Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/
Vol 21, No 2. Marzo – Agosto, 2021 ISSN 1659 -0643

Desarrollo histórico-epistemológico del álgebra: evolución hacia distintos significados

| Historical-epistemological development of algebra: its evolution toward different meanings |

Cristian Mejías
cristian.mejias@upla.cl
Universidad de Playa Ancha
San Felipe. Chile

Ángel Alsina
angel.alsina@udg.edu
Universidad de Girona
Girona. España

Recibido: 11 octubre 2019 Aceptado: 15 Setiembre 2020

Resumen. En este artículo se realiza una revisión del desarrollo histórico-epistemológico del álgebra. Indagamos acerca de su surgimiento desde la prehistoria hasta tiempos actuales; examinamos los aportes de la cultura egipcia, babilónica y china, entre otras, junto con un análisis del impacto que realizaron los árabes y los griegos en esta materia; y se muestra el tránsito hacia la consolidación del álgebra elemental, lineal, multilineal, homológica, conmutativa, no conmutativa y Booleana. Considerando estos antecedentes, presentamos una primera aproximación hacia una teoría del álgebra que considera distintas representaciones de ella, como es el significado intuitivo, clásico y matemático-axiomático.

Palabras clave: Álgebra, tipos de álgebra, significados del álgebra, conexiones matemáticas, historia de la matemática.

Abstract. The following article offers an in -depth look into the historical-epistemological development of algebra. Is also presents a study which encompasses its emergence, dated from pre-history to its evolution in current times. The contribution of the Egyptian, Babylonian and Chinese cultures, among others will be examined, along with an analysis of the impact that Arabs and Greeks have had, in the matter. From this point on, the transition towards the consolidation of elementary, lineal, multilinear, homological, commutative, noncommutative and Boolean algebra is also shown. Considering our previous ideas, a new approach that reshapes the algebraic theory and considers different meanings such as the intuitive, classical and mathematics-axiomatic ones, will be presented.

KeyWords: Algebra, types of algebra, algebraic meanings, mathematical connections, history of mathematics.

1.1 Introducción

Las matemáticas han ido evolucionando como ciencia a lo largo de la historia de la humanidad, expandiéndose y adquiriendo un mayor cuerpo teórico (Boyer, 1968). Lo que hoy se conoce como matemáticas, aritmética y álgebra, han sido el resultado de la acumulación de proposiciones teóricas de muchos científicos, y de estudios que se han aglutinado a lo largo de los siglos. Estas propuestas teóricas, aunque sean milenarias, se mantienen vigentes y en constante evolución (Cárdenas, 2009).

Para Stewart (2007), esta ciencia se inició hace aproximadamente 1500 años con la creación de símbolos para representar los números que conocemos hoy en día. Sin embargo, unos 8000 años a.C., ya se empezaron a utilizar tablillas con marcas verticales para representar la cantidad de animales, tierras, granos, aceites, legumbres, etc. Este método para cuantificar elementos se mantuvo vigente hasta 3000 años a.C. aproximadamente y, paulatinamente, dichos trazos fueron unidos por líneas horizontales entre una y otra, asemejándose a los números que conocemos hoy en día.

Por su parte, para Ruíz (2003), las civilizaciones egipcia y babilónica son el punto de partida de la historia de las matemáticas, y más específicamente, los grupos que ocupaban los espacios territoriales alrededor de los ríos Nilo, Tigris y Eufrates, donde había un activo intercambio comercial. En concreto, en la cultura egipcia se encontraron papiros de 1800 a 1650 años a.C. con problemas matemáticos resueltos de tipo aritmético aditivo, es decir, con multiplicaciones reducidas a sumas repetidas, como el Papiro de Moscú y el Papiro Rhind.

En la cultura oriental, específicamente en China, también se descubren y desarrollan aspectos relacionados con las matemáticas (Galán, 2012). El Chou Pei fue un libro basado en compilaciones de escritos y pergaminos, compuesto por cerca de 246 problemas matemáticos resueltos que hacían referencia a elementos cotidianos de agricultura, ingeniería y comercio, junto con otros problemas más abstractos como ecuaciones lineales, incógnitas e indeterminadas, números negativos o propiedades de los triángulos, revelándose en ellos objetos matemáticos relacionados con el álgebra.

Las culturas griegas e hindúes también tuvieron un papel importante en el inicio de las matemáticas. En concreto, los griegos organizaron sus descubrimientos en definiciones, axiomas y demostraciones, sus estudios fueron la base de la trigonometría actual y un aporte importante a la astronomía. Los hindús lograron resolver ecuaciones cuadráticas y utilizaron las raíces en sus problemas y soluciones (Ruíz, 2003).

En el Renacimiento comenzó el estudio de la teoría de grupos, además del uso y resolución de ecuaciones. En el siglo XIX, las matemáticas y, con ellas, el álgebra, empezaron a utilizarse en otras áreas de conocimiento como la física o la medicina, abandonando la concepción de una ciencia aislada y abstracta de poca utilidad para otras profesiones. En esta era se desarrollaron las series de Fourier con el uso de infinitos en trigonometría, el cálculo de las órbitas de los planetas, los estudios de magnetismo o las superficies topográficas y polinomios, los cuales son tópicos que forman parte de la educación formal en todo el mundo (Galán, 2012).

Considerando todos estos antecedentes históricos, el propósito de este artículo es indagar acerca del surgimiento y la evolución del álgebra dada su preponderante contribución al desarrollo de las matemáticas como ciencia. En primer lugar, se realiza una revisión del desarrollo histórico-epistemológico del álgebra; y, en segundo lugar, a partir de esta revisión se caracteriza una primera aproximación a la representación de sus significados intuitivo, clásico y matemático-axiomático.

1.2 Desarrollo histórico-epistemológico del álgebra

En este apartado nos internamos en la prehistoria del álgebra y su surgimiento como una herramienta en la construcción matemática. Se examinan los aportes de la cultura egipcia, babilónica y china, entre otras, junto con un análisis del impacto que realizan los árabes y los griegos en el surgimiento de esta materia.

