

# Anàlisi d'unions encaixades en estructures de fusta

## Analysis of embedded joints in timber structures

**Pulido Casellas, Bernat**

Treball final del Grau en estudis d'Arquitectura de la Universitat de Girona en data de 5 de setembre de 2022

---

### **Resum**

*Les unions encaixades de fusta han estat una de les solucions més rellevants històricament arreu del món, fins a l'arribada dels components metàl·lics dins del camp estructural. Actualment, en un context on es tendeix a una construcció enfocada en el desenvolupament sostenible, és quan aquest tipus d'unió pot tornar a jugar un paper important. En les següents pàgines s'ofereix una visió general dels diferents estudis publicats en els últims anys sobre les tipologies i bases de càlcul referents a la unió fusta - fusta. Aquesta recerca servirà per ajudar a entendre el comportament estructural de la unió i discutir no sols la seva eficiència sinó l'aplicació de noves tecnologies en el sistema d'encaix en estructures de fusta.*

**Paraules clau:** *Unió encaixada, Estructura de fusta, Unions estructurals, Unió tradicional, Nus estructural.*

---

### **Abstract**

*Timber interlocking joints have historically been one of the most relevant solutions worldwide, until the advent of metal components in the structural field. Nowadays, in a context where the trend is towards a construction focused on sustainable development, this type of joint can once again play an important role. The following pages provide an overview of the different studies published in recent years on the typologies and calculation bases for timber-timber connections. This research will help to understand the structural behaviour of the joint and discuss not only its efficiency but also the application of new technologies in the assembly system in timber structures.*

**Key words:** *Interlocked joint, Timber structure, Structural joints, Traditional joint, Structural knot.*

## 1. Introducció

El camp estructural és una part fonamental de la construcció altament influenciat per el context arquitectònic de cada època, buscant sempre la solució més òptima als problemes i necessitats tecnològiques del moment. A dia d'avui, una de les problemàtiques més comentades arreu és la crisi energètica i el canvi climàtic. És per això que un canvi és necessari, i un punt de partida pot ser recuperar tècniques passades per tal de estudiar-les, avaluar-les, transforma-les i millorar-les.

El present estudi pretén realitzar una aproximació sobre l'estat actual de les unions encaixades de fusta per la seva possible aplicació en el context constrictiu futur com a per tal de reduir o substituir l'ús dels elements metàl·lics.

Tota investigació neix d'una inquietud. En aquest cas, sorgeix durant els estudis del GARQ i del meu propi interès sobre l'aplicació de la fusta en l'arquitectura i la seva versatilitat a l'hora de construir mitjançant geometries complexes.

L'objectiu principal d'aquest treball és aprofundir en diferents aspectes relacionats directament amb les unions encaixades tradicionals. Per fer-ho, es plantegen els següents objectius específics:

- i. Definir les diferents tipologies d'unió encaixada
- ii. Definir les metodologies de càlcul per determinar la rigidesa de l'encaix
- iii. Disseny i predimensionat d'un model real
- iv. Discussió i conclusions finals

La recerca bibliogràfica s'ha realitzat a través d'articles científics, bases de dades, tesis especialitzades en aquest àmbit i llibres relacionats amb aquest camp d'estudi. Es tracta d'un treball de recerca amb un caràcter teòric que pretén aproximar les idees principals que condueixen a uns coneixements generals sobre les propietats i possibles aplicacions dels encaixos en estructures de fusta.

## 2. Classificació dels tipus d'encaix

Les classificacions següents han agrupat les tipologies d'encaix referint-se a una característica particular. El fet de que un encaix es trobi en un grup concret no l'exclou d'altres grups que se li poguessin assimilar. Cada sistema de definicions ve motivada per el tema específic que s'estigui exposant.

Un exemple és quan es tracta de descriure un encaix en funció de la seva orientació. Hi ha diferents d'encaixos que s'han utilitzat de forma idèntica tant en aplicacions horitzontals com verticals. En aquesta situació caldria especificar el tema que s'està tractant ja que aquesta dada en si és poc significat.

En aquest apartat es definiran les tipologies bàsiques d'encaix amb les quals es poden generar la majoria d'unions en un sistema estructural.

Hi ha varies maneres en les quals dos peces de fusta poden ser unides. La més simple seria una unió per topall (Fig. 1), on els dos extrems de l'element es col·loquen un enfront de l'altre sense arribar a formar un encaix real.

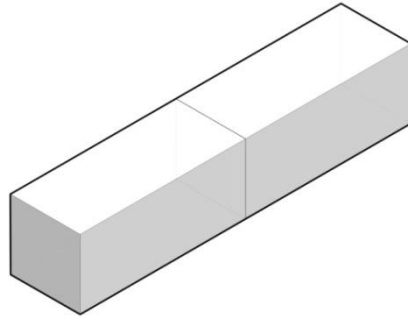
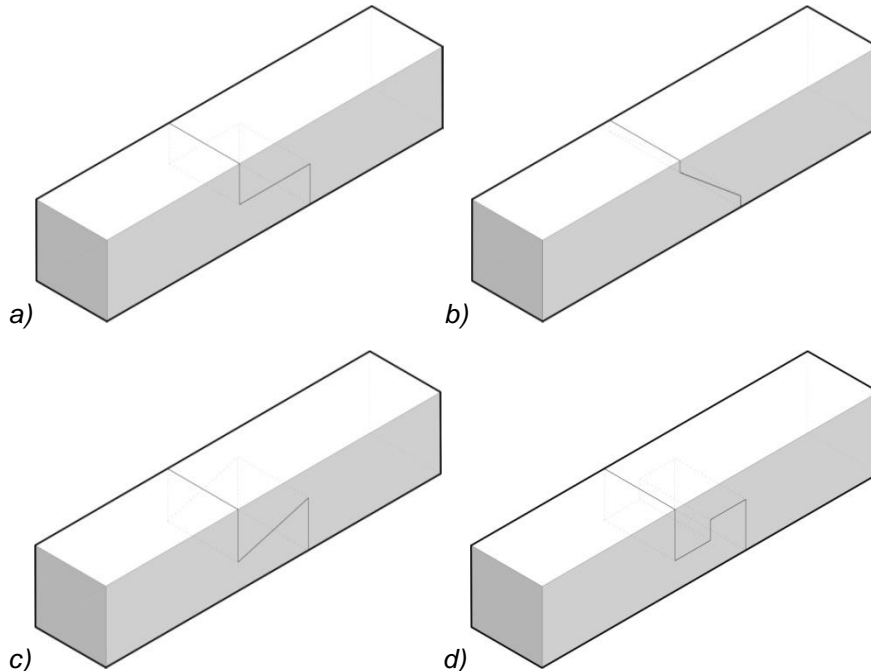


Fig. 1 Reinterpretació del model d'encaix per topall segons els estudis de Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

Els encaixos per topall no són gaire estables i necessiten almenys estar ancorats a un suport rígid. Una forma considerablement millor de la unió de vora a vora és la que proporcionen els taulells contraxapats de tipus encadellat amb l'encaix perpendicular a la veta dels taulells. L'encaix encadellat uneix els taulells solts en una sola superfície unificada.

La primera tipologia és el de les articulacions solapades i representen un grup bastant extens. Aquestes unions es caracteritzen per tenir un extrem d'un l'element Per sobre de l'altra. Dins d'aquesta classificació és comprenen algunes de les formes bàsiques com ara el solapament de tall rectangular (Fig. 2a) i el solapament de canto bisellat (Fig. 2b). El solapament amb bisell longitudinal (Fig. 2c) és una variació del solapament de tall rectangular, amb la diferència que el bisellat és més resistent en front esforços en el sentit longitudinal de l'element. Un altre tipus d'encaix solapat aplicable per resistir aquest tipus d'esforços és el solapament de tall rectangular amb rebaix (Fig. 2d). L'ús de banyes en el sentit longitudinal de l'encaix (Fig. 2e) preveu el desplaçament lateral de les dues peces.



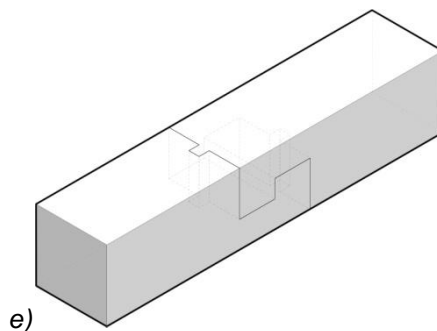


Fig. 2 Reinterpretació dels models d'encaix solapats segons els estudis de Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

L'encaix per solapament dentat (Fig. 3) es pot considerar com una variant especial de l'encaix per solapament de tall rectangular amb rebaix, amb la diferència que simplement no es troba tan enfonsat.

