

Treball final de màster

Estudi: Màster en Enginyeria Industrial

Títol: Implementació i anàlisi comparativa de la introducció de diferents simplificacions en mètodes de càlcul de fletxes de formigó armat

Document: 1. Memòria i Annexos

Alumne: Eudald Balló Colomer

Tutor: Lluís Torres Llinàs

Departament: Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial

Àrea: Enginyeria de la Construcció

Convocatòria (mes/any): Setembre 2019

ÍNDEX MEMÒRIA

1.	INTRODUCCIÓ.....	4
1.1.	Antecedents.....	4
1.2.	Objecte	4
1.3.	Abast i especificacions	4
2.	INTRODUCCIÓ TEÒRICA.....	6
3.	METODOLOGIES PER AL CàLCUL DE FLETXES A LLARG TERMINI	8
3.1.	EMM simplificat	8
3.2.	EMM general	12
3.3.	AEMM simplificat.....	15
3.4.	AEMM general	17
3.5.	Mètode simplificat.....	18
3.6.	Aproximació al càlcul d'integració de curvatures a partir de les metodologies simplificades	19
3.7.	Càlcul de fletxes en funció del temps.....	21
3.7.1.	Coeficient de fluència	21
3.7.2.	Deformació lliure de retracció	23
4.	ANÀLISI COMPARATIU	26
4.1.	Casos de partida.....	26
4.1.1.	Estudi general	26
4.1.2.	Estudi variació armadura	28
4.2.	Anàlisi de resultats.....	29
5.	RESUM DEL PRESSUPOST	31
6.	CONCLUSIONS	32
7.	RELACIÓ DE DOCUMENTS.....	34
8.	BIBLIOGRAFIA	35
9.	GLOSSARI.....	36

ÍNDEX ANNEXOS

Annex A – Exemple de càlcul

Annex B – Resultats

1. INTRODUCCIÓ

1.1. Antecedents

Els desplaçaments verticals, o fletxes, en elements de formigó armat a flexió són sovint la causa d'un mal funcionament de l'estructura i poden provocar diverses patologies i problemes de funcionament d'equipament i maquinària o de confort per als usuaris.

Malgrat que les guies de disseny incorporen metodologies simplificades, la comprovació del compliment en la limitació de les fletxes té una certa complexitat a causa de la quantitat de paràmetres que hi intervenen. La secció composta, la fissuració del formigó i les deformacions de fluència i retracció són els principals aspectes que particularitzen les deformacions en estructures de formigó.

1.2. Objecte

L'objecte del projecte és fer un estudi comparatiu dels resultats del càlcul de fletxes obtinguts amb diverses metodologies que incorporen aproximacions lleugerament diferents per tal d'analitzar-ne les diferències en funció dels principals paràmetres que afecten les deformacions del formigó armat.

1.3. Abast i especificacions

S'utilitzarà el mètode basat en el "mòdul efectiu", incorporat a l'Eurocodi 2 [4], el mètode del "mòdul efectiu ajustat amb l'edat", inclòs al Codi Model 90[3] i, entre a altres llocs, descrit a Time Effects in Concrete Structures [5] i una proposta de mètode simplificat basat en coeficients multiplicatius de la fletxa instantània [6], [7] i [8]. Igualment es compararà la simplificació obtinguda de trobar la fletxa total a partir de la interpolació a nivell d'element estructural i amb la integració de curvatures interpolades a nivell de secció [1].

Es farà un estudi paramètric per tal de comparar els resultats i veure la influència de cadascuna de les variables seleccionades. També es quantificaran les desviacions relatives entre formulacions i les degudes a la influència dels paràmetres introduïts.

2. INTRODUCCIÓ TEÒRICA

El formigó armat és un material compost que consisteix en combinar el formigó amb barres d'acer per tal de combinar les millors propietats dels dos materials: el formigó és molt resistent a compressió però extremadament dèbil a tracció, i aquest dèficit és el que supleixen les barres d'acer, aportant la resistència necessària a tracció. Tot i això, no només s'utilitza acer per a les armadures, sinó que també s'utilitzen altres materials com FRP.

Particularment, però, l'acer és un bon material a utilitzar per a les armadures, perquè té un coeficient de dilatació tèrmica molt similar a la del formigó, cosa que fa que no apareguin tensions, o es puguin negligir, entre els dos materials degut a efectes de temperatura. A més, l'acer corrugat té una bona adherència amb el formigó, fet que impedeix o dificulta el moviment relatiu entre acer i formigó i permet la transmissió de tensions al formigó.

Les fissures en estructures de formigó armat, però, són pràcticament inevitables, tot i que no representen un problema per a l'estructura sempre i quan aquestes estiguin controlades i compleixin unes mínimes exigències d'aparença i funcionalitat.

Les fissures s'originen en els punts de les estructures de formigó armat sotmesos a tracció, i que a més la tensió del formigó superi la resistència a tracció del formigó. Cada vegada que això succeeix en un punt, s'origina una nova esquerda.

En el gràfic de tensió-deformació del formigó armat, es pot veure el model de comportament quan apareix la primera fissura i successives:

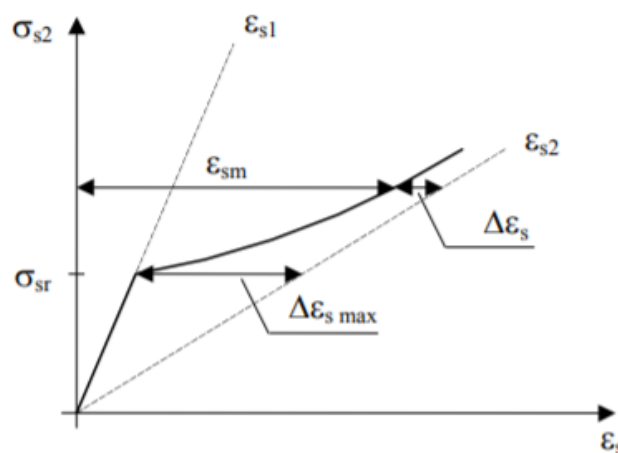


Figura 1. Gràfica tensió-deformació

Quan apareix la primera fissura, la deformació deixa de ser lineal i s'aparta del comportament de l'estat sense fissurar (es defineix com a estat 1, on el pendent és màxim), i a mesura que van apareixent esquerdes tendeix a apropar-se al comportament de l'estat completament fissurat (definit com a estat 2, on el pendent és mínim).

En una secció com la que s'analitzarà en aquest treball on hi ha armadura de compressió (superior) i de tracció (inferior), els models de la secció sense fissurar (estat 1) i completament fissurada (estat 2) tenen la forma següent:

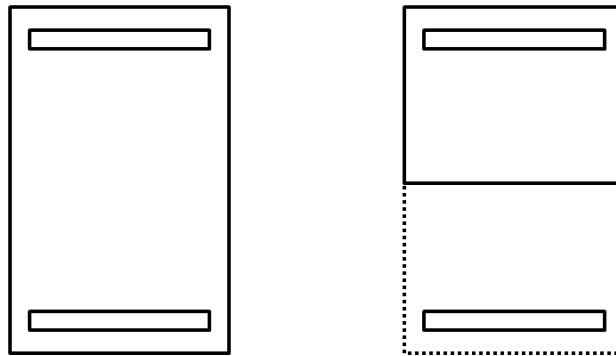


Figura 2. Models de secció de biga sense fissurar (esquerra) i completament fissurada (dreta)

En el càlcul de les fletxes del formigó a llarg termini és més complex encara perquè hi intervenen més paràmetres com el temps, el temps de la primera càrrega, i, sobretot, els fenòmens de la fluència i la retracció del formigó, que són la deformació prolongada del formigó sotmès a una càrrega i la retracció deguda a l'assecatge del formigó.

Aquestes deformacions diferides només afecten al formigó però no a les armadures i per tant els dos materials es comporten de manera diferent a llarg termini. El comportament combinat és el que acabarà donant el comportament seccional del formigó armat. D'acord amb això s'entén que les proporcions relatives de cada material dins d'una secció i la posició de les armadures afectarà a la secció, i d'una manera diferent si està fissurada o no. A partir de l'estudi de les seccions al llarg de la biga es podran obtenir les deformacions a nivell de l'element estructural.

3. METODOLOGIES PER AL CàLCUL DE FLETXES A LLARG TERMINI

En els següents apartats es descriuen els mètodes utilitzats en aquest treball per calcular les fletxes d'estructures de formigó armat a llarg termini, tot i que hi ha més mètodes que els exposats.

3.1. EMM simplificat

El mètode EMM (Effective Modulus Method), mètode del mòdul efectiu en català, en la versió simplificada, es descriu a l'Eurocodi 2 [4]. Per a una biga simplement recolzada amb càrrega repartida, com és el cas estudiat, la fletxa màxima es produirà a la secció central.

Aquest càlcul es fa a partir de la interpolació de fletxes de dos estats de la biga, el completament fissurat (estat II) i l'estat sense fissurar (estat I), segons la fórmula:

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (\text{Eq. 1})$$

On α és un paràmetre que pot ser una rotació, curvatura, fletxa o inèrcia, entre d'altres. El mètode general, explicat a l'apartat 3.2, consisteix en calcular les curvatures en un nombre suficient de seccions al llarg de la biga i a partir de la seva integració trobar la fletxa. En el mètode simplificat que s'exposa aquí, el paràmetre α és la fletxa. α_I i α_{II} és la fletxa màxima de la biga dels estats sense fissurar i completament fissurat, respectivament.

ζ és el coeficient de distribució, el càlcul del qual es descriu seguidament.

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \quad (\text{Eq. 2})$$

On β és un coeficient que té en compte la influència de la duració de la càrrega o si aquesta és cíclica. Per a càrregues de curta duració es pren $\beta=1$, i per a càrregues cícliques o permanents es pren $\beta=0,5$. En el treball s'ha utilitzat $\beta=0,5$ perquè les càrregues de la biga són permanents (concretament l'Eurocodi 2 indica que s'ha d'emprar la combinació quasipermanent). M_{cr} és el moment de fissuració o moment crític de la biga, i M és el moment màxim, en aquest cas aplicat al centre de la biga.

Per a calcular les fletxes s'utilitza un mòdul elàstic efectiu del formigó, segons la fórmula següent:

$$E_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (\text{Eq. 3})$$

On E_{cm} és el mòdul elàstic del formigó, $\varphi(t, t_0)$ és el coeficient de fluència rellevant per a la càrrega i l'interval de temps estudiat.

Per al càlcul dels moments d'inèrcia dels estats fissurats i sense fissurar, s'utilitza la secció transformada, és a dir, les àrees d'acer de les armadures es multipliquen per un coeficient n_{ef} per transformar-les a àrees de formigó. Aquest coeficient és la ràtio modular efectiva:

$$n_{ef} = \frac{E_s}{E_{c,ef}} \quad (\text{Eq. 4})$$

On E_s és el mòdul elàstic de l'armadura, que en aquest estudi és acer, però que pot ser d'altres materials, com FRP.

Les inèrcies es calculen respecte del centre de gravetat de la secció. Operant, es pot treure la relació x/d tant per a l'estat sense fissurar com fissurat, a partir del qual es poden trobar les profunditats de les fibres neutres, conegut el cantell efectiu d . Per a l'estat sense fissurar:

$$\frac{x_1}{d} = \frac{-\rho_1 + \rho_1 n_{ef} + 0,5 \frac{h^2}{d^2} - \rho_2 \frac{d_2}{d_1} + \rho_2 n_{ef} \frac{d_2}{d_1}}{-\rho_1 + \rho_1 n_{ef} + \frac{h}{d} - \rho_2 + \rho_2 n_{ef}} \quad (\text{Eq. 5})$$

I per a l'estat completament fissurat:

$$\frac{x_2}{d} = -n_{ef}\rho_1 - (n_{ef} - 1)\rho_2 + \sqrt{[n_{ef}\rho_1 + (n_{ef} - 1)\rho_2]^2 + 2 \left[n_{ef}\rho_1 + (n_{ef} - 1)\rho_2 \frac{d_2}{d} \right]} \quad (\text{Eq. 6})$$

On ρ_1 i ρ_2 són les quanties geomètriques de l'armadura de tracció i de compressió, respectivament, definides com:

$$\rho_i = \frac{A_i}{bd} \quad (\text{Eq. 7})$$

On A_1 i A_2 són les seccions d'armadura de tracció i de compressió, b és l'amplada de la biga i d la distància de la fibra superior al nivell de l'armadura de tracció.

Les inèrcies respecte els centres de gravetat, operant, i transformant les àrees d'acer a formigó, es calculen:

$$I_{1,ef} = \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + A_1(n_{ef} - 1)(d_1 - x_1)^2 + A_2(n_{ef} - 1)(x_1 - d_2)^2 \quad (\text{Eq. 8})$$

$$I_{2,ef} = \frac{1}{12}bx_2^3 + bx_2\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + A_1n_{ef}(d_1 - x_2)^2 + A_2(n_{ef} - 1)(x_2 - d_2)^2 \quad (\text{Eq. 9})$$

La fletxa total del mètode EMM s'obté de la suma de la fletxa instantània i de fluència, i la fletxa deguda a la retracció:

$$y_t = y_{i+\varphi} + y_{sh} \quad (\text{Eq. 10})$$

La fletxa instantània i de fluència, per aquest mètode, s'obté de forma conjunta, ja que es calcula a partir de $E_{c,ef}$, que conté el paràmetre $\varphi(t, t_0)$. Així doncs, la fletxa s'obté a partir d'una inèrcia efectiva que interpola entre els paràmetres de la inèrcia de la secció central de la biga fissurada i sense fissurar, segons la expressió:

$$I_{ef} = \frac{I_{1,ef}I_{2,ef}}{\zeta I_{1,ef} + (1 - \zeta)I_{2,ef}} \quad (\text{Eq. 11})$$

I la fletxa total, tenint en compte que la càrrega és repartida, i calculada a partir del mòdul efectiu de formigó i la inèrcia efectiva de la secció central:

$$y_{i+\varphi} = \frac{5M_{qp}L^2}{48E_{c,ef}I_{ef}} \quad (\text{Eq. 12})$$

On M_{qp} és el moment de la càrrega quasipermanent, tal com indica l'Eurocodi 2.

El càlcul de la fletxa instantània és anàleg a l'explicat fins ara, però utilitzant les propietats de la secció inicial, és a dir, E_{cm} en comptes de $E_{c,ef}$ i I_{ef} calculada a partir de la interpolació entre I_1 i I_2 .

Per al càlcul de la fletxa deguda a la retracció, es fa a partir de les curvatures dels estats sense fissurar i completament fissurat al centre de la biga, segons l'expressió següent:

$$C_{sh} = \varepsilon_{sh} n_{ef} \frac{S}{I} \quad (\text{Eq. 13})$$

On C_{sh} és la curvatura deguda a la retracció, ε_{sh} és la deformació lliure de retracció, S és el primer moment d'àrea de l'armadura respecte el centre de gravetat de la secció efectiva i I és la inèrcia.

S i I s'han de calcular tant per a l'estat sense fissuració com per a l'estat completament fissurat, i a partir d'aquí determinar $C_{1,sh}$ i $C_{2,sh}$ a partir de l'equació 1 del coeficient de distribució. Aquestes curvatures també es calculen per a la secció central, i per al mètode simplificat es consideren constants al llarg de la biga, ja que s'agafen les dades de la secció central per als càlculs. Al ser la curvatura constant, la fórmula de la fletxa és:

$$y_{sh} = C_{sh} \frac{L^2}{8} \quad (\text{Eq. 14})$$

De manera equivalent, també es podria calcular $y_{1,sh}$ i $y_{2,sh}$ a partir de $C_{1,sh}$ i $C_{2,sh}$ i calcular y_{sh} amb l'equació 1 del coeficient de distribució.

Amb el mètode simplificat es consideren només les propietats de la secció central de la biga, i se suposa que la resta de seccions tenen les mateixes, cosa que és una simplificació ja que als extrems de la biga hi haurà llocs on no haurà fissurat i per tant la inèrcia serà major, però tot i així permet obtenir bones aproximacions.

3.2. EMM general

A l'Eurocodi 2 s'explica que un mètode més rigorós que l'EMM simplificat consisteix en calcular la fletxa a partir de la integració de curvatures al llarg de la biga, i no considerant només la secció central com en el mètode anterior.

Aquest mètode es basa en integració de curvatures, és a dir, el 4t teorema de Mohr, o el segon teorema de la biga conjugada, que indica que la fletxa d'un punt de la biga és numèricament igual al moment del punt corresponent de la biga conjugada. És a dir:

$$y_i = [M_i] \quad (\text{Eq. 15})$$

Per a realitzar aquest mètode s'ha escollit utilitzar una resolució de 1000 punts a cada biga que, com es pot veure en la figura adjunta d el cas resolt a l'exemple de l'Annex A, és un bon número per la relació entre la capacitat de càlcul i la resolució obtinguda.

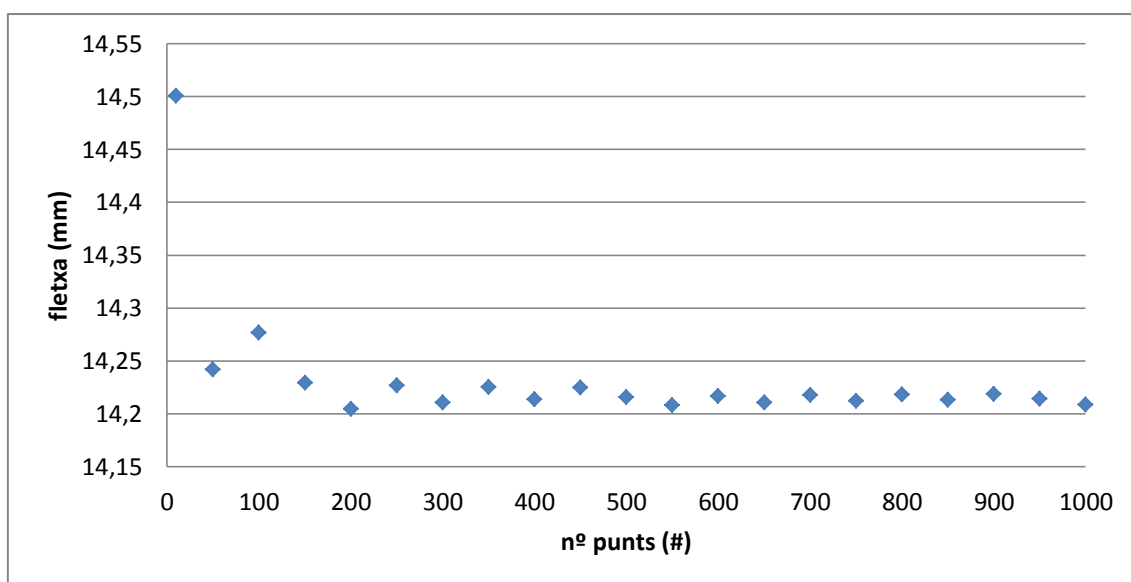


Figura 3. Convergència de la fletxa total pel mètode EMM simplificat segons el nº de divisions en el cas resolt de l'Annex A.

