

Conocimiento especializado del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad

Primary school teachers' specialised knowledge to teach statistics and probability

Joan Franco Seguí,¹
Ángel Alsina²

Resumen: A partir de una revisión sistemática de investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad, realizadas desde distintos modelos de conocimiento, se analizan 15 estudios de profesorado en activo desde la perspectiva del modelo *Mathematical Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), con el propósito de interpretar los resultados desde el conocimiento especializado y caracterizarlo. Para ello, en la primera parte, se describen y vinculan los dominios, subdominios y/o facetas de conocimiento de los modelos *Mathematical knowledge for Teaching* (MKT) y *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas* (CCDM) con el MTSK; en la segunda parte, se describen los resultados de los estudios de la revisión vinculándolos con los subdominios del MTSK; y en la tercera parte, con base en las conclusiones obtenidas, se propone el conjunto de conocimientos especializados que debería poner en juego el profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad.

Fecha de recepción: 10 de junio de 2021 **Fecha de aceptación:** 2 de mayo de 2022.

¹ Universidad de Girona. Programa de Doctorado en Educación. Girona, España, joanfrancosegui@gmail.com, orcid.org/0000-0002-4467-1469.

² Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología. Departamento de Didácticas Específicas. Girona, España, angel.alsina@udg.edu, orcid.org/0000-0001-8506-1838

Palabras clave: *estadística, probabilidad, conocimiento del profesorado, MTSK, Educación Primaria.*

Abstract: Based on a systematic review of research on the knowledge of primary school teachers to teach statistics and probability, carried out from different knowledge models, 15 in-service teacher studies are analyzed from the perspective of the Mathematical Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model, in order to interpret the results from the specialized knowledge and to characterize it. To this end, in the first part, the domains, subdomains and/or facets of knowledge of the Mathematical knowledge for Teaching (MKT) and Didactic - Mathematical Knowledge and Competences (CCDM) are described and linked to the MTSK; the second part describes the results of the review studies and links them to the sub-domains of the MTSK; and the third part, according to the conclusions obtained, proposes the set of specialized knowledge that primary education teachers should put into play to teach statistics and probability.

Keywords: *statistics, probability, teacher knowledge, MTSK, Primary Education.*

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la investigación sobre la formación del profesorado de matemáticas es un campo que ha generado un gran interés (González y Eudave, 2018). En este sentido, desde los planteamientos de Shulman (1987), han ido surgiendo varios modelos para analizar el conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas, como el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball *et al.* (2008), el modelo de *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas* (CCDM) de Godino *et al.* (2017) o el *Mathematical Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) de Carrillo *et al.* (2018).

En este artículo se asume el modelo MTSK, al ser una propuesta teórica focalizada en la enseñanza de las matemáticas para comprender el conocimiento del profesorado y, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar diferentes prácticas a través de sus dominios (Carrillo *et al.*, 2017). El modelo MTSK amplía los distintos modelos preexistentes, al considerar el carácter especializado del profesorado integrándolo en los distintos subdominios que componen el modelo (Aguilar-González *et al.*, 2018). Además, no existe una relación unívoca entre una

acción y un subdominio, mostrando simultaneidad y complejidad (Camilo Fuentes, 2020). Adicionalmente, en este modelo se consideran también las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. Si aceptamos que las creencias condicionan al conocimiento o su puesta en práctica, su inclusión completa la comprensión que se adquiere del conocimiento del profesorado (Montes, 2016).

Desde este posicionamiento teórico, este artículo se estructura en tres partes: en la primera parte, se describen y se vinculan los dominios, subdominios y/o facetas de conocimiento de los modelos MKT y CCDM con el MTSK; en la segunda, se describen los principales resultados de una revisión sistemática previa sobre el conocimiento del profesorado de Educación Primaria en activo para enseñar estadística y probabilidad (Franco y Alsina, 2022), en la que se identificó la muestra (profesorado en activo o futuro profesorado), el conocimiento matemático (estadística o probabilidad) y el modelo de conocimiento (MKT, CCDM, MTSK u otros). En este nuevo análisis, los resultados de estos estudios se vinculan con los subdominios del MTSK a partir de las conexiones identificadas entre los distintos modelos, con el propósito de interpretar las conclusiones de los diferentes estudios de forma más homogénea. Finalmente, con base en estas conclusiones, en la tercera parte se caracterizan el conjunto de conocimientos que debería poner en juego el profesorado de Educación Primaria en activo, para enseñar estadística y probabilidad, con base en los dominios y subdominios del MTSK.

2. VINCULANDO MODELOS DE CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Desde los planteamientos de Shulman (1987) acerca de los conocimientos del profesorado para enseñar las distintas asignaturas del currículum, se han realizado multitud de estudios, siendo un tema de gran importancia en la comunidad investigadora en Educación Matemática (Aguilar-González, *et al.*, 2018). Como se ha indicado en la introducción, en este artículo se consideran el modelo MKT (Ball *et al.*, 2008), el modelo CCDM (Godino *et al.*, 2017) y el modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2018), por su impacto internacional.

El modelo MKT es una evolución de los subdominios expuestos por Shulman (1987). En su propuesta, se plantean tres subdominios para el conocimiento del contenido (Ball *et al.*, 2008; Hill *et al.*, 2008): *conocimiento común del contenido*, conocimientos y habilidades de las matemáticas en una variedad de entornos; *conocimiento del horizonte matemático*, conocimiento para establecer relaciones entre contenidos

matemáticos de diferentes niveles educativos; y *conocimiento especializado del contenido*, conocimiento y habilidades para el desarrollo del trabajo en las matemáticas; y tres subdominios para el conocimiento pedagógico del contenido: *el conocimiento del contenido y los estudiantes*, cómo aprende el estudiante; *el conocimiento de la enseñanza del contenido*, relaciona contenido y la forma de enseñar; y *el conocimiento del contenido curricular*, conocimiento de la estructura del currículo.

Por su parte, el modelo CCDM se basa en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), que trata de aunar diversos modelos teóricos utilizados en la investigación en Educación Matemática (Godino *et al.*, 2017). El CCDM considera el conocimiento del contenido matemático *per-se*, que incluye el conocimiento común (nivel compartido con el estudiante) y el conocimiento ampliado (niveles superiores). Se organiza en diferentes facetas: *faceta epistémica*, conocimiento especializado del contenido matemático; *faceta cognitiva*, cómo aprenden, razonan y entienden los estudiantes; *faceta afectiva*, creencias y actitudes de los estudiantes con las matemáticas; *faceta interaccional*, pedagogía de las matemáticas; *faceta mediacional*, conocimiento de recursos para la enseñanza; *faceta ecológica*, conexión de las matemáticas con otros contenidos. Adicionalmente, en este modelo se incluye también la competencia que el profesorado de matemáticas debe disponer para afrontar los problemas didácticos propios de la enseñanza. Concretamente, se considera una competencia general de análisis, intervención y conocimientos didácticos, que se compone de cinco sub-competencias: 1) *análisis de significados globales*, para responder a situaciones que aportan distintos significados del contenido matemático a enseñar; 2) *análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas*, para identificar los distintos objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas; 3) *análisis de las interacciones en el proceso de instrucción*, para conocer y gestionar las distintas configuraciones y trayectorias didácticas y sus efectos en el aprendizaje del alumnado; 4) *análisis normativo*, para conocer, comprender y valorar la dimensión normativa que regula el proceso de instrucción; y 5) *análisis y valoración de la idoneidad didáctica*, para valorar el proceso de instrucción e identificar mejoras.

