

La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria

César Trelles-Zambrano

Universidad de Cuenca, Ecuador

Ximena Toalongo

Universidad de Girona, España

Ángel Alsina

Universidad de Girona, España

Neli Gonzáles

Universidad de Cuenca, Ecuador

Resumen: *La modelización matemática como herramienta didáctica está cada vez más presente en los documentos curriculares de diferentes países, frente a ello surge la necesidad de dotar al profesorado de los conocimientos necesarios para poder llevarla a las aulas. Si bien son varias las propuestas y enfoques para poder ponerla en práctica, en este trabajo abordamos las actividades que generan modelos, también conocidas como Actividades Reveladoras de Pensamiento (Model-Eliciting Activities o MEAs, por sus siglas en inglés), presentando los aspectos más importantes que consideramos que el profesorado de Educación Secundaria debe conocer acerca de las mismas, así como algunos ejemplos para facilitar su aplicación, con el propósito de contribuir al desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.*

Palabras clave: *Modelización matemática, Actividades Reveladoras de Pensamiento, práctica matemática, desarrollo profesional, Educación Secundaria.*

The Mathematical Modelling through Model-Eliciting Activities: A proposal for the secondary classroom

Abstract: *Mathematical modeling as a didactic tool is increasingly present in curricular documents from different countries, as opposed to the need to provide teachers with*

the necessary knowledge to be able to take it to the classroom. While there are several proposals and approaches to put it into practice, in this work we address the MEAS presenting the most important aspects that we consider that Secondary Education teachers should know about them, as well as some practical examples that can be applied, with the purpose of contributing to the professional development of mathematics teachers.

Keywords: *Mathematical Modeling, Model-Eliciting Activities, Mathematical Practice, Professional Development, Secondary Education.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la incorporación de la modelización matemática en los planes de estudio de diferentes países ha cobrado especial protagonismo, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega tanto en aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida, ciencias sociales, etc.) como dentro de la propia educación matemática (Trelles-Zambrano y Alsina, 2017). Para Kaiser, Blomøj y Sriraman (2006) la modelización matemática, junto con la introducción de la tecnología de la información, es probablemente uno de los rasgos comunes más prominentes en los planes de estudio de matemáticas alrededor del mundo en las últimas décadas.

En este sentido, reconocidas organizaciones a nivel mundial establecen en sus documentos, ya sea de forma explícita o implícita, la importancia que merece la modelización matemática en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Así, por ejemplo, para la Organization for Economic Cooperation and Development (OECD, 2017) la competencia matemática como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Se considera que ello ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

Además, una de las siete capacidades fundamentales de acuerdo al planteamiento de la OCDE tiene que ver con la matematización, en la que se indica que la competencia matemática implica transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática, lo que puede incluir estructurar, conceptualizar, hacer suposiciones y/o formular un modelo, o a su vez interpretar o evaluar un resultado o modelo matemático en relación con el problema original.

Por su parte el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) en *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, asumió la necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos aplicables a una variedad de disciplinas, y las orientaciones curriculares hacían hincapié en que contenidos matemáticos como los patrones y funciones, la estadística y la probabilidad o bien la geometría no deberían centrarse en la memorización, sino que deberían servir sobre todo para modelizar, describir, analizar, evaluar y tomar decisiones sobre situaciones problemáticas. Desde entonces, el NCTM en sus diferentes documentos ha tenido siempre presente la importancia de la modelización matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje, asumiendo que

un modelo matemático se refiere a la representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo, y señalan que todos los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para usar representaciones que permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Sin embargo, a pesar de lo dicho anteriormente, consideramos que aún falta por desarrollar y/o divulgar propuestas concretas de cómo el profesorado puede utilizar la modelización matemática como una herramienta didáctica que contribuya al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. En este sentido, el presente trabajo pretende ser un aporte que permita llevar los planteamientos de la modelización matemática a las aulas.

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Hasta el momento no existe en la literatura un criterio unificado para definir la modelización matemática y su epistemología, por lo que es imprescindible elegir desde qué mirada se estudia este proceso. En nuestro caso reconocemos la modelización matemática desde una perspectiva educacional ya que valoramos la importancia de la misma como estrategia didáctica. Para Kaiser y Sriraman (2006) la perspectiva educacional persigue objetivos pedagógicos y disciplinares, tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos.

