta sí (señalando una hoja).

Maestra.- Claro, esa tiene un superficie blanda, que sí cambia de forma.

Aa EP.- Como la plastilina.

En grupo se toma la decisión de organizar los elementos atendiendo a la dureza “duros y no”, sin tener en cuenta la forma ni el color (Figura 4).

Figura 4.

Clasificando elementos atendiendo al criterio de dureza



Día 3. Nuevos elementos... nuevos datos.

Llega un nuevo elemento, un alimento nuevo (avellanas) del patio del colegio. No saben de qué se trata, no saben su nombre, por lo que se repite el proceso del día anterior: primero observar; segundo manipular y comparar; descubrir y describir cualidades y atributos (Figura 5); y, por último, analizar semejanzas y diferencias y clasificar (Figura 6)

Figura 5.

Observando, manipulando avellanas



- Ao R.- Es marrón
Ao M.- Es duro
Aa A.- Es pequeño, es pequeño, más pequeño que la castaña.
Aa ED.- ¡El más pequeño del otoño!
Maestra.- ¿El más pequeño?
Aa ED.- Sí.
Maestra.- Ah, y ¿dónde lo colocamos?
Aa A.- Ahí, junto a la pera (se refiere al membrillo).
Maestra.- No es una pera.
Aa A.- Pues me lo parece.
Maestra.- Entonces.
Aa A.- En ese que es duro.
Ao R.- Y pequeñito y marrón.

Figura 6.

Clasificación de las avellanas en el subgrupo “duro”



Día 4. Espiga de maíz.

Los alumnos traen pocos elementos que permitan distinguir nuevos rasgos y es la maestra quién los va introducción. La elección de los mismos es intencionada: tienen distintas formas, grosores, colores, con el fin de ampliar el marco de caracterización. Con respecto a la espiga de maíz, es conocida por la mayoría de los niños. El hecho de que tenga granos provoca en el alumnado diferentes opiniones, teniendo que llegar a acuerdos para la organización de datos y la clasificación del alimento (Figura 7).

Maestra.- ¿Cómo es?

Aa A.- Amarillo.

Ao L.- Alargado y redondo.

Aa A.- Redondo no, alargado.

Ao L.- Si redonditos (señalando granos).

Aa A.- Pero alargado.

(...)

Maestra.- ¿Podemos decir algo más del maíz?, ¿alguna idea más?

Ao Mñ.- Que es duro como las castañas.

Maestra.- Duro, sí, efectivamente, no rompe. Martín, ¿lo colocas entonces donde corresponde atendiendo a nuestro criterio?

Figura 7.

Clasificación del maíz en el grupo “duro”.



Como se puede observar, los alumnos van respondiendo a las preguntas planteadas por la maestra, que en este caso exige niveles de comparación con la situación inicial, por tanto, se cumple con el Indicador 5.1 de la fase de Interpretación (Compara la solución con la situación problemática inicial).

Día 5. Ampliando datos.

Se envía previamente una carta a las familias para que en la tarde previa hagan un paseo otoñal con sus hijos en busca de tesoros de otoño (hojas, palos, frutos) y los traigan al aula, con el fin de definir y conocer mejor el otoño, volviendo el proceso hacia la fase de Comprensión.

Todos los alumnos realizan la actividad con la ayuda de sus familias, y llega al aula una variedad y mezcla de colores, formas, tamaños... En un primer momento, la maestra les invita a observar, comparar y a manifestar sus creencias, relacionando los nuevos elementos con los que ya hay en el aula. A lo largo de la jornada, se evidencian principalmente los indicadores 1.1 de la fase de Comprensión y 5.1 de la fase de Interpretación.

Al presentar los elementos que traen, los relacionan con sus conocimientos y con la situación problemática a estudiar. A continuación, se ejemplifica en la siguiente transcripción:

Aa EP.- Hay hojas.

Maestra.- Sí, hojas. ¿Y cómo son?, ¿cómo las del cole?

Aa EP.- Son más grandes.

Aa A.- Y las hay verdes.

Maestra.- Claro verdes, y en el cole las que teníamos eran marrones, ¿por qué?

Ao L.- Porque son muy de otoño.

Aa L.- Yo traje palos y duros delgaditos.

Ao M.- Los míos son fuertes.

Aa A.- Son gordos los tuyos.

Ao T.- Un erizo.

Maestra.- Erizo, ¡qué miedo!