Finalmente, Carrillo *et al.* (2018) desarrollan el modelo MTSK (figura 1) bajo la perspectiva de que el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas es aquel que es útil en contextos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Carrillo *et al.*, 2017). Proponen dos dominios para su análisis: conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK) que, a su vez, se dividen en tres subdominios. El MK comprende: el contenido

matemático en el *conocimiento de los temas* (KoT); las conexiones entre contenidos en el *conocimiento de la estructura de las matemáticas* (KSM); y las formas de hacer o crear matemáticas en el *conocimiento de la práctica matemática* (KPM). Por su parte, el PCK comprende: el conocimiento del profesor del contenido matemático como objeto de enseñanza en el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT); como objeto de aprendizaje en el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM); y los estándares de aprendizaje que se esperan alcanzar en un curso o nivel educativo determinado en el *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS). A su vez, como se ha señalado, el MTSK incluye las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje como dimensión que permea todo el conocimiento del profesorado (Aguilar-González *et al.*, 2013). En este sentido, se consideran las creencias acerca de la naturaleza de la matemática y sobre la didáctica de la matemática, ligadas a los dominios matemático y didáctico del contenido, respectivamente. Dentro de las creencias acerca de la naturaleza de la matemática, se consideran esencialmente tres tipos (Carrillo y Contreras, 1995): 1) platónica (el cuerpo de conocimiento estructurado y preexistente al que se accede); 2) instrumentalista (la colección de procedimientos, hechos y habilidades); y, 3) ligada a la resolución de problemas (se construye de forma dinámica). En relación a las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se consideran principalmente cuatro tendencias (Carrillo, 1998; Aguilar-González *et al.*, 2018): 1) tradicional (ejercitación reproductiva; proceso de aprendizaje deductivo e individual); 2) espontaneísta (actividades donde participa el alumnado; proceso social de aprendizaje inductivo); 3) tecnológica (ejercitación reproductiva; procesos de aprendizaje inductivos simulados por el maestro, deductivos e individuales); y, 4) investigativa (resolución de situaciones problemáticas; proceso de aprendizaje inductivo-deductivo; proceso social e individual).

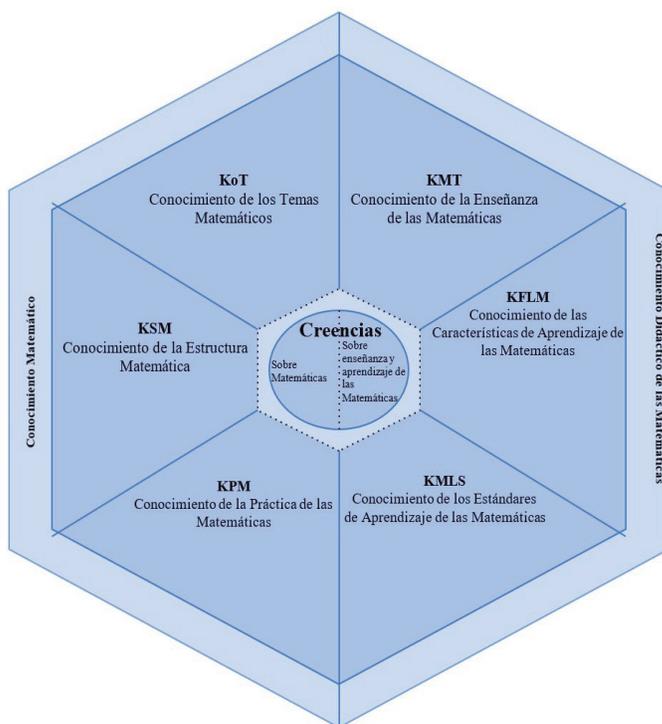


Figura 1. Modelo del Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas (Carrillo *et al*, 2018)

Considerando las particularidades de cada modelo, en la tabla 1 se vinculan las facetas y subdominios del conocimiento del profesorado descritos, tomando como punto de partida la comparación previa de González y Eudave (2018).

Tabla 1. Vinculación de las facetas y subdominios del conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas según los modelos MKT, CCDM y MTSK

MKT (Ball <i>et al.</i> , 2008)	CCDM (Godino <i>et al.</i> , 2017)	MTSK (Carrillo <i>et al.</i> , 2018)
Conocimiento común del contenido (CCK). Conocimiento del horizonte matemático (HCK).	Conocimiento común del contenido. Conocimiento ampliado del contenido.	Definiciones, propiedades, procedimientos, representación, fenomenología y aplicaciones (KoT).
Conocimiento especializado del contenido (SCK).	Faceta Epistémica.	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). Conocimiento de la práctica matemática (KPM).
Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS).	Faceta Cognitiva. Faceta Afectiva.	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM).
Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT).	Faceta Interaccional. Faceta Mediacional.	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT).
Conocimiento del currículo (KCC).	Faceta Ecológica.	Conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS).

En la tabla 1 se observa cómo, en términos generales, existen más coincidencias que diferencias entre los distintos modelos. En todos se precisa tener un conocimiento matemático amplio y estructurado: en el modelo MKT, se observa en el conocimiento común del contenido, conocimiento del horizonte matemático y conocimiento especializado del contenido; en el modelo CCDM, con el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y la faceta epistémica; y, en el modelo MTSK, el conocimiento del tema, el conocimiento de la estructura de las matemáticas y, finalmente, el conocimiento de la práctica matemática. Además, el profesorado debe tener un conocimiento de los temas que enseña para ser capaz de resolver los problemas que presenta el alumnado (González y Eudave, 2018). En cambio, respecto a la interacción y gestión de las relaciones en el aula, en el modelo CCDM, se encuentra en la faceta interaccional, mientras que los otros modelos no explicitan esta gestión de interacción (Shulman, 1987; Ball *et al.*, 2008; Carrillo *et al.*, 2018). A su vez, el conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS) –a diferencia del conocimiento del currículo del MKT– se plantea de manera más amplia, considerando el conocimiento de estándares internacionales como los propuestos por el NCTM (Carrillo *et al.*,

2014). Por su parte, el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), se refiere a las relaciones entre el contenido matemático (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019). En cambio, en el HCK propuesto por el modelo MKT se relacionan los contenidos matemáticos con otras asignaturas. En otro orden de cosas, el modelo MTK, el modelo CCDM y el modelo MTSK mantienen la diferenciación en dos dimensiones del conocimiento propuesto por Shulman (1987): por un lado, el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático (PCK). Montes *et al.* (2013) afirman que el modelo MTSK, en el subdominio conocimiento de los temas (KoT), resuelve el solapamiento existente en el MKT en relación con los subdominios: conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS); el conocimiento del contenido y la enseñanza KCT y, por último, el conocimiento especializado del contenido (SCK). Además, los autores afirman que el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) permite al profesor interpretar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental, lo cual no se puede concebir desde el subdominio del MKT, conocimiento del horizonte matemático (HCK). En definitiva, el modelo MTSK pretende ayudar a delimitar mejor el conocimiento especializado que se pone en juego para enseñar (Aguilar-González *et al.*, 2013), donde la especialización afecta a todos los subdominios, no exclusivamente a uno de ellos (Carrillo *et al.*, 2013).