Si bien no existe una manera única para describir la modelización matemática, algunos autores realizan algunos aportes interesantes. La modelización matemática es un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo, 2009). Hablar de modelización matemática en la enseñanza significa proporcionar a los estudiantes problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el fenómeno en cuestión mediante revisión, reflexión, aplicación y comunicación de resultados (Trigueros-Gaisman, 2006).

EL CICLO DE MODELIZACIÓN

Existe un consenso en la literatura de que la modelización matemática es un proceso no lineal, consecuentemente, varios son los autores (Carreira, Amado y Lecoq, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Kaiser, 1995) entre otros, que han realizado planteamientos de que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos. Si bien las diferentes propuestas tienen características similares, en este trabajo asumimos el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007) (figura 1).

Este planteamiento indica que a partir de la situación ocurrida en el mundo real (a) se trabaja para comprender el problema (1), este hecho genera un modelo conceptual (b) en el pensamiento de los estudiantes. Simplificar y estructurar (2) hace referencia a

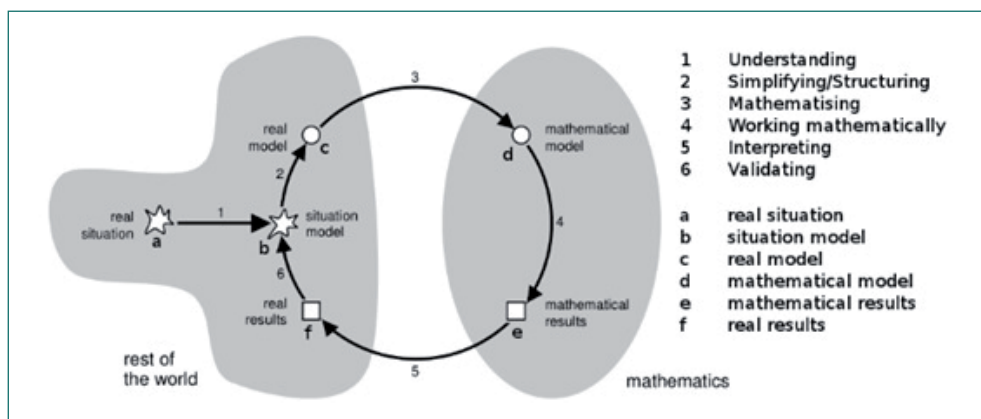


Figura 1. Ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß (2007).

identificar variables y/o condiciones que conllevan a un modelo real (c). A través de la matematización (3) se llega al modelo matemático (d) el cual es una expresión en matemáticas formales de las relaciones existentes entre las variables, sin perder de vista las condiciones del problema. Luego se realiza un trabajo matemático (4) hasta conseguir resultados matemáticos (e) que luego serán interpretados (5) en términos de resultados reales (f) para seguidamente validarlos (6) comparándolos con el modelo conceptual (b).

Es importante resaltar que este proceso es no lineal y que en la práctica los estudiantes pueden ir de un punto a otro del esquema sin necesidad de seguir un orden establecido, precisamente ese camino de ida y vuelta les permitirá ir afinando el modelo buscado. Finalmente es importante que los estudiantes socialicen el modelo con sus compañeros, recojan las observaciones pertinentes y realicen los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar el modelo.

ACTIVIDADES QUE GENERAN MODELOS

Si bien son diferentes las propuestas para llevar a cabo los procesos de modelización matemática en las aulas (Albarracín, 2017; Ferrando y Navarro, 2015; Gallart, García-Raffi, Ferrando, 2019; Sierra-Galdón et al., 2011; Sol y Rosich, 2011) entre otros, consideramos importante explotar las bondades que presentan las actividades que propician modelos, también llamadas Actividades Reveladoras del Pensamiento, conocidas en la literatura como (MEAs) por sus siglas en inglés.

¿QUÉ SON LAS MODELING-ELICITING ACTIVITIES?

Las MEAs son actividades no tradicionales que, partiendo de una situación real, plantean problemas abiertos, desafiando a los estudiantes a construir un modelo con el

objetivo de solucionar el problema (Lesh y Doerr, 2003; Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000).

Se emplean fundamentalmente con dos objetivos: 1) preparar el terreno necesario antes de la introducción de nuevos conceptos, y/o 2) fomentar en los estudiantes un aprendizaje más profundo que conlleve a transferir ese aprendizaje a otros contextos reales.