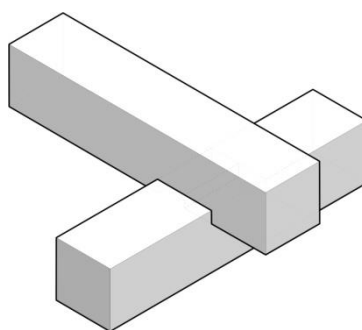


Fig. 3 Reinterpretació de la variació d'encaix dentat segons els estudis de Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

El següent grup és el dels encaixos d'espiga, que com en el cas anterior també forma un grup amb múltiples variacions. L'element que presenta l'espiga queda encaixat en una osca oberta o en un forat d'espiga (Fig. 4a) de l'altre element. En funció de les circumstàncies, l'espiga pot travessar completament l'osca o quedar embeguda dins la mateixa (Fig. 4b). A més a més, aquest encaix pot presentar diferents variacions per millorar-ne el rendiment; una variant inclou l'ús de clavilles per la resistència al tallant mentre altres incorporen cunyes per tancar bretxes entre l'osca i l'espiga.

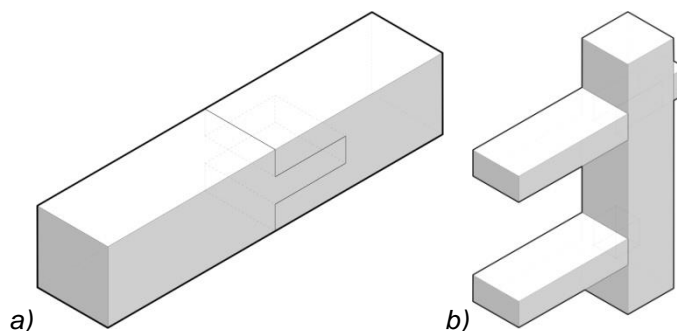


Fig. 4 Reinterpretació dels models d'encaix d'osca i espiga segons els estudis de Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

En els casos on dues peces estiguin sotmeses a un esforç en el sentit longitudinal és necessari prevenir-ne el desencaixament, ja que és el tipus de fallada més freqüent en les estructures que utilitzen aquest sistema. En aquest cas s'utilitza l'encaix d'espiga amb bisell (Fig. 5a). Si l'angle del bisell és tallat de forma massa aguda, l'espiga no pot prevenir-ne el desencaix; per altra banda si és massa obtús la peça és més susceptible al tallant. Una càrrega vertical

aplicada sobre l'espiga podria a vegades millorar la rigidesa del propi encaix. La part negativa és que aquest fet implica un augment de la massa suportada, fet que genera uns efectes d'inèrcia que fan que l'estructura sigui més susceptible a les càrregues dinàmiques. Per tal d'augmentar el rendiment de l'encaix quan és sotmès a esforços de flexió, es pot tallar l'encaix d'espiga bisellada per la meitat de manera que la unió de les dues parts es transformi en una unió mixta d'espiga i solapa (Fig. 5b).

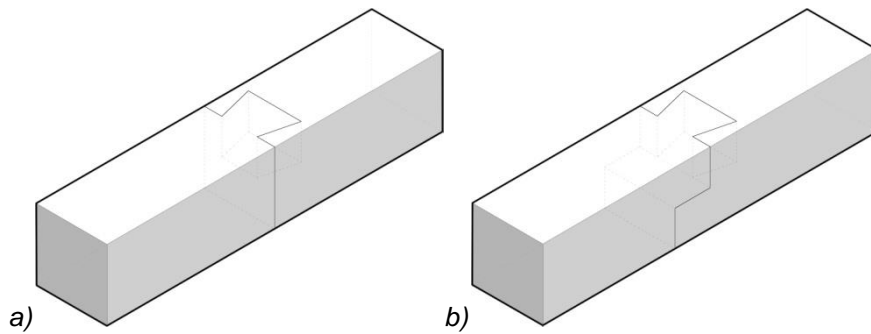


Fig. 5 Reinterpretació de les modificacions bisellades del model d'encaix d'osca i espiga segons Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

Una variant de l'encaix d'espiga bisellada poc comú a Europa però usualment utilitzada en parts de l'Àsia Oriental és el denominat encaix d'espiga de "coll d'oca" (Fig. 6a). A diferència de l'anterior, l'encaix de "coll d'oca" presenta una espiga de forma allargada, estreta en la part central i ampla i esbiaixada al la punta, donant-li una característica forma de fletxa. Usualment s'hi incorporen banyes/excrescències a l'extrem de l'element que presenta l'osca per evitar que el "coll d'oca" llisqui del seu ancoratge (Fig. 6b).

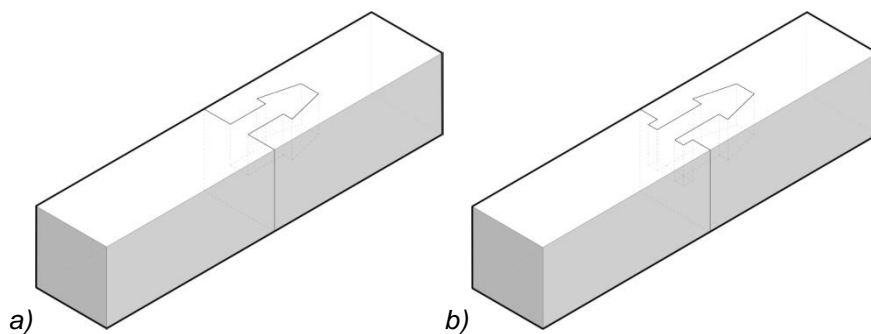


Fig. 6 Reinterpretació dels models d'encaix de coll d'oca segons els estudis de Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

La tercera tipologia és el dels encaixos amb forma obliqua. En aquests tipus d'unions, més presents en la construcció amb fusta a Europa, s'hi troben freqüentment les unions escalonades amb extrem oblic encaixat (Fig. 7a), on l'extrem bisellat d'un element queda recolzat al rebaix de l'altre element que li fa de topall. També és usual trobar l'articulació de boca d'ocell (Fig. 7b), on una petita espiga es recolza sobre l'osca d'un element horitzontal, o l'articulació d'abraçadora (Fig. 7c), on dos elements oblics empalmats mitjançant una espiga transmeten els esforços a un element vertical.

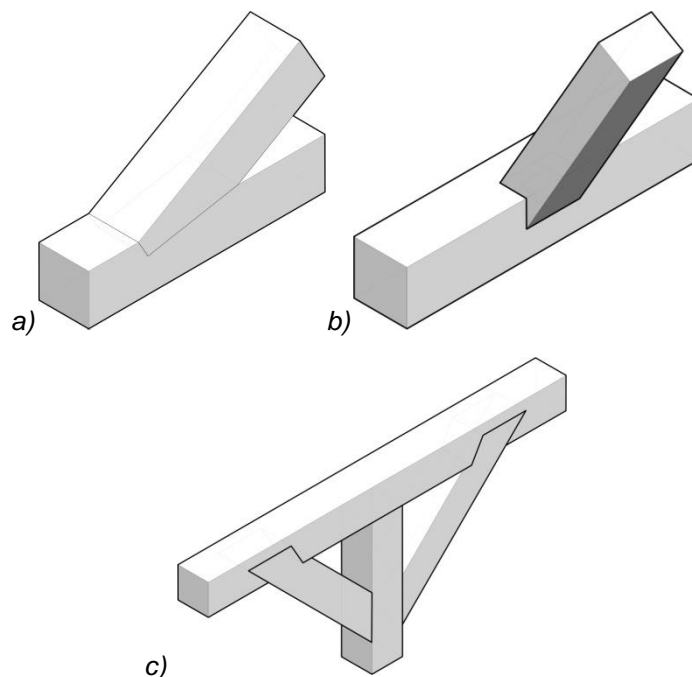


Fig. 7 Reinterpretació dels models d'encaix oblics segons els estudis de Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

Una manera alternativa per classificar els encaixos és a partir de la seva geometria. En aquest grup trobem tres tipologies diferents: els encaixos en L, els encaixos en T i els encaixos en X. En els travessers amb espiga encaixats a una osca oberta a la vora es poden considerar com la representació de les articulacions en L. Un element recolzat directament sobre una osca oberta, és a dir, un suport bifurcat, es una articulació de tipus T. La connexió entre un membre diagonal i un pilar és un exemple d'articulació de tipus X.

