

Treball final de grau

Estudi: Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

Títol: ESTUDI D'UN MODEL MATEMÀTIC DEL COL·LAPSE DEL PONT DE TACOMA NARROWS

Document: Memòria i Annexos

Alumna: Gemma Esteve Marés

Tutor: David Rojas Pérez

Departament: Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística

Àrea: Matemàtica Aplicada

Convocatòria (mes/any): Juny/2022

Agraïments

En primer lloc, vull expressar el meu agraïment al tutor del treball, el Dr. David Rojas Pérez, per la seva dedicació i ajuda donada de principi a fi.

També vull agrair molt especialment el suport de totes les persones que m'han estat al costat durant la realització d'aquest treball: a la família, amics, companys i docents.

Índex

1	Introducció	7
1.1	Antecedents	7
1.2	Objecte	8
1.3	Abast i Especificacions	8
2	Descripció del model	9
2.1	Model per una sola barra	9
2.1.1	Equacions d'Euler-Lagrange	11
2.1.2	Desacoblament del sistema	11
2.2	Model per diverses barres	12
3	Tractament numèric	15
3.1	Representació del model d'una barra lliure	15
3.1.1	Integració numèrica dels resultats d'una sola barra	18
3.2	Representació del model d'una barra amb connexió al terra	18
3.2.1	Integració numèrica dels resultats d'una sola barra amb connexió al terra	20
3.3	Representació del model per n barres	20

3.3.1	Integració numèrica dels resultats del model per n barres	26
4	Estabilitat de l'oscil·lació vertical	29
4.0.1	Representació numèrica dels Mapes de Poincaré	34
5	Variació de la funció f	35
6	Simulació de la barra central $i = 8$	37
6.1	Obtenció de la simulació	38
7	Resum del pressupost	39
8	Conclusions	41
	Bibliografia	43
	Annexos	45
	Annex A: Codi de la representació del model d'una sola barra	45
	Annex B: Codi de la representació del model de la barra amb connexió al terra	47
	Annex C: Codi de la representació del model per a diverses barres	49
	Annex D: Codi de l'estudi de l'estabilitat del sistema: Mapes de Poincaré	51
	Annex E: Codi de la simulació d'una barra	53
	Annex F: Valoració econòmica	55

Índex de figures

2.1	Representació esquemàtica del model de discretització proposat amb un nombre finit de barres.	9
2.2	Representació esquemàtica de la secció perpendicular al pont on s'hi veuen representades totes les seves variables: la longitud 2ℓ , el desplaçament vertical $y(t)$, la rotació $\theta(t)$ i les distàncies dels extrems de la barra en funció de y i θ	10
3.1	Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 50$. A la figura (a) es representa la variable de la posició, y , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquesta posició, és a dir, la velocitat vertical, en funció de la pròpia posició.	16
3.2	Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 50$. A la figura (a) es representa la variable de gir angular, θ , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquest gir, és a dir, la velocitat angular, en funció de la pròpia posició angular.	16
3.3	Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de la posició, y , en funció del temps i a (b) , el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquesta posició, és a dir, la velocitat vertical, en funció de la pròpia posició.	17
3.4	Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de gir angular, θ , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquest gir, és a dir, la velocitat angular, en funció de la pròpia posició angular.	18

3.5 Representació de les solucions del sistema en el cas de la barra amb connexió al terra amb una condició de temps final $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de la posició, y , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquesta posició, és a dir, la velocitat vertical, en funció de la pròpia posició. 19

3.6 Representació de les solucions del sistema en el cas de la barra amb connexió al terra amb una condició de temps final $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de gir angular, θ , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquest gir, és a dir, la velocitat angular, en funció de la pròpia posició angular. 19

3.7 Representació de la solució del pont en tota la seva totalitat per unes condicions inicials $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 10, \theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre). 21

3.8 Representació de la solució de les 8 primeres barres per unes condicions inicials $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 10, \theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre). 22

3.9 Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió de la primera barra per unes condicions inicials $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 10, \theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre). 22

3.10 Representació de la barra central $i = 8$ per unes condicions inicials $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 10, \theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre). 23

3.11 Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió per unes condicions inicials $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 14, \theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre). 24

3.12 Representació de la barra central $i=8$ per unes condicions inicials $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 14, \theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre). 24

3.13 Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió per unes condicions inicials $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 15, \theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre) i la referència a $\pi/2$ (vermell). 25

3.14 Representació de la barra central $i = 8$ per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 15$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre) i la referència a $\pi/2$ (vermell). 25

3.15 Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 9$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre) i la referència a $\pi/2$ (vermell). 26

4.1 Òrbita periòdica vertical per $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ 30

4.2 Representació gràfica de la secció de Poincaré estreta de [4] 30

4.3 Mapa de Poincaré per $E_0 = 3.4$ i $E_0 = 3.5$ 31

4.4 Mapa de Poincaré per $E_0 = 3.6$ i $E_0 = 3.8$ 31

4.5 Mapa de Poincaré per $E_0 = 5$ 32

4.6 Mapa de Poincaré ampliat per $E_0 = 5$ 32

4.7 Representació de les variables θ i $\dot{\theta}$ en funció del temps per una energia de $E_0 = 3.4$ 33

4.8 Representació de les variables θ i $\dot{\theta}$ en funció del temps per una energia de $E_0 = 3.5$ 33

4.9 Representació de les variables θ i $\dot{\theta}$ en funció del temps per una energia de $E_0 = 3.6$ 34

5.1 Mapa de Poincaré per una funció F parell de grau 6 per una energia $E_0 = 1.5$ 35

5.2 Mapa de Poincaré per una funció F parell de grau 6 sense el terme quadràtic per una energia $E_0 = 1.7$ 36

6.1 Representació de la simulació de la barra als instants aproximats de $t = 7$ i $t = 32$ per una energia inicial $E_0 = 15$ 37

6.2 Representació de la simulació de la barra als instants aproximats de $t = 46$ i $t = 83$ per una energia inicial $E_0 = 15$ 38

Capítol 1

Introducció

El dramàtic enfonsament del pont de Tacoma (Washington, Estats Units d'Amèrica) el dia 7 de novembre de 1940 és considerat, sens dubte, un dels majors fracassos estructurals de la història i, per aquest motiu ha estat estudiat des d'aleshores per diversos enginyers, matemàtics i físics d'arreu del món. Tot i haver-hi hagut molts intents per part d'aquestes comunitats per estudiar aquest fet, mai s'ha arribat a trobar una explicació acceptada universalment. No obstant això, tots arriben al mateix principi físic evident: l'aparició inesperada d'oscil·lacions de torsió. Però, en definitiva, la pregunta que porta controvèrsia és la següent: Per quin motiu van aparèixer aquestes oscil·lacions de torsió? Aquí és on els diversos estudis difereixen.

1.1 Antecedents

Algunes explicacions atribueixen el fracàs a un problema estructural, mentre que d'altres ho fan a la ressonància entre la freqüència del vent i els modes oscil·lants del pont. Un exemple de l'estudi d'aquesta ressonància es situa al 1941 amb l'estudi de O.H. Amman, F. von Kármán i B. Woodruff [1] on atribueixen el col·lapse de la ressonància basant-se en l'experimentació del fenomen dins de túnels de vent. Un altre exemple és l'article publicat el 2006 per D. Green i W. Unruh [6] on es comparen els modes oscil·lants del pont amb les ressonàncies dels instruments musicals.

Recentment, l'article [G. Arioli, F. Gazzola. A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. *Applied Mathematical Modelling* 39 (2015) 901–912] proposa un nou model matemàtic que modelitza l'estructura del pont en suspensió i n'analitza el comportament dinàmic. En aquest model, s'analitza el fenomen de ressonància que apareix quan es comparen les freqüències d'oscil·lació de torsió i vertical del pont. Aquest estudi destaca pel fet que

el model no considera cap força externa i per tant, arriba a desmentir les teories que expliquen aquest enfonsament a partir de la ressonància generada pel vent.

1.2 Objecte

L'objectiu principal de l'estudi, doncs, és el d'analitzar el model proposat per Arioli i Gazzola i les variables que el conformen, així com obtenir resultats matemàtics i numèrics que permetran analitzar el creixement sobtat d'oscil·lacions de torsió.

1.3 Abast i Especificacions

Les tasques a realitzar per fer front a l'objecte de l'estudi es centraran en analitzar de manera matemàtica i numèrica totes les equacions que descriuen el model i les oscil·lacions a partir de l'estudi dinàmic del sistema. Es podrà observar la representació de diferents models i l'aparició sobtada d'oscil·lacions de torsió per a cada un d'ells. Tanmateix, s'estudiarà l'estabilitat de l'òrbita periòdica que conté el sistema a partir dels mapes de Poincaré.

Per front a l'abast, s'utilitzaran les equacions d'Euler-Lagrange a l'hora d'estudiar el model, l'aplicació del mètode de Runge-Kutta d'ordre 4 i 5 a MATLAB per resoldre les equacions diferencials i l'aplicació de Poincaré per estudiar l'estabilitat de l'òrbita periòdica.

Capítol 2

Descripció del model

El model proposat per G. Arioli i F. Gazzola [2], considera un pont en suspensió amb un nombre finit de barres paral·leles unides mitjançant forces lineals d'atracció. Aquesta discretització del sistema es pot observar a la figura 2.1, de manera que les seccions transversals vermelles són les pròpies barres unides als tensors i les àrees transversals grises representen les membranes per les quals una barra i les seves adjacents queden unides.

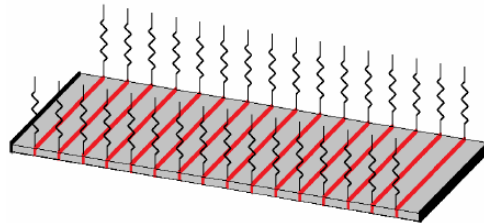


Figura 2.1: Representació esquemàtica del model de discretització proposat amb un nombre finit de barres.

En aquest capítol estudiarem la descripció del model amb 2 seccions esglaonades que ens permetran arribar a la descripció del pont en la seva totalitat. A la primera secció, s'estudiarà el model per una sola barra lliure i a continuació, el pont com un conjunt de n barres i les forces d'atracció que hi haurà entre elles.

2.1 Model per una sola barra

Per trobar les equacions que descriuen el moviment d'una sola barra lliure ens centrem amb la barra representada a la figura 2.2. Aquesta barra es caracteritza per tenir una massa m i una longitud 2ℓ i es defineix totalment a partir de dues variables, el desplaçament vertical $y(t)$ i la rotació $\theta(t)$ respecte la seva

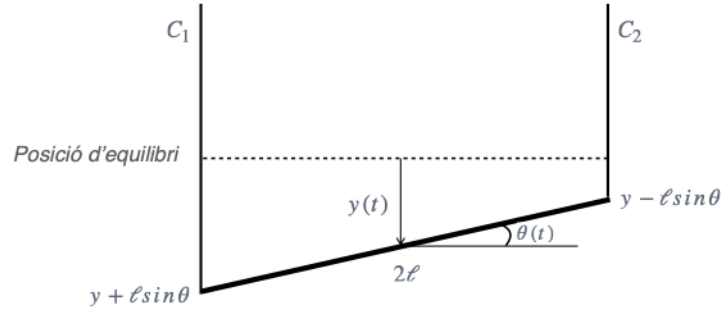


Figura 2.2: Representació esquemàtica de la secció perpendicular al pont on s'hi veuen representades totes les seves variables: la longitud 2ℓ , el desplaçament vertical $y(t)$, la rotació $\theta(t)$ i les distàncies dels extrems de la barra en funció de y i θ .

posició d'equilibri. Ambdues variables tindran associades les seves respectives velocitats que denotarem per $\dot{y}(t)$ i $\dot{\theta}(t)$. Als extrems de la barra hi ha exercides dues forces de tracció denominades C_1 i C_2 que seran, en definitiva, una funció f avaluada a cada un dels extrems de la barra i per tant, $f(y - \ell \sin \theta)$ i $f(y + \ell \sin \theta)$. Cal destacar que aquesta funció f inclou implícitament el terme de la gravetat.

A partir de les equacions d'Euler-Lagrange [7], es poden definir les equacions del moviment d'oscil·lació vertical i de torsió. Primerament, es defineix l'energia potencial (V) i l'energia cinètica (T) del sistema.

L'energia potencial només tindrà en compte les forces als extrems de la barra i dependrà de F , l'energia associada a la funció de força f avaluada a aquests dos punts, tal que $F' = -f$. Així doncs, l'energia potencial té l'expressió,

$$V(y, \theta) = F(y - \ell \sin \theta) + F(y + \ell \sin \theta). \quad (2.1)$$

Per altra banda, l'energia cinètica constarà de dos termes: el que prové del moviment lineal i per tant, sorgeix de la fórmula clàssica d'energia cinètica $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, i, el de l'energia cinètica de torsió que té com a expressió $\frac{m\ell^2}{6}\dot{\theta}^2$, obtenint, doncs,

$$T(\dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\theta}^2. \quad (2.2)$$

Coneixent, les dues energies que conformen el sistema, definim el Lagrangiana com la diferència entre l'energia cinètica i la potencial,

$$L(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) = T(\dot{y}, \dot{\theta}) - V(y, \theta). \quad (2.3)$$

2.1.1 Equacions d'Euler-Lagrange

Partint del Lagrangiana, i sabent que $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}) = \frac{\partial L}{\partial y}$ i que $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$, es poden definir les equacions del moviment vertical i de torsió respectivament fent servir les equacions (2.1) i (2.2),

$$m \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{3} m \ell^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}. \quad (2.5)$$

Equació del moviment vertical

A partir de l'equació d'Euler-Lagrange (2.4), trobem l'equació que descriu el moviment vertical del sistema sabent que $f = -F'$. Per tant, $m \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} = m \ddot{y}$ i $-\frac{\partial V}{\partial y} = f(y - \ell \sin \theta) + f(y + \ell \sin \theta)$ i ens permet trobar l'equació que descriu el moviment vertical:

$$m \ddot{y} = f(y - \ell \sin \theta) + f(y + \ell \sin \theta). \quad (2.6)$$

Equació del moviment de torsió

Partint un altre cop de les equacions d'Euler-Lagrange, podem trobar l'equació del moviment del terme angular del sistema, en aquest cas a partir de l'expressió (2.5). On $m \ell^2 \frac{1}{3} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} = \frac{m \ell^2}{3} \ddot{\theta}$ i $-\frac{\partial V}{\partial \theta} = \ell \cos \theta (f(y - \ell \sin \theta) - f(y + \ell \sin \theta))$ i ens permet trobar l'equació que descriu el moviment de torsió:

$$\frac{m \ell^2}{3} \ddot{\theta} = \ell \cos \theta (f(y + \ell \sin \theta) - f(y - \ell \sin \theta)). \quad (2.7)$$

Un cop definides les equacions del moviment d'Euler-Lagrange, podem definir l'energia total del sistema sabent que l'energia associada al moviment es pot descriure a partir de la relació

$$\mathcal{E} = \dot{y} \frac{dL}{d\dot{y}} + \dot{\theta} \frac{dL}{d\dot{\theta}} - L = m \dot{y}^2 + \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + V - T, \quad (2.8)$$

de la qual obtenim

$$\mathcal{E}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) = m \frac{\dot{y}^2}{2} + m \ell^2 \frac{\dot{\theta}^2}{6} + V(y, \theta). \quad (2.9)$$

2.1.2 Desacoblament del sistema

Cal destacar la importància de la funció f que s'avaluarà als extrems de la barra, ja que si aquesta és lineal, provoca un desacoblament al sistema format per les dues equacions anteriors. És a dir, ens

trobaríem davant d'una funció de l'estil $f(x) = ax + b$, que quedaria implementada a les equacions de la següent manera. De l'equació del moviment vertical,

$$m\ddot{y} = a(y - \ell \sin \theta) + b + a(y + \ell \sin \theta) + b \implies m\ddot{y} = 2ay + 2b, \quad (2.10)$$

mentre que de l'equació del moviment angular,

$$\frac{m\ell}{3}\ddot{\theta} = \ell \cos \theta((a(y + \ell \sin \theta) + b) - (a(y - \ell \sin \theta) + b)) \implies \frac{m\ell}{3}\ddot{\theta} = 2a\ell^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (2.11)$$

Podem veure, doncs, que si la funció f és lineal, l'equació del moviment vertical (2.10) deixa de dependre de θ i l'angular (2.11) deixa de dependre de y . Les dues equacions que descriuen el moviment deixen d'estar relacionades i descriuen dos oscil·ladors independents. Per tant, això implica la inexistència de ressonància a causa de les oscil·lacions verticals. En cap moment les oscil·lacions de torsió podran aparèixer com a conseqüència de les verticals, fenomen el qual estem estudiant.

