



Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil

Ángel Alsina

Universidad de Girona, Girona, España, angel.alsina@udg.edu

Fecha de recepción: 26-04-2019

Fecha de aceptación: 15-06-2019

Fecha de publicación: 19-07-2019

RESUMEN

En la primera parte de este artículo se realiza una revisión de las principales causas que han dado lugar a la vinculación exclusiva del álgebra con el lenguaje simbólico y los niveles medios y superiores de escolarización: se argumenta que la nomenclatura tradicional usada para denominar los conocimientos de naturaleza algebraica (lógica, lógica matemática o razonamiento lógico-matemático), junto con la aparición de la matemática moderna, ha provocado la ausencia de un bloque de contenidos de álgebra en los primeros niveles educativos. En la segunda parte se describe el cambio de tendencia que se ha producido en países como Estados Unidos, Singapur, Australia o Nueva Zelanda y se justifica la presencia del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil. Desde este prisma, se presenta una propuesta de secuenciación de contenidos de álgebra temprana de 3 a 6 años y se describe un itinerario didáctico de enseñanza para favorecer el pensamiento algebraico de los niños y el desarrollo profesional del profesorado de Educación Infantil.

Palabras clave: álgebra temprana; pensamiento algebraico; secuenciación de contenidos; itinerario de enseñanza; Educación Infantil.

From logical-mathematical reasoning to early algebra in Early Childhood Education

ABSTRACT

Firstly, the main causes that explain the exclusive connection of algebra with symbolic language and middle and superior degrees are reviewed: traditional nomenclature used to refer to algebraic knowledge (logic, mathematical logic or logical-mathematical reasoning), together with the presence of modern mathematics, has caused the absence of a standard of algebra in the first educational levels. In the second part, the change of trend in the curricula of countries such as the United States, Singapore, Australia or New Zealand is described and the explicit presence of early algebra in the Early Childhood curriculum is defended. From this point of view, a proposal of the sequencing of early algebra from 3 to 6 years is presented and a teaching itinerary to empower both children's algebraic thinking and to promote the professional development of Early Childhood Education' teachers is described.

Keywords: early algebra; algebraic thinking; content sequencing; teaching itinerary; Childhood Education.

1. Introducción

¿Por qué los currículos de matemáticas de Educación Infantil indican, desde hace muchos años, que los niños menores de 6 años se deben iniciar en tareas de discriminación de atributos de objetos, en la percepción de sus semejanzas y diferencias, o bien en la clasificación y ordenación de elementos?; ¿qué desarrollan los niños cuando realizan estas actividades, ya sea en contextos informales de su vida cotidiana o en contextos escolares más formales?; ¿por qué en algunos de estos currículos se omiten otros conocimientos de la misma naturaleza como los patrones y los cambios?; ¿qué dejan de desarrollar los niños cuando no realizan estas actividades de forma explícita en la escuela?; ¿por qué todavía son muchos los currículos de matemáticas de las primeras edades que no están suficientemente algebrizados?; y ¿por qué las orientaciones curriculares internacionales más avanzadas incorporan de forma explícita el álgebra desde las primeras edades?

En este artículo vamos a tratar de responder a estas cuestiones mirando hacia atrás para argumentar las principales razones que han dado lugar a esta diversidad de orientaciones curriculares en relación al pensamiento algebraico, pero sobre todo, vamos a mirar hacia adelante para justificar la presencia del álgebra en Educación Infantil, sin circunloquios, junto con la descripción de orientaciones, estrategias y recursos didácticos específicos que permitan afinar qué conocimientos algebraicos se deberían desarrollar en las primeras edades y qué prácticas de enseñanza son recomendables para empoderar el pensamiento algebraico de los niños menores de 6 años. En síntesis, pues, vamos a tratar de responder a tres grandes interrogantes: *¿por qué, qué, y cómo enseñar el álgebra en Educación Infantil?*

En Alsina (2019) se señala que el álgebra es un bloque de contenidos matemáticos que tradicionalmente se ha asociado a niveles de escolarización posteriores (sobre todo a partir de la Educación Secundaria) para tratar conocimientos vinculados a la generalización y al simbolismo principalmente. Sin embargo, este mismo autor recuerda que también existe una larga tradición de enseñar conocimientos de naturaleza algebraica previos a la generalización y el simbolismo en edades inferiores, ya desde la etapa de Educación Infantil, como por ejemplo las clasificaciones y ordenaciones, como ya se ha indicado. En un intento de indagar en las principales circunstancias que han dado lugar a la vinculación exclusiva del álgebra con el lenguaje simbólico y a niveles medios y/o superiores de escolarización, subraya tres razones (figura 1):

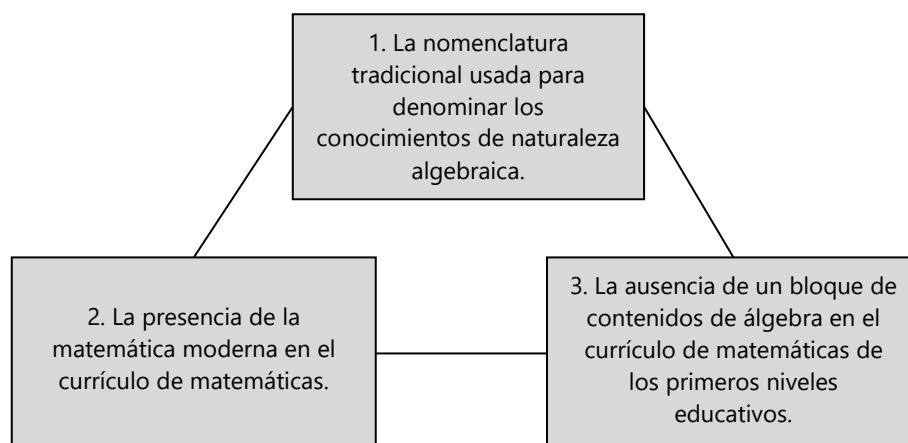


Figura 1. Principales causas de la vinculación exclusiva del álgebra al lenguaje simbólico y a niveles medios/superiores de enseñanza (Alsina, 2019).