Estas actividades, desarrolladas fundamentalmente por Lesh y su equipo, tienen las siguientes características principales: se trabajan en grupos pequeños de estudiantes, de tres a cuatro como máximo, y pueden durar entre dos o tres sesiones de clase; en muchos de los casos se solicita a los estudiantes que mediante una carta brinden asesoría a una persona para resolver el problema en cuestión. En esta carta deben indicar como han llegado a la solución, porque es útil su planteamiento y cómo este podría servir incluso en otros contextos.

La puesta en marcha de la actividad consta de tres fases diferenciadas:

1. Realización de una lectura y contestación de preguntas guías: se sugiere que esta parte sea individual y que, preferentemente, se realice de forma previa a la clase (por ejemplo, en casa o bien en sesiones dedicadas a trabajo individual).
2. Socialización de las respuestas a la lectura en cada grupo de trabajo: el objetivo es que cada alumno escuche el planteamiento de sus compañeros y pueda considerar aspectos que a lo mejor no consideró en sus respuestas iniciales (duración aproximada 15 min). Luego se entrega la actividad en sí, y la función del maestro en esta parte es interactuar con cada grupo y observar detenidamente los procesos de pensamiento de los alumnos, ofreciendo ayudas solamente cuando sea necesario pero sin dar soluciones al problema.
3. Puesta en común de las soluciones de cada grupo: el maestro puede elegir al azar un miembro del grupo para que exponga la solución a la que han llegado. Después de haber escuchado las soluciones de sus compañeros, cada grupo puede refinar sus modelos si así lo desean considerando aspectos que a lo mejor no fueron considerados previamente.

Un aspecto muy importante a considerar es que al tratarse de un problema abierto, este tipo de actividades no contienen respuestas únicas y por lo tanto todas las respuestas son válidas, simplemente algunas serán más eficientes que otras. La esencia de la actividad no es en sí la respuesta, lo más importante de todo es el proceso para llegar a la recomendación que se da al usuario mediante la carta. Se otorga también mucha importancia a la argumentación acerca de la validez del modelo.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS MEAs

Los seis principios fundamentales que deben cumplir este tipo de actividades (Lesh et al., 2000) son:

- Principio de construcción: Los problemas deben estar diseñados de tal forma que permitan la creación de un modelo que utilice elementos, las relaciones y

operaciones entre estos elementos, las reglas y patrones que rijan estas relaciones, los alumnos deben cuantificar, identificar patrones, hacer predicciones, etc.

- Principio de realidad: Los problemas deben ser pertinentes y relevantes para los estudiantes, preferentemente con datos reales o ligeramente modificados, se recomienda utilizar una lectura preparatoria con preguntas que acerquen a los alumnos al tema.
- Principio de autoevaluación: Conforme trabajan en la solución, los alumnos deben poder autoevaluarse determinando la utilidad de sus soluciones. El enunciado del problema debe indicar claramente ciertos criterios que permitan evaluar el grado de utilidad de una solución.
- Principio de documentación: Los alumnos deben poder documentar sus procesos de pensamiento dentro de su solución, los productos que generen deben mostrar objetos estadísticos o construcciones que fueron realizadas, así como las relaciones entre estos objetos y estas construcciones.
- Principio del prototipo efectivo: Se trata de que el modelo producido sea lo más simple posible pero matemáticamente significativo.
- Principio de generalización: Busca que las soluciones creadas por los estudiantes se puedan generalizar o al menos adaptarse fácilmente a otras situaciones o contextos.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES GENERADORAS DE MODELOS

Se presentan dos ejemplos de actividades que pueden ser directamente aplicadas en el aula. Para su diseño se han tenido en cuenta que se trate de situaciones que despierten el interés de los estudiantes, y despierte la necesidad de encontrar una respuesta.

Situación 1: Venta de coches

La figura 2 muestra la lectura introductoria para la primera actividad.

En la figura 3 se presentan las preguntas que permiten controlar la comprensión de la lectura anterior.

Y en la figura 4 se presenta el enunciado de la actividad de modelización.

Situación 2: las tarifas eléctricas

La figura 5, 6 y 7 muestran la lectura introductoria, las preguntas de comprensión y la segunda actividad de modelización respectivamente.

LAS VENTAS DE COCHES BAJAN EN TODO EL MUNDO POR PRIMERA VEZ EN 9 AÑOS

El pasado año fue convulso para la industria automovilística, lo que ocasionó una caída en las ventas. Sin embargo, aumentó la demanda de coches eléctricos.