A cada secció de la biga hi haurà un coeficient de distribució ζ diferent, ja que el moment màxim a cada secció també serà diferent. En els punts de la biga on el moment màxim sigui inferior al de fissuració, el coeficient serà 0, és a dir, les propietats de la biga, segons la fórmula 1, seran les de la secció no fissurada, ja que la secció no estarà fissurada. La fórmula del coeficient de distribució, doncs, és la que segueix:

$$\zeta_i = \begin{cases} 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M_{k,i}} \right) & \text{si } M_{k,i} \geq M_{cr} \\ 0 & \text{si } M_{k,i} < M_{cr} \end{cases} \quad (\text{Eq. 16})$$

On el moment màxim a cada punt es calcula:

$$M_{k,i} = p_k x_i \frac{L}{2} - p_k \frac{x_i^2}{2} \quad (\text{Eq. 17})$$

On p_k és la càrrega característica ($g + q$).

El moment aplicat a cada punt, utilitzat per calcular les fletxes, també serà variable. De forma anàloga a la fórmula anterior:

$$M_{qp,i} = p_{qp} x_i \frac{L}{2} - p_{qp} \frac{x_i^2}{2} \quad (\text{Eq. 18})$$

On p_{qp} és la càrrega quasipermanent ($g + \psi_{02}q$).

La curvatura a cada punt, instantània més de fluència, es calcula per als estats fissurat i sense fissurar, a partir de $I_{1,ef}$ i $I_{2,ef}$, que només depenen de les propietats de la secció que en el nostre cas són constants al llarg de la biga, de $E_{c,ef}$, també constant, i del moment aplicat a cada punt:

$$C_{i+\varphi,i} = \frac{M_{qp,i}}{E_{c,ef} I_{ef}} \quad (\text{Eq. 19})$$

A partir de l'equació 1 del coeficient de distribució, es calcula la curvatura (sense la retracció) mitjana a cada punt.

Finalment, la curvatura deguda a la retracció es calcula també a partir de l'equació 1 del coeficient de distribució, que interpola entre $C_{1,sh}$ i $C_{1,sh'}$, constants al llarg de la biga.

La curvatura total a cada punt, doncs, és la suma de les curvatures calculades:

$$C_{t,i} = C_{i+\varphi,i} + C_{sh,i} \quad (\text{Eq. 20})$$

Finalment, un cop calculades la curvatura a cada punt de la biga, es pot calcular la fletxa màxima a partir del moment màxim de la biga conjugada. Per resoldre la integral per calcular el moment màxim s'ha utilitzat la integració pel mètode dels rectangles, definint cada rectangle com:

$$A_i = \frac{C_{t,i} + C_{t,i+1}}{2} (x_{i+1} - x_i) \quad (\text{Eq. 21})$$

On x_i és la distància de l'extrem esquerre de la biga al punt i .

La distància del centroide de cada rectangle a l'extrem esquerre de la biga:

$$d_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad (\text{Eq. 22})$$

La reacció als recolzaments de la biga conjugada:

$$[R] = \sum_{i=0}^n \frac{A_i d_i}{L} \quad (\text{Eq. 23})$$

La distància entre el centroide de cada rectangle i el centre de la biga, on hi ha el moment màxim de la biga conjugada, només de la meitat de la biga ja que busquem el moment màxim:

$$d'_i = \begin{cases} \frac{L}{2} - d_i & \text{si } \frac{L}{2} - d_i > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{L}{2} - d_i < 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 24})$$

I, finalment, la fletxa total màxima, al centre de la biga, que és igual al moment conjugat al centre de la biga:

$$y_{tot} = [M_{max}] = [R] \frac{L}{2} - \sum_{i=0}^n A_i d'_i \quad (\text{Eq. 25})$$

3.3. AEMM simplificat

El mètode AEMM, (Age-adjusted Effective Modulus Method), mètode del mòdul efectiu ajustat amb l'edat en català, s'explica a Time Effects in Concrete Structures [5] i al ModelCode 90 [3].

En el mètode que es presenta, se suposa que la secció totalment fissurada roman constant en el temps, tot i que en un anàlisi més acurat s'hauria de considerar que el centre de gravetat de la secció, i per tant la secció fissurada, varia en el temps. Aquesta simplificació, però, és necessària per poder utilitzar les fórmules presentades, i dona resultats molt bons [5].

En aquest mètode també s'utilitza un mòdul elàstic del formigó modificat, segons la fórmula que es presenta seguidament. Aquest s'anomena mòdul efectiu del formigó ajustat amb l'edat:

$$\bar{E}_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} \quad (\text{Eq. 26})$$

On $\chi(t, t_0)$ és el coeficient d'edat, un valor que generalment està comprès entre 0.6 i 0.9. En aquest treball s'ha considerat constant i de valor 0.8, ja que és un valor utilitzat habitualment en diversos estudis.

La fletxa total es calcula a partir dels increments de curvatura que generen unes restriccions imposades a la secció de la biga per tal de mantenir l'equilibri ja que, degut a la relaxació de tensions, aquestes poden variar lliurement. Aquestes restriccions artificials, que són un increment de la força axial i un increment del moment flector, es poden calcular segons les fórmules següents, que són vàlides per a seccions sense pretesat, com són els casos d'aquest projecte:

$$\Delta N = \bar{E}_{c,ef}[\phi(A_c \varepsilon_{0l} - B_c C_l) + \varepsilon_{sh} A_c] \quad (\text{Eq. 27})$$

$$\Delta M = \bar{E}_{c,ef}[\phi(-B_c \varepsilon_{0l} - I_c C_l) - \varepsilon_{sh} B_c] \quad (\text{Eq. 28})$$

On $\bar{E}_{c,ef}$ és el mòdul efectiu ajustat amb l'edat del formigó, A_c , B_c , I_c són l'àrea, el primer moment d'àrea i la inèrcia de la secció de formigó de profunditat d respecte la fibra superior, ignorant l'àrea d'acer, ε_{0l} és la deformació inicial a la fibra superior de la secció C_l és la curvatura inicial de la secció en el moment de la primera càrrega i ε_{sh} és la deformació lliure de retracció.

S'ha de notar que per a les seccions sense pretesat, es poden separar les contribucions degudes a la fluència i a la retracció de les fórmules anteriors, obtenint:

$$\Delta N_{\varphi} = \bar{E}_{c,ef} \varphi (A_{1,c} \varepsilon_{0l} - B_c C_l) \quad (\text{Eq. 29})$$

$$\Delta N_{sh} = \bar{E}_{c,ef} \varphi \varepsilon_{sh} A_c \quad (\text{Eq. 30})$$

$$\Delta M_{\varphi} = \bar{E}_{c,ef} \varphi (-B_{1,c} \varepsilon_{0l} - I_c C_l) \quad (\text{Eq. 31})$$

$$\Delta M_{sh} = \bar{E}_{c,ef} (-\varepsilon_{sh} B_c) \quad (\text{Eq. 32})$$

La deformació inicial a la fibra superior i la curvatura inicial es poden calcular segons les expressions:

$$\varepsilon_{0l} = \frac{BM_{qp}}{E_{cm}(AI - B^2)} \quad (\text{Eq. 33})$$

$$C_l = \frac{AM_{qp}}{E_{cm}(AI - B^2)} \quad (\text{Eq. 34})$$

On A, B i I són l'àrea, el primer moment d'àrea i la inèrcia de la secció transformada, utilitzant n i E_c , respecte la fibra superior. Al ser un càlcul dels estats inicials, les propietats del formigó utilitzades no tenen en compte les variables a llarg termini. n és la relació:

$$n = \frac{E_s}{E_{cm}} \quad (\text{Eq. 35})$$

Finalment, a partir dels ΔN i ΔM calculats es pot calcular l'increment de curvatura que provoquen:

$$\Delta C = \frac{\bar{A}_e \Delta M + \bar{B}_e \Delta N}{\bar{E}_{c,ef} (\bar{A}_e \bar{I}_e - \bar{B}_e^2)} \quad (\text{Eq. 36})$$

On \bar{A}_e , \bar{B}_e i \bar{I}_e són l'àrea el primer moment d'àrea i la inèrcia, respecte la fibra superior, de la secció transformada utilitzant \bar{n}_{ef} , on \bar{n}_{ef} és la ràtio modular efectiva ajustada amb l'edat:

$$\bar{n}_{ef} = \frac{E_s}{\bar{E}_{c,ef}} \quad (\text{Eq. 37})$$

S'ha de notar que el càlcul de l'increment de curvatura també es pot separar per la contribució de la fluència i la retracció, si les forces restrictores ΔM i ΔN que s'introdueixen a la fórmula són les de fluència o les de retracció.

De forma similar al mètode EMM, tots els càlculs explicats del mètode AEMM es realitzen per a la secció sense fissurar i fissurada, i s'interpolen amb el coeficient ζ segons la fórmula 1.

D'aquesta manera, un cop trobats els increments de curvatura es poden calcular les fletxes que generen aquests, de forma anàloga a les utilitzades en el mètode EMM:

$$y_\varphi = \frac{5\Delta C_\varphi L^2}{48} \quad (\text{Eq. 38})$$

$$y_{sh} = \frac{\Delta C_{sh} L^2}{8} \quad (\text{Eq. 39})$$

I la fletxa total, si es suma la instantània:

$$y_t = y_i + y_\varphi + y_{sh} \quad (\text{Eq. 40})$$

3.4. AEMM general

En el mètode general, igualment que en l'EMM general, es calculen les curvatures a cada secció de la biga (també s'ha realitzat 1000 divisions en aquest cas), calculant, també, ζ_i , $M_{k,i}$, $M_{qp,i}$ a cada punt.

La curvatura total a cada punt de la biga és la suma de la instantània i la deguda als increments de les forces restrictores a cada punt.

$$C_t = C_i + \Delta C_\varphi + \Delta C_{sh} \quad (\text{Eq. 41})$$

També es pot definir la curvatura total a cada punt com la suma de les curvatures dels estats fissurats i sense fissurar a cada punt, per arribar al mateix resultat.

$$C_t = C_1 + C_2 \quad (\text{Eq. 42})$$

Tots els càlculs es realitzen per a la secció sense fissurar i la secció completament fissurada, i alhora també es realitzen aquests càlculs per a cada punt de la secció amb les fórmules de l'AEMM simplificat.

Finalment, un cop coneguda la curvatura total a cada punt, les fórmules per calcular la fletxa total són les mateixes que les de l'EMM general, que calculen la fletxa total a partir del 4t teorema de Mohr.

3.5. Mètode simplificat

El mètode simplificat proposat per Miàs et al. [6], [7] i [8] es basa en uns coeficients multiplicatius de la fletxa instantània, per tal de trobar amb una fórmula senzilla una bona aproximació de la fletxa diferida.

Així doncs, defineix les constant k_φ i k_{sh} :

$$k_\varphi = 0,73\varphi\sqrt{n\rho} \quad (\text{Eq. 43})$$

$$k_{sh} = 1 + \sqrt{n\rho} \quad (\text{Eq. 44})$$

Aquestes constants, però, es van deduir per a bigues només amb armadura de tracció (amb armadures de materials compostos, FRP). Si la biga sotmesa a flexió també té armadura de compressió (ρ_2), un mètode senzill de tenir en compte els seu efecte en les deformacions a llarg termini consisteix en aplicar un coeficient reductor [2].

En una primera aproximació (pendent d'un estudi més general) en aquest treball es proposa el següent factor:

$$k_{\rho'} = \frac{1}{1 + 20n\rho_2} \quad (\text{Eq. 45})$$

De manera que els coeficients multiplicatius modificats prenen la forma:

$$k'_{\varphi} = k_{\varphi}k_{\rho'} \quad (\text{Eq. 46})$$

$$k'_{sh} = k_{sh}k_{\rho'} \quad (\text{Eq. 47})$$

El coeficient k'_{φ} multiplica a la fletxa instantània, per tal d'obtenir la fletxa deguda a la fluència, y_{φ} . Aquesta fórmula és vàlida per una biga simplement recolzada. És a dir:

$$y_{\varphi} = y_i k'_{\varphi} \quad (\text{Eq. 48})$$

Anàlogament, la fletxa deguda a la retracció s'obté de:

$$y_{sh} = y_{sh} k'_{sh} \quad (\text{Eq. 49})$$

On y_{sh} :

$$y_{sh} = \frac{\varepsilon_{sh}(t, t_0)l^2}{8d} \quad (\text{Eq. 50})$$

3.6. Aproximació al càlcul d'integració de curvatures a partir de les metodologies simplificades

El mètode de Bischoff-Gross [1] permet obtenir una aproximació de la fletxa a llarg termini a partir dels mètodes simplificats (EMM i AEMM) i sense haver de fer la integració de curvatures. Per fer-ho, aquest mètode introdueix un paràmetre, γ , que s'utilitza per calcular una inèrcia equivalent que s'ha d'aplicar en els mètodes simplificats:

$$I'_e = \frac{I_2}{1 - \gamma \eta 0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2}$$

On η és:

$$\eta = 1 - \frac{I_2}{I_1}$$

On aquestes inèrcies són les efectives, en el mètode EMM, i les efectives ajustades amb l'edat, en el mètode AEMM.

Per a una biga simplement recolzada, amb càrrega repartida, el paràmetre γ es defineix:

$$\gamma = \frac{1,6\xi^3 - 0,6\xi^4}{\left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^2} + 2,4 \ln(2 - \xi) \quad (\text{Eq. 51})$$

On el factor ξ es calcula:

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - \frac{M_{cr}}{M_a}} \quad (\text{Eq. 52})$$

Aquestes expressions estan calculades per a $\beta = 1$. Es proposa una adaptació de la fórmula per a què inclogui el paràmetre $\beta = 0,5$ utilitzat en els altres mètodes. D'aquesta manera, les fórmules adaptades queden:

$$\gamma = \frac{1,6\xi^3 - 0,6\xi^4}{0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^2} + 2,4 \ln(2 - \xi) \quad (\text{Eq. 53})$$

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{0,5} \frac{M_{cr}}{M}} \quad (\text{Eq. 54})$$

$$I'_e = \frac{I_2}{1 - \gamma \eta 0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2} \quad (\text{Eq. 55})$$

La comparació a partir de l'EMM es realitza substituint la inèrcia equivalent per la inèrcia anterior, i per al càlcul de la fletxa de retracció s'utilitza un coeficient de distribució modificat amb el paràmetre γ :

$$\zeta' = 1 - \beta \gamma \left(\frac{M_{cr}}{M} \right) \quad (\text{Eq. 56})$$

La comparació a partir de l'AEMM es fa només introduint el coeficient de distribució modificat, ja que aquest mètode no calcula inèrcies sino increments de curvatura.

3.7. Càlcul de fletxes en funció del temps

Dels diversos possibles models de comportament a llarg termini del formigó, a l'annex B de l'Eurocodi 2 [4] es descriuen els procediments per calcular el coeficient de fluència i la deformació lliure de retracció en funció del temps. Amb aquests paràmetres es pot calcular la fletxa en qualsevol instant, a diferència dels càlculs que s'han realitzat en aquest treball, on aquests paràmetres s'han imposat per a un temps molt llarg, obtenint la fletxa a molt llarg termini però sense poder-la obtenir per a un instant anterior.

Les fórmules que es descriuen a continuació són les que permeten realitzar el càlcul d'aquests dos coeficients en funció del temps.

3.7.1. Coeficient de fluència

El coeficient de fluència es calcula:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t, t_0) \quad (\text{Eq. 57})$$

On φ_0 és el coeficient de fluència nocional, que es pot estimar:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0) \quad (\text{Eq.58})$$

On φ_{RH} és un factor que contempla l'efecte de l'humitat relativa en el coeficient de fluència nocial:

$$\varphi_{RH} = \begin{cases} 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \sqrt[3]{h_0}} & \text{si } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \\ \left[1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \sqrt[3]{h_0}} \alpha_1 \right] \alpha_2 & \text{si } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{Eq. 59})$$

On RH és la humitat relativa de l'ambient en %. $\beta(f_{cm})$ és un factor que contempla la resistència del formigó en el coeficient de fluència nocial:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (\text{Eq. 60})$$

On f_{cm} és la resistència a compressió mitjana en MPa a l'edat de 28 dies. $\beta(t_0)$ és un factor que contempla l'efecte de l'edat del formigó en el coeficient de fluència nocial:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,2})} \quad (\text{Eq. 61})$$

h_0 és la mida nocial, definida com A_c / u , on u és el perímetre de la biga.

$\beta_c(t, t_0)$ és un coeficient que descriu l'evolució de la fluència en el temps després de la càrrega, i es pot estimar:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0,3} \quad (\text{Eq. 62})$$

On t_0 és l'edat del formigó al moment de la càrrega i β_H és un coeficient que depèn de la humitat relativa i la mida nocial:

$$\beta_H = \begin{cases} 1,5[1 + (0,012RH)^{18}]h_0 + 250 \leq 1500 & \text{si } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \\ 1,5[1 + (0,012RH)^{18}]h_0 + 250\alpha_3 \leq 1500\alpha_3 & \text{si } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \end{cases}$$

(Eq. 63)

On $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ són uns coeficients que consieren la influència de la resistència del formigó:

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \quad (\text{Eq. 64})$$

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \quad (\text{Eq. 65})$$

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5} \quad (\text{Eq. 66})$$

3.7.2. Deformació lliure de retracció

La deformació lliure de retracció es pot separar en dos components:

$$\varepsilon_{sh}(t) = \varepsilon_{ca}(t) + \varepsilon_{ca}(t) \quad (\text{Eq. 67})$$

On $\varepsilon_{ca}(t)$ és la deformació de retracció deguda a l'assecat del formigó i $\varepsilon_{ca}(t)$ és la deformació de retracció autògena.

La deformació de retracció autògena es calcula:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t)\varepsilon_{ca}(\infty) \quad (\text{Eq. 68})$$

On:

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2t^{0,5}) \quad (\text{Eq. 69})$$

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10)10^{-6} \quad (\text{Eq. 70})$$

On la t és el temps en dies.

