Universitat de Girona

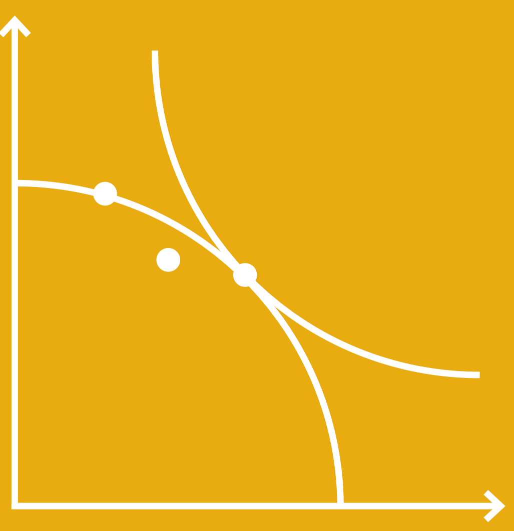
/oberta

Apunts d'Economia Pública

Els Teoremes Fonamentals de l'Economia del Benestar

3r curs del Grau en Economia

Dolors Berga i Elena del Rey



Apunts d'Economia Pública

Els Teoremes Fonamentals de l'Economia del Benestar

3r curs del Grau en Economia

Universitat de Girona

Dolors Berga i Elena del Rey

Edita: Universitat de Girona – Servei de Publicacions

ISBN: 978 84 8458 591 6

Girona, juliol 2021

Índex

1 Introducció: l'Economia del Benestar

D'acord amb l'Oxford Dictionary of Economics, l'economia del benestar és la part de l'economia preocupada per l'efecte de l'activitat econòmica sobre el benestar. Per poder-la estudiar, cal caracteritzar l'activitat econòmica i definir criteris de benestar que permetin avaluar-la. La unitat bàsica de referència per fer l'anàlisi de benestar és l'individu: només en funció de les seves preferències es pot jutjar quina alternativa és millor. Els arguments paternalistes estan fora de l'àmbit de l'Economia del Benestar.

Tot i respectant les preferències individuals, no és fàcil definir un criteri de benestar que se'n derivi. Com podríem agregar les preferències individuals en un índex únic de preferències socials? La Teoria de l'Elecció Social investiga les propietats de diversos sistemes d'agregació de preferències individuals com ara diversos tipus de votacions. Un procés d'agregació de preferències individuals hauria de permetre'ns derivar una Funció de Benestar Social amb què avaluar diferents situacions derivades de l'activitat econòmica. Arrow va demostrar l'any 1950 que no hi ha una manera *perfecta* de transformar les preferències individuals en una preferència colectiva.[1]

En el sentit de Bergson-Samuelson, una Funció de Benestar Social és simplement una funció que transforma els nivells d'utilitat individual en un nivell de benestar social. Diverses formes de transformar-les simplement reflecteixen diferents filosofies o judicis de valor. Per exemple, la funció de benestar social utilitarista es defineix com la suma aritmètica de les utilitats individuals i, per tant, un canvi en la distribució dels nivells d'utilitat entre els individus d'una economia no canvia el nivell de benestar resultant. Aquest és el sentit en què utilitzarem el concepte de Funció de Benestar Social en aquests apunts.

Els supòsits sobre el propi comportament de l'economia, així com les motivacions i restriccions que determinen el comportament individual afecten la descripció d'aquesta activitat econòmica que pretenem avaluar des del punt de vista del benestar. En aquests apunts veurem de manera senzilla, primer, com el criteri d'eficiència de Pareto s'ha fet servir per avaluar el benestar resultant en una economia de mercat. Segon, com els economistes han demostrat que una activitat econòmica on els agents segueixen els preceptes del lliure mercat genera resultats eficients. Adam Smith ja es va referir a aquest resultat molt important de manera informal. Ell parlava de la mà invisible. El teorema que demostra que el mercat pot funcionar com si una mà invisible el portés cap a l'eficiència (una mesura de benestar) es coneix amb el nom de Primer Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar.

[1] Aquest resultat es coneix com el Teorema d'impossibilitat d'Arrow.

Finalment, presentarem el Segon Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar, que estableix que qualsevol de les infinites assignacions Pareto eficients pot ser obtinguda com a resultat d'un equilibri de mercat mitjançant la redistribució de les dotacions inicials. I acabarem amb el concepte de redistribució de suma fixa sense la qual el teorema no es compleix.

Així doncs el document està organitzat de la següent manera: a l'apartat 2 estudiarem el concepte d'eficiència de Pareto i les condicions necessàries i suficients perquè una assignació assoleixi aquesta propietat. A l'apartat 3 estudiarem l'equilibri de mercat, és a dir, l'assignació resultant de la lliure interacció dels agents econòmics. L'apartat 4 enuncia i demostra el Primer Teorema i enuncia i explica la rellevància del Segon. A l'apartat 5 proposem un sèrie d'exercicis resolts per facilitar l'assimilació dels conceptes.

2 El criteri d'eficiència de Pareto

Per avaluar situacions econòmiques alternatives cal acceptar un criteri de benestar que permeti comparar-les, la qual cosa sempre comportarà judicis de valor que difícilment s'acceptaran de manera unànime. El gran avantatge del criteri de Pareto és que ningú pot *estar en desacord* amb el següent: si un canvi *beneficia a un individu sense perjudicar a cap altre*, aquest canvi s'ha de portar a terme.

Una assignació (divisió o repartiment d'alguna cosa en porcions que s'assignen a usos diversos) és *eficient en el sentit de Pareto* si *és* impossible millorar el benestar d'algú sense reduir el benestar d'algú altre.

Sempre que es pugui augmentar el benestar d'algú sense perjudicar a ningú per aconseguir-ho estarem en presència d'una situació ineficient. Augmentar el benestar d'algú sense perjudicar a ningú més per aconseguir-ho és portar a terme una millora en el sentit de Pareto. Quan ja no sigui possible portar a terme cap millora en el sentit de Pareto, ens trobarem en una situació eficient en el sentit de Pareto.

En tot aquest apartat, no hi ha mercat. Estudiem les decisions que prendria un dictador, un polític o un tecnòcrata que tingués capacitat per assignar els béns i factors d'una economia a voluntat, i l'objectiu d'assolir l'eficiència en el sentit de Pareto. És habitual referir-se a aquest agent econòmic com a *planificador social*.

2.1 Eficiència en una economia d'intercanvi

Comencem amb una economia d'intercanvi, on hi ha dos individus, A i B, que poden consumir dos béns, X i Y. Com acabem d'explicar, *no hi ha mercat*: hem de decidir, com si fóssim el planificador social, com repartir els béns entre els dos individus. Podríem fer-ho d'acord amb diferents criteris, però potser ens costaria posar-nos d'acord en quin criteri és el millor. Per exemple, podríem assignar a tots els individus la mateixa quantitat de cada bé (igualitari), o una quantitat diferent en funció de la zona on viu o dels seus ingressos, ...

Un criteri mínim, que garanteix que no malbaratem recursos, és el criteri de Pareto definit anteriorment.

Com a primer pas per demostrar el Primer Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar, anem a estudiar les implicacions d'aplicar aquest criteri en repartir dos béns entre dos individus. Perquè un repartiment dels dos béns entre els dos individus sigui eficient cal que ja no sigui possible millorar el benestar de l'individu A sense reduir el benestar de B.[2]

El problema de maximització que recull el que diu la definició d'eficiència en el sentit de Pareto és, doncs: escollir X^A i Y^A per tal de

$$Max \quad U^A(X^A, Y^A) \tag{P1}$$

$$\text{subjecte a } U^B(X^B, Y^B) \geq \bar{U}^B$$

$$X^A + X^B \leq \bar{X}$$

$$Y^A + Y^B \leq \bar{Y}$$

on U^i és la utilitat de l'individu i, X^i és el consum del bé X per part de l'individu i i Y^i és el consum del bé Y per part de l'individu i, amb $i = A, B$. Considerem funcions d'utilitat $U^A(X^A, Y^A)$ i $U^B(X^B, Y^B)$ creixents i estrictament còncaves en tots dos arguments.

L'expressió $U^B(X^B, Y^B) \geq \bar{U}^B$ ens diu que el que volem és que la utilitat de B no caigui; si en maximitzar la utilitat de A augmentem també la B, també assoliríem una millora en el sentit de Pareto. Noteu però que llavors segur que podrem augmentar encara més la utilitat de A reduint la de B. Per això, si l'objectiu és, no pas incrementar, sinó maximitzar la utilitat de A, segur que la utilitat de B acabarà simplement essent igual a l'original $U^B(X^B, Y^B) = \bar{U}^B$. El mateix passa amb les restriccions $X^A + X^B \leq \bar{X}$ i $Y^A + Y^B \leq \bar{Y}$: realment el que no podem fer és repartir més X o més Y del que tenim. Si volem, podem repartir menys. Però, un altre cop, com que volem maximitzar la utilitat de A, que sempre augmenta en els seus dos arguments X^A i Y^A, les restriccions acabaran assolint-se amb igualtat.

Val a dir, per tant, que podem plantejar el problema de manera més senzilla amb igualtats a les restriccions. És a dir, el Problema (P1) és equivalent al següent: donat un cert nivell d'utilitat o benestar de l'individu B, i donat que volem repartir la totalitat dels béns, busquem la màxima utilitat que podem donar a l'individu A.

Tornant al Problema (P1) podem simplificar les tres restriccions en una:

$$Max \quad U^A(X^A, Y^A)$$

$$U^B(\bar{X} - X^A, \bar{Y} - Y^A) = \bar{U}^B$$

Per maximitzar amb restriccions fem servir el mètode de Lagrange (vegeu, per exemple, l'apèndix de Mas-Colell, Whinston i Green, 1995 i Wallace, 2004). Seguint

[2]Per calcular les assignacions Pareto eficients també podríem haver intercanviat el paper dels individus A i B. Podeu comprovar que s'obtindria la mateixa condició.

Wallace (2004), primer construïm el *lagrangià* essent $\lambda > 0$:

$$\mathcal{L} = U^A(X^A, Y^A) + \lambda[U^B(\bar{X} - X^A, \bar{Y} - Y^A) - \bar{U}^B] \tag{1}$$

Una interessant interpretació de $-\lambda$ és que coincideix amb la tasa de variació de la utilitat de l'individu A en l'òptim quan variem la utilitat mínima de l'individu B. És a dir, si suposem el valor $\bar{U}^B$ com una variable, diem-li b, aleshores es pot comprovar que $-\lambda$ és la derivada respecte a b del valor màxim que pren la funció objectiu $U^A(X^A, Y^A)$ avaluada a l'òptim.[3] Intuïtivament és clar que si el valor mínim de la utilitat del B augmenta, la utilitat de A en l'òptim ha de disminuir. Vegeu-ho a la figura 5 on hi ha representades les assignacions eficients.

Alternativament a (1), podríem escriure el lagrangià com:

$$\mathcal{L} = U^A(X^A, Y^A) - \lambda[\bar{U}^B - U^B(\bar{X} - X^A, \bar{Y} - Y^A)]$$

En ambdós casos les condicions de primer ordre (cpo) per a la maximització de (P1) amb restriccions amb igualtat mitjançant l'elecció de les variables de decisió X^A i Y^A són:[4]

$$cpo(X^A) : \frac{\partial U^A}{\partial X^A} - \lambda \frac{\partial U^B}{\partial X^B} = 0 \tag{2}$$

$$cpo(Y^A) : \frac{\partial U^A}{\partial Y^A} - \lambda \frac{\partial U^B}{\partial Y^B} = 0 \tag{3}$$

És important fixar-se que hem aplicat la regla de la cadena en derivar (1). En efecte, U^B és funció del que l'individu B consumeix dels dos béns X^B i Y^B i només mitjançant les restriccions $X^A + X^B = \bar{X}$ i $Y^A + Y^B = \bar{Y}$ esdevé funció de X^A i Y^A. Per tant, quan derivem U^B respecte de X^A hem d'aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{\partial U^B}{\partial X^A} = \frac{\partial U^B}{\partial X^B} \frac{\partial X^B}{\partial X^A} \tag{4}$$

i, com que $X^B = \bar{X} - X^A$, obtenim que $\frac{\partial X^B}{\partial X^A} = -1$.