Tensiones comerciales entre las grandes economías mundiales, cambios en la futura normativa de comercialización y circulación de vehículos en algunos países, nuevas maneras de entender la movilidad... 2018 ha marcado un “cambio en la tendencia de ventas de la industria automovilística en el mundo: por primera vez en 9 años, las matriculaciones de coches nuevos descendieron”.

En total, en 2018 se matricularon en el mundo 86 millones de unidades de turismos y vehículos comerciales ligeros, lo que se traduce en una caída del 0,5% en comparación con los datos de 2007, según Jato Dynamics, proveedor de información para el análisis de tendencias en el mercado automovilístico.

Los grandes mercados, los que menos coches venden

Las grandes economías mundiales han sido las que han reflejado las mayores caídas de ventas de coches. Así, China, el país en el que se comercializan más automóviles de todo el mundo, contabilizó 28,08 millones de turismos y vehículos comerciales ligeros vendidos; esta espectacular cifra, sin embargo, es un 2,8% inferior a la registrada en 2017.

Por su parte, Estados Unidos alcanzó los 20,86 millones de unidades de coches vendidos, un 0,2% menos que en 2017; Europa, 22,7 millones de unidades, Oriente Medio y África, un 1,1% menos; 10,6 millones de unidades en Asia-Pacífico, un 3,3% más; 5,1 millones de unidades en Japón, un 0,6% más; 4,3 millones de unidades en Sudamérica, un 7% más; y 1,7 millones de unidades en Corea del Sur, un 1,4% más.

Por fabricantes, Toyota, Volkswagen y Ford son los que ocupan los tres primeros puestos en número de vehículos vendidos en todo el mundo con 8,09; 6,7 y 5,3 millones de unidades comercializadas.”

Los vehículos eléctricos despegan en ventas

Jato Dynamics también ha destacado en su informe el espectacular avance en las ventas de coches eléctricos. En total en 2018 se matricularon 1,26 millones de unidades, un 74% más que en 2017. Estos excepcionales resultados se deben a tres factores: la alta demanda de vehículos eléctricos en China, la llegada del Tesla Model S a los mercados y la crisis de los motores Diesel en los mercados europeos.

Los países donde más se comercializaron coches eléctricos en 2018 fueron China (769.000 unidades), EE. UU. (209.000 unidades), Noruega (46.000 unidades), Alemania (35.000 unidades) y Francia (35.000 unidades). Tesla fue la marca más vendida a nivel mundial seguida de BAIC, BYD, Nissan y Zoyte. Y los modelos más demandados, el tesla Model 3, BAIC EC, Nissan Leaf, Baojun E200 y Tesla Model S.

Fuente: <https://www.autopista.es/noticias-motor/articulo/ventas-coches-bajan-todo-mundo-primera-vez-9-años>

Figura 2. Noticia sobre la caída de las ventas de coche.

VENTAS DE COCHES: PREGUNTAS DE PREPARACIÓN

1. ¿Sobre qué trata la noticia?

2. ¿De qué forma ha impactado la utilización del coche en el día a día?

3. Al hablar de coches, ¿Qué marcas conoces?, ¿Tienes coche?, ¿Qué tipo y marca de coche tienes?

4. En caso de no tener coche, ¿Qué marca comprarías y por qué?

Figura 3. Preguntas guía.

COMPRA DE COCHE: EL CASO DE MARC

Marc es un abogado que inició su carrera a partir de los 25 años y después de años de experiencia logró consolidarse en este ámbito laboral. Se casó y juntamente con su esposa compraron un piso a través del Banco. Los fines de semana viajan continuamente con su esposa a diferentes lugares de la zona y comparten diversas aficiones como los deportes de aventura y la playa. Pasado un tiempo deciden que van a tener hijos y su sorpresa es que tendrán gemelos. Ante esta situación, tendrán que comprar un coche que se adapte a su realidad.

Marc sabe que su hipoteca con el Banco es por 30 años, y que al pensar en un coche deberá analizarlo con cautela porque su esposa estará en paro por algún tiempo y sólo él aportará con la nómina en casa. Por ello ha buscado información en internet y ha elaborado la tabla que se muestra abajo, con las principales características que debería tener el coche en beneficio de él y su familia. El problema es que no sabe cómo hacerlo y pide vuestra ayuda a través de una carta en la que expliquéis cuál sería la mejor opción de compra. Por otro lado, necesita que en esta carta generéis una estrategia que le permita añadir otros coches y de esta manera generalizar la idea que le permita optar por la mejor opción sin importar el número de coches que se añadan a la lista.