Ao T.- Pincha mucho.

Ao R.- Y mi piña también pincha.

Maestra.- Uy el otoño tiene cosas que pican.

Ao R.- Y duras.

Maestra.- Y tu piña con respecto al erizo, las dos pican, ¿pero cómo las diferencio?, ¿cómo se cuál es la piña y cuál el erizo?

Ao R.- La mía no abre, es dura.

Maestra.- ¡Qué bien!, es cierto.

En este pequeño fragmento, también se pone de manifiesto la presencia de los Indicadores 7.5 (Escucha observaciones y/o sugerencias planteadas por compañeros y/o el profesor) y 7.6 de la fase de Presentación/Exposición (Responde a las observaciones y/o sugerencias de compañeros y el profesor utilizando un lenguaje acorde a su edad): el alumnado, al estar en gran grupo, escuchan las sugerencias de la docente y compañeros y contestan, mientras que la maestra interviene si lo considera necesario, corrige y/o aporta nuevos datos o sugerencias.

Después de observar, comparar y describir los elementos del otoño, la maestra les invita a crear “otoño” con los elementos que más le gusten, con el fin de que identifiquen y discriminen cualidades, gustos y preferencias (Figura 8).

Figura 8.

Creando composiciones otoñales



Al terminar, cada equipo presenta al resto de los compañeros su composición identificando los “elementos” de otoño seleccionados (Figura 9).

Figura 9.

Composiciones “otoño”



Día 6. Organizando y registrando datos.

La maestra les recuerda el problema a resolver, en el que llevan muchos días trabajando: ¿cómo es el otoño en Galicia? A continuación, les recuerda que tienen que responder a los compañeros que viven en el Caribe.

En un papel continuo, a partir de los elementos y una foto de las composiciones otoñales, todos registran los acuerdos a los que han llegado tras las observaciones realizadas, poniéndose de manifiesto los indicadores 1.4 de la fase de Comprensión (Representa a través de dibujos las características principales de la situación problemática) y 7.3 de la fase de Presentación/Exposición (Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, esquemas, dibujos, gráficas, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.). Como se puede apreciar en la segunda imagen de la Figura 10, establecen un primer modelo concreto para caracterizar el otoño, a partir de cualidades y atributos de elementos propios de esta estación. En concreto, concluyen que el otoño en Galicia es verde, marrón, redondo, alargado, amarillo, con pinchos, naranja, pica, rojo y peludo.

Figura 10.

Caracterizando el otoño de Galicia en un panel



Finalmente, los niños y las niñas del grupo-aula registran con dibujos, formas... los elementos del entorno en otoño, para explicar a los compañeros del Caribe cómo es el otoño en Galicia.

Día 7. Validando datos.

La maestra propone al alumnado que, con la ayuda de sus familias, hagan una foto en un paisaje otoñal o con elementos propios del otoño en su entorno y la envíen al correo electrónico del aula. La maestra las imprime en grande, con el fin de poder observar todos los elementos que aparecen en las mismas, corroborando si tienen algunos de los ítems con los que hemos definido y caracterizado nuestro otoño, y a través de este contraste con la realidad validar los datos.

Cada niño presenta a los compañeros su foto y se le invita a identificar y justificar qué elementos otoñales tiene y al grupo-aula a completar y aumentar dicha información. Entre las afirmaciones señaladas por el alumnado se evidencia el indicador 7.2 de la fase de Presentación/Exposición (Explica el modelo obtenido aplicado en la situación del contexto real, sus alcances y limitaciones mediante un lenguaje acorde a su edad). La mayoría de los niños hacen referencia a las hojas en el suelo, los colores o a la ropa de abrigo que llevan puesta para indicar que es otoño. A continuación, se recogen algunas de las justificaciones en las que se apoya el alumnado:

- Aa A.- Hojas en el suelo... es otoño.
- Ao M.- Hojas rojas en la rama.
- Ao L.- Mucho maíz... es otoño.

Todas las fotos contienen algunos de los criterios. Pero... ¿cuántos criterios son necesarios para “ser” foto de otoño? No lo tienen claro, afirman que si tienen dos es otoño, y si tienen más de dos, es muy de otoño.

Día 8. Evaluando las fotos de otoño.

