

## Treball final de grau

**Estudi:** Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

**Títol:** Disseny de missions de baix cost al punt L4 del sistema Terra-Lluna

**Document:** Memòria

**Alumne:** Àlex Fernández López

**Tutor:** Esther Barrabés Vera

**Departament:** Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística

**Àrea:** Matemàtica Aplicada

**Convocatòria (mes/any):** 06/2020

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>3</b>
1.1	Antecedents . . . . .	3
1.2	Objecte . . . . .	4
1.3	Abast i especificacions . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Problema Restringit de Tres Cossos (RTBP)</b>	<b>6</b>
2.1	Equacions del moviment . . . . .	6
2.2	Punts d'Equilibri . . . . .	8
2.3	Estabilitat dels punts d'equilibri . . . . .	10
2.4	Energia Associada . . . . .	12
2.5	Regió d'estabilitat del $L_4$ . . . . .	13
2.6	Millora del model . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Pertorbació del Sol en el model</b>	<b>16</b>

3.1	Model Bicircular (BCP) . . . . .	16
3.2	Posició i velocitat inicials del satèl·lit . . . . .	18
3.3	Regió d'estabilitat al voltant del punt d'equilibri . . . . .	19
3.4	Variació de la funció de Jacobi en el BCP . . . . .	22
3.5	Finestres d'oportunitat . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Resultats</b>	<b>27</b>
4.1	Transferència del satèl·lit entre el punt $L_4$ i la Lluna . . . . .	28
4.2	Transferència del satèl·lit entre el punt $L_4$ i la Terra . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Pressupost</b>	<b>40</b>

# Capítol 1

## Introducció

En aquest treball volem mostrar com la comprensió de la dinàmica d'alguns models de la Mecànica Celeste permet, entre d'altres, el disseny de missions realistes a l'espai. En aquest treball ens centrarem en les missions de transferència de satèl·lits a uns punts específics del sistema Terra-Lluna anomenats punts de llibració o equilibri. La seva posició i dinàmica particular els fa grans candidats per futures aplicacions espacials [5]. Per dur a terme aquest estudi s'han utilitzat dos models bàsics: el Problema Restringit a Tres Cossos (RTBP) [2] i el Problema Bicircular (BCP) [3].

### 1.1 Antecedents

El disseny de missions espacials ha anat en augment en els darrers anys amb l'aportació de les eines dels sistemes dinàmics. Més concretament, les missions amb l'objectiu de situar satèl·lits amb telescopis i altres eines de mesura per a l'estudi de radiació, vent solar, mapeig del cel profund etc [10, 9].

Majoritàriament aquests satèl·lits es col·loquen en els coneguts punts d'Euler-Lagrange o d'equilibri  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  (anomenats col·lineals) i  $L_4$  i  $L_5$  (anomenats triangulars). Aquests punts apareixen en models restringits de tres cossos, en el qual considerem dues masses atractores (estrelles, planetes, llunes) i un petit cos de massa menyspreable (nau espacial si parlem de missions, o asteroides).

Una de les primeres missions realitzades en un dels punts d'equilibri és SOHO, un telescopi que orbita el punt  $L_1$  del sistema Sol-Terra des de fa més de 25 anys amb l'objectiu d'explorar l'helimosfera i el vent solar. [7]. Un altre exemple és Gaia (ESA, 2013), que des del punt  $L_2$  (oposat al Sol des de la Terra)

està fent un cens d'aproximadament 1000 milions d'estrelles.

Els punts triangulars dels sistema Terra-Lluna poden resultar de gran interès per diverses aplicacions espacials. Actualment, ja s'està plantejant la possibilitat de situar bases permanents a la Lluna. La posició particular dels punts triangulars  $L_4$  i  $L_5$  permet la possibilitat de mantenir les comunicacions directes entre satèl·lits situats a la cara oculta de la Lluna i satèl·lits situats a la Terra. A més, els punts triangulars ofereixen una posició particular per situar telescopis com a font d'observació.

## 1.2 Objecte

L'objectiu d'aquest treball d'investigació és l'estudi de transferències de baix consum des d'una òrbita d'aparcament al voltant de la Terra o la Lluna als punts d'equilibri triangulars  $L_4/L_5$  del sistema Terra-Lluna. Aquestes transferències fan ús de la dinàmica per tenir la mínima despesa energètica (combustible).

Els punts  $L_4/L_5$  apareixen en el model restringit de tres cossos. Aquest model no és prou acurat per a l'objectiu per les seves pròpies característiques com veurem, i és per aquest motiu que ens basarem en un segon model anomenat problema bicircular, considerat com una primera ampliació del problema restringit on es té en compte la influència del Sol.

## 1.3 Abast i especificacions

Moure's a través del sistema Solar requereix un consum d'energia. Aquest consum es tradueix amb una despesa de combustible. El que es pretén en el disseny de missions espacials és minimitzar aquest consum. Habitualment, la major despesa d'energia es produeix en el moment de l'enlairament i sortida de l'atmosfera. En algunes missions pot arribar a superar fins i tot el 50% del combustible total. Una vegada superat aquest primer pas necessitem algun mecanisme que ens propulsi i ens faci canviar de trajectòria. Aquest impuls es coneix coma  $\Delta_v$  i requereix també un consum d'energia. Afortunadament, per a l'exploració espacial existeixen els camins de baix cost (low energy transfers) que permeten la navegació lliure (moure's d'un punt a un altre sense despesa de combustible).

Per dur a terme aquest tipus de missions, primer es col·loca el satèl·lit en una òrbita baixa (LEO), de l'anglès Low Earth Orbit, entre 200 i 2000 km d'altura sobre la superfície terrestre [11], i a continuació cal buscar la posició i velocitat adequades per tal d'inserir el satèl·lit en una òrbita que el porti directament a l'objectiu final sense més despesa que la maniobra inicial (mesurada com a increment de la velocitat,

$\Delta v$ ). En aquest treball ens centrarem a estudiar únicament la trajectòria del satèl·lit una vegada situat a una òrbita baixa (LEO) sense tenir en compte el moment de l'enlairament.

Per això cal prendre un model prou acurat que ens permeti calcular aquestes trajectòries. El model restringit de tres cossos no és adequat per dos motius: primer, en aquest model els punts triangular són estables, i cal una certa inestabilitat per poder-s'hi acostar sense requeriments energètics; segon, aquest model no té en compte la principal font de pertorbació, el Sol.

Per aquests motius, es prendrà com a model de referència un model Terra-Lluna-Sol. En aquest model, ens centrarem en una petita regió de l'espai al voltant de l'objectiu (el punt  $L_4$ ) que serà el nostre “target” (objectiu), el lloc al qual voldrem arribar sortint de la Terra o la Lluna. Intentar arribar a una zona tant concreta directament des d'un dels dos cossos sense més informacions és pràcticament impossible. Per això, farem el plantejament invers: sortirem del punt de destinació i buscarem òrbites que, temps enrere, arriben a la Terra o la Lluna a una distància adequada. Aprofitant el desenvolupament dels programes necessaris per aquesta exploració, buscarem també trajectòries que sortint del punt  $L_4$  i temps endavant arriben a un dels dos primaris.

El model depèn de la fase inicial en la que es trobi el Sol. Cal fer primer un estudi d'aquesta dependència. Per això, ens proposem com a objectius concrets estudiar en funció d'aquesta fase inicial com varien les zones d'estabilitat al voltant dels punts d'equilibri triangulars. Després buscarem quina ràtio de condicions inicials al voltant dels punts d'equilibri, i anant temps enrere i temps endavant, arriben a la Terra o la Lluna; quin és el  $\Delta v$  mínim que es requereix per aquestes condicions inicials; i finalment, quin és el temps de transferència. Esperem, doncs, tenir un catàleg de condicions ordenades segons el temps de viatge i impuls inicial necessari per fer la transferència.

## Capítol 2

# Problema Restringit de Tres Cossos (RTBP)

En aquest capítol explicarem un dels models paradigmàtics dins de la Mecànica Celeste: el problema restringit de tres cossos (RTBP) de l'anglès "Restricted Three Body Problem". Es tracta d'un model senzill però molt potent que ha servit de base per al disseny de moltes missions espacials, i que ens defineix els anomenats punts d'equilibri. Aquest model ens permetrà entendre millor la transferència d'un satèl·lit als anomenats punts d'equilibri, més concretament, al punt  $L_4$  del sistema Terra-Lluna. Entenem com a transferència l'òrbita que connecta una posició inicial i una final. Com que treballarem amb model deterministes, qualsevol òrbita (o solució del problema) vindrà determinada per les posicions i velocitats inicials i finals.

### 2.1 Equacions del moviment

Considerarem dos cossos de massa  $m_1$  i  $m_2$ , anomenats primaris, on l'única força que intervé és la força gravitacional. Considerem a més, un tercer cos de massa infinitesimal que es mou degut a l'atracció gravitatòria dels dos primaris però sense afectar al seu moviment. En aquest cas considerem que els primaris segueixen trajectòries circulars per tant parlarem en tot moment del RTBP circular. Citem com a referència per exemple [2], on es fa un recopilatori de les aplicacions dinàmiques del model.

En aquest tipus de problema resulta especialment útil considerar un sistema de coordenades en rotació o sinòdic que giri a la mateixa velocitat angular que els primaris de manera que aquests es veuen fixos

sobre l'eix horitzontal. Es realitza un canvi d'unitats de temps, massa i distància adequats de tal manera que la constant gravitacional es pot prendre com  $G = 1$ , la distància entre el cos de massa  $m_1$  i  $m_2$  és de la unitat i el període, és a dir el temps que triguen els primaris en fer una volta al voltant del baricentre o centre de masses és dues vegades el nombre  $\pi$ . En aquest cas en particular,  $2\pi$  equival a 28 dies ja que considerem el període lunar. El fet d'estudiar cossos en rotació fa que aparegui també el terme de Coriolis en les equacions de govern.

Així doncs les equacions del problema són (veure, per exemple, [5, 4, 1])

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \partial_x \Omega, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \partial_y \Omega,\end{aligned}\tag{2.1}$$

on

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.\tag{2.2}$$

En l'equació (2.2) apareix el que anomenem paràmetre de masses i ve definit per

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad m_1 > m_2\tag{2.3}$$

En el nostre cas (sistema Terra-Lluna)  $m_1 = 5.972 \times 10^{24}$  kg i  $m_2 = 7.35 \times 10^{22}$  Kg que equivalen a la massa de la Terra i de la Lluna respectivament. Per tant treballarem en tot moment amb un valor fixat de  $\mu$

$$\mu = \frac{7.3 \times 510^{22}}{7.35 \times 10^{22} + 5.972 \times 10^{24}} = 0.0121578.\tag{2.4}$$

En l'equació (2.2) també apareixen els termes  $r_1$  i  $r_2$  que descriuen la distància (mòdul) del cos infinitesimal als primaris que estan fixos en les posicions  $(\mu, 0)$  i  $(\mu-1, 0)$  amb masses  $m_1 = \mu$  i  $m_2 = 1-\mu$ :

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (x - \mu)^2 + y^2, \\ r_2^2 &= (x - \mu + 1)^2 + y^2,\end{aligned}\tag{2.5}$$

Veure la figura 2.1 per a la descripció gràfica del model RTBP.

El fet d'utilitzar un sistema de coordenades sinòdic implica que el sistema dinàmic descrit en les equacions (2.1) és autònom (no depèn explícitament del temps). A més, es tracta d'un sistema de segon ordre ja que ens apareix la segona derivada (acceleració)  $(\ddot{x}, \ddot{y})$ .

El RTBP no es pot resoldre analíticament. És per aquest motiu que serà necessari l'ús de mètodes numèrics per resoldre'l. Per fer-ho cal reduir l'ordre del sistema de tal manera d'obtenir un sistema de quatre equacions diferencials de primer ordre. Així doncs, primer reanomenem les variables:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad \dot{x} = x_3, \quad \dot{y} = x_4\tag{2.6}$$



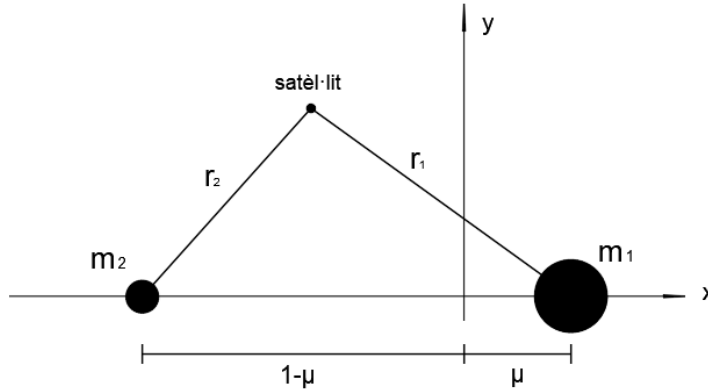


Figura 2.1: Sistema sinòdic de coordenades del RTBP

I escrivim el sistema (2.1) com a sistema de primer ordre com segueix:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3, \\
 \dot{x}_2 &= x_4, \\
 \dot{x}_3 - 2x_4 &= \partial_x \Omega, \\
 \dot{x}_4 + 2x_3 &= \partial_y \Omega,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

En aquest cas continuem tenint un sistema autònom però ara de 4 equacions diferencials d'ordre 1. Per resoldre'l utilitzarem el mètode de Runge Kutta (veure [8]). Més concretament, usarem el mètode de Runge-Kutta amb control de pas d'ordres 4 i 5 implementat en la funció ODE45 del Matlab.

A continuació descriurem les propietats dinàmiques més importants del model. Com a referència on es pot trobar una descripció més àmplia del model citem [2] i les referències incloses en el treball.

## 2.2 Punts d'Equilibri

Existeixen cinc punts d'equilibri en el sistema dinàmic descrit en (2.1) i denotats per  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Aquests es troben en el mateix pla de moviment que els primaris i són els punts crítics de la funció  $\Omega$  descrita en (2.2). Els punts  $L_1, L_2$  i  $L_3$  romanen en el mateix eix que connecta els dos primaris. És per aquest motiu que s'anomenen punts de libració col·lineals i foren descoberts per Euler l'any 1767. Els punts  $L_4$  i  $L_5$  s'anomenen punts de libració triangulars ja que formen un triangle equilàter respecte els primaris. Aquests punts foren descoberts per Lagrange l'any 1772.