Pel que fa a la deformació de retracció deguda a l'assecat del formigó,

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s)k_h\varepsilon_{cd,0} \quad (\text{Eq. 71})$$

On k_h és un coeficient que depèn de h_0 segons la taula 3.3 de l'Eurocodi 2:

h_0	k_h
100	1,0
200	0,85
300	0,75
≥ 500	0,7

Taula 1. Taula 3.3 de l'Eurocodi 2

I $\beta_{ds}(t, t_s)$ és un coeficient:

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{(t - t_s) + 0,04\sqrt{h_0^3}} \quad (\text{Eq. 72})$$

On t és l'edat del formigó en dies al moment considerat i t_s és l'edat del formigó en dies al moment de l'inici de la retracció. $\varepsilon_{cd,0}$ és la deformació de retracció bàsica deguda a l'assecat del formigó, que es calcula com:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \left[(220 + 110\alpha_{ds1}) \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10}\right) 10^{-6} \beta_{RH} \right] \quad (\text{Eq. 73})$$

On:

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[1 - \left(\frac{RH}{100} \right)^3 \right] \quad (\text{Eq. 74})$$

α_{ds1} és un coeficient que depèn del tipus de ciment:

$$\alpha_{ds1} = \begin{cases} 3 & \text{per ciment classe S} \\ 4 & \text{per ciment classe N} \\ 6 & \text{per ciment classe R} \end{cases} \quad (\text{Eq. 75})$$

α_{ds2} és un coeficient que també depèn del tipus de ciment:

$$\alpha_{ds1} = \begin{cases} 0,13 & \text{per ciment classe S} \\ 0,12 & \text{per ciment classe N} \\ 0,11 & \text{per ciment classe R} \end{cases} \quad (\text{Eq. 76})$$

4. ANÀLISI COMPARATIU

4.1. Casos de partida

Els casos de partida que s'han utilitzat per a realitzar l'estudi comparatiu es presenten tot seguit. S'ha optat per realitzar un estudi general, estudiant la variació de diferents paràmetres per veure com afecta a la fletxa final segons cada mètode, i un anàlisi més específic on s'estudia la influència de la variació de l'armadura en un d'aquests casos i per a diferents variables.

4.1.1. Estudi general

Les dades de la biga que es proposen estudiar en aquest anàlisi es defineixen tot seguit.

-Les dades de la biga:

$$b=1000 \text{ mm} \quad h=\text{veure taula 2} \quad d_1=\text{veure taula 2} \quad d_2=50 \text{ mm} \quad L=8000 \text{ mm}$$

$$\rho_2=\text{veure taula 2} \quad \rho_1=\text{veure taula 2}$$

-Les dades del formigó:

$$f_{ck}=\text{veure taula 2} \quad \varphi(t, t_0)=\text{veure taula 2} \quad \varepsilon_{sh}(t, t_0)=\text{veure taula 2}$$

$$\chi(t, t_0)=0,8$$

-Les dades de l'acer:

$$E_s=200000 \text{ MPa}$$

Les dades de les càrregues són:

$$\frac{q}{g+q}=\text{veure taula 2} \quad \psi_{02}=0,3 \quad \beta=0,5 \quad M/M_{cr}=\text{veure taula 2}$$

On les dades parametritzades a la taula són:

Cas	f_{ck}	$\varphi(t, t_0)$	ε_{sh}	$q/(g + q)$	M/M_{cr}	h	d_1	ρ_1	ρ_2
1	30	2	0,00045	0,6	1,5	620	570	0,015	0,003
2	50	1,5	0,0004	0,6	1,5	620	570	0,015	0,003
3	30	2	0,00045	0,45	1,5	620	570	0,015	0,003
4	50	1,5	0,0004	0,45	1,5	620	570	0,015	0,003
5	30	2	0,00045	0,3	1,5	620	570	0,015	0,003
6	50	1,5	0,0004	0,3	1,5	620	570	0,015	0,003
7	30	2	0,00045	0,6	2,5	620	570	0,015	0,003
8	50	1,5	0,0004	0,6	2,5	620	570	0,015	0,003
9	30	2	0,00045	0,45	2,5	620	570	0,015	0,003
10	50	1,5	0,0004	0,45	2,5	620	570	0,015	0,003
11	30	2	0,00045	0,3	2,5	620	570	0,015	0,003
12	50	1,5	0,0004	0,3	2,5	620	570	0,015	0,003
13	30	2	0,00045	0,6	4,5	620	570	0,015	0,003
14	50	1,5	0,0004	0,6	4,5	620	570	0,015	0,003
15	30	2	0,00045	0,45	4,5	620	570	0,015	0,003
16	50	1,5	0,0004	0,45	4,5	620	570	0,015	0,003
17	30	2	0,00045	0,3	4,5	620	570	0,015	0,003
18	50	1,5	0,0004	0,3	4,5	620	570	0,015	0,003
19	30	2	0,00045	0,6	1,5	450	400	0,005	0,0015
20	50	1,5	0,0004	0,6	1,5	450	400	0,005	0,0015
21	30	2	0,00045	0,45	1,5	450	400	0,005	0,0015
22	50	1,5	0,0004	0,45	1,5	450	400	0,005	0,0015
23	30	2	0,00045	0,3	1,5	450	400	0,005	0,0015
24	50	1,5	0,0004	0,3	1,5	450	400	0,005	0,0015
25	30	2	0,00045	0,6	2,5	450	400	0,005	0,0015
26	50	1,5	0,0004	0,6	2,5	450	400	0,005	0,0015
27	30	2	0,00045	0,45	2,5	450	400	0,005	0,0015
28	50	1,5	0,0004	0,45	2,5	450	400	0,005	0,0015
29	30	2	0,00045	0,3	2,5	450	400	0,005	0,0015
30	50	1,5	0,0004	0,3	2,5	450	400	0,005	0,0015
31	30	2	0,00045	0,6	4,5	450	400	0,005	0,0015
32	50	1,5	0,0004	0,6	4,5	450	400	0,005	0,0015
33	30	2	0,00045	0,45	4,5	450	400	0,005	0,0015
34	50	1,5	0,0004	0,45	4,5	450	400	0,005	0,0015
35	30	2	0,00045	0,3	4,5	450	400	0,005	0,0015
36	50	1,5	0,0004	0,3	4,5	450	400	0,005	0,0015

Taula 2. Dades variables segons casos.

4.1.2. Estudi variació armadura

També es proposa estudiar com varien les fletxes totals segons la quantitat d'armadura, la relació de l'armadura de tracció i de compressió, i el moment màxim aplicat. Es proposen les dades de partida següents per a realitzar aquest estudi comparatiu:

-Les dades de la biga:

$$b=1000 \text{ mm} \quad h=620 \text{ mm} \quad d_1=570 \text{ mm} \quad d_2=50 \text{ mm} \quad L=8000 \text{ mm}$$

$$n\rho=\text{var. (entre } 0,004 \text{ i } 0,14 \text{ en intervals de } 0,0108) \quad \rho_2/\rho_1=\text{veure taula 3}$$

-Les dades del formigó:

$$f_{ck}=30 \text{ MPa} \quad \varphi(t, t_0)=2 \quad \varepsilon_{sh}(t, t_0)=450 \cdot 10^{-6} \quad \chi(t, t_0)=0,8$$

-Les dades de l'acer:

$$E_s=200000 \text{ MPa}$$

Les dades de les càrregues són:

$$\frac{q}{g+q}=0,45 \quad \psi_{02}=0,3 \quad \beta=0,5 \quad M/M_{cr} = \text{veure taula 3}$$

Per a cada un d'aquests casos es variarà l'armadura, més concretament la quantia geomètrica transformada, $n\rho$, ja que d'aquesta manera els resultats obtinguts es poden extrapolar i comparar a altres materials que no siguin acer i que tinguin un mòdul elàstic diferent, com podrien ser els materials compostos.

La relació $n\rho$ es variarà de 0,004 a 0,14 en 20 intervals, és a dir, en increments de 0,0065. Per tant, per a cada cas es calcularan 21 fletxes totals, cadascuna de les quals calculades per a cada mètode estudiat.

La relació dels casos segons les dades variables segueixen es defineixen a continuació:

Cas	M/M_{cr}	ρ_2/ρ_1
1	1,5	0
2	1,5	0,25
3	1,5	0,5
4	2,5	0
5	2,5	0,25
6	2,5	0,5
7	4,5	0
8	4,5	0,25
9	4,5	0,5

Taula 3. Dades variables segons casos variació armadura.

S'opta per variar la relació entre quanties geomètriques de 0 a 0,5, on 0 seria el cas d'una biga sense armadura de tracció. El moment màxim es varia de 1,5 vegades el moment de fissuració a 4,5 vegades.

4.2. Anàlisi de resultats

Els resultats numèrics dels estudis estan adjuntats a l'Annex B d'aquest projecte. S'han recopilat les fletxes totals obtingudes per a cada mètode i per a cada un dels casos proposats. S'han realitzat les ràtios de tots els mètodes respecte el mètode EMM simplificat, que és el que explica l'Eurocodi 2 [4]. A partir d'aquestes dades es podrien obtenir les ràtios respecte altres mètodes i els errors entre ells, si fos d'interès. S'han quantificat les mitjanes de les ràtios i s'han calculat els estadístics desviació típica i coeficient de variació, així com el màxim i el mínim de cada conjunt de dades.

Com era d'esperar, els mètodes generals EMM i AEMM donen una fletxa inferior que els respectius mètodes simplificats, ja que el fet de contemplar la influència de totes les seccions de la biga, i no només la de moment màxim, el resultat és més precís i menor, ja que el moment a les seccions circumdants és menor al màxim. Tot i això, a efectes pràctics del disseny estructural, es considera acceptable aquesta diferència [4].

En l'anàlisi de la variació de l'armadura, com és lògic, per a tots els mètodes, la fletxa de la biga és menor quanta més armadura hi ha, així com per a moments aplicats més petits.

S'observa que les discrepàncies més grans entre mètodes (de l'ordre del 15%) es donen sobretot en els casos sense armadura de compressió i, en general, per a armadures relativament petites (de l'ordre de $n\rho < 0,04$). Per als casos on el moment aplicat (i l'estat de fissuració) és més gran ($M/M_{cr} = 2,5$ i $4,5$), els errors entre els mètodes són molt petits (de l'ordre de l'1% i menys en alguns casos).

S'observa també que el mètode simplificat augmenta l'error relatiu quanta més armadura de compressió hi ha, arribant fins a errors mitjans del 4% (màxims del 7,9%), però que en termes de precisió de càlculs no són rellevants. Això pot ser degut al paràmetre $k_{\rho'}$, corrector de les constants multiplicatives per a armadura de compressió:

$$k_{\rho'} = \frac{1}{1 + 20n\rho_2}$$

En aquest treball s'ha plantejat un valor preliminar d'aquest paràmetre, que ha donat resultats relativament satisfactoris. Tot i no constar adjunt a l'annex de resultats, al treball també s'han realitzat els càlculs agafant aquesta constant amb un valor de 10 al denominador en comptes de 20. D'aquesta forma l'error augmenta al augmentar l'armadura de compressió, però en ordre invers, per la qual cosa és probable que es pogués optimitzar més l'ajust i trobar un valor més òptim entre els dos valors estudiats, tot i que no s'ha realitzat en aquest treball. S'ha de notar que el mètode simplificat busca aproximar-se al mètode EMM simplificat i no al general.

Els errors relatius entre els mètodes EMM simplificat i AEMM simplificat són molt petits, de l'ordre del 2% en la majoria de casos, i entre els mètodes EMM i AEMM generals passa el mateix, els errors relatius mitjans són també de l'ordre del 2% com a màxim. L'error mitjà, però, que es comet entre utilitzar els mètodes simplificats o generals és variable segons el moment aplicat (arriba fins a un 1% mitjà (màxim 1,5%) per a $M/M_{cr}=4,5$), i augmenta per a armadures de compressió majors i per a moments flectors més petits, arribant fins a un 10%(15% màxim) per al cas més desfavorable, el 3, amb $\rho_2/\rho_1 = 0,5$ i $M/M_{cr} = 1,5$.

Finalment, respecte a l'ajust de Bischoff-Gross per aproximar el càlcul dels mètodes generals a partir dels mètodes simplificats, els errors que es cometen són més petits pel mètode EMM que per l'AEMM. El primer arriba fins a errors màxims del 4% i el segon fins a errors del 14%.

5. RESUM DEL PRESSUPOST

El pressupost ascendeix a la suma de 6171 € (sis mil cent setanta-un euros).

Descripció	Quantitat	Preu unitari (€/h)	Import (€)
Recerca informació i estudi	35	20,00	700,00
Elaboració fulla de càlcul	90	20,00	1800,00
Redacció del projecte	80	20,00	1600,00
Anàlisi de resultats	50	20,00	1000,00
Base imposable			5100,00
21% IVA			1071,00
Import total			6171,00

6. CONCLUSIONS

En aquest treball s'han estudiat, descrit, calculat i comparat fletxes a llarg termini per a diferents metodologies avançades. Tots els càlculs s'han implementat en una fulla de càlcul per tal d'agilitzar-los i poder realitzar la gran quantitat d'operacions necessàries, especialment per a les metodologies d'integració de curvatures.

Un cop calculades les fletxes de tots els casos i per a tots els mètodes, s'ha analitzat la diferència entre els diferents mètodes i com varien en funció de les principals variables implicades, a través de les ràtios calculades respecte del model de l'Eurocodi 2, que s'ha pres de referència per considerar-se el més estès a la pràctica. Tot i que tots aquests mètodes ja han estat avaluats experimentalment, l'objectiu del treball és analitzar i quantificar les diferències entre els diferents models.

Els mètodes que donen una fletxa total més petita són, com era d'esperar, els generals, EMM i AEMM, amb una diferència molt petita entre ells dos (de l'ordre del 2%) per a la majoria de casos estudiats, degut a que aquests mètodes contempnen les seccions no fissurades o parcialment fissurades, a diferència dels mètodes simplificats. Seguidament ve el mètode de Bischoff-Gross d'aproximació dels mètodes generals a partir dels simplificats, seguit del mètode simplificat, i aquest dels mètodes simplificats EMM i AEMM, aquests dos últims amb errors molt petits també entre ells (de l'ordre del 2%).

L'error mitjà que es comet entre utilitzar els mètodes simplificats o generals és variable segons el moment aplicat arribant fins a un 1% per a moments grans (de l'ordre de $1,5 M_{cr}$), i augmentant per a armadures de compressió majors (de l'ordre de $\rho_2/\rho_1 = 0,5$), i per a moments flectors més petits (de l'ordre de $1,5 M_{cr}$), arribant fins a un 15%.

El mètode simplificat basat en coeficients multiplicatius dona resultats satisfactoris fins i tot amb la introducció d'una primera aproximació del paràmetre que modifica les constants multiplicatives per tenir en compte l'armadura de compressió, ja que l'error respecte l'EMM simplificat en els casos de moment aplicat més gran no són rellevants i només arriben a un 4%

mitjà. Un estudi específic a partir dels càlculs d'aquest treball permetria acabar de valorar aquesta proposta.

Finalment, el mètode de Bischoff-Gross d'aproximació al càlcul d'integració de curvatures a partir de les metodologies simplificades és més efectiu per comparar els mètodes basats en l'EMM (diferències de fins al 4%) que no pas en l'AEMM (diferències de fins al 14%). Les discrepàncies entre aquests dos models deuen venir del fet que el segon no utilitza la inèrcia modificada per calcular les noves fletxes, sinó que utilitza només la constant de distribució modificada, segurament un càlcul massa simplificat que porta a diferències més grans de les esperades.

Eudald Balló Colomer
Girona, 4 de Setembre de 2019

7. RELACIÓ DE DOCUMENTS

1. Memòria i Annexos
2. Resum

8. BIBLIOGRAFIA

[1] BISCHOFF P., GROSS S., *Design approach for calculating deflection of FRP-Reinforced Concrete. Journal of composites for construction.* 15(4): 490-9. 2011.

[2] Comisión Permanente del Hormigón. *Instrucción de Hormigón Estructural. EHE-08. 3a edición.* Madrid: Ministerio de Fomento. Centro de Publicaciones. 2009.

[3] CEB. *CEB-FIP Model code 1990.* 1991

[4] CEN-TC250 (2004). *EN 1992-1-1. Eurocode 2. Design of concrete structures. General rules for buildings.* 2004

[5] GILBERT R.I., *Time effects in concrete structures.* Elsevier, 1988.

[6] MIÀS C, TORRES LL, TURON A, BAENA M, BARRIS C. A simplified method to obtain time-dependent curvatures and deflections of concrete members reinforced with FRP bars. *Compos Struct.* 92(8):1833–8. 2010.

[7] MIÀS C. *Analysis of time-dependent flexural behaviour of concrete members reinforced with fibre reinforced polymer bars. PhD thesis.* Universitat de Girona. 2012.

[8] TORRES L, MIÀS C., TURON A., BAENA M. A rational method to predict long-term deflections of FRP reinforced concrete members. *Engineering Structures.* 40: 230-9. 2012.

9. GLOSSARI

n	Ràtio modular
E_{cm}	Mòdul elàstic del formigó
h	Cantell de la biga
b	Amplada de la biga
d	Cantell efectiu
ρ	Quantia geomètrica
L	Longitud de la biga
f_{ck}	Resistència característica del formigó
f_{ctm}	Resistència mitjana a tracció del formigó
$\varphi(t, t_0)$	Coefficient de fluència
$\varepsilon_{sh}(t, t_0)$	Deformació lliure de retracció
$\chi(t, t_0)$	Coefficient d'edat
E_s	Mòdul elàstic de l'armadura
q	Sobrecàrrega
g	Càrrega permanent
Ψ_{02}	Coefficient simultaneïtat
β	Coefficient tipus de càrrega
M	Moment
M_{cr}	Moment de fissuració
W	Mòdul resistent
$y_{màx}$	Distància màxima del centre de gravetat a la fibra inferior de la biga.
ζ	Coefficient de distribució

A, B, I	Àrea, primer moment d'àrea i inèrcia respecte el centre de gravetat de la secció transformada utilitzant n .
A_c, B_c, I_c	Àrea, primer moment d'àrea i inèrcia respecte la fibra superior ignorant l'àrea de les armadures.
$\bar{A}_{ef}, \bar{B}_{ef}, \bar{I}_{ef}$	Àrea, primer moment d'àrea i inèrcia respecte la fibra superior de la secció transformada utilitzant \bar{n}_{ef} .
$E_{c,ef}$	Mòdul elàstic efectiu del formigó
n_{ef}	Ràtio modular efectiva
$\bar{E}_{c,ef}$	Mòdul elàstic efectiu del formigó ajustat amb l'edat
\bar{n}_{ef}	Ràtio modular efectiva ajustada amb l'edat
I_{ef}	Inèrcia de la secció transformada utilitzant n_{ef} respecte el centre de gravetat.
y_i	Fletxa instantània
y_φ	Fletxa de fluència
y_{sh}	Fletxa de retracció
y_t	Fletxa total
S	Primer moment d'àrea de l'armadura
C	Curvatura
M_k	Moment característic
M_{qp}	Moment quasipermanent
p_k	Càrrega característica
p_{qp}	Càrrega quasipermanent
ε_{0l}	Deformació inicial de la fibra superior de la secció
C_l	Curvatura inicial de la secció en el moment de la primera càrrega
ΔN	Increment de força
ΔM	Increment de moment

ΔC	Increment de curvatura
k_{φ}	Constant de fluència mètode simplificat
k_{sh}	Constant de retracció mètode simplificat
$k_{\rho'}$	Coefficient multiplicatiu per armadura de compressió
k'_{φ}	Coefficient de fluència mètode simplificat modificat per armadura de compressió
k'_{sh}	Coefficient de retracció mètode simplificat modificat per armadura de compressió
η	Coefficient eficaç de rigidesa
ξ	Coefficient ξ
γ	Factor d'integració de curvatura
I'_e	Inèrcia efectiva modificada
φ_0	Coefficient de fluència nocial
$\beta_c(t, t_0)$	Coefficient que descriu l'evolució de la fluència en el temps després de la càrrega
φ_{RH}	Factor que contempla l'efecte de l'humitat relativa en el coefficient de fluència nocial
RH	Humitat relativa en %
$\beta(f_{cm})$	Resistència a compressió mitjana a l'edat de 28 dies
$\beta(t_0)$	Factor que contempla l'efecte de l'edat del formigó en el coefficient de fluència nocial
h_0	Mida nocial
u	Perímetre de la biga
t	Edat del formigó en dies al moment considerat
t_0	Edat del formigó en dies en el moment de la primera càrrega
β_H	Coefficient que depèn de la humitat relativa i la mida nocial

$\alpha_{1/2/3}$	Coeficients que consideren la influència de la resistència del formigó
$\varepsilon_{cd}(t)$	Deformació de retracció deguda a l'assecat del formigó
$\varepsilon_{ca}(t)$	Deformació de retracció autògena
$\beta_{as}(t)$	Coeficient
$\varepsilon_{ca}(\infty)$	Coeficient
$\beta_{ds}(t, t_s)$	Coeficient
k_h	Coeficient
$\varepsilon_{cd,0}$	Deformació de retracció bàsica deguda a l'assecat del formigó
t_s	Edat del formigó en dies al moment de l'inici de la retracció
β_{RH}	Coeficient
α_{ds1}	Coeficient
α_{ds2}	Coeficient

ÍNDEX ANNEX A – EXEMPLE DE CÀLCUL

1.	DADES DE L'EXEMPLE DE CÀLCUL.....	41
2.	CÀLCULS	42
2.1.	Fletxa instantània.....	42
2.2.	EMM simplificat	45
2.3.	EMM general	48
2.4.	AEMM simplificat.....	52
2.5.	AEMM general	56
2.6.	Mètode simplificat	60
2.7.	Aproximació al càlcul d'integració de curvatures a partir de la metodologia simplificada (Bischoff-Gross).....	61
2.7.1.	A partir de la fletxa instantània.....	61
2.7.2.	A partir de l'EMM.....	62
2.7.3.	A partir de l'AEMM	64
2.8.	Anàlisi temporal	65

1. DADES DE L'EXEMPLE DE CÀLCUL

Per tal d'il·lustrar de manera pràctica l'aplicació dels diferents mètodes exposats i poder-ne comparar el grau de complexitat, s'ha seleccionat el cas 1 de l'anàlisi de variació d'armadura, amb $n\rho = 0,0312$, i que té les dades de partida següents.