En relación a la primera de las causas, que incide en la nomenclatura utilizada décadas atrás para denominar los conocimientos de naturaleza algebraica en los currículos de matemáticas de los primeros niveles educativos, Alsina indica que en estos currículos se usaban los términos "lógica", "lógica matemática" o "razonamiento lógico-matemático" para referirse a conocimientos como la clasificación

y ordenación de elementos, debido a las aportaciones de autores de prestigio como Montessori, Dienes o Piaget, entre otros. Sus planteamientos tuvieron una gran repercusión y lograron introducir que en las primeras edades estos conocimientos se adquirían a partir de situaciones concretas con materiales manipulativos. Sin embargo, no los vincularon explícitamente al álgebra, sino que los consideraban parte de la educación sensorial o bien de la inteligencia lógico-matemática, respectivamente. Así, por ejemplo, Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y Prieto (2008, p. 214) señalan que “para Piaget la inteligencia lógico-matemática deriva desde la manipulación de objetos al desarrollo de la capacidad para pensar sobre los mismos utilizando el pensamiento concreto y, más tarde, el formal”. El gran efecto que causaron estas aportaciones es la principal razón que explica porque todavía hoy, en diversos países, las orientaciones curriculares sobre educación matemática infantil mantengan esta nomenclatura y se refieran a la lógica matemática o al razonamiento lógico-matemático en lugar del álgebra. La segunda causa que explicaría la ausencia explícita del álgebra como bloque de contenidos en muchos currículos de matemáticas de las primeras edades tiene su origen en la implementación de la matemática moderna, que conllevó la introducción de un lenguaje excesivamente formal. Este planteamiento truncó las ideas que habían conseguido introducir Montessori, Piaget o Dienes, entre otros, y en su lugar se implantaron elementos de la teoría de conjuntos y del álgebra abstracta en las prácticas de enseñanza de las matemáticas de las primeras edades, lo que provocó un importante rechazo al álgebra (Kline, 1976). La consecuencia de estas dos primeras causas es la que da lugar a la tercera, que se refiere a la ausencia de un bloque de contenidos de álgebra en el currículo de matemáticas de los primeros niveles. En su lugar, se ha mantenido “la lógica matemática” o “el razonamiento lógico-matemático” y se ha subrayado que los niños menores de 6 años se deben iniciar en tareas de discriminación de atributos de objetos, en la percepción de sus semejanzas y diferencias, o bien en la clasificación y ordenación de elementos, principalmente.

A pesar de estas circunstancias adversas, en las últimas décadas el álgebra se incorporado con fuerza en las orientaciones curriculares más avanzadas desde los 3 años a partir de dos nuevos enfoques, pre-álgebra y *Early-Algebra* (álgebra temprana), al considerarse una puerta de entrada a las matemáticas superiores, entre otras cosas porque aportan un lenguaje enriquecido capaz de crear la base con que se enseñan las matemáticas (Stacey y Chick, 2004).

Sin embargo, de acuerdo con Zapatera (2018), a pesar de que ambos enfoques están relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra, se diferencian en su finalidad y el momento de introducción: el enfoque “pre-álgebra” intenta suavizar la transición entre la aritmética y el álgebra y reducir las dificultades que sufren los alumnos en el aprendizaje del álgebra y propone introducir el álgebra como una aritmética generalizada en los últimos cursos de Educación Primaria y en Educación Secundaria Obligatoria; mientras que el enfoque “álgebra temprana” tiene unos objetivos más amplios e intenta introducir modos del pensamiento algebraico en el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas desde los primeros cursos de escolarización a partir de conexiones intradisciplinarias (Alsina, 2016), es decir, integrada principalmente en otros bloques de contenidos matemáticos como por ejemplo la aritmética o la geometría.

Desde esta perspectiva, y considerando el triple propósito de este artículo (¿por qué, qué y cómo enseñar el álgebra en Educación Infantil?), este artículo se enmarca dentro del enfoque del álgebra temprana, que se fundamenta en un cambio curricular en el que el álgebra se introduce desde los primeros años de escolarización como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas (Blanton y Kaput, 2003, 2005; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Kaput, 2008; Zapatera, 2018). En este sentido, en la primera parte se fundamenta la presencia del álgebra temprana en las primeras edades y se indican los principales conocimientos a desarrollar y en la segunda parte se describe un itinerario didáctico de enseñanza para facilitar la adquisición de estos conocimientos y promover, así, el desarrollo profesional del profesorado interesado en incorporar nuevos conocimientos para una educación matemática infantil del S. XXI.

2. El álgebra temprana en Educación Infantil: ¿por qué? y ¿qué?

Acosta y Alsina (en prensa) señalan que en la primera infancia los niños empiezan a ser conscientes de los efectos de las acciones que llevan a cabo con la intención de buscar la complicidad y atención del adulto, es decir, se encuentran en una fase de exploración entre la acción y la reacción. Estas acciones son, para Mason (2011, p. 567), "las instancias en que el niño desarrolla el control sobre sus facultades a través del desarrollo de su conciencia (como una capacidad para actuar), mediante la generalización", que de acuerdo con Dreyfus (1991), consiste en derivar o inducir desde lo particular, identificando lo que es común y extendiendo dominios de validez para incluir un conjunto mayor de casos. Mason (2008) indica que la generalización es una actividad humana e innata que los niños pequeños llevan a cabo de manera natural en el contexto escolar, y Papic, Mulligan, Mitchelmore (2011) añaden que es precisamente a través de la generalización como se inicia el desarrollo del pensamiento algebraico.

Desde este prisma, Blanton y Kaput (2005) sugieren que los currículos de Educación Infantil deberían fundamentarse en estas habilidades naturales para empoderar los primeros conocimientos algebraicos. De hecho, Kaput (2000) ya hace alusión a este aspecto cuando propone una "algebraización del currículo" para fomentar el pensamiento algebraico desde edades tempranas. El *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (2000) apoya este planteamiento y apuesta por la introducción del álgebra a partir de los 3 años, con el propósito de construir una base sólida de aprendizajes que favorezca la adquisición y tratamiento de un conocimiento algebraico más sofisticado en niveles posteriores.

Para Godino y Font (2003), el pensamiento algebraico, concebido como la ciencia de los patrones y el orden, es una forma de razonar que supone establecer generalizaciones y regularidades en diversas situaciones matemáticas. En esta línea, Kieran (2004, p. 149) expone que el pensamiento algebraico permite "[...] analizar las relaciones entre cantidades, ser consciente de la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir". Desde esta óptica, la búsqueda y uso de la generalización se considera a su vez una ruta y una característica del pensamiento algebraico necesaria para fomentar un aprendizaje desde el terreno de lo concreto hacia lo abstracto (Kieran, 2004; Papic, Mulligan, y Mitchelmore, 2011).

Con base a estas consideraciones es que los currículos de matemáticas de las primeras edades más avanzados han empezado a incorporar de forma explícita el álgebra temprana. Así, por ejemplo, en las orientaciones curriculares de Estados Unidos, desde que el NCTM (2000) avanzara el trabajo sistemático del álgebra temprana a partir de los 3 años, se han ido concretando los puntos focales curriculares en los que se debería centrar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra temprana desde *Pre-Kindergarten* hasta *Kindergarten* (3 a 6 años aproximadamente). Estos puntos se centran en ordenar y clasificar objetos atendiendo a determinadas propiedades, reconocer y ampliar patrones tanto de secuencias sonoras como numéricas y analizar el comportamiento de los patrones utilizando representaciones concretas, pictóricas y verbales, entre otros aspectos (NCTM, 2006). En el *Nurturing Early Learners* [NEL], que es la versión revisada del currículo vigente del Ministerio de Educación de la República de Singapur, se indica que uno de los objetivos para los alumnos de 4 a 6 años es "reconocer y usar relaciones y patrones simples" (Singapore, Republic of. Ministry of Education, 2013, p. 22). En la guía para docentes que despliega de manera más detallada este objetivo, se sugiere crear patrones repetidos usando objetos, palabras, dibujos, símbolos o acciones, así como reconocer y extender patrones simples. En Australia, el *Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority* [ACARA] (2015) aboga por un desarrollo del sentido de número, del orden, la secuencia, el patrón y la posición haciendo uso del contexto del alumno. Concretamente, en relación con el álgebra y los patrones, plantea que los alumnos de 4 años ordenen, clasifiquen objetos familiares, expliquen la base de la clasificación ejecutada, copien, creen y extiendan patrones con objetos, dibujos o material manipulable, además de reforzar la capacidad de observar e identificar los patrones naturales del entorno. Y en Nueva Zelanda, uno de los intereses y capacidades crecientes de los niños pequeños que se expone en *Te Whāriki-Early*

childhood curriculum (New Zealand Government. Ministry of Education, 2017) es, precisamente, ser capaz de desarrollar conceptos matemáticos tempranos como la clasificación y la percepción de patrones que inciten a la indagación, exploración y evaluación de todo aquello que resulte inesperado. De esta forma se asegura establecer una base permeable que permita a los alumnos de etapas posteriores explorar el uso de los patrones y las relaciones que se pueden establecer con aspectos de cantidad, conjuntos de datos, espacio y tiempo.

