

Comprender y usar las matemáticas: cambios curriculares, desafíos docentes y oportunidades sociales

Understanding and using mathematics: curriculum changes, teaching challenges, and social opportunities

Ángel Alsina

Catedrático de Didáctica de las Matemáticas
Departamento de Didácticas Específicas, Área de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Girona, España
angel.alsina@udg.edu

Recibido: 3 de abril de 2020
Aceptado: 1 de octubre de 2020
DOI: 10.5377/ryr.v53i53.10881



RESUMEN

Se describen tres ámbitos de acciones para que la educación matemática contribuya al progreso individual y social: 1) los cambios curriculares, focalizados en promover la competencia matemática; 2) los desafíos docentes, focalizados en cambiar la visión de las matemáticas y su enseñanza junto con reflexionar sobre la propia práctica; 3) las oportunidades sociales que derivan de estos cambios y desafíos, focalizadas en los principios rectores para la educación matemática y las prácticas de enseñanza. Se concluye que para lograr estas metas es imprescindible el compromiso de todos los agentes implicados: los responsables de las políticas educativas; los directores de centros educativos; los asesores y/o especialistas en matemáticas; los maestros y las familias.

Palabras clave: educación matemática, competencia matemática, procesos matemáticos, práctica docente, progreso social.

ABSTRACT

Three areas of actions are described so that mathematics education has a role in individual and social progress: 1) curricular changes, focused on promoting mathematical competence; 2) teaching challenges, focused on changing the vision of mathematics and its teaching and reflecting on one's practice; 3) the social opportunities derived from these changes and challenges, focused on the guiding principles for mathematics education and teaching practices. It is concluded that to achieve these goals, the commitment of all the agents involved is essential: heads of educational policy; school managers; advisers and / or specialists in mathematics; teachers and families.

Keywords: *mathematical education, mathematical competence, mathematical processes, teaching practice, social progress.*

Introducción

Todas las tendencias internacionales contemporáneas en Educación Matemática, independientemente del enfoque teórico y/o del organismo desde las que formulen, tienen un propósito común: promover que los estudiantes comprendan los conocimientos matemáticos y que sepan usarlos de forma eficaz en la vida cotidiana, es decir, que sean matemáticamente competentes. En este sentido, es muy ilustrativa la afirmación del *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, cuando exponen que “en este mundo cambiante, aquellos que comprendan y puedan usar las matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. La competencia matemática abre puertas a un porvenir productivo; su carencia las mantiene cerradas” (NCTM, 2003, p. 5).

Durante muchas décadas, y sobre todo por la influencia de las teorías conductistas y asociacionistas de inicios-mediados del S. XX, muchos países basaron la enseñanza de las matemáticas en la repetición, la ejercitación, la memorización y la descontextualización. Tal como ha indicado Alsina (2012, 2016, 2019a), lo que interesaba era enseñar contenidos matemáticos para que los estudiantes resolvieran los ejercicios que se planteaban en el libro de texto y para que obtuvieran una buena nota en los exámenes. Sin embargo, no había ningún interés en asegurar que comprendieran las matemáticas que se les enseñaban, ni tampoco ninguna preocupación por garantizar que aprendieran a usar las matemáticas en todas las situaciones de la vida cotidiana en las que dichos conocimientos son necesarios, que son algunos de los principales rasgos de la competencia matemática. Así, pues, y por poner sólo algunos ejemplos, se enseñaba mecánicamente el algoritmo de la multiplicación sin comprender qué significa multiplicar (ver figura 1); se enseñaba la fórmula del área del triángulo sin inferir porqué se puede obtener la superficie que ocupa cualquier triángulo multiplicando su base por su altura y dividiéndolo por dos; o se enseñaba a calcular la media aritmética de un conjunto de datos sin incidir en el significado de esta medida de tendencia central.

MULTIPLICACIÓN POR TRES CIFRAS

Multiplica 958 x 365

<p>1.º Multiplica 958 por 5. Coloca el producto alineando las unidades.</p> $\begin{array}{r} 958 \\ \times 365 \\ \hline 4790 \end{array}$	<p>2.º Multiplica 958 por 6. Coloca el producto bajo el anterior dejando un hueco a la derecha.</p> $\begin{array}{r} 958 \\ \times 365 \\ \hline 4790 \\ 5748 \end{array}$	<p>3.º Multiplica 958 por 3. Coloca el producto bajo el anterior dejando un hueco a la derecha.</p> $\begin{array}{r} 958 \\ \times 365 \\ \hline 4790 \\ 5748 \\ 2874 \end{array}$	<p>4.º Suma todos los productos que has obtenido.</p> $\begin{array}{r} 958 \\ \times 365 \\ \hline 4790 \\ 5748 \\ 2874 \\ \hline 349670 \end{array}$
---	---	---	--

Figura n.º 1. Enseñanza de la multiplicación centrada en la mecanización. Fuente: http://oleyaestamosencuarto.blogspot.com/2015/11/u-3-matematicas-multiplicacion-por-un_26.html

La enseñanza de las matemáticas focalizada en los contenidos supuso un enorme fracaso. Numerosos estudios realizados desde distintos ámbitos y agendas de investigación en educación matemática sacaron a la luz que muchos ciudadanos que han sufrido esta forma de enseñar matemáticas, además de generar un fuerte rechazo a la disciplina, han manifestado dificultades para aplicar los contenidos matemáticos en las situaciones de su vida cotidiana en las que dichos conocimientos son necesarios (Alsina, 2019a). Retomando la idea del NCTM (2003), la falta de competencia matemática cierra las puertas a un porvenir productivo: el sentido numérico deficitario, la ausencia de alfabetización estadística y probabilística, la carencia de comprensión geométrica, la escasez de habilidades de generalización o un pensamiento matemático crítico insuficiente son obstáculos de primer orden para el desarrollo socio-económico-cultural.

Desde este prisma, en este artículo vamos a indagar en los principales requisitos para que la educación matemática se convierta en una herramienta al servicio del progreso, tanto individual como social. Para ello vamos a incidir en tres ámbitos: 1) en los cambios curriculares; 2) en los desafíos docentes; y 3) en las oportunidades sociales que se derivan de estos cambios y desafíos.

1. Educación matemática y cambios curriculares

En la introducción se ha indicado que la visión de las matemáticas escolares focalizada exclusivamente en los contenidos ha quedado atrás. Siguiendo las directrices de organismos internacionales que velan por la mejora de la educación en general como *The Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD), que ha reformulado las finalidades de la educación en términos de competencias básicas en el marco del Proyecto DeSeCo (Rychen y Salganik, 2004), junto con las orientaciones que se desprenden de la investigación en educación matemática y que han sido recogidas por asociaciones de reconocido prestigio como el NCTM (2003, 2015), muchos países y regiones han ido reformando paulatinamente sus currículos para incorporar otros conocimientos matemáticos de gran relevancia que incidan en las verdaderas formas de pensar y hacer de las matemáticas, y que promuevan el desarrollo de la competencia matemática.

