

## Treball final de grau

**Estudi:** Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

**Títol:** ESTUDI D'UN MODEL MATEMÀTIC DEL COL·LAPSE DEL PONT DE TACOMA NARROWS

**Document:** Resum

**Alumna:** Gemma Esteve Marés

**Tutor:** David Rojas Pérez

**Departament:** Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística

**Àrea:** Matemàtica Aplicada

**Convocatòria (mes/any):** Juny/2022



L'enfonsament del pont de Tacoma el dia 7 de novembre de 1940 ha estat estudiat per enginyers, matemàtics i físics d'arreu del món. Tot i això, mai s'ha arribat a trobar una explicació acceptada universalment. No obstant això, tots arriben al mateix principi físic evident: l'aparició inesperada d'oscil·lacions de torsió. Algunes explicacions atribueixen el fracàs a un problema estructural, mentre que altres ho fan a la ressonància entre la freqüència del vent i els modes oscil·lants del pont. Recentment, l'article [G. Arioli, F. Gazzola. A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. Applied Mathematical Modelling 39 (2015) 901–912] proposa un nou model matemàtic que modelitza l'estructura del pont en suspensió i n'analitza el comportament dinàmic.

L'objectiu principal de l'estudi és el d'analitzar el model proposat per Arioli i Gazzola i obtenir resultats matemàtics i numèrics que permetran analitzar el creixement sobtat d'oscil·lacions de torsió.

Les tasques es centraran en analitzar de manera matemàtica i numèrica totes les equacions que descriuen el model i les oscil·lacions a partir de l'estudi dinàmic del sistema. Per fer-ho, s'aplicarà el mètode de Runge-Kutta a MATLAB a partir de la funció `ode45` per resoldre les equacions diferencials.

A continuació, es mostra el model de discretització utilitzat per Arioli i Gazzola 1, així com la secció transversal d'una barra del pont i les variables per les quals queda definida 2.

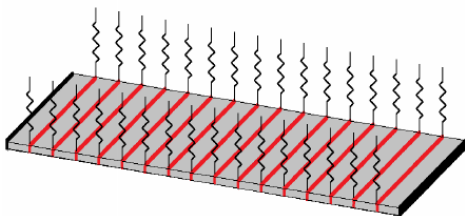


Figura 1: Model de discretització

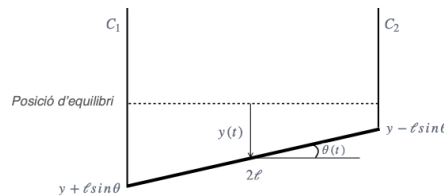


Figura 2: Representació de la secció perpendicular al pont

A partir de les equacions d'Euler-Lagrange, es defineixen les energies potencials i cinètiques, de manera que,

$$V(y, \theta) = [F(y - \ell \sin \theta) + F(y + \ell \sin \theta)], \quad (1)$$

$$T(\dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\theta}^2, \quad (2)$$

i seguidament, a partir d'aquestes energies, es descriuen els moviments verticals i angulars del sistema,

$$m\ddot{y} = f(y - \ell \sin \theta) + f(y + \ell \sin \theta), \quad (3)$$

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = \ell \cos \theta (f(y - \ell \sin \theta) - f(y + \ell \sin \theta)), \quad (4)$$

on  $f$  serà una funció avaluada, com es pot veure, als extrems de la barra. Cal destacar que la funció  $f$  haurà de ser una funció no lineal ja que, en cas de ser lineal, el sistema quedaria completament desacoblat.

En el cas del model per un nombre finit de barres  $n$ , l'energia potencial  $V$  del sistema canviarà la seva expressió afegint el terme de la força d'atracció entre barres adjacents a partir de la llei de Hooke i les seves constants  $K_y$  i  $K_\theta$ , obtenint doncs,

$$V(Y, \Theta) = \sum_{i=1}^n [F(y_i + \sin \theta_i) + F(y_i - \sin \theta_i)] + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [K_y(y_i - y_{i+1})^2 + K_\theta(\theta_i - \theta_{i+1})^2]. \quad (5)$$

i l'energia total del sistema quedarà representada com

$$\mathcal{E}(Y, \dot{Y}, \Theta, \dot{\Theta}) = \frac{|\dot{Y}|^2}{2} + \frac{|\dot{\Theta}|^2}{6} + V(Y, \Theta), \quad (6)$$

de manera que cada una de les variables  $Y, \dot{Y}, \Theta, \dot{\Theta}$  serà un vector que contindrà les característiques de totes les barres del pont a cada instant de temps  $t$ .

El tractament numèric de les dades es separa en tres grans blocs: la representació de les variables en una sola barra, la representació de les variables de la barra amb connexió al terra i finalment, la representació del model del pont amb un nombre finit de barres  $n = 16$ .