Les dades de la biga:

$$b=1000 \text{ mm} \quad h=620 \text{ mm} \quad d_1=570 \text{ mm} \quad d_2=50 \text{ mm} \quad L=8000 \text{ mm}$$

$$n\rho=0,0312 \quad \frac{\rho_2}{\rho_1}=0,25$$

Les dades del formigó:

$$f_{ck}=30 \text{ MPa} \quad \varphi(t, t_0)=2 \quad \varepsilon_{sh}(t, t_0)=450 \cdot 10^{-6} \quad \chi(t, t_0)=0,8$$

Les dades de l'acer:

$$E_s=200000 \text{ MPa}$$

Les dades de les càrregues són:

$$M/M_{cr}=1,5 \quad \frac{q}{g+q}=0,45 \quad \psi_{02}=0,3 \quad \beta=0,5$$

2. CÀLCULS

2.1. Fletxa instantània

El mòdul elàstic, segons la fórmula de l'Eurocodi 2:

$$E_{cm} = 22000 \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{0,3} = 32836,57 \text{ MPa}$$

La ràtio modular:

$$n = \frac{E_s}{E_{cm}} = 6,09$$

Amb $n\rho$ imposat, trobem ρ_1 :

$$\rho_1 = \frac{n\rho}{n} = 0,0051$$

Imposant la relació entre quanties geomètriques:

$$\rho_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \rho_1 = 0,0013$$

Per tant, les àrees de l'armadura de compressió i tracció són, respectivament:

$$A_1 = bd_1\rho_1 = 2919,8 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = bd_1\rho_2 = 729,96 \text{ mm}^2$$

La resistència mitjana a tracció del formigó, a partir de la resistència característica a compressió a 28 dies, segons l'Eurocodi 2:

$$f_{ctm} = 0,3f_{ck}^{2/3} = 2,90 \text{ MPa}$$

Per a l'estat sense fissurar:

$$\frac{x_1}{d} = \frac{-\rho_1 + \rho_1 n + 0,5 \frac{h^2}{d^2} - \rho_2 \frac{d_2}{d_1} + \rho_2 n \frac{d_2}{d_1}}{-\rho_1 + \rho_1 n + \frac{h}{d} - \rho_2 + \rho_2 n} = 0,55$$

La profunditat de la fibra neutra de la secció sense fissurar:

$$x_1 = \frac{x_1}{d} d_1 = 314,54 \text{ mm}$$

La inèrcia de la secció sense fissurar:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(x_1 - \frac{h}{2} \right)^2 + A_1 (n-1) (d_1 - x_1)^2 + A_2 (n-1) (x_1 - d_2)^2 \\ &= 2,11E + 10 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Per a l'estat completament fissurat:

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{d} &= -n\rho_1 - (n-1)\rho_2 + \sqrt{[n\rho_1 + (n-1)\rho_2]^2 + 2 \left[n\rho_1 + (n-1)\rho_2 \frac{d_2}{d} \right]} \\ &= 0,22 \end{aligned}$$

La profunditat de la fibra neutra de la secció totalment fissurada:

$$x_2 = \frac{x_2}{d} d = 123,78 \text{ mm}$$

La inèrcia de la secció totalment fissurada:

$$I_2 = \frac{1}{12} b x_2^3 + b x_2 \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 + A_1 n (d_1 - x_2)^2 + A_2 (n-1) (x_2 - d_2)^2$$

$$= 4,19E + 09 \text{ mm}^4$$

El mòdul resistent:

$$W = \frac{I_1}{y_{\max}} = \frac{I_1}{(h - x_1)} = 6,91E + 07 \text{ mm}^3$$

El moment crític:

$$M_{cr} = W f_{ctm} = 200,11 \text{ kNm}$$

I el moment màxim aplicat a la secció, per tant:

$$M = \frac{M}{M_{cr}} M_{cr} = 300,16 \text{ kNm}$$

Sabent el moment i el percentatge de sobrecàrrega, $\frac{q}{(g+q)}$, es poden determinar la càrrega permanent, que inclou el pes propi de la biga, i la sobrecàrrega:

$$q = \frac{M \frac{q}{(g+q)}}{\frac{L^2}{8}} = 16,884 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$g = \frac{\left(q - q \frac{q}{(g+q)} \right)}{\frac{q}{(g+q)}} = 20,636 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Els moments màxims deguts a les càrregues permanents i variables, respectivament:

$$M_g = \frac{gL^2}{8} = 165,09 \text{ kNm}$$

$$M_q = \frac{qL^2}{8} = 135,07 \text{ kNm}$$

Per tant, el moment quasipermanent, al qual la biga està sotmesa:

$$M_{qp} = M_g + \psi_{02}M_q = 205,61 \text{ kNm}$$

El valor del coeficient de distribució:

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 = 0,78$$

La inèrcia efectiva, a partir de les inèrcies dels estats fissurat i sense fissurar i el coeficient de distribució:

$$I_{ef} = \frac{I_1 I_2}{\zeta I_1 + (1 - \zeta) I_2} = 5,10E + 09 \text{ mm}^4$$

I finalment, la fletxa instantània a la secció central de la biga:

$$y_i = \frac{5M_{qp}L^2}{48E_{cm}I_{ef}} = 8,182 \text{ mm}$$

2.2. EMM simplificat

El mòdul efectiu del formigó:

$$E_{c,ef} = \frac{E_c}{1 + \varphi(t, t_0)} = 10945,52 \text{ MPa}$$

La ràtio modular efectiva:

$$n_{ef} = \frac{E_s}{E_{c,ef}} = 18,27$$

Per a l'estat sense fissurar:

$$\frac{x_1}{d} = \frac{-\rho_1 + \rho_1 n_{ef} + 0,5 \frac{h^2}{d^2} - \rho_2 \frac{d_2}{d_1} + \rho_2 n_{ef} \frac{d_2}{d_1}}{-\rho_1 + \rho_1 n_{ef} + \frac{h}{d} - \rho_2 + \rho_2 n_{ef}} = 0,57$$

La profunditat de la fibra neutra de l'estat sense fissurar:

$$x_1 = \frac{x_1}{d} d = 324,4 \text{ mm}$$

La inèrcia efectiva de l'estat sense fissurar:

$$\begin{aligned} I_{1,ef} &= \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(x_1 - \frac{h}{2} \right)^2 + A_1 (n_{ef} - 1) (d_1 - x_1)^2 + A_2 (n_{ef} - 1) (x_1 - d_2)^2 \\ &= 2,40E + 10 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Per a l'estat completament fissurat:

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{d} &= -n_{ef} \rho_1 - (n_{ef} - 1) \rho_2 + \sqrt{[n_{ef} \rho_1 + (n_{ef} - 1) \rho_2]^2 + 2 \left[n_{ef} \rho_1 + (n_{ef} - 1) \rho_2 \frac{d_2}{d} \right]} \\ &= 0,34 \end{aligned}$$

La profunditat de la fibra neutra de l'estat completament fissurat:

$$x_2 = \frac{x_2}{d} d = 191,79 \text{ mm}$$

La inèrcia efectiva de l'estat completament fissurat:

$$\begin{aligned} I_{2,ef} &= \frac{1}{12} b x_2^3 + b x_2 \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 + A_1 n_{ef} (d_1 - x_2)^2 + A_2 (n_{ef} - 1) (x_2 - d_2)^2 \\ &= 1,02E + 10 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

La inèrcia efectiva pel mètode EMM:

$$I_{ef} = \frac{I_{1,ef}I_{2,ef}}{\zeta I_{1,ef} + (1 - \zeta)I_{2,ef}} = 1,17E + 10 \text{ mm}^4$$

Pel mètode EMM simplificat, la fletxa obtinguda és la instantània més la de fluència:

$$y_{i+\varphi} = \frac{5M_{qp}L^2}{48E_{c,ef}I_{ef}} = 10,68 \text{ mm}$$

Per tant, la fletxa deguda a la fluència és:

$$y_{\varphi} = y_{i+\varphi} - y_i = 2,49 \text{ mm}$$

El primer moment d'àrea de l'armadura respecte el centre de gravetat de la secció, per a la secció sense fissurar i fissurada, respectivament:

$$S_1 = A_1(d_1 - x_1) - A_2(x_1 - d_2) = 5,17E + 05 \text{ mm}^3$$

$$S_2 = A_1(d_1 - x_2) - A_2(x_2 - d_2) = 1,00E + 06 \text{ mm}^3$$

La curvatura deguda a la retracció pels estats sense fissurar i fissurat:

$$C_{1,sh} = \varepsilon_{cs}n_{ef} \frac{S_1}{I_{1,ef}} = 1,77E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

$$C_{2,sh} = \varepsilon_{cs}n_{ef} \frac{S_2}{I_{2,ef}} = 8,04E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

La fletxa deguda a la retracció dels estats sense fissurar i fissurat:

$$y_{1,sh} = C_{1,sh} \frac{L^2}{8} = 1,42 \text{ mm}$$

$$y_{2,sh} = C_{2,sh} \frac{L^2}{8} = 6,43 \text{ mm}$$

I finalment, la fletxa deguda a la retracció:

$$y_{sh} = \zeta y_{2,sh} + (1 - \zeta) y_{1,sh} = 5,32 \text{ mm}$$

Per tant, la fletxa a llarg termini, deguda a la fluència i la retracció, és:

$$y_{\varphi+sh} = y_{\varphi} + y_{sh} = 7,81 \text{ mm}$$

I la fletxa total:

$$y_{tot} = y_{i+\varphi} + y_{sh} = 15,99 \text{ mm}$$

2.3. EMM general

El moment màxim a cada punt:

$$M_{k,i} = p_k x_i \frac{L}{2} - p_k \frac{x_i^2}{2}$$

El moment quasipermanent a cada punt:

$$M_{qp,i} = p_{qp} x_i \frac{L}{2} - p_{qp} \frac{x_i^2}{2}$$

On p_k i p_{qp} són les càrregues característica i quasipermanent:

$$p_k = g + q$$

$$p_{qp} = g + \psi_{02} q$$

La distribució de M_k i M_{qp} al llarg de la biga té la següent forma:

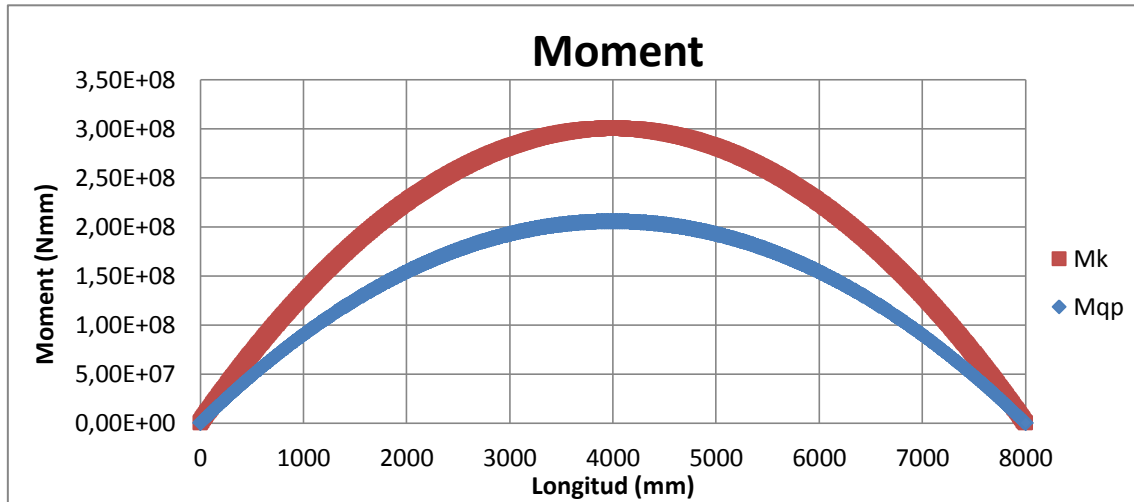


Figura 4. Distribució dels moments característic i quasipermanent al llarg de la biga.

El coeficient de distribució ζ a cada punt:

$$\zeta_i = \begin{cases} 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M_{k,i}} \right) & \text{si } M_{k,i} > M_{cr} \\ 0 & \text{si } M_{k,i} < M_{cr} \end{cases}$$

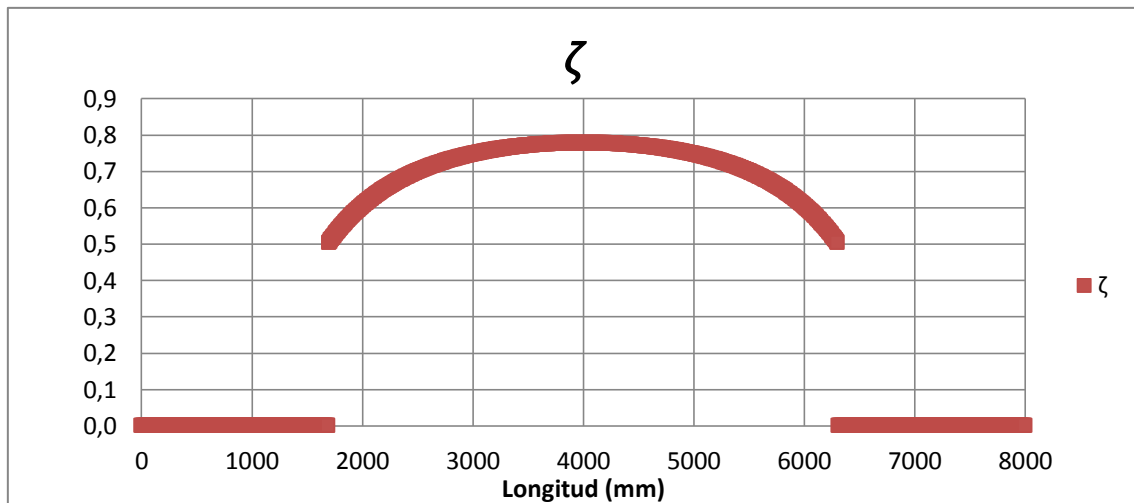


Figura 5. Coeficient de distribució a cada punt de la biga.

La curvatura sense tenir en compte la retracció, dels estats sense fissurar i completament fissurat, respectivament, a cada punt:

$$C_{1,i+\varphi,i} = \frac{M_{qp,i}}{E_{c,ef}I_{1,ef}}$$

$$C_{2,i+\varphi,i} = \frac{M_{qp,i}}{E_{c,ef}I_{2,ef}}$$

La curvatura sense tenir en compte la retracció, a cada punt:

$$C_{i+\varphi,i} = \zeta_i C_{2,i+\varphi,i} + (1 - \zeta_i) C_{1,i+\varphi,i}$$

La curvatura deguda a la retracció, a cada punt:

$$C_{sh,i} = \zeta_i C_{1,sh} + (1 - \zeta_i) C_{2,sh}$$

La curvatura total a cada punt:

$$C_{t,i} = C_{i+\varphi,i} + C_{sh,i}$$

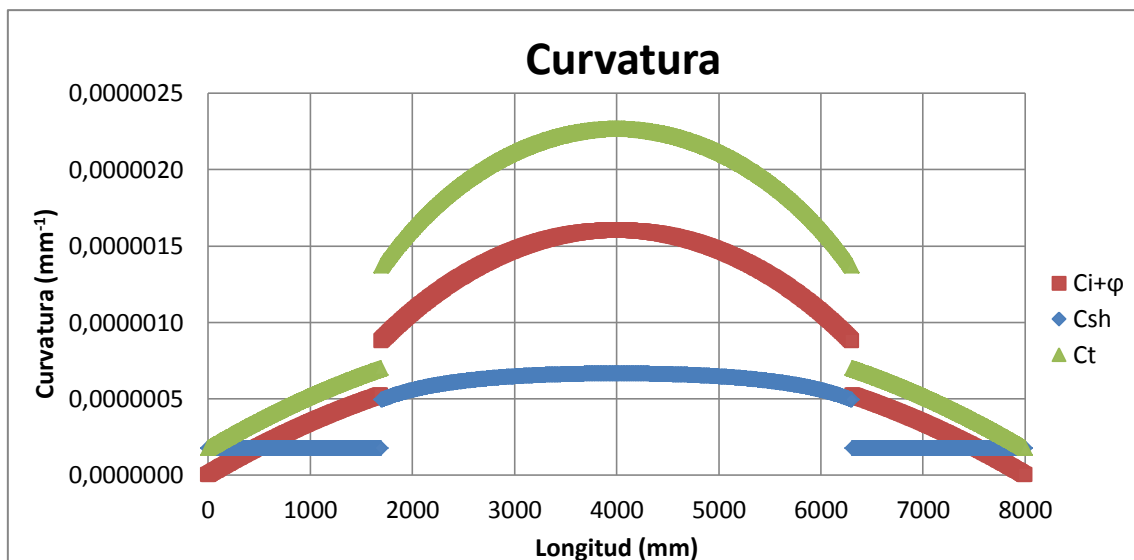


Figura 6. Distribució de les curvatures i+φ, sh i total al llarg de la biga.