Considerando estos antecedentes, el modelo que se adapta mejor a nuestra investigación es el modelo MTSK, que plantea que todo el conocimiento del profesorado de matemáticas es especializado. En definitiva, es una propuesta teórica focalizada en la enseñanza de las matemáticas para comprender el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas y, a su vez, es una herramienta metodológica que permite analizar diferentes prácticas del docente a través de sus subdominios (Carrillo *et al.*, 2017; Flores-Medrano *et al.*, 2013).

3. PANORAMA DE LOS CONOCIMIENTOS DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD: VÍNCULOS CON EL MTSK

Se describen, cronológicamente, los resultados de 15 artículos publicados en los últimos 25 años (período 1997-2021) sobre el conocimiento del profesorado de primaria en activo para enseñar estadística y probabilidad, a partir de la revisión sistemática realizada por Franco y Alsina (2022). En dicha revisión, como se ha indicado, se analizó la muestra, el tipo de conocimiento matemático y el

modelo de conocimiento. Los criterios de inclusión para determinar qué estudios podrían incluirse en la investigación fueron: 1) estudios que garantizan un proceso de revisión por pares; 2) estudios que tratan la enseñanza de la estadística y la probabilidad en primaria; 3) estudios que centran su investigación en el conocimiento del profesorado para la enseñanza.

Para tratar de comprender de forma más homogénea los resultados de estos estudios, que se han realizado desde distintas perspectivas y/o modelos, se describen estas investigaciones a partir de los vínculos descritos en la tabla 1, y tomando como referente los subdominios del MTSK para tratar de caracterizar los aspectos analizados. De este modo, sin dejar de lado el modelo de análisis utilizado en los distintos estudios, se facilita la obtención de conclusiones.

3.1 CONOCIMIENTOS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

En la tabla 2 se resumen los datos de los estudios publicados durante el periodo 1997-2021 sobre el conocimiento para enseñar estadística.

Tabla 2. Estudios sobre el conocimiento para enseñar estadística

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Begg y Edward (1999)	No se define	KoT (Definiciones, fenome- nología, procedimientos)	22 maestros	Entrevistas y mapas conceptuales	Falta general de familiaridad con los términos media, mediana y moda (el 21% reconoce e interpreta los tres términos). La mayoría tiene una comprensión intuitiva (no matemática) de estos conceptos y los usan incorrectamente.
Watson (2001)	No se define	KoT, PCK, KMT	43 maestros	Cuestionario	Poca planificación y baja habilidad en la utilización del currículo. Escasa presencia de los conceptos de mediana, muestreo. Bajo conocimiento del contenido de los estudiantes. Baja confianza debido a una formación matemática poco sólida.

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Watson <i>et al.</i> (2008)	MKT	KMT y KFLM	42 docentes: 8 de Educación Primaria y 34 de Secundaria	Encuesta y preguntas abiertas	Tres niveles: bajo, medio y alto. El profesorado con dificultades para resolver ítems sencillos no responde a los problemas del alumnado.
Burgess (2008)	No se define	KoT, KFLM y KMT	1 maestro y 1 maestra	Videograbación y entrevistas	La maestra revela la mayoría de los aspectos del conocimiento para enseñar estadística. El maestro revela la pérdida de oportunidades en todas las categorías de conocimiento vinculadas a la transnumeración.
Koleza y Kontogianini (2012)	No se define	KoT (definiciones)	10 maestros	Cuestionario y entrevistas	Escaso conocimiento de las nociones de estadística descriptiva básicas: mediana, moda, rango, diagrama de tallo y hojas y diagrama de línea.
Estrella <i>et al.</i> (2015)	MKT	KFLM, KoT	85 maestros	Cuestionario	<i>Conocimiento del contenido de estadística descriptiva:</i> el 49% tienen dificultades en el proceso de conteo según cada categoría de la variable. <i>Conocimiento del profesor respecto al conocimiento del alumno:</i> el 70% tiene dificultades para responder a las dificultades del alumnado en la lectura de gráfico de barras.
Siswono <i>et al.</i> (2018)	MKT	KoT, KSM, PCK	40 maestros	Cuestionario	<i>Conocimiento del contenido (sobre el uso de la media y del concepto de media):</i> uso explícito de ambos aspectos; uso de la media; no lo mencionan. <i>Conocimiento del profesorado y el alumnado:</i> uso adecuado de la inferencia de un total fijo y del algoritmo aplicado; errores al calcular la media. <i>Conocimiento de la enseñanza:</i> identifican errores del alumnado (falta de comprensión de la mediana, la moda y errores en el cálculo).

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Siswono <i>et al.</i> (2018)	MKT	KoT, KSM, PCK	40 maestros	Cuestionario	<p><i>Conocimiento del contenido y la enseñanza de las matemáticas:</i> distinguen actividades figurativas y físicas. las figurativas son <i>más constructivas, atractivas e interactivas</i>, pero en ambos casos deben profundizar más el significado de "media" sin centrarse solo con el significado de "reparto".</p> <p><i>Conocimiento del contenido y el currículo:</i> indican que el alumnado de los primeros niveles pueden comprender conceptos básicos de estadística (conteo, mediana, modo); la media, mediana y moda se deben explicar en los niveles superiores.</p> <p><i>Conocimiento del contexto y la cultura:</i> proponen incluir el conocimiento del contexto y la cultura del alumnado en su planificación, refinando el modelo MKT.</p>

La mayoría de los estudios de la tabla 2 analizan conocimientos de estadística descriptiva vinculados al análisis de datos y el cálculo estadístico (e.g., mediana y moda) y la construcción de gráficos. Por ejemplo, Begg y Edward (1999) y, posteriormente, Koleza y Kontogianni (2012) y Siswono *et al.* (2018) sugieren un escaso conocimiento de los temas sobre las nociones básicas de estadística (media, mediana y moda). En otras palabras, el profesorado tiene una comprensión intuitiva sin llegar a tener un pensamiento más profundo. Por su parte, Estrella *et al.* (2015) analizan el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) en la interpretación de gráficos y tablas. Los resultados revelan dificultades en ambos subdominios. A su vez, Burgess (2008) expone que la falta de un conocimiento de los temas (KoT) es un obstáculo para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, revelando dificultades en el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En definitiva, como señala Batanero (2009), existen evidencias que ponen de manifiesto lagunas de conocimiento del profesorado para enseñar estadística. Desde este prisma, el profesorado tiene dificultades para detectar un error y su origen y, por consiguiente, comete

errores en la resolución de los problemas o dificultades que tiene el alumnado (Ball *et al.*, 2008). Además, algunos estudios muestran errores en el conocimiento de la estadística y sus significados. En otras palabras, el profesorado tiene un nivel de profundización menor del esperado.