Tornem a les equacions (2) i (3). Si aïllem λ a les dues expressions i igualem els resultats ($\lambda = \lambda$) obtenim:

$$\frac{\frac{\partial U^A}{\partial X^A}}{\frac{\partial U^B}{\partial X^B}} = \frac{\frac{\partial U^A}{\partial Y^A}}{\frac{\partial U^B}{\partial Y^B}} \tag{5}$$

[3] Vegeu per exemple l'enllaç https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/lagrange-multipliers-and-constrained-optimization/v/meaning-of-lagrange-multiplier

[4] Sigui $H(X_1, X_2)$ una funció de dues variables, X_1, X_2. Per cada $i = 1, ..., n$, l'expressió $\frac{\partial H(X_1,X_2)}{\partial X_i}$ denota la derivada parcial de H respecte X_i avaluada en el punt (X_1, X_2). Per simplificar, ho escrivim en tot el text com $\frac{\partial H}{\partial X_i}$ sense fer explícit el valor de les variables, excepte quan es consideri rellevant.

o, també, que ens és més útil:

$$\frac{\frac{\partial U^A}{\partial X^A}}{\frac{\partial U^A}{\partial Y^A}} = \frac{\frac{\partial U^B}{\partial X^B}}{\frac{\partial U^B}{\partial Y^B}} \tag{6}$$

A l'esquerra de la igualtat, tenim la *relació marginal de substitució entre els béns X i Y de l'individu A*, en valor absolut, en un punt $(X_1, ..., X_n)$, mentre que a la dreta la de l'individu B. La relació marginal de substitució (RMS) en un punt mesura la tasa d'intercanvi entre els dos béns en aquest punt per part de l'individu. Abans de continuar, recordem perquè la RMS coincideix amb el pendent de la corba d'indiferència en el punt on la calculem.

Les diferents combinacions de X^A i Y^A que donen un mateix nivell d'utilitat a l'individu A satisfan:

$$U^A(X^A, Y^A) = \bar{U}^A \tag{7}$$

Diferenciant totalment aquesta expressió:

$$\frac{\partial U^A}{\partial X^A} dX^A + \frac{\partial U^A}{\partial Y^A} dY^A = 0 \tag{8}$$

podem obtenir el pendent de la corba d'indiferència, que mesura quantes unitats del bé Y està disposat a renunciar A per tenir una unitat més de X tot mantenit-se al mateix nivell d'utilitat/benestar en cada punt de la corba:

$$\frac{dY^A}{dX^A} = -\frac{\frac{\partial U^A}{\partial X^A}}{\frac{\partial U^A}{\partial Y^A}} \tag{9}$$

Per tant, (6) vol dir que el repartiment de X i Y entre els dos individus és tal que tots dos valoren igual l'última unitat consumida de cada bé. Així doncs, perquè el repartiment dels béns entre els dos individus sigui eficient és necessari i suficient que:[5]

$$\boxed{RMS^A_{XY} = RMS^B_{XY}} \tag{10}$$

Per entendre aquest resultat de manera general, sabent que les quantitats de X i Y consumides per tots dos individus esgoten les quantitats disponibles (és a dir, que $X^A + X^B = \bar{X}$ i que $Y^A + Y^B = \bar{Y}$) anem a construir el que es coneix com a *Caixa d'Edgeworth*. Per fer-ho, en primer lloc, girem el gràfic que representa el nivell d'utilitat assolit per l'individu B amb l'assignació de béns $Q_0 = (X^B_0, Y^B_0)$ com veiem a la figura 1. A continuació "encaixem" els dos gràfics de manera que $X^A_0 + X^B_0$ sigui

[5] Les condicions de primer ordre que hem derivat són condicions necessàries per a la maximització, i només són també suficients si es compleixen les condicions de segon ordre. Els supòsits fets sobre les formes de les funcions d'utilitat garanteixen el compliment d'aquestes condicions de segon ordre.

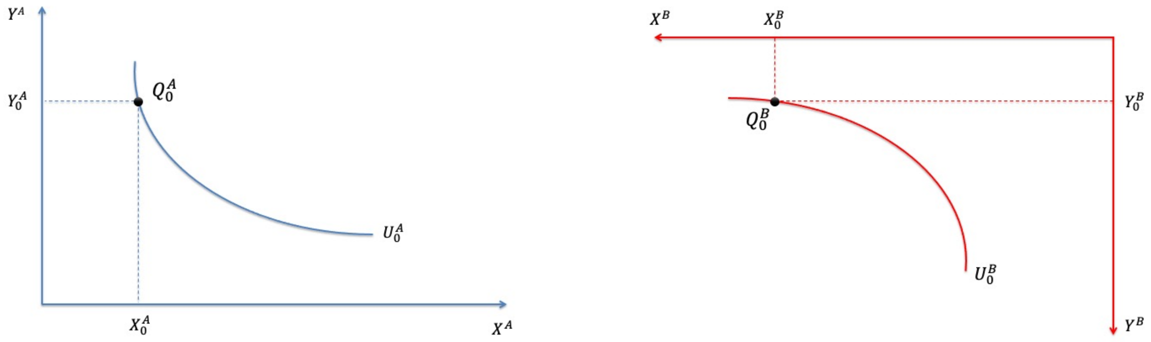


Figura 1: Construint la Caixa d'Edgeworth

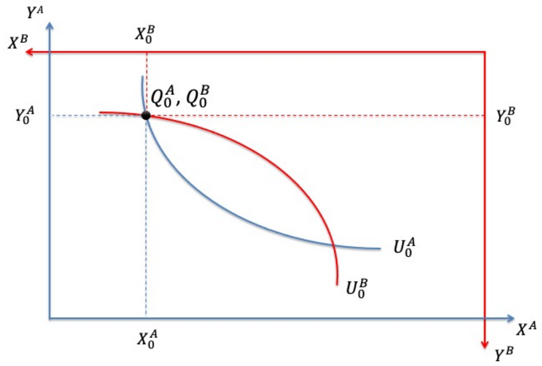


Figura 2: Caixa d'Edgeworth

la totalitat del bé X a repartir entre els dos individus i $Y_0^A + Y_0^B$ la totalitat del bé Y a repartir entre els dos individus. Així obtenim la figura 2.

Tal i com ens suggereix l'expressió (10), aquest repartiment dels béns X i Y segons el qual l'individu A consumeix X_0^A i Y_0^A i l'individu B consumeix X_0^B i Y_0^B no és eficient: les relacions marginals de substitució o taxa a què els individus estan disposats a intercanviar els béns no són iguals donat que el pendent de la corba d'indiferència de A a Q_0^A i de B a Q_0^B no coincideix. Com es veu a la figura 2, on les corbes d'indiferència es tallen, tenen pendent diferent. Clarament *és possible millorar el benestar d'un dels dos individus sense perjudicar l'altre.*

Per exemple, si traiem algunes unitats del bé Y a l'individu A i les donem a B, i traiem algunes unitats de X a B i les donem a A com està representat a l'equerra a

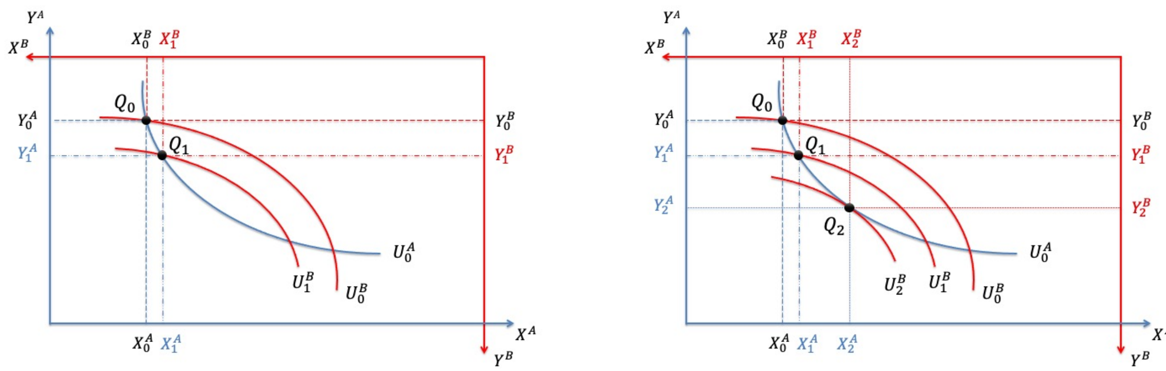


Figura 3: Construint la Caixa d'Edgeworth

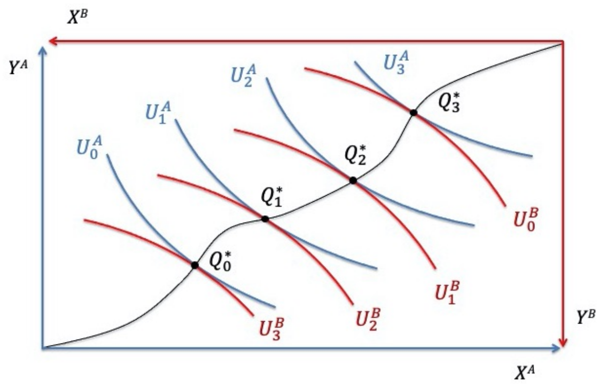


Figura 4: Corba de Contracte

la figura 3 passant de Q_0 a Q_1 clarament l'individu B accedeix a un nivell d'utilitat més alt per ell sense reduir la utilitat de A. Però la nova assignació continua no essent eficient en el sentit de Pareto, encara podem augmentar més la utilitat de B sense reduir la de A (de fet també podríem redistribuir els béns X i Y de manera que augmentés la utilitat de A sense reduir la de B).

Només quan les corbes d'indiferència són tangents, es toquen en un únic punt i tenen pendent igual, podem estar segurs que ja *no és possible augmentar el benestar d'un individu sense reduir el de l'altre*. És a dir, el repartiment dels béns serà eficient quan les relacions marginals de substitució, la valoració d'un bé en unitats de l'altre, sigui igual per als dos individus. Els punts on es compleix aquesta condició d'igualtat de les relacions marginals de substitució és la *corba de contracte*. Vegeu la figura 4.

2.2 Eficiència en la producció

Si abans hem considerat el problema de distribuir dos béns ja produïts entre dos individus, ara volem pensar en com distribuir els factors de producció, capital K i treball L, en dues activitats productives alternatives: produir X o produir Y. Per això suposem que hi ha dos processos productius que transformen K i L en els béns finals X i Y.

A l'apartat 2.1, la distribució dels béns eficient en el sentit de Pareto era tal que no era possible augmentar el benestar d'un individu sense reduir el benestar de l'altre. Ara, produir eficientment requerirà que no sigui possible augmentar la producció del bé Y sense reduir la producció de X. Notem que per produir X i Y cal fer servir capital K i treball L, anomenant K_i, L_i la quantitat de capital i treball que es fan servir a la indústria que produeix $i = X, Y$, i suposem que les funcions de producció dels dos béns, $X(K_X, L_X)$ i $Y(K_Y, L_Y)$, són creixents i estrictament còncaves en els factors de producció emprats. Hem de buscar com assignar els factors de producció per tal de maximitzar la quantitat de producte Y sense reduir la quantitat produïda de X, donada una quantitat màxima de factors $\bar{K}$ i $\bar{L}$.[6] Formalment, cal escollir K_Y, L_Y per tal de

$$Max \quad Y(K_Y, L_Y) \tag{P2}$$

$$\begin{aligned} \text{subjecte a } X(K_X, L_X) &\geq \bar{X} \\ K_X + K_Y &\leq \bar{K} \\ L_X + L_Y &\leq \bar{L} \end{aligned}$$

Com abans a l'apartat 2.1, podem reduir el problema a

$$Max \quad Y(K_Y, L_Y)$$

$$\text{subjecte a } X(\bar{K} - K_Y, \bar{L} - L_Y) = \bar{X}$$

usant les restriccions de factibilitat dels factors: $K_X = \bar{K} - K_Y$ i $L_X = \bar{L} - L_Y$. Escrivim el lagrangià:

$$\mathcal{L} = Y(K_Y, L_Y) + \lambda[X(\bar{K} - K_Y, \bar{L} - L_Y) - \bar{X}] \tag{11}$$

Calculem ara les condicions de primer ordre:

$$cpo(K_Y) : \frac{\partial Y}{\partial K_Y} - \lambda \frac{\partial X}{\partial K_X} = 0; \quad cpo(L_Y) : \frac{\partial Y}{\partial L_Y} - \lambda \frac{\partial X}{\partial L_X} = 0$$

[6] Igual que en el cas d'intercanvi, els papers de les dues empreses es podrien haver intercanviat i obtindríem la mateixa condició per l'eficiència.