1.1. ¿Qué es la competencia matemática?

La implantación de un currículo orientado a la adquisición de la competencia matemática significa un paso adelante y pretende formar personas con un mayor grado de eficacia para afrontar los problemas reales que plantea la vida, más allá de los estrictamente académicos. Para incorporar conocimientos profesionales que permitan afrontar este reto, a continuación se sintetizan algunas de las aportaciones más relevantes que se han realizado en este sentido: a) *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003); b) Mogens Niss, uno de los autores con mayor reconocimiento internacional en este ámbito de la educación matemática (Niss, 2002); y c) *The Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD, 2004).

1.1.1. La competencia matemática según el *National Council of Teachers of Mathematics*.

Durante muchos años esta asociación, constituida principalmente por profesores de matemáticas de Educación Infantil, Primaria y Secundaria, trabajó junto con sociedades de padres, grupos de expertos, seminarios de estudio, equipos de innovación, editoriales, matemáticos preocupados por la enseñanza, investigadores en educación y responsables, en general, del currículum de matemáticas, con el objeto de poder ofrecer una guía y un recurso para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática, desde los 3 hasta los 18 años de edad. Este trabajo compartido permitió establecer 10 estándares de conocimientos matemáticos (NCTM, 2003):

- Cinco estándares de contenidos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, y análisis de datos y probabilidad.
- Cinco estándares de procesos: la resolución de problemas; el razonamiento y la prueba; la comunicación; la representación; y las conexiones.

En las tablas 1 y 2 se sintetizan los estándares de contenidos y procesos que propone este organismo para todas las etapas educativas:

Tabla n.º 1

Estándares de contenidos matemáticos (NCTM, 2003)

Números y operaciones	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender los números, los modos de representarlos, las relaciones entre números y sistemas numéricos. • Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras. • Calcular eficazmente y hacer estimaciones razonables.
Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender patrones, relaciones y funciones. • Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas con símbolos apropiados. • Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas. • Analizar el cambio en diversos contextos.
Geometría	<ul style="list-style-type: none"> • Analizar características y propiedades de las formas de una, dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas. • Especificar posiciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación. • Aplicar transformaciones y usar la geometría para analizar situaciones matemáticas. • Usar la visualización, el razonamiento espacial, y la modelización geométrica para resolver problemas.
Medida	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender los atributos mesurables de los objetos y las unidades, sistemas, y procesos de medición. • Aplicar técnicas apropiadas, herramientas y fórmulas para determinar mediciones.
Análisis de datos y probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> • Formular cuestiones sobre datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlos. • Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en los datos. • Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.

Tabla n.º 2

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2003)

Resolución de problemas	<ul style="list-style-type: none"> • Construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas. • Resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos. • Aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas. • Controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.
Razonamiento y prueba	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas. • Hacer e investigar conjeturas matemáticas. • Desarrollar y evaluar argumentos y pruebas. • Seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de prueba.
Comunicación	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar y consolidar su pensamiento matemático mediante la comunicación. • Comunicar su pensamiento matemático de manera coherente y clara a los compañeros, profesores y otras personas. • Analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de los demás. • Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas de forma precisa.
Conexiones	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer y usar conexiones entre las ideas matemáticas. • Comprender cómo se relacionan las ideas matemáticas y se organizan en un todo coherente. • Reconocer y aplicar las ideas matemáticas en contextos no matemáticos.
Representación	<ul style="list-style-type: none"> • Crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas. • Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas. • Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

A partir de la publicación de estos estándares, los currículos de matemáticas de la mayoría de países han ido incorporando paulatinamente los procesos matemáticos que, junto con los contenidos matemáticos, constituyen el conjunto de conocimientos matemáticos que favorecen la competencia matemática. En la figura 2 se muestra la interrelación entre ambos tipos de conocimientos:

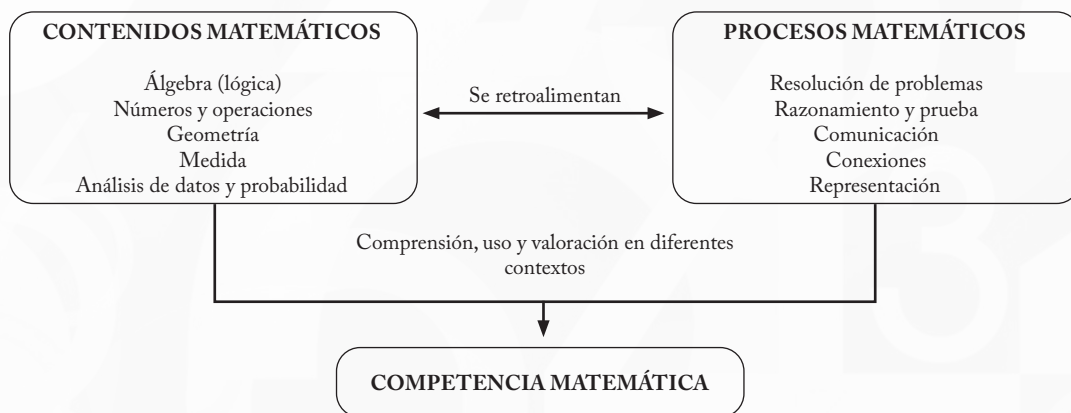


Figura n.º 2. Interrelación entre contenidos y procesos matemáticos. Fuente: Alsina (2019a, p. 20)

Este planteamiento curricular, de acuerdo con Alsina (2012), implica partir de un enfoque mucho más globalizado que no se limite a los contenidos matemáticos de un único bloque, sino trabajar de forma integrada, explorando como se potencian y usándolos sin prejuicios. Además, exige trabajar para favorecer la autonomía mental del alumnado, potenciando la elaboración de hipótesis, las estrategias creativas de resolución de problemas, la discusión, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar planteamientos y resultados. En definitiva, pues, se trata de ayudar, a través de los procesos de pensamiento matemático, a gestionar el conocimiento, las habilidades y las emociones para conseguir un objetivo a menudo más cercano a situaciones funcionales y en contextos de vida cotidiana que a su uso académico.

1.1.2. La competencia matemática según Mogen Niss (Niss, 2002)

En el marco del proyecto danés de definición de las competencias y el aprendizaje de las matemáticas, Niss (2002) señala la necesidad de sustituir los currículos de matemáticas orientados a la adquisición de contenidos, ya que se centran exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas, por currículos orientados al uso significativo de estos contenidos en una variedad de situaciones en las que las matemáticas pueden desempeñar un papel. Desde esta perspectiva, Niss define la competencia matemática como la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden desempeñar un papel. Este autor identifica ocho competencias matemáticas que clasifica en dos grupos, tal como se muestra en la tabla 3.

