# CÀLCUL FUNCIONAL: INTRODUCCIÓ A LES FUNCIONS

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

# CÀLCUL FUNCIONAL: INTRODUCCIÓ A LES FUNCIONS

**Carles Cassú, Joan Bonet, Xavier Bertran, Joan Carles Ferrer**

Universitat de Girona
**Departament d'Economia**

CIP 517.9 CAL

Càlcul funcional : introducció a les funcions / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1995. - p. ; cm. – (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 9)
ISBN 84-88762-21-6
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1. Anàlisi funcional 2. Anàlisi funcional - Problemes, exercicis, etc.
CIP 517.9 CAL

XBPD 0064-25560 1/1

**Primera edició:** abril de 1995
**Segona edició:** desembre de 1995

**Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya**

**Edita:** Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

**Assessorament lingüístic:** Servei de Normalització Lingüística de la Universitat de Giro

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31



**ISBN: 84-88762-21-6**
**Dipòsit legal: GI-1589-95**

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG. Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

# PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos mòduls d'Àlgebra lineal i de Càlcul infinitesimal.

Per raons de contingut, el mòdul d'Àlgebra lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria analítica), i el mòdul de Càlcul infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul integral (dos volums: Integrals i Equacions diferencials).

Pensem que l'estudi de les lliçons incloses en aquest volum de *Càlcul funcional: introducció a les funcions*, és interessant per fer un repàs de molts conceptes ja vistos en l'ensenyament secundari, però que considerem indispensables per entendre bé els nous temes de càlcul funcional que ens proposem desenvolupar en els propers volums.

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com per a l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Continuem el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de *Problemes proposats*, amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats", és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, novembre de 1995

Els autors

# Introducció a les funcions

# Capítol 1: **Funcions reals de variable real**

## a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

**Bàsica:**

AYRES, F. *Fundamentos de Matemáticas Superiores*. P16/23.

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales*. P257/262.

GARCÍA CASTRO, F. *Cálculo Infinitesimal, I-1*. P32/40.

THOMAS ARA, L. *Cálculo*. P64/66.

DELGADO, M. *Matemáticas: Álgebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad*. P169/171 i P176/178.

RODRIGUEZ, A. *Matemáticas para Economistas. Tomo II*. P429/434.

DÍAZ HERNANDO, J.A. *Álgebra, Geometría y Cálculo. Tomo IV*. P119/126.

**Addicional:**

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría*. P392/410.

REY PASTOR, J. *Análisis Matemático. Tomo I*. P353/358.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. P8/11.

BERMAN, G.N. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*. P1/17.

## b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

### 1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS

1) **Funció real de variable real.** Relació de dependència, funció (f, g, ...). Funcions vectorials, de varies variables i reals de variable real. Conjunt de les funcions ($\mathfrak{F}$). Forma explícita, variable dependent o element imatge (y), variable independent o el. original (x). Forma implícita.

2) **Funcions uniforme i multiforme**. Correspondència i aplicació. Conjunts inicial i final. Funció restringida ($f_A$). Funció multiforme, branques. Funció uniforme.
3) **Domini i recorregut d'una funció**. Grafo (G). Domini o conj. d'existència (D(f)), recorregut o conj. imatge (R(f)).
4) **Gràfica d'una funció**. Corba o gràfica. Coordenades d'un punt: abscissa (x) i ordenada (y). Eixos coordenats: d'abscisses (X) i d'ordenades (Y).
5) **Creixement i acotació en un interval**. Monotonia. Funció constant, estrictament creixent i estrict. decreixent. Intervals de creixement i de decreixement. Funcions creixent i decreixents. Funcions acotades inferiorment i superiorm., cotes inferior ($k_i$) i superior ($k_s$). F. acotada.

## 1.2 OPERACIONS ELEMENTALS AMB FUNCIONS

1) **Operacions amb funcions**. Operació (⊗). Domini comú (A). Igualtat de funcions.
2) **Suma de funcions**. Funció suma (f+g). Propietats, funcions nul·la ($f_0$) i oposada (-f), grup abelià. Diferència de funcions (f-g).
3) **Producte de funcions**. Funció producte (f·g). Propietats, funcions unitat ($f_u$) i recíproca (1/f), anell commutatiu i unitari. Quocient de funcions (f/g).
4) **Producte d'un escalar per una funció**. Escalar (λ), funció producte per un escalar (λ.f). Propietats, espai vectorial.

