Guia didàctica de la Matemàtica universitària

CÀLCUL FUNCIONAL: TOPOLOGIA, SUCCESSIONS I CONTINUÏTAT

Carles Cassú, Joan Bonet,
Xavier Bertran, J. Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Càlcul funcional : topologia, successions i continuïtat / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1995. - p. ; cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 10)
ISBN 84-88762-26-7
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1. Anàlisi funcional 2. Anàlisi funcional - Problemes, exercicis, etc.
CIP 517.9 CAL

Primera edició: maig de 1995
Segona edició: febrer de 1996

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la UdG

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

ISBN: 84-88762-26-7
Dipòsit legal: GI-776-95

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG. Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos mòduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra Lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra Moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra Matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria Analítica), mentre que el mòdul de Càlcul Infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul Funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul Diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions Diferencials).

El present volum s'inicia amb un estudi de les nocions de la topologia de R^n, que creiem necessari per analitzar amb un mínim de rigor el concepte de continuïtat d'una funció, que tractem en aquest mateix volum, i el concepte de derivabilitat que analitzem en el volum següent. Així mateix, es realitza un estudi de les successions i sèries numèriques, noció que emprarem també per definir el límit d'una funció en un punt. Malgrat que incloem les definicions rigoroses d'alguns conceptes, hem volgut fugir deliberadament del excessiu rigor per donar prioritat a les idees intuitives que ens poden ajudar a entendre la pràctica dels conceptes.

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, març de 1996

Els autors

Topologia, successions i continuïtat

Capítol 1: **Nocions topològiques**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

DELGADO, M. *Matemáticas: Álgebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad.* P152/168.

THOMAS ARA, L. *Cálculo.* P29/37.

SAMAMED, 0. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P325/336.

GARCÍA CASTRO, F. *Cálculo Infinitesimal, I-1.* P11/30.

RODRÍGUEZ, A. *Matemáticas para economistas, II.* P355-366.

Addicional:

ÁLVAREZ, A. *Ejercicios de Cálculo Infinitesimal.* P19/59.

TEBAR FLORES, E. *Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tomo I.* P5/16.

LIPSCHUTZ, S. *Topología General.* P47/86.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ

1) **Estructura d'espai vectorial.** Vectors ($\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$,...), suma de vectors (+), producte extern (.). Espai vectorial (V), axiomes de definició, grup abelià. Espai vectorial real.
2) **L'espai vectorial R^n.** Producte d'espais vectorials reals (R^n), n-uples ordenades, operacions amb vectors de R^n.
3) **Norma euclidiana**. Longitud d'un vector del pla o de l'espai (L). Norma euclidiana d'un vector ($\|\mathbf{x}\|$), espai vectorial euclidià (E).
4) **L'espai afí euclidià.** Origen de coordenades (O), vector associat, punt extrem (P). Coordenades d'un punt. Espai afí euclidià (R^n). Distància entre dos punts (d(P,Q)).

1.2 PUNTS I CONJUNTS NOTABLES

1) **Boles obertes**. Bola oberta ($B_r(\mathbf{x}_0)$), centre ($\mathbf{x}_0$), radi (r). Bola oberta reduïda ($B'_r(\mathbf{x}_0)$). Casos particulars: recta afí (R), interval obert; pla afí (R^2), cercle obert; espai afí (R^3), esfera oberta.
2) **Punts interiors, frontera i exteriors**. Conjunt (A), relació de definició. Punt interior, conjunt interior (In(A)). Punt frontera, conjunt frontera (Fr(A)). Punt exterior, conjunt exterior (Ex(A)). Propietat de partició.
3) **Punts adherents, d'acumulació i aïllats**. Punt adherent, conjunt adherent (Ad(A)). Punt d'acumulació, conjunt d'acumulació (Ac(A)). Punt aïllat, conjunt aïllat (Aï(A)). Propietat.
4) **Altres conjunts notables**. Definicions de conjunt obert, tancat, acotat i compacte.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ

1.1.1 ESTRUCTURA D'ESPAI VECTORIAL. Sigui V un conjunt, on anomenem *vectors* als seus elements i sigui K un cos commutatiu, on els seus elements els anomenem *escalars*. Considerm a més dues operacions, la primera definida entre els elements de V, que la designem per (+) i li diem *suma de vectors*, i la segona definida entre els elements de K i els de V, que la designem per (.) i li diem *producte extern*.

Amb els dos conjunts de vectors i d'escalars i les dues operacions esmentades de suma de vectors i de producte extern, vam definir en el llibre d'Àlgebra Vectorial l'estructura algebraica d'Espai vectorial.

Recordem, doncs, que la terna (V, +, .) té l'*estructura d'espai vectorial* sobre K si i sols si es verifiquen els deu *axiomes de definició* següents, on cinc són per a l'operació de suma i els altres cinc pel producte.

PER A LA SUMA. El parell (V, +), és a dir el conjunt V amb l'operació de suma de vectors, ha de tenir l'estructura de *grup abelià*. Per tant, s'hauran de complir els axiomes:

(I) *Operació interna.* La suma de dos vectors ha de ser un altre vector.

(II) *Commutativa.* L'ordre dels sumands no altera el resultat de la suma.

(III) *Associativa.* Si s'han de sumar tres vectors, és indiferent l'ordre en que es fan les operacions: la suma dels dos primers amb l'últim és igual a la suma del primer amb la suma dels dos últims.

(IV) *Element neutre.* Hi ha un vector, el **0**, anomenat *vector nul*, tal que si el sumem amb qualsevol altre vector dóna com a resultat aquest mateix vector.

(V) *Element oposat.* Cada vector **u** té un altre vector **-u**, anomenat *vector oposat*, tals que si els sumem donen com a resultat el vector nul.

PEL PRODUCTE EXTERN. Perquè **V**=(V, +, .) sigui un espai vectorial sobre K, s'ha de verificar a més que el producte extern compleixi els cinc axiomes següents:

(VI) *Operació externa.* El producte d'un escalar per un vector és un altre vector.

(VII) *Associativitat escalar.* Si es multiplica un vector per un escalar i el resultat per un altre escalar, seria igual el multiplicar primer els dos escalars i després el resultat multiplicar-ho pel vector.

(VIII) *Distributivitat escalar.* La suma de dos escalars multiplicada per un vector és igual a la suma dels productes de cada escalar pel vector.

(IX) *Distributivitat vectorial.* El producte d'un escalar per la suma de dos vectors és igual a la suma dels productes de l'escalar per cadascun dels vectors.

(X) *Element unitat.* En el cos K hi ha un escalar, e, que en diem *escalar unitat*, que si el multipliquem per qualsevol vector dóna com a resultat el mateix vector.

Si no s'especifica res en contra, a partir d'ara prendrem el cos K=R, i, per tant, la terna **V**=(V, +, .) es considerarà un espai vectorial sobre R i es dirà que és un *espai vectorial real.*

Exemple 1. Comprovarem amb exemples numèrics que els vectors del pla amb les operacions de suma de vectors i producte d'un número real per un vector, $(V_2, +, .)$, compleixen les condicions de la definició d'espai vectorial real. Prenem com a exemple els vectors $\mathbf{v}_1=(4, 5)$, $\mathbf{v}_2=(6, 7)$ i $\mathbf{v}_3=(8, 9)$, on els primers termes representen les respectives components horitzontals, i els segons, les verticals; i els escalars $\alpha=2$ i $\beta=3$.

PER A LA SUMA.

Operació interna: (4, 5)+(6, 7) = (10, 12) vector

Commutativa: (4, 5)+(6, 7) = (6, 7)+(4, 5) = (10, 12)

Associativa: [(4, 5)+(6, 7)]+(8, 9) = (4, 5)+[(6, 7)+(8, 9)] = (18, 21)

Element neutre: (0, 0) , (4, 5)+(0, 0) = (4, 5)

Element oposat de (4, 5): (-4, -5) , (4, 5)+(-4, -5) = (0, 0)

PER AL PRODUCTE.

Operació externa: 2.(4, 5)= (8, 10) vector

Associativitat escalar: 2.[3.(4, 5)] = (2.3).(4, 5) = (24, 30)

Distributivitat escalar: (2+3).(4, 5) = 2.(4, 5)+3.(4, 5) =(20, 25)

Distributivitat vectorial: 2.[(4, 5)+(6, 7)] = 2.(4, 5)+2.(6, 7) =(20, 24)

Element unitat: 1 , 1.(4, 5) = (4, 5).

Els espais vectorials no són únicament els de tipus geomètric, com ara els vectors del pla (R^2) i de l'espai (R^3), sinó que també tenen l'estructura d'espai vectorial, per exemple, els nombres complexos, C; el conjunt P_n dels polinomis de grau més petit o igual que n; el conjunt de les matrius de m files i n columnes, $M_{m\times n}$, etc.

1.1.2 L'ESPAI VECTORIAL R^n. Com a generalització de l'exemple del conjunt de vectors del pla, que constitueixen l'espai vectorial R^2 ja que estan formats per dues components, podem considerar l'*espai vectorial R^n*, definit per:

$$R^n=R\times R\times\ldots^n\ldots\times R$$

on els seus elements són vectors que tenen n *components* i que poden escriure's com a *n-uples ordenades* de nombres reals:

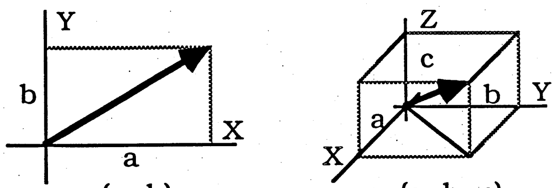
$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Per tal de dotar R^n d'estructura d'espai vectorial, es defineixen les *operacions* de suma de vectors i de producte extern de manera anàloga a com fem amb els vectors del pla: la primera operació, sumant les components corresponents, i la segona, multiplicant el nombre real per cadascuna de les components del vector.

Exemple 2. L'espai vectorial R^4 constarà del conjunt RxRxRxR i de les dues operacions de suma de vectors i de producte extern, que indiquem a partir d'un cas particular:

$$(1, 2, 3, 4) + (6, 7, 8, 9) = (7, 9, 11, 13)$$
$$5.(1, 2, 3, 4) = (5, 10, 15, 20)$$

1.1.3 NORMA EUCLIDIANA. Com indiquem a la figura següent, podem representar gràficament els vectors del pla, fixant un sistema de coordenades, i el mateix podem fer amb els vectors de l'espai, tot i que la representació no és tan senzilla, ja que en aquest cas hem de menester tres dimensions.



$\mathbf{v}$=(a, b) $\mathbf{v}$=(a, b, c)

A partir de la figura observem que podem determinar la *longitud d'un vector*, cosa que podem fer aplicant el teorema de Pitàgores. D'aquesta manera, les longituds dels vectors anteriors seran expressades respectivament per

$$L=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{i} \quad L=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

on considerem òbviament el signe positiu de l'arrel quadrada.

Exemple 3. La longitud del vector de l'espai que té per components 3, 4 i 12, és a dir $\mathbf{v}=(3, 4, 12)$, és

$$L=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

A partir d'aquesta idea, generalitzem el concepte de longitud per a un vector qualsevol de l'espai R^n. Així, anomenem *norma euclidiana* d'un vector de R^n a l'arrel quadrada positiva de la suma dels quadrats de les seves components; és a dir, si el vector és $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ i si la norma euclídea la simbolitzem per $||\mathbf{x}||$, tenim:

$$||\mathbf{x}||=\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+...+(x_n)^2}$$

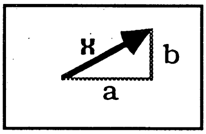
L'espai vectorial R^n, proveït de la norma euclidiana, l'anomenem *espai vectorial euclidià*, i el simbolitzem per E. Per tant, $E=(R^n, ||\mathbf{x}||)$.

1.1.4 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ. Sabem que els vectors del pla i de l'espai es poden representar geomètricament com a "fletxes" que tenen un origen i un extrem. Si fem que tots aquests vectors tinguin com a origen l'origen de coordenades, llavors a cada vector li correspondrà un únic punt, el seu extrem.

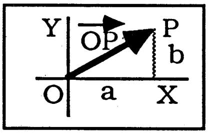
Generalitzant aquesta idea, si tenim l'espai vectorial euclidià $E=(R^n, \|\mathbf{x}\|)$ i també un vector $\mathbf{x}$ de R^n que té com a components $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, aleshores aquest vector el podem interpretar geomètricament com una "fletxa" de l'espai R^n, anomenada *vector associat*, que comença a l'*origen de coordenades*, O(0, 0,..., 0), i acaba al que en diem *punt extrem*, $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. Diem també que $\mathbf{x}=\mathbf{OP}$.

Els números reals $x_1, x_2, ..., x_n$, a més de ser les components del vector $\mathbf{x}$, diem també que representen les *coordenades del punt* extrem P.

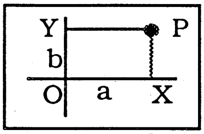
Així, hem partit d'un espai vectorial euclidià, format només per vectors, i a cadascun d'ells li hem fet correspondre el seu vector associat, que té per origen l'origen de coordenades. Després, a cada vector associat li hem fet correspondre el seu punt extrem, de manera que ara obtenim un nou espai que està format només per punts. Aquest nou espai de punts l'anomenem *espai afí euclidià*.



E. vectorial



E. v. associat



Espai afí

En el conjunt R, que podem considerar un espai afí euclidià, es defineix la distància euclidiana entre dos reals x i y com el valor absolut de la seva diferència, $d(x,y)=|x-y|$.

Exemple 4. La distància entre els dos números reals $x=-3$ i $y=+4$ és $d(x,y)=|(-3)-(+4)|=|-7|=7$, com pots comprovar dibuixant aquests dos punts en la recta real i observant que la seva separació és 7 unitats.

A causa de la introducció de la norma euclidiana, podem generalitzar el concepte de *distància entre dos punts* determinats de l'espai afí euclidià $E=(R^n, \|\mathbf{x}\|)$, de coordenades $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$, definint-la com la norma del vector diferència dels vectors associats $\mathbf{x}=\mathbf{OP}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $\mathbf{y}=\mathbf{OQ}=(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Així, la distància de P a Q, que notem d(P, Q), es determina a partir de l'expressió:

$$d(P, Q)= \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2}$$

Exemple 5. La distància entre els punts P(1, 2, 3, 4) i Q(6, 7, 8 ,9) de l'espai afí euclidià R^4, que poden considerar-se com els extrems dels vectors associats $\mathbf{x}=(1, 2, 3, 4)$ i $\mathbf{y}=(6, 7, 8, 9)$, és

$$d(P, Q)= \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(1-6)^2+(2-7)^2+(3-8)^2+(4-9)^2}= \sqrt{100}=10$$

1.2 PUNTS I CONJUNTS NOTABLES

1.2.1 BOLES OBERTES. En tot el que continua ens referirem a un espai afí euclidià $E=R^n$ que, com sabem, és un espai de punts on, utilitzant la norma euclidiana, es pot determinar la distància entre dos punts qualssevol.

Si r és un real positiu i $\mathbf{x}_0$ un punt de R^n, definim el concepte de *bola oberta*, $B_r(\mathbf{x}_0)$, com el conjunt de punts de R^n que tenen una distància inferior a r del punt $\mathbf{x}_0$. A r se li diu *radi* i al $\mathbf{x}_0$, *centre*.

Simbòlicament, podem escriure $B_r(\mathbf{x}_0)=\{\mathbf{x}\in R^n \ / \ d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)<r\}$.

A vegades ens serà més útil que no s'anul·li aquesta distància i parlarem llavors de *bola oberta reduïda*. Si la simbolitzem per $B'_r(\mathbf{x}_0)$, tenim:

$$B'_r(\mathbf{x}_0)=\{\mathbf{x}\in R^n \ / \ 0<d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)<r\}$$

Observem que el centre no pot estar inclòs en una bola oberta reduïda. Per tant,

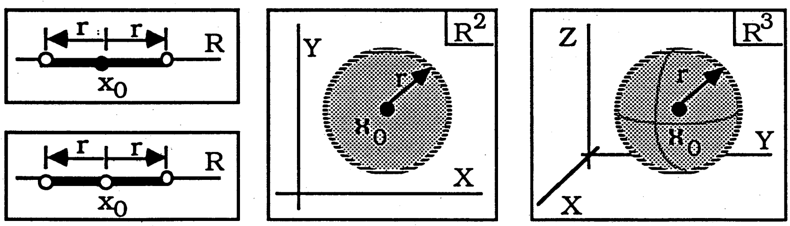
$$B'_r(\mathbf{x}_0)= B_r(\mathbf{x}_0) - \{\mathbf{x}_0\}$$

A la pràctica, i per comprendre-ho millor, analitzem els *casos particulars* de R, R^2 i R^3:

RECTA AFÍ (R). Per als punts de la recta real, una bola oberta és un *interval obert*. Tenim

$$B_r(x_0)=\{x\in R \ / \ |x-x_0|<r\}$$

Quant a la bola oberta reduïda, haurem d'excloure el centre de l'interval, com s'observa a la figura següent.



PLA AFÍ (R^2). Donat el centre $\mathbf{x}_0=(x_0, y_0)$, una bola oberta serà constituïda pels punts de l'interior d'un cercle: *cercle obert*.

$$B_r(\mathbf{x}_0)=\{(x,y)\in R^2 \ / \ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$$

ESPAI AFÍ (R^3). Si el centre és $\mathbf{x}_0=(x_0, y_0, z_0)$, una bola oberta serà formada pels punts de l'interior d'una esfera: *esfera oberta*.

$$B_r(\mathbf{x}_0)=\{(x,y,z)\in R^3 \ / \ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2\}$$

Exemple 6. En R^3 considerem la bola oberta de centre $\mathbf{x}_0=(1, 2, 3)$ i radi r=13. Vindrà determinada per

$$B_r(\mathbf{x}_0)=\{(x,y,z)\in R^3 \ / \ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2<13^2\}$$

Així, els punts de la bola oberta són els que verifiquen la inequació $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2<169$.

Podem veure que el punt $\mathbf{x}_1=(3, 5, 14)$ és un punt de la bola oberta, ja que compleix la inequació:

$$(3-1)^2+(5-2)^2+(14-3)^2 = 4+9+121=134 \text{ i } 134<169$$

En canvi, no ho és el punt $\mathbf{x}_2=(4, 6, 15)$, encara que estigui ben bé sobre la circumferència, perquè el resultat obtingut és igual a 169 i hauria de ser inferior a aquest valor

$$(4-1)^2+(6-2)^2+(15-3)^2 = 9+16+144=169$$

Tampoc ho serà el punt $\mathbf{x}_3=(5, 7, 16)$ ja que

$$(5-1)^2+(7-2)^2+(16-3)^2 = 16+25+169=210$$

1.2.2 PUNTS INTERIORS, FRONTERA I EXTERIORS. En l'espai afí euclidià R^n, considerem un subconjunt A que, si és finit, el podrem determinar indicant tots els seus elements; però que si es tracta d'un conjunt infinit, haurem de donar una *relació de definició* que ens permeti saber si un punt pertany o no al conjunt donat, determinant-lo així per comprensió.

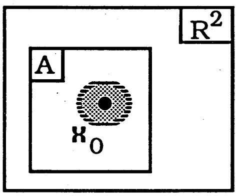
Exemple 7. El conjunt $A=\{(x,y) \ / \ x^2+y^2<1 \text{ i } x\leq 0\}\cup\{(1,0)\}$ és infinit, ja que hi han infinits punts que compleixen la relació de definició.

Per exemple el punt $P_1(0,0)$, el $P_2(1,0)$, el $P_3(-0'5,0'5)$, etc. són punts d'aquest conjunt. En canvi, el punt $P(-1, 1)$ no ho és, ja que no es compleix la relació de definició: $(-1)^2+1^2=2$ i $2>1$.

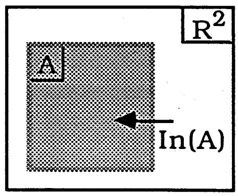
Sigui $\mathbf{x}_0$ un punt de l'espai R^n. Direm que $\mathbf{x}_0$ és un *punt interior* del conjunt A si existeix una bola oberta centrada en el punt que està continguda totalment en el conjunt. Simbòlicament, escrivim

$$\mathbf{x}_0 \text{ p.i. de A} \iff \left[\exists r>0 \ / \ B_r(\mathbf{x}_0)\subseteq A\right]$$

Anomenem *Conjunt interior*, o bé *Interior d'un conjunt*, i el simbolitzem per In(A), el conjunt format per tots els punts interiors d'un conjunt A donat. Ho podem visualitzar amb diagrames de Venn:



Punt interior

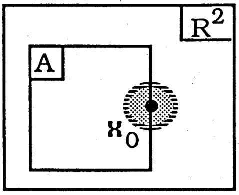


Conjunt interior

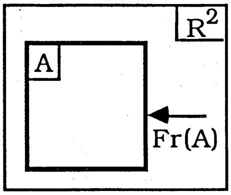
Direm que el punt $\mathbf{x}_0$ és un punt frontera del conjunt A si tota bola oberta, centrada en aquest punt, conté punts que pertanyen al conjunt i punts que no hi pertanyen. Expressat matemàticament, on A' simbolitza el conjunt complementari, tenim

$$\mathbf{x}_0 \text{ p.f. de A} \iff \left[\forall r>0 \Rightarrow B_r(\mathbf{x}_0)\cap A\neq\emptyset \wedge B_r(\mathbf{x}_0)\cap A'\neq\emptyset\right]$$

El *conjunt frontera*, o bé la *frontera d'un conjunt*, simbolitzada per Fr(A), és el conjunt format per tots els seus punts frontera. Gràficament, si ho suposem en R^2, podem visualitzar-ho en la figura següent:



Punt frontera

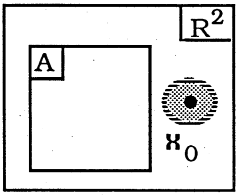


Conjunt frontera

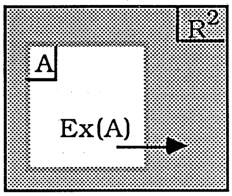
Direm que el punt $\mathbf{x}_0$ és un *punt exterior* del conjunt A si existeix una bola oberta, centrada en aquest punt, que no conté cap punt del conjunt. Simbòlicament

$$\mathbf{x}_0 \text{ p.e. de A} \iff \left[\exists r>0 \ / \ B_r(\mathbf{x}_0) \subseteq A'\right]$$

El conjunt de punts exteriors d'un conjunt l'anomenem *conjunt exterior*, o bé *exterior d'un conjunt*, i el simbolitzem per Ex(A). De manera intuïtiva, tenim els diagrames



Punt exterior



Conjunt exterior

Es pot veure gràficament que els tres conjunts In(A), Fr(A) i Ex(A) formen una *partició* de R^n. És a dir, es compleixen les dues condicions següents:

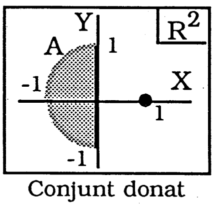
1) La seva unió és tot l'espai:

$$In(A) \cup Fr(A) \cup Ex(A) = R^n$$

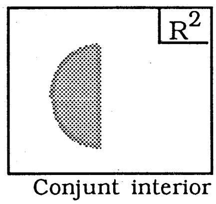
2) Els conjunts són mútuament disjunts:

$$In(A) \cap Fr(A) = \emptyset, \ In(A) \cap Ex(A) = \emptyset \text{ i } Fr(A) \cap Ex(A) = \emptyset.$$

Exemple 8. Sigui el conjunt $A=\{(x,y) \ / \ x^2+y^2<1 \text{ i } x\leq 0\} \cup \{(1,0)\}$ donat en l'exemple anterior. Observem que el conjunt interior és $In(A)=\{(x,y) \ / \ x^2+y^2<1 \text{ i } x<0\}$, ja que tots els punts que ho compleixen són punts interiors del conjunt (es pot construir una bola oberta centrada en el punt i continguda totalment en el conjunt):

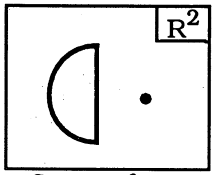


Conjunt donat

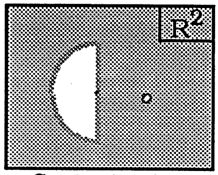


Conjunt interior

Com podem observar en el dibuix següent, el conjunt frontera és $Fr(A)=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2=1 \text{ i } x<0\}\cup\{(0,y)\ /\ -1\leq y\leq 1\}\cup\{(1,0)\}$, mentre que el conjunt exterior, degut a la partició esmentada anteriorment, el podrem expressar com $Ex(A)=R^2-\{In(A)\cup Fr(A)\}$. Gràficament,



Conjunt frontera



Conjunt exterior

1.2.3 PUNTS ADHERENTS, D'ACUMULACIÓ I AÏLLATS. Sigui x_0 un punt de l'espai R^n i A un conjunt donat. Expliquem a continuació diferents tipus de punts i conjunts que posteriorment utilitzarem en l'estudi i l'anàlisi de successions i funcions.

Direm que x_0 és un *punt adherent* del conjunt A si tota bola oberta centrada en el punt conté punts del conjunt. Es complirà, doncs,

$$x_0 \text{ p. ad. de A} \iff \left[\forall r>0 \Rightarrow B_r(x_0)\cap A\neq\emptyset\right]$$

El conjunt de punts adherents d'un conjunt donat l'anomenem *Adherència* de A o *Conjunt adherent* de A i el simbolitzem per Ad(A).

De manera similar, direm que x_0 és un *punt d'acumulació* del conjunt A si tota bola oberta centrada en el punt conté punts del conjunt que són diferents del mateix punt. Es a dir, si tota bola oberta reduïda, centrada en el punt, conté punts de A. Això és

$$x_0 \text{ p. ac. de A} \iff \left[\forall r>0 \Rightarrow B'_r(x_0)\cap A\neq\emptyset\right]$$

Anomenem *Conjunt d'acumulació* de A (o bé *Conjunt derivat* de A) i el simbolitzem per Ac(A), el conjunt de punts d'acumulació de A. És clar que serà un subconjunt del conjunt adherent.

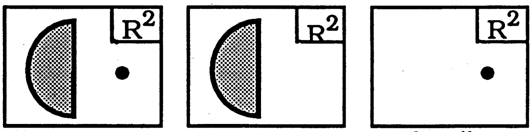
Finalment, direm que $x_0\in A$ és un *punt aïllat* del conjunt A si existeix una bola oberta centrada en el punt x_0 que no té cap altre punt de A tret de x_0. Expressat en forma matemàtica:

$$x_0 \text{ p. aïll. de A} \iff \left[\exists r>0\ /\ B_r(x_0)\cap A=\{x_0\}\right]$$

El conjunt de punts aïllats d'un conjunt és el *Conjunt aïllat* de A, que simbolitzem per Aï(A). Notem que també serà un subconjunt del conjunt adherent.

A més, observem que es verifica la *propietat* Ad(A)=Ac(A)∪Aï(A); és a dir, tot punt adherent és d'acumulació o aïllat.

Exemple 9. Amb el conjunt $A=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2<1$ i $x\leq 0\}\cup\{(1,0)\}$, observem que el seu conjunt adherent és $Ad(A)=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2\leq 1$ i $x\leq 0\}\cup\{1,0\}$, com veiem en la primera de les tres figures següents,

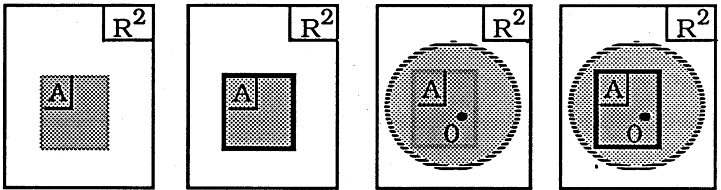


C. adherent C. acumulació C. aïllat

Per trobar el conjunt d'acumulació fem servir la definició, tenint en compte que hem d'emprar boles reduïdes, amb la qual cosa ens quedarà $Ac(A)=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2\leq 1$ i $x\leq 0\}$, ja que el punt (1,0) no és un punt d'acumulació. Pel que fa al conjunt aïllat de A, veiem que en aquest exemple ens queda reduït a un únic punt, $Aï(A)=\{(1,0)\}$.

Observem que es compleix: $Ad(A)=Ac(A)\cup Aï(A)$.

1.2.4 ALTRES CONJUNTS NOTABLES. Per acabar aquest estudi elemental de topologia, definim els conceptes de conjunts oberts, tancats, acotats i compactes.



C. obert C. tancat C. acotat C. compacte

Conjunt obert. És aquell conjunt on tots els seus punts són interiors. Per tant, haurà de passar que $In(A)=A$.

Conjunt tancat. Es diu així d'un conjunt on tots els seus punts són adherents. En conseqüència, $Ad(A)=A$.

Conjunt acotat. És un conjunt que pot ser contingut en una bola oberta de radi finit.

Conjunt compacte. Un conjunt s'anomena compacte si és a la vegada tancat i acotat.

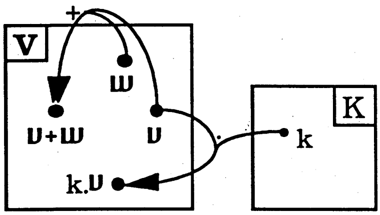
Exemple 10. Pel conjunt estudiat $A=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2<1$ i $x\leq 0\}\cup\{(1,0)\}$ deduïm dels exemples anteriors que no és obert, ja que $In(A)\neq A$. Tampoc no és tancat, perquè $Ad(A)\neq A$. Aquí veiem que els conceptes de conjunt obert i tancat no són contraris... que no sigui obert no vol pas dir que sigui tancat!

Sí que es tracta d'un conjunt acotat, ja que es pot construir, per exemple, una bola oberta centrada en l'origen i de radi 2 que contingui totalment al conjunt A. No és compacte, perquè, a més d'acotat, hauria de ser tancat, i no ho és.

En canvi, el conjunt $B=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2\leq 1$ i $x\leq 0\}\cup\{(1,0)\}$ és compacte, ja que, a més de ser acotat, com que és $ad(B)=B$, també és tancat.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Vectors i escalars



Conj. vectors: $\mathbf{V}=\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \ldots\}$
Op. interna en V: (+)

Conjunt escalars: $\mathbf{K}=\{\mathbf{k}, \mathbf{1}, \ldots\}$
Op. externa en K: (.)
Cas particular de treball: **K=R**

Definició d'espai vectorial

Conjunts i operacions: **(V, +, .)** i **K=cos commutatiu**
Axiomes d'un espai vectorial (V,+,.) sobre un cos K:
PER A LA SUMA: **(V,+)=grup abelià**

(I) Operació interna: $\forall \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in V \Rightarrow \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \in V.$

(II) Commutativa: $\forall \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in V \Rightarrow \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1$

(III) Associativa: $\forall \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3 \in V \Rightarrow (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)$

(IV) El. neutre: $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V} \ / \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow \boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}$

(V) El. oposat: $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \ , \ \exists(-\boldsymbol{v}) \in \mathbf{V} \ / \ \boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$

PER AL PRODUCTE: $\forall k,k_1,k_2 \in K \ \wedge \ \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in V$ es verifica

(VI) Operació externa: $\mathbf{k}.\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$

(VII) Associativitat escalar: $\mathbf{k_1}.(\mathbf{k_2}.\boldsymbol{v})=(\mathbf{k_1}.\mathbf{k_2}).\boldsymbol{v}$

(VIII) Distributivitat escalar: $(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}).\boldsymbol{v}=\mathbf{k_1}.\boldsymbol{v} + \mathbf{k_2}.\boldsymbol{v}$

(IX) Distributivitat vectorial: $\mathbf{k}.(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\mathbf{k}.\boldsymbol{v}_1 + \mathbf{k}.\boldsymbol{v}_2$

(X) Element unitat: $\exists \mathbf{e} \in \mathbf{K} \ / \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{e}.\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

Espai vectorial real

Definició: **(V,+,.) sobre R** Element unitat: **e=1**
Nota: **si no s'especifica és V=(V,+, .) sobre R**

Exemple clàssic: **vectors del pla**
Suma: suma vectorial Producte: prod. escalar per vector

L'espai euclidià $\mathbf{R^n}$

E. vectorial: $\mathbf{R^n=R\times R\times \ldots^{n}\ldots \times R}$ $\mathbf{R^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ /\ x_i\in R,\ i=1,\ldots,n\}}$

Vector: $\mathbf{x}$ Components d'un vector: $\mathbf{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$

Norma euclidiana: $\|\mathbf{x}\|=+\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ (Longitud d'un vector)

Espai vectorial euclidià: $\mathbf{E=(R^n,\ \|x\|)}$

L'espai afí associat $\mathbf{R^n}$

Espai vectorial euclidià: $\mathbf{E=(R^n\ ,\ \|x\|)}$ Vector: $\mathbf{x}$

Vector associat: $\mathbf{x=\overrightarrow{OP}}$ on $\mathbf{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$

Coordenades:

Origen: $\mathbf{O(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)}$ Extrem: $\mathbf{P(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$

Distància entre dos punts:

$$\mathbf{d(P,Q)=\|x-y\|}=+\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

Espai afí euclidià: $\mathbf{E=(R^n\ ,\ d(P,Q))}$

Boles obertes

Bola oberta: $\mathbf{B_r(x_0)=\{x\in R^n\ /\ d(x,\ x_0)<r\}}$

Centre: $\mathbf{x_0}$ $(\mathbf{x}_0\in R^n)$ Radi: $\mathbf{r}$ $(r\in R^+)$

Bola oberta reduïda: $\mathbf{B'_r(x_0)=B_r(x_0)-\{x_0\}}$

CASOS PARTICULARS:

RECTA AFÍ (R):   Centre: $\mathbf{x_0=x_0}$

Bola oberta: $\mathbf{B_r(x_0)=\{x\in R\ /\ d(x,x_0)<r\}=\{x\in R\ /\ |x-x_0|<r\}}$

Representació gràfica: **interval obert**

PLA AFÍ (R^2:):   Centre: $\mathbf{x_0=(x_0,y_0)}$

Bola oberta: $\mathbf{B_r(x_0,y_0)=\{(x,y)\in R^2\ /\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}}$

Representació gràfica: **interior d'un cercle**

ESPAI AFÍ (R^3):   Centre: $\mathbf{x_0=(x_0,y_0,z_0)}$

Bola oberta:

$$\mathbf{B_r(x_0,y_0,z_0)=\{(x,y,z)\in R^3\ /\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2\}}$$

Representació gràfica: **interior d'una esfera**

Punts interiors, frontera i exteriors

Espai: $\mathbf{R^n}$ Conjunt: **A** $(A\subseteq R^n)$ Punt: $\mathbf{x_0}$ $(\mathbf{x}_0 \in R^n)$

Punts interiors:

Definició: $\mathbf{x_0}$ **p. i. de A** $\Leftrightarrow [\,\exists r>0 \;/\; \mathbf{B_r(x_0)\subseteq A}\,]$

Interior d'un conjunt: $\mathbf{In(A)=\{x\in R^n \;/\; x=}$**p. i. de A}**

Punts frontera: (A'=conj. complementari de A)

Definició:

$\mathbf{x_0}$ **p. f. de A** $\Leftrightarrow [\forall r>0 \;\Rightarrow\; \mathbf{B_r(x_0)\cap A\neq\emptyset} \;\wedge\; \mathbf{B_r(x_0)\cap A'\neq\emptyset}\,]$

Frontera d'un conjunt: $\mathbf{Fr(A)=\{x\in R^n \;/\; x=}$**p. f. de A}**

Punts exteriors:

Definició: $\mathbf{x_0}$ **p. e. de A** $\Leftrightarrow [\,\exists r>0 \;/\; \mathbf{B_r(x_0)\subseteq A'}\,]$

Exterior d'un conjunt: $\mathbf{Ex(A)=\{x\in R^n \;/\; x=}$**p. e. de A}**

Propietat: **In(A), Fr(A) i Ex(A) formen una partició de $\mathbf{R^n}$:**

(1) $\mathbf{In(A)\cup Fr(A)\cup Ex(A)=R^n}$

(2) $\mathbf{In(A)\cap Fr(A)=\emptyset}$, $\mathbf{In(A)\cap Ex(A)=\emptyset}$ i $\mathbf{Fr(A)\cap Ex(A)=\emptyset}$

Punts adherents, d'acumulació i aïllats

Punts adherents:

Definició: $\mathbf{x_0}$ **p. ad. de A** $\Leftrightarrow [\,\forall r>0 \;\Rightarrow\; \mathbf{B_r(x_0)\cap A\neq\emptyset}\,]$

Conjunt adherent: $\mathbf{Ad(A)=\{x\in R^n \;/\; x=}$**p. ad. de A}**

Punts d'acumulació:

Definició: $\mathbf{x_0}$ **p. ac. de A** $\Leftrightarrow [\,\forall r>0 \;\Rightarrow\; \mathbf{B'_r(x_0)\cap A\neq\emptyset}\,]$

Conjunt d'acumulació: $\mathbf{Ac(A)=\{x\in R^n \;/\; x=}$**p. ac. de A}**

Punts aïllats:

Definició: $\mathbf{x_0}$ **p. aï. de A** $\Leftrightarrow [\,\exists r>0 \;/\; \mathbf{B_r(x_0)\cap A=\{x_0\}}\,]$

Conjunt aïllat: $\mathbf{Aï(A)=\{x\in R^n \;/\; x=}$**p. aï. de A}**

Propietat: **Ad(A)=Ac(A)∪Aï(A)**

Altres conjunts notables

Conjunt: $\mathbf{A\in R^n}$ C. obert: **In(A)=A** C. tancat: **Ad(A)=A**

C. acotat: $\exists r>0 \;/\; \mathbf{A\subseteq B_r(0)}$ C. compacte: **tancat i acotat**

e) PROBLEMES RESOLTS

1.1 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ

Espai vectorial euclidià, norma euclidiana

1. Dos vectors $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ de R^4 verifiquen les igualtats $5.\mathbf{u}_1+2.\mathbf{u}_2=\mathbf{w}_1$ i $7.\mathbf{u}_1+3.\mathbf{u}_2=\mathbf{w}_2$, on $\mathbf{w}_1=(5, -3, -4, 6)$ i $\mathbf{w}_2=(7, -4, -6, 8)$. Calcula els vectors $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$. Si suposem que comencen en l'origen de coordenades, quina serà la distància entre els seus extrems P_1 i P_2?

Solució. Calcularem $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ resolent per la regla de Cramer el sistema format per les seves equacions, on trobarem en primer lloc el determinant dels coeficients

$$\begin{cases} 5.\mathbf{u}_1+2.\mathbf{u}_2=\mathbf{w}_1 \\ 7.\mathbf{u}_1+3.\mathbf{u}_2=\mathbf{w}_2 \end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=15-14=1$$

Determinants de les incògnites:

$$D_1=\begin{vmatrix} \mathbf{w}_1 & 2 \\ \mathbf{w}_2 & 3 \end{vmatrix}=3.\mathbf{w}_1-2.\mathbf{w}_2 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 5 & \mathbf{w}_1 \\ 7 & \mathbf{w}_2 \end{vmatrix}=5.\mathbf{w}_2-7.\mathbf{w}_1$$

Com que $\mathbf{u}_1=D_1/D$ i $\mathbf{u}_2=D_2/D$ i com que $D=1$, obtindrem

$$\mathbf{u}_1=3.\mathbf{w}_1-2.\mathbf{w}_2 \qquad \mathbf{u}_2=5.\mathbf{w}_2-7.\mathbf{w}_1$$

Substituint per les seves components, ens queda

$$\mathbf{u}_1=3.(5, -3, -4, 6)-2.(7, -4, -6, 8) \qquad \boxed{\mathbf{u}_1=(1, -1, 0, 2)}$$

$$\mathbf{u}_2=5.(7, -4, -6, 8)-7.(5, -3, -4, 6) \qquad \boxed{\mathbf{u}_2=(0, 1, -2, -2)}$$

A aquests dos vectors de l'espai vectorial els correspondran en l'espai afí corresponent els seus extrems respectius

$$P_1(1, -1, 0, 2) \quad \text{i} \quad P_2(0, 1, -2, -2)$$

La distància entre P_1 i P_2 serà

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(0-1)^2+(1+1)^2+(-2-0)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{1+4+4+16}=\boxed{5}$$

2 Una matriu quadrada de tercer ordre, $A_{3\times3}$, pot considerar-se com un vector de R^9. Calcula les normes de les matrius següents, els termes de les quals tenen les xifres permutades:

$$A=\begin{pmatrix} 32 & 33 & 39 \\ 62 & 63 & 69 \\ 72 & 73 & 79 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 23 & 33 & 93 \\ 26 & 36 & 96 \\ 27 & 37 & 97 \end{pmatrix}$$

Troba després la norma de la matriu suma i comprova que es verifica la relació $||\varkappa_A+\varkappa_B|| \leq ||\varkappa_A||+||\varkappa_B||$. Finalment, calcula els determinants $|A|$, $|B|$ i $|A+B|$.

Solució. A les matrius donades els fem correspondre els vectors

$$\varkappa_A=(32, 33, 39, 62, 63, 69, 72, 73, 79)$$
$$\varkappa_B=(23, 33, 93, 26, 36, 96, 27, 37, 97)$$

Les seves normes són:

$$||\varkappa_A||= \sqrt{32^2+33^2+39^2+62^2+63^2+69^2+72^2+73^3+79^2} =...= \sqrt{32962}$$
$$||\varkappa_B||= \sqrt{23^2+33^2+93^2+26^2+36^2+96^2+27^2+37^3+97^2} =...= \sqrt{32962}$$

Hem obtingut el mateix valor, que aproximadament és 181'55, i això que havíem permutat totes les xifres!

Calculem ara la suma dels dos vectors matricials

$$\varkappa_A+\varkappa_B=(55, 66, 132, 88, 99, 165, 99, 110, 176)$$

Observem que és múltiple d'11,

$$\varkappa_A+\varkappa_B=11.(5, 6, 12, 8, 9, 15, 9, 10, 16)$$

Com que la norma és una arrel quadrada de sumes de quadrats, es podrà treure també 11 com a factor comú,

$$||\varkappa_A+\varkappa_B||= 11.\sqrt{5^2+6^2+12^2+8^2+9^2+15^2+9^2+10^3+16^2} =...= 11.\sqrt{1012}$$

Com que aquest resultat és aproximadament igual a 349'93, es comprova que $349'93 \leq 181'55+181'55$, és a dir, que «la norma de la suma és més petita o igual que la suma de les normes»:

$$||\varkappa_A+\varkappa_B|| \leq ||\varkappa_A||+||\varkappa_B||.$$

Calculem ara els determinants de les matrius A, B i A+B. Primer els simplificarem, restant columnes $\mathbf{c}_2$-$\mathbf{c}_1$ i $\mathbf{c}_3$-$\mathbf{c}_2$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 32 & 33 & 39 \\ 62 & 63 & 69 \\ 72 & 73 & 79 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32 & 1 & 6 \\ 62 & 1 & 6 \\ 72 & 1 & 6 \end{vmatrix} =0$$

El determinant anterior és nul perquè té dues columnes iguals. Comprova com a exercici que també passa el mateix amb els altres dos. Per tant, t'haurà de quedar $|B|=0$ i $|A+B|=0$.

1.2 PUNTS I CONJUNTS NOTABLES

Boles obertes

3. Una esfera oberta és definida per la inequació de segon grau amb tres incògnites, $x^2+y^2+z^2+2.x-4.y+6.z-2<0$. Calcula el centre i el radi. Donats els punts $P_1(-2, 1, -1)$, $P_2(1, -1, 2)$ i $P_3(-1, 2, 1)$, quins pertanyen a aquesta bola oberta de R^3?

Solució. Sabem que la inequació d'una esfera oberta, $B_r(\varkappa_0)$, és a dir d'una bola oberta de R^3, és expressada per

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2$$

El seu centre és $\varkappa_0=(x_0, y_0, z_0)$, però, per evitar ambigüitats, emprarem una notació més simplificada, on el seu centre serà ara $C(a, b, c)$. Per tant, tenim

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2$$

Desenvolupant els quadrats,

$$(x^2-2.a.x+a^2)+(y^2-2.b.y+b^2)+(z^2-2.c.z+c^2)<r^2$$

Ordenant termes i passant r^2 al primer membre,

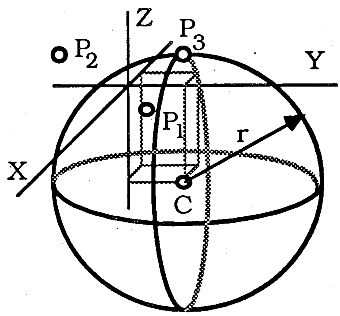
$$x^2+y^2+z^2-2.a.x-2.b.y-2.c.z+a^2+b^2+c^2-r^2<0$$

Com que la inequació donada és $x^2+y^2+z^2+2.x-4.y+6.z-2<0$, si identifiquem els seus termes amb l'anterior, tindrem

$$-2.a=2 \quad , \quad -2.b=-4 \quad , \quad -2.c=6 \quad i \quad a^2+b^2+c^2-r^2=-2$$

De les tres primeres deduïm que $a=-1$, $b=2$ i $c=-3$. Si substituïm en l'última, $(-1)^2+2^2+(-3)^2-r^2=-2$, $1+4+9-r^2=-2$, $r^2=16$, $r=4$. Per tant, el centre i el radi de la bola oberta són:

$$\boxed{C(-1, 2, -3)} \quad i \quad \boxed{r=4}$$



La inequació de la bola oberta es podrà escriure com a

$$\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2<16}$$

Estudiem ara si els punts $P_1(-2, 1, -1)$, $P_2(1, -1, 2)$ i $P_3(-1, 2, 1)$ pertanyen a aquesta esfera oberta.

- PRIMER PUNT: $x=-2$, $y=1$, $z=-1$. Substituint en la inequació,

$$(-2+1)^2+(1-2)^2+(-1+3)^2<16 \quad , \quad 1+1+4<16 \quad , \quad 6<16$$

Com que el punt compleix la inequació, tenim: $\boxed{P_1 \in B_r(C)}$

- SEGON PUNT: $x=1$, $y=-1$, $z=2$. Substituint,

$$(1+1)^2+(-1-2)^2+(2+3)^2<16 \quad , \quad 4+9+25<16 \quad , \quad 38<16$$

Com que és fals, resulta que $\boxed{P_2 \notin B_r(C)}$

- TERCER PUNT: $x=-1$, $y=2$, $z=1$. Substituint,

$$(-1+1)^2+(2-2)^2+(1+3)^2<16 \quad , \quad 0+0+16<16 \quad , \quad 16<16$$

El punt és de la frontera i, per tant, $\boxed{P_3 \notin B_r(C)}$, ja que es tracta d'una bola oberta.

En la figura superior veiem els tres punts, on el P_1 pertany a la bola oberta, ja que la seva distància al centre és inferior al radi, el P_2 pertany a l'exterior de la bola i el P_3 pertany a la frontera.

Punts interiors, frontera i exteriors

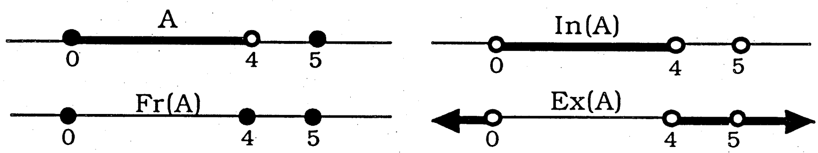
4. Considerem el subconjunt A de R definit per $A=[0,4)\cup\{5\}$. Determina els conjunts de punts interiors, frontera i exteriors, fent una gràfica de cadascun d'ells.

Solució. Representem gràficament el conjunt A donat, tenint en compte que amb els cercles negres s'indica que el punt pertany al conjunt, mentre que amb els blancs s'indica que no hi pertany.