Tabla n.º 3

Competencias matemáticas (Niss, 2002)

Grupo 1: Preguntar y responder preguntas “dentro de” y “con las matemáticas”	Grupo 2: Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas
1. Dominio de modos matemáticos de pensamiento (pensar matemáticamente). 2. Planteamiento y resolución de problemas matemáticos. 3. Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos). 4. Razonamiento matemático.	5. Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones). 6. Manejo de símbolos matemáticos y formalismos. 7. La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas. 8. Hacer uso de los recursos y herramientas.

Estas ocho competencias, como puede apreciarse, tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos. En otras palabras, de acuerdo con Niss (2002), la atención se centra en lo que las personas pueden hacer.

1.1.3. La competencia matemática según *The Organisation for Economic Co-operation and Development*

En el contexto del Proyecto PISA 2003, la OECD (2004) usa en un primer momento el término "alfabetización matemática" (*mathematical literacy*) para referirse a las capacidades individuales de los

estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Unos años después, en el Proyecto PISA 2006 (OECD, 2006), substituye este término por el de "competencia matemática" para resaltar su carácter funcional, y se define como la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. En la tabla 4 se exponen las capacidades matemáticas asociadas a la competencia matemática descritas en el proyecto PISA:

Tabla n.º 4

Capacidades matemáticas (OECD, 2004)

1. Pensamiento y razonamiento.
2. Argumentación.
3. Comunicación.
4. Construcción de modelos.
5. Planteamiento y resolución de problemas.
6. Representación.
7. Utilización de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal.
8. Empleo de material y herramientas de apoyo.

Los procesos, competencias y capacidades matemáticas que se exponen en las tablas 2 a 4 enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar, reforzando de esta forma un enfoque social en torno al diseño, aplicación y evaluación de situaciones de aula que fomenten el aprendizaje matemático.

Alsina (2014), en un intento de síntesis de las ideas aportadas por el NCTM (2003), Niss (2002) y la OECD (2004, 2006), indica que para desarrollar la competencia matemática es imprescindible:

- Pensar matemáticamente: construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones en las que tengan sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y realizar abstracciones.
- Razonar matemáticamente: realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones tomadas, así como los procesos seguidos y las técnicas usadas.
- Plantear y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas, planificar y desarrollar estrategias de resolución y validar soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.

- Usar técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) e instrumentos (calculadoras y TIC, de dibujo y de medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático.

En definitiva, pues, en esta primera sección se ha incidido en la necesidad de transformar los currículos para promover el desarrollo de la competencia matemática. Para ello, es imprescindible ir más allá de los contenidos y considerar también los procesos matemáticos, ya que “los contenidos y los procesos en los que se hace hincapié son el reflejo de la cultura matemática que la sociedad necesita, de la práctica educativa anterior, y de los valores y expectativas que comparten los profesores, los educadores matemáticos y el público en general” (NCTM, 2003, p. xvi).

2. Educación matemática y desafíos docentes

A pesar de que todos los enfoques contemporáneos coinciden en que los estudiantes son los protagonistas de su aprendizaje, el papel del profesor sigue siendo esencial. Por esta razón, en esta segunda sección hacemos alusión a los principales desafíos a los que debería hacer frente el profesorado si quiere contribuir a que la educación matemática sea una poderosa herramienta de desarrollo tanto individual como social. Desde este prisma, se hace hincapié en tres grandes retos: transformar la visión acerca de las matemáticas escolares y sus finalidades; transformar la enseñanza de las matemáticas centrada en los contenidos por la enseñanza a través de los procesos; e incorporar la reflexión sistemática sobre la propia práctica.

2.1. La visión del profesorado acerca de las matemáticas y sus finalidades.

El mayor desafío del profesorado para que la educación matemática se convierta en una potente herramienta de transformación individual y social es entender que no educamos para la escuela, sino para la vida. En otras palabras, se debería tener muy claro que la labor profesional del maestro no consiste en formar a estudiantes para que tengan éxito en la escuela, sino para que se puedan desenvolver bien en su vida cotidiana, es decir, que más allá de garantizar el buen rendimiento académico, lo que hace falta es garantizar que los ciudadanos tengan habilidades para que, por ejemplo, puedan distinguir si es mejor comprar una oferta de 3x2 o el segundo producto al 50%; para que puedan interpretar correctamente las facturas de consumo de electricidad, gas, ... y que las compañías no les engañen; o bien para que sepan negociar una hipoteca en el banco. ¿De qué sirve, por ejemplo, que los estudiantes resuelvan perfectamente una página de multiplicaciones en la escuela, si desde la escuela

no se les ofrece la oportunidad de acceder a los conocimientos necesarios para que puedan discernir y analizar detalladamente todo lo que les diga un banquero cuando sean adultos y necesiten negociar una hipoteca?

Como se indica en Alsina (2019b), la escuela debe dejar de ser un espacio de intermediación tradicional en el que se transmiten y se evalúan conocimientos para un uso exclusivamente académico, de tal manera que pierda su valor real, y en su lugar, la escuela debe ofrecer las herramientas necesarias para que los ciudadanos puedan comprender y usar el conocimiento matemático de una manera eficaz en las situaciones de su vida actual y futura en las que se requiere este conocimiento.

Desde este prisma, las tendencias contemporáneas en materia de educación matemática abogan por la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento crítico. De acuerdo con Alsina y Planas (2008, p. 17-18)

Pensamos críticamente cuándo cuestionamos la información que se nos proporciona, tomamos la iniciativa de buscar más información y desarrollamos un interés por ser precisos en el contraste de puntos de vista. Estas habilidades deben ponerse en práctica en los cuatro momentos comunicativos por excelencia: hablar, escuchar, leer y escribir. Pensar críticamente es, en resumen, ser capaz de hablar, escuchar, leer y escribir críticamente.

En este escenario, el profesorado necesita disponer de conocimientos disciplinares y didácticos que faciliten esta labor. En este artículo asumimos que el profesorado tiende a tener un conocimiento matemático muy formalista, en el sentido de Bourbaki, por lo que disponen de pocos conocimientos pedagógicos para abordar el desafío de promover el pensamiento crítico de los estudiantes.

Son diversos los modelos teóricos que han abordado el conocimiento del profesorado de matemáticas. Shulman (1986) propuso uno de los modelos que más impacto ha tenido en el estudio del conocimiento del profesor. Planteó tres categorías que, desde su perspectiva, conforman este conocimiento: a) Conocimiento del Contenido, que se refiere a la organización mental que tiene el profesor acerca de los contenidos que va a enseñar; b) Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK, por sus siglas en inglés), que se refiere a un tipo de conocimiento que se orienta hacia la comprensión de lo que facilita o dificulta el aprendizaje de temas específicos de la materia que se imparte; y c) Conocimiento del Currículo, que se refiere al conocimiento acerca del programa curricular del nivel educativo en el que se trabaja, así como la variedad de materiales (como los libros de texto) que se disponen para la enseñanza.