Las orientaciones curriculares vigentes en España, si bien no están algebrizadas de la misma forma, también hacen alusión a conocimientos vinculados al álgebra temprana, como se puso de manifiesto en Alsina (2011).

Tabla 1. Contenidos vinculados al álgebra temprana en la Orden ECI/3960/2007 (Alsina, 2011).

Área 1. Conocimiento de sí mismo y autonomía personal.	<ul style="list-style-type: none"> - Percepción de los cambios físicos propios y de su relación con el paso del tiempo. - Identificación y utilización de los sentidos, expresión verbal de sensaciones y percepciones. - Gusto e interés por la exploración sensoriomotriz para el conocimiento personal, el de los demás y la relación con los objetos en situaciones de aula que favorezcan la actividad espontánea. - Exploración y valoración de las posibilidades y limitaciones perceptivas, motrices y expresivas propias y de los demás. - Juegos motores, sensoriales, simbólicos y de reglas.
Área 2. Conocimiento del entorno.	<ul style="list-style-type: none"> - Percepción de semejanzas y diferencias entre los objetos. - Discriminación de algunos atributos de objetos y materias. Interés por la clasificación de elementos. Relaciones de pertenencia y no pertenencia. - Identificación de cualidades y sus grados. Ordenación gradual de elementos. - Detección de algunas características, comportamientos, funciones y cambios en los seres vivos. - Observación, discriminación y clasificación de animales y plantas. - Observación de los fenómenos del medio natural (alternancia de día y noches, lluvia...) y valoración de la influencia que ejercen en la vida humana.
Área 3. Lenguajes: comunicación y representación.	<ul style="list-style-type: none"> - Exploración de las propias posibilidades expresivas y comunicativas en relación con objetos y materiales. - Ajuste corporal y motor ante objetos de diferentes características con finalidad expresiva o comunicativa.

A partir del análisis de la tabla 1, Alsina (2011, p. 30) indica que:

... dichos contenidos hacen referencia básicamente a tres aspectos: la identificación de las características sensoriales de los objetos a partir de su exploración con los diferentes sentidos; la comparación de estas características sensoriales a partir de dos tipos de relaciones básicas: clasificaciones y ordenaciones; y la observación de los cambios que se producen en los objetos y en el entorno inmediato.

De ello se desprende que el gran ausente en estas orientaciones son los patrones, a pesar de que diversos autores los consideran como un trampolín para promover la generalización, la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el inicio del uso preciso del lenguaje matemático (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Clements y Sarama, 2015; Mason, Stephens y Watson, 2009); Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; entre otros). El NCTM (2000) añade, además, que los patrones contribuyen a que los niños sean capaces de reconocer, ordenar y organizar su mundo, ya que se ha demostrado que el reconocimiento, la comparación y el análisis de patrones son factores que determinan y favorecen el desarrollo intelectual de los pequeños.

Una vez argumentada la importancia del álgebra temprana en las primeras edades y revisadas las principales orientaciones curriculares, a continuación, se presenta una propuesta de distribución de contenidos por edades, desde los 3 a los 6 años con el propósito de intentar organizar que

conocimientos deberían aprender los alumnos. Para realizar la propuesta de distribución se han considerado tres elementos: 1) las directrices contemporáneas tanto a nivel internacional como estatal descritas acerca de los contenidos vinculados al álgebra temprana que deberían aprender los alumnos desde los 3 hasta los 6 años; 2) los conocimientos experienciales de muchos maestros anónimos, que a través de sus prácticas docentes han podido constatar día a día y durante muchos años qué conocimientos de matemáticas aprenden la mayoría de alumnos de un determinado nivel, y que se han ido recogiendo en múltiples actividades de formación permanente del profesorado; y 3) con el objeto de triangular los datos, se ha realizado también una observación sistemática a lo largo de varios años con el objeto de comprobar *in situ* los conocimientos algebraicos que aprenden los alumnos en Educación Infantil, poniendo especial atención a los conocimientos que inicialmente han generado ciertas dudas sobre su posible ubicación en uno u otro nivel.

Para organizar los contenidos se realiza una adaptación del criterio usado por Canals (1989) para los contenidos de "lógica" en Educación Infantil, y que se utilizó también en Alsina (2006) para los contenidos de "razonamiento lógico-matemático":

- Identificar objetos algebraicos: se incluyen conocimientos asociados al álgebra temprana como por ejemplo la identificación de algunos atributos de objetos y materiales o bien las agrupaciones de elementos por distintos criterios.
- Relacionar objetos algebraicos: se incluyen los principales tipos de relaciones (de equivalencia y orden, principalmente, junto con las correspondencias) y los patrones.
- Operar objetos algebraicos: se incluye el análisis de los cambios, en un sentido amplio.

En dicha categorización se asume una concepción pragmática (operacional) del significado de dichos conocimientos, que implica concebir a los objetos matemáticos como herramientas conceptuales que surgen y se desarrollan a través de su uso (Godino, 2002).

Tabla 2. Conocimientos de álgebra temprana en 3-4 años.

<i>Identificar objetos algebraicos</i>	<i>Relacionar objetos algebraicos</i>	<i>Operar objetos algebraicos</i>
Reconocimiento de hasta dos atributos afirmativos de un mismo objeto (color, forma, etc.). Agrupaciones de objetos por un atributo afirmativo común (color, forma, etc.). Reconocer los que no lo tienen. Uso de etiquetas afirmativas para representar gráficamente atributos.	Clasificaciones con objetos del entorno y con material manipulativo a partir de criterios sencillos (forma, color, tipo de material, etc.). Ordenaciones de tres elementos en sentido ascendente y descendente. Correspondencias cualitativas propias de la vida real y con material manipulativo. Seriaciones a partir de patrones de repetición AB: construcción e identificación del patrón.	Observación de cambios en el entorno cercano: entre el día y la noche, las estaciones del año, etc. Observación de cambios en los niños: la estatura a principio de curso, a final de curso, etc. Introducción de operadores directos sencillos para realizar cambios (de forma y de color, básicamente) a través de la máquina de cambiar cualidades.

Tabla 3. Conocimientos de álgebra temprana en 4-5 años.