Els punts interiors del conjunt A són aquells pels quals es pot construir una bola oberta (en aquest cas, interval obert) que tingui com a centre aquest punt, de manera que la bola estigui continguda totalment en el conjunt. Evidentment, els punts $x=0$ i $x=5$ no són interiors. Per tant, el *conjunt interior* és:

$$In(A)=\{x\in R\ /\ 0<x<4\} \text{ o també } \boxed{In(A)=(0,\ 4)}$$

Representem-ho gràficament:



Un punt és frontera del conjunt A si qualsevol bola, centrada en aquest punt, conté punts que són del conjunt i altres que no ho són. Els únics punts que compleixen aquesta condició són el 0, 4 i 5. Consegüentment, el *conjunt frontera* és:

$$\boxed{Fr(A)=\{0,\ 4,\ 5\}}$$

Per al conjunt A, un punt exterior és aquell punt pel qual es pot trobar una bola, centrada en ell, que estigui formada totalment per punts que no són del conjunt. Així, el *conjunt exterior* és:

$$\boxed{Ex(A)=(-\infty,\ 0)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)}$$

Fixem-nos que els tres conjunts anteriors, In(A), Fr(A) i Ex(A), formen una partició de la recta real, ja que la seva unió és R i, a més, són disjunts dos a dos.

5. Calcula l'interior, la frontera i l'exterior dels subconjunts dels nombres reals següents: naturals, enters i racionals.

Solució. Per resoldre el problema, ens ajudarà imaginar-nos gràficament els tres conjunts de naturals $N=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, enters $Z=\{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ i racionals $Q=\{a/b\ /\ a \text{ i } b \text{ enters i } b\neq 0\}$, situats en la recta real.

NOMBRES NATURALS. Veiem que $In(N)=\varnothing$, ja que qualsevol bola oberta de centre un natural conté números reals que no són de N.

El conjunt frontera és Fr(N)=N, perquè qualsevol bola oberta de centre un natural conté elements de N (almenys el seu centre) i elements que no són naturals (els reals no naturals que estan a l'entorn del centre).

El conjunt exterior és Ex(N)=N', o sigui el complementari de N, Ex(N)=R-N, degut a la partició entre els conjunts interior, frontera i exterior, $In(N) \cup Fr(N) \cup Ex(N)=R$. Substituint, com l'interior és el buit i la frontera és N, tindrem el conjunt exterior, Ex(N)=R-N=N'.

NOMBRES ENTERS. A partir d'un raonament similar a l'anterior, tenim que els conjunts interior, frontera i exterior són:

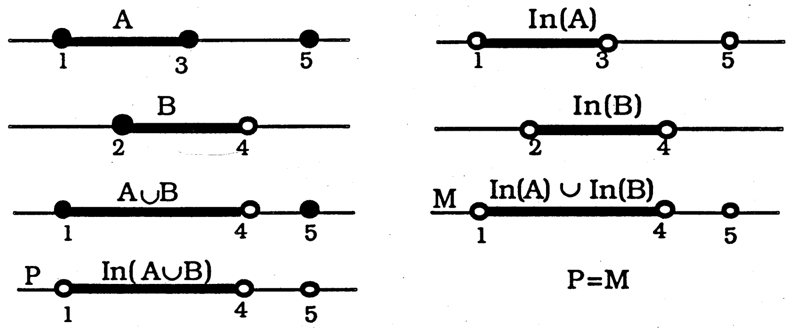
$$In(Z)=\varnothing \quad , \quad Fr(Z)=Z \quad i \quad Ex(Z)=R-Z=Z'$$

NOMBRES RACIONALS. Anàlogament, i tenint en compte la propietat de la recta real de que entre dos nombres racionals s'hi pot trobar sempre un irracional i entre dos irracionals sempre s'hi pot trobar un racional, obtenim el següent resultat:

$$In(Q)=\varnothing \quad , \quad Fr(Q)=R \quad i \quad Ex(Q)=\varnothing.$$

6. Pels subconjunts de R, $A=[1,3]\cup\{5\}$ i $B=[2,4)$, troba els conjunts definits per $M=In(A)\cup In(B)$ i $P=In(A\cup B)$. Quina relació observes? Passaria el mateix si fos $B=[3,4)$?

Solució. Després de representar els conjunts donats veiem immediatament que In(A)=(1, 3), és a dir l'interval obert d'extrems 1 i 3, i també que In(B)=(2, 4).



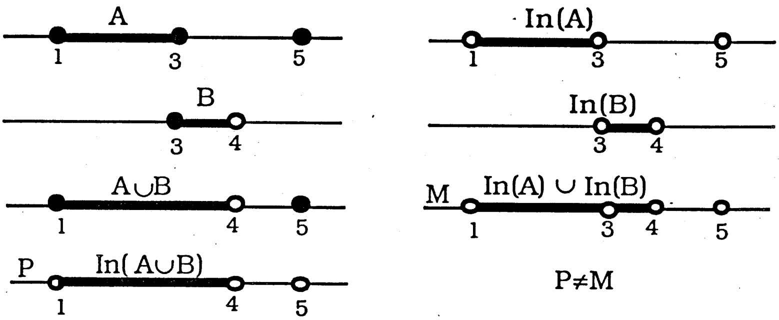
Fent la unió dels interiors, trobem que el conjunt M és:

$$\boxed{M=In(A)\cup In(B)=(1,\ 4)}$$

D'altra banda, si fem primer la unió dels conjunt A i B, tenim $A\cup B=[1,\ 4)\cup\{5\}$, i si trobem el seu interior, obtenim fàcilment el conjunt P que resulta ser igual a M:

$$\boxed{P=In(A\cup B)=(1,\ 4)}$$

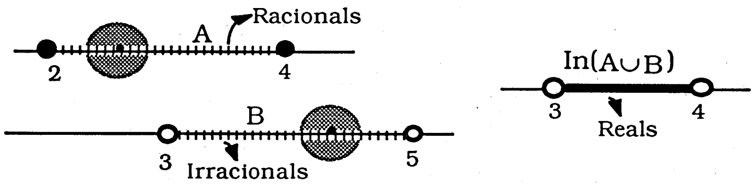
Si prenem el nou conjunt B=[3, 4) obtindrem In(B)=(3, 4). Fem una nova representació gràfica de tots els conjunts,



Ens resulta que M=In(A)∪In(B)=(1, 3)∪(3, 4), o M=(1, 4)-{3} i com que la unió dels conjunts donats és A∪B=[1, 4)∪{5}, el seu interior és P=In(A∪B)=(1, 4). Al verificar-se M=P-{3}, observem que en aquest cas M és un subconjut de P.

7. Si en els reals R considerem el subconjunt de nombres racionals A={x∈Q / 2≤x≤4} i el de irracionals B={x∈I / 3<x<5}, determina els subconjunts: In(A) , In(B) , In(A)∪In(B) i In(A∪B). Seran tots iguals?

Solució. Ja hem comentat que els nombres racionals i els irracionals estan intimament barrejats (entre cada dos racionals, per pròxims que siguin, sempre s'hi pot trobar un irracional, i al revés, entre cada dos irracionals hi ha un racional).



Observem que In(A)=∅, In(B)=∅ i, per tant In(A)∪In(B)=∅, degut a que, per la propietat anterior, una bola oberta centrada en qualsevol punt conté tant punts racionals com irracionals, i així no hi pot haver cap punt interior.

A més, com que A∪B={x∈Q / 2≤x≤4}∪{x∈I / 3<x<5} i al ser els reals la unió dels racionals i dels irracionals, si observem la gràfica veurem que el conjunt unió es pot descomposar en tres conjunts

A∪B={x∈Q / 2≤x≤3}∪[3, 4]∪{x∈I / 4<x<5}

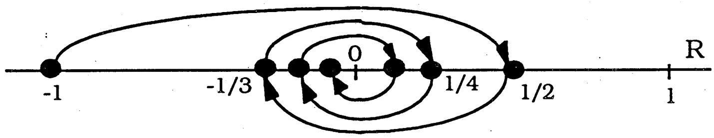
Per tant, el seu interior és In(A∪B)=(3, 4). D'aquesta manera, al no ser buit el conjunt anterior, els quatre conjunts no són iguals.

Punts adherents, d'acumulació i aïllats

8. Considerem el subconjunt $A=\{x \in R \ / \ x=(-1)^n/n, \ n \in N\}$. Quins seran els conjunts d'adherència i d'acumulació de A?

Solució. Com que N={1, 2, 3, ...} és un conjunt format per infinits termes, també el conjunt A estarà format per infinits punts de la recta reals. Donant valors a la n, podem escriure A per extensió:

$$A=\{-1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5, 1/6, ..., 1/10, -1/11, ..., 1/100, ...\}$$



Els valors es fan (en valor absolut) cada vegada més petits i es van acostant al zero. Una bola oberta centrada en x=0, per petit que fos el seu radi, sempre contindria punts del conjunt A.

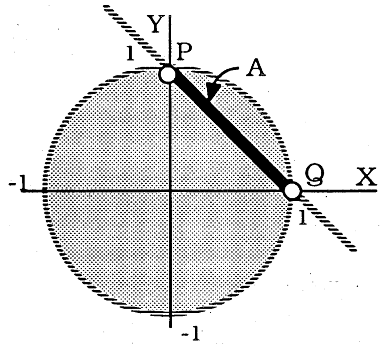
Recordem que un punt d'adherència d'un conjunt és aquell en què qualsevol bola oberta, centrada en ell, conté punts del conjunt. Per tant, el *conjunt d'adherència* és $\boxed{Ad(A)=A\cup\{0\}}$.

Recordem també que un punt d'acumulació d'un conjunt és aquell en què qualsevol bola oberta reduïda, centrada en ell, conté punts del conjunt. Segons això, observem que el *conjunt d'acumulació* està format per un únic punt, l'origen, $\boxed{Ac(A)=\{0\}}$.

9. Sigui el conjunt de R^2 definit per $A=\{(x,y) \ / \ x^2+y^2<1 \ \text{ i } \ x+y=1\}$. Representa'l gràficament i escriu el conjunt d'adherència.

Solució. Aïllem la y en les relacions que defineixen el conjunt A,

$$-\sqrt{1-x^2}<y<+\sqrt{1-x^2} \quad \text{i} \quad y=1-x$$



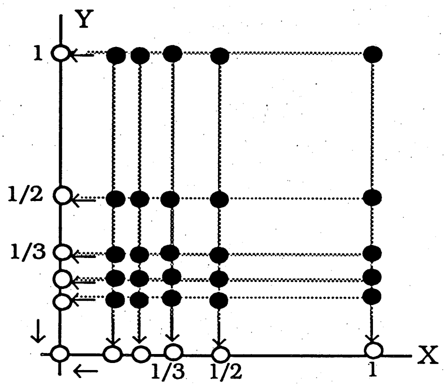
Si donem valors a la x veurem que, d'una banda, són punts interiors del cercle unitat, i, de l'altra, són punts d'una recta com la dibuixada en la figura.

El conjunt A, format pels punts que compleixen ambdues relacions, el trobarem buscant els punts d'intersecció. Així, A és el segment de recta comprès entre els punts P(0, 1) i Q(1, 0).

Com que els punts P i Q també són adherents, el conjunt d'adherència resulta que és $\boxed{Ad(A)=\{(x,y)\in R^2 \ / \ y=1-x \ , \ 0\le x\le 1\}}$

10. Sigui el subconjunt de R^2, $A=\{(1/m,\ 1/n)\ /\ m,n\in N\}$. Donant valors a la m i a la n, fes un dibuix intuïtiu d'aquest conjunt i apunta el conjunt de punts d'acumulació.

Solució. Comencem suposant m=1 i donant valors naturals a la n. Obtenim els punts (1, 1), (1, 1/2), (1, 1/3),..., (1, 1/10),... que és un conjunt d'infinits punts que es va acostant, sense arribar-hi mai, al punt de l'eix X, (1, 0).



Anàlogament, si m=2, ens quedarà el conjunt

(1/2, 1), (1/2, 1/2),

(1/2, 1/3), ...

És un conjunt de punts que es va aproximant al punt (1/2, 0) de l'eix X.

Si procedim de manera similar, anirem obtenint columnes de punts cada vegada més pròximes a l'eix Y. El resultat és el que es mostra a la figura.

Els punts d'acumulació del conjunt A hauran de ser punts de R^2 de manera que totes les boles obertes reduïdes, centrades en ells, tinguin punts del conjunt.

Veiem que només ho poden ser els punts assenyalats en blanc a la figura, que són els punts d'aproximació dels punts dels conjunts donats. (Al capítol següent els estudiarem amb detall i direm que són els *límits* de les *successions* de punts).

En conseqüència, el *conjunt d'acumulació* el podem expressar com a unió de tres conjunts:

$$\boxed{Ac(A)=\{(1/m,\ 0)\ /m\in N\}\cup\{(0,\ 1/n)\ /\ n\in N\}\cup\{(0,\ 0)\}}$$

Hi ha inclòs l'origen de coordenades, ja que també es compleix que qualsevol bola oberta reduïda centrada en l'origen conté punts del conjunt, perquè, com podem veure en el dibuix, a mesura que augmenten els valors de m i n, els punts del conjunt es van "apinyant" cada vegada més cap a l'origen.

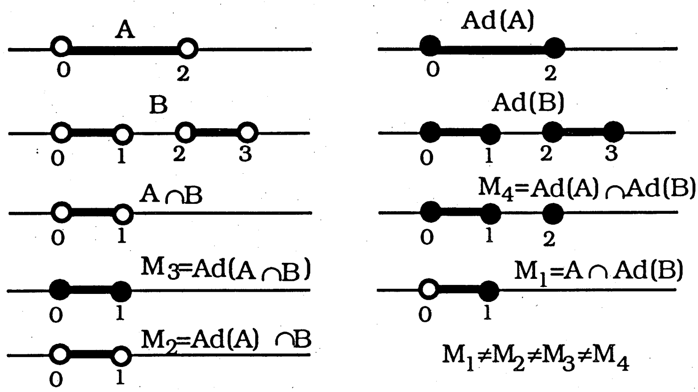
11. En R tenim els subconjunts A=(0,2) i B=(0,1)∪(2,3). Determina els conjunts següents: $M_1=A\cap[Ad(B)]$, $M_2=[Ad(A)]\cap B$, $M_3=Ad(A\cap B)$ i $M_4=[Ad(A)]\cap[Ad(B)]$. Alguns d'aquests quatre conjunts són iguals?

Solució. A la pàgina següent dibuixem els conjunts donats, conjuntament amb totes les interseccions i adherències que hem de trobar.

Tenint en compte que els extrems d'un interval real són sempre punts adherents, directament veiem que les adherències són:

$$Ad(A)=[0,\ 2] \quad \text{i} \quad Ad(B)=[0,\ 1]\cup[2,\ 3]$$

A més, com que $A\cap B=(0,\ 1)$, veiem que $Ad(A\cap B)=[0,\ 1]$.



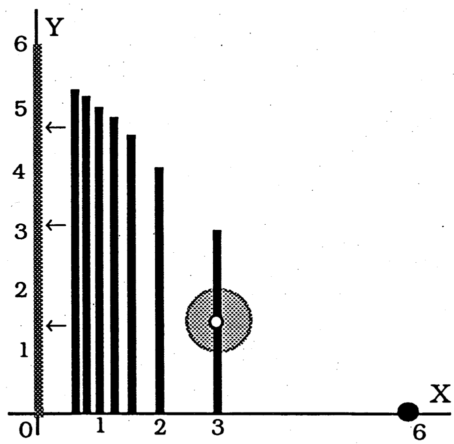
En conseqüència, fent les interseccions adients, obtenim els conjunts següents, que, com veiem, tots són diferents:

$M_1=A\cap[Ad(B)]=(0,\ 1]$ $\qquad$ $M_2=[Ad(A)]\cap B=(0,\ 1)$

$M_3=Ad(A\cap B)=[0,\ 1]$ $\qquad$ $M_4=[Ad(A)]\cap[Ad(B)]=[0,\ 1]\cup\{2\}$

12. Troba l'interior, la frontera, l'adherència, l'acumulació i l'aïllat del conjunt $A=\{(x,y)\in R^2\ /\ x=6/n \text{ i } 0\le y\le 6(n-1)/n\ ,\ n\in N\}$. Quins d'aquests conjunts són iguals?

Solució. Donem valors naturals a la n i fem la gràfica del conjunt, que està formada per segments de recta verticals (amb els extrems inclosos) de diferents longituds.



Veiem que $In(A)=\varnothing$, ja que qualsevol bola oberta centrada en un punt del conjunt conté punts de R^2 que no són del conjunt.

Recordem que un punt és de la frontera si tota bola oberta centrada en ell conté punts del conjunt i punts fora d'ell.

Per tant, evidentment, podem assegurar que el conjunt A forma part de la frontera.

Però també forma part de la frontera el segment de recta de l'eix Y, on s'apropen els segments de recta que formen part del conjunt donat. Per tant,

$$Fr(A)=A\cup\{(0,\ y)\ /\ 0\leq y\leq 6\}$$

Si observem la figura, ens adonarem que el conjunt d'adherència (format pels punts on totes les boles obertes, centrades en ells, tenen punts del conjunt) i el conjunt d'acumulació (format pels punts on totes les boles obertes reduïdes, centrades en ells, tenen punts del conjunt) són iguals al conjunt frontera:

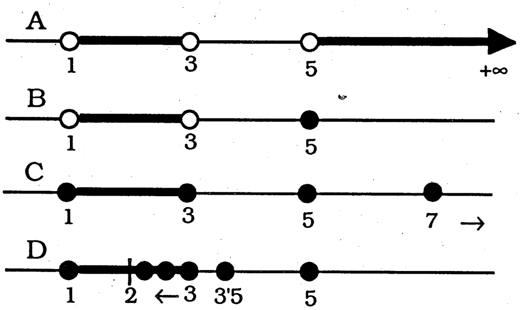
$$Ad(A)=A\cup\{(0,\ y)\ /\ 0\leq y\leq 6\} \quad \text{i} \quad Ac(A)=A\cup\{(0,\ y)\ /\ 0\leq y\leq 6\}$$

Podem escriure en aquest cas particular $\boxed{Fr(A)=Ad(A)=Ac(A)}$.

Altres conjunts notables

13. En R considerem els conjunts $A=(1,\ 3)\cup(5,\ +\infty)$, $B=(1,\ 3)\cup\{5\}$, $C=[1,\ 3]\cup\{2.n+1\}$ i $D=[1,\ 3)\cup\{(2.n+3)/n\}$, on $n\in N$. Estudia si són oberts, tancats, acotats o compactes.

Solució. Dibuixem els quatre conjunts donats (els dos últims donant valors a la n) i fem una anàlisi de cadascun d'ells.



PRIMER CONJUNT. Com que $In(A)=A$, serà un conjunt obert.

Com que l'adherència és $Ad(A)=[1,\ 3]\cup[5,\ +\infty)$, és $Ad(A)\neq A$, i així no és un conjunt tancat.

El conjunt A no es pot incloure dins una bola per gros que sigui el radi. Així, A no és acotat.

Com que no és ni tancat ni tampoc acotat (hauria de ser les dues coses a la vegada), no pot ser compacte.

SEGON CONJUNT. El conjunt B no és obert, ja que $In(B)=(1,\ 3)\neq B$. Tampoc no és tancat, perquè $Ad(B)=[1,\ 3]\cup\{5\}$. Sí que és acotat, ja que es pot incloure en una bola oberta com per exemple $B_6(0)$, és a dir, un interval obert de centre l'origen i radi 6. No podrà ser compacte, perquè no és tancat.

TERCER CONJUNT. Com que $C=[1,\ 3]\cup\{3,\ 5,\ 7,...\}$ no és obert, ja que $In(C)=(1,\ 3)\neq C$, però és tancat ja que $Ad(C)=[1,\ 3]\cup\{5,\ 7,...\}=C$. No és acotat, ja que el conjunt inclou punts cada vegada més grans i, per tant, no es pot incloure en una bola oberta de radi finit. Tampoc no és compacte, ja que no és acotat.

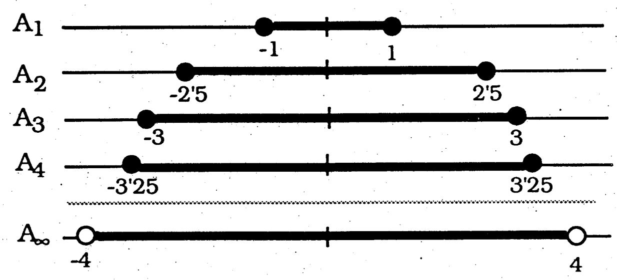
QUART CONJUNT. Quant a l'últim conjunt $D=[1, 3)\cup\{(2.n+3)/n\}$, el podem escriure com a $D=[1, 3)\cup\{5, 3'5, 3, 2'75,...\}$ o també com a $D=[1, 3]\cup\{3'5, 5\}$. Així D no és obert, perquè $In(D)=(1, 3)\neq D$. Sí que és tancat, ja que $Ad(D)=D$. També és acotat, perquè pot incloure's en una bola oberta, per exemple la $B_6(0)$. Per tant, com que és a la vegada tancat i acotat, també és compacte.

En resum,

$\boxed{\text{A és Obert}}$, $\boxed{\text{B és Acotat}}$, $\boxed{\text{C és Tancat}}$ i $\boxed{\text{D és Compacte}}$

14. En R partim de la família A d'intervals tancats definida per a tot $n\in N$ com a $A=\{A_n=[(3-4n)/n\ ,\ (4n-3)/n]\}$. Per a tots els elements d'aquesta família, calcula la seva unió i la seva intersecció, dient si es tracta d'un conjunt obert o tancat.

Solució. Donant valors a la n, dibuixem alguns intervals de la família donada, tot observant que els extrems s'acosten a -4 i a 4. Així ens serà senzill determinar la unió i la intersecció:



A partir del dibuix observem que la unió i la intersecció són

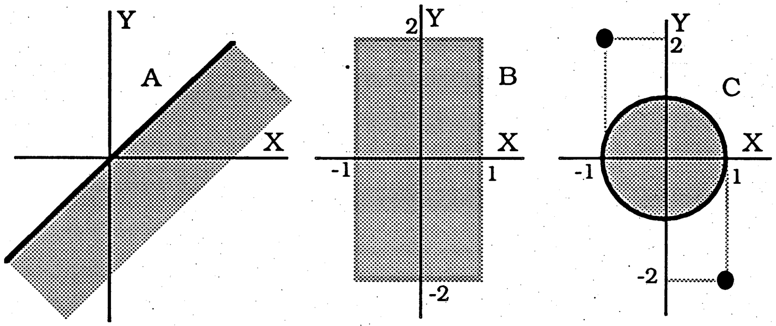
$$\cup A_n=(-4, 4) \quad \text{i} \quad \cap A_n=[-1, 1]$$

Com que es tracta d'un interval obert i un altre de tancat, deduïm que la unió és un conjunt obert i la intersecció un conjunt tancat, ja que $In(-4, 4)=(-4, 4)$ i $Ad[-1, 1]=[-1, 1]$.

15. Siguin els tres conjunts del pla donats per $A=\{(x,y)\ /\ x\geq y\}$, $B=\{(x,y)\ /\ -1<x<1\ ,\ y^2<4\}$ i $C=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2\leq 1\}\cup\{(1,-2),\ (-1,2)\}$. Estudia si són conjunts oberts, tancats, acotats o compactes.

Solució. En la plana següent hem fet la representació gràfica dels tres conjunts, obtingudes mitjançant una sèrie de punts.

PRIMER CONJUNT. És un semiplà on la recta frontera, $y=x$, està inclosa en el conjunt. No és obert perquè $In(A)=\{(x, y) \ / \ x>y\}$, és a dir, el semiplà sense la recta frontera, i es té $In(A)\neq A$. Sí que és tancat, ja que $Ad(A)=A$. Com que el semiplà és il·limitat, no es podrà incloure en cap bola oberta i, així, no és acotat. Per tant, tampoc no és compacte.



SEGÓN CONJUNT. El conjunt B té forma de rectangle, on els costats estan exclosos del conjunt. És obert, perquè $In(B)=B$. No és tancat, ja que $Ad(B)=\{(x,y) \ / \ -1\leq x<1 \ , \ y^2\leq 4\}$, on s'inclouen els costats del rectangle, i així $Ad(B)\neq B$. Sí que és acotat, perquè es pot incloure, per exemple, en la bola oberta $B_3(0)$. Com que no és tancat, tampoc no podrà ser compacte.

TERCER CONJUNT. És un cercle tancat de radi unitat, conjuntament amb els punts aïllats $P_1(-1, 2)$ i $P_2(1, -2)$. Veiem que no és obert, ja que $In(C)=\{(x, y) \ / \ x^2+y^2<1\}\neq C$. Sí que és tancat, ja que $Ad(C)=C$. Sí que és acotat, perquè també es pot incloure en la bola $B_3(0)$. En conseqüència, com que és tancat i acotat, serà compacte.

Resumint, diem que:

$$\boxed{\text{Oberts: }\{B\}} \ , \ \boxed{\text{Tancats: }\{A, C\}}$$

$$\boxed{\text{Acotats: }\{B, C\}} \ \text{ i } \ \boxed{\text{Compactes: }\{C\}}$$

f) PROBLEMES PROPOSATS

1.1 L'ESPAI AFÍ EUCLIDIÀ

L'espai vectorial euclidià, norma euclidiana

16. Un polinomi de grau més petit o igual que 4 pot considerar-se un vector de R^5. Escriu com a vectors els polinomis

$p_1=1'2.x^4-3.x^3+1'5.x^2-1'8.x+1'6$, $p_2=-x^4+1'4.x^3-3'5.x^2+0'2.x+1'8$

$p_3=-0'2.x^4+1'6.x^3+2'2.x^2+0'9.x-3'2$

Calcula després les seves normes euclidianes. Podem assegurar que els tres vectors formen un triangle equilàter de R^5?

Sol. $\mathbf{u}_1=(1'2, -3, 1'5, -1'8, 1'6)$ ... , $\|\mathbf{u}_1\|= \|\mathbf{u}_2\|= \|\mathbf{u}_3\|= 4'3$
No necessàriament.

1.2 PUNTS I CONJUNTS NOTABLES

Boles obertes

17. En el pla afí R^2 tenim tres boles obertes que, respectivament, tenen per centres $C_1(1, -4)$, $C_2(-3, -2)$ i $C_3(-8, 6)$ i radis $r_1=5$, $r_2=9$ i $r_3=7$. Escriu les seves inequacions. Estudia en quins cercles oberts estan continguts els punts $P_1(-5, 9)$ i $P_2(3, -6)$. Quina és la distància entre aquests dos punts?

Sol. B_1: $(x-1)^2+(y+4)^2<5^2$ ... , $P_1\in B_3$, $P_2\in B_1$ i $P_2\in B_2$, d=17.

Punts interiors, exteriors i frontera

18. Per al conjunt de R^2 definit per $A=\{(x,y)\in R^2\ /\ 1\leq x^2+y^2<9\}$, troba els conjunts In(A), Fr(A) i Ex(A). Formen aquests tres conjunts una partició de R^2?

Sol. $In(A)=\{(x,y)\in R^2\ /\ 1<x^2+y^2<9\}$, $Fr(A)=\{(x,y)\in R^2\ /\ x^2+y^2=1$ o $x^2+y^2=9\}$, $Ex(A)=\{(x,y)\in R^2\ /\ x^2+y^2<1$ o $x^2+y^2>9\}$, Sí, $In(A)\cup Fr(A)\cup Ex(A)=R^2$, $In(A)\cap Fr(A)=\varnothing$, $In(A)\cap Ex(A)=\varnothing$ $Fr(A)\cap Ex(A)=\varnothing$.

19. Sigui $A=\{(x,y)\ /\ 0\le x<1\ ,\ 0\le y<1\}$ un subconjunt de R^2. Escriu el seu conjunt frontera com a unió de quatre subconjunts, fent primer la representació gràfica.

Sol. $Fr(A)=\{(0,y)\ /\ 0\le y\le 1\}\cup\{(1,y)\ /\ 0\le y\le 1\}\cup\{(x,0)\ /\ 0\le x\le 1\}\cup$
$\cup\{(x,1)\ /\ 0\le x\le 1\}$.

20. Partint del subconjunt de R definit per $A=\{1/n\ /\ n\in N\}$, calcula el seu interior i la seva frontera.

Sol. $In(A)=\varnothing$, $Fr(A)=A\cup\{0\}$.

21. Siguin els conjunts de R^2, $A=\{(x,y)\ /\ y\le x^2\}$ i $B=\{(x,y)\ /\ y\le 4\}$. Dibuixa'ls i determina els conjunts de punts interiors: In(A), In(B), $In(A\cap B)$ i $In(A)\cap In(B)$. Quina relació observes entre els dos últims conjunts?

Sol. $In(A)=\{(x,y)\ /\ y<x^2\}$, $In(B)=\{(x,y)\ /\ y<4\}$
$In(A\cap B)=In(A)\cap In(B)=\{(x,y)\ /\ y<x^2 \text{ i } y<4\}$.

Punts adherents, d'acumulació i aïllats

22. Per al conjunt $A=[-1,0)\cup\{7\}$ determina, els conjunts d'adherència, acumulació i aïllats.

Sol. $Ad(A)=[-1,0]\cup\{7\}$, $Ac(A)=[-1,0]$, $Aï(A)=\{7\}$.

23. Troba els 6 primers punts del conjunt $A=\{a_n=(-1)^n+(1/n)\}$. Descompon després el conjunt A en dos subconjunts I i P segons la paritat del subíndex n. Quin serà el conjunt d'acumulació de A?

Sol. $A=\{0,\ 3/2,\ -2/3,\ 5/4,\ -4/5,\ 7/6,\ \ldots\}$, $I=\{-1+\ 1/(2n-1)\}$,
$P=\{1+\ 1/(2n)\}$, $A=I\cup P$, $Ac(A)=\{-1,1\}$.

24. Determina el conjunt $B=In[Ad(Ex(A)\cup In(A))]$, si A és el conjunt Q dels racionals. I si A fos l'interval $A=[0,1]$?

Sol. a) $Ex(A)=In(A)=\varnothing$, $B=\varnothing$, b) $Ex(A)\cup In(A)=R-\{0,1\}$, $B=R$.

25. Comprova que tots els conjunts de R de la forma $A=[a,b)\cup\{c\}$, on $a<b<c$, es verifica que A, Ad(A), In(A), Ac(A) i Fr(A), són tots diferents.

Sol. $Ad(A)=[a,b]\cup\{c\}$, $In(A)=(a,b)$, $Ac(A)=[a,b]$, $Fr(A)=\{a,b,c\}$.

26. Sigui $A=\{(1 -1/n , 1 +1/n) / n\in N\}$ un conjunt de R^2. Troba els conjunts d'adherència, acumulació i aïllats. Quina relació hi veus?

Sol. $Ad(A)=A\cup\{(1,1)\}$, $Ac(A)=\{(1,1)\}$, $Aï(A)=A$
$Ad(A)=Ac(A)\cup Aï(A)$.

Altres conjunts notables

27. Sigui el conjunt de R, $A=\{1/n\}\cup\{n^2\}$, on $n\in N$. Comprova que no és obert, ni tancat, ni acotat, ni compacte. Podries dir un exemple senzill d'un conjunt B que ho compleixi tot?

Sol. $B=\emptyset$, B és obert, tancat, acotat i compacte.

28. Considerem el conjunt de R^2, $A=\{(x,y) / y=x+1 , -1\leq x\leq 1\}$. Estudia si es tracta o no d'un conjunt compacte.

Sol. A=Tancat , A=Acotat $\Rightarrow$ A=Compacte.

29. Estudia si el conjunt de R^2, $A=\{(x, 1/x), x\in R^+\}$ és tancat i acotat. Serà compacte? Fes-ne la gràfica.

Sol. A="Branca d'hipèrbola" , tancat, no acotat, no compacte.

30. Donat el conjunt de R, $A=\{x / x=(1/m)+(1/n) , m,n\in N\}\cup\{0\}$, comprova que tots els punts de la forma $x=1/p$, on $p\in N$, pertanyen a aquest conjunt. Estudia si serà compacte.

Sol. $1/p=1/(2p) + 1/(2p)$, A és tancat, acotat i compacte.

Capítol 2: **Successions i sèries**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P167/211, P213/255.

AYRES, J. R. *Fundamentos de Matemáticas Superiores.* P62/72, P161/166.

THOMAS ARA, L. *Cálculo.* P38/55, P242/256.

DÍAZ HERNANDO, J. A. *Álgebra, Geometría y Cálculo. Tomo V.* P43/118, P245/362.

TEBAR FLORES, E. *Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tomo I.* P65/125, P127/186.

RODRÍGUEZ, A. *Matemáticas para economistas, II.* P367/395.

Addicional:

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P337/357, P359/376.

GARCÍA CASTRO, F. *Cálculo Infinitesimal, I-2.* P311/341.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* P280/845.

DEMIDOVICH, B. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* P312/324.

REY PASTOR, J. *Análisis Matemático. Tomo I.* P273/330.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

2.1 SUCCESSIONS NUMÈRIQUES

1) **Successions de números reals.** Terme general (a_n). Monotonia: suc. creixent, decreixent i constant. Acotació: cota inferior (k_i), cota superior (k_s), suc. acotades i divergents.

2) **Operacions amb successions.** Suma, producte, potència (↑), producte extern. Propietats.
3) **Progressions aritmètiques i geomètriques.** Prog. aritmètica (p. a.), diferència (d), fórmules. Prog. geomètrica (p. g.), raó (r), fórmules.

2.2 LÍMITS DE SUCCESSIONS.

1) **Límit d'una successió**. Definicions topològica i clàssica de límit. Suc. de Cauchy, convergents, infinitesimals.
2) **Propietats dels límits**. Propietats operacionals i d'acotació. El nombre d'Euler (e).
3) **Infinitèsims.** Infinitèsims comparables i equivalents. Límits a més i a menys infinit, infinits. Infinits comparables i equivalents. Ordre d'infinitèsims i d'infinits. Indeterminacions.
4) **Càlcul de límits.** Determinacions per divisió, conjugació, pel número e. Criteri de Stolz. Fórmula de Stirling.

2.3 SÈRIES NUMÈRIQUES.

1) **Convergència de sèries**. Successió de sumes parcials, sèrie numèrica, sumatori, suma de la sèrie (Σa_n). Sèries convergents, divergents i oscil·lants. Sèries geomètrica i harmònica.
2) **Criteris de convergència.** Sèries de termes no negatius i de termes positius. Criteris de comparació, Pringsheim, D'Alembert, Raabe, Cauchy, logarítmic, de condensació.
3) **Sèries alternades.** Definició. Criteri de Leibniz. Sèries absolutament convergents i condic. convergents.

2.4 APLICACIONS DE LES SUCCESSIONS I SÈRIES.

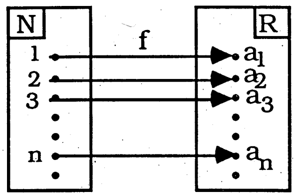
1) **Capitalització composta**. Capitalització composta i continua. Anualitats de capitalització i d'amortització.
2) **Equilibris estable i inestable.** Punts d'equilibri. Model de la teranyina. Equilibris estable i inestable.

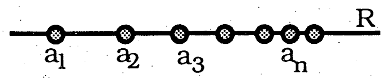
c) CONCEPTES I EXEMPLES

2.1 SUCCESSIONS NUMÈRIQUES

2.1.1 SUCCESSIONS DE NÚMEROS REALS. Anomenarem *successió de números reals* a qualsevol aplicació f del conjunt dels nombres naturals al del reals, $f: N \to R$. Per tant, per a tot natural n existirà una sola imatge real $a_n=f(n)$.

També podrem considerar una successió de números reals com un conjunt infinit i ordenat d'aquestes imatges, anomenades *termes* de la successió. Les successions les simbolitzarem per (a_n), on el terme a_n és el *terme general* de la successió, i les representarem gràficament com a punts de la recta real, $(a_n)=(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$.





Les successions podran ser definides pel seu terme general, expressat en funció de l'*index* n, $a_n=f(n)$, o bé mitjançant una *relació de recurrència* entre els seus termes, que consisteix a determinar el valor d'un terme a partir dels valors dels termes anteriors.

Exemple 11. La successió de terme general $a_n=9-2.n$, té per termes $a_1=9-2.1=7$, $a_2=9-2.2=5$, $a_3=9-2.3=3$, etc. La podem escriure com a $(a_n)=(7, 5, 3, \ldots, 9-2.n, \ldots)$.

D'altra banda, considerem la successió (b_n) que és definida per la relació de recurrència $b_n=1$ si $n \leq 3$ i $b_n=b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3}$ si $n>3$. Els seus termes són $b_1=b_2=b_3=1$, $b_4=1+1+1=3$, $b_5=3+1+1=5$, $b_6=5+3+1=9$, etc. i així podem expressar la successió per $(b_n)=(1, 1, 1, 3, 5, 9, \ldots)$

Analitzem tot seguit el concepte de *monotonia d'una successió.* Direm que una successió (a_n) és *monòtona creixent* si cada terme és més petit o igual que el següent, és a dir, $a_n \leq a_{n+1}$, per a qualsevol natural n.

De manera similar, una successió (a_n) és *monòtona decreixent* si cada terme és més gran o igual que el següent. És a dir, per a tot n, compleix $a_n \geq a_{n+1}$.

Direm que (a_n) és una *successió constant* si tots els seus termes són iguals, és a dir, $a_n=a_{n+1}$, per a tot natural n. Observem que una successió constant és monòtona creixent i monòtona decreixent a la vegada.

Exemple 12. La successió $(a_n)=(7, 5, 3, \ldots)$ de l'exemple anterior és monòtona decreixent, però la $(b_n)=(1, 1, 1, 3, 5, 9, \ldots)$ és una successió monòtona creixent. Una successió constant (c_n) pot ser la de terme general $c_n=2$, que serà $(c_n)=(2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots)$.

Estudiem tot seguit el concepte d'*acotació d'una successió*. Direm que (a_n) és una *successió acotada inferiorment* si existeix un número real k_i, anomenat *cota inferior*, de manera que cada terme de la successió és més gran o igual que aquest valor. És a dir, si $a_n \geq k_i$, $\forall n$.

Anàlogament, direm que (a_n) és una *successió acotada superiorment* si existeix un número real k_s, anomenat *cota superior*, de manera que cada terme de la successió és més petit o igual que aquesta cota. És a dir, per a tot natural n es verifica $a_n \leq k_s$.

Quan una successió (a_n) és a la vegada acotada inferiorment i superiorment direm simplement que és una *successió acotada*. Per tant, existiran cotes inferiors i superiors de manera que cada terme de la successió estarà comprés entre elles, $k_i \leq a_n \leq k_s$. Notem que els termes d'una successió acotada (a_n) constitueixen un conjunt acotat, ja que pot estar contingut en una bola oberta de radi finit, $|a_n| \leq k$.

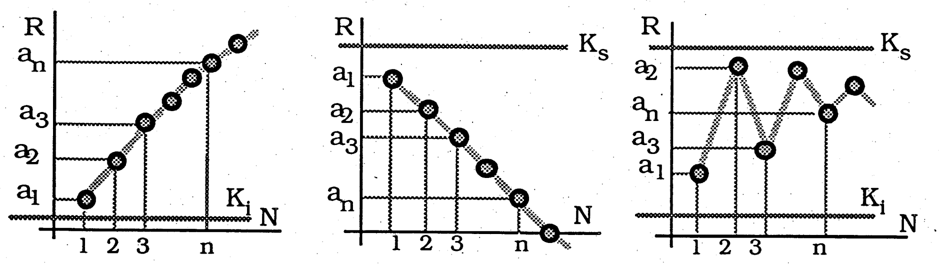
Si una successió és monòtona (creixent o decreixent) a partir d'un terme determinat i no és acotada, en direm *successió divergent*, i els seus termes s'acostaran a més o menys infinit.

Exemple 13. La successió anterior $(a_n)=(7, 5, 3, \ldots)$ està acotada superiorment, i les cotes superiors poden ser $k_s=7$, $k_s=7'3$, $k_s=8$.... En canvi, l'altra successió $(b_n)=(1, 1, 1, 3, 5, 9, \ldots)$ està acotada inferiorment i pot tenir per cotes inferiors $k_i=1$, $k_i=0'4$, $k_i=-1'2$, etc. Es tracta de dues successions divergents a $-\infty$ i a $+\infty$, respectivament.

La successió constant $(c_n)=(2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots)$ és, evidentment, una successió acotada, on, respectivament, $k_i=1$ i $k_s=3$.

Un altre exemple de successió acotada és la de terme general $d_n=(2.n-1)/(n+1)$ o bé $(d_n)=(0'5, 1, 1'25, 1'4, 1'5, \ldots)$. Veiem que pot tenir per cotes inferior i superior $k_i=0$ i $k_s=2$, respectivament.

Com que les successions són aplicacions f: $N \rightarrow R$, les podem dibuixar en un diagrama cartesià. Així veurem el paral·lelisme entre la monotonia i l'acotació de les funcions i de les successions:



La primera successió és monòtona creixent i acotada inferiorment, la segona és monòtona decreixent i acotada superiorment. La tercera no és creixent ni decreixent, però sí que és acotada.

2.1.2 OPERACIONS AMB SUCCESSIONS. Designarem per $S=\{(a_n)\}$ el *conjunt de totes les successions de números reals*. Si considerem dues successions qualssevol, (a_n) i (b_n), podem efectuar amb elles les operacions internes següents:

SUMA. La *suma de dues successions* (a_n) i (b_n) és també una altra successió, que té per terme general a_n+b_n, és a dir, la successió obtinguda sumant terme a terme els termes d'índex igual de les successions inicials. És a dir,

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ \ldots,\ a_n+b_n,\ \ldots)$$

PRODUCTE. El *producte de dues successions* (a_n) i (b_n) és també una altra successió, que té per terme general $a_n \cdot b_n$, és a dir,

$$(a_n)\bullet(b_n)=(a_n \cdot b_n)=(a_1.b_1,\ a_2.b_2,\ a_3.b_3,\ \ldots,\ a_n.b_n,\ \ldots)$$

POTÈNCIA. La *potència de dues successions* (a_n) i (b_n) és també una altra successió, que té per terme general $a_n \uparrow b_n$, obtinguda prenent com a base a_n i com a exponent b_n,

$$(a_n)\uparrow(b_n)=(a_n\uparrow b_n)=(a_1\uparrow b_1,\ a_2\uparrow b_2,\ a_3\uparrow b_3,\ \ldots,\ a_n\uparrow b_n,\ \ldots)$$

Donat un real λ i una successió (a_n), podem efectuar l'operació externa següent:

PRODUCTE EXTERN. El *producte d'un real per una successió* és una altra successió, que té per terme general $\lambda.a_n$, és a dir, la successió obtinguda multiplicant el número per cadascun dels termes de la successió original. És a dir,

$$\lambda.(a_n)=(\lambda.a_n)=(\lambda.a_1,\ \lambda.a_2,\ \lambda.a_3,\ \ldots,\ \lambda.a_n,\ \ldots)$$

Exemple 14. Siguin les dues successions $(a_n)=(7, 5, 3, 1, -1, -3, \ldots)$ i $(b_n)=(1, 1, 1, 3, 5, 9, \ldots)$. Les successions suma i producte són

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)=(7+1,\ 5+1,\ 3+1,\ 1+3,\ -1+5,\ -3+9,\ldots)=(8,\ 6,\ 4,\ 4,\ 4,\ 12,\ \ldots)$$

$$(a_n)\bullet(b_n)=(a_n \cdot b_n)=(7.1,\ 5.1,\ 3.1,\ 1.3,\ -1.5,\ -3.9,\ldots)=(7,\ 5,\ 3,\ 3,\ -5,\ -27,\ \ldots)$$

Amb el real $\lambda=2$ i la successió (a_n), la successió producte extern és

$$2.(a_n)=(2.a_n)=(2.7,\ 2.5,\ 2.3,\ 2.1,\ \ldots)=(14,\ 10,\ 6,\ 2,\ldots)$$

A partir de les *propietats de les operacions amb successions*, que indiquem en l'apartat de formulació matemàtica, tenim que la terna $(S, +, \bullet)$ té l'estructura d'*anell commutatiu* amb element unitat, on l'element neutre de la suma és la *successió nul·la*, $(0)=(0, 0, 0,\ldots)$, i l'element unitat, o element neutre del producte, és la *successió unitat*, $(1)=(1, 1, 1, \ldots)$.

Els elements simètrics de les operacions anteriors de suma i producte són la *successió oposada*, $-(a_n)=(-a_n)=(-a_1, -a_2, -a_3,\ldots)$ i, si existeix, la *successió inversa*, $(a_n)^{-1}=(1/a_n)=(1/a_1, 1/a_2, 1/a_3,\ldots)$.

A partir d'aquí es poden definir dues noves operacions entre successions, la *diferència de successions*, $(a_n)-(b_n)=(a_n)+(-b_n)$, definida com la suma de la primera amb l'oposada de la segona, i, si és possible, el *quocient entre successions*, $(a_n/b_n)=(a_n)\bullet(b_n)^{-1}$, definit com el producte de la primera per la inversa de la segona.

Exemple 15. Per a les successions $(a_n)=(7, 5, 3, 1, -1, -3, ...)$ i $(b_n)=(1, 1, 1, 3, 5, 9, ...)$, la successió diferència i la successió quocient són:

$$(a_n)-(b_n)=(7-1, 5-1, 3-1, 1-3, -1-5, -3-9,...)= (6, 4, 2, -2, -6, -12, ...)$$

$$(a_n)/(b_n)=(7/1, 5/1, 3/1, 1/3, -1/5, -3/9,...)= (7, 5, 3, 1/3, -1/5, -1/3, ...).$$

Amb les operacions de suma i de producte extern, també es pot comprovar que la terna (S, +, .) compleix els axiomes necessaris perquè tingui l'estructura d'un *espai vectorial real.*

2.1.3 PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES I GEOMÈTRIQUES. Són dos casos particulars de successions que tenen molt d'interès en l'estudi de la matemàtica financera. Direm que una successió (a_n) és una *progressió aritmètica* si la *diferència* d entre dos termes consecutius és sempre la mateixa. És a dir, $d=a_{n+1}-a_n$ és constant i, per tant, tindrem $a_2-a_1=d$, $a_3-a_2=d$, $a_4-a_3=d$, etc.

De l'expressió anterior podem deduir que el *terme general*, a_n, pot expressar-se en funció del *primer terme*, a_1, per $a_n=a_1+(n-1).d$.

Si tenim un nombre finit de termes d'una progressió aritmètica, $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$, veiem que entre ells es verifica la *propietat d'equidistància*, on la suma del primer amb l'últim és igual a la del segon amb la del penúltim, igual a la del tercer amb la de l'antepenúltim, etc. En la relació, $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=...$, observem que la suma d'índexs és sempre igual a n+1.

Si tenim en compte aquesta propietat, podem deduir el valor de la *suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica.* Obtindrem $S_n=[(a_1+a_n)/2].n$. Notem que, en el cas que el nombre de termes sigui imparell, l'expressió del claudàtor serà el *terme central* de la progressió aritmètica, $a_c=(a_1+a_n)/2$.

Exemple 16. La successió $(a_n)=(7, 5, 3, 1, -1, -3, ...)$ és una progressió aritmètica (p. a.), ja que la diferència entre dos termes consecutius és sempre la mateixa, 5-7=-2, 3-5=-2, 1-3=-2, etc. Per tant, d=-2.