Con la finalidad de subsanar estas dificultades, debidas en buena medida a la falta de formación y, consecuentemente, la ausencia de prácticas de enseñanza (Estrella *et al.*, 2015), diversos autores subrayan la necesidad de promover el desarrollo profesional del profesorado para enseñar estadística (Batanero *et al.*, 1997; Cardeñoso y Azcárate, 2004; Gea y Fernandes, 2018; Ortiz *et al.*, 2006; Pinheiro *et al.*, 2019; entre otros).

3.2 CONOCIMIENTOS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

En la tabla 3 se resumen los datos de los estudios publicados durante el periodo 1997-2021 sobre el conocimiento para enseñar probabilidad.

Tabla 3. Estudios sobre el conocimiento para enseñar probabilidad

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Begg y Edward (1999)	No se define	KoT (Definiciones, fenomenología, procedimientos)	22 maestros	Entrevistas y mapas conceptuales	Comprensión de la probabilidad poco desarrollada: dos tercios de los encuestados estaban familiarizados con el concepto de aleatoriedad igualmente probable; la mitad entendía la aleatoriedad; y, menos de la mitad, tenía conocimientos sobre la independencia.
Watson (2001)	No se define	KoT, PCK, KMT	43 maestros	Cuestionario	Poca planificación por parte del profesorado. Necesidad de desarrollar el conocimiento del profesorado sobre el contenido y cómo aprenden los estudiantes este contenido para una enseñanza eficaz de la probabilidad.

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Cardenoso y Azcárate (2004)	No se define	KoT	598 maestros	Cuestionario	<p>Conocimiento probabilístico de naturaleza intuitiva. Falta de preparación sobre conocimiento probabilístico, repercutiendo en su enseñanza. Se establecen cinco niveles: 1) <i>Determinista</i> (20-25%): reconocen pocos sucesos aleatorios, lectura mecanicista y formal del cálculo; 2) <i>Contingente</i> (10-15%): reconocen aproximadamente la mitad de las situaciones aleatorias, uso mínimo del argumento de la incertidumbre y básico de la multiplicidad de posibilidades; 3) <i>Causalidad</i> (25-30%): reconocen en torno al 75% de situaciones aleatorias, causalidad desde la caracterización de causas o la falta de control sobre ellas, imprevisibilidad del suceso, estiman desde la equiprobabilidad; 4) <i>Personalista</i> (10-15%): reconocimiento de la aleatoriedad, uso mínimo de la causalidad y medio de la incertidumbre, argumentos subjetivos basados en vivencias personales, estiman desde la experiencia; y, 5) <i>Incertidumbre</i> (10-15%): reconocen sucesos aleatorios fácilmente (80%), incertidumbre del fenómeno, argumentación causal, uso mínimo de la multiplicidad y causalidad negativa, estiman ajustándose a la tarea.</p>
Watson <i>et al.</i> (2008)	MKT	KMT y KFLM	42 docentes: 8 de Educación Primaria y 34 de Secundaria	Encuesta y preguntas abiertas	<p>Tres niveles: 1) bajo, el profesorado tiene dificultades en dar respuesta a los estudiantes; 2) medio, la mayoría podrían responder a los problemas de razonamiento proporcional con preguntas de contenido matemático; 3) alto, algunas dificultades para usar las respuestas de los estudiantes como base para planificar las actividades de intervención.</p>

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Vásquez y Alsina (2015a)	CDM	KoT, KFLM, KMT	8 maestros	Cuestionario	Nivel medio bajo en todas las categorías del conocimiento del contenido matemático: noción de suceso seguro, cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales, y comprensión de la independencia de sucesos.
Vásquez y Alsina (2015b)	CDM	KPM, KMT y KoT	93 maestros	Cuestionario	Conocimiento insuficiente de la probabilidad. Dificultades para resolver situaciones problemáticas del alumnado: presencia de heurísticas y sesgos probabilísticos asociados a la recencia negativa y positiva.
Vásquez y Alsina (2017)	CDM	KoT	93 maestros	Cuestionario	El profesorado no posee los conocimientos necesarios para identificar los conceptos y/o propiedades sobre probabilidad. El conocimiento común del contenido es bajo: 22,4% de respuestas correctas sobre la comprensión de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades.

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Vásquez y Alsina (2019a)	CDM	KoT (fenomenología) KMT KSM, KMLS	93 maestros	Cuestionario	<p>El conocimiento especializado del contenido, en general, es bajo: solo identifican conceptos básicos asociados a la resolución de la situación planteada.</p> <p>El conocimiento del contenido en relación con los estudiantes es muy bajo: carecen de la capacidad para identificar y describir tanto configuraciones cognitivas como posibles conflictos de aprendizaje.</p> <p>El conocimiento del contenido en relación con la enseñanza es muy bajo: 13% describe correctamente estrategias o recursos que utilizarían para ayudar al alumnado a superar posibles dificultades o errores.</p> <p>El Conocimiento del contenido en relación con el currículo es muy escaso: 3,2% identifica correctamente las dificultades del alumnado vinculadas al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales; 4,3% logra identificar el cálculo de probabilidades mientras que 73,1% no responde por falta de conocimientos. 23,6% restante se distribuye entre el profesorado que da una respuesta parcialmente correcta y los que responden de manera incorrecta.</p>
Vásquez y Alsina (2019b)	No se define	KoT, KMT, KSM	12 maestros	Videograbación de las clases	<p>Los enfoques intuitivo y frecuencial se incorporan a lo largo de toda la etapa educativa, con una presencia promedio de 49,4% y 28,1% respectivamente. Por otro lado, el enfoque subjetivo tiene una presencia promedio del 8,6% y se introduce desde el cuarto grado, mientras que los elementos relacionados con el enfoque clásico tienen una presencia promedio del 13,9% y comienzan a introducirse desde el quinto grado.</p>

Autor/es	Modelo	Conocimiento analizado: vinculación con el MTSK	Muestra	Instrumentos	Resultados
Pinheiro <i>et al.</i> (2019)	MKT	KMT, KoT y KFLM	1 maestra de Educación Primaria	Cuestionario inicial, entrevista y videograbación clases	El desarrollo profesional mejora a partir de la participación en un proceso formativo. Analiza y reflexiona sobre temas relacionados con el contenido y la enseñanza. Además, la maestra planifica y desarrolla una clase, con el libro y relaciona el nuevo contenido con el conocimiento ya adquirido y realiza intervenciones apropiadas para explorar las nociones e ideas relacionadas con el nuevo contenido.