Igualant les dues expressions a λ:

$$\frac{\partial Y/\partial K_Y}{\partial X/\partial K_X} = \lambda = \frac{\partial Y/\partial L_Y}{\partial X/\partial L_X},$$

i reorganitzant els termes, obtenim:

$$\frac{\partial Y/\partial L_Y}{\partial Y/\partial K_Y} = \frac{\partial X/\partial L_X}{\partial X/\partial K_X}$$

Si denotem com PM_k^j el producte marginal d'un bé j respecte un factor k, aquesta equació es pot escriure com:

$$\frac{PM_L^Y}{PM_K^Y} = \frac{PM_L^X}{PM_K^X}$$

Equivalentment:

$$\boxed{RMST_{LK}^Y = RMST_{LK}^X} \tag{12}$$

És a dir, perquè la producció sigui Pareto eficient cal que les relacions marginals de substitució tècnica entre treball i capital ($RMST_{LK}$) siguin iguals en les dues indústries, a part de la restricció de factibilitat dels dos factors productius. El concepte de $RMST_{LK}$ pel procés productiu d'un bé és l'equivalent a la RMS_{XY} comentat a l'apartat 2.1 però usant el concepte d'isoquanta de la funció de producció en comptes del de corba d'indiferència de l'individu, i els factors de producció en comptes dels béns X i Y.

La relació marginal de substitució tècnica tal com l'hem escrit és el pendent de la isoquanta, i representa diferents combinacions de factors que permeten produir una certa quantitat del bé. Indica a quantes unitats de capital hem de renunciar si augmentem en una unitat el treball i volem continuar produint el mateix. El que veiem és que, perquè la producció sigui eficient, cal que la taxa a la que les dues indústries poden substituir factors sense canviar la producció sigui la mateixa.

La Frontera de Possibilitats de Producció

Resoldre el Problema (P2) ens permet identificar el màxim de Y que podem produir donat $\bar{X}$, diem-li $\bar{Y}$. Amb aquest Y corresponent a cada X podem representar un punt sobre la Frontera de Possibilitats de Producció (FPP) (per exemple, vegeu concepte al llibre de Mankiw, 2008). Repetint la maximització (P2) per a tots els X possibles obtenim tota la FPP: $Y = F(X)$. Ho veiem a la figura 5.

En tots els punts de la FPP es compleix que s'esgoten els dos factors de producció i, a més, relacions marginals de substitució tècnica entre treball i capital són iguals en les dues indústries.

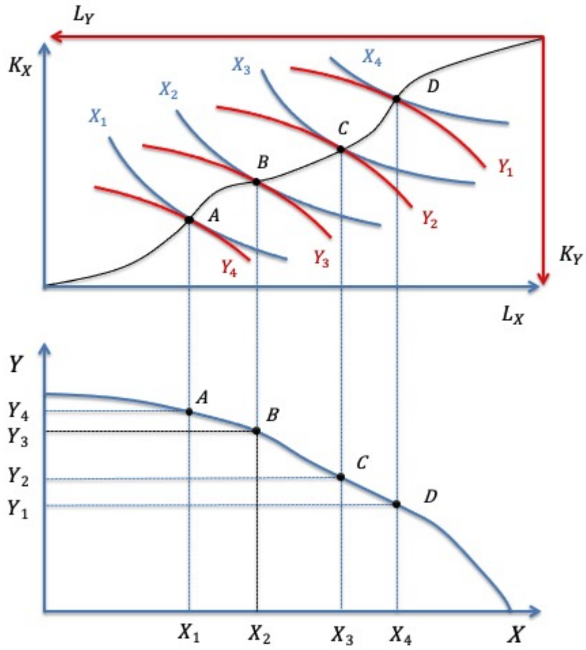


Figura 5: De la Corba de Contracte a la Frontera de Possibilitats de Producció

Havent estudiat d'una banda les implicacions de produir eficientment i, d'altra, les de repartir els béns de manera eficient, ens demanem per acabar les implicacions de produir i assignar simultàniament els béns de manera eficient.

2.3 Eficiència global

L'eficiència global requereix que no sigui possible augmentar el benestar de l'individu A sense reduir la utilitat de l'individu B, augmentar la produció de X o augmentar la producció de Y, quan l'economia gaudeix d'una quantitat de factors de producció L i K limitada.[7] Les variables de decisió són ara X^A, Y^A, X i Y, L_X, K_X i s'ha de decidir quant produir de cada bé i com repartir-lo entre els dos individus per tal de:

$$Max \quad U^A(X^A, Y^A) \tag{P3}$$

[7]Vegeu Maté García i Pérez Domínguez (2007, capítol 9). Al problema d'equilibri general, l'oferta de factors correspon als individus que ofereixen treball i capital (estalvis) a canvi de renda (Tresch, 2014, capítol 2).

$$
\begin{aligned}
\text{subjecte a} \quad U^B(X^B, Y^B) &\geqslant \bar{U}^B \\
X\left(K_X, L_X\right) &\geqslant X \\
Y\left(K_Y, L_Y\right) &\geqslant Y \\
X^A + X^B &= X \\
Y^A + Y^B &= Y \\
K_X + K_Y &= \bar{K} \\
L_X + L_Y &= \bar{L}
\end{aligned}
$$

Tenim ara un problema de maximització amb tres restriccions i ens calen doncs tres multiplicadors de lagrange que anomenem λ, μ i γ. Escrivim el lagrangià:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= U^A(X^A, Y^A) + \lambda[U^B(X - X^A, Y - Y^A) - \bar{U}^B] + \\
&\quad + \mu[X\left(K_X, L_X\right) - X] + \gamma[Y\left(\bar{K} - K_X, \bar{L} - L_X\right) - Y]
\end{aligned}
$$

Les condicions de primer ordre són:

$$
cpo(X^A) : \frac{\partial U^A}{\partial X^A} - \lambda \frac{\partial U^B}{\partial X^B} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial U^A / \partial X^A}{\partial U^B / \partial X^B} \tag{13}
$$

$$
cpo(Y^A) : \frac{\partial U^A}{\partial Y^A} - \lambda \frac{\partial U^B}{\partial Y^B} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial U^A / \partial Y^A}{\partial U^B / \partial Y^B} \tag{14}
$$

$$
cpo(X) : \lambda \frac{\partial U^B}{\partial X^B} - \mu = 0 \Rightarrow \frac{\partial U^A}{\partial X^A} = \mu \text{ (usant (13))} \tag{15}
$$

$$
cpo(Y) : \lambda \frac{\partial U^B}{\partial Y^B} - \gamma = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial U^A}{\partial Y^A} = \gamma \text{ (usant (14))} \tag{16}
$$

$$
cpo(K_X) : \mu \frac{\partial X}{\partial K_X} - \gamma \frac{\partial Y}{\partial K_Y} = 0 \tag{17}
$$

$$
cpo(L_X) : \mu \frac{\partial X}{\partial L_X} - \gamma \frac{\partial Y}{\partial L_Y} = 0 \tag{18}
$$

Ara combinem aquestes condicions de primer ordre de la manera seguent: de (13) i (14) obtenim que

$$
RMS^A_{XY} = RMS^B_{XY} \tag{19}
$$

Substituint la part dreta de (15) i (16) a (17) obtenim

$$
\frac{\partial U^A}{\partial X^A} \frac{\partial X}{\partial K_X} - \frac{\partial U^A}{\partial Y^A} \frac{\partial Y}{\partial K_Y} = 0
$$

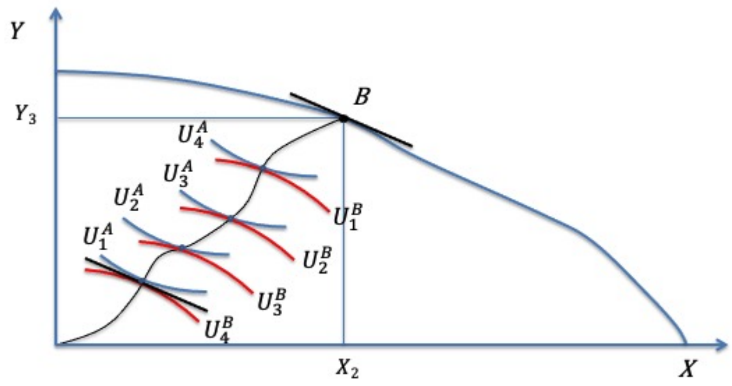


Figura 6: Eficiència Global

o

$$RMS^A_{XY} = \frac{\partial Y/\partial K_Y}{\partial X/\partial K_X}$$

i, de la mateixa manera de (18) obtenim

$$RMS^A_{XY} = \frac{\partial Y/\partial L_Y}{\partial X/\partial L_X}$$

Així, com que es compleix, també (19), la condició necessària i suficient per l'assoliment de l'eficiència global és, essent PM^X_L i PM^X_K el producte marginal de bé X respecte el treball i el capital, respectivament:

$$\boxed{RMS^A_{XY} = RMS^B_{XY} = \frac{PM^Y_K}{PM^X_K} = \frac{PM^Y_L}{PM^X_L}} \tag{20}$$

La Relació Marginal de Transformació entre X i Y

Recordem que la FPP és la combinació de productes X i Y eficient: $Y = F(X)$. La derivada de la Frontera de Possibilitats de Producció, $\partial F/\partial X$, es diu Relació Marginal de Transformació. Ens indica a quantes unitats de X hem de renunciar si volem produir una unitat més de Y de manera eficient, fixades les tecnologies i la quantitat total de factors de producció.

Escrivim ara la FPP com $Y(K_Y, L_Y) = F(X(K_X, L_X))$. Si, partint d'una situació eficient, augmentem K_Y, hem de reduir K_X perquè $K_X = \bar{K} - K_Y$. Diferenciant totalment la FPP veient que això té el següent efecte:

$$\frac{\partial Y}{\partial K_Y} = -\frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial K_X} \tag{21}$$

de manera que el pendent de la FPP, $\partial F/\partial X$, en valor absolut, és igual al rati de productes marginals PM_K^Y/PM_K^X.

Per aquest motiu, podem escriure la Condició d'Eficiència Global de l'equació (20) com:

$$\boxed{RMS_{XY}^A = RMS_{XY}^B = RMT_{XY}} \tag{22}$$

Perquè la producció i el repartiment dels béns sigui eficient, cal que els dos individus valorin i, per tant, estiguin disposats a pagar el mateix per consumir una unitat addicional de bé X i, a més aquesta valoració ha de coincidir amb el cost que s'ha d'incórrer (en termes de Y que s'ha de deixar anar) per produir aquesta unitat addicional de manera eficient.

És a dir, tots els individus estan disposats a pagar exactament el que costa produir el bé (ni més, que significaria que la producció hauria d'augmentar, perquè es valoraria més el bé del que costa produir-lo, ni menys, que voldria dir que els individus no estan disposats a pagar el que costa produir-lo i, per tant, la producció seria ineficient.)