Desde ya Marc agradece vuestra ayuda, estará gustoso de leer y escuchar la explicación que podáis brindarle. Éxitos en vuestro trabajo.

Modelo	Consumo	Tipo de Combustible	Potencia	Maletero	Plazas	Precio
Mazda CX-5	5,0-7,1 L/100km	Gasolina	150-194CV	506-919 L	5	27270
Mitsubishi ASX	4,6-5,8 L/100km	Diésel	114-150CV	442-1219L	5	21700
Mercedes Clase A	3,9-7,3 L/100km	Gasolina	109-381CV	341-1210L	5	26525
Toyota Aygo	4,1-4,2 L/100km	Gasolina	72-72CV	168-198L	4	13190
Smart ForFour	0,0-4,3 L/100km	Eléctrico	71-90CV	185-975L	4	13325
Volkswagen Golf (215)	0,0-7,2 L/100km	Eléctrico/ Híbrido	102-310CV	272-1620L	5	20405

Fuente: Datos obtenidos de <https://www.autobild.es/coches>

Figura 4. Actividad de modelización matemática sobre coches.

EL IMPUESTO A LA GENERACIÓN ELÉCTRICA VUELVE Y LA FACTURA PODRÍA SUBIR 1 EURO

El Gobierno de España ha puesto fin a una de las medidas adoptadas para paliar el impacto del precio de la luz y es más que previsible que se produzca un repunte en el recibo, de en torno al 2 o 3 %.



La suspensión temporal del impuesto sobre la generación eléctrica del 7 %, una de las medidas adoptadas por el Gobierno de España para paliar el impacto del alza del precio de la luz en los consumidores, finaliza este lunes. La ministra para la Transición Ecológica, Teresa Ribera, ha estimado que el fin de la suspensión temporal podría suponer un alza de entre “dos o tres puntos porcentuales”, lo que representará un encarecimiento en el recibo de la luz de “entre 0,5 y 1 euro por familia”.

El Gobierno español, en su real decreto-ley 15/2018, de 5 de octubre del año pasado, de medidas urgentes para la transición energética y la protección de los consumidores, exoneraba del impuesto sobre el valor de la producción de la energía eléctrica a la electricidad producida e incorporada al sistema eléctrico durante el último trimestre de 2018 y el primero de 2019.

Con esta norma el Ejecutivo español daba respuesta al fuerte repunte en agosto del precio de la electricidad, que en septiembre se disparó a máximos anuales.

En el mercado mayorista de la electricidad, donde las empresas casan sus ofertas, el precio medio mensual en septiembre fue de 71,27 euros el megavatio hora (MWh), con un máximo diario de 75,93 euros/MWh alcanzado el 19 de septiembre.

El encarecimiento del precio de los derechos de emisión del dióxido de carbono (CO₂) y del gas natural y el carbón en los mercados internacionales fueron los principales causantes de la subida.

El Gobierno quiere en el futuro acabar totalmente con el impuesto a la generación eléctrica dentro de una reforma fiscal de la energía que ha estado preparando, descartando prorrogar su suspensión temporal en medio de una coyuntura preelectoral como la actual.

Fuente: <https://www.eitb.eus/es/noticias/economia/detalle/6306394/subida-electricidad-repunte-factura-luz-abril-2019/>

Figura 5. Noticia sobre las tarifas eléctricas.

IMPUESTOS A LA ELECTRICIDAD: PREGUNTAS DE PREPARACIÓN

1. ¿Sobre qué trata la noticia?

2. ¿Qué creéis que sucederá una vez termine la suspensión temporal del impuesto sobre la generación eléctrica?

3. ¿Consideráis que las empresas y/o comercializadoras pueden realizar cualquier tipo de ofertas de energía sin importar el impacto que puedan generar en España?

4. ¿Por qué sería importante que se acabe de forma total con el impuesto a la generación eléctrica?, ¿sería positivo o negativo este impacto en el presupuesto familiar, por qué?

Figura 6. Preguntas guía sobre los impuestos a la electricidad.

¿QUÉ NOS CONVIENE?: EL CASO DE EMMA Y NEREA

Emma es una chica de 19 años que entrará a la universidad y como está lejos de su pueblo tendrá que mudarse a la ciudad donde funciona. Ella trabaja como dependienta en una tienda de ropa de su pueblo y ha pedido traslado para una de las sucursales que la tienda tiene en la ciudad. Durante los últimos 5 meses ha ahorrado un poco de dinero, pero está preocupada de que este dinero no sea suficiente para su nueva vida.