2.2 Model per diverses barres

Per a poder modelar el pont en tota la seva longitud, suposarem que hi ha n barres indexades de $i = 1, \dots, n$. A més, cada barra interacciona amb les seves dues adjacents a partir de forces d'atracció. Tal i com hem vist anteriorment, cadascuna d'aquestes barres es caracteritzarà per un moviment vertical y i de torsió θ . Cal remarcar que existeixen dues barres que es suposen subjectes al terra ($i = 0$ i $i = n + 1$) i es caracteritzen per tenir unes condicions de moviment vertical i torsió nul·les i per tant, es pot considerar que $y_0(t) = y_{n+1}(t) = \theta_0(t) = \theta_{n+1}(t) = 0$ per tot temps t . Per a fer una simplificació dels càlculs, es suposarà que cada barra té una massa $m = 1$ i una longitud $\ell = 1$.

La nova energia potencial del sistema V tindrà la mateixa expressió que anteriorment però, en aquest cas, també es tindrà en compte la força d'atracció entre barres adjacents. Aquesta atracció es tindrà en compte tant verticalment, com a nivell angular, a partir de la Llei de Hooke i les seves constants elàstiques K_y i K_θ , que descriuen la deformació que patirà la barra generada per les pròpies forces internes.

En el cas del model per a diverses barres, la notació de les variables ha canviat i s'utilitzen en majúscula ($Y, \dot{Y}, \Theta, \dot{\Theta}$) ja que cadascuna d'elles representa un vector que conté la variable associada a cada una de les barres, des de $i = 0, \dots, n + 1$ per a cada instant de temps t . De manera que, per exemple, Y és el vector $Y = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t), y_{n+1}(t)]$. Així doncs, obtenim,

$$V(Y, \Theta) = \sum_{i=1}^n [F(y_i + \sin \theta_i) + F(y_i - \sin \theta_i)] + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [K_y (y_i - y_{i+1})^2 + K_\theta (\theta_i - \theta_{i+1})^2]. \quad (2.12)$$

Per tant, podem redefinir les equacions del moviment (2.6) i (2.7) per $i = 1, \dots, n$ com un sistema tal

que,

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_i + 3\frac{\partial V}{\partial \theta_i}(Y, \Theta) = 0, \\ \ddot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}(Y, \Theta) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Per altra banda, l'energia cinètica del sistema (T) per a tot el conjunt de n barres s'expressarà com a

$$T(\dot{Y}, \dot{\Theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{m\ell^2}{6} \dot{\theta}_i^2 \implies \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 + \frac{m\ell^2}{6} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2, \quad (2.14)$$

i el Lagrangiana prendrà l'expressió

$$L(Y, \dot{Y}, \Theta, \dot{\Theta}) = T(\dot{Y}, \dot{\Theta}) - V(Y, \Theta). \quad (2.15)$$

Un cop definides les equacions del moviment d'Euler-Lagrange i l'energia cinètica i potencial, podem trobar l'energia total del sistema, assumint $m = \ell = 1$, a partir de la relació

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \frac{dL}{d\dot{y}_i} + \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i \frac{dL}{d\dot{\theta}_i} - L = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2 + V - T. \quad (2.16)$$

Observem que els sumatoris de l'expressió anterior corresponen als quadrats dels elements dels vectors Y i Θ , respectivament. Donat que aquests sumatoris corresponen a la norma euclidiana dels vectors, obtenim

$$\mathcal{E}(Y, \dot{Y}, \Theta, \dot{\Theta}) = \frac{|\dot{Y}|^2}{2} + \frac{|\dot{\Theta}|^2}{6} + V(Y, \Theta). \quad (2.17)$$

Capítol 3

Tractament numèric

Aquest capítol es centrarà en la visualització dels models definits anteriorment. Primer, es mostrarà la representació del moviment per una barra lliure. Seguidament, s'estudiarà l'anclatge d'aquesta barra al terra i, per últim, la visualització de la totalitat del pont a partir de diferents condicions inicials que ens faran canviar l'estabilitat del sistema. Ens permetrà observar l'òbvia necessitat d'un anclatge per assegurar que el sistema sigui acotat i veure la ressonància que existeix entre els moviments verticals i de torsió de les barres.

3.1 Representació del model d'una barra lliure

En aquesta secció, doncs, es representarà la solució del moviment d'una barra lliure, sense cap mena de connexió al terra. Seguint l'article [2] s'escull com a f , la funció no lineal $f(s) = -(s + s^2 + s^3)$, $f = -F'$ i per tant, $F(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4}$.

Partint del sistema format per les equacions vertical i de torsió (2.6) i (2.7) que descriuen el moviment de la barra, en fem una representació gràfica de les variables que hi tenen lloc. En aquest cas, la barra estarà totalment descrita per les variables $[y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}]$. De les equacions del model, suposant que $\ell = 1$ i $m = 1$, obtenim les acceleracions del sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y} = f(y - \sin \theta) + f(y + \sin \theta), \\ \ddot{\theta} = 3 \cos \theta (f(y + \sin \theta) - f(y - \sin \theta)). \end{cases} \quad (3.1)$$

Si denotem per $v = \dot{y}$ i $\varphi = \dot{\theta}$, podem escriure cada equació diferencial de segon ordre com un sistema d'equacions diferencials de primer ordre, obtenint,

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = f(y - \sin \theta) + f(y + \sin \theta), \end{cases} \quad (3.2)$$

i

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \varphi \\ \dot{\varphi} = 3 \cos \theta (f(y + \sin \theta) - f(y - \sin \theta)). \end{cases} \quad (3.3)$$

Resolent els sistemes d'equacions plantejats anteriorment a partir d'un vector que descriu les condicions inicials $(y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)) = (1, 0, 0.1, 0)$, en podem veure els resultats per una única barra.

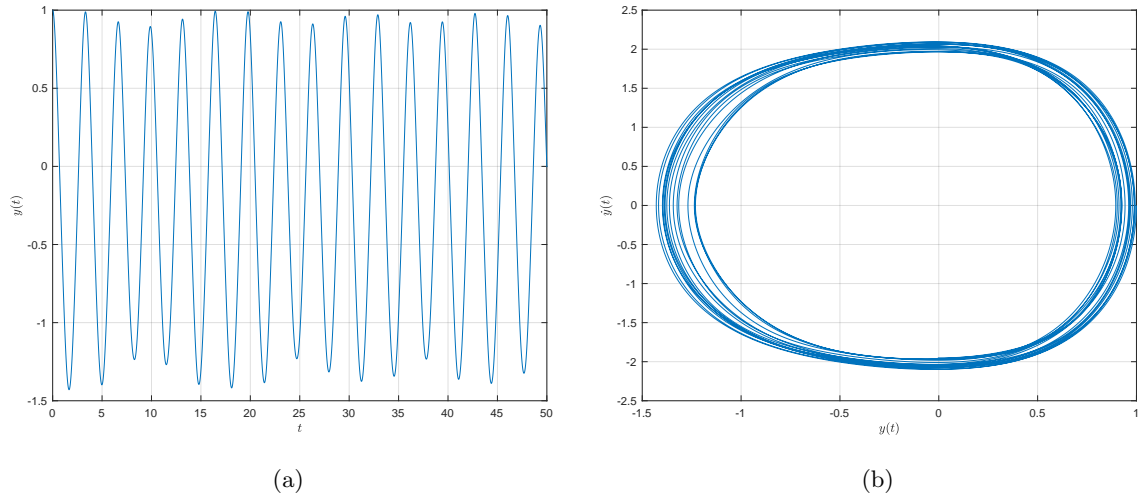


Figura 3.1: Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 50$. A la figura (a) es representa la variable de la posició, y , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquesta posició, és a dir, la velocitat vertical, en funció de la pròpia posició.

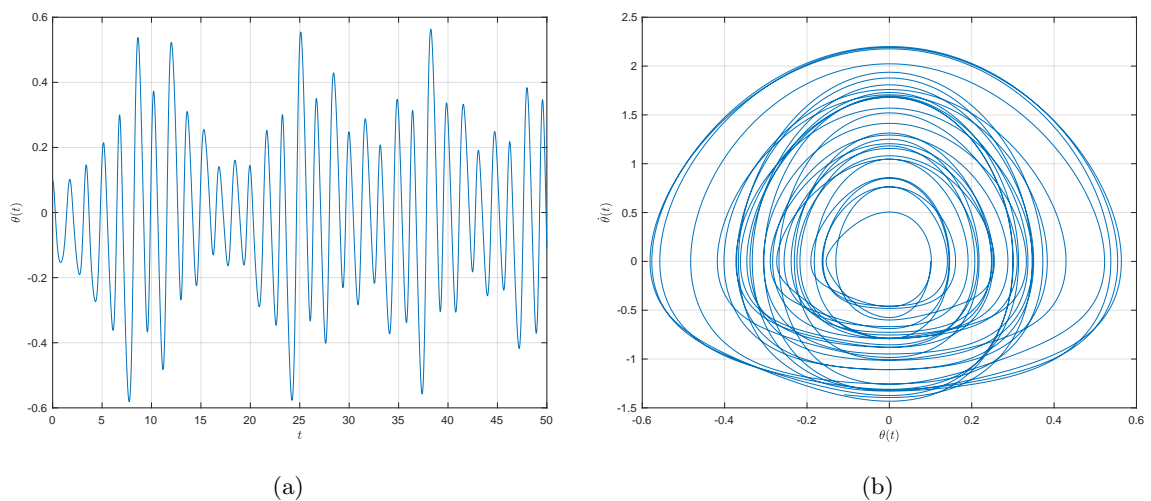


Figura 3.2: Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 50$. A la figura (a) es representa la variable de gir angular, θ , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquest gir, és a dir, la velocitat angular, en funció de la pròpia posició angular.

A les figures 3.1a, 3.1b, 3.2a, 3.2b podem veure la primera representació del moviment de la barra

a partir d'unes condicions inicials que contemplen un desplaçament vertical de $y(0) = 1$ i una petita pertorbació a nivell d'angle inicial de $\theta(0) = 0.1$. Podem veure que el moviment vertical és pràcticament periòdic i per tant, el seu retrat de fase mostra una figura propera a la d'una el·lipse. Per altra banda, el retrat de fase a nivell de torsió, veiem una forma molt menys definida però continua sent relativament centrada al punt $(0, 0)$. També podem veure que la tendència en el moviment vertical és constant i que oscil·la entre 1 i -1.5 i l'angle va augmentant i disminuint el seu valor però que, igualment, té una tendència constant al llarg del temps. Per tant, en definitiva, podríem concloure que, amb un angle inicial de $\theta(0) = 0.1$ i un desplaçament vertical de $y(0) = 1$, el sistema manté una trajectòria acotada i força estable fins $t = 50$.

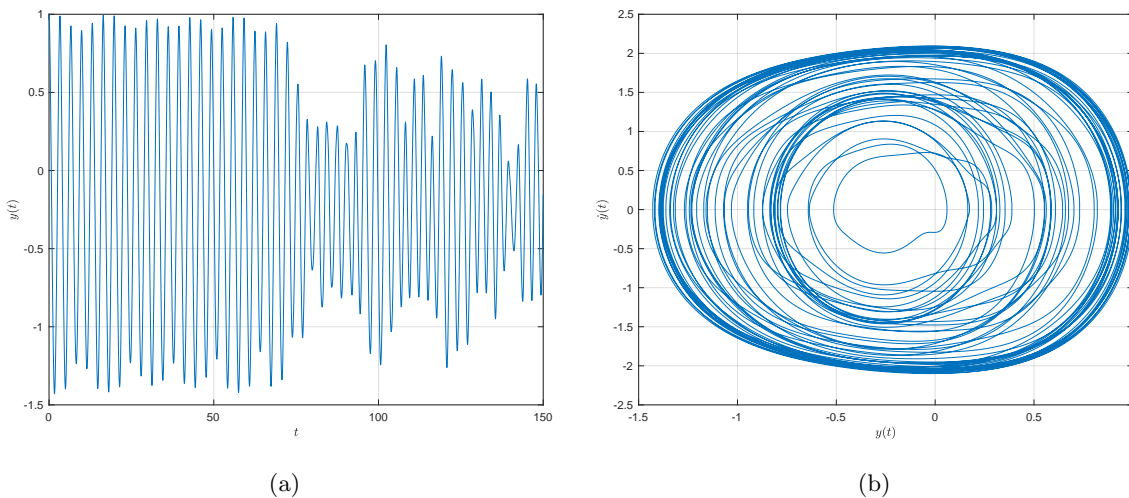


Figura 3.3: Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de la posició, y , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquesta posició, és a dir, la velocitat vertical, en funció de la pròpia posició.

Tot i així, si augmentem el temps de mostreig fins a $t = 150$ observem canvis significatius a les figures 3.3 i 3.4. Quan l'interval de temps de mostreig augmenta, veiem un canvi sobtat pel que fa a l'estabilitat del sistema. Tot i que el moviment vertical continua estable inicialment, en un instant determinat les oscil·lacions redueixen la seva amplada. No obstant això, el retrat de fase es manté centrat i acotat. Per altra banda, però, les oscil·lacions de torsió, que inicialment semblaven estables, es descontrolen augmentant de manera molt sobtada el seu valor. També ho podem apreciar al retrat de fase angular a la figura 3.4b, que deixa d'estar centrat en un punt i va oscil·lant entre diferents centres estables. Aquests centres es troben a valors múltiples de π , la qual cosa representa que la barra oscil·la tenint una tendència a estabilitzar-se cada cop que fa mitja volta. Així doncs, podem veure que, com resulta evident, el moviment d'una sola barra es descontrola completament fent necessària una subjecció al terra. En definitiva, doncs, ens n'adonem de la importància del temps en aquesta solució. Allò que inicialment semblava una solució estable sense cap índex de ressonància, finalment el sistema ha acabat completament descontrolat.