El terme general és $a_n=a_1+(n-1).d=7+(n-1).(-2)=7-2.n+2=9-2.n$. Així, per exemple, el terme a_{13} és $a_{13}=9-2.13=9-26=-17$. Ho podem comprovar trobant els 13 primers termes:

7 5 3 1 -1 -3 -5 -7 -9 -11 -13 -15 -17

Comprovem la propietat de l'equidistància, $a_1+a_n=7+(-17)=-10$, $a_2+a_{n-1}=5+(-15)=-10$, $a_3+a_{n-2}=3+(-13)=-10$, etc.

Si volem sumar aquests 13 termes, aplicarem la fórmula corresponent, $S_{13}=[(a_1+a_{13})/2].13=[(7-17)/2].13=-5.13=-65$.

Podem comprovar que, efectivament, la suma dóna aquest valor i també que el terme central és $a_c=(a_1+a_{13})/2=-5$.

De manera similar, direm que una successió (a_n) és una *progressió geomètrica* si el quocient o *raó* r entre dos termes consecutius és sempre el mateix valor. És a dir, $r=a_{n+1}/a_n$ és constant i, per tant, tindrem $a_2/a_1=r$, $a_3/a_2=r$, $a_4/a_3=r$, etc.

El *terme general*, a_n, pot expressar-se en funció del *primer terme*, a_1, per $a_n=a_1.r^{n-1}$. Si tenim un nombre finit de termes d'una progressió geomètrica, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, veiem que es compleix també la *propietat d'equidistància*, on el producte del primer terme amb l'últim és igual al producte del segon amb el penúltim, etc. Obtindrem així la relació, $a_1.a_n=a_2.a_{n-1}=a_3.a_{n-2}=...$ Igual que en les progressions aritmètiques, en aquesta progressió la suma d'índexs de cada membre és sempre igual a n+1.

A partir d'aquí podem deduir el valor del *producte dels n primers termes d'una progressió geomètrica*. Obtindrem $P_n=[\sqrt{a_1.a_n}]^n$. Novament, en el cas que el nombre de termes sigui imparell, l'expressió del claudàtor serà el *terme central* de la progressió geomètrica, $a_c=\sqrt{a_1.a_n}$.

Es pot deduir també la fórmula de la *suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica*, $S_n=(a_n.r-a_1)/(r-1)$. Si la raó és, en valor absolut, més petita que la unitat ($|r|<1$), la progressió geomètrica és una successió on el terme general tendeix a zero. Així, la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica amb $|r|<1$ és $S=a_1/(1-r)$.

Exemple 17. La successió $(a_n)=(32, 16, 8, 4, 2, 1,...)$ és una progressió geomètrica de raó $r=16/32=1/2$. Veiem que $8/16=1/2$, $4/8=1/2$, etc.

El terme general és $a_n=a_1.r^{n-1}=32.(1/2)^{n-1}=2^5/2^{n-1}=2^{6-n}$. Així, per exemple, el terme a_9 és $a_9=2^{6-9}=2^{-3}=1/2^3=1/8$. En efecte, els 9 primers termes són 32 16 8 4 2 1 1/2 1/4 1/8.

Comprovem la propietat de l'equidistància, $a_1.a_n=32.1/8=4$, $a_2+a_{n-1}=16.1/4=4$, $a_3+a_{n-2}=8.1/2=4$, etc. El producte d'aquests 9 termes és $P_9=[\sqrt{a_1.a_9}]^9=[\sqrt{32.1/8}]^9=2^9=512$.

Veiem que el terme central és $a_c=\sqrt{a_1.a_{13}}=2$. La suma d'aquests 9 primers termes val $S_9=(a_9.r-a_1)/(r-1)$, operant, $S_9=[(1/8).(1/2)-32]/[(1/2)-1]=...=63'875$. La suma de tots els termes d'aquesta progressió geomètrica decreixent és , $S_\infty=a_1/(1-r)=32/(1-1/2)=64$.

2.2 LÍMITS DE SUCCESSIONS

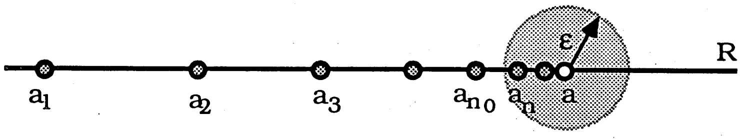
2.2.1 LÍMIT D'UNA SUCCESSIÓ. Si (a_n) és una successió de números reals, direm que a és el *límit de la successió* si per qualsevol bola oberta de radi ε centrada en a, $B_\varepsilon(a)$, existeix un natural n_0 de manera que per a tots els naturals més grans que ell, $n\geq n_0$, es verifica que a_n pertany a aquesta bola oberta. Escriurem

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n$$

També, per simplificar, posarem $a=\mathrm{Lim}(a_n)$. Se sobreentén que la n tendeix a infinit. D'aquesta manera, l'anterior *definició topològica de límit* es pot escriure com a

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n \quad (a\in R) \Leftrightarrow \left[\ \forall B_\varepsilon(a)\ ,\ \exists n_o\in N\ /\ \forall n\geq n_o \Rightarrow a_n\in B_\varepsilon(a)\ \right]$$

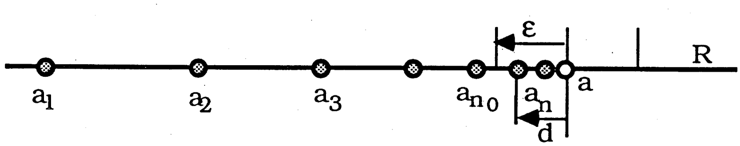
Podem comprendre millor la definició anterior si considerem la successió com a punts de la recta real, on observem que, prescindint de les successions constants, el límit a és un *punt d'acumulació* del conjunt format pels infinits termes de la successió, ja que tota bola oberta reduïda de centre a conté termes de la successió,



La definició anterior pot ser més comprensible si utilitzem la noció de distància en R. Recordem que $d(a_n, a)=|a_n-a|$. D'aquesta manera, la *definició clàssica* de límit vindrà donada per

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n \quad (a\in R) \Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon>0,\ \exists n_o\in N \ / \ \forall n\geq n_o \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon\right]$$

En la representació gràfica observem també que, a mesura que avança n, dos termes consecutius s'acosten cada vegada més (les successions que tenen aquesta propietat s'anomenen *successions de Cauchy*):



Exemple 18. La successió (a_n) de terme general $a_n=(2.n-1)/(n+1)$ té per termes $(a_n)=(0'5, 1, 1'25, 1'4, 1'5,...)$. Com veiem, és monòtona creixent i es va acostant cada vegada més a 2 ja que, per exemple, per n=99 hem vist en l'exemple 13 que $a_{99}=1'98$. Si volem comprovar que 2 és el límit de la successió anterior, haurem de deduir n en

$$|a_n-a|<\varepsilon,\ \left|\frac{2.n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{-3}{n+1}\right|<\varepsilon,\ \frac{3}{n+1}<\varepsilon,\ \frac{3}{\varepsilon}<n+1,\ n>\frac{3}{\varepsilon}-1$$

En el cas que $\varepsilon=0'01$, ens quedarà $n>299$. Per tant, $n_0=300$. Comprovem que la desigualtat $|a_n-a|<\varepsilon$ es verificarà, ja per n=300,

$$|a_{300}-a|=\left|\frac{2.300-1}{300+1}-2\right|=\left|\frac{600-1-600-2}{301}\right|=\frac{3}{301}=0'0099667<0'01$$

Anomenarem *successió convergent* una successió (a_n) que tingui límit, $a=\text{Lim}(a_n)$. El *conjunt de totes les successions convergents* definides en el conjunt dels nombres reals el designarem per S_c.

En particular, anomenarem*successió infinitesimal* una successió convergent que té per límit zero. Evidentment, la successió nul·la, (0)=(0, 0, 0, 0,...), és una successió infinitesimal.

Exemple 19. La successió (a_n) de l'exemple anterior és convergent perquè té límit (a=2), però no és infinitesimal, ja que aquest límit és diferent de zero.

Sí que és infinitesimal la successió (b_n) de terme general $b_n=3/(n+1)$. Com podem veure $(bn)=(1'5, 1, 0'75, 0'6, 0'5,...)$, es va acostant cada vegada més a zero.

2.2.2 PROPIETATS DELS LÍMITS. A partir de la utilització de la definició clàssica de límit i amb les dues successions convergents (a_n) i (b_n), de límits respectius a i b, es pot demostrar que es compleixen les següents *propietats operacionals dels límits*:

(1) $\boxed{\text{Lim}(a_n+b_n)=a+b}$. El límit de la successió suma és igual a la suma dels límits de les successions inicials.

(2) $\boxed{\text{Lim}(a_n-b_n)=a-b}$. El límit de la successió diferència és igual a la diferència dels límits de les successions inicials.

(3) $\boxed{\text{Lim}(a_n\cdot b_n)=a.b}$. El límit de la successió producte és igual al producte dels límits de les successions inicials.

(4) $\boxed{\text{Lim}(\lambda.a_n)=\lambda.a}$. El límit de la successió producte extern és igual al producte del número pel límit de la successió inicial.

(5) $\boxed{\text{Lim}(a_n/b_n)=a/b}$. El límit de la successió quocient és igual al quocient dels límits de les successions inicials, sempre i quan tots els termes de (b_n) i el límit b siguin no nuls.

(6) $\boxed{\text{Lim}(a_n\uparrow b_n)=a\uparrow b}$. El límit de la successió potència és igual al límit de la successió base elevat al límit de la suc. exponent.

Exemple 20. Per a les successions (a_n)=(0'5, 1, 1'25, 1'4, 1'5,...) de l'exemple 18 i (b_n)=(1'5, 1, 0'75, 0'6, 0'5,...) de l'exemple 19, que tenen respectivament com a límits a=2 i b=0, el límit de la successió suma serà a+b=2+0=2. En efecte,

(a_n+b_n)=(0'5+1'5, 1+1, 1'25+0'75, 1'4+0'6, 1'5+0'5,...)=(2, 2, 2, ...) $\rightarrow$ 2

Comprova com a exercici que la successió producte $(a_n\cdot b_n)$ és també convergent de límit a.b=2.0=0. És a dir, és una successió infinitesimal.

La successió quocient veiem que (a_n/b_n) té per termes (0'5/1'5, 1/1, 1'25/0'75, 1'4/0'6, 1'5/0'5,...), és a dir, (0'33, 1, 1'66, 2'33, 3,...) . Com que no està acotada, no és convergent. En aquest cas és divergent.

Finalment, apuntem la successió potència $(a_n\uparrow b_n)$=($0'5^{1'5}$, 1^1, $1'25^{0'75}$, $1'4^{0'6}$, $1'5^{0'5}$,...)=(0'35, 1, 1'18, 1'22, 1'22,...). Encara que només prenent uns quants termes no ho sembla, el límit ha de ser 2^0=1. Comprovem-ho per n=99. Tindrem a_{99}=(2.99-1)/(99+1)=1'97 i b_{99}=3/(99+1)=0'03, i així observem que $a_{99}\uparrow b_{99}$=$1'97^{0'03}$=1'02≈1.

Apuntem també les *propietats d'acotació dels límits* que ens poden ser útils per a calcular límits de successions:

(7) El producte d'una successió infinitesimal per una acotada és també infinitesimal.

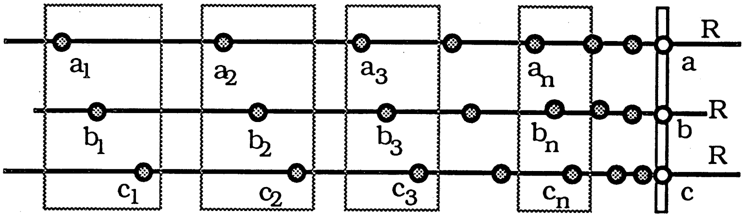
(8) Tota successió monòtona creixent i acotada superiorment és convergent.

(9) Tota successió monòtona decreixent i acotada inferiorment és convergent.

(10) Tota successió convergent és acotada, però no totes les successions acotades són convergents.

(11) Si tots els termes d'una successió (b_n) estan compresos entre els respectius termes corresponents de dues successions (a_n) i (c_n) convergents i del mateix límit, llavors la successió donada (b_n) és convergent i té el mateix límit que (a_n) i (c_n). (*Propietat dels termes acotats*).

Per comprendre millor aquesta última propietat ens podem fixar en l'esquema següent:



Hi veiem dues successions convergents (a_n) i (c_n) que tenen el mateix límit a=c. Si suposem ara una nova successió (b_n), on els seus termes estan compresos entre els termes corresponents de les dues successions anteriors, $a_1<b_1<c_1$, $a_2<b_2<c_2$, etc., llavors la successió (b_n) és convergent amb el mateix límit b=a=c.

> *Exemple 21.* Les propietats anteriors són força intuïtives. Així, per exemple, la 9a propietat ens diu que qualsevol successió convergent és acotada, com veiem en la successió $(a_n)=(0'5, 1, 1'25, 1'4, 1'5,...)$ de l'exemple 18, que té per límit a=2. Una cota inferior pot ser $k_i=0$ i una superior $k_s=3$.
>
> Però de qualsevol successió acotada no podem deduir que sigui convergent, com es pot veure amb la successió (b_n) de terme general $b_n=(-1)^n$, és a dir $(b_n)=(-1, +1, -1, +1,...)$. Veiem que és oscil·lant i acotada, ja que $-2<b_n<2$, però que, al no tenir límit , no és convergent.

Un cas particular molt important de successió potència ($a_n \uparrow b_n$) és la que té per límit *el nombre e d'Euler*, on les successions base i exponent són, respectivament, $(a_n)=(1+ 1/n)$ i $(b_n)=(n)$. Calculem els primers termes d'aquesta successió $(e_n)=(1+ 1/n)^n$,

$$(e_n)=(2, 2'25, 2'37, 2'44, 2'48, 2'52, ...)$$

Es pot observar que és monòtona creixent i es pot comprovar així mateix que és acotada superiorment, on una cota superior és $k_s=3$. Per tant, per la propietat (8), la successió (e_n) és convergent. El seu límit és el nombre e d'Euler, un nombre irracional de valor:

$$e=2'71828182...$$

2.2.3 INFINITÈSIMS. Anomenarem *infinitèsim* una successió (a_n) infinitesimal i no nul·la, és a dir, una successió convergent de límit zero i diferent de la (0)=(0, 0, 0, ...). Per tant, fixem-nos que un infinitèsim no és un número molt petit, sinó una successió de números que s'acosten cap a zero.

Exemple 22. La successió $(a_n)=(1/n)$ és un infinitèsim, ja que tenim $(a_n)=(1, 0'5, 0'33, 0'25, 0'2, \ldots)$, és a dir, una successió infinitesimal.

També són infinitèsims les successions (b_n), (c_n) i (d_n) de termes generals $b_n=3/(n+2)$, $c_n=(n+1)/n^2$ i $d_n=8/(n+1)^3$, on els seus cinc primers termes són:

$(b_n)=(1, 0'75, 0'6, 0'5, 0'42, \ldots)$, $(c_n)=(2, 0'75, 0'44, 0'31, 0'24, \ldots)$
i $(d_n)=(1, 0'29, 0'12, 0'06, 0'03, \ldots)$.

En aquest exemple podem veure que les tres primeres successions tendeixen a zero amb la mateixa rapidesa, mentre que l'última ho fa molt més de pressa. Seguint aquesta idea, direm que (a_n) i (b_n) són *infinitèsims comparables* si el límit del seu quocient és un número real no nul, $\text{Lim}(a_n/b_n)=k$, $k\neq 0$.

En el cas particular que aquest quocient sigui la unitat, és a dir, $\text{Lim}(a_n/b_n)=1$, direm que (a_n) i (b_n) són *infinitèsims equivalents*, i escriurem $(a_n)\equiv(b_n)$.

Si $\varepsilon=(a_n)$ és un infinitèsim, una *taula d'infinitèsims equivalents* és:

$\sin(\varepsilon) \equiv \varepsilon$	$1-\cos(\varepsilon) \equiv \varepsilon^2/2$	$\tan(\varepsilon) \equiv \varepsilon$
$b^{\varepsilon}-1 \equiv \varepsilon.\text{Ln}(b)$ $(b>0)$	$e^{\varepsilon}-1 \equiv \varepsilon$	$\text{Ln}(\varepsilon+1) \equiv \varepsilon$

que ens serà útil a l'hora de calcular límits de successions, ja que podrem substituir un infinitèsim pel seu equivalent.

Exemple 23. Veurem que els infinitèsims de l'exemple anterior (a_n) i (b_n) són comparables. Formarem la successió quocient i trobarem els tres primers termes i també el desè i el centèsim,

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\left(\frac{1/n}{3/(n+2)}\right)=\left(\frac{n+2}{3.n}\right)=(1, 0'66, 0'55, \ldots, 0'4, \ldots, 0'34, \ldots)\to 1/3$$

Com que $\text{Lim}(a_n/b_n)=1/3$ és un número real diferent de zero, podem assegurar que (a_n) i (b_n) són dos infinitèsims comparables i, per un abús de llenguatge, direm que "el segon és el triple del primer".

Veiem que també són comparables (a_n) i (c_n),

$$\left(\frac{a_n}{c_n}\right)=\left(\frac{1/n}{(n+1)/n^2}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)=(0'5, 0'66, 0'75, \ldots, 0'9, \ldots, 0'99, \ldots)\to 1$$

Observem que (a_n) i (c_n) són també infinitèsims equivalents i podem escriure $(a_n)\equiv(c_n)$.

En canvi, no són comparables els infinitèsims (a_n) i (d_n), ja que el límit del seu quocient no és cap número real,

$$\left(\frac{a_n}{d_n}\right)=\left(\frac{1/n}{8/(n+1)^3}\right)=\left(\frac{(n+1)^3}{8.n}\right)=(1, 1'68, 2'66, \ldots, 15'12'9, \ldots, 1287'87, \ldots)\to +\infty$$

En l'exemple anterior hem trobat una successió de *límit a més infinit*, ja que es tracta d'una successió creixent no acotada superiorment. De la mateixa manera, una successió serà de *límit a menys infinit* si és decreixent i no està acotada inferiorment.

De manera similar als infinitèsims, també els *infinits*, o més ben dit, les successions divergents a més o menys infinit, poden ser comparables i equivalents.

Direm que (a_n) i (b_n) són dos *infinits comparables* si $\mathrm{Lim}(a_n/b_n)=k$, on k és un número real no nul. En el cas particular que $k=1$, en direm *infinits equivalents*.

Exemple 24. Siguin les successions de termes generals $a_n=n+4$, $b_n=(n^2+1)/(2.n)$, $c_n=n^2/(n+3)$ i $d_n=(2.n^3)/(n+1)$. Trobem els tres primers termes i també el desè i centèsim de cada successió:

$(a_n)=(5, 6, 7, \ldots, 14, \ldots, 104, \ldots)$ $(b_n)=(1, 1'25, 1'66, \ldots, 5'05, \ldots, 50, \ldots)$

$(c_n)=(0'25, 0'8, 1'5, \ldots, 7'69, \ldots 97, \ldots)$ $(d_n)=(1, 5'33, 13'5, \ldots, 181, \ldots 19801, \ldots)$

Com que totes elles tendeixen a infinit, direm que les successions (a_n), (b_n), (c_n) i (d_n) són infinits.

Comparem les tres últimes amb la primera, fent les respectives successions quocient i trobant els seus termes dividint terme a terme:

$(a_n/b_n)=(5, 4'8, 4'21, \ldots, 2'77, \ldots, 2'079, \ldots) \rightarrow 2$ Comparables

$(a_n/c_n)=(20, 7'5, 4'66, \ldots, 1'82, \ldots, 1'07, \ldots) \rightarrow 1$ Equivalents

$(a_n/d_n)=(5, 1'12, 0'51, \ldots, 0'077, \ldots, 0'0052, \ldots) \rightarrow 0$ No comparables.

Quan dos infinitèsims o dos infinits no són comparables, podem establir el concepte d'ordre. Així, direm que (a_n) és un *infinitèsim d'ordre superior* al (b_n) si $\mathrm{Lim}(a_n/b_n)=0$, la qual cosa vol dir que (a_n) s'acosta més ràpidament a zero que (b_n). Si $\mathrm{Lim}(a_n/b_n)=\infty$, direm que (a_n) és un *infinitèsim d'ordre inferior* al (b_n).

En el cas d'infinits, direm que (a_n) és un *infinit d'ordre superior* al (b_n) si $\mathrm{Lim}(a_n/b_n)=\infty$, cosa que significa que (a_n) divergeix més de pressa que (b_n). Si es verifica que $\mathrm{Lim}(a_n/b_n)=0$, és clar que (a_n) serà un *infinit d'ordre inferior* al (b_n).

En el càlcul de límits de l'apartat següent sovint operarem amb infinits (∞), infinitèsims (0) i també successions de límit la unitat (1). Obtindrem expressions "a priori" desconegudes que anomenem *indeterminacions*, perquè el seu valor dependrà de l'ordre de l'infinit o infinitèsim. Aquestes són:

$\infty-\infty$	$0.\infty$	∞/∞	$0/0$	1^∞	∞^0	0^0

La tècnica del càlcul de límits que veurem tot seguit ens servirà per a calcular el valor d'aquestes indeterminacions, encara que també a vegades és possible utilitzar infinitèsims equivalents per arribar a saber el valor del límit.

Exemple 25. Sigui ara la successió (a_n) que té per terme general $a_n=[\sin(6/n)]/[\tan(2/n)]$. Si per calcular el límit substituïm la n per ∞, obtindrem,

$$a=\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} \frac{\sin(6/n)}{\tan(2/n)} = \frac{\sin(0)}{\tan(0)} = \frac{0}{0}$$

Aquesta indeterminació la podem resoldre substituint els infinitèsims del numerador i del denominador pels seus infinitèsims equivalents. Obtindrem,

$$a=\mathrm{Lim}_{n\to\infty} \frac{\sin(6/n)}{\tan(2/n)} = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} \frac{6/n}{2/n} = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} \frac{6}{2} = 3.$$

2.2.4 CÀLCUL DE LÍMITS. Per calcular el límit d'una successió, el que podem fer a la pràctica, tot i no ser formalment correcte, és substituir la n per ∞. Pot ser que, amb la substitució, ens quedi una de les indeterminacions esmentades anteriorment. Explicarem alguns *mètodes elementals* per resoldre aquestes indeterminacions:

DETERMINACIÓ PER DIVISIÓ. Si l'expressió indeterminada és ∞/∞, dividirem tant el numerador com el denominador per la màxima potència de n que aparegui en l'expressió del terme general.

Exemple 26. Les tres successions següents són totes indeterminades de la forma ∞/∞,

$$(a_n)=\frac{8.n^2-3.n+7}{2.n^2-5}\ ,\quad (b_n)=\frac{4.n-9}{n^2+3.n+2}\quad \text{i}\quad (c_n)=\frac{n^2+5.n-6}{4.n+3}$$

Calculem els límits dividint el numerador i el denominador per n^2, que és la màxima potència de n en tots els casos:

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{8.n^2-3.n+7}{2.n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-(3/n)+(7/n^2)}{2-(5/n^2)}=\frac{8-0+0}{2-0}=\frac{8}{2}=4$$

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{4.n-9}{n^2+3.n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4/n)-(9/n^2)}{1+(3/n)+(2/n^2)}=\frac{0-0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0$$

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5.n-6}{4.n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(5/n)-(6/n^2)}{(4/n)+(3/n^2)}=\frac{1+0-0}{0+0}=\frac{1}{0}=+\infty$$

En aquest exemple veiem que si el numerador i el denominador són polinomis del mateix grau, llavors el límit de la successió és igual al quocient dels coeficients dels termes de grau màxim. També observem que, si el grau del numerador és més petit que el del denominador, el límit és igual a zero, i si el grau del numerador és més gros que el del denominador, el límit és igual a infinit.

DETERMINACIÓ PER CONJUGACIÓ. Quan, en voler calcular un límit, on hi ha termes binòmics amb radicals, obtenim una indeterminació de la forma ∞-∞, és possible obtenir el valor del límit multiplicant i dividint per l'*expressió radical conjugada* de l'expressió que provoca la indeterminació.

Exemple 27. Donada la successió $(a_n)=(\sqrt{n+2}.(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}))$, si volem calcular el límit, ens trobem amb la indeterminació ∞-∞, deguda al segon factor. Multipliquem el numerador i el denominador per l'expressió radical conjugada, que és la mateixa, però canviant el signe menys, que separa els dos radicals, pel signe més:

$$a=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}.(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}.(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

Com que "suma per diferència és igual a diferència de quadrats",

$$a=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}.\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividirem ara numerador i denominador per la màxima potència de n, que en aquest cas és $n^{1/2}$ i obtindrem el límit buscat,

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+(2/n)}}{\sqrt{1+(1/n)}+\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1+(2/\infty)}}{\sqrt{1+(1/\infty)}+1}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

DETERMINACIÓ PEL NÚMERO e. Recordant que $e=\mathrm{Lim}(1+ 1/n)^n$, si obtenim la indeterminació 1^∞, farem els passos adients per aconseguir expressar el límit com una potència del número d'Euler, e^c. Una manera mecànica de calcular-lo és saber que si (a_n) i (b_n) són les successions base i exponent, respectivament, llavors l'exponent c ve determinat per

$$c= \lim_{n\to\infty} (a_n-1).b_n$$

Exemple 28. Sigui (c_n) una successió on el seu terme general té com a base $a_n=(n+3)/(n+2)$ i d'exponent $b_n=4.n-1$. És clar que $a=\mathrm{Lim}(a_n)=1$ i que $b=\mathrm{Lim}(b_n)=\infty$, obtenint la indeterminació $c=\mathrm{Lim}(c_n)=1^\infty$. Tenim,

$$c= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{4.n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^{4.n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{4.n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{(n+2).\frac{4.n-1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{(n+2)}\right]^{\frac{4.n-1}{n+2}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4.n-1}{n+2}} = e^4$$

Fem-ho ara directament. Veiem que el límit és $e^c=e^4$, ja que:

$$c= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}-1\right).(4.n-1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3-n-2}{n+2}\right).(4.n-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{4.n-1}{n+2} = 4$$

Per al càlcul d'alguns límits ens pot ser útil també el *criteri de Stolz*, on es parteix d'una successió quocient $(c_n)=(a_n/b_n)$ que pren la forma indeterminada ∞/∞,. Llavors el límit c, si existeix, pot ser

$$c= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right)$$

Hem d'advertir que el criteri de Stolz també pot aplicar-se en el cas que la successió numerador no divergeixi, sempre que la del denominador sigui estrictament creixent i divergent.

Exemple 29. Sigui la successió $(a_n)=(\sqrt[n]{k.n})$, on k és constant. Tenim

$$a= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k.n} = \lim_{n\to\infty} (k.n)^{1/n} = (k.\infty)^{1/\infty} = \infty^0$$

Per aconseguir un quocient i poder aplicar el criteri de Stolz, podem aplicar logaritmes al seu terme general,

$$\mathrm{Ln}(a_n)= \mathrm{Ln}\left((k.n)^{1/n}\right) = \frac{\mathrm{Ln}\,(k.n)}{n}$$

Com que $\log(\infty)=\infty$, en trobar el límit de la successió anterior ens quedarà de la forma indeterminada ∞/∞. Apliquem Stolz,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}\,(k.n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}\,(k.n)-\mathrm{Ln}(k.(n-1))}{n-(n-1)}$$

Com que la resta de logaritmes és el logaritme del quocient,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}\left(\frac{k.n}{k.(n-1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

En el proper capítol de les funcions contínues veurem que el límit d'un logaritme és igual al logaritme del límit. Per tant,

$$\mathrm{Ln}\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \mathrm{Ln}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\right) \quad , \quad \mathrm{Ln}(a)=\mathrm{Ln}(1) \quad , \quad a=1.$$

És a dir, $\boxed{\mathrm{Lim}\,(\sqrt[n]{k.n})=1}$, resultat que emprarem més endavant.

En alguns problemes de límits ens trobem amb successions on intervé el factorial n!. Eliminarem aquesta dificultat mitjançant la *fórmula de Stirling*, que no demostrem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}}\right) = 1$$

L'expressió anterior ens indica que els infinits del numerador i del denominador són equivalents, és a dir,

$$n! \equiv n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}$$

Exemple 30. Trobem el límit següent on intervé un factorial,

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{(2.n+1).\sqrt[n]{n!}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2.n+1).\sqrt[n]{n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}}}{n^2}$$

Simplificant i tenint en compte que $\lim \sqrt[n]{k.n}=1$,

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{(2.n+1).n.e^{-1}.\sqrt[2.n]{\pi.2n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2.n+1).1}{e.n}=\frac{2}{e}.$$

Per acabar l'estudi de les successions, hem apuntat en l'apartat de formulació unes *taules de límits*, on indiquem com es poden deduir els límits d'una suma, diferència, producte, quocient i potència de dues successions (a_n) i (b_n), coneguts els seus límits respectius.

2.3 SÈRIES NUMÈRIQUES

2.3.1 CONVERGÈNCIA DE SÈRIES. Donada la successió de números reals $(a_n)=(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, anomenarem *successió de sumes parcials* la successió (s_n) formada pels termes $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, $s_3=a_1+a_2+a_3$, ..., és a dir, la de terme general $s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Escriurem $(s_n)=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$.

Exemple 31. Partim de la successió $(a_n)=(2^{1-n})$ que té com a termes $a_1=1$, $a_2=1/2$, $a_3=1/4$, $a_4=1/8$,.... $a_n=1/2^{n-1}$,...Formem la successió de sumes parcials (s_n), on els seus termes són,

$$s_1=1\ ,\ s_2=1+(1/2)=3/2,\ s_3=1+(1/2)+(1/4)=(4+2+1)/4=7/4,\ldots$$

Si continuem d'aquesta manera, obtindrem la successió de sumes parcials $(s_n)=(1, 3/2, 7/4, 15/8, 31/16, 63/32,\ldots)$.

Formalment, una *sèrie numèrica* és el parell $((a_n), (s_n))$ constituït per la *successió inicial* (a_n) i la successió de sumes parcials (s_n). Per simplificar, simbolitzarem una sèrie numèrica amb el *sumatori:*

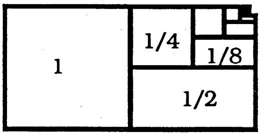
$$((a_n),\ (s_n))=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{o, abreujadament, per } ((a_n),\ (s_n))=\Sigma a_n$$

En el cas que la successió de sumes parcials (s_n) sigui una successió convergent de límit el real S, Lim(s_n)=S, direm que la sèrie Σa_n és una *sèrie convergent*, i, del seu límit S, en direm *suma de la sèrie*. Escriurem S=Σa_n.

Es pot demostrar que una condició necessària de convergència d'una sèrie numèrica, Σa_n, és que la successió inicial (a_n) sigui infinitesimal, és a dir, que Lim(a_n)=0.

Exemple 32. La sèrie de l'exemple 31, $\Sigma a_n = \Sigma 2^{1-n}$, és convergent. Només cal veure que la successió de sumes parcials, (s_n)=(1, 3/2, 7/4, 15/8, 31/16, 63/32,...) o també (s_n)=(1, 1'5, 1'75, 1'87, 1'93, 1'96,...), té per límit 2.

Per tant, la sèrie $\Sigma a_n = \Sigma 2^{1-n}$ és convergent de suma S=2. Podem posar també $\Sigma 2^{1-n}=2$.



Es pot comprendre geomètricament aquest resultat prenent un quadrat d'àrea unitat, després sumant-li un rectangle d'àrea 1/2, etc. Observem que la suma d'aquesta sèrie serà un rectangle d'àrea S=2.

Si la successió de sumes parcials és divergent, Lim(s_n)=∞, direm que Σa_n és una *sèrie divergent*. També, si no existeix el límit de la successió de sumes parcials i és divergent, direm que Σa_n és una *sèrie oscil·lant*.

Exemple 33. Sigui la sèrie Σa_n de successió inicial (a_n)=(1/n) de termes (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,...). La successió de sumes parcials és:

$s_1=1$, $s_2=1+0'5=1'5$, $s_3=1+0'5+0'33=1'83$,

$s_4=s_3+(1/4)=1'83+0'25=2'08$, $s_5=s_4+1/5=2'08+0'2=2'28$, ...

Seguint aquest procés, obtindrem la successió (s_n)=(1, 1'5, 1'83, 2'08, 2'28, 2'44, 2'58, 2'70, ...), que es pot comprovar que, encara que molt lentament, és divergent. És a dir, Σa_n és una sèrie divergent.

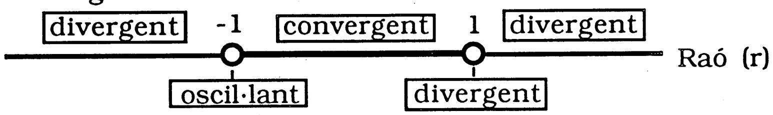
D'altra banda, la sèrie Σa_n, on la successió inicial és la de terme general $(-1)^{n+1}$, és una sèrie oscil·lant, ja que, com que és (a_n)=(1, -1, 1, -1, 1, -1,...), si formem la successió de sumes parcials (s_n), tindrà com a termes $s_1=1$, $s_2=1-1=0$, $s_3=1-1+1=1$, ... i així (s_n)=(1, 0, 1, 0, 1, 0, ...), que, evidentment, no té límit.

SÈRIES IMPORTANTS. En l'estudi de la Matemàtica financera ens trobarem amb diferents tipus de sèries, com la *sèrie geomètrica*, de la forma $\Sigma a.r^{n-1}$ i que equival a la suma de termes d'una progressió geomètrica, $S=a+a.r+a.r^2+a.r^3+...+a.r^n+...$.

Recordem que a és el primer terme i r, la raó. La suma dels n primers termes $s_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$, sabem que és $s_n=(a_n.r-a_1)/(r-1)$. En el nostre cas tenim

$$s_n=(a.r^{n-1}.r-a)/(r-1)=a.(r^n-1)/(r-1)$$

Si fem un estudi de la convergència de les sèries a partir del valor de la raó r, arribarem a les conclusions que esquematitzem en el diagrama següent:



Una altra sèrie d'interès rellevant és la *sèrie harmònica*, definida com a $\Sigma(1/n^p)$, on l'exponent $p \in R$. Fent un estudi de la convergència es pot deduir que per $p \leq 1$ és divergent i que per $p > 1$ és convergent.

Exemple 34. Ja hem vist que la sèrie $\Sigma(1/n)$ de termes $(1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots)$ és divergent. Es tracta de la sèrie harmònica amb p=1.

Uns altres exemples de sèries harmòniques poden ser la $\Sigma(1/\sqrt{n})$, on p=1/2, i la $\Sigma(1/n^2)$, on p=2. Obtenim,

$$\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots \quad \text{i} \quad \Sigma\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

La primera és divergent, ja que $p = 1/2 \leq 1$, mentre que la segona és convergent. Pots calcular amb els 10 primers termes que el límit aproximat és 1'54.

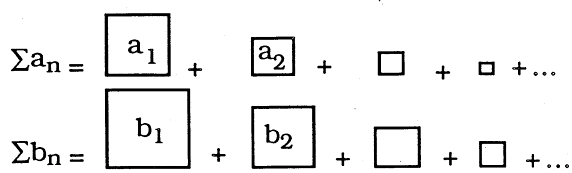
2.3.2 CRITERIS DE CONVERGÈNCIA. Començarem en primer lloc fent un estudi de les *sèries de termes no negatius*, que són aquelles sèries Σa_n on tots els termes de la successió inicial (a_n) són positius o nuls. Per saber si una sèrie d'aquestes característiques és o no convergent, en determinarem el caràcter de convergència o divergència a partir d'uns *criteris de convergència*. Indiquem a continuació els criteris més utilitzats:

1) PRIMER CRITERI DE COMPARACIÓ. Per a les *sèries de termes positius*, Σa_n i Σb_n, si a partir d'un n_0 els termes de la primera són més petits o iguals que els de la segona, $a_n \leq b_n$, es verifica:

   1a) Si Σb_n és convergent, també Σa_n és convergent.

Exemple 35. Tenim les sèries $\Sigma a_n = \Sigma |\sin(n)|/n^2$ i $\Sigma b_n = \Sigma 1/n^2$, on com que és, $|\sin(n)| \leq 1$, es verifica que $a_n \leq b_n$. Com que Σb_n és convergent per què és una sèrie harmònica amb $p = 2 > 1$, a partir del primer criteri de comparació, deduirem que també Σa_n ha de ser convergent.

La conclusió anterior la podem visualitzar amb el diagrama següent, en el que els termes de les successions inicials els representem per les àrees de quadrats,



Observem que els quadrats que representen els termes Σa_n són més petits que els que representen Σb_n. Així, si la suma Σb_n és finita, també ho haurà de ser la de Σa_n.

1b) Si Σa_n és divergent, també Σb_n és divergent.

Exemple 36. Comparem ara les sèries $\Sigma a_n=\Sigma 1/n$ i $\Sigma b_n=\Sigma Ln(n)/n$. Sabem que la funció logarítmica és creixent en el seu domini, i com que $Ln(e)=1$, es verifica $Ln(n)>1$ per a tot $n>e$.

És a dir, a partir de $n=3$ tenim $1<Ln(n)$, o bé $1/n<Ln(n)/n$. D'aquesta manera es compleix $a_n \leq b_n$, i com que $\Sigma a_n=\Sigma 1/n$ és divergent perquè és una sèrie harmònica amb $p=1$, si apliquem aquest primer criteri de comparació, deduirem que $\Sigma b_n=\Sigma Ln(n)/n$ és també una sèrie divergent.

2) SEGON CRITERI DE COMPARACIÓ. Considerem dues sèries de termes no negatius, Σa_n i Σb_n i formem la successió quocient (a_n/b_n), estudiant-ne la convergència amb el límit $L=Lim(a_n/b_n)$. Poden passar tres casos:

2a) Si $L\neq 0$ i $L\neq +\infty$, llavors les sèries Σa_n i Σb_n tenen el mateix caràcter. És a dir, les dues sèries són simultàniament convergents o divergents.

Exemple 37. Volem esbrinar el caràcter de la sèrie $\Sigma a_n=\Sigma n/(n^2+1)$. La podem comparar amb la $\Sigma b_n=\Sigma 1/n$, de la qual sabem que es tracta d'una sèrie divergent perquè és harmònica amb $p=1$.

Formem la successió quocient (a_n/b_n) que té de terme general, $a_n/b_n=(n/(n^2+1))/(1/n)=n^2/(n^2+1)$. Com que $Lim[n^2/(n^2+1)]=1$, si apliquem el segon criteri de comparació, resulta que $\Sigma n/(n^2+1)$ haurà de ser també divergent.

2b) Si $L=0$ i Σb_n és convergent, també Σa_n és convergent.

Exemple 38. Per esbrinar si la sèrie $\Sigma a_n=\Sigma(n+1)/(n^2.3^n)$ és o no convergent, la podem comparar per exemple amb la $\Sigma b_n=1/2^n$, que sabem que és convergent perquè és una sèrie geomètrica de raó $r=1/2<1$. Calculem el límit de la successió quocient

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)/(n^2.3^n)}{1/2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1).2^n}{n^2.3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}.\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

Com que és $L=0$ i Σb_n és convergent, la sèrie donada Σa_n també serà convergent.

2c) Si $L=+\infty$ i Σb_n és divergent, també Σa_n és divergent.

Exemple 39. Considerem la sèrie $\Sigma a_n=\Sigma\sqrt[3]{n}/\sqrt{n+1}$. La podem comparar amb la $\Sigma b_n=\Sigma 1/n$, que és divergent. Trobem el límit de la successió quocient,

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}/\sqrt{n+1}}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n.\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n+1}}=+\infty$$

En resum, com que $L=+\infty$ i Σb_n és divergent, podem aplicar el criteri anterior i deduirem que també Σa_n és divergent.

3) CRITERI DE PRINGSHEIM. Volem estudiar si la sèrie Σa_n és o no convergent. Aquest criteri ens diu que si $\text{Lim}(n^p.a_n)=L$, on $L\neq 0$ i $L\neq\infty$, llavors

3a) Si $p>1$, la sèrie Σa_n és convergent.

3b) Si $p\leq 1$, la sèrie Σa_n és divergent.

Exemple 40. Suposem que volem saber el caràcter de la sèrie $\Sigma a_n=\Sigma n/(2.n^2+1)^2$. Calculem el límit, multiplicant el terme general de la successió inicial a_n per n^3,

$$L=\lim_{n\to\infty} n^3.\frac{n}{(2.n^2+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{4.n^4+4.n^2+1}=\frac{1}{4}$$

Com que $L\neq 0$ i $L\neq\infty$ i com que $p=3>1$, la sèrie Σa_n és convergent.

Sigui ara la sèrie $\Sigma b_n=\Sigma n/(2.n^2+1)$. Trobem el límit multiplicant el terme general per n^1,

$$L=\lim_{n\to\infty} n^1.\frac{n}{2.n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2.n^2+1}=\frac{1}{2}$$

Com que $L\neq 0$, $L\neq\infty$ i $p=1$, la sèrie Σb_n és divergent.

4) CRITERI DE D'ALEMBERT (O DEL QUOCIENT). Sigui Σa_n una sèrie de termes positius. Per saber-ne el caràcter (convergent o divergent), calcularem el límit $L=\text{Lim}(a_{n+1}/a_n)$. Llavors,

4a) Si $L>1$, la sèrie Σa_n és divergent.

4b) Si $L<1$, la sèrie Σa_n és convergent.

Exemple 41. Estudiem el caràcter de la sèrie $\Sigma a_n=\Sigma 3^n/(n.2^{n+1})$, calculant el límit

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}/((n+1).2^{n+2})}{3^n/(n.2^{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3.n}{2.(n+1)}=\frac{3}{2}$$

Com que $L=3/2>1$, la sèrie Σa_n és convergent.

Per a la nova sèrie $\Sigma b_n=\Sigma(n!)^2/(2.n)!$ calculem el límit

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2/[2.(n+1)]!}{(n!)^2/(2.n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2.(n!)^2.(2.n)!}{(2.n+2).(2.n+1).(2.n)!.(n!)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2.n+2).(2.n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2.n+1}{4.n^2+6.n+2}=\frac{1}{4}$$

Com que $L=1/4<1$, la sèrie Σb_n és convergent.

5) CRITERI DE RAABE. Sigui també Σa_n una sèrie de termes positius. Per aplicar aquest criteri, que se sol fer servir quan amb el criteri de D'Alembert obtenim $L=\text{Lím}(a_{n+1}/a_n)=1$, i per tant no podem decidir el caràcter de convergència de la sèrie, haurem de trobar prèviament el límit $L=\text{Lim}\ n.(1-a_{n+1}/a_n)$. Llavors,

5a) Si $L>1$, la sèrie Σa_n és convergent.

5b) Si $L<1$, la sèrie Σa_n és divergent.

Exemple 42. Partim de la sèrie $\Sigma a_n = \Sigma 1/[n.(n+1)]$, que amb el criteri de D'Alembert no es decideix, ja que el límit del quocient dóna L=1. Si apliquem el criteri de Raabe, trobant el límit,

$$L = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{1/[(n+1).(n+2)]}{1/[n.(n+1)]}\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2.n}{n+2} = 2$$

Com que L=2>1, la sèrie Σa_n és convergent.

Sigui ara la sèrie $\Sigma b_n = \Sigma[1.3.5.7....(2.n-1)]/(2.4.6.8....2.n)$ que per D'Alembert no se'n pot determinar el caràcter. Apliquem el criteri de Raabe, calculant el límit,

$$L = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{[1.3.5...(2.n-1).(2.n+1)]/[2.4.6...2.n.(2.n+2)]}{[1.3.5...(2.n-1)]/[2.4.6...2.n]}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{2.n+1}{2.n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2.n+2} = \frac{1}{2}$$

Com que L=1/2<1, la sèrie Σb_n és divergent.

6) CRITERI DE CAUCHY (O DE L'ARREL). Aquest criteri parteix de la successió Σa_n de termes positius i consisteix a trobar el límit de l'arrel enèsima del seu terme general, $L = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Llavors,

6a) Si L>1, la sèrie Σa_n és divergent.

6b) Si L<1, la sèrie Σa_n és convergent.

Exemple 43. Donada la sèrie $\Sigma a_n = \Sigma 9^n.e^{-2.n}$, trobem el límit:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n.e^{-2.n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{e^2} = \frac{9}{e^2}$$

Com que $L=9/e^2>1$, la sèrie Σa_n és divergent.

Sigui ara la sèrie $\Sigma b_n = \Sigma n^n/(2.n+1)^n$. Calculem tot seguit el límit

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2.n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2.n+1} = \frac{1}{2}$$

Com que L=1/2<1, la sèrie Σb_n és convergent.

7) CRITERI LOGARÍTMIC. Per a la sèrie de termes positius Σa_n, trobarem el límit $L = \lim[Ln(1/a_n)]/[Ln(n)]$. Llavors,

7a) Si L>1, la sèrie Σa_n és convergent.

7b) Si L<1, la sèrie Σa_n és divergent.

Exemple 44. Sigui la sèrie $\Sigma a_n = \Sigma 1/n^n$. Trobem el límit

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(n^n)}{Ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.Ln(n)}{Ln(n)} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Com que $L=+\infty>1$, la sèrie Σa_n és convergent.

Tenim ara aquesta altra sèrie $\Sigma b_n = \Sigma n^{-1/n}$. Trobem el límit,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(1/n^{-1/n})}{Ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(n^{1/n})}{Ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n).Ln(n)}{Ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Com que L=0<1, la sèrie Σb_n és divergent.

8) CRITERI DE CONDENSACIÓ DE CAUCHY. Partim de la sèrie Σa_n de termes positius, en la qual (a_n) és una successió decreixent, i formem la nova successió (b_n) de terme general $b_n=m.a_m$, on $m=2^n$, però que convergeix o divergeix més ràpidament. Llavors les dues sèries Σa_n i Σb_n, on la segona es "condensa" més de pressa, tenen el mateix caràcter, és a dir,

8a) Si Σb_n és convergent, Σa_n és convergent.

8b) Si Σb_n és divergent, Σa_n és divergent.

Exemple 45. Per a la sèrie $\Sigma a_n=\Sigma 1/[n.Ln^2(n)]$, formem la nova sèrie $\Sigma b_n=\Sigma m.a_m$ on $m=2^n$.

$$\Sigma b_n = \Sigma 2^n.a_{2^n} = \Sigma 2^n.\frac{1}{2^n.n^2.Ln^2(2)} = \frac{1}{Ln^2(2)}.\Sigma \frac{1}{n^2}$$

Ara bé, la sèrie Σb_n és convergent perquè és una sèries harmònica amb $p=2>1$. Per tant, la sèrie donada Σa_n és també convergent.

Sigui la nova sèrie $\Sigma a_n=\Sigma 3/(n+2)$. Formem la nova sèrie

$$\Sigma b_n = \Sigma 2^n.a_{2^n} = \Sigma 2^n.\frac{3}{2^n+2} = \Sigma \frac{3}{1+(1/2^n)}$$

Si calculem el límit veurem que, com que $Lim(b_n)=3\neq 0$, la sèrie Σb_n és divergent i, pel criteri de condensació, també Σa_n és divergent.

2.3.3 SÈRIES ALTERNADES. Anomenarem *sèrie alternada* una sèrie lasuccessió de definició de la qual pren alternativament valors positius i negatius. Per tant, les sèries alternades seran de la forma $\Sigma(-1)^n.a_n$ o bé $\Sigma(-1)^{n+1}.a_n$.

Per a l'estudi de la seva convergència, farem servir el *criteri de Leibniz* que ens diu que una sèrie alternada, on la successió de definició (a_n) és decreixent, és convergent si i només si aquesta successió és també infinitesimal, és a dir, $Lim(a_n)=0$.