Així doncs podem situar els respectius punts d'equilibri en el sistema sinòdic de coordenades descrit en la figura 2.1 de tal manera que  $L_1$  es troba entre els dos primaris ( $\mu - 1 < x_{L_1} < \mu$ ),  $L_2$  es troba a

l'esquerra del primari petit ( $x_{L_2} < \mu - 1$ ) i  $L_3$  a la dreta del primari gran ( $x_{L_3} > \mu$ ). Els punts  $L_4$  i  $L_5$  formen un angle de 60 graus amb els primaris. Vegeu la figura 2.2.

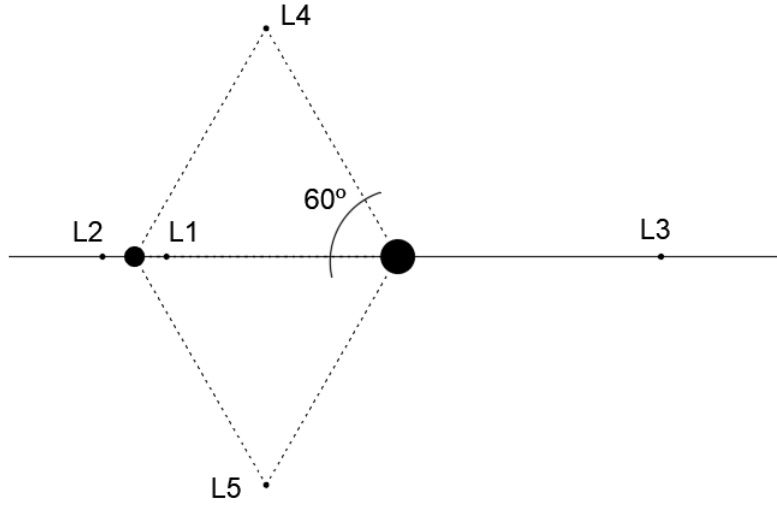


Figura 2.2: Punts d'equilibri del RTBP del sistema Terra-lluna

La seva posició exacta dins del sistema sinòdic (descriu en la figura 2.1) ve donada per les solucions d'una equació de segon grau que depèn del paràmetre de masses. Es poden donar aproximadament per les equacions descrites en (2.8):

$$\begin{aligned} x_{L_1} &= -1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \frac{26}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right) + O(\mu^{4/3}), \\ x_{L_2} &= -1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \frac{28}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right) + O(\mu^{4/3}), \\ x_{L_3} &= 1 + \frac{5}{12}\mu + O(\mu^3), \end{aligned} \tag{2.8}$$

Els punts d'equilibri col·lineals han sigut el destí d'algunes missions espacials com és el cas de Genesis, ISEE-3 i SOHO. [9, 10, 7]

La posició exacta dels punts triangulars del sistema Terra-Lluna és  $(-0.5 + \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

Una de les aplicacions reals dels punts triangulars la trobem als asteroides troians, localitzats al voltant dels punts  $L_4$  i  $L_5$  del sistema Sol-Jupiter.

## 2.3 Estabilitat dels punts d'equilibri

L'estudi de la dinàmica al voltant dels punts d'equilibri és determinant per al disseny de missions espacials i el que marca aquesta dinàmica és l'estabilitat dels punt d'equilibri. Un punt d'equilibri és estable quan un conjunt de condicions inicials properes no escapen d'un entorn en un temps finit fixat; un punt d'equilibri és inestable quan majoritàriament les condicions inicials del seu voltant escapen del seu entorn. En aquest cas hi ha unes direccions al llarg de les que les solucions escapen ràpidament.

Podem definir el sistema descrit en (2.7) com

$$\dot{Z} = f(Z),$$

on  $Z = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Sigui  $z_0$  un punt d'equilibri, per tant  $\dot{z}_0 = 0$ . Si ens situem en una zona molt propera al punt d'equilibri,  $Z = z_0 + \Delta z$

$$\dot{Z} = f(z_0 + \Delta z).$$

Apliquem Taylor de primer ordre:

$$\dot{Z} = f(z_0) + Df(z_0) \cdot \Delta z + \mathcal{O}(\Delta z),$$

on  $Df(z_0)$  és la matriu diferencial del camp avaluada sobre el punt. Si menyspreem els termes d'ordre superior a 1 i sabent que  $f(z_0) = 0$ , les solucions d'aquest sistema poden expressar-se com

$$Z(t) = z_0 + e^{Df(z_0)t} \cdot C^T,$$

on  $C$  és un vector constant depenent de les condicions inicials. Per tant, si les condicions inicials estan a prop del punt d'equilibri, a primer ordre, les solucions es descriuen a partir de la diferencial del camp en el punt d'equilibri.

La matriu jacobiana del sistema descrit en (2.7) es la matriu que conté les derivades primeres:

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Estudiar l'estabilitat d'un punt d'equilibri implica estudiar els valors propis de la matriu diferencial del camp avaluada sobre el punt. Els valors propis de la matriu  $DF$  estan lligats directament amb l'estabilitat dels punts d'equilibri de la manera següent:

Si la matriu  $DF$  és diagonalitzable es pot expressar com a producte de tres matrius

$$Df(z_0) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

on  $P$  és la matriu de canvi de base i la matriu central és una matriu diagonal formada pels valors propis de  $Df(z_0)$ .

Així doncs,

$$e^{Df(z_0)t} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Els valors de  $\lambda$  poden ser reals o imaginaris. En el cas de ser imaginaris purs (sense part real,  $\pm iw$ ), les solucions del sistema d'equacions (aproximadament) es poden expressar com a funcions oscil·latòries o periòdiques de sinus i cosinus i per tant tindrem solucions periòdiques:

$$e^{iwt} = \cos(wt) + i \sin(wt).$$

En canvi, els valors propis reals donen lloc a solucions de tipus exponencials, per tant, que escapen de l'entorn del punt d'equilibri.

Sabent això es poden classificar els punts d'equilibri del model RTBP com segueix:

- Punts d'equilibri col·lineals.

En el cas dels punts  $L_1, L_2$  i  $L_3$  els valors propis associats a la matriu diferencial del camp són del tipus

$$(\pm\lambda, \pm iw),$$

on  $\lambda > 0, w > 0$ .

Aquest sistema, doncs, exhibeix òrbites periòdiques (i també quasiperiòdiques) associades als valors propis complexos ( $\pm iw$ ) i òrbites d'escapament (en temps futur i passat) degut als valors propis reals. És per aquest motiu que els punts col·lineals es consideren inestables.

Tot i així, podem trobar òrbites periòdiques al voltant dels punts d'equilibri col·lineals degut als valors propis complexos ( $\pm iw$ ) tal i com podem veure en la figura 2.3.

- Punts d'equilibri triangulars.

Pel que fa els punts d'equilibri triangulars  $L_4$  i  $L_5$  els valors propis associats a la matriu diferencial són imaginaris purs

$$(\pm iw_1, \pm iw_2),$$

sempre que  $\mu$  sigui inferior al valor de Routh:  $0 < \mu < \mu_r = 0.0381$ .

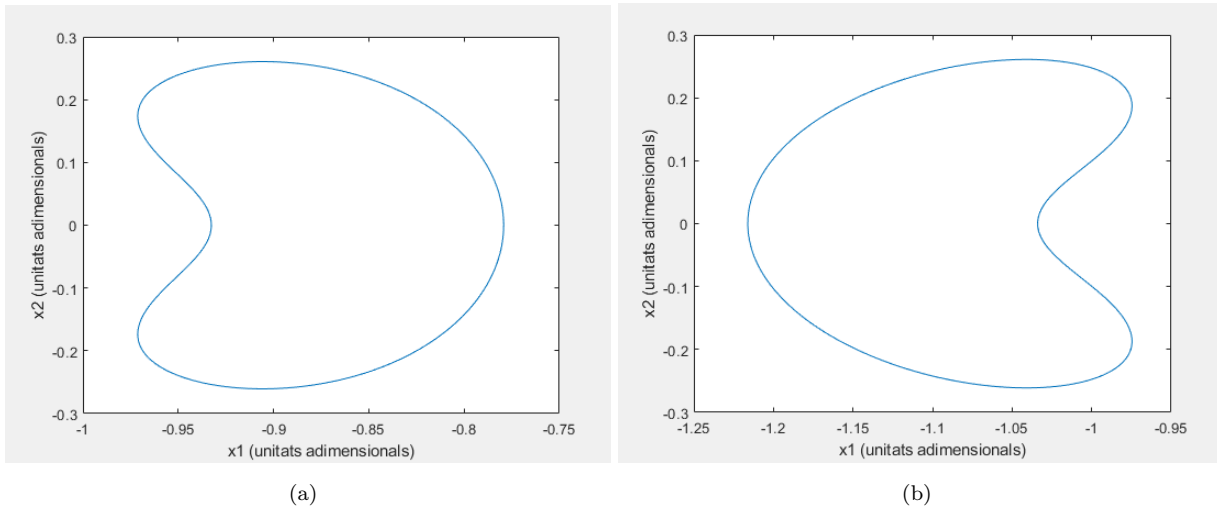


Figura 2.3: Òrbites periòdiques al voltant dels punts  $L_1$  i  $L_2$  respectivament

Això representa que els punts són linealment estables i que en l'aproximació de primer ordre les solucions es poden expressar amb forma de sinus i cosinus i per tant tindrem solucions periòdiques i quasiperiòdiques. En particular, seran òrbites que romandran donant voltes al voltant del punt durant molt temps.

## 2.4 Energia Associada

El RTBP és de caràcter hamiltonià. Aquest tipus de sistemes es caracteritzen per ser conservatius, és a dir, existeix una magnitud, anomenada energia, que es manté constant sobre tota solució del model. També és coneguda com a constant de Jacobi i s'expressa com

$$C_j = 2\Omega(x, y) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2. \quad (2.10)$$

Aquesta propietat resulta especialment útil ja que permet estudiar el problema per diferents valors d'energia. Fixat un valor de  $C_j$  s'estudien les solucions que viuen en aquell nivell d'energia.

A continuació podem veure una taula on podem observar la posició dels diferents punts d'equilibri i el seu valor d'energia associat (Constant de Jacobi) en el model RTBP Terra-Lluna.

Taula 2.1: Posició i valor de la constant de jacobí dels punts d'equilibri del sistema Terra-Lluna

	x	y	$C_j$
$L_1$	-0,83521325	0	3,028931625
$L_2$	-1,1531159	0	3.17434583205
$L_3$	1,005063	0	3.01392821236
$L_4$	-0,48784941	+0,8660254	2.9879900091
$L_5$	-0,48784941	-0,8660254	2.9879900091

## 2.5 Regió d'estabilitat del $L_4$

Tal i com hem explicat, en el model restringit els punts triangulars es consideren estables. A continuació estudiarem com és la regió d'estabilitat al voltant del punt triangular  $L_4$ . Per simetria, tindrem el mateix al voltant del punt  $L_5$ . Una regió estable implica que un conjunt de condicions inicials properes al punt no escapen o triguen molt a escapar d'un entorn passat un període de temps. Per fer aquesta exploració podem definir la posició del satèl·lit al voltant del  $L_4$  amb coordenades polars com

$$X = [-0.5 + \mu + r \cos \alpha, \sqrt{3}/2 + r \sin \alpha], \quad (2.11)$$

on  $r \in [0, \delta]$  i  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . En les nostres exploracions hem agafat  $\delta = 0.05$  i considerem que la velocitat del satèl·lit al voltant del punt  $L_4$  és nul·la. Integrem aquest conjunt de condicions inicials un cert període de temps. En el nostre cas 16 períodes lunars (equivalent a un any i tres mesos). Si passat aquest temps, l'òrbita se'n va més enllà de  $r = 0.15$  (on  $r$  és la distància al punt  $L_4$ ) considerem que es tracta d'una òrbita d'escapament. En cas contrari guardarem la condició inicial. Així doncs, la figura 2.4 mostra la regió d'estabilitat al voltant del nostre objectiu, el punt  $L_4$ . Podem observar com el mateix punt  $L_4$  es troba dins aquesta regió. Val a dir que aquesta exploració s'ha realitzat amb un total de 10000 condicions inicials les quals un 17% no han escapat de l'entorn del punt d'equilibri. Remarcar que tot un entorn del  $L_4$  cau dins la regió d'estabilitat i que per tant si hi volem arribar o marxar, només ajudats de la dinàmica d'aquest model, no podem.

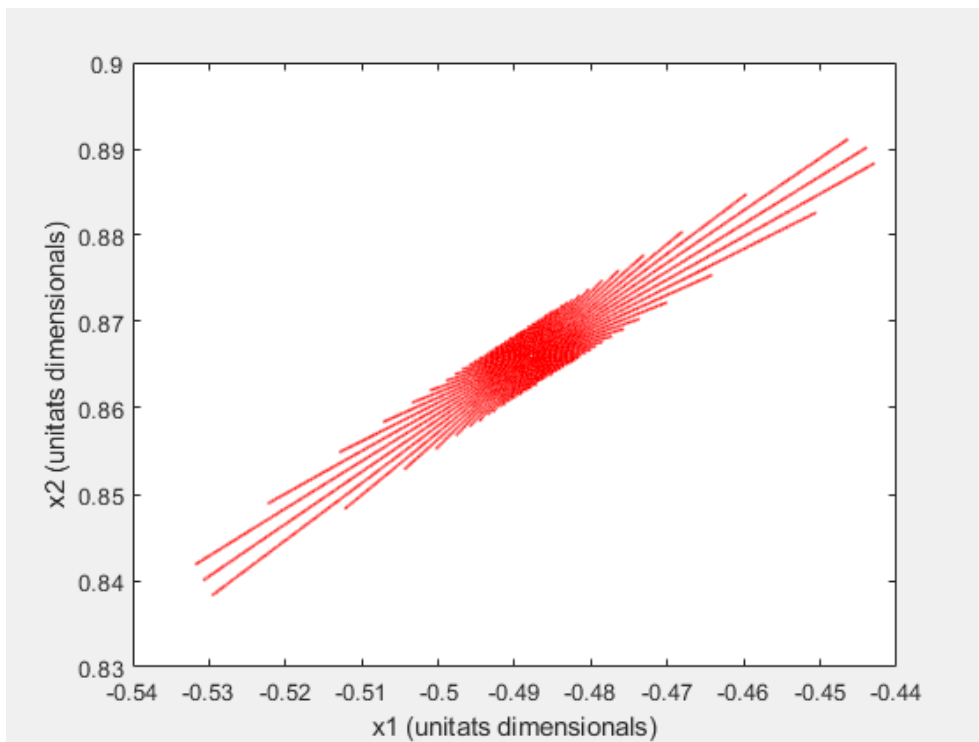


Figura 2.4: Regió d'estabilitat al voltant del punt triangular  $L_4$  del sistema Terra-Lluna utilitzant el model restringit

## 2.6 Millora del model

En aquest capítol hem fet un repàs del model restringit per entendre com funcionen les dinàmiques en un model senzill. Aquest model ens serveix coma base per entendre aquest tipus de missions i a més ens defineix els punts d'equilibri. Tot i així, aquest model no és adequat per dos motius: en primer lloc els punts triangulars en el RTBP són estables i per acostar-nos necessitem una certa inestabilitat. En segon lloc no tenim en compte la principal font de pertorbació, la influència del Sol. Per tant, en el següent capítol anem a veure un segon model millorat en el qual es té en compte la influència més important d'aquest model, la pertorbació del Sol.