## 1.3 COMPOSICIÓ DE FUNCIONS

1) **Funció composta**. Funció composta (f•g), condició de composició. Propietats.
2) **Funció inversa**. Funció identitat en un conjunt ($i_A$), funció inversa ($f^{-1}$), condicions d'existència. Regla pel càlcul de la inversa. Propietats.
3) **Representació de funcions compostes**. Translació, homotècia, oposició i valor absolut.

# c) CONCEPTES I EXEMPLES

## 1.1 CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS

**1.1.1 FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL.** En les diferents branques de la ciència ens trobem sovint amb certes relacions entre algunes magnituds. És a dir, hi ha una dependència entre alguns conceptes mesurables que es pot expressar numèricament.

D'aquesta *relació de dependència*, en direm *funció*. En general, simbolitzarem les funcions per les lletres f, g i h, i les magnituds, o *variables*, per x, y, z i t. Així, si posem $z=f(x, y)$, voldrà dir que la variable z depèn tant de la x com de la y.

*Exemple 1.* En l'estudi dels gasos perfectes, és coneguda la relació $P.V/T=k$, on P és la pressió, V el volum, T la temperatura (absoluta) i k una constant. D'aquí es dedueix que $P=k.T/V$ i, físicament, diem que la pressió és directament proporcional a la temperatura i inversament proporcional al volum.

Matemàticament, direm que la pressió és funció de la temperatura i del volum. Ho podem escriure com a $P=f(T, V)$.

També pot donar-se el cas que una nova variable, t, depengui de x i de y, $t=g(x, y)$, i que es vulgui fer un estudi simultani de les dues funcions. Podríem posar $(z, t)=(f(x, y), g(x, y))$, o bé $(z, t)=h(x, y)$. Ls funcions d'aquests tipus les anomenarem *funcions vectorials*, ja que les variables independent (x, y) i dependent (z, t) són vectors. Com que els vectors són de $R^2$, ho indicarem com a $h: R^2 \rightarrow R^2$.

Com a cas particular, les funcions del tipus $z=f(x, y)$, on els valors de la variable independent s'expressen per un vector i els valors de la dependent per un nombre real, en podríem dir funcions reals de variable vectorial, encara que en direm *funcions de varies variables*. En farem l'estudi més endavant.

*Exemple 2.* La funció $P=f(T, V)$ és una funció de dues variables. Si suposem també que la densitat del gas, D, depèn de la temperatura i el volum, $D=g(T, V)$, podem escriure en una mateixa expressió les dues funcions, $(P, D)=(f(T, V), g(T, V))$, o més simplement, $(P, D)=h(T, V)$. Aquesta funció és un exemple de funció vectorial de variable vectorial: el vector (P, D) depèn del vector (T, V).

Particularitzarem en aquest capítol la nostra anàlisi en les funcions $f: R \rightarrow R$, que tenen una variable independent i una variable dependent. Aquestes funcions s'anomenen *funcions reals de variable real*, encara que en direm simplement funcions. El *conjunt de les funcions* $f: R \rightarrow R$ el simbolitzarem per $\mathcal{F}$.

Si la funció és del tipus $y=f(x)$, direm que és donada en *forma explícita*, així indicarem que la *variable dependent* y està aïllada en el primer membre i que en el segon hi ha una expressió en la *variable independent* x. La y és l'*element imatge* i la x l'*element original*.

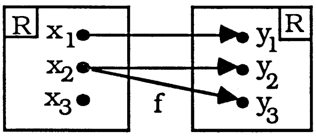
Si no es presenta la variable independent aïllada i tenim la funció escrita com a $F(x, y)=0$, en direm *forma implícita* de la funció.