Identificar objetos algebraicos	Relacionar objetos algebraicos	Operar objetos algebraicos
Reconocimiento de hasta tres atributos de un objeto. Agrupaciones de objetos por un atributo negativo. Reconocer los que no lo tienen. Introducción al uso de etiquetas negativas para	Clasificaciones con objetos del entorno y material manipulativo a partir de criterios más complejos. Clasificaciones sin disponer del material que constituye el conjunto referencial, sino imaginándolo. Por ejemplo, clasificar todos los animales que conozcan según cuál sea su medio (tierra, mar o aire).	Introducción de otros operadores directos para realizar cambios (tamaño, grosor, etc.).

representar gráficamente atributos.	<p>Ordenaciones con más de tres elementos por una cualidad, en sentido ascendente o descendente.</p> <p>Ordenaciones sin disponer del material que constituye el conjunto referencial, sino imaginándolo. Por ejemplo, ordenar los miembros de la familia del de menos edad al de más edad.</p> <p>Correspondencias cualitativas a partir de cuadros de doble entrada.</p> <p>Seriaciones a partir de patrones de repetición AAB y ABB: construcción, identificación e inicio de la representación del patrón.</p>	
-------------------------------------	--	--

Tabla 4. Conocimientos de álgebra temprana en 5-6 años.

Identificar objetos algebraicos	Relacionar objetos algebraicos	Operar objetos algebraicos
<p>Reconocimiento de más de tres atributos afirmativos o negativos de un objeto; identificación de un objeto a partir de diversos atributos.</p> <p>Uso de etiquetas afirmativas y negativas para representar gráficamente atributos.</p> <p>Reconocimiento del atributo común de una agrupación de elementos.</p> <p>Inicio de las agrupaciones definidas por dos atributos diferentes, afirmativos y simultáneos. Reconocer los elementos que contienen ambos atributos y los que no contienen ninguno de los dos.</p> <p>Reconocimiento de agrupaciones que forman parte de otras (noción de inclusión).</p>	<p>Clasificaciones diferentes de una misma agrupación de elementos, por criterios menos evidentes.</p> <p>Ordenaciones de hasta diez elementos por una cualidad, en sentido ascendente o descendente.</p> <p>Correspondencias cualitativas más complejas, como por ejemplo dominós de asociación de ideas, etc.</p> <p>Identificación del criterio usado en clasificaciones, ordenaciones y correspondencias cualitativas hechas.</p> <p>Inicio de la representación con flechas para expresar relaciones.</p> <p>Seriaciones a partir de patrones de repetición ABC: construcción, identificación y representación del patrón.</p>	<p>Introducción de los operadores neutros e inversos.</p> <p>Introducción de las cadenas de cambios.</p>

Como puede apreciarse en las tablas 2 a 4, la propuesta de contenidos de álgebra temprana para el 2º ciclo de Educación Infantil incluye *conocimientos físicos* que tienen por objeto que los niños identifiquen los atributos de los objetos, hagan agrupaciones con base a estos atributos, etc., y que son imprescindibles para poder activar y desarrollar los *conocimientos matemáticos* propios del álgebra temprana, que incluye conocimientos vinculados a las relaciones y los patrones, a las formas de representación y al análisis del cambio.

3. El álgebra temprana en Educación Infantil: ¿cómo?

En el primer número de EDMA 0-6, Alsina (2012) trató de ofrecer una respuesta genérica sobre cómo trabajar las matemáticas en Educación Infantil a partir de la incorporación sistemática de los procesos matemáticos para trabajar los distintos contenidos. Esta idea, inspirada principalmente en los principios y estándares para la educación matemática propuestos por el NCTM (2000) y concretada para la educación matemática infantil en las recomendaciones realizadas pocos años después por esta asociación de profesores de matemáticas junto con la *National Association for the Education of Young Children* (NAEYC y NCTM, 2002), sugiere que para lograr una educación matemática de calidad para niños de 3 a 6 años, "los currículos de matemáticas y las prácticas docentes deberían fortalecer los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas" (NAEYC y NCTM, 2013).

Junto con este planteamiento genérico, válido lógicamente para la planificación y gestión de prácticas de enseñanza sobre álgebra temprana en Educación Infantil, se ha ido desarrollando paulatinamente una propuesta para trabajar los contenidos de matemáticas en las primeras edades en consonancia con las necesidades de los niños para aprender. Esta propuesta se empezó a gestar con la "Pirámide de la Educación Matemática" (Alsina, 2010), en la que se planteaban diversos contextos de enseñanza desde lo concreto hasta lo abstracto y se recomendaba su frecuencia de uso, y ha ido evolucionando hasta el planteamiento de itinerarios didácticos de enseñanza de las matemáticas (Alsina, 2018, 2019), asumiendo que la palabra "itinerario" se refiere a:

una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres fases: 1) enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas de los niños, como por ejemplo su entorno inmediato, o bien materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia; 2) enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como por ejemplo algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (*Applets*, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático; 3) enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos, como por ejemplo el lápiz y el papel, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales (Alsina, 2019, p. 9-10).

Desde este prisma, y con el propósito de intentar responder a la pregunta ¿cómo trabajar el álgebra temprana en Educación Infantil? a continuación se presenta una propuesta de itinerario de enseñanza del álgebra temprana organizado en los tres niveles descritos.

3.1. Situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos para la enseñanza del álgebra temprana

Este primer nivel del itinerario contempla los contextos imprescindibles para enseñar contenidos de álgebra temprana, con el propósito de que estos contextos actúen como mediadores entre las situaciones concretas y las matemáticas más abstractas: se inicia con situaciones de vida cotidiana para ayudar a los alumnos a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias, incrementar su interés, despertar su creatividad e impulsarlos a utilizar estrategias informales y de sentido común (Reeuwijk, 1997); y se presentan también diversos materiales manipulativos y juegos, no para hacer más divertido el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra temprana, sino para hacerlo más eficaz, ya que dichos materiales permiten visualizar de manera concreta ideas matemáticas abstractas (Alsina y Planas, 2008).

Experiencias a partir de contextos reales: "las matemáticas de nuestro patio" y "una visita por la ciudad"

Se trata de dos experiencias en las que se trabajan agrupaciones, relaciones y patrones, principalmente. En "las matemáticas de nuestro patio" (Alsina, 2011) se propone a los alumnos que, en sesiones de psicomotricidad y juego, interactúen con diversos materiales presentes en el patio del colegio, como por ejemplo aros, cubos, palas, ladrillos, cilindros, etc., y materiales del medio natural como piedras, hojas, arena, etc. Antes de realizar propiamente la actividad en el patio, se establece un diálogo con los niños y las niñas en la asamblea para detectar sus ideas previas con preguntas como: ¿qué matemáticas podemos descubrir en nuestra clase de psicomotricidad?; ¿y cuándo jugamos con nuestros cubos y palas?; ¿y en el arenero?; etc. A partir de estos diálogos, la maestra recoge las propuestas de los niños y niñas y organiza las actividades:

- Agrupaciones: antes de organizar el material, realizan agrupaciones con las palas y rastrillos por colores y formas.