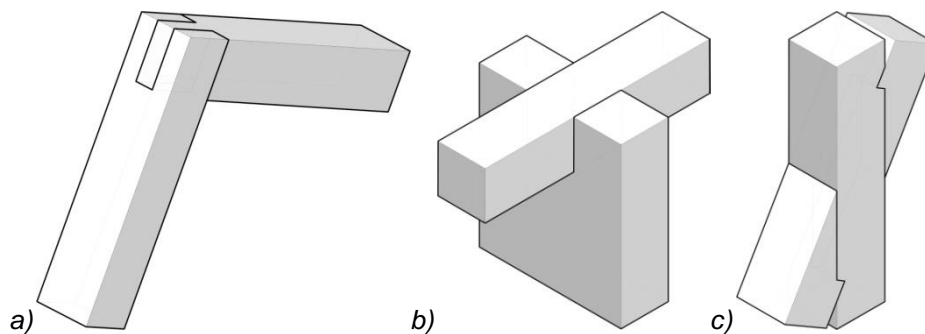


Fig. 8 Reinterpretació del model d'encaix en funció de la seva geometria segons els estudis de Klaus Zwerger 2012. Font pròpia.

A partir d'aquestes unions bàsiques es poden configurar encaixos més complexes combinant diferents geometries. Un exemple és el cas on s'han d'encaixar elements en tres eixos diferents. Les solucions que es poden aplicar poden variar segons les dimensions dels elements de l'estructura i no s'ha de seguir cap criteri específic per al seu disseny. Tanmateix, el manual d'encaixos de fusta en arquitectura tradicional japonesa de Torashichi Sumiyoshi i Gengo Mastui 1991 es descriuen solucions concretes que poden ser utilitzades com a referència.

### 3. Bases de càlcul

El mètode de càlcul descrit a continuació està específicament dissenyat per una unió d'osca i espiga, és a dir, per un element inserit a un altre. Aquesta unió és aplicada en articulacions tipus biga - pilar o biga - bigueta. Ha estat desenvolupat per Fang 2020 en base a articles d'investigació sobre bases de càlcul per unions de fusta.

Quan un element tipus biga encaixat dins d'un pilar es troba sotmès a càrrega, el conjunt de la unió presenta un desplaçament rotacional. Aquest fet provoca un estrès en els punts de contacte dels dos elements, comprimint dos punts de la biga. La unió presenta una rigidesa inicial en relació al moment i el desplaçament angular. A partir de cert punt, la rigidesa s'estova fins a una rigidesa plàstica, que succeeix quan l'aixafament de la fusta en el sentit perpendicular a la veta entra la zona de deformació plàstica.

Per tal de determinar el moment resistent causat per aquesta rotació de l'element s'utilitza la fórmula estàndard del moment flector  $M = \sum N \cdot a_i$ , on  $N$  és igual a la força resultant i  $a_i$  és el braç del moment flector. En aquest mètode de càlcul, causa de la influència del gir, l'expressió ve donada en funció de l'angle girat  $\theta$ :

$$M(\theta) = \sum N(\theta)a_i(\theta)$$

El càlcul de la força resultant és realitzat a partir de la Llei de Hooke, de tal manera que reescrivint-la les variables queden en funció dels volums comprimits de l'element:

$$N = \sigma A = \varepsilon EA = (\varepsilon E)A = \frac{V}{Z_0} E$$

De la mateixa manera que l'expressió del moment flector, les variables de la força resultant també es troben supeditades a l'angle de gir  $\theta$ , deixant l'expressió de la següent manera:

$$N(\theta) = \frac{V(\theta)}{Z(\theta)} E(\theta)$$

Les relacions establertes a partir d'aquest punt s'apliquen per un gir  $\theta$  entre 0 i  $\pi/2$  radians, mesurat des de d'un centre de rotació  $\otimes$  com es pot observar en la imatge següent.

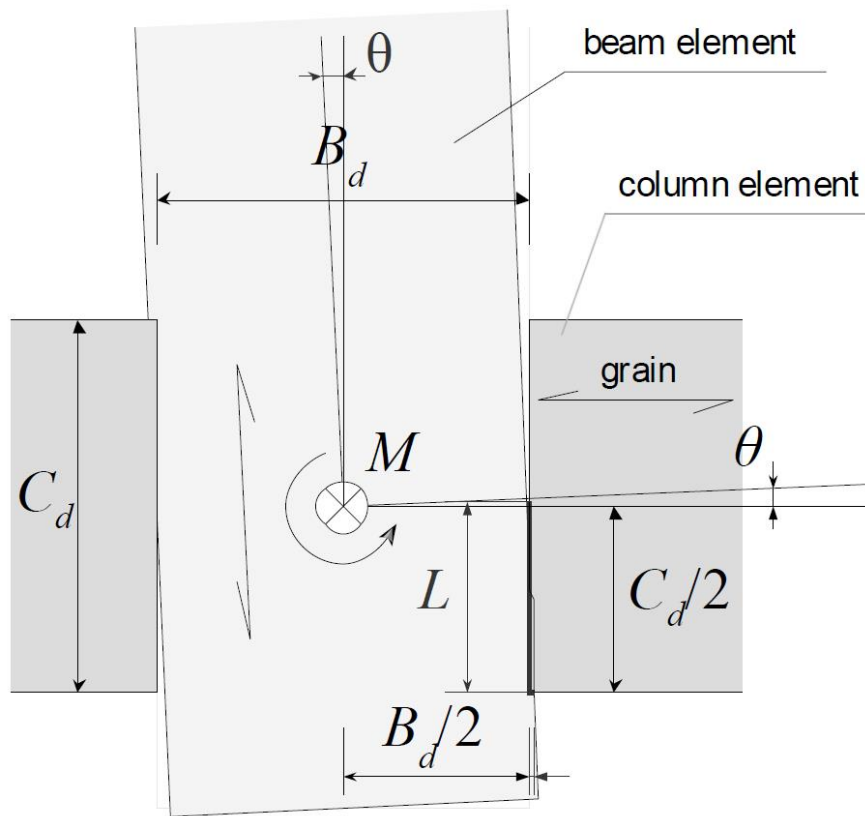


Fig. 9 Diagrama de longituds de càlcul per un encaix d'osca i espiga. Font Fang 2020.

$Z$  és equivalent al cantell útil que queda per sota del volum comprimit, expressat en funció de l'angle girat  $\theta$ :

$$Z(\theta) = B_d \cdot \cos \theta$$

$\Delta$  representa la profunditat d'encastament que es produeix a la vora de contacte directe i la compressió indirecta:

$$\Delta(\theta) = L(\theta) \cdot \sin \theta$$

La longitud  $L$  és igual a la longitud de la biga que experimenta l'encastament. Al principi aquest valor és la meitat de la profunditat del pilar  $C_d/2$ . A mida que l'angle girat  $\theta$  augmenta, també augmenta  $L$ :

$$L(\theta) = \frac{C_d/2}{\cos \theta}$$

$\Delta_y$  representa la profunditat de l'encastament en el punt de fluència, i  $\theta_y$  representa l'angle girat en el punt de fluència. A partir de la tensió de fluència  $\varepsilon_y$  del material perpendicular a la fibra,  $\Delta_y$  es pot calcular a partir de l'expressió:

$$\Delta_y = \varepsilon_y B_d$$

Igualant les equacions  $\Delta_y = \Delta(\theta)$ , podem determinar quin és l'angle girat en el punt de fluència amb la següent fórmula:



$$\theta_y = \tan^{-1} \left( \frac{\varepsilon_y \cdot B_d}{C_d/2} \right)$$

Un cop calculats els anteriors paràmetres es procedeix a calcular el volums comprimits de l'element. En aquest cas el volum s'obté multiplicant l'àrea en secció de la regió comprimida per l'amplada  $B_w$  de l'element comprimit, e.g. una biga o una bigueta.