La mayor parte de los estudios analizan la comprensión de la equiprobabilidad o la percepción de la independencia de sucesos. Por ejemplo, Cardeñoso y Azcárate (2004) señalan un conocimiento probabilístico de naturaleza intuitiva y no formalizado, evidenciando que el conocimiento de los temas (KoT) es escaso y la valoración del mundo de la incertidumbre y de su tratamiento puede influir en su enseñanza. Asimismo, la vinculación de los resultados de Vásquez y Alsina (2019b) con el análisis del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y la estructura de las matemáticas (KSM) revelan que los enfoques intuitivo y frecuencial se incorporan a lo largo de toda la etapa educativa con una presencia del 49,4% y 28,1% respectivamente. En otras palabras, los docentes centran su práctica principalmente en intuiciones relacionadas con el azar y la probabilidad. En cambio, los enfoques clásico y subjetivo solo se observan en los últimos años de primaria, con una presencia menor en relación a los otros enfoques; mientras que el enfoque axiomático no aparece, ya que es propio de secundaria.

En relación al conocimiento que se relaciona con las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), se extrae el escaso conocimiento por parte del profesorado para identificar y resolver las situaciones problemáticas que puedan presentar el alumnado (Watson *et al.*, 2008; Vásquez y Alsina, 2015b, 2017, 2019a). Asimismo, en Vásquez y Alsina (2017) se analizan 7 situaciones hipotéticas tratando la independencia de sucesos y noción de aleatoriedad, el cálculo y la comparación de probabilidades de sucesos (elementales, no equiprobables y aleatorios). Vinculando los resultados de dicho estudio con el conocimiento de los temas (KoT) se observa un bajo dominio, ya que el promedio de respuestas correctas

sobre la comprensión de la independencia de sucesos es del 22.4%. Respecto al conocimiento que se vincula con la enseñanza de las matemáticas (KMT) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS), Vázquez y Alsina (2019a) obtienen mejores resultados: 13% y 3.2% respectivamente logran dar una respuesta correcta a la pregunta planteada. Finalmente, cabe señalar que en los diferentes estudios se manifiesta la necesidad de formación, ya que pocos tuvieron una formación inicial suficiente (Franklin y Mewborn, 2006), es decir, no han recibido una formación que les permita llevar a cabo una enseñanza idónea en las aulas (Batanero, 2001; Vázquez y Alsina, 2015c).

4. CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Con base en los datos anteriores, en esta sección se describen los principales conocimientos que debería movilizar el profesorado para enseñar estadística y probabilidad, con base también en los dominios y subdominios del MTSK (Carrillo *et al.*, 2017).

4.1 CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE ESTADÍSTICA

Con base en los datos de las secciones anteriores, adaptamos los dominios MK y PCK del modelo MTSK a los dominios que denominamos “Conocimiento Estadístico” (CE) y “Conocimiento Didáctico de Estadística” (CDE) (figura 2). De este modo, el dominio CE contiene los subdominios: “Conocimiento de los Temas Estadísticos” (CTE), “Conocimiento de la Estructura Estadística” (CEE) y “Conocimiento de la Práctica de la Estadística” (CPE). Por su parte, el dominio CDE incluye los subdominios: “Conocimiento de la Enseñanza de la Estadística” (CENE), “Conocimiento de las Características de Aprendizaje de la Estadística” (CCA) y “Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Estadística” (CEAE).

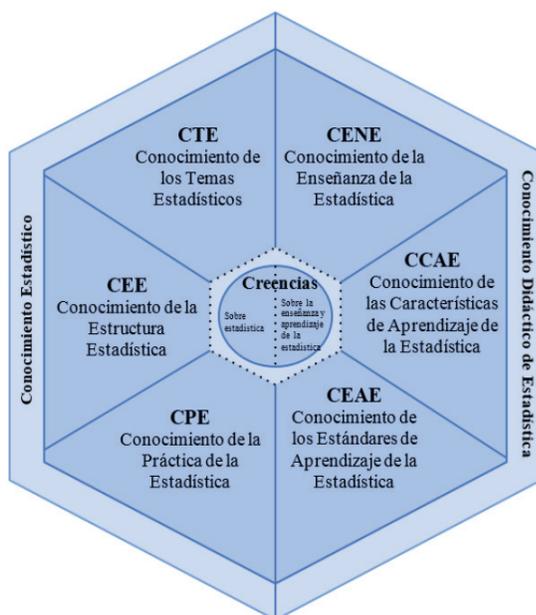


Figura 2. Adaptación del Modelo MTSK a la enseñanza de la Estadística.

A continuación, se describen los conocimientos y creencias que el profesorado debería tener en cada subdominio:

Conocimiento de los Temas Estadísticos (CTE): se focaliza en los aspectos fenomenológicos, significados y definiciones de conceptos, ejemplos..., que caracterizan aspectos concretos de la estadística (Ben-Zvi y Garfield, 2004). En este sentido, el conocimiento de los temas que el profesor debe tener son: 1) es preciso comprender la terminología básica (población, muestra, variable estadística, rango, media, entre otras); 2) comprenderla en un contexto; y 3) cuestionar las afirmaciones hechas sin una justificación estadística adecuada (Watson, 1997). Además, Gal (2002) incluye la identificación de cinco componentes: 1) saber por qué se necesitan datos y cómo se pueden producir; 2) estar familiarizado con términos e ideas básicas relacionadas con la estadística descriptiva; 3) estar familiarizado con términos e ideas básicas relacionadas con gráficos y tablas; 4) comprender las nociones básicas de probabilidad; y 5) saber cómo se llegan a conclusiones o inferencias estadísticas (Burrill y Biehler, 2011). En este sentido, Burrill y Biehler argumentan que es fundamental en la inferencia

estadística que las distribuciones empíricas se interpreten y se vean desde la perspectiva de distribuciones teóricas asumidas hipotéticamente.

Conocimiento de la Estructura Estadística (CEE): abarca las distintas conexiones conceptuales, en el que el profesorado tiene que considerar las distintas medidas (centro, dispersión, forma, entre otras) y las distintas representaciones de datos bajo un contexto específico (Vidal-Szabó y Estrella, 2019). Además, el profesorado debe vincular la estadística con la probabilidad a través del muestreo en un estudio inferencial. En este sentido, al recoger datos de una parte de la población, los resultados pueden generalizarse a la población a través de inferencias estadísticas (Alsina *et al.*, 2020). En otras palabras, a partir de la estimación y el contraste de hipótesis se pueden pluralizar los resultados de una investigación inferencial.

Conocimiento de la Práctica Estadística (CPE): considera las distintas formas de conocer, crear o producir estadística. Desde este prisma, Wild y Pfannkuch (1999) ofrecen una perspectiva centrada en los procesos de pensamiento involucrados en la resolución de problemas en los que pueden enfocarse los conocimientos estadísticos correspondientes a la etapa de Educación Primaria: planificación y diseño de recogida de datos; organización de datos; representación de datos, interpretación de datos y práctica interrogativa. En este sentido, se focaliza en el “cómo” se hace estadística: cómo se valida, se resuelven problemas, se comunican ideas estadísticas, etcétera.