Figura 2. Agrupaciones a partir de los atributos del color y la forma.

- Clasificaciones: recogen el material de la sesión de psicomotricidad clasificándolo por colores y formas.



Figura 3. Clasificación por un criterio inicial de forma (cilindros y prismas), y seguidamente un criterio de color (prismas rojos, verdes, azules y amarillos).

- Ordenaciones: ordenan de menor a mayor tamaño los aros y las piedras que los niños han recogido cuando jugaban con los cubos y las palas.



Figura 4. Ordenaciones según el tamaño.

- Correspondencias cualitativas: hacen una correspondencia uno a uno y por colores (un cubo-una pala) para que cada alumno tenga su material para desarrollar la sesión.



Figura 5. Correspondencia por un criterio de color.

- Seriaciones con patrones de repetición AB: construyen un tren con vagones a partir de palas de dos colores.



Figura 6. Construcción de una seriación a partir del patrón de repetición AB (pala roja-pala azul).

Una vez en clase, se establece un diálogo a partir de las fotografías para analizar las acciones realizadas en el patio y fomentar el uso de vocabulario matemático adecuado: agrupación, clasificación, ordenación, etc. Además, se pide a los alumnos que representen gráficamente dichas acciones. Con todo este material, se elabora una documentación en forma de mural que queda expuesto en el aula.



Figura 7. Representación de las acciones realizadas en el patio y documentación a través de un mural.

En la segunda experiencia, "una visita por la ciudad" (Alsina, Novo y Moreno, 2016), los alumnos realizan un itinerario geométrico en una calle céntrica de la ciudad de Palencia para redescubrirla con ojos matemáticos. En primer lugar, los alumnos hacen seriaciones en clase siguiendo un determinado patrón de repetición con material no estructurado (tapones de diversos tamaños, formas y colores) y con material estructurado (bloques lógicos, tarjetas de conceptos gráficos, formas figurativas o abstractas...). Posteriormente manipulan libremente regletas, hacen seriaciones y las representan en un papel cuadriculado. Los alumnos van describiendo los patrones: "regleta blanca, regleta roja tumbada, regleta blanca, regleta roja tumbada..."; "regleta roja de pie, regleta verde tumbada, regleta roja de pie, regleta verde tumbada..."; "regleta verde para abajo, regleta blanca tumbada...".

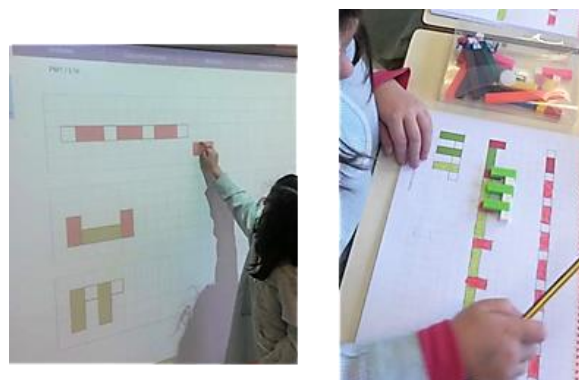


Figura 8. Construcción de seriaciones con materiales, siguiendo un patrón de repetición.

Ya en la visita por la ciudad, identifican patrones en elementos urbanísticos. Les resulta más fácil descubrir patrones en áreas cercanas a ellos: el suelo, por ejemplo... áreas que abarcan fácilmente por estar en su entorno corporal. Y si, además, hay un contraste marcado entre los elementos, lo perciben mejor.



Figura 9. Identificación de patrones en baldosas, en las columnas de la calle y en portones.

Las fotografías se analizan después en clase, para que todos los alumnos puedan identificar los patrones y fomentar el uso de vocabulario matemático adecuado. En la transcripción siguiente se muestra un ejemplo de diálogo a partir de la imagen de las columnas:

- Niño: Me sé una serie yo.
 Niña: Y yo otra.
 Niña: Balcón, balcón y ¿esto?
 Maestra: Eso es un mirador.
 Niña: Balcón, balcón, mirador, balcón, balcón, mirador...
 Niño: Yo sé otra... Con lo que sujeta...
 Maestra: ¿Cómo se llama?
 Niño: ¿Columna?
 Maestra: Sí. Y sigue...
 Niño: Columna, no hay nada, columna, no hay nada, columna, no hay nada...
 Maestra: Mira un poco hacia arriba, ¿qué ves?
 Niño: ¿Una farola?
 Maestra: Es un farol porque no se apoya en el suelo.
 Niño: Columna, farol, columna, farol, columna, farol...

Como se aprecia en el diálogo anterior, los niños han descubierto una variedad de patrones (sobre todo AB o AAB) a partir de la observación del entorno. A pesar de que en la actividad descrita no se realizó, es interesante promover también que progresivamente los niños representen estos patrones, de forma gráfica o simbólica, con el propósito de un promoviendo capacidades como la generalización, como ya se ha indicado.

Materiales manipulativos y juegos

En la tabla 5 se muestra una selección de materiales extraídos de Alsina (2019) para trabajar las agrupaciones de elementos, las relaciones y los patrones (numéricos y geométricos principalmente), además de algunos materiales para analizar cambios.

Tabla 5. Materiales lúdico-manipulativos para trabajar el álgebra temprana en Educación Infantil.

 <p>Bloques Lógicos de Dienes para realizar agrupaciones, clasificaciones, correspondencias cualitativas, etc. (según el color, la forma, el tamaño o el grosor)</p>	 <p>Otros materiales lógicos para realizar también agrupaciones, clasificaciones, correspondencias cualitativas, etc. (según el color, la cantidad de ojos, el estado de ánimo, etc.)</p>	 <p>Ejemplo de agrupación a partir de etiquetas negativas.</p>
---	--	---

 <p>Ejemplo de agrupación con dos atributos: "ser de color azul" y "tener cinco elementos". Se generan cuatro espacios: "los azules", "los que hay cinco", "los que son azules y hay cinco" y "los que no son azules ni hay cinco".</p>	 <p>Ejemplo de clasificación (relación de equivalencia) por un criterio de forma: cubos, pirámides y esferas.</p>	 <p>Ejemplo de correspondencia cualitativa a partir de un cuadro de doble entrada (producto cartesiano).</p>
 <p>Cápsulas de café para construir series (patrón de repetición AB)</p>	 <p>Pinchos de colores para construir series (patrón de repetición AB)</p>	 <p>Pinzas para construir series (patrón de repetición ABC)</p>
 <p>Pinzas para construir series circulares (patrón de repetición ABCD)</p>	 <p>Policubos para construir series y clasificarlas según el patrón de repetición (AB, ABB, AABB)</p>	 <p>Máquina de cambiar cualidades para observar cambios constantes: entra un círculo amarillo, el operador indica que cambia el color y deben pensar qué pieza puede salir de la máquina.</p>

3.2. Recursos literarios y tecnológicos para la enseñanza del álgebra temprana

El segundo nivel del itinerario de enseñanza del álgebra temprana en Educación Infantil incluye contextos que pueden "usarse" de forma alternativa, una o dos veces por semana, pero que son también muy útiles y necesarios ya que están presentes en la vida de los alumnos y permiten establecer conexiones entre conocimientos y pueden provocar una gran motivación, sobre todo los cuentos o bien el uso de algunos dispositivos electrónicos como tabletas, etc.