És important distingir dues regions diferenciades en el diagrama de compressió. La primera és la regió comprimida per contacte directe entre els dos elements. Presenta una forma triangular i el volum de l'àrea es denomina  $V_d$ . La segona és la compressió indirecta causada en el límit de l'encaix. Aquest volum es denomina  $V_e$  i presenta la forma d'una corba exponencial. La longitud de la corba es descriu mitjançant la funció següent:

$$f(x) = \Delta e^{-\alpha x}$$

on  $\Delta$  és igual a la profunditat d'encastament en funció de  $\theta$  i el coeficient  $\alpha$  és pren com  $6,5/B_d$ . L'àrea d'aquesta regió és calcula integrant la fórmula anterior entre el valors 0, el límit de l'encaix; i  $L_c$  que pertany a la distància  $1,5B_d$ .

Arribats aquest punt cal distingir dues situacions en la que es pot trobar l'encastament, en situació elàstica o en situació plàstica. Diem que ens trobem en zona elàstica quan la profunditat d'encastament és inferior a o igual a la profunditat d'encastament en el punt de fluència ( $\Delta \leq \Delta_y$ ). Qualsevol profunditat superior a la del punt de fluència la considerem en zona plàstica ( $\Delta > \Delta_y$ ). En el diagrama de volum comprimit queda representat de la següent manera:

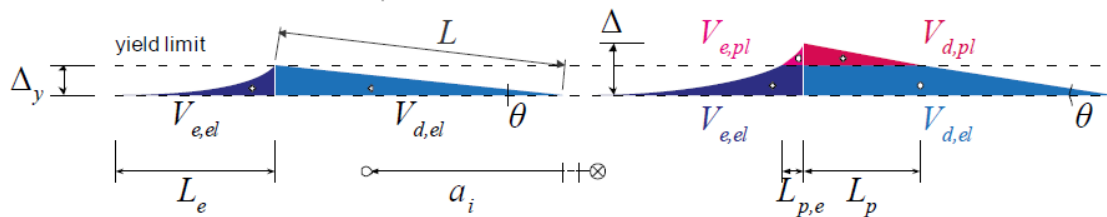


Fig. 10 Diagrama d'elements comprimits en zona elàstica (esquerra) i zona plàstica (dreta). Font Fang 2020.

Com es pot veure en el diagrama en el cas de la zona plàstica distingim quatre regions diferents (a diferència de la zona elàstica que tan sols en presenta dos) resultant en dues regions en contacte directe i dues regions en contacte indirecte. Per tal de diferenciar-les entre sí s'afegeix el subíndex *e*/per als volums en zona elàstica i *p*/per els volums en zona plàstica.

En el cas elàstic ( $\Delta \leq \Delta_y$ ) el procediment per el càlcul de la del moment flector seguiria de la següent forma. Primerament es determinen els dos volums comprimits:

$$V_{d,el}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta(\theta) \cdot L \cdot \cos \theta$$

$$V_{e,el}(\theta) = B_w \cdot \int_{x=0}^{L_c} f(\theta, x) dx$$

Posteriorment convertim els volums comprimits en forces de contacte resultants a partir de la relació que hem establert al principi del capítol:

$$N_{d,el}(\theta) = \frac{V_{d,el}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta)$$

$$N_{c,el}(\theta) = \frac{V_{c,el}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta)$$

És important destacar que la fusta és un material anisotròpic, per això per definir-ne la rigidesa, la orientació de les fibres és important. En un principi tenim un element que es comprimeix totalment perpendicular a la veta, però a mesura que l'angle girat  $\theta$  augmenta, la fibra de la fusta s'alinea més a la direcció de la compressió. Si coneixem el valor del mòdul de Young a  $0^\circ$  (paral·lel a la veta) i a  $90^\circ$  (perpendicular a la veta), podem deduir el mòdul de Young per un angle  $\beta$  segons la fórmula de Hankinson:

$$E(\theta) = \frac{E_0 \cdot E_{90}}{E_0 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + E_{90} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

Finalment, determinem el braç de moment per cada força resultant. El braç és equivalent a la distància que hi ha entre el centre de rotació de la unió i el centroide de cada volum comprimit. Per al càlcul de cada braç s'utilitzen les fórmules:

$$a_{d,el}(\theta) = \frac{2}{3}L(\theta) \cdot \cos \theta$$

$$a_{c,el}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,el}} \cdot \int_{x=0}^{L_c} x \cdot f(\theta, x) dx$$

Per el cas plàstic ( $\Delta > \Delta_y$ ) el procediment és el mateix, però cal recordar que aquesta situació presenta dues regions addicionals que s'han de tenir en compte i cal calcular-les de forma independent.

En primer lloc cal definir dues longituds necessàries per calcular els volums comprimits en la zona plàstica. Observant el diagrama de compressions podem observar que aquestes longituds són les que es situen en la posició 0 en l'eix x i en la posició  $\Delta_y$  en l'eix y, i interseccionen amb la recta / corba de les dues regions comprimides.

Les dues longituds es calculen mitjançant les expressions següents:

$$L_p(\theta) = \frac{C_d}{2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta_y}{\Delta(\theta)}\right)$$

$$L_{p,c} = f^{-1}(\Delta_y)$$

A partir d'aquestes longituds i com en el cas elàstic, podem determinar els volums comprimits. Per facilitar el càlcul el volum comprimit es pot dividir en dues parts, deixant una regió en forma rectangular i l'altra triangular (zona de contacte directe). Per la segona regió en la situació de la compressió indirecta, aquesta pren la forma de la corba exponencial.

Així doncs, per la zona de contacte directe tenim el volums:

$$V_{d,el,1}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta_y \cdot \left(L(\theta) \cdot \cos \theta - L_p(\theta)\right)$$

$$V_{d,el,2}(\theta) = B_w \cdot \Delta_y \cdot L_p(\theta)$$

$$V_{d,pl}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta(\theta) - \Delta_y) \cdot L_p(\theta)$$

I per la zona de contacte indirecte tenim:

$$V_{c,el,1}(\theta) = B_w \cdot L_{p,c} \cdot \Delta_y$$

$$V_{c,el,2}(\theta) = B_w \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} f(\theta, x) dx$$

$$V_{c,pl}(\theta) = B_w \cdot \int_0^{L_{p,c}} f(\theta, x) - \Delta_y dx$$

Seguidament, aplicant la relació relatada anteriorment  $N(\theta)=V(\theta)/Z(\theta) \cdot E(\theta)$ , trobem per cada volum la seva força resultant. No obstant en els volums comprimits en la zona plàstica és necessari aplicar un coeficient reductor en el mòdul de Young per tal de reflectir la rigidesa plàstica. S'estableix doncs un coeficient  $PR_{90}$  en el mòdul de Young en zona elàstica per tal d'obtenir el mòdul en zona plàstica. Per tant:

$$N_{d,el,i}(\theta) = \frac{V_{d,el,i}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta), \text{ per tot } i$$

$$N_{d,pl}(\theta) = \frac{V_{d,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta)$$

$$N_{c,el,i}(\theta) = \frac{V_{c,el,i}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta), \text{ per tot } i$$

$$N_{c,pl}(\theta) = \frac{V_{c,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta)$$

Per acabar es determinen el braços de moment, per contacte directe i compressió indirecta respectivament:

$$a_{d,el,1}(\theta) = \frac{2}{3} \left( \frac{C_d}{2} - L_p(\theta) \right)$$

$$a_{d,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{2}$$

$$a_{d,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{3}$$

$$a_{c,el,1}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{L_{p,c}}{2}$$

$$a_{c,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,el,2}} \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} x \cdot f(\theta, x) dx$$

$$a_{c,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,pl}} \cdot \int_0^{L_{p,c}} x \cdot (f(\theta, x) - \Delta_y) dx$$

Abans de realitzar el càlcul final del moment resistent, cal tenir en consideració una última força. La fricció entre els elements en contacte directe contribueix al moment experimentat en la unió. Aquesta força actua al llarg del element biga i sorgeix del resultat de multiplicar el coeficient de fricció estàtic  $\mu$  del material per la força resultant del volum en contacte directe.

$$F_f(\theta) = \mu \cdot \sum_{i \in d} N_{d,el}(\theta)$$

Remarcant que les forces d'encastament indirecte no tenen cap contribució a la força de fregament.