La figura 6 representa aquesta situació d'eficiència global prenent com referència el punt B de la figura 5: donat X_2 el màxim de Y que es pot produir és Y_3. Aquestes quantitats determinen la mida d'una Caixa d'Edgeworth que ens mostra diferents repartiments del bé entre el dos individus que són eficients en l'intercanvi. De tots el punts sobre aquesta corba de contracte només un és eficient globalment: aquell en que les relacions marginals de substitució dels dos individus són iguals a la relació marginal de transformació, el pendent de la frontera de possibilitats de producció al punt B. De la mateixa manera podem identificar l'assignació globalment eficient corresponent al punt A, al C, al D, etc. de la figura 5 i, en general, qualsevol punt sobre la Frontera de Possibilitats de Producció.

La Frontera de Possibilitats d'Utilitat

Resoldre el problema de maximització global per a tots els $\overline{U}^B$ possibles ens dona la Frontera de Possibilitats d'Utilitat: $U^A = G(U^B)$. Aquesta corba representa el màxim d'utilitat que podem assignar a l'individu A donada la utilitat de B. En tots els punts de la Frontera de Possibilitats d'utilitat es compleix (22).

3 L'equilibri de mercat

Partint de l'apartat anterior, considerem ara el mercat competitiu dels dos béns X i Y, on tenim els dos consumidors A i B, i els dos productors, un de cada bé, que usen els dos factors de producció considerats havent-hi una quantitat total fixada $\bar{K}$ i $\bar{L}$. Anomenen aquest problema d'intercanvi amb producció. En el model d'equilibri general els propietaris de les empreses són els consumidors i és fonamental especificar com es reparteixen els beneficis per tal de calcular els preus d'equilibri. Tot i així, el repartiment de beneficis no afecta les condicions d'optimalitat en el marge i, per aquest motiu, prescindim d'aquest aspecte la importància del qual es posa de manifest a la resolució de l'exercici 7.

L'equilibri competitiu d'aquest mercat queda doncs definit per: (1) els preus d'intercanvi dels dos béns i dels factors de producció, (2) la distribució dels recursos productius entre els dos productors i la quantitat dels dos béns produïda, i (3) l'assignació de consum dels béns pels dos consumidors, de manera que (a) cada empresa i cada individu maximitzi el seu benestar subjecte a les respectives restriccions i (b) es buidin els mercats dels dos béns, és a dir, que la quantitat total demandada iguali la quantitat total oferta. Denotem com (p_X^*, p_Y^*) i (r^*, w^*) els preus d'equilibri dels béns i dels factors de producció, respectivament i denotem (K_X^*, L_X^*), (K_Y^*, L_Y^*), (X^*, Y^*), (X^{A^*}, Y^{A^*}), (X^{B^*}, Y^{B^*}), l'assignació tant de factors com dels béns produïts i consumits corresponent a un equilibri competitiu.[8]

Previ a l'estudi de les condicions que determinen l'equilibri competitiu d'aquest mercat d'intercanvi amb producció que comentem a l'apartat 3.3, analitzem-ne dos casos particulars: les economies d'intercanvi pur i el mercat de factors definits als apartats 3.1 i 3.2, respectivament.

3.1 Economia d'intercanvi pur

Considerem una economia d'intercanvi pur, és a dir, on no hi ha producció i suposem que els consumidors tenen dotacions inicials de cada bé, i les totals representen la quantitat total oferta: $w_X^A + w_X^B = \bar{X}$ i $w_Y^A + w_Y^B = \bar{Y}$. L'equilibri en aquest mercat consisteix en determinar els preus dels béns, (p_X^*, p_Y^*), i les quantitat consumides dels dos béns per part dels consumidors A i B: (X^{A^*}, Y^{A^*}), (X^{B^*}, Y^{B^*}). Com requereix el concepte d'equilibri competitiu cal que es buidin els mercats dels béns X i Y i que

[8] Per definicions més precises d'aquests conceptes, vegeu Varian (1992) i Villar (1999) i Mas Colell, Whinston i Green (1992) per un nivell més avançat.

els consumidors maximitzin la seva utilitat subjecte a una restricció pressupostària donats els preus dels béns i la seva renda: no poden gastar més que el que tenen. A la caixa d'Edgeworth, la renda de l'individu A, R^A, ve donada pel valor a preus de mercat de les dotacions inicials de cada bé que té l'individu. És a dir, $R_A = p_X\omega_X^A + p_Y\omega_Y^A$ essent ω_X^A i ω_Y^A les dotacions inicials de bé X i Y que té l'individu A, i p_X i p_Y els preus de mercat dels béns.

És a dir, l'individu A escull X^A i Y^A per tal de

$$\begin{gathered} Max \quad U^A(X^A, Y^A) \\ \text{subjecte a } p_X X^A + p_Y Y^A \leq R^A = p_X\omega_X^A + p_Y\omega_Y^A \end{gathered} \tag{P4}$$

Com que els individus volen maximitzar la seva utilitat i aquesta és creixent en el consum de cada bé sempre gastaran tota la seva renda. Per tant, podem substituir

$$\boxed{Y^A = \frac{R^A - p_X X^A}{p_Y}} \tag{23}$$

a $U^A(X^A, Y^A)$. Aleshores, l'individu maximitza

$$U^A\left(X^A, \frac{R^A - p_X X^A}{p_X}\right)$$

on l'única variable de decisió és X^A (la restricció pressupostària automàticament determina Y^A). Derivant i aplicant la regla de la cadena, obtenim:

$$cpo(X^A): \frac{\partial U^A}{\partial X^A} - \frac{\partial U^A}{\partial Y^A}\frac{p_X}{p_Y} = 0$$

i reorganitzant els termes

$$\boxed{\frac{p_X}{p_Y} = RMS_{XY}^A} \tag{24}$$

Alternativament, podem escriure el lagrangià

$$\mathcal{L} = U^A(X^A, Y^A) + \lambda[R^A - p_X X^A - p_Y Y^A]$$

i escrivim les condicions de primer ordre:

$$cpo(X^A): \frac{\partial U^A}{\partial X^A} - \lambda p_X = 0; \qquad cpo(Y^A): \frac{\partial U^A}{\partial Y^A} - \lambda p_Y = 0$$

$$cpo(\lambda): R^A = p_X X^A + p_Y Y^A$$

Aïllant la λ de les dues primeres equacions i igualant, obtenim també (23) i (24).

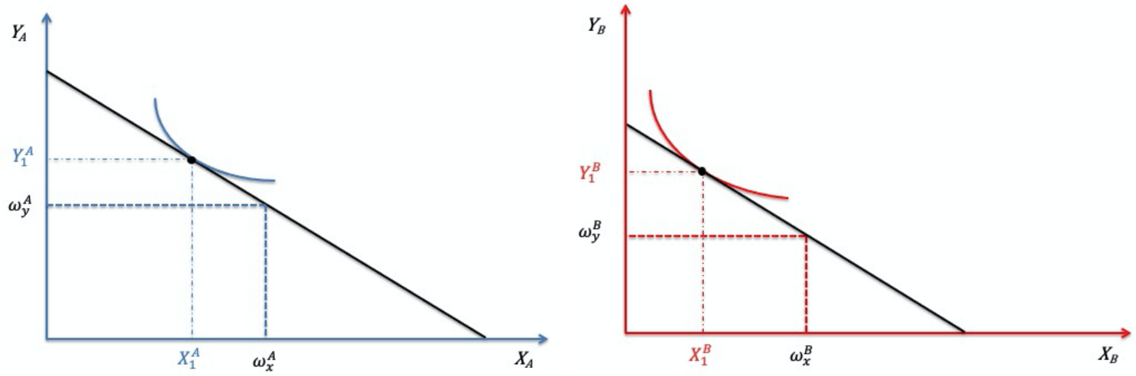


Figura 7: A i B maximitzen la seva utilitat donats preus i rendes/dotacions inicials

Si fem el mateix amb l'individu B, tenim:

$$\boxed{Y^B = \frac{R^B - p_X X^B}{p_Y}} \tag{25}$$

$$\boxed{\frac{p_X}{p_Y} = RMS^B_{XY}} \tag{26}$$

Noteu que el fet que p_X i p_Y siguin els mateixos per als dos individus i que de les equacions (24) i (26) s'obtingui que $RMS^A_{XY} = RMS^B_{XY}$, no garanteix que el repartiment de X i Y sigui el d'equilibri. Cal també que les demandes siguin compatibles i buidin el mercat, és a dir cal que:

$$\boxed{X^{A*} + X^{B*} = \bar{X}} \tag{27}$$

$$\boxed{Y^{A*} + Y^{B*} = \bar{Y}} \tag{28}$$

Així doncs, cal que p_X i p_Y siguin *preus d'equilibri*. Recordeu que sempre que els preus no siguin d'equilibri hi haurà un excés de demanda i/o un excés d'oferta que provocaran l'ajustament dels preus fins arribar a l'equilibri.

Per veure això, considereu la figura 7, on tenim dos individus A i B que s'enfronten als mateixos preus (les restriccions pressupostàries tenen pendent igual) però amb dotacions incials/rendes diferents. L'individu A maximitza la seva utilitat al punt (X_1^A, Y_1^A) i l'individu B maximitza la seva utilitat al punt (X_1^B, Y_1^B).

A la figura 8, construïm com abans la caixa d'Edgeworth, tenint en compte que la suma de les dotacions inicials del bé X constitueixen la totalitat del bé X a l'economia $(w_x^A + w_x^B = \bar{X})$ i el mateix passa amb Y $(w_y^A + w_y^B = \bar{X})$. Clarament, la demanda de bé Y per part dels dos individus és superior a la quantitat disponibe d'aquest bé.

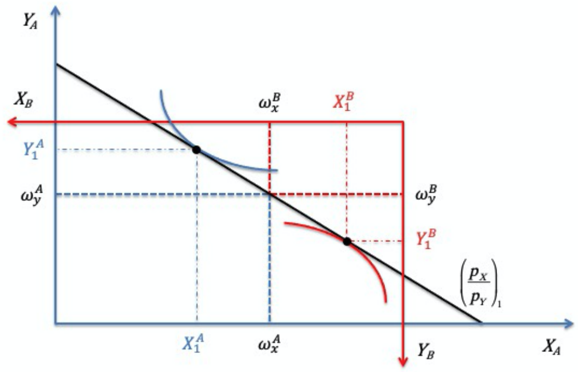


Figura 8: A i B maximitzen utilitats però els preus no són de equilbri

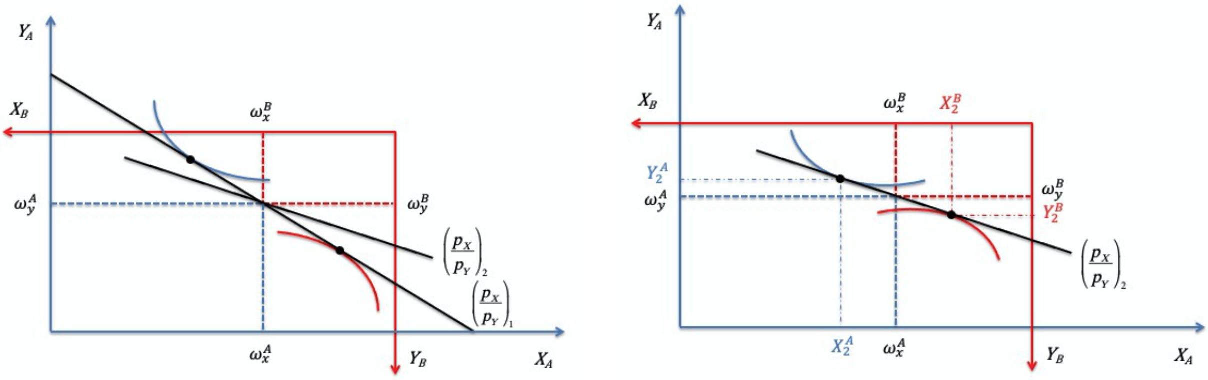


Figura 9: Els preus s'ajusten per a buidar els mercats

En canvi, sobren unitats de X que ningú no vol consumir. Aquesta situació no pot ser un equilibri.