En relación al uso de recursos literarios como los cuentos para trabajar conocimientos de álgebra temprana, Torra (2012) indica que se trata de un recurso que va más lejos de lo que a primera vista se acostumbra a captar y, si bien es cierto que muchos de ellos inciden en aspectos vinculados a la numeración o a la geometría, la verdadera aportación es la presencia de patrones que, como se ha indicado, abren la posibilidad de predecir, de anticipar lo que va a suceder, de buscar regularidades, de generalizar. De acuerdo con esta autora, se pueden encontrar patrones de repetición en los cuentos clásicos como "La Ratita Presumida", en los que la estructura del cuento sigue siempre el mismo patrón, pero con un cambio al final que advierte que, aunque los patrones sirven para predecir o anticipar lo que va a suceder, hay que estar atentos a los cambios y comprobar si las predicciones se cumplen o no.

Respecto a los recursos tecnológicos, en una sociedad altamente tecnificada como la actual, es evidente que este tipo de contextos de enseñanza-aprendizaje pueden ser útiles para fomentar la enseñanza de las matemáticas en general y los contenidos de álgebra temprana en particular. Por esta razón, en las últimas décadas se han diseñado, con mayor o menor fortuna, una gran cantidad de *applets* (*app* en su forma abreviada) como herramientas de soporte para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, incluida la Educación Infantil hasta la formación superior. Sin ánimo de ser exhaustivos, seguidamente se muestra una selección breve de webs en las que se pueden encontrar interesantes *applets* para trabajar contenidos de álgebra temprana en las primeras edades, aun teniendo en cuenta que algunos de ellos son accesibles sólo para inscritos y que, dada la vertiginosa velocidad con la que se transforman los entornos virtuales y tecnológicos, es posible que algunos de ellos desaparezcan o queden obsoletos en poco tiempo:

- *Illuminations* (<https://illuminations.nctm.org>): ofrecen una gran cantidad de *applets* para alumnos desde los 3 hasta los 18 años, organizados en niveles de acuerdo con el sistema educativo americano (los correspondientes a la Educación Infantil son "Pre-K-2", de 3 a 8 años) y según los cinco estándares de contenido matemático del NCTM: números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad. Se ofrece una amplia información en relación a cada *app*: el plan instruccional (plan de trabajo o desarrollo de la actividad), los objetivos que se trabajan, los materiales para llevar a cabo la actividad, los criterios para la evaluación, algunas buenas preguntas para la reflexión y, finalmente, una explicación de los recursos (los contextos) usados. Cabe señalar que los recursos más recientes son accesibles únicamente para los socios, por lo que se recomienda realizar una búsqueda previa para seleccionar las actividades de álgebra temprana de acceso libre.

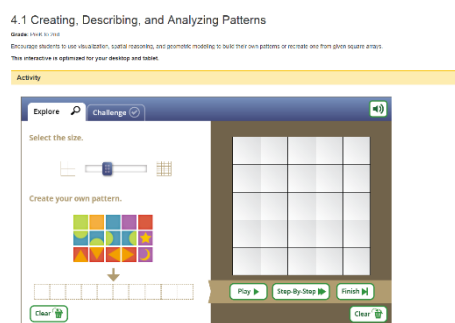


Figura 10. Applet de Illuminations para trabajar la creación y descripción de patrones

- Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (<http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>): se trata de un proyecto educativo de la *Utah State University* (Estados Unidos), financiado por la "National Science Foundation". Comenzó en 1999 con el objetivo de desarrollar una biblioteca de manipuladores virtuales interactivos (principalmente *applets* en Java), disponibles a través de la Web, para contribuir a la enseñanza de las matemáticas. Está organizado también en bloques de contenido (numeración y cálculo, álgebra, geometría, medida, y análisis de datos y probabilidad) y según rangos de edad, de acuerdo con el sistema educativo norteamericano. Como en el caso de *Illuminations* del NCTM, los *applets* correspondientes a la Educación Infantil están disponibles en "Pre-K-2", de 3 a 8 años. A diferencia de los anteriores, existe una versión en inglés y otra en español.

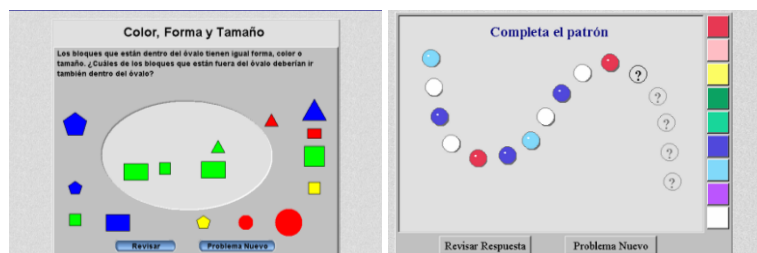


Figura 11. Muestra de *applets* de álgebra temprana para Educación Infantil: agrupaciones por criterios de color y patrones de repetición respectivamente.

- Proyecto Canals (<http://recursostic.educacion.es/canals/web>): el material desarrollado en este proyecto se configura como un conjunto de documentos que constituyen un repositorio de recursos educativos a partir de los materiales que han ido recopilando M^a. A. Canals y su equipo. En el menú lateral de la página principal, en la opción etiquetada como "Materiales" se estructuran tres índices que organizan el acceso a los recursos desde tres perspectivas: una organizada por temas, otra por nivel o etapa educativa y dentro de ésta por curso, y la última que presenta todos los objetos de aprendizaje. En la sección de Educación Infantil se pueden encontrar diversos recursos para trabajar clasificaciones, secuencias lógicas (patrones), etc. Funcionan con Java.

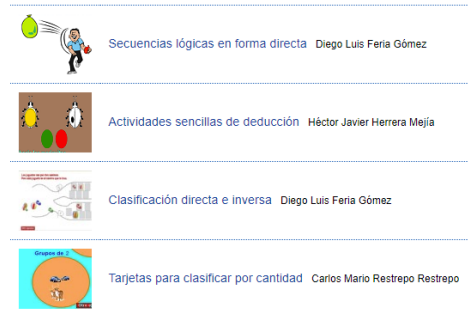


Figura 12. Muestra de *applets* de álgebra temprana para Educación Infantil: clasificaciones y secuencias lógicas.

Además de las *Apps*, otro recurso tecnológico en constante evolución son los robots educativos programables. En Alsina y Acosta (2018), por ejemplo, se muestra una experiencia con las *Bee-bots*, que ayudan a acercar a los niños al mundo de la robótica a partir de la programación de acciones que siguen un proceso secuencial.



Figura 13. Bee-bots y tarjetas de instrucciones para realizar movimientos.

Después de la exploración libre para que los niños se familiaricen con el material y con su uso, se pueden realizar múltiples actividades, como por ejemplo desplazamientos libres o bien a partir de patrones. En esta experiencia en concreto, se presenta a los alumnos un tablero formado por 7 casillas para hacer un recorrido con las abejas (figura 14): en la primera casilla hay una flor, en la segunda no hay nada, en la tercera hay de nuevo una flor, y así sucesivamente hasta llegar a la última casilla. El propósito es que deben pensar las instrucciones adecuadas para hacer una parada en cada flor y conseguir que la abeja se desplace hasta el otro extremo del tablero.