El braç de moment relatiu a la força de fregament es denomina  $a_f$  i és equivalent a la distància perpendicular entre les forces de fregament. En aquest cas aquesta longitud és igual a la profunditat de l'element biga:

$$a_f = B_d$$

Amb totes les forces resultants  $N$  calculades i el seus respectius braços de moment  $a$  establerts, s'estableix la següent expressió per determinar la relació entre l'angle girat i el moment resistit:

$$M(\theta) = \sum_{i \in (d \cup c \cup f)} N_i(\theta) \cdot a_i(\theta)$$

on  $d$  representa el contacte directe,  $c$  representa l'encastament adicional indirecte al llarg de l'extrem de la biga continua, y  $f$  representa la força de fregament.

Dependent de si es supera i elàstic on no, es pot desglossar l'expressió anterior i desglossar-la en dues equacions diferents en funció de en quina situació es trobi la unió. Així doncs s'estableix que:

$$M(\theta) = \begin{cases} M_{el}(\theta) & \text{quan } \theta \leq \theta_y \\ M_{pl}(\theta) & \text{quan } \theta > \theta_y \end{cases}$$

Si la rotació es troba en la regió elàstica ( $\theta < \theta_y$ ), la relació es pot expressar com:

$$M_{el}(\theta) = 2[N_{d,el}(\theta) \cdot a_{d,el}(\theta)] + 2[N_{c,el}(\theta) \cdot a_{c,el}(\theta)] + \mu N_{d,el}(\theta) \cdot B_d$$

Si es troba en la regió plàstica ( $\theta \geq \theta_y$ ), la relació en aquest cas és:

$$M_{pl}(\theta) = 2[N_{d,el}(\theta) \cdot a_{d,el}(\theta) + N_{d,pl}(\theta) \cdot a_{d,pl}(\theta)] + 2[N_{c,el}(\theta) \cdot a_{c,el}(\theta) + N_{c,pl}(\theta) \cdot a_{c,pl}(\theta)] + \mu [N_{d,el}(\theta) \cdot B_d + N_{d,pl}(\theta) \cdot B_d]$$

Al ser una unió amb un forat d'entrada i sortida el gir causa, per simetria, que l'element girat pateixi una compressió per contacte directe a les dues vores de forat. És per aquest motiu que en el moment resistit de tot el conjunt el moment de les forces resultants es contempli dues vegades.

## 4. Construcció del model

### 4.1 Disseny del model i predimensionat

Per el cas pràctic d'aquest treball s'ha escollit el model d'unió de solapat amb rebaix oblic i passador.

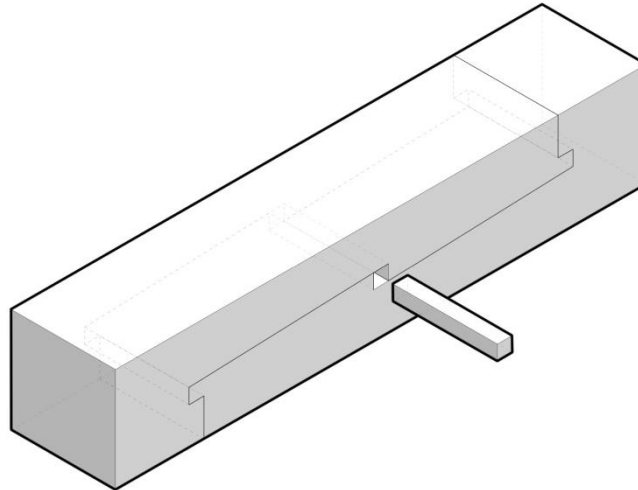


Fig. 11 Representació 3D del model d'encaix solapat oblic amb passador definit en el manual de Torashichi Sumiyoshi i Gengo Mastui 1991. Font pròpia.

Aquest encaix pot utilitzar-se per unir soleres, bigues o biguetes. Els dos extrems de les unions són idèntics i se'n distingeixen la fusta superior i la fusta inferior. Les dues osques que formen la solapa s'acoblen per poder inserir el passador horitzontal. L'encaix s'uneix lliscant la cara interna de la fusta superior sobre la cara interna de la fusta inferior, mantenint les superfícies de les cares obliqües en contacte estret. Per completar aquest encaix, la fusta superior s'allunya de la inferior al llarg de l'eix longitudinal. Per últim, s'insereix un únic passador entre els rebaixos de cada extrem, encaixant les dues superfícies de la unió.

A diferència d'altres encaixos solapats amb rebaix oblic, no es requereix cap desplaçament axial per muntar aquest encaix, per aquest motiu és especialment adequat per instal·lar o substituir una biga entre suports fixes o una solera entre punts ancorats.

Per models d'unió similars es va realitzar un assaig de tracció en una proveta de secció quadrada de 105 mm amb fusta de pi negre. Es va obtenir un augment de la resistència major respecte a l'encaix de coll d'oca. La unió va fallar a 4000 kg per trencament en un dels plans d'adhesió rebaixats.

El model realitzat s'ha fet seguint les proporcions de l'encaix descrit en el manual de Torashichi Sumiyoshi i Gengo Mastui 1991 amb una bigueta de fusta de pi de 70 x 70 mm. En l'exemple detallat del manual la mostra de l'element té un secció de 105 x105 mm. Establint la relació entre les mides del model a executar i el model d'exemple resulta en una proporció de 2/3. Les mides detallades del model es troben determinades en el següent croquis. L'encaix anirà inserit en una biga de fusta de pi negre de cantell 100 x 200 mm. Per al càlcul teòric de la rigidesa de la proveta s'han agafat de referència els valors característics establertes en la norma europea EN 338, particularment els valors per una fusta de tipus conífera de classe resistent C20.

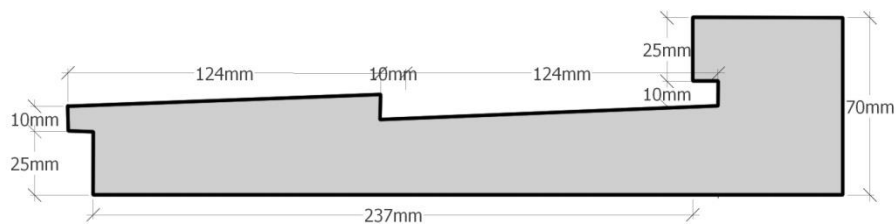


Fig. 12 Secció acotada de l'encaix del model elaborat. Font pròpia.

Aplicant el mètode de Fang 2020 amb les dimensions i propietats mecàniques establertes anteriorment, s'ha calculat el moment resistent del model per quatre situacions diferents:

- i. Per un angle  $\theta=0,57^\circ$  (límit elàstic), amb un moment resistent igual a **16,73 mKn**.
- ii. Per un angle  $\theta=1^\circ$ , amb un moment resistent igual a **24,18 mKn**.
- iii. Per un angle  $\theta=2^\circ$ , amb un moment resistent igual a **31,28 mKn**.
- iv. Per un angle  $\theta=5^\circ$ , amb un moment resistent igual a **37,59 mKn**.

Per al càlcul de la rigidesa rotacional s'ha considerat l'encaix solapat com si fos continu. Les pròpies compressions que es porten a terme entre les solapes les considerem nul·les en aquest càlcul. El moment resistent en cada cas representa a tot el conjunt i és equivalent a la suma de moment a les dues vores de l'osca. Donat que el model realitzat és simètric, el moment resistent a cada vora és la meitat del valor total de la rigidesa rotacional final.

Els processos de càlcul seguits per determinar el moment resistent es desenvolupen a l'apartat final Annex de càlcul.