Exemple 46. Donada la sèrie $\Sigma(-1)^n/(2.n)!$, veiem que el terme general de la successió inicial decreixent és $a_n=1/(2.n)!$. Com que $Lim(a_n)=Lim[1/(2.n)!]=0$, la successió (a_n) és infinitesimal i, per tant, la sèrie donada és convergent.

Podriem comprovar-ho calculant els primers termes de (a_n): $a_1=1/(2.1)!=1/2!=1/2$, $a_2=1/(2.2)!=1/4!=1/24$, $a_3=1/(2.3)!=1/6!=1/720$, $a_4=1/(2.4)!=1/8!=1/40320$,...

Com que és una sèrie alternada, la successió de sumes parcials és expressada per $s_1=(-1)^1.a_1=-1/2=-0'5$, $s_2=s_1+a_2=-0'5+(1/24)=-0'4583$, $s_3=s_2-a_3=-0'4591$, $s_4=s_3+a_4=-0'4596$, etc. Observe, doncs, que podem aproximar la suma de la sèrie per $\Sigma a_n\approx-0'459$.

Diem que Σa_n és una *sèrie absolutament convergent* si i només si $\Sigma|a_n|$ és convergent. Com a propietat podem dir que, si una sèrie és absolutament convergent, també és convergent.

Exemple 47. La sèrie $\Sigma(-1)^n/n^2$ és absolutament convergent ja que la sèrie dels valors absoluts, $\Sigma|(-1)^n/n^2|=\Sigma 1/n^2$, és convergent ja que és una harmònica amb $p=2>1$.

D'altra banda, i per acabar el capítol de successions i sèries, direm que Σa_n és una *sèrie condicionalment convergent* si i només si Σa_n és convergent i $\Sigma |a_n|$ és divergent.

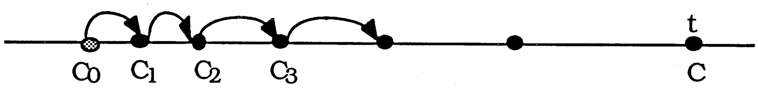
Exemple 48. La sèrie $\Sigma(-1)^n/n$ és condicionalment convergent, ja que la sèrie $\Sigma(-1)^n/n$ és convergent i la $\Sigma|(-1)^n/n|=\Sigma 1/n$ és divergent.

Observem que $\Sigma(-1)^n/n$ és convergent perquè (a_n) és una successió decreixent i $\text{Lim}(a_n)=0$, per la qual cosa és convergent en virtut del criteri de Leibniz.

En canvi, la sèrie $\Sigma|(-1)^n/n|=\Sigma 1/n$ és divergent perquè és una harmònica amb p=1.

2.4 APLICACIONS DE LES SUCCESSIONS I SÈRIES

2.4.1 CAPITALITZACIÓ COMPOSTA. Com a aplicació de les successions i sèries al càlcul financer, destaquem el càlcul del capital obtingut en sotmetre un capital inicial a *interès compost*. Partim d'un *capital inicial* C_0, que es diposita en una entitat financera a *capitalització composta*, on i és el *tant per u* i t el *temps de capitalització* mesurat en anys. Recordem que el tant per u és la centèsima part del *rèdit* o *tant per cent*, i=r/100.



Per obtenir el *capital final* C sabem que, al cap d'un any, $C_1=C_0+C_0.i=C_0.(1+i)$. Al començament del segon any, el capital inicial serà C_1, que ens produirà al final d'any un capital

$$C_2=C_1+C_1.i=C_1.(1+i)=C_0.(1+i).(1+i)=C_0.(1+i)^2$$

Raonant d'aquesta manera, deduïm que el capital final C al cap de t anys és expressat per $C=C_0.(1+i)^t$.

Si es fan m capitalitzacions anuals, és a dir, si s'afegeixen els interessos al capital m vegades l'any, llavors es prova que el capital final C ve donat per

$$C=C_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m.t}$$

Com a cas extrem tenim la *capitalització contínua*, on $m\to\infty$, per la qual cosa es faria una capitalització a cada instant. Si fem el límit en l'expressió anterior obtindrem $C=C_0.e^{it}$.

Exemple 49. Suposem que, a partir d'un capital inicial C_0=312.500 PTA, s'obté un capital final C=485.269 PTA al cap de t=3 anys i amb capitalitzacions mensuals (m=12). Calculem el rèdit r.

Apliquem la fórmula: $485.269=312.500.(1+i/12)^{12.3}$, $1'5528608=(1+i/12)^{36}$. Fem servir ara els logaritmes,

$\text{Log}(1'5528608)=\text{Log}(1+i/12)^{36}$, $0'1911325=36.\text{Log}(1+i/12)$, $0'0053092=\text{Log}(1+i/12)$, $10^{0'0053092}=1+i/12$, $1'0123=1+i/12$, $0'0123=i/12$, i=0'1476. Per tant, el rèdit és r=14'76%.

En el cas que es vulgui formar un capital C al cap de t anys, pagant cada any una *anualitat de capitalització* de valor a, es pot deduir que:

$$C=\frac{a.(1+i).[(1+i)^t-1]}{i}$$

Un cas similar és el d'amortització d'un deute D, on cada any i durant un nombre d'anys t, s'ha de pagar una *anualitat d'amortització* de valor a. Tindrem

$$D=\frac{a.[(1+i)^t-1]}{i.(1+i)^t}$$

Exemple 50. Suposem que hem de pagar un deute de 15 milions de PTA i que el banc, que ofereix un rèdit del 6'8%, ens permet pagar amb anualitats de 1₁469.735 PTA anuals. Trobem el nombre d'anualitats que haurem de pagar.

Aïllem la t en la fórmula anterior d'amortització:

$$D.i.(1+i)^t=a.(1+i)^t-a\ ,\ a=a.(1+i)^t-D.i.(1+i)^t\ ,\ a=(a-D.i).(1+i)^t\ ,$$
$$(1+i)^t=a/(a-D.i)\ ,\ t.Log(1+i)=Log[a/(a-D.i)].$$

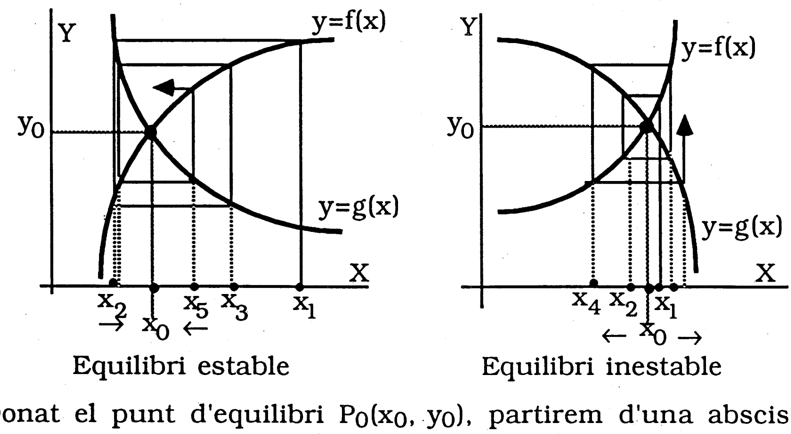
Per tant, t=Log[a/(a-D.i)]/Log(1+i). Substituint,

$$t=\frac{Log[1469735/(1469735-15000000.0'068)]}{Log(1+0'068)}=\frac{0'5142823}{0'0285712}=18$$

En conseqüència, s'haurà de pagar l'anualitat durant 18 anys.

2.4.2 EQUILIBRIS ESTABLE I INESTABLE. Donades dues funcions $y_1=f(x)$ i $y_2=g(x)$ de tipus econòmic, la *situació d'equilibri* és aquella en què $y_1=y_2$. Geomètricament, equival a trobar els punts de tall entre les dues corbes, per la qual cosa haurem de resoldre el sistema format per ambdues equacions. Les solucions seran els corresponents *punts d'equilibri.*

El tipus d'equilibri (estable o inestable) es pot estudiar construint una *teranyina* a l'entorn del punt, com es mostra a la gràfica següent,



Equilibri estable Equilibri inestable

Donat el punt d'equilibri $P_0(x_0, y_0)$, partirem d'una abscissa x_1 pròxima a aquest punt. Trobarem una nova abscissa x_2 per l'equació $f(x_1)=g(x_2)$. Després trobarem una nova abscissa x_3 fent $f(x_2)=g(x_3)$, i així successivament.

D'aquesta manera, a partir de l'expressió $f(x_n)=g(x_{n+1})$ obtindrem la successió $(x_n)=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,\ldots)$. Si convergeix a l'abscissa d'equilibri x_0, direm que es tracta d'un *equilibri estable*.

Exemple 51. Tenim les funcions $f(x)=2.x-4$ i $g(x)=11-3.x$. El punt d'equilibri es troba igualant $f(x)=g(x)$,

$$2.x-4=11-3.x \ , \ 5.x=15 \ , \ x=3 \ , \ y=2.3-4=2 \ , \ P_0(3, 2)$$

Prenem una abscissa pròxima a $x_0=3$, per exemple $x_1=4$ i de $f(x_1)=g(x_2)$ calculem x_2.

$$2.4-4=11-3.x_2 \ , \ 3.x_2=7 \ , \ x_2=2'33$$

Ara fem $f(x_2)=g(x_3)$ i trobem x_3,

$$2.2'33-4=11-3.x_3 \ , \ 3.x_3=10'34 \ , \ x_3=3'44$$

Si procedim així obtindrem la successió

$$(x_n)=(4, 2'33, 3'44, 2'70, 3'19, 2'86, 3'08, 2'94,\ldots)$$

Veiem que és una successió oscil·lant que convergeix al límit $x_0=3$. En conseqüència, l'equilibri és estable.

També podiem haver trobat la fórmula de recurrència, és a dir, $f(x_n)=g(x_{n+1})$, $2.x_n-4=11-3.x_{n+1}$, $3.x_{n+1}=15-2.x_n$, $x_{n+1}=(15-2.x_n)/3$.

Si la successió $(x_n)=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,\ldots)$ és divergent, direm que es tracta d'un *equilibri inestable*.

Exemple 52. Siguin ara les funcions exponencials $f(x)=5.e^{2.x+3}$ i $g(x)=8.e^{7-x}$. Trobem el punt d'equilibri fent $f(x)=g(x)$,

$$5.e^{2.x+3}=8.e^{7-x} \ , \ (e^{2.x+3})/(e^{7-x})=8/5 \ , \ e^{3.x-4}=1'6 \ ,$$
$$3.x-4=Ln(1'6) \ , \ 3.x-4=0'47 \ , \ x=1'49 \ , \ P_0(1'49, 1977'2)$$

Prenem una abscissa pròxima a $x_0=1'49$, per exemple $x_1=2$, i de $f(x_1)=g(x_2)$ calculem x_2.

$$5.\exp(2.2+3)=8.\exp(7-x_2) \ , \ \exp(7)/\exp(7-x_2)=8/5 \ ,$$
$$\exp(x_2)=1'6 \ , \ x_2=0'47$$

Per tant, donat un x_n, podem trobar x_{n+1} igualant $f(x_n)$ amb $g(x_{n+1})$. Ens quedarà:

$$5.\exp(2.x_n+3)=8.\exp(7-x_{n+1}) \ , \ \exp(2.x_n+3)/\exp(7-x_{n+1})=8/5 \ ,$$
$$\exp(2.x_n+x_{n+1}-4)=1'6 \ , \ 2.x_n+x_{n+1}-4=0'47 \ , \ x_{n+1}=4'47-2.x_n,$$

que és la fórmula de recurrència.

Obtindrem la successió $(x_n)=(2, 0'47, 3'53, -2'59, 9'65,\ldots)$.

Com que és una successió oscil·lant divergent, podem assegurar que es tracta d'un equilibri inestable.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Successions de nombres reals

Definició:

$(a_n)=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots)$ **successió** $\Leftrightarrow \exists f: N \to R \ / \ \forall n \in N \Rightarrow f(n)=a_n$

Monotonia:

S. monòtones creixents: $\forall n \in N \ , \ a_n \leq a_{n+1}$

S. monòtones decreixents: $\forall n \in N \ , \ a_n \geq a_{n+1}$

S. constants: $\forall n \in N \ , \ a_n = a_{n+1} \ (=k)$

Acotació:

S. acotades inferiorment: $\exists k_i \in R \ / \ \forall n \in N \ , \ a_n \geq k_i$

S. acotades superiorment: $\exists k_s \in R \ / \ \forall n \in N \ , \ a_n \leq k_s$

S. acotades: $\exists k_i, k_s \in R \ / \ \forall n \in N \ , \ k_i \leq a_n \leq k_s$

Equivalentment: $\exists k \in R \ / \ \forall n \in N \ , \ |a_n| \leq k$

Operacions amb successions

Successió: (a_n) Conjunt de successions: $S=\{(a_n)\}$

Suma (+): $\forall (a_n),(b_n) \in S \ , \ (a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$

Producte intern (•): $\forall (a_n),(b_n) \in S \ , \ (a_n)\bullet(b_n)=(a_n \cdot b_n)$

Potència (↑): $\forall (a_n),(b_n) \in S \ , \ (a_n)\uparrow(b_n)=(a_n \uparrow b_n)$

Producte extern (.): $\forall \lambda \in R \wedge \forall (a_n) \in S \ , \ \lambda.(a_n)=(\lambda.a_n)$

Propietats de les operacions

(I) (S, +, •)= **anell commutatiu amb element unitat**

Axiomes i operacions derivades:

(1) El. neutre per la suma: $(0)=(0,0,\ldots,0,\ldots)$ (suc. nul.la)

(2) El. oposat per la suma: $-(a_n)=(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n,\ldots)$

(3) Diferència de successions: $(a_n)-(b_n)=(a_n)+[-(b_n)]=(a_n-b_n)$

(4) El. neutre pel producte: $(1)=(1,1,\ldots,1,\ldots)$ (suc. unitat)

(5) Successió inversible: $(a_n)=$**Invers.** $\Leftrightarrow \forall i \in N \ , \ a_i \neq 0.$

(6) Conj. successions inversibles: S'

(7) El. invers pel producte: $(a_n) \in S' \Rightarrow (a_n)^{-1}=(a_n^{-1})=(1/a_n)=$
$=(1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n,\ldots)$

(8) Quocient de successions: $(a_n) \in S \ , \ (b_n) \in S' \Rightarrow$
$(a_n)/(b_n)=(a_n)\bullet(b_n)^{-1}=(a_1/b_1, a_2/b_2, \ldots, a_n/b_n,\ldots)$

Propietats de les operacions (cont.)

(II) (S, +, .)= **espai vectorial real**

Axiomes: $\forall \lambda,\mu \in R \ \wedge \ \forall (a_n),(b_n) \in S$:

(1) Associativitat escalar: $\lambda.[\mu.(a_n)]=(\lambda.\mu).(a_n)$

(2) Distributivitat escalar: $(\lambda+\mu).(a_n)=\lambda.(a_n)+\mu.(a_n)$

(3) Distributivitat vectorial: $\lambda.[(a_n)+(b_n)]=\lambda.(a_n)+\lambda.(b_n)$

(4) El. unitat del prod. extern: $\mathbf{1.(a_n)=(a_n)}$

Progressions aritmètiques

Progressió aritmètica: $(a_n) \in S \ / \ \forall n \in N \ , \ a_{n+1}-a_n=d \ , \ d \in R$

Diferència: $\mathbf{d}$ Terme general: $a_n=a_1+(n-1).d$

Primers n termes d'una p. a.: $a_1 , a_2, a_3 , \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

Prop. equidistància: $a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = a_3+a_{n-2} = \ldots = a_i+a_{n-i+1}$

Suma dels n primers termes: $S_n=\left(\dfrac{a_1+a_n}{2}\right).n$

Progressions geomètriques

Progressió geomètrica: $(a_n) \in S' \ / \ \forall n \in N \ , \ a_{n+1}/a_n=r \ , \ r \in R-\{0\}$

Raó: $\mathbf{r}$ Terme general: $a_n=a_1.r^{n-1}$

Primers n termes d'una p.g.: $a_1 , a_2, a_3 , \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

Prop. equidistància: $a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = a_3.a_{n-2} = \ldots = a_i.a_{n-i+1}$

Producte dels n primers termes: $P_n=\left(\sqrt{a_1.a_n}\right)^n$

Suma dels n primers termes: $S_n=\dfrac{a_n.r-a_1}{r-1}$ o bé $S_n=\dfrac{a_1.(r^n-1)}{r-1}$

Suma d'infinits termes d'una p. g. decreixent: $S=a_1/(1-r)$

Límits de successions

Successió de nombres reals: $(a_n) \in S_n$

Definició topològica de límit:

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n \quad (a \in R) \ \Leftrightarrow \ [\ \forall B_\varepsilon(a) \ , \ \exists n_o \in N \ / \ \forall n \geq n_o \ \Rightarrow \ a_n \in B_\varepsilon(a)\ ]$$

Definició clàssica:

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n \quad (a \in R) \ \Leftrightarrow \ [\ \forall \varepsilon >0 \ , \ \exists n_o \in N \ / \ \forall n \geq n_o \ \Rightarrow \ |a_n-a|<\varepsilon\ ]$$

Límits de successions (cont.)

Suc. convergents: (a_n)=**S. conv.** $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}$ / $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Conjunt successions convergents: S_c

Suc. de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ / $\forall n,m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

Suc. infinitesimals: (a_n)=**S. infinitesimal** $\Leftrightarrow (a_n) \in S_c \wedge a=0$

Propietats operacionals dels límits

$\forall \lambda \in R$, $\forall (a_n),(b_n) \in S_c$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \wedge b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = a.b$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda . a_n) = \lambda . a$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$ si $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \uparrow b_n) = a \uparrow b$

Propietats d'acotació amb límits

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge |b_n| \leq k \ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = 0$

"El producte d'un successió infinitesimal per una successió acotada és una successió infinitesimal"

(8) $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+1} \geq a_n \wedge a_n \leq k \Rightarrow (a_n) \in S_c$

"Qualsevol successió creixent i acotada superiorment té límit"

(9) $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+1} \leq a_n \wedge a_n \geq k \Rightarrow (a_n) \in S_c$

"Qualsevol successió decreixent i acotada inferiorment té límit"

(10) $(a_n) \in S_c \Rightarrow |a_n| \leq k \ \forall n \in \mathbf{N}$

"Qualsevol successió convergent és acotada"

(11) $(a_n),(b_n),(c_n) \in S_c$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \wedge \forall n \geq n_0 \ a_n \leq b_n \leq c_n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ "Propietat dels termes acotats"

El nombre e d'Euler

Successió: $(e_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ $(e_n) = (2, 2'25, 2'3703, 2'4414, \ldots)$

Tipus: **monòt. creixent** $\wedge$ **acot. superiorm.**

Límit: **e=2'7182...**

Infinitèsims

Infinitèsim: (a_n) / $\left[(a_n)\neq(0) \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \right]$ Suc. infinitesimal no nul·la

Infinitèsims comparables: $(a_n),(b_n)$=infinit. $\wedge$ $b_n\neq 0$ $\forall n\in N$

$$(a_n) \text{ comp } (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n / b_n)=k \;,\; k\neq 0$$

Infinitèsims equivalents:

$$(a_n)\equiv(b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n / b_n)= 1$$

Taula d'infinitèsims equivalents: infinitèsim: $\varepsilon=(a_n)$

$\sin(\varepsilon) \equiv \varepsilon$	$1-\cos(\varepsilon) \equiv (\varepsilon)^2/2$
$\tan(\varepsilon) \equiv \varepsilon$	$b^{\varepsilon}-1 \equiv \varepsilon.\mathrm{Ln}(b)$ $(b>0)$
$e^{\varepsilon} -1 \equiv \varepsilon$	$\mathrm{Ln}(1+\varepsilon) \equiv \varepsilon$

Límits a l'infinit

Límit a més infinit: (successió no acotada superiorment)

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists n_o\in N \;/\; \forall n\geq n_o \;,\; a_n>K$$

Límit a menys infinit: (successió no acotada inferiorment)

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists n_o\in N \;/\; \forall n\geq n_o \;,\; a_n<-K$$

Indeterminacions

1) $\infty-\infty$ 2) $0.\infty$ 3) ∞/∞ 4) $0/0$ 5) 1^{∞} 6) ∞^{0} 7) 0^{0}

Càlcul de límits

Mètodes elementals:

A) Indet.: ∞/∞ Mètode: **divisió màxima potència de n**

B) Indet.: $\infty-\infty$ Mètode: **per conjugació** (Si hi ha arrels)

C) Indet.: 1^{∞} Mètode: **posar-ho com a potència de e**

Generalització de límits amb el número e:

Successió: $(a_n)^{(b_n)}$ on $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$

Indeterm.: 1^{∞}

Límit: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{(b_n)}=e^c$ on $c=\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-1).b_n$

Criteri de Stolz

Successions: $(a_n),(b_n)$ Objectiu: **límit del quocient**

Hipòtesis:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ o bé (b_n)=**suc. estric. creixent**

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right)=c$

Tesi: $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) \wedge \lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n)=c$

Fórmula de Stirling

Equivalència del factorial:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n.e^{-n}\sqrt{2.\pi.n}}\right)=1 \Leftrightarrow n! \equiv n^n.e^{-n}\sqrt{2.\pi.n}$$

Possible límit que es pot utilitzar: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k.n}=1$, k=const.

Taules de límits

Límit d'una suma:

Lim a_n+b_n		Lim b_n: $-\infty$	b	$+\infty$
Lim a_n	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Ind.**
	a	$-\infty$	**a+b**	$+\infty$
	$+\infty$	**Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Límit d'una diferència:

Lim a_n-b_n		Lim b_n: $-\infty$	b	$+\infty$
Lim a_n	$-\infty$	**Ind.**	$-\infty$	$-\infty$
	a	$+\infty$	**a-b**	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**Ind.**

Sèries numèriques

Successió: $(a_n)=(a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots)$ $a_n \in R$, $\forall n \in N$

Sumes parcials: $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, ..., $s_n=a_1+a_2+\ldots+s_n$, ...

Successió de sumes parcials: $(s_n)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)$

Sèrie: $((a_n) , (s_n))$ (parell format per les dues successions)

Notació de les sèries: $((a_n) , (s_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Notació simplificada: $((a_n) , (s_n))=\Sigma a_n$

Convergència de sèries

Sèrie convergent: Σa_n **convergent** $\Leftrightarrow \exists S \in R$ / $S=\lim_{n\to\infty} s_n$

(S=suma de la sèrie)

Cond. neces. de convergència: Σa_n **convergent** $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$

Sèrie divergent: Σa_n **divergent** $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\infty$

Sèrie oscil·lant:

Σa_n **oscil·lant** $\Leftrightarrow$ [$\nexists \lim_{n\to\infty} s_n \wedge \Sigma a_n$ **ni conv. ni diverg.**]

Sèries importants

Sèrie geomètrica: $\Sigma\, a.r^{n-1}$, $a,r \in R$, (r=raó)

Estudi de la convergència:

a) $|r|<1$ **convergent. Suma:** $S=a/(1-r)$

b) $|r|=1$ **si** $r=-1$ **oscil.lant i si** $r=1$ **divergent.**

c) $|r|>1$ **divergent**

Sèrie harmònica: $\Sigma\, 1/n^p$, $p \in R$

Estudi de la convergència:

a) $p\leq 1$ **divergent** b) $p>1$ **convergent**

Criteris de convergència

Criteris de comparació:

Sèries de termes no negatius: $\Sigma\, a_n$, $\Sigma\, b_n$ **on** $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall n$.

Taules de límits (cont.)

Límit d'un producte:

Lim $a_n \cdot b_n$		Lim b_n: $-\infty$	$b<0$	0	$b>0$	$+\infty$
Lim a_n	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**Ind.**	$-\infty$	$-\infty$
	$a<0$	$+\infty$	**a.b**	**0**	**a.b**	$-\infty$
	0	**Ind.**	**0**	**0**	**0**	**Ind.**
	$a>0$	$-\infty$	**a.b**	**0**	**a.b**	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Límit d'un quocient:

Lim a_n / b_n		Lim b_n: $-\infty$	$b<0$	0	$b>0$	$+\infty$
Lim a_n	$-\infty$	**Ind.**	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	**Ind.**
	$a<0$	**0**	**a/b**	$\pm\infty$	**a/b**	**0**
	0	**0**	**0**	**Ind.**	**0**	**0**
	$a>0$	**0**	**a/b**	$\pm\infty$	**a/b**	**0**
	$+\infty$	**Ind.**	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	**Ind.**

Límit d'una potència: (suposem $a_n>0$, $\forall n$)

Lim $a_n^{b_n}$		Lim b_n: $-\infty$	$b<0$	0	$b>0$	$+\infty$
Lim a_n	0	$+\infty$	$+\infty$	**Ind.**	**0**	**0**
	$0<a<1$	$+\infty$	a^b	**1**	a^b	**0**
	1	**Ind.**	**1**	**1**	**1**	**Ind.**
	$a>1$	**0**	a^b	**1**	a^b	$+\infty$
	$+\infty$	**0**	**0**	**Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Criteris de convergència (cont.)

1) Primer criteri de comparació: **Si** $0 \le a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$ $\Rightarrow$

1a) **Si** $\sum b_n$ **convergent** $\Rightarrow$ $\sum a_n$ **convergent.**

1b) **Si** $\sum a_n$ **divergent** $\Rightarrow$ $\sum b_n$ **divergent.**

2) Segon criteri de comparació: **Si** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = L$ $\Rightarrow$

2a) **Si** $L \neq 0 \wedge L \neq \infty \Rightarrow \sum a_n , \sum b_n$ **mateix caràcter**

2b) **Si** $L=0 \wedge \sum b_n$ **convergent** $\Rightarrow \sum a_n$ **convergent**

2c) **Si** $L=+\infty \wedge \sum b_n$ **divergent** $\Rightarrow \sum a_n$ **divergent**

Altres criteris de convergència

3) Criteri de Pringsheim. **Si** $\lim\limits_{n\to\infty} (n^p . a_n) = L$ **on** $L \neq 0 \wedge L \neq \infty \Rightarrow$

3a) **Si** $p>1 \Rightarrow \sum a_n$ **convergent**

3b) **Si** $p \le 1 \Rightarrow \sum a_n$ **divergent**

4) Criteri de D'Alembert. **Si** $a_n > 0$ $\forall n \in N \wedge \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \Rightarrow$

4a) **Si** $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ **divergent**

4b) **Si** $L<1 \Rightarrow \sum a_n$ **convergent**

5) Criteri de Raabe. **Si** $a_n > 0$ $\forall n \in N \wedge \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \Rightarrow$

5a) **Si** $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ **convergent**

5b) **Si** $L<1 \Rightarrow \sum a_n$ **divergent**

6) Criteri de Cauchy. **Si** $a_n > 0$ $\forall n \in N \wedge \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \Rightarrow$

6a) **Si** $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ **divergent**

6b) **Si** $L<1 \Rightarrow \sum a_n$ **convergent**

7) Criteri logarítmic. **Si** $a_n > 0$ $\forall n \in N \wedge \lim\limits_{n\to\infty} \frac{Ln(1/a_n)}{Ln(n)} = L \Rightarrow$

7a) **Si** $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ **convergent**

7b) **Si** $L<1 \Rightarrow \sum a_n$ **divergent**

Criteris de convergència (cont.)

8) Criteri de condensació de Cauchy.

Si $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$, **$(a_n)$ decreixent** $\wedge$ $b_n = m.a_m$ **on** $m = 2^n \Rightarrow$

8a) **Si** $\Sigma\, b_n$ **convergent** $\Rightarrow \Sigma\, a_n$ **convergent**

8b) **Si** $\Sigma\, b_n$ **divergent** $\Rightarrow \Sigma\, a_n$ **divergent**

Sèries alternades

Tipus de les S. A. : $\Sigma\,(-1)^n.a_n$, $\Sigma\,(-1)^{n+1}.a_n$ on $a_n \geq 0$

Criteri de convergència de Leibnitz:

Sigui (a_n) decreixent, llavors

S.A. convergent $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Convergència absoluta i condicional

Sèrie absolutament convergent:

$\Sigma\, a_n$ **absol. convergent** $\Leftrightarrow \Sigma |a_n|$ **convergent**

Sèrie condicionalment convergent:

$\Sigma\, a_n$ **cond. convergent** $\Leftrightarrow \Sigma\, a_n$ **converg.** $\wedge$ $\Sigma |a_n|$ **diverg.**

Aplicacions a la capitalització composta

Capitalització composta: Capital final: $C = C_0.(1+i)^t$

C_0=capital inicial , i=tant per u (i=r/100),
r= rèdit , t=temps (anys)

Generalització. Nombre de capitalitzacions anuals: **m**

$$\boxed{C = C_0.\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m.t}}$$

Capitalització contínua: $(m \to \infty)$ $\boxed{C = C_0.e^{i.t}}$

Anualitats de capitalització: $C = \dfrac{a.(1+i).[(1+i)^t - 1]}{i}$ C=capital, a=anualitat

Anualitats d'amortització: $D = \dfrac{a.[(1+i)^t - 1]}{i.(1+i)^t}$ D=deute, a=anualitat

Aplicació als tipus d'equilibri

A) Punts de tall de dues corbes:

Corbes: $\mathbf{y_1=f(x)} \wedge \mathbf{y_2=g(x)}$ Punts de tall: **sistema**

B) Tipus d'equilibri:

Punt de tall: $\mathbf{P_0(x_0,y_0)}$ Abscissa pròxima a x_0: $\mathbf{x_1}$

Construcció de la "teranyina": $f(x_n)=g(x_{n+1})$

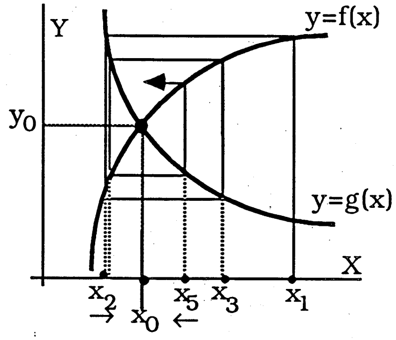
1) $\mathbf{x_1}$ 2) $\mathbf{f(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_2=?}$

3) $\mathbf{f(x_2)=g(x_3) \Rightarrow x_3=?}$ 4) $\mathbf{f(x_3)=g(x_4) \Rightarrow x_4=?}$

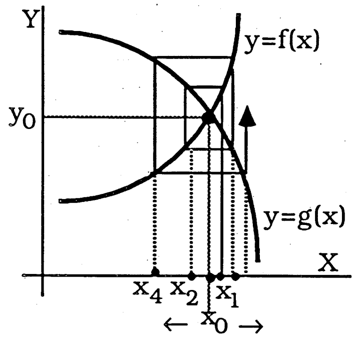
Successió: $\mathbf{(x_n)=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)}$

Equilibri estable: $\mathbf{(x_n)}$ **convergent** $\mathbf{(x_n \to x_0)}$

Equilibri inestable: $\mathbf{(x_n)}$ **divergent**



Equilibri estable



Equilibri inestable

e) PROBLEMES RESOLTS

2.1 SUCCESSIONS NUMÈRIQUES

Successions de números reals

31. Dedueix un possible terme general de les quatre successions següents, els cinc primers termes de les quals són:
$(a_n)=(5, 9, 13, 17, 21,...)$ $(b_n)=(3/1, 4/4, 5/9, 6/16, 7/25,...)$
$(c_n)=(1, 3, 6, 10, 15,...)$ $(d_n)=(-1, 6, 9/5, 4/3, 15/13,...)$

Solució. No hi ha un mètode general per a trobar el terme general d'una successió donada i, per tant, en farem la deducció, raonant de la manera que ens sembla més senzilla.

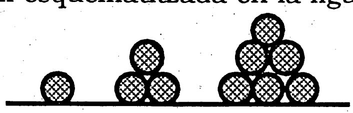
PRIMERA SUCCESSIÓ. En (a_n), tenim $a_1=5$, $a_2=9$, $a_3=13$, etc. Si la dibuixéssim en el pla coordenat veuríem que passa pels punts $P_1(1, 5)$, $P_2(2, 9)$, $P_3(3, 13)$, ..., $P_n(n, a_n)$,... i que seria una recta d'abscisses naturals. Fixem-nos que tallaria l'eix Y en el punt d'ordenada 1, $P_0(0, 1)$, i que el pendent és $m=(9-5)/(2-1)=4$. En conseqüència, l'equació de la recta, que pot considerar-se el terme general de la successió donada, és $\boxed{a_n=4.n+1}$.

Ens resultarà més fàcil si veiem que $(a_n)=(5, 9, 13, 17, 21,...)$ és una progressió aritmètica de diferència d=4, perquè la diferència entre cada dos termes consecutius és sempre constant i igual a 4. Com que el primer terme és $a_1=5$, si apliquem la fórmula del terme enèsim en les p. a., $a_n=a_1+(n-1).d$, tindrem $a_n=5+(n-1).4$, d'on $a_n=4.n+1$.

SEGONA SUCCESSIÓ. Els cinc primers termes són $b_1=3/1$, $b_2=4/4$, $b_3=5/9$, $b_4=6/16$ i $b_5=7/25$. Fixem-nos primer en els numeradors $N_1=3$, $N_2=4$, $N_3=5$,... i veurem que en general $N_n=n+2$. Ara mirem els denominadors $D_1=1$, $D_2=4$, $D_3=9$,... i ens adonarem que són quadrats perfectes, d'on $D_n=n^2$.

En conseqüència, el terme general de la successió (b_n) pot ser el $\boxed{b_n=(n+2)/n^2}$.

TERCERA SUCCESSIÓ. Tenim $(c_n)=(1, 3, 6, 10, 15, ...)$, la successió dels *nombres triangulars*, ja estudiada en la part d'Àlgebra moderna, i que veiem esquematitzada en la figura següent:



Apuntem els cinc primers termes, $c_1=1$, $c_2=3$, $c_3=6$, $c_4=10$ i $c_5=15$, per deduir una relació entre el terme i el seu índex. Observem que es verifica $\boxed{c_n=n.(n+1)/2}$.

També podem emprar el *mètode de les diferències successives*, que consisteix a fer les diferències entre cada dos termes consecutius, fins a aconseguir una successió constant.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 \\ & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Com que hem necessitat fer dues vegades les diferències, el terme general serà un polinomi de segon grau en n, $c_n=x.n^2+y.n+z$, on els coeficients els haurem de determinar sabent que es verifica $c_1=1$, $c_2=3$ i $c_3=6$.

Es complirà, per tant, el sistema, on restem successivament les equacions (1')=(2)-(1), (2')=(3)-(2) i (1")=(2')-(1'),

$$\begin{cases} x+\ y+z=1 & (1) \\ 4.x+2.y+z=3 & (2) \\ 9.x+3.y+z=6 & (3) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 3.x+y=2 & (1') \\ 5.x+y=3 & (2') \end{cases} \quad , \quad 2.x=1 \quad (1'')$$

Per tant, $x=1/2$. Substituint en (1'), $3.(1/2)+y=2$, $y=2-(3/2)$, $y=1/2$. Substituint en (1), $(1/2)+(1/2)+z=1$, $z=0$.

El terme general és $c_n=(1/2).n^2+(1/2).n+0=(n^2+n)/2=n.(n+1)/2$.

QUARTA SUCCESSIÓ. Tenim $(c_n)=(-1,\ 6,\ 9/5,\ 4/3,\ 15/13,...)$. En principi no sembla que hi hagi cap relació, però veiem que podem escriure la successió com a $(c_n)=(3/(-3),\ 6/1,\ 9/5,\ 12/9,\ 15/13,...)$, on ara els numeradors $N_1=3$, $N_2=6$, $N_3=9$,... són els múltiples de 3 i, per tant, $N_n=3.n$. D'altra banda, els denominadors $D_1=-3$, $D_2=1$, $D_3=5$.... formen una progressió aritmètica de 1r terme -3 i de diferència 4, per la qual cosa $D_n=-3+(n-1).4=-3+4.n-4=4.n-7$.

Consegüentment, el terme general de la quarta successió ens quedarà expressat com a $\boxed{d_n=3.n/(4.n-7)}$.

32. Si $a_n=(5.n+3)/(n^2+1)$ és el terme general d'una successió (a_n), prova que és decreixent i acotada. Si un dels seus termes és $a_n=0'76$, ¿de quin terme n es tracta?

Solució. Si trobem els primers termes veurem que la successió és $(a_n)=(4,\ 2'6,\ 1'8,\ 1'35,\ 1'07,\ 0'89,...)$. Sembla clar que és una successió decreixent i que és acotada, on la cota superior mínima és $k_s=4$ i la cota inferior màxima és $k_i=0$.

Demostrem, però que és decreixent, és a dir, per a tot n s'haurà de verificar $a_n \geq a_{n+1}$, o també, $a_n-a_{n+1} \geq 0$.

$$a_n-a_{n+1}=\frac{5.n+3}{n^2+1}-\frac{5.(n+1)+3}{(n+1)^2+1}=\frac{5.n+3}{n^2+1}-\frac{5.n+8}{n^2+2.n+2}=$$

$$=\frac{(5.n+3).(n^2+2.n+2)\ -\ (n^2+1).(5.n+8)}{(n^2+1).(n^2+2.n+2)}=$$

$$= \frac{5.n^3+10.n^2+10.n+3.n^2+6.n+6-5.n^3-8.n^2-5.n-8}{(n^2+1).(n^2+2.n+2)} =$$

$$= \frac{5.n^2+11.n-2}{(n^2+1).(n^2+2.n+2)} \geq 0$$

Com que l'anterior expressió $a_n-a_{n+1}\geq 0$, perquè $n\in N$ i tant el numerador com el denominador són positius, podem assegurar que la successió (a_n) és sempre decreixent.

Calculem ara el valor de n tal que a_n=0'76, $(5.n+3)/(n^2+1)$=0'76, $0'76.n^2+0'76=5.n+3$, $0'76.n^2-5.n-2'24=0$.

Resolem aquesta equació de segon grau,

$$n= \frac{5\pm\sqrt{25-4.0'76.(-2'24)}}{2.0'76} = \frac{5\pm\sqrt{31'8096}}{1'52} = \frac{5\pm 5'64}{1'52}$$

Com que $n\in N$, només considerarem el signe positiu, que ens dóna $n=(5+5'64)/1'52=7$. En conseqüència, es tracta del setè terme. Pots comprovar que, efectivament, a_7=0'76.

33. Sigui la successió (a_n)=(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), anomenada de «Fibonacci». Escriu els tres termes següents indicant la llei de formació. Calcula després el terme general sabent que és de la forma $a_n=a.(r_1)^n+b.(r_2)^n$, on r_1 i r_2 són les solucions de l'equació $r^2-r-1=0$.

Solució. Observem que, a partir del tercer, cada terme és igual a la suma dels dos anteriors. Així, es pot definir la successió de Fibonacci segons la llei de recurrència següent:

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ \forall n\geq 3$$

Per tant, els tres termes que seguiran als donats seran, doncs, $a_8=13+8=21$, $a_9=21+13=34$ i $a_{10}=34+21=55$.

Calculem les solucions de l'equació $r^2-r-1=0$,

$$r= \frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\text{, d'on } r_1= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ i } r_2= \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

D'aquesta manera, segons es desprèn de l'enunciat, el terme general a_n pot quedar expressat per

$$a_n= a.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Calculem els coeficients indeterminats a i b, sabent que $a_1=a_2=1$,

$$a_1= a.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=1 \quad \text{i} \quad a_2= a.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1$$

Reduint a comú denominador, obtindrem el sistema d'equacions amb coeficients irracionals,

$$\begin{cases} a.(1+\sqrt{5})+b.(1-\sqrt{5})=2 \\ a.(1+\sqrt{5})^2+b.(1-\sqrt{5})^2=4 \end{cases},\quad \begin{cases} (1+\sqrt{5}).a + (1-\sqrt{5}).b=2 \\ (6+2.\sqrt{5}).a+(6-2.\sqrt{5}).b=4 \end{cases}$$

Per resoldre'l, aplicarem la regla de Cramer. Trobarem en primer lloc el determinant D dels coeficients,

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 6+2.\sqrt{5} & 6-2.\sqrt{5} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{5}).(6-2.\sqrt{5})-(1-\sqrt{5}).(6+2.\sqrt{5}) = \ldots = 8.\sqrt{5}$$

Trobem també els determinants de les incògnites,

$$D_a=\begin{vmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ 4 & 6-2.\sqrt{5} \end{vmatrix} = \ldots = 8 \quad \text{i} \quad D_b=\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ 6+2.\sqrt{5} & 4 \end{vmatrix} = \ldots = -8$$

Les incògnites són:

$$a=\frac{D_a}{D}=\frac{8}{8.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad b=\frac{D_b}{D}=\frac{-8}{8.\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

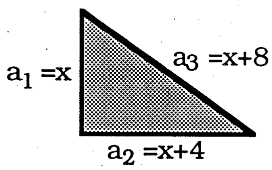
El terme general de la successió de Fibonacci és, doncs,

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Progressions aritmètiques i geomètriques

34. Un triangle rectangle té les longituds dels seus costats en progressió aritmètica de diferència 4 mm. Quina és la longitud d'aquests costats? Quant val l'àrea del triangle?

Solució. Suposem que a_1, a_2 i a_3 són els tres costats del triangle, ordenats per longitud. Com que estan en progressió aritmètica de diferència d=4, podem posar $a_1=x$, $a_2=x+4$ i $a_3=x+8$.



Ara bé, com que es tracta d'untriangle rectangle, complirà el teor. de Pitàgores,

$$x^2+(x+4)^2=(x+8)^2$$

Desenvolupant,

$$x^2+x^2+8.x+16=x^2+16.x+64$$

$$x^2-8.x-48=0$$

Si resolem aquesta equació de segon grau, obtindrem

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{64-4.(-48)}}{2.1}=\frac{8\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{8\pm16}{2}$$

Naturalment, com que la longitud ha de ser positiva, haurem de considerar només el signe positiu de l'arrel, x=(8+16)/2=12, i les longituds del triangle són

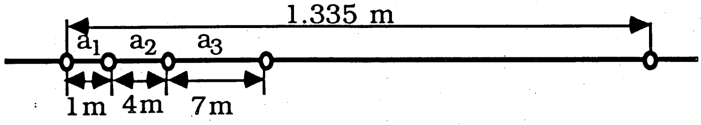
$$a_1=x=\boxed{12 \text{ mm}}, \quad a_2=x+4=\boxed{16 \text{ mm}} \quad \text{i} \quad a_3=x+8=\boxed{20 \text{ mm}}$$

L'àrea del triangle és immediata si agafem com a base a_2=16 mm i com a altura a_1=12 mm,

$$A=(b.h)/2=(16.12)/2=\boxed{96 \text{ mm}^2}.$$

35. Un avió vol arribar a un lloc determinat situat a uns 1.335 m de distància. En el primer segon recorre 1 m, en el segon segon 4 m, en el tercer segon 7 m, etc. Quant temps tardarà a arribar?

Solució. Fem un esquema per comprendre millor l'enunciat,



Observem que el problema consisteix a trobar la suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica de diferència 3, $S_n=[(a_1+a_n)/2].n$, on l'últim terme és $a_n=a_1+(n-1).d$, és a dir, $a_n=1+(n-1).3=3.n-2$.

Com que $S_n=1.335$, si substituïm obtindrem,

$$1335=[(1+3.n-2)/2].n \quad , \quad (3.n-1).n=2670 \quad , \quad 3.n^2-n-2670=0$$

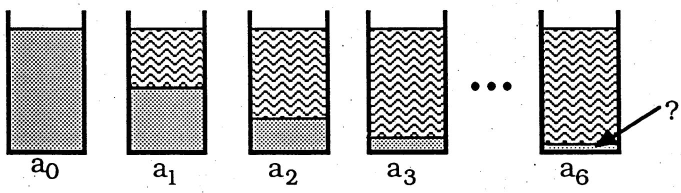
Resolem l'equació de segon grau,

$$n=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4.3.(-2670)}}{2.3}=\frac{1\pm\sqrt{32041}}{6}=\frac{1\pm179}{6}$$

Com sabem, la n ha de ser natural, per la qual cosa prendrem com a solució la donada pel signe positiu, n=(1+179)/6=30. És a dir, l'avió tardaria a arribar $\boxed{\text{30 seg.}}$.

36. D'un vas ple de vi es treu la meitat del contingut i es reemplaça per aigua. Es retira la meitat d'aquesta mescla i es torna a omplir d'aigua. Si aquesta operació es realitza en total 6 vegades, quins percentatges de vi i d'aigua contindrà el vas al final del procés?

Solució. Al començament el vas està ple de vi. Ho simbolitzem per $a_0=1$. Després de la 1a operació la quantitat de vi serà la meitat, $a_1=1/2$. Després de la 2a operació, suposant que l'aigua i el vi s'hauran barrejat completament, cosa no indicada en la figura següent, que només mostra les proporcions, serà $a_2=(1/2).a_1=1/4$,



La successió $(a_n)=(1/2, 1/4, 1/8,...)$ és una p. g. de raó r=1/2, on el terme enèsim és $a_n=a_1.r^{n-1}$. Després de la sisena operació tindrem, $a_6=(1/2).(1/2)^5=(1/2)^6=1/64$.

D'aquesta manera la quantitat de vi que quedarà en el vas és de $1/64\approx0'0156=\boxed{1'56\%}$ i la d'aigua, $63/64\approx0'9843=\boxed{98'43\%}$.

37. S'han estudiat els preus d'un producte, en funció d'un valor de referència x, durant els anys 3r, 4t i 5è, i s'ha obtingut $a_3=9.x$, $a_4=7.x+2.x^2$ i $a_5=x+8.x^2$. Si l'estudi teòric fet ens indica que ha de ser una progressió geomètrica creixent, quant val el paràmetre x? Quina és la raó d'aquesta progressió? Quins són els preus del producte durant els cinc primers anys?

Solució. Com que es tracta d'una prog. geomètrica, es verificarà $a_4=a_3.r$ i $a_5=a_4.r$, d'on aïllant r i igualant, $a_4/a_3=a_5/a_4$, $(a_4)^2=a_3.a_5$.

Substituint i operant,

$$(7.x+2.x^2)^2=(9.x).(x+8.x^2) \quad , \quad 49.x^2+28.x^3+4.x^4=9.x^2+72.x^3 \quad ,$$
$$4.x^4-44.x^3+40.x^2=0 \quad , \quad 4.x^2.(x^2-11.x+10)=0$$

Deduïm directament $4.x^2=0$, d'on $x=0$, i també $x^2-11.x+10=0$, d'on $x=1$ i $x=10$.

Per $x=0$ obtindríem $a_3=9.0=0$, $a_4=7.0+2.0^2=0$ i $a_5=0+8.0^2=0$, que no és vàlida perquè no és una progressió geomètrica creixent.

Per $x=1$ ens queda $a_3=9.1=9$, $a_4=7.1+2.1^2=9$ i $a_5=1+8.1^2=1$, que tampoc no és vàlida pel mateix motiu anterior.

Per $x=10$ resulta $a_3=9.10=90$, $a_4=7.10+2.10^2=70+200=270$ i $a_5=10+8.10^2=10+800=810$, que sí que és valida perquè són termes d'una progressió geomètrica creixent. Per tant, $\boxed{x=10}$.

Com que $a_3=90$, $a_4=270$ i $a_5=810$, la raó clarament és $\boxed{r=3}$.

Pels dos primers anys tindrem $a_2=90/3=30$ i $a_1=30/3=10$. Per tant, la successió de preus és $\boxed{(a_n)=(10, 30, 90, 270, 810,...)}$.

38. En Joan proposa al seu germà Pere el següent: «Jo et donaré 1 milió PTA el primer dia de març, 2 milions PTA el segon dia, 3 milions PTA el tercer dia, etc. En canvi tu, Pere, em donaràs 1 PTA el primer dia, 2 PTA el segon dia, 4 PTA el tercer dia, etc.». El tracte tindrà validesa fins a l'últim dia de març. Quant cobrarà cadascú si es fa l'aposta? En Joan pregunta si hi ha tracte, què contesta en Pere?