Prehistoria del álgebra

Desde los orígenes de la humanidad se empezaron a utilizar los primeros conceptos matemáticos. El número de animales, las distancias recorridas, el tamaño de las presas que debían cazar o el crecimiento de la población, entre otros elementos, contribuyeron a una incipiente construcción de esta ciencia. Cotejando elementos cotidianos se tenía una preconcepción de lo que es contar. Como producto de la comparación entre objetos, las primeras civilizaciones poco tardaron en darse cuenta de la importancia de los dedos de las manos para especificar pequeñas colecciones (Sáenz, 1994). Utilizando la confrontación entre una agrupación de objetos o animales, por ejemplo, se inicia la formación de un sistema de numeración quinario, decimal o vigesimal. Más adelante se amplió el espectro de comparación, utilizándose otros elementos cotidianos como piedras, marcas en los huesos de animales y rótulos en los árboles, con la finalidad de obtener una mejor y más precisa contabilidad de objetos.

Un paso preliminar fue el que realizaron las primeras civilizaciones al comparar dos conjuntos con elementos diferentes, naciendo el concepto de número (Stewart, 2007). A partir de este evento y, a través de simbologías, diversas culturas fueron elaborando complejas estructuras aritméticas y algebraicas.

Antes del sistema de numeración contemporáneo, existían simbologías o abstracciones distintas a las que conocemos en la actualidad. Por ejemplo, antiguas civilizaciones utilizaban fichas de arcilla que, según su forma (cónica, esfera u ovalada), representaban porciones de granos, animales o jarras de aceite (figura 1.1). También para estos fines se utilizaron marcas en huesos de animales que se encontraron en la extinta Checoslovaquia y también en Sudáfrica, los cuales tienen una data aproximada de unos treinta mil años.

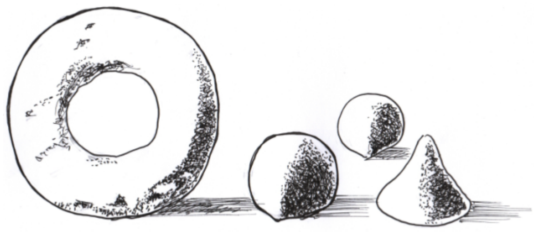

Figura 1.1: Envoltorio de arcilla con tres fichas en su interior (un cono y dos esferas). Encontrado en el actual Irán, hace 3.000 años a.C. (Schmandt-Besserat, 1978). Ilustración elaboración propia.

Con el correr de los años, las marcas realizadas en tablillas y huesos fueron transformándose en incipientes pictogramas y elementos simbólicos que representan palabras a través de las imágenes (figura 1.2).

Figura 1.2: Números egipcios (Sáenz, 1994). Ilustración elaboración propia.

Los matemáticos no sólo utilizaban símbolos, también usaban diagramas, lo que condujo a varios tipos de razonamientos visuales. Se descubrieron diagramas en tablillas babilónicas como la denominada YBC 7289 (figura 1.3), que muestra un cuadrado y dos diagonales. Los lados y las diagonales están marcados con distintos numerales en forma de cuñas. Este trabajo aritmético, geométrico y algebraico obtuvo una excelente aproximación para la $\sqrt{2}$.

Figura 1.3: Tablilla babilónica YBC 7269 (Stewart, 2007). Ilustración elaboración propia.

La instalación de la aritmética y el álgebra como disciplinas independientes de la geometría fue una situación gradual en Grecia. Arquímides, Apolonio y Ptolomeo usaron la aritmética solo para calcular cantidades geométricas. Por su parte, Herón, Nicomaco y Diofanto utilizaron la aritmética y el álgebra en forma independiente de la geometría (Ruíz, 2003).

Diofanto entregó soluciones esencialmente algebraicas a las ecuaciones especiales de primer grado con dos o tres incógnitas. Desarrolló una serie de 13 libros de los cuales sobreviven solo 6. En ellos destacan dos aspectos: la simbología como una de sus principales contribuciones y también, la solución de ecuaciones indeterminadas (Stewart, 2007).

Surgimiento del álgebra

El término "álgebra" proviene del vocablo árabe "al-Jabr, الجبر", siendo su significado el de "recomposición" o "reintegración". Existen evidencias que los babilónicos ya resolvían ecuaciones complejas antes del 2000 a.C., a pesar de las dificultades ante la inexistencia de los números negativos y la imposibilidad de utilizar una manipulación simbólica. La introducción del término "álgebra" se atribuye al matemático, astrónomo y geógrafo persa musulmán Muhammad Al-Khwarizmi quien utilizaba palabras y no símbolos, pero aun así sus métodos son similares a los utilizados en la actualidad (Stewart, 2007).

Quien entregó reglas para solucionar ecuaciones cuadráticas y un método para resolver ecuaciones cúbicas con raíces reales fue el matemático y astrónomo persa, Omar Khayyam. Sus investigaciones tuvieron un amplio acercamiento a la geometría, trabajando en la dimensión algebraica de la teoría de proporciones de Euclides, extendió el concepto de número hacia los irracionales positivos. También usó un método geométrico para resolver ecuaciones de tercer grado con raíces positivas (Ruíz, 2003).

Para llegar a los simbolismos actuales se requirieron cientos de años, siendo matemáticos del Renacimiento, como Diofanto de Alejandría, quienes comenzaron con una rudimentaria utilización de símbolos algebraicos. Quien también impulsó la utilización de simbolismos fue el matemático francés François Viète, siendo sus representaciones distintas a las que utilizamos en la actualidad (Stewart, 2007), él consideraba que las letras consonantes representaban constantes y las vocales incógnitas.

Los egipcios también elaboraron elementos algebraicos, sin embargo, su construcción fue bastante primaria. Sus aplicaciones estuvieron relacionadas con la repartición de víveres, cosechas y materiales. Uno de sus logros importantes fue la consolidación de un método para resolver ecuaciones de primer grado utilizando el método de falsa posición.

En el siglo I d.C., Herón de Alejandría inventó un método que ayuda a aproximar el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas inexactas. A inicios del siglo II, Nicómaco de Gerasa publicó un texto con reglas para el buen uso de los números, lo cual permitió seguir con la separación de la aritmética de la geometría que se había iniciado en la antigua Grecia (Ruíz, 2003). En el siglo III, Diofanto de Alejandría publicó su libro Aritmética, donde se tratan de forma precisa las ecuaciones de primer y segundo grado. Además comenzó a estructurar de forma rigurosa conceptos relacionados con ecuaciones y designó las incógnitas a través de símbolos. Sus trabajos aportaron fuertemente al desarrollo del álgebra, e influenciaron la Teoría de Números de Fermat, Euler y Lagrange, en el siglo XVIII (Sáenz, 1994).