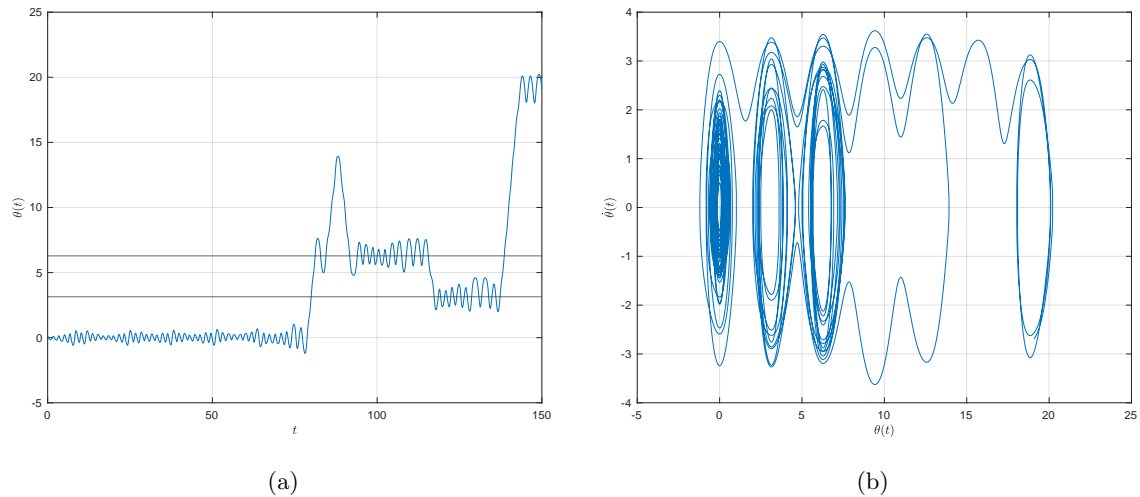


Figura 3.4: Representació de les solucions del sistema en el cas d'una única barra lliure amb una condició de temps final de $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de gir angular, θ , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquest gir, és a dir, la velocitat angular, en funció de la pròpia posició angular.

3.1.1 Integració numèrica dels resultats d'una sola barra

Per a poder resoldre el sistema d'equacions diferencials de primer ordre (3.2) i (3.3) es defineix un camp que constarà de les 4 equacions del sistema i les quatre variables. La variable X del camp serà aquella que representarà cada una de les variables del sistema $X(1) = \theta$, $X(2) = \dot{\theta}$, $X(3) = y$, $X(4) = \dot{y}$ i s'especifiquen les condicions inicials a un vector tal que $X_0 = [\theta(0), \dot{\theta}(0), y(0), \dot{y}(0)]$. Tal i com es mostra a l'Annex A, s'utilitza el model de Runge-Kutta d'ordre 4 i 5 per a poder resoldre les equacions diferencials.

3.2 Representació del model d'una barra amb connexió al terra

En aquest cas, també estudiarem el cas d'una única barra, però ara, tenint en compte una connexió amb el terra i per aquest motiu, entrarà en joc l'equació actualitzada de l'energia potencial (2.12) i, per tant, les constants K_y i K_θ . Considerant doncs, l'equació de l'energia potencial V i que només tractem la barra $n = 1$, l'equació queda simplificada de manera que, com que els seus extrems estan fixats, totes les variables de $i = 0$ i $i = 2$ seran nul·les, obtenint

$$V(\Theta, Y) = F(y + \sin \theta) + F(y - \sin \theta) + \frac{1}{2}K_y(-y)^2 + K_\theta(-\theta)^2 + \frac{1}{2}K_y y^2 + K_\theta \theta^2, \quad (3.4)$$

que es simplifica com

$$V(\Theta, Y) = F(y + \sin \theta) + F(y - \sin \theta) + K_y y^2 + K_\theta \theta^2. \quad (3.5)$$

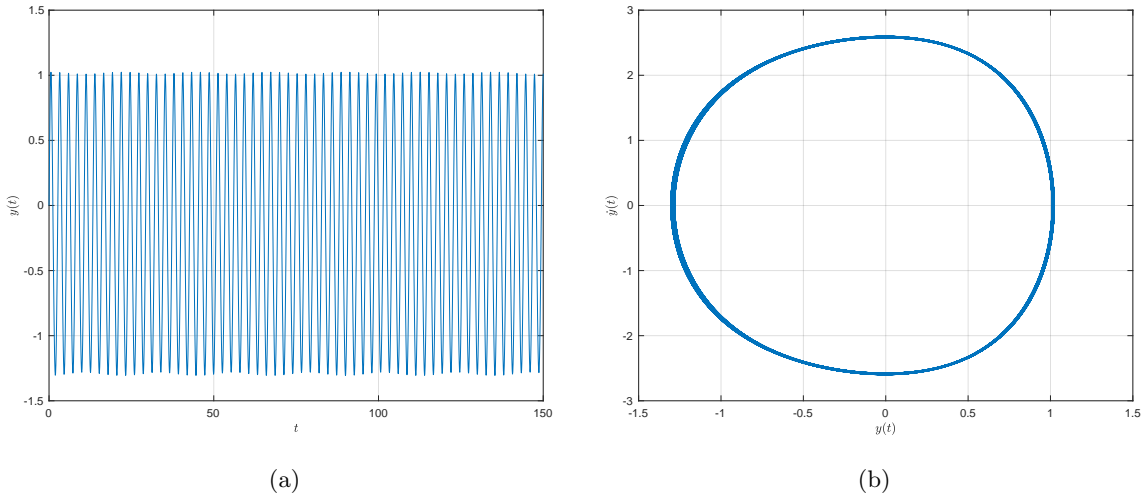


Figura 3.5: Representació de les solucions del sistema en el cas de la barra amb connexió al terra amb una condició de temps final $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de la posició, y , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquesta posició, és a dir, la velocitat vertical, en funció de la pròpia posició.

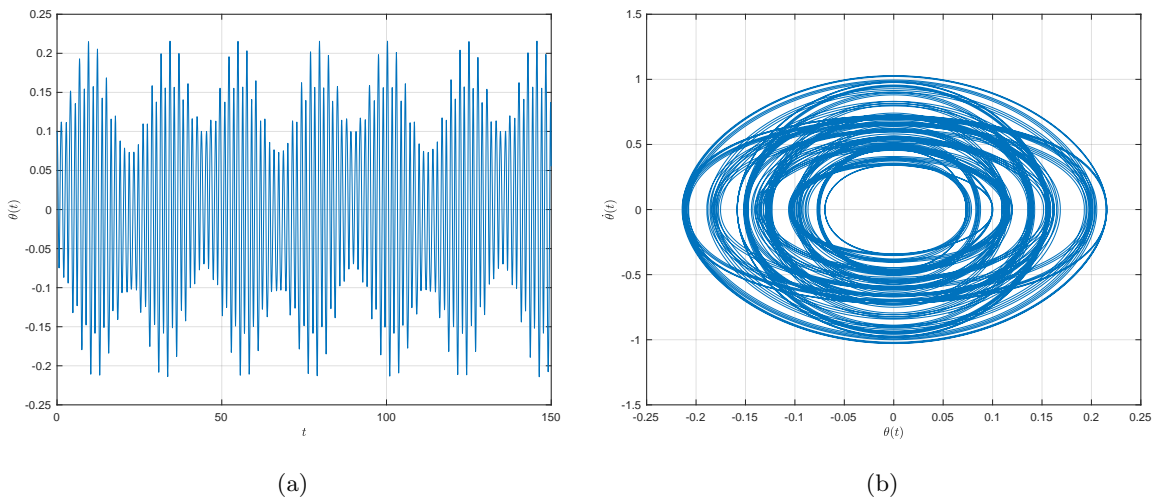


Figura 3.6: Representació de les solucions del sistema en el cas de la barra amb connexió al terra amb una condició de temps final $t = 150$. A la figura (a) es representa la variable de gir angular, θ , en funció del temps i a (b), el retrat de fase on es mostra la derivada d'aquest gir, és a dir, la velocitat angular, en funció de la pròpia posició angular.

Actualitzem els sistemes d'equacions (3.2) i (3.3) per completar-ho amb les constants K_y i K_θ de subjecció al terra obtenint,

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\frac{\partial V}{\partial y}(y, \theta) = f(y + \sin \theta) + f(y - \sin \theta) - 2K_y y, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \varphi \\ \dot{\varphi} = -3 \frac{\partial V}{\partial \theta}(y, \theta) = 3 \cos \theta (f(y + \sin \theta) - f(y - \sin \theta)) - 6K_{\theta} \theta. \end{cases} \quad (3.7)$$

Amb un angle inicial $\theta(0) = 0.01$, les constants $K_y = K_{\theta} = 1$ i totes les altres condicions inicial nul·les, n'obtenim els resultats mostrats a les figures 3.5a, 3.5b, 3.6a, 3.6b.

Aquests resultats de les figures 3.5a, 3.5b, 3.6a, 3.6b, ens mostren una estabilitat, tant en el moviment vertical, com de torsió de la barra, molt més evident que en el cas de la barra lliure. La subjecció al terra provoca oscil·lacions pràcticament periòdiques i, per tant, retrats de fase centrats en un únic punt. Aquí es destaca, doncs, la importància de les dues barres inicial i final per aportar estabilitat al sistema.

3.2.1 Integració numèrica dels resultats d'una sola barra amb connexió al terra

Per integrar la barra amb connexió al terra, les equacions del camp seran, en aquest cas, les referents als sistemes (3.6) i (3.7), per tant, entraran en joc les constants K_y i K_{θ} . També es definirà un vector amb les condicions inicials del sistema $X_0 = [\theta(0), \dot{\theta}(0), y(0), \dot{y}(0)]$. Finalment, per a resoldre les equacions diferencials s'utilitzarà el model de Runge-Kutta d'ordre 4 i 5, tal i com es pot veure a l'Annex B.

3.3 Representació del model per n barres

Assumint el sistema d'equacions (2.13) i l'energia potencial V , trobem les noves equacions diferencials que descriuran el sistema per a múltiples barres $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} \ddot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}(Y, \Theta) = 0 \implies \ddot{y}_i = f(y + \sin \theta) + f(y - \sin \theta) - K_y(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}) \\ \ddot{\theta}_i + 3 \frac{\partial V}{\partial \theta_i}(Y, \Theta) = 0 \implies \ddot{\theta}_i = 3 \cos \theta (f(y + \sin \theta) - f(y - \sin \theta)) - 3K_{\theta}(2\theta_i - \theta_{i-1} - \theta_{i+1}) \end{cases} \quad (3.8)$$

Considerem, doncs, l'equació (3.8) seguint l'article [2], amb $n = 16$ (on la primera $n = 0$ i la última $n = 17$ seran d'encastament al terra) i $K_y = K_{\theta} = 320$. Pel que fa a les condicions inicials $(y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0))$, la condició inicial referent a la velocitat angular es pren com a un valor escollit aleatòriament a partir d'una distribució uniforme entre $[-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Per a les variables de posició, prenem inicialment $y_i(0) = 0.1$ i $\dot{y}_i(0) = 10$ per tot $i = 1, \dots, n$. Amb aquestes condicions, cal destacar que el terme angular només apareix en la seva velocitat i amb un valor gairebé nul en comparació als termes verticals.

A la representació de la figura 3.7, es mostren els moviments verticals i de torsió, en blau i negre respectivament, de totes les barres amb les condicions inicials descrites anteriorment. Tot i tenir condi-

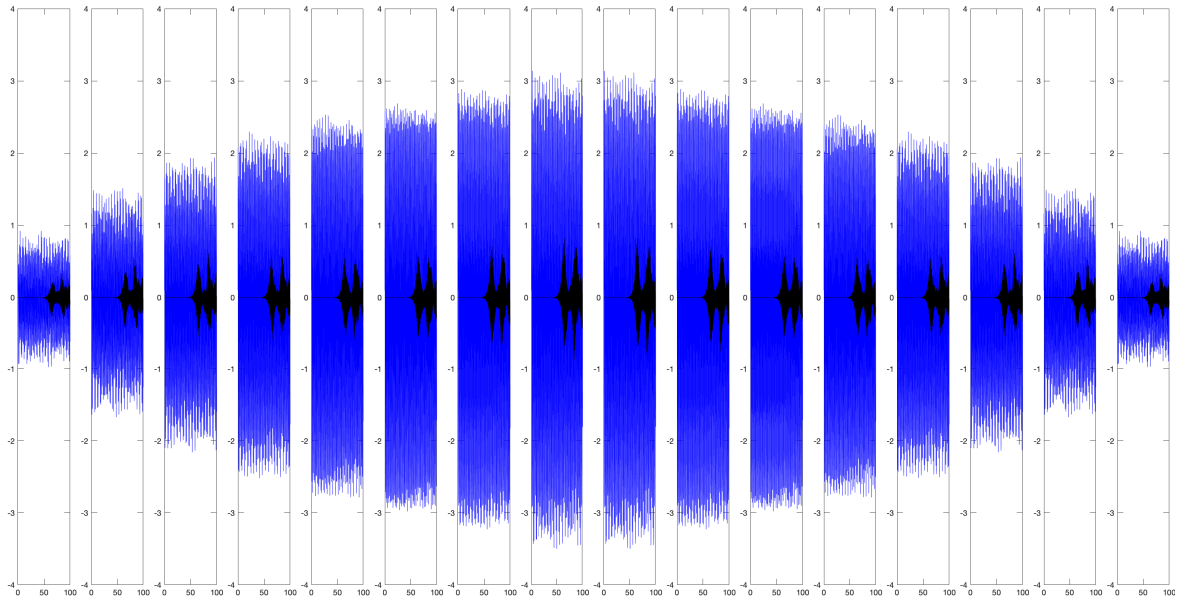


Figura 3.7: Representació de la solució del pont en tota la seva totalitat per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 10$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre).

ons angulars inicials pràcticament nul·les, com s'ha comentat anteriorment, veiem que, a partir d'un cert instant, comencen a aparèixer oscil·lacions de torsió a totes les barres. Per a poder veure el resultat en més detall, a la figura 3.8 es mostren només les barres $i = 1, \dots, 8$ ja que el sistema té un comportament tal que $(\theta_i, y_i) = (\theta_{17-i}, y_{17-i})$ i, per tant, les barres es mouen de manera simètrica.

Com podem veure, doncs, aproximadament en el temps $t = 50$, apareixen les oscil·lacions de torsió. Observem, també com a la barra amb connexió al terra, l'efecte d'aquestes oscil·lacions és molt petit però, a mesura que s'avança a les barres següents, les torsions comencen a créixer més fins arribar a la barra $i = 8$, que arriben a assolir un valor d'amplitud de pràcticament 1. A més, el desplaçament vertical també es fa més notori a mesura ens situem a barres properes al centre del pont.

Fixant-nos en la primera barra a la figura 3.9, podem veure més detalladament l'efecte vist a la figura 3.7. Les oscil·lacions de torsió apareixen aproximadament al temps $t = 50$ i assoleixen un valor màxim d'amplitud aproximat de 0.3. Pel que fa als moviments verticals, existeix una oscil·lació des del principi degut a la velocitat i posició inicial del pont.

Si observem detalladament la barra central $i = 8$ a la figura 3.10, veiem que les oscil·lacions de torsió apareixen al mateix moment que la barra inicial però amb una amplitud molt més elevada. En aquest punt del pont, les oscil·lacions ja arriben a un valor d'amplitud aproximat de 0.8. També podem veure que el moviment vertical ha augmentat d'amplitud respecte la primera barra, en aquest cas arriba a 3.