Alternativament, si es calcula la curvatura total a partir de la interpolació de C_1 i C_2 a partir del coeficient de distribució, el resultat de la curvatura total és equivalent:

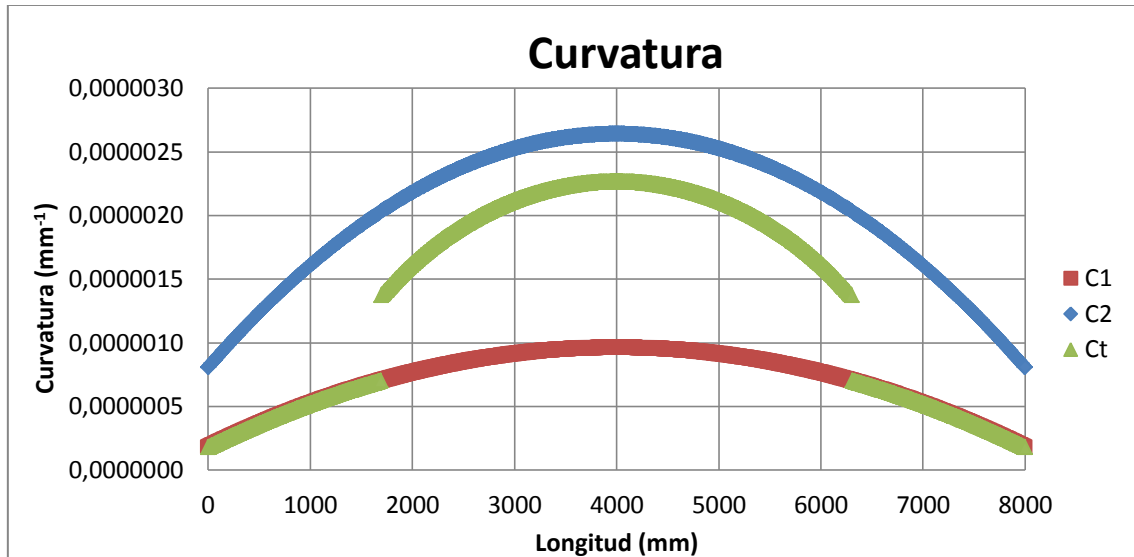


Figura 7. Distribució de les curvatures sense fissurar, fissurada i total al llarg de la biga.

L'àrea de cada rectangle:

$$A_i = \frac{C_{t,i} + C_{t,i+1}}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

La distància del centroide de cada rectangle a l'extrem de la biga:

$$d_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

La reacció als recolzaments de la biga conjugada:

$$[R] = \sum_{i=0}^n \frac{A_i d_i}{L} = 0,005362$$

La distància entre el centroide de cada rectangle i el centre de la biga, on hi ha el moment màxim de la biga conjugada:

$$d'_i = \begin{cases} \frac{L}{2} - d_i & \text{si } \frac{L}{2} - d_i > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{L}{2} - d_i < 0 \end{cases}$$

I, finalment, la fletxa total màxima, al centre de la biga, que és igual al moment conjugat al centre de la biga:

$$y_{tot} = [M_{max}] = [R] \frac{L}{2} - \sum_{i=0}^n A_i d'_i = 14,209 \text{ mm}$$

2.4. AEMM simplificat

El mòdul efectiu ajustat amb l'edat del formigó:

$$\bar{E}_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} = 12629,45 \text{ MPa}$$

La ràtio modular efectiva a partir del mòdul efectiu ajustat amb l'edat:

$$\bar{n}_{ef} = \frac{E_s}{\bar{E}_{c,ef}} = 15,84$$

L'àrea, el primer moment d'àrea i el segon moment d'àrea de la secció de formigó sense fissurar respecte la fibra superior, ignorant l'àrea d'acer.

$$A_{1,c} = bh - A_1 - A_2 = 6,16E + 05 \text{ mm}^2$$

$$B_{1,c} = b \frac{h^2}{2} - A_1 d_1 - A_2 d_2 = 1,90E + 08 \text{ mm}^3$$

$$I_{1,c} = b \frac{h^3}{3} - A_1 d_1^2 - A_2 d_2^2 = 7,85E + 10 \text{ mm}^4$$

L'àrea, el primer moment d'àrea i el segon moment d'àrea, respecte la fibra superior, de la secció transformada, utilitzant \bar{n}_{ef} , sense fissurar.

$$\bar{A}_{1,ef} = bh + A_1(\bar{n}_{ef} - 1) + A_2(\bar{n}_{ef} - 1) = 6,74E + 05 \text{ mm}^2$$

$$\bar{B}_{1,ef} = b \frac{h^2}{2} + A_1(\bar{n}_{ef} - 1)d_1 + A_2(\bar{n}_{ef} - 1)d_2 = 2,17E + 08 \text{ mm}^3$$

$$\bar{I}_{1,ef} = b \frac{h^3}{3} + A_1(\bar{n}_{ef} - 1)d_1^2 + A_2(\bar{n}_{ef} - 1)d_2^2 = 9,35E + 10 \text{ mm}^4$$

L'àrea, el primer moment d'àrea i el segon moment d'àrea de la secció transformada, utilitzant n , sense fissurar respecte la fibra superior:

$$A_1 = bh + A_1(n - 1) + A_2(n - 1) = 6,39E + 05 \text{ mm}^2$$

$$B_1 = b \frac{h^2}{2} + A_1(n - 1)d_1 + A_2(n - 1)d_2 = 2,01E + 08 \text{ mm}^3$$

$$I_1 = b \frac{h^3}{3} + A_1(n - 1)d_1^2 + A_2(n - 1)d_2^2 = 8,43E + 10 \text{ mm}^4$$

La deformació inicial a la fibra superior de la secció sense fissurar:

$$\varepsilon_{1,0l} = \frac{B_1 M_{qp}}{E_{cm}(A_1 I_1 - B_1^2)} = 9,33E - 05 \text{ mm}$$

La curvatura inicial de la secció sense fissurar a la primera càrrega:

$$C_{1,l} = \frac{A_1 M_{qp}}{E_{cm}(A_1 I_1 - B_1^2)} = 2,97E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

L'àrea, el primer moment d'àrea i el segon moment d'àrea de la secció de formigó fissurada, ignorant l'àrea d'acer.

$$A_{2,c} = bh - A_2 = 1,23E + 05 \text{ mm}^2$$

$$B_{2,c} = b \frac{h^2}{2} - A_2 d_2 = 7,62E + 06 \text{ mm}^3$$

$$I_{2,c} = b \frac{h^3}{3} - A_2 d_2^2 = 6,30E + 08 \text{ mm}^2$$

L'àrea, el primer moment d'àrea i el segon moment d'àrea, respecte la fibra superior, de la secció transformada, utilitzant \bar{n}_{ef} , totalment fissurada.

$$\bar{A}_{2,ef} = bh + A_1 \bar{n}_{ef} + A_2 (\bar{n}_{ef} - 1) = 1,81E + 05 \text{ mm}^2$$

$$\bar{B}_{2,ef} = b \frac{h^2}{2} + A_1 \bar{n}_{ef} d_1 + A_2 (\bar{n}_{ef} - 1) d_2 = 3,46E + 07 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_{2,ef} = b \frac{h^3}{3} + A_1 \bar{n}_{ef} d_1^2 + A_2 (\bar{n}_{ef} - 1) d_2^2 = 1,57E + 10 \text{ mm}^2$$

L'àrea, el primer moment d'àrea i el segon moment d'àrea de la secció transformada, utilitzant n , totalment fissurada, respecte la fibra superior:

$$A_2 = bh + A_1 n + A_2 (n - 1) = 1,45E + 05 \text{ mm}^2$$

$$B_2 = b \frac{h^2}{2} + A_1 n d_1 + A_2 (n - 1) d_2 = 1,80E + 07 \text{ mm}^3$$

$$I_2 = b \frac{h^3}{3} + A_1 n d_1^2 + A_2 (n - 1) d_2^2 = 6,42E + 09 \text{ mm}^4$$

La deformació inicial a la fibra superior de la secció fissurada:

$$\varepsilon_{2,0l} = \frac{B_2 M_{qp}}{E_{cm} (A_2 I_2 - B_2^2)} = 1,85E - 04 \text{ mm}$$

La curvatura inicial a la fibra superior de la secció fissurada:

$$C_{2,l} = \frac{A_2 M_{qp}}{E_{cm} (A_2 I_2 - B_2^2)} = 1,49E - 06 \text{ mm}^{-1}$$

ΔN i ΔM per a l'estat sense fissurar, deguts a la fluència i la retracció:

$$\Delta N_{1,\varphi} = \bar{E}_{c,ef} \varphi (A_{1,c} \varepsilon_{1,0l} - B_c C_{1,l}) = 2,52E + 04 N$$

$$\Delta N_{1,sh} = \bar{E}_{c,ef} \varphi \varepsilon_{sh} A_{1,c} = 3,50E + 06 N$$

$$\Delta M_{1,\varphi} = \bar{E}_{c,ef} \varphi (-B_{1,c} \varepsilon_{1,0l} - I_c C_{1,l}) = 1,39E + 08 Nmm$$

$$\Delta M_{1,sh} = \bar{E}_{c,ef} (-\varepsilon_{sh} B_{1,c}) = -1,08E + 09 Nmm$$

ΔN i ΔM per a l'estat fissurat, deguts a la fluència i la retracció:

$$\Delta N_{2,\varphi} = \bar{E}_{c,ef} \varphi (A_{2,c} \varepsilon_{2,0l} - B_c C_{2,l}) = 2,87E + 05 N$$

$$\Delta N_{2,sh} = \bar{E}_{c,ef} \varepsilon_{sh} A_{2,c} = 6,99E + 05 N$$

$$\Delta M_{2,\varphi} = \bar{E}_{c,ef} \varphi (-B_{2,c} \varepsilon_{2,0l} - I_c C_{2,l}) = -1,18E + 07 Nmm$$

$$\Delta M_{2,sh} = \bar{E}_{c,ef} (-\varepsilon_{sh} B_{2,c}) = -4,33E + 07 Nmm$$

Els increments de curvatures de l'estat sense fissurar i fissurat, respectivament, deguts a la fluència i la retracció:

$$\Delta C_{1,\varphi} = \frac{\bar{A}_{1,ef} \Delta M_{1,\varphi} + \bar{B}_{1,ef} \Delta N_{1,\varphi}}{\bar{E}_{c,ef} (\bar{A}_{1,ef} \bar{I}_{1,ef} - \bar{B}_{1,ef}^2)} = 4,98E - 07 mm^{-1}$$

$$\Delta C_{1,sh} = \frac{\bar{A}_{1,ef} \Delta M_{1,sh} + \bar{B}_{1,ef} \Delta N_{1,sh}}{\bar{E}_{c,ef} (\bar{A}_{1,ef} \bar{I}_{1,ef} - \bar{B}_{1,ef}^2)} = 1,59E - 07 mm^{-1}$$

$$\Delta C_{2,\varphi} = \frac{\bar{A}_{2,ef} \Delta M_{2,\varphi} + \bar{B}_{2,ef} \Delta N_{2,\varphi}}{\bar{E}_{c,ef} (\bar{A}_{2,ef} \bar{I}_{2,ef} - \bar{B}_{2,ef}^2)} = 3,75E - 07 mm^{-1}$$

$$\Delta C_{2,sh} = \frac{\bar{A}_{2,ef}\Delta M_{2,sh} + \bar{B}_{2,ef}\Delta N_{2,sh}}{\bar{E}_{c,ef}(\bar{A}_{2,ef}\bar{I}_{2,ef} - \bar{B}_{2,ef}^2)} = 7,88E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

L'increment de curvatura mitjà, aplicant el coeficient de distribució, degut a la fluència i la retracció, respectivament:

$$\Delta C_{\varphi} = \zeta\Delta C_{2,\varphi} + (1 - \zeta)\Delta C_{1,\varphi} = 4,02E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

$$\Delta C_{sh} = \zeta\Delta C_{2,sh} + (1 - \zeta)\Delta C_{1,sh} = 6,48E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

La fletxa que genera aquests increments de curvatures, deguts a la fluència i la retracció:

$$y_{\varphi} = \frac{5\Delta C_{\varphi}L^2}{48} = 2,683 \text{ mm}$$

$$y_{sh} = \frac{\Delta C_{sh}L^2}{8} = 5,184 \text{ mm}$$

$$y_t = y_i + y_{\varphi} + y_{sh} = 16,049 \text{ mm}$$

2.5. AEMM general

Similar al que s'ha fet en el mètode EMM, s'ha dividit la biga en 1000 punts situats a una distància x_i de l'extrem de la biga. El moment en combinació característica i quasipermanent a cada punt és el mateix que en el mètode EMM:

$$M_{k,i} = p_k x_i \frac{L}{2} - p_k \frac{x_i^2}{2}$$

$$M_{qp,i} = p_{qp} x_i \frac{L}{2} - p_{qp} \frac{x_i^2}{2}$$

El coeficient de distribució ζ per a cada punt, també igual que en el mètode EMM:

$$\zeta_i = \begin{cases} 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M_{k,i}} \right) & \text{si } M_{k,i} > M_{cr} \\ 0 & \text{si } M_{k,i} < M_{cr} \end{cases}$$

Es calcula la deformació inicial i la curvatura inicial per a cada punt, per a la secció sense fissurar:

$$\varepsilon_{1,0l,i} = \frac{B_1 M_{qp,i}}{E_c (A_1 I_1 - B_1^2)}$$

$$C_{1,l,i} = \frac{A_1 M_{qp,i}}{E_c (A_1 I_1 - B_1^2)}$$

Es calcula la deformació inicial i la curvatura inicial per a cada punt, per a la secció fissurada:

$$\varepsilon_{2,0l,i} = \frac{B_2 M_{qp,i}}{E_c (A_2 I_2 - B_2^2)}$$

$$C_{2,l,i} = \frac{A_2 M_{qp,i}}{E_c (A_2 I_2 - B_2^2)}$$

Es calcula ΔN i ΔM per a cada punt, per a l'estat sense fissurar:

$$\Delta N_{1,i} = \bar{E}_{c,ef} [\varphi (A_{1,c} \varepsilon_{1,0l,i} - B_c C_{1,l,i}) + \varepsilon_{sh} A_{1,c}]$$

$$\Delta M_{1,i} = \bar{E}_{c,ef} [\varphi (-B_{1,c} \varepsilon_{1,0l,i} - I_c C_{1,l,i}) - \varepsilon_{sh} B_{1,c}]$$

Es calcula ΔN i ΔM per a cada punt, per a l'estat fissurat:

$$\Delta N_{2,i} = \bar{E}_{c,ef} [\varphi (A_{2,c} \varepsilon_{2,0l,i} - B_c C_{2,l,i}) + \varepsilon_{sh} A_{2,c}]$$

$$\Delta M_{2,i} = \bar{E}_{c,ef} [\varphi (-B_{2,c} \varepsilon_{2,0l,i} - I_c C_{2,l,i}) - \varepsilon_{sh} B_{2,c}]$$

Els increments de curvatures de l'estat sense fissurar i fissurat, respectivament:

$$\Delta C_{1,i} = \frac{\bar{A}_{1,ef} \Delta M_{1,i} + \bar{B}_{1,ef} \Delta N_{1,i}}{\bar{E}_{c,ef} (\bar{A}_{1,ef} \bar{I}_{1,ef} - \bar{B}_{1,ef}^2)}$$

$$\Delta C_{2,i} = \frac{\bar{A}_{2,ef} \Delta M_{2,i} + \bar{B}_{2,ef} \Delta N_{2,i}}{\bar{E}_{c,ef} (\bar{A}_{2,ef} \bar{I}_{2,ef} - \bar{B}_{2,ef}^2)}$$

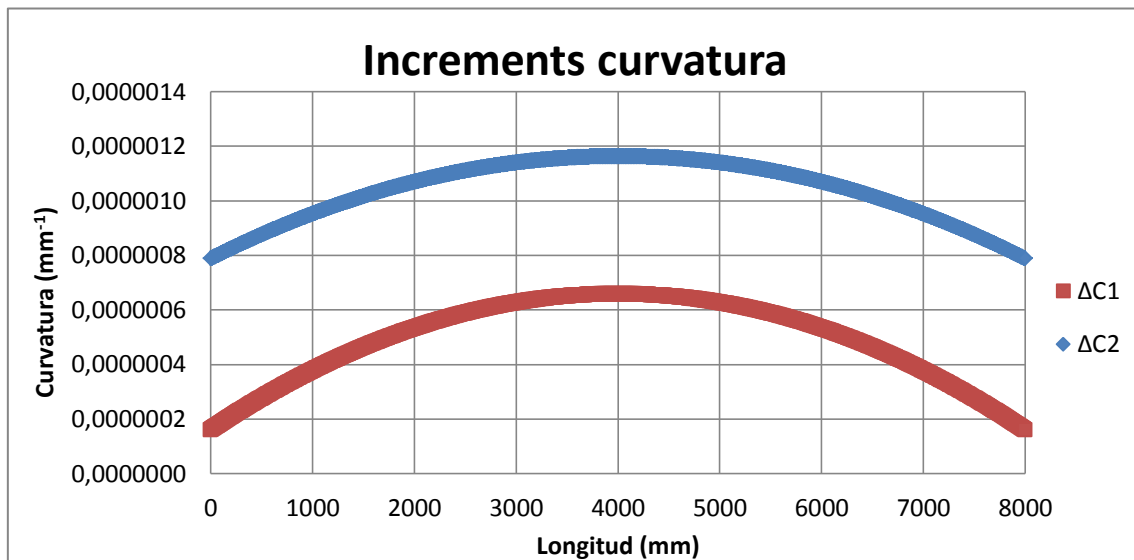


Figura 8. Incrementos de curvatura al llarg de la biga.