En els resultats de la figura 3a referent al model d'una sola barra, el sistema es desestabilitza de tal manera que el pont arriba a trobar punts d'estabilitat a  $\pi$ , tal com podem veure a la primera figura, és a dir,  $180^\circ$  respecte la seva posició d'equilibri. Per altra banda, observant la representació de la variació angular en el cas de la barra a l'encastament a la figura 3b, observem la importància de les dues barres inicial i final per aportar estabilitat al sistema, ja que, com podem veure, l'angle de gir és mínim i segueix un comportament totalment estable i acotat.

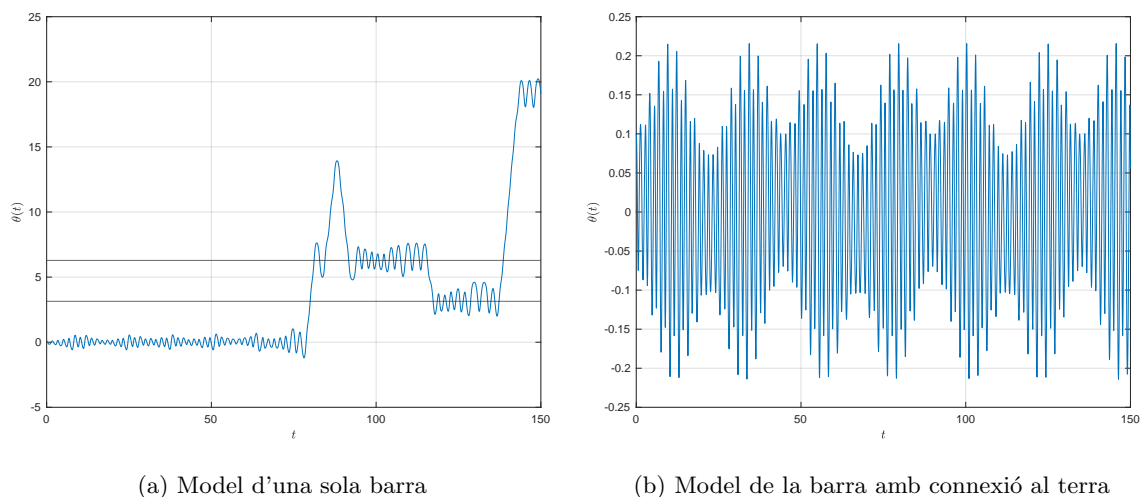


Figura 3: Variació de l'angle respecte el temps per 2 models diferents

Finalment, estudiem el pont en tota la seva longitud. Prenem uns valors inicials tals que, la posició angular sigui nul·la, la velocitat angular prengui un valor aleatori entre una distribució uniforme de l'interval  $[-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$ ,  $(0.1, 0, 10)$  i pel que fa a les variables de posició, prenem inicialment  $y(0) = 0.1$  i  $\dot{y}(0) = 10$ . Com podem veure a la figura 4, aproximadament al temps 50, apareixen

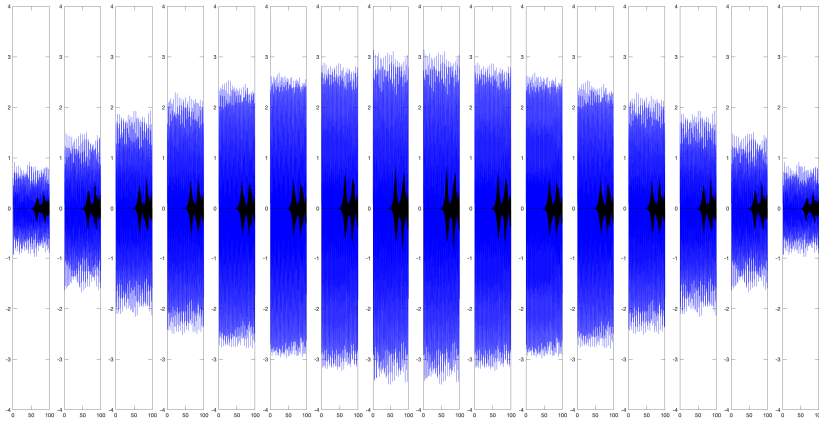
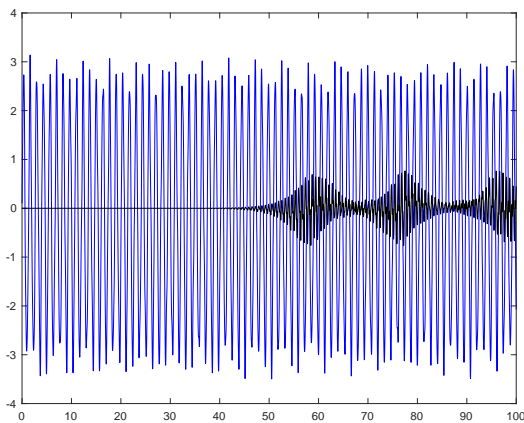