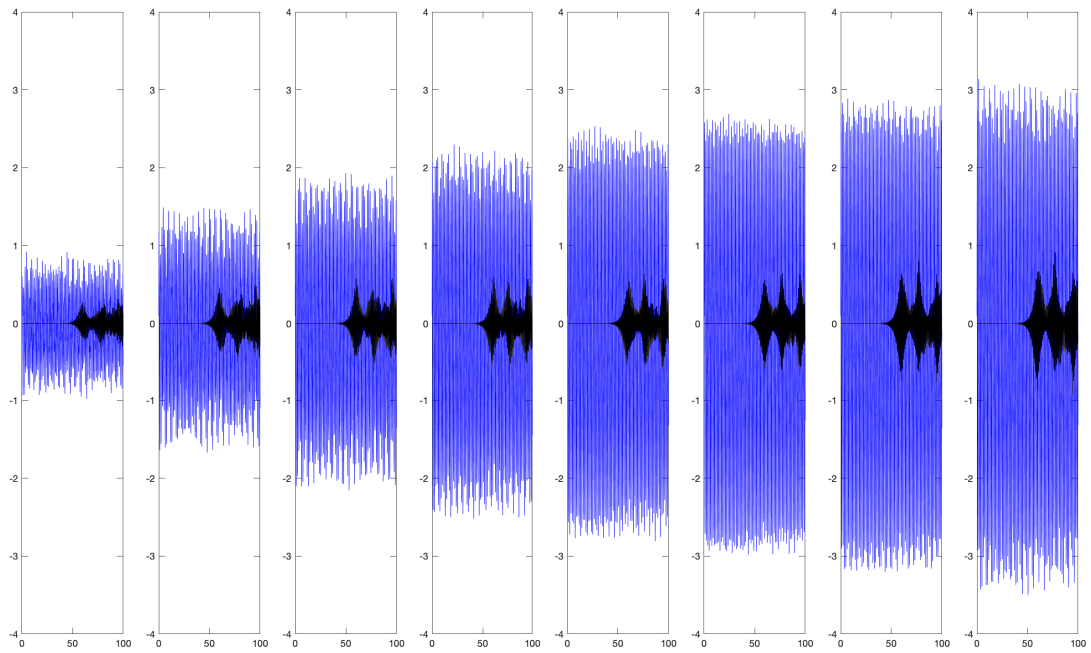


Figura 3.8: Representació de la solució de les 8 primeres barres per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 10$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre).

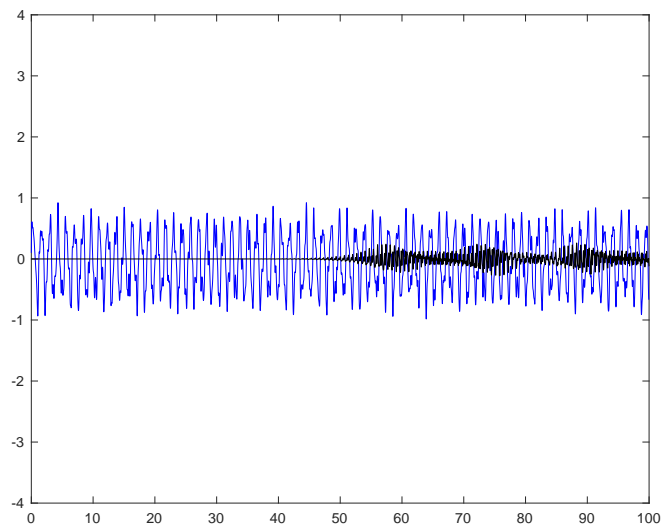


Figura 3.9: Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió de la primera barra per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 10$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre).

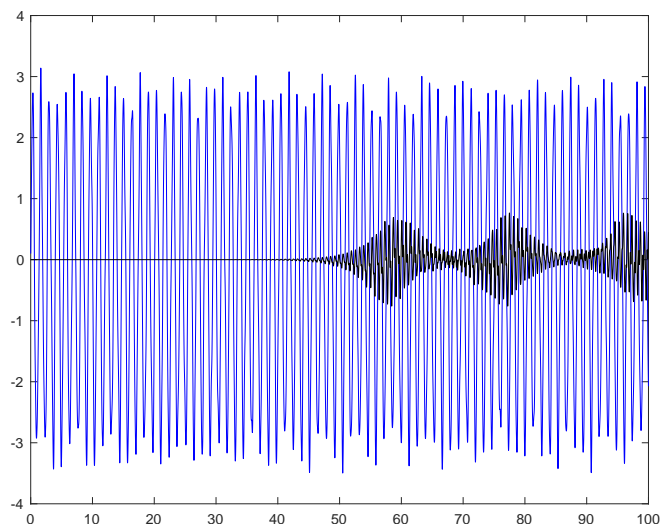


Figura 3.10: Representació de la barra central $i = 8$ per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 10$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre).

Fent diferents proves al model, podem adonar-nos que allò que realment fa aparèixer les oscil·lacions de torsió, és l'increment de la velocitat vertical $\dot{y}(0)$ i, per tant, com hem vist anteriorment a l'equació (2.17), considerant les altres variables inicials pràcticament nul·les, una variació de \dot{y} suposa una variació de l'energia total del sistema. Aquest augment de l'energia suposa un augment encara més pronunciat de les oscil·lacions de torsió.

Per a veure aquest fenomen més clarament, suposem les mateixes condicions inicials que anteriorment però, en aquest cas amb una $\dot{y}(0) = 14$. Com podem veure a la figura 3.11, hi ha un clar augment en els valors que s'assoleixen a cada una de les variables. Per una banda, l'increment de velocitat lineal com era d'esperar, suposa un augment en les oscil·lacions verticals del sistema i per altra banda, les de torsió apareixen abans i amb molta més amplitud i inestabilitat.

Fent un zoom a la barra central del pont a la i , per tant, la més perjudicial, podem veure a la figura 3.12 que les amplituds de les oscil·lacions verticals al centre del pont arriben a 4 i les de torsió a 1.

A partir d'aquest punt, cada augment de la velocitat lineal inicial implica oscil·lacions de torsió cada vegada més grans. Per una $\dot{y}(0) = 15$, veiem el resultat a la figura 3.13.

Com podem veure a la figura 3.13, les oscil·lacions prenen valors tan elevats que fins i tot superen el valor de $\pi/2$ (marcat amb una línia horitzontal vermella), cosa que suposa que el pont hauria girat més de 90° i per tant, superaria el pla perpendicular. Així doncs, les petites perturbacions que es produeixen als primers instants acaben descontrolant completament el sistema.

A la imatge representada a la figura 3.14 podem veure més clarament el que passa a la barra més

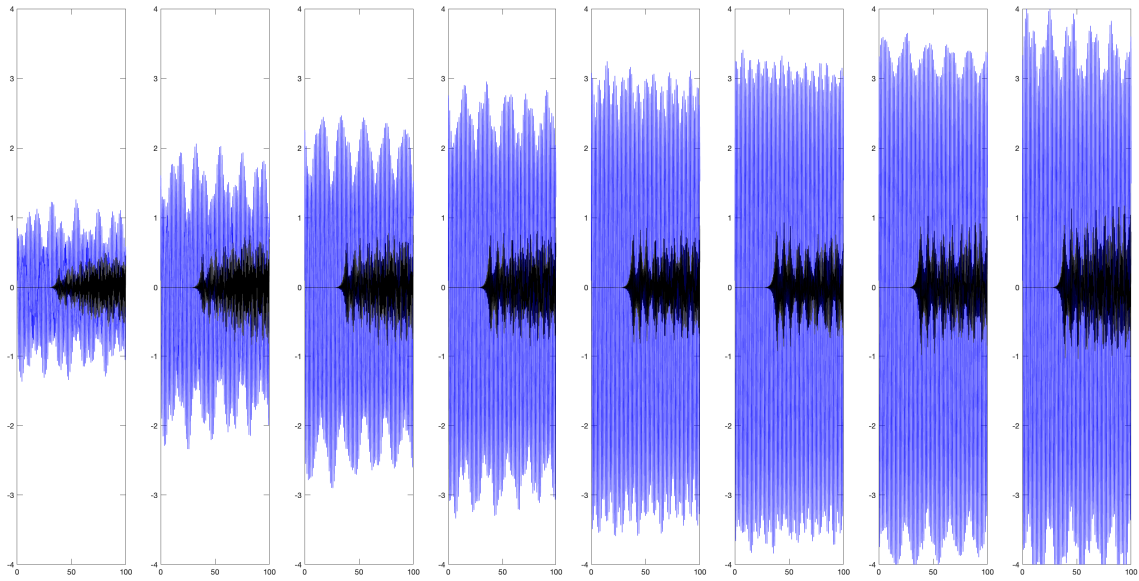


Figura 3.11: Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 14$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre).

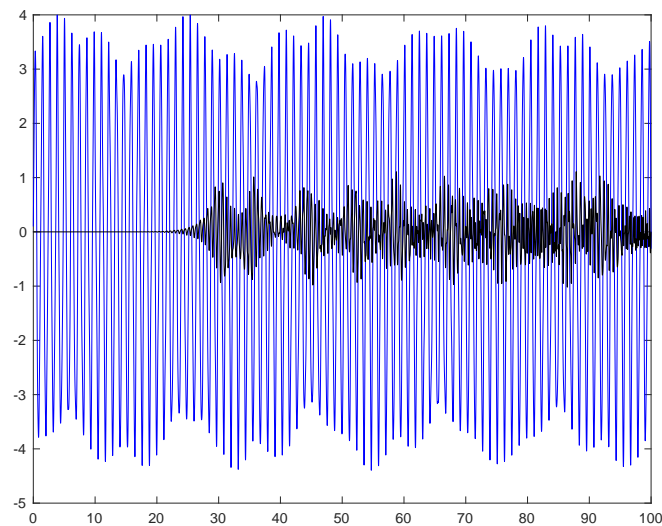


Figura 3.12: Representació de la barra central $i=8$ per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 14$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre).

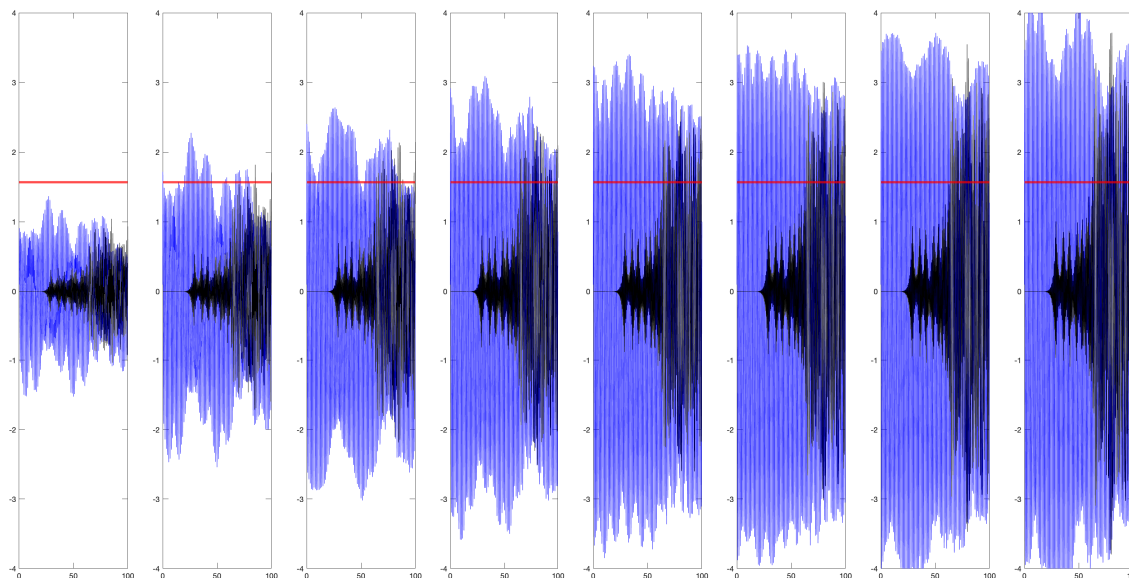


Figura 3.13: Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 15$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre) i la referència a $\pi/2$ (vermell).

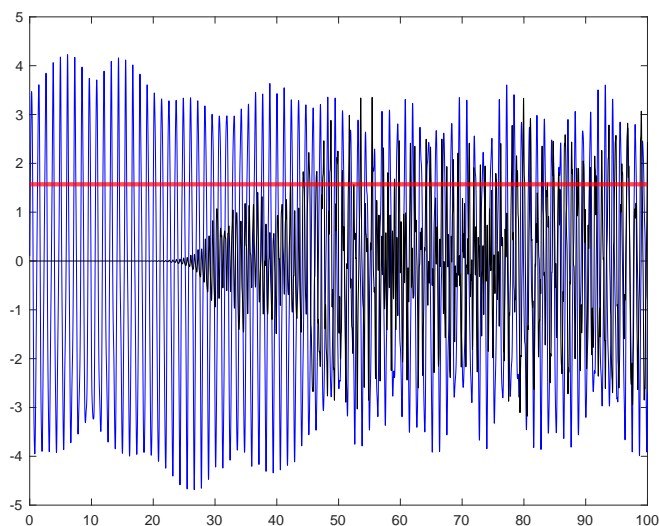


Figura 3.14: Representació de la barra central $i = 8$ per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 15$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre) i la referència a $\pi/2$ (vermell).

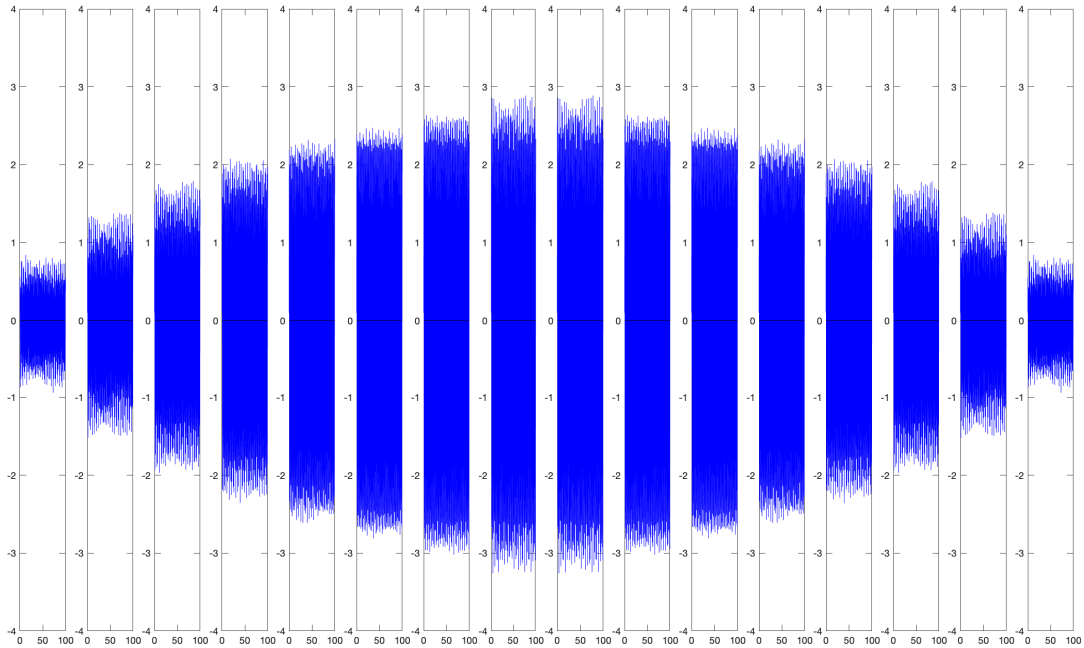


Figura 3.15: Representació del desplaçament vertical (blau) i les sobtades oscil·lacions de torsió per unes condicions inicials $y(0) = 0.1$, $\dot{y}(0) = 9$, $\theta(0) = 0$ i $\dot{\theta}(0) \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$. Es mostra el desplaçament vertical (blau) i les oscil·lacions de torsió (negre) i la referència a $\pi/2$ (vermell).

perjudicial del pont igual que anteriorment. En aquest cas, les oscil·lacions superen el valor de $\pi/2$ des de l'instant $t = 45$ aproximadament.