En el siglo VII los hindúes desarrollaron reglas algebraicas para trabajar números positivos y negativos. Doscientos años después, Al-Khwarizmi escribió sobre los métodos de cálculo y de los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Posteriormente en el siglo X, otros matemáticos árabes como Abu Kamil y Al-Bujzani continuaron los trabajos iniciados por Al-Khwarizmi, avances que más tarde fueron utilizados por Fibonacci.

A partir del siglo XV se comenzaron a utilizar las letras "p" y "m" para la adición y sustracción respectivamente, junto con los símbolos $+$ y $-$, que también aparecieron durante esta época. Fueron mercaderes alemanes quienes comenzaron con el empleo de esta simbología, siendo Widmann quien formalizó la utilización de esta escritura. Por su parte, Rudolff inició el uso del símbolo de raíz cuadrada. En 1557, el inglés Robert Recorde inventó el símbolo $=$. La simbología de $>$ y $<$ se debe a Thomas Harriot (Sáenz, 1994).

Cardano, Stevin, Pacioli y Stifel introdujeron la utilización de números irracionales. Vieta entregó una aproximación para el número (Ruíz, 2003). Stifel usó irracionales en su forma decimal, lo cual difería de Pascal y Barrow, quienes consideraban algunos irracionales como simplemente magnitudes y no como números.

En cuanto a los números complejos, Girard le dio valor como soluciones formales de ecuaciones. Descartes los rechazó, pues decía que no eran verdaderos números. El francés Nicolás Chuquet introdujo en Europa occidental el uso de números negativos y notación exponencial, además a mediados del siglo 15, en su texto que trataba de aritmética, raíces e incógnitas, llamado *La triparty en la Science des Nombres*, sistematizó el tratamiento de potencias de la incógnita usando superíndices, además sugirió nombrar como "*premier*", "*champs*", "*cubiez*" y "*champs de champs*" a las cuatro primeras potencias de la incógnita (Stewart, 2007).

En este mismo periodo también se establecieron nuevas relaciones entre geometría y álgebra. El francés Oresme trabajó con los conceptos de tiempo, rapidez, distancia y velocidad, a través de representaciones gráficas que mezclaban estos dos elementos. Vieta y Fermat también trabajaron bajo la premisa de mezclar geometría y álgebra (Ruiz, 2003). Este último, a pesar de conocer los métodos de Vieta, sustentó sus investigaciones en trabajos de Diofanto y Apolonio. Además, también usaba los símbolos $+$ y $-$ para los positivos y negativos, respectivamente, y comenzó con la utilización de la simbología que se usa en la actualidad para los racionales. Pero fue René Descartes, quien en el siglo XVII fusionó la geometría y el álgebra, dando lugar a la geometría analítica. En este mismo siglo, Cramer elaboró una técnica del álgebra lineal para la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes (Boyer, 1968). A finales de este siglo, fue cuando Gauss publicó el Teorema Fundamental del Álgebra.

Posteriormente, ya en el siglo XVIII, Sarrus crea la regla de tres para el cálculo de determinantes de orden tres. Galois, de quien se dice que es el padre del álgebra abstracta, elaboró investigaciones sobre fracciones continuas, teoría de ecuaciones y teoría de números (Sáenz, 1994).

En el siglo XIX, Cauchy realizó investigaciones referentes a la teoría de permutación de grupos, convergencia y divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física. Además, estructuró los cimientos del análisis infinitesimal. Hamilton trabajó en investigaciones en torno a la aritmética de los números complejos y cuaterniones. Grassmann, que es considerado el principal precursor del álgebra lineal, trabajó elementos referentes a combinación lineal, independencia lineal, subespacio y dimensión. Por su parte, George Boole trabajó en ecuaciones lineales, cálculo de diferencias infinitas y probabilidades en general. Finalmente, Peano formalizó la definición del conjunto de los números naturales (Ruíz, 2003).

Con los antecedentes mencionados en este apartado se desprende que, como se ha indicado en la introducción, la construcción de la disciplina matemática nunca se ha detenido. Constantemente surgen teorías y objetos de estudio, junto con estos nuevos conceptos comienza a manifestarse también la necesidad de crear estructuras que son llamadas anillos, campos y grupos, y la conjunción de todas estas teorías ayudó a la concepción de las matemáticas abstractas.

1.3 Emergiendo distintos tipos de álgebra

En este apartado indagaremos los variados sistemas algebraicos que se fueron construyendo a lo largo de la historia de la matemática, a partir de la conformación de la estructura que se denominó matemáticas abstractas. Analizaremos brevemente el álgebra elemental, lineal, multilineal, homológica, conmutativa, no conmutativa y booleana, los cuales ayudarán a encausar y proyectar nuestro tránsito hacia la caracterización de los distintos significados del álgebra.

El álgebra elemental

El álgebra elemental responde a la utilización de elementos primarios. A diferencia de la aritmética, trabaja con números representados por símbolos, lo que permite ampliar el espectro matemático.

Se puede visualizar una diferencia sustancial entre el álgebra y la aritmética. En esta última, las cantidades se manifiestan a través de números con valores determinados; en cambio, en el álgebra elemental se manipulan factores literales (letras) que representan el valor que una persona le asigne, considerando que si atribuimos un valor a una letra, no puede representar en el mismo problema otra cantidad diferente a la ya concedida (Swokowski y Cole, 2009).

Dentro de los contenidos que trabaja el álgebra elemental se encuentran: números reales, solución de ecuaciones y desigualdades lineales, fórmulas y aplicaciones del álgebra, exponentes y polinomios, factorización, expresiones racionales y ecuaciones, gráfica de ecuaciones lineales, raíces y radicales, ecuaciones cuadráticas, y trigonometría, entre otras materias (Zill y Dewar, 2000).