## Capítol 3

# Pertorbació del Sol en el model

En aquest capítol estudiarem un segon model dins el camp de la Mecànica Celeste anomenat problema bicircular (BCP) de l'anglès "Bicircular Problem". Aquest model és considerat com una ampliació del model restringit on es té en compte la pertorbació periòdica del Sol. A continuació analitzarem com afecta la influència del Sol al moviment del satèl·lit al voltant del punt  $L_4$  i la seva regió d'estabilitat. Les exploracions numèriques que presentem segueixen i amplien les presentades a l'article [4] que hem utilitzat com a referència per dur a terme aquest estudi.

### 3.1 Model Bicircular (BCP)

El problema Bicircular BCP és, de fet, un problema restringit de 4 cossos format per tres primaris (masses puntuals) i un cos de massa infinitesimal que es mou degut a l'efecte dels tres cossos anteriors. En aquest cas considerem dos primaris de massa  $m_1$  i  $m_2$  que descriuen trajectòries circulars al voltant del seu baricentre o centre de masses (que situem a l'origen) i un tercer cos de massa  $m_3$  que gira descrivint també una trajectòria circular al voltant de l'origen. Cal fer esment que aquest model no s'ajusta a les lleis de Newton: els tres primaris es mouen en òrbites circulars, i aquest moviment no és solució del problema de tres cossos. Tot i això, és una bona aproximació al que seria un model bicircular real on els tres cossos sí que es mourien segons les lleis de Newton.

En el nostre cas prendrem com a primaris  $m_1$  i  $m_2$  la Terra i la Lluna, i el tercer primari  $m_3$  serà el Sol.

En aquest cas ens situem també en un sistema de coordenades sinòdic que giri amb els dos primaris  $m_1$  i  $m_2$ , i realitzem un canvi d'unitats de massa, temps i distància adequats de tal forma que la constant gravitacional  $G = 1$ , les masses dels dos primaris siguin  $1 - \mu$  i  $\mu$  i les seves posicions siguin  $(\mu, 0)$  i  $(\mu - 1, 0)$  on  $\mu$  es el ja conegut paràmetre de masses de l'equació (2.3). En aquest cas la unitat de temps utilitzada és tal que el període de temps que triga la Lluna en fer una volta al voltant del baricentre (origen de coordenades) és  $2\pi$ , que equival a 28 dies.

Considerem també la influència del tercer cos (el Sol) que descriu una òrbita circular de radi  $\rho = 3.88811 \times 10^2$  i velocitat angular  $w_s = -0.925195985$  (unitats adimensionals). En aquest model juga un paper important la posició o fase inicial del Sol, que denotem per  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ . La seva massa, en aquest sistema adimensional serà  $\mu_s = m_s/(m_1 + m_2) = 3.28900541 \times 10^5$  on  $m_s$  fa referència a la massa del Sol que pren el valor de  $m_s = 1.989 \times 10^{30}$  Kg.

En aquest sistema les equacions del model BCP són

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \partial_x \Omega_4, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \partial_y \Omega_4,\end{aligned}\tag{3.1}$$

on

$$\Omega_4(x, y) = \Omega(x, y) + \frac{\mu_s}{r_s} - \frac{\mu_s}{\rho^2} (x \cos \theta + y \sin \theta),\tag{3.2}$$

$\Omega$  és el potencial del model RTBP donat en (2.2),  $r_1$  i  $r_2$  les distàncies del cos de massa infinitesimal als dos primaris principals com en (2.5) i

$$r_s = ((x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2)^{1/2},\tag{3.3}$$

$\theta = \omega_s t + \theta_0$  és la fase del Sol en cada instant de temps. Veure la figura 3.1.

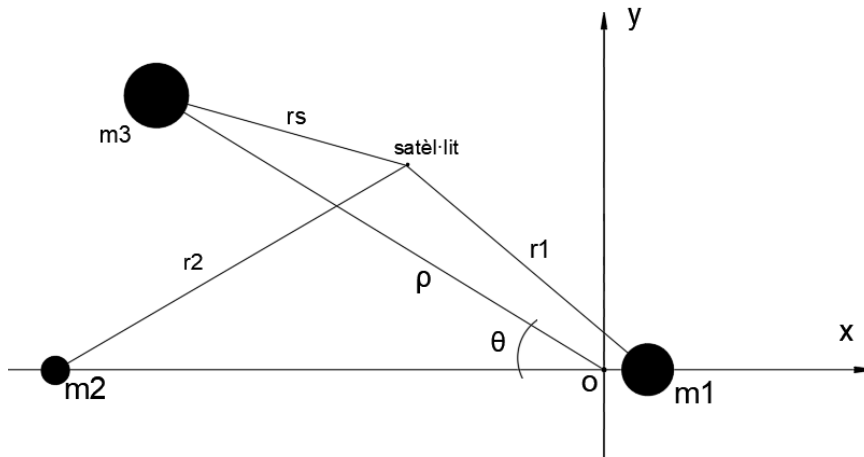


Figura 3.1: Sistema de coordenades sinòdic del Model Bicircular

Val a dir, que el model bicircular no és conservatiu, és a dir, no existeix un valor d'energia constant per a tota solució del model. A més, es tracta d'un sistema no autònom ja que les equacions descrites en (3.1) depenen explícitament del temps. En aquest model juga un paper molt important la fase inicial en la que es troba el Sol descrita en l'equació (3.3). Més endavant veurem com afecta aquesta fase inicial a la dinàmica del satèl·lit.

De la mateixa manera que en el problema restringit, el model bicircular no es pot resoldre analíticament. Per resoldre'l farem ús de mètodes d'integració numèrics. D'aquesta manera cal reduir novament l'ordre del sistema. Per fer-ho reanomenem les variables tal i com s'ha fet en les equacions (2.6). I escrivim el sistema (3.1) com a sistema de primer ordre com segueix:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 - 2x_4 &= \partial_x \Omega_4, \\ \dot{x}_4 + 2x_3 &= \partial_y \Omega_4, \end{aligned} \tag{3.4}$$

## 3.2 Posició i velocitat inicials del satèl·lit

Com ja sabem el model Bicircular pot ser descrit com un problema restringit amb una pertorbació periòdica, el moviment del Sol. Els punts d'equilibri del sistema Terra-Lluna del RTBP deixen de ser punts fixos en el model BCP. En lloc d'aquests punts, en el model Bicircular apareixen òrbites periòdiques, que són els substituïts dels punts d'equilibri. En el cas dels punts triangulars, apareixen fins a tres òrbites periòdiques de període igual a  $2\pi/w_s$  on  $w_s$  és la velocitat angular del Sol que apareix en l'equació (3.3). Aquestes òrbites podrien ser l'objectiu com a òrbita d'aparcament per situar un satèl·lit com a font d'observació al voltant de  $L_4$ .

L'objectiu principal d'aquest treball és dissenyar la transferència d'un satèl·lit des d'una òrbita baixa (LEO) al voltant de la Terra o de la Lluna a un entorn del punt  $L_4$ , i al revés. En aquest estudi no ens preocuparem de l'òrbita d'aparcament, i només ens preocuparem de veure si existeixen de manera natural aquest tipus de transferències. Tal com hem dit, no podem esperar sortir directament de la Terra o la Lluna i encertar a arribar a  $L_4$ . Per tant, ho farem al revés: suposarem que ja som al punt i, anant enrere en el temps (backwards propagation) mirarem si arribem a la Terra o la Lluna.

Per tant, utilitzarem el mateix punt  $L_4$  com a destinació final o punt de partida també ens plantejarem sortir de  $L_4$  i anar, temps endavant (forwards propagation), a la Terra o la Lluna, per tal de mostrar les òrbites factibles per a la transmissió. Així doncs denotem la posició i velocitat del satèl·lit al voltant del

$L_4$  com

$$X = [-0.5 + \mu + x_t, \sqrt{3}/2 + y_t, v_0 \cos \beta, v_0 \sin \beta], \beta \in [0, 2\pi], \quad (3.5)$$

on  $(x_t, y_t)$  són les coordenades del satèl·lit respecte el punt  $L_4$ ,  $v_0$  és l'amplitud de la velocitat del satèl·lit i  $\beta$  denota l'angle entre el vector velocitat i l'eix  $x$  del sistema sinòdic descrit en la figura 3.1.

### 3.3 Regió d'estabilitat al voltant del punt d'equilibri

En les equacions que descriuen la dinàmica del satèl·lit en (3.1) juga un paper molt important la fase inicial en la que es troba el Sol ( $\theta_0$ ). Aquesta fase inicial pot prendre valors entre  $[0, 2\pi]$ . Anem a veure com afecta aquesta fase inicial a la dinàmica del satèl·lit agafant com a referència 4 condicions inicials:  $\theta_0 = 0, \theta_0 = \pi/2, \theta_0 = \pi$  i  $\theta_0 = 3\pi/2$ .

La figura 3.2 mostra el moviment del satèl·lit al voltant del punt triangular  $L_4$  amb condicions inicials  $x_t = y_t = 0$  i velocitat inicial zero ( $v_0 = 0$ ) per a diferents valors de  $\theta_0$  i per a un període de temps equivalent a 16 períodes lunars (1 any i 3 mesos aproximadament). Com podem veure, la variació de l'angle inicial del Sol pot causar variacions considerables en el moviment del satèl·lit al voltant del  $L_4$ . Podem veure com en les figures 3.2b i 3.2d el moviment del satèl·lit està restringit en una zona més petita que en les figures 3.2a i 3.2c. Les figures 3.2b i 3.2d poden semblar òrbites de gran interès per situar satèl·lits com a font d'observació ja que són relativament més estables. Tot i així, com ja sabem, necessitem òrbites que tinguin una certa inestabilitat per poder-nos acostar al  $L_4$ . Per tant, les òrbites de les figures 3.2a i 3.2c ens donen una millor oportunitat per apropar-nos al objectiu.

A continuació, volem il·lustrar com afecta la fase inicial del Sol  $\theta_0$  a les zones d'estabilitat al voltant del punt  $L_4$ . Aquesta exploració s'ha dut a terme de la mateixa manera que en la secció 2.5 però ara, utilitzant el model bicircular i es pot veure representada en la figura 3.3. Recordem que definim regió d'estabilitat com el conjunt de punts que en un termini fixat de temps no escapen d'un entorn. Al voltant del  $L_4$  és el conjunt de condicions inicials que no escapen o triguen molt a escapar. D'aquesta manera podem definir la posició i velocitat del satèl·lit al voltant del punt  $L_4$  amb l'equació (3.5). Si considerem  $x_t = r \cos \alpha$  i  $y_t = r \sin \alpha$  amb velocitat inicial zero ( $v_0 = 0$ ), on  $r \in [0, 0.05]$  i  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Integrem un temps màxim de 16 períodes lunars (equivalent a 1 any i 3 mesos). Si passat aquest temps l'òrbita escapa a una distància màxima  $r = 0.15$  considerem que es tracta d'una òrbita d'escapament. En cas contrari guardem la condició inicial. Així doncs, la figura 3.3 representa la regió d'estabilitat al voltant del  $L_4$  per a diferents valors de  $\theta_0$ . Les condicions inicials que arriben a col·lisió estan excloses de la figura.

Observem com el punt  $L_4$  es troba dins aquesta regió d'estabilitat per a angles  $\theta_0 = \pi/2$  i  $\theta_0 = 3\pi/2$  en les figures 3.3b i 3.3d. En canvi, per valors  $\theta_0 = 0$  i  $\theta_0 = \pi$  el mateix punt  $L_4$  no es troba dins aquesta

regió d'estabilitat. Si comparem la figura 2.5 amb la figura 3.3 podem veure com per a valors de  $\theta_0 = \pi/2$  i  $\theta_0 = 3\pi/2$  aquesta regió d'estabilitat és força similar ja que en aquests casos el punt  $L_4$  té un caràcter més estable. En les figures 3.3b i 3.3d en canvi, el punt  $L_4$  és relativament més inestable.