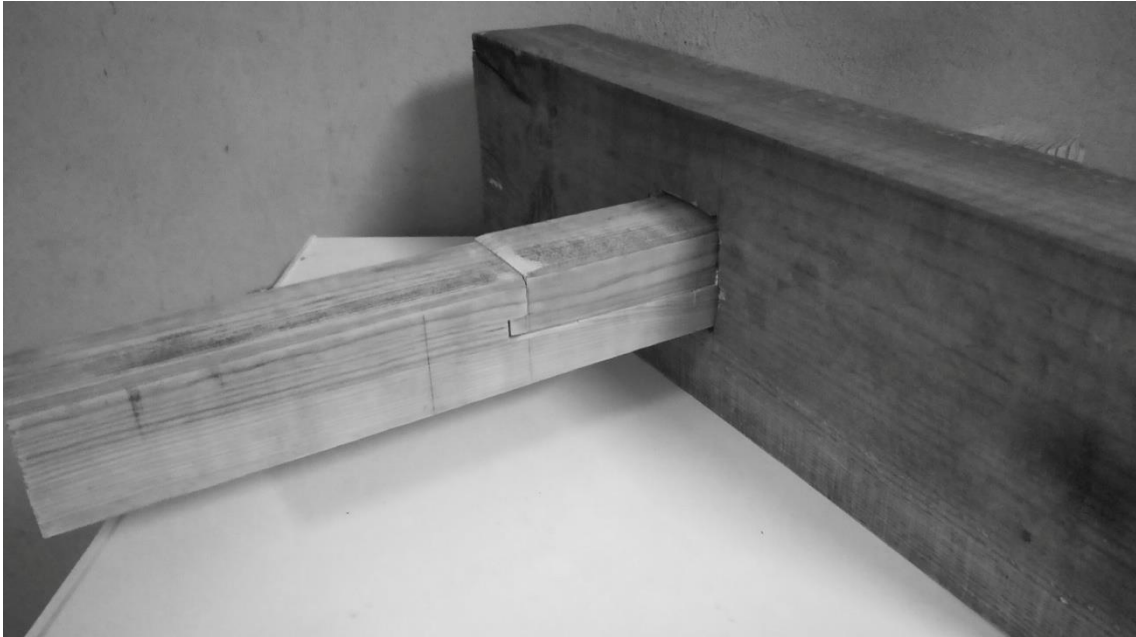
#### 4.2 Avaluació del procés d'execució

Aquest model ha estat executat mitjançant mètodes manuals i mecànics. L'encaix solapat s'ha fet únicament amb mitjans manuals, facilitant el treball es zones més delicades i mantenint la integritat del material sense generar-li fissures involuntàries. Per altra banda, aquest sistema requereix més esforç segons l'eix que s'estigui treballant en el moment, i això dificulta aconseguir un acabat homogeni en determinades superfícies. Si l'acabat de les superfícies no és suficientment polit, els desnivells resultants generen tensions de fregament que impossibiliten l'encaix.



Fig. 13 Elements horitzontals units mitjançant l'encaix solapat oblic amb passador. Font pròpia.

La segona part de l'encaix s'ha fet utilitzant mètodes mecànics i manuals. Inicialment s'ha perforat la forma de l'osca amb una broca especial per fusta i seguidament s'ha llimat per ajustar el forat a la mida de la peça inserida. Amb el mètode de la broca s'ha optimitzat significativament el temps de treball. Per altra banda, l'abradió generada entre les superfícies de contacte entre la broca i la fusta esquitlla fàcilment la fusta i repercuteix en les fibres de l'element en forma de petites fissures. Inicialment aquestes esquerdes són poc significatives, però amb el mínim esforç (com per exemple a l'hora d'encaixar l'osca amb l'espiga) poden derivar a danys més greus.



*Fig. 14 Unió solapada inserida dins biga de cantell formant un encaix d'osca i espiga. Font pròpia.*

## 5. Conclusions

El present treball ha tractat d'oferir els aspectes claus de les unions encaixades tradicionals de fusta en el camp de les estructures.

Després de l'anàlisi realitzat sobre les tipologies bàsiques publicades per Klaus Zwerger, cal ressaltar la gran varietat d'opcions que poden ser utilitzades per resoldre la unió de dos o més elements. El fet de que dues tipologies diferents poden ser combinades en un sol encaix dificulta que es pugui establir una solució general que pugui ser aplicable a càlculs i sistemes més industrialitzats. Per altra banda permet elaborar i resoldre geometries més complexes i sortir de la típica construcció mitjançant pòrtics.

El grau de complexitat de l'encaix també es veu reflectit en el càlcul del seu moment resistent. Per el que es pot veure en les bases de càlcul un encaix simple entre dos elements requereix un anàlisi en dues situacions diferents, la elàstica i la plàstica, i cadascuna d'elles requereix el càlcul de múltiples variables. Això endarrereix el dimensionament de tota l'estructura d'un edifici i fa pràcticament inviable analitzar un encaix de tres o més elements.

Pel que fa al procés d'elaboració del model els dos aspectes més importants són la qualitat dels materials i el temps d'execució, trobant-se les dues relacionades entre sí. La fusta en sí és un material fàcil de treballar, però a causa del seu caràcter anisotròpic i la forma de certs tipus d'encaix causa que el procés sigui més lent i curós. L'ús d'eines elèctriques agilitza el procés

però sol ser un tipus de treball més brusc. i fàcilment malmeten el material, derivant usualment en patologies com fissures i trencaments.

Al llarg d'aquesta recerca i en les diferents fonts consultades s'han pogut observar algunes limitacions o mancances que es presenten com a oportunitats per seguir investigant i desenvolupant aquesta línia de treball. Amb aquesta visió general sobre les unions encaixades es pot observar que hi ha factors determinants perquè aquesta sistema guanyi pes dins la indústria de la construcció. Futures línies de recerca per incentivar l'ús de les unions encaixades poden ser:

- i. Desenvolupament de models estàndard aplicables al disseny industrial
- ii. Optimització dels models teòrics per agilitzar el procés de predimensionat
- iii. Elaboració d'encaixos amb sistemes de doll d'aigua a través de control numèric
- iv. Recerca de materials per realitzar encaixos amb impressora 3D
- v. Recull d'assajos de càrrega de diferents tipologies d'encaix

## 6. Bibliografia

Fang, Demi L. 2020. «Timber Joinery in Modern Construction: Mechanical Behavior of Wood-Wood Connections».

Guardia, Patxi, Jesús Caballero, i M<sup>a</sup> José Barriola. 2022. «Manual Técnico de Formación Para La Caracterización de Madera de Uso Estructural». [https://Normadera.Tknika.Eus/Inicio\\_tknikamadera.html](https://Normadera.Tknika.Eus/Inicio_tknikamadera.html). setembre 2022.

Klaus Zwerger. 2012. *Wood and Wood Joints: Building Traditions of Europe, Japan and China*. Second Edition. Birkhauser.

Torashichi Sumiyoshi, i Gengo Mastui. 1991. *Wood Joints in Classical Japanese Architecture*. Kajima Institute Publishing.

## 7. Annex de càlcul

Codi	Descripció	Dimensió
B <sub>d</sub>	Cantell de la biga	70 mm
B <sub>w</sub>	Ample de la biga	70 mm
C <sub>d</sub>	Cantell del pilar	100 mm
C <sub>w</sub>	Ample del pilar	200 mm
E <sub>0</sub>	Mòdul de Young paral·lel a la fibra	9.500 N/mm <sup>2</sup>
E <sub>90</sub>	Mòdul de Young perpendicular a la fibra	320 N/mm <sup>2</sup>
ε <sub>y</sub>	Tensió de fluència	0,0072

Taula 1 Valors característics per al càlcul teòric del model. Valors del mòdul resistent segons norma EN 338. Font Guardia, Caballero, i Barriola 2022.



**Rigidesa rotacional en el límit de la regió elàstica:**

Angle girat en el punt de fluència:

$$\theta_y = \tan^{-1} \left( \frac{\varepsilon_y \cdot B_d}{C_d/2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{0,0072 \cdot 70}{100/2} \right) = 0,01 \text{ rad} = 0,57^\circ$$

Cantell útil sota volum comprimit

$$Z(\theta) = B_d \cdot \cos \theta = 70 \cdot \cos 0,01 = 69,9965 \text{ mm}$$

Longitud d'encastament

$$L(\theta) = \frac{C_d/2}{\cos \theta} = \frac{100/2}{\cos 0,01} = 50,0025 \text{ mm}$$

Profunditat d'encastament:

$$\Delta(\theta) = L(\theta) \cdot \sin \theta = 50,0025 \cdot \sin 0,01 = 0,5 \text{ mm} = \Delta_y$$

Volums comprimits en la regió elàstica:

$$V_{d,el}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta(\theta) \cdot L \cdot \cos \theta = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 50 \cdot \cos 0,01 = 874,96 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,el}(\theta) = B_w \cdot \int_{x=0}^{L_c} f(\theta, x) dx = 70 \cdot 5,376 = 376,32 \text{ mm}^3$$