La curvatura de l'estat sense fissurar i fissurat:

$$C_{1,i} = C_{1,t,i} + \Delta C_{1,i}$$

$$C_{2,i} = C_{2,t,i} + \Delta C_{2,i}$$

La curvatura total a cada punt, a partir de l'aplicació del coeficient de distribució:

$$C_{t,i} = \zeta C_{2,i} + (1 - \zeta_i) C_{1,i}$$

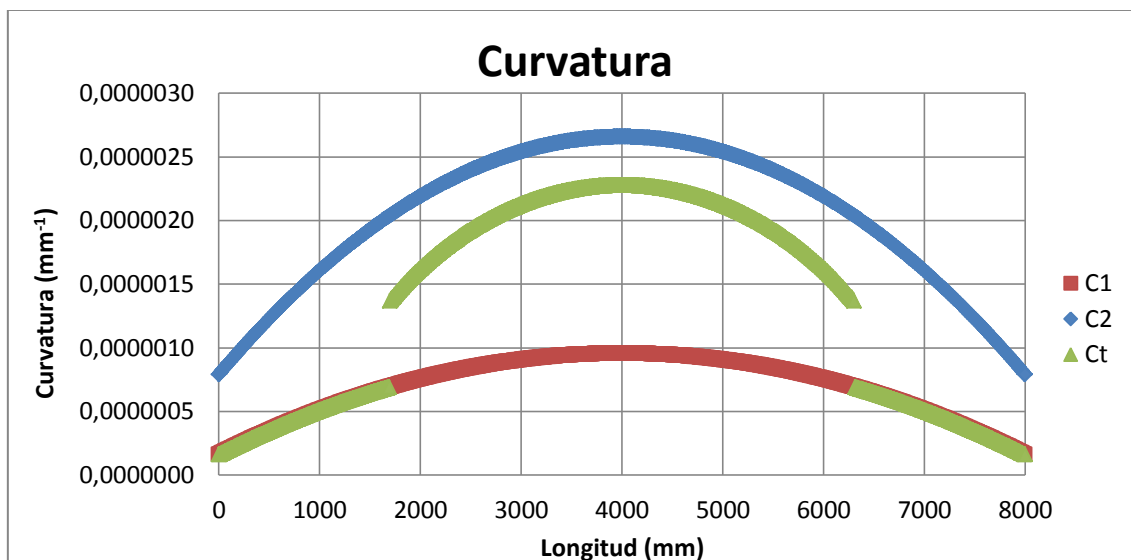


Figura 9. Distribució de les curvatures sense fissura, fissurada i total.

Alternativament, també es pot obtenir la gràfica de la curvatura total a partir de la suma de la curvatura inicial i dels increments de curvatura deguts a la fluència i la retracció a cada punt:

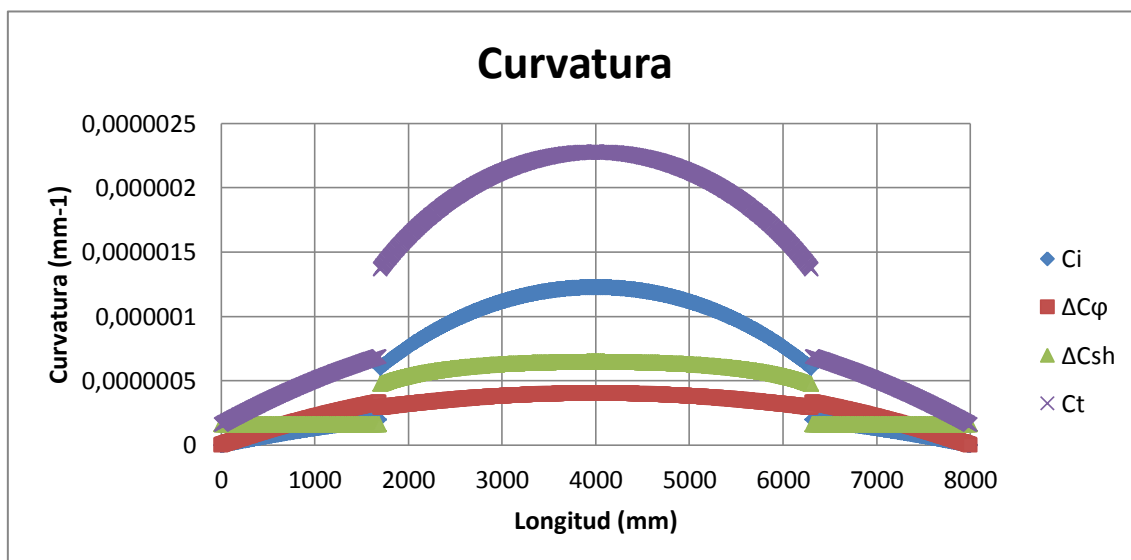


Figura 10. Distribució de les curvatures inicial, de fluència, de retracció i total al llarg de la biga.

Un cop tenim la curvatura total, amb el 4t teorema de Mohr trobem la fletxa total. El procediment és el mateix que l'utilitzat en el mètode EMM.

L'àrea de cada rectangle:

$$A_i = \frac{C_{t,i} + C_{t,i+1}}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

La distància del centroide de cada rectangle al punt x_i :

$$d_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

La reacció als recolzaments de la biga conjugada:

$$[R] = \sum_{i=0}^n \frac{A_i d_i}{L} = 0,005356$$

La distància entre el centroide de cada rectangle i el centre de la biga, on hi ha el moment màxim de la biga conjugada:

$$d'_i = \begin{cases} \frac{L}{2} - d_i & \text{si } \frac{L}{2} - d_i > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{L}{2} - d_i < 0 \end{cases}$$

I, finalment, la fletxa total màxima, al centre de la biga, que és igual al moment conjugat al centre de la biga:

$$y_{tot} = [M_{max}] = [R] \frac{L}{2} - \sum_{i=0}^n A_i d'_i = 14,245 \text{ mm}$$

2.6. Mètode simplificat

Els coeficients multiplicatius, sense armadura de compressió:

$$k_\varphi = 0,73\varphi\sqrt{n\rho} = 0,258$$

$$k_{sh} = 1 + \sqrt{n\rho} = 1,177$$

El coeficient multiplicatiu corrector de les constants per contemplar la armadura de compressió:

$$k_{\rho'} = \frac{1}{1 + 20n\rho_2} = 0,865$$

Els coeficients multiplicatius de fluència i retracció, tenint en compte que hi ha armadura de compressió:

$$k'_{\varphi} = k_{\varphi}k_{\rho'} = 0,223$$

$$k'_{sh} = k_{sh}k_{\rho'} = 1,018$$

La fletxa deguda a la fluència:

$$y_{\varphi} = y_i k'_{\varphi} = 1,825 \text{ mm}$$

La fletxa deguda a la retracció:

$$y_{sh} = \frac{\varepsilon_{sh}(t, t_0)l^2}{8d} k'_{sh} = 6,429 \text{ mm}$$

I la fletxa total:

$$y_{tot} = y_i + y_{\varphi} + y_{sh} = 16,436 \text{ mm}$$

2.7. Aproximació al càlcul d'integració de curvatures a partir de la metodologia simplificada (Bischoff-Gross)

2.7.1. A partir de la fletxa instantània

El coeficient eficaç de rigidesa:

$$\eta = 1 - \frac{I_2}{I_1} = 0,8013$$

El coeficient ξ :

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{0,5} \frac{M_{cr}}{M_a}} = 0,2730$$

El factor d'integració de curvatura:

$$\gamma = \frac{1,6\xi^3 - 0,6\xi^4}{0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2} + 2,4 \ln(2 - \xi) = 1,4428$$

La inèrcia efectiva modificada:

$$I'_e = \frac{I_2}{1 - \gamma \eta 0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2} = 5,64E + 09 \text{ mm}^4$$

La fletxa instantània més de fluència:

$$y_i = \frac{5M_{qp}L^2}{48E_{cm}I'_e} = 7,397 \text{ mm}$$

Error:

$$\text{error EMM} = \frac{y_{i,BG} - y_i}{y_i} = 2,70\%$$

Per calcular y_i , s'ha de seguir el procediment del mètode EMM prenent les constants temporals ($\varphi(t, t_0)$, i $\varepsilon_{sh}(t, t_0)$) nul·les. Si es fa el mateix amb el mètode EMM el resultat és exactament el mateix, ja que els dos mètodes calculen fletxes diferents només a llarg termini.

2.7.2. A partir de l'EMM

El coeficient eficaç de rigidesa:

$$\eta_{ef} = 1 - \frac{I_{2,ef}}{I_{1,ef}} = 0,5731$$

El coeficient ξ :

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{0,5} \frac{M_{cr}}{M_a}} = 0,2730$$

El factor d'integració de curvatura:

$$\gamma = \frac{1,6\xi^3 - 0,6\xi^4}{0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2} + 2,4 \ln(2 - \xi) = 1,4428$$

La inèrcia efectiva modificada:

$$I'_e = \frac{I_{2,ef}}{1 - \gamma \eta_{ef} 0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2} = 1,25E + 10 \text{ mm}^4$$

La fletxa instantània més de fluència:

$$y_{i+\varphi} = \frac{5M_{qp}L^2}{48E_{c,ef}I'_e} = 9,986 \text{ mm}$$

El coeficient ζ modificat:

$$\zeta' = 1 - \beta\gamma \left(\frac{M_{cr}}{M}\right) = 0,6793$$

La fletxa de retracció:

$$y_{sh} = \zeta' y_{2,sh} + (1 - \zeta') y_{1,sh} = 4,824 \text{ mm}$$

La fletxa total:

$$y_{tot} = y_{i+\varphi} + y_{sh} = 14,809 \text{ mm}$$

Error:

$$\text{error EMM} = \frac{y_{t,BG} - y_{t,EMM}}{y_{t,EMM}} = 4,23\%$$

2.7.3. A partir de l'AEMM

El coeficient ξ :

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{0,5} \frac{M_{cr}}{M_a}} = 0,2730$$

El factor d'integració de curvatura:

$$\gamma = \frac{1,6\xi^3 - 0,6\xi^4}{0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2} + 2,4 \ln(2 - \xi) = 1,4428$$

El coeficient ζ modificat:

$$\zeta' = 1 - \beta\gamma \left(\frac{M_{cr}}{M}\right) = 0,6793$$

L'increment de curvatura mitjà, aplicant el coeficient de distribució modificat, degut a la fluència i la retracció, respectivament:

$$\Delta C_{\varphi} = \zeta' \Delta C_{2,\varphi} + (1 - \zeta') \Delta C_{1,\varphi} = 4,15E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

$$\Delta C_{sh} = \zeta' \Delta C_{2,sh} + (1 - \zeta') \Delta C_{1,sh} = 5,86E - 07 \text{ mm}^{-1}$$

Les fletxes degudes a la fluència i la retracció, respectivament:

$$y_{\varphi} = \frac{5\Delta C_{\varphi} L^2}{48} = 2,764 \text{ mm}$$

$$y_{sh} = \frac{\Delta C_{sh} L^2}{8} = 4,689 \text{ mm}$$

$$y_t = y_i + y_{\varphi} + y_{sh} = 15,635 \text{ mm}$$

Error:

$$error \text{ AEMM} = \frac{y_{t,BG} - y_{t,AEMM}}{y_{t,AEMM}} = 9,76\%$$

2.8. Anàlisi temporal

La evolució de la fletxa total, calculada a partir de les fórmules de l'annex B de l'Eurocodi exposades a l'apartat 3.7 de la memòria té la forma següent:

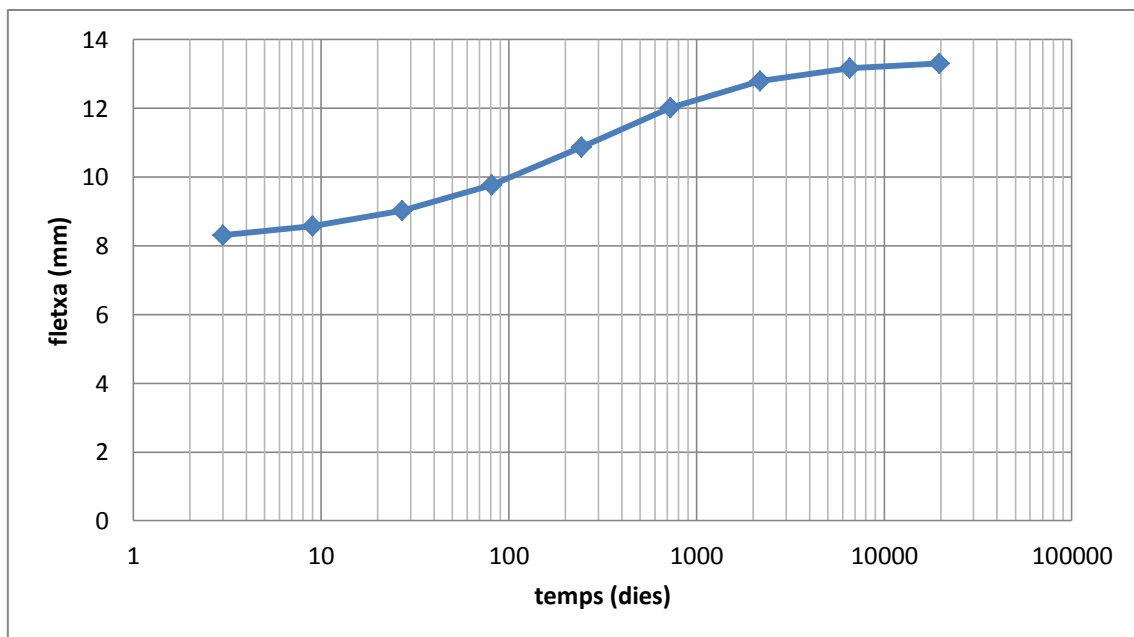


Figura 11. Evolució de la fletxa total al llarg del temps a partir de t_0 .

Per realitzar el càlcul s'ha considerat un ciment classe N, un t_0 de 28 dies, t_s de 7 dies i una humitat relativa del 60%, suposant una temperatura de 20°C.

Els paràmetres calculats s'han introduït en el mètode EMM simplificat per calcular la fletxa en diferents instants i poder veure la evolució temporal de la fletxa. S'ha de notar que els resultats de la fletxa a t_0 i a llarg termini són d'un ordre de magnitud molt similar als calculats pels altres mètodes, però en aquest cas es pot apreciar l'evolució de la fletxa total en els intervals intermitjos entre aquests instants.

ANNEX B – RESULTATS

1.	RESULTATS ESTUDI GENERAL	68
2.	RESULTATS ANÀLISI ARMADURA	71
2.1.	Cas 1: $\rho'/\rho=0$, $M/M_{cr}=1.5$	71
2.2.	Cas 2: $\rho'/\rho=0.25$, $M/M_{cr}=1.5$	73
2.3.	Cas 3: $\rho'/\rho=0.5$, $M/M_{cr}=1.5$	75
2.4.	Cas 4: $\rho'/\rho=0$, $M/M_{cr}=2.5$	77
2.5.	Cas 5: $\rho'/\rho=0.25$, $M/M_{cr}=2.5$	79
2.6.	Cas 6: $\rho'/\rho=0.5$, $M/M_{cr}=2.5$	81
2.7.	Cas 7: $\rho'/\rho=0$, $M/M_{cr}=4.5$	83
2.8.	Cas 8: $\rho'/\rho=0.25$, $M/M_{cr}=4.5$	85
2.9.	Cas 9: $\rho'/\rho=0.5$, $M/M_{cr}=4.5$	87

1. RESULTATS ESTUDI GENERAL

Cas	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
1	10,670	10,648	10,673	9,873	9,837	10,193	10,389
2	11,193	11,186	11,175	10,264	10,241	10,615	10,917
3	11,598	11,596	11,514	10,767	10,750	11,093	11,350
4	12,325	12,334	12,212	11,342	11,334	11,704	12,079
5	12,527	12,544	12,356	11,661	11,664	11,994	12,311
6	13,458	13,482	13,248	12,420	12,428	12,793	13,241
7	14,925	14,987	14,493	14,515	14,570	14,671	14,895
8	16,431	16,495	15,936	15,940	15,996	16,106	16,399
9	16,538	16,633	16,026	16,107	16,194	16,264	16,551
10	18,423	18,514	17,834	17,898	17,981	18,067	18,429
11	18,151	18,279	17,560	17,698	17,819	17,857	18,207
12	20,416	20,534	19,733	19,856	19,965	20,028	20,458
13	22,493	22,706	21,773	22,309	22,520	22,375	22,689
14	25,832	26,021	24,986	25,603	25,788	25,673	26,003
15	25,443	25,716	24,625	25,247	25,517	25,313	25,705
16	29,493	29,729	28,522	29,243	29,476	29,314	29,718
17	28,393	28,726	27,476	28,184	28,514	28,251	28,721
18	33,153	33,438	32,058	32,883	33,164	32,955	33,433
19	21,291	21,352	21,835	18,701	18,739	19,586	20,680
20	24,304	24,385	24,697	21,253	21,312	22,208	23,739
21	23,785	23,891	24,169	20,978	21,056	21,907	23,231
22	27,498	27,613	27,717	24,131	24,221	25,149	26,977
23	26,280	26,429	26,504	23,256	23,373	24,227	25,782
24	30,691	30,841	30,736	27,009	27,129	28,089	30,215
25	33,866	34,137	33,511	32,439	32,694	32,837	33,862
26	40,438	40,690	39,898	38,704	38,941	39,109	40,422
27	38,443	38,795	37,959	36,877	37,211	37,286	38,530
28	46,370	46,687	45,670	44,434	44,735	44,855	46,426
29	43,020	43,454	42,408	41,316	41,729	41,736	43,198
30	52,301	52,684	51,441	50,164	50,528	50,601	52,430
31	56,130	56,796	55,324	55,421	56,078	55,586	56,716
32	69,397	69,969	68,259	68,500	69,063	68,663	69,888
33	64,662	65,481	63,721	63,872	64,680	64,040	65,407
34	80,499	81,195	79,165	79,485	80,170	79,652	81,118
35	73,194	74,167	72,119	72,323	73,283	72,493	74,098
36	91,602	92,421	90,070	90,470	91,277	90,641	92,348

Taula 4. Fletxa total per a cada mètode de càlcul dels 36 casos inicials.

Cas	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
1	1,000	0,998	1,000	0,925	0,922	0,955	0,974
2	1,000	0,999	0,998	0,917	0,915	0,948	0,975
3	1,000	1,000	0,993	0,928	0,927	0,956	0,979
4	1,000	1,001	0,991	0,920	0,920	0,950	0,980
5	1,000	1,001	0,986	0,931	0,931	0,958	0,983
6	1,000	1,002	0,984	0,923	0,923	0,951	0,984
7	1,000	1,004	0,971	0,973	0,976	0,983	0,998
8	1,000	1,004	0,970	0,970	0,974	0,980	0,998
9	1,000	1,006	0,969	0,974	0,979	0,983	1,001
10	1,000	1,005	0,968	0,971	0,976	0,981	1,000
11	1,000	1,007	0,967	0,975	0,982	0,984	1,003
12	1,000	1,006	0,967	0,973	0,978	0,981	1,002
13	1,000	1,009	0,968	0,992	1,001	0,995	1,009
14	1,000	1,007	0,967	0,991	0,998	0,994	1,007
15	1,000	1,011	0,968	0,992	1,003	0,995	1,010
16	1,000	1,008	0,967	0,992	0,999	0,994	1,008
17	1,000	1,012	0,968	0,993	1,004	0,995	1,012
18	1,000	1,009	0,967	0,992	1,000	0,994	1,008
MITJANA	1,000	1,005	0,976	0,963	0,967	0,976	0,996
S.D.	0,000%	0,409%	1,222%	2,949%	3,385%	1,802%	1,318%
C.V.	0,000%	0,407%	1,252%	3,063%	3,499%	1,846%	1,323%
MÀX.	1,000	1,012	1,000	0,993	1,004	0,995	1,012
MÍN.	1,000	0,998	0,967	0,917	0,915	0,948	0,974

Taula 5. Ràtios respecte EMM s. i estadístics dels casos 1 a 18 (biga 1).

