

## Treball final de grau

**Estudi:** Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials.

**Títol:** Simulació de la generació de projeccions en un sistema de tomografia computacional de raigs X

**Document:** Memòria

**Alumne:** Said Mahouti Benaamar

**Tutor:** Josep Costa Balanzar

**Departament:** Física

**Àrea:** Ciència dels materials i enginyeria metal·lúrgica

**Convocatòria (mes/any)**

## ÍNDEX

Índex .....	i
1 Introducció.....	12
1.1 Descripció general.....	12
1.2 Objectius .....	13
1.3 Abast i sortides del projecte.....	13
1.4 Planificació .....	13
1.5 Estructura del document.....	15
2 introducció a la tomografia.....	17
2.1 Tomografia Computacional.....	17
2.2 Tomografia computacional de feix cònic.....	19
2.2.1 Principi de funcionament de la CBCT .....	20
2.2.2 Paràmetres principals de la configuració de la CBCT .....	21
2.3 Desalineaments del sistema de la CBCT.....	25
2.3.1 Efecte d'una desalineació.....	26

2.3.2	Efecte d'una inclinació.....	27
2.3.3	Efecte de reduir el conjunt de dades a una regió d'interès .....	28
2.4	Limitacions tècniques respecte la tomografia computacional (CT).....	29
2.5	Qualitat de les imatges .....	30
2.5.1	Resolució espacial .....	30
2.5.2	Resolució de contrast.....	31
2.5.3	Artefactes.....	32
2.5.3.1	Dispersió .....	32
2.5.3.2	Enduriment del feix.....	33
2.5.3.3	Artefactes d'anells i línies .....	34
2.5.3.4	Efecte del feix de conus .....	35
2.5.3.5	Efecte del volum parcial .....	36
2.5.4	Soroll.....	37
2.6	Mètodes de reconstrucció .....	38
2.6.1	Obtenció de projeccions .....	38

2.6.2	Mètodes de reconstrucció analítics.....	40
2.6.2.1	Teorema del tall central.....	41
2.6.2.2	Mètode directe de Fourier .....	43
2.6.2.3	Retroprojecció filtrada .....	44
2.6.2.4	Reconstrucció FDK .....	50
2.6.3	Mètodes de reconstrucció iteratius (algebraics).....	52
2.6.3.1	ART.....	54
2.6.3.2	SIRT.....	54
2.6.3.3	SART .....	55
2.6.4	Contrast de fase (Phase-Contrast) .....	55
2.6.4.1	Crystal interferòmetre.....	57
2.6.4.2	Analyzer based imaging .....	57
2.6.4.3	Propagation based imaging.....	57
2.6.4.4	Grating based imaging .....	57
3	Metodologia.....	59

3.1	Geometria del problema .....	59
3.2	Emissió de raigs X.....	60
3.3	Eix de rotació.....	61
3.4	Proveta.....	62
3.4.1	Obtenció de la proveta (Mètode A) .....	62
3.4.1.1	Cares de la proveta .....	63
3.4.1.2	Arestes de la proveta .....	65
3.4.2	Obtenció de la proveta (Mètode B) .....	67
3.4.2.1	Cares de la proveta .....	69
3.5	Detector.....	70
3.6	Intersecció del feix amb la proveta .....	72
3.6.1	Intersecció mitjançant el mètode A.....	72
3.6.2	Intersecció mitjançant el mètode B.....	73
3.7	Delimitació dels punts d'intersecció en la proveta.....	75
3.7.1	Delimitació mitjançant el mètode A.....	75

3.7.2	Delimitació mitjançant el mètode B.....	76
3.8	Distància creuada pel feix en la proveta .....	78
3.9	Intensitat atenuada en cada píxel .....	78
3.10	Obtenció de la imatge.....	82
4	Implementació .....	83
4.1	Entorn MatLab.....	83
4.2	Implementació de funcions .....	84
4.2.1	Paràmetres per crear una funció .....	84
4.3	Sentències de control .....	86
4.4	Operadors .....	88
4.5	Comandes utilitzades de l'entorn MatLab .....	90
4.6	Estructura del programa .....	91
5	Investigacions i estudis realitzats.....	92
5.1	Paràmetres utilitzats en el programa .....	92
5.2	Posició dels elements.....	92

5.3	Atenuació en l'aire .....	94
5.4	Conjunt perfectament alineat.....	95
5.5	Laminografia .....	97
5.6	Desalineament .....	99
6	Resum del pressupost.....	102
7	Conclusions i treballs futurs.....	103
7.1	Conclusions.....	103
7.2	Treballs futurs.....	104
7.3	Aplicacions .....	106
8	Bibliografia .....	107
Índex de figures		
Figura 1: Calendari 2017 .....		14
Figura 2: Primera tomografia computacional ( <a href="http://www.sar.org.ar">http://www.sar.org.ar</a> ).....		18
Figura 3: Elements principals i forma del feix de raigs X (Octopus, 2014) .....		20
Figura 4: Centre de rotació i eix òptic (Octopus, 2014) .....		22

Figura 5: Vista dels centres horitzontal i vertical (Octopus, 2014).....	23
Figura 6: Vista superior del conjunt (Octopus, 2014) .....	23
Figura 7: Angle d'inclinació tilt (Octopus, 2014) .....	23
Figura 8: Angle d'inclinació skew (Octopus, 2014).....	24
Figura 9: Distàncies principals del conjunt (Octopus, 2014).....	25
Figura 10: Esquema del conjunt perfectament alineat (Octopus, 2014) .....	26
Figura 11: Desalineació vertical (Octopus, 2014).....	26
Figura 12: Desalineació horitzontal (Octopus, 2014) .....	27
Figura 13: Inclinació del detector (Octopus, 2014).....	28
Figura 14: Reducció del conjunt de dades a una regió d'interès (Octopus, 2014).....	29
Figura 15: Exemple d'imatge en CBCT per avaluar la resolució espacial (Brüllmann and Schulze, 2015)	30
Figura 16: Resolució de contrast a partir de tensions de tub de 40 kV (a), 80kV (b) i 120kV (c) (Marcke, 2008) .....	32
Figura 17: Efecte de la dispersió en la obtenció de projeccions (Marcke, 2008) .....	33
Figura 18: Simulació de l'efecte d'enduriment del feix (Marcke, 2008).....	34
Figura 19: Exemple d'artefacte d'anell (a) i artefacte de línia (b) (Marcke, 2008).....	35



Figura 20: Esquema de l'efecte feix de conus (García, 2013).....	36
Figura 21: Exemple del volum parcial (Marcke, 2008) .....	37
Figura 22: Concepte de projecció (García, 2013) .....	39
Figura 23: Esquema de definició de projecció (García, 2013).....	40
Figura 24: Teorema del tall central (García, 2013).....	41
Figura 25: Mètode directe de Fourier (García, 2013) .....	44
Figura 26: Concepte de retroprojecció (García, 2013) .....	45
Figura 27: Resolució d'una imatge segons el numero de projeccions (García, 2013) .....	45
Figura 28: Millora de la qualitat de la imatge mitjançant el filtrat (García, 2013) .....	46
Figura 29: Filtre rampa en el domini de la freqüència (García, 2013).....	50
Figura 30: Perspectiva (a) i vista lateral (b) de la geometria cone-beam (García, 2013) .....	51
Figura 31: Esquema de funcionament dels mètodes iteratius (García, 2013) .....	53
Figura 32: Mètodes de Phase Contrast (Jian, 2012).....	56
Figura 33: Esquema del conjunt .....	60
Figura 34: Representació de la font d'emissió en l'espai .....	60

Figura 35: Eix de rotació .....	61
Figura 36: Vectors normals dels plans que formen la proveta.....	63
Figura 37: Cares que formen la proveta .....	64
Figura 38: Arestes que formen la proveta .....	67
Figura 39: Paràmetres de la proveta.....	68
Figura 40: Centres de les cares que formen la proveta.....	70
Figura 41: Detector .....	71
Figura 42: Representació de la intersecció .....	74
Figura 43: Obtenció dels punts que passen per la proveta .....	75
Figura 44: Esquema representatiu per decidir si un punt d'intersecció es troba dins de la proveta .....	77
Figura 45: Casquet esfèric ( <a href="http://www.aulafacil.com">http://www.aulafacil.com</a> ) .....	79
Figura 46: Angle que forma el vector director del raig incident amb el vector normal del detector .....	81
Figura 47: Interfície de MatLab R2015a.....	84
Figura 48: Paràmetres d'una funció .....	86
Figura 49: Estructura if .....	87

Figura 50: Estructura while .....	87
Figura 51: Estructura for .....	88
Figura 52: Estructura switch-case.....	88
Figura 53: Posicions principals dels elements de l'equip .....	93
Figura 54: Detector apagat .....	94
Figura 55: Detector en un cas real.....	94
Figura 56: distància entre font i píxels del detector .....	95
Figura 57: Objecte alineat.....	96
Figura 58: Objecte alineat i rotat 45°.....	97
Figura 59: Esquema de la laminografia ( <a href="https://www.researchgate.net">https://www.researchgate.net</a> ) .....	98
Figura 60: Proveta recta .....	99
Figura 61: Laminografia, proveta inclinada 45° .....	99
Figura 62: Proveta desplaçada .....	100
Figura 63: Proveta rotada i desplaçada .....	101



# Capítol 1

## 1 INTRODUCCIÓ

### 1.1 Descripció general

Aquest treball està emmarcat dins de les activitats del grup de recerca d'Anàlisi i Materials Avançats per al Disseny Estructural (AMADE) de la Universitat de Girona.

La tomografia computacional s'ha convertit en una eina molt eficaç i útil per visualitzar l'estructura interna de diferents cossos des de la seva invenció per Hounsfield l'any 1972. Aquesta utilitza radiació electromagnètica que pot ser detectada després de penetrar a través d'un objecte. Mitjançant un detector es pot obtenir un seguit d'imatges o projeccions de l'objecte o cos des de diferents angles que permeten reconstruir una secció transversal de l'objecte. La tomografia ha adquirit una gran importància en el món de la medicina, ciències dels materials i biologia entre d'altres gràcies a que és una tècnica no destructiva.

El grup de recerca AMADE disposa d'un equipament de tomografia computacional de rajos X divergents (CBCT, *Cone Beam Computerized Tomography*) per analitzar la microestructura de provetes de diferents materials. El seu principi de funcionament es basa en obtenir una sèrie de projeccions (radiografies) de la proveta mentre va girant al voltant d'un eix. Aquestes projeccions posteriorment es reconstrueixen per generar la imatge tridimensional de la mostra mitjançant un software comercial.

La finalitat del projecte és poder recrear el funcionament de l'equipament de tomografia del qual disposa el grup AMADE mitjançant MatLab, que és una eina de software matemàtic molt potent que permet manipular matrius, representar dades, definir funcions, i implementar algorismes, entre d'altres, de manera ràpida i eficient.

Partint de les projeccions que s'obtenen quan l'equip està perfectament alineat, es posa a prova l'efecte de desalineaments en la configuració geomètrica sobre la qualitat de les imatges reconstruïdes i es discuteix a com afecten aquests errors als diferents mètodes de reconstrucció.

## **1.2 Objectius**

Al llarg d'aquest projecte, es volen assolir els següents objectius:

- Representar el funcionament i l'obtenció de projeccions de provetes de geometries ideals mitjançant MatLab, d'un equip de tomografia de raigs X divergents.
- Estudiar les projeccions obtingudes en diferents situacions.
- Laminografia.

## **1.3 Abast i sortides del projecte**

- Simulació de l'equip de tomografia.
- Programació de funcions i scripts mitjançant MatLab per tal de generar en l'ordinador les imatges (projeccions) sobre el detector.
- Anàlisi de la qualitat de les imatges obtingudes.
- Generar una exhausta i clara documentació.

## **1.4 Planificació**

La planificació d'aquest treball es divideix en els diferents mesos que consta el segon quadrimestre del curs acadèmic 2017 i l'estiu. Per dividir-ho, es fa referència al calendari de la Figura 1.

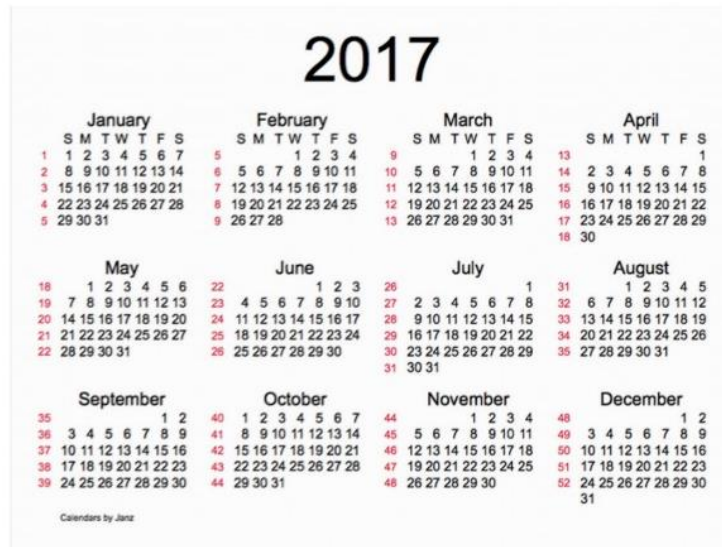


Figura 1: Calendari 2017

**Febrer:** Aclariment general sobre el projecte, definir els temes a tractar i l'objectiu principal a assolir, cerca d'informació i treballs relacionats sobre la tomografia, rajos X i CBCT. Primer contacte amb l'entorn de treball MatLab, programació de petites funcions i scripts i familiarització amb diferents comandes que seran necessàries per portar a terme el projecte.

**Març:** Definició d'una recta a l'espai que simularà l'eix de rotació de l'aparell, la matriu de rotació i els diferents plans per definir la proveta. Obtenció dels punts de creuament d'un raig i els diferents plans que formen la proveta i la distància creuada. Inici de la redacció del projecte.

**Abril:** Obtenció de les arestes de la proveta. Definició d'una funció per obtenir l'equació de la recta que sorgeix de la intersecció de dos plans i definició del detector. Programació d'un bucle per recórrer cada píxel del detector i guardar en una matriu la distància creuada pel feix a l'hora de travessar la proveta.

**Maig:** Cerca d'informació sobre CBCT. Programar com provocar un desalineament en el detector (angles tilt i skew). Estudiar com s'atenua el feix en funció de la posició que ocupa cada píxel del detector i posada en marxa del programa per generar imatges.

**Juny:** Buscar una altra manera d'obtenir les projeccions donat que el primer mètode és molt robust i lent. Programació del nou mètode i redacció del projecte.

**Juliol:** Intentar programar el codi utilitzant un altre mètode que consisteix en treballar i operar amb matrius, donat que d'aquesta manera el temps d'execució es redueix molt i es poden obtenir totes les projeccions en un temps molt petit.

**Agost:** Redacció del projecte i últims retocs.

## 1.5 Estructura del document

Aquest projecte està estructurat en 9 capítols ben diferenciat. A continuació s'explica breument el contingut de cada capítol.

- **Capítol 1: Introducció.**

En aquest primer capítol s'explica el tema a tractar en el projecte, els objectius a assolir i l'abast del projecte. També s'estructura el treball i es planifica per tal de portar-lo al dia i acabar-ho en el termini previst.

- **Capítol 2: Introducció a la tomografia**

Aquest segon bloc està destinat a presentar la tomografia, el seu principi de funcionament i les seves aplicacions. També es descriuen els diferents mètodes de reconstrucció i problemes que es poden produir en la obtenció de les projeccions .



- **Capítol 3: Metodologia**

En aquest capítol es descriu com es representen les diferents parts de l'equip de tomografia mitjançant geometries ideals.

- **Capítol 4: Implementació**

En aquest capítol es descriu com s'ha programat l'entorn de Matlab i les diferents funcions que s'han definit per poder obtenir les diferents projeccions.

- **Capítol 5: Investigacions i estudis realitzats**

En aquesta part, s'analitzaran els diferents resultats obtinguts en l'estudi realitzat.

- **Capítol 6: Resum del pressupost**

Aquí es resumeix breument el pressupost necessari per l'elaboració del present projecte.

- **Capítol 7: Conclusions i treballs futurs**

En aquest capítol es valora el treball realitzat, els objectius assolits, possibles millores i la seva importància dins de diversos camps del món de l'enginyeria i medicina entre altres.

- **Capítol 8: Bibliografia**

# Capítol 2

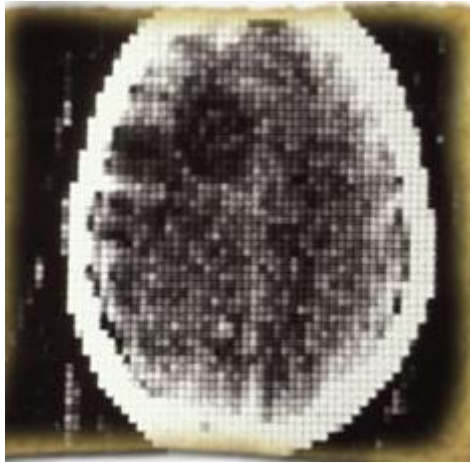
## 2 INTRODUCCIÓ A LA TOMOGRAFIA

### 2.1 Tomografia Computacional

La tomografia computacional (CT, *Computerized Tomography*) és un procediment d'exploració radiològica basada en raigs X. En general, és una tècnica que genera una imatge d'una secció transversal d'una peça o cos. (Bravo *et al.*, 2010)

La tomografia computacional, es caracteritza per ser una tècnica d'anàlisi no destructiu. Això vol dir que les propietats físiques, químiques, mecàniques o dimensionals de l'objecte a analitzar no es veuen alterades. Tampoc és un mètode d'imatge directa, el que significa que les dades obtingudes han de ser analitzades i visualitzades utilitzant diferents algorismes complexos. Com a resultat, proporciona informació tridimensional sobre la distribució del factor d'atenuació de l'element projectat.

Els físics G. N. Hounsfiels i A. M. Cormack van ser els dos grans impulsors de la tomografia computeritzada de raigs X. Cormack es va donar compte de la importància de conèixer la distribució dels coeficients d'atenuació dels raigs X a l'interior d'un cos. D'aquesta manera va derivar una teoria matemàtica per la reconstrucció de la imatge i va provar aquesta teoria calculant el coeficient d'atenuació de diferents materials. Hounsfield va desenvolupar el primer escàner TC clínic el 1967, després de deduir que les mesures de raigs X a través d'un cos preses de diferents direccions permetien reconstruir la seva estructura interna. El 1971 es va escanejar el primer pacient amb un quiste i la patologia era clarament visible en la imatge, tal i com ho mostra la Figura 2. (Hsieh, 2003)



*Figura 2: Primera tomografia computacional (<http://www.sar.org.ar>)*

Gràcies a l'aportació dels seus coneixements i el treball realitzat en el desenvolupament de la tomografia computacional, el 1979 van ser premiats amb el Premi Nobel de Fisiologia i Medicina.

Els grans avanços tecnològics de les últimes dècades han permès millorar l'obtenció de tomografies i realitzar reconstruccions que s'apropen millor a la realitat. Això ha permès que la tomografia computacional hagi evolucionat molt ràpid i ara podem classificar-la en diferents generacions. La diferència d'aquestes, es basa fonamentalment en el mètode d'obtenció i emmagatzematge de les dades i el número de detectors.

Un dels camps on hi té gran importància, és en la planificació i diagnòstic en implants odontològics, ortopèdia i radiologia intervencionista. En les aplicacions mèdiques s'ha incorporat en la radioteràpia, que és un dels tractaments més comuns contra el càncer i la mamografia.

En el món industrial, sobretot automoció i construcció, on les propietat mecàniques dels materials depenen directament de la seva estructura, composició i defectes produïts en

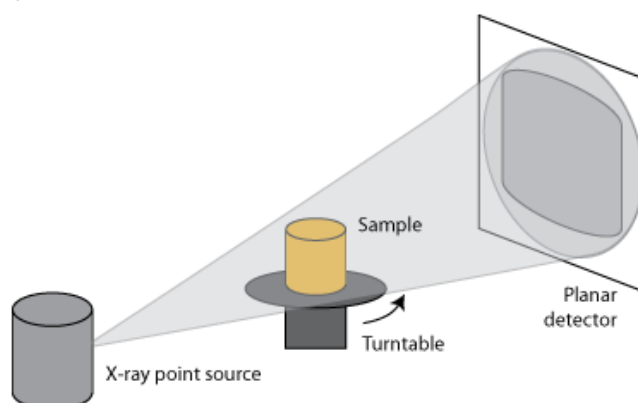
el procés de fabricació, aquesta tècnica és de gran ajuda a l'investigador o enginyer a l'hora de caracteritzar el comportament mecànic d'una peça o material. (Bravo *et al.*, 2010)

En arqueologia s'utilitza per avaluar la història de restes arqueològiques, per validar motlles o peces establint paràmetres com són la porositat, la qualitat de l'ompliment o presència de fissures.