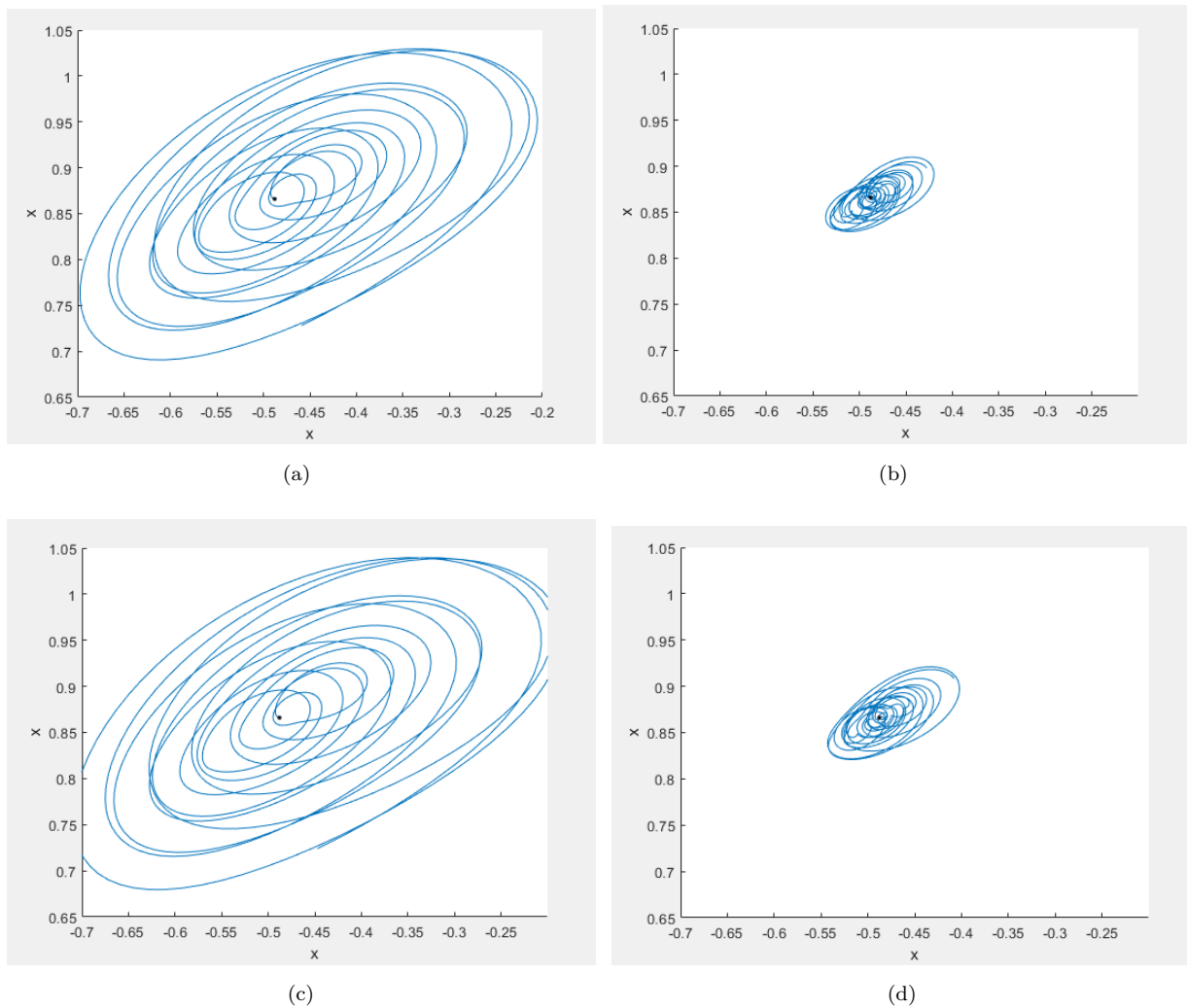


Figura 3.2: Moviment del satèl·lit al voltant del  $L_4$  (amb condicions inicials  $x_t = y_t = v_0 = 0$ ) amb diferents angles inicials del sol (a)  $\theta_0 = 0$ ; (b)  $\theta_0 = \pi/2$ ; (c)  $\theta_0 = \pi$ ; (d)  $\theta_0 = 3\pi/2$ .

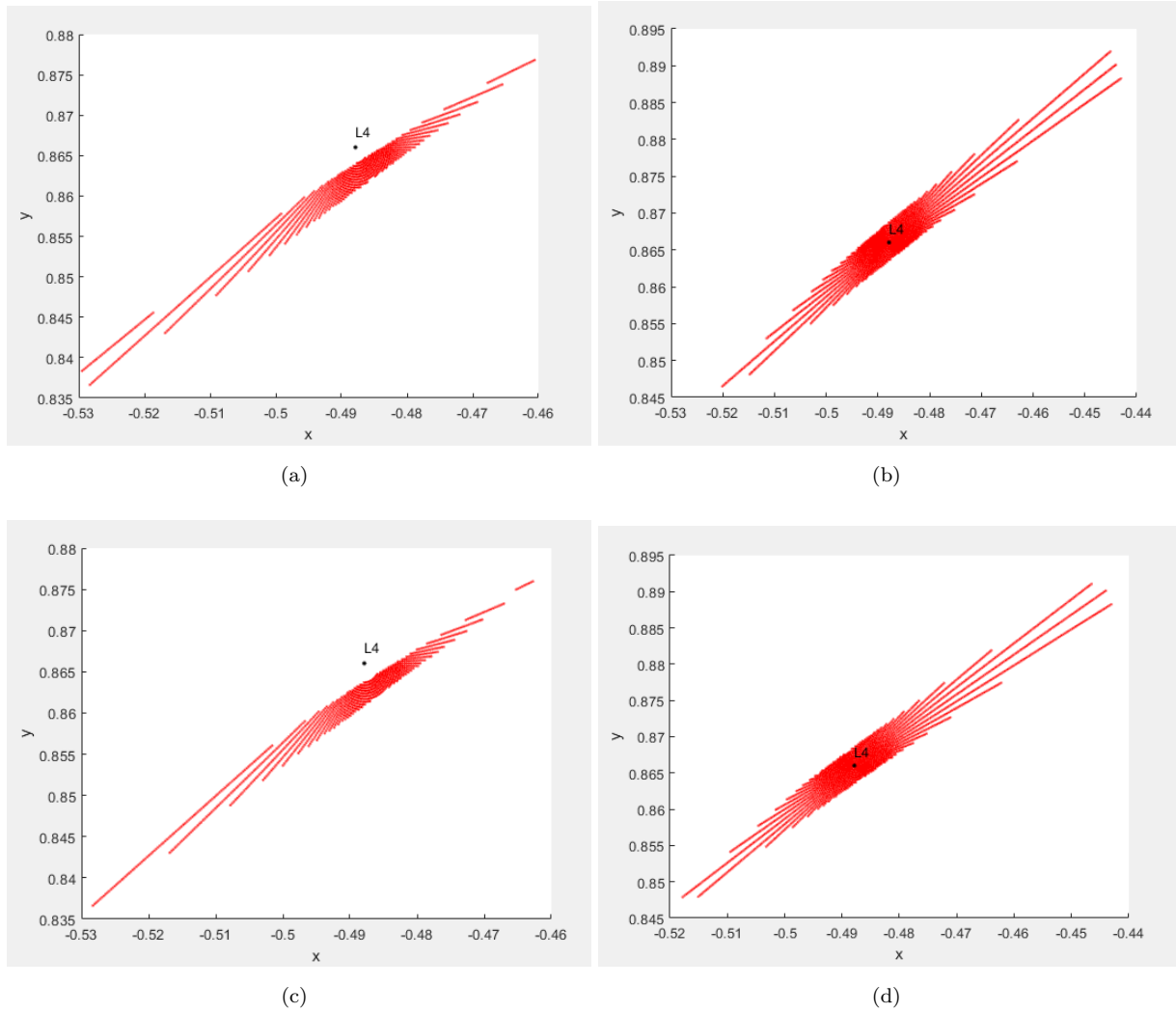


Figura 3.3: Regions d'estabilitat al voltant del punt  $L_4$  per a diferents valors de  $\theta_0$  (a)  $\theta_0 = 0$ ; (b)  $\theta_0 = \pi/2$ ; (c)  $\theta_0 = \pi$ ; (d)  $\theta_0 = 3\pi/2$ .

### 3.4 Variació de la funció de Jacobi en el BCP

A diferència del model RTBP, el model bicircular no és conservatiu, és a dir, existeix una magnitud anomenada energia que no es manté constant per a tota solució del model. En el RTBP aquesta magnitud és el que es coneix com a Constant de Jacobi, en el BCP en canvi, l'anomenem funció de Jacobi i ens referim a ella com a  $C_j$ . Així doncs, la funció de Jacobi del satèl·lit ve donada per l'expressió (2.10) i en el punt  $L_4$  es pot calcular com

$$C_j = 2\Omega(-0.5 + \mu, \sqrt{3}/2) - v_0^2. \quad (3.6)$$

És sabut que en el BCP, la funció de Jacobi representa l'energia de l'òrbita del satèl·lit [12]. Una funció de Jacobi petita significa una energia de l'òrbita gran. Això és degut al fet que l'energia de l'òrbita pot expressar-se de la manera següent

$$h = -2C_j \quad (3.7)$$

on  $h$  representa l'energia de l'òrbita (o de la solució) i  $C_j$  la funció de Jacobi.

Podem explorar els canvis en la funció de Jacobi sobre una trajectòria en funció del angle inicial del Sol per veure si hi ha relació entre la variació de la  $C_j$  i la possibilitat d'escapament. Per fer-ho recuperem les condicions inicials, les òrbites i valors de  $\theta_0$  de la figura 3.2 ( $\theta_0 = 0, \theta_0 = \pi/2, \theta_0 = \pi$  i  $\theta_0 = 3\pi/2$ ). Aquesta exploració la farem backward i forward propagation i compararem ambdós resultats.

- La figura 3.4 mostra la variació de l'energia de Jacobi en les òrbites de la figura 3.2 integrant temps endavant. Podem veure com aquesta variació és mínima per òrbites més estables en el cas de la figura 3.2b i 3.2d. Per altra banda, aquesta variació resulta considerable per a òrbites menys estables com és el cas de la figura 3.2a i 3.2c.
- La figura 3.5 mostra la variació de l'energia de Jacobi en funció del temps sobre les solucions prenent les mateixes condicions inicials que abans, però ara integrant temps enrere. Podem veure com en aquest cas la variació per a valors de l'angle inicial del Sol  $\theta_0 = \pi/2$  i  $\theta_0 = 3\pi/2$  continua siguent estable. En canvi, per a angles  $\theta_0 = 0$  i  $\theta_0 = \pi$  la variació és força considerable.

Així doncs, aquests exemples ens indiquen que sembla que una variació important de la funció de Jacobi està lligada a una major possibilitat d'allunyar-nos del punt  $L_4$  tant temps endavant com enrere.

Per il·lustrar aquesta correlació entre variacions grans de la  $C_j$  i la distància a la que s'allunya el satèl·lit del  $L_4$ , compararem el valor de la funció de Jacobi  $C_j$  amb la distància a la que s'allunya el satèl·lit al punt  $L_4$  que definirem com a  $D_m$ .

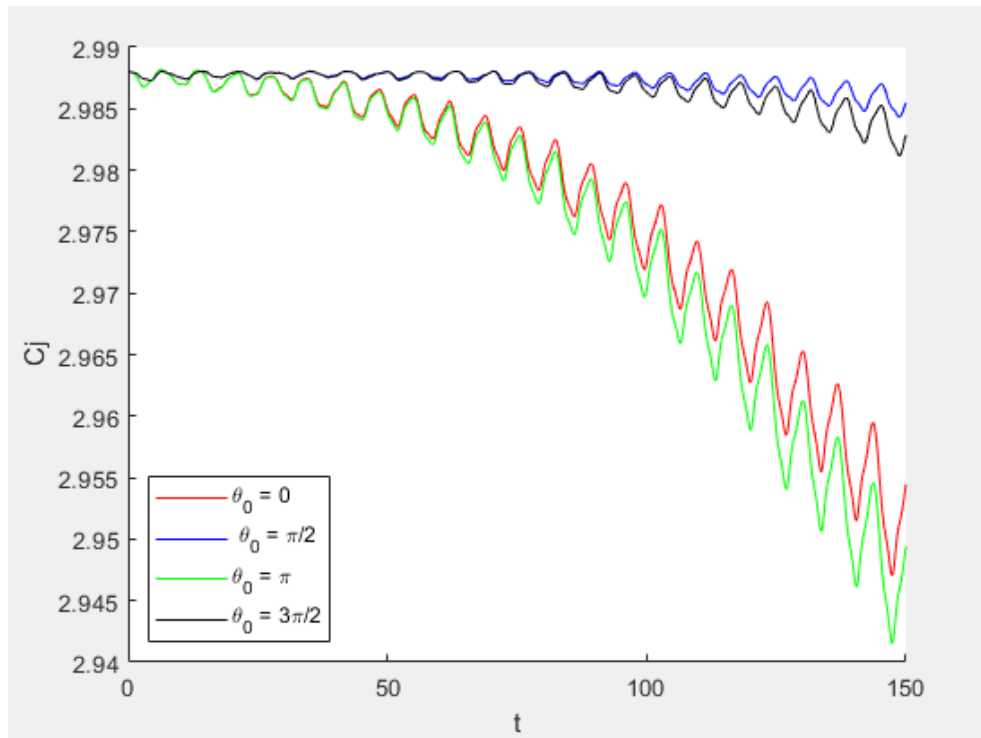


Figura 3.4: Variació de l'energia de Jacobi de les òrbites de la figura 3.2 (integració endavant).

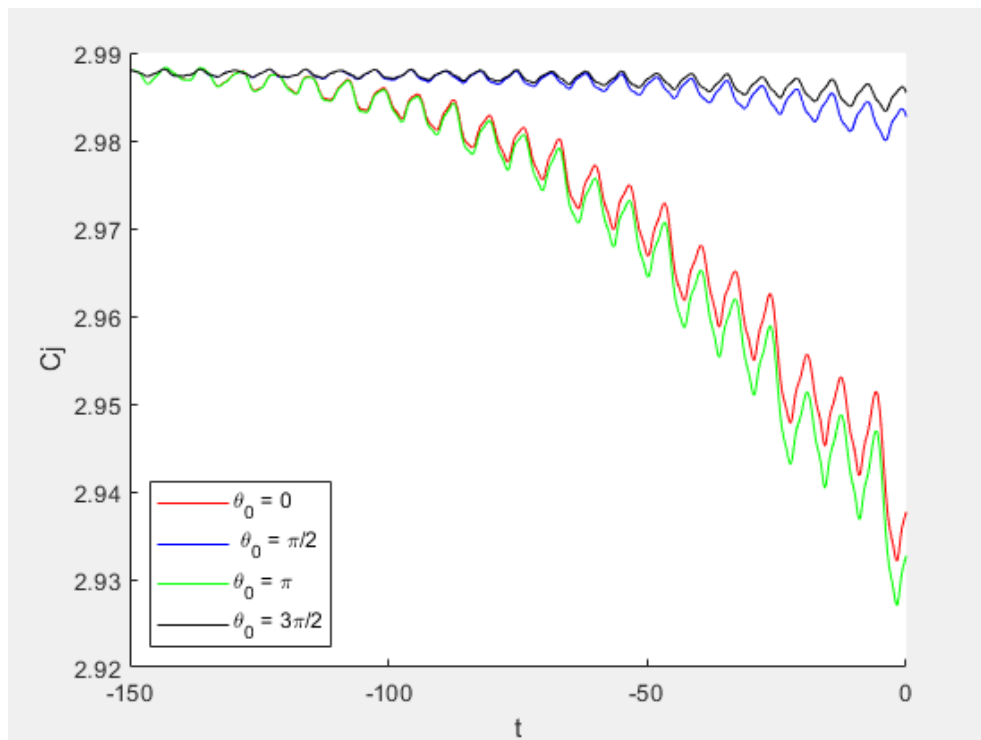


Figura 3.5: Variació de l'energia de Jacobi mitjançant en les òrbites de la figura 3.2 (integració enrere).