Com sabem de cursos anteriors, l'excés de demanda de Y farà pujar el preu de Y i l'excés d'oferta de X farà baixar el preu de X. El pendent de la restricció pressupostària p_X/p_Y cau com veiem a la part esquerra de la figura 9. Cada individu torna a maximitzar la seva utilitat donats els nous preus. A la dreta de la figura 9 els mercats encara no es buiden. Encara hi ha excés de demanda d'Y i excés d'oferta de X. Els preus tornen a canviar... A la figura 10 ja sí tenim la situació d'equilibri.

Per acabar convé notar que, tal com apliquem en els exercicis, per la llei de Walras el buidat d'un mercat generalment assegura el buidat de l'altre (vegeu el capítol 7 del Varian, 1992). Per aquest motiu, comptem amb una equació menys per a resoldre l'equilibri i no podem determinar en general els preus nominals p_X^*, p_Y^* sinó que només el preu relatiu d'equilibri dels dos béns $p_R^* = \frac{p_X^*}{p_Y^*}$.

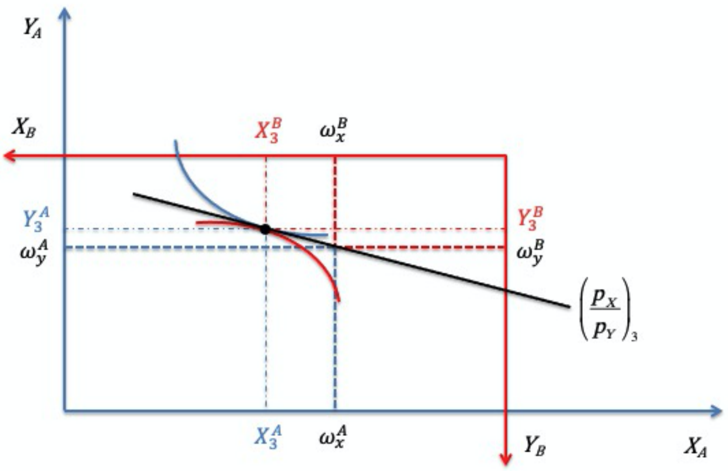


Figura 10: Els preus s'ajusten per buidar els mercats

3.2 Mercat de factors

Considerem el problema de mercat de factors, semblant a l'intercanvi pur en el sentit que ara ens centrem en la demanda dels factors de producció essent la seva oferta fixada en $\bar{K}$ i $\bar{L}$, i els preus dels béns X i Y fixats i coneguts per les empreses $\bar{p}_X$ i $\bar{p}_Y$. L'equilibri en aquest mercat consisteix en determinar els preus dels factors productius, (r^*, w^*), la quantitat produïda dels béns, X^*, Y^*, i per cada empresa les quantitats consumides dels dos factors: (K_X^*,L_X^*) i (K_Y^*,L_Y^*), de manera que cada empresa escull la combinació de factors que maximitza el benefici donada la seva restricció tecnològica. Formalment, per l'empresa productora de X:

$$Max\, B_X = \bar{p_X} X - rK_X - wL_X \tag{P5}$$

$$\text{subjecte a } X \leq X(K_X, L_X)$$

Per centrar-nos en la demanda de factors, substituïm $X(K_X, L_X)$ a B_X i $Y(K_Y, L_Y)$ a B_Y ja que la quantitat de X que farà màxim el benefici és la que permet la tecnologia. Llavors per cada empresa tindrem dues variables de decisió: L_X, K_X i L_Y, K_Y, respectivament. Comencem per l'empresa que produeix X:

$$Max_{L_X,K_X}\, B_X = \bar{p}_X X(K_X, L_X) - rK_X - wL_X$$

Les condicions de primer ordre són:

$$cpo(L_X) : \bar{p}_X \frac{\partial X}{\partial L_X} = w$$

$$cpo(K_X) : \bar{p}_X \frac{\partial X}{\partial K_X} = r$$

que també podem escriure:

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial L_X} = \frac{w}{\bar{p}_X}} \tag{29}$$

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial K_X} = \frac{r}{\bar{p}_X}} \tag{30}$$

Fent el mateix per l'altra empresa productora de Y, s'obté,

$$\boxed{\frac{\partial Y}{\partial L_Y} = \frac{w}{\bar{p}_Y}} \tag{31}$$

$$\boxed{\frac{\partial Y}{\partial K_Y} = \frac{r}{\bar{p}_Y}} \tag{32}$$

Un cop més, perquè les decisions de les empreses constitueixin un equilibri, els preus dels factors w i r han de ser tals que els mercats de factors es buidin:

$$\boxed{L_X + L_Y = \bar{L}} \tag{33}$$

$$\boxed{K_X + K_Y = \bar{K}} \tag{34}$$

3.3 Intercanvi amb producció

Usant la definició d'equilibri donada a l'inici d'aquest apartat, noteu que la decisió òptima dels consumidors és la mateixa que a les economies d'intercanvi i queda definida per les equacions (23) i (24) pel consumidor A i les equacions (25) i (26) pel consumidor B.

Pel que fa a les empreses, la seva decisió de maximització de beneficis és semblant a la de l'apartat anterior però, ara, p_X i p_Y són variables a determinar com a part de l'equilibri. Per enfatitzar que el problema es pot resoldre també per Lagrange, tornem a plantejar el problema de maximització de beneficis per les empreses però usant el Lagrangià i introduint X i Y com variables de decisió. Es pot observar que obtenim les mateixes equacions.[9] Per l'empresa productora de X escrivim ara el problema de maximització usant el Lagrangià i amb variables de decisió L_X, K_X, X i μ:

$$\mathcal{L} = p_X X - rK_X - wL_X + \mu[X(K_X, L_X) - X]$$

[9] Les equacions (29), (30), (31), (32), (33) i (34) coincideixen amb les (36), (37), (39), (40), (41) i (42).

$$cpo(\mu): \boxed{X(K_X, L_X) = X} \tag{35}$$

$$cpo(L_X): -w + \mu \frac{\partial X}{\partial L_X} = 0$$

$$cpo(K_X): -r + \mu \frac{\partial X}{\partial K_X} = 0$$

$$cpo(X): \; p_X - \mu = 0$$

Aïllant μ de la segona i la tercera equació i substituint a l'última, obtenim:

$$\boxed{p_X = \frac{w}{PM_L^X}} \tag{36}$$

$$\boxed{p_X = \frac{r}{PM_K^X}} \tag{37}$$

recordant que PM_L^X i PM_K^X denota el producte marginal de bé X respecte el treball i el capital, respectivament.

Fent el mateix per l'altra empresa productora de Y, s'obté,

$$\boxed{Y(K_Y, L_Y) = Y} \tag{38}$$

$$\boxed{p_Y = \frac{w}{PM_L^Y}} \tag{39}$$

i,

$$\boxed{p_Y = \frac{r}{PM_K^Y}} \tag{40}$$

Un cop més, perquè les decisions de les empreses constitueixin un equilibri, els preus dels factors w i r han de ser tals que els mercats de factors es buidin:

$$\boxed{L_X + L_Y = \bar{L}} \tag{41}$$

$$\boxed{K_X + K_Y = \bar{K}} \tag{42}$$

Addicionalment, les condicions de buidat de mercat dels béns X i Y ens permeten determinar els seus preus obtenint unes condicions com les de les equacions (27) i (28), on $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ són ara les quantitats ofertades per les empreses.

$$\boxed{X^{A*} + X^{B*} = X}$$

$$\boxed{Y^{A*} + Y^{B*} = Y}$$

4 Els teoremes fonamentals de l'economia del benestar

Els teoremes fonamentals de l'economia del benestar estableixen una relació entre les assignacions eficients i les corresponents a un equilibri. Enunciem aquests resultats adaptats a la nostra economia en mercats perfectament competitius (és a dir, els individus i les empreses són preu-acceptants).

4.1 Primer Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar

> Considereu les economies d'intercanvi, producció i intercanvi amb producció definides en els apartats 2 i 3. L'assignació corresponent a un equilibri és Pareto eficient.

Per demostrar el teorema per la nostra economia i pels casos particulars dels apartats 3.1 i 3.2, cal comprovar que si una assignació satisfà les condicions per formar part d'un equilibri també satisfà aquelles condicions per assolir el concepte d'eficiència corresponent. Per economies d'intercanvi, en equilibri es compleixen les equacions (24) i (26), per tant, obtenim l'equació (10) que correspon a la condició d'eficiència de l'apartat 2.1. En el mercat de factors, observeu que dividint les equacions (29) per (30) i (31) per (32), obtenim, respectivament

$$RMST_{LK}^{X} = \frac{w}{r} \tag{43}$$

$$RMST_{LK}^{Y} = \frac{w}{r} \tag{44}$$

I les equacions (43) i (44) impliquen (12) que és la condició d'eficiència productiva. Per economies d'intercanvi amb producció només cal ajuntar els arguments que acabem de fer més amunt per economies d'intercanvi amb els següents arguments considerant els preus dels béns X i Y com variables. En equilibri i des del punt de vista de les empreses es compleixen les equacions (36), (37), (39) i (40) de les quals obtenim part de l'equació (12), que és la condició d'eficiència global de l'apartat 2.3. Concretament, dividint les equacions (36) per (39) i (37) per (40) arribem a la següent equació:

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{PM_L^Y}{PM_L^X} = \frac{PM_K^Y}{PM_K^X}$$

Ajuntant-hi la condició obtinguda del comportament òptim dels individus A i B obtenim eficiència global.

La importància d'aquest teorema radica en que, si es compleix, el comportament egoïsta del agents econòmics, que persegueixen els seus propis objectius de manera independent, portaria a una utilització eficient dels recursos econòmics. Adam Smith deia "No és de la benevolència del carnisser, cerveser o forner d'on obtindrem el nostre sopar, sinó de la seva preocupació pels seus propis interessos". Ell parlava del mercat com una *mà invisible* que feia que la societat sencera es beneficiés de l'egoïsme particular.

No hem de subestimar el poder del mercat com a mecanisme d'assignació de recursos. Penseu en tota la informació necessària per assolir l'eficiència en una economia centralitzada: les preferències dels individus, les funcions de producció, ... El mercat és un mecanisme d'autoregulació molt eficaç quan funciona bé, només cal deixar cadascú actuar lliurement. Però també hem de ser conscients que els mercats no sempre funcionen com descriu el teorema.

De fet, per demostrar el teorema hem fet certes hipòtesis que potser ens han passat desapercebudes però són tan importants que, sense elles, deixa de ser cert que la interacció dels agents econòmics actuant lliurement als mercats porti l'economia a una situació eficient en el sentit de Pareto. Aquestes hipòtesis són:

Hipòtesis de competència perfecta

Hem fet aquesta hipòtesi quan hem suposat que tots els agents econòmics són *preu-acceptants*. Cap d'ells, ni consumidors, ni empreses, tenen capacitat per influenciar els preus d'intercanvi. Quan aquesta hipòtesi no es compleix es produeix una *errada de mercat* anomenada *poder de mercat*. Quan hi ha poder de mercat, l'equilibri de mercat pot no ser eficient.

Hipòtesis de rivalitat i exclusió

Hem fet la hipòtesi de *rivalitat* quan hem suposat que l'increment de consum/utilització de factors en una unitat per part d'un consumidor/empresa redueix en una unitat la quantitat disponible per la resta de consumidor i empreses. D'altra banda, hem fet la hipòtesi d'*exclusió* quan hem suposat que només es pot utilitzar un bé o factor si es paga per ell. Quan aquestes hipòtesis no es compleixen estem en presència de *béns públics* o *externalitats*, que també són *errades de mercat*. En presència de béns públics o externalitats, ja no podem assegurar que l'equilibri de mercat sigui eficient.

Hipòtesis d'informació completa

Hem fet aquesta hipòtesis quan hem suposat que tota la informació que necessiten els agents econòmics per prendre decisions que els permetin assolir els seus objectius està als preus i que aquesta informació està disponible per a tothom a cost zero. Aquesta hipòtesis no es compleix, per exemple si la informació que tenen comprador i venedor d'un cert bé que volen intercanviar no és la mateixa. En aquest cas estem en presència d'*informació asimètrica*. La presència d'informació asimètrica és una errada de mercat que fa que l'equilibri no sigui en general eficient.