El álgebra lineal

A lo largo de la historia, la matemática ha ayudado al hombre a comprender fenómenos que ocurren en la naturaleza, por esta razón desarrolló los modelos matemáticos. Muchos de estos modelos tienen un comportamiento lineal y otros son no lineales (exponenciales, potenciales). Un modelo es la representación de un proceso que hace referencia mayoritariamente a algún aspecto de la naturaleza. No solo ayudan a analizar y predecir el comportamiento de sistemas biológicos, sino que también existen modelos matemáticos que se utilizan en el desarrollo de los sistemas informáticos. Aquí nos centramos en los modelos que son lineales, dado que están íntimamente ligados al álgebra lineal.

El concepto de "lineal", en su parte más literal, se define como todo aquello que pertenece a la línea; sin embargo, en matemáticas la palabra lineal presenta un significado más amplio, siendo la teoría del álgebra lineal una generalización de las propiedades de la línea recta, el cual tiene un fuerte impulso gracias al estudio de las ecuaciones lineales (Grossman, 1996). Una de las principales investigaciones fue del matemático y filósofo francés D'Alembert, quien descubrió que las soluciones de un sistema $ax = b$ forman una variedad lineal (Stewart, 2007). Del mismo modo, otros investigadores descubrieron distintos conceptos que hoy envuelven a este eje, por ejemplo, el término matriz fue utilizado por el matemático inglés James Joseph, quien la definió como un arreglo cuadrilongo de términos. El también británico Arthur Cayley, percibió la importancia del concepto "matriz", lo que permitió profundizar en esta área, indagando y conceptualizando la inversa de una matriz, que permite calcular de forma más ágil los sistemas de ecuaciones lineales de dos o más variables, a la vez que permite reconocer un sistema de ecuaciones compatibles indeterminados.

Como elementos constituyentes del álgebra lineal encontramos a las ya mencionadas ecuaciones lineales y matrices, además de determinantes, espacios vectoriales y transformaciones lineales, entre otros. Los conceptos y los métodos de resolución asociados a ella han sido un aporte relevante al entendimiento de distintos fenómenos, colaborando en la comprensión de variadas áreas del conocimiento en las ciencias naturales y exactas.

El álgebra multilineal

El álgebra multilineal entrega la continuación natural e inmediata del álgebra lineal, concibiéndose como la extensión y generalización de los resultados de ella (Martínez-Chavanz, 2006). Aquí encontramos temas referentes a las formas canónicas, bilineales, cuadráticas y sesquilineales, además de contenidos alusivos a producto interno y producto tensorial, entre otros. Se preocupa de las funciones multivectoriales y multiformas en lo referido a la dependencia de función lineal, es decir, investiga los tensores que permiten satisfacer ampliamente las necesidades de la matemática y la física. Además proporciona la base algebraica para estudiar los distintos espacios y geometrías.

Respecto a las formas canónicas, el alemán Hermann Grassmann demostró para un operador lineal ρ, que el espacio completo es posible de descomponer como una suma directa de subespacios invariantes. Quienes comenzaron a trabajar las formas bilineales fueron el también alemán Karl Weierstrass y el francés Camille Jordan, entre otros. Paradójicamente, este último no llegó al problema de clasificación mediante las formas bilineales, dado que lo realizó utilizando las funciones lineales. El estudio de las formas cuadráticas y bilineales llevaron a descubrir principios generales concernientes a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Otros aportes los realizaron Cayley y el mismo Grassmann, quienes trabajaron con el producto tensorial. Por su parte, el alemán Elwin Christoffel organizó este algoritmo descubriendo las derivadas denominadas invariante y covariante, que fueron ampliamente utilizadas por Albert Einstein en su ley de gravitación y en la teoría general de la relatividad (Lluis-Puebla, 2005).

El álgebra homológica

Es una disciplina relativamente nueva que estudia la homología en un marco algebraico general. Sus orígenes pueden asociarse a los estudios realizados en topología combinatoria y en álgebra abstracta. Sus principales exponentes son Henri Poincaré y David Hilbert, quienes realizaron sus contribuciones a finales del siglo XIX.

A inicios de los años cuarenta del siglo pasado, comenzó el nacimiento de la homología a raíz de la institucionalización de los conceptos de homología y cohomología. Esta última, perteneciente al campo de la topología algebraica, se focaliza en el estudio de variantes homotópicos, que son objetos algebraicos asociados a espacios topológicos que no presentan variación bajo deformaciones continuas. Entre los principales matemáticos que contribuyeron al desarrollo del álgebra homológica, destacan Johann Tobias Mayer, Heinz Hopf, Emmy Noether y Pável Aleksándrov, además de matemáticos recientes como el francés Henri Cartan (no Élie Cartan) y el polaco Samuel Eilenberg, quienes consideraban que la homología no sólo debían investigarla como un aspecto dentro de la topología, sino que había que abrir sus horizontes hacia otros contextos algebraicos más generales (Cartan y Eilenberg, 1956).

Cabe destacar que el álgebra homológica prosigue en su desarrollo. Quien continuó con investigaciones en esta área fue Alexander Grothendieck. Algunos temas relativos al álgebra homológica son los funtores derivados, que se desarrollan sobre categorías de módulos sobre un espacio anillado (Lluis-Puebla, 2005), además de los funtores Tor y Ext.

El álgebra conmutativa

Uno de los precursores de este tipo de álgebra es David Hilbert, quien la trabajó como una teoría afín a la geometría algebraica. Algunas de las principales nociones asociadas a este campo son, por un lado, el ideal primo, ya que proporciona una extensión común de los primos de la Aritmética y de la

Geometría; y por otro lado, la teoría de esquemas (Ivorra, 2015).

Este tipo de álgebra es entendida como el estudio de los anillos conmutativos, presentándose como la unificación de la aritmética y la geometría afín. Se desarrolla a partir de la geometría algebraica y la teoría de números, siendo su principal área de investigación los anillos conmutativos, sus ideales, módulos y álgebras. El álgebra conmutativa está íntimamente ligada al álgebra homológica a través de los conjuntos algebraicos afines. En geometría algebraica, el tipo de anillos estudiado es el anillo $k[x_1, .., x_n]$ de polinomios en varias variables sobre un cuerpo k, mientras que en la teoría de números es el anillo Z de los racionales enteros (Atiyah y McDonald, 1978).