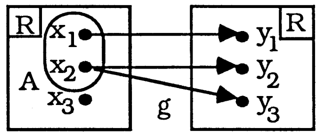
*Exemple 3.* Sabem que la funció $P=f(T, V)$ indica la relació $P=k.T/V$. Veiem que és una funció de dues variables independents, però si fem que la temperatura romangui sempre constant, podrem escriure $P=(k.T)/V=K/V$, on $K=k.T$ és una nova constant.

La funció obtinguda $P=K/V$ és una funció real de variable real, $P=f(V)$, i està escrita en forma explícita, ja que la variable dependent P està aïllada. Si en lloc de $P=K/V$ poséssim $P.V=K$ (o també $P.V-K=0$), diríem que està escrita en forma implícita.

**1.1.2 FUNCIONS UNIFORME I MULTIFORME.** Si $f$: R→R és una funció real de variable real, la podem considerar com una *correspondència* definida en el conjunt dels nombres reals. Recordem, a més, que una correspondència es diu *aplicació* si a cada element del *conjunt inicial* li correspon un sol element del *conjunt final.*

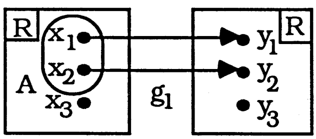
En la figura següent, on representem només tres elements del conjunt R, la funció f no és cap aplicació per dos motius: $x_3$ no té imatge i a $x_2$ li corresponen dues imatges,

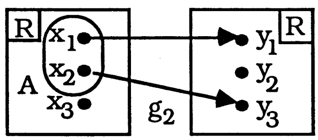



Podem resoldre la primera dificultat restringint el conjunt inicial R al subconjunt $A=\{x_1, x_2\}$. Amb aquest procés de *restricció d'una funció*, obtenim una nova funció g: A→R, que anomenem *funció restringida*, i que també podríem escriure com a $f_A$.

La funció g continua essent una correspondència que no és aplicació, ja que l'element $x_2$ té dues imatges. Pel fet que g té elements amb més d'una imatge, en direm *funció multiforme* i, evidentment, no és aplicació. Si descomponem la funció g en dues funcions $g_1$ i $g_2$ on $g_1(x_2)=y_2$ i $g_2(x_2)=y_3$, tal com indiquem a la figura:




tenim aleshores que les funcions $g_1$ i $g_2$ són aplicacions. Les anomenem *branques de la funció multiforme.* Si una funció $f_A$ és aplicació en direm *funció uniforme,* ja que cada element de A tindrà una sola imatge.

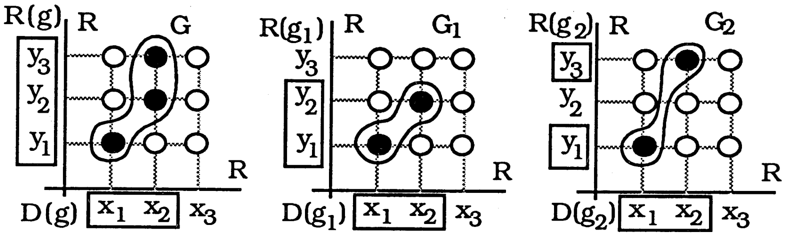
*Exemple 4.* Donada la funció $y=x^2$, com que per a cada valor de x li correspon un sol valor de la y, és una aplicació o funció uniforme.

En canvi, a partir de la funció implícita $y^2-x=0$ tenim $y=\pm\sqrt{x}$. Veiem que és una funció multiforme: no és aplicació. Si restringim el conjunt inicial al dels reals no nuls, $A=(0,+\infty)$, podem descompondre la funció en dues branques $y=+\sqrt{x}$ i $y=-\sqrt{x}$.

**1.1.3 DOMINI I RECORREGUT D'UNA FUNCIÓ.** En l'Àlgebra moderna vam estudiar el grafo associat a una correspondència. Donada la correspondència g: R→R de l'apartat anterior, on $g(x_1)=y_1$, $g(x_2)=y_2$ i també $g(x_2)=y_3$, podem apuntar el seu grafo G com el conjunt de parelles del conjunt producte $R \times R=R^2$ de tal manera que el primer terme és l'element original x i el segon l'element imatge y:

$$G=\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$$

En la figura següent hem dibuixat el grafo G de la correspondència o funció multiforme g, conjuntament amb els grafos $G_1$ i $G_2$ de les funcions uniformes $g_1$ i $g_2$, que són les dues branques de g:




Observem que, si una funció és multiforme, hi ha alguna recta vertical que talla el grafo en dos o més punts, mentre que si és uniforme només la talla com a màxim en un sol punt.