## **2.2 Tomografia computacional de feix cònic**

La tomografia computacional de feix cònic (CBCT, *Cone Beam Computerized Tomography*) és una tècnica radiogràfica d'adquisició d'imatges. Aquesta tècnica està basada en un feix de raigs X en forma de conus centrat en un detector de dos dimensions (2D). El CBCT permet reconstruir la forma tridimensional (3D) d'una estructura a partir de la captura de les seves projeccions bidimensionals (2D). D'aquesta manera, permet capturar una regió sencera d'interès amb una sola rotació de l'eix entre 180° i 360°, produint una sèrie de múltiples imatges bidimensionals, en comparació amb els dispositius convencionals de CT on s'apliquen múltiples talls per obtenir una imatge completa. (Minguez-Contreras, 2013)

Els seus principals elements, tal i com es mostra en la Figura 3, són: la font d'emissió de raigs X, l'etapa de rotació i el detector.



*Figura 3: Elements principals i forma del feix de raigs X (Octopus, 2014)*

Aquesta tècnica es va desenvolupar inicialment per a la angiografia, que és un examen de diagnòstic per imatge la funció del qual és l'estudi dels vasos sanguinis que no són visibles mitjançant la radiologia convencional. Actualment ha guanyat molt de terreny en diferents àrees de la odontologia, com són els camps de la cirurgia oral i la ortodòncia, en la ciència de materials, biologia i altres camps d'investigació. (Scarfe and Farman, 2008)

### **2.2.1 Principi de funcionament de la CBCT**

Una font de raigs X emet un feix divergent en forma de conus, que es dirigeix a través de l'objecte d'estudi fins a un detector de raigs X que es troba en el costat oposat. L'objecte o cos d'estudi es troba sobre una plataforma giratòria que dona voltes sobre el seu eix de rotació. Durant la rotació, es van obtenint múltiples imatges de projeccions

planes seqüencials del camp de visió. Les imatges obtingudes són, en essència, un mapa de l'atenuació dels raigs X quan passen a través de l'objecte o cos.

El detector ha de ser capaç de gravar fotons de raigs X, llegir i enviar la senyal al ordinador i estar llest per la següent adquisició centenars de vegades en una sola rotació. Finalment s'utilitza un software comercial per reconstruir el cos amb la seqüència de projeccions obtinguda.

### **2.2.2 Paràmetres principals de la configuració de la CBCT**

A l'hora de procedir a obtenir les projeccions de l'objecte d'estudi, s'han de tenir en compte diferents paràmetres de la configuració de l'equip que poden influir en els resultats obtinguts. A continuació es descriuen els paràmetres geomètrics de la CBCT.

- Centre de rotació ( $U_r$ ): coordenada horitzontal del detector corresponent a la projecció de l'eix de rotació en el pla del detector.
- Eix òptic: L'eix òptic és la recta que va des de la font emissora de raigs X fins a la superfície del detector i és perpendicular a aquest. En aquest punt de creuament, la fila del detector defineix el centre vertical i la columna defineix el centre horitzontal.

En la Figura 4, es representa en centre de rotació i l'eix òptic.

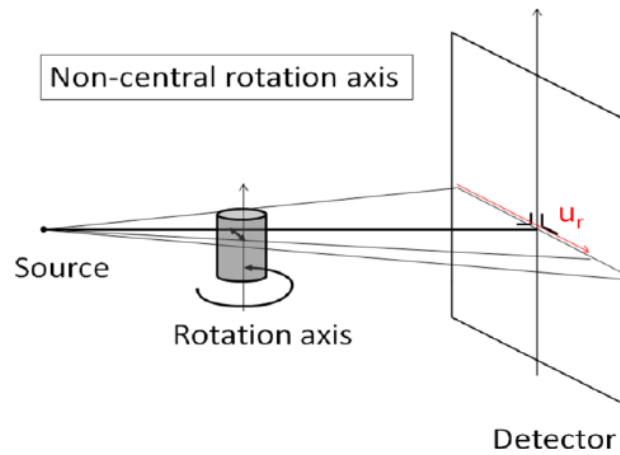


Figura 4: Centre de rotació i eix òptic (Octopus, 2014)

- Centre horitzontal ( $U_c$ ): coordenada horitzontal del detector que correspon a la projecció perpendicular de la font en el detector.
- Centre vertical ( $V_c$ ): coordenada vertical del detector corresponent a la projecció perpendicular de la font en el detector.

En la Figura 5 i Figura 6 es representen els centres horitzontal i vertical.

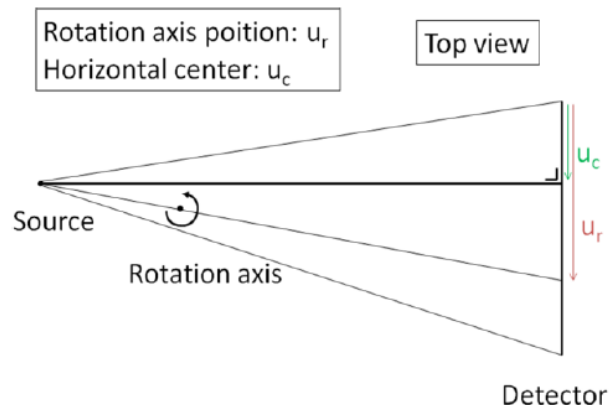
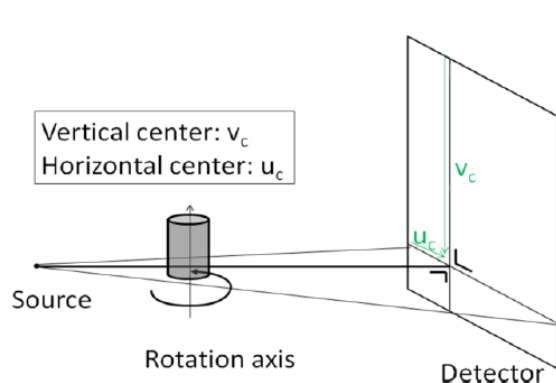


Figura 5: Vista dels centres horitzontal i vertical (Octopus, 2014)  
Figura 6: Vista superior del conjunt (Octopus, 2014)

- Angle d'inclinació tilt: correspon a l'angle que forma la columna del detector amb la projecció de l'eix de rotació en el detector. Aquesta inclinació és fruit d'un desalineament del detector o de l'eix de rotació, tal i com es mostra en la Figura 7.

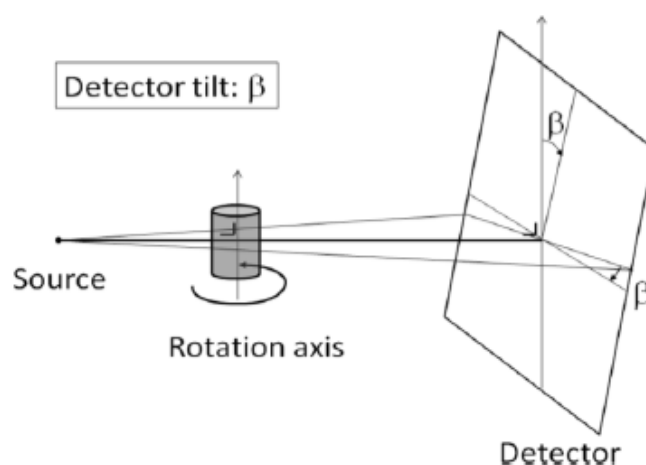


Figura 7: Angle d'inclinació tilt (Octopus, 2014)



- Angle d'inclinació skew: és l'angle entre el pla del detector i l'eix de rotació. Aquest angle d'inclinació i el centre vertical ( $V_c$ ) estan relacionats, tal i com s'indica en la Figura 8.

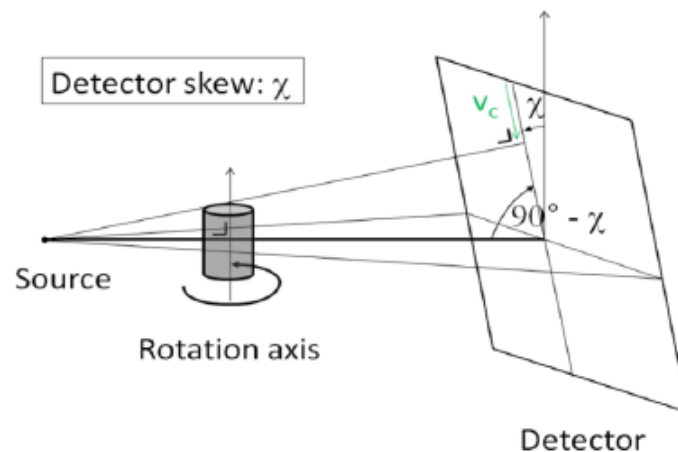


Figura 8: Angle d'inclinació skew (Octopus, 2014)

- Source Object Distance (SOD): correspon a la distància que hi ha entre la font emissora de raigs X i l'eix de rotació.
- Source Detector Distance (SDD): correspon a la distància que hi ha entre la font emissora i el detector.

En la Figura 9 es mostren aquestes dos distàncies.

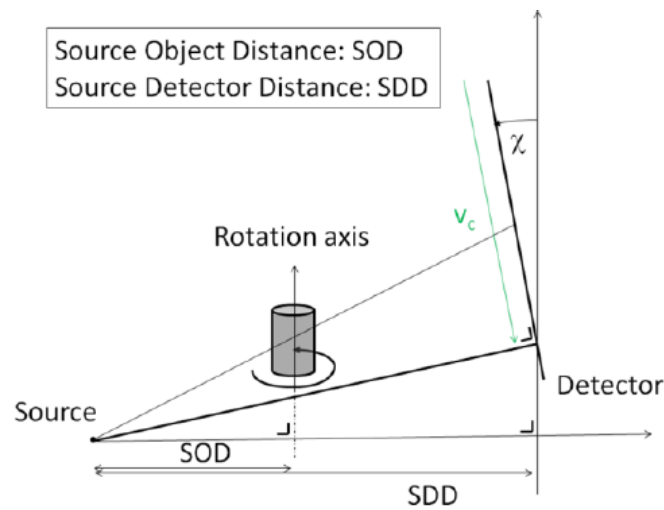


Figura 9: Distàncies principals del conjunt (Octopus, 2014)

### 2.3 Desalineaments del sistema de la CBCT

A l'hora d'utilitzar un equip de tomografia per obtenir projeccions d'un objecte que posteriorment serà reconstruït, és important assegurar que l'equip està ben alineat. Per això, és aconsellable prendre una primera projecció per veure si l'objecte es troba ben alineat amb el detector o utilitzar un patró com podria ser la projecció d'una esfera massissa en el centre del detector.

Tot i que actualment molts softwares de reconstrucció 3D poden corregir petites desviacions o desalineaments, si l'equip no es troba ben calibrat, la qualitat de la reconstrucció no serà tan bona ja que es produeix una disminució de contrast, augmenta la dispersió i la probabilitat de tenir artefactes com són els anells o soroll.

En la Figura 10 es mostra un conjunt perfectament alineat. L'eix òptic creua el detector en el centre, l'eix de rotació creua l'eix òptic i l'etapa de rotació és paral·lela a les files del detector.

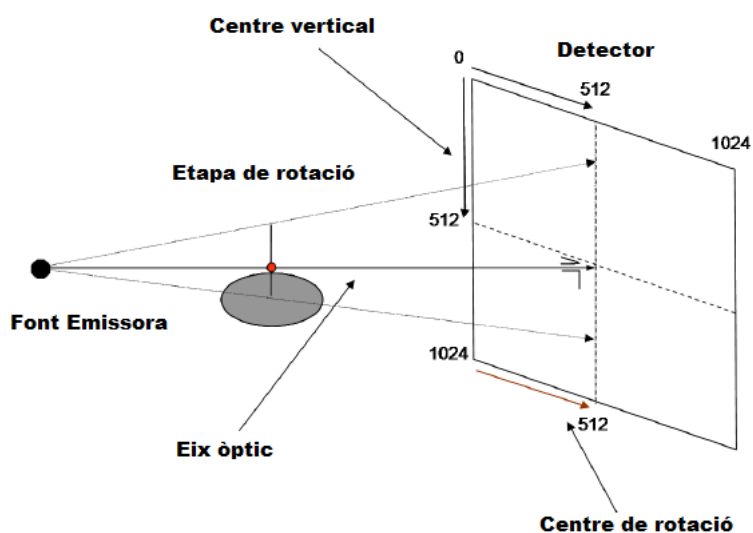


Figura 10: Esquema del conjunt perfectament alineat (Octopus, 2014)

### 2.3.1 Efecte d'una desalineació

Mitjançant un desplaçament vertical del detector, tots els paràmetres segueixen igual excepte el centre vertical. L'eix òptic creua amb el detector a una altra alçada, i aquest punt és el que s'utilitza en el mòdul de reconstrucció. En la Figura 11 es mostra una desalineació vertical.

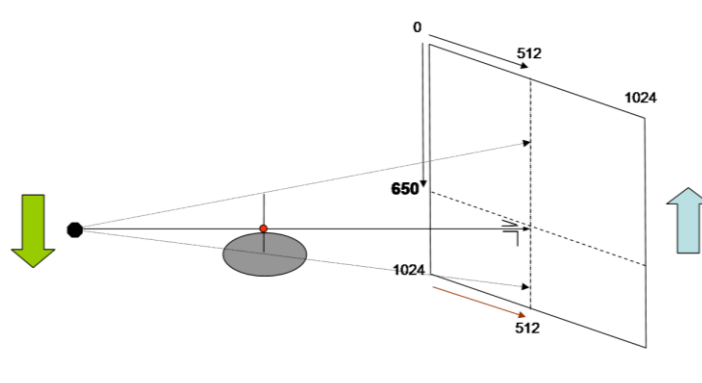
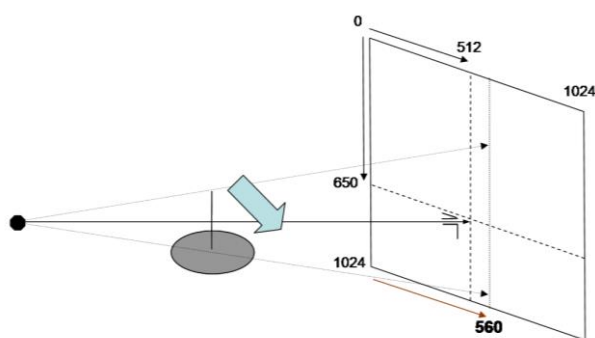


Figura 11: Desalineació vertical (Octopus, 2014)

Amb un desplaçament horitzontal de l'eix de rotació, la projecció de l'eix no es trobarà en el centre del detector, sinó que es trobarà desplaçat en una altra columna d'aquest. Aquesta columna definirà la posició de l'eix de rotació per el mòdul de reconstrucció. La Figura 12 mostra una desalineació horitzontal.



*Figura 12: Desalineació horitzontal (Octopus, 2014)*

### 2.3.2 Efecte d'una inclinació

Si el detector o eix es troben inclinats, les files d'aquest deixen de ser paral·leles a la etapa de rotació. A conseqüència, la projecció de l'eix de rotació no estarà en una sola columna del detector i impossibilita definir una posició d'eix de rotació, tal i com es mostra en la Figura 13.

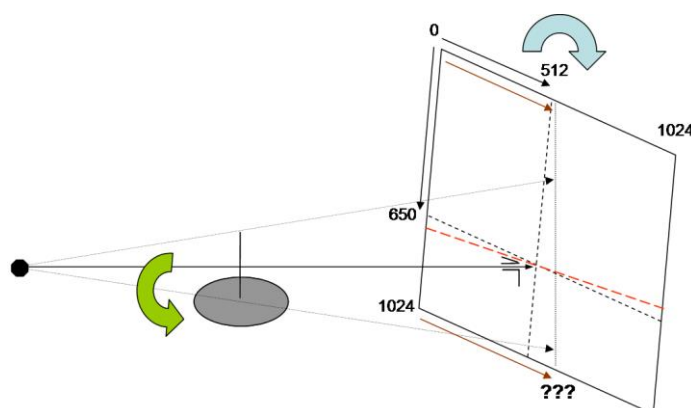


Figura 13: Inclinació del detector (Octopus, 2014)

### 2.3.3 Efecte de reduir el conjunt de dades a una regió d'interès

En aquest cas, com que tots els paràmetres de posició són relatius a l'àrea del detector utilitzada, els centres horitzontal i vertical i la posició de l'eix de rotació canvien, tal i com es mostra en la Figura 14. Aquests es poden calcular restant els valors de la part superior (per al centre vertical) i de l'esquerra (per el centre horitzontal i la posició de l'eix de rotació) del detector.

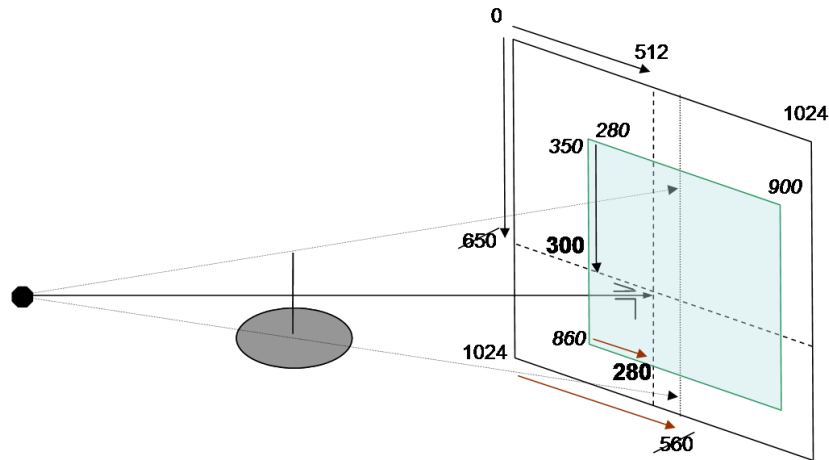


Figura 14: Reducció del conjunt de dades a una regió d'interès (Octopus, 2014)

## 2.4 Limitacions tècniques respecte la tomografia computacional (CT)

Tot i que les aplicacions mitjançant CBCT han anat en augment, aquesta tecnologia té dos grans factors que limiten la seva integració exitosa en els àmbits més estrictes: la qualitat de la imatge i el temps.

- Com que hi ha un augment de la radiació de dispersió degut a la geometria del feix divergent, es produeix una degradació de la qualitat de la imatge, tal i com ho demostren els artefactes (sorolls) i la disminució de la relació de contrast de la imatge.
- Respecte la tomografia computacional tradicional, es necessita més temps per la configuració, adquisició de imatges i reconstrucció d'aquestes degut als algorismes de reconstrucció del feix de conus.

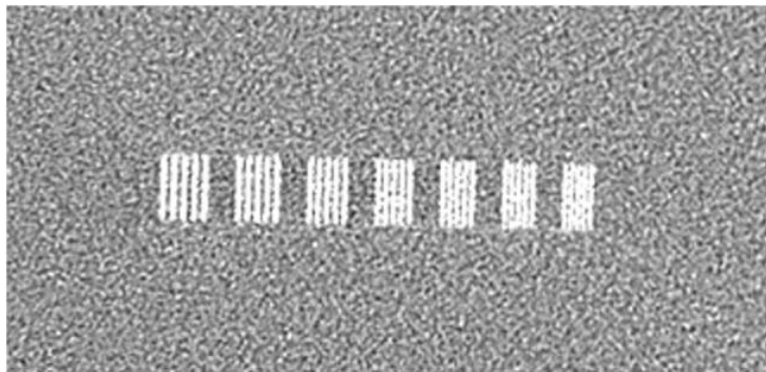
## 2.5 Qualitat de les imatges

La qualitat de les imatges depèn de la resolució espacial i de contrast que es pot aconseguir i la presència d'artefactes tals com soroll, dispersió dels raigs X o enduriment del feix, entre d'altres que es descriuen a continuació.

### 2.5.1 Resolució espacial

És un dels paràmetres més importants que defineixen la qualitat de la imatge. Es refereix a la capacitat que té l'equip de representar els detalls més fins continguts en l'objecte d'estudi, o dit d'una altra manera, la capacitat de distingir dos objectes que es troben a una distància petita. (Malecki and Herzen, 2014) (Brüllmann and Schulze, 2015)

Tradicionalment s'ha avaluat en parells de línies per mil·límetre. La Figura 15 mostra la imatge radiogràfica d'un fantasma que conté línies fines de plom a distàncies definides per avaluar la distància més petita a la qual el sistema és capaç de resoldre les línies com a entitats separades.