La categoría del PCK despertó un fuerte interés en el terreno de la investigación en educación matemática. Así, por ejemplo, Ball (2000 y 2003) propone una línea de investigación en la que se analiza el conocimiento matemático y pedagógico de los profesores a partir del modelo que denomina *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Hill, Schilling y Ball (2004), Hill, Rowan y Ball (2005),

Ball, Thames y Phelps (2008) y Hill, Ball y Schilling (2008) retoman la idea de Shulman en cuanto al PCK, es decir, consideran como elemento importante el conocimiento del profesor acerca de lo que favorece o dificulta el aprendizaje de las matemáticas. Desde este modelo, el PCK se concibe como los conocimientos fundamentales para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Está integrado por los siguientes subdominios: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS); Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT); y Conocimiento del Currículo. Otra propuesta es el *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), elaborado por Carrillo *et al.* (2018) a partir del refinamiento del MKT. En lo que se refiere al PCK, está integrado por los siguientes subdominios: *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Mathematics Learning* (KFLM) y *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). Conviene resaltar el papel que juegan las creencias de los profesores en este modelo, pues sin ser propiamente un tipo de conocimiento, si pueden influir y aún determinar las concepciones y el actuar de los docentes al enfrentar las tareas de enseñanza. El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor diseñado por Godino (2009) es otra propuesta que intenta explorar qué es necesario que un profesor sepa para realizar el trabajo de enseñar matemáticas. Entre los conocimientos necesarios, se hace referencia a la dimensión didáctica, que involucra diversas facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica). En síntesis, a partir de los distintos modelos descritos se pone de manifiesto que existe una preocupación por el conocimiento pedagógico que debe poseer el profesorado de matemáticas, dado que tiene repercusiones directas en el aprendizaje de los alumnos.

Aquí, más que profundizar en estos modelos, interesa insistir en el desafío que supone para el profesorado discernir cuáles son los conocimientos que favorecen el aprendizaje de las matemáticas en general, y el desarrollo del pensamiento crítico en particular. Este es el gran y primer desafío del profesorado y pasa, necesariamente, por asumir que hay que cambiar la visión acerca del sentido de las matemáticas escolares y sus finalidades, que van mucho más allá de la repetición, la ejercitación, la memorización y la descontextualización para lograr un buen rendimiento académico.

2.2. La transformación de la práctica docente del profesorado de matemáticas.

El segundo gran desafío que tiene que abordar el profesorado de matemáticas tiene que ver con la respuesta a la pregunta ¿si no focalizamos la enseñanza de las matemáticas en la repetición, la ejercitación, la memorización y la descontextualización a través de un libro de texto, entonces qué hacemos? Para responder a esta pregunta se abordan dos cuestiones fundamentales: la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos matemáticos y los itinerarios de enseñanza de las matemáticas.

2.2.1. La enseñanza de las matemáticas a través de los procesos matemáticos

De acuerdo con las directrices internacionales, en este artículo abogamos clarísimamente por una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, basada en pensar y hacer más que en memorizar

técnicas y procedimientos (Alsina, Maurandi, Ferré y Coronata, 2020). Ello implica una planificación y gestión de las prácticas de enseñanza basadas en la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación (Alsina, 2012; 2016, 2019a; NCTM, 2003, 2015).

De acuerdo con el NCTM (2003, p. 31) los procesos matemáticos ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos de números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad. En Alsina (2014) se aportaron 50 ideas clave para enseñar matemáticas a través de los procesos y, a modo de síntesis, en la tabla 5 se reproducen algunos de los conocimientos imprescindibles asociados a los procesos matemáticos.

Tabla n.º 5

Síntesis de las ideas más importantes para trabajar matemáticas a través de los procesos.

Resolución de problemas	<ul style="list-style-type: none"> • Un problema es una situación nueva de la que no se conoce de antemano el método de resolución, que sirve para crear conocimiento en relación a los distintos bloques de contenido matemático. • Deben plantearse diferentes tipos de problemas: según el contenido (numeración y cálculo, álgebra, geometría, medida, estadística y probabilidad); según el enunciado (visual o verbal), según la finalidad (aprender una estrategia, aplicar una técnica, etc.), según el tipo de respuesta (abierto, cerrado), etc. • Se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc.
Razonamiento y prueba	<ul style="list-style-type: none"> • En las primeras edades el razonamiento es sobre todo intuitivo e informal y la prueba implica principalmente comprobar. • Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones. • Las preguntas deben servir para argumentar (“¿por qué piensas que es verdad?”); descubrir (“¿qué piensas que pasará ahora?”); justificar proposiciones (“¿por qué funciona esto?”); etc.
Comunicación	<ul style="list-style-type: none"> • La comunicación se tiene que distinguir de la información. • La comunicación requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los conocimientos matemáticos y su gestión. • En los procesos de interacción, diálogo y negociación, las buenas preguntas permiten avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles superiores).
Conexiones	<ul style="list-style-type: none"> • Las conexiones entre los distintos bloques de contenidos matemáticos ponen de manifiesto que las matemáticas constituyen un campo integrado de conocimiento (conexiones intradisciplinarias). • Las conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas dan respuesta al enfoque interdisciplinar que deberían tener las actividades competenciales (conexiones interdisciplinarias). • Las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos reales o realistas contribuyen a comprender cuál es el sentido de las matemáticas.
Representación	<ul style="list-style-type: none"> • La representación de las ideas matemáticas es un proceso indispensable: si no hay representación no hay comprensión. • El desarrollo progresivo de la representación va de lo concreto a lo abstracto (abstracción progresiva). • Representaciones y modelos diferentes aclaran diferentes aspectos de una idea matemática compleja.

Y en la tabla 6 se sintetizan las acciones del profesorado para planificar y gestionar sus prácticas de enseñanza de las matemáticas a través de los procesos (Alsina, 2020).

Tabla n.º 6

Acciones del profesorado para promover una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos.

Resolución de problemas	Razonamiento y prueba/ Argumentación	Comunicación	Conexiones	Representación
<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué situación problemática/reto voy a plantear a los alumnos? • ¿Cuál es la incógnita/cuáles son los datos? • ¿Conoces algún problema vinculado con éste? • ¿Qué pasos vas a seguir? .../... 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué buenas preguntas voy a plantear para que los alumnos argumenten sus ideas matemáticas y sus acciones? 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo voy a fomentar la interacción? (en parejas, en pequeño grupo, etc.) • ¿Qué vocabulario específico deben aprender? 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Con qué bloques de contenidos matemáticos se puede relacionar la actividad? • ¿Desde qué disciplina voy a plantear el reto? 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué tipo de representación deben hacer? Verbal, gráfica, simbólica ...