Donada una funció f, anomenem *domini* (o *conjunt d'existència*), i el simbolitzem per D(f), el conjunt format per tots els elements originals que tenen imatge.

Anomenem *recorregut* (o *conjunt imatge*), i el simbolitzem per R(f), el conjunt dels elements del conjunt final que són imatge d'algun element del conjunt inicial.

*Exemple 5.* En la funció g, definida pel grafo anterior G, veiem que els elements originals són $x_1$ i $x_2$ ($x_3$ no té imatge). Per tant, el seu domini és $D(g)=\{x_1, x_2\}$. El mateix domini tenen les funcions $g_1$ i $g_2$.

El recorregut és $R(g)=\{y_1, y_2, y_3\}$, ja que tots tres són elements imatge. Per a les altres dues funcions $g_1$ i $g_2$, tenim $R(g_1)=\{y_1, y_2\}$ i $R(g_2)=\{y_1, y_3\}$.

**1.1.4 GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ.** En general, les funcions f: R→R que estudiarem estan formades per un nombre infinit de punts i, així, el seu grafo G no està format per punts aïllats, sinó que determinen una *corba* que anomenem *gràfica de la funció.*

Podrem escriure el grafo com a $G=\{(x, y)\in R^2 \ / \ x\in D(f) \ \wedge \ y=f(x)\}$. Les parelles (x, y) seran en realitat els punts de la funció i les anomenem *coordenades del punt.* A la x, li diem *abscissa* i a la y, *ordenada.*

A més, els dos conjunts R i R que formen el producte cartesià $R^2$ (les rectes horitzontal i vertical) on s'ha definit el grafo, en direm *eixos coordenats*: l'horitzontal és l'*eix d'abscisses* o eix X i el vertical, l'*eix d'ordenades* o eix Y.

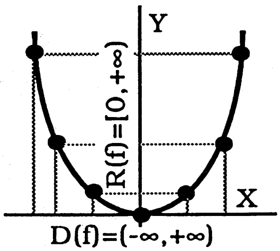
Per dibuixar aproximadament la corba, busquem la imatge d'un nombre finit de punts que constitueixen, per tant, un subconjunt del grafo. Amb aquest subconjunt de parells de $R^2$, construïm una *taula de valors* de la funció.

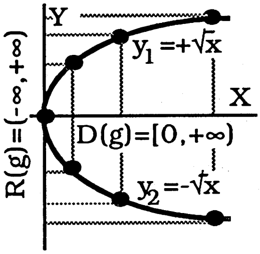
*Exemple 6.* Siguin les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=\sqrt{x}$. Donant valors a la x podem formar unes petites taules de valors:

| x | 0 | ±1 | ±2 | ±3... |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 1 | 4 | 9... |

| x | 0 | 1 | 4 | 9... |
|---|---|---|---|---|
| g(x) | 0 | ±1 | ±2 | ±3... |

Dibuixem aquests punts en el pla coordenat i podrem construir les gràfiques de les funcions:




La primera funció, una paràbola d'eix vertical, és una funció uniforme, ja que tota recta vertical talla la corba en un sol punt. Observem, a més, que no és una aplicació exhaustiva perquè podem trobar rectes horitzontals que no tallen la corba (les que estan per sota de l'eix X), i tampoc no és una aplicació injectiva, ja que hi ha rectes horitzontals que tallen la corba en dos punts.

La segona funció, una paràbola d'eix horitzontal, no és funció uniforme (hi ha rectes verticals que tallen la corba en dos punts) i en diem funció multiforme, està composta per dues branques: una al primer quadrant i l'altra al quart.