Ha conversado con una amiga y ésta le ha contado que tiene una prima que estudia en la ciudad y que ahora mismo tiene una habitación disponible en el piso que alquila para que pueda vivir junto con ella y así compartir gastos. A Emma le parece una idea perfecta y contacta con ella para concretar el trato.

Han pasado ya 6 meses de que Emma comparte piso con Nerea, en este tiempo se ha dado cuenta que el precio de la electricidad es alto y que sus ahorros y su nómina le van muy justos. El piso es de 50m², cuenta con servicios básicos, tiene buena ventilación y está bien distribuido, tienen los electrodomésticos necesarios y no pasan mucho tiempo en el piso por razones de estudios y trabajo.

Emma ha conversado con Nerea y otros amigos para averiguar sobre las tarifas de luz y de esta forma no pagar demasiado, han buscado información en internet sobre compañías eléctricas (comercializadoras), para ello han elaborado una tabla con algunas características de luz. El problema es que no saben cómo elegir la mejor y piden vuestra ayuda a través de una carta en la que expliquéis cuál sería la mejor opción de tarifa y empresa. Por otro lado, necesitan que en esta carta generéis una estrategia que les permitan añadir otras empresas y de esta manera generalizar la idea que les permita optar por la mejor opción sin importar el número de empresas que se añadan a la lista.

Desde ya Emma y Nerea agradecen vuestra ayuda, estarán gustosas de leer y escuchar la explicación que podáis brindaros. Éxitos en vuestro trabajo.

Empresa	Mercado	Tarifa	Precio energía	Precio potencia	Permanencia	Discriminación horaria
Endesa	Libre	One Luz	0.1255€/kWh	3.429€/ KW	Sí	Sí
Lucera	Libre	Mismo Precio 24h-2.0A	0.12700€/kWh- 0.1042€/KW/ día	3.16€/kW	No	No
Iberdrola	Libre	Estable-2.0DHA	0.1443€/kWh- 0.1233€/kW/ día	3.50€/kW	No	Sí
EDP	Libre	Fórmula Luz-2.0A	0.1474€/kWh- 0.1152€/kW/ día	3.50€/kW	Sí	Sí
holaluz	Libre	Tarifa sin sorpresas	0.1330€/kWh	3.170€/kW	No	Sí

Fuente: Datos obtenidos de <https://tarifaluzhora.es/comparador/tarifas-electricas>.



Figura 7. Actividad de modelización sobre tarifas de energía eléctrica.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Como elemento adicional, y considerando que al plantear este tipo de actividades en las aulas, en algunas ocasiones los modelos generados implican el uso de funciones, se propone usar el *software* Desmos, que entre sus principales ventajas destacan que es gratuito y además permite la posibilidad de observar en pantalla el trabajo de todos los estudiantes o de todos los grupos según sea el caso. Es importante mencionar que el software permite trabajar además varios contenidos matemáticos como: ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, cónicas, entre otros.

Como primer paso se debe crear una cuenta en la página <https://teacher.desmos.com/> tal como se aprecia en la figura 8.

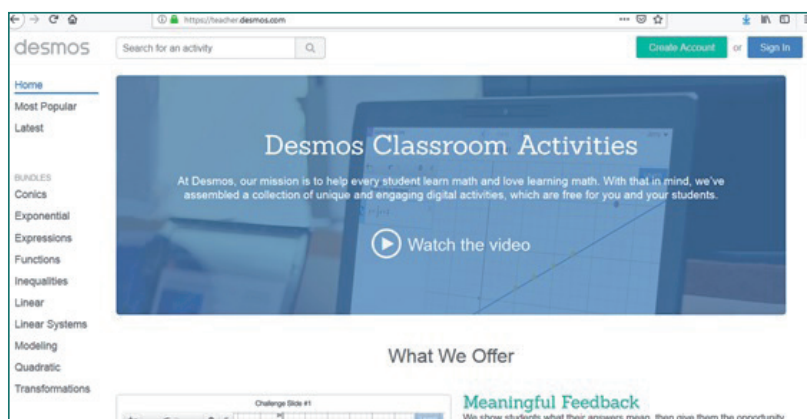


Figura 8. Página de inicio de Desmos.

Luego se puede crear una actividad dando clic primero en el botón *custom* y luego en el botón *New Activity*, tal como se presenta en la figura 9.