En la figura 3.6 podem veure representades en el mateix gràfic la variació de l'energia de Jacobi i la distància del satèl·lit en funció de la posició inicial del Sol  $\theta_0$  per a una mateixa condició inicial del satèl·lit. En aquest cas podem veure com els punts màxims de la distància  $D_m$  coincideixen amb els mínims



de l'energia de Jacobi tal i com esperàvem. Així doncs, per mesurar si una trajectòria té possibilitat d'escapar, controlarem si  $C_j$  decreix i en conseqüència, si l'energia per escapar creix.

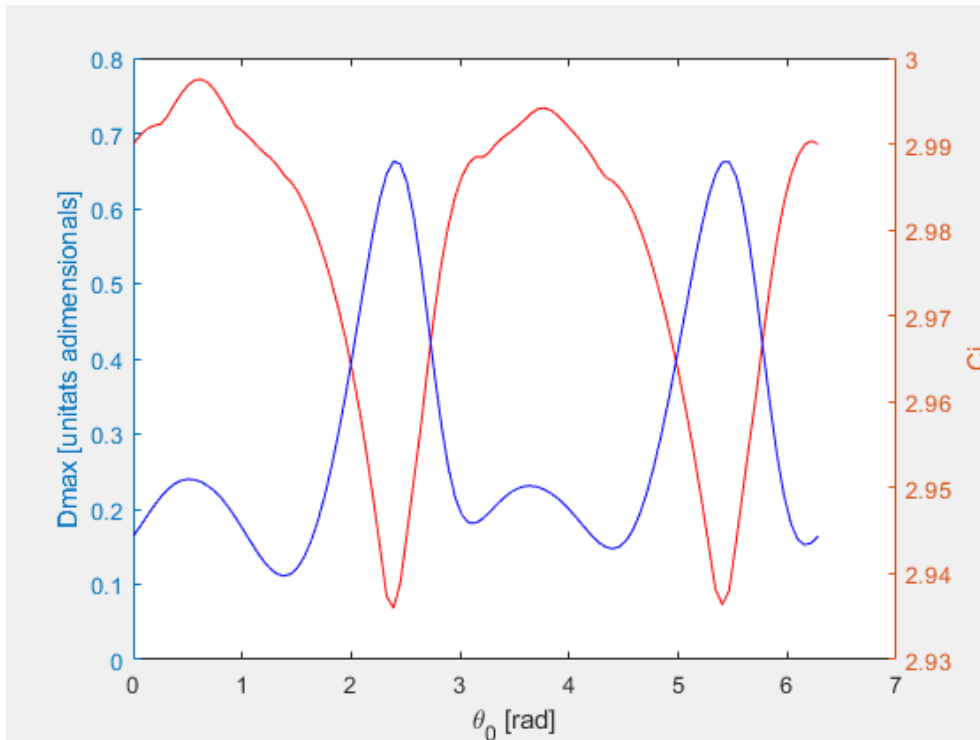


Figura 3.6: Variació de l'energia de Jacobi i la distància màxima al punt  $L_4$  en funció de l'angle inicial del Sol  $\theta_0$

### 3.5 Finestres d'oportunitat

A continuació analitzarem quin rang de valors de  $\theta_0$  són òptims per a la transferència. Volem detectar aquests valors de  $\theta_0$  tals que donada una condició inicial, la seva funció de Jacobi decreix. Ja que tal com ens suggereixen les exploracions anteriors, això voldrà dir que l'òrbita del satèl·lit té possibilitats d'escapar. Per fer-ho definirem un temps  $t_c$  com el moment en que la variació de l'energia de Jacobi és d'un 5%. En el nostre estudi representarà el temps que triga un punt a escapar del  $L_4$ . Representarem aquest temps ( $t_c$ ) en funció del angle inicial del Sol en la figura 3.7 (integració temps endavant) i la figura 3.8 (integració temps endavant). En aquest cas, mostrarem les figures “forward” i “backward propagation” respectivament i compararem ambdós resultats. Considerem la posició inicial del satèl·lit al voltant del  $L_4$  amb l'equació (3.5). En aquest cas ens situem justament en el punt  $L_4$  per tant  $x_t = y_t = 0$ . Considerem també la velocitat inicial del satèl·lit igual a zero ( $v_0 = 0$ ). Si integrem un conjunt de condicions inicials per a diferents valors de l'angle inicial del Sol un temps màxim de 350 unitats (equivalent a 4 anys). Guardem les condicions inicials on es compleix que, per una mateixa solució, la variació de la funció de Jacobi decreix un 5%. Podem representar en les figures 3.7 i 3.8 el temps  $t_c$  en funció de  $\theta_0$  per a cada solució.

Com es mostra en les dues figures, podem veure que el temps  $t_c$  no existeix per a diferents valors de  $\theta_0$ . Això és degut a que el moviment del satèl·lit per aquests valors de  $\theta_0$  és relativament estable tal i com havíem intuït en la figura 3.2b i 3.2d. El rang de valors de  $\theta_0$  on no existeix aquest  $t_c$  el definirem doncs, com una fase estable. Com hem dit anteriorment, una fase estable pot ser de gran interès per situar satèl·lits com a font d'observació. En el nostre cas, al voler realitzar una transferència amb la mínima despesa de combustible (single impulsive transfer) no resulta adequada aquesta idea i el que volem precisament, és que hi hagi certa inestabilitat per poder-nos acostar a l'objectiu. Així doncs, el rang de posicions inicials del Sol que ens interessa "forward propagation" es troba entre  $[0.85, 1.4]$  i  $[4.1, 4.65]$ . En el cas de "backward propagation" aquests valors de  $\theta_0$  es troben entre  $[0.1, 0.73]$  i  $[3.3, 3.85]$ .

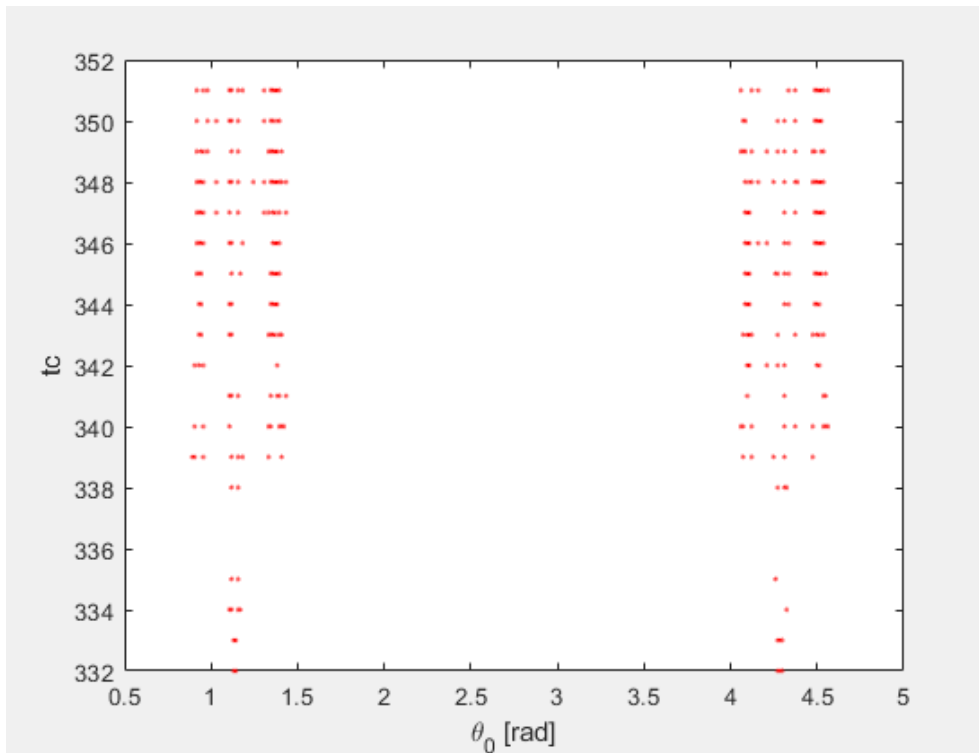


Figura 3.7: Representació de  $t_c$  en funció de l'angle inicial dels sol  $\theta_0$  mitjançant forward propagation.

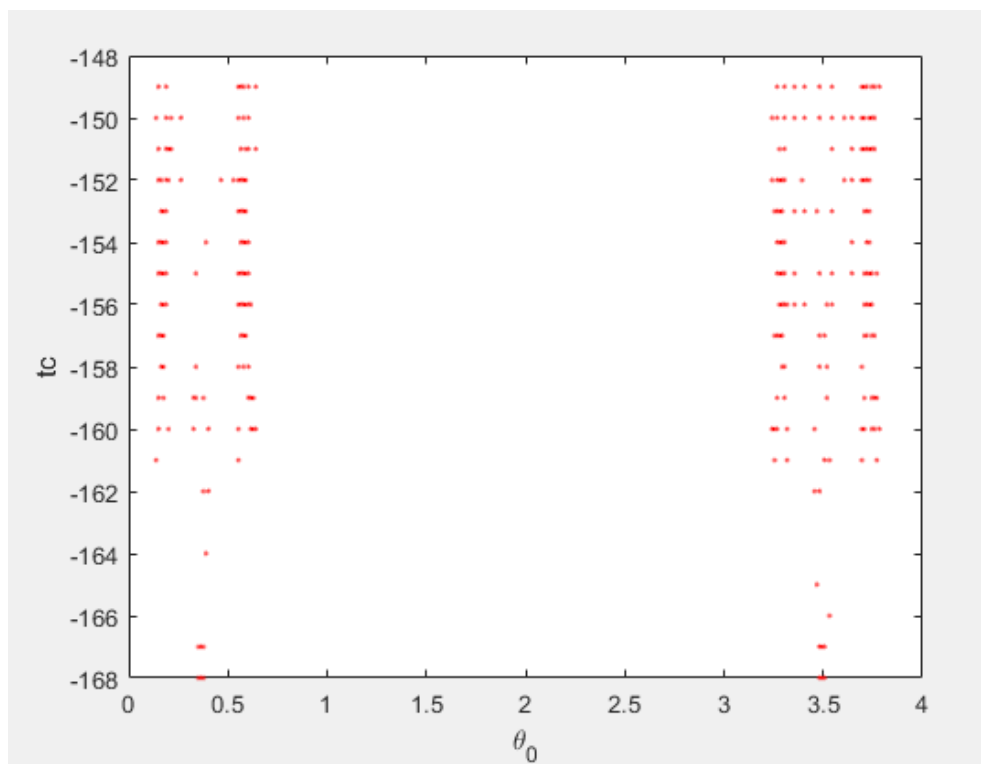


Figura 3.8: Representació de  $tc$  en funció de l'angle inicial dels sol  $\theta_0$  mitjançant "backward propagation".

## Capítol 4

# Resultats

L'objectiu principal d'aquest treball és la transmissió d'un satèl·lit al punt triangular  $L_4$  del sistema Terra-Lluna. Recordem que per assolir aquest objectiu cal col·locar el satèl·lit en una òrbita baixa (LEO) entre 200 i 600 Km respecte la superfície de la Terra o la Lluna i a continuació cal trobar la posició i velocitat adequades per tal que el satèl·lit canviï d'òrbita i arribi a la destinació final, el punt  $L_4$ . Arribar a una zona tant concreta sortint des de la Terra o la Lluna sense més informació resulta molt complicat. És per aquest motiu que realitzarem el plantejament invers: sortirem del punt  $L_4$  i tirant temps enrere ( “backward propagation” ) busquem òrbites que arribin a un dels dos primaris a una distància adequada. També ens preguntarem per l'existència d'òrbites que sortint del punt  $L_4$  i integrant temps endavant ( “forward propagation” ) arriben a la Terra o a la Lluna.

Així doncs, la posició inicial del satèl·lit es pot expressar amb l'equació (3.5). En aquest cas, ens situarem justament en el punt  $L_4$ , per aquest motiu assumirem que  $x_t$  i  $y_t$  seran 0. D'aquesta manera la posició i velocitat inicial de la integració serà  $X = [-0.5 + \mu, \sqrt{3}/2, v_0 \cos \beta, v_0 \sin \beta]$ . Donat un valor de l'angle inicial del Sol  $\theta_0$ , una velocitat inicial  $v_0$  i un angle  $\beta$  podem representar la dinàmica del satèl·lit mitjançant backward i forward propagation i trobar òrbites que arribin a la Terra o a la Lluna. Val a dir que aquestes exploracions s'ha realitzat amb un temps d'integració màxim de 200 unitats (equivalent a 2 anys i mig). Els valors de la velocitat inicial  $v_0$  s'han agafat dins d'un rang entre  $[0,10]$  m/s seguint l'estudi citat en [4]. Els angles de  $\beta$  prenen valors entre  $[0,2\pi]$ . Pel que fa l'angle inicial del Sol  $\theta_0$  s'han agafat valors compresos dins de la finestra d'oportunitats trobada en la secció 3.5. Recordem que el mètode d'integració numèric utilitzat per aquestes exploracions és el mètode de Runge-Kutta amb pas d'ordre 4 i 5.

Un cop hem detectat una òrbita que arriba a la Terra o a la Lluna, el més fàcil és inserir el satèl·lit

en una òrbita circular. Per això cal tenir una velocitat específica que depèn de la seva altura i que ve donada per aquesta expressió

$$v = \sqrt{\frac{m_i}{r_i}}, \quad (4.1)$$

on  $m_i$  és la massa del primari el qual ens volem acostar i  $r_i$  la distància al seu centre. Com que la nostra trajectòria d'arribada no arribarà mai amb aquesta velocitat caldrà un increment o decreixement de velocitat. Això és el que es coneix com a  $\Delta_v$ , un impuls per aconseguir-ho. Així doncs, calcularem la  $\Delta_v$  com

$$\Delta_v = |\vec{v}_f| - \sqrt{\frac{m_i}{r_i}}, \quad (4.2)$$

on  $|\vec{v}_f|$  és el mòdul de la velocitat final.