Cas	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
19	1,000	1,003	1,026	0,878	0,880	0,920	0,971
20	1,000	1,003	1,016	0,874	0,877	0,914	0,977
21	1,000	1,004	1,016	0,882	0,885	0,921	0,977
22	1,000	1,004	1,008	0,878	0,881	0,915	0,981
23	1,000	1,006	1,009	0,885	0,889	0,922	0,981
24	1,000	1,005	1,001	0,880	0,884	0,915	0,984
25	1,000	1,008	0,989	0,958	0,965	0,970	1,000
26	1,000	1,006	0,987	0,957	0,963	0,967	1,000
27	1,000	1,009	0,987	0,959	0,968	0,970	1,002
28	1,000	1,007	0,985	0,958	0,965	0,967	1,001
29	1,000	1,010	0,986	0,960	0,970	0,970	1,004
30	1,000	1,007	0,984	0,959	0,966	0,968	1,002
31	1,000	1,012	0,986	0,987	0,999	0,990	1,010
32	1,000	1,008	0,984	0,987	0,995	0,989	1,007
33	1,000	1,013	0,985	0,988	1,000	0,990	1,012
34	1,000	1,009	0,983	0,987	0,996	0,989	1,008
35	1,000	1,013	0,985	0,988	1,001	0,990	1,012
36	1,000	1,009	0,983	0,988	0,996	0,990	1,008
MITJANA	1,000	1,008	0,994	0,942	0,949	0,959	0,997
S.D.	0,000%	0,310%	1,407%	4,702%	5,011%	3,123%	1,382%
C.V.	0,000%	0,308%	1,415%	4,992%	5,281%	3,257%	1,387%
MÀX.	1,000	1,013	1,026	0,988	1,001	0,990	1,012
MÍN.	1,000	1,003	0,983	0,874	0,877	0,914	0,971

Taula 6. Ràtios respecte EMM s. i estadístics dels casos 19 a 38 (biga 2).

2. RESULTATS ANÀLISI ARMADURA

2.1. Cas 1: $\rho'/\rho=0$, $M/M_{cr}=1.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	56,791	57,274	57,617	48,399	48,803	50,376	56,442
0,0108	28,229	28,453	29,026	24,423	24,602	25,475	27,836
0,0176	21,545	21,667	22,339	18,867	18,954	19,680	21,134
0,0244	18,569	18,631	19,366	16,430	16,459	17,121	18,150
0,0312	16,903	16,921	17,703	15,089	15,077	15,701	16,479
0,0380	15,850	15,835	16,655	14,261	14,217	14,815	15,425
0,0448	15,133	15,092	15,946	13,711	13,643	14,221	14,709
0,0516	14,621	14,558	15,442	13,331	13,241	13,803	14,198
0,0584	14,242	14,161	15,073	13,058	12,952	13,499	13,822
0,0652	13,955	13,859	14,797	12,860	12,740	13,273	13,538
0,0720	13,732	13,623	14,588	12,714	12,581	13,103	13,319
0,0788	13,558	13,438	14,427	12,606	12,463	12,973	13,149
0,0856	13,420	13,290	14,304	12,526	12,374	12,874	13,015
0,0924	13,311	13,172	14,211	12,468	12,309	12,799	12,910
0,0992	13,223	13,077	14,140	12,427	12,261	12,741	12,827
0,1060	13,154	13,000	14,088	12,399	12,227	12,699	12,761
0,1128	13,098	12,939	14,050	12,382	12,204	12,668	12,710
0,1196	13,054	12,890	14,026	12,373	12,191	12,646	12,671
0,1264	13,020	12,851	14,011	12,370	12,185	12,632	12,641
0,1332	12,994	12,821	14,006	12,374	12,185	12,625	12,620
0,1400	12,975	12,798	14,007	12,382	12,191	12,622	12,605

Taula 7. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 1 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,008	1,015	0,852	0,859	0,887	0,994
0,0108	1,000	1,008	1,028	0,865	0,871	0,902	0,986
0,0176	1,000	1,006	1,037	0,876	0,880	0,913	0,981
0,0244	1,000	1,003	1,043	0,885	0,886	0,922	0,977
0,0312	1,000	1,001	1,047	0,893	0,892	0,929	0,975
0,0380	1,000	0,999	1,051	0,900	0,897	0,935	0,973
0,0448	1,000	0,997	1,054	0,906	0,902	0,940	0,972
0,0516	1,000	0,996	1,056	0,912	0,906	0,944	0,971
0,0584	1,000	0,994	1,058	0,917	0,909	0,948	0,970
0,0652	1,000	0,993	1,060	0,922	0,913	0,951	0,970
0,0720	1,000	0,992	1,062	0,926	0,916	0,954	0,970
0,0788	1,000	0,991	1,064	0,930	0,919	0,957	0,970
0,0856	1,000	0,990	1,066	0,933	0,922	0,959	0,970
0,0924	1,000	0,990	1,068	0,937	0,925	0,962	0,970
0,0992	1,000	0,989	1,069	0,940	0,927	0,964	0,970
0,1060	1,000	0,988	1,071	0,943	0,930	0,965	0,970
0,1128	1,000	0,988	1,073	0,945	0,932	0,967	0,970
0,1196	1,000	0,987	1,074	0,948	0,934	0,969	0,971
0,1264	1,000	0,987	1,076	0,950	0,936	0,970	0,971
0,1332	1,000	0,987	1,078	0,952	0,938	0,972	0,971
0,1400	1,000	0,986	1,080	0,954	0,940	0,973	0,971
MITJANA	1,000	0,994	1,059	0,918	0,911	0,947	0,974
S.D.	0,000%	0,729%	1,705%	3,016%	2,303%	2,418%	0,627%
C.V.	0,000%	0,733%	1,611%	3,284%	2,528%	2,554%	0,644%
MÀX.	1,000	1,008	1,080	0,954	0,940	0,973	0,994
MÍN.	1,000	0,986	1,015	0,852	0,859	0,887	0,970

Taula 8. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 1 de variació de l'armadura.

2.2. Cas 2: $\rho'/\rho=0.25$, $M/M_{cr}=1.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	56,692	57,160	57,449	48,300	48,695	50,276	56,337
0,0108	27,866	28,084	28,562	24,078	24,258	25,122	27,488
0,0176	20,978	21,109	21,595	18,325	18,429	19,128	20,600
0,0244	17,824	17,908	18,354	15,712	15,774	16,392	17,454
0,0312	15,993	16,049	16,436	14,209	14,245	14,809	15,635
0,0380	14,785	14,824	15,143	13,226	13,246	13,769	14,442
0,0448	13,922	13,949	14,197	12,530	12,540	13,028	13,594
0,0516	13,270	13,290	13,465	12,008	12,011	12,469	12,957
0,0584	12,755	12,771	12,875	11,599	11,600	12,029	12,458
0,0652	12,337	12,351	12,386	11,269	11,268	11,672	12,056
0,0720	11,987	12,002	11,969	10,994	10,995	11,374	11,722
0,0788	11,690	11,706	11,608	10,762	10,764	11,120	11,440
0,0856	11,432	11,451	11,290	10,560	10,566	10,900	11,198
0,0924	11,205	11,227	11,008	10,384	10,393	10,706	10,986
0,0992	11,002	11,029	10,753	10,226	10,240	10,534	10,799
0,1060	10,820	10,852	10,522	10,085	10,104	10,378	10,632
0,1128	10,655	10,691	10,310	9,956	9,980	10,236	10,481
0,1196	10,504	10,545	10,115	9,838	9,868	10,106	10,343
0,1264	10,364	10,411	9,935	9,730	9,765	9,986	10,217
0,1332	10,235	10,287	9,768	9,628	9,670	9,875	10,101
0,1400	10,114	10,172	9,611	9,534	9,581	9,770	9,993

Taula 9. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 2 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,008	1,013	0,852	0,859	0,887	0,994
0,0108	1,000	1,008	1,025	0,864	0,871	0,902	0,986
0,0176	1,000	1,006	1,029	0,874	0,879	0,912	0,982
0,0244	1,000	1,005	1,030	0,882	0,885	0,920	0,979
0,0312	1,000	1,004	1,028	0,888	0,891	0,926	0,978
0,0380	1,000	1,003	1,024	0,895	0,896	0,931	0,977
0,0448	1,000	1,002	1,020	0,900	0,901	0,936	0,976
0,0516	1,000	1,002	1,015	0,905	0,905	0,940	0,976
0,0584	1,000	1,001	1,009	0,909	0,909	0,943	0,977
0,0652	1,000	1,001	1,004	0,913	0,913	0,946	0,977
0,0720	1,000	1,001	0,998	0,917	0,917	0,949	0,978
0,0788	1,000	1,001	0,993	0,921	0,921	0,951	0,979
0,0856	1,000	1,002	0,988	0,924	0,924	0,953	0,980
0,0924	1,000	1,002	0,982	0,927	0,928	0,956	0,981
0,0992	1,000	1,002	0,977	0,929	0,931	0,957	0,982
0,1060	1,000	1,003	0,972	0,932	0,934	0,959	0,983
0,1128	1,000	1,003	0,968	0,934	0,937	0,961	0,984
0,1196	1,000	1,004	0,963	0,937	0,939	0,962	0,985
0,1264	1,000	1,005	0,959	0,939	0,942	0,964	0,986
0,1332	1,000	1,005	0,954	0,941	0,945	0,965	0,987
0,1400	1,000	1,006	0,950	0,943	0,947	0,966	0,988
MITJANA	1,000	1,004	0,995	0,911	0,913	0,942	0,982
S.D.	0,000%	0,216%	2,705%	2,654%	2,567%	2,216%	0,470%
C.V.	0,000%	0,215%	2,718%	2,914%	2,811%	2,352%	0,479%
MÀX.	1,000	1,008	1,030	0,943	0,947	0,966	0,994
MÍN.	1,000	1,001	0,950	0,852	0,859	0,887	0,976

Taula 10. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 2 de variació de l'armadura.

2.3. Cas 3: $\rho'/\rho=0.5$, $M/M_{cr}=1.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	56,597	57,054	57,290	48,205	48,593	50,180	56,239
0,0108	27,529	27,746	28,147	23,756	23,941	24,794	27,168
0,0176	20,466	20,608	20,966	17,833	17,955	18,628	20,121
0,0244	17,167	17,275	17,546	15,077	15,169	15,748	16,843
0,0312	15,211	15,302	15,475	13,448	13,525	14,040	14,909
0,0380	13,892	13,975	14,051	12,352	12,423	12,888	13,612
0,0448	12,929	13,009	12,992	11,554	11,623	12,045	12,671
0,0516	12,185	12,266	12,163	10,939	11,008	11,394	11,949
0,0584	11,587	11,670	11,490	10,444	10,517	10,869	11,372
0,0652	11,091	11,179	10,927	10,035	10,112	10,434	10,896
0,0720	10,671	10,764	10,447	9,688	9,769	10,064	10,495
0,0788	10,307	10,405	10,030	9,387	9,474	9,743	10,150
0,0856	9,988	10,092	9,664	9,123	9,216	9,461	9,848
0,0924	9,704	9,814	9,339	8,888	8,986	9,209	9,581
0,0992	9,449	9,565	9,048	8,676	8,780	8,983	9,341
0,1060	9,218	9,340	8,784	8,483	8,594	8,777	9,125
0,1128	9,006	9,134	8,545	8,307	8,423	8,588	8,927
0,1196	8,811	8,945	8,325	8,145	8,267	8,414	8,746
0,1264	8,631	8,771	8,124	7,994	8,121	8,253	8,579
0,1332	8,464	8,609	7,938	7,854	7,986	8,103	8,423
0,1400	8,308	8,458	7,766	7,723	7,860	7,962	8,278

Taula 11. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 3 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,008	1,012	0,852	0,859	0,887	0,994
0,0108	1,000	1,008	1,022	0,863	0,870	0,901	0,987
0,0176	1,000	1,007	1,024	0,871	0,877	0,910	0,983
0,0244	1,000	1,006	1,022	0,878	0,884	0,917	0,981
0,0312	1,000	1,006	1,017	0,884	0,889	0,923	0,980
0,0380	1,000	1,006	1,011	0,889	0,894	0,928	0,980
0,0448	1,000	1,006	1,005	0,894	0,899	0,932	0,980
0,0516	1,000	1,007	0,998	0,898	0,903	0,935	0,981
0,0584	1,000	1,007	0,992	0,901	0,908	0,938	0,981
0,0652	1,000	1,008	0,985	0,905	0,912	0,941	0,982
0,0720	1,000	1,009	0,979	0,908	0,916	0,943	0,984
0,0788	1,000	1,010	0,973	0,911	0,919	0,945	0,985
0,0856	1,000	1,010	0,968	0,913	0,923	0,947	0,986
0,0924	1,000	1,011	0,962	0,916	0,926	0,949	0,987
0,0992	1,000	1,012	0,958	0,918	0,929	0,951	0,989
0,1060	1,000	1,013	0,953	0,920	0,932	0,952	0,990
0,1128	1,000	1,014	0,949	0,922	0,935	0,954	0,991
0,1196	1,000	1,015	0,945	0,924	0,938	0,955	0,993
0,1264	1,000	1,016	0,941	0,926	0,941	0,956	0,994
0,1332	1,000	1,017	0,938	0,928	0,944	0,957	0,995
0,1400	1,000	1,018	0,935	0,930	0,946	0,958	0,996
MITJANA	1,000	1,010	0,980	0,902	0,912	0,937	0,987
S.D.	0,000%	0,398%	3,112%	2,247%	2,555%	1,988%	0,553%
C.V.	0,000%	0,394%	3,174%	2,490%	2,803%	2,121%	0,560%
MÀX.	1,000	1,018	1,024	0,930	0,946	0,958	0,996
MÍN.	1,000	1,006	0,935	0,852	0,859	0,887	0,980

Taula 12. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 3 de variació de l'armadura.

2.4. Cas 4: $\rho'/\rho=0$, $M/M_{cr}=2.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	106,020	107,028	106,413	100,863	101,820	101,508	106,601
0,0108	49,453	49,993	49,760	47,206	47,717	47,611	49,715
0,0176	36,066	36,437	36,373	34,529	34,877	34,867	36,212
0,0244	30,020	30,293	30,343	28,817	29,070	29,116	30,098
0,0312	26,574	26,780	26,918	25,570	25,758	25,843	26,606
0,0380	24,352	24,508	24,721	23,484	23,623	23,736	24,350
0,0448	22,807	22,924	23,202	22,038	22,139	22,273	22,779
0,0516	21,675	21,760	22,097	20,983	21,053	21,203	21,626
0,0584	20,814	20,873	21,265	20,185	20,229	20,392	20,748
0,0652	20,141	20,178	20,620	19,563	19,586	19,759	20,061
0,0720	19,604	19,621	20,112	19,069	19,074	19,254	19,511
0,0788	19,168	19,168	19,705	18,670	18,658	18,846	19,065
0,0856	18,809	18,794	19,376	18,344	18,318	18,511	18,697
0,0924	18,510	18,483	19,107	18,074	18,035	18,233	18,390
0,0992	18,260	18,220	18,886	17,849	17,799	18,000	18,133
0,1060	18,048	17,998	18,704	17,660	17,600	17,805	17,915
0,1128	17,868	17,809	18,555	17,501	17,432	17,639	17,729
0,1196	17,715	17,647	18,432	17,366	17,289	17,499	17,571
0,1264	17,584	17,508	18,331	17,252	17,168	17,379	17,436
0,1332	17,471	17,388	18,249	17,156	17,065	17,277	17,320
0,1400	17,375	17,285	18,183	17,074	16,977	17,191	17,220

Taula 13. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 4 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,010	1,004	0,951	0,960	0,957	1,005
0,0108	1,000	1,011	1,006	0,955	0,965	0,963	1,005
0,0176	1,000	1,010	1,009	0,957	0,967	0,967	1,004
0,0244	1,000	1,009	1,011	0,960	0,968	0,970	1,003
0,0312	1,000	1,008	1,013	0,962	0,969	0,972	1,001
0,0380	1,000	1,006	1,015	0,964	0,970	0,975	1,000
0,0448	1,000	1,005	1,017	0,966	0,971	0,977	0,999
0,0516	1,000	1,004	1,019	0,968	0,971	0,978	0,998
0,0584	1,000	1,003	1,022	0,970	0,972	0,980	0,997
0,0652	1,000	1,002	1,024	0,971	0,972	0,981	0,996
0,0720	1,000	1,001	1,026	0,973	0,973	0,982	0,995
0,0788	1,000	1,000	1,028	0,974	0,973	0,983	0,995
0,0856	1,000	0,999	1,030	0,975	0,974	0,984	0,994
0,0924	1,000	0,999	1,032	0,976	0,974	0,985	0,994
0,0992	1,000	0,998	1,034	0,978	0,975	0,986	0,993
0,1060	1,000	0,997	1,036	0,979	0,975	0,987	0,993
0,1128	1,000	0,997	1,038	0,979	0,976	0,987	0,992
0,1196	1,000	0,996	1,040	0,980	0,976	0,988	0,992
0,1264	1,000	0,996	1,043	0,981	0,976	0,988	0,992
0,1332	1,000	0,995	1,045	0,982	0,977	0,989	0,991
0,1400	1,000	0,995	1,047	0,983	0,977	0,989	0,991
MITJANA	1,000	1,002	1,026	0,971	0,972	0,979	0,997
S.D.	0,000%	0,541%	1,321%	0,947%	0,426%	0,912%	0,479%
C.V.	0,000%	0,540%	1,288%	0,975%	0,439%	0,931%	0,481%
MÀX.	1,000	1,011	1,047	0,983	0,977	0,989	1,005
MÍN.	1,000	0,995	1,004	0,951	0,960	0,957	0,991

Taula 14. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 4 de variació de l'armadura.