Conocimiento de la Enseñanza de la Estadística (CENE): abarca las distintas estrategias que permiten al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades estadísticas. El conocimiento del contenido didáctico y las decisiones instruccionales dependen del conocimiento que el profesor tiene sobre el contenido estadístico (Batanero, 2009). Según Gal (2002), el profesorado debe focalizar la enseñanza de la estadística desde dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos y b) capacidad de discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante. Además, Franklin *et al.*, (2007) sugieren que el profesorado tenga en cuenta las sugerencias del informe GAISE, donde se argumenta que los componentes del proceso de resolución de problemas estadísticos para promover la alfabetización estadística son: 1) Formular preguntas de investigación estadística; 2) Recopilar/ considerar datos; 3) Analizar datos; y, 4) Interpretar los resultados. En este sentido, la educación estadística debe verse como un proceso de desarrollo.

Asimismo, también se consideran los planteamientos del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (Alsina, 2019) que propone itinerarios de enseñanza específicos de la estadística (Alsina, 2020, 2021), entendiendo por itinerario una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles: 1) informal, en el que se visualizan las ideas estadísticas de manera concreta a través de situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos; 2) intermedio, en el que se avanza hacia la esquematización y generalización progresiva del conocimiento estadístico a través de recursos tecnológicos, principalmente; y 3) formal, en el que se trabaja la representación y formalización del conocimiento estadístico con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico, a través de recursos gráficos.

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de la Estadística (CCA): hace referencia al proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, el lenguaje asociado a cada concepto estadístico, así como errores, dificultades u obstáculos posibles en el proceso de aprendizaje del alumnado. En otras palabras, interesa el conocimiento relacionado con las características del aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático (Yañez, 2016). El profesorado debe dar significado matemático a los comentarios y reflexiones del alumnado, aunque este contenga errores o sean razonamientos no convencionales (Ribeiro *et al.*, 2021), fomentando las reflexiones del alumnado y profundizando sobre el conocimiento del tema.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Estadística (CEAE): focaliza los contenidos estadísticos que se requieren enseñar en un curso determinado, posibilitando la mejora de la práctica del profesorado que enseña estadística (Gigerenzer *et al.*, 1989; NCTM, 2003; entre otros). En este sentido, distintos autores plantean algunas recomendaciones útiles a la hora de enseñar estadística (Alsina *et al.*, 2020; Alsina y Vásquez, 2017; Franklin *et al.*, 2007; Aliaga *et al.*, 2012; Alsina, 2020; Alsina y Escola Annexa, 2021). Por ejemplo, Alsina y Escola Annexa (2021) presentan una experiencia de enseñanza de la estadística a partir de un contexto común en todos los niveles de infantil y primaria de una misma escuela: la celebración del día de carnaval, con la intención de visualizar de forma longitudinal los contenidos de estadística que se trabajan en los distintos niveles.

4.2 CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE PROBABILIDAD

Como en el caso de la enseñanza de la estadística, se realiza una adaptación a la enseñanza de la probabilidad de los dominios MK y PCK del modelo MTSK (figura 3), que denominamos “Conocimiento Probabilístico” (CP) y “Conocimiento Didáctico de Probabilidad” (CDP). De este modo, el dominio CP contiene los subdominios: “Conocimiento de los Temas Probabilísticos” (CTP), “Conocimiento de la Estructura Probabilística” (CEP) y “Conocimiento de la Práctica de la Probabilidad” (CPP). Por su parte, el dominio CDP incluye los subdominios: “Conocimiento de la Enseñanza de la Probabilidad” (CENP), “Conocimiento de las Características de Aprendizaje de la Probabilidad” (CCAP) y “Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Probabilidad” (CEAP).

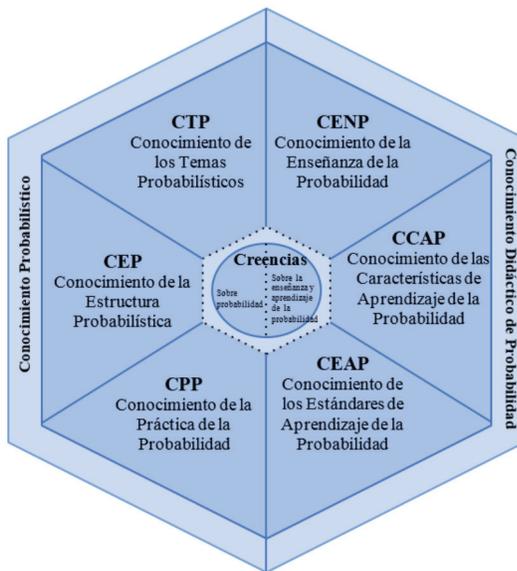


Figura 3. Adaptación del Modelo MTSK a la enseñanza de la Probabilidad.

A continuación, se describen los conocimientos que el profesorado debería tener en cada subdominio:

Conocimiento de los Temas Probabilísticos (CTP): se focaliza en los aspectos fenomenológicos, significados y definiciones de conceptos, ejemplos..., que

caracterizan aspectos concretos de la probabilidad. Así, por ejemplo, el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad ha dado lugar a la coexistencia de distintos significados: Significado intuitivo, frecuencial (ensayo, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, valor estimado de la probabilidad), laplaciano o clásico (casos favorables (regla Laplace), juego equitativo), subjetivo (creencia personal) y axiomático (Batanero, 2005; Gómez-Torres *et al.*, 2014). Por su parte, Vásquez y Alsina (2019b, 2019c) afirman que en Educación Primaria pueden trabajarse todos los significados salvo el axiomático.

Conocimiento de la Estructura Probabilística (CEP): abarca las distintas conexiones conceptuales, a partir de las cuales el profesorado debería establecer vínculos entre los conocimientos adquiridos en la adquisición de lenguaje probabilístico elemental, la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de los sucesos y el cálculo de probabilidades. Desde este prisma, para alcanzar una comprensión integrada de la probabilidad en primaria, algunos autores sugieren cinco grandes focos (Gal, 2005; Gómez *et al.*, 2014): 1) lenguaje verbal (expresiones verbales específicas, comunes y vinculadas a las matemáticas); 2) lenguaje numérico; 3) lenguaje tabular; 4) lenguaje gráfico; y, finalmente, 5) lenguaje simbólico. En cuanto a la ocurrencia de los sucesos, el profesorado debe cuantificar la posibilidad asociando la probabilidad a una medida, iniciando la representación de la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia por múltiples sistemas (Alsina, 2019).

Conocimiento de la Práctica Probabilística (CPP): considera las distintas formas de conocer, crear o producir probabilidad. Desde este prisma, algunos autores manifiestan que el profesorado debe usar contextos reales, significativos y motivadores para el alumnado (Alsina *et al.*, 2020). En este sentido, en la vida real, la probabilidad se relaciona con la capacidad para participar y gestionar eficazmente las demandas del mundo real, los roles y tareas que implican incertidumbre y riesgo (Gal, 2012). El autor propone tres características de participar y gestionar la probabilidad en la vida real: involucrar, manejar e incertidumbre y riesgo.