## 4.1 Transferència del satèl·lit entre el punt $L_4$ i la Lluna

Les figures 4.1 i 4.2 representen un conjunt d'exemples d'òrbites que mitjançant backward i forward propagation respectivament arriben a la Lluna. Podem veure que en alguns casos com els de les figures 4.1a o 4.2b el satèl·lit roman donant voltes al voltant del  $L_4$  un temps fins que aconsegueix escapar del punt. En altres casos com veiem en les figures 4.1f i 4.2i l'òrbita segueix una trajectòria més directa. Això implica un temps de transferència menor. És sabut que existeix una connexió entre el punt d'equilibri col·lineal  $L_3$  i els punts triangulars  $L_4$  i  $L_5$ . És per aquest motiu que en les figures 4.2g i 4.1e podem veure com el satèl·lit abans d'arribar a l'objectiu passa al voltant del punts d'equilibri  $L_3$  i  $L_5$ .

En les taules 4.1 i 4.2 podem veure representats els resultats de les transferències mostades en les figures 4.1 i 4.2 respectivament. En aquestes taules es mostren els resultats referents a la  $V_0$  i  $\beta$  inicials, l'angle inicial del Sol  $\theta_0$ , el  $\Delta_v$  i finalment el tems de transferència. Recordem que el  $\Delta_v$  fa referència a l'impuls necessari perquè el satèl·lit canviï d'òrbita, en aquest cas circular, i arribi a la destinació final sortint des d'una òrbita baixa (LEO). Els valors de  $\theta_0$  que hem utilitzat són els de les figures 3.8 i 3.7 respectivament. Finalment, veiem representat el temps de transferència. Aquest temps resulta major en òrbites on el satèl·lit roman voltes al voltant del  $L_4$  com és el cas de la figura 4.1a i 4.1h. En canvi, trobem temps de transferència menors en òrbites més directes com el cas de la figura 4.1d, 4.1e o 4.2i.

La figura 4.3 mostra com varia la funció de Jacobi en les transferències de les figures 4.1b i 4.2f. Tal i com podem veure, aquesta energia es manté relativament constant mentre el satèl·lit roman donant voltes al voltant del  $L_4$  fins a un cert moment on decreix ràpidament. Aquest moment correspon al punt en que l'energia del satèl·lit o de l'òrbita augmenta i consegüentment el satèl·lit escapa del  $L_4$ .

Podem estudiar l'energia total del satèl·lit  $E$  per tal de descriure la transferència. Aquesta energia es defineix com

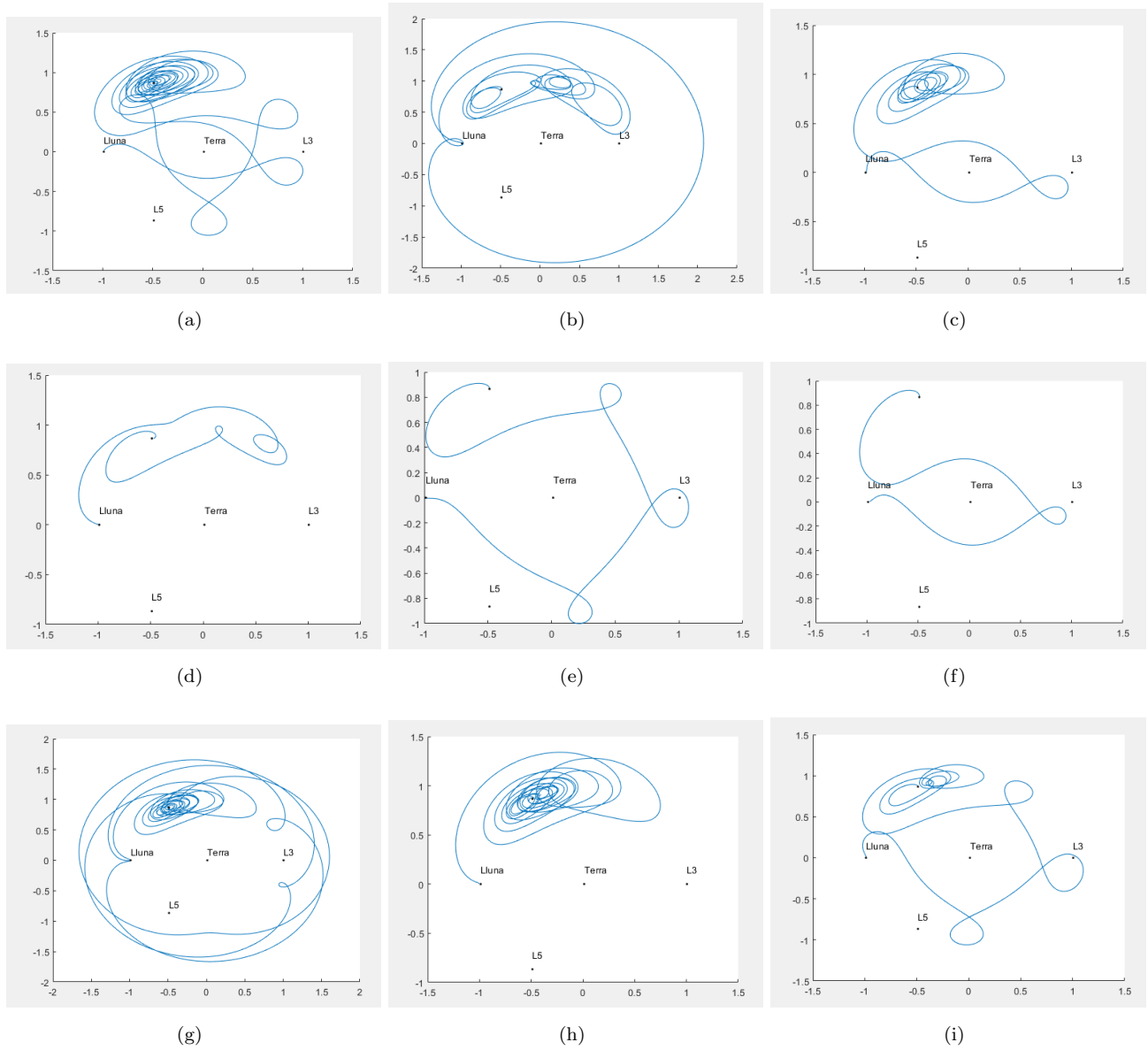


Figura 4.1: Exemples de transferències des d'una òrbita baixa de la Lluna fins al punt  $L_4$  backward propagation.

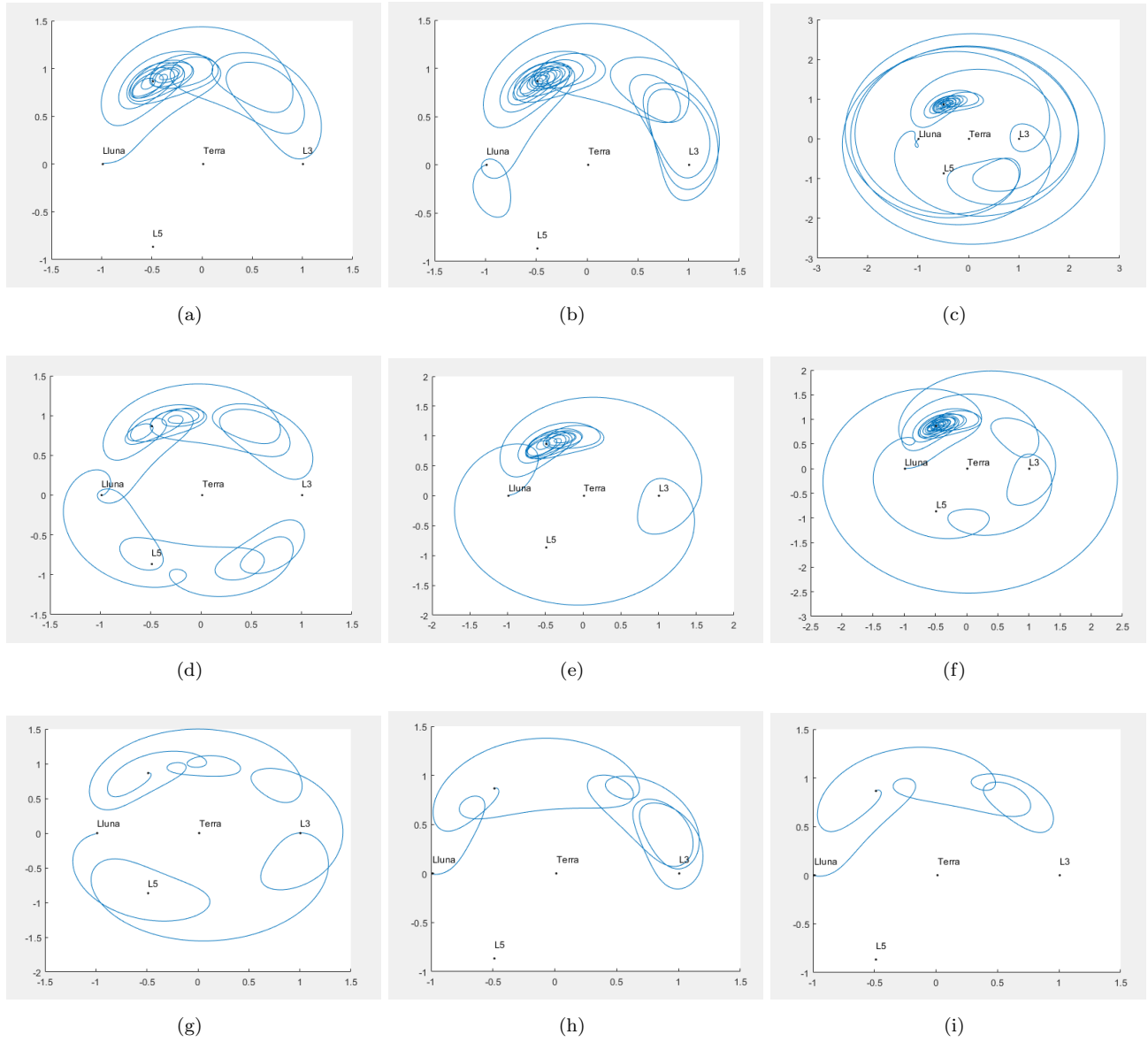


Figura 4.2: Exemples de transferències del  $L_4$  fins a una òrbita baixa de la Lluna forward propagation.

Taula 4.1: Resultats de les transferències des de la Lluna fins al  $L_4$ .

Òrbita	$v_0$ [m/s]	$\beta$ [rad]	$\theta_0[rad]$	$\Delta_v$ [m/s]	Temps de transferència [dies]
a	5	3.5185	0.5	1944.74	642
b	2.4	3.5185	3.5	429.49	397
c	3.7	5.2778	3.5	585.20	315
d	4.4	2.7646	0.5	720.088	141
e	4.9	4.64955	0.5	1863.159	98
f	5	4.39822	0.5	627.081	47
g	1	4.9008	3.5	1123.62	686
h	1.3	2.8902	3.5	675.03	560
i	1.5	4.1469	0.5	1702.036	281

Taula 4.2: Resultats de les transferències del  $L_4$  fins a la Lluna forward.

Òrbita	$v_0$ [m/s]	$\beta$ [rad]	$\theta_0[rad]$	$\Delta_v$ [m/s]	Temps de transferència [dies]
a	1	3.76	1	179.71	480
b	1.75	0	1	77.89	659
c	1.75	5.02	4.25	53.62	725
d	2	3.76	4.25	51.59	444
e	2.25	2.87	1	109.15	447
f	2.75	1.57	1	188.39	787
g	3.5	0.62	4.25	49.14	237
h	4.25	0.63	1	98.24	188
i	4.5	0.94	1	43.17	134



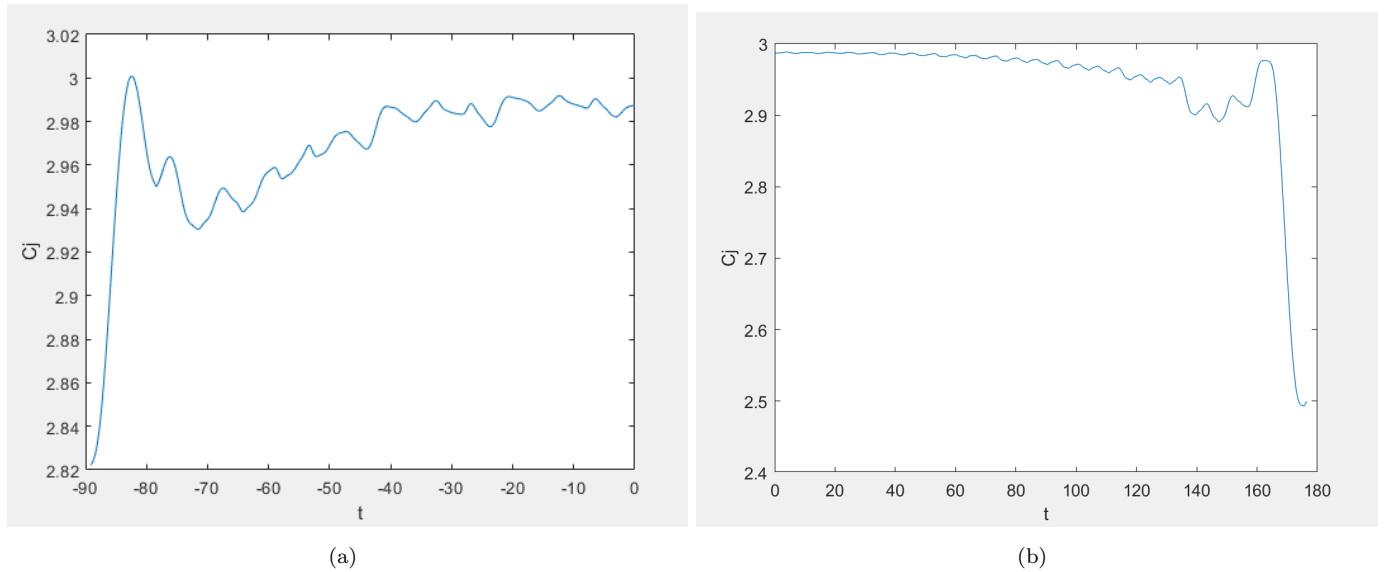


Figura 4.3: Variació de la constant de Jacobi en les figures 4.1b i 4.2f respectivament.

$$E = \frac{1}{2}[(\dot{x} - y)^2 + (x + \dot{y})^2] - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \quad (4.3)$$

És sabut que l'energia del satèl·lit creix o decreix bruscament quan el satèl·lit s'aproxima a un dels primaris. Això implica que el satèl·lit dibuixa una hipèrbola al voltant del primari. Aquest loop es coneix amb anglès com a flyby i el podem veure representat en la figura 4.4.