*Figura 15: Exemple d'imatge en CBCT per avaluar la resolució espacial (Brüllmann and Schulze, 2015)*

La resolució espacial limitada dona lloc a un desenfocament de les cantonades de l'objecte i a l'efecte de volum parcial (es comenta en el punt 2.5.3.5). Els factors que

afecten a la resolució espacial en la imatge final poden agrupar-se en factors geomètrics, algoritme de reconstrucció i paràmetres de visualització.

### 2.5.2 Resolució de contrast

El contrast es pot definir com la diferència percentual del coeficient d'atenuació reconstruït de l'objecte i el fons.

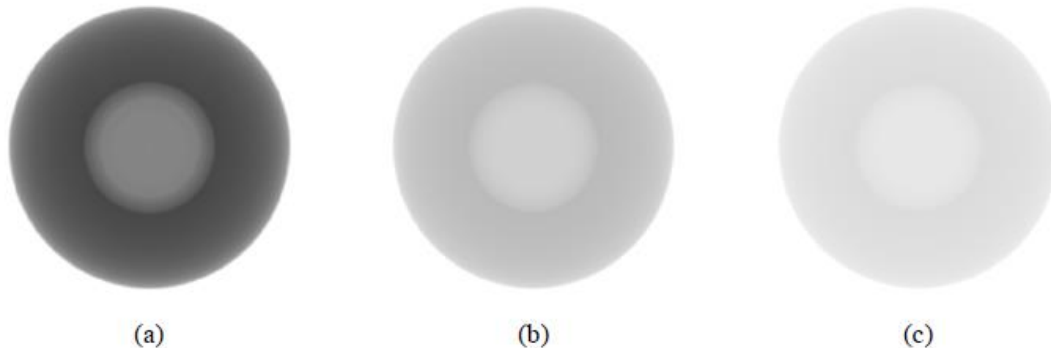
$$\%C = 100 \frac{\mu_{objecte} - \mu_{fons}}{\mu_{fons}} \quad (2.1)$$

La resolució de contrast és la capacita de detectar petites diferències de contrast entre dos àrees adjacents, dit d'una altra manera, és el contrast mínim d'un objecte amb una mida i forma especificats que poden ser discriminats. D'aquesta manera, els objectes grans seran detectats a un menor contrast que els objectes petits. (Malecki and Herzen, 2014)

El contrast depèn sobretot de la diferència entre l'objecte i el fons, i també és afectat pel nivell de soroll, radiació dispersa i l'espectre del feix de raigs X.

El material de l'objecte d'estudi, la tensió del tub emissor i els filtres utilitzats poden afectar al contrast tal i com es pot observar en la Figura 16.





*Figura 16: Resolució de contrast a partir de tensions de tub de 40 kV (a), 80kV (b) i 120kV (c) (Marcke, 2008)*

La Figura 16 mostra l'efecte de diferents voltatges de tub en el contrast entre una mostra de dolomita i una inclusió de calcita. Amb l'augment de la tensió del tub augmenta la fracció de fotons d'alta energia en l'espectre. Aquest fotons d'alta energia difícilment interactuen amb la dolomita i la calcita i per tant, no serveixen per fer una distinció entre els dos materials. El contrast disminueix amb l'augment de la tensió del tub.

### **2.5.3 Artefactes**

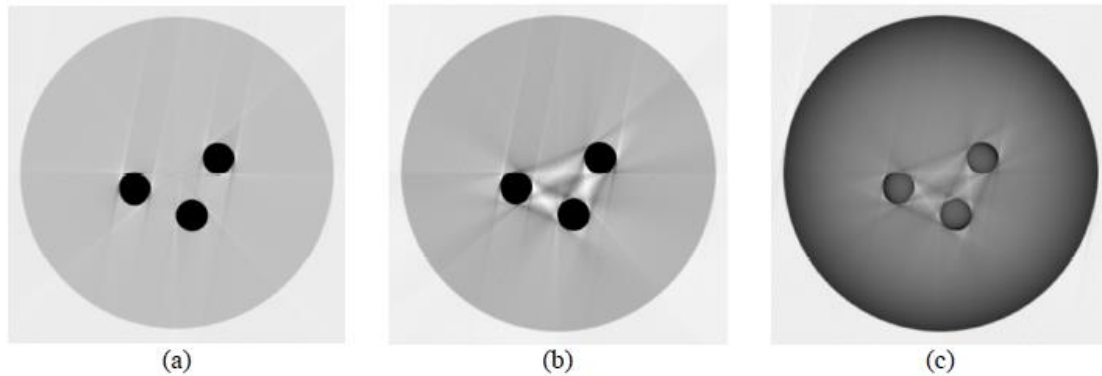
Els artefactes són discrepàncies entre la imatge reconstruïda i l'objecte que sorgeixen durant el procés de reconstrucció. Aquests es poden classificar segons el seu origen.

#### **2.5.3.1 Dispersió**

La dispersió passa quan els fotons són desviats de la seva trajectòria original, ja sigui per pèrdua d'energia o no. L'efecte principal de la dispersió és una disminució del contrast, també induïx a errors no linears en la reconstrucció dels valors d'atenuació.

En la Figura 17 es simula l'efecte de la dispersió. Es tracta d'una simulació monocromàtica (per eliminar l'enduriment del feix ja que provoca artefactes similars)

d'una mostra de dolomita amb incrustacions de pirita. En el primer cas (a) no hi ha dispersió, en la projecció (b) 0.005 de la intensitat original és dispersada i en la projecció (c) 0.05 de la intensitat original és dispersada i condueix a una disminució en el contrast.



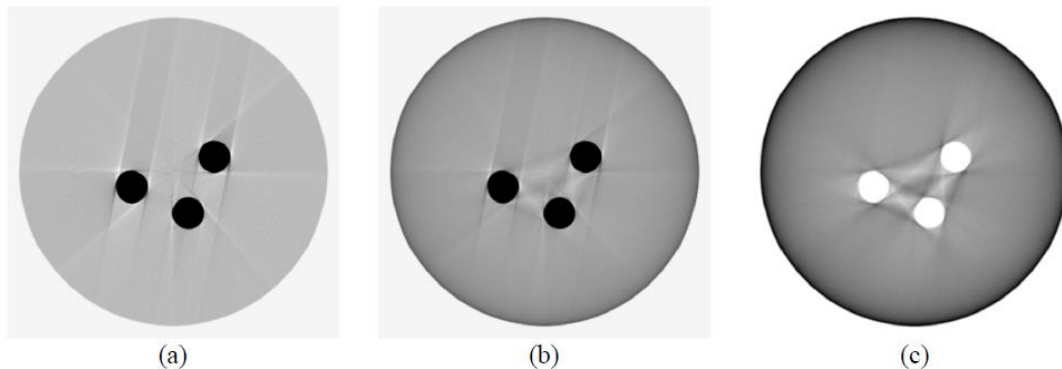
*Figura 17: Efecte de la dispersió en la obtenció de projeccions (Marcke, 2008)*

### 2.5.3.2 Enduriment del feix

En cada punt de les projeccions que s'utilitzen per reconstruir la imatge, el valor que es fa servir és idealment funció lineal del grossor dels materials travessats en la seva trajectòria. Però en la pràctica, l'atenuació no només depèn del tipus de material que travessa el raig, sinó també de l'energia d'ell mateix, sent major a energies més baixes.

L'enduriment del feix es produeix quan el feix de raigs X passa a través de l'objecte i les energies inferiors són absorbides. L'energia mitja del feix augmenta, i amb aquest augment de l'energia mitja és més difícil l'atenuació. Una conseqüència immediata és la no linearitat de l'atenuació mesurada, per la qual el valor mesurat en la projecció resulta dependent de l'espectre de l'energia de la font. Aquesta no linearitat té dos efectes principals en les imatges reconstruïdes: es manifesta amb franges fosques entre zones de gran densitat i amb un enfosquiment del centre dels objectes.

En la Figura 18 es simula una dolomita amb incrustacions de pirita per demostrar l'efecte d'enduriment del feix, mitjançant un feix monocromàtic (a) i un altre policromàtic (b). La projecció (c) mostra les diferències entre les projeccions anteriors.



*Figura 18: Simulació de l'efecte d'enduriment del feix (Marcke, 2008)*

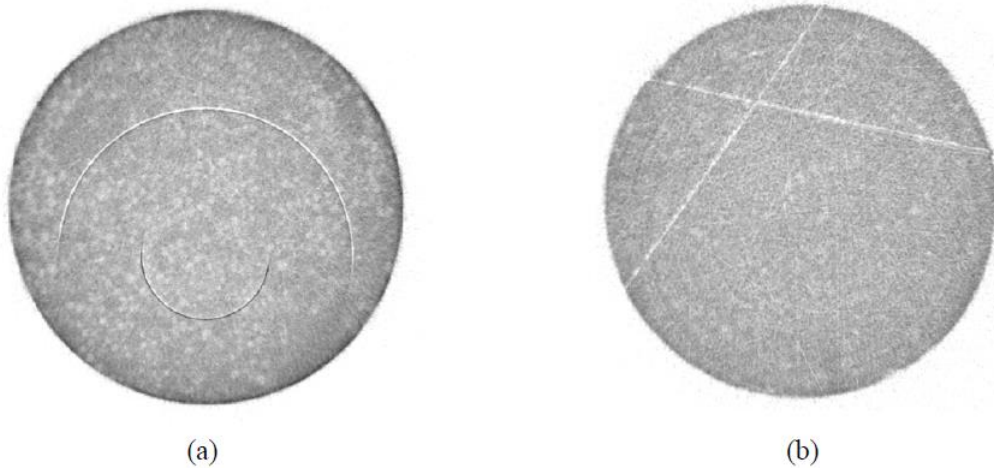
La simulació monocromàtica està lliure d'enduriment del feix. En la simulació policromàtica les ventoses i ratlles són ben visibles.

### **2.5.3.3 Artefactes d'anells i línies**

Aquests artefactes estan relacionats amb la mala calibració de l'equip o les imperfeccions en la detecció del escàner i es produeix quan alguns píxels del detector registren contínuament mesures incorrectes. Això fa que es generin artefactes circulars en forma d'anell en la reconstrucció ja que l'error en la lectura es repeteix en cada posició angular. Els artefactes de línia sorgeixen quan els raigs X d'alta energia colpegen directament el detector.

En la Figura 19 es mostra un artefacte en forma d'anell (a) degut a un funcionament defectuós continu d'un o més elements del detector i un artefacte línia (b) degut a que

els raigs X d'alta energia han colpejat el detector i s'ha generat una anomalia brillant en un píxel.



*Figura 19: Exemple d'artefacte d'anell (a) i artefacte de línia (b) (Marcke, 2008)*

Aquest tipus d'artefacte es pot corregir mitjançant la calibració del detector, mitjançant algoritmes de correcció en les projeccions o per post-processat després de la reconstrucció.

#### **2.5.3.4 Efecte del feix de conus**

Degut a la divergència del feix, les dades de projecció (quantitat d'atenuació registrada) que són recollides per cada píxel del detector en les zones perifèriques es redueix perquè els píxels del detector registren menys atenuació, mentre que tenim més informació pels objectes projectats sobre els píxels centrals del detector. Això produeix distorsió de la imatge, artefactes en forma de ratlles i major soroll perifèric.

La Figura 20 mostra aquest artefactes. En la imatge de l'esquerra (a), les dades són recollides pels detectors més allunyats del centre, mentre que la imatge de la dreta (b)

mostra com les dades recollides pels detectors centrals es veuen menys afectades per aquest efecte.

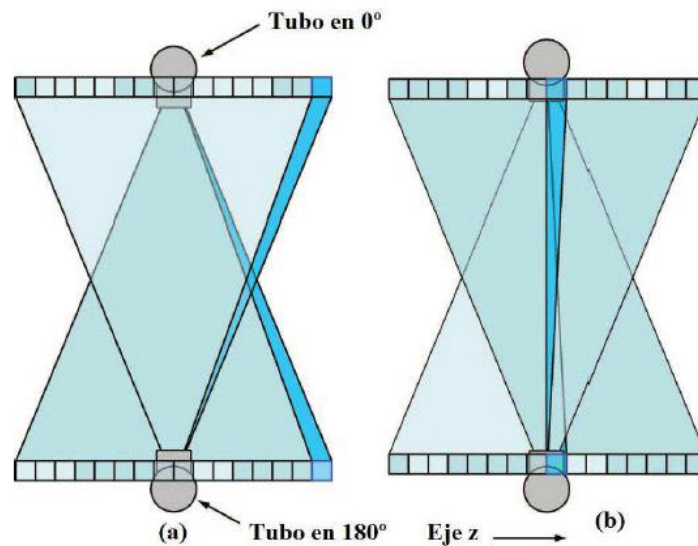


Figura 20: Esquema de l'efecte feix de conus (García, 2013)

#### 2.5.3.5 Efecte del volum parcial

Els vòxels en la imatge reconstruïda tenen una mida limitada que està determinada principalment per la mida dels elements detectors. Un vòxel en la imatge reconstruïda generalment no coincideix totalment amb les vores en l'objecte escanejat i l'atenuació reconstruïda d'un vòxel representa un promig ponderat de totes les substàncies presents en aquest vòxel. Això passa quan la resolució del vòxel d'exploració és major que la resolució espacial o de contrast de l'objecte. Es produeixen en regions on les superfícies canvien molt ràpidament.

La Figura 21 mostra l'efecte del volum parcial. L'atenuació d'un vòxel en la imatge reconstruïda (b) és la mitjana ponderada de totes les substàncies presents en aquest vòxel (a). Donat que aquests vòxels generalment no coincideixen amb una vora en l'objecte, això dona com a resultat un desdibuixament de la vora.

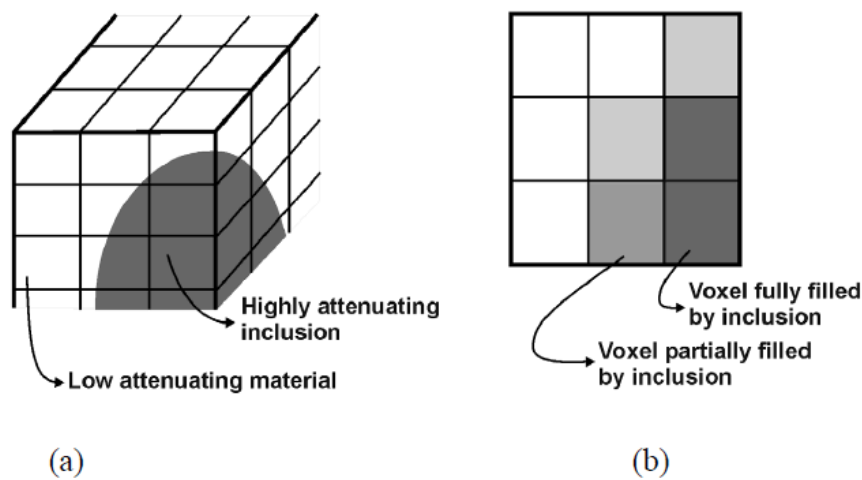


Figura 21: Exemple del volum parcial (Marcke, 2008)

#### 2.5.4 Soroll

Les tres principals fonts de soroll són la corrent fosca, el soroll del preamplificador i el soroll del fotó. La corrent fosca és una fuga de càrrega en el detector, és relativament baixa i es pot minimitzar per refredament. El soroll del preamplificador és generat per l'amplificador de sortida i és proporcional a la velocitat de lectura del detector. El soroll dels fotons sorgeix perquè l'emissió de fotons no és constant.

Mitjançant CBCT hi ha molta radiació dispersa que es produeix de manera omnidireccional i és registrada pels píxels del detector, que no reflecteix l'atenuació real

de l'objecte dins de la trajectòria específica del feix de raigs X. Aquesta atenuació no lineal és el soroll que contribueix a la degradació de la imatge.

## **2.6 Mètodes de reconstrucció**

La idea principal de la tomografia consisteix en reconstruir imatges bidimensionals (2D) o tridimensionals (3D) d'estructures internes a partir de les projeccions obtingudes irradiant a través de l'objecte.

La imatge reconstruïda representa una distribució de coeficients d'atenuació lineal de raigs X que segueix la llei de Lambert-Beer. Després d'aplicar l'operació logarítmica negativa de la relació entre la intensitat de raigs X de la sortida i de l'entrada, s'obté la integral de línia de la distribució del coeficient d'atenuació al llarg d'una trajectòria de raigs X. La presentació d'integrals de línia s'associa típicament amb les projeccions de raigs X. Matemàticament, la reconstrucció d'imatges en TC és un problema lineal invers. (Hsieh, 1963)

### **2.6.1 Obtenció de projeccions**

En geometria, la projecció consisteix en el procediment per a l'obtenció de la representació en el pla (2 dimensions) de les figures ubicades en l'espai (3 dimensions).

Una projecció en un determinat angle és la integral de la densitat de la imatge en la direcció especificada per l'angle. Si es considera una imatge 2D que conté diferents coeficients d'atenuació ( $\mu$ ) i un escàner de geometria de raigs paral·lels, la projecció per l'angle  $\Theta=0$  serà la suma dels coeficients d'atenuació al llarg de les trajectòries horitzontals que descriuen els raigs. A mesura que l'angle  $\Theta$  varia, s'obtenen diferents projeccions. La Figura 22 descriu el concepte de projecció.

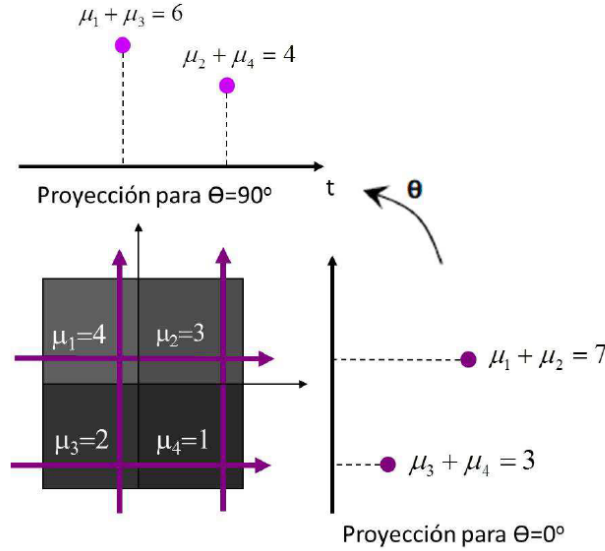


Figura 22: Concepte de projecció (García, 2013)

Les línies representen els raigs paral·lels que travessen l'objecte  $f(x,y)$  per l'angle  $\theta_0$  i les integrals al llarg de cada línia formen la projecció per aquest angle  $P_{\theta_0}(t)$ . Sense objecte, la zona més il·luminada del detector és la central ja que es produeix menys atenuació i el valor de la intensitat és més gran.

En el cas de projeccions de raigs paral·lels, la projecció és un conjunt d'integrals que ve donada per la funció  $P_{\theta}(t)$ , definida per tot valor de  $t$  i tot valor de  $\theta$ , tal i com es mostra en la Figura 23. Aquesta es coneix com la transformada de Radon de la funció  $f(x,y)$ .

$$P_{\theta}(t) = \int_{(\theta,t)} f(x,y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot \delta(x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta - t) \cdot dx \cdot dy \quad (2)$$

$$t = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta \quad (3)$$



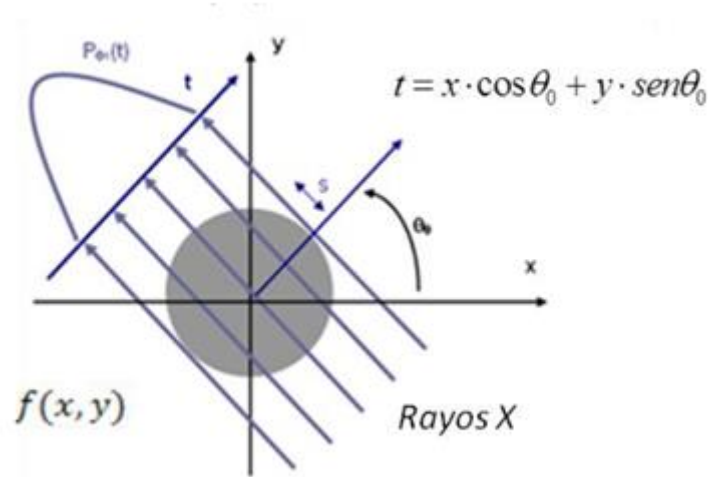


Figura 23: Esquema de definició de projecció (García, 2013)

Existeixen diferents mètodes de reconstrucció que es poden agrupar en analítics (comprehen la solució directa del sistema d'equacions lineals, la retroprojecció i la retroprojecció filtrada) o iteratius (inclouen el mètode iteratiu algebraic ART), segons la base matemàtica que utilitzen per obtenir la reconstrucció de les projeccions. (Gómez, 2008)

### 2.6.2 Mètodes de reconstrucció analítics

Els mètodes analítics tracten de trobar una expressió analítica que permeti fer la transformada inversa de Radon per trobar la imatge a partir d'unes projeccions conegudes.