4.2 Segon Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar

Considereu les economies d'intercanvi i intercanvi amb producció definides en els apartats 2 i 3. Qualsevol assignació Pareto eficient és una assignació corresponent a un equilibri per uns preus determinats i una certa distribució de la riquesa.

Aquest teorema estableix que, de tots els possibles resultats eficients en el sentit de Pareto, que com hem vist són molts, és possible arribar a un en particular mitjançant una distribució determinada de les dotacions inicials i l'ajustament automàtic dels preus al mercat.

Per escollir una assignació eficient en particular cal ser més precís respecte al que és dessitjable des del punt de vista del benestar social. Necessitem fer explícits els judicis de valor a adoptar sobre la justícia de la distribució de la utilitat. En Economia del Benestar, la manera convencional de fer això és postular una Funció de Benestar Social (FBS) que transforma els nivells de benestar individual en benestar social. Igual que el benestar d'un individu depén de les quantitats de béns que consumeix, el benestar social depén de les utilitats dels membres de la societat. Diferents formes funcionals de la funció $W(U^A, U^B)$ implicara diferents graus d'*aversió per la desigualtat* i implicaran diferents *assignacions òptimes*.

Funcions de benestar social

Per exemple, la *funció de benestar social utilitarista pura* és la simple suma de les utilitats individuals $U^A + U^B$. Es diu que aquesta funció mostra indiferència cap a la redistribució de la utilitat perquè el benestar resultant és igual si $U^A = U^B = 50$, o si $U^A = 0$ i $U^B = 100$: l'única cosa que importa és la suma de les utilitats.[10]

Per contra, la funció de benestar social que presenta una més gran aversió per la desigualtat és la *funció de benestar social Rawlsiana* que adopta el criteri maximin (maximitzar la utilitat del individu més desafavorit). Fixeu-vos que fins que aquest individu més desafavorit no tingui la mateixa utilitat que l'altre, el més afavorit, tota la redistribució de béns i factors haurà de ser cap a ell.

Un cop la societat o el planificador social o el polític han decidit quina és l'assignació més justa, no podem esperar que el mercat ens porti automàticament cap a ella. Però gràcies al Segon Teorema sabem que si redistribuïm adequadament les dotacions indicials, llavors el mecanisme de mercat sí ens pot ajudar.

Tot i així, per al compliment del Segon Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar és necessari que *la redistribució de les dotacions inicials no distorsioni el funcionament dels mercats*. Perquè això sigui possible, tots els consumidors i productors han d'enfrontar-se als mateixos preus relatius. En general, els impostos i transferències distorsionen les decisions econòmiques provocant que diferents agents econòmics s'enfrontin a preus diferents pels mateixos béns o factors (Tresch, 2014).

Impostos de suma fixa

La redistribució que ens ha de portar a l´òptim social ha de ser de suma fixa: la quantitat del bé o factor redistribuïda no ha de variar amb les decisions econòmiques dels consumidors i els productors (Tresch, 2014). Per exemple un impost basat en el grup sanguini de cada persona. Clarament, amb un impost d'aquesta mena, les quantitats a pagar són fixes d'acord amb el criteri establert i no hi ha res que els contribuents puguin fer per haver de pagar menys. En canvi les quantitats recaptades per un impost sobre el consum del bé X dependran de les quantitats consumides del bé X i aquestes sí es poden canviar.

Si la redistribució no es fa amb impostos de suma fixa, el mercat fracassarà en portar l'economia cap a una assignació eficient.

[10]Per aquest motiu, podem obtenir també les assignacions eficients buscant les combinacions de béns que maximitzen la suma de les utilitat de A i B subjecte a les corresponents restriccions de factibilitat o producció eficient. Vegeu, per exemple, el capítol 17.8 del Varian (1992) i el capítol 7 del Villar (1999) per economies d'intercanvi (un argument equivalent es pot fer per economies de producció) i mireu el capítol 18.7 del Varian (1992) per l'eficiència global.

5 Exercicis

En aquest apartat proposem exercicis centrant-nos en economies definides en aquest document (veure apartats 2 i 3). Primer, ens centrem en una economia d'intercanvi pur, és a dir, on no hi ha producció i les dotacions inicials totals de cada bé representen la quantitat total oferta $w_X^A + w_X^B = \bar{X}$ i $w_Y^A + w_Y^B = \bar{Y}$. En segon lloc, considerem el mercat de factors quan només tenim les empreses i la quantitat total de factors ve donada. Finalment, unim els dos mercats anteriors i considerem una economia amb consum i producció fent explícita la propietat de les empreses per part dels consumidors. En aquests exercicis busquem tant assignacions eficients com d'equilibri i les relacionem mitjançant els teoremes de l'economia del benestar.

Exercici 1

[*Problema 6.3, Villar, adaptat*] Considereu una economia d'intercanvi pur amb dos consumidors, A i B, i dos béns X i Y. Les dades de l'economia són les següents:

Consumidor A: la funció d'utilitat és $U^A(X^A, Y^A) = X^A Y^A$, i les dotacions inicials de cada bé són $w^A = (w_X^A, w_Y^A) = (4, 6)$.

Consumidor B: la funció d'utilitat és $U^B(X^B, Y^B) = \ln X^B + \ln Y^B$, i les dotacions inicials de cada bé són $w^B = (w_X^B, w_Y^B) = (6, 4)$.

(i) Calculeu les assignacions Pareto eficients.

(ii) Calculeu l'equilibri competitiu d'aquesta economia.

(iii) Demostreu que es compleix el primer teorema fonamental de l'economia del benestar.

SOLUCIÓ

(i) Obtenim les assignacions Pareto eficients igualant les relacions marginals de substitució dels dos consumidors i imposant factibilitat dels dos béns:

$$\frac{Y^A}{X^A} = \frac{Y^B}{X^B} \tag{1a}$$

$$X^A + X^B = 10, \text{ i} \tag{1b}$$

$$Y^A + Y^B = 10 \tag{1c}$$

Noteu que $\bar{X} = w_X^A + w_X^B = 4 + 6$ i $\bar{Y} = w_Y^A + w_Y^B = 6 + 4$. Aïllant X^B i Y^B de les equacions (1b) i (1c), respectivament, i substituint-les a (P2) obtenim

$Y^A\left(10-X^A\right)=X^A\left(10-Y^A\right)$ que és equivalent a $Y^A=X^A$ i denota el conjunt d'assignacions eficients. En aquest cas, la diagonal de la caixa d'Edgeworth incloent els dos vèrtex de decisió de A i B.

(ii) Sigui el preu relatiu $p_R=\frac{p_X}{p_Y}$.

Consumidor A: de la condició $RMS^A_{XY}(X^A,Y^A)=p_R$ i la restricció pressupostària $p_RX^A+Y^A=4p_R+6$ obtenim les funcions de demanda de A:

$$X^A(p_R)=\frac{3+2p_R}{p_R} \tag{1d}$$

$$Y^A(p_R)=3+2p_R \tag{1e}$$

Consumidor B: de la condició de $RMS^B_{XY}(X^B,Y^B)=p_R$ i la restricció pressupostària $p_RX^B+Y^B=6p_R+4$, obtenim les funcions de demanda de B:

$$X^B(p_R)=\frac{2+3p_R}{p_R} \tag{1f}$$

$$Y^B(p_R)=2+3p_R \tag{1g}$$

La condició de buidat de mercat del bé Y és:

$$3+2p_R+2+3p_R=10 \tag{1h}$$

De l'equació (1h) obtenim que els preus relatius d'equilibri són $p_R^*=1$. Substituint p_R^* a la resta d'equacions obtenim que l'assignació en l'equilibri sigui $X^{A*}=Y^{A*}=X^{B*}=Y^{B*}=5$.

(iii) En aquest mercat de béns i factors perfectament competitius i donades les propietats de les funcions d'utilitat, les funcions de producció i els conjunts de consum i producció es compleix el primer teorema fonamental de l'economia del benestar. Observeu que l'assignació corresponent a l'equilibri, $(X^{A*},Y^{A*})=(X^{B*},Y^{B*})=(5,5)$, compleix la condició d'eficiència de Pareto: $X^{A*}=Y^{A*}$ i $X^{B*}=Y^{B*}$.

Exercici 2

[*Problema 6.4, Villar, adaptat*] Considereu una economia d'intercanvi pur amb dos consumidors, A i B, i dos béns X i Y. Les dades de l'economia són les següents:

Consumidor A: $U^A(X^A,Y^A)=\alpha\ln X^A+\ln Y^A$, $w^A=(w^A_X,w^A_Y)=(0,1)$.

Consumidor B: $U^B(X^B,Y^B)=\min\{X^B,Y^B\}$, $w^B=(w^B_X,w^B_Y)=(1,0)$.

Calculeu l'equilibri competitiu d'aquesta economia i les assignacions Pareto eficients.

SOLUCIÓ

Sigui el preu relatiu $p_R = \frac{p_X}{p_Y}$.

Consumidor A: de la condició de $RMS^A_{XY}(X^A, Y^A) = \alpha\frac{Y^A}{X^A} = p_R$ i la restricció pressupostària $p_R X^A + Y^A = 1$, obtenim les funcions de demanda de A:

$$X^A(p_R) = \frac{\alpha}{(\alpha+1)\, p_R}, \text{ i} \tag{2a}$$

$$Y^A(p_R) = \frac{1}{1+\alpha} \tag{2b}$$

Consumidor B: la maximizació de la utilitat d'un individu amb preferències Leontieff ens diu que en l'òptim $X^B = Y^B$ i la restricció pressupostària és $p_R X^B + Y^B = p_R$. D'aquestes dues equacions obtenim les funcions de demanda de B:

$$X^B(p_R) = Y^B(p_R) = \frac{p_R}{1+p_R} \tag{2c}$$

La condició de buidat de mercat del bé 1 és:

$$X^A(p_R) + X^B(p_R) = 1 \tag{2d}$$

Substituint les condicions de les equacions (2a) i (2c) a (2d) obtenim

$$\frac{p_R}{1+p_R} + \frac{\alpha}{(\alpha+1)\, p_R} = 1 \Rightarrow p_R^* = \alpha$$

i substituint p_R^* a la resta d'equacions obtenim que l'assignació de l'equilibri és

$$X^{A*} = Y^{A*} = \frac{1}{1+\alpha}, \text{ i}$$

$$X^{B*} = Y^{B*} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

En el nostre exemple, la utilitat de l'individu B no és derivable donat que és Leontieff. Així doncs, calculem les assignacions eficients gràficament: són aquelles en les que coincideixen els vèrtexs de les corbes d'indiferència de l'individu Leontieff (és a dir, $X^B = Y^B$) ja que en qualsevol altre punt hi ha possibilitats d'intercanvi.

Exercici 3

[*Problema 7.5, Villar, adaptat*] Considereu una economia d'intercanvi pur amb els dos béns i dos consumidors. Les característiques dels consumidors són les següents: $w^A = w^B = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $U^A(X^A, Y^A) = 2\sqrt{X^A Y^A}$, $U^B(X^B, Y^B) = 2\sqrt{X^B} + 2\sqrt{Y^B}$.

(i) Obtingueu una assignació Pareto eficient que no sigui un equilibri competitiu.

(ii) Obtingueu l'assignació anterior com un equilibri competitiu, mitjançant una adequada redistribució de les dotacions inicials.

(iii) Qué heu comprovat a l'apartat (ii)?

SOLUCIÓ

(i) El conjunt d'assignacions eficients són aquelles tals que $RMS^A_{XY} = RMS^B_{XY}$. Com que $RMS^A_{XY} = \frac{Y^A}{X^A}$ i $RMS^B_{XY} = (\frac{Y^B}{X^B})^{\frac{1}{2}}$ les assignacions eficients són tals que

$$Y^A(3 - X^A)^{\frac{1}{2}} = X^A(1 - Y^A)^{\frac{1}{2}}$$

Calculem ara quin és l'equilibri en aquesta economia. Sigui $p_R = \frac{p_X}{p_Y}$.