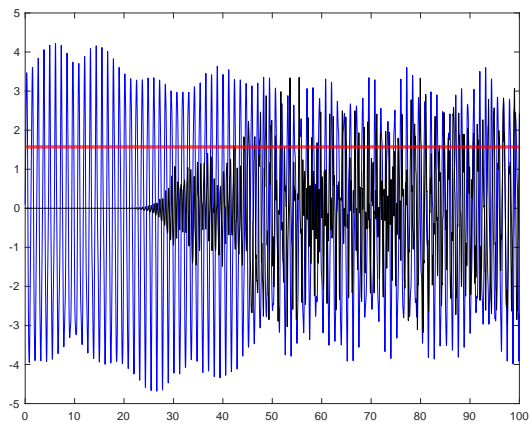
Figura 4: Representació de la solució del pont en tota la seva totalitat per unes condicions inicials  $(\dot{\theta}(0), \dot{y}, \theta, y) = ([-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}], 0.1, 0, 10)$  on es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre).

sobradament les oscil·lacions de torsió tot i tenir termes angulars pràcticament nuls. També podem observar un comportament totalment simètric del pont, on la barra central  $n = 8$  és la que es veu més perjudicada.

Després de diferents proves, podem adonar-nos que el que realment fa aparèixer les oscil·lacions de torsió és l'increment de la velocitat vertical  $\dot{y}(0)$  i per tant, com hem vist anteriorment a l'equació (6), considerant les altres variables inicials pràcticament nul·les, una variació de  $\dot{y}(0)$  suposa una variació de l'energia total del sistema. Aquest augment de l'energia suposa un augment encara més pronunciat de les oscil·lacions de torsió com podem veure a les figures 5a i 5b.



(a) Representació de la barra central per una velocitat inicial  $\dot{y}(0) = 10$  on es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre)



(b) Representació de la barra per una velocitat inicial  $\dot{y}(0) = 15$  on es mostra el desplaçament vertical (blau), les oscil·lacions de torsió (negre) i  $\pi/2$  (vermell).

Figura 5: Representació de les barres centrals

Per últim, s'estudiarà l'estabilitat de l'òrbita periòdica existent a la barra amb connexió al terra.

Fixant-nos en l'equació (4), per condicions inicials  $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ , el sistema es mantè al pla  $\theta = \dot{\theta} = 0$  indefinidament amb un moviment oscil·latori vertical.

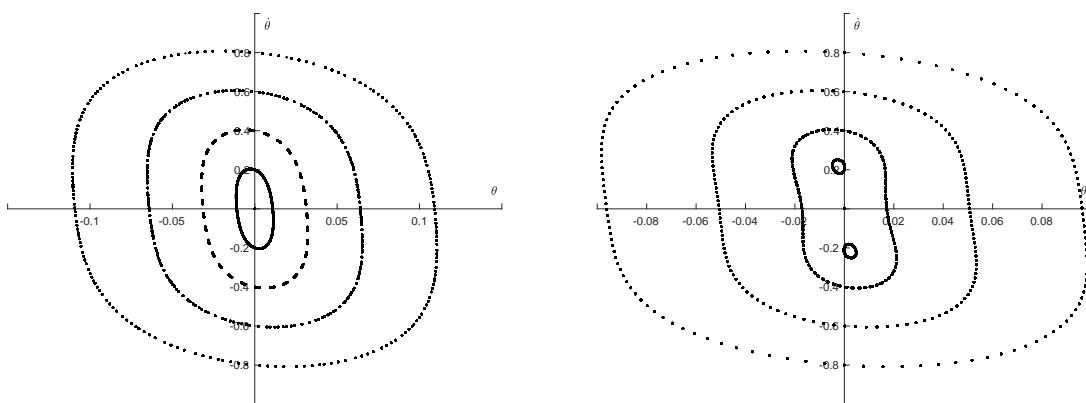
El sistema és conservatiu segons el model proposat i per tant, sabent que l'energia total del sistema es conserva, podem fixar un valor d'energia  $E_0 > 0$  tal que l'energia (6) satisfà  $\mathcal{E}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) = E_0$ . Aquesta energia serà la que fixarà l'òrbita periòdica que volem estudiar. Amb aquest valor d'energia fixat, ens trobem davant d'un sistema amb 4 variables i una equació que les relaciona, per tant, es defineix un sistema tridimensional.