Aquests mètodes basen la seva solució en l'aplicació del teorema del tall central, i té solució exacta si es té la projecció per tots els valors de la variable angular. No obstant, en la pràctica es disposa d'un nombre finit de projeccions, afectades per diferents

degradacions, amb el qual l'aplicació del teorema del tall central en la reconstrucció d'aquest tipus de projeccions proporciona una solució aproximada. Les degradacions de les projeccions són tractades prèviament a la reconstrucció mitjançant filtres o posteriorment aplicant algoritmes de correcció sobre la imatge reconstruïda.

### 2.6.2.1 Teorema del tall central

Aquest teorema permet relacionar les projeccions  $P_\theta(t)$ , amb la transformada de Fourier de la distribució  $f(x,y)$  tal i com es mostra en la Figura 24.

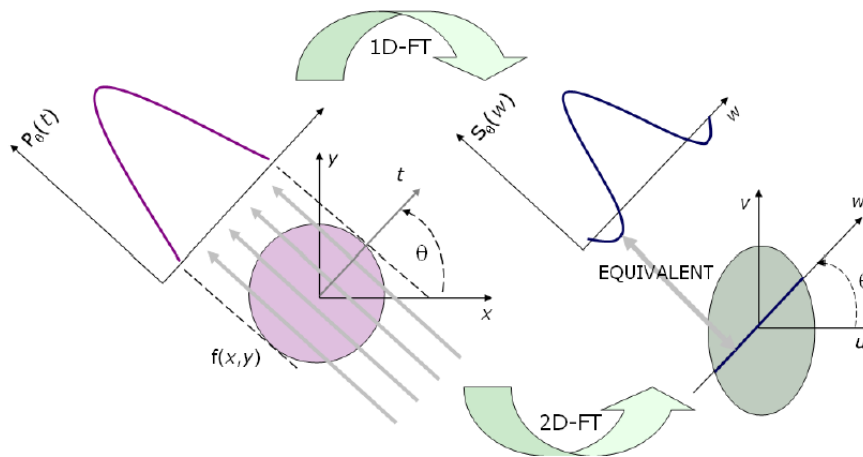


Figura 24: Teorema del tall central (García, 2013)

Per demostrar aquest teorema, s'analitza la transformada de Fourier 2D de la imatge  $F(u,v)$  en la línia  $v=0$ , que coincideix amb la transformada de Fourier 1D de la projecció segons la trajectòria  $\Theta=0$ .

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.4)$$

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta=0}(x) e^{-j2\pi(ux)} dx \quad (2.5)$$

$$F(u, 0) = TF\{P_{\theta=0}(x)\} = S_{\theta=0}(u) \quad (2.6)$$

Mitjançant la propietat de rotació de la transformada de Fourier, que diu que la transformada de Fourier 2D de la distribució girada un angle  $\alpha$  respecte a l'origen es la versió girada en el mateix angle de  $F(u, v)$ , s'obté que:

$$TF\{P(x, \theta + \alpha)\} = F(u, v + \alpha) \quad (2.7)$$

Finalment, amb aquesta demostració, es pot formular en teorema del tall central com:

“La transformada de Fourier d'una projecció paral·lela d'una distribució  $f(x, y)$  segons un angle  $\Theta$  és igual als valors de la transformada de Fourier 2D de la distribució en la recta que passa per l'origen formant el mateix angle  $\Theta$  amb l'eix  $u$ .”

### 2.6.2.2 Mètode directe de Fourier

Segons el teorema del tall central, si es prenen infinites projeccions d'un determinat objecte  $f(x,y)$  i es realitza la transformada de Fourier 1D, és possible determinar els valors de la transformada de Fourier 2D de l'objecte  $F(u,v)$  ja que es coneixerien tots els punts de  $F(u,v)$  i es podria recuperar l'objecte  $f(x,y)$  utilitzant la transformada inversa de Fourier.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.8)$$

En la pràctica, només es disposa d'un conjunt finit de projeccions i la transformada de Radon emplena amb mostreig polar la transformada de Fourier 2D de l'objecte. Per utilitzar el mètode directe de Fourier (FFT: Fast Fourier Transform), és necessari passar per un procés d'interpolació que permeti un mostreig cartesià. L'inconvenient d'aquest mètode és que lluny del centre de coordenades, a altes freqüències, es disposa de menor nombre de mostres, llavors l'error d'interpolació és major i s'introdueixen grans artefactes.

En la Figura 25, la gràfica de l'esquerra correspon a la transformada de Fourier 2D de l'objecte en coordenades polars, la gràfica del mig correspon a la mateixa transformada en coordenades cartesianes després de la interpolació i la gràfica de la dreta representa l'objecte  $f(x,y)$  després de realitzar la transformada inversa 2D de Fourier.

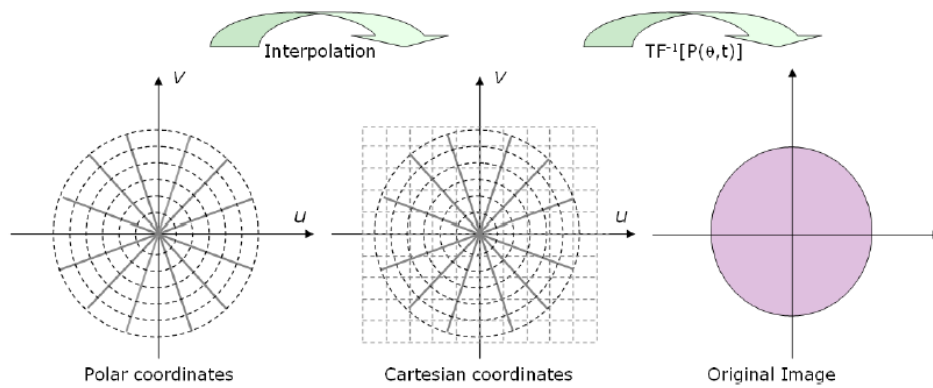


Figura 25: Mètode directe de Fourier (García, 2013)

### 2.6.2.3 Retroprojecció filtrada

L'algoritme de retroprojecció filtrada, en anglès *Filtered Back Projection* (FBP), es basa en el teorema del tall central i és utilitzat en moltes aplicacions degut a la seva alta precisió i eficiència. Aquest consta de dos parts ben diferenciades: la retroprojecció i el filtrat.

Considerant la imatge 2D de la Figura 22 i les projeccions obtingudes per els angles  $\Theta=0$  i  $\Theta=90$ , es pot recuperar la imatge original a partir de les seves projeccions mitjançant el procés de retroprojecció, replicant els valors recollits en cada una de les projeccions en una imatge buida en l'angle corresponent. La imatge final de retroprojecció és la suma de les imatges de retroprojecció per cada angle.

La Figura 26 mostra el concepte de retroprojecció. Partint de la imatge superior que representa la imatge original, a l'esquerra s'obté la imatge de retroprojector per l'angle  $\Theta=0$  i a la dreta s'obté la imatge de la suma de les retroprojeccions per  $\Theta=0$  i  $\Theta=90$ . Tot i que la imatge final obtinguda no és exactament la original, manté la distribució dels valors de cada píxel.

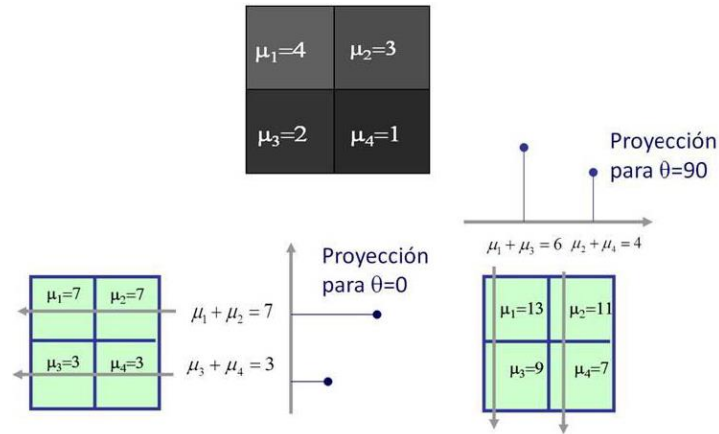


Figura 26: Concepte de retroprojecció (García, 2013)

En un cas real, es treballa amb molts píxels i això requereix moltes projeccions per obtenir una reconstrucció que s'assembli a la original. En la Figura 27 es pot observar com amb un increment del nombre de projeccions augmenta la resolució de la imatge. En la part superior es troba la imatge original formada per un punt. A l'esquerra es mostra la imatge obtinguda després d'una retroprojecció de 3 angles, al centre per 6 angles i a la dreta per 360 angles.

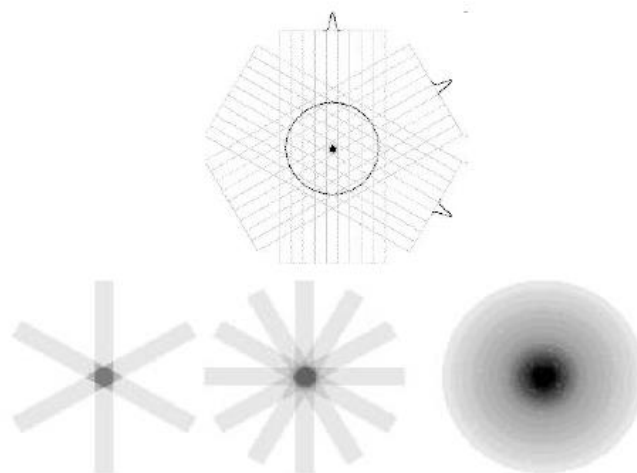


Figura 27: Resolució d'una imatge segons el numero de projeccions (García, 2013)

La imatge obtinguda es veu borrosa respecte la original (conté moltes components de baixa freqüència), pel qual és necessari una etapa de filtrat per recuperar la qualitat de la imatge.

En la Figura 28 es mostra la diferència de qualitat que s'obté a l'hora d'utilitzar filtres. La imatge (a) és la obtinguda mitjançant la retroprojecció, la imatge (a') és la seva transformada de Fourier 2D, en la qual els valors més alts es concentren en baixes freqüències. Mitjançant un filtre rampa 2D amb forma de conus, imatge (b), es dona més importància a les components d'alta freqüència i s'atenuen les baixes freqüències. El resultat és una imatge filtrada, més ben definida, amb les cantonades ben marcades.

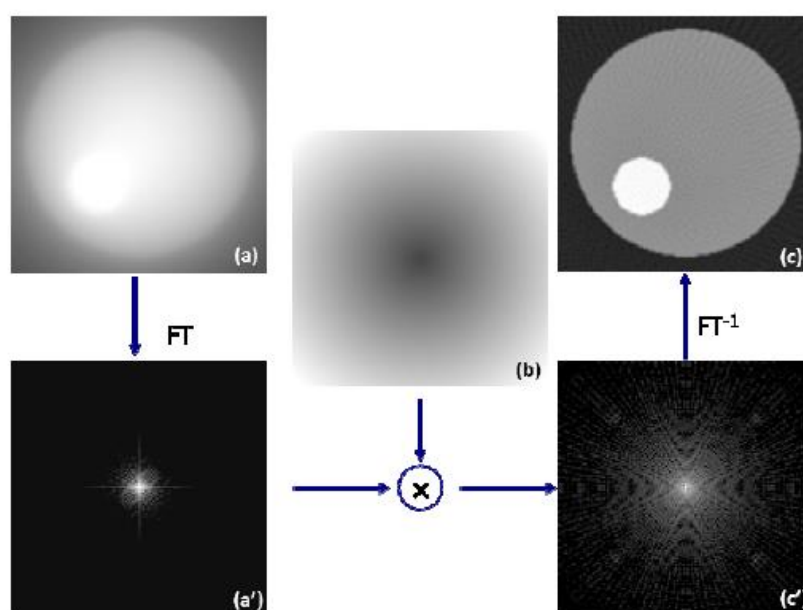


Figura 28: Millora de la qualitat de la imatge mitjançant el filtrat (García, 2013)

Tal i com s'ha vist en l'equació 2.6, la funció d'una imatge  $f(x,y)$  pot ser expressada en funció de la seva transformada  $F(u,v)$  com:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.9)$$

Donat que les transformades de Fourier de les projeccions emplen punts de l'espai de Fourier de la imatge amb un esquema de mostreig polar i no cartesià, el pas del sistema de coordenades  $(u,v)$  a un sistema de coordenades  $(w,\theta)$  que s'ajusta a les dades que es tenen en el domini de la freqüència ve definit per les següents equacions:

$$u = w \cdot \cos\theta \quad (2.10)$$

$$v = w \cdot \sin\theta \quad (2.11)$$

$$du \cdot dv = w \cdot dw \cdot d\theta \quad (2.12)$$

Substituint-ho en la integral (2.7) s'obté:



$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} w dw d\theta \quad (2.11)$$

Si es consideren intervals de  $\theta$  de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  i de  $180^\circ$  a  $360^\circ$ , aquesta integral queda dividida en dos parts:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} w dw d\theta \\ & + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} w dw d\theta \end{aligned} \quad (2.12)$$

A partir de la propietat de la transformada de Fourier:

$$F(w, \theta + 180^\circ) = F(-w, \theta) \quad (2.13)$$

Es pot reescriure la integral (2.12) com:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(w, \theta) \cdot |w| \cdot e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} \cdot dw \right] \cdot d\theta \quad (2.14)$$

$$t = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta$$

(2.1135)

Tenint en compte el teorema del tall central es pot substituir la transformada 2D de la distribució per un angle de projecció  $\theta$  donat per la transformada 1D de la projecció corresponent:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) \cdot |w| \cdot e^{j2\pi w t} \cdot dw \right] \cdot d\theta \quad (2.16)$$

Que es pot reescriure i simplificar a:

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) \cdot |w| \cdot e^{j2\pi w t} \cdot dw \quad (2.14)$$

Aquesta última equació, és la transformada inversa de Fourier del producte de dos transformades i representa una operació de filtrat, on la resposta en freqüència del filtre és  $H(w) = |w|$ , tal i com es mostra en la Figura 29. La suma de les diferents projeccions filtrades, una per cada  $\theta$ , permet estimar la imatge  $f(x, y)$ .

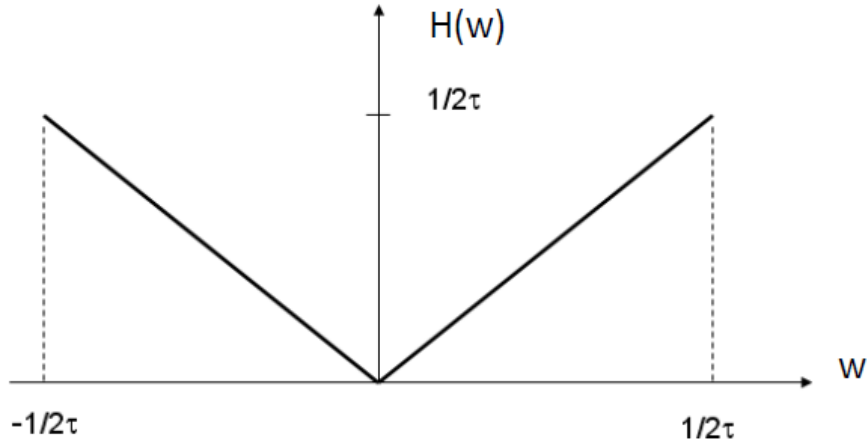


Figura 29: Filtre rampa en el domini de la freqüència (García, 2013)

Les projeccions filtrades són retroprojeccions al llarg de les línies de projecció i sumades. A partir de (2.16) i (2.17) s'obté la formulació matemàtica de l'etapa de retroprojecció.

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta) \cdot d\theta \quad (2.15)$$

#### 2.6.2.4 Reconstrucció FDK

Aquest és un algorisme de reconstrucció 3D per tomografia de feix cònic amb trajectòria circular del conjunt font-detector que va ser proposat per Feldkamp, David i Kreis l'any 1984.

Aquest mètode es basa en l'algorisme FBP, però introduint una tercera coordenada (axial). D'aquesta manera, es poden considerar tots els raigs contribuents i la fórmula analítica es pot expressar de la següent manera:

$$f(u, v, z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{SO}{(SO - v)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(s, z) \cdot h\left(\frac{SO}{SO - v} - S\right) \cdot \frac{SO}{\sqrt{SO^2 + z^2 + u^2}} ds d\beta \quad (2.16)$$

Tal i com es mostra en la Figura 30, SO representa la distància entre la font i el detector, z és la coordenada axial, s és la coordenada radial en el detector, u i v són coordenades cartesianes en el volum reconstruir.

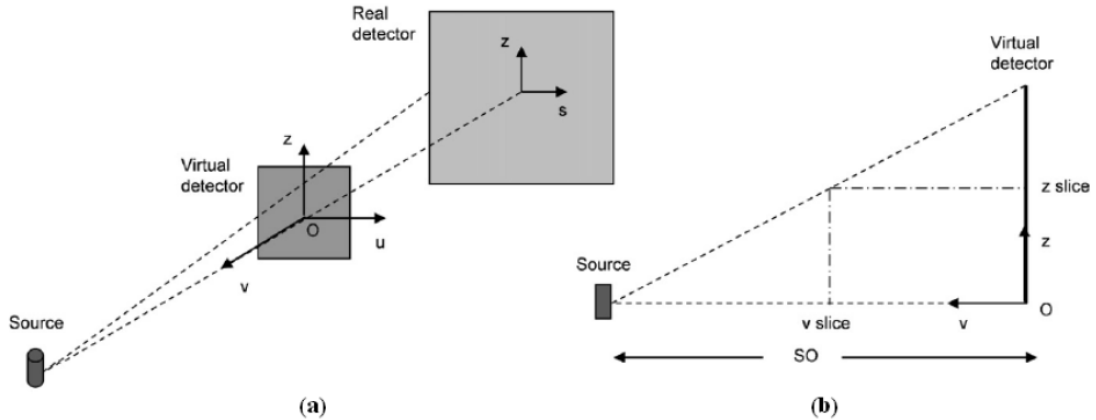


Figura 30: Perspectiva (a) i vista lateral (b) de la geometria cone-beam (García, 2013)

### 2.6.3 Mètodes de reconstrucció iteratius (algebraics)

Aquests mètodes de reconstrucció algebraics no requereixen un conjunt complet de projeccions uniformement distribuïdes per una reconstrucció precisa i també són més estables sota condicions de soroll. Per contra, computacionalment són molt exigents.

El primer mètode algebraic per la reconstrucció d'objectes 3D a partir d'un conjunt de projeccions va ser la Tècnica de Reconstrucció Algebraica (ART), proposada per Gordon, Bender i Herman. Aquest mètode formula el problema de reconstrucció com un sistema d'equacions lineals. Resolent el sistema utilitzant un mètode iteratiu s'obté l'objecte 3D reconstruït. Els mètodes de reconstrucció basats en ART, com són la Tècnica de Reconstrucció Iterativa Simultània (SIRT) i la Tècnica de Reconstrucció Algebraica Simultània (SART) modelen el problema utilitzant el mateix sistema d'equacions, però proposant diferents mètodes iteratius per solucionar-lo. (Turonov, 2011)

Aquests mètodes consideren el volum a reconstruir com una matriu d'incògnites establint les equacions en funció de les dades mesurades, d'on resulta el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \dots + w_{1n}f_n = p_1 \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \dots + w_{2n}f_n = p_2 \\ \dots \\ w_{m1}f_1 + w_{m2}f_2 + w_{m3}f_3 + \dots + w_{mn}f_n = p_m \end{cases} \quad (2.20)$$

On  $f_j$  és el valor de gris del vòxel del volum a reconstruir,  $p_i$  el valor mig en el detector per el raig  $i$ ,  $w_{ij}$  els pesos que defineixen la influència del vòxel  $j$  en el raig  $i$ . Aquest conjunt d'equacions en poden expressar en forma matricial de la següent manera:

$$W \cdot F = P \quad (2.21)$$

On la matriu  $W$  té una mida molt gran, pel qual la resolució del sistema es basa en aproximacions successives fins arribar a un valor aproximat de la distribució que ha originat les dades mesurades.

En la Figura 31 es mostra l'esquema de funcionament d'aquests mètodes, en el qual es parteix d'una estimació simplificada de la imatge. Les projeccions simulades d'aquesta imatge són comparades en cada iteració amb les projeccions reals i l'error comès es corregeix en la estimació. El procediment es repeteix diverses vegades fins obtenir una imatge que s'aproximi a la original.