Solució. Sabem que el mes de març té 31 dies i també que en Joan dóna al seu germà Pere:

$$a_1=1_1000.000\text{PTA}, \quad a_2=2_1000.000\text{PTA}, \quad a_3=3_1000.000\text{PTA}, \ ...$$

Observem que és una p. a. de diferència $d=1_1000.000$PTA. Per tant, l'últim dia li pagarà $a_n=a_1+(n-1).d$,

$$a_{31}=1_1000.000+(31-1).1_1000.000=31_1000.000\text{PTA}$$

La suma de tots aquests termes és $S_n=[(a_1+a_n)/2].n$,

$$S_{31}=[(1_1000.000+31_1000.000)/2].31=\boxed{496_1000.000\text{PTA}}$$

D'altra banda, en Pere hauria de donar al seu germà Joan:

$$a_1=1 \text{ PTA}, \quad a_2=2 \text{ PTA}, \quad a_3=4 \text{ PTA}, \quad a_4=8 \text{ PTA}, \ ...$$

Ara la successió és una p. g. de raó r=2. L'últim terme, és a dir, l'última paga que en Pere haurà de fer a en Joan és $a_n=a_1.r^{n-1}$,

$$a_{31}=1.2^{31-1}=2^{30} \text{ PTA}$$

La quantitat total que haurà de pagar és $S'_n=(a_n.r-a_1)/(r-1)$,

$S'_n=(2^{30}.2-1)/(2-1)=2^{31}-1\approx \boxed{2.147_1 483.647 \text{ PTA}}$

En resum, guanyaria en Joan, qui va proposar l'aposta Naturalment, en Pere contesta: «No hi ha tracte!» (En Joan no sabia que en Pere mai no havia fet campana de classe de matemàtiques).

2.2. LÍMITS DE SUCCESSIONS

39. Sigui la successió $(a_n)=(1, 5/6, 7/9, 3/4, 11/15,...)$. Escriu el terme general i dedueix quin és el seu límit. Demostra-ho aplicant la definició de límit.

Solució. Tornem a escriure la successió, posant el seu primer terme com una fracció

$$(a_n)=\left(\frac{3}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{9}{12}, \frac{11}{15}, ...\right)$$

Fixem-nos que els numeradors són els termes d'una p. a. de primer terme 3 i diferència 2. El terme general és N=3+(n-1).2, és a dir, N=2.n+1.

Els denominadors són els múltiples de 3, que també es poden veure com a termes d'una p. a., i on el terme general és D=3.n.

Per tant, el terme general de la successió donada, $a_n=N/D$, és $\boxed{a_n=(2.n+1)/(3.n)}$.

Per intuir el límit de la successió, podem donar un valor elevat a la n en el seu terme general, per exemple n=100.000. Obtindrem el valor a=0'66667≈2/3. Sembla que el límit és $\boxed{a=2/3}$.

Demostrem que a=2/3 a partir de la definició de límit:

$$\forall\varepsilon>0 \ , \ \exists n_0\in N \ / \ \forall n\geq n_0 \ \Rightarrow \ |a_n-a|<\varepsilon$$

Substituint en $|a_n-a|<\varepsilon$,

$$\left|\frac{2.n+1}{3.n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon \ , \ \left|\frac{2.n+1-2.n}{3.n}\right|<\varepsilon \ , \ \left|\frac{1}{3.n}\right|<\varepsilon$$

Com que n és positiu, $1/(3.n)<\varepsilon$, d'on $n>1/(3.\varepsilon)$.

Així, doncs, si prenem $n_0=E[1/(3.\varepsilon)]+1$, on E és la funció "part entera", s'acompleix la condició de la definició.

Per exemple, si ε=0'001 tindrem n_0=E[1/0'003]+1=333+1=334. Si agafem n=335 tindríem a_{335}=(2.335+1)/(3.335)=671/1005, i

$$|a_{335}-a|=|0'6676616-0'6666666|=0'0009949<0'001.$$

40. Es defineix per recurrència la successió $a_1=\sqrt{2}$ i $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ per $n\geq 2$. Comprova que aquesta successió és estrictament creixent i també acotada superiorment. Calcula després el seu límit.

Solució. Veiem que (a_n) és una successió estrictament creixent,

$$a_1=\sqrt{2}\approx 1'41 \ , \ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 1'84 \ , \ a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\approx 1'96 \ldots$$

Demostrem-ho, però, pel mètode d'inducció, provant que sempre $a_n<a_{n+1}$. Per n=1 es verifica, perquè $a_1<a_2$. Suposem-ho cert per n=k (hipòtesi d'inducció) i demostrem que es complirà per n=k+1. És a dir, suposem que $a_k<a_{k+1}$ i provem que $a_{k+1}<a_{k+2}$,

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+a_{k+1}}=a_{k+2}$$

A continuació veureme que la successió (a_n) és acotada superiorment, on una cota superior pot ser per exemple $k_s=3$. Provem-ho també pel mètode d'inducció.

Per n=1 es verifica, ja que $a_1\approx 1'41<3$. Suposem-ho cert per n=k i provem-ho que també ho serà per n=k+1, és a dir, suposem que $a_k<3$ i provem que també $a_{k+1}<3$,

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+3}\approx 2'23<3$$

Finalment, calculem el límit, a=Lim(a_n). Com que és $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ per $n\geq 2$, com més ens acostem al límit els termes a_n i a_{n+1} estaran cada vegada més pròxims, perquè qualsevol successió convergent és una successió de Cauchy. Per tant, en el límit, podem escriure:

$$a=\sqrt{2+a} \ , \ a^2=2+a \ , \ a^2-a-2=0$$

Si resolem aquesta equació de segon grau obtindrem a=2 i a=-1. Òbviament, la segona possibilitat no és vàlida perquè (a_n) és una successió de termes positius. Així, doncs, el límit és $\boxed{a=2}$.

Càlcul de límits

41. Troba els límits de les dues successions següents on els seus termes generals són expressats per:

$$a_n=\frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1} \qquad b_n=\frac{n^2-3}{2n-1}-\frac{n^2+n}{2n+1}$$

Solució. Trobarem el valor d'aquests límits dividint tant el numerador com el denominador per la màxima potència de n.

PRIMER LÍMIT.

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{(8.n^3+12.n^2+6.n+1)-(8.n^3-12.n^2+6.n-1)}{3.n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{24.n^2+2}{3.n^2+1}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{24 + 2/n^2}{3 + 1/n^2} = \frac{24+0}{3+0} = \boxed{8}$$

SEGON LÍMIT.

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3}{2n-1} - \frac{n^2+n}{2n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-3).(2.n+1) - (n^2+n).(2.n-1)}{(2.n-1).(2.n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2.n^3+n^2-6.n-3) - (2.n^3-n^2+2.n^2-n)}{4.n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-5.n-3}{4.n^2-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-5/n - 3/n^2}{4 - 1/n^2} = \frac{0-0}{4-0} = \boxed{0}$$

42. Siguin les successions $(a_n)=(3^{n+1}+5^{n+1})$ i $(b_n)=(3^n+5^n)$. Escriu els cinc primers termes de la successió quocient $(c_n)=(a_n/b_n)$. Quin sembla que és el seu límit? Justifica-ho.

Solució. Donant valors a n trobarem els quatre primers termes, tindrem $a_1=3^{1+1}+5^{1+1}=9+25=34$, $a_2=3^{2+1}+5^{2+1}=27+125=152$, etc. Les dues successions són

$(a_n)=(34,\ 152,\ 706,\ 3.368,\ 16.354,\ \ldots)$

$(b_n)=(8,\ 34,\ 152,\ 706,\ 3.368\ldots)$

La successió quocient, (c_n), es trobarà dividint terme a terme els termes d'índex igual:

$(c_n)=(34/8,\ 152/34,\ 706/152,\ 3.368/706, 16.354/3.368,\ \ldots)$

O també, $(c_n)=(4'25,\ 4'47,\ 4'64,\ 4'77,\ 4'85,\ \ldots)$

Intuïtivament, com que els termes de la successió anterior s'acosten cada vegada més a 5, sembla que aquest ha de ser el seu límit. Trobem-ho, però, analíticament,

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3.3^n+5.5^n}{3^n+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3.3^n/5^n + 5}{3^n/5^n + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3.(3/5)^n + 5}{(3/5)^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3.0'6^n + 5}{0'6^n + 1} = \frac{3.0+5}{0+1} = \boxed{5}$$

43. Calcula els valors que han de tenir els paràmetres p i q, perquè valgui zero el límit de la successió (a_n), on el terme general és:

$$a_n = \mathrm{Ln}\left(\frac{(p-1).n^2+3.n+4}{q.n+3} \right)$$

Solució. Com que ha de ser $\lim(a_n)=0$ i com que $\mathrm{Ln}(1)=0$, haurà de verificar-se que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(p-1).n^2+3.n+4}{q.n+3} = 1$$

Per tal que això es compleixi, el numerador i el denominador hauran de ser polinomis del mateix grau en la indeterminada n i amb coeficient igual pel terme de grau màxim.

Així, doncs, p-1=0 i 3=q, d'on obtenim $\boxed{p=1 \text{ i } q=3}$.

44. Troba pel mètode de conjugació els tres límits següents i obtén després el valor de la seva suma, S=a+b+c.

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right) \qquad b=\lim_{n\to\infty} 2n.\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+6n-4}-\sqrt{4n^2-2}\right)$$

Solució. En aquests exercicis multiplicarem tant el numerador com el denominador per l'expressió conjugada de la que provoca la indeterminació. Veiem-ho en cadascun dels tres límits donats.

PRIMER LÍMIT.

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right).\left(\sqrt{n^2-5n+6}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-5n+6}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-5n+6)-n^2}{\sqrt{n^2-5n+6}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n+6}{\sqrt{n^2-5n+6}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5+6/n}{\sqrt{1-(5/n)+(6/n^2)}+1}=$$

$$=\frac{-5+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=\boxed{\frac{-5}{2}}$$

SEGON LÍMIT.

$$b=\lim_{n\to\infty}2n.\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n.\left(\sqrt{n^2+1}-n\right).\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n.(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+(1/n^2)}+1}=\frac{2}{1+1}=\boxed{1}$$

TERCER LÍMIT.

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+6n-4}-\sqrt{4n^2-2}\right).\left(\sqrt{4n^2+6n-4}+\sqrt{4n^2-2}\right)}{\sqrt{4n^2+6n-4}+\sqrt{4n^2-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+6n-4)-(4n^2-2)}{\sqrt{4n^2+6n-4}+\sqrt{4n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-2}{\sqrt{4n^2+6n-4}+\sqrt{4n^2-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6-2/n}{\sqrt{4+(6/n)-(4/n^2)}+\sqrt{4-(2/n^2)}}=\frac{6-0}{\sqrt{4+0-0}+\sqrt{4-0}}=\frac{6}{2+2}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

La suma dels tres límits és S=a+b+c=(-5/2)+1+(3/2)=$\boxed{0}$.

45. Desenvolupa en primer lloc l'expressió $A=(p-q).(p^2+p.q+q^2)$ i utilitza-la després per calcular els dos límits següents on, apareixen arrels cúbiques:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right) \qquad b=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+5n^2}-\sqrt[3]{n^3+4}\right)$$

Solució. Multiplicant, $A=p^3+p^2.q+p.q^2-p^2.q-p.q^2-q^3$. Per tant, resulta $A=p^3-q^3$. Calculem tot seguit els dos límits donats.

PRIMER LÍMIT. Si anomenem $p=\sqrt[3]{n^3+1}$ i $q=n$, multiplicarem numerador i denominador per $p^2+p.q+q^2$,

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right).\left(\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+1}+n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+1}+n^2\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1-n^3}{\left(\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+1}+n^2\right)}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

SEGON LÍMIT. Anomenem $p=\sqrt[3]{n^3+5.n^2}$ i $q=\sqrt[3]{n^3+4}$ i multipliquem numerador i denominador per $p^2+p.q+q^2$,

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+5.n^2}-\sqrt[3]{n^3+4}\right).\left(\sqrt[3]{(n^3+5.n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+5.n^2).(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}\right)}{\sqrt[3]{(n^3+5.n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+5.n^2).(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+5.n^2)-(n^3+4)}{\sqrt[3]{n^6+10.n^5+25.n^4}+\sqrt[3]{n^6+5.n^5+4.n^3+20.n^2}+\sqrt[3]{n^6+8.n^3+16}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-4/n^2}{\sqrt[3]{1+10/n+25/n^2}+\sqrt[3]{1+5/n+4/n^3+20/n^4}+\sqrt[3]{1+8/n^3+16/n^6}}=$$

$$=\frac{5-0}{\sqrt[3]{1+0+0}+\sqrt[3]{1+0+0+0}+\sqrt[3]{1+0+0}}=\boxed{\frac{5}{3}}$$

Criteri de Stolz

46. Comprova que són successions infinitesimals les successions que tenen per termes generals:

$$a_n=\frac{Ln(1+n)}{n} \qquad b_n=\frac{1!+3!+5!+\ldots+(2.n-1)!}{2!+4!+6!+\ldots+(2.n)!}$$

Solució. Recordem que una successió infinitesimal és aquella que tendeix a zero

PRIMER LÍMIT. Veiem que $\lim[Ln(1+n)]=\infty$ i també $\lim(n)=\infty$. Per tant, podrem aplicar el criteri de Stolz,

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(1+n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(1+n)-Ln(1+(n-1))}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(1+n)-Ln(n)}{1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}Ln\left(\frac{1+n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=Ln(1)=\boxed{0}$$

SEGON LÍMIT. Aquí també tant el numerador com el denominador són successions divergents a $+\infty$. Apliquem el criteri de Stolz,

$$b=\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1!+3!+5!+\ldots+(2.n-1)!}{2!+4!+6!+\ldots+(2.n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[1!+3!+5!+\ldots+(2.n-3)!+(2.n-1)!] - [1!+3!+5!+\ldots+(2.n-3)!]}{[2!+4!+6!+\ldots+(2.n-2)!+(2.n)!] - [2!+4!+6!+\ldots+(2.n-2)!]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2.n-1)!}{(2.n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2.n-1)!}{(2.n).(2.n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2.n} = \boxed{0}$$

Com que les dues successions tenen el límit zero, podem dir que són dues successions infinitesimals.

47. Calcula el límit de la successió (c_n), que és el quocient de les successions (a_n) i (b_n) de termes generals:

$$a_n=\sin(\alpha)+4.\sin(\alpha/2)+\ldots+n^2.\sin(\alpha/n) \quad \text{i} \quad b_n=n^2$$

Solució. Veiem que (b_n) és una successió estrictament creixent en què $\lim(b_n)=+\infty$. Podem, doncs, aplicar el criteri de Stolz,

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\alpha)+4.\sin(\alpha/2)+\ldots+n^2.\sin(\alpha/n)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[\sin(\alpha)+\ldots+n^2.\sin(\alpha/n)] - [\sin(\alpha)+\ldots+(n-1)^2.\sin(\alpha/(n-1))]}{n^2 - (n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2.\sin(\alpha/n)}{n^2 - (n^2-2.n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2.\sin(\alpha/n)}{2.n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2.(\alpha/n)}{2.n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n.\alpha}{2.n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{2-1/n} = \boxed{\frac{\alpha}{2}}$$

Fem notar que hem substituït $\sin(\alpha/n)$ per α/n, ja que són dos infinitèsims equivalents.

Límits de potències

48. Troba els límits de les potències següents, posant-los, si cal, en funció del nombre d'Euler:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n^2}{2n^2-n}\right)^{\frac{3n}{n^2+4}} \qquad b=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{4+n^2}\right)^{\frac{3-4n^2}{2n+1}}$$

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{5n} \qquad d=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{2+n^2}{n+3}}$$

Solució. Els dos primers límits es troben directament, ja que no donen cap forma indeterminada:

PRIMER LÍMIT.

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n^2}{2.n^2-n}\right)^{\frac{3.n}{n^3+4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^0=\boxed{1}$$

SEGON LÍMIT.

$$b=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3.n^2-2}{4+n^2}\right)^{\frac{3-4n^2}{2.n+1}}=3^{-\infty}=\boxed{0}$$

TERCER LÍMIT.

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3.n-1}{3.n+1}\right)^{5.n}=1^{+\infty}$$

Aquest límit el trobarem de manera que quedi una exponencial de base e i d'exponent $k=\text{Lim}[(a_n-1).b_n]$,

$$k=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3.n-1}{3.n+1}-1\right).5.n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3.n-1-3.n-1}{3.n+1}\right).5.n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{-10.n}{3.n+1}=-10/3$$

Per tant, el límit és $c=e^k=\boxed{e^{-10/3}}$.

QUART LÍMIT.

$$d=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{2+n^2}{n+3}}=1^{+\infty}$$

Podríem trobar el seu límit amb el mateix procediment que el de l'apartat anterior, però el determinarem de manera constructiva, fent aparèixer el número $e=\text{Lim}(1+1/n)^n$,

$$d=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{2+n^2}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^{\frac{2+n^2}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1-n+1}{n-1}\right)^{\frac{2+n^2}{n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{2+n^2}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n-1)/2}\right)^{\frac{n-1}{2}.\frac{2}{n-1}.\frac{2+n^2}{n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(n-1)/2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2n^2+4}{n^2+2.n-3}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2.n^2+4}{n^2+2.n-3}}=\boxed{e^2}.$$

---

49. Troba la relació que hi ha d'haver entre els paràmetres p i q perquè tinguin el mateix límit les successions de termes generals:

$$a_n=\left(\frac{n+p}{n+2}\right)^{n+q}\quad \text{i}\quad b_n=\left(\frac{n+q}{n+1}\right)^{2n+p}$$

Solució. Com que els límits presenten una indeterminació del tipus 1^∞, seran de la forma e^c, on $c=\text{Lim}[(a_n-1).b_n]$, (a_n) és la successió de la base i (b_n) la de l'exponent.

PRIMER LÍMIT.

$$c=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+p}{n+2}-1\right).(n+q)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+p-n-2}{n+2}\right).(n+q)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(p-2).(n+q)}{n+2}\right]=$$

$$=(p-2).\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+q}{n+2}\right]=(p-2).1=p-2.$$ Per tant, $a=e^{p-2}$.

SEGON LÍMIT.

$$c=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+q}{n+1}-1\right).(2.n+p)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(q-1).(2.n+p)}{n+1}\right]=$$

$$=(q-1).\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2.n+p}{n+1}\right]=(q-1).2=2.q-2.\quad \text{Per tant, } b=e^{2.q-2}.$$

Per hipòtesi ens diuen que els dos límits han de ser iguals. Per tant, es verificarà que a=b , $e^{p-2}=e^{2.q-2}$, p-2=2.q-2 , $\boxed{p=2.q}$.

---

50. Siguin les successions (a_n), (b_n), (c_n) i (d_n) que tenen per termes generals:

$$a_n=2+3n^4\ ,\quad b_n=\frac{1}{3+2.Ln(n+1)}\ ,\quad c_n=\frac{n+2}{3n^3-1}\quad i\quad d_n=\frac{1}{Ln(n^4-3)}$$

Calcula els límits següents:

$$L_1=\lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n})\qquad i\qquad L_2=\lim_{n\to\infty}(c_n^{d_n})$$

Solució. Observem que els límits de les successions donades són, respectivament, a=+∞, b=0, c=0 i d=0. Calculem ara els límits de les potències donades.

PRIMER LÍMIT.

$$L_1=\lim_{n\to\infty}(2+3.n^4)^{\frac{1}{3+2.Ln(n+1)}}=\infty^0\quad \text{Indeterminat}$$

Apliquem logaritmes neperians,

$$Ln(L_1)=Ln\left[\lim_{n\to\infty}(2+3.n^4)^{\frac{1}{3+2.Ln(n+1)}}\right]=\lim_{n\to\infty}Ln\left[(2+3.n^4)^{\frac{1}{3+2.Ln(n+1)}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(2+3.n^4)}{3+2.Ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\left[n^4.(3+2/n^4)\right]}{3+2.Ln\left[n.(1+1/n)\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4.Ln(n)+Ln(3+2/n^4)}{3+2.Ln(n)+2.Ln(1+1/n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\dfrac{Ln(3+2/n^4)}{Ln(n)}}{\dfrac{3}{Ln(n)}+2+\dfrac{2.Ln(1+1/n)}{Ln(n)}}=$$

$$=\frac{4+0}{0+2+0}=2.\quad \text{Per tant, } Ln(L_1)=2\ ,\quad \boxed{L_1=e^2}$$

SEGON LÍMIT.

$$L_2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3.n^3-1}\right)^{\frac{1}{Ln(n^4-3)}}=0^0\quad \text{Indeterminat}$$

Apliquem logaritmes neperians,

$$Ln(L_2)=Ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3.n^3-1}\right)^{\frac{1}{Ln(n^4-3)}}\right]=\lim_{n\to\infty}Ln\left[\left(\frac{n+2}{3.n^3-1}\right)^{\frac{1}{Ln(n^4-3)}}\right]=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(n+2) - \mathrm{Ln}(3.n^3-1)}{\mathrm{Ln}(n^4-3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}[n.(1+2/n)] - \mathrm{Ln}[n^3.(3-1/n^3)]}{\mathrm{Ln}[n^4.(1-3/n^4)]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(n) + \mathrm{Ln}(1+2/n) - 3.\mathrm{Ln}(n) - \mathrm{Ln}(3-1/n^3)}{4.\mathrm{Ln}(n) + \mathrm{Ln}(1-3/n^4)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2 + \dfrac{\mathrm{Ln}(1+2/n)}{\mathrm{Ln}(n)} - \dfrac{\mathrm{Ln}(3-1/n^3)}{\mathrm{Ln}(n)}}{4 + \dfrac{\mathrm{Ln}(1-3/n^4)}{\mathrm{Ln}(n)}} = \frac{-2+0-0}{4+0} = -\frac{1}{2}$$

Per tant, $\mathrm{Ln}(L_2)=-1/2$ i així $L_2=e^{-1/2}$, o també $\boxed{L_2=1/\sqrt{e}}$.

51. Suposant els paràmetres p i q positius, calcula el límit:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{p}+\sqrt[n]{q}}{2}\right)^n$$

Particularitza-ho després per p=2 i q=8, trobant els tres primers termes de la successió i el valor del límit. Comprova que a_1 i a són respectivament les mitjanes aritmètica i geomètrica de p i q.

Solució. Sabem que, si p és una constant positiva, $\mathrm{Lim}(p^{1/n})=1$. En conseqüència,

$$a= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{p}+\sqrt[n]{q}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p^{1/n}+q^{1/n}}{2}\right)^n = 1^\infty \quad \text{Indeterminat}$$

Trobem el seu valor $a=e^c$, on $c=\mathrm{Lim}[(a_n-1).b_n]$. A més, emprarem l'equivalència dels infinitèsims $p^{1/n}-1$ i $(1/n).\mathrm{Ln}(p)$.

$$c= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{p^{1/n}+q^{1/n}}{2}-1\right).n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{p^{1/n}+q^{1/n}-2}{2}\right).n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(p^{1/n}-1)+(q^{1/n}-1)}{2}.n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1/n).\mathrm{Ln}(p)+(1/n).\mathrm{Ln}(q)}{2}.n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{Ln}(p)+\mathrm{Ln}(q)}{2.n}.n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}(p.q)}{2} = \frac{\mathrm{Ln}(p.q)}{2} = \mathrm{Ln}\sqrt{p.q}$$

Per tant, $a=e^c=e^{\mathrm{Ln}\sqrt{p.q}}= \boxed{\sqrt{p.q}}$

En el cas particular de p=2 i q=8, els tres primers termes de la successió de terme general

$$a_n=\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}}{2}\right)^n$$

són $a_1=5$, $a_2=4'5$, $a_3=4'33$ que tendeix al límit $a=\sqrt{2.8}=4$.

Observem que la mitjana aritmètica (m. a.) és el primer terme de la successió, $a_1=(p+q)/2$, i que la mitjana geomètrica (m. g.) és el límit d'aquesta successió $a=\sqrt{p.q}$.

Així, en aquesta successió, es parteix de la m. a., que es va modificant fins a convertir-se, en el límit, en la m. g.

52. Si (a_n) és un infinitèsim, calcula el límit de la nova successió de terme general:

$$b_n=[\cos(a_n) + p.\sin(a_n)]^{\cot an(a_n)}$$

Solució. Com que (a_n) és un infinitèsim, $\text{Lim}(a_n)=0$. Calculem el límit de la nova successió (b_n).

$$b= \lim_{n\to\infty} (\cos(a_n) + p.\sin(a_n))^{\text{cotan}(a_n)} = (\cos(0)+p.\sin(0))^{1/\tan(0)} =$$

$$= (1+p.0)^{1/0} = 1^{\infty} \quad \text{Indeterminat}$$

Posem el límit com a potència del número e, e^c, on

$$c= \lim_{n\to\infty}[(\cos(a_n) + p.\sin(a_n)) -1).\text{cotan}(a_n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{p.\sin(a_n) - [1-\cos(a_n)]}{\tan(a_n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{p.\sin(a_n)}{\tan(a_n)} - \frac{1-\cos(a_n)}{\tan(a_n)}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{p.\sin(a_n)}{\tan(a_n)} - \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(a_n)}{\tan(a_n)}$$

Emprant infinitèsims equivalents, tindrem

$$c= \lim_{n\to\infty}\frac{p.(a_n)}{(a_n)} - \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^2/2}{(a_n)} = \lim_{n\to\infty} p - \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2} = p-0 = p$$

En conseqüència, el límit és $a=\boxed{e^p}$.

Fórmula de Stirling

53. Aplicant la fórmula de Stirling, dedueix el valor dels límits,

$$a= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} \quad , \quad b= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{i} \quad c= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2.n}.(n!)^2}{\sqrt{n}.(2.n)!}$$

Solució. La fórmula de Stirling ens diu que l'infinit n! és equivalent a l'infinit $n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}$

A més, recordem que $\text{Lim}(\sqrt[n]{k.n})=1$, on $k>0$. Amb aquestes consideracions ja podem resoldre els tres límits donats.

PRIMER LÍMIT.

$$a= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}} = \lim_{n\to\infty}[n.e^{-1}.\sqrt[2.n]{2.\pi.n}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}[n.e^{-1}.\sqrt[2.n]{\pi.(2.n)}] = +\infty.(1/e).1= \boxed{+\infty}$$

SEGON LÍMIT.

$$b= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt[n]{n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n.e^{-1}.\sqrt[2.n]{2.\pi.n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1 -1/n}{e^{-1}.\sqrt[2.n]{\pi.(2.n)}} = \frac{1-0}{e^{-1}.1} = \boxed{e}$$

TERCER LÍMIT.

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2.n}.(n!)^2}{\sqrt{n}.(2.n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2.n}(n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n})^2}{\sqrt{n}.(2.n)^{2.n}.e^{-2.n}\sqrt{2.\pi.(2.n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2.n}.n^{2.n}.e^{-2.n}.2.\pi.n}{\sqrt{n}.2^{2.n}.n^{2.n}.e^{-2.n}.2.\sqrt{\pi}.\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} = \boxed{\sqrt{\pi}}.$$

2.3. SÈRIES NUMÈRIQUES

54. Aplicant la condició necessària de convergència, demostra que són divergents les sèries:

a) $\Sigma\ n/(n+2)$ i b) $\Sigma\ 2n/(n+1)$

Solució. Calculem els límits de les successions inicials,

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \quad \text{i} \quad b = \lim_{n\to\infty} \frac{2.n}{n+1} = 2$$

Com que els límits són diferents de zero, la successions no són infinitesimals i, per tant, les sèries no són convergents, sinó divergents. La seva suma seria infinita.

Criteris de comparació

55. Posa en primer lloc la sèrie en funció del terme general i després, emprant el primer criteri de comparació, demostra que és divergent. La sèrie és:

$$\Sigma\, a_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{9} + \frac{9}{28} + \frac{16}{65} + \frac{25}{126} + \ldots$$

Solució. Calculem en primer lloc el terme general (a_n). Fixem-nos que els numeradors són els quadrats dels nombres naturals i que els denominadors són els seus cubs augmentats en una unitat. Per tant, la sèrie és $\Sigma a_n = \Sigma n^2/(n^3+1)$.

Comparem-la, per exemple, amb la sèrie $\Sigma b_n = \Sigma 1/(n+1)$, que és divergent perquè és una sèrie harmònica (amb p=1). Veiem que

$$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{1}{n+1} \quad \text{perquè} \quad n^2.(n+1) \geq n^3+1$$

Aquesta desigualtat és certa ja que $n^3+n^2 \geq n^3+1$, per tant, $n^2 \geq 1$. Podem deduir, així, que sempre $a_n \geq b_n$, i com que Σb_n és divergent, també és divergent la sèrie donada Σa_n.

56. Estudia si és convergent o divergent, aplicant el segon criteri de comparació, la sèrie següent:

$$\sum a_n = \sum \frac{n}{3.n^2+1}.\tan(1/n)$$

Solució. Aplicarem que l'infinitèsim tan(1/n) és equivalent al 1/n i compararem la sèrie donada amb la $\sum b_n = \sum(1/n^2)$, que sabem que és convergent perquè és una sèrie harmònica amb p=2>1.

Com que hem d'emprar el segon criteri de comparació, trobarem el límit del quocient entre les dues sèries,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3.n^2+1}.\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3.n^2+1}.\frac{1}{n}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3.n^2+1} = \frac{1}{3}$$

Com que, $L\neq 0$ i $L\neq\infty$, resulta que les dues sèries tindran el mateix caràcter. Com que $\sum b_n$ és convergent, també $\sum a_n$ és convergent.

Criteri de Pringsheim

57. Estudia la convergència o divergència de la sèrie següent, emprant el criteri de Pringsheim:

$$\sum a_n = \sum \frac{n.\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}+2}$$

Solució. Calculem el límit $L = \lim(n^p.a_n)$,

$$L = \lim_{n\to\infty} n^p.\frac{n.\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+1}.\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}+2}$$

Si prenem p=-1 ens quedarà

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+1/n}}{1+2/\sqrt[3]{n}} = \frac{\sqrt[3]{1+0}}{1+0} = 1$$

Com que $L\neq 0$ i $L\neq\infty$, i com que hem pres $p=-1<1$, el criteri de Pringsheim ens indica que la sèrie $\sum a_n$ és divergent.

Ho podíem comprovar també aplicant la condició necessària de convergència d'una sèrie. En efecte, com que $\lim(a_n)=\infty$, la successió (a_n) no és infinitesimal i, així, la sèrie $\sum a_n$ és divergent.

58. Estudia, segons els diferents valors del paràmetre positiu m, la convergència o divergència de la sèrie:

$$\sum a_n = \sum \frac{\sqrt[m]{n^3+1}}{n^2+3}$$

Solució. Estudiem el límit $L=\lim(n^p.a_n)$.

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p.\sqrt[m]{n^3+1}}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p.\sqrt[m]{n^3.(1+1/n^3)}}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+(3/m)}.\sqrt[m]{1+1/n^3}}{n^2+3}$$

Com que el límit de l'arrel és zero, si volem que el límit L tingui un límit $L\neq0$ i $L\neq\infty$, haurem de fer que les màximes potències de n del numerador i del denominador tinguin el mateix grau, és a dir, $p+(3/m)=2$, d'on $\boxed{p=2-(3/m)}$.

Prenent aquest valor de p, el límit serà L=1 i podrem aplicar el criteri de Pringsheim, on recordem que m és positiu:

Si $p>1$, la sèrie Σa_n és convergent. Això es donarà si $2-(3/m)>1$, $-(3/m)>-1$, $(3/m)<1$, $3<m$. Per tant, $\boxed{\text{si } m>3,\ \Sigma a_n \text{ és convergent}}$.

Si $p\leq1$, Σa_n és divergent. És a dir, si $2-(3/m)\leq1$, $-(3/m)\leq-1$, $(3/m)\geq1$, $3\geq m$. En conseqüència, $\boxed{\text{si } 0<m\leq3,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$.

Criteri de D'Alembert

59. Estudia el caràcter de la sèrie següent, trobant en primer lloc el terme general i utilitzant després el criteri de D'Alembert:

$$\Sigma a_n = \frac{1!}{1} + \frac{2!}{4} + \frac{3!}{27} + \frac{4!}{256} + \frac{5!}{3125} + \ldots$$

Solució. Descomponent en factors primers els denominadors, observarem que la sèrie és $\Sigma a_n = \Sigma n!/n^n$. Com que volem aplicar el criteri de D'Alembert, haurem de trobar el límit següent,

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!.n^n}{n!.(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1).n!.n^n}{n!.(n+1)^n.(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Com que, $L=(1/e)<1$, el criteri de D'Alembert ens diu que la sèrie donada $\boxed{\Sigma a_n \text{ és convergent}}$.

60. Discuteix la possible convergència o divergència, en funció dels paràmetres p i q, on $p>0$, de la sèrie següent:

$$\Sigma a_n = \Sigma \left(n^q / p^n\right)$$

Solució. Amb l'objectiu de servir-nos del criteri de D'Alembert, calcularem en primer lloc el límit següent:

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q/p^{n+1}}{n^q/p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q.p^n}{n^q.p^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q.p^n}{n^q.p^n.p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^q.\frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

Per tant, si $L=(1/p)<1$, és a dir, $\boxed{\text{si } p>1,\ \Sigma a_n \text{ és convergent}}$, mentre que si $L=(1/p)>1$, és a dir, $\boxed{\text{si } p<1,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$.

Si $p=1$, llavors $L=1$, i el criteri de D'Alembert no decideix. Ara bé, si $p=1$, la sèrie donada $\Sigma n^q/p^n$ ens queda reduïda a la Σn^q, que es pot transformar en la sèrie harmònica $\Sigma 1/n^{-q}$. D'aquí deduïm que si $-q\leq 1$, és a dir, $\boxed{\text{si } p=1 \text{ i } q\geq -1,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$, però si $-q>1$, és a dir, $\boxed{\text{si } p=1 \text{ i } q>-1,\ \Sigma a_n \text{ és convergent}}$.

Criteri de Raabe

61. Per mitjà del criteri de Raabe, estudia el caràcter convergent o divergent de la sèrie:

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{n.(n+1)}$$

Solució. Si volem aplicar el criteri de Raabe, haurem de trobar en primer lloc el límit següent:

$$L = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{1/[(n+1).(n+2)]}{1/[n.(n+1)]}\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{n}{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n.\frac{n+2-n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.n}{n+2} = 2$$

Com que $L=2>1$, el criteri de Raabe ens diu que la sèrie donada Σa_n és $\boxed{\text{convergent}}$.

62. Discuteix, segons els valors del paràmetre positiu p, la convergència o divergència de la sèrie:

$$\sum a_n = \sum \frac{n!}{p.(p+1).(p+2)\ldots(p+n-1)}$$

Solució. Per aplicar el criteri de Raabe haurem de trobar el límit següent:

$$L = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{(n+1)!/[p.(p+1)\ldots(p+n-1).(p+n)]}{n!/[p.(p+1)\ldots(p+n-1)]}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{n+1}{n+p}\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{n+p-n-1}{n+p}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(p-1).n}{n+p} = p-1$$

Així, doncs, si p-1>1, és a dir, $\boxed{\text{si } p>2,\ \Sigma a_n \text{ és convergent}}$, mentre que si p-1<1, és a dir, $\boxed{\text{si } p<2,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$.

Observem que pel cas L=p-1=1, és a dir, p=2, el criteri de Raabe no decideix. Estudiem, doncs, aquest cas particular; en el qual veiem que s'obté una sèrie harmònica:

$$\Sigma a_n = \Sigma \frac{n!}{2.3.4\ldots n.(n+1)} = \Sigma \frac{n!}{n!.(n+1)} = \Sigma \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = +\infty$$

En conclusió, $\boxed{\text{si } p=2,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$.

Criteri de Cauchy

63. Estudia la convergència o divergència de la sèrie següent aplicant el criteri de Cauchy:

$$\Sigma a_n = \Sigma\ 2^n.\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Solució. Si volem calcular el valor de la sèrie donada pel criteri de Cauchy, anomenat també criteri de l'arrel, haurem de trobar abans el límit de l'arrel enèsima del terme general,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n.\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n.\frac{1}{3^n}} = \frac{2}{3}$$

Observem que hem substituït l'infinitèsim $\sin(1/3^n)$ pel seu equivalent $1/3^n$. Com que hem obtingut L=(2/3)<1, el criteri de Cauchy ens indica que la sèrie $\boxed{\Sigma a_n \text{ ês convergent}}$.

64. Pel criteri de Cauchy i pels diferents valors del paràmetre p, estudia la convergència o divergència de la sèrie:

$$\Sigma a_n = \Sigma \left(\frac{n^2+p.n+1}{n^2}\right)^{n^2}$$

Solució. Calculem el límit de l'arrel enèsima del terme general,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+p.n+1}{n^2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+p.n+1}{n^2}\right)^{n} = 1^{\infty}$$

Com que ens ha quedat l'expressió indeterminada 1^∞, posarem el límit en funció del número d'Euler, e^c, on c vindrà donat per

$$c = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n^2+p.n+1}{n^2} - 1\right).n\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2+p.n+1-n^2}{n^2}.n\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{p.n+1}{n} = p$$

Així, doncs, el límit de l'arrel enèsima és $L=e^p$. En conseqüència, si $e^p<1$, és a dir, $\boxed{\text{si } p<0,\ \Sigma a_n \text{ és convergent}}$.

Si $e^p>1$, és a dir, $\boxed{\text{si } p>0,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$. Però si $e^p=1$, que equival a dir si p=0, el criteri de Cauchy no decideix. Estudiem aquest cas particular substituint p=0 en la sèrie donada,

$$\Sigma a_n = \Sigma \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} = \Sigma \left(1+ \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

Observem que la sèrie anterior és divergent, perquè el límit del seu terme general $\text{Lim}(a_n)=e\neq 0$, i això significa que la successió (a_n) no és infinitesimal, condició necessària per a la convergència de la sèrie. En conclusió, $\boxed{\text{si } p=0,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$.

Criteri logarítmic

65. Per mitjà del criteri logarítmic, estudia el caràcter convergent o divergent de la sèrie següent, definida per:

$$\Sigma\, a_n = \Sigma \left(1+ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$$

Solució. Trobarem en primer lloc el límit següent,

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ln}(1/a_n)}{\text{Ln}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ln}\,(1+ 1/\sqrt{n})^n}{\text{Ln}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.\text{Ln}\,(1+ 1/\sqrt{n})}{\text{Ln}(n)}$$

Substituïm l'infinitèsim $\text{Ln}(1+ 1/\sqrt{n})$ pel seu equivalent $1/\sqrt{n}$,

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{n.(1/\sqrt{n})}{\text{Ln}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\text{Ln}(n)}$$

Per calcular aquest límit podem aplicar el criteri de Stolz, ja que $(\text{Ln}(n))$ és una successió estrictament creixent que divergeix a $+\infty$. En conseqüència, el límit anterior serà igual a:

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\text{Ln}(n) - \text{Ln}(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\text{Ln}[n/(n-1)]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\text{Ln}[1+ 1/(n-1)]}$$

Tenint en compte que $\text{Ln}[1+1/(n-1)]$ i $1/(n-1)$ són infinitèsims equivalents, podrem substituir:

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{1/(n-1)} = \lim_{n\to\infty} (n-1).(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Fem servir ara el mètode de conjugació i després dividirem numerador i denominador per la màxima potencia de la n,

$$L= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1).(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1).[n-(n-1)]}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1- 1/n}{\sqrt{1/n} + \sqrt{1/n -1/n^2}} = \frac{1-0}{\sqrt{0} + \sqrt{0-0}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Com que $L=+\infty>1$, el criteri logarítmic ens indica que la sèrie donada Σa_n és $\boxed{\text{convergent}}$.

66. Pels diferents valors del paràmetre p, estudia la convergència o divergència de la sèrie següent, aplicant el criteri logarítmic:

$$\Sigma a_n=\left[(Ln(1))^{Ln(1)}\right]^p+\left[(Ln(2))^{Ln(2)}\right]^p+\left[(Ln(3))^{Ln(3)}\right]^p+\ldots$$

Solució. Com que en el càlcul d'una potència d'una altra potència s'han de multiplicar els exponents, el terme general de la successió que defineix la sèrie donada podrà ser expressat per

$$a_n=\left([Ln(n)]^{Ln(n)}\right)^p=[Ln(n)]^{p.Ln(n)}$$

Apliquem el criteri logarítmic per saber el caràcter convergent o divergent de la sèrie

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(1/a_n)}{Ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\left[Ln(n)^{p.Ln(n)}\right]^{-1}}{Ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\left[Ln(n)^{-p.Ln(n)}\right]}{Ln(n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-p.Ln(n).Ln[Ln(n)]}{Ln(n)}=\lim_{n\to\infty}-p.Ln[Ln(n)]$$

Observem que si $p>0$, llavors $L=-\infty<1$, si $p=0$, $L=0<1$ i si $p<0$, $L=+\infty>1$. En resum, aplicant el criteri logarítmic, podem deuir que $\boxed{\text{si } p\geq 0,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$ i $\boxed{\text{si } p<0,\ \Sigma a_n \text{ és convergent}}$.

Criteri de condensació de Cauchy

67. Segons els valors del paràmetre p, estudia la convergència o divergència de la sèrie següent, en la qual (a_n) és decreixent a partir d'un cert terme:

$$\Sigma a_n=\frac{(Ln(1))^p}{1}+\frac{(Ln(2))^p}{2}+\frac{(Ln(3))^p}{3}+\ldots$$

Solució. Com que en l'enunciat ja se'ns indica que (a_n) és decreixent a partir d'un cert terme, podrem aplicar el criteri de condensació de Cauchy prenent:

$$b_n=2^n.a_{2^n}=2^n.\frac{[Ln(2^n)]^p}{2^n}=[n.Ln(2)]^p=[Ln(2)]^p.n^p$$

Estudiem, doncs, la sèrie

$$\Sigma b_n=\Sigma\,[Ln(2)]^p.n^p=[Ln(2)]^p.\Sigma(1/n^{-p})$$

Com podem veure, es tracta de la sèrie harmònica, per la qual cosa, si $-p>1$, Σb_n és convergent, mentre que si $-p\leq 1$, aleshores Σb_n és divergent.

Pel criteri de condensació, les dues sèries Σa_n i Σb_n han de tenir el mateix caràcter, $\boxed{\text{si } p<-1,\ \Sigma a_n \text{ és convergent}}$, mentre que $\boxed{\text{si } p\geq -1,\ \Sigma a_n \text{ és divergent}}$.

Sèries alternades

68. Analitza el caràcter de les sèries següents, definides a partir de les successions de termes generals:

$$a_n = (-1)^n . n . \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b_n = (-1)^n \left[\frac{3+(-1)^n}{n}\right]$$

Solució. Estudiem en primer lloc el límit dels termes generals

PRIMERA SÈRIE.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n . n . \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n . \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \nexists$$

Com que no existeix el límit, la sèrie Σa_n no és convergent. Es tracta d'una sèrie $\boxed{\text{oscil·lant}}$.

SEGONA SÈRIE.

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n . \frac{3+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3.(-1)^n+1}{n} = 0$$

Es compleix, per tant, la condició necessària de convergència, però encara no és suficient. Hem de veure si (b_n) és una successió decreixent. Calculem els primers termes,

$$(b_n) = (2,\ 2,\ 0'66,\ 1,\ 0'4,\ 0'66,\ 0'28,\ 0'5, \ldots)$$

Com que no és una successió decreixent, sinó oscil·lant, podem afirmar que la sèrie Σb_n no és convergent, sinó $\boxed{\text{divergent}}$.

Convergència absoluta i condicional

69. Pels diferents valors del paràmetre p, analitza la convergència absoluta o condicional de la sèrie alternada següent:

$$\Sigma a_n = \Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^p}$$

Solució. Estudiem primer la convergència de la sèrie alternada, i observem que és decreixent si p>0. En efecte,

$$a_n > a_{n+1} \ , \ \frac{1}{1+n^p} > \frac{1}{1+(n+1)^p} \ , \ 1+(n+1)^p > 1+n^p \ , \ (n+1)^p > n^p \ ,$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^p > 1 \quad \text{que es verifica per} \quad p>0$$

Quant al límit d'aquesta successió, $a = \lim[1/(1+n^p)] = 0$, si $p>0$, $\Sigma(-1)^{n+1}.a_n$ és convergent, en virtut del criteri de Leibniz.

Si fos $p<0$, la successió $(a_n) = (1/(1+n^p))$ seria no decreixent i, per tant, la sèrie $\Sigma(-1)^{n+1}.a_n$ seria divergent.

Pel cas $p=0$, ens queda la sèrie $\Sigma(-1)^{n+1}.[1/(1+1)] = \Sigma(-1)^{n+1}/2$. Com que la successió que defineix la sèrie no és decreixent, deduïm que la sèrie ha de ser $\boxed{\text{oscil·lant}}$.

Estudiem a continuació la convergència absoluta pel cas p>0.

$$\Sigma|a_n| = \Sigma\left|\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^p}\right| = \Sigma\frac{1}{1+n^p} < \Sigma\frac{1}{n^p}$$

Aquesta sèrie l'hem comparada amb l'harmònica $\Sigma(1/n^p)$, que és convergent per p>1. En conseqüència, també $\Sigma|a_n|$ és convergent per p>1.

En el cas que $0<p\leq 1$, per saber el caràcter de la sèrie $\Sigma|a_n|$, podem aplicar el criteri de Pringsheim. Trobarem el límit

$$L= \lim_{n\to\infty} n^p.a_n = \lim_{n\to\infty} n^p.\frac{1}{1+n^p} = L= \lim_{n\to\infty} n^p.a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{1+n^p} = 1$$

Com que $L\neq 0$ i $L\neq\infty$, i com que és $p\leq 1$, la sèrie és divergent.

En resum, segons els diferents valors de p, podem dir que la sèrie Σa_n és

Divergent: p<0 No convergent (oscil·lant): p=0

Condicionalment convergent: $0<p\leq 1$

Absolutament convergent: p>1.

Suma de les sèries

70. Calcula la suma de les sèries següents, en el cas que siguin convergents:

$$\Sigma a_n= 1+ \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \ldots \qquad \Sigma b_n= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\Sigma c_n= \sqrt{3} + 3 + 3.\sqrt{3} + 9 + 9.\sqrt{3} + 27 + 27.\sqrt{3} + \ldots$$

Solució. Analitzem cadascuna de les sèries donades.

PRIMERA SÈRIE. Es tracta d'una sèrie geomètrica de raó r=1/e,

$$\Sigma a_n = \Sigma\frac{1}{e^{n-1}} = \Sigma\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

Com que $|r|<1$, és convergent i la seva suma és

$$S= \Sigma\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-1/e} = \frac{e}{e-1} \approx 1'58.$$

SEGONA SÈRIE. També és una sèrie geomètrica, però en aquest cas la raó és r=-1/2,

$$\Sigma b_n = \Sigma (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} = \Sigma\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Com que $|r|=(1/2)<1$, també és convergent i la seva suma és

$$S= \Sigma\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} \approx 0'66.$$

TERCERA SÈRIE. Es tracta d'una sèrie geomètrica de raó $r=\sqrt{3}$,

$$\sum c_n = \sum (\sqrt{3})^n$$

En aquest cas, com que $|r|=|\sqrt{3}|>1$, la sèrie serà divergent i, per tant, la suma de la sèrie és $\sum c_n=+\infty$.