Figura 14. Desplazamiento de la abeja siguiendo el patrón AAB (dos movimientos adelante-pausa)

A través de la formulación de buenas preguntas, los niños reflexionan sobre la situación y resuelven el problema usando estrategias matemáticas. De esta manera van ganando en confianza y seguridad para comunicar sus acciones tanto a sus compañeros como a la maestra, iniciándose en el uso de lenguaje algebraico, como, por ejemplo: "adelante-adelante-pausa muchas veces". Finalmente, los alumnos representan en un papel el desplazamiento realizado por las abejas en el tablero durante la sesión anterior a partir de la técnica de estampación (figura 15).



Figura 15. Representación gráfica del patrón AAB

3.3. Recursos gráficos para la enseñanza del álgebra temprana

En el último nivel del itinerario didáctico se sitúan los materiales impresos y las formas de representación abstractas, para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico. Debería considerarse que, además de los cuadernos de actividades y las fichas, existen otros recursos gráficos que pueden resultar muy adecuados para trabajar el álgebra temprana en Educación Infantil. A modo de ejemplo, se presenta un recurso creado por el profesor de matemáticas estadounidense Christopher Danielson: "Which One Doesn't Belong? (WODB)" (¿cuál no pertenece?). Este recurso, disponible en <https://wodb.ca/>, consiste en presentar a los alumnos varias situaciones distintas, habitualmente cuatro en una misma tarjeta, con el objeto de que argumenten cuál de ellas no pertenece al grupo. A modo de ejemplo, en la figura 16 se muestra una tarea WODB muy adecuada para para trabajar el reconocimiento de los atributos de los objetos y el análisis de las semejanzas y diferencias. Se trata de una tarea diseñada por una profesora de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en la que se muestran cuatro elementos y debe buscarse un argumento para justificar cuál de ellos es el intruso.

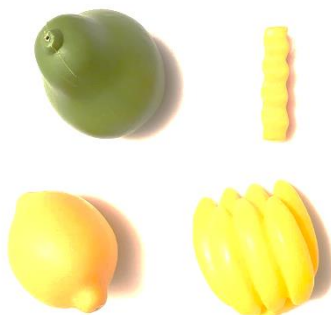


Figura 16. Ejemplo de WODB, disponible en <https://www.instagram.com/p/BgcJ12dAZiz/>

En el ejemplo de la figura 16 se pueden aportar diversos argumentos que implican, como se ha indicado, el análisis de los distintos atributos de los elementos, la comparación de sus semejanzas y diferencias, el establecimiento de relaciones, etc.:

- Todos son de color amarillo salvo la pera, que es verde.
- Todos tienen una textura lisa salvo el limón, que tiene la textura rugosa.
- Todos representan un único elemento salvo el grupo de plátanos, en el que hay 7 elementos.
- Todos son alimentos naturales salvo la patata frita, que está procesada.

Como se puede apreciar, se trata de descubrir que cualquiera de los elementos del grupo puede ser el que no pertenece, en función del argumento que se aporta. La complejidad del argumento depende del nivel de conocimientos de los alumnos, por lo que es un recurso que puede utilizarse en todos los niveles. En términos más generales, las tareas WODB son un recurso gráfico especialmente útil para trabajar los contenidos matemáticos a través de los procesos matemáticos de razonamiento y comunicación (NCTM, 2000), ya que los alumnos deben pensar argumentos que justifiquen cual es el que no pertenece al grupo y a continuación comunicarlos.

4. Consideraciones finales

En la primera parte de este artículo se ha argumentado la importancia de trabajar el álgebra temprana de forma sistemática en Educación Infantil, partiendo de la base que se trata de un bloque de contenidos fundamental para el desarrollo intelectual de los niños (NCTM, 2000). Además, contribuye a estructurar el pensamiento y la capacidad de razonar, y proporciona una base imprescindible tanto para el pensamiento algebraico como para la representación matemática y la abstracción (Alsina, 2019). Se han descrito también las principales razones que han generado cierto rechazo a este bloque de contenidos, hasta el punto que en la actualidad todavía muchos currículos de matemáticas, no solamente de Educación Infantil sino incluso de etapas posteriores, evitan el uso del término "álgebra" puesto que se asocia exclusivamente al simbolismo y a la abstracción. En concreto, se ha hecho alusión a tres factores: 1) la nomenclatura usada por algunos autores como Montessori, Piaget o Dienes para referirse a conocimientos de naturaleza algebraica (educación sensorial, inteligencia lógico-matemática o lógica), que tuvo y sigue teniendo todavía en la actualidad un fuerte impacto en la escuela elemental; 2) la repercusión negativa que tuvo la introducción de la matemática moderna, cargada de un fuerte simbolismo desde las primeras edades (Kline, 1976); y 3) las consecuencias posteriores a estos dos factores, que se sintetizan en la ausencia de un bloque de contenidos específicos de álgebra temprana en las primeras etapas de escolarización (Alsina, 2019).

Sin embargo, desde que en el año 2000 el NCTM apostó por la presencia explícita del álgebra en los currículos de matemáticas desde los 3 años, dada su importancia en el desarrollo de los niños, se han ido algebrizando los currículos de diversos países como Estados Unidos, Singapur, Australia o Nueva

Zelanda, incluyendo en sus propuestas curriculares los principales contenidos referidos a las relaciones, los patrones y el análisis de los cambios (ACARA, 2015; NCTM, 2006; Singapore, Republic of. Ministry of Education, 2013; New Zealand Government. Ministry of Education, 2017).

Considerando los cambios que se están produciendo a nivel internacional, pues, en este artículo se aboga por ir sustituyendo términos como "lógica" o "razonamiento lógico-matemático" e implementar el uso del término "álgebra" en todo su significado y en todas las etapas escolares. Este cambio, que podría parecer una simple modificación de nomenclatura, va mucho más allá y puede comportar importantes beneficios, como por ejemplo la implementación de trayectorias de enseñanza del álgebra sin cortes, desde la Educación Infantil hasta el Bachillerato. Sin duda, ello aportaría beneficios importantes dado que en la actualidad los alumnos saltan, por ejemplo, de hacer seriaciones siguiendo un patrón de repetición ABB en Educación Infantil (cuadrado rojo-cuadrado azul-cuadrado azul), a encontrarse con la noción de función/función algebraica en Educación Secundaria [$f(x) = 3x$], sin el necesario desarrollo progresivo del concepto para favorecer su comprensión durante la etapa de Educación Primaria, como se muestra en la figura 17.