El álgebra no conmutativa

Se focaliza en el estudio de las propiedades algebraicas no conmutativas y las estructuras definidas sobre ella. Se habla de una geometría sin puntos, ya que no existe ningún espacio definido, analizándose las propiedades de un espacio conmutativo sin tener que definirlo de manera formal. Esta disciplina se inicia a partir de la unión de contenidos referentes al álgebra y del análisis matemático, con aquellos propios de la geometría, es decir, es una ampliación de la geometría diferencial ordinaria. De esta forma, una variedad diferencial es aquella que se explica a partir de una colección de curvas suaves definidas sobre ella, es decir, se define por su álgebra de coordenadas. Por su parte, la generalización consiste en reemplazar el juego de coordenadas por un álgebra no conmutativa así arrancando la información geométrica deseada (Ugalde y Várilly, 2010).

La geometría no conmutativa colabora a la física en solucionar una de las dificultades que presenta la física cuántica, cuando impide la determinación simultánea de la posición y momento de una partícula elemental, permitiendo observar lo que rodea a un espacio subatómico (Ugalde y Várilly, 2010). Además, con ella es posible reformular algunas herramientas clásicas del análisis en términos algebraicos e hilbertianos como la teoría de la medida o la topología, entre otros (Macho, 1998).

El álgebra booleana

Hacia 1850, el irlandés George Boole trabajó en un sistema matemático para desarrollar proposiciones lógicas con símbolos. Esta naciente álgebra, también denominada álgebra lógica, álgebra de contactos o álgebra proposicional, es un cálculo que consiste en que las reglas de las operaciones se refieren principalmente a la forma de los signos, no centrándose en el contenido que hay detrás. Boole la propuso como un método constructivo que desarrolla un sistema lógico, diferenciándose de los sistemas clásicos dado que ellos imponen principalmente la abstracción. Por otra parte, el álgebra booleana se manifiesta a través de reglas de deducción que pueden ser expresadas mediante un lenguaje que puede ser informático, o bien utilizando un metalenguaje, que es aquel que sirve para comunicarse con otro lenguaje (Barco, 2005).

Si bien Boole es considerado el padre y principal precursor del álgebra booleana, también recibió aportes de otros matemáticos que ayudaron a fortalecer esta incipiente teoría. Una de las contribuciones provino del también británico Augustus De Morgan, quien trabajó en la noción de suma lógica, a raíz de que el concepto de suma propuesta y utilizada por Boole era el de suma exclusiva, no asignando una simbología para la suma inclusiva, lo que acarreó algunas dificultades en los momentos que deseaba realizar un cálculo con aquellos operadores. Quien también realizó un significativo aporte en ese ámbito fue William Stanley Jevons, que incorporó a la disyunción como suma lógica (Barcos, 2005).

El álgebra de Boole es un sistema matemático que utiliza variables que están enmarcadas en un sistema de elementos binarios $B = \{0, 1\}$ y que corresponden a OR (+) y AND (*), más operadores lógicos que en su conjunto, colaboran para realizar un tránsito entre la teoría formal matemática y las aplicaciones en el ámbito tecnológico, industrial y en las comunicaciones.

1.4 Los distintos significados del álgebra

Considerando el desarrollo histórico-epistemológico del álgebra descrito y la desagregación hacia distintos tipos de álgebra, en este último apartado se realiza una primera aproximación a sus diversos significados, junto con el análisis de algunos tipos de álgebra y cómo se van refundiendo en una estructura consolidada. Haciendo un símil con los significados de la probabilidad descritos por Batanero (2005), se considera que estos distintos significados del álgebra se deberían incluir en la enseñanza de esta área en forma progresiva, comenzando por las ideas intuitivas de los alumnos sobre los conocimientos algebraicos, dado que "la comprensión se debería interpretar como un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto" (Batanero, 2005, p. 257), hasta llegar a los significados clásico y matemático-axiomático.

Significado intuitivo del álgebra

Cuando hablamos de álgebra, inmediatamente pensamos en expresiones numéricas y literales que son asimilables solo para entendidos en esta materia, sin embargo, desde pequeños realizamos aproximaciones a esta área a través del álgebra temprana y el pre-álgebra, que más tarde se van profundizando en la enseñanza formal. Las personas inician una manipulación algebraica trayendo consigo nociones y enfoques que usaban en aritmética. Kieran (1989) postula que el álgebra no es una mera generalización de la aritmética, por lo que su aprendizaje no se basa en hacer explícito lo que de una u otra forma estaba implícito en la aritmética, sino que requiere un cambio de pensamiento del estudiante desde las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales.

Los inicios de las actividades intuitivas se remontan a los años 200-250 a.C., a partir del surgimiento de la necesidad de comunicar la matemática. Klein (1992) indicaba que en esos años todo se limitaba al planteamiento y solución en forma verbal, centrándose en la descripción de aspectos procedimentales de los pasos para resolver el problema que se ha generado.

A medida que iba transcurriendo el desarrollo del álgebra, su concepción mutaba de acuerdo a la interpretación de su naturaleza y su posible carácter objetivo o subjetivo, lo que produjo una serie de controversias entre los precursores de esta concepción matemática. Sin embargo, actualmente se asume que durante la primera infancia los niños empiezan a ser conscientes de los efectos de las acciones que llevan a cabo con la intención de buscar la complicidad y atención del adulto (Puche, Orozco, M., Orozco, B. y Correa, 2009), es decir, se encuentran en una fase de exploración entre la acción y la reacción. Estas acciones son, para Mason (2011, p. 567), "las instancias en que el niño desarrolla el control sobre sus facultades a través del desarrollo de su conciencia (como una capacidad para actuar), mediante la generalización". El mismo autor, en 2008, indicó que la generalización es una actividad humana e innata que los niños pequeños llevan a cabo de manera natural en el contexto escolar. Por su parte, Papic, Mulligan, Mitchelmore (2011) añaden que es precisamente a través de la generalización como se inicia el desarrollo del pensamiento algebraico. Desde esta perspectiva, en la enseñanza actual podemos instar a los niños, desde las primeras edades, a ser perspicaces en la observación de su entorno, lo cual les permite identificar formas, patrones geométricos, patrones numéricos y secuencias; realizar comparaciones a través de distintos tipos de relaciones (equivalencia y orden, principalmente) y analizar cambios (Alsina, 2019). Por ejemplo, se puede comparar la cardinalidad de elementos que encontramos en el hogar para introducir el contenido de igualdad y desigualdad. Esta observación colaborará en el tratamiento de nociones algebraicas considerando aspectos intuitivos, cimentando su aprendizaje, explotando el interés de los niños por los juegos y las actividades concretas para lograr la institucionalización y formalización la estructura matemática (Mejías, 2019).