2.4 APLICACIONS DE LES SUCCESSIONS I SÈRIES

71. Una fàbrica industrial diposita mensualment els seus residus tòxics en un contenidor. Se sap que la quantitat total en tones dipositada fins al mes n ve determinada per:

$$QT_n=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n}$$

Calcula les quantitats col·locades en el primer, segon i tercer mes. És cert que la fàbrica realitza un programa per l'eliminació contínua de productes tòxics?

Si el contenidor té una capacitat màxima de 20 tonels, ens podria servir per sempre? I si la fàbrica té prevista la duració del contenidor per un període de 10 anys?

Solució. Observem que, inicialment, hi ha dipositada en el contenidor la següent quantitat en tones de residus tòxics:

$QT_0=(2/1)^0=1$ $\qquad$ $QT_1=(3/2)^3=3'375$

$QT_2=(4/3)^6=5'618$ $\qquad$ $QT_3=(5/4)^9=7'450$

Si Q_i és la quantitat en tones de residus col·locats en el contenidor durant el mes "i", tenim

Primer mes: $Q_1=QT_1-QT_0=3'375-1=2'375$

Segon mes: $Q_2=QT_2-QT_1=5'618-3'375=2'243$

Tercer mes: $Q_3=QT_3-QT_2=7'450-5'618=1'832$

Veiem que la successió de quantitats dipositades és decreixent, $Q_1>Q_2>Q_3>\ldots$ i, per tant, podem acceptar el fet que la fàbrica realitza un programa per a l'eliminació contínua de residus tòxics.

Determinarem ara si el contenidor pot servir per sempre. Observem que

$$\lim_{n\to\infty} QT_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3.n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1).\frac{3.n}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right]^{3.n/(n+1)} = e^3 = 20'085 \text{ tones.}$$

Com que la capacitat màxima és de 20 tones, deduïm que el contenidor no podrà afrontar tots els residus, perquè li mancarà capacitat per absorbir uns 85 kg de residus, aproximadament.

En canvi, si la duració prevista del contenidor és de 10 anys, aleshores sí que podrà afrontar la capacitat de residus generada ja que, al final dels 10 anys (és a dir, n=120 mesos), la quantitat total dipositada de residus serà:

$$QT_{120}=(122/121)^{360}=19'355 \text{ tones} < \text{Capacitat màxima}$$

72. Des de la data de naixement del seu fill, un pare de família imposa cada any una quantitat de 20.000 PTA al 4% d'interès compost. Apunta la successió dels capitals obtinguts al final de cada any i durant els cinc primers anys.

Després de fer el servei militar, quan fa 21 anys, el fill vol casar-se i retira el capital del banc. Quants diners li donaran?

Solució. Observem que les quantitats lliurades cada any són anualitats de capitalització. El capital final al cap de t anys és

$$C=\frac{a.(1+i).[(1+i)^t-1]}{i}$$

En el nostre cas, tindrem

$$C=\frac{10.000.(1+0.04).[(1+0.04)^t-1]}{0.04}=520.000.[(1'04)^t-1]$$

Si donem valors a la t, ens resultarà la successió de capitals, que, mesurats en PTA és aproximadament

$$(C)=(20.800,\ 42.432,\ 64.929,\ 88.326,\ 112.659,...)$$

Després de 21 anys, el capital obtingut és de

$$C_{21}=520.000.[(1'04)^{21}-1] \approx \boxed{664.959 \text{ PTA}}$$

73. Si col·loquem 25.000 PTA a interès compost semestral, obtindrem 32.000 PTA al cap de 3 anys. Quin rèdit anual ens ofereix aquest banc? Comprova-ho després calculant els termes de la successió de capitals obtinguda a cada semestre.

Si haguéssim dipositat el mateix capital a interès continu i amb el mateix rèdit, quant temps expressat en anys, mesos i dies hauria d'estar-hi per obtenir el mateix capital final?

Solució. Partirem de la fórmula de capitalització composta i substituirem les variables conegudes pels seus valors

$$C=C_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m.t} \quad , \quad 32.000=25.000.\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2.3} \quad , \quad 1'28=\left(1+\frac{i}{2}\right)^6$$

Traient l'arrel sisena de cada membre, s'obté

$$1'042=1+(i/2) \quad , \quad 0'042=i/2 \quad , \quad i=0'084$$

D'aquesta manera, el rèdit és $\boxed{r=8'4\%}$

El capital que s'obté al final de t anys ve determinat per

$$C=25.000.\left(1+\frac{0'084}{2}\right)^{2.t}=25.000.(1'042)^{2.t}$$

Si trobem els seus valors en PTA al llarg dels 6 semestres dels tres anys, és a dir, si $t_1=0'5$, $t_2=1$, $t_3=1'5$, etc., obtindrem aproximadament la successió

$$(C)=(26.050,\ 27.144,\ 28.284,\ 29.472,\ 30.809,\ 32.000,\ \ldots)$$

Si ara el capital $C_0=25.000$ PTA ha estat posat a capitalització contínua, amb el mateix tipus d'interès, i=0'084, i hem obtingut també el capital final de C=32.000 PTA, tindrem

$$C=C_0.e^{it}\ ,\ 32.000=25.000.\ e^{0'084.t}\ ,\ 1'28=e^{0'084.t}$$

Aplicant logaritmes neperians,

$$Ln(1'28)=0'084.t\ ,\ 0'24686=0'084.t\ ,\ t\approx 2'9388 \text{ anys}$$

Passem aquesta quantitat a anys, mesos i dies. Tenim

t=2 anys +(0'9388 anys.12 mesos/any) = 2 anys +11'2656 mesos =
= 2 anys + 11 mesos + (0'2656 mesos.30 dies/mes)

El temps és aproximadament $\boxed{\text{t=2 anys , 11 mesos , 8 dies}}$.

Punts d'equilibri

74. Una oficina necessita llogar unes fotocopiadores per un determinat nombre de dies. Se li ofereixen dues possibilitats. A la primera s'han de pagar 34.000 PTA per despeses generals i 1.400 PTA per dia. A la segona, 37.000 PTA fixes més 1.250 PTA/dia. Dedueix l'expressió de les dues funcions de costos f i g i apunta la funció diferència d=g-f. Calcula d(1), d(2), d(3) i en general $d_n=d(n)$. De quin tipus de successió es tracta? Quin lloc ocupa el terme nul?

Dibuixa les dues funcions i determina gràficament el punt d'equilibri, és a dir, el punt en què les despeses són iguals. Quina seria la millor oferta si el temps de lloguer és de dues setmanes? I si és de tres setmanes?

Solució. Deduïm en primer lloc les funcions de despeses de cada fotocopiadora.

PRIMERA FOTOCOPIADORA. Com que les despeses inicials són de 34.000 PTA i després es paguen 1.400 PTA/dia, si anomenem x els dies de lloguer de la fotocopiadora, tindrem que la funció de despeses és f(x)=34.000+1.400.x

SEGONA FOTOCOPIADORA. Anàlogament, la funció de despeses de la segona fotocopiadora és g(x)=37.000+1.250.x

La funció diferència, que dóna la diferència de despeses entre la segona opció i la primera, en funció del temps x, és

$$d(x)=g(x)-f(x)=(37.000+1.250.x)-(34.000+1.400.x)=3.000-150.x$$

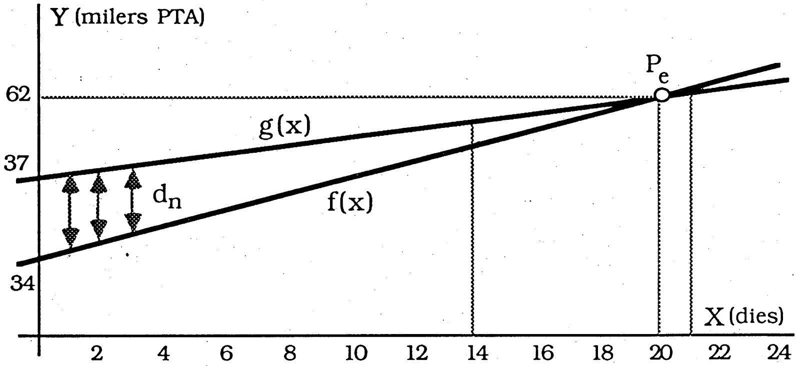
Calculem ara la diferència de despeses pels primers dies:
d(1)=3.000-150.(1)=2.850 PTA , d(2)=3.000-150.(2)=2.700 PTA

Així, resulta la successió (d)=(2.850, 2.700, 2.550, 2.400, ...)

Veiem que es tracta d'una progressió aritmètica decreixent de diferència $d=d_2-d_1=-150$. El terme enèsim és d_n=3.000-150.n.

El terme nul, $d_n=0$, és el que 3.000-150.n=0, n=3.000/150=20. Per tant, el terme nul ocupa el 20è lloc. En aquest punt, la diferència de despeses és nul·la, per la qual cosa, per un període de x=20 dies, les despeses de les fotocopiadores seran iguals.

Si x=20 tindrem f(20)=34.000+1.400.(20)=62.000 PTA. Així el punt d'equilibri és el P_e(20, 62.000). La gràfica és:



El punt d'equilibri es trobarà igualant les despeses de les dues fotocopiadores, f(x)=g(x):

34.000+1.400.x=37.000+1.250.x , 150.x=3.000 , x=20

Observant la gràfica, veiem que per dues setmanes (x=14 dies) tenim

f(14)=34.000+1.400.(14)=53.600 PTA

g(14)=37.000+1.250.(14)=54.500 PTA

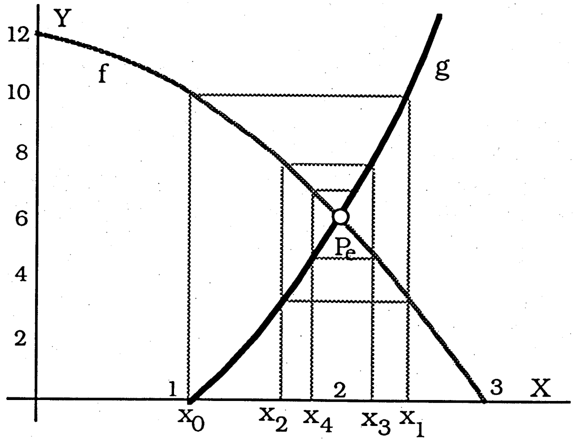
Serà més favorable la primera opció, ja que f(14)<g(14).

En canvi, per tres setmanes (21 dies), serà més favorable la segona opció, perquè f(21)=63.400 PTA i g(21)=63.250 PTA, i resulta que g(21)<f(21).

75. En un model econòmic no lineal es tenen les següents funcions: $f(x)=12-x-x^2$ i $g(x)=-4+3.x+x^2$. Representa en una gràfica les dues corbes i troba el punt d'equilibri. A partir de la relació $g(x_n)=f(x_{n-1})$ i de $x_0=1$, calcula x_1, x_2, x_3 i x_4. Construeix després la "teranyina" a l'entorn d'aquest punt d'equilibri i comprova que l'equilibri és estable.

Si la primera funció canvia a $f_2(x)=26-x-x^2$, quin serà el nou punt d'equilibri?

Solució. Amb una petita taula de valors podem dibuixar les dues paràboles. Només treballarem en el primer quadrant perquè, com que les variables són econòmiques, suposem que tant les abscisses com les ordenades prenen valors positius. La gràfica és:



El punt d'equilibri P_e és aquell en què $f(x)=g(x)$. Es trobarà resolent el sistema format per $f(x)=12-x-x^2$ i $g(x)=-4+3.x+x^2$. Igualant,

$$12-x-x^2=-4+3.x+x^2 \quad , \quad -2.x^2-4.x+16=0 \quad , \quad x^2+2.x-8=0$$

Aquesta equació de segon grau té com a solucions $x=2$ i $x=-4$, però la segona no la considerem vàlida perquè és una variable negativa. Com que per $x=2$ l'ordenada és $f(2)=12-2-2^2=6$, el punt d'equilibri és $\boxed{P_e(2,\ 6)}$.

A partir de la relació $g(x_n)=f(x_{n-1})$, substituint tindrem,

$$-4+3.x_n+(x_n)^2=12-x_{n-1}-(x_{n-1})^2 \quad , \quad (x_n)^2+3.x_n+[(x_{n-1})^2+x_{n-1}-16]=0$$

Per $n=1$ resultarà $(x_1)^2+3.x_1+[(x_0)^2+x_0-16]=0$ i com que $x_0=1$, $(x_1)^2+3.x_1-14=0$ de solució positiva $x_1=2'53$.

Per $n=2$ resultarà $(x_2)^2+3.x_2+[(x_1)^2+x_1-16]=0$ i com que $x_1=2'53$, $(x_2)^2+3.x_2-7'06=0$ de solució positiva $x_2=1'55$.

Procedint d'aquesta manera, obtindrem la successió d'abscisses $(x_n)=(1,\ 2'53,\ 1'55,\ 2'28,\ 1'78,\ldots)$. Observem que és una successió oscil·lant convergent de límit l'abscissa d'equilibri $x_e=2$, i així l'equilibri serà estable. En la gràfica hem dibuixat la teranyina a l'entorn del punt d'equilibri.

Si la primera funció varia a $f_2(x)=26-x-x^2$ i la segona és la mateixa, $g(x)=-4+3.x+x^2$, el nou punt d'equilibri es trobarà igualant $f_2(x)=g(x)$, $26-x-x^2=-4+3.x+x^2$, $-2.x^2-4.x+30=0$, $x^2+2.x-15=0$, que té per arrel positiva $x=3$, d'on $f_2(3)=26-3-3^2=14$. El nou punt d'equilibri és el $\boxed{Q_e(3,\ 14)}$.

f) PROBLEMES PROPOSATS

2.1 SUCCESSIONS DE NÚMEROS REALS

Definició i operacions

76. El terme general d'una successió (a_n) és $a_n=(n+1)/(n+2)$. Prova que aquesta successió és sempre creixent. Comprova-ho després trobant els quatre primers termes.

Sol. $\forall n$, $a_{n+1} \geq a_n$ ... $4>3$, $(a_n)=(0'66, 0'75, 0'80, 0'83,\ldots)$.

77. El terme general d'una successió (a_n) és un polinomi de segon grau en n. Si els tres primers termes són 4, 7 i 14, ¿quant valdrà el quart terme?

Sol. $a_n=x.n^2+y.n+z$, sistema , $a_n=2.n^2-3.n+5$, $a_4=25$.

Progressions aritmètiques i geomètriques

78. Una peça de construccions infantil té la forma d'un ortoedre. Determina'n les dimensions sabent que estan en *progressió aritmètica*, que sumen 15cm i que el volum de la peça és de $105cm^3$.

Sol. x, x+d, x+2d , 3cm, 5cm, 7cm.

79. En un tram de carretera s'han dee plantar 7 arbres equidistants entre dues velles oliveres que estan separades per 40m. Mitjançant progressions aritmètiques calcula la distància de separació que hi haurà d'haver entre cada dos arbres consecutius.

Sol. $a_1=0$, $a_9=40$, d=5m.

80. Un nen es proposa col·locar 45 pedres en línia recta i que disten del lloc on estan reunides actualment 3m, 6m, 9m, etc. Quina és la distància total que haurà de caminar el nen per col·locar totes les pedres, portant-ne una cada vegada?

Sol. $a_{45}=270m$, D=6.120m.

81. De tres números que estan en *progressió geomètrica* se sap que el segon és 32 unitats més gran que el primer i que aquest segon és 96 unitats més petit que el tercer. Quins són els tres números?.

Sol. r=3, 16, 48, 144.

82. Interpola 6 termes entre 1152 i 9, de manera que et resulti una progressió geomètrica decreixent.

Sol. r=0'5 , 576, 288, 144, 72, 36, 18.

83. Sessa, l'inventor de l'escac, va presentar el seu joc al príncep indi Scheran, el qual, i com a recompensa, va oferir-li el que volgués. Sessa va demanar un gra de blat pel primer quadre del tauler del joc d'escacs, 2 grans pel 2n, 4 pel 3r, 8 pel 4t... i així fins a la darrera casella del tauler. Quants grans va demanar?

Sol. $S_{64}=2^{64}-1$, $S_{64}=18_{3}446.744_{2}073.709_{1}551.615$ grans.

2.2 LÍMITS DE SUCCESSIONS

Definició i propietats

84. Apunta el terme general de la successió oscil·lant de termes $a_1=-1/2$, $a_2=1/4$, $a_3=-1/8$, etc. Quin sembla que és el seu límit? Prova-ho aplicant la definició.

Sol. $a_n=(-1)^n/2^n$, $a=0$, $|a_n-a|<\varepsilon\ \forall n>n_o$,$n_o=E(Log(1/\varepsilon)/Log(2))+1$.

85. El primer terme d'una successió és $a_1=1/2$ i els altres són definits per recurrència per mitjà de $a_{n+1}=(a_n)^2+4/25$. Prova que és una successió monòtona decreixent i que tots els termes presenten l'acotació $1/5<a_n<4/5$. Tindrà límit? Calcula'l, en cas afirmatiu.

Sol. $a_{n+1}\leq a_n$, per inducció , $a=1/5$

Càlcul de límits

86 Comprova que els límits següents presenten la indeterminació ∞/∞ i determina'n el valor. Les successions són:

$$(a_n)=\left(\frac{n^2-5n+1}{3n^2+7}\right) \quad (b_n)=\left(\frac{2n^2-n+3}{n^3-8n+5}\right) \quad (c_n)=\left(\frac{2n^2-4n+3}{5n-8}\right) \quad (d_n)=\left(\frac{6-n^3}{2n-1}\right)$$

Sol. $a=1/3$, $b=0$, $c=+\infty$, $d=-\infty$.

87. Aplicant en primer lloc una propietat dels límits, troba el límit de la successió següent:

$$(a_n)=\left(\frac{6n^2-3n-4}{\sqrt{9n^4+1}}+\frac{5n+3}{n+2.\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

Sol. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n+c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$, $b=2$, $c=5$, $a=7$

88. Discuteix, pels diferents valors dels paràmetres positius p i q, el límit donat per:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p^{n+1}+q^{n+1}}{p^n+q^n}\right)$$

Sol. Si $p\geq q \Rightarrow a=p$; Si $p\leq q \Rightarrow a=q$; resum: $a=\text{màx}\{p,q\}$.

89. Si $a_n=n^2+3n+2$ i $b_n=n^3+4n$ són els termes generals de dues successions (a_n) i (b_n), calcula el límit donat per:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{Log}(a_n)}{\operatorname{Log}(b_n)}\right)$$

Sol. $a_n=n^2.(1+3/n+2/n^2)$, $b_n=n^3.(1+4/n^2)$, aplicar prop. log.
$a=2/3$.

90. Determina els límits de les successions que tenen com a termes generals:

$$a_n=\frac{-12}{\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+8n+1}} \qquad b_n=\sqrt{4n^2+5}.\left(n-\sqrt{n^2+7}\right)$$

Sol. $a=6$, $b=-7$.

Criteri de Stolz

91. Troba en primer lloc els 5 primers termes de les successions següents. Quin creus que és el seu límit. Comprova-ho després aplicant el criteri de Stolz:

$$(a_n)=\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}\right) \qquad (b_n)=\left(\frac{1+6+11+\ldots+(5n-4)}{n^2}\right)$$

Sol. $(a_n)=(1,\ 1'5,\ 2,\ 2'5,\ 3,\ldots)$, $(b_n)=(1,\ 1'75,\ 2,\ 2'12,\ 2'2,\ldots)$
$a=+\infty$, $b=5/2$.

92. Determina el valor que hauria de tenir el paràmetre p perquè fos igual a la unitat el límit següents:

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2pn}\left(\frac{p^2}{n^2}+\frac{(2p)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(np)^2}{n^2}\right)$$

Sol. Stolz, $a=p/6$, $p=6$.

93. Troba, aplicant el criteri de Stolz, el límit donat per

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\alpha)+\sin(\alpha/2)+\ldots+\sin(\alpha/n)}{\mathrm{Ln}(1+n)}$$

Particularitza-ho després per $\alpha=\pi/3$ radians i comprova el límit trobant el valor aproximat de c_6.

Sol. $\sin(\alpha/n)\equiv\alpha/n$, $\mathrm{Ln}(1+ 1/n)\equiv 1/n$, $c=\alpha$; $c_6\approx 1'2068$.

Límits de potències

94. Siguin les quatre successions de termes generals $a_n=n+1$, $b_n=1/\mathrm{Ln}(n^2+1)$, $a'_n=n/(n^2+1)$ i $b'_n=1/(n+1)$. Calcula els límits de les successions potencials:

$$c=\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} \quad \text{i} \quad c'=\lim_{n\to\infty}(a'_n)^{b'_n}$$

Sol. Aplic. log. $c=\sqrt{e}$, $c'=1$.

95. Sigui la successió (a_n) on els primers termes són: $a_1=\cos(\pi)$, $a_2=\cos^4(\pi/2)$, $a_3=\cos^9(\pi/3)$,.... Escriu el terme general i calcula després el seu límit.

Sol. $a_n=[\cos(\pi/n)]^{n^2}$, $1-\cos(\pi/n)\equiv\pi^2/(2n^2)$, $a=e^{-\pi^2/2}$

96. Dedueix la igualtat següent entre límits:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Aplica-ho després per calcular el límit:

$$a=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2(1/\sqrt{n})}$$

Sol. Aplic. log. , Stolz, $\sin(\alpha_n)\equiv\alpha_n$, $a=1$.

97. Troba la relació entre p i q perquè es verifiqui la igualtat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+p}{n^2-3}\right)^{2n+q} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+(p+q).n} - n\right)$$

Sol. p+q=2.

98. Discuteix, pels valors del paràmetre positiu p, el valor del límit següent:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3+p.n^2}{p.n^3-6n^2+4}\right)^n$$

Sol. Si $0<p<3 \Rightarrow a=\infty$; Si $p=3 \Rightarrow$ (Ind.) $a=e^3$; Si $p>3 \Rightarrow a=0$.

Fórmula de Stirling

99. Aplicant la fórmula de Stirling, dedueix el valor dels límits:

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n!)}{Ln(n^n)} \qquad b=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$$

Sol. Apl. log., a=1 , b=+∞.

2.3 SÈRIES NUMÈRIQUES

Criteris de convergència:

100. Fent servir el primer criteri de comparació, prova que és convergent la sèrie:

$$\sum a_n = \sum \frac{\sin^2(n)}{2^n}$$

Sol. Compara-la amb $\Sigma(1/2^n)$. Sèrie geomètrica r<1, conv.

101. Utilitzant el segon criteri de comparació, estudia el caràcter de la sèrie expressada per:

$$\sum a_n = \sin(1) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{3}\right) + \sin\left(\frac{1}{4}\right) + \ldots$$

Sol. Compara-la amb $\Sigma(1/n)$, divergent.

102. Estudia la convergència o divergència de les sèries següents, emprant el criteri de Pringsheim:

$$\sum a_n = \sum 1 - \cos\left(\frac{2}{n^3}\right) \qquad \sum b_n = \sum \mathrm{Ln}\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)$$

Sol. (a_n) convergent, (b_n) convergent $(p=2)$.

103. Estudia el caràcter de les sèries següents, trobant en primer lloc el terme general i utilitzant després el criteri de D'Alembert:

$$\Sigma\, a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots \qquad \Sigma\, b_n = \frac{4!}{1!.3} + \frac{5!}{2!.9} + \frac{6!}{3!.27} + \frac{7!}{4!.81} + \dots$$

Sol. $\Sigma\, a_n = \Sigma\, (n/2^n)$, conv., $\Sigma\, b_n = \Sigma\, (n+3)!/(n!.3^n)$ conv., $(1/3)<1$.

104. Per mitjà del criteri de Raabe, estudia el caràcter de les sèries següents donades pel seu terme general:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{-1} \qquad b_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$$

Sol. Σa_n diverg. $(L=0)$, Σb_n conv. $(L=\infty)$.

105. Estudia la convergència o divergència de les sèries següents aplicant el criteri de Cauchy:

$$\Sigma a_n = \Sigma \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n.\mathrm{Ln}(n)} \qquad \Sigma b_n = \Sigma\, \tan^n\left(\frac{\pi.n+1}{3n+2}\right)$$

Sol. Σa_n converg. $(L=0)$, Σb_n diverg. $(L=\sqrt{3}>1)$.

106. Aplicant el criteri logarítmic, estudia el caràcter convergent o divergent de les dues sèries següents:

$$\sum a_n = \sum \left(\frac{1}{\mathrm{Ln}(n)}\right)^{\mathrm{Ln}(n)} \; (n \geq 2) \quad \text{i} \quad \sum b_n = \sum\, [\mathrm{Ln}(n)]^{-e}$$

Sol. Σa_n conv.. $(L=\infty>1)$, Σb_n diverg. $(L=0<1)$.

107. Analitza, per mitjà del criteri de condensació, la convergència o divergència de la sèrie següent:

$$\Sigma a_n = \frac{1}{2.\mathrm{Ln}(2)} + \frac{1}{3.\mathrm{Ln}(3)} + \frac{1}{4.\mathrm{Ln}(4)} + \dots$$

Sol. $b_n = 1/(n.\mathrm{Ln}(2))$, divergent.

Sèries alternades

108. Estudia la convergència o divergència de les següents sèries alternades, trobant primer el terme general de la successió que defineix la sèrie:

$$\Sigma a_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots \qquad \Sigma b_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

Sol. $\Sigma a_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$ converg. $\Sigma b_n = (-1)^{n+1}/n^2$ converg.

109 Estudia la convergència absoluta o condicional de les dues sèries següents, on s'haurà de trobar en primer lloc l'expressió dels termes generals:

$$\Sigma a_n = -\frac{1}{Ln(2)} + \frac{1}{Ln(3)} - \frac{1}{Ln(4)} + \frac{1}{Ln(5)} - \dots$$

$$\Sigma b_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots$$

Sol. $\Sigma a_n = \Sigma(-1)^n/Ln(n+1)$ condicion. convergent.
$\Sigma b_n = \Sigma(-1)^{n+1}/(2n-1)^2$ absol. convergent.

Suma de les sèries

110. Donades les sèries següents, estudia'n el caràcter i, en cas que siguin convergents, troba la seva suma descomponent en fraccions simples el terme general de la successió que defineix la sèrie donada:

$$\Sigma a_n = \Sigma \frac{1}{n.(n+1)} \qquad \Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n^2+3n+2} \qquad \Sigma c_n = \Sigma \frac{n+1}{n}$$

Sol. Σa_n converg. S=1. Σb_n converg. S=1/2. Σc_n diverg.

111. Calcula el terme general de les sèries següents i troba'n la suma en cas de convergència:

$$\Sigma a_n = \frac{2}{7} + \frac{4}{10} + \frac{8}{13} + \frac{16}{16} + \dots \qquad \Sigma b_n = \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{10}{27} + \frac{13}{81} + \dots$$

$$\Sigma c_n = \frac{2}{5} + \frac{5}{25} + \frac{10}{125} + \frac{17}{625} + \dots$$

Sol. $\Sigma a_n = \Sigma 2^n/(3n+4)$, divergent.
$\Sigma b_n = \Sigma(3n+1)/3^n$, convergent, S=11/4.
$\Sigma c_n = \Sigma(n^2+1)/5^n$, convergent, S=23/32.

Miscel·lània d'exercicis de sèries

112. Estudia la convergència o divergència de les sèries següents, aplicant algun criteri de convergència:

a) $\Sigma a_n = \Sigma \arctan(n)$

b) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{n!.\pi^n}{(1+\pi).(1+2\pi)...(1+n\pi)}$

c) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{1}{(4n-3).(16n^2-1)}$

d) $\Sigma a_n = \Sigma \sqrt[2]{\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n}$

e) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{n!}{(n+1)^n}$

f) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{2+\cos(n)}{n}$

Sol. a) Divergent (no compleix cond. nec. de convergència).
b) Divergent (Raabe $(1/\pi)<1$).
c) Convergent (Pringsheim).
d) Convergent (Cauchy).
e) Convergent (D'Alembert, $((1/e)<1)$.
f) Divergent (comparació amb $1/n$).

113. Estudia la convergència o divergència de les sèries següents i, en cas que siguin convergents, troba'n la suma:

a) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

b) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{2n+1}{n^2.(n+1)^2}$

c) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{7}{4^n}$

d) $\Sigma a_n = \Sigma \left(\dfrac{5}{2^n} - \dfrac{1}{3^n}\right)$

Sol. a) Converg. (Pringsheim) S=1. b) Converg. (Pringsh.) S=1.
c) Converg. (P. geomèt.) S=7/3. d) Converg. (P.g.) S=9/2.

114. Fes un estudi de les sèries següents i determina'n la suma, en el cas que siguin convergents:

a) $\Sigma a_n = \Sigma (-1)^n.2^{n-1}$

b) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{n+2}{2^{n+2}}$

c) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{n^2+n+1}{3^n}$

d) $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}.n(n+1)}$

Sol. a) Divergent (prog. geom.)
b) Converg. (D'Alembert) S=1.
c) Converg. (D'Alembert) S=11/4.
d) Converg. (descomp. i D'Alembert) S=1/2.

2.4 APLICACIONS DE LES SUCCESSIONS I SÈRIES

115. Un capital de 10.000 PTA col·locat a interès compost anual durant 2 anys es converteix en 11.449 PTA. Quin és el rèdit r_1 que ofereix el banc? I si l'interès compost fos semestral, trimestral i quadrimestral? Apunta aquesta successió de rèdits i dedueix quin és el seu límit r.

Sol. r_1=7%, (r)=(7, 6'88, 6'84, 6'82,...) Cap. cont. r=6'76%

116. Comprem un televisor en color per 120.000 PTA i el volem pagar durant el termini de 5 anys per mitjà d'un banc que treballa amb un rèdit del 8%. Quina anualitat haurem de pagar cada any amb la finalitat d'amortitzar el valor del televisor?

Si una altra modalitat de pagament és la d'una anualitat de 20.881 PTA, amb el mateix rèdit, quantes anualitats s'hauran de pagar?

Sol. a=30.054 PTA , t=8 anys

117. Sabem que el valor actual C_n de C_0 PTA disponibles al cap de n anys, en un banc que treballa amb capitalització contínua i amb un rèdit r, ens ve donat per:

$$C_n=C_0.e^{-r.n/100}$$

Quin capital C s'hauria de dipositar actualment en el banc, amb rèdit del 12%, per tenir una renda perpètua de 653.900 PTA anuals, a partir de l'any següent?

Sol. $C=\Sigma 653.900.e^{-0'12.n}$, $C=4_1346.100$ PTA.

118. Es diposita una certa quantitat C_0 a interès compost del 14'1% i amb acumulació trimestral. Quant temps ha de romandre al banc per duplicar-se? I per triplicar-se? Dedueix la constant de proporcionalitat k de la funció t=k.Ln(x), on t és el temps i x el nombre de vegades que és més elevat el capital final que l'inicial.

Sol. $C=2.C_0$, m=4 , t_1=5 anys , t_2=7 anys, 4 mesos i 2 dies,
$C=x.C_0$, $k\approx 7'2164$.

119. Una empresa, que produeix un determinat article, ha comprovat que el cost total de producció està format per unes despeses generals de 31.960 PTA, més un cost unitari de 115 PTA. Si el producte es ven a un preu unitari de 162 PTA, dibuixa en una mateixa gràfica la funció de costos i la d'ingressos. Quin és el punt d'equilibri en què el benefici és nul? (→)

Suposa ara que cada mes el preu de cost de l'article puja en 1 PTA/unitat, mentre que el preu de venda roman igual. Apunta la successió d'articles $(x_1, x_2, x_3,...)$ que s'hauran de vendre per aconseguir un benefici nul. Quant valdrà el tretzè terme de la successió?

Sol. $C(x)=31.960+115.x$, $I(x)=162.x$, $x=680$ u ,
$x_n=31960/(47-n)$, $(x)=(694, 710, 726,...)$, $x_{13}=940$ PTA.

120. En l'anàlisi de l'oferta i la demanda s'ha estudiat que la quantitat oferta Q_S d'un article ve expressada en funció del preu P per la funció $Q_S=-5+0'5.P$, i que la quantitat demandada Q_D segueix la funció $Q_D=75-1'5.P$. Troba gràficament el preu d'equilibri P_e en el qual $Q_S=Q_D$.

Suposa que $Q_S=f(P_{n-1})$ i que $Q_D=f(P_n)$. Si $P_0=25$ PTA és el preu inicial, troba la successió de preus que resultarà d'aquest model i dibuixa la teranyina en el punt d'equilibri P_e. Es tracta d'equilibri estable o inestable?

Si ara es carrega cada article amb un impost de consum de 8 PTA cada unitat, la nova quantitat oferta serà $Q'_S=-5+0'5.(P-8)$, mentre que la demanda Q'_D roman igual. Quin serà el nou preu d'equilibri?

Sol. $P_e(40$ PTA/u., 15 u.) , $P_n=(160-P_{n-1})/3$, equil. estable,
(45, 38'33, 40'55, 39'81, 40'06,...) , $P'_e(42$ PTA/u. , 12 u.).

Capítol 3: **Funcions contínues**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P263/270.

DELGADO, M. *Matemáticas: Álgebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad.* P171/190.

THOMAS ARA, L. *Cálculo.* P67/77.

AYRES, J. R. *Cálculo Diferencial e Integral.* P9/21.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P410/468.

CHIANG, A.C. *Métodos Fundamentales de Economía Matemática.* P560/573.

REY PASTOR, J. *Análisis Matemático. Tomo I.* P372/399.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* P25/61.

BERMAN, G.N. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* P32/49.

RODRÍGUEZ, A. *Matemáticas para economistas II.* P435/461.

Addicional:

YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas.* P63/74.

DÍAZ HERNANDO, J. A. *Álgebra, Geometría y Cálculo.* P126/183.

DEMIDOVICH, B. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* P20/40.

SPIEGEL, M.R. *Cálculo Superior.* P23/40.

TEBAR FLORES, E. *Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tomo I.* P187/208.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

3.1 LÍMIT D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

1) **Límits laterals.** Límits per l'esquerra ($f(a^-)$) i per la dreta ($f(a^+)$). Límit funcional (b).
2) **Límits funcionals a l'infinit.** Abscissa infinita, asímptota horitzontal (A.H.). Ordenada infinita, asímptota vertical (A.V.). Coordenades infinites, asímptota obliqua (A.O.), branca parabòlica.

3.2 CONTINUÏTAT D'UNA FUNCIÓ

1) **Funció contínua en un punt.** Continuïtat per l'esquerra i per la dreta, funció contínua en un punt.
2) **Continuïtat en un interval.** Continuïtat en intervals obert, semitancat, semiobert i tancat. Increments de la variable independent (Δx) i de la funció (Δy), continuïtat en funció dels increments. Operacions amb funcions contínues.
3) **Teoremes de continuïtat.** Màxim relatiu (M.r.) i mínim relatiu (m.r.). Màxim absolut (M.a.) i mínim absolut (m.a.). Teoremes de Bolzano, de la funció acotada i de Weierstrass.
4) **Funcions discontínues.** Punts de discontinuïtat. Tipus de discontinuïtat: evitable, per salt finit o infinit i essencial.

3.3 APLICACIONS DE LA CONTINUÏTAT

1) **Aplicacions de les funcions contínues.** Campana de Gauss, corba d'aprenentatge i corba logística.
2) **Aplicacions de les funcions discontínues.** Equacions amb diferències. Variables periòdiques i funcions temporals. Tipus de gràfiques temporals, monotonia i convergència.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

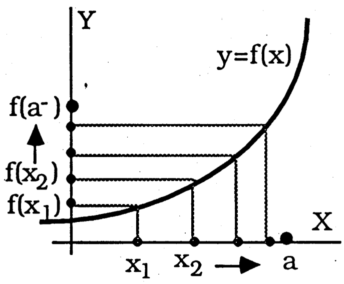
3.1 LÍMIT D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

3.1.1 LÍMITS LATERALS. Sigui una funció uniforme y=f(x) i un punt de l'eix X d'abscissa x=a. Anomenem *successió a l'esquerra* de a tota successió (x_n) tal que per a tot n es verifica $x_n \leq a$. De manera similar, (x_n) serà una *successió a la dreta* de a si es verifica sempre que $x_n \geq a$. Anomenem també *successió imatge*, $(f(x_n))$, la successió de les imatges d'una successió (x_n), per mitjà de la funció y=f(x).

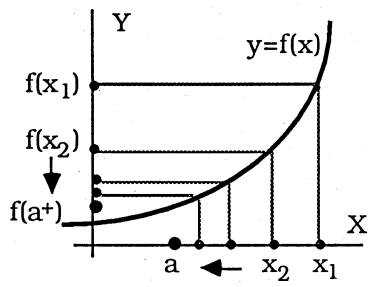
Direm que $f(a^-)$ és el *límit per l'esquerra* de la funció y=f(x) en x=a, si per a tota successió a l'esquerra de a, (x_n), que té per límit a, aleshores la successió imatge, $(f(x_n))$, té per límit $f(a^-)$. Escriurem

$$f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Ho entendrem millor amb la representació gràfica següent:



Límit per l'esquerra

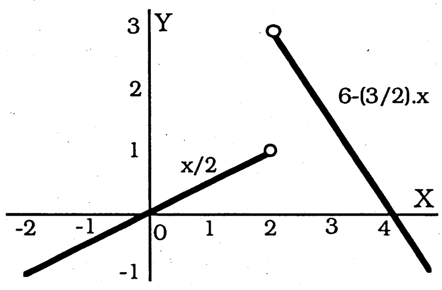


Límit per la dreta

Anàlogament, $f(a^+)$ és el *límit per la dreta* de la funció y=f(x) en x=a, si per a tota successió a la dreta de a, (x_n), que té per límit a, aleshores la successió imatge, $(f(x_n))$, té per límit $f(a^+)$. Escriurem

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Exemple 53. Sigui la funció y=f(x) definida per intervals com f(x)=x/2 si x<2 i f(x)=6-(3/2).x si x>2. Dibuixem-la:



Calculem en primer lloc el límit per l'esquerra de x=2, $f(2^-)$, prenent una successió qualsevol a l'esquerra de 2 i que té per límit 2. Per exemple, prendrem la de terme general $x_n=2-(1/n)$.

Trobarem les seves imatges per f prenent $f(x)=x/2$, ja que els termes de la successió estan a l'esquerra de 2:

$$f(x_n)= x_n/2= (2-(1/n))/2= 1-(1/2n)$$

Fent que $n \to \infty$ deduïm que el seu límit és Lim $f(x_n)=1-0=1$. Per tant, el límit per l'esquerra és $\boxed{f(2^-)=1}$.

Quant al límit per la dreta en $x=2$, també podríem fer el mateix, prenent, per exemple, la successió $(x_n)=(2+ 1/n)$ i substituint-la en la funció $f(x)=6-(3.x/2)$. Obtindrem $f(2^+)=3$.

Si es vol, podem comprovar-ho intuïtivament prenent qualsevol successió per la dreta de 2, per exemple la $(x_n)=(4, 3, 2'5, 2'1, 2'01,...)$ i calculant la successió imatge, $f(x_n)=(0, 1'5, 2'25, 2'85, 2'985,...)$ que té de límit 3. En conseqüència, $\boxed{f(2^+)=3}$.

Suposem que per la funció $y=f(x)$ i en el punt d'abscissa $x=a$, hem calculat els límits per l'esquerra, $f(a^-)$, i per la dreta, $f(a^+)$. En cas que els límits laterals siguin iguals, $f(a^-)=f(a^+)=b$, direm que b és el *límit de la funció* $y=f(x)$ quan $x \to a$.

Evidentment, aquest *límit funcional* b, serà independent de si la successió és per l'esquerra o per la dreta de a, i apuntarem

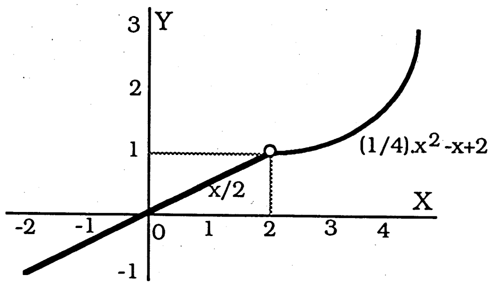
$$b= \lim_{x \to a} f(x)$$

Per tant, direm que b és el límit de la funció $y=f(x)$ quan $x \to a$, si per a tota successió (x_n) de l'eix X, a l'esquerra o a la dreta d'a, i que té per límit a, el límit de la successió imatge $(f(x_n))$ és b.

En conseqüència, no existirà el límit d'una funció en un punt si no existeix el límit per l'esquerra $f(a^-)$, o bé no existeix el límit per la dreta $f(a^+)$, o bé aquests dos límits laterals són diferents, $f(a^-) \neq f(a^+)$.

Exemple 54. La funció de l'exemple anterior definida per $f(x)=x/2$ si $x<2$ i $f(x)=6-(3/2).x$ si $x>2$, no té límit quan $x \to 2$, perquè els dos límits laterals, $f(2^-)=1$ i $f(2^+)=3$, són diferents.

Considerem ara la nova funció $y=f(x)$ donada per $f(x)=x/2$ si $x<2$ i $f(x)=(1.4).x^2-x+2$ si $x>2$, que té per gràfica



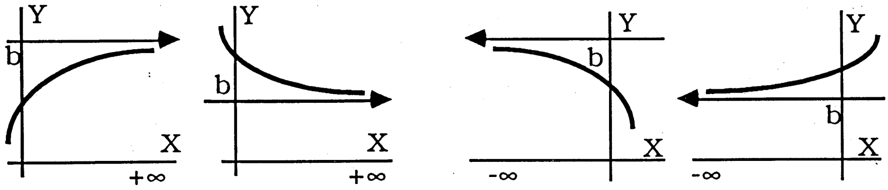
Ja hem trobat que el límit per l'esquerra de $x=2$ és $f(2^-)=1$. Gràficament també es veu que el límit per la dreta és $f(2^+)=1$, ja que en prendre, per exemple, la successió $(x_n)=(4, 3, 2'5, 2'1, 2'01,...)$ veiem que té per successió imatge $(f(x_n))=(2, 1'25, 1'06, 1'0025,...)$ de límit 1. Així, doncs, el límit funcional quan $x \to 2$ és

$$b= \lim_{x \to 2} f(x)=1$$

3.1.2 LÍMITS FUNCIONALS A L'INFINIT I LÍMITS INFINITS.

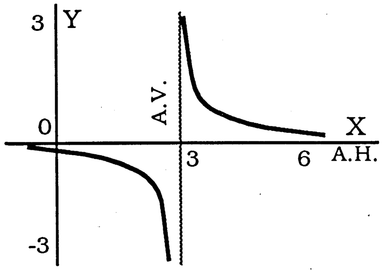
Expressarem visualment els diferents tipus de límits funcionals en què intervé el +∞ o -∞. Els podem classificar en:

A) LÍMITS FUNCIONALS D'ABSCISSA INFINITA. En els límits funcionals a l'infinit, b^- i b^+ indiquen que la corba s'acosta per baix o per dalt de la recta horitzontal y=b, anomenada *asímptota horitzontal.*



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b^-$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b^+$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b^-$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b^+$

Exemple 55. Si representem gràficament la funció f(x)=2/(x-3) veurem que és la hipèrbola

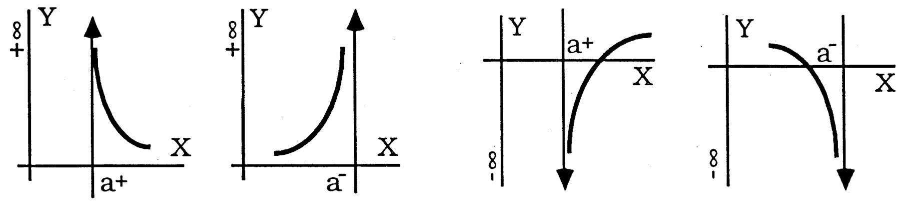


Calculem els límits funcionals d'abscissa infinita. Si, per exemple, x→+∞, podem considerar la successió (x_n)=(1, 10, 100, 1000,...) i trobar les imatges $(f(x_n))$=(-1, 0'28, 0'02, 0'002,...), veurem que té per límit $x=0^+$. Això indica que està per damunt l'asímptota horitzontal y=0.

De manera similar, si fem que x→-∞, fent servir per exemple la successió (x_n)=(-1, -10, -100, -1000,...) veurem que la successió imatge $(f(x_n))$=(-0'5, -0'15, -0'019, -0'009,...) tendeix a 0^-. És a dir, que està per damunt l'asímptota horitzontal de l'eix X. Per tant, podem posar

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0^-$

B) LÍMITS FUNCIONALS D'ORDENADA INFINITA. En els límits funcionals a l'infinit, a^- i a^+ indiquen que la corba s'acosta per l'esquerra o per la dreta de la recta vertical x=a, anomenada *asímptota vertical.*



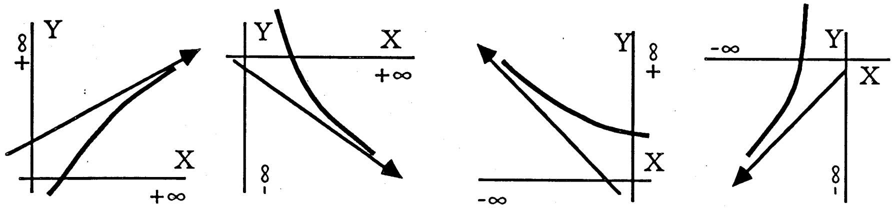
$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

Exemple 56. En la hipèrbola $f(x)=2/(x-3)$ fem que x tendeixi a 3 per la dreta, és a dir $x \to 3^+$, amb la successió $(x_n)=(4, 3'5, 3'1, 3'01, ...)$. La successió imatge és $(f(x_n))=(2, 4, 20, 200, ...)$ que té per límit $+\infty$.

Ara fem que $x \to 3^-$ amb la successió $(x_n)=(2, 2'5, 2'9, 2'99, ...)$. La successió imatge és $(f(x_n))=(-2, -2'5, -2'9, -2'99)$ que té per límit $-\infty$. Per tant, en x=3 hi ha una asímptota vertical dirigida cap a $+\infty$ per la dreta i a $-\infty$ per l'esquerra. Podem escriure,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

C) LÍMITS FUNCIONALS DE COORDENADES INFINITES. En els límits infinits a l'infinit, tant l'abscissa com l'ordenada poden aproximar-se a $+\infty$ o $-\infty$, per mitjà d'una recta inclinada anomenada *asímptota obliqua.*



$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)=-\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$

Si la funció presenta límit a l'infinit i no existeix aquesta recta d'aproximació, direm que la corba presenta una *branca parabòlica.*

Exemple 57 . En la funció de l'exemple 54 definida per $f(x)=x/2$ si $x<2$ i $f(x)=(1.4).x^2-x+2$ si $x>2$, si fem que $x \to -\infty$ l'asímptota obliqua serà, evidentment, la mateixa recta, $y=x/2$.

En canvi, per $x \to +\infty$, com veurem més endavant, no hi ha cap asímptota obliqua. Es tracta, doncs, d'una branca parabòlica.

3.2 CONTINUÏTAT D'UNA FUNCIÓ

3.2.1 FUNCIÓ CONTÍNUA EN UN PUNT. Considerem funció uniforme $y=f(x)$ i un punt de l'eix X d'abscissa x=a, que té per imatge f(a). Sabem que si existeixen els límits laterals $f(a^-)$ i $f(a^+)$ i són iguals, $b=f(a^-)=f(a^+)$, llavors existirà el límit funcional en el punt. Estudiem ara el concepte de *continuïtat lateral.*

Direm que la funció $y=f(x)$ és *contínua per l'esquerra* en x=a si es verifica que $f(a^-)=f(a)$, és a dir, si el límit per l'esquerra en x=a és igual a la imatge. De la mateixa manera, és *contínua per la dreta* si es compleix que $f(a^+)=f(a)$, i així el límit per la dreta és igual a la imatge.