La maestra propone colocar todas las fotos sobre una mesa. A continuación, cada niño registra con un grano de maíz si su imagen tiene o no cada uno de los criterios que caracterizan el otoño en Galicia, con la finalidad de evaluar cada una de las fotos e identificar cual es la más otoñal, la que registra más elementos otoñales. Al terminar el proceso de identificación, se realiza un recuento individual, dónde cada niño cuenta cuántos granos de maíz tiene su foto y por detrás registra dicha cantidad (Figuras 11 y 12).

Figura 11.

Identificación y cuantificación de cualidades y atributos del otoño.



Maestra.- Alison, ¿cuántos granos de maíz tienes?

Aa A.- Uno, dos, tres, cuatro.

Maestra.- ¿cuántos son?

Aa A.- (Señalando) Uno, dos, tres, cuatro.

Maestra.- ¿Entonces?, ¿cuántos hay?

Aa A.- Uno, dos, tres, cuatro.

Figura 12.

Registro del recuento de todas las fotos.



Después de observar todas las fotos y registros, la maestra pregunta: ¿cuál es la más otoñal? A partir de esta pregunta, cada alumno empieza a hablar de su resultado individual, llegando en ocasiones a compararlo con el de los compañeros.

Aa A.- Yo tengo más.

Aa ED. Yo también.

Aa C.- Y yo.

Maestra.- Todos tenéis uno, dos, tres o cuatro granos de maíz en vuestras fotos... Y yo pregunto ¿cuál número es el más grande?

- Ao T.- Cuatro.
- Maestra.- Genial, si es el cuatro, que va después del uno, dos, tres. Entonces, ¿qué foto o fotos tienen cuatro granos de maíz?
- Aa A.- Yo.
- Maestra.- ¿Lo vienes a comprobar?
- Aa A.- Se acerca y cuenta... uno, dos, tres, cuatro.
- Maestra.- Tiene cuatro, cuatro granos de maíz, cuatro rayas, ¿alguien más?
- Ao P.- Yo.
- (...)
- Maestra.- Solo Alison tiene cuatro maíces.
- Candela.- Es la más.
- Maestra.- Es la foto más otoñal, con más cosas del otoño. Genial, ya la encontramos.

A continuación, la maestra propone organizar las imágenes y no dudan en clasificarlas atendiendo a la cantidad. La maestra propone registrar en la pizarra en un eje horizontal las cantidades 1, 2, 3 y 4; y, de uno en uno, cada alumno coloca su imagen en el lugar que le corresponde atendiendo a la cantidad de criterios que se han identificado, realizando una tabla de recuento que facilita la interpretación de datos (Figura 13). En este punto, se vuelve a evidenciar el Indicador 7.3 de la fase de Presentación/Exposición (Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, esquemas, dibujos, gráficas, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.).

Por último, la maestra propone a todo el grupo interpretar la tabla. A través de diálogo, el alumnado corrobora cuál es la foto más otoñal, volviendo a relacionar el contenido con la situación inicial. En esta fase, como se muestra a continuación, se evidencia Trabajo Matemático, concretamente el Indicador 4.2 (Utiliza objetos matemáticos acordes a su edad para solucionar la situación problemática).

- Maestra.- Tenemos la tabla, ¿qué “torre” es la más alta?
- Aos. (Señalan la del 2)
- Maestra.- Y en la torre del 4, ¿cuántos eslabones hay?, ¿cuántas fotos?
- Aa A.- Una.
- Maestra.- ¿En la del 1?
- Aa C.- Uno y dos.
- Maestra.- ¿Contamos la torre más alta?
Cuentan con la maestra (uno, dos, tres, cuatro,...) hay ocho. ¿Y en la del 3?
- Aa A.- ¿Contamos?
- Maestra.- Perfecto, uno, dos, tres,... Hay siete.

Figura 13.

Tablas de recuento



Día 9. Organizando datos (1ª parte).

La maestra propone al alumnado terminar la organización de los tesoros de otoño que tenemos en el aula. Para ello, por equipos, se les dan cestos para que depositen cada elemento, pero no se les indica ningún criterio. Por equipos, van juntando elementos poco a poco, clasificándolos (Figura 14): castañas y avellanas; el maíz en otro; bellotas y kiwi; calabazas, hojas, erizos, musgo y piña (lo que pica); palos (alargados) en otro; etc.

Figura 14.