Per acabar de veure la relació que té la velocitat inicial $\dot{y}(0)$ i per tant, l'energia, amb l'aparició d'oscil·lacions de torsió, tornem a mostrar la solució però, en aquest cas, per una velocitat de $\dot{y}(0) = 9$, inferior a la inicial.

Per aquest valor de velocitat inicial podem observar, a la figura 3.15, que les oscil·lacions de torsió no apareixen i el sistema només es veu afectat per el moviment vertical de les barres. Per tant, podríem concloure que, per valors inicials angulars pràcticament nuls, la velocitat lineal és el que afecta a l'aparició d'oscil·lacions de torsió. A més a més, existeix un punt entre $\dot{y} = 9$ i $\dot{y} = 10$ pel qual comencen a aparèixer les oscil·lacions de torsió

3.3.1 Integració numèrica dels resultats del model per n barres

Per a resoldre aquest sistema més complex haurem de tenir en compte el nombre de barres total i que cada una de les barres té un total de 4 variables. Tanmateix, s'haurà de considerar que existeixen dues barres més (inicial i final) amb condicions nul·les. Així doncs, es començarà per definir un vector que contindrà les condicions inicials de cada una de les barres. Per a fer-ho, definim un vector d'una fila per

$4(n + 2)$ columnes de manera que guardarem les variables en agrupacions de 4 de manera que,

$$X0 = [\theta_0(0), \dot{\theta}_0(0), y_0(0), \dot{y}_0(0), \theta_1(0), \dot{\theta}_1(0), y_1(0), \dot{y}_1(0), \dots, \theta_{n+1}(0), \dot{\theta}_{n+1}(0), y_{n+1}(0), \dot{y}_{n+1}(0)].$$

Un bucle `for` ens permetrà crear aquest vector de condicions inicials, que definirem una mateixa variable cada 4 posicions. Per exemple, la variable θ es trobarà dins la llista cada 4 posicions.

Haurem de tenir en compte que la variable de velocitat angular és un valor aleatori entre $[-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$ que s'ha generat a partir d'una distribució uniforme, fent servir la funció `rand`.

Generem un vector on es guardaran les solucions de la integració numèrica. Aquest vector tindrà la mateixa forma que el vector $X0$ i es forçaran a les 4 primeres variables (referents a la barra inicial) i les 4 últimes variables (referents a la barra final) perquè prenguin valors nuls. Per a generar el camp, utilitzem les equacions del sistema (3.8) i les solucions d'aquest sistema es guardaran en el vector solució comentat.

El codi referent a la integració numèrica dels resultats del model per n barres es pot veure a l'Annex C.

Capítol 4

Estabilitat de l'oscil·lació vertical

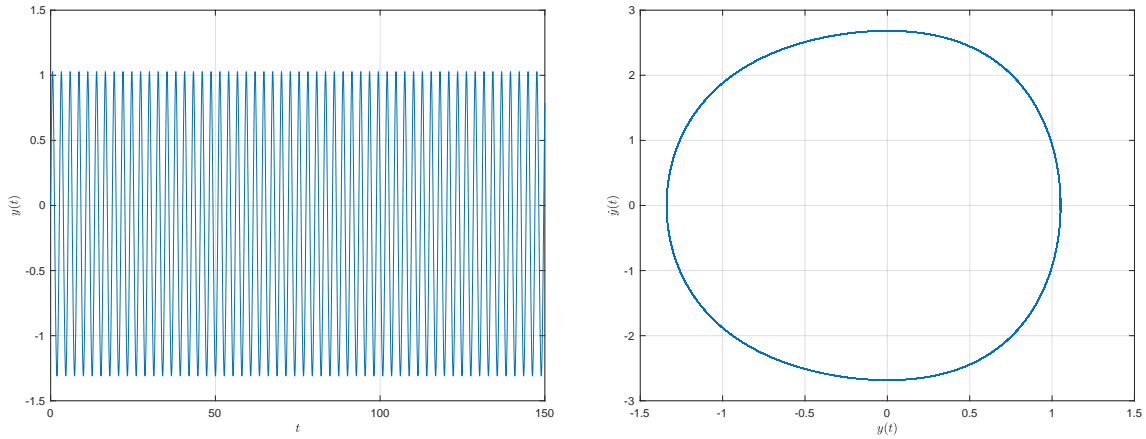
En aquest capítol, s'estudiarà l'estabilitat de l'òrbita periòdica existent a la barra amb connexió al terra. Si observem les equacions del moviment (2.6) i (2.7), si les condicions inicials prenen valors de $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ la solució roman dins del pla $\theta = \dot{\theta} = 0$ indefinidament, ja que si la velocitat angular $\dot{\theta}(0) = 0$, l'acceleració $\ddot{\theta}$ també serà nul·la i per tant, $\theta(t) = \dot{\theta}(t) = 0$ per qualsevol temps t . Per altra banda, de l'equació (2.6) obtenim,

$$\ddot{y} = \frac{2}{m}f(y) = \frac{2}{m}(-y - y^2 - y^3).$$

Aquesta equació diferencial presenta òrbites periòdiques per qualsevol condició inicial $y(0)$ i $\dot{y}(0)$, ja que representa un moviment oscil·latori vertical. Com podem veure a la figura 4.1, per unes condicions inicials $(\dot{\theta}(0), \theta(0)) = (0, 0)$ el sistema contempla una òrbita d'oscil·lació vertical totalment periòdica. Per tal d'analitzar l'estabilitat d'aquesta òrbita periòdica s'utilitzarà el mapa de Poincaré.

El sistema és conservatiu segons el model proposat [2] i, per tant, sabent que l'energia total del sistema es conserva, podem fixar un valor d'energia $E_0 > 0$ tal que l'energia (2.17) satisfà $\mathcal{E}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) = E_0$. Aquesta energia serà aquella que fixarà l'òrbita periòdica que volem estudiar. Amb aquest valor d'energia fixat, ens trobem davant d'un sistema amb 4 variables i una equació que les relaciona, per tant, es defineix un sistema tridimensional.

L'aplicació de Poincaré ens permetrà analitzar aquest sistema 3-dimensional amb una secció bidimensional de la superfície. Per tant, com que l'objectiu és conèixer l'estabilitat del l'òrbita periòdica, tindrem en compte totes les variables que afecten a aquesta estabilitat total i definirem la velocitat vertical inicial com a funció dels termes angulars, sempre tenint en compte la conservació de l'energia. Partint d'una energia fixada E_0 , es defineix $\mathcal{U}_{E_0} = \{(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{E}(0, 0, \theta, \dot{\theta}) < E_0\}$ i, per a cada condició inicial



(a) Representació del moviment vertical respecte el temps amb condicions angulars $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ (b) Representació del retrat de fase de la variable posició y amb condicions angulars $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$

Figura 4.1: Òrbita periòdica vertical per $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$

$(\theta(0), \dot{\theta}(0)) \in \mathcal{U}_{E_0}$, es calcula la velocitat inicial $\dot{y}(0)$ que satisfà precisament el valor d'aquesta energia,

$$\dot{y}(0) = \dot{y}(E_0, \theta(0), \dot{\theta}(0)) = \sqrt{2(E_0 - \mathcal{E}(0, 0, \theta(0), \dot{\theta}(0)))} > 0. \tag{4.1}$$

L'òrbita periòdica al punt $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (0, 0)$ és la que s'utilitzarà com a òrbita de referència per generar el mapa de Poincaré. A partir d'aquesta, es prendran condicions inicials properes a aquest punt i es generarà un punt $(\theta, \dot{\theta})$ cada vegada que el sistema torni a passar per $y = 0$ en qualsevol velocitat $\dot{y} > 0$.

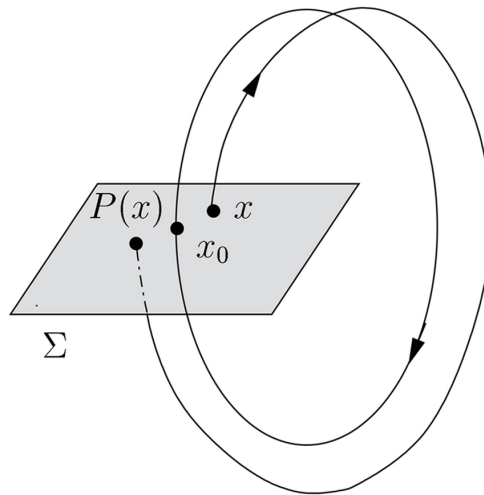


Figura 4.2: Representació gràfica de la secció de Poincaré estreta de [4]

Per entendre gràficament el que representa la secció de Poincaré, fixem-nos en la figura 4.2 de l'article [4]. El pla que es mostra és, en el nostre cas, el pla $y = 0$ on al seu centre x_0 hi trobaríem l'òrbita periòdica $(0, 0)$. El que estudiarem és què passa quan, enlloc de sortir de la nostra òrbita, que sabem que és perfecte, sortim d'un punt proper. Per a fer-ho, en aquest cas, variem el valor de la velocitat angular

(ens trobaríem al punt x representat al pla de la figura) i deixem passar el temps de manera que totes les variables prenguin nous valors (circulin a través de l'espai) fins que ens trobem en una situació de $y = 0$ i $\dot{y} > 0$ (punt $P(x)$). El signe de la velocitat serà la variable que ens definirà la direcció amb la qual es talla el pla. Quan es compleixen tots aquests requisits, mesurem els valors que prenen les variables θ i $\dot{\theta}$ que quedaran representades al seu pla. Això ho fem per diferents valors de velocitat angular i mirem si l'òrbita periòdica és estable o no, és a dir, si només té un centre i és al punt $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 0)$, el nostre sistema orbitarà entorn aquest punt. En canvi, si en generen altres punts d'estabilitat i per tant, té un centre que no és el $(0,0)$, el nostre sistema deixa de ser estable a la nostra òrbita i passa a orbitar a altres centres, que evidentment no són del nostre interès.

Així doncs, mostrem els mapes de Poincaré per diferents valors d'energia fixats $E_0 = 3.4 \dots 3.8$ on veiem la representació del pla $y = 0$. Cada un d'aquests mapes estudia punts propers a la òrbita periòdica que només canvien en el seu valor de $\dot{\theta}$ inicial, que pren valors de $(-0.8, 0.8)$.

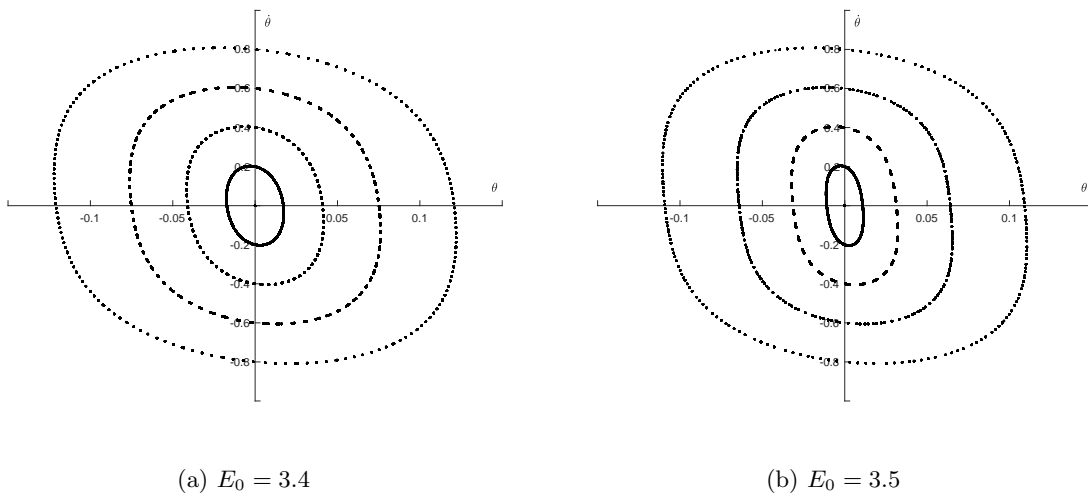


Figura 4.3: Mapa de Poincaré per $E_0 = 3.4$ i $E_0 = 3.5$

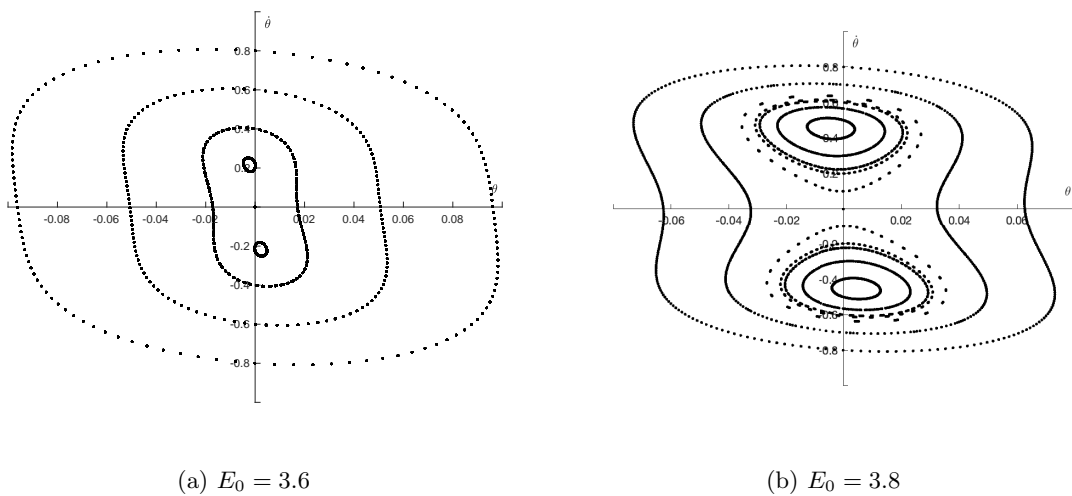


Figura 4.4: Mapa de Poincaré per $E_0 = 3.6$ i $E_0 = 3.8$

Com podem veure al recull de gràfiques 4.3a, 4.3b, 4.4a i 4.4b si l'energia fixada E_0 no supera el valor de 3.5, el sistema es manté estable a l'òrbita periòdica $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 0)$. Quan l'energia pren el valor de $E_0 = 3.6$, l'òrbita periòdica es desestabilitza i surt d'aquesta bifurcant-se en dos punts d'estabilitats diferents al $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 0)$. Aquest punt d'inestabilitat, doncs, es troba entre les energies 3.5 i 3.6. A mesura que aquest valor augmenta, el descontrol del sistema és més rellevant. Ho podem veure a la figura 4.5 amb una energia $E_0 = 5$ la qual el sistema ha deixat de ser estable al punt $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 0)$ i s'ha bifurcat en dos punts d'estabilitats diferents prop de $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 1)$ i $(\dot{\theta}, \theta) = (0, -1)$.