Significado clásico del álgebra

Existen miradas comunes entre los autores cada vez que se hacen alusiones a la mirada clásica del álgebra, en la que se reúnen elementos que hacen referencia a generalizar expresiones aritméticas que en un comienzo eran tratadas de forma particular. Comienzan a existir convenciones de notación y escritura, simbolización de expresiones, formalización de estructuras complejas y un análisis concienzudo de una de las concepciones matemáticas más relevantes como es la función, considerando que es una de las principales ideas matemáticas (Godino, 2003).

Los primeros vestigios del álgebra tienen su punto de partida en el año 2000 a.C., donde los babilónicos ya resolvían complicadas ecuaciones. Su método consistía en desarrollar a través de prosas las ecuaciones de primer y segundo grado (Sáenz, 1994). Más tarde en el siglo III a.C., los Chinos fueron construyendo una incipiente álgebra, lo cual quedó plasmado en el tratado matemático más antiguo que tenían, que es denominado Chou Pei Suan Ching (Galán, 2012). Antes de esta compilación de escritos y pergaminos, principalmente se encontraron elementos que dan indicios de una construcción matemática basada en la aritmética. También hubo aportes significativos en esta área por parte de los griegos, quienes fueron capaces de organizar en definiciones, axiomas y demostraciones el conocimiento matemático y, con ello, algebraico. Además, fueron los precursores de lo que denominaron el álgebra geométrica. Por su parte, los hindús trabajaron y ampliaron la utilización de las ecuaciones cuadráticas.

En 1840, el inglés Georg Nesselmann clasificó esta rama matemática en álgebra retórica, donde los problemas se resolvían en prosa; álgebra sintetizada, en la cual se utilizan abreviaciones para las incógnitas y las operaciones; y álgebra simbólica, donde se utilizan símbolos simples para expresar las incógnitas y las operaciones. No obstante, fue Joseph-Louis Lagrange quien formaliza e independiza la matemática del mundo físico real logrando un desarrollo autónomo y fundamentado (Sáenz, 1994), comenzando a definir los simbolismos propios del álgebra clásica, junto con el álgebra abstracta y sus estructuras algebraicas.

Carl Friedrich Gauss, de quien se dice que es uno de los matemáticos más precoces que hayan existido, sorprendiendo a los 10 años de edad a su maestro al ejecutar correctamente la suma de los 100 primeros términos de una progresión geométrica a través de su teoría de congruencias binomiales, logra unir la aritmética, el álgebra y la geometría. En el año 1799, el mismo Gauss, concreta la demostración que establece que toda ecuación algebraica en una incógnita tiene una solución en los complejos, obra mundialmente conocida como Teorema Fundamental del Álgebra (Sáenz, 1994).

La teoría algebraica se va desarrollando de forma notable a partir de mediados del siglo XIX, avanzando en abstracción y generalización. En esta etapa se considera la idea de Grupo, que fue un concepto acuñado por Évarist Galois, y empiezan a surgir una gran variedad de estructuras matemáticas, entre las que destacan los semi-grupos, cuasi-grupos, monoides, anillos, ideales, dominios enteros, anillos de división, campos espacios vectoriales, álgebra lineal, entre otros, los cuales van dando forma al álgebra clásica superior.

Si nos situamos en la institución escolar, uno de los principales objetivos de la enseñanza del álgebra es que el estudiante logre realizar la conversión y reconversión del lenguaje natural hacia el lenguaje algebraico. No debe centrarse en particularidades, sino que debe considerar la inferencia de procedimientos, relaciones y patrones como una habilidad a desarrollar, o bien manipular expresiones simbólicas obteniendo equivalencias (Mejías, 2019). Esto está fuertemente asociado a elementos troncales del álgebra clásica, donde coexisten una adecuada manipulación de expresiones algebraicas, factorizaciones, potenciaciones, radicales, ecuaciones, inecuaciones, funciones exponenciales, logaritmos, progresiones, combinatorias y trigonometría, entre otros elementos, con la elaboración de incipientes modelos matemáticos que permitan obtener madurez en el contenido para la comprensión de tópicos abstractos en matemática.

Existen lineamientos que se han mantenido inalterables a través de los años. Ya en 1986, Love, mencionado en Keiran (1989), indicaba sobre el pensamiento algebraico:

> "hoy en día el álgebra no es meramente dar significados a los símbolos sino otro nivel más allá de eso; que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos - por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, eso es lo que significa pensar algebraicamente"

Es decir, una de las cuestiones significativas es dejar de lado lo repetitivo y memorístico para dar un giro hacia una construcción y desarrollo de un pensamiento matemático-algebraico que nos permita desmenuzar el álgebra, de tal forma que mediante el proceso de reconstrucción se produzca una mayor comprensión. Así, pues, la definición clásica del álgebra debe ser utilizada en la escuela, no como una estructura rígida y extremadamente teórica, sino como parte de la matemática aplicable en el entorno (Mejías, 2019).

Significado matemático-axiomático del álgebra

En la construcción de los fundamentos del álgebra se han elaborado axiomas, teoremas y corolarios los cuales dan los cimientos a esta disciplina. Pasaron muchos años antes de que existiera la formulación teórica que tenemos en la actualidad. Los egipcios usaban la matemática para resolver problemas cotidianos, además de elaborar un método llamado de la falsa posición el cual empleaban para resolver ecuaciones de primer grado.