En cada gràfica també hem assenyalat el domini i el recorregut, on el primer es defineix en l'eix X i el segon en l'eix Y.

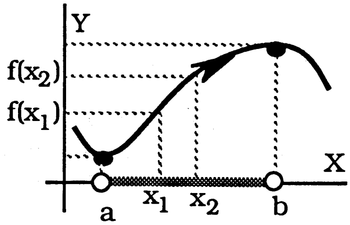
**1.1.5 CREIXEMENT I ACOTACIÓ EN UN INTERVAL.** Sigui la funció uniforme $y=f(x)$, que, per tant, tindrà una sola imatge per a cada element del seu domini D(f), i considerem un interval (a, b) contingut en el seu domini. Estudiarem la *monotonia de la funció*, és a dir, si es tracta d'una funció constant, creixent o decreixent en aquest interval:

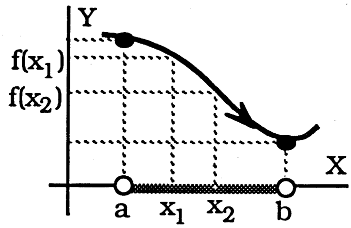
FUNCIÓ CONSTANT. Direm que $y=f(x)$ és una *funció constant* en l'interval (a, b) si per a dos elements qualssevol d'aquest interval, $x_1$ i $x_2$, es verifica $f(x_1)=f(x_2)$. És clar que la seva gràfica és una recta horitzontal.

FUNCIÓ ESTRICTAMENT CREIXENT. Direm que $y=f(x)$ és una *funció estrictament creixent* en l'interval (a, b) si per a dos elements qualssevol $x_1$ i $x_2$, on $x_1<x_2$, d'aquest interval, es verifica que $f(x_1)<f(x_2)$.

FUNCIÓ ESTRICTAMENT DECREIXENT. De manera similar, direm que $y=f(x)$ és una *funció estrictament decreixent* en l'interval (a, b) si per a dos elements qualssevol $x_1$ i $x_2$, on $x_1<x_2$, d'aquest interval, es verifica que $f(x_1)>f(x_2)$.

Fem un esquema d'aquestes dues funcions per comprendre millor la definició:




Observem en la primera que, perquè una funció sigui estrictament creixent, voldrà dir que en augmentar el valor de la x, augmenta també el de la seva imatge f(x). En la funció estrictament decreixent, en augmentar el valor de la x, disminueix el de la imatge f(x).

De l'interval en què la funció és estrictament creixent, en direm *interval de creixement*. Anàlogament, l'*interval de decreixement* és l'interval en què la funció és estrictament decreixent.

*Exemple 7.* La funció $y=x^2$, dibuixada en l'exemple anterior com una paràbola vertical, té per interval de creixement el $(0, +\infty)$ i per interval de decreixement el $(-\infty, 0)$.

Per poder parlar de creixement o decreixement en la funció multiforme $y=\sqrt{x}$, representada per una paràbola horitzontal, haurem de descompondre-la primer en les seves dues branques $y=+\sqrt{x}$ i $y=-\sqrt{x}$. La primera branca és estrictament creixent en l'interval $(0, +\infty)$, mentre que la segona és estrictament decreixent en el mateix interval.

En un sentit més ampli, direm que una funció $y=f(x)$ és una *funció creixent* (o *monòtona creixent*) en un interval $(a, b)$, si per dos elements $x_1$, $x_2$ qualssevol d'aquest interval, on $x_1<x_2$, es verifica que $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Anàlogament, direm que $y=f(x)$ és una *funció decreixent* (o *monòtona decreixent*) en un interval $(a, b)$, si per dos elements $x_1$, $x_2$ qualssevol d'aquest interval, on $x_1<x_2$, es verifica que $f(x_1)\geq f(x_2)$.