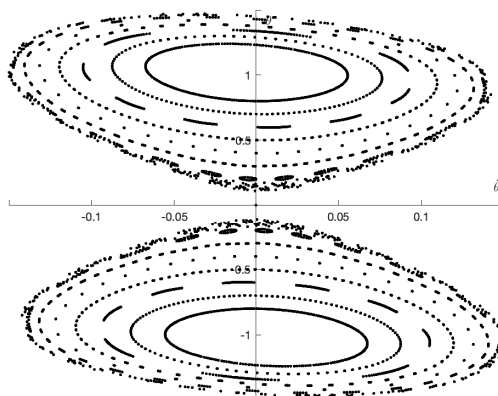


Figura 4.5: Mapa de Poincaré per $E_0 = 5$

Augmentant el valor d'iteracions i de condicions inicials d'angle $\dot{\theta}(0)$ per l'energia $E_0 = 5$, el resultat és el de la figura 4.6

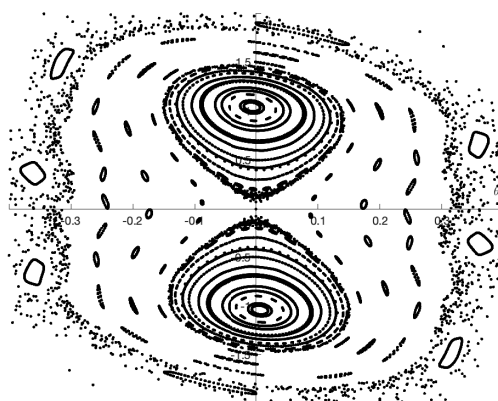


Figura 4.6: Mapa de Poincaré ampliat per $E_0 = 5$

Com podem veure, allò que semblava un comportament igual d'inestable que per energies superiors a $E_0 = 3.6$, el resultat té molta més riquesa dinàmica. Per condicions inicials properes a $(0, 0)$ sí que és veritat que el sistema es desestabilitza en dues bifurcacions als punts aproximats de $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 1)$ i $(\dot{\theta}, \theta) = (0, -1)$ però quan els valors de $\dot{\theta}$ comencen a allunyar-se de l'origen, podem veure la formació

de petites illes que evidencien la presència de solucions subharmòniques. És a dir, solucions periòdiques que travessen diverses vegades el pla abans de tornar a tancar. Per valors més allunyats, podem veure la generació de punts completament caòtics.

Una altra manera de veure aquest canvi en l'estabilitat és mostrant-ne la gràfica de la variació de l'angle en funció del temps per una mateixa condició inicial i diferents valors d'energia. Per valors d'energia estables dels mapes de Poincaré anterior ($E_0 = 3.4$ i $E_0 = 3.5$) podem veure'n la representació gràfica a les figures 4.9a i 4.9b

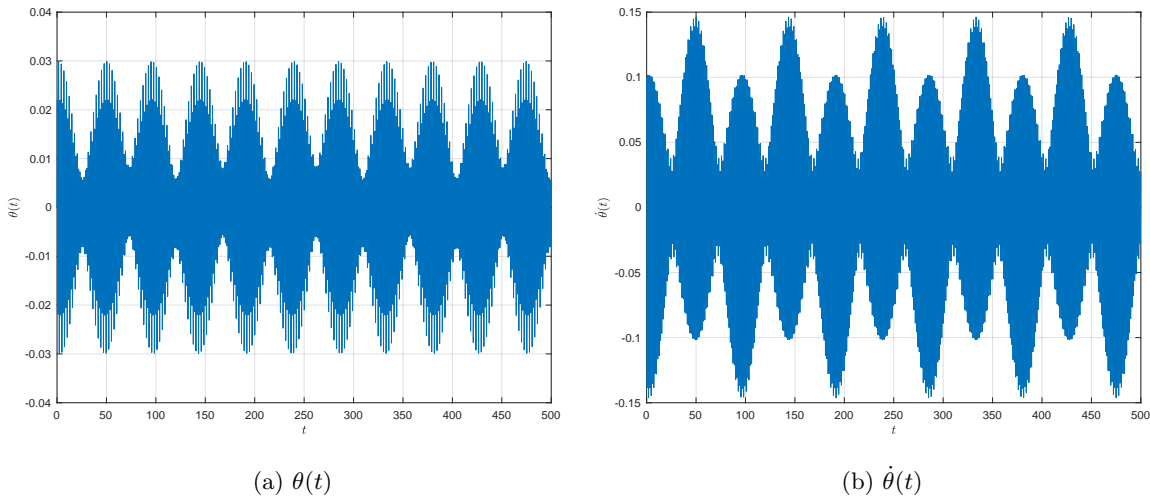


Figura 4.7: Representació de les variables θ i $\dot{\theta}$ en funció del temps per una energia de $E_0 = 3.4$

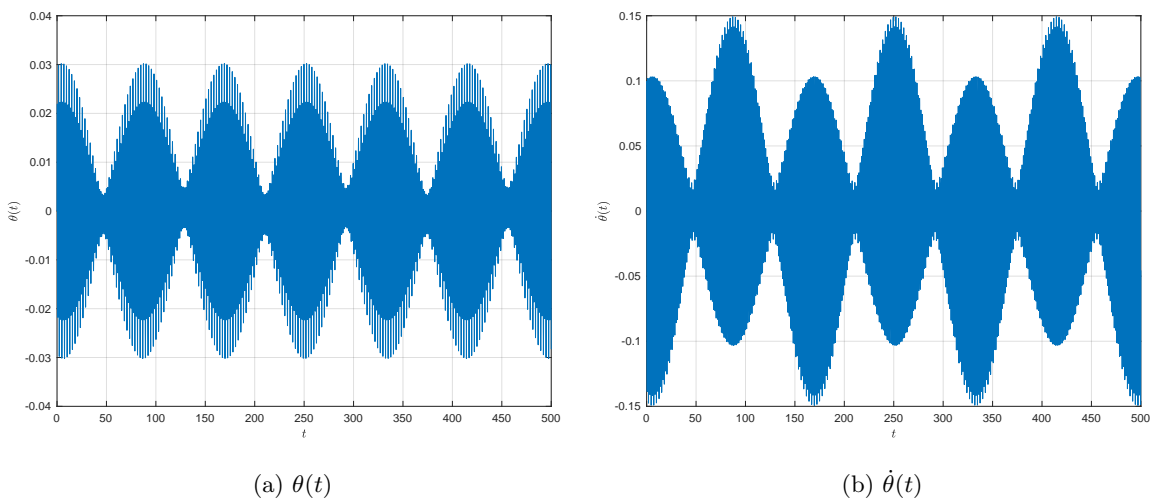


Figura 4.8: Representació de les variables θ i $\dot{\theta}$ en funció del temps per una energia de $E_0 = 3.5$

Com es pot observar, per valors d'energia inferiors a 3.5, el sistema oscil·la com a màxim a una amplitud de 0.03 i només podem veure un canvi en el període de les oscil·lacions, que augmenta amb l'augment d'energia. Quan aquesta energia passa a prendre el valor de 3.6, l'amplitud de les oscil·lacions arriba a un valor màxim superior a 0.08. Observant el comportament de la derivada de l'angle en funció

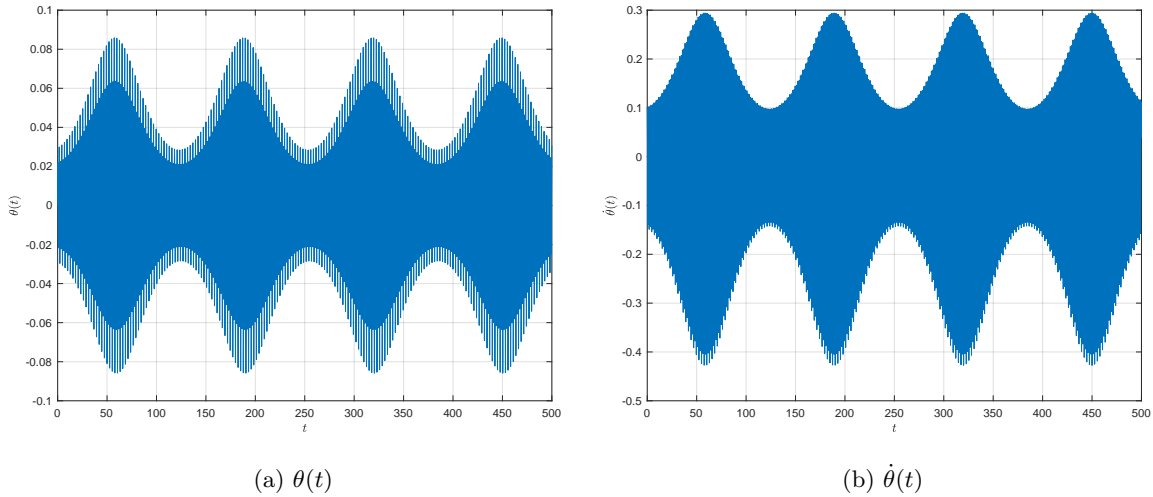


Figura 4.9: Representació de les variables θ i $\dot{\theta}$ en funció del temps per una energia de $E_0 = 3.6$

del temps també podem veure un canvi entre els valors d'energia inferiors a 3.5 i el de 3.6. Les oscil·lacions passen a tenir un període més elevat i dupliquen el valor de la seva amplitud. Amb aquestes gràfiques es pot tornar a veure com, un augment d'energia al sistema, provoca un augment de les oscil·lacions de torsió, de manera que, per valors inferiors a $E_0 = 3.5$, l'amplitud de les oscil·lacions es manté al voltant del 0. Però, passat aquest punt d'energia i situant-nos al punt amb $E_0 = 3.6$, les oscil·lacions es fan molt més notòries, i arriben a oscil·lar a valors més llunyans a $\theta = 0$. Aquest allunyament de les oscil·lacions és, bàsicament, la inestabilitat que observàvem als mapes de Poincaré.

4.0.1 Representació numèrica dels Mapes de Poincaré

Per a generar els mapes de Poincaré, s'estudia l'estabilitat de l'òrbita vertical a la barra amb connexió al terra. Per tant, el camp el definirem a partir dels sistemes d'equacions (3.6) i (3.7). Primerament, haurem de definir una energia E_0 que tindrà un valor fixat i a partir d'aquesta, calcularem el valor de velocitat $\dot{y}(0)$ amb l'expressió (4.1) i totes les expressions que hi tenen lloc dins d'aquesta.

Per a poder generar els punts, hem de crear una funció `event`, de manera que generi els valors de θ i $\dot{\theta}$ cada cop que la variable de posició sigui $y = 0$ i direcció sigui $\dot{y} > 0$.

Finalment, generem un bucle que vagi variant la condició de velocitat angular $\dot{\theta}$ de -0.8 a 0.8 amb intervals de 0.2 i ens vagi generant nous punts per cada nova condició inicial. Per a cada una d'elles, existirà un valor `kmax` que determinarà el nombre d'`events` que s'han de complir per passar a la següent condició inicial de velocitat angular $\dot{\theta}$.

Capítol 5

Variació de la funció f

Com hem vist des d'un bon principi, la funció f és aquella que s'avalua als extrems de la barra i actua com a força recuperadora. L'expressió més senzilla que pot prendre aquesta funció és la llei de Hooke i per tant, es descriurà com $f = -s$. Tot i així, aquesta funció és lineal i degut al fet del desacoblament del sistema comentat a la secció 2.1.2, s'ha de trobar una nova expressió que approximi de la millor manera una equació lineal. És per aquest motiu que la funció proposada consta d'un terme de grau 1, s . El terme quadràtic s^2 , ens dona concavitat a la funció i per últim, el terme cúbic s^3 és necessari ja que dona forma de paràbola a la funció F , amb el corresponent terme $\frac{s^4}{4}$. Un cop vista la necessitat de cada un dels termes, s'arriba a la conclusió que la funció f ha de ser de grau senar ja que F ha de seguir una paràbola positiva i poder ser acotada al moment de calcular l'energia.

A partir d'aquí, com més gran sigui el grau (parell) de la funció F , menys energia podrà assumir el sistema abans de desestabilitzar-se.

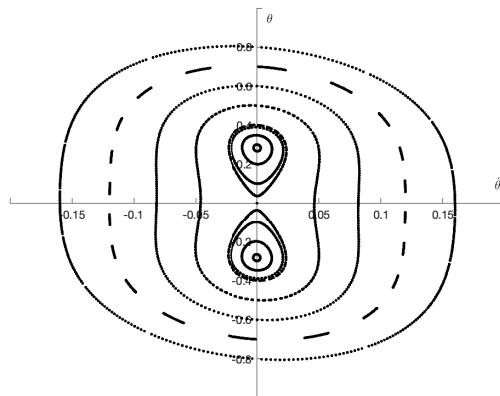


Figura 5.1: Mapa de Poincaré per una funció F parell de grau 6 per una energia $E_0 = 1.5$

A la figura 5.1 veiem el mapa de Poincaré considerant la funció $f(s) = -(s + s^2 + s^3 + s^5)$ i per tant, $F(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^6}{6}$. En aquest cas, per una energia aproximada de $E_0 = 1.5$ l'òrbita periòdica ja és inestable.

Arribada a la conclusió que la funció F ha de ser de grau parell per poder tenir valors fixats a certa energia, tornem a avaluar el sistema però prescindint del terme senar de F , i per tant tenint l'expressió f com $f(s) = -(s + s^3 + s^5)$ i $F(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^6}{6}$. Quan estudiem a quin punt el sistema comença a ser inestable, veiem que a partir d'una energia $E_0 = 1.7$ el sistema ja no és estable i es bifurca en dos centres diferents tal com podem veure a la figura 5.2.

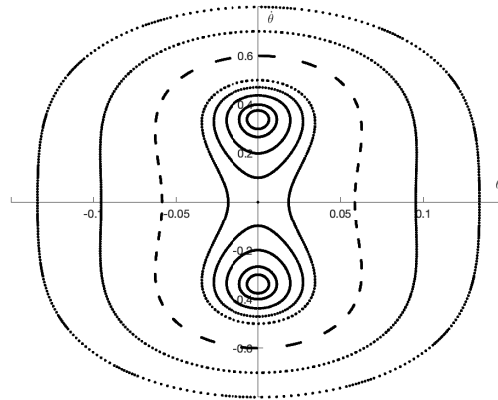


Figura 5.2: Mapa de Poincaré per una funció F parell de grau 6 sense el terme quadràtic per una energia $E_0 = 1.7$

Podem afirmar, doncs, que, a nivell d'estabilitat, suprimir el terme quadràtic de F només ha suposat que el sistema admeti una energia lleugerament més elevada abans de desestabilitzar-se.

Capítol 6

Simulació de la barra central $i = 8$

En aquest capítol, es podran veure fotogrames de la simulació del moviment de la barra central referent al model (2.14) per l'energia més alta estudiada $E_0 = 15$ i, per tant, correspon al de la figura 3.14. Per raons evidents, a la memòria només es veurà la simulació en forma d'imatges, mentre que la part del clip es mostrarà a la presentació.