L'aplicació de Poincaré analitza aquest sistema 3-dimensional amb una secció bidimensional de la superfície. Per tant, com que l'objectiu és conèixer l'estabilitat del l'òrbita periòdica, tindrem en compte totes les variables que afecten a aquesta estabilitat total i definirem la velocitat vertical inicial com a funció dels termes angulars, sempre tenint en compte la conservació de l'energia. Partint d'una energia fixada  $E_0$ , es defineix  $\mathcal{U}_{E_0} = \{(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{E}(0, 0, \theta, \dot{\theta}) < E_0\}$  i, per a cada condició inicial  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) \in \mathcal{U}_{E_0}$ , es calcula la velocitat inicial  $\dot{y}(0)$  que satisfà precisament el valor d'aquesta energia,

$$\dot{y}(0) = \dot{y}(E_0, \theta(0), \dot{\theta}(0)) = \sqrt{2(E_0 - \mathcal{E}(0, 0, \theta(0), \dot{\theta}(0)))} > 0. \quad (7)$$

L'òrbita periòdica al punt  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (0, 0)$  és la que s'utilitzarà com a òrbita de referència per generar el mapa de Poincaré. A partir d'aquest mapa, es generarà un punt  $(\theta, \dot{\theta})$  cada vegada que el sistema torni a passar per  $y = 0$  en qualsevol velocitat  $\dot{y} > 0$ .

Així doncs, mostrem els mapes de Poincaré per els valors d'energia fixats  $E_0 = 3.5$  i  $E_0 = 3.6$  i veiem la representació del pla  $y = 0$  a la figura 6. Cada un d'aquests mapes estudia punts propers a l'òrbita periòdica que només canvien en el seu valor de  $\dot{\theta}$  que pren valors de  $(-0.8, 0.8)$ .



(a) Mapa de Poincaré per una energia  $E_0 = 3.5$

(b) Mapa de Poincaré per una energia  $E_0 = 3.6$

Figura 6: Mapa de Poincaré per  $E_0 = 3.5$  i  $E_0 = 3.6$

Per últim, fixant-nos en la figura 7, si aquest valor d'energia encara augmenta més i ens situem a  $E_0 = 5$ , per condicions inicials properes a  $(0, 0)$  el sistema es desestabilitza en dues bifurcacions als punts

aproximatats de  $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 1)$  i  $(\dot{\theta}, \theta) = (0, -1)$ . Tot i això, quan els valors de  $\dot{\theta}$  comencen a allunyar-se de l'origen, podem veure la formació de petites illes que evidencien la presència de solucions subharmòniques. És a dir, solucions periòdiques que travessen diverses vegades el pla abans de tornar a tancar. Per valors més allunyats, podem veure la generació de punts completament caòtics.

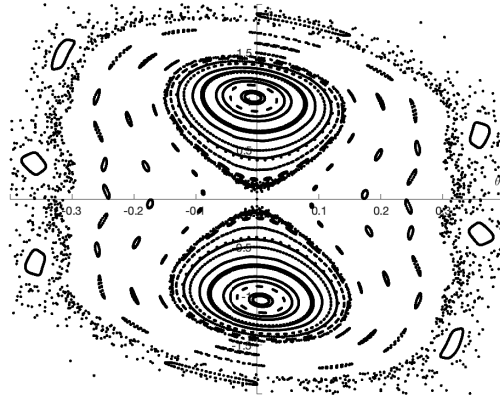


Figura 7: Mapa de Poincaré ampliat per  $E_0 = 5$

Després d'analitzar tots els models per diferents condicions inicials i energies, es pot concloure que, s'ha demostrat de manera numèrica la importància de les dues connexions al terra per l'estabilitat del sistema. També s'han vist les sobtades oscil·lacions de torsió que pateix el pont i quina relació té aquest fenomen amb l'energia total del sistema. Primerament, hem vist que fixant diferents velocitats verticals, el pont tarda més o menys en patir aquestes oscil·lacions i a part d'això, augmenten la seva amplitud si augmenta aquesta condició inicial. A més, amb els retrats de Poincaré, hem pogut observar l'estabilitat de l'òrbita periòdica a partir de diferents valors d'energia. I, a partir de la figura 6 podem veure que existeix un punt d'energia entre  $E_0 = 3.5$  i  $E_0 = 3.6$  en el que el sistema passa de ser estable a l'òrbita periòdica  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  a ser inestable i formar punts d'estabilitat aliens. Finalment, hem pogut veure que quan el valor d'energia augmenta encara més i ens situem a  $E_0 = 5$ , com era de suposar, el sistema tampoc té un comportament estable. Però, a diferència dels anteriors, pels valors més llunyans a 0, algunes de les solucions són completament caòtiques, mentre que d'altres es comporten formant petits punts d'estabilitat de manera que formen solucions subharmòniques.