Este es, pues, el segundo gran desafío del profesorado: transformar la práctica docente desde una enseñanza focalizada en los contenidos hacia una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. Como se indica en Alsina (2020) se trata de un proceso similar a la conducción: cuando se aprende a conducir, se activa un proceso mental muy controlado en el que el conductor novel está muy pendiente de lo que tiene que hacer para arrancar, para cambiar de marcha, para frenar, para cumplir las normas de circulación, etc. Progresivamente, este proceso controlado pasa a ser un proceso automático, de manera que la mente del conductor experto es capaz de activar muchos de estos conocimientos de forma simultánea, casi sin pensarlo. Pasa lo mismo con una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos: en los primeros momentos de transformación de las prácticas debe llevarse a cabo un proceso muy controlado para planificar cómo se va a enseñar un determinado contenido, a través de qué procesos, pero progresivamente se automatiza esta forma de abordar la enseñanza de las matemáticas.

2.2.2. El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas

Hace ya varios años, y con el propósito de buscar maneras ajustadas a las necesidades reales de los estudiantes tanto para comprender las matemáticas como para aprender a usarlas de forma comprensiva y eficaz en todas las situaciones –escolares y no escolares– en las que dichos conocimientos son necesarios, Alsina (2010) planteó un diagrama piramidal en el que se comunicaba de forma sencilla y muy visual el tipo de contextos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su “frecuencia de uso” más recomendable, en función de la posición que ocupa cada contexto:

de más o menos frecuencia desde la base hacia la cúspide (figura 3). En este diagrama piramidal, más conocido como Pirámide de la Educación Matemática al hacer un símil con la Pirámide de la Alimentación, no se descartaba ningún recurso, sino que solo se pretendía informar sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, se consideró que podía ser una herramienta útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.



Figura n.º 3. Pirámide de la Educación Matemática. Fuente: Alsina (2010, p. 14)

En la base se situaban los contextos que necesitan todos los estudiantes y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente para aprender matemáticas: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después seguían los que deben “tomarse” alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Y, por último, en la cúspide, se ubicaban los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto, por las razones que ya se han expuesto en la introducción.

Con los años, este planteamiento ha evolucionado hacia el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza (Alsina, 2019a), asumiendo que la palabra “itinerario” se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres fases:

1. Enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas de los estudiantes, como por ejemplo su entorno inmediato, o bien materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.
2. Enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como por ejemplo algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (*applets*, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático.
3. Enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos y simbólicos, como por ejemplo los cuadernos de actividades, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico.

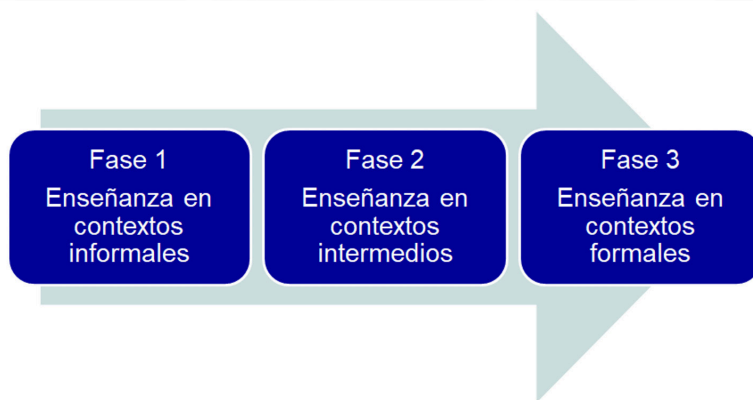


Figura n.º 4. Fases del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. Fuente: diseño propio

Este enfoque, pues, se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la práctica de ejercicios que presentan los libros de texto como principales estrategias didácticas para “aprender” matemáticas, y en su lugar, plantea que es necesario fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación, o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición.

2.3. La reflexión sobre la propia práctica

El tercer y último desafío del profesorado de matemáticas consiste en asumir que es imprescindible reflexionar sistemáticamente sobre su práctica, preguntándose qué ha enseñado, cómo lo ha enseñado y cómo lo puede mejorar (Alsina, 2017).

Coronata (2014), Alsina y Coronata (2014), Maurandi, Alsina y Coronata (2018) y Alsina *et al.* (2020) han trabajado durante varios años en la construcción y posterior validación de un instrumento, denominado ETMAP por las siglas en inglés (*Evaluating the Teaching of Mathematics through Processes*), con una doble intención: 1) para orientar al profesorado sobre qué aspectos se deben considerar en el aula para llevar a cabo una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos; y 2) para analizar la presencia de estos procesos en sus prácticas de enseñanza. Este instrumento aporta siete indicadores para cada proceso (ver tabla 7).

Tabla n.º 7

Indicadores para analizar la presencia de cada proceso en las prácticas de enseñanza

1. Indicadores de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	1	2	3	4	5
Plantea situaciones problemáticas usando diferentes tipos de apoyo (oral, concreto, pictórico).					
Contextualiza las situaciones problemáticas a la vida cotidiana de los alumnos.					
Propone situaciones problemáticas de diversos tipos.					
Realiza preguntas que generan la investigación y exploración para solucionar al problema.					
Permite a los niños la utilización de material concreto y/o pictórico con apoyo oral para la resolución de problemas.					
Mantiene a los niños comprometidos con el proceso de resolución de problemas.					
Promueve la discusión en torno a las estrategias de resolución de problemas y los resultados.					
2. Indicadores de RAZONAMIENTO Y PRUEBA	1	2	3	4	5
Invita a hacer conjeturas.					
Permite que los propios alumnos descubran, analicen y propongan diversas vías de resolución.					
Pide a los alumnos que expliquen, justifiquen o argumenten las estrategias o técnicas que utilizaron durante la resolución.					
Plantea interrogantes para que los alumnos argumenten sus respuestas.					
Promueve que los alumnos comprueben conjeturas de la vida cotidiana.					
Promueve el apoyo del razonamiento matemático.					
Entrega retroalimentación con material concreto permitiendo el pensamiento divergente.					
3. Indicadores de CONEXIONES	1	2	3	4	5
Considera las experiencias matemáticas cotidianas de los alumnos para avanzar hacia las matemáticas más formales.					
Realiza conexiones entre diversos contenidos matemáticos.					
Desarrolla actividades matemáticas vinculadas a contextos musicales.					