- *Involucrar*: preparar al alumnado para que se involucre de manera efectiva en diferentes situaciones de la vida real que presentan demandas matemáticas y probabilísticas. Se necesita una variedad de habilidades cognitivas, bases de conocimiento y creencias, actitudes y una postura crítica. En definitiva, que las personas se sientan cómodas para abordar las tareas probabilísticas.

- *Manejar*: la mayoría de las situaciones de aritmética no tienen soluciones que puedan clasificarse como correctas o incorrectas. Es decir, los adultos manejan situaciones y pueden decidir sobre qué acción realizar en función de sus metas personales o el contexto en el que se desarrolla la acción.
- *Incertidumbre y riesgo*: Cabe considerar la naturaleza de las tareas reales que enfrentan los adultos, por ejemplo, cuestiones relativas a decisiones respecto a la salud (Schapira *et al.*, 2008) o la gestión de asuntos financieros (Lusardi y Mitchell, 2007). La importancia de la probabilidad recae en las ideas relacionadas por separado, como el nivel de certeza o incertidumbre que uno puede tener con respecto a la ocurrencia de eventos futuros o su grado de previsibilidad. En este sentido, el grado de incertidumbre experimentado puede ser la base de su percepción y capacidad para evaluar el riesgo asociado con eventos o resultados de relevancia para su vida (Gal 2012).

Conocimiento de la Enseñanza de la Probabilidad (CENP): abarca las distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades probabilísticas. En este sentido, para ayudar al alumnado a desarrollar el razonamiento probabilístico, Batanero y Godino (2002) exponen que el profesorado debe: 1) Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas; 2) Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad; 3) Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados; 4) Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas; 5) Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de la Probabilidad (CCAP): hace referencia al proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, el lenguaje asociado a cada concepto probabilístico, así como errores, dificultades u obstáculos posibles en el proceso de aprendizaje del alumnado. El alumnado debe construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo (Batanero, 2005). En este sentido, el profesorado tiene que ser consciente de los distintos errores del alumnado para ser guía

en su aprendizaje. En otras palabras, a través de la observación e interpretación de las estrategias utilizadas por el alumnado para resolver los problemas probabilísticos, para avanzar hacia el desarrollo de estrategias y la prevención de las dificultades de aprendizaje (González *et al.*, 2017).

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Probabilidad (CEAP): focaliza los contenidos probabilísticos que se requieren enseñar en un curso determinado, posibilitando la mejora de la práctica del profesorado que enseña probabilidad. En este sentido, Vásquez y Alsina (2014) indican algunos aspectos esenciales que se deberían considerar en la enseñanza de la probabilidad a partir de la revisión de las orientaciones curriculares del currículo americano, español y chileno para la Educación Primaria: 1) Recoge y clasifica datos cualitativos y cuantitativos; 2) Realiza e interpreta gráficos muy sencillos; 3) Identifica situaciones de carácter aleatorio; 3) Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos; 5) Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de la probabilidad; 6) Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.

Finalmente, cabe señalar que los distintos conocimientos de estadística y probabilidad descritos contribuyen significativamente a una enseñanza eficaz. En otras palabras, a la mejora del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas (Carrillo *et al.*, 2018). Como se ha indicado, se entiende como especializado al conocimiento que le es útil y necesario solo al profesorado de matemáticas y que tiene relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde esta perspectiva, el profesorado tiene un papel fundamental para promover que el alumnado aprenda a utilizar de forma comprensiva y eficaz los distintos conocimientos que les sirvan de base para la recogida, organización, representación e interpretación de datos y, a su vez, que les faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante, a partir del pensamiento crítico. Con todo, se pretende que progresivamente sean ciudadanos alfabetizados tanto estadística como probabilísticamente (Alsina *et al.*, 2020).

5. CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se han analizado 15 artículos publicados durante el periodo 1997-2021 que abordan el conocimiento para enseñar estadística y probabilidad del profesorado de Educación Primaria en activo, considerando para el análisis el autor/es del estudio, el modelo de conocimiento utilizado, el aspecto analizado, la descripción de la muestra, los instrumentos de recogida de datos y los

principales resultados. Tomando como eje el modelo de conocimiento usado en dichos estudios –MKT, CCDM y MTSK– se han vinculado las facetas y subdominios de conocimiento del profesorado para, posteriormente, tomar como referente los subdominios del MTSK para caracterizar los aspectos analizados y facilitar la obtención de conclusiones.

A partir de la caracterización y vinculación de los modelos, por un lado, se observa que en la enseñanza de la estadística existen dificultades en el conocimiento de los temas (Begg y Edward, 1999; Burgess, 2008; Koleza y Kontogian, 2016; Estrella *et al.*, 2015; Siswono *et al.*, 2018;) y en el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (Estrella *et al.*, 2015). Por otro lado, en la enseñanza de la probabilidad, los resultados no mejoran, evidenciando un escaso conocimiento de los temas (Cardeñoso y Azcárate, 2004; Vásquez y Alsina, 2017), dificultades en relación al conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (Watson *et al.*, 2008; Vásquez y Alsina, 2015b, 2017, 2019a), y un conocimiento bajo de los estándares de aprendizaje (Vásquez y Alsina, 2017).

Partiendo de la base que durante los últimos años, la estadística y la probabilidad ha ido adquiriendo un papel clave por la importancia del análisis de datos y su interpretación en una sociedad informatizada (Batanero, 2001; Batanero *et al.*, 2011), la alfabetización estadística y probabilística es una necesidad y se debe desarrollar a partir de las primeras edades, como vienen planteando diferentes organismos y autores (Alsina, 2012, 2017; Alsina *et al.*, 2020; Batanero, 2001, 2009, 2013; Batanero *et al.*, 2011; Bryant y Nunes, 2012; Frye *et al.*, 2013; Jones, 2005; NCTM, 2003; Nunes *et al.*, 2015; entre otros).

Desde esta perspectiva, en este artículo se ha descrito el conocimiento especializado que debería movilizar el profesorado para enseñar estadística y probabilidad, con base en los dominios y subdominios del MTSK (Carrillo *et al.*, 2018): en relación a la enseñanza de la estadística, el Conocimiento Estadístico (CE) y el Conocimiento Didáctico de Estadística (CDE), con sus respectivos subdominios; y, respecto a la enseñanza de la probabilidad, el Conocimiento Probabilístico (CP) y el Conocimiento Didáctico de Probabilidad (CDP), también con sus correspondientes subdominios.

A modo de conclusión, cabe señalar que esta investigación ha servido para analizar y vincular algunos de los modelos de conocimiento del profesorado desde la perspectiva de la enseñanza de la estadística y la probabilidad, con la intención de seguir indagando y profundizando sobre el tema en estudios posteriores.