Herón de Alejandría y Nicómaco de Gerasa realizaron interesantes aportes, pero sus escritos se encuentran un poco alejados de las formalizaciones algebraicas, situándose más cercanos a la aritmética. Por su parte, Diofanto comenzó a utilizar simbolismos algebraicos que aunque muy elementales, provocaron un cambio sustancial en la estructura matemática de aquellos tiempos, razón por lo que él es conocido como el padre del álgebra. El italiano Leonardo de Pisa publicó el tratado del ábaco, obra que inspiró a los estudiosos de la aritmética y el álgebra. El mismo Pisa, también conocido como Fibonacci, continuó fortaleciendo los principales trabajos de los consignes algebristas Al-Jwaritzmi, Kamil y Bujzani.

Nicolas Chuquet introdujo los números negativos, Christoph Rudolff el símbolo de raíz cuadrada y Robert Recorde inventó uno de los símbolos más versátiles en matemática, como es la igualdad. François Viéte y René Descartes realizaron trabajos en los cuales impulsaron racionamientos axiomáticos del álgebra. Con estas contribuciones, más las formalizaciones y los aportes de Cramer, Gauss, Sarrus, Galois, Cauchy, Abel, Hamilton y Grassman, entre otros, se fue conformando un cuerpo y con él, los axiomas que son utilizados en las estructuras algebraicas.

Por lo general, los axiomas se refieren a relaciones incuestionables entre elementos primarios que no se definen, los cuales deben ser consistentes e independientes; es decir, no deben producirse contradicciones entre ellos, y ninguno de ellos puede ser deducido de los demás (Sáenz, 1994).

A partir de Euclides y durante los dos milenios siguientes, los axiomas eran vistos como verdades absolutas y autoevidentes, eran proposiciones tan indiscutibles que ningún matemático debía cuestionarlas con seriedad (Stewart, 2007). Aristóteles indicaba que los axiomas debían ser obtenidos necesariamente a través de las observaciones de los objetos del mundo físico (Ruíz, 2003).

En una definición más acabada, podemos indicar que un axioma caracteriza o define una estructura base, encontrando en el método axiomático tres elementos importantes: 1) la construcción de una estructura como objeto conceptual; 2) la elaboración de una teoría acerca de dicha estructura; y 3) la construcción de modelos del objeto conceptual. Axiomatizar un cuerpo teórico es como poner en limpio, delimitar y organizar como sistema deductivo un conjunto de proposiciones, considerando que todo término no definible por algún otro concepto más elemental será un primitivo. Por otra parte, toda proposición no demostrable será una tesis primitiva, es decir, un axioma (Lorenzo, 1980). Con lo anterior ha sido posible observar diferentes posturas iniciales respecto a los axiomas y al álgebra, permitiendo a través de los años fundamentar y desarrollar una teoría algebraica con una multiplicidad de acepciones.

1.5 Consideraciones Finales

Las distintas civilizaciones no solo han contribuido a un desarrollo sustancial de la matemática, también lograron en el transcurso de la historia concebir modelos aritméticos, geométricos y algebraicos, construyeron proposiciones, axiomas e incluso relaciones multifactoriales. Además, elaboraron y demostraron numerosos teoremas que sirven como sustento de esta disciplina en lo general y por consiguiente del álgebra en lo particular.

Los conceptos asociados al álgebra han contribuido enormemente a variadas disciplinas de las ciencias naturales y exactas. En química se utilizan expresiones algebraicas para la obtención de la densidad de un compuesto sólido o la presión de una mezcla gaseosa, y se emplean potencias y raíces cúbicas para el cálculo de equivalencias de unidades de volumen (Torres, 2018). Esto también ha ocurrido en otras áreas del conocimiento, como la aplicación de los modelos de insumo-producto de Leontief, utilizado Economía, y de crecimiento de la población en Demografía (Grossman, 1996). Son comunes las aplicaciones trigonométricas para el cálculo de distancias, igualmente que las funciones exponenciales y logarítmicas que describen el crecimiento de poblaciones de bacterias, o la obtención de la edad aproximada de un fósil a través del carbono-14 (Zill y Dewar, 2000). El álgebra lineal es utilizada en geotecnia y mecánica de fluidos, y las aplicaciones del álgebra booleana se encuentran en arquitectura de computadores, diseño digital, en el *hardware* y *software* computacional (Barco, 2005).

La historia del álgebra y de las matemáticas en general aún están muy ausentes en la enseñanza escolar y universitaria. La mayor preocupación en estos niveles se encuentra en fortalecer aspectos instruccionales de esta ciencia y en aplicar modelos matemáticos. Escasean los relatos y episodios ocurridos a través de tantos años de construcción matemática y cómo se fue consolidando con los aportes que realizaron antiguas civilizaciones.

Desde este prisma, es sustancial incorporar la historia, no sólo como un conjunto de sucesos y biografías escritas en los textos con cierto grado de conexión con los temas que se tratan en las sesiones de clase, dado que puede entregar lineamientos y sobretodo proporciona propuestas en el tratamiento de los contenidos que se deben enseñar. Un ejemplo de esto puede ser el uso del álgebra geométrica, que tal como lo realizaron los griegos, sirve para resolver problemas algebraicos a través de procedimientos geométricos (Sáenz, 1994). Usando este método no se ocupan las expresiones algebraicas como un elemento memorístico, sino que son empleadas como un contenido transversal entre la geometría y el álgebra. Los griegos también utilizaron el álgebra geométrica para resolver ecuaciones de primer grado, con este método se logra encontrar la solución requerida en una ecuación y también es posible introducir otros conceptos algebraicos como proporción, e incluso construcciones geométricas.

Evidenciar cómo fue evolucionando el álgebra a partir de los aportes de distintas culturas, más el análisis de los distintos tipos de álgebra, ha contribuido a caracterizar los significados intuitivo, clásico y matemático-axiomático. El significado intuitivo se manifiesta luego de la necesidad de comunicar una idea matemática-algebraica. El significado clásico se revela como aquel elemento troncal que nos hace transitar entre las concepciones tradicionales y el pensamiento algebraico. Finalmente, en el significado matemático-axiomático, que se nutre de los simbolismos y la abstracción, encontramos las estructuras formales, los axiomas, teoremas y corolarios.