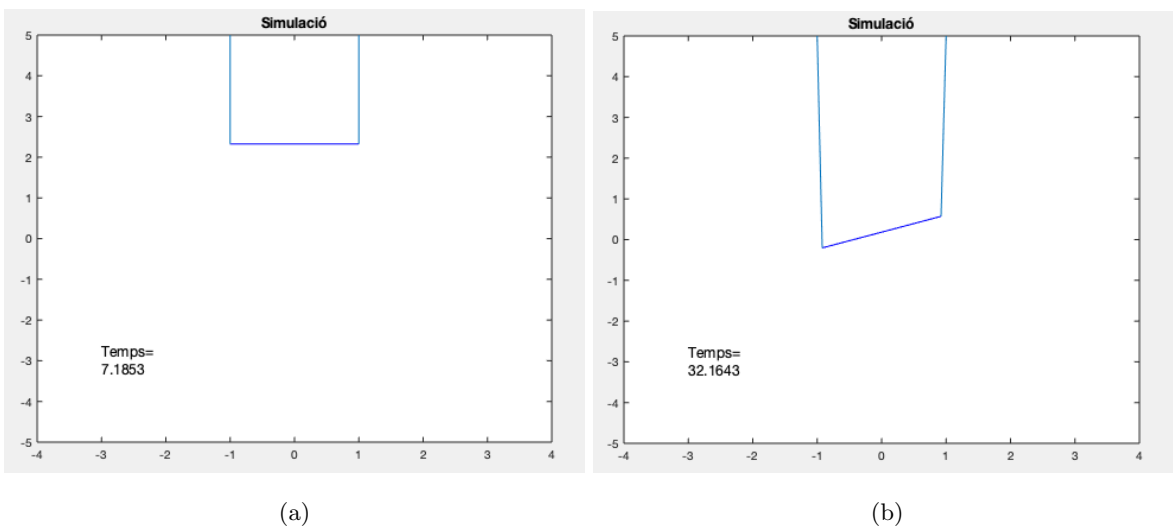


Figura 6.1: Representació de la simulació de la barra als instants aproximats de $t = 7$ i $t = 32$ per una energia inicial $E_0 = 15$.

A la figura 6.1a podem veure la representació de la barra a un temps aproximat de $t = 7$. En aquest moment, té un comportament vertical amb cap símptoma d'oscil·lacions de torsió. A mesura que avança el temps, i ens situem aproximadament a $t = 32$ a la figura 6.1b, veiem com les oscil·lacions de torsió ja són evidents, tal i com també ho podríem apreciar a la figura 3.14. A partir d'aquí, les oscil·lacions cada cop són més pronunciades i irregulars. En el temps aproximat $t = 46$, figura 6.2a, trobem una posició de

l'angle que gairebé arriba a $\pi/2$ i finalment, a la figura 6.2b arriba a fer una volta de π al temps $t = 83$ aproximadament.

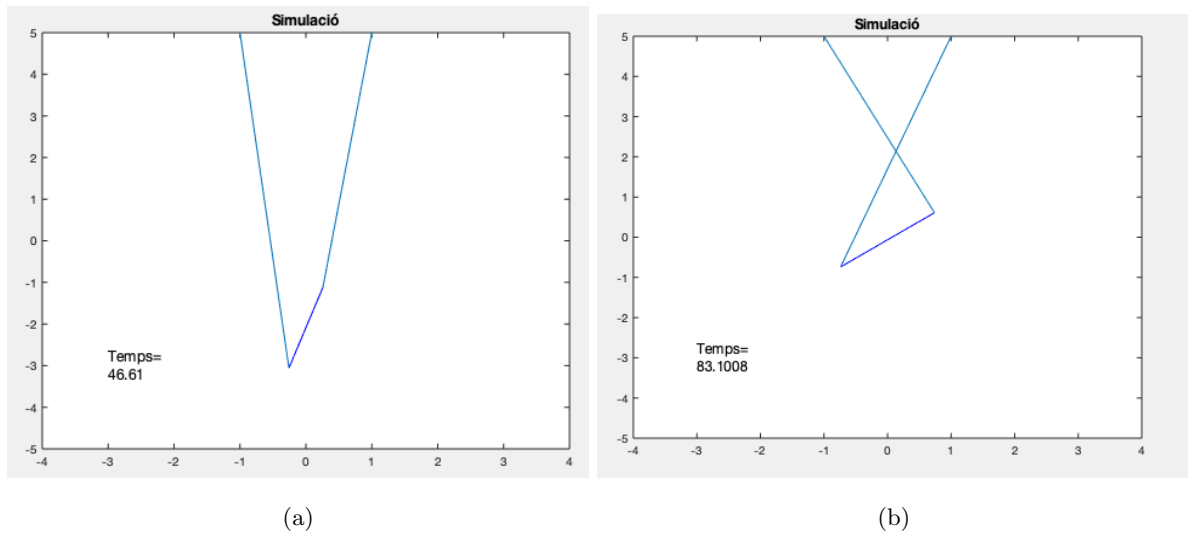


Figura 6.2: Representació de la simulació de la barra als instants aproximats de $t = 46$ i $t = 83$ per una energia inicial $E_0 = 15$.

Aquesta simulació s'ha realitzat per apreciar el creixement sobtat de les oscil·lacions de torsió a la barra més perjudicada del pont, però evidentment, en condicions reals, els tensors no arribarien a suportar les oscil·lacions finals.

6.1 Obtenció de la simulació

Per a poder veure la representació de la barra en moviment, s'ha utilitzat el codi de l'Annex E. Com que la barra escollida per a la simulació ha sigut la barra central $i = 8$, s'ha utilitzat el programa per resoldre el model de n barres. En aquest cas, però, s'han extret els valors de les variables θ i y per tot temps t i s'han representat a partir d'una recta que els seus vèrtexs (x_0, y_0) i (x_1, y_1) depenen de les variables extretes, de tal manera que $x_0 = -\cos \theta(t)$, $y_0 = y(t) + \sin \theta(t)$, $x_1 = \cos \theta(t)$ i $y_1 = y(t) - \sin \theta(t)$.

A partir d'aquí, es guarden tots els fotogrames de cada temps i es projecten per temps de 5 en 5 per agilitzar-ne la visualització. A la imatge final també es mostra el temps per tenir-lo com a referència i poder-lo comparar amb la figura 3.14.

Capítol 7

Resum del pressupost

El cost econòmic d'aquest projecte es troba desglossat a l'annex F i és de 3.267,50 €. Tenint en compte el 13% en concepte de Despeses Generals, el 6% en concepte de Benefici Industrial i el 21% d'IVA, el cost final del projecte ascendeix a QUATRE MIL SET-CENTS QUATRE AMB VUITANTA-SET CÈNTIMS4.704,87 €.

Capítol 8

Conclusions

Un cop desenvolupat el treball, es pot afirmar que s'ha assolit l'objectiu d'estudiar el model proposat a l'article [G. Arioli, F. Gazzola. A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. *Applied Mathematical Modelling* 39 (2015) 901–912] així com les variables que el conformen. A més, s'han aconseguit els resultats matemàtics i numèrics que han permès analitzar el creixement sobtat d'oscil·lacions de torsió.

Inicialment, s'ha estudiat la descripció del model esglaonadament, de manera que a partir de les equacions d'Euler-Lagrange, s'ha aconseguit extreure les equacions del moviment tan vertical com de torsió d'una única barra lliure primer i, finalment, del model que descriu el pont en tota la seva longitud.

Un cop conformades totes les equacions que descriuen els diferents models proposats, s'ham implementat les equacions al MATLAB per poder-ne extreure els resultats numèrics. Les conclusions principals d'aquest tractament numèric es centren bàsicament en el comportament a nivell de moviment vertical i de torsió del sistema. El model d'una barra lliure ens ha permès observar la importància del temps, i que, allò que inicialment semblava un sistema estable amb valors constants de moviment, a partir d'un punt determinat es converteix en inestable. A més, ens ha permès veure l'evident importància d'una subjecció al terra. Així doncs, estudiant posteriorment la barra amb connexió, hem vist com el sistema es converteix estable amb oscil·lacions verticals i de torsió del tot acotades. Finalment, amb l'estudi del model per un nombre n barres, hem pogut veure l'aparició sobtada de les oscil·lacions de torsió a totes i cadascuna de les barres del pont, tot i tenir condicions inicials de torsió pràcticament nul·les. A més, s'ha pogut concloure que, un augment en la velocitat vertical inicial, que suposa un augment en l'energia del sistema, provoca un creixement encara més sobtat de les oscil·lacions i una major amplitud d'aquestes.

Seguidament, l'estudi es centra en l'estabilitat del sistema en l'òrbita periòdica $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$. En aquest capítol, s'ha pogut acabar d'afirmar el que s'havia vist en el tractament numèric. S'han mostrat

mapes de Poincaré per diferents valors d'energia fixats els quals ens han permès adonar-nos d'un canvi en l'estabilitat del sistema. A un valor entre $E_0 = 3.5$ i $E_0 = 3.6$, l'òrbita periòdica passa de ser estable a inestable. Aquesta inestabilitat provoca una bifurcació d'òrbites periòdiques diferents a $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$. Finalment, també s'ha pogut observar aquest punt de canvi a partir de la representació de la posició angular respecte el temps per valors d'energia crítics i s'ha observat que per valors inferiors a $E_0 = 3.5$, la rotació es manté periòdica a un valor de 0.03, molt proper a 0. En canvi, situant-nos a $E_0 = 3.6$ l'amplitud ja supera el valor 0.08, molt més allunyat del 0 respecte valors inferiors a $E_0 = 3.5$. Un cop estudiats aquests valors, s'ha estudiat l'òrbita per un valor d'energia molt més elevat $E_0 = 5$. En aquest punt, com era de suposar, el sistema tampoc té un comportament estable però, a diferència dels anteriors, pels valors més llunyans a 0, algunes de les solucions són completament caòtiques, mentre que d'altres, es comporten formant petits punts d'estabilitat formant solucions subharmòniques.

També s'ha pogut estudiar en més detall la funció f avaluada al model, el motiu de cada un dels seus termes i com afecta a la solució final una variació de la funció.

Finalment, amb la simulació s'ha pogut veure de manera visual el moviment de la barra més perjudicada del pont $i = 8$ i la sobtada aparició de les oscil·lacions de torsió.

Per altra banda, aquest projecte també m'ha portat a conèixer l'ús del llenguatge LaTeX per a la redacció del treball i a augmentar els meus coneixements en la programació amb MATLAB.

Per últim, per a estudis futurs, seria interessant trobar els valors propis de l'aplicació de Poincaré i per tant, conèixer el punt d'energia per el qual l'òrbita periòdica passa de ser estable a inestable. Per altra banda, estudiar la dinàmica caòtica i les solucions subharmòniques que es formen per valors elevats d'energia que s'ha mostrat a la figura 4.6. En general, la complexitat dinàmica del sistema. Per últim, també s'haurien d'estudiar altres models referents al col·lapse del pont de Tacoma Narrows per poder seguir trobant els motius de l'aparició de les oscil·lacions de torsió.

Bibliografia

- [1] O.H. Amman, F. von Kármán, B.Woodruff. The failure of the Tacoma Narrows Bridge, Federal Works Agency, 1941.
- [2] G. Arioli, F. Gazzola. A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. *Applied Mathematical Modelling* 39 901–912, 2015.
- [3] P. Blanchard, R.L. Devaney, G.R. Hall. Differential Equations. 3rd ed. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2006.
- [4] H.G. Brachtendorf, R. Melville, P. Feldmann, S. Lampe R. Laur. Homotopy Method for Finding the Steady States of Oscillators. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 33(6) 867–878, 2014.
- [5] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko. Classical Mechanics. 3rd ed. Addison Wesley, 2002.
- [6] D. Green, W. Unruh. The failure of Tacoma Bridge: A physical model. *American Journal of Physics* 74 706, 2006.
- [7] P.J. McKenna. Large torsional oscillations in suspension bridges revisited: fixing and old approximation. *The American Mathematical Monthly* 106(1) 1–18, 1999.

Annexos

Annex A: Codi de la representació del model d'una sola barra

```
1 close all %tanquem figures anteriors
2 clear all
3
4 f=@(s) [-(s+s^2+s^3)]; %funcio que s'avalua als extrems de la barra
5 camp=@(t,X) [X(2);3*cos(X(1))*(f(X(3)+sin(X(1)))-f(X(3)-sin(X(1))))];...
6 X(4);(f(X(3)+sin(X(1)))+f(X(3)-sin(X(1))))]; %model
7 t0=0; %temps inicial
8 tf=150; %temps final
9 X0=[0.1,0,1,0]; %condicions inicials [angle, velocitat angular, posicio, velocitat]
10
11 % RK45
12 opcions=odeset('AbsTol',1e-8,'RelTol',1e-8);
13 [t,X]=ode45(camp,[t0,tf],X0,opcions);
14 %calcuem les solucions de l'equacio diferencial amb ODE
15
16 a=figure(1) %nova figura
17 plot(t,X(:,3)) %grafica de y(t)
18 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex');
19 ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex');
20 grid on
21 yf=X(end,1)
22 set(a, 'PaperSize', [18 14]);
23 print(a, 'y(t)-T150', '-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
24
25 b=figure(2) %nova figura
26 plot(X(:,3),X(:,4)) %retrat de fase y
27 xlabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex');
28 ylabel('$\dot{y}(t)$', 'interpreter', 'latex');
29 grid on
30 set(b, 'PaperSize', [18 14]);
31 print(b, 'Retrat-y(t)-T150', '-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
32
```

```
33 c=figure(3) %nova figura
34 plot(t,X(:,1)) %grafica de theta(t)
35 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex');
36 ylabel('$\theta(t)$', 'interpreter', 'latex');
37 hold on
38 yline(pi) %linia de referencia a pi
39 yline(2*pi) %linia de referencia a 2pi
40 grid on
41 yf=X(end,1)
42 set(c, 'PaperSize', [18 14]);
43 print(c, 'theta(t)-T150', '-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
44
45 d=figure(4)
46 plot(X(:,1),X(:,2)) %retrat de fase theta
47 xlabel('$\theta(t)$', 'interpreter', 'latex');
48 ylabel('$\dot{\theta}(t)$', 'interpreter', 'latex');
49 grid on
50 set(d, 'PaperSize', [18 14]);
51 print(d, 'Retrat-theta(t)-T150', '-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
```