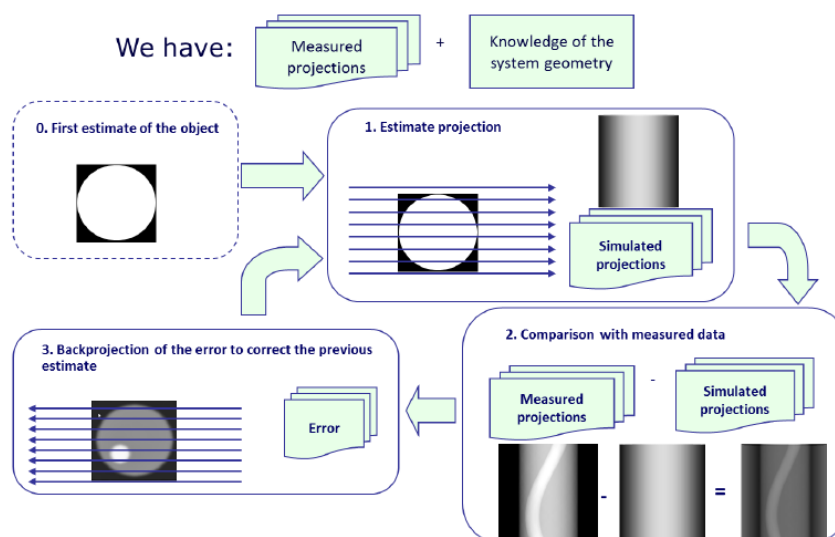


Figura 31: Esquema de funcionament dels mètodes iteratius (García, 2013)

Tot i que aquests mètodes són computacionalment molt costosos, solen donar millors resultats que els mètodes analítics en quant a reducció d'artefactes i millora de la relació senyal-soroll.

### 2.6.3.1 ART

En ART, un subconjunt S conté només un píxel. Per tant, el volum s'actualitza després de processar un píxel. Per un vòxel  $v_j$  es pot descriure el pas d'actualització mitjançant la següent equació:

$$v_j^{k+1} = v_j^k + \lambda \frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_{in} v_n^k}{\sum_{n=1}^N w_{ij}^2} w_{ij} \quad (2.22)$$

On  $\lambda$  és un factor de relaxació entre (0, 1].

L'algoritme ART és relativament ràpid, però la qualitat dels resultats no és tant alta. Les reconstruccions solen contenir soroll i artefactes.

### 2.6.3.2 SIRT

Mitjançant el mètode SIRT, un subconjunt S conté tots els píxels de totes les projeccions. Per tant, l'actualització de volum correspon a una iteració de l'algoritme i per un vòxel es pot expressar com:

$$v_j^{k+1} = v_j^k + \lambda \frac{\sum_{p_i \in P} \left( \frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_{in} v_n^k}{\sum_{n=1}^N w_{in}} \right)}{\sum_{p_i \in P} w_{ij}} w_{ij} \quad (2.23)$$

En comparació amb ART, els resultats en SIRT són millors, però la convergència és significativament més lenta.

### 2.6.3.3 SART

Amb el mètode SART, un subconjunt  $S$  conté tots els píxels d'una projecció  $P_\phi$ . Per un vòxel  $v_j$  aquesta actualització es pot expressar com:

$$v_j^{k+1} = v_j^k + \lambda \frac{\sum_{p_i \in P_\phi} \left( \frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_{in} v_n^k}{\sum_{n=1}^N w_{in}} \right)}{\sum_{p_i \in P_\phi} w_{ij}} w_{ij} \quad (2.24)$$

On  $\sum_{n=1}^N w_{in} v_n^k$  suma tots els valors de vòxel ponderats que contribueixen al píxel  $p_i^k$  i  $\sum_{n=1}^N w_{in}$  suma els pesos d'aquests vòxels,  $p_i$  correspon al píxel de la projecció actual  $P_\phi$  i  $\sum_{p_i \in P_\phi} w_{ij}$  representa tots els pesos en el vòxel  $v_j$ .

SART combina el millor dels dos mètodes descrits anteriorment: proporciona una convergència ràpida com ART i la qualitat dels resultats és comparable a SIRT.

### 2.6.4 Contrast de fase (Phase-Contrast)

El contrast de fase aprofita el fet que diferents estructures tenen diferents índexs de refracció i, per tant, dobleguen la llum i retarden el seu pas a través de la mostra en diferents quantitats. Aquest mètode explora les diferències en l'índex de refracció de diferents materials per diferenciar les estructures a analitzar. En la tomografia de raigs X s'augmenta el contrast de la imatge, ressaltant petits detalls de diferents índexs de refracció dins d'estructures que mitjançant un altre mètode serien uniformes.



Els materials cristal·lins són capaços de presentar una doble refracció, en la qual els raigs de llum que entren en un cristall es divideixen en dos feixos que poden presentar diferents índexs de refracció, depenent de l'angle amb el qual entren en el cristall.

Existeixen quatre mètodes principals per l'obtenció d'imatges de contrast de fase de raigs X, que utilitzen diferents principis per convertir les variacions de fase en els raigs X que emergeixen de l'objecte en variacions d'intensitat en un detector de raigs X. L'avantatge d'aquests mètodes en comparació amb la absorció-contrast d'imatges de raigs X és el major contrast que fa possible veure els detalls més petits. El desavantatge és que aquests mètodes requereixen equips més sofisticats, òptiques de raigs X i detectors d'alta resolució per proporcionar la sensibilitat necessària per diferenciar entre petites variacions en l'índex de refracció dels raigs X que passen a través de diferents medis. En la Figura 32 es mostren aquests mètodes.

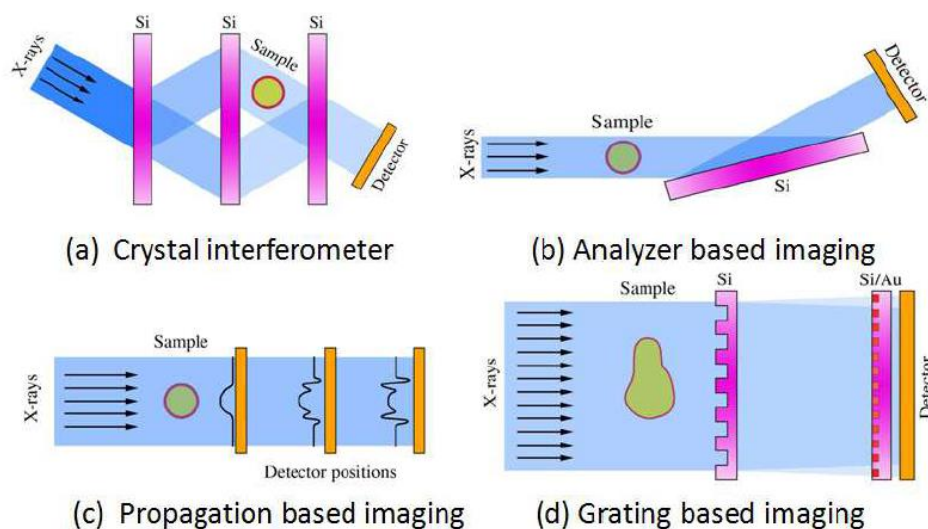


Figura 32: Mètodes de Phase Contrast (Jian, 2012)

#### **2.6.4.1 Crystal interferòmetre**

Aquest mètode utilitza una sèrie de reflexions de cristall per dividir un feix de raigs X en dos i deixar que una part del feix passi a través de la mostra abans de que tots dos es recombinin. Aquest està limitat en el camp de visió per la mida de l'òptica de cristall. El seu ús també està limitat per la necessitat d'estabilitat on petites vibracions poden canviar la longitud de la trajectòria òptica i pertorbar les mesures.

#### **2.6.4.2 Analyzer based imaging**

Quan un feix de raigs X ben col·limat passa a través d'una mostra, el feix és lleugerament refractat. En aquest cas la refracció es visualitza utilitzant la reflexió de Bragg d'un o varis cristalls de l'analitzador. Aquest mètode és difícil d'estendre a la tomografia ja que els cristalls normalment estan alineats de tal manera que la derivada de l'índex de refracció es mesura en la direcció paral·lela a l'eix tomogràfic.

#### **2.6.4.3 Propagation based imaging**

Aquest és el tipus més simple d'imatges de contrast de fase, ja que no requereix elements òptics en el feix i la restricció en l'amplada espectral és inferior. PBI es basa en franges d'interferència que sorgeixen en la propagació de l'espai lliure en el règim de Fresnel. Per tant, les franges d'intensitat mesurades no són una mesura directa de la fase com l'interferòmetre de cristall, sinó el laplacà del front de fase. Aquest mètode és particularment bo en la millora de les vores, per exemple en la localització de la no homogeneïtat en els metalls.

#### **2.6.4.4 Grating based imaging**

Està relacionat amb l'interferòmetre de cristall en el sentit de que consisteix en un divisor de feix i un analitzador de feix i GBI està relacionat amb ABI pel fet que es mesura la primera derivada del front de fase. La reixa de divisió del feix el divideix per difracció,

però les ones de difracció estan separades per menys d'un mil·liradian, i els feixos difractats no estan separats espacialment, però interferiran per crear un patró d'intensitat corrent avall del divisor de feix a una distància definida per l'efecte de Talbot. La refracció en una mostra es mesura detectant el desplaçament transversal del patró d'interferència amb un detector d'alta resolució o una reixa de l'analitzador.

# Capítol 3

## 3 METODOLOGIA

Tots els elements de l'equip de tomografia s'estudien com si fossin geometries ideals. En aquest capítol es descriu com s'ha representat matemàticament cada component de l'equip per poder simular el funcionament de l'aparell i obtenir les projeccions.

### 3.1 Geometria del problema

En aquest estudi es simula el funcionament d'un equip de tomografia de raigs X de feix en forma de conus divergent i la obtenció de projeccions d'una proveta ideal per tal de reconstruir-la posteriorment.

L'equip està format per una font emissora representada per un punt en l'espai, un eix de rotació representat per una recta, l'objecte a estudiar, en aquest cas un ortoedre i un detector representat per un pla.

La Figura 33 mostra un esquema del conjunt.

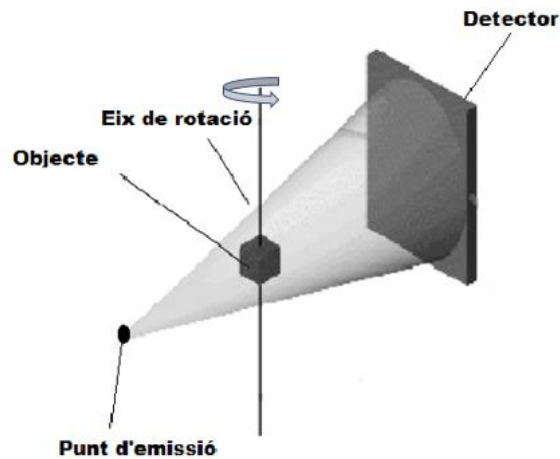


Figura 33: Esquema del conjunt

### 3.2 Emissió de raigs X

La font emissora dels raigs X es representa com un punt  $P_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$  en l'espai tridimensional, que genera diferents rectes divergents formant un conus. Tal i com es pot observar en la Figura 34, el punt emissor representaria la punta del conus.

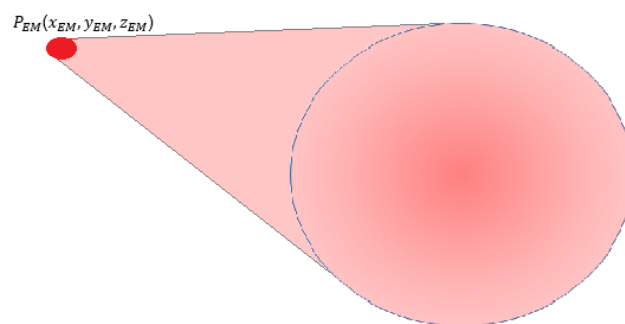


Figura 34: Representació de la font d'emissió en l'espai

En aquest cas, es considera que la font emissora es troba en els eixos de coordenades a utilitzar, de tal manera que el punt és  $P_{EM}(0,0,0)$ .

### 3.3 Eix de rotació

L'eix de rotació és l'eix respecte el qual l'objecte o cos va girant. En l'espai tridimensional, aquest eix es pot definir com una recta determinada per un punt  $P_{ER}(x_{ER}, y_{ER}, z_{ER})$  i el seu vector director  $\overline{u_{ER}} = (u_x, u_y, u_z)$ .

$$r = P_{ER} + t \cdot \overline{u_{ER}} \quad (17.1)$$

On  $t$  és un escalar.

La Figura 35 mostra com queda representat l'eix de rotació.

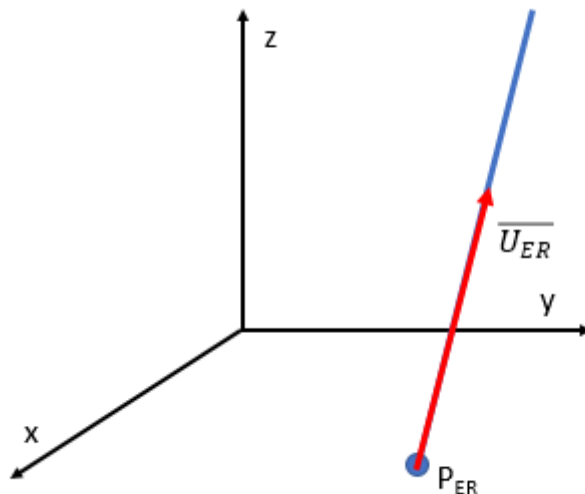


Figura 35: Eix de rotació

### **3.4 Proveta**

La proveta és l'objecte del qual s'obtenen les projeccions. En aquest estudi, s'ha considerat que la proveta és un paral·lelepípede ortogonal (ortoedre). Seguidament s'expliquen dos maneres diferents amb les quals s'ha definit la proveta.

Inicialment s'ha el mètode A, en el qual s'ha considerat que la proveta es pot representar mitjançant equacions de plans i rectes. Cada cara de la proveta és representada mitjançant l'equació d'un pla, i les arestes es representen mitjançant equacions de rectes. Un cop programat, s'ha vist que aquest mètode és molt robust, ja que s'han de fer diverses operacions per obtenir l'atenuació de la intensitat que arriba a cada píxel i això fa que el temps d'execució sigui molt llarg.

Posteriorment, en el mètode B, s'ha tractat la proveta d'una altra manera. Conegut el centre de la proveta i els tres eixos que la defineixen en l'espai, es pot calcular el centre de cada cara i per delimitar la proveta es treballa amb distàncies respecte el centre de cada cara. Mitjançant aquest mètode s'ha pogut reduir considerablement el temps d'execució, encara que continua sent prou llarg com per obtenir moltes projeccions i tractar-les a posteriori.

Pel que fa a la comprensió d'aquest dos mètodes, el primer és molt més intuïtiu ja que es treballa amb equacions, en canvi el segon es necessita més coneixement en matemàtiques per entendre el procediment.

#### **3.4.1 Obtenció de la proveta (Mètode A)**

Considerant que la proveta es troba centrada a l'eix de rotació, per obtenir-la és necessari que els vectors normals dels plans que formen els laterals de la proveta, també siguin normals a l'eix de rotació.

Donat un vector  $\vec{vn}$  que és normal a l'eix i que correspon a una cara de la proveta, per trobar els altres tres vectors normals dels laterals de la proveta s'ha de rotar aquest vector respecte l'eix a  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  i  $270^\circ$  tal i com es mostra en la Figura 36.

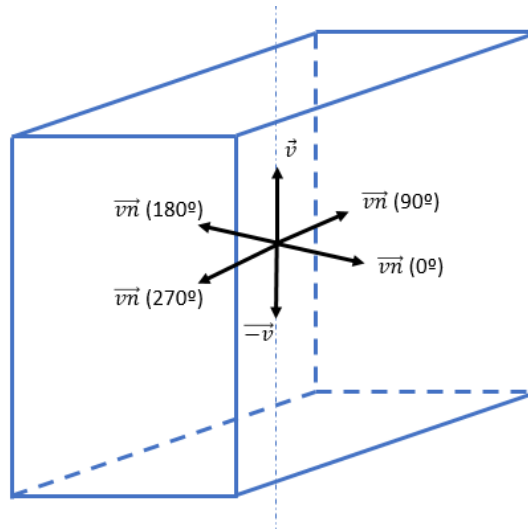


Figura 36: Vectors normals dels plans que formen la proveta

La cara superior de la proveta té com a vector normal el vector director de la recta, i la cara inferior té com a vector normal el vector director de la recta canviat de sentit i direcció.

#### 3.4.1.1 Cares de la proveta

Tal i com s'ha comentat anteriorment, cada cara de la proveta es pot representar com si es tractés d'un pla. L'equació general d'un pla ve donada per la següent expressió:

$$\pi: Ax + By + Cz + D \quad (3.2)$$



On el vector normal del pla és  $\vec{u} = (A, B, C)$ .

Llavors, donada una distància respecte l'eix de rotació  $d$ , un punt contingut dins la recta de l'eix de rotació  $P(x_0, y_0, z_0)$  i conegut el vector normal del pla  $\vec{u} = (A, B, C)$ , l'equació del pla es pot trobar mitjançant l'equació de la distància d'una recta a un punt de la següent manera.

$$Distància(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = d \quad (3.3)$$

D'aquesta manera, la única incògnita a trobar és  $D$ . La Figura 37 mostra les cares que formen la proveta.

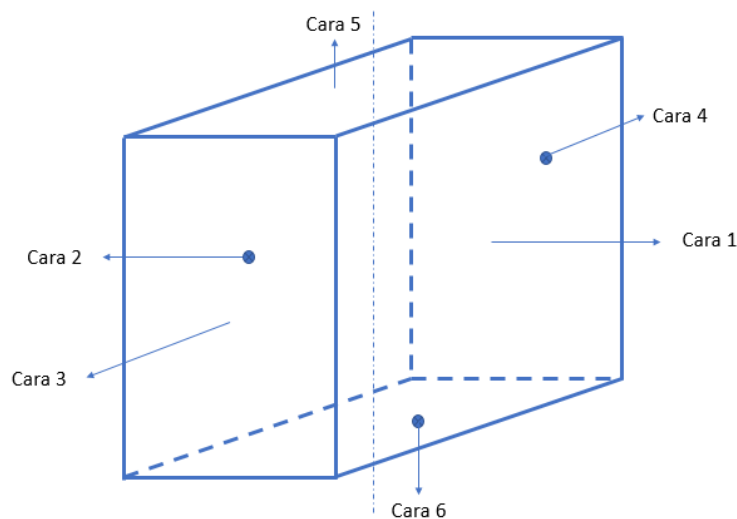


Figura 37: Cares que formen la proveta

### 3.4.1.2 Arestes de la proveta

Matemàticament, una aresta és la recta que es genera en la intersecció de dos plans. Aquesta recta pertany a tots dos plans.

Donats dos plans  $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1$  i  $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2$  que es creuen en l'espai, per trobar l'equació de la recta d'intersecció es procedeix de la següent manera.

S'ha de resoldre el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Com que es tenen dos equacions amb tres variables, es considera una variable lliure com pot ser  $z = t$ , de tal manera que el sistema d'equacions queda de la següent manera:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1t - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2t - D_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Solucionant aquest sistema s'obté la següent solució:

$$\left\{ x = \frac{(B_1C_2 - B_2C_1)t + B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, y = \frac{-((A_1C_2 - A_2C_1)t + A_1D_2 - A_2D_1)}{A_1B_2 - A_2B_1} \right\} \quad (3.6)$$

Llavors, l'equació paramètrica de la recta és:

$$(x, y, z) = \left( \frac{(B_1C_2 - B_2C_1)t + B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{-((A_1C_2 - A_2C_1)t + A_1D_2 - A_2D_1)}{A_1B_2 - A_2B_1}, t \right) \quad (3.7)$$

$$(x, y, z) = \left( \frac{B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{-(A_1D_2 - A_2D_1)}{A_1B_2 - A_2B_1}, 0 \right) + t \left( \frac{(B_1C_2 - B_2C_1)}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{-(A_1C_2 - A_2C_1)}{A_1B_2 - A_2B_1}, 1 \right) \quad (3.8)$$

On  $t$  és un escalar, els termes que multipliquen  $t$  són el vector director de la recta i els altres termes són un punt contingut dins la recta.

En total s'han de trobar dotze arestes per delimitar la proveta, tal i com es mostra en la Figura 38.