Del mismo modo que lo indica Batanero (2005) haciendo referencia a los significados de la probabilidad, los significados del álgebra deberían incluirse de forma progresiva en la matemática escolar, comenzando con ideas intuitivas que se tienen respecto del álgebra, tomando en consideración que la comprensión de un contenido algebraico es un proceso continuo y creciente en el que el estudiante construye y relaciona progresivamente los elementos del significado asociados al concepto. La utilización en secuencia ayudará a la comprensión y consolidación de aquellos tópicos que fueron tratados e introducidos de manera intuitiva por el alumno y que posteriormente requerirán de la fundamentación teórica que el contenido matemático-algebraico precisa, a través de los significados clásico y matemático-axiomático.

Finalmente, es muy importante tener plena claridad que la relación entre enseñanza y aprendizaje del álgebra podemos circunscribirla en una perspectiva modelizadora y transversal, pues este concepto no puede estar limitado a un solo significado. Es relevante que los docentes cuenten con sólidas herramientas matemáticas y didácticas que les permita orientar de forma gradual la enseñanza de esta rama y así ir construyendo los conceptos necesarios para su institucionalización. Una forma es comenzar por el significado intuitivo del álgebra pasando por los otros significados, así paulatinamente podrá reorientar la instrucción matemática hacia una matemática centrada en la persona que aprende.

Bibliografía

[1] Alsina, Á. (2019) "Del razonamiento lógico-matemático al algebra temprana en educación infantil". Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8(1), 1-19, ISSN 2254-8351

[2] Atiyah, M.; McDonald, I. (1978) Introduction to conmutative algebra. London. Great Britain: Addison-Wesley Publishing Company, ISBN 0-201-00361-9 (H), ISBN 0-201-40751-5 (P)

[3] Barco, C. (2005) Álgebra Booleana. Aplicaciones tecnológicas. Cali. Colombia: Editorial Universidad de Caldas, ISBN 958-8231-38-8

[4] Batanero, C. (2005) "Significados de la probabilidad en educación secundaria". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3), 247-263, ISSN 1665-2436

[5] Boyer, C. (1968) A history of mathematics. New York. United States of America: Wiley International Edition, ISBN-10 0471543977, ISBN-13 978-0471543978

[6] Cárdenas, J. (2009). La matemática: una ciencia en evolución permanente. Revista de la Universidad de La Salle, 50, 160-172.

[7] Cartan, H.; Eilenberg, C. (1956) Homological Algebra. Primera Edición. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, ISBN 0-691-04991-2

[8] Galán, B. (2012) Matemáticas: de dónde vienen y hacia dónde se dirigen. Santander. España: Editorial Universidad de Cantabria. Recuperado de `https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A1n%20Atienza%2C%20Benjam%C3%ADn.pdf?sequence=1`

[9] Godino, J. D. (2003) "Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática". Universidad de Granada. Recuperado de `https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf`

[10] Grossman, S. (1996) Álgebra Lineal. Quinta Edición. Filadelfia. USA: Saunders College Publishing, ISBN 970-10-0890-1, ISBN 968-422-984-4

[11] Ivorra, C. (2015) "Álgebra Homológica y Álgebra Conmutativa". Universidad de Valencia. Recuperado de `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Algcom.pdf`

[12] Keiran, C. (1989) "A perspective on algebraic thinking". Proceeding of the 13th annual conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME), Vol. 2, (pp. 163-171). Paris.

[13] Klein, A. (1992) Greek mathematical thought and the origin of algebra. New York. USA: Dover Publications, ISBN 0-486-27289-3

[14] Lluis-Puebla, E. (2005) Álgebra homológica, cohomología de grupos y k-teoría algebraica clásica. México D.F. México: Addison-Wesley Iberoamericana, ISBN 0-201-62917-8, ISBN 968-6394-05-2

[15] Macho, M. (1998) Algunas ideas sobre Geometría no conmutativa. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbao, España. Recuperado de http://www.ehu.eus/~mtwmastm/Medina99.pdf

[16] Martínez-Chavanz, R. (2006) Álgebra multilineal. Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia, ISBN 958-655-982-3

[17] Mason, J. (2011) What makes ?Algebra? early? En J. Cai, y E. Knuth (eds.), Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives (pp. 566-568). Berlin: Springer, ISBN 978-3-642-17735-4

[18] Mejías, C. (2019) "Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria". Tesis Doctoral. Universidad de Girona, http://hdl.handle.net/10803/667843

[19] Papic, M.; Mulligan, J.; Mitchelmore, M. (2011) "Assessing the development of preschoolers? Mathematical patterning". Journal for Research in Mathematics Education, 42(3), 237-268, ISSN 00218251

[20] Puche, R.; Orozco, M.; Orozco, B.; Correa, M. (2009) "Desarrollo infantil y competencias en la primera infancia". Ministerio de Educación Nacional Colombia. ISBN 978-958-691-363-8 Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/primerainfancia/1739/articles-178053_archivo_PDF_libro_desarrolloinfantil.pdf

[21] Ruíz, A. (2003) Historia y filosofía de las matemáticas. San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia, ISBN 9789968312875

[22] Sáenz, E. (1994) Historia de las matemáticas. Universidad Autónoma de Nuevo León. Recuperado de http://cdigital.dgb.uanl.mx/la/1020150847/1020150847.PDF

[23] Schmandt-Besserat, D. (1978) "El primer antecedente de la escritura". Revista de Investigación y Ciencia, 23, 6-66, ISBN 061-807-363-9

[24] Stewart, I. (2007) Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años. London, Great Britain: Critica, ISBN 978-849-892-329-2

[25] Swokowki, E.; Cole, J. (2009) Álgebra y trigonometría con geometría analítica. London, Great Britain: Cengage, ISBN 9789708300391

[26] Torres, C. (2018) "Relaciones de la química con la matemática y lenguaje: propuesta de aprendizaje en un entorno virtual". Revista de Didáctica de la Química, 29(2), 51-61, ISSN 0187-893X

[27] Ugalde, W.; Várilly J. (2010) "Geometría no conmutativa". Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Recuperado de http://www.kerwa.ucr.ac.cr/bitstream/handle/10669/11355/Ursula.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[28] Zill, D.; Dewar, J. (2000) Algebra and trigonometry. New York, USA: McGraw-Hill, ISBN 0-07-557095-5, ISBN 958-41-0162-5