Clasificando elementos del otoño



Día 10. Organizando datos (2ª parte)

Poquito a poco, paso a paso, los niños siguen clasificando. Van surgiendo diferentes criterios más generales (por color, forma y origen), sustituyendo los elementos reales por objetos matemáticos y evidenciando el indicador 3.1 de la Fase de Matematización (3.1 Sustituye los elementos reales por objetos matemáticos).

Al final, en asamblea, se pide al alumnado que describa cada subgrupo, identificando y justificando el criterio. De este modo, se observan algunos indicadores de la fase de Matematización, en concreto el Indicador 3.2 (Explica la utilización de objetos matemáticos).

Aa A.- Aquí pican estos (refiriéndose al erizo, musgo, piña)

Ao L.- Estas castañas marrones.

Maestra.- Pero, ¿Hay algo más?

Aa C.- Y también las avellanas marrones.

Ao L.- Son iguales.

Aa C.- Pequeñas.

Maestra.- ¿Y el más grande?, ¿de qué está lleno?

Aa A.- De hojas.

Aa S.- Muchas.

Maestra.- Y son distintas.

Aa A.- Pero son hojas

Maestra.- Sí, muchas hojas.

Aa A.- Pequeñas.

Aa C.- Grandes.

Ao L.- Marrones.

Aa ED.- Verdes.

Ao R.- Rojas.

Maestra.- ¡Qué bien!, ¡Cuántas hojas, de cuántas formas y colores!, ¡Qué bonitas hojas de otoño!

Al finalizar, se invita al alumnado en gran grupo a definir cada cesto del otoño identificando las propiedades que lo caracterizan, sustituyendo de nuevo los elementos por objetos matemáticos (Tabla 2)

Tabla 2.

Definiendo las características del otoño en Galicia

<p>Cesto 1</p> <p>Aa A.- Lo que pica. Maestra. - Que cosas pican. Ao L.- Erizos. Aa E.- Piña.</p> <p>Cesto 3</p> <p>Maestra. - Este es el cesto nº 3, ¿qué tienen en común lo que hay dentro?</p> <p>Aa A.- Calabazas. Aa C.- Son calabazas. Maestra. - ¿Cuántas hay? Aa A.- Son tres. Ao A.- Calabazas. Maestra. - ¿Y tienen el mismo color? Ao P.- No. Aa A.- Sólo calabazas.</p> <p>Cesto 5</p> <p>Maestra. - Y en el 5, ¿qué hay? Todos. - Palos. Aa A.- Son alargados. Aa C.- Son negros. Ao L.- No. Maestra. - ¿De qué color son? Aa S.- Gris. Maestra. - Metimos, los largos, los cortos, ... Aa A.- Todos.</p>	<p>Cesto 2</p> <p>Maestra. - Y en el cesto 2, ¿Qué hay? Aa A.- Mandarinas, redondas. Aa C.- Redondo. Maestra. - ¿Y tienen algo en común? Aa C.- Naranja, son naranjas.</p> <p>Cesto 4</p> <p>Maestra. - Y ahora el cesto nº4. ¿qué hay? Aa.- ¡Hojas! Ao M.- Marrones. Aa A.- Son de colores. Ao L.- Verdes. Aa C.- Marrones. Maestra. - ¿Metimos las hojas pequeñas? Aa A.- Las pequeñas y las grandes</p> <p>Cesto 6</p> <p>Maestra. - ¿Vamos al siguiente cesto?, ¿cuál es?, ¿contamos?, 1, 2, 3, 4, 5 y ahora 6. ¿Qué metimos? Aa A.- Bellotas y un kiwi. Maestra. - ¿Muchos o pocos? Aa A.- Muchos. Maestra. - ¿Qué tienen en común las bellotas y el kiwi?, ¿tienen la misma forma? Ao P.- Sí Maestra. - Además de la forma, ¿veis algo en común? Aa C.- Color.</p>
---	--

Cesto 7

Maestra. - ¿Qué hay en el cesto 7?
Aa E.- Castañas.
Aa D.- Castañas.
Maestra. - ¿Qué tienen en común las
castañas y las avellanas?
Ao M.- Marrón.

Cesto 9

Maestra. - Y ahora el último cesto, ¿cuál
es?, ¿contamos? Cuenta
Alison (y dice 9)
Maestra. - ¿Qué hay?
Aa A.- No sé.
Ao L.- Yo no “sabo”.
Aa EP. - Yo no.
Maestra. - El intruso por eso lo dejamos
ahí solito.
Maestra. - Pues así es nuestro otoño,
todos son elementos del
otoño, todos tienen
cualidades que caracterizan,
todo lo define.
Aa A.- Todo está en nuestro panel.
Le podemos responder.
Maestra.- ¡Qué bien!