Consumidor A: de la condició de $RMS^A_{XY}(X^A, Y^A) = p_R$ i la restricció pressupostària $p_R X^A + Y^A = \frac{3}{2}p_R + \frac{1}{2}$, obtenim les funcions de demanda de l'individu A:

$$X^A(p_R) = \frac{3p_R + 1}{4p_R} \tag{3a}$$

$$Y^A(p_R) = \frac{1 + 3p_R}{4} \tag{3b}$$

Consumidor B: de la condició $RMS^B_{XY} = p_R$ i la restricció pressupostària $p_R X^B + Y^B = \frac{3}{2}p_R + \frac{1}{2}$, obtenim les funcions de demanda de B:

$$X^B(p_R) = \frac{1 + 3p_R}{2p_R(1 + p_R)} \tag{3c}$$

$$Y^B(p_R) = \frac{p_R(1 + 3p_R)}{2(1 + p_R)} \tag{3d}$$

Tal com hem comentat a l'apartat 3.1, imposar el buidat d'un mercat implica que es buida l'altre. Per tant, només ens centrem en un, per exemple el X. La condició de buidat de mercat del bé X és:

$$X^A(p_R) + X^B(p_R) = 3 \tag{3e}$$

Sustituint les equacions (3a) i (3c) a (3e) obtenim

$$\frac{1 + 3p_R}{2p_R(1 + p_R)} + \frac{3p_R + 1}{4p_R} = 3$$

En manipular aquesta equació amb una única incògnita p_R obtenim una equació de tercer grau: $p_R\ (18(p_R)^2 + 4p_R - 6) = 0$. Com $p_R \neq 0$ només tenim com solució la positiva de les dues de l'equació de segon grau $18(p_R)^2 + 4p_R - 6 = 0$: $p_R^* = \frac{-1+\sqrt{28}}{9} \sim 0,476833624$. L'assignació d'equilibri l'obtenim substituint els preus relatius per p_R^* a les equaciones (3a), (3b), (3c) i (3d): $X^{A*} = 1,274$, $Y^{A*} = 0,608$, $X^{B*} = 1,726$ i $Y^{B*} = 0,392$.

D'altra banda, una assignació eficient és tal que $RMS_{XY}^A = RMS_{XY}^B$, o $\frac{Y^A}{X^A} = (\frac{Y^B}{X^B})^{\frac{1}{2}}$. Una assignació que compleix la condició d'eficiència però no correspon a l'assignació en equilibri obtinguda és $X^{A'} = 2$, $Y^{A'} = 0,83$, $X^{B'} = 1$ i $Y^{B'} = 0,17$ ja que $0,83/2$ és aproximadament $(0,17)^{1/2}$.

(ii) Anem a determinar el vector de dotacions inicials (w^A, w^B), on $w_X^A + w_X^B = 3$ i $w_Y^A + w_Y^B = 1$ perquè $((X^{A'}, Y^{A'}), (X^{B'}, Y^{B'}))$ sigui una assignació d'equilibri. La condició $RMS_{XY}^A = p_R$, és a dir, $\frac{Y^{A'}}{X^{A'}} = p_R$ ens diu que el preu relatiu d'equilibri és $p_R^* = \frac{0,608}{1,275} = 0,415$. Les restriccions pressupostàries dels consumidors A i B són

$$p_R^* X^{A'} + Y^{A'} = w_X^A p_R^* + w_Y^A \tag{3e}$$

$$p_R^* X^{B'} + Y^{B'} = w_X^B p_R^* + w_Y^B \tag{3f}$$

respectivament. Substituint p_R^*, $X^{A'}$ i $Y^{A'}$ pels seus valors a les equacions (3e) i (3f) i tenint en compte que $w_X^B = 3 - w_X^A$ i $w_Y^B = 1 - w_Y^A$, obtenim:

$$w_X^A = \frac{1,66 - w_Y^A}{0,415} \tag{3g}$$

No hi ha una única solució perquè el sistema d'equacions format per (3e) i (3f) és compatible indeterminat (o, dit d'una altra manera, una equació és combinació lineal de l'altra). Qualsevol (w_X^A, w_Y^A) complint l'equació (3g) fa que $((X^{A'}, Y^{A'}), (X^{B'}, Y^{B'}))$ sigui l'assignació d'equilibri a preus p_R^*.

(iii) Hem aplicat el segon teorema de l'economia del benestar.

Exercici 4

[*Problema 9.2, Maté y Pérez, adaptat*] Suposeu una economia en la que es produeixen dues mercaderies (X i Y) a partir de dos factors de producció K i L d'acord amb les següents funcions de producció: $X(K_X, L_X) = \sqrt{L_X}\sqrt{K_X}$ i $Y(K_Y, L_Y) = L_Y^{3/4} K_Y^{1/4}$. La quantitat dels dos factors de producció a l'economia està limitat, de manera que només es disposa de $\bar{K}$ i $\bar{L}$.

(i) Trobeu el conjunt d'assignacions Pareto eficients en la producció.

(ii) Seria productivament eficient una assignació igualitària dels factors de producció entre les empreses? I si una proporció $\pi \in (0,1)$ de cada factor s'assignés a l'empresa X i la resta $(1-\pi)$ a l'empresa Y?

(iii) Si una proporció $\pi \in (0,1)$ de $\bar{L}$ i una proporció $\rho \in (0,1)$ de $\bar{K}$ s'assignen a la producció de X i la resta de factors s'assignen a la producció de Y, obtingueu una relació entre π i ρ perquè la distribució dels factors sigui eficient.

(iv) Trobeu la corba de contracte dels factors de producció si $\bar{L} = 10$ i $\bar{K} = 5$. Dibuixeu-la.

SOLUCIÓ

(i) Per l'apartat 2.2 sabem que perquè una assignació del mercat de factors sigui Pareto eficient en la producció, cal que es compleixi la igualtat entre les relacions marginals de substitució tècnica entre els factors de producció, a part de complir-se les condicions de factibilitat d'aquests. Així doncs s'ha de complir la condició a l'equació (12) i, també, $K_X + K_Y = \bar{K}$ i $L_X + L_Y = \bar{L}$. Les relacions marginals de substitució tècniques de cada empresa són:

$$RMST^Y_{LK} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial L_Y}}{\dfrac{\partial Y}{\partial K_Y}} = \frac{3K_Y}{L_Y}$$

$$RMST^X_{LK} = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial L_X}}{\dfrac{\partial X}{\partial K_X}} = \frac{K_X}{L_X}$$

Igualant el terme dret de les dues últimes equacions i substituint-hi K_Y per $\bar{K} - K_X$ i L_Y per $\bar{L} - L_X$ obtenim que les assignacions eficients han de complir:

$$3L_X(\bar{K} - K_X) = K_X(\bar{L} - L_X) \tag{4a}$$

(ii) Una assignació igualitària entre les empreses dels factors equival a dir que $L_Y = L_X = \frac{\bar{L}}{2}$ i $K_Y = K_X = \frac{\bar{K}}{2}$. Per ser eficient s'hauria de complir l'equació (4a) si

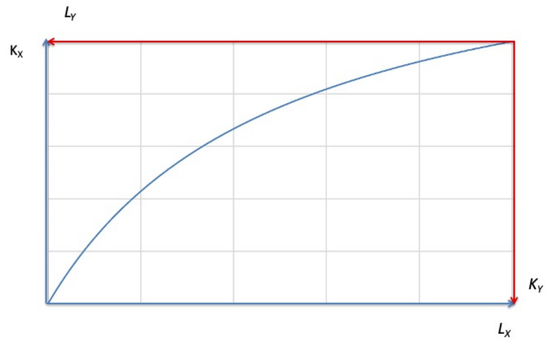


Figura 11: Corba de contracte, factors de producció, Exercici 4

hi substituïm aquests valors:

$$3\frac{\bar{L}}{2}\left(\frac{\bar{K}}{2}\right) = \frac{\bar{K}}{2}\left(\frac{\bar{L}}{2}\right)$$

que dona $3 = 1$ que és fals. Per tant, en aquest exemple la repartició igualitària dels factors entre les empreses no és eficient.

Si una proporció $\pi \in (0,1)$ de cada factor s'assignés a l'empresa X i la resta $(1-\pi)$ a l'empresa Y, $L_X = \pi\bar{L}$, $K_X = \pi\bar{K}$, $L_Y = (1-\pi)\bar{L}$, i $K_Y = (1-\pi)\bar{K}$. Per ser eficient s'ha de complir (4a): $3\pi\bar{L}(1-\pi)\bar{K} = \pi\bar{K}(1-\pi)\bar{L}$ implica que $3 = 1$ que és una contradicció, per tant, tampoc no seria eficient.

(iii) Ara s'ha de complir (4a): $3\pi\bar{L}(1-\rho)\bar{K} = \rho\bar{K}(1-\pi)\bar{L}$ o $3\pi(1-\rho) = \rho(1-\pi)$. Simplificant, $3\pi - \rho = 2\pi\rho$. Totes les combinacions (π, ρ) tals que $3\pi - \rho = 2\pi\rho$ compliran la condició d'eficiència en l'assignació de factors. Per exemple si $\pi = 0,50$ i $\rho = 0,75$.

(iv) Si $\bar{L} = 10$ i $\bar{K} = 5$, la corba de contracte de factors de l'equació (4a) esdevé

$$3L_X(5 - K_X) = K_X(10 - L_X)$$

i operant obtenim

$$K_X = \frac{15L_X}{10 + 2L_X}$$

La relació entre K_X i L_X és positiva i còncava ja que la primera derivada és positiva: $K'_X = \frac{150}{(10+2L_X)^2}$, i la segona negativa: $K''_X = \frac{-150}{(10+2L_X)^4}$. Veure la corba de contracte a la figura 11.

Exercici 5

[*Continuació exercici 4*] Considereu les dades de l'exercici anterior i suposeu que $\bar{K} = 100$ i $\bar{L} = 20$, i els preus dels béns X i Y són 3 i 2, respectivament.

(i) Trobeu l'equilibri en el mercat de factors.

(ii) Comproveu que l'assignació és eficient en la producció.

SOLUCIÓ

(i) Per l'apartat 3.2, cal resoldre el sistema d'equacions (29), (30), (31) i (32) junt amb les condicions de buidat de mercat dels factors. Per aquest problema, calculant els productes marginals, podem veure que les equacions (29) i (30) pel bé X són:

$$\frac{1}{2}\frac{K_X^{1/2}}{L_X^{1/2}} = \frac{w}{\bar{p}_X} \tag{5a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{L_X^{1/2}}{K_X^{1/2}} = \frac{r}{\bar{p}_X} \tag{5b}$$

Aïllant $\frac{K_X}{L_X}$ de cada equació i igualant-les s'obté una relació entre w i r:

$$w = \frac{\bar{p}_X^2}{4r}$$

Pel bé Y les condicions són:

$$\frac{3}{4}\frac{K_Y^{1/4}}{L_Y^{1/4}} = \frac{w}{\bar{p}_Y} \tag{5c}$$

$$\frac{1}{4}\frac{L_Y^{3/4}}{K_Y^{3/4}} = \frac{r}{\bar{p}_Y} \tag{5d}$$

Aïllant $\frac{K_Y}{L_Y}$ de cada equació i igualant-les obtenim una altra relació entre w i r:

$$w = \frac{3\bar{p}_Y^{4/3}}{4^{4/3}r^{1/3}}$$

Igualant les dues expressions de w obtenim la r d'equilibri en funció dels preus dels béns que són coneguts:

$$r^* = \frac{2\bar{p}_X^3}{3^{3/2}\bar{p_Y}^2}$$

Substituint r per r^* a l'expressió obtinguda per w, el salari d'equilibri és:

$$w^* = \frac{\bar{p}_X^2}{4r^*}$$

A l'equació (5c) reescrita aïllant K_Y/L_Y, substituïu K_Y per $\bar{K} - K_X$ i K_X, L_Y per $\bar{L} - L_X$ i K_X per l'expressió obtinguda de l'equació (5a). Aleshores, s'obté que l'expressió de la demanda òptima de treball dedicat al bé X és:

$$L_X^* = \frac{\frac{(4w^*)^4}{(3\bar{p_Y})^4}\bar{L} - \bar{K}}{\frac{(4w^*)^4}{(3\bar{p_Y})^4} - \frac{(2w^*)^2}{\bar{p_X}^2}}$$

Per l'equació de buidat del mercat de treball tenim que $L_Y^* = \bar{L} - L_X^*$. De l'equació (5a) obtenim la quantitat d'equilibri de capital K_X^*:

$$K_X^* = 4L_X^* \frac{(w^*)^2}{(\bar{p_X})^2}$$

Ara per l'equació de buidat del mercat de capital tenim que $K_Y^* = \bar{K} - K_X^*$. Finalment, substituint a les funcions de producció obtindrem les quantitats produïdes de bé X i Y en aquesta decisió en el mercat de factors. Calculant, obtenim que l'equilibri és: $w^* = 0,866025404$, $r^* = 2,59808$, $L_X^* = 40$, $L_Y^* = 60$, $K_X^* = 13,33333333$, $K_Y^* = 6,666666667$, $X^* = 23,09401077$, $Y^* = 34,64102$.