3. Indicadores de CONEXIONES	1	2	3	4	5
Trabaja las matemáticas vinculándolas con la literatura infantil.					
Relaciona las matemáticas con la expresión artística.					
Genera conocimiento matemático a través de contextos vinculados a la psicomotricidad.					
Promueve que los alumnos apliquen el conocimiento matemático a las situaciones de la vida cotidiana.					
4. Indicadores de COMUNICACIÓN	1	2	3	4	5
Promueve con mayor énfasis la comunicación en el aula que la entrega de información unidireccional.					
Favorece la interacción con otros para aprender y comprender las ideas matemáticas.					
Impulsa el intercambio de ideas matemáticas a través del lenguaje oral, gesticular, gráfico, concreto y /o simbólico.					
Pide al niño explicitar con lenguaje matemático adecuado sus estrategias y respuestas.					
Incentiva en los alumnos el respeto por la forma de pensar y de exponer sus puntos de vista en torno al contenido matemático.					
Fomenta la escucha atenta de los puntos de vista de los demás.					
Interviene mayoritariamente a través de preguntas, más que a través de explicaciones.					
5. Indicadores de REPRESENTACIÓN	1	2	3	4	5
Pide a los niños que hablen, escuchen y reflexionen sobre las matemáticas para avanzar hacia la representación simbólica.					
Utiliza materiales concretos como recursos para representar ideas matemáticas.					
Utiliza modelos ejemplificadores (esquemas, entre otros) para mostrar maneras de resolver situaciones problemáticas.					
Trabaja en los niños las representaciones concretas (dibujos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones pictóricas (signos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones simbólicas (notación convencional).					
Muestra un trabajo bidireccional (de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto a lo concreto).					

En este instrumento se propone una escala Likert desde 1 (ausencia) hasta 5 (presencia) para evaluar cada indicador. Además, a partir del Método Angoff (1971) se ha estimado la presencia mínima de los indicadores propuestos, para considerar si está presente o ausente cada categoría. Este método de establecimiento de normas, que es el utilizado con mayor frecuencia, por lo general implica tres etapas (orientación, formación y luego dos rondas de estimación de rendimiento). Dado que existen numerosas variaciones en estos procedimientos, en nuestro caso se ha adaptado a la consulta de expertos y a una ronda de estimación de rendimiento para cada una de las categorías (Alsina y Coronata, 2014). De esta forma los expertos sugieren estimaciones y se calcula el promedio de todas sus estimaciones para establecer el *standard setting*. Las estimaciones para cada elemento de prueba se promedian, y los promedios se utilizan para determinar la puntuación de corte para considerar si está presente o ausente cada proceso matemático. Los porcentajes de corte obtenidos para cada proceso según este método son los siguientes: resolución de problemas (70%), razonamiento y prueba (60%), comunicación (80%), conexiones (80%) y representación (70%).

En síntesis, pues, en esta segunda sección se ha hecho alusión a tres grandes desafíos del profesorado para que la educación matemática se convierta en una potente herramienta de transformación social: 1) cambiar la visión acerca del sentido de las matemáticas escolares y sus finalidades, asumiendo que la labor profesional del maestro no consiste en formar a estudiantes para que tengan éxito en la escuela, sino para que se puedan desenvolver bien en su vida cotidiana; 2) transformar la práctica docente desde una enseñanza de las matemáticas focalizada en los contenidos hacia una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, basada en pensar y hacer más que en memorizar técnicas y procedimientos; 3) reflexionar sistemáticamente sobre la propia práctica, preguntándose qué se ha enseñado, cómo se ha enseñado y cómo se puede mejorar.

3. Educación matemática y oportunidades sociales

En esta última sección se va a hacer hincapié en las oportunidades sociales que derivan de los cambios curriculares y de la respuesta a los desafíos docentes descritos en los dos apartados anteriores. Para ello, en primer lugar se van a describir los cambios curriculares de dos países -Estados Unidos y Singapur- que han sabido transformar sus currículos hacia una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos y que se han convertido en un referente para el diseño de los currículos de matemáticas a nivel internacional; y en segundo lugar se van a explicitar las acciones que se proponen desde el NCTM (2015) para que la educación matemática sea una oportunidad de progreso social.

3.1. Algunos ejemplos de cambios curriculares

Algunos de los ejemplos más claros de la transformación de los currículos de matemáticas son, entre otros, los Estándares Comunes para las Matemáticas de Estados Unidos o bien el currículo de matemáticas de Singapur, país muy de moda actualmente en el ámbito de la educación matemática por su éxito en las pruebas de medición internacional. Lógicamente, estos cambios curriculares han supuesto importantes desafíos para el profesorado, y el éxito de dichas propuestas se ha debido principalmente al esfuerzo del profesorado para adaptarse a estos cambios.

En Estados Unidos, la mayoría de sus estados (45 del total de 50) han adoptado los Estándares Comunes para las Matemáticas como base para los nuevos planes de estudio de matemáticas (CCSSI, 2010). Estos estándares comunes se estructuran en estándares para la práctica matemática y estándares para el contenido matemático. En concreto, se describen ocho prácticas matemáticas para todas las etapas (ver figura 5): 1) Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos; 2) Razonar de manera abstracta y cuantitativa; 3) Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás; 4) Modelizar matemáticamente; 5) Usar las herramientas adecuadas estratégicamente; 6) Prestar atención a la precisión; 7) Buscar y usar las estructuras; y 8) Buscar y expresar regularidades.

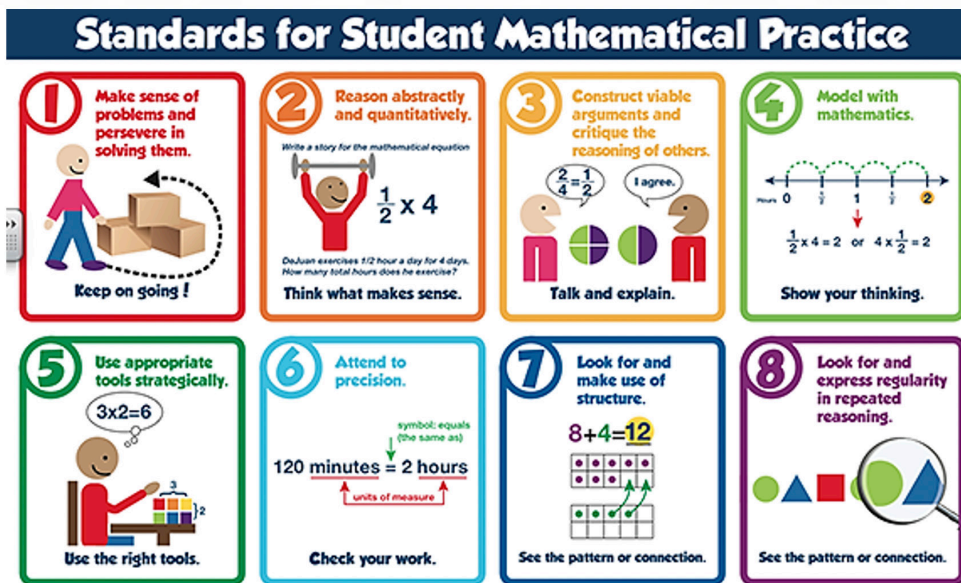


Figura n.º 5. Estándares para las prácticas matemáticas. Fuente: <https://www.thinglink.com/scene/718282830563508224>

Estas ocho prácticas han sido adaptadas de los cinco estándares de proceso del NCTM (2000) y de los cinco aspectos de competencia descritos en el informe “*Adding It Up*” del *National Research Council* de Estados Unidos (NRC, 2001). Estas prácticas se deben enseñar en todos los niveles, de los 3 a 18 años, y los detalles de cómo estas prácticas deben conectarse al contenido matemático de cada nivel se dejan a la implementación local de los Estándares. En cualquier caso, la adopción generalizada de los Estándares estatales de base común para las matemáticas ofrece una oportunidad sin precedentes para el mejoramiento sistémico de la educación matemática en los Estados Unidos.