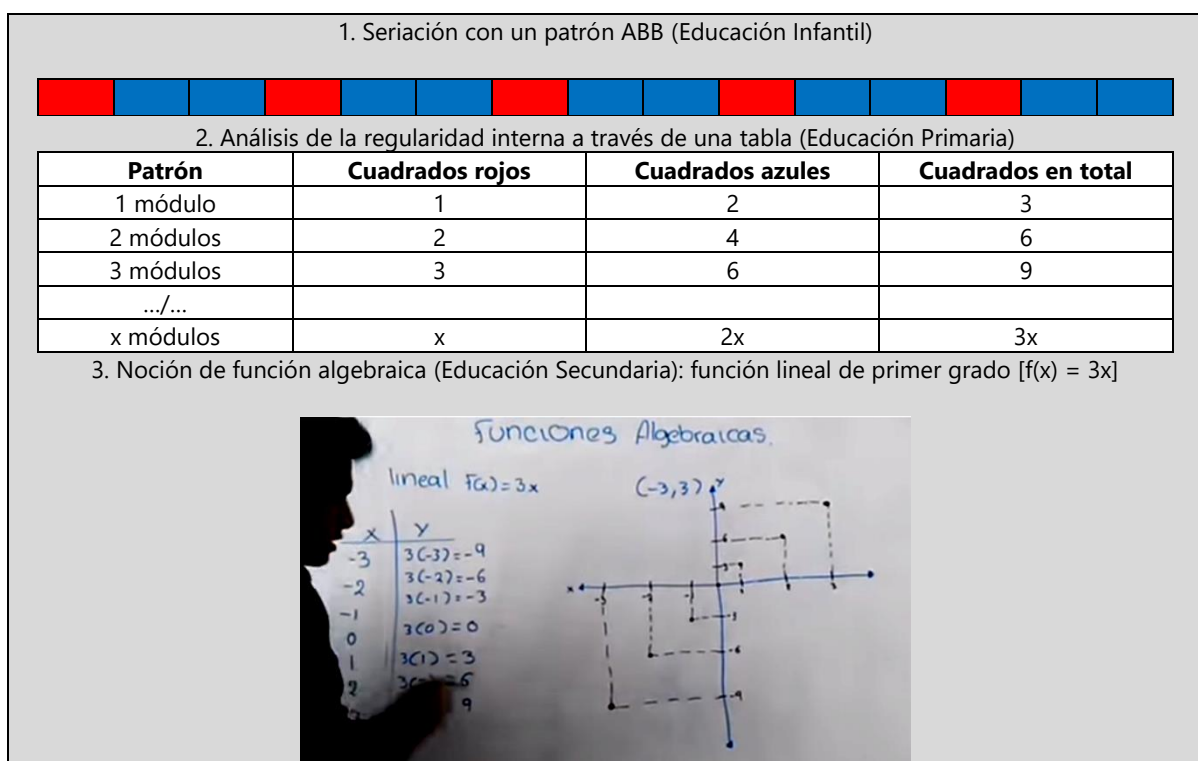


Figura 17. De la seriación en Educación Infantil a la función algebraica en Educación Secundaria

Con el propósito de aportar datos que ayuden a hacer este cambio, se ha presentado una propuesta de distribución de contenidos de álgebra temprana para niños de 3 a 6 años basada en las directrices curriculares contemporáneas tanto a nivel internacional como estatal, los conocimientos experienciales de muchos maestros anónimos y la observación sistemática de prácticas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil. Finalmente, en la segunda parte del artículo se ha presentado un itinerario didáctico organizado en tres fases para la enseñanza del álgebra temprana en Educación Infantil: la primera fase muestra diversas situaciones de vida cotidiana en las que se trabajan actividades como las agrupaciones, las relaciones (clasificaciones, ordenaciones, etc.) y los patrones, así como una amplia selección de materiales manipulativos y juegos para trabajar estos contenidos; la segunda fase incluye recursos literarios (cuentos) para trabajar patrones y recursos tecnológicos, en los que se incluyen diversos *Applets* y robots educativos programables para trabajar también en entornos simulados y mediante la robótica aspectos vinculados al álgebra temprana; finalmente, el itinerario concluye con recursos gráficos, concretamente con una propuesta de trabajo a partir de tareas WODB, que

promueven el análisis de las características sensoriales de los objetos, la comparación de las semejanzas y diferencias, etc., además de fomentar la argumentación y la comunicación en el aula de matemáticas. En definitiva, pues, se ha querido mostrar una secuencia de enseñanza respetuosa con las necesidades reales de los niños para aprender matemáticas, iniciándose en lo concreto y finalizando en lo abstracto, para avanzar hacia la formalización. Este itinerario está inspirado en el planteamiento de Alsina (2019) en relación a los itinerarios didácticos de enseñanza de las matemáticas, y puede consultarse su continuidad para la etapa de Educación Primaria en la misma fuente, junto con la correspondiente distribución de contenidos.

Referencias

- Acosta, Y. y Alsina, Á. (en prensa). Learning patterns at three years old: contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*.
- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.
- Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 33(1), 7-29.
- Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio: itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20.
- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Graó.
- Alsina, A. y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional. Una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 218-235.
- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, A., Novo, M.L. y Moreno, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(1), 1-20.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA] (2015). *The Australian Curriculum: Mathematics*. Recuperado de <http://v7-5.australiancurriculum.edu.au/Curriculum/Overview>.
- Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.
- Blanton, M., y Kaput, J. (2005). Helping Elementary Teachers Build Mathematical Generality into Curriculum and Instruction. *ZDM: International Reviews on Mathematical Education* 37(1), 34-42.
- Canals, M^a. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari*. Vic. Eumo.
- Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., y Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, 37, 53-59.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.
- Clements, H.D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Great Britain: Learning Tools LLC.
- Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library*, 11, 25-41.
- Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M., y Prieto, M.D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de Psicología*, 24(2), 213-222.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(2.3), 237-284.

- Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput; D. W. Carraher; y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8, 139-151.
- Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI Editores S.A.
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor, Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.
- Mason, J. (2011). What makes 'Algebra' early? En J. Cai, y E. Knuth (Eds.), *Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 566-568). Berlin: Springer.
- Mason, J., Stephens, M., y Watson, A. (2009). Appreciating structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 2(2), 10–32.
- National Association for the Education of Young Children and National Council for Teachers of Mathematics [NAEYC y NCTM] (2002). *Early childhood mathematics: Promoting good beginnings. A joint position statement*. Recuperado de <http://www.naeyc.org/files/naeyc/file/positions/psmath.pdf>.
- National Association for the Education of Young Children and National Council for Teachers of Mathematics [NAEYC y NCTM] (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 1-23.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence*. Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics.
- New Zealand Government. Ministry of Education (2017). *Te Whāriki: Early Childhood Curriculum*. Wellington: Ministry of Education.
- Papic, M.M., Mulligan, J.T., y Mitchelmore, M.C. (2011). Assessing the development of preschoolers 'Mathematical patterning'. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268.
- Reeuwijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 12, 9-16.
- Singapore, Republic of. Ministry of Education (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume.6*. Singapore: Ministry of Education.
- Stacey, K. y Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 1-20). Boston: Kluwer.
- Torra, M. (2012). Patrones matemáticos en los cuentos. *Cuadernos de Pedagogía*, 421, 56-58.
- Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 97, 51-67.

Ángel Alsina. Catedrático de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado. Ha publicado numerosos artículos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y América Latina.

Email: angel.alsina@udg.edu