Cesto 8

Maestra. - ¿Quién va después del cesto 7?,
¿contamos? 1 (da un paso Elsa), 2
(otro paso) ... así hasta 8 (y a
continuación Elsa enseña el cesto).
Maestra. - ¿Qué hay?
Aa C.- Maíz.
Aa A.- Maíz.
Maestra. - ¿Qué tiene en común el maíz?
Aa A.- Alargado.
Maestra. - ¿Es alargado?
Ao P.- Sí.

Etapas 3. Comprobación y contraste del modelo

Día 11. Validando... el modelo.

Previamente, se les pide a las familias que envíen una foto de sus hijos en un paisaje que no sea otoñal (con nieve, en la playa, con flores). La maestra previamente las imprime para poder interactuar con todas.

En asamblea, se mezclan todas las fotos con las diferentes estaciones. Cada niño comprueba el modelo concreto definido sobre el otoño en Galicia, discriminando la foto que se enmarca en otoño y contrastándola con las demás (Figura 15). Se les pide que justifiquen sus respuestas: hay algunos alumnos que identifican, pero no justifican; también los hay que justifican; y son muy pocos los que no discriminan el otoño, concretamente dos.

Figura 15.

Identificando características del modelo



- Maestra.- ¿Ves alguna de otoño?
Ao P.- (Señala a Emma). Es Emma con nieve
Maestra.- ¿Y es de otoño?
Ao P.- No (Pero no señala las de otoño)
Maestra.- Señala la/s fotos de otoño
Aa A.- Esas (señalan las dos que hay)
Maestra.- ¿Por qué?
Aa A.- Hay hojas en el suelo.
Maestra.- ¿Por qué no es de otoño la que está Emma?
Aa A.- Hay nieve.
Maestra.- ¿Y en esta otra? (Hay una piscina)
Aa A.- Es verano y hace calor, no es otoño.

CONCLUSIONES

En este artículo se han analizado las habilidades de modelización matemática temprana que empiezan a emerger en un grupo de 20 niños de 2-3 años a partir de la actividad “¿Cómo es el otoño en Galicia?”. Adicionalmente, se han descrito también los contenidos matemáticos que movilizan durante el proceso de modelización, cuya meta es generar un modelo concreto a partir del problema real planteado (Alsina et al., 2021).

En relación a las habilidades de modelización, se confirma que, durante el primer año de escolaridad, los niños y niñas empiezan a desarrollar habilidades como vincular el contenido del problema con sus conocimientos previos (Comprensión) o comparar la solución con el problema inicial (Interpretación). También se han encontrado algunas evidencias que ponen de manifiesto que se inician en el desarrollo de otras habilidades necesarias en el proceso de construcción de un modelo, como simplificar el problema (Estructuración), o bien empezar a utilizar objetos matemáticos (Matematización), y escuchar a otros compañeros y a la maestra, al igual que responder a las observaciones que les sugieren (Exposición /Presentación). En cambio, el Trabajo Matemático y la Validación no están tan presentes en esta edad, pero sí se evidencian. Este dato es relevante respecto a trabajos anteriores en esta misma edad (Alsina et al., 2021; Alsina y Salgado, 2022) en el sentido de que el alumnado de 3 años, con la ayuda de la maestra y una mayor planificación y gestión, logra que en el transcurso de la secuencia se evidencien la mayoría de los componentes e indicadores del instrumento REMMP, teniendo en cuenta que la emergencia de estas habilidades no tiene porqué seguir un orden lineal preestablecido, ni tienen porqué aparecer todas (Blum y Leiß, 2007).

En relación a los contenidos, durante el proceso de modelización los niños han movilizado conocimientos relativos al Álgebra Temprana, en especial el reconocimiento de cualidades y atributos para establecer relaciones, en el sentido planteado por Pincheira y Alsina (2021). Como se ha podido comprobar, los niños han reconocido cualidades y atributos de los elementos que han ido llegando a la escuela (los tesoros del otoño) y, con base en ello, han analizado las semejanzas y diferencias y los han clasificado según diversos criterios, etc. También se han movilizado conocimientos relativos a la Numeración y el Cálculo: han reconocido cantidades de elementos e incluso han realizado clasificaciones por criterios cuantitativos, que son cuestiones imprescindibles para la construcción de la noción de número (Alsina, 2016). Finalmente, a partir de la guía de la maestra, también se han puesto en juego algunos conocimientos vinculados a la estadística, en concreto la construcción de tablas estadísticas sobre todo de recuento (Alsina, 2021).