Si una funció és contínua per l'esquerra i per la dreta en un punt, direm simplement que és una *funció contínua en aquest punt.* Haurà de complir-se que $f(a-)=f(a+)=f(a)$, o també $b=f(a)$, i com que b és el límit funcional, la condició per tal que f(x) sigui contínua en x=a és:

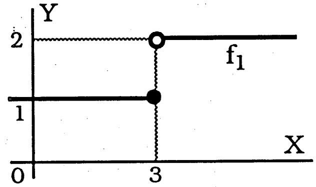
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x)= f(a)}$$

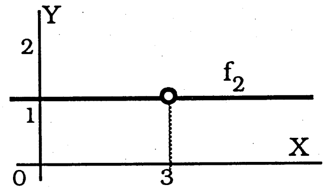
Fixem-nos que l'anterior condició de continuïtat exigeix que es compleixin tres condicions:

- Existència del límit funcional en el punt, per la qual cosa els dos límits laterals han de ser iguals, $f(a^-)=f(a^+)=b$.
- Existència de la imatge $f(a)$ de la funció, és a dir, el punt $x=a$ ha de pertànyer al seu domini $D(f)$.
- El límit funcional ha de ser igual a la imatge, $b=f(a)$.

Exemple 58. La funció f_1 definida per intervals com $f_1(x)=1$ si $x\leq 3$ i $f_1(x)=2$ si $x>3$, no és contínua en $x=3$ perquè són diferents els límits laterals. Observem que $f_1(3^-)=1$ i $f_1(3^+)=2$.

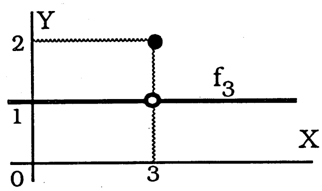
Tampoc no és contínua la funció f_2 definida com $f_2(x)=1$ si $x\neq 3$, perquè no existeix la imatge $f(3)$, és a dir, la funció no està definida en aquest punt. Fixem-nos en les seves gràfiques:

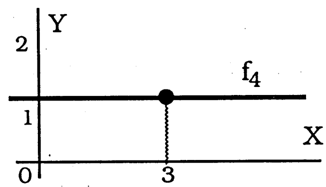




La nova funció f_3 definida com $f_3(x)=1$ si $x\neq 3$ i $f_3(x)=2$ si $x=3$, encara que tingui límit en $x=3$ ja que $f_3(3^-)=f_3(3^+)=1$, aquest valor no coincideix amb la imatge, $f_3(3)=2$. Per tant, f_3 no és contínua en $x=3$.

Finalment, veiem que la funció f_4 definida com $f(x)=1$, per a tot x, és contínua en $x=3$, ja que compleix les tres condicions.





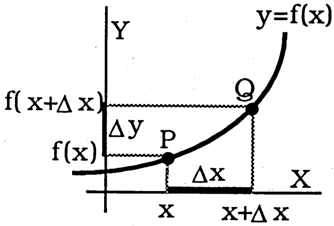
3.2.2 CONTINUÏTAT EN UN INTERVAL. Depenent del tipus d'interval, direm que una funció $y=f(x)$ és contínua en aquest, si

- INTERVAL OBERT (a, b). La funció és contínua en cadascun dels punts interiors.
- INTERVAL SEMITANCAT $[a, b)$. La funció és contínua per la dreta en a i és contínua en cadascun dels punts interiors.
- INTERVAL SEMIOBERT $(a, b]$. La funció és contínua per l'esquerra en b i és contínua en cadascun dels punts interiors.
- INTERVAL TANCAT $[a, b]$. La funció és contínua per la dreta en a, és contínua en cadascun dels punts interiors i és contínua per l'esquerra en b.

Exemple 59. La funció $f(x)=2/(x-3)$ de l'exemple 55 no és contínua en l'interval semitancat $[3, +\infty)$ perquè no és contínua per la dreta de $x=3$. En efecte, observem que $f(3^+)=+\infty$ i que no existeix $f(3)$, per la qual cosa no es compleix que $f(3^+)=f(3)$.

En canvi, és contínua en l'interval semiobert $(3, 5]$, perquè, com veiem, és contínua en tots els punts interiors $(3, 5)$ i també és contínua per l'esquerra en $x=5$, ja que $f(5^-)=1$ i també $f(5)=1$.

Per a estudiar la continuïtat d'una funció $y=f(x)$ ens pot ser molt útil estudiar per un *increment de la variable independent*, Δx, quin *increment de la funció*, Δy, es produeix. Observem la gràfica següent, on x és un punt qualsevol del seu domini, $D(f)$.



Si incrementem l'abscissa de x a $x+\Delta x$, la funció ens canvia de $f(x)$ a $f(x+\Delta x)$. Per tant, passarem del punt d'estudi $P(x, f(x))$ al punt pròxim $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$.

Recordem que en un punt $(a, f(a))$ la condició de continuïtat ve donada per

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Com que ara els punts són $P(x, f(x))$ i $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ substituirem a per x, x per $x+\Delta x$ i també $x\to a$ per $\Delta x\to 0$. Obtenim

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x) \quad , \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)-f(x)=0 \quad , \quad \boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y=0}$$

que és la condició de continuïtat en un punt genèric x expressat a través de l'increment de les variables.

Exemple 60. Provem que totes les funcions quadràtiques, $f(x)=a.x^2+b.x+c$, són funcions contínues en qualsevol punt x de R. Incrementem la x, $f(x+\Delta x)=a.(x+\Delta x)^2+b.(x+\Delta x)+c$. L'increment de la funció és

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[a.(x+\Delta x)^2+b.(x+\Delta x)+c]-[a.x^2+b.x+c]$$

Desenvolupant,

$$\Delta y=a.x^2+2.a.x.\Delta x+a.(\Delta x)^2+b.x+b.\Delta x+c-a.x^2-b.x-c$$

Simplificant,

$$\Delta y=2.a.x.\Delta x+a.(\Delta x)^2+b.\Delta x=(2.a.x+b).\Delta x+a.(\Delta x)^2$$

Si trobem el seu límit quan $\Delta x\to 0$, tindrem

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left((2.a.x+b).\Delta x+a.(\Delta x)^2\right)=(2.a.x+b).0+a.0^2=0$$

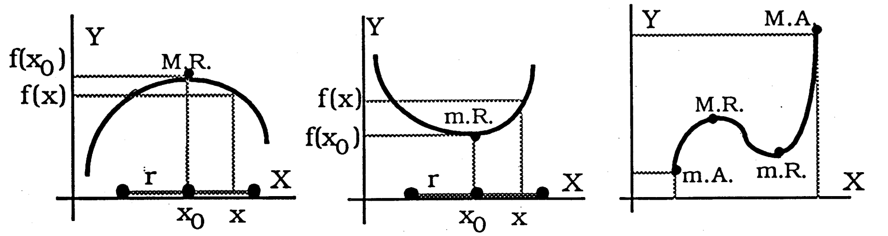
A continuació fem un estudi de les possibles *operacions amb funcions contínues*. Es prova que donades dues funcions contínues f i g en l'interval A, també són contínues en A les funcions suma $(f+g)$, diferència $(f-g)$, producte $(f\cdot g)$, quocient (f/g) sempre que $g(x)\neq 0$, producte escalar $(\lambda.f)$ i qualsevol combinació lineal $(\lambda.f+\mu.g)$.

A més, si f és una funció contínua en A i g contínua en $B=f(A)$, la composició $g\circ f$ també és una funció contínua en A. Finalment, si f és una funció injectiva i contínua en A, la funció inversa f^{-1} és contínua en $B=f(A)$.

3.2.3 TEOREMES DE CONTINUÏTAT. Abans d'esmentar alguns teoremes relatius a les funcions contínues, precisarem uns conceptes que ja hem utilitzat de manera intuïtiva en capítols anteriors, com és el cas dels màxims màxims i mínims d'una funció. Així, doncs, assenyalem tot seguit les definicions d'*extrems relatius*.

Direm que x_0 és un *màxim relatiu* de la funció y=f(x) si existeix una bola oberta de radi r, centrada en x_0, que per qualsevol punt x d'aquesta (que també pertanyi al domini) es verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.

Direm que x_0 és un *mínim relatiu* de la funció y=f(x) si existeix una bola oberta de radi r, centrada en x_0, que per qualsevol punt x d'aquesta (que també pertanyi al domini) es verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.



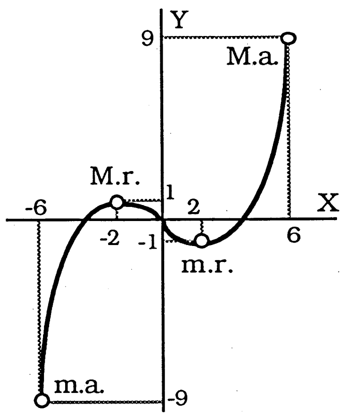
Màxim Relatiu Mínim Relatiu Màx. i mín. absoluts

Definim tot seguit els *extrems absoluts*. Direm que x_0 és el *màxim absolut* d'una funció y=f(x), si per a tot punt x del domini es verifica que $f(x) \leq f(x_0)$. Finalment, direm que x_0 és el *mínim absolut* d'una funció y=f(x), si per a tot punt x del domini es verifica que $f(x) \geq f(x_0)$. Observem que els extrems (relatius i absoluts) d'una funció no sempre existeixen.

Exemple 61. Sigui la funció $y=x.(x^2-12)/16$ que suposem definida en l'interval [-6, 6]. Obtindrem la gràfica següent.

Veiem que en l'interval donat hi trobem un màxim relatiu en (-2, 1), i un mínim relatiu en (2, -1). Gràficament, interpretem el màxim (mínim) relatiu com el valor més gran (més petit) que pren la funció localment a l'entorn de l'abscissa x=-2. (x=2).

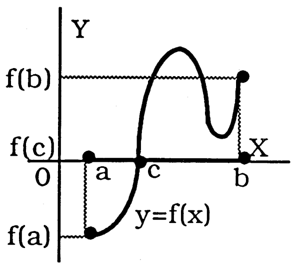
Com que ens restringim en l'interval [-6, 6], observem que el màxim i el mínim absolut es troben en el nostre cas en els extrems de l'interval, és a dir, el màxim absolut és el punt (6, 9) i el mínim absolut és el (-6, -9). Podem dir que, gràficament, aquests dos punts són el més alt i el més baix, respectivament, de la corba en l'interval de definició.



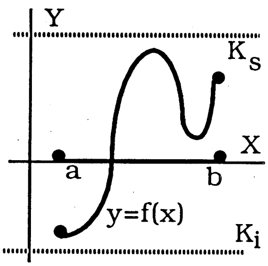
Mostrem a continuació els *teoremes de continuïtat*, que indiquem sense demostració, però els analitzem de manera intuïtiva i senzilla a partir d'un gràfic.

TEOREMA DE BOLZANO. Si una funció y=f(x) és contínua en l'interval tancat [a, b] i es verifica que f(a).f(b)<0, existeix almenys un punt c de l'interval obert (a, b) tal que f(c)=0.

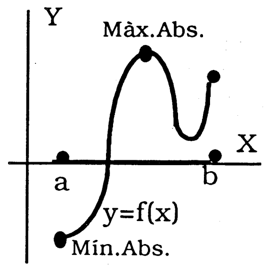
En altres paraules, si una funció és contínua i pren valors de signe contrari en els extrems de l'interval, forçosament hi ha d'haver almenys un punt c que talli l'eix X.



T. Bolzano



T. funció acotada



T. Weierstrass

TEOREMA DE LA FUNCIÓ ACOTADA. Si una funció y=f(x) és contínua en l'interval tancat [a, b], és també acotada en aquest interval, per la qual cosa existiran dues cotes K_i i K_s tals que $K_i \leq f(x) \leq K_s$, per a tot x de l'interval [a, b].

TEOREMA DE WEIERSTRASS. Si una funció y=f(x) és contínua en l'interval tancat [a, b], existiran en aquest interval el màxim absolut i el mínim absolut.

En ser la funció contínua i prendre valors en els extrems, el teorema assegura que s'assoleixin un valor màxim i un valor mínim.

Exemple 62. Sigui la funció de l'exemple anterior $y=x.(x^2-12)/16$ i l'interval [-6, 6]. Com que f(-6)=-9<0 i f(6)=9>0, pel teorema de Bolzano la corba tallarà l'eix d'abscisses en almenys un punt.

Veiem en la gràfica que són tres els zeros de la funció o punts de tall amb l'eix X (y=0). Podem determinar aquests zeros resolent l'equació $x.(x^2-12)/16=0$. Obtindríem

$$x_1=0 \quad , \quad x_2=2.\sqrt{3} \quad \text{i} \quad x_3=-2.\sqrt{3}$$

Observem també que la funció és acotada, ja que una cota inferior pot ser Ki=-10 i una superior Ks=10. També hem vist que existien el mínim absolut (-3, -9) i el màxim absolut (3, 9).

3.2.4 FUNCIONS DISCONTÍNUES. Si una funció no és contínua en un interval, direm que és una *funció discontínua* en aquest interval. Els punts x=a en que la funció y=f(x) no és contínua s'anomenen *punts de discontinuïtat.*

Segons quina sigui la causa per la qual la funció és discontínua en un punt, tenim els diferents *tipus de discontinuïtat* que es poden presentar, que són:

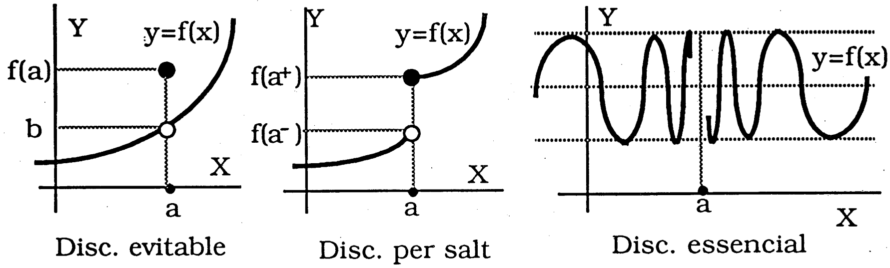
DISCONTINUÏTAT EVITABLE. Existeix el límit funcional $b=f(a^-)=f(a^+)$, però aquest valor és diferent de la imatge f(a).

DISCONTINUÏTAT DE SALT.

a) FINITA. Existeixen els dos límits laterals $f(a^-)$ i $f(a^+)$, però són diferents. El valor del salt és $S=f(a^+)-f(a^-)$.

b) INFINITA (O ASIMPTÒTICA). Algun dels límits laterals és infinit. En aquest punt hi haurà una asímptota vertical a la gràfica de la funció.

DISCONTINUÏTAT ESSENCIAL. No existeix algun dels dos límits laterals $f(a^-)$ o bé $f(a^+)$.



Exemple 63. La funció $f(x)=(2.x+6)/(x^2-9)$ és discontínua en x=-3 perquè $f(-3)=0/0$ no està definit. Per tant, en no existir f(-3), no podrà ser contínua en aquest punt. Per valors que $x\neq-3$, traiem factor comú i simplifiquem, obtenint $f(x)=2/(x-3)$.

Els límits laterals són $f(-3^-)=2/(-6)=-1/3$ i també $f(-3^+)=-1/3$. Així, el tipus de discontinuïtat en x=-3 és evitable, perquè s'eliminaria si definim la funció com $f(x)=(2.x+6)/(x^2-9)$ si $x\neq-3$ i $f(x)=-1/3$ si x=-3.

Per la mateixa funció $f(x)=(2.x+6)/(x^2-9)$ si considerem el punt x=3, tenim els límits laterals $f(3^-)=-\infty$ i $f(3^+)=+\infty$, en ser diferents la corba presenta una discontinuïtat de salt infinita (o asimptòtica) en aquest punt. La recta x=3 és una asímptota vertical de la funció.

La funció $f(x)=\cos(\pi/x)$ té una discontinuïtat essencial en x=0 ja que no existeixen els límits laterals. Per exemple si prenem la successió (1, 1/2, 1/3, 1/4,...) que tendeix a 0^+, la successió imatge és $(\cos(\pi), \cos(2.\pi), \cos(3.\pi), \cos(4.\pi),...) = (-1, 1, -1, 1,...)$, successió oscil·lant que no té límit i, per tant, no existeix $f(0^+)$.

3.3 APLICACIONS DE LA CONTINUÏTAT

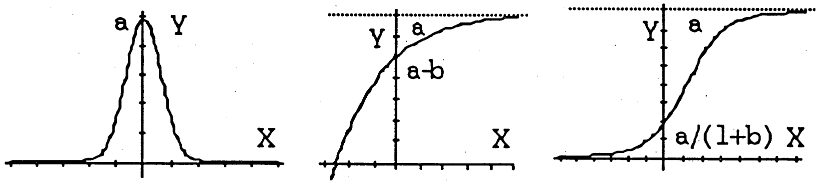
3.3.1 APLICACIONS DE LES FUNCIONS CONTÍNUES. Alguns tipus de funcions contínues que s'apliquen sovint a problemes econòmics són les que es deriven de les funcions exponencials. En destaquem les següents:

CAMPANA DE GAUSS. $\boxed{f(x)=a.\exp(-b.x^2)}$ (Estadística i probabilitats).

CORBA D'APRENENTAGE. $\boxed{f(x)=a-b.\exp(-k.x)}$ (Rendiment econòmic).

CORBA LOGÍSTICA. $\boxed{f(x)=a/(1+b.\exp(-k.x))}$ (Ritme de creixement).

Les gràfiques aproximades d'aquestes corbes són:



Campana de Gauss   Corba d'aprenentatge   Corba logística

Exemple 64. El guany d'un treballador ve donat per la corba logística $f(x)=3/(1+0'5.exp(-0'4.x))$ on x és el temps en anys i f(x) el salari anual en milions de pessetes.

En el moment actual (x=0) els beneficis són $f(0)=3/(1+0'5.1)=2$ M PTA. L'any vinent (x=1) seran $f(1)=3/(1+0'5.exp(-0'4))= =2_{1}246.927$ PTA.

Prenent ara el límit ($x=+\infty$) veiem que el treballador podria guanyar com a màxim Lim $f(x)=3/(1+0)=3$ M PTA.

3.3.2 APLICACIONS DE LES FUNCIONS DISCONTÍNUES. En l'estudi d'alguns problemes econòmics, és molt important el paper representat per algunes funcions que representen variables econòmiques i que depenen del temps, $y_t=f(t)$, i en les quals coneixem la relació que hi ha entre el valor de la funció en un moment t, y_t, i els valors de la mateixa funció en períodes de temps anteriors, $y_t=g(y_{t-1}, y_{t-2},..., y_{t-n})$.

Aquesta relació s'anomena *equació en diferències*. Per facilitat només esmentarem les de la forma $y_t=a+b.y_{t-1}$, on a i b són constants.

Si b=1, s'arriba de manera immediata a la relació $y_t=y_0+a.t$.

Si b=-1, s'obté també de manera immediata una trajectòria oscil·latòria no convergent de y_t.

Suposem ara que $|b|\neq 1$ i que partim del valor inicial y_0. Obtindrem $y_1=a+b.y_0$, i també

$$y_2=a+b.y_1=a+b.(a+b.y_0)=a+a.b+b^2.y_0 \qquad y_2=a.(1+b)+b^2.y_0$$

$$y_3=a+b.y_2=a+b.(a+a.b+b^2.y_0) \qquad y_3=a.(1+b+b^2)+b^3.y_0$$

En general, ens resultarà

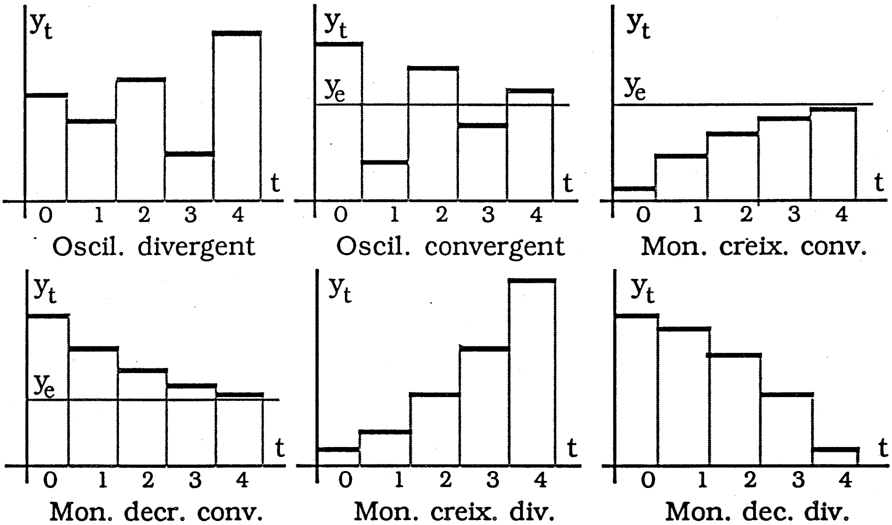
$$y_t=a.(1+b+b^2+...+b^{t-1})+b^t.y_0$$

Observem que el parèntesi és la suma de termes d'una progressió geomètrica de primer terme 1 i de raó b. Aquesta suma ve donada per $S=(b^{t-1}.b-1)/(b-1)=(b^t-1)/(b-1)$. Substituint,

$$y_t= a.\frac{b^t-1}{b-1} + b^t.y_0 = a.\frac{b^t}{b-1} - \frac{a}{b-1} + b^t.y_0 = \frac{a}{1-b} + \left(y_0+ \frac{a}{b-1}\right).b^t$$

Si diem $A=a/(1-b)$ i $B=y_0-A$, l'equació en diferències ens resultarà una funció que depèn únicament del temps, $\boxed{y_t=A+B.b^t}$.

Els diferents tipus de gràfiques que es poden presentar són:



Al ser t una variable discreta, ja que pren únicament els valors 0, 1, 2, etc., que indiquen períodes de temps, la gràfica de la funció $y_t=A+B.b^t$ presenta una discontinuïtat de salt entre cada dos períodes consecutius. El valor del salt entre el període t i el t+1 és $S=y_{t+1}-y_t$.

Per estudiar quina és l'evolució de la funció al llarg del temps, o *estabilitat de la trajectòria temporal*, ens fixarem únicament en els termes b i B i, de manera senzilla, podem arribar a les conclusions que resumim en la taula següent:

B \ b	$b<-1$	$-1<b<0$	$0<b<1$	$b>1$
$B<0$	Oscil·latòria divergent	Oscil·latòria convergent	Monòtona creixent convergent	Monòtona decreixent divergent
$B>0$	Oscil·latòria divergent	Oscil·latòria convergent	Monòtona decreixent convergent	Monòtona creixent divergent

Exemple 65. S'ha comprovat que el preu d'un producte en el període t, P_t, està relacionat amb el preu P_{t-1} del període anterior per mitjà de la funció lineal $P_t=6+1'5.P_{t-1}$. Se sap també que el preu inicial és $P_0=116$ unitats monetàries.

De l'equació general, $y_t=a+b.y_{t-1}$, observem que a=6 i b=1'5, valors que ens permeteran trobar els nous valors

$$A=a/(1-b)=6/(1-1'5)=-12 \quad \text{i} \quad B=y_0-A=116-(-12)=128.$$

La funció temporal del preu és $P_t=A+B.b^t$, $P_t=-12+128.(1'5)^t$. Obtindrem els valors $P_1=180$, $P_2=276$, $P_3=420$,...que formen una successió monòtona creixent divergent, cosa que podríem comprovar en la taula anterior, tot observant que $b>1$ i $B>0$.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Límits laterals

Funció uniforme: **y=f(x)** Punt: **x=a**

Límit per l'esquerra: $\mathbf{f(a^-)}$

Successió esquerra: $\forall(\mathbf{x_n})$ / $x_n \leq a \ \forall n$ Límit: $\mathbf{x_n \to a}$

Successió imatge: $(\mathbf{f(x_n)})$ Límit: $\mathbf{f(x_n) \to f(a^-)}$

Notació: $\boxed{\mathbf{f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)}}$

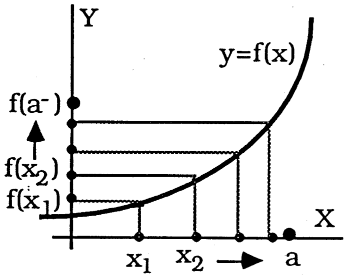
Límit per la dreta: $\mathbf{f(a^+)}$

Successió dreta: $\forall(\mathbf{x_n})$ / $x_n \geq a \ \forall n$ Límit: $\mathbf{x_n \to a}$

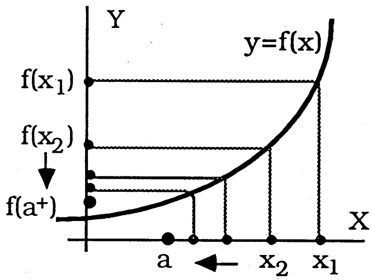
Successió imatge: $(\mathbf{f(x_n)})$ Límit: $\mathbf{f(x_n) \to f(a^+)}$

Notació: $\boxed{\mathbf{f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)}}$

Representació gràfica:



Límit per l'esquerra



Límit per la dreta

Límit d'una funció en un punt

Funció: **y=f(x)** Punt: **x=a**

Límit per l'esquerra: $\mathbf{f(a^-)}$ Límit per la dreta: $\mathbf{f(a^+)}$

Igualtat de límits: $\mathbf{f(a^-)=f(a^+)=b}$ Límit funcional: **b**

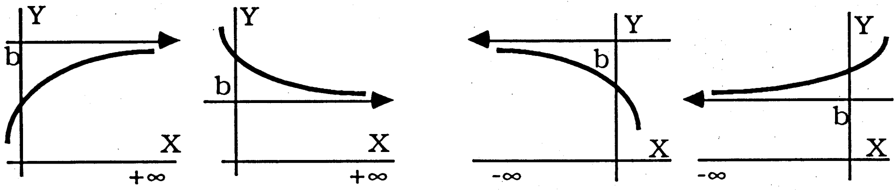
Notació: $\boxed{\mathbf{b = \lim_{x \to a} f(x)}}$

"Direm que b és el límit de la funció y=f(x) quan $x \to a$, si per a tota successió (x_n) de l'eix X, a la esquerra o a la dreta de a, i que té per límit a, el límit de la successió imatge $(f(x_n))$ és b."

No existència de límit: $\nexists \mathbf{f(a^-)}$, $\nexists \mathbf{f(a^+)}$ $\vee$ $\mathbf{f(a^-) \neq f(a^+)}$

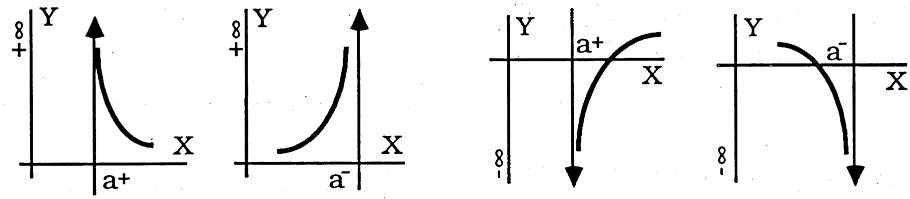
Límits funcionals a l'infinit i límits a l'infinit

A) Abscissa infinita: (Asímptota horitzontal)



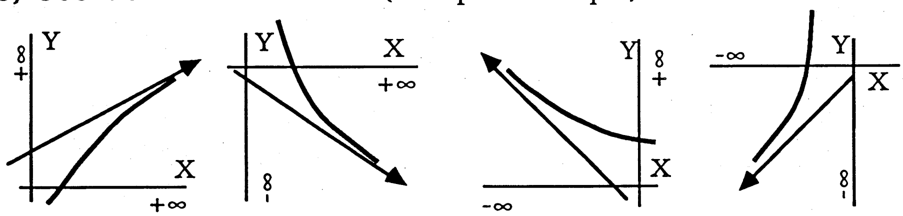
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b^-$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b^+$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b^-$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b^+$

B) Ordenada infinita: (Asímptota vertical)



$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

C) Coordenades infinites: (Asímptota obliqua)



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Propietats dels límits funcionals

$\forall\lambda\in R$, $\forall f,g:A\to R$, $\forall a\in A$, $b=\lim_{x\to a} f(x)$ $\wedge$ $c=\lim_{x\to a} g(x)$

(1) $\mathbf{\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b+c}$ (2) $\mathbf{\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=b-c}$

(3) $\mathbf{\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=b.c}$ (4) $\mathbf{\lim_{x\to a}[\lambda.f(x)]=\lambda.b}$

(5) $\mathbf{\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]=b/c}$ $(c\neq0)$ (6) $\mathbf{\lim_{x\to a}[f(x)^{g(x)}]=b^c}$

Continuïtat en un punt

Funció: $\mathbf{y=f(x)}$ Punt: $\mathbf{x=a}$ Imatge del punt: $\mathbf{f(a)}$

Límit per l'esquerra: $\mathbf{f(a^-)}$ Límit per la dreta: $\mathbf{f(a^+)}$

Existència de límit: $\mathbf{b=f(a^-)=f(a^+)}$

Continuïtat lateral:

A) Per l'esquerra: $\mathbf{f(a^-)=f(a)}$

B) Per la dreta: $\mathbf{f(a^+)=f(a)}$

Funció contínua en un punt: $\mathbf{b=f(a)}$

Condició general: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)}$

Desglossament en tres condicions:

(1) $\exists b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (2) $\exists f(a)$ (3) $b=f(a)$

Continuïtat en un interval

Interval: Extrem inferior: **a** Extrem superior: **b** (b>a)

Funció: $\mathbf{y=f(x)}$ Punts d'estudi: **x** $(a\le x\le b)$

Condicions possibles:

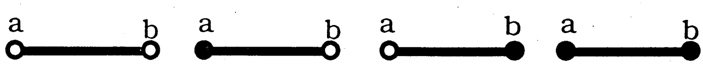
(I) Continuïtat $\forall x$ / $a<x<b$

(II) Continuïtat dreta en a

(III) Continuïtat esquerra en b

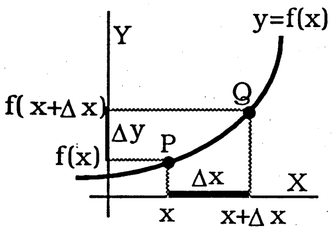
Condicions de continuïtat en diferents intervals:

- Obert (a,b): **(I)**
- Semitancat [a,b): **(I)+(II)**
- Semiobert (a,b]: **(I)+(III)**
- Tancat [a,b]: **(I)+(II)+(III)**



I. Obert I. Semitancat I. Semiobert I. Tancat

Continuïtat en funció dels increments



Punt d'estudi: $\mathbf{P(x\ ,\ f(x))}$

Punt pròxim: $\mathbf{Q(x+\Delta x\ ,\ f(x+\Delta x))}$

Increment funció: $\mathbf{\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)}$

Continuïtat en x: $\boxed{\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y=0}$

Operacions amb funcions contínues

A) Operacions elementals:

Hipòtesis: **$f,g: A \to R$ cont. en x** , $\lambda,\mu \in R$

Tesi: **També seran contínues en x les funcions:**

(1) F. suma: **$f+g$**

(2) F. diferència: **$f-g$**

(3) F. producte: **$f.g$**

(4) F. quocient: **f/g** $(g(x)\neq 0)$

(5) F. prod. escalar: **$\lambda.f$**

(6) F. comb. lineal: **$\lambda.f+\mu.g$**

B) Composició i funció inversa:

(7) Composició:

Si f cont. en x $\wedge$ g cont. en f(x) $\Rightarrow$ g∘f cont. en x

(8) F. inversa:

Si f cont. en x $\wedge$ f injectiva $\Rightarrow$ f^{-1} cont. en f(x)

Extrems relatius i absoluts d'una funció

Funció: **y=f(x)** Domini: **D(f)** Punt d'estudi: **$x_0 \in D(f)$**

A) Extrems relatius:

(1) Màxim relatiu:

$$x_0 \text{ màx. rel.} \Leftrightarrow \exists B_r(x_0) \;/\; \forall x \in D(f) \cap B_r(x_0) \;,\; f(x) \leq f(x_0)$$

(2) Mínim relatiu:

$$x_0 \text{ mín. rel.} \Leftrightarrow \exists B_r(x_0) \;/\; \forall x \in D(f) \cap B_r(x_0) \;,\; f(x) \geq f(x_0)$$

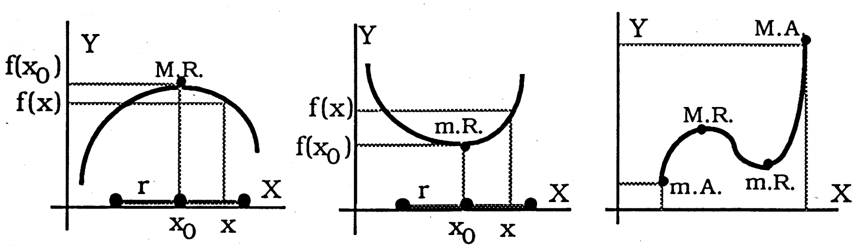
B) Extrems absoluts:

(3) Màxim absolut:

$$x_0 \text{ màx. abs.} \Leftrightarrow \forall x \in D(f) \;,\; f(x) \leq f(x_0)$$

(4) Mínim absolut:

$$x_0 \text{ mín. abs.} \Leftrightarrow \forall x \in D(f) \;,\; f(x) \geq f(x_0)$$



Màxim Relatiu   Mínim Relatiu   Màx. i mín. absoluts

Teoremes de continuïtat

Hipòtesi general: **(I) $f: [a,b] \to R$ continua en $[a,b]$**

A) Teorema de Bolzano:

Hipòtesi addicional: **(II) $f(a).f(b)<0$**

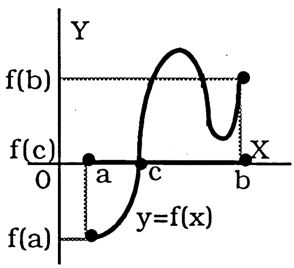
Tesis: $\exists c \in (a,b) \;/\; f(c)=0$

B) Teorema de la funció acotada:

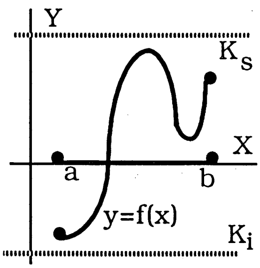
Tesis: **f acotada en $[a,b]$**

C) Teorema de Weierstrass:

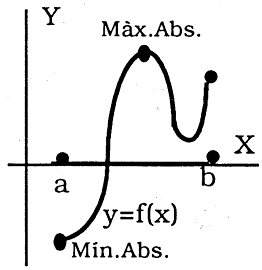
Tesis: $\exists x_1, x_2 \in [a,b] \;/\; x_1 = \text{Màx.Abs.} \wedge x_2 = \text{Mín.Abs.}$



T. Bolzano



T. funció acotada



T. Weierstrass

Funcions discontínues

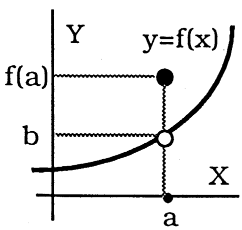
Funció: **y=f(x)** Punt: **x=a** F. discontínua: **no contínua**

Tipus de discontinuïtat:

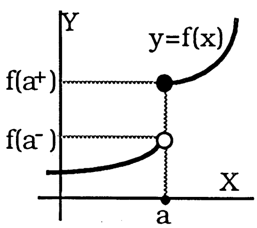
(1) Evitable: $\exists b=\lim_{x\to a} f(x) \;\wedge\; b\neq f(a)$

(2) De salt: $\exists f(a^-)=\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\exists f(a^+)=\lim_{x\to a^+} f(x) \;\wedge\; f(a^-)\neq f(a^+)$

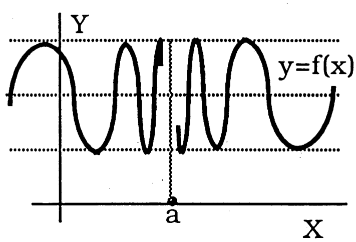
(3) Essencial: $\nexists f(a^-)=\lim_{x\to a^-} f(x) \;\vee\; \nexists f(a^+)=\lim_{x\to a^+} f(x)$



Disc. evitable



Disc. per salt



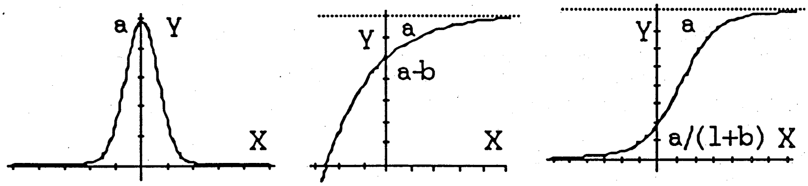
Disc. essencial

Aplicació de les funcions contínues. Corbes exponencials

A) Campana de Gauss: $\mathbf{f(x)=a.exp(-b.x^2)}$ (Estad. i Probabil.)

B) Corba d'aprenentatge: $\mathbf{f(x)=a-b.exp(-k.x)}$ (Rendim. econòm.)

C) Corba logística: $\mathbf{f(x)=a/[1+b.exp(-k.x)]}$ (Ritme de creixem.)



Campana de Gauss Corba d'aprenentatge Corba logística

Aplicació de les funcions discontínues. Eq. en diferències

Funció: $\mathbf{y_t=f(t)}$ Temps: **t** Períodes anteriors: **t-1, t-2, ...**

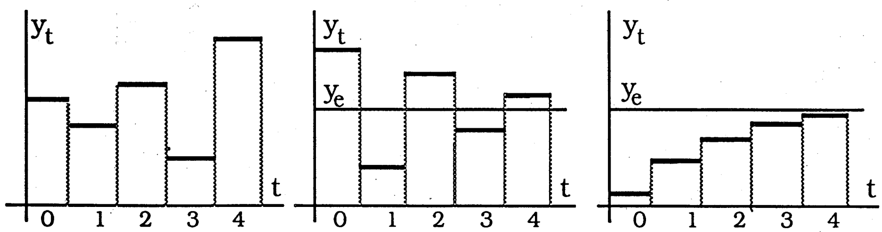
Equació en diferències general: $\mathbf{y_t=g(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-n})}$

Equació en diferències: $\mathbf{y_t=a+b.y_{t-1}}$ $(|b|\neq 1)$

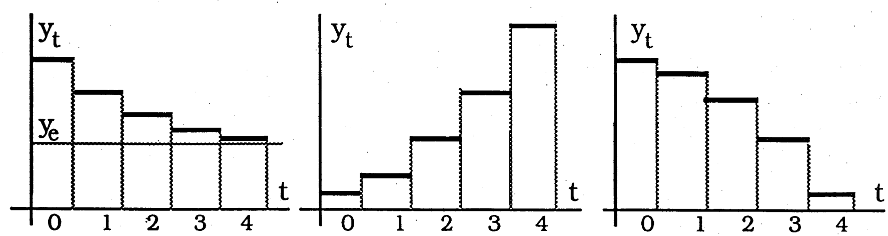
Paràmetres addicionals: $\mathbf{A=\dfrac{a}{1-b}}$, $\mathbf{B=y_0-A}$

E.e.d. en funció del temps: $\boxed{\mathbf{y_t=A+B.\,b^t}}$

Tipus de gràfiques:



Oscil. divergent (b<-1) | Oscil. convergent (-1<b<0) | Mon. creix. conv. (0<b<1 , B<0)



Mon. decr. conv. (0<b<1 , B>0) | Mon. creix. div. (b>1 , B>0) | Mon. dec. div. (b>1 , B<0)

f) PROBLEMES RESOLTS

3.1 LÍMIT D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

Límits laterals

121. Trobant els límits laterals per l'esquerra i per la dreta en els punts que s'indiquen, estudia l'existència de límit en les funcions:

$f_1(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<1\\ -x+4 & \text{si } x>1\end{cases}$ en a=1 $\qquad f_2(x)=\dfrac{12}{x^2-9}$ en a=3

$f_3(x)=\dfrac{x-2}{e^{|x-2|}-1}$ en a=2 $\qquad f_4(x)=\dfrac{1-3.2^{\tan(x)}}{3+2^{\tan(x)}}$ en a=π/2

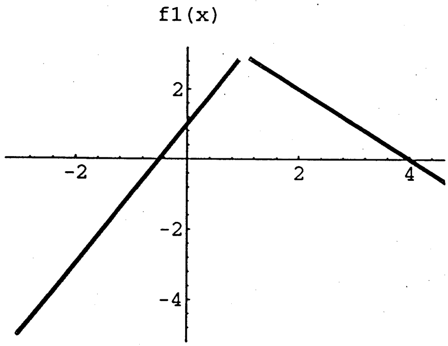
Solució. Calcularem per diferents mètodes els límits laterals per l'esquerra i per la dreta en el punt d'estudi.

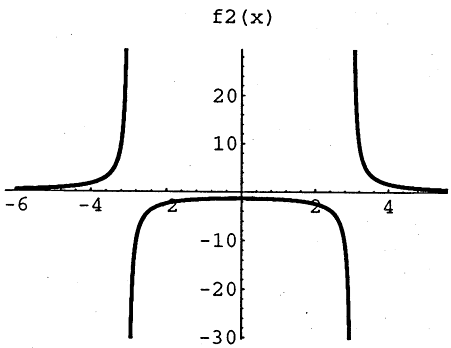
PRIMERA FUNCIÓ.

$$f_1(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<1\\ -x+4 & \text{si } x>1\end{cases} \quad \text{en } a=1$$

Límit per l'esquerra: Si $x<1$, tindrem $f_1(x)=2.x+1$ i $f_1(1^-)=2.1+1=3$.
Límit per la dreta: Si $x>1$, serà $f_1(x)=-x+4$ i $f_1(1^+)=-1+4=3$.

Com que $f_1(1^-)=f_1(1^+)$, la funció f_1 té límit en a=3 de valor b=3.





SEGONA FUNCIÓ.

$$f_2(x)=\frac{12}{x^2-9} \quad \text{en } a=3$$

Límit per l'esquerra: Si $x<3$ podem prendre una successió esquerra de límit 3 com, per exemple, (x_n)=(2, 2'5, 2'9, 2'99,...). La successió imatge és $(f_2(x_n))$=(-2'4, -4'3, -20'3, -200'3,...) que té de límit $-\infty$. Per tant, $f_2(3^-)=-\infty$.

Límit per la dreta: Si $x>3$, prenguem per exemple la successió que s'acosta a 3 per la dreta, (x_n)=(4, 3'5, 3'1, 3'01,...). La successió imatge és $(f_2(x_n))$=(1'7, 3'6, 19'6, 199'6,...) que tendeix a $+\infty$. Per tant, $f_2(3^+)=+\infty$.

Al ser els límits laterals diferents, deduïm que no existirà el límit funcional de la funció f_2 en a=3.

TERCERA FUNCIÓ.

$$f_3(x)= \frac{x-2}{e^{|x-2|}-1} \quad \text{en } a=2$$

Límit per l'esquerra: Si $x<2$ podem prendre la successió que s'acosta a dos per l'esquerra $(x_n)=(2 -1/n)$. La successió imatge és la de terme general

$$f_3(x_n)= \frac{(2 -1/n) -2}{e^{|(2 -1/n)-2|}-1} = \frac{-1/n}{e^{1/n}-1}$$

Per trobar el límit farem servir infinitèsims equivalents,

$$f_3(2^-) = \lim_{n\to\infty} f_3(x_n)= \lim_{n\to\infty} \frac{-1/n}{e^{1/n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

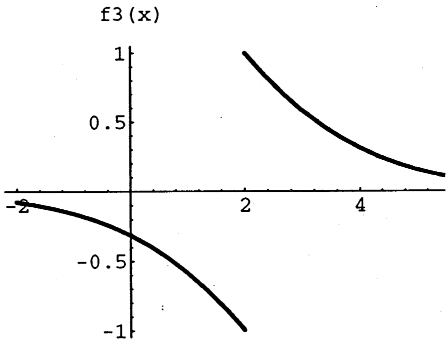
Límit per la dreta: Si $x>2$, podem prendre la successió $(x_n)=(2 +1/n)$. La successió imatge és la de terme general

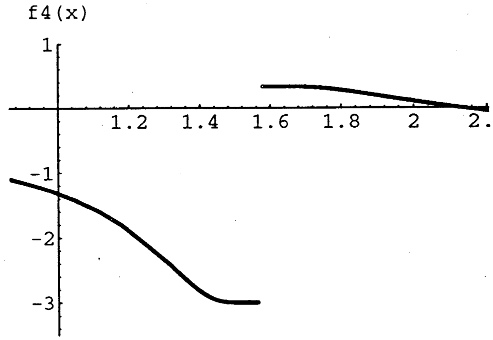
$$f_3(x_n)= \frac{(2 +1/n) -2}{e^{|(2 +1/n)-2|}-1} = \frac{1/n}{e^{1/n}-1}$$

El seu límit és

$$f_3(2^+) = \lim_{n\to\infty} f_3(x_n)= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{e^{1/n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1 = +1$$

En ser diferents $f_3(2^-)$ i $f_3(2^+)$, deduïm que no existirà el límit funcional de la funció f_3 en $a=2$.





QUARTA FUNCIÓ.

$$f_4(x)= \frac{1-3.2^{\tan(x)}}{3+2^{\tan(x)}} \quad \text{en } a=\pi/2$$

Límit per l'esquerra: Aquesta vegada farem servir un canvi de variable. Escriurem $x=(\pi/2)-\varepsilon$, d'on si $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon>0)$, llavors $x\to(\pi/2)^-$.

$$f_4(\pi/2^-)= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-3.2^{\tan(x)}}{3+2^{\tan(x)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-3.2^{\tan(\pi/2-\varepsilon)}}{3+2^{\tan(\pi/2-\varepsilon)}}$$

Com que $\tan(\pi/2-\varepsilon)\to+\infty$, tenim

$$f_4(\pi/2^-)= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\left[1/2^{\tan(\pi/2-\varepsilon)}\right]-3}{\left[3/2^{\tan(\pi/2-\varepsilon)}\right]+1} = \frac{0-3}{0+1} = -3$$

Límit per la dreta: El canvi de variable és ara $x=(\pi/2)+\varepsilon$, d'on si $\varepsilon\to 0$, llavors $x\to(\pi/2)^+$. Tindrem:

$$f_4(\pi/2^+)=\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{1-3.2^{\tan(x)}}{3+2^{\tan(x)}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-3.2^{\tan(\pi/2+\varepsilon)}}{3+2^{\tan(\pi/2+\varepsilon)}}$$

En ser $\tan(\pi/2+\varepsilon)\to -\infty$, ens quedarà

$$f_4(\pi/2^+)=\frac{1-3.2^{-\infty}}{3+1.2^{-\infty}}=\frac{1-3.0}{3+1.0}=\frac{1}{3}$$

En ser $-3\neq 1/3$, els límits laterals són diferents, i així no existirà el límit funcional de la funció f_4 en $a=\pi/2$.

122 Troba en el punt indicat els valors dels límits per a les funcions irracionals següents:

$$b_1=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-8x+6}{\sqrt{x^2+2x-6}-\sqrt{x^2-2x+6}}\qquad b_2=\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x}-1}$$

Solució. Si substituïm directament la x pel valor al qual tendeix veurem que resulta la forma indeterminada 0/0. Per a saber el vertader valor del límit farem servir el mètode de conjugació.