La figura 4.5 mostra la variació de l'energia del satèl·lit  $E$ , la funció de Jacobi  $C_J$  i la seva distància  $D$  respecte la Lluna en funció del temps de les figures 4.1b i 4.2f. Podem veure com l'energia del satèl·lit creix a mesura que ens allunyem del  $L_4$  mentre que la funció de Jacobi decreix en el moment en que aconseguim escapar del punt. Pel que fa la distància del satèl·lit respecte la Lluna es manté relativament constant mentre roman donant voltes al voltant del  $L_4$  fins que finalment arriba a la Lluna.

## 4.2 Transferència del satèl·lit entre el punt $L_4$ i la Terra

Les figures 4.6 i 4.7 mostren alguns exemples d'òrbites que mitjançant backward i forward propagation respectivament arriben a la Terra. De la mateixa manera que amb la Lluna trobem òrbites on el satèl·lit roman donant voltes al voltant del punt  $L_4$  fins que finalment es mou en una regió governada per la influència mútua del Sol i la Terra.

Les taules 4.3 i 4.4 mostren els resultats de les transferències backward i forward respectivament. En

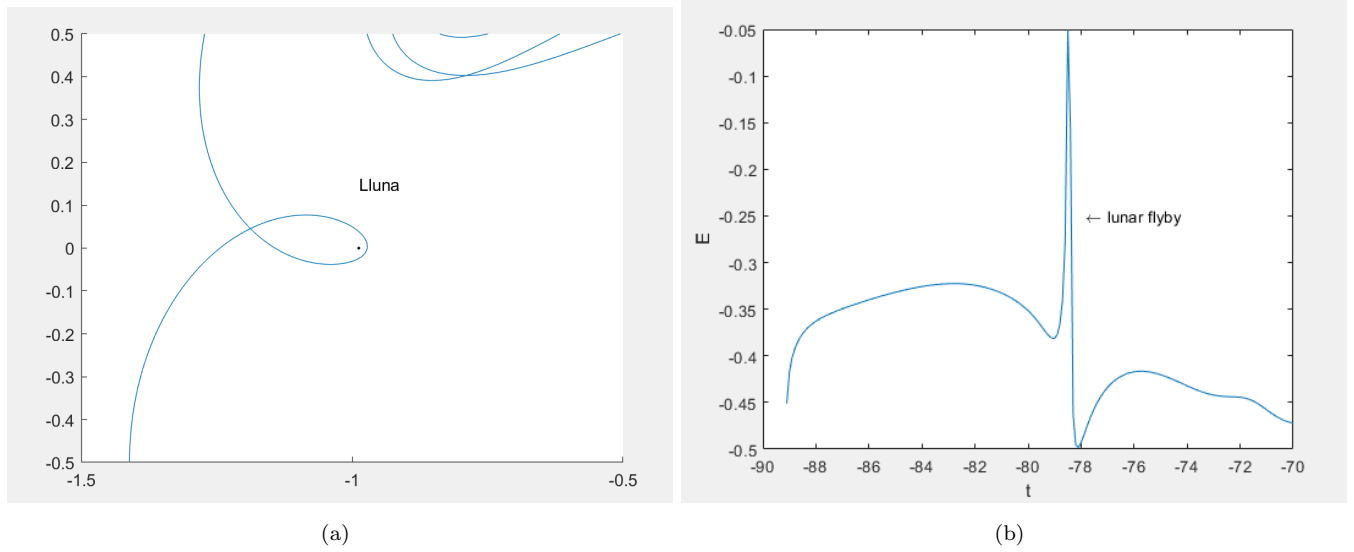
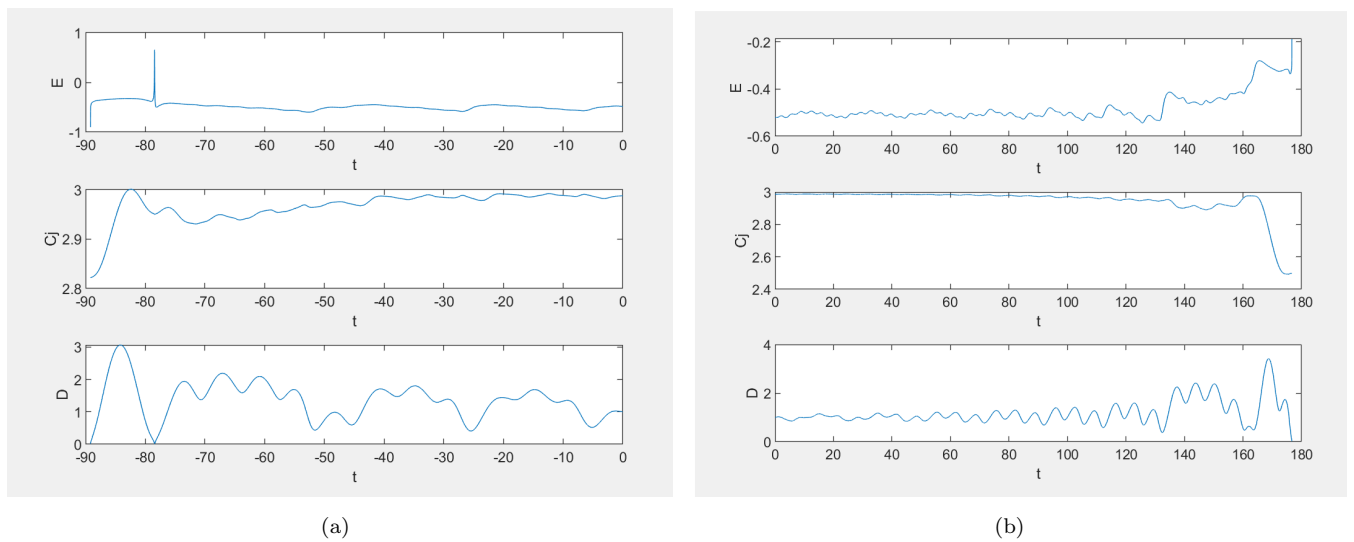


Figura 4.4: Exemple d'òrbita amb un lunar flyby.

Figura 4.5: Canvis en  $E$ ,  $C_j$  i  $D$  de les transferències de les figures 4.1b i 4.2f.

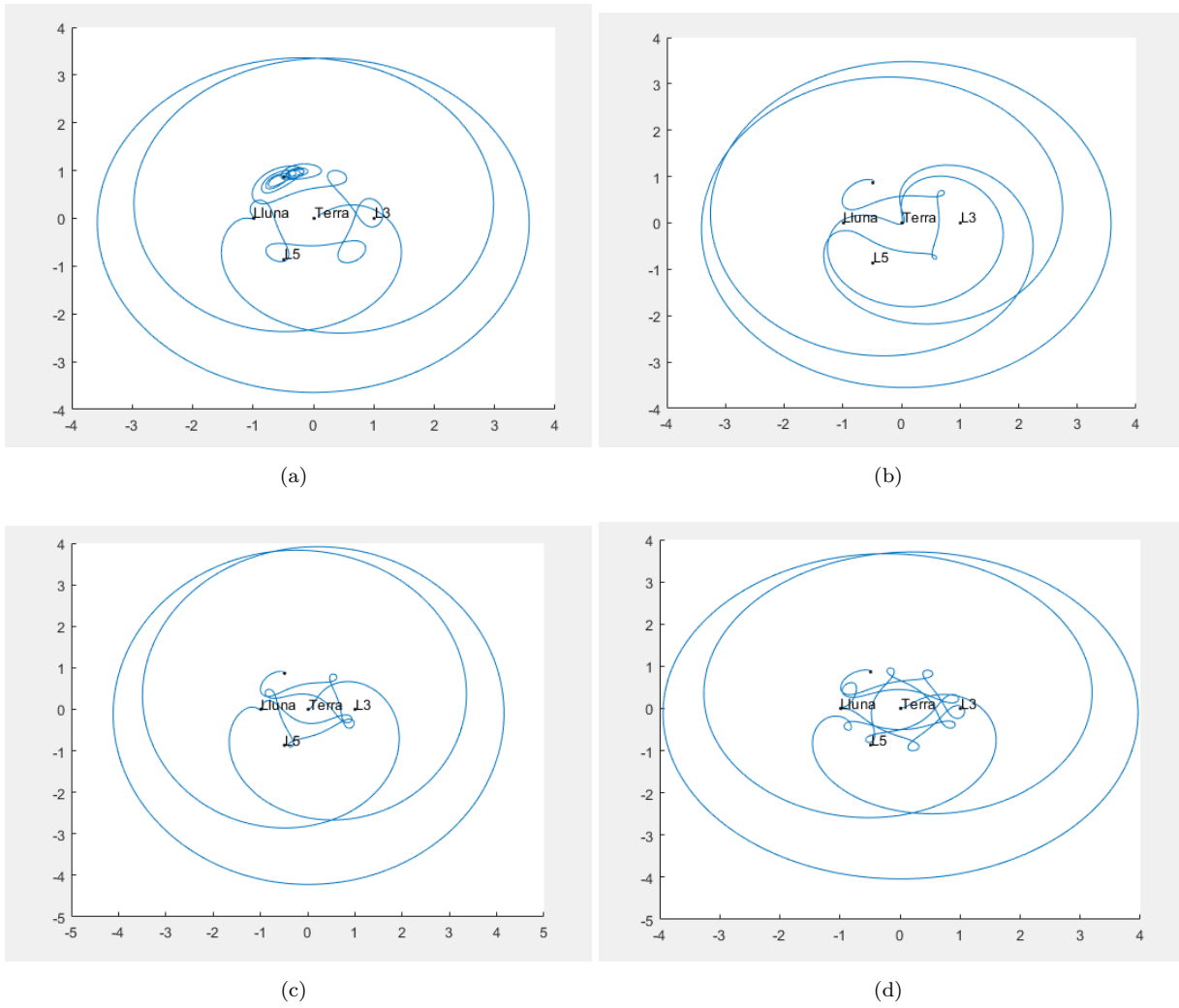


Figura 4.6: Exemples de transferències des d'una òrbita baixa de la Terra fins al punt  $L_4$  backward.

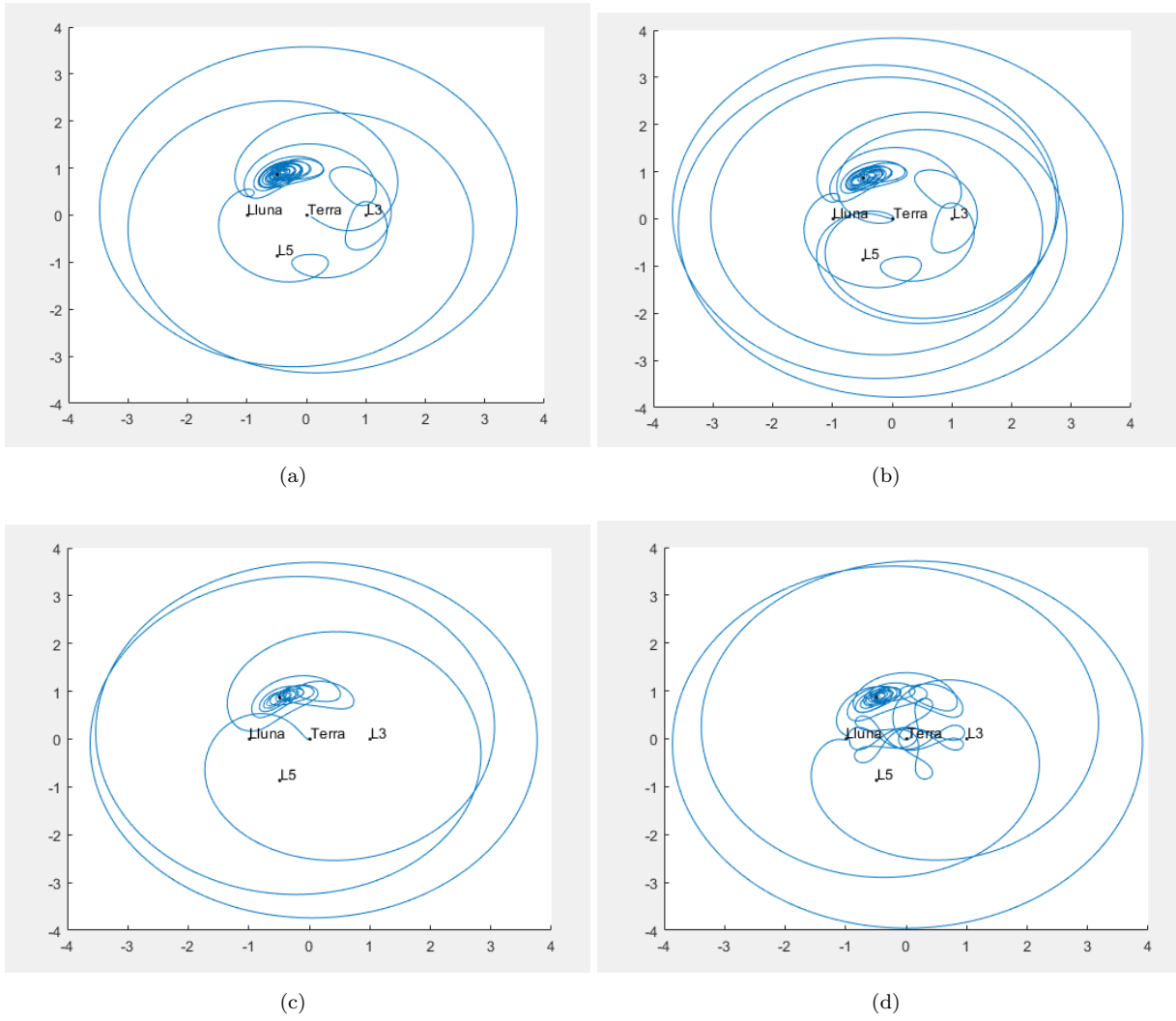


Figura 4.7: Exemples de transferències des del punt  $L_4$  fins a una òrbita baixa de la Terra forward.

aquest cas els valors de  $\theta_0$  utilitzats són els mateixos que en les transferències amb la Lluna. Recordem que aquests valors han d'estar compresos en el rang de les figures 3.8 i 3.7.

Taula 4.3: Resultats de les transferències des de la Terra fins al  $L_4$  backward.

Òrbita	$v_0$	$\beta$	$\theta_0[rad]$	$\Delta_v$ [m/s]	Temps de transferència [dies]
a	1.39	0.013	0.5	139.54	483.95
b	4.09	3.21	3.5	408.66	197
c	4.49	1.38	3.5	448.53	217
d	4.89	1.5	0.5	488.53	305

Taula 4.4: Resultats de les transferències del  $L_4$  fins a la Terra forward.