(ii) De les equacions (5a) i (5b) obtenim que la $RMST_{LK}^X = \frac{K_X}{L_X}$ i de les (5c) i (5d) obtenim que la $RMST_{LK}^Y = \frac{3K_Y}{L_Y}$. Per comprovar eficiència cal que l'assignació de l'equilibri obtinguda a l'apartat anterior compleixi la següent igualtat:

$$\frac{K_X^*}{L_X^*} = \frac{3K_Y^*}{L_Y^*}$$

I així és ja que substituint obtenim que $0,3333 = 0,3333$.

Exercici 6

Suposeu una economia en la que es produeixen dues mercaderies (X i Y) a partir de dos factors de producció K i L d'acord amb les següents funcions de producció: $X(K_X, L_X) = 3L_X^{1/3}K_X^{1/3}$ i $Y(K_Y, L_Y) = L_X^{1/2}K_Y^{1/4}$. La quantitat dels dos factors de producció a l'economia està limitat, de manera que només es disposa de $\bar{K}$ i $\bar{L}$.

(i) Trobeu el conjunt d'assignacions Pareto eficients en la producció.

(ii) Si $\bar{K} = 100$ i $\bar{L} = 20$ i els preus dels béns X i Y són 2 i 3, respectivament, quin és l'equilibri?

(iii) Es compleix el primer teorema fonamental de l'economia del benestar? Per què?

SOLUCIÓ

(i) Per l'apartat 2.2 sabem que perquè una assignació del mercat de factors sigui Pareto eficient en la producció, cal que es compleixi la igualtat entre les relacions marginals de substitució tècnica entre els factors de producció, a part de complir-se les condicions de buidat de mercat dels factors. Així doncs s'ha de complir la condició a l'equació (12) i, també, $K_X + K_Y = \bar{K}$ i $L_X + L_Y = \bar{L}$. Les relacions marginals de substitució tècniques de cada empresa són:

$$RMST^Y_{LK} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L_Y}}{\frac{\partial Y}{\partial K_Y}} = \frac{2K_Y}{L_Y}$$

$$RMST^X_{LK} = \frac{\frac{\partial X}{\partial L_X}}{\frac{\partial X}{\partial K_X}} = \frac{K_X}{L_X}$$

Igualant el terme dret de les dues últimes equacions i substituint-hi K_Y per $\bar{K} - K_X$ i L_Y per $\bar{L} - L_X$ obtenim que les assignacions eficients han de complir:

$$2L_X(\bar{K} - K_X) = K_X(\bar{L} - L_X) \tag{6a}$$

(ii) Per l'apartat 3.2, cal resoldre el sistema d'equacions (29), (30), (31) i (32) junt amb les condicions de buidat de mercat dels factors. Per aquest problema, calculant els productes marginals, podem veure que les equacions (29) i (30) pel bé X són:

$$\frac{K_X^{1/3}}{L_X^{-2/3}} = \frac{w}{\bar{p}_X} \tag{6b}$$

$$\frac{L_X^{1/3}}{K_X^{-2/3}} = \frac{r}{\bar{p}_X} \tag{6c}$$

Pel bé Y les condicions són:

$$\frac{1}{2}\frac{K_Y^{1/4}}{L_Y^{-1/2}} = \frac{w}{\bar{p}_Y} \tag{6d}$$

$$\frac{1}{4}\frac{L_Y^{1/2}}{K_Y^{-3/4}} = \frac{r}{\bar{p}_Y} \tag{6e}$$

Les dues condicions de buidat de mercat dels factors de producció són: $L_X + L_Y = 100$ i $K_X + K_Y = 20$.

$$L_X + L_Y = 100; K_X + K_Y = 20 \tag{6f}$$

Podem resoldre aquest sistema de 6 equacions (de la (6b) a la (6f)) i 6 incògnites procedint manualment tal com s'ha fet a l'apartat (i) de l'exercici 5 o bé podem usar, per exemple, la resolució d'equacions no lineals de l'Excel Solver. Usant-lo obtenim que els preus d'equilibri dels factors i les assignacions en l'equilibri són:

$w^* = 0,343267958$, $r^* = 1,304727306$, $L_X = 52,03597785$, $L_Y = 47,96402215$, $K_X = 13,69043555$, $K_Y = 6,309564449$, i substituint la quantitat dels factors a les funcions de producció obtenim que $X = 26,79342604$ i $Y = 10,97634231$.

(iii) Per comprovar que sí es compleix el primer teorema fonamental de l'economia del benestar cal comprovar que l'assignació de l'equilibri obtinguda a l'apartat anterior és eficient. Substituint els valors en equilibri obtinguts a (i) dins l'equació (6a) obtenim que són iguals truncant a tres decimals: $656,6487119 = 656,6483539$.

Exercici 7

Suposeu una economia formada per un consumidor i una empresa. La utilitat del consumidor depèn del seu nivell de consum C i del temps dedicat a l'esbarjo E: $U(C,E) = lnC + \beta lnE$. La restricció pressupostària és $pC = wl + B$ on p és el preu del bé de consum, w és el salari per hora treballada l i B són els beneficis de l'empresa. El temps disponible és $T = l + E$. L'empresa per la seva banda, maximitza beneficis mitjançant la producció del bé de consum C d'acord amb la tecnologia $F(L) = AL^{1/3}$, essent L les hores treballades i $A > 0$.

(i) Deriveu la condició d'eficiència global d'aquesta economia. Obtingueu l'assignació eficient si $T = 24$ i $\beta = 0,5$.

(ii) Deriveu l'equilibri del mercat si $A = 1$, $T = 24$ i $\beta = 0,5$.

(iii) Es compleix el primer teorema fonamental de l'economia del benestar? Per què?

SOLUCIÓ

(i) L'eficiència global en aquest cas requereix que no sigui possible augmentar la utilitat del consumidor sense augmentar la producció. A més, sabem que el temps total disponible és igual al temps dedicat a treballar més el temps dedicat a l'esbarjo. Finalment, cal que les hores que el consumidor treballa siguin les hores de treball a la funció de producció (restricció de factibilitat). El problema de maximització amb restriccions que recull tota aquesta informació és:

$$Max \quad U(C, E)$$

$$\begin{aligned} \text{subjecte a } F(L) &\geqslant C \\ T &= l + E \\ l = L \end{aligned}$$

on a la restricció amb la tecnologia de producció i el temps total disponible afegim la restricció de factibilitat que el treball que fa servir l'empresa sigui el qui ofereix el treballador que podem escriure:

$$Max \quad U(T(L), R - L)$$

La condició de primer ordre és:

$$\text{cpo(L): } \frac{\partial U}{\partial C}\frac{\partial F}{\partial L} - \frac{\partial U}{\partial E} = 0$$

o

$$RMS^A_{CE} = \frac{1}{PM_L}$$

Al nostre exemple,

$$RMS_{CE} = \frac{\partial U/\partial C}{\partial U/\partial E} = \frac{T - L}{\beta A L^{1/3}}$$

i $PM_L = A\frac{1}{3}L^{-2/3}$. Per tant, igualant obtenim

$$L^* = T/(\beta + 1)$$

si $T=24$ i $\beta=0,5$ el consumidor treballa 9,6 hores al dia a la solució eficient. I la quantitat consumida de bé és $C^{*}=F(L^{*})=2,125$.

(ii) Per calcular l'equilibri, primer resolem el problema del productor:

$$Max \quad pF\left(L\right)-wL$$

La condició de primer ordre és:

$$\text{cpo(L): } p\frac{1}{3}AL^{-2/3}=w$$

Llavors

$$L^{*}=\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}$$

$F(L)=A\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2}$ i els beneficis són $\pi=pA\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2}-w\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}$.

Ara resolem el problema del consumidor:

$$Max \quad lnC+\beta lnE$$

$$\begin{aligned}\text{subjecte a } T &= l+E\\ pC &= wl+pA\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2}-w\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}\end{aligned}$$

De les condicions de primer odre obtenim que la $RMS_{CE}=\frac{p}{w}$

$$\frac{T-l}{\beta C}=\frac{p}{w}$$

o també $C=\frac{w}{p}\frac{T-l}{\beta}$. Ara fem servir la restricció pressupostària substituint C per calcular l^{*}:

$$p\frac{w}{p}\frac{T-l}{\beta}=wl+pA\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2}-w\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}$$

Manipulant aquesta expressió obtenim

$$l^{*}=\frac{T}{\beta+1}-\frac{\beta}{\beta+1}\frac{p}{w}A\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2}+\frac{\beta}{\beta+1}\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}$$

El buidat de mercats requereix que $L^* = l^*$:

$$\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} = \frac{T}{\beta+1} - \frac{\beta}{\beta+1}\frac{p}{w}A\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} + \frac{\beta}{\beta+1}\left(\frac{A}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}$$

o

$$\left(\frac{p}{w}\right)^* = \left(\frac{T/(\beta+1)}{\left(\frac{A}{3}\right)^{3/2}\left(1-\frac{\beta}{\beta+1}\right) + \frac{\beta}{\beta+1}A\left(\frac{A}{3}\right)^{1/2}}\right)^{2/3}$$

Amb el valors de $T = 24$, $A = 1$, $\beta = 0,5$ obtenim: $\left(\frac{p}{w}\right)^* = 13,55$ i, substituint a L^* i a C^* arribem a

$$L^* = l^* = 9,6; C^* = 2,125.$$

(iii) Veiem que es compleix el primer teorema fonamental de l'economia del benestar ja que l'assignació en equilibri l^*, C^* i L^* coincideix amb els valors obtinguts a l'apartat (i).

Agraïments

Volem agrair l'assistència de l'estudiant Laura Nolla en la preparació dels gràfics d'aquests Apunts.

Referències

Albi, E., González-Páramo, J.M. e I. Zubiri: Economía Pública, Vol. I, Ariel, Barcelona, 2010. Capítulo 3 pp 51-65.

Mankiw, N.G.: Principios de economía. (Traducció: Esther Rabasco, Luis Toharia). Thomson 2007.

Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R.: Microeconomic Theory. Oxford University Press, 1995.

Maté, J.J., Domínguez, C.: Microeconomía Avanzada: Cuestiones y ejercicios resueltos. Pearson Education, 2007.

Rosen, H. and T. Gayer: Public Finance. McGraw-Hill 2010. Cap. 3.

Tresch, R. (2014): Public Finance A Normative Theory. Cap. 2. Elsevier. Third Edition.

Varian, H.R.: Análisis Microeconómico. Ed. Antoni Bosch, 3a edició 1992.

Villar, A.: Lecciones de Microeconomía. Ed. Antoni Bosch, 1999.

Wallace, B. (2004): Constrained Optimization: Kuhn-Tucker conditions.
http://amber.feld.cvut.cz/bio/konopka/file/5.pdf . Recuperat: 21 de maig 2021.

Universitat de Girona