Annex B: Codi de la representació del model de la barra amb connexió al terra

```

1 close all %tanquem figures anteriors
2 clear all
3
4 ky=1; %especifiquem el valor de la constant ky
5 ko=1; %especifiquem el valor de la constant ky
6 f=@(s) [-(s+s^2+s^3)]; %funcio
7 camp=@(t,X) [X(2);3*cos(X(1))*(f(X(3)+sin(X(1)))-f(X(3)-sin(X(1))))-6*ko*X(1);...
8 X(4);(f(X(3)+sin(X(1)))+f(X(3)-sin(X(1))))-2*ky*X(3)]; %model tenint en compte només la ...
    primera barra;
9 t0=0; %temps inicial
10 tf=150; %temps final
11 X0=[0.1,0,1,0]; %condicions inicials [angle, velocitat angular, posicio, velocitat]
12
13 % RK45
14 opcions=odeset('AbsTol',1e-8,'RelTol',1e-8);
15 [t,X]=ode45(camp,[t0,tf],X0,opcions);
16
17 a=figure(1) %nova figura
18 plot(t,X(:,3)) %grafica de y(t)
19 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex');
20 ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex');
21 grid on
22 set(a, 'PaperSize', [18 14]);
23 print(a, 'y(t)-T150', '-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
24
25 b=figure(2) %nova figura
26 plot(X(:,3),X(:,4)) %retrat de fase
27 xlabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex');
28 ylabel('$\dot{y}(t)$', 'interpreter', 'latex');
29 grid on
30 set(b, 'PaperSize', [18 14]);
31 print(b, 'Retrat-y(t)-T150', '-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
32
33 c=figure(3) %nova figura
34 plot(t,X(:,1)) %grafica de theta(t)
35 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex');
36 ylabel('$\theta(t)$', 'interpreter', 'latex');
37 grid on
38 set(c, 'PaperSize', [18 14]);
39 print(c, 'theta(t)-T150', '-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
40
41 d=figure(4)
42 plot(X(:,1),X(:,2)) %retrat de fase
43 xlabel('$\theta(t)$', 'interpreter', 'latex');

```

```
44 ylabel('$\dot{\theta}(t)$','interpreter','latex');
45 grid on
46 set(d,'PaperSize',[18 14]);
47 print(d,'Retrat-theta(t)-T150','-dpdf') %guardem la grafica com a pdf
```

Annex C: Codi de la representació del model per a diverses barres

```

1
2 global n % numero de barres sera una variable global, ja que la farem servir a la ...
   funcio camp.
3
4 n=16; % numero de barres.
5
6 X0=zeros(4*(n+2),1); %Guardem l'espai per la condicio inicial. 4*(n+1) ja que cada ...
   barra te 4 components inicials (angle, velocitat angle, posicio, velocitat)
7 %tenim n barres + 2 de l'encastament que tindran condicions nulles
8
9 for i=1:n %Posem condicions inicials a cada barra
10     X0(4*i+1)=0; %Estem posant angle inicial de la totes les barres
11     X0(4*i+2)=rand*10^(-5)-5*10^(-6); %Velocitat angle inicial
12     X0(4*i+3)=0.1; %Posicio inicial
13     X0(4*i+4)=15; %Velocitat vertical inicial
14
15 end
16 temps = [0 100]; %Interval de temps on integrem el sistema.
17
18 [t,X] = ode45(@camp,temps,X0); %Integrador Runge-Kutta del camp per resoldre les ...
   equacions diferencials
19
20 figure1=figure('Position', [100, 100, 10000, 1200]); %Configurem la finestra on ...
   apareixara la figura
21 for i=1:8
22     subplot(1,8,i); %Generem un subplot de 1 fila i 8 columnes, depenent de la variable ...
        i (barra)
23     plot(t,X(:,4*i+3),'-b',t,X(:,4*i+1),'-k') %Representem les oscil·lacions verticals ...
        (en negre) ...
24     i de torsio (en blau) a cada subplot
25     hold on
26     yline(pi/2,'-r','LineWidth',3) %Linia horitzontal a pi/2
27     xlim auto
28     ylim([-4 4]) %L'eix y fixat per veure totes les barres amb els mateixos eixos
29 end
30 set (figure1, 'PaperSize', [55 30]);
31 print(figure1, 'l6barres', '-dpdf')
32
33 % Oscil·lacions de la barra n: S'utilitzara per estudiar les barres primera
34 % (1) i central (8) per diferents valors d'energia
35 b=figure(2)
36 plot(t,X(:,4*8+3),'-b',t,X(:,4*8+1),'-k')
37 yline(pi/2,'-r','LineWidth',3)
38 set(b, 'PaperSize', [18 13]);
39 print(b, 'barra8-15', '-dpdf')
40

```

```

41 % La següent funció serveix per definir l'equació diferencial en general.
42 function dX = camp(t,X)
43     %Aqui van els paràmetres del sistema i les funcions que fas servir per
44     %definir el camp.
45     global n;
46     ky=320; %especifiquem el valor de la constant ky
47     ko=320; %especifiquem el valor de la constant ko
48     f=@(s) [-(s+s^2+s^3)]; %funció que s'avalua als extrems de la barra
49     F=@(s) [(s^2/2+s^3/3+s^4/4)]; %derivada de la funció
50
51
52     dX = zeros(4*(n+2),1); %Guardem l'espai per a totes les variables per cada barra. ...
53     %Altre cop tenim n+2 que representaran la connexió al terra.
54     %en aquest cas els índexos per a cada barra van des de i=1 fins a
55     %i=n+2. De manera que definim el camp de la següent manera:
56     %primer les condicions de les barres connectades (i=1 i i=n+2)
57     dX(1) = 0; %Extrem i=0 (amb aquests índexos i=1) fixat a terra. Te 4 variables. Angle
58     dX(2) = 0; %Velocitat angle
59     dX(3) = 0; %Posició
60     dX(4) = 0; %Velocitat
61     dX(4*(n+2)-3) = 0; %Extrem i=n+1 (amb aquests índexos i=n+2) fixat a terra. Te 4 ...
        variables. Angle
62     dX(4*(n+2)-2) = 0; %Velocitat angle
63     dX(4*(n+2)-1) = 0; %Posició
64     dX(4*(n+2)) = 0; %Velocitat
65
66     for i=1:n
67         %definir el camp igual que anteriorment però fent servir els nous índexos.
68         dX(4*i+1) =X(4*i+2);
69         dX(4*i+2) =3*cos(X(4*i+1))*(f(X(4*i+3)+sin(X(4*i+1)))-f(X(4*i+3)-sin(X(4*i+1))))...
70         -3*ko*(2*X(4*i+1)-X(4*(i-1)+1)-X(4*(i+1)+1));
71         dX(4*i+3) =X(4*i+4);
72         dX(4*i+4) =(f(X(4*i+3)+sin(X(4*i+1)))+f(X(4*i+3)-sin(X(4*i+1))))...
73         -ky*(2*X(4*i+3)-X(4*(i-1)+3)-X(4*(i+1)+3));
74     end
75 end

```

Annex D: Codi de l'estudi dels Mapes de Poincaré

```

1 close all %tanquem figures anteriors
2 clear all
3
4 ky=1; %especifiquem el valor de la constant ky
5 ko=1; %especifiquem el valor de la constant ko
6 o0=0; %fixem una posicio angular inicial de 0
7 E0=3.4; %Aqui es variaran els valors de l'energia fixada, de 3.4 a 3.8
8 kmax=200; %punts per cada iteracio
9 f=@(s) [-(s+s^2+s^3)]; %funcio que s'avalua als extrems de la barra
10 F=@(s) [(s^2/2+s^3/3+s^4/4)]; %derivada de la funcio
11 U=@(y,o) [F(y+sin(o))+F(y-sin(o))+ky*y^2+ko*o^2]; %Energia potencial del sistema
12 E=@(o,u,y,v) [v^2/2+u^2/6+U(y,o)]; %Energia total del sistema
13 camp=@(t,X) [X(2);3*cos(X(1))*(f(X(3)+sin(X(1)))-f(X(3)-sin(X(1))))-6*ko*X(1);...
14 X(4);(f(X(3)+sin(X(1)))+f(X(3)-sin(X(1))))-2*ky*X(3)];
15 t0=0; %temps inicial
16 tf=1000; %temps final
17
18 % RK45
19 opcions=odeset('AbsTol',1e-8,'RelTol',1e-8,'Events',@Event);
20
21 W=zeros(kmax,2) %generem una matriu buida que ens permetra tenir W
22 for u0=-0.8:0.2:0.8 %Calculem la solucio des de u0=-0.8 fins a u0=0.8 amb intervals de 0.2
23     v0=sqrt(2*(E0-E(o0,u0,0,0))); %definim la velocitat en funcio de l'energia
24     X0=[o0,u0,0,v0]; %condicions inicials (anira variant el valor de u0)
25     [t,X]=ode45(camp,[t0,tf],X0,opcions); %calculem les solucions de l'equacio ...
        diferencial amb ODE
26     for k=1:kmax %per cada valor de u0 representem kmax punts
27         X0=X(end,:) %prenem com a x0 la ultima de la solucio diferencial per trobar un ...
            altre punt
28         [t,X]=ode45(camp,[t0,tf],X0,opcions); %tornem a calcular les solucions de ...
            l'equacio diferencial amb ODE
29         W(k,:)=X(end,1),X(end,2)]; %generem una matriu de 2 columnes amb les variables ...
            theta i velocitat angular
30     hold on
31     a=figure(1)
32     plot(W(:,1),W(:,2),'k. '); %representem tots els punts de la matriu
33     ax = gca;
34     ax.XAxisLocation = 'origin'; %centrem el punt (0,0) a la grafica
35     ax.YAxisLocation = 'origin';
36     xlabel('$\theta$', 'interpreter', 'latex')
37     ylabel('$\dot{\theta}$', 'interpreter', 'latex')
38     end
39 end
40 set(a, 'PaperSize', [18 14]);
41 print(a, 'poicare38', '-dpdf')
42

```

```
43 function [position, isterminal, direction] = Event(t,X) %funcio per la qual generara una ...
    'foto' cada cop que la y=0 i velocitat-y>0
44 position = X(3); % Valor que volem que sigui 0
45 isterminal = 1; % Halt integration
46 direction = 1; % The zero can be approached from either direction
47 end
```


Annex E: Codi de la simulació d'una barra

```

1  global n % numero de barres sera una variable global, ja que la farem servir a la ...
    funcio camp.
2
3  n=16; % numero de barres.
4
5  X0=zeros(4*(n+2),1); %Guardem l'espai per la condicio inicial. 4*(n+1) ja que cada ...
    barra te 4 components inicials (angle, velocitat angle, posicio, velocitat)...
6  %tenim n barres + 2 de l'encastament que tindran condicions nulles
7
8  for i=1:n %Posem condicions inicials a cada barra
9      X0(4*i+1)=0; %Estem posant angle inicial de la totes les barres
10     X0(4*i+2)=rand*10^(-5)-5*10^(-6); %Velocitat angle inicial
11     X0(4*i+3)=0.1; %Posicio inicial
12     X0(4*i+4)=15; %Velocitat vertical inicial
13
14 end
15 temps = [0 100]; %Interval de temps on integrem el sistema.
16
17 [t,X] = ode45(@camp,temps,X0); %Integrador Runge-Kutta del camp per resoldre les ...
    equacions diferencials
18
19 o=X(:,4*8+1) %extraiem la columna d'angles de la barra 8
20 y=X(:,4*8+3); %extraiem la columna d'angles de la barra 8
21
22 %Grafiquem la barra a partir de dos punts (x0,y0) i (x1,y1)
23 x0=-cos(o); %primer punt x per qualsevol angle
24 y0=y+sin(o);%primer punt y per qualsevol angle
25
26 x1=cos(o); %segon punt x per qualsevol angle
27 y1=y-sin(o); %segon punt y per qualsevol angle
28
29 G(length(t)) = struct('cdata',[],'colormap',[]); % Aquí guardarem les imatges per fer ...
    la pellicula. Son els fotogrames.
30 velocitat=5; % Aquesta es la velocitat amb la que passen els fotogrames, essencialment.
31
32 for i=1:velocitat:length(t) % fem un for i dibuixem la barra en cadascun dels temps.
33     plot([x0(i),x1(i)],[y0(i),y1(i)],'-b'); % això dibuixa una recta que uneix els ...
        punts (x0,y0) i (x1,y1).
34     str=num2str(t(i)); %creem un vector pel temps
35     str={'Temps=',str};
36     title('Simulacio','FontSize',12); %titol
37     text(-3,-3,str,'FontSize',12); %mostrem el vector temps a la figura
38     axis([-4 4 -5 5]); % fixem els eixos per a que totes les barres tinguin els mateixos.
39     G(i) = getframe(gcf); % guardem el fotograma
40 end
41

```

```

42  fig = figure;
43  movie(fig,G,2) % fem la pellicula. El '2' son els bucles de la pellicula. Pots posar ...
      1,2,3,4....
44
45  function dX = camp(t,X)
46      %Aqui van els parametres del sistema i les funcions que fas servir per
47      %definir el camp.
48      global n;
49      ky=320; %especificuem el valor de la constant ky
50      ko=320; %especificuem el valor de la constant ko
51      f=@(s) [-(s+s^2+s^3)]; %funcio que s'avalua als extrems de la barra
52      F=@(s) [(s^2/2+s^3/3+s^4/4)]; %derivada de la funcio
53
54
55      dX = zeros(4*(n+2),1); %Guardem l'espai per a totes les variables per cada barra. ...
      Altre cop tenim n+2 que representaran la connexio al terra.
56      %en aquest cas els indexos per a cada barra comencen a i=1 fins a
57      %i=n+2. De manera que definim el camp de la seguent manera:
58      %primer les condicions de les barres connectades (i=1 i i=n+2)
59      dX(1) = 0; %Extrem i=0 (amb aquests indexos i=1) fixat a terra. Te 4 variables. Angle
60      dX(2) = 0; %Velocitat angle
61      dX(3) = 0; %Posicio
62      dX(4) = 0; %Velocitat
63      dX(4*(n+2)-3) = 0; %Extrem i=n+1 (amb aquests indexos i=n+2) fixat a terra. Te 4 ...
      variables. Angle
64      dX(4*(n+2)-2) = 0; %Velocitat angle
65      dX(4*(n+2)-1) = 0; %Posicio
66      dX(4*(n+2)) = 0; %Velocitat
67
68      for i=1:n
69          %definir el camp igual que anteriorment pero fent servir els nous indexos.
70          dX(4*i+1) =X(4*i+2);
71          dX(4*i+2) =3*cos(X(4*i+1))*(f(X(4*i+3)+sin(X(4*i+1)))-f(X(4*i+3)-sin(X(4*i+1))))...
72          -3*ko*(2*X(4*i+1)-X(4*(i-1)+1)-X(4*(i+1)+1));
73          dX(4*i+3) =X(4*i+4);
74          dX(4*i+4) =(f(X(4*i+3)+sin(X(4*i+1)))+f(X(4*i+3)-sin(X(4*i+1))))...
75          -ky*(2*X(4*i+3)-X(4*(i-1)+3)-X(4*(i+1)+3));
76      end
77  end

```

Annex F: Valoració econòmica

En aquest annex es mostra la valoració de costos del projecte, on s'ha tingut en compte el cost de la mà d'obra i el referent a les amortitzacions.

A la taula 8.1 s'han desglossat els costos de la realització total del projecte.

NUM.	DESCRIPCIÓ	UNITATS	QUANTITAT	PREU UNITARI	IMPORT
1.	Mà d'obra				
1.1	Recerca d'informació i anàlisi de resultats	h	100	10	1.000,00 €
1.2	Programació de codis i simulacions	h	65	14	910,00 €
1.3	Redacció del treball	h	85	12	1.020,00 €
2.	Amortitzacions				
2.1	Amortització del maquinari (ordinador)	h	250	0,05	12,50 €
2.2	Amortització del software (MATLAB)	h	65	5	325,00 €
Subtotal					3.267,50 €
13% Despeses					424,78 €
6% Benefici					196,05 €
Subtotal					3.888,33 €
21% IVA					816,55 €
TOTAL					4.704,87 €

Taula 8.1: Costos associats a la realització del treball