Los Estándares estatales de base común para las matemáticas colocan el cimiento para el desarrollo de currículos, enseñanza y evaluaciones matemáticos coherentes, enfocados y más vigorosos que fomenten el entendimiento conceptual y el razonamiento, así como el dominio de las habilidades. Tal cimiento ayudará a garantizar que todos los estudiantes estén preparados para la educación post-secundaria y el mundo laboral cuando egresen de la educación media superior y que estén capacitados para tomar su lugar como participantes cabales y productivos dentro de la sociedad (NCTM, 2015, p. 4).

En relación a Singapur, el planteamiento de la enseñanza de las matemáticas que se ha adoptado en el Ministerio de Educación (*Ministry of Education Singapore*, 2012), y que diversas editoriales han rebautizado con el nombre de “Método Singapur” con el propósito de vender libros bajo los auspicios de los principios que fundamentan esta concepción de la enseñanza de las matemáticas, se observa que el foco se centra en la resolución de problemas y que los procesos y las habilidades son ejes

imprescindibles para aprender los conceptos (ver figura 6), considerando además otros elementos imprescindibles como las actitudes o bien la metacognición.

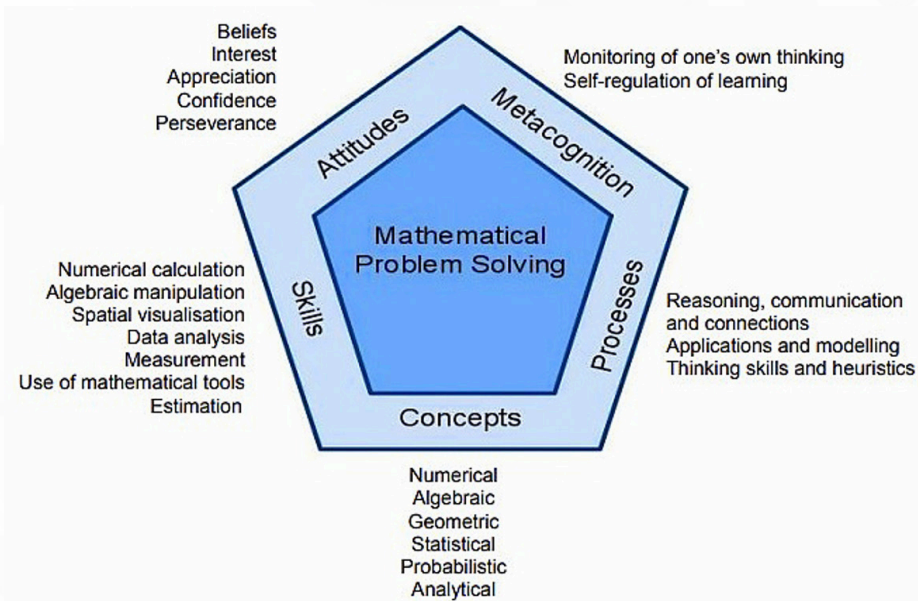


Figura n.º 6. Bases de la enseñanza de las matemáticas en Singapur. Fuente: Ministry of Education Singapore (2012, p. 14).

En este currículum, inspirado en las aportaciones de autores del ámbito de la psicología educativa como Bruner, Skemp o Vigotsky y de la educación matemática como Dienes, los procesos se conciben como las habilidades involucradas en la adquisición y la aplicación del conocimiento matemático. Incluyen el razonamiento, la comunicación y las conexiones, junto con aplicaciones y modelización más diversas habilidades de pensamiento y heurísticos. Muy sintéticamente, el razonamiento se concibe como una habilidad para analizar situaciones matemáticas y construir razonamientos lógicos; la comunicación es la habilidad para usar en lenguaje matemático para expresar ideas y argumentos matemáticos con precisión; las conexiones hacen alusión a los vínculos entre los conocimientos matemáticas, entre las matemáticas y otras disciplinas y también entre las matemáticas y el mundo. El resto de procesos hacen referencia explícita a esta conexión entre las matemáticas y el mundo: interesa que, a través de las habilidades de aplicación y modelización, los alumnos puedan conectar las matemáticas que aprenden con el mundo real a través de la resolución de verdaderos problemas en los que sea imprescindible usar habilidades de pensamiento y heurísticos, es decir, métodos de investigación. Queda atrás también, por lo tanto, la idea de problema asociada a ejercicio de aplicación para practicar un determinado contenido. Lo que se enfatiza es que, a través de este conjunto de procesos, los alumnos piensen y hagan, en la línea ya indicada.

Muchos analistas han interpretado estos cambios en el sistema educativo de Singapur como una de las claves para pasar de ser considerado un país tercermundista a ser el tercer país con mayor renta per cápita del mundo, además de figurar entre los primeros países en las listas internacionales de educación, sanidad, transparencia política y competitividad económica. Pero no hay que confundirse, la esencia de este cambio no está en absoluto en que nuestros alumnos aprendan matemáticas bajo un libro de texto que responda al “Método Singapur”, puesto que un libro de texto no garantiza la comprensión y el uso eficaz de los conocimientos matemáticos, por bien hecho que esté. La auténtica solución está en tener profesorado de las distintas etapas educativas con los conocimientos adecuados para planificar y gestionar la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, y promover así la competencia matemática de los alumnos.

3.2. De los principios a la acción para garantizar el éxito matemático de todos

El NCTM ha propuesto un conjunto de acciones muy recomendables, basadas en investigaciones, para todos los docentes, asesores pedagógicos y especialistas en matemáticas, así como para todo el personal administrativo de escuelas y distritos y cada uno de los líderes educativos y responsables de políticas. Estas recomendaciones se basan en los siguientes *principios rectores* para la educación matemática (NCTM, 2015, p. 5):

- Enseñanza y aprendizaje. Un programa de matemáticas de excelencia necesita una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas y para razonar de una manera matemática. De forma más concreta, se establecen *ocho prácticas de enseñanza* para garantizar un profundo aprendizaje: 1) establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje; 2) implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas; 3) uso y vinculación de las representaciones matemáticas; 4) favorecimiento del discurso matemático significativo; 5) planteamiento de preguntas deliberadas; 6) elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual; 7) favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas; y 8) obtener y usar evidencias del pensamiento de los estudiantes.
- Acceso y equidad. Un programa de matemáticas de excelencia requiere que todos los estudiantes tengan acceso a un currículo de matemáticas de alta calidad, a técnicas de enseñanza y aprendizaje eficaces, que les brinde altas expectativas y que les proporcione el apoyo y los recursos necesarios para maximizar su potencial de aprendizaje.
- Currículo. Un programa de matemáticas de excelencia incluye un currículo que amplíe unas matemáticas significativas y unos desarrollos de aprendizaje coherentes, así como también que acreciente las conexiones entre las áreas de estudio matemático y los vínculos entre las matemáticas y el mundo real.