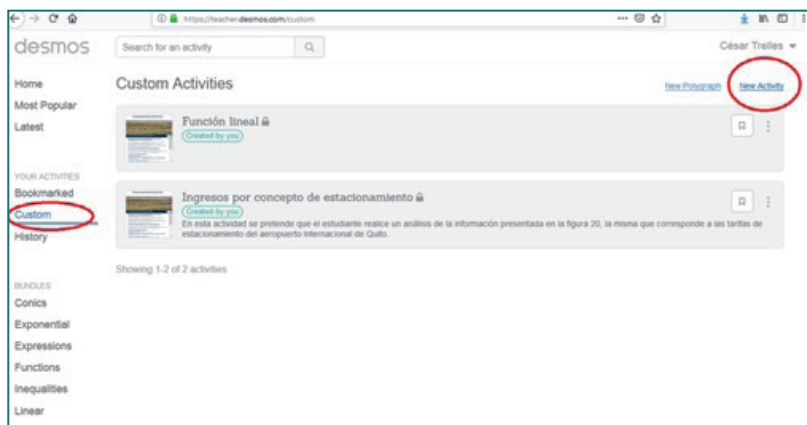


Figura 9. Página para crear actividades en desmos.

Después de agregar un título y de ingresar en las diferentes pantallas las instrucciones para los estudiantes, tenemos la posibilidad de generar un código de actividad, tal como se aprecia en la figura 10.

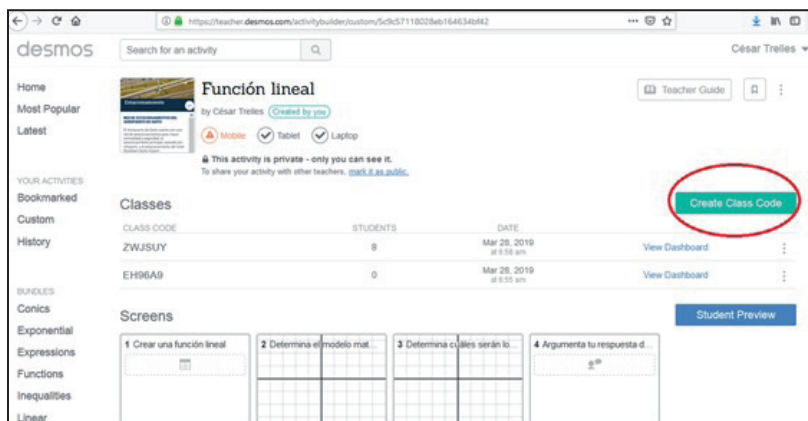


Figura 10. Generación de código de actividad en desmos.

El código generado les indicamos a nuestros estudiantes, los mismos que tienen que ingresarlo, (figura 11) accediendo a la página <https://student.desmos.com/>

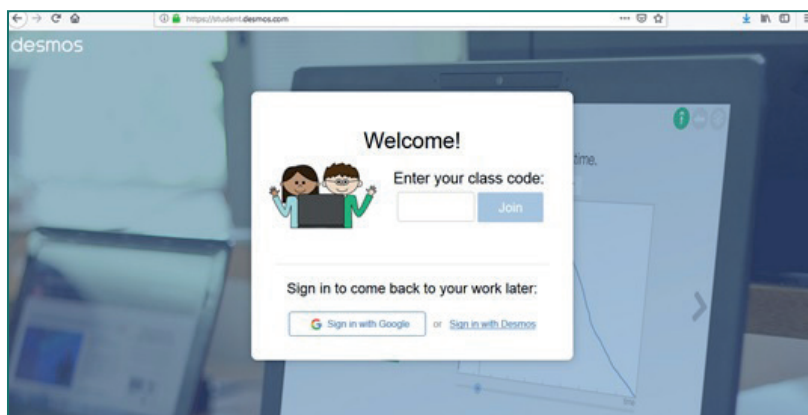


Figura 11. Página de ingreso del alumno con su código.

Y luego de seguir las instrucciones que nosotros ingresamos anteriormente, nos da la posibilidad de observar en una sola pantalla el trabajo de todos los estudiantes, tal como se ilustra en la figura 12. En esta pantalla, si se desea, existe la posibilidad como profesores de elegir la función anónima para que no se vea el nombre de cada estudiante, permitiéndonos de esta forma realizar tranquilamente una retroalimentación oportuna sobre el trabajo de cada uno y dándonos la posibilidad de aprender de los errores cometidos por

cualquier alumno, así como de resaltar los aspectos interesantes que se presenten, todo esto sin necesidad de que el grupo sepa a quien exactamente pertenece el trabajo.”