Mòdul resistent en relació a l'angle girat:

$$E(\theta) = \frac{E_0 \cdot E_{90}}{E_0 \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) + E_{90} \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)}$$

$$E(\theta) = \frac{9.500 \cdot 320}{9.500 \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - 0,01 \right) + 320 \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - 0,01 \right)} = 9.472,83 \text{ N/mm}^2$$

Càlcul de les forces resultants:

$$N_{d,el}(\theta) = \frac{V_{d,el}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{874,96}{69,9965} \cdot 9472,83 = 118.410,88 \text{ N}$$

$$N_{c,el}(\theta) = \frac{V_{c,el}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{376,32}{69,9965} \cdot 9472,83 = 50.928,48 \text{ N}$$

Càlcul del braç per cada força resultant:

$$\alpha_{d,el}(\theta) = \frac{2}{3} L(\theta) \cdot \cos \theta = \frac{2}{3} 50,0025 \cdot \cos 0,01 = 33,34 \text{ mm}$$

$$a_{c,el}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,el}} \cdot \int_{x=0}^{L_c} x \cdot f(\theta, x) dx = \frac{100}{2} + \frac{1}{376,32} \cdot 57,775 = 50,15 \text{ mm}$$

Càlcul de la rigidesa rotacional en la regió elàstica:

$$M_{el}(\theta) = 2[N_{d,el}(\theta) \cdot a_{d,el}(\theta)] + 2[N_{c,el}(\theta) \cdot a_{d,el}(\theta)] + \mu N_{d,el}(\theta) \cdot B_d$$

$$M_{el}(\theta) = 2[118,41 \cdot 0,03334] + 2[50,93 \cdot 0,05015] + 0,45 \cdot 118,41 \cdot 0,07 = 16,73 \text{ mkN}$$

**Rigidesa rotacional per una rotació de 1°:**

Longitud entre regions plàstiques i elàstiques dels volums comprimits:

$$L_p(\theta) = \frac{C_d}{2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta_y}{\Delta(\theta)}\right) = \frac{100}{2} \cdot \left(1 - \frac{0,5}{0,875}\right) = 21,43 \text{ mm}$$

$L_{p,c}$ , segons intersecció entre gràfiques és aproximadament **6,02 mm**.

Volums comprimits en la regió elasto-plàstica:

$$V_{d,el,1}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta_y \cdot (L(\theta) \cdot \cos \theta - L_p(\theta))$$

$$V_{d,el,1}(\theta) = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot (50,00766 \cdot \cos 0,0175 - 21,43) = 499,975 \text{ mm}^3$$

$$V_{d,el,2}(\theta) = B_w \cdot \Delta_y \cdot L_p(\theta) = 70 \cdot 0,5 \cdot 21,43 = 750,05 \text{ mm}^3$$

$$V_{d,pl}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta(\theta) - \Delta_y) \cdot L_p(\theta) = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,875 - 0,5) \cdot 21,43 = 281,27 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,el,1}(\theta) = B_w \cdot L_{p,c} \cdot \Delta_y = 70 \cdot 6,02 \cdot 0,5 = 210,7 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,el,2}(\theta) = B_w \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} f(\theta, x) dx = 70 \cdot 5,375 = 376,25 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,pl}(\theta) = B_w \cdot \int_0^{L_{p,c}} f(\theta, x) - \Delta_y dx = 70 \cdot 1,024 = 71,68 \text{ mm}^3$$

Càlcul de les forces resultants:

$$N_{d,el,1}(\theta) = \frac{V_{d,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{499,975}{69,9893} \cdot 9417,27 = 67.273,13 \text{ N}$$

$$N_{d,el,2}(\theta) = \frac{V_{d,el,2}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{750,05}{69,9893} \cdot 9417,27 = 100.921,47 \text{ N}$$

$$N_{d,pl}(\theta) = \frac{V_{d,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta) = \frac{281,27}{69,9893} \cdot 0,07 \cdot 9417,27 = 2.649,2 \text{ N}$$

$$N_{c,el,1}(\theta) = \frac{V_{c,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{210,7}{69,9893} \cdot 9417,27 = 28.350,32 \text{ N}$$

$$N_{c,el,2}(\theta) = \frac{V_{c,el,2}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{376,25}{69,9893} \cdot 9417,27 = 50.625,56 \text{ N}$$

$$N_{c,pl}(\theta) = \frac{V_{c,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta) = \frac{71,68}{69,9893} \cdot 0,07 \cdot 9417,27 = 675,13 \text{ N}$$

Càlcul del braç per cada força resultant:

$$a_{d,el,1}(\theta) = \frac{2}{3} \left( \frac{C_d}{2} - L_p(\theta) \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{100}{2} - 21,43 \right) = 19,05 \text{ mm}$$

$$a_{d,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{2} = \frac{100}{2} - \frac{21,43}{2} = 39,285 \text{ mm}$$

$$a_{d,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{3} = \frac{100}{2} - \frac{21,43}{3} = 42,86 \text{ mm}$$

$$a_{c,el,1}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{L_{p,c}}{2} = \frac{100}{2} + \frac{6,02}{2} = 53,01 \text{ mm}$$

$$a_{c,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,el,2}} \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} x \cdot f(\theta, x) dx = \frac{100}{2} + \frac{1}{376,25} \cdot 90,09 = 50,24 \text{ mm}$$

$$a_{c,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,pl}} \cdot \int_0^{L_{p,c}} x \cdot (f(\theta, x) - \Delta_y) dx = \frac{100}{2} + \frac{1}{71,68} \cdot 1,95 = 50,03 \text{ mm}$$

Càlcul de la rigidesa rotacional en zona plàstica per  $\theta = 1^\circ$

$$M_{pl}(\theta) = 2[N_{d,el}(\theta) \cdot a_{d,el}(\theta) + N_{d,pl}(\theta) \cdot a_{d,pl}(\theta)] + 2[N_{c,el}(\theta) \cdot a_{c,el}(\theta) + N_{c,pl}(\theta) \cdot a_{c,pl}(\theta)] \\ + \mu[N_{d,el}(\theta) \cdot B_d + N_{d,pl}(\theta) \cdot B_d]$$

$$M_{pl}(\theta) = 2[67,27 \cdot 0,019 + 100,92 \cdot 0,039 + 2,65 \cdot 0,043] \\ + 2[28,35 \cdot 0,053 + 50,63 \cdot 0,05 + 0,675 \cdot 0,05] \\ + 0,45[(67,27 + 100,92) \cdot 0,07 + 2,67 \cdot 0,07] = 10,66 + 8,14 + 5,38 \\ = 24,18 \text{ mkN}$$

**Rigidesa rotacional per una rotació de  $2^\circ$ :**

Longitud entre regions plàstiques i elàstiques dels volums comprimits:

$$L_p(\theta) = \frac{C_d}{2} \cdot \left( 1 - \frac{\Delta_y}{\Delta(\theta)} \right) = \frac{100}{2} \cdot \left( 1 - \frac{0,5}{1,75} \right) = 35,71 \text{ mm}$$

$L_{p,c}$ , segons intersecció entre gràfiques és aproximadament **13,47 mm**.

Volums comprimits en la regió elasto-plàstica:

$$V_{d,el,1}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta_y \cdot (L(\theta) \cdot \cos \theta - L_p(\theta))$$

$$V_{d,el,1}(\theta) = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot (50,0306 \cdot \cos 0,035 - 35,71) = 250,074 \text{ mm}^3$$

$$V_{d,el,2}(\theta) = B_w \cdot \Delta_y \cdot L_p(\theta) = 70 \cdot 0,5 \cdot 35,71 = 1.249,85 \text{ mm}^3$$

$$V_{d,pl}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta(\theta) - \Delta_y) \cdot L_p(\theta) = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,75 - 0,5) \cdot 35,71 = 1.562,31 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,el,1}(\theta) = B_w \cdot L_{p,c} \cdot \Delta_y = 70 \cdot 13,47 \cdot 0,5 = 471,45 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,el,2}(\theta) = B_w \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} f(\theta, x) dx = 70 \cdot 5,38 = 376,6 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,pl}(\theta) = B_w \cdot \int_0^{L_{p,c}} f(\theta, x) - \Delta_y dx = 70 \cdot 6,71 = 469,7 \text{ mm}^3$$