- **Herramientas y tecnología.** Un programa de matemáticas de excelencia integra la utilización de la tecnología y las herramientas matemáticas como un recurso esencial con el objeto de auxiliar a los estudiantes a aprender, dar sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y a comunicar su pensamiento matemático.
- **Evaluación.** Un programa de matemáticas de excelencia garantiza que la evaluación sea una parte integral de la enseñanza, ofrece evidencias del dominio del contenido matemático importante y de las prácticas matemáticas relevantes, incluye una variedad de estrategias y de fuentes documentales y moldea la retroalimentación a los estudiantes, las decisiones de enseñanza y el mejoramiento del programa.
- **Profesionalismo.** En un programa de matemáticas de excelencia, los docentes y sus colegas se hacen responsables del éxito matemático de cada estudiante, así como de su avance profesional, personal y colectivo, hacia la enseñanza y el aprendizaje eficaces de las matemáticas.

El NCTM plantea que estos seis principios rectores constituyen una oportunidad única para que la educación matemática contribuya al progreso individual y social. Sin embargo, concluyen que para que esto sea así es necesaria la implicación de los líderes y responsables políticos (sobre todo los encargados de la legislación educativa); de los directores de los centros educativos, asesores pedagógicos, especialistas y otros líderes escolares; y, como no, del profesorado, que debe sentirse siempre apoyado para llevar a cabo una transformación de su práctica en el sentido expuesto.

4. Consideraciones finales

En este artículo se han expuesto los principales requisitos para que la educación matemática se convierta en una herramienta al servicio del progreso, tanto individual como social. En concreto, se ha incidido en tres grandes ámbitos: 1) en los cambios curriculares; 2) en los desafíos docentes; y 3) en las oportunidades sociales que se derivan de estos cambios y desafíos.

En relación a los cambios curriculares, se ha reflexionado acerca de la necesidad que los currículos de matemáticas dejen de centrarse exclusivamente en los contenidos y, en su lugar, incorporen sistemáticamente los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación para promover la competencia matemática, en el sentido expuesto por el NCTM (2003), Niss (2002) o la OECD (2004), entre otros.

Respecto a los desafíos docentes, se ha incidido en la necesidad de que el profesorado modifique su visión acerca tanto del sentido de las matemáticas escolares como de sus finalidades, asumiendo que la labor profesional del maestro no consiste en formar a estudiantes para que tengan éxito en la escuela, sino para que se puedan desenvolver bien en su vida cotidiana (Alsina, 2019a). Asimismo, se hecho hincapié en la necesidad de transformar la práctica docente desde una enseñanza de las

matemáticas focalizada en los contenidos hacia una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, basada en pensar y hacer más que en memorizar técnicas y procedimientos. Para ello, Alsina (2020) recomienda cinco prácticas productivas: 1) promover la resolución de situaciones problemáticas que impliquen pensar; 2) plantear preguntas efectivas en la clase de matemáticas que impliquen argumentar; 3) fomentar la comunicación en el aula de matemáticas en un ambiente que invite a interactuar, negociar y dialogar; 4) diseñar e implementar actividades matemáticas que requieran hacer conexiones; y 5) incentivar la expresión oral, gráfica y/o simbólica de las ideas matemáticas internas y las acciones externas a través de tareas que impliquen representar. Todavía en relación a los desafíos del profesorado, también se ha insistido en la importancia de reflexionar sistemáticamente sobre la propia práctica, preguntándose qué se ha enseñado, cómo se ha enseñado y cómo se puede mejorar (Alsina, 2017), ya que sin reflexión difícilmente puede producirse el desarrollo profesional (Alsina, 2019c).

Finalmente, se han revisado algunos países en los que se han llevado a cabo profundos cambios curriculares, como es el caso de Estados Unidos y Singapur, y se han descrito las condiciones para que estos cambios se conviertan en oportunidades. De acuerdo con el NCTM (2015), cada líder y responsable de las políticas educativas, cada administrador de los centros educativos, cada asesor y/o especialista en matemáticas, junto con todos los maestros y también las familias, deben comprometerse con los cambios ya que sólo cuando las palabras se conviertan en compromisos y acciones productivas, se superarán los obstáculos que en la actualidad impiden que las matemáticas escolares garanticen el éxito matemático de todos los estudiantes y, con ello, se contribuya al desarrollo individual y social.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.

Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números* 86, 5-28.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 33(1), 7-29.

Alsina, Á. (2017). Caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia: vinculando la investigación con buenas prácticas. *AIEM, Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 59-78.

Alsina, Á. (2019a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. (2019b). Repensando la formación inicial de maestros de matemáticas: cinco consideraciones para contribuir al progreso social. *Papeles de Trabajo sobre Cultura, Educación y Desarrollo Humano*, 15(3), 13-26.

Alsina, Á. (2019c). Hacia una formación transformadora de futuros maestros de matemáticas: avances de investigación desde el modelo realista-reflexivo. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 60-79.

Alsina, Á. (2020). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*.

Alsina, Á. y Coronata, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 21-34.

Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.

Alsina, Á., Maurandi, A., Ferre, E., y Coronata, C. (2020). Validating an Instrument to Evaluate the Teaching of Mathematics Through Processes. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10064-y>

Angoff, W.H. (1971). Scales, norms, and equivalent scores. En R.L. Thorndike (Ed.), *Educational measurement* (pp. 508-600). Washington, DC: American Council on Education.

Ball, D. (2000). Bridging Practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.

Ball, D. (2003). *What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics*. Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education. Recuperado de http://www.erusd.k12.ca.us/projectalphaseb/index_files/MP/BallMathSummitFeb03.pdf

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Girona, Girona.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Hill, H., Ball, D., y Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Hill, H., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.

Hill, H., Schilling, S., y Ball, D. (2004). Developing measure of teachers Mathematics Knowledge for Teaching. *The elementary School Journal*, 105. Recuperado de [https://www.google.com.mx/?gws_rd=ssl#q=Hill%2C+Ball+y+Schilling+\(2008\)](https://www.google.com.mx/?gws_rd=ssl#q=Hill%2C+Ball+y+Schilling+(2008))

J. Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M^a.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Maurandi, A., Alsina, Á y Coronata, C. (2018). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación. *Educatio Siglo XXI*, 36(3), 333-352.

Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus. Primary One to Six*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, Va.: NCTM.

National Research Council [NRC] (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OECD.

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy - A Framework for PISA 2006*. París: OECD.

Rychen, D.S., y Salganik, L.H. (2004). *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida*. México: Fondo de Cultura Económica.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Alsina, Á. (en prensa). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*.