A modo de conclusión, pues, podemos afirmar que cuando los alumnos están en contacto con problemas y situaciones reales susceptibles de ser matematizadas, pueden emerger habilidades del ciclo de modelización que enriquecen la resolución del problema, sea cual sea la edad. De este modo, se van sentando las bases para los futuros conocimientos matemáticos y el desarrollo progresivo de la competencia matemática en el alumnado, conectando las matemáticas con el mundo real.

Por último, en gran grupo, se establece un diálogo en el que los alumnos ponen de manifiesto sus conocimientos y creencias sobre el otoño; comprueban sus planteamientos a través del contraste de diferentes imágenes e identifican las otoñales. Afirman que son “buenas” nuestras características y nuestros tesoros del otoño, porque en las fotos de las otras estaciones no hay nada del otoño, no hay marrón, no hay hojas en el suelo, ni castañas, ni frutos en el suelo, vamos abrigados... por lo que así es el otoño en nuestro pueblo, y como estamos en Galicia, también en Galicia.

Agradecimientos

Artículo desarrollado en el marco del Plan Estatal de Investigación Científica, Técnica y de Innovación 2021-2023. Convocatoria de "Proyectos de Generación de Conocimiento". Referencia PID2021-122326OB-I00 y del Proyecto SGR 2021 00767, financiado por la Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (AGAUR) de Catalunya (España)..

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14. <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/96/89>
- Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, 86, 5-28. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/86/Articulos_01.pdf
- Alsina, Á. (2021). “Ça commence aujourd'hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA*, 15(4), 243-266. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357>

- Alsina, Á., Toalongo-Guamba, X., Trelles-Zambrano, C. y Salgado, M. (2021). Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Cuadrante*, 30(1), 74–93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23654>
- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. y Salgado, M. (2021a). Introduciendo la Modelización Matemática Temprana en Educación Infantil: un marco para resolver problemas reales. *Modelling in Science Education and Learning*, 14(1), 33-56. <https://doi.org/10.4995/msel.2021.14024>
- Alsina, Á. y Salgado, M. (2021b). Understanding Early Mathematical Modelling: First Steps in the Process of Translation Between Real-world Contexts and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10232-8>
- Alsina, Á. y Salgado, M. (2022). Iniciando la modelización matemática temprana en Educación Infantil: ¿cómo piensan y qué hacen los niños de 3 años? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 11(1), 1-38.
- Bliss, K. y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel & M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7-21). Consortium for Mathematics and Its Applications and Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught and Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling* (ICTMA 12). Education, engineering and economics (pp. 222–231). Ellis Horwood.
- Carreira, S., Amado, N. y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 199-210). Springer.

- Consortium for Mathematics and its applications [COMAP] y Society for industrial and applied mathematics [SIAM]. (2019). *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education*. S. Garfunkel & M. Montgomery, Edits.
- Fredj, P. (2013). Modes of modelling assessment-a literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 411-438.
- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling ICTMA 14* (pp. 305-314). Springer.
- Girnat, B. y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher's Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling ICTMA 14* (pp. 75-84). Springer.
- Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling - Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling ICTMA 14* (pp. 301-304). Springer.
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht - Ein Überblick über die aktuelle und. En G. Graumann, T. Jahnke, G. Kaiser & J. Meyer (Eds.), *Materialen für einen realitätsbezogenen* (pp. 64-84). Franzbecker.
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde University.
- OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework*. Mathematics, reading,
- Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.

- Ruiz-Higueras, L., García, F. J. y Lendínez, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95-118.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de Modelización Matemática en la Escuela Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 41-70. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33519067003.pdf>
- Toalongo-Guamba, X., Alsina, Á., Trelles-Zambrano, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO, Giornale Italiano di Pedagogia Sperimentale 1/2021*, 81-98. <https://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>
- Toalongo-Guamba, X., Trelles-Zambrano, C. y Alsina, Á. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics*, 10, 4662. <https://doi.org/10.3390/math10244662>