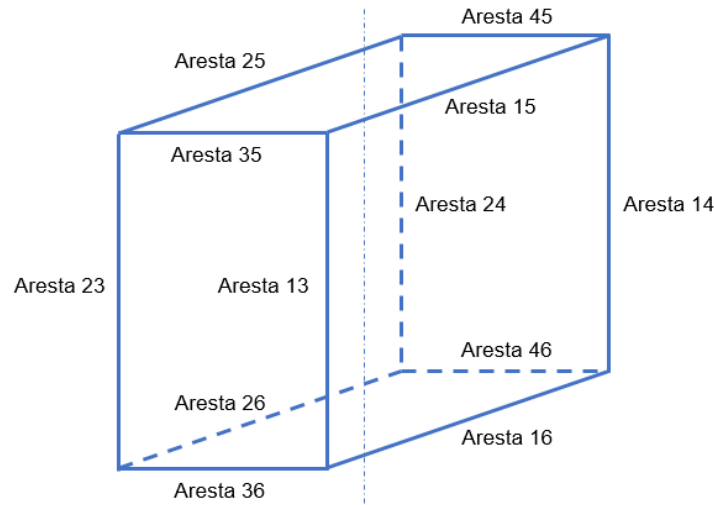


Figura 38: Arestes que formen la proveta

Aquest mètode no ha acabat sent prou bo, ja que a l'hora de resoldre els sistemes d'equacions, mitjançant la funció *solve* de MatLab s'obtenen denominadors nuls i no es pot continuar executant el programa. S'han buscat alternatives per no utilitzar el *solve*, però com que incrementen el número de càlculs i el programa en si ja és prou lent, s'ha decidit tractar la proveta d'una altra manera.

### 3.4.2 Obtenció de la proveta (Mètode B)

Aquest mètode tracta de considerar el centre de la proveta i els vectors que la defineixen en l'espai. D'aquesta manera i conegudes les distàncies a les quals es troba el centre respecte cada cara, la proveta queda definida i es poden calcular els centres de cada cara.

Els paràmetres necessaris són: alçada  $H_o$ , amplada  $W_o$  i fons  $L_o$  de la proveta, el centre de l'objecte  $P_{CO}(x_{CO}, y_{CO}, z_{CO})$  i dos vectors unitaris, normals entre si, i directors de dos de les cares,  $\overline{u_{OB1}} = (u_{x1}, u_{y1}, u_{z1})$  i  $\overline{u_{OB2}} = (u_{x2}, u_{y2}, u_{z2})$ .

Com que l'espai ve definit per tres vectors i la proveta és ortogonal, el tercer vector ha de ser normal als dos primers i es pot trobar fent el producte vectorial dels altres dos:

$$\overline{u_{OB3}} = (u_{x3}, u_{y3}, u_{z3}) = \overline{u_{OB1}} \times \overline{u_{OB2}} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_{x1} & u_{y1} & u_{z1} \\ u_{x2} & u_{y2} & u_{z2} \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

En la Figura 39 es mostra com queden representats els paràmetres de la proveta.

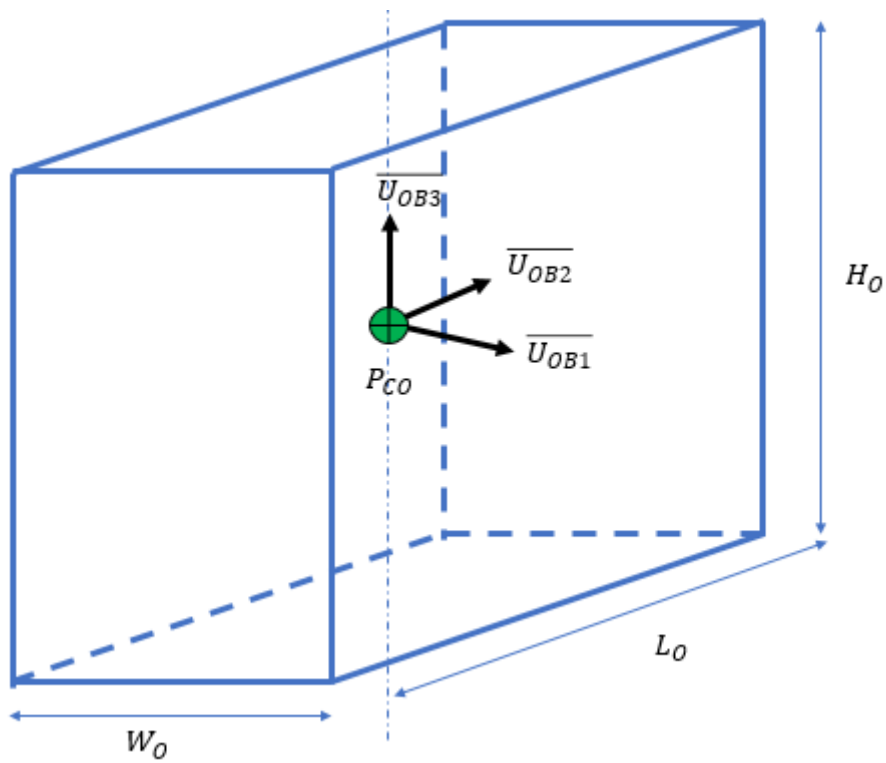


Figura 39: Paràmetres de la proveta

### 3.4.2.1 Cares de la proveta

En aquest cas es necessita conèixer els centres de cada cara que forma la proveta. A partir dels paràmetres descrits anteriorment es poden trobar mitjançant les rectes que passen pel centre de la proveta i tenen com a vectors directors els que defineixen la proveta.

Els sis centres que té la proveta es troben de la següent manera:

$$\begin{aligned}P_{C1} &= P_{CO} + \frac{W_0}{2} \overline{U_{OB1}} \\P_{C2} &= P_{CO} - \frac{W_0}{2} \overline{U_{OB1}} \\P_{C3} &= P_{CO} + \frac{L_0}{2} \overline{U_{OB2}} \\P_{C4} &= P_{CO} - \frac{L_0}{2} \overline{U_{OB2}} \\P_{C5} &= P_{CO} + \frac{H_0}{2} \overline{U_{OB3}} \\P_{C6} &= P_{CO} - \frac{H_0}{2} \overline{U_{OB3}}\end{aligned}\tag{3.10}$$

En la Figura 40 es representa el centre de cada cara.

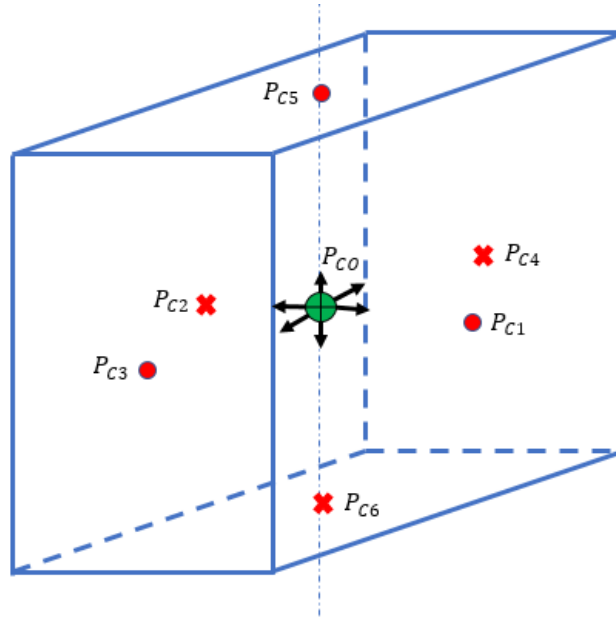


Figura 40: Centres de les cares que formen la proveta

### 3.5 Detector

El detector no deixa de ser un pla l'equació del qual es pot representar coneguts un punt extrem d'aquest pla  $P_{DE}(x_{DE}, y_{DE}, z_{DE})$  i dos vectors directors  $\overline{u_{DE1}} = (x_{DE1}, y_{DE1}, z_{DE1})$  i  $\overline{u_{DE2}} = (x_{DE2}, y_{DE2}, z_{DE2})$ . També es necessita conèixer les mides del detector (alçada  $H_{DE}$  i amplada  $W_{DE}$ ) i les mides dels píxels ( $\lambda$  i  $\mu$ ) o la mida de píxel i el nombre de píxels.

Mitjançant la següent expressió es pot explorar cadascun dels píxels que conté el detector.

$$G(i, j) = P_{DE} + \alpha \overline{u_{DE1}} + \beta \overline{u_{DE2}} \quad (3.11)$$

On  $\alpha$  i  $\beta$  són escalars que representen la distància que hi ha entre els centres dels píxels que conformen aquest detector. La Figura 41 mostra com queda representat el detector.

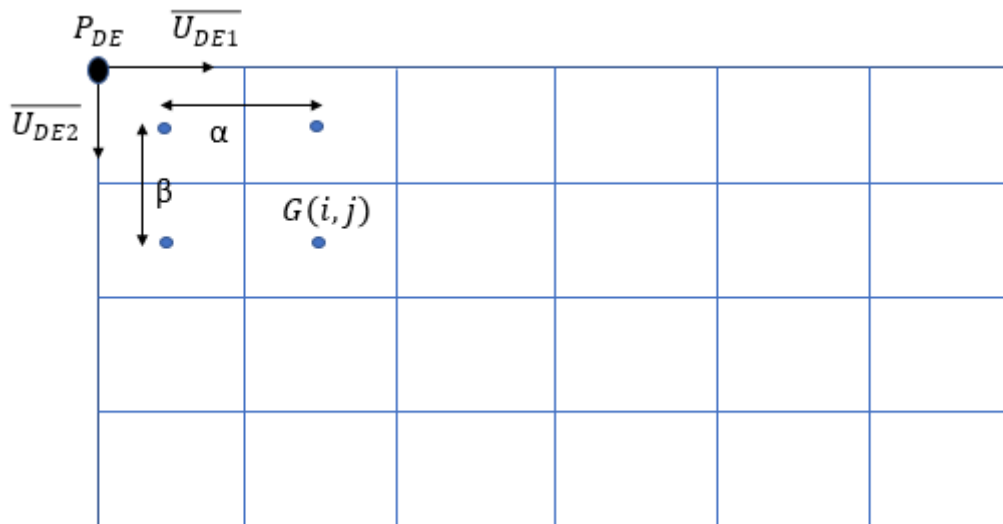


Figura 41: Detector

El feix de raigs X va des de la font emissora fins al centre de cada píxel on es recull l'atenuació corresponent al feix en l'àrea corresponent a aquest píxel.



### 3.6 Intersecció del feix amb la proveta

#### 3.6.1 Intersecció mitjançant el mètode A

Tal i com s'ha comentat en l'apartat 3.1, el feix és un conjunt de rectes i la proveta es considera un conjunt de plans. Per conèixer el punt en el que coincideix el feix amb la proveta es necessita conèixer les equacions del pla i de la recta.

Donada l'equació d'un pla  $\pi: Ax + By + cZ + D$  i l'equació d'una recta  $r: P_1 + t \cdot \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$ :

Si s'expressa la recta en equacions paramètriques s'obté:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \quad (3.12)$$

Si es substitueixen les equacions paramètriques de la recta en l'equació del pla i es soluciona en funció de  $t$  s'obté:

$$A(x_1 + at) + B(y_1 + bt) + C(z_1 + ct) + D = 0 \quad (3.13)$$

Aïllant  $t$ , la solució queda de la següent manera:

$$t = \frac{-(y_1 B + D + z_1 C + x_1 A)}{aA + bB + cC} \quad (3.14)$$

Finalment si es substitueix  $t$  en l'equació de la recta, s'obté el punt d'intersecció.

### 3.6.2 Intersecció mitjançant el mètode B

El feix de raigs X connecta el punt emissor a cadascun dels centres de cada píxel del detector, de tal manera que el vector director de cadascuna d'aquestes rectes és  $\overrightarrow{P_{EM}G}$ .

D'aquesta manera, la intersecció del feix amb la proveta es pot expressar com  $I = \lambda \cdot \overrightarrow{P_{EM}G}$ , sent  $\lambda$  un escalar.

La primera condició que s'ha de complir per a que es produeixi intersecció entre el feix i la proveta els vector normal de cada cara  $\vec{n}$  i el vector  $\overrightarrow{P_{EM}G}$  no han de ser perpendiculars,  $\overrightarrow{P_{EM}G} \cdot \vec{n} \neq 0$ , ja que sinó mai hi hauria creuament.

L'altre condició que s'ha de complir per a que hi hagi intersecció és que el vector que uneix el punt d'intersecció amb el centre de la cara i el vector normal de la cara han de ser perpendiculars,  $(\lambda \cdot \overrightarrow{P_{EM}G} - P_C) \cdot \vec{n} = 0$ .

Mitjançant aquesta expressió es pot aïllar  $\lambda$ , de tal manera que aquest escalar és:

$$\lambda = \frac{P_C \cdot \vec{n}}{\overrightarrow{P_{EM}G} \cdot \vec{n}} \quad (3.15)$$

D'aquesta manera les interseccions entre el feix i la proveta es troben en:

$$I = \frac{P_C \cdot \bar{n}}{\overline{P_{EM}G} \cdot \bar{n}} \cdot \overline{P_{EM}G} \quad (3.16)$$

En la Figura 42 es mostra la intersecció del feix amb una cara de la proveta.

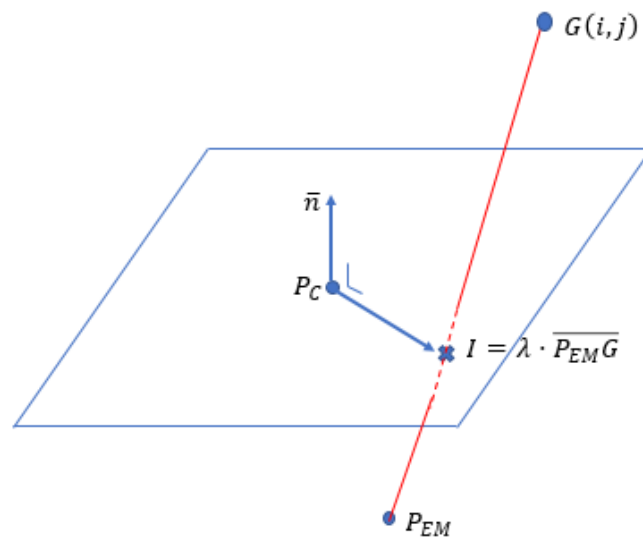


Figura 42: Representació de la intersecció

### 3.7 Delimitació dels punts d'intersecció en la proveta

#### 3.7.1 Delimitació mitjançant el mètode A

Coneguts els sis plans que formen la proveta, les seves arestes i com intersecta el feix amb la proveta, ara cal resoldre un problema matemàtic.

Tant les cares de la proveta com les seves arestes són infinites ja que no deixen de ser plans i rectes. Les rectes que formen el feix de raigs X podem intersectar en qualsevol punt dels plans que formen les cares de la proveta i això és el que s'ha de delimitar. La Figura 43 ajuda a interpretar el problema a solucionar.

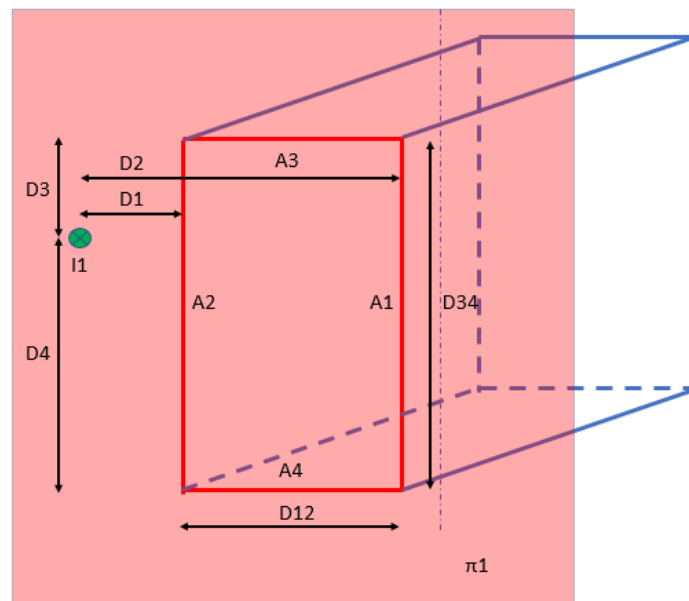


Figura 43: Obtenció dels punts que passen per la proveta

Donat el pla  $\pi_1$  que representa una cara de la proveta i les arestes A1, A2, A3 i A4 que representen les rectes d'intersecció d'aquest pla amb els plans de les altres cares de la proveta, per saber si el punt d'intersecció I1 del feix es troba dins de la proveta s'han de seguir el següent procediment:

- Es calcula la distància que hi ha entre les arestes D12 i D34.
- Es calcula la distància que hi ha entre el punt d'intersecció i cadascuna de les arestes.
- Es comprova que es compleixen les següents condicions:

$$0 \leq D1 \leq D12$$

$$0 \leq D2 \leq D12$$

$$0 \leq D3 \leq D34$$

$$0 \leq D4 \leq D34$$

Si totes les condicions anteriors es compleixen per un punt d'intersecció del feix amb el pla, aquest punt està contingut en la proveta.

Les rectes que formen el feix de raigs X i travessen la proveta sempre tenen dos punts d'intersecció en cares diferents, un d'entrada i un altre de sortida. La distància entre aquests dos punts representa la distància que ha travessant una recta del feix en la proveta. Aquesta distància es calcula en la secció 3.4.

### **3.7.2 Delimitació mitjançant el mètode B**

Cal analitzar si el punt d'intersecció I, de la Figura 43, es troba dins la proveta o fora. Per saber-ho, per cada cara s'han de calcular les distàncies a les quals es troba respecte els dos vectors perpendiculars al vector normal de la corresponent cara.

Si s'analitza la cara el vector normal de la qual és  $\bar{x}$ , caldrà calcular les distàncies respecte  $\bar{y}$  i  $\bar{z}$  i comprovar que aquestes distàncies es troben dins de l'interval que defineix les mides de la proveta respecte aquests eixos.

La Figura 44 mostra el cas a estudiar per decidir si el punt d'intersecció es troba dins de la proveta.

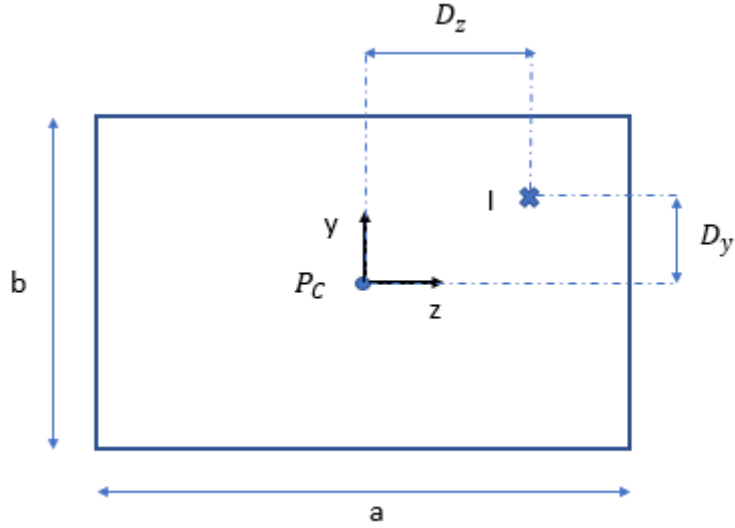


Figura 44: Esquema representatiu per decidir si un punt d'intersecció es troba dins de la proveta

Les distàncies  $D_y$  i  $D_z$  que hi ha entre el punt d'intersecció i el centre de la cara, s'han de trobar dins dels límits que defineixen aquesta cara. Aquestes distàncies es calculen de la següent manera:

$$D_y = (I - P_C) \cdot \bar{y} \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \quad (3.17)$$

$$D_z = (I - P_C) \cdot \bar{z} \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \quad (3.18)$$

Si totes dues distàncies es troben dins de l'interval corresponent, el punt d'intersecció es troba dins de la proveta.

### 3.8 Distància creuada pel feix en la proveta

El feix que creua la proveta ho fan en dos punts, un d'entrada i un altre de sortida. D'aquesta manera s'obtenen dos punts d'intersecció i la distància entre aquests representa la longitud que ha creuat una recta del feix al llarg de la proveta. Llavors, donats dos punts a l'espai  $P1(x1,y1,z1)$  i  $P2(x2,y2,z2)$ , la distància entre aquests dos es calcula segons:

$$Distància = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2} \quad (3.19)$$

De la mateixa manera, coneguda la distància total que recorre el feix des del punt emissor fins a un píxel del detector, es pot obtenir la distància que recorre el feix en l'aire fent la resta d'aquesta distància total i la recorreguda en la proveta.

### 3.9 Intensitat atenuada en cada píxel

Donat que l'emissió de raigs és en forma de conus, la intensitat per unitat de superfície que arriba a cada píxel és:

$$I_{ij} = \frac{I_0}{2\pi r h} \quad (3.20)$$

On  $I_0$  és la intensitat del feix i la superfície, és la superfície d'un casquet esfèric. En la Figura 45 es mostren els paràmetres d'un casquet.