Òrbita	$v_0$	$\beta$	$\theta_0[rad]$	$\Delta_v$ [m/s]	Temps de transferència [dies]
a	1.86	5.7	1	584.32	690
b	3.53	3.6	4.25	530.11	740
c	4.15	2.5	4.25	460.56	380
d	5	1.25	1	498.37	626

La figura 4.8 mostra com varia la funció de Jacobi en les transferències de les figures 4.6a i 4.7b. Tal i com podem veure, aquesta energia es manté relativament constant durant un període de temps fins a un cert moment on decreix ràpidament. El temps en que la  $C_j$  es manté relativament constant correspon al temps en que el satèl·lit roman donant voltes al voltant del  $L_4$ . El moment on la  $C_j$  decreix brucament correspon al moment en que l'energia del satèl·leix i conseqüentment escapa del  $L_4$ .

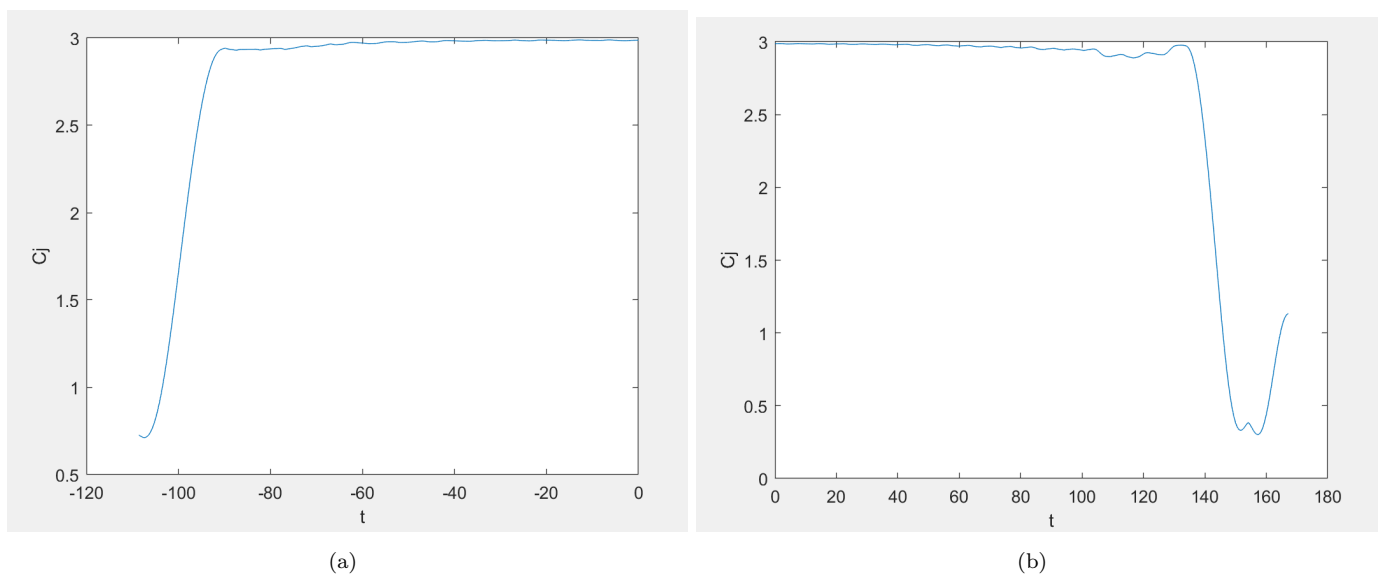


Figura 4.8: Variació de la constant de Jacobi en les figures 4.6a i 4.7b respectivament.

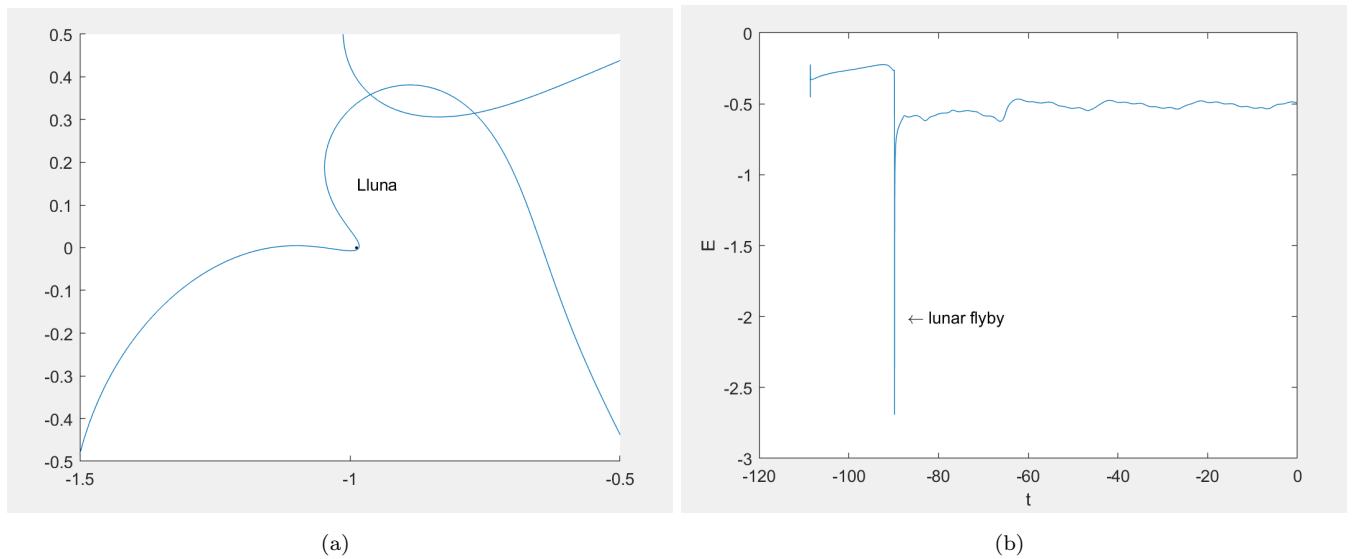


Figura 4.9: Exemple d'òrbita amb un lunar flyby.

Com hem vist anteriorment, l'energia del satèl·lit  $E$  creix i decreix bruscament quan s'aproxima a un dels primaris provocant un canvi en la trajectòria del satèl·lit. En la figura 4.9 podem veure representat aquest fenomen anomenat amb anglès flyby.

La figura 4.10 mostra la variació de l'energia del satèl·lit  $E$ , la funció de Jacobi  $C_j$  i la distància  $D$  respecte la Terra en funció del temps de les figures 4.1b i 4.2f. Podem veure com l'energia del satèl·lit creix a mesura que ens allunyem del  $L_4$  mentre que la funció de Jacobi decreix en el moment en que aconseguim escapar del punt. Pel que fa la distància del satèl·lit respecte la Terra es manté relativament constant mentre roman donant voltes al voltant del  $L_4$  fins que finalment arriba a la Terra.

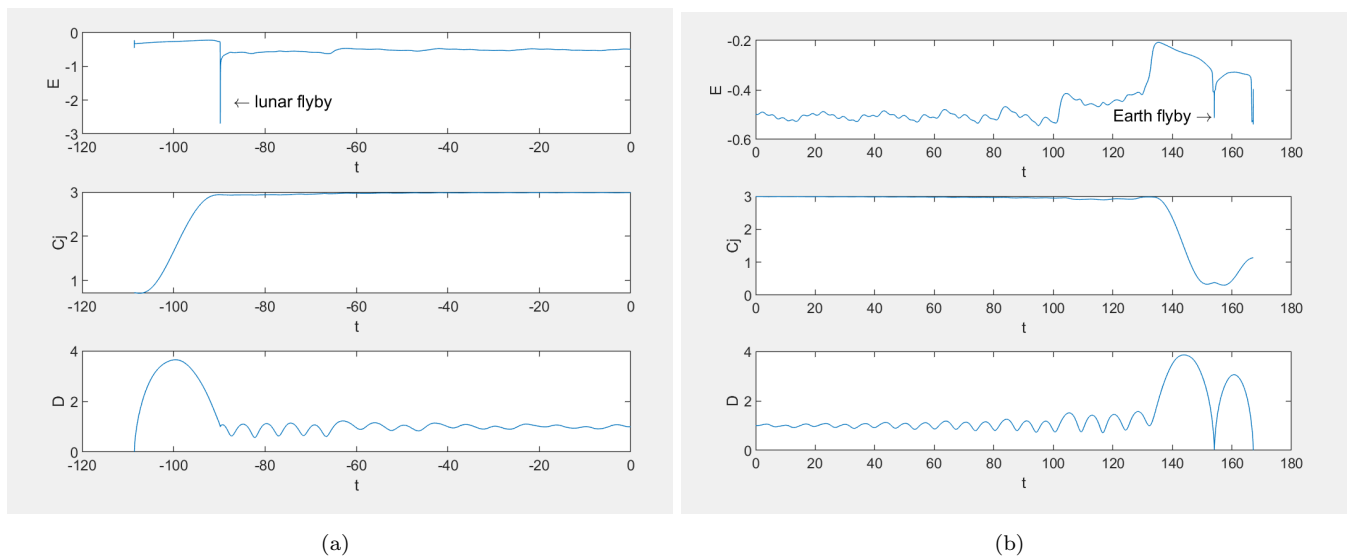


Figura 4.10: Canvis en  $E$ ,  $C_j$  i  $D$  de les transferències de les figures 4.1b i 4.2f.

## Capítol 5

# Conclusions

Aquest treball està enfocat com un estudi preliminar per dissenyar la transmissió d'un satèl·lit als punts triangulars del sistema Terra-Lluna-Sol. Tal i com hem vist, el model restringit ens serveix com a base per definir els punts d'equilibri tot i així necessitem un segon model on es tingui en compte la influència del Sol. Hem vist com la fase inicial d'aquest pot provocar variacions considerables en el moviment del satèl·lit al voltant del  $L_4$ . Estudiar la variació de la funció de Jacobi ens permet determinar quins angles de la fase inicial del Sol són òptims per a la transferència. Una vegada situats al punt  $L_4$  mitjançant forward i backward propagation hem trobat òrbites que arriben a la Terra i a la LLuna. Val a dir que aquestes exploracions s'han realitzat amb un total de 4000 condicions inicials, un número poc significatiu per trobar un gran nombre d'òrbites que arribin a un dels dos primaris. Pel que fa aquestes trajectòries hem vist com el satèl·lit pot explorar altres punts de llibració com és el cas del  $L_3$  o el  $L_5$  abans no arriba al  $L_4$ . Això és degut a la connexió que existeix entre el punt col·lineal  $L_3$  i els punts triangulars. A més, hem vist en alguns casos com l'atracció gravitatòria de la Lluna pot causar variacions en la trajectòria del satèl·lit (conegut com a lunar flyby) abans no arriba a inserir-se al voltant del objectiu. Pel que fa aquestes trajectòries diferenciem entre dos tipus: una trajectòria directa on el temps de transferència resulta menor i una segona transferència on el satèl·lit roman donant voltes al voltant del punt. En el primer cas, el fet de seguir una trajectòria directa implica que necessitem d'un segon impuls per tal d'inserir el satèl·lit al  $L_4$ . Això implica una despesa major de combustible. Tot i així, resultaria interessant en un posterior treball calcular com hauria de ser aquest segon impuls. Pel que fa les trajectòries amb un temps de transferència major, aquestes poden resultar de gran interès per situar nanosatèl·lits com a font d'observació ja que amb un únic impuls des d'una òrbita baixa podem situar el satèl·lit al voltant del objectiu. Val a dir que el model bicircular és un model simplificat dins el sistema Terra-Lluna. Tot i així els resultats obtinguts en aquest treball poden donar una primera aproximació de les transferències en el model real.



## Capítol 6

# Pressupost

El pressupost desglossat es troba a la taula següent:

	Taxa horària (€/h)	Hores	Import (€)
Recerca bibliogràfica	30	35	1.050
Programació de codi	30	100	3.000
Redacció de documents	30	40	1.200
Amortització d'equips informàtics	0,9	300	270
Amortització de software	0,5	1.000	500
		Total 6.020	

El pressupos general d'execució a falta d'IVA és de 6 mil vint euros.

# Bibliografia

- [1] A. Almeida. Orbital Maneuvers Between the Lagrangian Points and the Primaries in the Earth-Sun System. *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*, 2006.
- [2] E. Barrabés, M. Ollé. Dinàmica de varietats espacials: les autopistes de l'univers. *Butlletí de la societat catalana de matemàtiques*, Vol. 34, núm. 2, Pàg. 97-123, 2019.
- [3] E. Barrabés, G. Gómez, J.M. Mondelo, M. Ollé. Pseudo-Heteroclinic Connections Between Bicircular Restricted Four-Body Problems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 462 (1):740–750, 2016.
- [4] Minghu Tan, Ke Zhang, Jingyu Wang. Single impulsive transfer to Earth-Moon triangular point  $L_4$  in a bicircular model. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2020.
- [5] Zhengtao Zhang, Xiyun Hou. Transfer orbits to Earth-Moon triangular libration points. *School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, China*, 2015.
- [6] N.Gopalswamy, J.M Davila,O.C.St. Cyr. Earth-Affecting Solar Causes Observatory(EASCO): A potential international Living with a Star Mission from Sun-Earth L5. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 2011.
- [7] Stalos, S. and Folta, D. and Short, B. and Jen, J. and Seacord. Optimum transfer to a large-amplitude halo orbit for the Solar and Heliospheric Observatory (SOHO) spacecraft. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 1993.
- [8] J. R Cash, A. H. Karp . A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1990.
- [9] Wang Sang Koon, Martin W. Loy, Jerrold E. Marsdenand, Shane D. Ross. The Genesis Trajectory and heteroclinic Connections. *Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology*, 1999.
- [10] R. Farquhar, D. Muhonen and L. Church. Trajectories and orbital maneuvers for the ISEE-3/ICE comet mission. 2012.

- [11] Akyildiz, I.F, Uzunalioglu, H. and Bender, M.D. Handover management in Low Earth Orbit (LEO) satellite networks. *Mobile Networks and Applications* 4, 301–310, 1999.
- [12] Koon W S, Lo MW, Marsden JE. Dynamical systems, the three-body problem and space mission design. New York: Springer-Verlag; 2011.