2.5. Cas 5: $\rho'/\rho=0.25$, $M/M_{cr}=2.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	105,924	106,901	106,212	100,766	101,695	101,410	106,479
0,0108	49,014	49,526	49,199	46,777	47,263	47,178	49,260
0,0176	35,380	35,734	35,479	33,855	34,191	34,188	35,523
0,0244	29,122	29,393	29,139	27,933	28,189	28,227	29,213
0,0312	25,485	25,703	25,420	24,496	24,702	24,763	25,545
0,0380	23,085	23,270	22,942	22,232	22,406	22,479	23,128
0,0448	21,372	21,533	21,154	20,618	20,769	20,847	21,404
0,0516	20,079	20,224	19,791	19,402	19,538	19,617	20,105
0,0584	19,065	19,198	18,709	18,449	18,574	18,651	19,088
0,0652	18,243	18,369	17,825	17,678	17,795	17,869	18,266
0,0720	17,561	17,682	17,084	17,039	17,152	17,220	17,586
0,0788	16,985	17,103	16,451	16,499	16,610	16,671	17,013
0,0856	16,489	16,606	15,903	16,035	16,145	16,198	16,521
0,0924	16,056	16,173	15,421	15,630	15,741	15,786	16,093
0,0992	15,675	15,793	14,993	15,274	15,386	15,422	15,717
0,1060	15,335	15,455	14,610	14,956	15,070	15,098	15,383
0,1128	15,029	15,152	14,264	14,671	14,788	14,807	15,084
0,1196	14,753	14,879	13,950	14,412	14,533	14,543	14,814
0,1264	14,500	14,630	13,662	14,176	14,301	14,302	14,568
0,1332	14,269	14,403	13,398	13,960	14,089	14,080	14,343
0,1400	14,056	14,193	13,154	13,761	13,894	13,876	14,137

Taula 15. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 5 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,009	1,003	0,951	0,960	0,957	1,005
0,0108	1,000	1,010	1,004	0,954	0,964	0,963	1,005
0,0176	1,000	1,010	1,003	0,957	0,966	0,966	1,004
0,0244	1,000	1,009	1,001	0,959	0,968	0,969	1,003
0,0312	1,000	1,009	0,997	0,961	0,969	0,972	1,002
0,0380	1,000	1,008	0,994	0,963	0,971	0,974	1,002
0,0448	1,000	1,008	0,990	0,965	0,972	0,975	1,001
0,0516	1,000	1,007	0,986	0,966	0,973	0,977	1,001
0,0584	1,000	1,007	0,981	0,968	0,974	0,978	1,001
0,0652	1,000	1,007	0,977	0,969	0,975	0,979	1,001
0,0720	1,000	1,007	0,973	0,970	0,977	0,981	1,001
0,0788	1,000	1,007	0,969	0,971	0,978	0,982	1,002
0,0856	1,000	1,007	0,964	0,972	0,979	0,982	1,002
0,0924	1,000	1,007	0,960	0,973	0,980	0,983	1,002
0,0992	1,000	1,008	0,957	0,974	0,982	0,984	1,003
0,1060	1,000	1,008	0,953	0,975	0,983	0,985	1,003
0,1128	1,000	1,008	0,949	0,976	0,984	0,985	1,004
0,1196	1,000	1,009	0,946	0,977	0,985	0,986	1,004
0,1264	1,000	1,009	0,942	0,978	0,986	0,986	1,005
0,1332	1,000	1,009	0,939	0,978	0,987	0,987	1,005
0,1400	1,000	1,010	0,936	0,979	0,988	0,987	1,006
MITJANA	1,000	1,008	0,972	0,969	0,976	0,978	1,003
S.D.	0,000%	0,114%	2,321%	0,828%	0,804%	0,846%	0,152%
C.V.	0,000%	0,113%	2,387%	0,855%	0,824%	0,865%	0,151%
MÀX.	1,000	1,010	1,004	0,979	0,988	0,987	1,006
MÍN.	1,000	1,007	0,936	0,951	0,960	0,957	1,001

Taula 16. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 5 de variació de l'armadura.

2.6. Cas 6: $\rho'/\rho=0.5$, $M/M_{cr}=2.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	105,834	106,785	106,023	100,676	101,581	101,319	106,367
0,0108	48,611	49,101	48,699	46,381	46,849	46,779	48,846
0,0176	34,765	35,110	34,728	33,250	33,581	33,579	34,911
0,0244	28,338	28,612	28,180	27,160	27,423	27,450	28,445
0,0312	24,556	24,791	24,288	23,578	23,803	23,841	24,645
0,0380	22,030	22,241	21,663	21,187	21,390	21,430	22,111
0,0448	20,204	20,401	19,749	19,459	19,649	19,685	20,282
0,0516	18,809	18,998	18,277	18,139	18,322	18,352	18,889
0,0584	17,700	17,886	17,102	17,091	17,271	17,291	17,785
0,0652	16,793	16,977	16,137	16,233	16,412	16,423	16,882
0,0720	16,032	16,216	15,325	15,514	15,693	15,694	16,128
0,0788	15,382	15,568	14,632	14,899	15,081	15,070	15,485
0,0856	14,817	15,006	14,030	14,366	14,550	14,529	14,928
0,0924	14,321	14,514	13,502	13,897	14,084	14,053	14,439
0,0992	13,880	14,076	13,034	13,480	13,671	13,629	14,005
0,1060	13,485	13,685	12,615	13,106	13,301	13,249	13,617
0,1128	13,127	13,331	12,238	12,768	12,967	12,905	13,266
0,1196	12,801	13,010	11,897	12,459	12,663	12,591	12,948
0,1264	12,503	12,716	11,586	12,177	12,385	12,304	12,656
0,1332	12,228	12,445	11,300	11,917	12,129	12,039	12,388
0,1400	11,974	12,195	11,038	11,676	11,892	11,794	12,140

Taula 17. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 6 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,009	1,002	0,951	0,960	0,957	1,005
0,0108	1,000	1,010	1,002	0,954	0,964	0,962	1,005
0,0176	1,000	1,010	0,999	0,956	0,966	0,966	1,004
0,0244	1,000	1,010	0,994	0,958	0,968	0,969	1,004
0,0312	1,000	1,010	0,989	0,960	0,969	0,971	1,004
0,0380	1,000	1,010	0,983	0,962	0,971	0,973	1,004
0,0448	1,000	1,010	0,977	0,963	0,973	0,974	1,004
0,0516	1,000	1,010	0,972	0,964	0,974	0,976	1,004
0,0584	1,000	1,010	0,966	0,966	0,976	0,977	1,005
0,0652	1,000	1,011	0,961	0,967	0,977	0,978	1,005
0,0720	1,000	1,012	0,956	0,968	0,979	0,979	1,006
0,0788	1,000	1,012	0,951	0,969	0,980	0,980	1,007
0,0856	1,000	1,013	0,947	0,970	0,982	0,981	1,007
0,0924	1,000	1,013	0,943	0,970	0,983	0,981	1,008
0,0992	1,000	1,014	0,939	0,971	0,985	0,982	1,009
0,1060	1,000	1,015	0,936	0,972	0,986	0,983	1,010
0,1128	1,000	1,016	0,932	0,973	0,988	0,983	1,011
0,1196	1,000	1,016	0,929	0,973	0,989	0,984	1,011
0,1264	1,000	1,017	0,927	0,974	0,991	0,984	1,012
0,1332	1,000	1,018	0,924	0,975	0,992	0,985	1,013
0,1400	1,000	1,018	0,922	0,975	0,993	0,985	1,014
MITJANA	1,000	1,013	0,960	0,966	0,978	0,977	1,007
S.D.	0,000%	0,306%	2,759%	0,703%	0,982%	0,776%	0,340%
C.V.	0,000%	0,303%	2,876%	0,728%	1,004%	0,795%	0,338%
MÀX.	1,000	1,018	1,002	0,975	0,993	0,985	1,014
MÍN.	1,000	1,009	0,922	0,951	0,960	0,957	1,004

Taula 18. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 6 de variació de l'armadura.

2.7. Cas 7: $\rho'/\rho=0$, $M/M_{cr}=4.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	196,053	198,038	196,575	193,136	195,091	193,353	197,849
0,0108	87,916	89,048	88,213	86,701	87,815	86,855	88,948
0,0176	62,232	63,064	62,487	61,428	62,246	61,562	62,993
0,0244	50,578	51,242	50,831	49,965	50,617	50,087	51,186
0,0312	43,901	44,452	44,166	43,400	43,941	43,512	44,406
0,0380	39,572	40,040	39,857	39,146	39,605	39,251	40,001
0,0448	36,542	36,946	36,851	36,170	36,566	36,268	36,912
0,0516	34,307	34,660	34,643	33,977	34,323	34,069	34,631
0,0584	32,596	32,907	32,962	32,300	32,603	32,386	32,881
0,0652	31,249	31,524	31,645	30,979	31,247	31,061	31,500
0,0720	30,165	30,408	30,591	29,917	30,154	29,995	30,387
0,0788	29,277	29,493	29,735	29,048	29,258	29,122	29,473
0,0856	28,539	28,731	29,030	28,327	28,514	28,397	28,714
0,0924	27,919	28,090	28,443	27,722	27,888	27,788	28,074
0,0992	27,394	27,546	27,950	27,209	27,357	27,273	27,531
0,1060	26,945	27,080	27,535	26,772	26,902	26,832	27,067
0,1128	26,559	26,679	27,182	26,396	26,511	26,454	26,666
0,1196	26,226	26,331	26,883	26,072	26,173	26,127	26,320
0,1264	25,936	26,029	26,627	25,791	25,880	25,843	26,018
0,1332	25,684	25,765	26,409	25,547	25,624	25,597	25,755
0,1400	25,465	25,535	26,224	25,334	25,400	25,382	25,525

Taula 19. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 7 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,010	1,003	0,985	0,995	0,986	1,009
0,0108	1,000	1,013	1,003	0,986	0,999	0,988	1,012
0,0176	1,000	1,013	1,004	0,987	1,000	0,989	1,012
0,0244	1,000	1,013	1,005	0,988	1,001	0,990	1,012
0,0312	1,000	1,013	1,006	0,989	1,001	0,991	1,012
0,0380	1,000	1,012	1,007	0,989	1,001	0,992	1,011
0,0448	1,000	1,011	1,008	0,990	1,001	0,993	1,010
0,0516	1,000	1,010	1,010	0,990	1,000	0,993	1,009
0,0584	1,000	1,010	1,011	0,991	1,000	0,994	1,009
0,0652	1,000	1,009	1,013	0,991	1,000	0,994	1,008
0,0720	1,000	1,008	1,014	0,992	1,000	0,994	1,007
0,0788	1,000	1,007	1,016	0,992	0,999	0,995	1,007
0,0856	1,000	1,007	1,017	0,993	0,999	0,995	1,006
0,0924	1,000	1,006	1,019	0,993	0,999	0,995	1,006
0,0992	1,000	1,006	1,020	0,993	0,999	0,996	1,005
0,1060	1,000	1,005	1,022	0,994	0,998	0,996	1,005
0,1128	1,000	1,005	1,023	0,994	0,998	0,996	1,004
0,1196	1,000	1,004	1,025	0,994	0,998	0,996	1,004
0,1264	1,000	1,004	1,027	0,994	0,998	0,996	1,003
0,1332	1,000	1,003	1,028	0,995	0,998	0,997	1,003
0,1400	1,000	1,003	1,030	0,995	0,997	0,997	1,002
MITJANA	1,000	1,008	1,015	0,991	0,999	0,993	1,007
S.D.	0,000%	0,357%	0,876%	0,292%	0,145%	0,302%	0,331%
C.V.	0,000%	0,354%	0,863%	0,295%	0,145%	0,304%	0,328%
MÀX.	1,000	1,013	1,030	0,995	1,001	0,997	1,012
MÍN.	1,000	1,003	1,003	0,985	0,995	0,986	1,002

Taula 20. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 7 de variació de l'armadura.

2.8. Cas 8: $\rho'/\rho=0.25$, $M/M_{cr}=4.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	195,965	197,891	196,312	193,048	194,945	193,264	197,705
0,0108	87,350	88,413	87,470	86,138	87,187	86,291	88,320
0,0176	61,336	62,110	61,313	60,537	61,300	60,669	62,047
0,0244	49,410	50,030	49,264	48,802	49,414	48,922	49,982
0,0312	42,489	43,012	42,232	41,994	42,511	42,104	42,975
0,0380	37,936	38,393	37,576	37,516	37,968	37,619	38,362
0,0448	34,695	35,105	34,239	34,329	34,735	34,425	35,079
0,0516	32,259	32,635	31,715	31,936	32,307	32,026	32,613
0,0584	30,356	30,706	29,729	30,065	30,410	30,150	30,687
0,0652	28,823	29,153	28,119	28,558	28,884	28,639	29,137
0,0720	27,558	27,873	26,782	27,315	27,627	27,392	27,859
0,0788	26,494	26,798	25,650	26,270	26,571	26,343	26,785
0,0856	25,584	25,880	24,678	25,377	25,669	25,446	25,869
0,0924	24,797	25,086	23,832	24,603	24,890	24,669	25,077
0,0992	24,107	24,392	23,088	23,926	24,208	23,989	24,383
0,1060	23,497	23,779	22,427	23,327	23,606	23,387	23,771
0,1128	22,952	23,233	21,835	22,792	23,070	22,850	23,226
0,1196	22,463	22,743	21,301	22,311	22,589	22,366	22,737
0,1264	22,019	22,300	20,816	21,876	22,155	21,929	22,294
0,1332	21,616	21,897	20,375	21,480	21,760	21,531	21,893
0,1400	21,247	21,530	19,970	21,117	21,399	21,166	21,525

Taula 21. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 8 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,010	1,002	0,985	0,995	0,986	1,009
0,0108	1,000	1,012	1,001	0,986	0,998	0,988	1,011
0,0176	1,000	1,013	1,000	0,987	0,999	0,989	1,012
0,0244	1,000	1,013	0,997	0,988	1,000	0,990	1,012
0,0312	1,000	1,012	0,994	0,988	1,001	0,991	1,011
0,0380	1,000	1,012	0,991	0,989	1,001	0,992	1,011
0,0448	1,000	1,012	0,987	0,989	1,001	0,992	1,011
0,0516	1,000	1,012	0,983	0,990	1,001	0,993	1,011
0,0584	1,000	1,012	0,979	0,990	1,002	0,993	1,011
0,0652	1,000	1,011	0,976	0,991	1,002	0,994	1,011
0,0720	1,000	1,011	0,972	0,991	1,003	0,994	1,011
0,0788	1,000	1,011	0,968	0,992	1,003	0,994	1,011
0,0856	1,000	1,012	0,965	0,992	1,003	0,995	1,011
0,0924	1,000	1,012	0,961	0,992	1,004	0,995	1,011
0,0992	1,000	1,012	0,958	0,992	1,004	0,995	1,011
0,1060	1,000	1,012	0,954	0,993	1,005	0,995	1,012
0,1128	1,000	1,012	0,951	0,993	1,005	0,996	1,012
0,1196	1,000	1,012	0,948	0,993	1,006	0,996	1,012
0,1264	1,000	1,013	0,945	0,993	1,006	0,996	1,012
0,1332	1,000	1,013	0,943	0,994	1,007	0,996	1,013
0,1400	1,000	1,013	0,940	0,994	1,007	0,996	1,013
MITJANA	1,000	1,012	0,972	0,991	1,002	0,993	1,011
S.D.	0,000%	0,073%	2,083%	0,261%	0,303%	0,285%	0,086%
C.V.	0,000%	0,072%	2,142%	0,264%	0,302%	0,287%	0,085%
MÀX.	1,000	1,013	1,002	0,994	1,007	0,996	1,013
MÍN.	1,000	1,010	0,940	0,985	0,995	0,986	1,009

Taula 22. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 8 de variació de l'armadura.

2.9. Cas 9: $\rho'/\rho=0.5$, $M/M_{cr}=4.5$

$\eta\rho$	EMM s.	AEMM s.	Mètode simpl.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	195,886	197,759	196,066	192,968	194,813	193,184	197,576
0,0108	86,832	87,841	86,812	85,624	86,619	85,775	87,753
0,0176	60,538	61,270	60,332	59,744	60,466	59,874	61,213
0,0244	48,395	48,986	48,023	47,792	48,376	47,910	48,944
0,0312	41,292	41,800	40,777	40,802	41,304	40,911	41,768
0,0380	36,581	37,034	35,941	36,165	36,615	36,267	37,009
0,0448	33,199	33,616	32,453	32,837	33,251	32,933	33,596
0,0516	30,637	31,029	29,799	30,316	30,706	30,406	31,013
0,0584	28,618	28,993	27,701	28,329	28,701	28,414	28,979
0,0652	26,978	27,341	25,994	26,716	27,076	26,796	27,329
0,0720	25,615	25,969	24,573	25,374	25,726	25,451	25,959
0,0788	24,460	24,808	23,369	24,237	24,584	24,310	24,799
0,0856	23,466	23,810	22,334	23,259	23,602	23,328	23,803
0,0924	22,599	22,941	21,432	22,405	22,746	22,472	22,934
0,0992	21,834	22,176	20,639	21,653	21,993	21,717	22,170
0,1060	21,154	21,495	19,935	20,984	21,323	21,045	21,490
0,1128	20,544	20,885	19,306	20,383	20,723	20,442	20,881
0,1196	19,992	20,335	18,739	19,840	20,181	19,897	20,331
0,1264	19,491	19,834	18,225	19,346	19,688	19,401	19,831
0,1332	19,032	19,377	17,758	18,895	19,238	18,947	19,374
0,1400	18,611	18,957	17,330	18,480	18,825	18,530	18,954

Taula 23. Fletxa total calculada per a cada mètode del cas 9 de variació de l'armadura.

np	EMM s.	AEMM s.	Mètode s.	EMM	AEMM	BG EMM	BG AEMM
0,0040	1,000	1,010	1,001	0,985	0,995	0,986	1,009
0,0108	1,000	1,012	1,000	0,986	0,998	0,988	1,011
0,0176	1,000	1,012	0,997	0,987	0,999	0,989	1,011
0,0244	1,000	1,012	0,992	0,988	1,000	0,990	1,011
0,0312	1,000	1,012	0,988	0,988	1,000	0,991	1,012
0,0380	1,000	1,012	0,983	0,989	1,001	0,991	1,012
0,0448	1,000	1,013	0,978	0,989	1,002	0,992	1,012
0,0516	1,000	1,013	0,973	0,990	1,002	0,992	1,012
0,0584	1,000	1,013	0,968	0,990	1,003	0,993	1,013
0,0652	1,000	1,013	0,964	0,990	1,004	0,993	1,013
0,0720	1,000	1,014	0,959	0,991	1,004	0,994	1,013
0,0788	1,000	1,014	0,955	0,991	1,005	0,994	1,014
0,0856	1,000	1,015	0,952	0,991	1,006	0,994	1,014
0,0924	1,000	1,015	0,948	0,991	1,007	0,994	1,015
0,0992	1,000	1,016	0,945	0,992	1,007	0,995	1,015
0,1060	1,000	1,016	0,942	0,992	1,008	0,995	1,016
0,1128	1,000	1,017	0,940	0,992	1,009	0,995	1,016
0,1196	1,000	1,017	0,937	0,992	1,009	0,995	1,017
0,1264	1,000	1,018	0,935	0,993	1,010	0,995	1,017
0,1332	1,000	1,018	0,933	0,993	1,011	0,996	1,018
0,1400	1,000	1,019	0,931	0,993	1,011	0,996	1,018
MITJANA	1,000	1,014	0,963	0,990	1,004	0,993	1,014
S.D.	0,000%	0,242%	2,359%	0,230%	0,468%	0,268%	0,268%
C.V.	0,000%	0,239%	2,451%	0,232%	0,466%	0,270%	0,265%
MÀX.	1,000	1,019	1,001	0,993	1,011	0,996	1,018
MÍN.	1,000	1,010	0,931	0,985	0,995	0,986	1,009

Taula 24. Ràtios respecte EMM s. i estadístics del cas 9 de variació de l'armadura.