*Exemple 8.* En la funció $y=f(x)$ definida en $(0, 10)$ per intervals per $y=(x/2)^3$ si $x\leq 4$, $y=8$ si $4<x<8$ i $y=-48+15x-x^2$ si $x>8$, dibuixada a la dreta, tenim els següents intervals de monotonia:

Estrictament creixent: $(0, 4)$

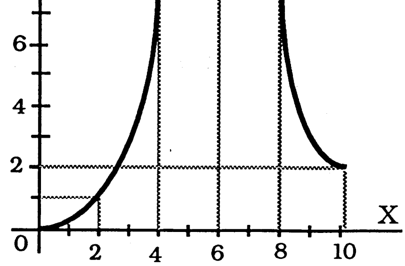
Constant: $(4, 8)$

Estrictament decreixent: $(8, 10)$

I en un sentit ampli, tenim:

Mon. creixent: $(0, 8)$

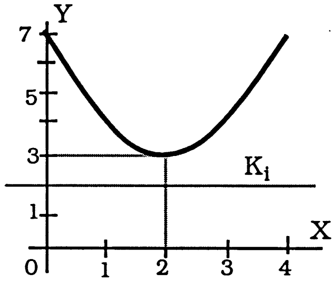
Mon. decreixent: $(4, 10)$.

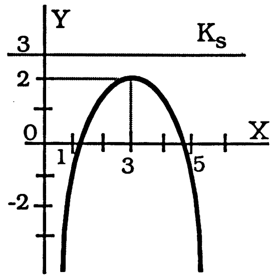


A continuació definim el concepte de *funció acotada* (o també *funció afitada*). Direm que una funció $y=f(x)$ és una *funció acotada inferiorment* en un interval (a, b) si existeix un nombre real $k_i$, anomenat *cota inferior*, tal que les imatges dels elements de l'interval són sempre superiors a aquesta cota. És a dir, si $a<x<b$ es verifica que $f(x)\geq k_i$.

Anàlogament, $y=f(x)$ és una *funció acotada superiorment* en (a, b) si existeix un nombre real $k_s$, anomenat *cota superior*, de manera que la imatge de tot x de l'interval és sempre inferior o igual a aquest valor. Per tant, si $a<x<b$ tenim $f(x)\leq k_s$.

*Exemple 9.* Si construïm taules de valors corresponents a les funcions $f(x)=x^2-4.x+7$ i $g(x)=-x^2+6.x-7$ i en dibuixem la gràfica, veurem que la primera és una funció acotada inferiorment en tot R. Una cota inferior pot ser $k_i=2$. També poden ser cotes inferiors $k_i=1$, $k_i=0$, etc. Veiem que la cota inferior més gran és $k_i=3$. La funció no és acotada superiorment, però si la restringim en l'interval (0, 4), són cotes superiors tots els números reals superiors o iguals a 7.

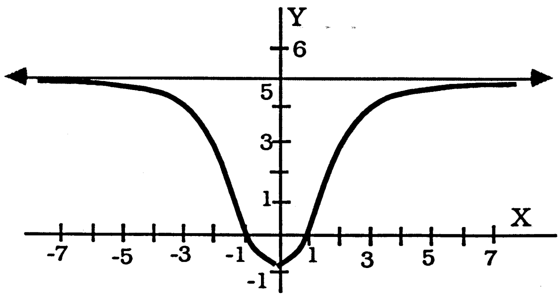



Observem que la segona funció $y=g(x)$ és acotada superiorment en tot R. Les cotes superiors poden ser $k_s=3$, $k_s=4$, etc. on la cota superior més petita és $k_s=2$. No és acotada inferiorment, però restringint l'interval d'estudi al (1, 5), com que $g(1)=g(5)=-2$, observem que són cotes inferiors tots els nombres reals inferiors o iguals a -2.

Quan una funció $y=f(x)$ en un interval (a, b) és a la vegada acotada inferiorment i superiorment, direm simplement que és una *funció acotada* en aquest interval. Reunint les dues condicions anteriors, si $a<x<b$, haurà de passar que $k_i\leq f(x)\leq k_s$.

*Exemple 10.* Les funcions de l'exemple anterior no són acotades en R, però sí que ho és la funció $h(x)=5.(x^2-1)/(x^2+1)$ que té per gràfica:




Són cotes inferiors tots els nombres reals inferiors o iguals a -1 i són cotes superiors tots els nombres reals superiors o iguals a 5.