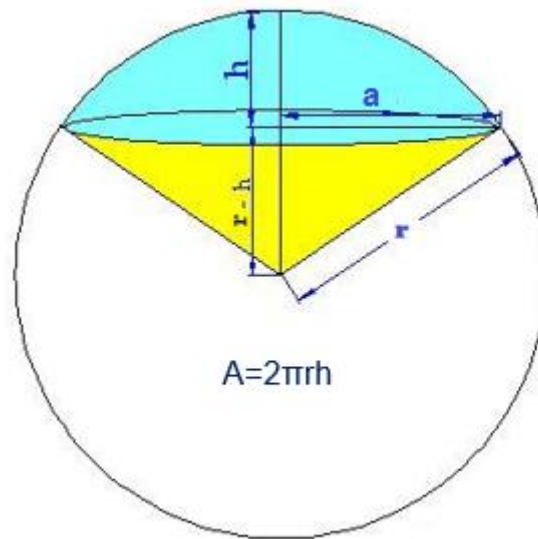


Figura 45: Casquet esfèric (<http://www.aulafacil.com>)

On  $r$  és el radi de l'esfera,  $a$  és el radi de la base del casquet i l'alçada del casquet és  $h$ . El radi de l'esfera es pot relacionar amb el radi de la base del casquet i amb l'altura mitjançant el teorema de Pitàgores.

$$(r - h)^2 + a^2 = r^2$$

$$r^2 + h^2 - 2rh + a^2 = r^2$$

( 3.21)

$$r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$$

Així l'àrea del casquet també es pot expressar en funció de  $a$  i  $h$ .



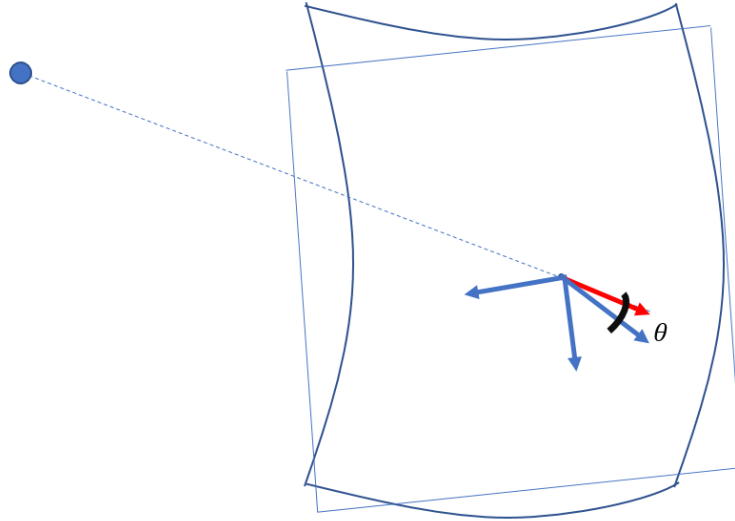
$$A = 2\pi rh = 2\pi \frac{a^2 + h^2}{2h} h = \pi(a^2 + h^2) \quad (3.22)$$

Coneixent la superfície d'un píxel, la intensitat que arriba a aquest és:

$$I_{ij} = \frac{I_0}{2\pi rh} l^2 \cos \theta \quad (3.23)$$

On  $l^2$  és l'àrea del píxel i  $\theta$  és l'angle que forma el vector director del raig amb el vector normal del detector.

La Figura 46 ajuda a interpretar l'atenuació que es produeix en un píxel del detector.



*Figura 46: Angle que forma el vector director del raig incident amb el vector normal del detector*

Amb tot això i coneixent que l'atenuació d'un raig X segueix la llei de Beer-Lambert, es pot concloure que l'atenuació en cada píxel és:

$$I_{ij} = \frac{I_0}{2\pi rh} l^2 \cos \theta e^{-\sum \mu L} \quad (3.24)$$

On el sumatori representa el coeficient lineal d'atenuació de cada medi que travessa el raig per la corresponent distància travessada.

### 3.10 Obtenció de la imatge

El detector és una matriu de  $N \times M$  píxels on es guarden els valors  $I_{ij}$  obtinguts. Aquests valors s'han de convertir a imatge per tal de visualitzar i interpretar el resultat obtingut. Cada element de la matriu té un valor de nivell de gris ja que la imatge és en blanc i negre (B/N).

Una imatge pot contenir diferents tipus de matriu, segons el tipus de dada de cada píxel. En aquest cas, s'utilitza `uint16` que són enters de 16 bits en el rang de  $[0, 65535]$  (2 bytes per element).

# Capítol 4

## 4 IMPLEMENTACIÓ

### 4.1 Entorn MatLab

MatLab és l'abreviatura de Matrix Laboratory (laboratori de matrius). Creat en 1984 per The MathWorks, és un software de càlcul tècnic i científic per al tractament de la informació a través de matrius numèriques.

Posseeix un llenguatge de programació propi (.m), vàlid per automatitzar la resolució d'un problema expressable matemàticament. També pot treballar amb números escalars, cadenes de caràcters i altres estructures d'informació més complexes.

MatLab facilita un codi bàsic i un conjunt de llibreries especialitzades (toolbox). A més, proporciona una relació interactiva amb l'usuari a través de tres tipus de finestres: finestra de treball o escriptori (on s'introdueixen les instruccions per al funcionament del programa), finestra de figures (on es representen gràfiques) i finestra d'edició.

La finestra de treball està dividida en quatre finestres: finestra de comandes (on es teclegen les diferents instruccions amb les quals es dona ordre al sistema), espai de treball (on s'emmagatzemen les variables i resultats presents en memòria i un llistat dels components instal·lats), l'historial de comandes (on es troben les últimes instruccions executades) i el directori actual (permet disposar d'informació sobre el directori en el qual es treballa). La Figura 47 mostra la interfície del programa utilitzat en aquest treball.

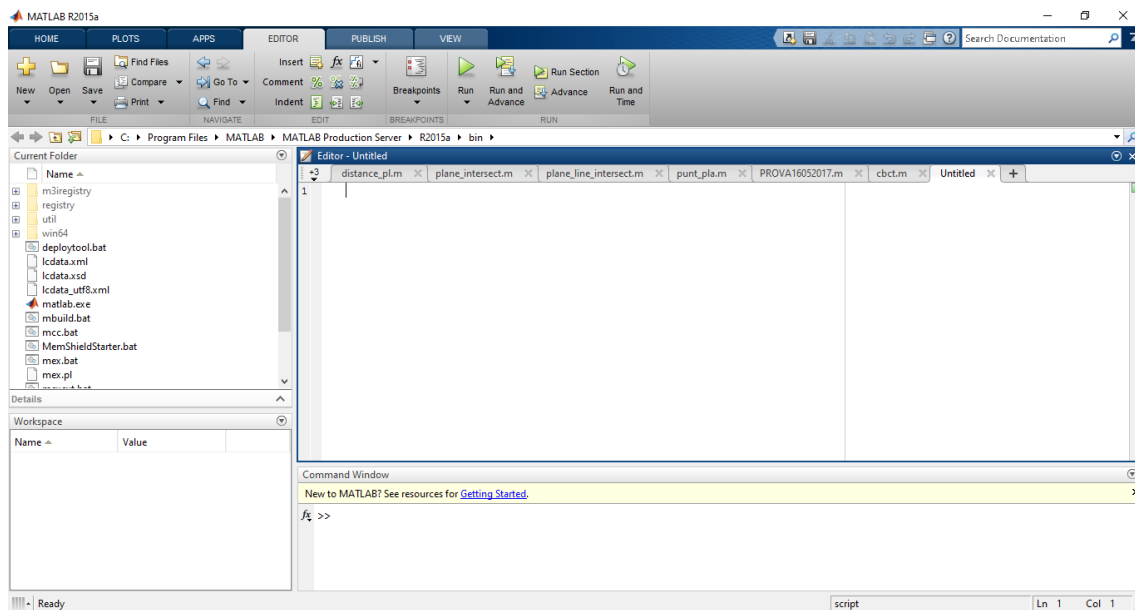


Figura 47: Interfície de MatLab R2015a

## 4.2 Implementació de funcions

Les funcions en MatLab són programes que prenen variables que l'usuari introdueix (variables d'entrada), realitza uns càlculs i manipulacions amb elles i retorna uns resultats (variables de sortida).

### 4.2.1 Paràmetres per crear una funció

A continuació es defineixen els diferents paràmetres que conté una funció:

#### **nom\_funció**

És el nom que s'assigna a la funció i coincideix amb el nom del fitxer d'extensió .m en el qual es guarda el codi d'aquesta funció. Les regles per nombrar una funció són les mateixes que per les

variable, els noms no han d'incloure espais, ni es poden utilitzar paraules reservades per MatLab.

**variables\_entrada** És el conjunt de paràmetres que es passen a la funció. Els noms de les variables van entre parèntesis i es separen per comes.

**variables\_sortida** És el valor retornat per la funció. Les variables de sortida van després de la paraula reservada `function` entre claudàtors quadrats i separats per comes si hi ha varies.

**sentencies** Són línies de codi que prenen els valors del paràmetres d'entrada i calculen mitjançant expressions els valors que retornen la funció.

**end** Marca el final de la funció.

**Funcions niades** Una funció niada és una funció definida dins d'una altra funció. La funció primària i les funcions niades han d'acabar amb `end` obligatòriament.

En la Figura 48 es mostra els diferents paràmetres a introduir en una funció.

```
%      --- Identificador de "function"
%      |      --- Arguments de sortida
%      |      |      --- Nom de la funció
%      |      |      |      --- Arguments d'entrada
%      |      |      |      |
%      V      V      V      V
function [ output_args ] = Untitled2( input_args )

% % Aquí s'escriu l'ajuda que es vol fer aparèixer quan l'usuari escriu
% % "help nombre_fun"
% ...
% ...
% Cos de la funció (aquí està la part del codi).

end
```

Figura 48: Paràmetres d'una funció

### 4.3 Sentències de control

Una sentència condicional és una instrucció MatLab que permet prendre decisions sobre si s'executa un grup de comandes que compleixen una condició o, per contrari, ometre-les.

En una sentència condicions s'avalua una expressió condicional. Si l'expressió és certa, el grup o bloc de comandes s'executa. Si l'expressió és falsa, MatLab no executa aquest grup de comandes (salta).

A continuació s'explica cadascuna de les sentències utilitzades en el programa.

**if** Si la condició és certa, la sentència s'executa, altrament, es salta aquesta sentència continuant l'execució del programa amb altres sentències a continuació d'aquesta.

La Figura 49 mostra l'estructura del *if*.

```
if Condicio1
    %Sentències1
elseif Condicio2
    %Sentències2
...
...
else
    %SentènciesN
end
```

*Figura 49: Estructura if*

**while** A la paraula reservada while li segueix una condició tancada entre parèntesis. El bloc de sentències que la segueixen s'executa sempre que la condició sigui certa.

En la Figura 50 es mostra l'estructura que té el *while*.

```
while Condicio
    %Sentències
    ...
    ...
end
```

*Figura 50: Estructura while*

**for** El bucle for s'utilitza quan es coneix el nombre de vegades que s'executa una sentència o bloc de sentències. El primer terme xi és el valor inicial de la variable x, que controla el nombre de vegades que s'executa el bucle. L'increment Ax representa la quantitat que s'incrementa la variable x en cada repetició. Quan la variable x sobrepassa el límit xf el bucle acaba la seva execució.



La Figura 51 mostra l'estructura del *for*.

```
for variable = valor_inicial : increment : valor_final
    %sentències
    ...
    ...
end
```

*Figura 51: Estructura for*

**Switch - case** S'utilitza quan existeix una sèrie d'opcions de ruta de programació per una variable donada, depenent del seu valor. Es tracta d'una estructura que permet escollir entre múltiples sortides, en base a certs criteris. Els criteris poden ser un escalar (número) o una cadena.

En la Figura 52 es mostra com està estructurat el *switch-case*.

```
switch variable
    case Opcio1
        % Codi a executar si la variable és igual a Opcio1
    case Opcio2
        % Codi a executar si la variable és igual a Opcio2
    ...
    ...
    case OpcioN
        % Codi a executar si la variable és igual a OpcioN
    otherwise
        % Codi a executar per defecte
end
```

*Figura 52: Estructura switch-case*

## 4.4 Operadors

La Taula 1 mostra els operadors aritmètics bàsics de MatLab.

Símbol	Operació
+	Suma
-	Resta
*	Multiplicació
/	Divisió ( $2/1=2$ )
\	Divisió en sentit invers ( $2\backslash 1=0.5$ )
^	Potència
'	Transposada
()	Parèntesis

Taula 1: Operadors aritmètics

En la Taula 2 es mostra com estan definits els operadors relacionals mitjançant el llenguatge .m de MatLab.

Operador	Nom	Exemple	Significat
<	menor que	$a < b$	a és menor que b
>	major que	$a > b$	a és major que b
==	igual a	$a == b$	a és igual a b
~=	no igual a	$a ~= b$	a no és igual a b
<=	menor que o igual a	$a <= b$	a és menor que o igual a b
>=	Major que o igual a	$a >= b$	a és major que o igual a b

Taula 2: Operadors relacionals

Finalment, en la Taula 3 hi ha els operadors lògics.

Operador	Nom	Exemple	Significat
&&	AND	$A \&\& B$	A i B
	OR	$A    B$	ó A ó B

*Taula 3: Operadors lògics*

#### 4.5 Comandes utilitzades de l'entorn MatLab

A continuació es llista i s'explica la funció de cada comanda utilitzada en aquest treball.

<b><i>norm(v)</i></b>	Retorna la norma (mòdul) del vector v.
<b><i>cosd(x)</i></b>	Retorna el cosinus de x expressat en graus.
<b><i>sind(x)</i></b>	Retorna el sinus de x expressat en graus.
<b><i>abs(x)</i></b>	Retorna el valor absolut de x.
<b><i>solve(eq, vars)</i></b>	Soluciona l'equació eq en funció de les variables vars.
<b><i>cross(A,B)</i></b>	Retorna el producte vectorial de A i B.
<b><i>sqrt(x)</i></b>	Retorna l'arrel quadrada de x.
<b><i>zeros(N)</i></b>	Retorna una matriu NxN de zeros.
<b><i>size(X)</i></b>	Retorna la mida de x.
<b><i>dot(A,B)</i></b>	Retorna el producte escalar de A i B.
<b><i>pi()</i></b>	Retorna el número de coma flotant més proper a $\pi$ .
<b><i>exp(x)</i></b>	Retorna l'exponencial $e^x$ per cada element de l'array x.
<b><i>max(A)</i></b>	Retorna l'element més gran de A.
<b><i>min(A)</i></b>	Retorna l'element més petit de A.
<b><i>display(x)</i></b>	Retorna per pantalla el contingut de X.

***colormap(map)*** Estableix el mapa de colors de la figura actual en el mapa de colors especificat per *map*.

***imagesc(C)*** Mostra C com una imatge. Cada element de C correspon a un àrea rectangular a la imatge. Els valors dels elements de C són índexs al mapa de colors actual que determinen el color de cada àrea.

## 4.6 Estructura del programa

A continuació es resumeix com està estructurat el programa creat per a l'obtenció de les projeccions.

- Paràmetres generals
- Definició de la Font emissora
- Definició de l'eix de rotació
- Definició de l'objecte
- Definició del detector
- Bucle (explora cada píxel del detector)
  - Comprovar si existeixen punts d'intersecció
  - Comprovar que els punts d'intersecció estiguin continguts en la proveta
  - Calcular la distància travessada pel feix
  - Calcular la intensitat que arriba al píxel
  - Guardar aquest valor en el píxel
- Mostrar la imatge obtinguda
- Guardar la imatge

# Capítol 5

## 5 INVESTIGACIONS I ESTUDIS REALITZATS

### 5.1 Paràmetres utilitzats en el programa

A continuació es descriuen els diferents paràmetres utilitzats per obtenir les imatges a estudiar.

Amplada proveta: 50 unitats arbitràries de longitud

Alçada proveta: 50 unitats arbitràries de longitud

Llargada proveta: 70 unitats arbitràries de longitud

Mida del detector: 512x512 unitats de píxel

Mida de píxel: 1x1 unitats arbitràries de longitud

Intensitat raigs X:  $10^9$  unitats de radiació per superfície

Coeficient atenuació aire: 0.0005 unitats d'atenuació per volum

Coeficient atenuació proveta: 0.02 unitats d'atenuació per volum

### 5.2 Posició dels elements

Les posicions on s'ha ubicat cada element són:

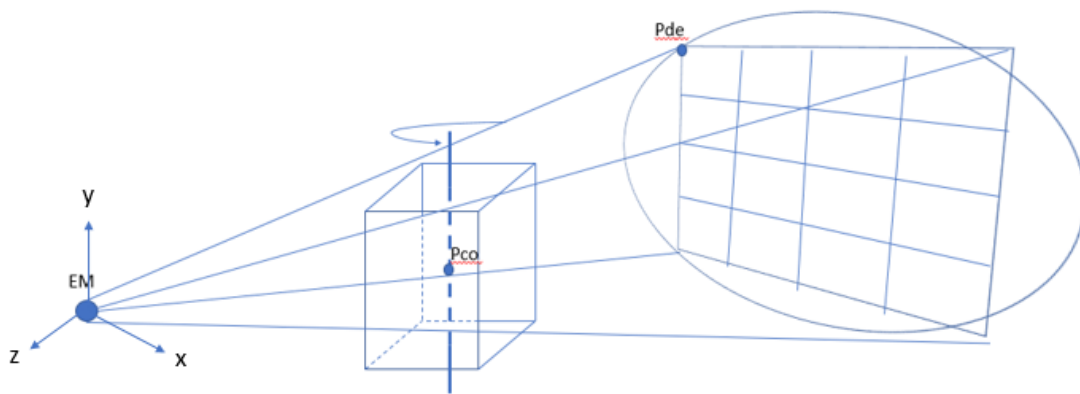
Emissor:  $EM(0,0,0)$

Eix de rotació:  $P_{ER}(0,0,-100)$ ;  $\overline{U_{ER}} = (0,1,0)$

Objecte:  $P_{CO}(0,0,-100)$ ;  $\overline{U_{OB1}} = (1,0,0)$ ;  $\overline{U_{OB2}} = (0,1,0)$ ;  $\overline{U_{OB3}} = (0,0,1)$

Detector:  $P_{DE}(-256,256,-200)$ ;  $\overline{U_{DE1}} = (1,0,0)$ ;  $\overline{U_{DE2}} = (0,1,0)$ ;  $\overline{U_{DE3}} = (0,0,1)$

En la Figura 53 es mostren les posicions principals de l'equip i com està situat.



*Figura 53: Posicions principals dels elements de l'equip*

Les imatges obtingudes que s'analitzen a continuació i que s'han obtingut mitjançant el programa amb el mètode B, es troben en format .fig, que és el format de la imatge que genera MatLab per defecte i mitjançant el format .tiff, que és com s'ha programat el codi per guardar les imatges.

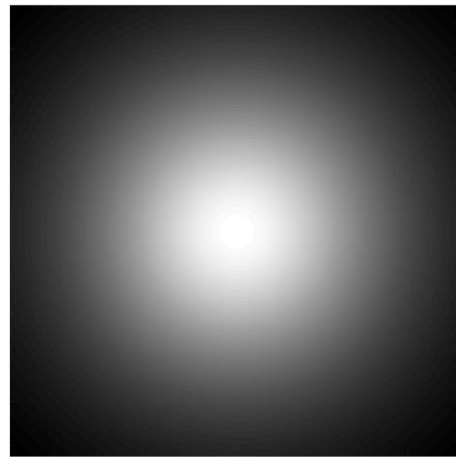
### 5.3 Atenuació en l'aire

En cas que l'equip es trobi apagat, el fons del detector serà tot negre. En un cas ideal, sense atenuació, el detector rep tota la intensitat emesa. Donat que la distància entre l'emissor i els píxels centrals del detector és inferior que la distància que hi ha fins els píxels de la bora, la intensitat per unitat de superfície d'aquests serà superior. En les projeccions que s'han d'obtenir, els píxels centrals seran més clars que els que es troben a les bores.

En les Figures 54 i 55 es mostren les diferències.