REFERENCIAS

- Aguilar-González, Á., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Escudero, D. I., Flores, E., Flores, P., Montes, M., y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM*, 5063-5069.
- Aguilar-González, Á., Catalán, M. C., Carrillo, J., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13(1), 41-61. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944>
- Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Garfield, J., Gould, R., Lock, R., Moore, T., Rossman, A., Stephenson, B., Utts, J., Velleman, P., y Witmer, J. (2012). *Guidelines for assesment and instruction in statistics education (GAISE) college report*. American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/2005GaiseCollege_Full.pdf#page=4
- Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, 7, 4-22.
- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon*, 34(95), 25-48.
- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.
- Alsina, Á. (2020). Enseñar estadística en Educación Primaria: primeras recomendaciones desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. *Investigações hispanobrasileiras em Educação Estatística*, 107-112.
- Alsina, Á. (2021). ¿Qué puede hacer el profesorado para mejorar la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad? Recomendaciones esenciales desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemática. *NÚMEROS*, 108, 49-74.
- Alsina, Á., y Escola Annexa (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *Tangram Revista de Educação Matemática*, 4(1), 71-98. <https://doi.org/10.30612/tangram.v4i2.14396>
- Alsina, Á., y Vásquez, C. (2017). Hacia una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad en las primeras edades. *Didáctica y Educación*, VIII(4), 199-212.
- Alsina, Á., Vásquez, C., Muñoz-Rodríguez, L., y Rodríguez Muñoz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon*, 104, 99-128.
- Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística. <http://www.ugr.es/local/batanero>.

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. *Actas do II Encontro de probabilidades e estatística na escola*, 7-21.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación? *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 1-13.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), *Estatística con proyectos* (pp. 9-46). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *NÚMEROS*, 83, 7-18.
- Batanero, C., y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf
- Batanero, C., Godino, J. D., y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 1-10.
- Begg, A., y Edward, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Proceedings of the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. <http://www.aare.edu.au/99pap/beg99082.htm>.
- Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-16). https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_1
- Bryant, P., y Nunes, T. (2012). Children's understanding of probability. *A literature review*. Nunfield Foundation.
- Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. *Proceedings of the ICMI Study*, 18.
- Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En c. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10
- Camilo Fuentes, C. (2020). Uso del Modelo MTSK para la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria: El caso de la proporcionalidad. *Revista Iberoamericana de educación Matemática*, 59, 33-63.

- Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2004). Las concepciones de los profesores de Primaria ante el conocimiento probabilístico: implicaciones para su formación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 17, 11-35.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva.
- Carrillo, J., y Contreras, C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática*, 7, 79–92.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. *Proceedings of the VIII CERME*.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 22, 85–205.
- Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). *Exemplifying mathematics teacher's specialised knowledge in university teaching practices*. XI Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University.
- Estrella, S., Olfos, R. y Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa*, 41(2), 477-493. <https://doi.org/10.1590/S1517-97022015041858>
- Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics*. Copernicus/Springer-Verlag
- Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D. I., y Aguilar-González, Á. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). SEIEM.
- Franco, J., y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, 51(1), 7-16. <https://doi.org/10.17811/rifie.51>

- Franklin, C., y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344).
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE): A Pre-K-12 Curriculum Framework*. ASA.
- Frye, D., Baroody, A. J., Burchinal, M., Carver, S. M., Jordan, N. C., y McDowell, J. (2013). *Teaching math to young children: A practice guide (NCEE 2014-4005)*. National Center for Education, Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x>
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer.
- Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (vol. 8).
- Gea, M^a. M., y Fernandes, J. A. (2018). Conocimiento de futuros profesores de los primeros años escolares para enseñar probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 15-30. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.213>
- Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., y Kruger, L. (1989). *The empire of chance: how probability changed science and everyday life*. University Press.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Gómez-Torres, E. G., Ortiz, J. J., y Gea, M^a. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49-70. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.63>
- González, I., Benvenuto, G., y Lanciano, N. (2017). Dificultades de Aprendizaje en Matemática en los niveles iniciales: Investigación y formación en la escuela italiana. *Psychology, Society & Education*, 9, 135-145. <https://doi.org/10.25115/psyse.v9i1.468>
- Gonzalez, J. F., y Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 54, 25-45.
- Hill, H., Ball, D., y Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

- Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school. Challenges for teaching and Learning*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b105829>
- Koleza, E., y Kontogianni, A. (2012). Statistics in Primary Education in Greece: How Ready Are Primary Teachers? En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 289-299). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0_34
- Lusardi, A., y Mitchell, O. (2007). Financial literacy and retirement preparedness: Evidence and implications for financial education. *Business Economics*, 35-44.
- Montes, M. A., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). SEIEM. <https://doi.org/10.13140/2.1.3277.5201>
- Montes, M.A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 55-59). CGSE.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales.
- Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Gottardis, L., y Terlektsi, M-E. (2015). *Teaching mathematical reasoning: Probability and problem solving in primary school*. University of Oxford.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En M. P. Bolea, M. Moreno y M. J. González (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 267-276). SEIEM.
- Pinheiro, M., Serrazina, M., y Silva, A. (2019). Desenvolvimento Profissional de uma Professora dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no Tema Probabilidade. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1175-1194. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a10>.
- Schapira, M. M., Fletcher, K. E., Gilligan, M. A., King, T.K., Laud, P. W., Matthews, B. A., Neuner, J. M., y Hayes, E. (2008). A framework for health numeracy: How patients use quantitative skills in health care. *Journal of Health Communication*, 13(5), 501-517. <https://doi.org/10.1080/10810730802202169>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 52(1). <http://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>
- Siswono, T. Y. E., Kohar, A. W., y Hartono, S. (2018). Designing Tasks to Examine Mathematical Knowledge for Teaching Statistics for Primary Teachers. *Journal of Physics Conference Series*, 947(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/947/1/012008>
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 5-23.

- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015a). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(52), 681-703. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13>
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015b). Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad de profesores de educación primaria. A C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 511-520). SEIEM.
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015c). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 19(2), 441-462.
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. *Educación Matemática*, 29(3), 79-108. <https://doi.org/10.24844/EM2903.03>
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019a). Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 23(X), 393-419. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i1.9160>
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019b). Observing Mathematics Teaching Practices to Promote Professional Development: An Analysis of Approaches to Probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 719-733. <https://doi.org/10.29333/iejme/5866>
- Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019c). Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14, 1-20. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e62434>
- Vidal-Szabó, P. F., y Estrella, S. (2019). *Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico*. En XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. *En XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado de <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/692/327>
- Watson, J.M. (1997). Assessing statistical thinking using the media. *The assessment challenge in statistics education*, 12, 107-121.
- Watson, J.M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337. <https://doi.org/10.1023/A:1013383110860>
- Watson, J. M., Callingham, R. A., y Donne, J.M. (2008). Establishing PCK for teaching statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Teaching*

Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study (pp. 1-6). Springer.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

Yañez, J. (2016) El conocimiento especializado del profesor de matemática sobre la resolución de problemas de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada. Una investigación acción. [Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica Valparaíso]. Repositorio Institucional – Pontificia Universidad Católica Valparaíso.

Autor de correspondencia

ÀNGEL ALSINA

Dirección Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología. Departamento de Didácticas Específicas. Área de Didáctica de las Matemáticas. Edificio Seminario, Pl. Sant Domènec, 9, Campus Barri Vell, 17004, Girona, España
angel.alsina@udg.edu