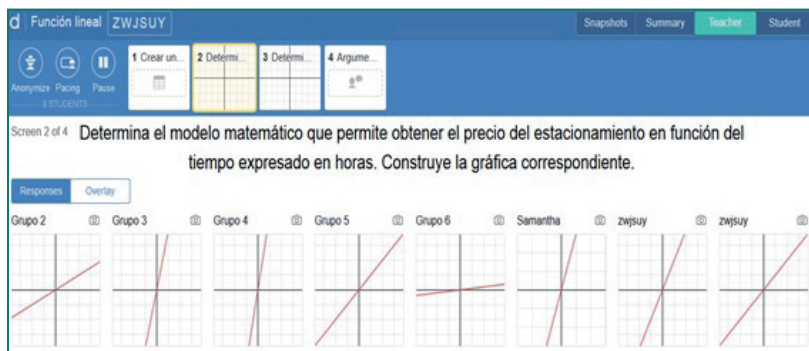


Figura 12. Pantalla de trabajo de toda la clase.

Es importante señalar que aquí se han presentado simplemente algunas de las funciones básicas del programa que podrían ser utilizadas en el proceso de modelización, sin embargo es preciso indicar que el programa tiene muchas funcionalidades que se pueden aprender más a fondo conforme se lo vaya utilizando, y brinda la posibilidad de acceder también a un repositorio de actividades ya creadas y a su vez alimentarlo con las que sean de nuestra propia autoría.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que algunos de los principales beneficios del trabajo sistemático de la modelización matemática es que permite acceder a conocimientos matemáticos que tienen un papel cada vez más importante tanto en múltiples aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida, ciencias sociales, etc.) como también dentro de la propia educación matemática, como por ejemplo formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usando de forma cada vez más eficaz el razonamiento matemático y conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos.

A pesar de la importancia de la modelización, diversos estudios previos han puesto de manifiesto que una parte considerable del profesorado tiene conocimientos escasos sobre cómo fomentar este proceso matemático en los alumnos de 12 a 16 años. Así, pues, con el propósito de favorecer el desarrollo profesional del profesorado, se ha descrito y ejemplificado un recurso didáctico para trabajar la modelización matemática en el aula de Educación Secundaria Obligatoria: las Actividades Reveladoras de Pensamiento (*Modeling-Eliciting Activities* o *MEAs*, por sus siglas en inglés), que se fundamentan en los siguientes seis principios: de construcción, de realidad, de autoevaluación, de documentación, de prototipo efectivo y de generalización. La incorporación sistemática de estas actividades, con el apoyo de *software* educativos como por ejemplo el Desmos,

que permite observar el trabajo de todos los estudiantes o de todos los grupos de trabajo, puede contribuir a que progresivamente los alumnos usen representaciones que les permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135. Recuperado el 10 de marzo de 2019 de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/7707/8120>
- Bliss, K., y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7–21). Philadelphia.
- Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620/1087>
- Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Edits.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (1ra. ed., págs. 222-231). Chichester.
- Carreira, S., Amado, N., y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Edits.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (págs. 199-210). New York: Springer.
- Ferrando-Palomares, I., y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3681/4171>
- Gallart, C., García-Raffi, L., y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/10955/11035>
- Girnat, B., y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher's Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Edits.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (págs. 75-84). New York: Springer.
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und. En G. Graumann, et al. (Edits.), *Materialien für einen realitätsbezogenen* (págs. 64-84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Kaiser, G., Blomøj, M., y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 82-85.
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(3), 302-310.
- Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En R. Lesh, y H. M. Doerr (Edits.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (págs. 3-34). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly, y R. Lesh (Edits.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (págs. 591-645). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Organization for Economic Cooperation and Development. (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*. Paris: OECD. doi:<http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- Sierra Galdón, L., Juan Blanco, M. A., Garcia-Raffi, L. M., y Gómez Urgellés, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia_XVJAEM_v2.pdf
- Sol, M., Giménez, J., y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3100/3196>
- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de <https://www.comie.org.mx/revista/v2018/rmie/index.php/nrmie/article/view/732/732>
- Trelles-Zambrano, C., y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(51), 140-163. Recuperado el 2 de marzo de 2019, de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/07.pdf>