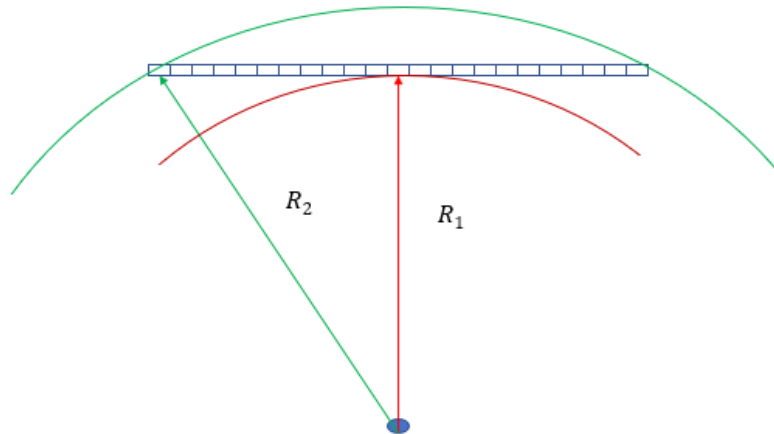


*Figura 54: Detector apagat*



*Figura 55: Detector en un cas real*

En el centre del detector arriba més intensitat per superfície que a les bores, ja que la distància que recorre el raig és inferior. D'aquesta manera, els píxels que es troben lluny del centre es veuen més foscos i els més propers al centre es veuen més clars. La Figura 56 ajuda a entendre aquest fet.



*Figura 56: distància entre font i píxels del detector*

Tal i com es pot observar, la intensitat en el perímetre de cada cercle és la mateixa, però cada cercle té una intensitat diferent ja que la distància que separa els píxels de la font és diferent,  $R_1 < R_2$ .

Existeixen equips de tomografia que corregeixen aquest efecte per millorar la resolució de contrast i obtenir una imatge més nítida.

#### **5.4 Conjunt perfectament alineat**

A continuació, s'estudia la proveta amb un angle de gir de  $0^\circ$ , perfectament alineada amb l'equip.

Per a que l'equip es trobi perfectament alineat, els angles d'inclinació tilt i skew han de ser zero, així com l'eix de rotació i el detector han de ser paral·lels. La proveta ha d'estar perfectament centrada amb l'eix de rotació.



En aquest cas, la distància que s'ha escollit entre la font emissora i l'eix de rotació (SOD) és de 100 unitats de longitud i, la corresponent a la distància entre la font emissora i el detector (SDD) és de 200 unitats de longitud.

La Figura 57 mostres les projeccions obtingudes.



*Figura 57: Objecte alineat*

Tal i com es pot observar, el centre de la proveta es veu més fosc ja que el raig recorre més distància dins la proveta i el centre del detector rep més radiació, pel fet que la distància que separa els píxels centrals i la font emissora és inferior a la distància que hi ha entre els píxels de la bora i la font. Lluny del centre es veu cada vegada més clar ja que al ser un raig divergent travessa menys material.

En la Figura 58 es mostra la mateixa proveta alineada, amb una rotació de  $45^\circ$  respecte l'eix.



*Figura 58: Objecte alineat i rotat 45°*

En aquestes projeccions es pot veure clarament que l'objecte correspon a un ortoedre. Els píxels més clars corresponen als que reben menys atenuació.

En el cas que es vulgui obtenir projeccions d'un objecte que conté diferents materials amb tomografia, si el coeficients d'atenuació d'aquests és proper al de l'aire, la informació que es pot obtenir de l'objecte és escassa i la qualitat de les projeccions no siguin prou bones.

## **5.5 Laminografia**

La laminografia és una tècnica d'imatge utilitzada per objectes plans. Quan es té una proveta d'amplada molt petita, els raigs X incidents es veuen poc atenuats i la qualitat de la imatge que s'obté no és prou bona, ja que es perd molta informació.

La laminografia consisteix en utilitzar un eix de rotació inclinat respecte el feix incident, per a que la distància travessada pel raig dins de l'objecte sigui més gran, tal i com es pot visualitzar en la Figura 59.

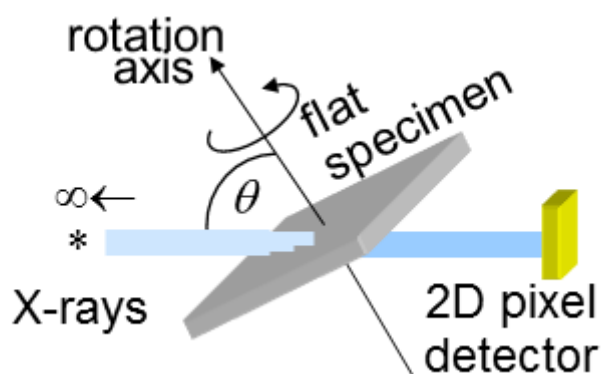
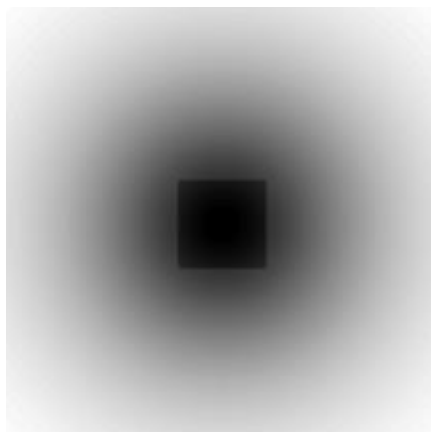


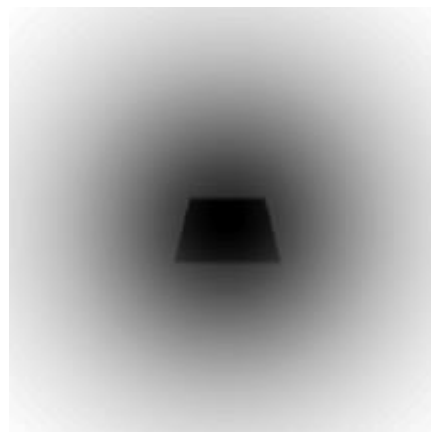
Figura 59: Esquema de la laminografia (<https://www.researchgate.net>)

Com que la proveta es troba inclinada, el raig ha de travessar més material fins arribar al detector. D'aquesta manera es pot apreciar millor com queda atenuada la intensitat i s'obtenen imatges de més qualitat visual.

En les Figures 60 i 61 es mostren els resultats obtinguts.



*Figura 60: Proveta recta*



*Figura 61: Laminografia, proveta inclinada 45°*

En aquest cas, la qualitat de la imatge no és prou bona, ja que la proveta té poc material i l'atenuació que es produeix és menor que el cas estudiat en el punt 5.3.

Per millorar la qualitat de les imatges quan es té un objecte de gruix molt petit, és aconsellable inclinar l'objecte amb l'eix de rotació de tal manera que els raigs travessin el màxim de material possible. D'aquesta manera s'obté més informació sobre l'objecte i millora la resolució de contrast.

## **5.6 Desalineament**

En aquest cas, la proveta es troba desplaçada a l'esquerra 50 unitats de longitud. La Figura 62 mostra els resultats obtinguts.



*Figura 62: Proveta desplaçada*

En aquest cas, es pot apreciar clarament que l'objecte és un ortoedre. Com que s'ha desplaçat, l'objecte es veu més clar, ja que els píxels de les bores que no capten la proveta són més clars que els que la detecten.

La Figura 63 correspon a les obtingudes de la proveta un cop s'ha rotat respecte l'eix de rotació  $45^\circ$  i després una translació de 50 unitats com en el cas anterior.



*Figura 63: Proveta rotada i desplaçada*

En aquest cas, també es pot apreciar bé l'objecte ja que es troba lluny del centre del detector. La zona més fosca coincideix amb una cantonada vertical de l'objecte i és on travessa més material.

# Capítol 6

## 6 RESUM DEL PRESSUPOST

El pressupost d'elaboració d'aquest projecte s'ha fet d'acord a les hores dedicades en realitzar-lo i del material utilitzat. En la següent taula es desglossa el pressupost.

<b>CODI</b>	<b>DESCRIPCIÓ</b>	<b>COST (€/h)</b>	<b>QUANTITAT (h)</b>	<b>IMPORT TOTAL (€)</b>
1000	Recerca d'informació	20	70	1.400
2000	Programació	35	90	3.150
3000	Anàlisi resultats	20	135	2.700
3000	Redacció	40	30	1.200
4000	Amortització material i software	0,17	325	55,25
SUBTOTAL				8.505,25
14% COSTOS INDIRECTES				1.190,74
21% IVA				2.036,16
<b>TOTAL</b>				<b>11.732,14</b>

*Taula 4: Pressupost per l'elaboració del present projecte*

L'import del present projecte és de ONZE MIL SET-CENTS TRENTA-DOS euros amb CATORZE cèntims. 11.732,14 €.

# Capítol 7

## 7 CONCLUSIONS I TREBALLS FUTURS

### 7.1 Conclusions

Al llarg del desenvolupament d'aquest treball s'han anat assolint els diferents objectius plantejats inicialment, tot i que no tot com s'esperava des d'un primer moment.

Tot i que al llarg de la carrera s'ha utilitzat el Matlab en alguna de les assignatures impartides, gràcies a aquest treball s'ha aprofundit molt en el seu ús i s'ha pogut observar que és una eina molt potent a l'hora de realitzar càlculs, sobretot si es treballa amb matrius.

En aquest projecte, inicialment s'ha començat a treballar mitjançant el mètode A, que tracta amb equacions de rectes i plans, interseccions i distàncies de rectes i plans. Al llarg de la programació d'aquest mètode s'ha vist que tot i ser un mètode molt consistent i fàcil de programar i d'entendre, el número d'operacions a realitzar és molt gran i obtenir una sola projecció del conjunt de 512x512 píxels triga dos dies i mig.

Donat que el temps d'espera és molt gran i es necessiten moltes projeccions s'ha optat per buscar un altre mètode més ràpid.

El mètode B és menys intuïtiu a simple vista però ve a ser el mateix que el primer mètode tractant-ho des d'un altre punt de vista i sense treballar amb equacions de rectes i plans. Mitjançant aquest mètode, la obtenció d'una projecció del conjunt triga 25 minuts aproximadament.



Posteriorment, s'ha intentat tractar-ho tot amb matrius, amb la finalitat d'obtenir les projeccions amb el menor temps possible. Donada la manca de temps i la complexitat de realitzar certes operacions amb matrius mitjançant Matlab, no s'ha pogut assolir l'objectiu inicial de generar un conjunt complet de projeccions resultant de rotar l'objecte 360°.

Les investigacions i estudis realitzats, s'han fet mitjançant el mètode B. Inicialment es volia obtenir aproximadament 1000 projeccions de cada cas i, posteriorment tractar-les amb un software comercial per reconstruir la proveta en 3D. Degut a la manca de temps per obtenir totes les projeccions, això no s'ha pogut fer.

Aquest projecte ha servit per entendre i conèixer el món de la tomografia des d'un nivell bàsic, conèixer el seu principi de funcionament i la seva utilitat.

Pel que fa a la cerca d'informació, s'han trobat diferents articles i estudis relacionats amb la CBCT, però tots eren per casos mèdics relacionats amb la odontologia. No s'ha trobat res relacionat amb el món industrial, que és el tema d'interès d'aquest projecte.

Aquest projecte innovador es pot millorar i ampliar molt, i pot servir en el futur de guia a la persona interessada en aquest tema.

## **7.2 Treballs futurs**

Al llarg del desenvolupament d'aquest projecte, s'ha intentat assolir els objectius que es van definir en un primer moment en el full de projecte malgrat les dificultats que ha comportat.

Aquest projecte ha servit per tenir un primer contacte amb la tomografia computacional de raigs divergents que és una tecnologia per diagnòstic amb imatges relativament nova. Així que encara queda molt per descobrir i millorar en aquesta branca de la tomografia

computacional, i pel que fa a aquest projecte i ha moltes possibilitats de continuar amb el tema i introduir-hi millores. Algunes de les possibles millores són:

**Optimització del programa:** Al llarg d'aquest projecte, s'ha anat millorant diferents parts del codi amb l'objectiu de reduir el temps d'execució. Inicialment, en el Mètode A, s'ha treballat amb equacions de rectes i plans i amb la comanda `solve`, però s'ha vist que dona molts problemes i errors. Llavors s'ha modificat el codi per tal de negligir aquesta comanda i reduir el número d'operacions per tal de no treballar amb equacions, d'aquesta manera s'ha programat el Mètode B. Posteriorment s'ha vist que treballant amb matrius de grans dimensions redueix molt el temps d'execució. D'aquesta manera, una possible optimització seria reescriure el codi per treballar amb matrius i compararlo amb els mètodes anteriors.

Una altra optimització seria treballar en paral·lel. S'ha vist que per defecte Matlab utilitza només un nucli de l'ordinador, de tal manera que si un ordinador té 4 nuclis només utilitza una quarta part de la capacitat d'aquest. Com que les operacions que es realitzen en cada píxel per calcular la intensitat atenuada són repetitives i independents entre sí, si es treballa en paral·lel, aprofitant els diferents nuclis dels quals disposa l'ordinador, es redueix molt el temps d'execució.

**Implementació de geometries més complexes:** Donada la manca de temps degut a les diferents modificacions fetes per tal de reduir el temps d'execució només s'ha pogut estudiar un ortoedre sòlid. Seria interessant estudiar altres geometries per analitzar les projeccions obtingudes, així com introduir-hi porositat (petites esferes aleatòries dins la geometria) per a que s'assembli més a una proveta real.

**Comparació amb un cas real:** El grup d'investigació AMADE disposa d'un equip de tomografia CBCT i seria molt interessant obtenir les projeccions d'un objecte real i recrear-ho amb el programa per estudiar les similituds i diferències per millorar el codi i que s'assembli més a un cas real.

**Implementació del mètode amb un altre llenguatge:** Durant aquest projecte s'ha treballat exclusivament amb Matlab i s'ha comprovat que proporciona moltes eines i funcions que faciliten molt la implementació de codi i treballar amb matrius de grans dimensions redueix molt el temps d'execució. Una alternativa a Matlab seria programar amb C++, ja que es guanyaria molt en quant a eficiència i es podria treballar amb un conjunt de dades molt més elevat amb un temps inferior.

### 7.3 Aplicacions

Aquest projecte té moltes sortides, a continuació se'n descriuen algunes.

**Suport per a la docència:** Per al personal decent pot ser una eina molt útil per ensenyar el funcionament d'una màquina CBCT així com realitzar petits experiments per obtenir projeccions d'una proveta sense haver de posar en funcionament una màquina real, la qual seria més cara i perillosa.

**Ajuda a detectar desalineaments i inclinacions:** Mitjançant aquest programa es poden simular desalineaments i inclinacions de l'equip per obtenir les projeccions. Això pot servir d'ajuda per interpretar les projeccions que s'obtenen en una màquina real i saber si l'equip es troba perfectament alineat.

# Capítol 8

## 8 BIBLIOGRAFIA

- Alcaraz, B. M. (2009). Tomografía Computarizada, 1–17.
- Bravo, P. M., Alegre, J. M., Cuesta, I. I., & Preciado, M. (2010). Aplicación de la tomografía al estudio de materiales y piezas fabricadas. Retrieved from <http://www.ubu.es/es/otri/oferta-cientifico-tecnologica/buscador-tecnologias/aplicacion-tomografia-axial-computerizada-estudio-materiale>
- Brüllmann, D., & Schulze, R. K. W. (2015). Spatial resolution in CBCT machines for dental/maxillofacial applications - What do we know today? *Dentomaxillofacial Radiology*, 44(1). <https://doi.org/10.1259/dmfr.20140204>
- Cormack, A. M. (1979). Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it.
- De, A., & Romero, C. (2009). Equipos de tomografía computerizada (tac), 1–17.
- Ejere, D. (2006). Optimization of cone-beam CT image quality for image guided radiotherapy. *Holland: Academic Medical Center (AMC), University of ...*, (October). Retrieved from <http://www.science.uva.nl/onderwijs/thesis/centraal/files/f852126120.pdf>
- García, D. A. (2013). Corrección del artefacto de anillo para un tomógrafo de rayos X de pequeños animales.
- Gómez, C. (2008). Corrección del artefacto de endurecimiento de haz (beam hardening) para imágenes obtenidas con tomógrafo de rayos X de pequeños animales, 118–170.
- Heinz, R. (2008). Implementation of a Cone-Beam Reconstruction Algorithm in Matlab.
- Hsieh, J. (1963). History of x-ray computed tomography.
- Jaffray, D. A., & Siewerdsen, J. H. (2000). Cone-beam computed tomography with a flat-panel imager: Initial performance characterization. *Medical Physics*, 27(6), 1311–1323. <https://doi.org/10.1118/1.599009>

- Jian, F. (2012). Phase Contrast Computed Tomography. *Computed Tomography – Clinical Applications*, 107–122. Retrieved from <http://www.intechopen.com/books/computed-tomography-clinical-applications/phase-contrast-computedtomography>
- Kak, A. C. (2001). Algebraic Reconstruction Algorithms. *Computerized Tomographic Imaging*, 275–296. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719277.ch7>
- Malecki, A., & Herzen, J. (2014). X-Ray Computed Tomography. *53rd Annual Conference of the British Institute of Non-Destructive Testing, NDT 2014*, 49(0), 1–18. <https://doi.org/10.1016/B978-1-78242-118-4.00006-X>
- Marcke, P. Van. (2008). Development of a pore network model to perform permeability computations on X-ray computed tomography images, 156.
- Minguez-Contreras, M. (2013). Estudio comparativo cefalométrico de imágenes bidimensionales y volumétricas obtenidas con tomografía computerizada de haz de cónico, 286.
- Octopus, M. (2014). Octopus Reconstruction User Manual.
- Para, S., Simulación, L. A., Radiografía, Y. A. D. E., Palacios, J. C., Santos, J., & Perry, L. C. L. R. T. (2005). 2005 Sistema para la simulación y análisis de radiografía y tomografía de rayos gamma, *51*(3), 246–257.
- Ramírez, J. C., Arboleda, C., & McCollough, C. (2008). Tomografía computarizada por rayos x: fundamentos y actualidad. *Revista Ingeniería Biomédica*, *2*(4), 54–72. Retrieved from <http://repository.eia.edu.co/revistas/index.php/BME/article/view/54>
- Rowshanfarzad, P., Häring, P., Riis, H. L., Zimmermann, S. J., & Ebert, M. A. (2015). Investigation of the mechanical performance of Siemens linacs components during arc: Gantry, MLC, and electronic portal imaging device. *Medical Devices: Evidence and Research*, *8*, 457–466. <https://doi.org/10.2147/MDER.S89725>
- Scarfe, W. C., & Farman, A. G. (2008). What is Cone-Beam CT and How Does it Work? *Dental Clinics of North America*, *52*(4), 707–730. <https://doi.org/10.1016/j.cden.2008.05.005>
- Scherl, H., Koerner, M., Hofmann, H., Eckert, W., Kowarschik, M., & Hornegger, J. (2007). Implementation of the FDK Algorithm for Cone-Beam CT on the Cell Broadband Engine Architecture. *Medical Imaging 2007: Physics of Medical Imaging, Pts 1-3*, 6510, U2008–U2017. <https://doi.org/10.1117/12.708754>

- Schulze, R., Heil, U., Groß, D., Bruellmann, D. D., Dranischnikow, E., Schwanecke, U., & Schoemer, E. (2011). Artefacts in CBCT: A review. *Dentomaxillofacial Radiology*, 40(5), 265–273. <https://doi.org/10.1259/dmfr/30642039>
- Seger, O., & Seger, M. M. (2005). The MATLAB / C program take - a program for simulation of X-ray projections from 3D volume data . Demonstration of beam-hardening artefacts in subsequent CT reconstruction . *Electrical Engineering*, d, 1–56.
- Siewerdsen, J. H., & Jaffray, D. A. (2001). Cone-beam computed tomography with a flat-panel imager: Magnitude and effects of x-ray scatter. *Medical Physics*, 28(2), 220–231. <https://doi.org/10.1118/1.1339879>
- Tan, S., Cong, P., Liu, X., & Wu, Z. (2013). An interval subdividing based method for geometric calibration of cone-beam CT. *NDT and E International*, 58, 49–55. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2013.04.011>
- Turonovr, B. (2011). Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique for Electron Tomography using OpenCL, 72.
- Xu, F., Helfen, L., Baumbach, T., & Suhonen, H. (2012). Comparison of image quality in computed laminography and tomography. *Optics Express*, 20(2), 794. <https://doi.org/10.1364/OE.20.000794>
- Zhang, F., Du, J., Jiang, H., Li, L., Guan, M., & Yan, B. (2014). Iterative geometric calibration in circular cone-beam computed tomography. *Optik*, 125(11), 2509–2514. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2013.10.090>
- Zhang, G., Marshall, N., Jacobs, R., Liu, Q., & Bosmans, H. (2013). Bowtie filtration for dedicated cone beam CT of the head and neck: A simulation study. *British Journal of Radiology*, 86(1028). <https://doi.org/10.1259/bjr.20130002>