Càlcul de les forces resultants:

$$N_{d,el,1}(\theta) = \frac{V_{d,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{250,074}{69,9571} \cdot 9.177,61 = 32.806,99 \text{ N}$$

$$N_{d,el,2}(\theta) = \frac{V_{d,el,2}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{1.249,85}{69,9571} \cdot 9.177,61 = 163.966,72 \text{ N}$$

$$N_{d,pl}(\theta) = \frac{V_{d,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta) = \frac{1.562,31}{69,9571} \cdot 0,07 \cdot 9.177,61 = 14.347,07 \text{ N}$$

$$N_{c,el,1}(\theta) = \frac{V_{c,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{471,45}{69,9571} \cdot 9.177,61 = 61.849,11 \text{ N}$$

$$N_{c,el,2}(\theta) = \frac{V_{c,el,2}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{376,6}{69,9571} \cdot 9.177,61 = 49.405,82 \text{ N}$$

$$N_{c,pl}(\theta) = \frac{V_{c,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta) = \frac{469,7}{69,9571} \cdot 0,07 \cdot 9.177,61 = 4.313,37 \text{ N}$$

Càlcul del braç per cada força resultant:

$$a_{d,el,1}(\theta) = \frac{2}{3} \left( \frac{C_d}{2} - L_p(\theta) \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{100}{2} - 35,71 \right) = 9,53 \text{ mm}$$

$$a_{d,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{2} = \frac{100}{2} - \frac{35,71}{2} = 32,145 \text{ mm}$$

$$a_{d,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{3} = \frac{100}{2} - \frac{35,71}{3} = 38,10 \text{ mm}$$

$$a_{c,el,1}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{L_{p,c}}{2} = \frac{100}{2} + \frac{13,47}{2} = 56,73 \text{ mm}$$

$$a_{c,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,el,2}} \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} x \cdot f(\theta, x) dx = \frac{100}{2} + \frac{1}{376,6} \cdot 130,11 = 50,35 \text{ mm}$$

$$a_{c,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,pl}} \cdot \int_0^{L_{p,c}} x \cdot (f(\theta, x) - \Delta_y) dx = \frac{100}{2} + \frac{1}{469,7} \cdot 26,74 = 50,06 \text{ mm}$$

Càlcul de la rigidesa rotacional en zona plàstica per  $\theta = 2^\circ$

$$M_{pl}(\theta) = 2[N_{d,el}(\theta) \cdot a_{d,el}(\theta) + N_{d,pl}(\theta) \cdot a_{d,pl}(\theta)] + 2[N_{c,el}(\theta) \cdot a_{c,el}(\theta) + N_{c,pl}(\theta) \cdot a_{c,pl}(\theta)] \\ + \mu[N_{d,el}(\theta) \cdot B_d + N_{d,pl}(\theta) \cdot B_d]$$

$$M_{pl}(\theta) = 2[32,8 \cdot 0,0095 + 163,97 \cdot 0,032 + 14,35 \cdot 0,038] \\ + 2[61,85 \cdot 0,057 + 49,41 \cdot 0,05 + 4,3 \cdot 0,05] \\ + 0,45[(32,8 + 163,97) \cdot 0,07 + 14,35 \cdot 0,07] = 12,21 + 12,42 + 6,65 \\ = 31,28 \text{ mkN}$$

### Rigidesa rotacional per una rotació de $5^\circ$ :

Longitud entre regions plàstiques i elàstiques dels volums comprimits:

$$L_p(\theta) = \frac{C_d}{2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta_y}{\Delta(\theta)}\right) = \frac{100}{2} \cdot \left(1 - \frac{0,5}{4,36}\right) = 44,27 \text{ mm}$$

$L_{p,c}$ , segons intersecció entre gràfiques és aproximadament **23,29 mm**.

Volums comprimits en la regió elasto-plàstica:

$$V_{d,el,1}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta_y \cdot (L(\theta) \cdot \cos \theta - L_p(\theta))$$

$$V_{d,el,1}(\theta) = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot (50,19 \cdot \cos 0,087 - 44,27) = 100,275 \text{ mm}^3$$

$$V_{d,el,2}(\theta) = B_w \cdot \Delta_y \cdot L_p(\theta) = 70 \cdot 0,5 \cdot 44,27 = 1.549,45 \text{ mm}^3$$

$$V_{d,pl}(\theta) = B_w \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta(\theta) - \Delta_y) \cdot L_p(\theta) = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4,36 - 0,5) \cdot 44,27 = 5.980,88 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,el,1}(\theta) = B_w \cdot L_{p,c} \cdot \Delta_y = 70 \cdot 23,29 \cdot 0,5 = 815,15 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,el,2}(\theta) = B_w \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} f(\theta, x) dx = 70 \cdot 5,37 = 375,9 \text{ mm}^3$$

$$V_{c,pl}(\theta) = B_w \cdot \int_0^{L_{p,c}} f(\theta, x) - \Delta_y dx = 70 \cdot 29,86 = 2.090,2 \text{ mm}^3$$

Càlcul de les forces resultants:

$$N_{d,el,1}(\theta) = \frac{V_{d,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{100,275}{69,7352} \cdot 7.808,72 = 11.228,47 \text{ N}$$

$$N_{d,el,2}(\theta) = \frac{V_{d,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{1.549,45}{69,7352} \cdot 7.808,72 = 173.502,35 \text{ N}$$

$$N_{d,pl}(\theta) = \frac{V_{d,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta) = \frac{5.980,88}{69,7352} \cdot 0,07 \cdot 7.808,72 = 46.880,36 \text{ N}$$

$$N_{c,el,1}(\theta) = \frac{V_{c,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{815,15}{69,7352} \cdot 7.808,72 = 91.277,84 \text{ N}$$

$$N_{c,el,2}(\theta) = \frac{V_{c,el,1}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot E(\theta) = \frac{375,9}{69,7352} \cdot 7.808,72 = 42.092,05 \text{ N}$$

$$N_{c,pl}(\theta) = \frac{V_{c,pl}(\theta)}{Z(\theta)} \cdot PR_{90} \cdot E(\theta) = \frac{2.090,2}{69,7352} \cdot 0,07 \cdot 7.808,72 = 16.383,767 \text{ N}$$

Càlcul del braç per cada força resultant:

$$a_{d,el,1}(\theta) = \frac{2}{3} \left( \frac{C_d}{2} - L_p(\theta) \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{100}{2} - 44,27 \right) = 3,82 \text{ mm}$$

$$a_{d,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{2} = \frac{100}{2} - \frac{44,27}{2} = 27,87 \text{ mm}$$

$$a_{d,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} - \frac{L_p(\theta)}{3} = \frac{100}{2} - \frac{44,27}{3} = 35,24 \text{ mm}$$

$$a_{c,el,1}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{L_{p,c}}{2} = \frac{100}{2} + \frac{23,29}{2} = 61,6 \text{ mm}$$

$$a_{c,el,2}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,el,2}} \cdot \int_{L_{p,c}}^{L_c} x \cdot f(\theta, x) dx = \frac{100}{2} + \frac{1}{375,9} \cdot 182,65 = 50,49 \text{ mm}$$

$$a_{c,pl}(\theta) = \frac{C_d}{2} + \frac{1}{V_{c,pl}} \cdot \int_0^{L_{p,c}} x \cdot (f(\theta, x) - \Delta_y) dx = \frac{100}{2} + \frac{1}{2.090,2} \cdot 185,54 = 50,09 \text{ mm}$$

Càlcul de la rigidesa rotacional en zona plàstica per  $\theta = 5^\circ$

$$M_{pl}(\theta) = 2[N_{d,el}(\theta) \cdot a_{d,el}(\theta) + N_{d,pl}(\theta) \cdot a_{d,pl}(\theta)] + 2[N_{c,el}(\theta) \cdot a_{c,el}(\theta) + N_{c,pl}(\theta) \cdot a_{c,pl}(\theta)] \\ + \mu[N_{d,el}(\theta) \cdot B_d + N_{d,pl}(\theta) \cdot B_d]$$

$$M_{pl}(\theta) = 2[11,23 \cdot 0,0038 + 173,5 \cdot 0,028 + 46,88 \cdot 0,035] \\ + 2[91,28 \cdot 0,062 + 42,09 \cdot 0,0505 + 16,38 \cdot 0,0501] \\ + 0,45[(11,23 + 173,5) \cdot 0,07 + 46,88 \cdot 0,07] = 13,08 + 17,21 + 7,29 \\ = 37,59 \text{ mkN}$$