PRIMER LÍMIT.

$$b_1=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-8x+6}{\sqrt{x^2+2x-6}-\sqrt{x^2-2x+6}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x-6}+\sqrt{x^2-2x+6}}{\sqrt{x^2+2x-6}+\sqrt{x^2-2x+6}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(2x^2-8x+6).(\sqrt{x^2+2x-6}+\sqrt{x^2-2x+6})}{(x^2+2x-6)-(x^2-2x+6)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2.(x^2-4x+3).(\sqrt{x^2+2x-6}+\sqrt{x^2-2x+6})}{4.x-12}$$

Si substituïm la x per 3, tornem a obtenir 0/0, indeterminació deguda al fet que tant el numerador com el denominador contenen el factor x-3. Per tant, si descomponem en factors,

$$b_1=\lim_{x\to 3}\frac{2.(x-3).(x-1).(\sqrt{x^2+2x-6}+\sqrt{x^2-2x+6})}{4.(x-3)}=$$

$$=\frac{2.(3-1).(\sqrt{3^2+2.3-6}+\sqrt{3^2-2.3+6})}{4}=\frac{2.2.(3+3)}{4}=\boxed{6}$$

SEGON LÍMIT.

$$b_2=\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x}-1}\cdot\frac{\sqrt{5-x}+1}{\sqrt{5-x}+1}=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x}).(\sqrt{5-x}+1)}{(5-x)-1}=$$

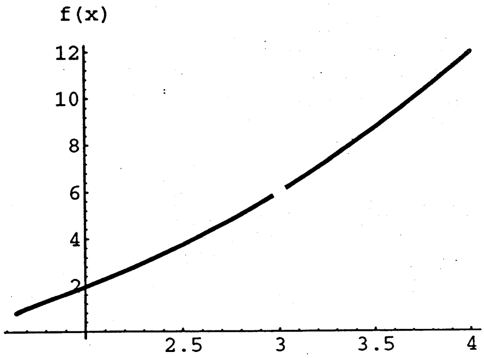
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x}).(\sqrt{5-x}+1)}{4-x}=\frac{(3-\sqrt{5+4}).(\sqrt{5-4}+1)}{4-4}=\frac{0.2}{0}=\frac{0}{0}$$

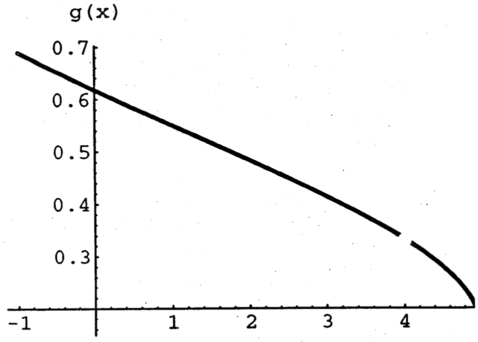
Aplicarem el mètode de conjugació en l'expressió radical que s'ha anul·lat,

$$b_2=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x}).(\sqrt{5-x}+1)}{4-x}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\frac{(9-(5+x)).(\sqrt{5-x}+1)}{(4-x).(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{5-x}+1}{3+\sqrt{5+x}}=\frac{\sqrt{5-4}+1}{3+\sqrt{5+4}}=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

Comprovem mitjançant les gràfiques de les dues funcions que, efectivament, aquests són els valors dels límits demanats:





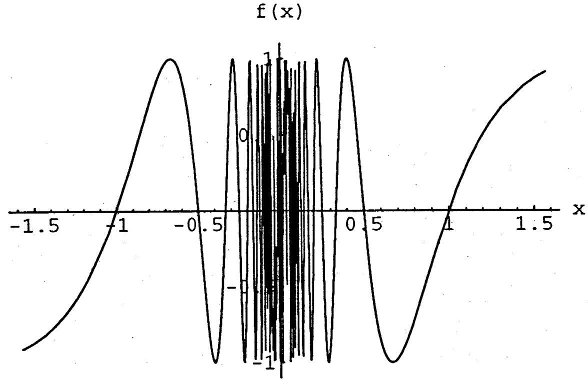
123. Comprova, prenent dues successions que tinguin per límit 0, que la funció trigonomètrica $f(x)=\sin(\pi/x)$ no té límit en l'origen.

Solució. Sabem que perquè la funció tingui límit en un punt el límit de la successió imatge ha de ser independent de la successió escollida que tendeix a aquest punt.

Prenem per exemple la successió $(x_n)=(1/n)$ que té per límit 0^+. La successió imatge $(f(x_n))$ tindrà de termes $\sin(\pi/(1/n))=\sin(n.\pi)$, és a dir, $\sin(\pi)$, $\sin(2.\pi)$, $\sin(3.\pi)$, etc. Aquesta successió és la successió nul·la, (0, 0, 0,...). Per tant, b=0.

En canvi, si considerem la successió $(x_n)=(2/n)$, que també tendeix a zero per la dreta, tindrem que la successió imatge és la de terme general $f(x_n)=\sin(\pi/(2/n))=\sin(n.\pi/2)$. Els termes són $\sin(\pi/2)=1$, $\sin(\pi)=0$, $\sin(3.\pi/2)=-1$, $\sin(2.\pi)=0$, etc. que formen la successió $(f(x_n))=(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0,...)$ que no té límit.

Vegem que no existeix el límit a partir de la gràfica:



Observem que la funció $f(x)=\sin(\pi/x)$ va oscil·lant, però no s'acosta a un valor concret quan $x\to 0$.

124. Calcula els límits quan $x \to \pm\infty$ de les següents funcions:

$$f(x)=\frac{x + \sin(x)}{2.x + \cos(x)} \qquad g(x)=\frac{6.e^x - \cos(x)}{3.e^x + \sin(x)}$$

Solució. Per calcular aquests límits emprarem el fet que les funcions sin(x) i cos(x) estan acotades entre -1 i 1. En altres paraules, el valor variable k de sin(x) i cos(x) serà $-1 \leq k \leq 1$.

PRIMER LÍMIT.

$$b_1= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2.x+\cos(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \sin(x)/x}{2 + \cos(x)/x} = \frac{1+0}{2+0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

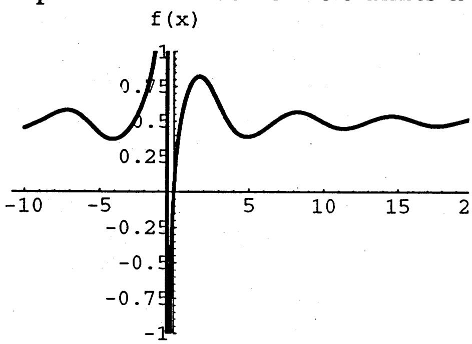
$$b_2= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sin(x)}{2.x+\cos(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + \sin(x)/x}{2 + \cos(x)/x} = \frac{1+0}{2+0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

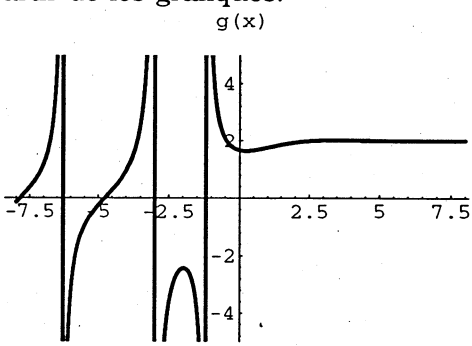
SEGON LÍMIT.

$$b_3= \lim_{x\to+\infty} \frac{6.e^x - \cos(x)}{3.e^x + \sin(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6 - \cos(x)/e^x}{3 + \sin(x)/e^x} = \frac{6-0}{3+0} = \boxed{2}$$

$$b_4= \lim_{x\to-\infty} \frac{6.e^x - \cos(x)}{3.e^x + \sin(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{0 - \cos(x)}{0 + \sin(x)} = \lim_{x\to-\infty} -\text{cotan}(x)$$

Aquest últim límit no existeix ja que cotan(x) és una funció periòdica. Observem els límits a partir de les gràfiques:





125. Calcula els límits següents de funcions trigonomètriques, utilitzant infinitèsims equivalents:

$$b_1= \lim_{x\to0} \frac{\text{Ln}(1+10x)}{x} \qquad b_2= \lim_{x\to-\infty} \frac{\text{Ln}(1+e^x)}{x}$$

$$b_3= \lim_{x\to0} \frac{\text{Ln}(\cos(x))}{x^2} \qquad b_4= \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x}.\text{Ln}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Solució. Recordem que si (a_n) és un infinitèsim, $(a_n)\to0$, aleshores els infinitèsims $\text{Ln}[1+(a_n)]$ i (a_n) són equivalents i, per tant, en aquest cas podem reemplaçar un per l'altre.

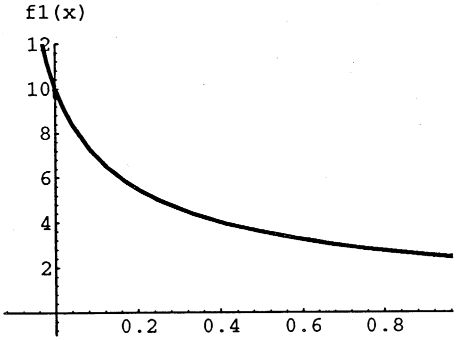
PRIMER LÍMIT.

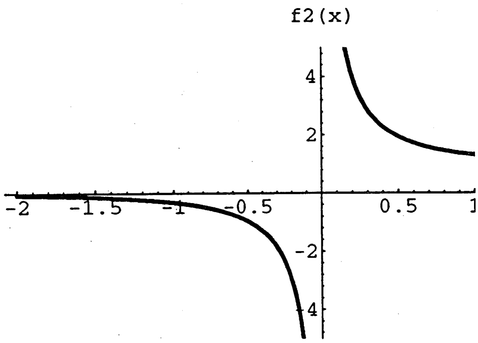
$$b_1 = \lim_{x\to 0} \frac{Ln(1+10.x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{10.x}{x} = \lim_{x\to 0} 10 = \boxed{10}$$

SEGON LÍMIT.

$$b_2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{Ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = \boxed{0}$$

Verifiquem el valor d'aquests límits a partir de l'observació de la gràfica de les funcions:





TERCER LÍMIT.

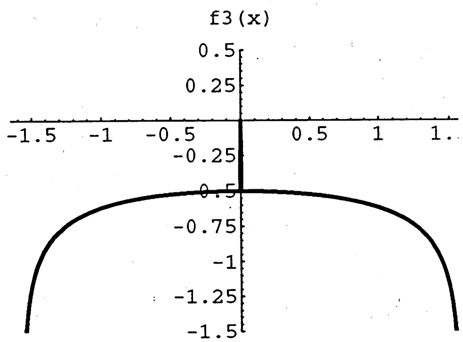
$$b_3 = \lim_{x\to 0} \frac{Ln[\cos(x)]}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{Ln[1+(-1+\cos(x))]}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1+\cos(x)}{x^2} =$$

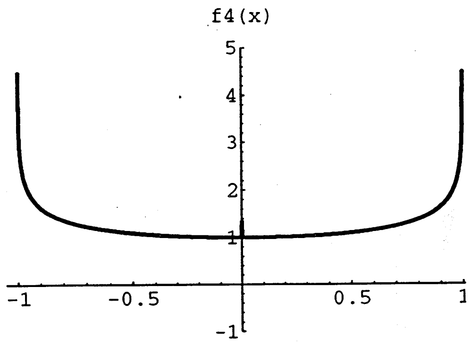
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-[1-\cos(x)]}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-(x^2/2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

QUART LÍMIT.

$$b_4 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2.x}.Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{Ln(1+x)-Ln(1-x)}{2.x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-(-x)}{2.x} = \lim_{x\to 0} \frac{2.x}{2.x} = \lim_{x\to 0} 1 = \boxed{1}$$





Hem dibuixat també les gràfiques de les dues últimes funcions, per observar que els límits quan $x\to 0$ coincideixen amb els trobats.

3.2 CONTINUÏTAT D'UNA FUNCIÓ

Funció contínua i discontinuïtats

126. Determina els intervals en què les funcions següents són contínues:

$f_1(x)= \dfrac{x^3+1}{x+1}$ $\quad f_2(x)= \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$ $\quad f_3(x)= x.\sin(\pi/x)$ $\quad f_4(x)= \text{Ln}(|\cos(x)|)$

Solució. Per les dues primeres funcions, estudiarem els valors de la x que anul·len el denominador, ja que en aquests punts la funció serà discontínua.

PRIMERA FUNCIÓ.

Observem en primer lloc que $D(f_1)=R-\{-1\}$, perquè si fem $x+1=0$ trobarem que $x=-1$, i el valor de la funció en aquest punt és:

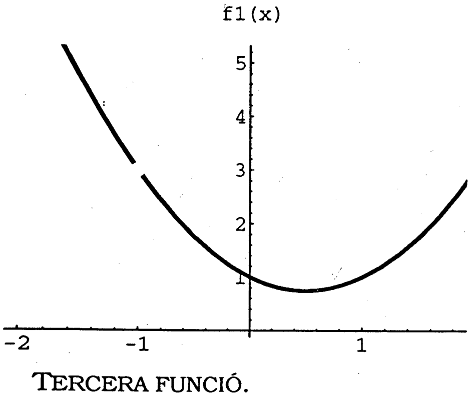
$$f_1(-1)= \frac{(-1)^3+1}{-1+1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \nexists f_1(-1)$$

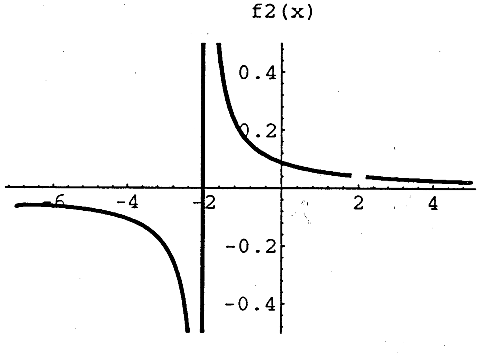
Ja podem assegurar, doncs, que en $x=-1$ la funció f_1 no és contínua. L'interval de continuïtat és $I(f_1)=R-\{-1\}$.

SEGONA FUNCIÓ.

Observem que $D(f_2)=[-7, +\infty)-\{-2, 2\}$, ja que ha de ser $7+x\geq 0$ i també $x^2-4\neq 0$.

La funció f_2 és contínua en tots els punts del seu domini i, per tant, l'interval de continuïtat és s $I(f_2)=[-7, +\infty)-\{-2, 2\}$.



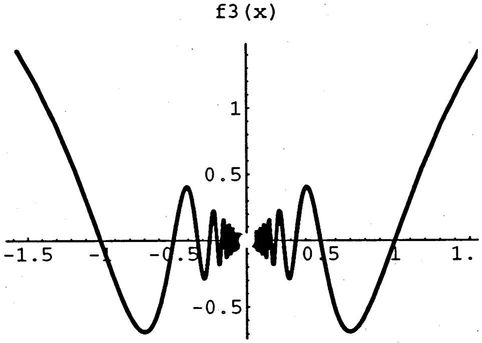


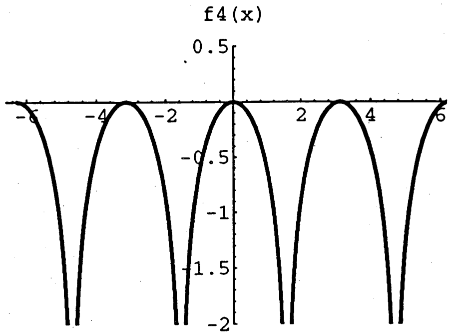
TERCERA FUNCIÓ.

En la funció $f_3(x)=x.\sin(\pi/x)$ el punt conflictiu és el $x=0$ perquè obtenim $\sin(\pi/0)=\sin(\infty)$ que no existeix. En conseqüència, tampoc existirà $f_3(0)$. L'interval de continuïtat és $I(f_3)=R-\{0\}$.

Si trobéssim els dos límits laterals, veuríem que $f_3(0^-)=0$ i que $f_3(0^+)=0$, ja que la funció sinus és acotada, $-1\leq\sin(\pi/x)\leq+1$. Per tant, la funció f_3 tindrà límit en $x=0$, $b=f_3(0-)=f_3(0+)=0$, però és discontínua perquè no existeix $f_3(0)$.

Observem en la gràfica següent el fet que els límits laterals quan $x \to 0$ són tots dos nuls.





QUARTA FUNCIÓ.

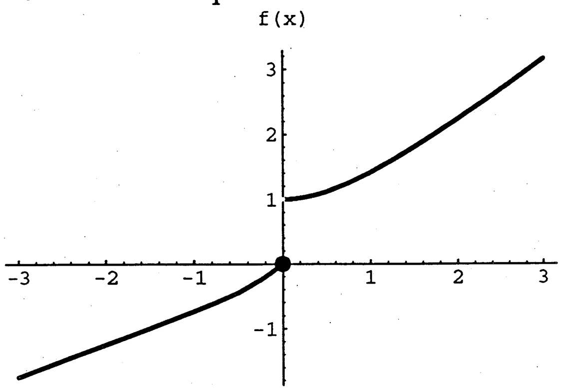
Hem d'estudiar la continuïtat de la funció $f_4(x)=\text{Ln}\,|\cos(x)|$. Com que $\text{Ln}(0)=-\infty$, no existirà aquesta funció en els punts en que $\cos(x)=0$ i aquests són $\pi/2$, $(\pi/2)+\pi=3.\pi/2$, $(\pi/2)+2.\pi=5.\pi/2$, etc.

En general, els punts de discontinuïtat seran els d'abscissa $x=(\pi/2)+k.\pi$, o bé $x=(2.k+1).\pi/2$, on k és un nombre enter. Per tant, l'interval de continuitat serà $I(f_4)=R-\{(2.k+1).\pi/2\}$.

127. En el punt x=0, estudia el tipus de discontinuïtat de la funció definida per intervals:

$$f(x)=\begin{cases} x/(1+e^{1/x}) & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Solució. Dibuixem en primer lloc aquesta funció donada per intervals i fixem-nos en el que succeeix a l'entorn de l'origen,



Calcularem tot seguit els dos límits laterals quan $x \to 0$. Ho farem per canvi de variable.

LÍMIT PER L'ESQUERRA. Canvi $x=0-\varepsilon=-\varepsilon$, on $\varepsilon>0$. Si $\varepsilon\to 0$, llavors $x\to 0^-$.

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1+e^{1/x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\varepsilon}{1+e^{1/(\varepsilon)}}=\frac{-0}{1+e^{1/(-0)}}=\frac{0}{1+e^{-\infty}}=\frac{0}{1+0}=\boxed{0}$$

LÍMIT PER LA DRETA. Canvi $x=0+\varepsilon=+\varepsilon$, on $\varepsilon>0$. Si $\varepsilon\to 0$, llavors $x\to 0^+$.

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon^2+1}=\sqrt{0^2+1}=\boxed{1}$$

En ser els dos límits laterals diferents, $f(0^-)\neq f(0^+)$ no existeix el límit funcional en $x=0$ i així la funció no és contínua en $x=0$. És un punt de discontinuïtat per salt de valor $S=f(0^+)-f(0^-)=1-0=1$, cosa que comprovem en la gràfica de la pàgina anterior.

128. Calcula els valors que hauran de tenir els paràmetres p i q perquè la funció següent sigui sempre contínua:

$$f(x)=\begin{cases}-2.\sin(x) & \text{si } x\leq -\pi/2\\ p.\sin(x)+q & \text{si } -\pi/2<x<\pi/2\\ \cos(x) & \text{si } x\geq \pi/2\end{cases}$$

Solució. Com que les funcions sinus i cosinus són contínues en tots els punts, només cal estudiar la continuïtat en els punts de separació dels intervals, és a dir, $x_1=-\pi/2$ i $x_2=\pi/2$.

PRIMER PUNT: $x=-\pi/2$.

Límit per l'esquerra. Canvi $x=-\pi/2-\varepsilon$. Si $\varepsilon\to 0$, tenim que $x\to -\pi/2^-$.

$$f(-\pi/2^-)=\lim_{x\to -\pi/2^-}-2.\sin(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}-2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=-2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)=$$
$$=-2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2(-1)=\boxed{2}$$

Límit per la dreta. Canvi $x=-\pi/2+\varepsilon$. Aleshores si $\varepsilon\to 0$, $x\to -\pi/2^+$.

$$f(-\pi/2^+)=\lim_{x\to -\pi/2^+}[p.\sin(x)+q]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[p.\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)+q\right]=$$
$$=p.\sin\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)+q=p.(-1)+q=\boxed{-p+q}$$

Per tal que la funció sigui contínua en $x=-\pi/2$, hauran de coincidir els límits laterals, $f(-\pi/2^-)=f(-\pi/2^+)$, i així obtindrem que $2=-p+q$, o també $\boxed{q=p+2}$ (1)

SEGON PUNT: $x=\pi/2$.

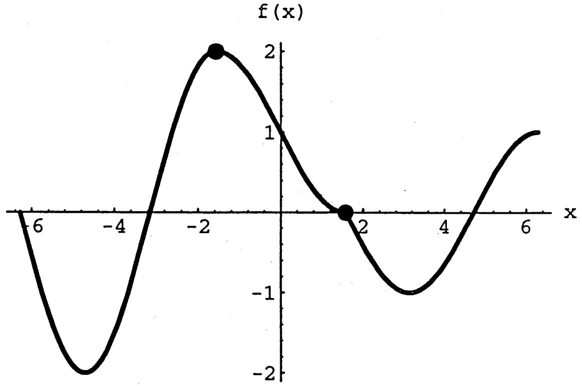
Límit per l'esquerra. Canvi $x=\pi/2-\varepsilon$. Aleshores si $\varepsilon\to 0$, $x\to \pi/2^-$.

$$f(\pi/2^-)=\lim_{x\to \pi/2^-}[p.\sin(x)+q]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[p.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+q\right]=p.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+q=\boxed{p+q}$$

Límit per la dreta. Canvi $x=\pi/2+\varepsilon$. Aleshores si $\varepsilon\to 0$, $x\to \pi/2^+$.

$$f(\pi/2^+)= \lim_{x\to\pi/2^+} \cos(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+0\right)= \boxed{0}$$

Com que la funció ha de ser contínua en $x=\pi/2$, igualarem aquests dos límits laterals, $f(\pi/2^-)=f(\pi/2^+)$, i ens resultarà l'equació $\boxed{p+q=0}$ (2)



Per a trobar p i q només ens caldrà resoldre el sistema format per les equacions (1) i (2): $q=p+2$ i $p+q=0$.

Substituint, $p+(p+2)=0$, $2p=-2$, $\boxed{p=-1}$, $q=-1+2$, $\boxed{q=1}$. Amb aquests valors hem dibuixat la funció, en la figura superior, i es veu clarament que és una funció contínua en tots els punts.

129. Per mitjà dels límits laterals, estudia la continuïtat de les funcions següents, i fes després les gràfiques:

$$f_1(x)= \frac{9(x+2)}{x^2-4} \qquad f_2(x)= \frac{9}{(x-2)^2}$$

Solució. Els punts de discontinuïtat són aquells que anul·len el denominador, ja que en aquests punts la funció no existeix.

PRIMERA FUNCIÓ

Si anul·lem el denominador en $f_1(x)=9.(x+2)/(x^2-4)$ ens quedarà l'equació de segon grau $x^2-4=0$ d'arrels $x_1=-2$ i $x_2=2$.

Primer punt: $x_1=-2$.

El valor de la funció és $f_1(-2)=9.(-2+2)/[(-2)^2-4]=0/0$. Per tant, no existeix $f_1(-2)$. Calculem ara els límits laterals

Límit per l'esquerra:

$$f_1(-2^-)= \lim_{x\to -2^-} \frac{9.(x+2)}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{9.(-2-\varepsilon+2)}{(-2-\varepsilon)^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{9.(-\varepsilon)}{4+4\varepsilon+\varepsilon^2-4} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-9.\varepsilon}{4\varepsilon+\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-9.\varepsilon}{\varepsilon.(4+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-9}{4+\varepsilon} = \frac{-9}{4+0} = \boxed{\frac{-9}{4}}$$

Límit per la dreta:

$$f_1(-2^+)=\lim_{x\to -2^+}\frac{9.(x+2)}{x^2-4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(-2+\varepsilon+2)}{(-2+\varepsilon)^2-4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.\varepsilon}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.\varepsilon}{-4\varepsilon+\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.\varepsilon}{\varepsilon.(-4+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9}{-4+\varepsilon}=\frac{9}{-4+0}=\boxed{\frac{-9}{4}}$$

En ser els dos límits laterals iguals, existeix el límit funcional en $x_1=-2$, de valor $b=-9/4$. En conseqüència, el punt $x_1=-2$ és un punt de $\boxed{\text{discontinuïtat evitable}}$.

Segon punt.: $x_2=2$.

Calculem el valor de la funció, $f_1(2)=9.(2+2)/[2^2-4]=36/0=\infty$. Per tant, no existeix $f_1(2)$ i f_1 serà discontínua en $x_2=2$. Per a saber el tipus de discontinuïtat, trobarem els límits laterals

Límit per l'esquerra:

$$f_1(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{9.(x+2)}{x^2-4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(2-\varepsilon+2)}{(2-\varepsilon)^2-4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(4-\varepsilon)}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4}=$$

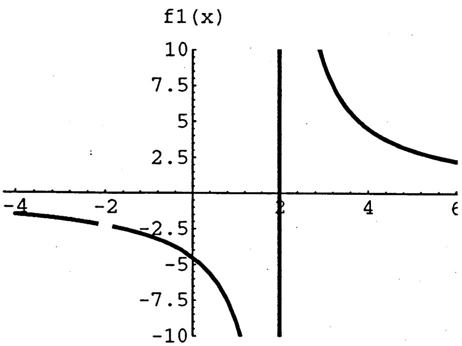
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(4-\varepsilon)}{-4\varepsilon+\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(4-\varepsilon)}{-\varepsilon.(4-\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9}{-\varepsilon}=\frac{9}{-0}=\boxed{-\infty}$$

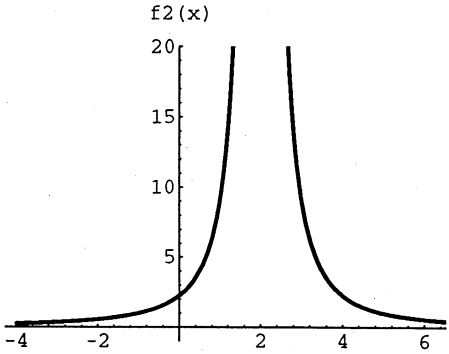
Límit per la dreta:

$$f_1(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{9.(x+2)}{x^2-4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(2+\varepsilon+2)}{(2+\varepsilon)^2-4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(4+\varepsilon)}{4+4\varepsilon+\varepsilon^2-4}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(4+\varepsilon)}{4\varepsilon+\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9.(4+\varepsilon)}{\varepsilon.(4+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9}{\varepsilon}=\frac{9}{0}=\boxed{+\infty}$$

Els dos límits laterals són diferents i la funció presentarà un punt de $\boxed{\text{discontinuïtat de salt}}$ en $x=2$. És una discontinuïtat asimptòtica i la funció tindrà l'asímptota vertical $x=2$.





En la primera gràfica podem observar els dos punts de discontinuïtat: evitable i de salt infinit.

SEGONA FUNCIÓ

Anul·lant el denominador de $f_2(x)=9/(x-2)^2$, trobarem que l'únic punt de discontinuïtat és el $x=2$.

La seva imatge és $f_2(2)=9.(2-2)^2=9/0=\infty$. Per tant no existeix $f_2(2)$ i la funció és discontínua en aquest punt.

Observem que la funció donada $f_2(x)=9/(x-2)^2$ és sempre positiva, i no ens caldrà trobar els límits laterals, ja que tenim directament que $f(2^-)=+\infty$ i $f(2^+)=+\infty$.

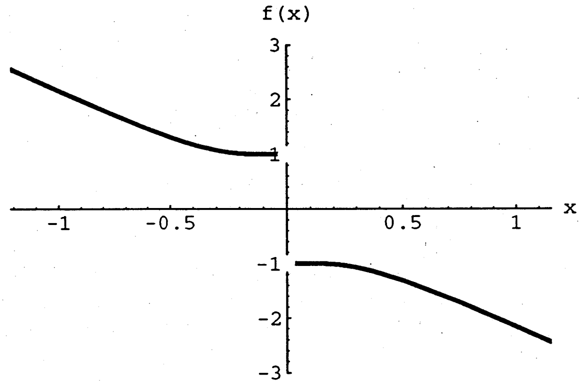
En resum, x=2 és un punt de $\boxed{\text{discontinuïtat de salt}}$, perquè els límits laterals tenen valor infinit. Podem dir que és una discontinuïtat asimptòtica i, per tant, la funció presenta una asímptota vertical en x=2, com podem veure en la segona gràfica de la pàgina anterior.

130. Troba el salt, $S=f(0^+)-f(0^-)$, que presenta en l'origen la funció:

$$f(x)=\frac{1+\sqrt[x]{e}}{1-\sqrt[x]{e}}$$

Solució. Per a operar amb més comoditat, escriurem la funció donada en forma exponencial, $f(x)=(1+e^{1/x})/(1-e^{1/x})$.

Segons el que veiem en la gràfica, el salt és de valor -2. Deduïm-ho analíticament.



Calculem els dos límits laterals:

LÍMIT PER L'ESQUERRA. Canvi $x=0-\varepsilon=-\varepsilon$, on $\varepsilon>0$. Per tant si $\varepsilon\to0$, $x\to0^-$.

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1+e^{1/(\varepsilon)}}{1-e^{1/(\varepsilon)}}=\frac{1+0}{1-0}=\boxed{1}$$

LÍMIT PER LA DRETA. Canvi $x=0+\varepsilon=\varepsilon$, on $\varepsilon>0$. Per tant si $\varepsilon\to0$, $x\to0^+$.

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1+e^{1/\varepsilon}}{1-e^{1/\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{(1/e^{1/\varepsilon})+1}{(1/e^{1/\varepsilon})-1}=\frac{0+1}{0-1}=\boxed{-1}$$

El punt x=0 és, per tant, un punt de discontinuïtat de salt finita de valor $S=f(0^+)-f(0^-)=(-1)-1=\boxed{-2}$.

131. És contínua la funció $f(x)=(x+1)/|x|$ en $x=0$? Troba els límits laterals i després fes la gràfica. Indica les asímptotes horitzontals.

Solució. La funció no és contínua en $x=0$, perquè $f(0)$ no està definit. Amb l'objectiu d'analitzar el tipus de discontinuïtat i fer la gràfica, calculem els límits laterals.

LÍMIT PER L'ESQUERRA. Canvi $x=0-\varepsilon=-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Aleshores si $\varepsilon\to 0$, $x\to 0^-$.

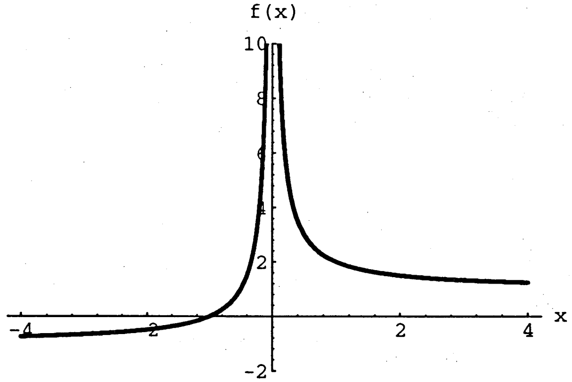
$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\varepsilon+1}{|-\varepsilon|}=\frac{-0+1}{|-0|}=\frac{1}{+0}=\boxed{+\infty}$$

LÍMIT PER LA DRETA. Canvi $x=0+\varepsilon=\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Aleshores si $\varepsilon\to 0$, $x\to 0^+$.

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon+1}{|\varepsilon|}=\frac{0+1}{|0|}=\frac{1}{+0}=\boxed{+\infty}$$

Com que aquests límits són infinits, resulta que en $x=0$ la funció presenta una discontinuïtat asimptòtica i la recta $x=0$ és, doncs, una asímptota vertical de la funció.

A partir d'una taula de valors, podem dibuixar la gràfica:



Les asímptotes horitzontals les trobarem calculant el límit de la funció quan la x tendeix a $+\infty$ i a $-\infty$. Notem que la funció pot venir definida per intervals com $f(x)=(x+1)/(-x)$ si $x<0$ i $f(x)=(x+1)/x$ si $x>0$, expressió que utilitzarem en el càlcul dels límits:

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\boxed{+1}\qquad f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x}=\boxed{-1}$$

Les dues asímptotes horitzontals són, doncs, $y=1$ i $y=-1$.

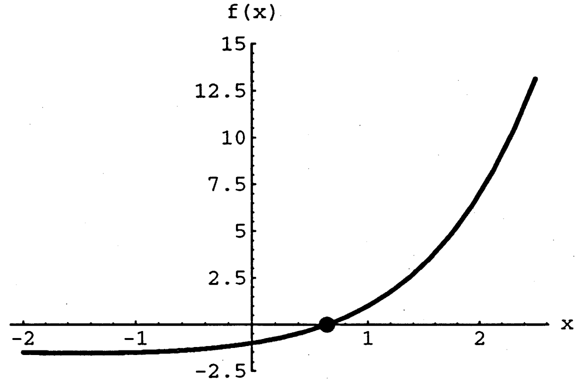
Teoremes de continuïtat

132. Prova que l'equació $2^x=1/x$ té una arrel positiva inferior a la unitat.

Solució. El primer membre de l'equació és una exponencial creixent i el segon, una hipèrbola equilàtera. Ja intuïm que es tallaran en un punt del primer quadrant.

Ho demostrarem, però, aplicant el teorema de Bolzano, prenent, a partir de l'equació donada, $2^x=1/x$, la funció $f(x)=x.2^x-1$.

Observem que aquesta funció és contínua, pel fet que està formada per operacions elementals de funcions contínues. Vegem-ho també a partir de la seva gràfica:

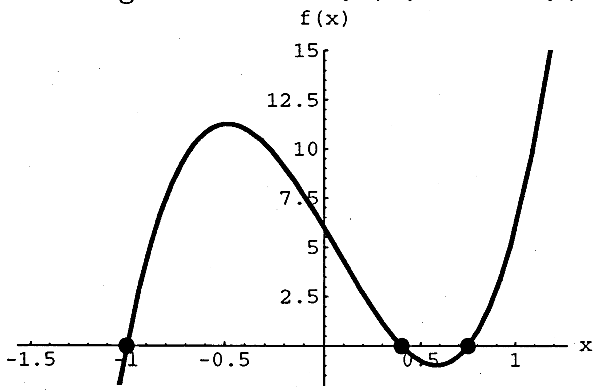


Com que per $f(0)=0.2^0-1=-1<0$ i per $f(1)=1.2^1-1=1>0$, la funció pren signes alternats en els extrems de l'interval $[0,1]$. En virtut del teorema de Bolzano, deduïm que existeix almenys un valor c situat a l'interior d'aquest interval, tal que $f(c)=0$.

Conseqüentment, existirà un $c\in(0, 1)$ tal que $c.2^c-1=0$, és a dir, que és solució de l'equació $2^x=1/x$.

133. Demostra que la funció cúbica $f(x)=20x^3-3x^2-17x+6$ té un zero a l'interval $(-2, 0)$ i dos zeros al $(0, 1)$. Troba'ls.

Solució. Si observem la gràfica de la funció veurem que la corba talla a l'eix X una vegada a l'interval $(-2, 0)$ i dues al $(0, 1)$:



Ho provarem pel teorema de Bolzano, calculant els valors de la funció en els extrems dels intervals donats.

PRIMER INTERVAL. $I_1=(-2, 0)$

$$f(-2)=20.(-2)^3-3.(-2)^2-17.(-2)+6= -160-12+34+6= -132 <0$$
$$f(0)=20.0^3-3.0^2-17.0+6= 6 >0$$

Evidentment, pel fet de ser una funció polinòmica, és contínua i en particular ho és a [-2, 0]. A més, com que pren signes diferents en els extrems de l'interval, el teorema de Bolzano ens diu que tindrà almenys un zero en aquest interval.

SEGON INTERVAL. $I_2=(0, 1)$

$$f(0)=20.0^3-3.0^2-17.0+6= 6 >0$$
$$f(1)=20.1^3-3.1^2-17.1+6= 20-3-17+6= 6 >0$$

En aquest cas obtenim dos valors del mateix signe i no podrem aplicar el teorema de Bolzano. Calculem, no obstant això, la imatge d'un punt interior, per exemple, x=0'5:

$$f(0'5)=20.(0'5)^3-3.(0'5)^2-17.0'5+6= 2'5-0'75-8'5+6= -0'75 <0$$

Per tant, tenim que f(0)>0, f(0'5)<0 i f(1)>0. En conseqüència, aplicant dues vegades el teorema de Bolzano, trobarem que hi ha un zero a (0, 0'5) i un altre a (0'5, 1).

Queda així demostrat que la funció f tindrà dos zeros a (0, 1) i, lògicament, pel fet que un polinomi de tercer grau pot tenir com a màxim tres zeros, tindrà un altre zero a (-2, 0).

Sabem que hi ha un zero a (-2, 0). Provem per Ruffini que -1 és un zero de la funció donada $f(x)=20.x^3-3.x^2-17.x+6$,

	20	-3	-17	6
-1		-20	23	-6
	20	-23	6	(0

Efectivament, una arrel és $\boxed{x=-1}$. Les altres dues les trobarem resolent l'equació de segon grau resultant, $20.x^2-23.x+6=0$,

$$x=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4.20.6}}{2.20}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{2.20}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{40}=\frac{23\pm7}{40}$$

Amb el signe més, $x=(23+7)/40=30/40=3/4=\boxed{0'75}$, i amb el signe menys, $x=(23-7)/40=16/40=2/5=\boxed{0'4}$.

134. Sigui la funció contínua f: I→I, on I és l'interval tancat I=[0,1]. Demostra que existiran un c i c' de I tals que f(c)=c i f(c')=1-c'. Dóna una interpretació geomètrica d'aquests dos resultats.

Solució. Com que hem de provar que f(c)=c, o bé f(c)-c=0, considerarem la nova funció g(x)=f(x)-x, que verifica:

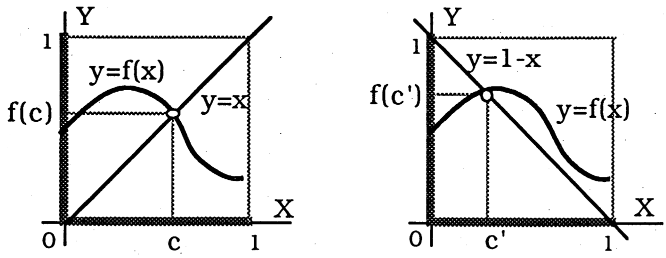
$$g(0)=f(0)-0=f(0) \quad \text{i} \quad g(1)=f(1)-1$$

Com que f(0) i f(1) pertanyen a I, es verificarà que $0\leq f(0)\leq 1$ i que $0\leq f(1)\leq 1$. En conseqüència, $g(0)\geq 0$ i $g(1)\leq 0$

Si $g(0)=0$ o bé $g(1)=0$, ja es compleix la tesi de l'enunciat, pels valors $c=0$ o $c=1$, és a dir, $f(0)=0$ o bé $f(1)=1$.

Si $g(0)>0$ i $g(1)<0$, podrem aplicar el teorema de Bolzano a la funció contínua $g(x)=f(x)-x$, deduint que existirà almenys un valor real c en què $g(c)=0$, d'on $f(c)-c=0$ i $f(c)=c$.

El significat geomètric és que en el quadrat unitat I×I hi haurà almenys un punt d'abscissa $x=c$ en què la corba $y=f(x)$ es tallarà amb la diagonal $y=x$.



Provem ara que existirà un punt c' de l'interval [0, 1] tal que $f(c')=1-c'$. Com que hem de provar que $f(c')+c'-1=0$, farem servir la nova funció $h(x)=f(x)+x-1$.

Observem que és una funció contínua i que $h(0)=f(0)+0-1=f(0)-1$ i que $h(1)=f(1)+1-1=f(1)$. Com que $f(0)$ i $f(1)$ pertanyen a l'interval [0, 1], es verificarà que $h(0)\leq 0$ i que $h(1)\geq 0$.

Si $h(0)=0$, es complirà la tesi $f(c')=1-c'$, ja que $h(0)=f(0)-1=0$, $f(0)=1$, $f(0)=1-0$. El mateix passarà si $h(1)=0$, perquè $h(1)=f(1)=0$, $f(1)=1-1$. Suposem, doncs, que $h(0)<0$ i $h(1)>0$ i podrem aplicar el teorema de Bolzano per a la funció $h(x)=f(x)+x-1$, per la qual cosa existirà almenys un valor c' en l'interval [0, 1] tal que $h(c')=0$, és a dir, $f(c')+c'-1=0$, $f(c')=1-c'$, com volíem demostrar.

El significat geomètric és que en el quadrat unitari la corba $y=f(x)$ tallarà almenys una vegada amb la diagonal $y=1-x$.

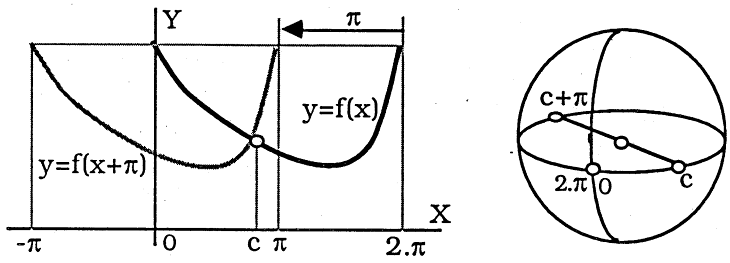
135. Tenim una funció contínua f: $[0, 2\pi]\rightarrow R$ tal que $f(0)=f(2\pi)$. Prova que existeix un c de $(0, \pi)$ tal que $f(c)=f(c+\pi)$. Després, suposant que la temperatura terrestre sobre un cercle màxim és contínua, prova que en cadascun d'aquests cercles màxims hi haurà dos punts antípodes que tindran la mateixa temperatura.

Solució. Hem de provar que $f(c)=f(c+\pi)$, o bé que $f(c)-f(c+\pi)=0$. Per tant, emprarem la nova funció $g(x)=f(x)-f(x+\pi)$ que és una funció contínua per ser una diferència de la funció contínua donada i d'ella mateixa, però traslladada horitzontalment π unitats cap a l'esquerra.

Estudiem g en els extrems de l'interval $(0, \pi)$:

$$g(0)=f(0)-f(\pi) \quad \text{i} \quad g(\pi)=f(\pi)-f(\pi+\pi)=f(\pi)-f(2\pi)=f(\pi)-f(0)$$

Hem emprat el fet que $f(0)=f(2\pi)$ i que $g(0)$ i $g(\pi)$ són de signes oposats ja que $g(\pi)=f(\pi)-f(0)=-[f(0)-f(\pi)]=-g(0)$. Si apliquem el teorema de Bolzano veurem que existirà almenys un c de $(0, \pi)$ tal que $g(c)=0$, o sigui $f(c)-f(c+\pi)=0$, $f(c)=f(c+\pi)$, com voliem provar.



Si suposem ara que la funció $T=f(x)$ és la temperatura terrestre en funció de la distància x sobre el cercle màxim desde el punt O, podem suposar, lògicament, que és una funció contínua i que en un cercle màxim es verifica que $T(0)=T(2\pi)$, ja que O i 2π són el mateix punt.

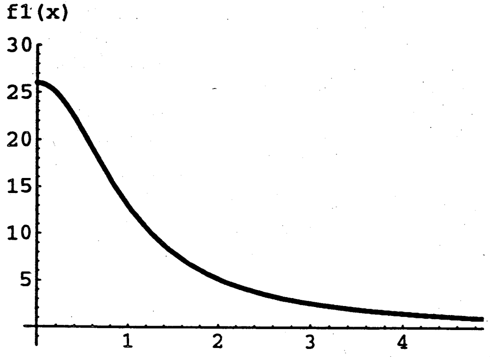
Aplicant el desenvolupament anterior deduirem que existeix almenys un punt c d'aquest cercle màxim tal que $T(c)=T(c+\pi)$. En altres paraules, existeixen dos punts antípodes c i $c+\pi$ que tenen la mateixa temperatura.

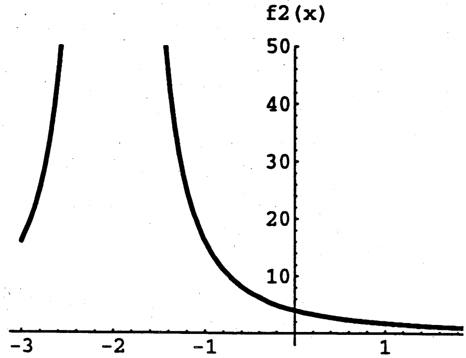
136. Dibuixa les quatre funcions donades i estudia la seva continuïtat. Digues també quines de les següents funcions estan acotades inferiorment i superiorment i quines tenen màxim i mínim en l'interval que s'indica:

$f_1(x)=\dfrac{26}{1+x^2}$ en $[0,5]$ $\qquad$ $f_2(x)=\dfrac{16}{(x+2)^2}$ en $[-3,2]$

$f_3(x)=\dfrac{60}{1+|x|}$ en $[-3,3]$ $\qquad$ $f_4(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 2x & \text{si } 1<x\le 2 \end{cases}$ en $[0,2]$

Solució. A partir d'una taula de valors, que no apuntem, dibuixem les dues primeres funcions:





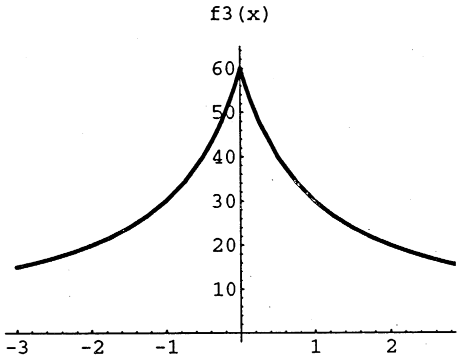
PRIMERA FUNCIÓ: $f_1(x)=26/(1+x^2)$ en $[0, 5]$

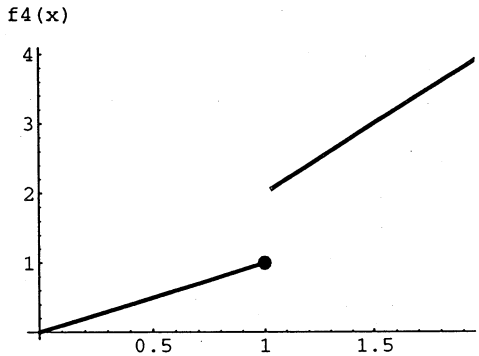
Observem que és contínua en aquest interval i, per tant, pels teoremes de continuïtat, és acotada superior i inferiorment, amb un màxim absolut P(0, 26) i un mínim absolut Q(5, 1).

SEGONA FUNCIÓ: $f_2(x)=16/(x+2)^2$ en $[-3, 2]$

Aquesta funció és discontínua en $x=-2$ i, per tant, no es pot assegurar que sigui acotada ni l'existència d'extrems absoluts. De fet, no és acotada superiorment però sí inferiorment i amb un mínim absolut P(2, 1). No té màxim absolut.

Dibuixem a continuació la gràfica de les dues altres funcions:





TERCERA FUNCIÓ: $f_3(x)=60/(1+|x|)$ en $[-3, 3]$

Es contínua en tot l'interval i, per tant, acotada superiorment i inferiorment, amb un màxim absolut P(0, 60) i s'assoleix el mínim absolut en els punts $Q_1(-3, 15)$ i $Q_2(3, 15)$.

QUARTA FUNCIÓ: $f_4(x)=x$ si $0\leq x\leq 1$ i $f_4(x)=2x$ si $1<x\leq 2$ en $[0, 2]$

Es tracta d'una funció discontínua en $x=1$, però tot i ser discontínua, és acotada tant superiorment com inferiorment, amb un màxim absolut P(2, 4) i un mínim absolut Q(0, 0).

3.3 APLICACIONS DE LA CONTINUÏTAT

Aplicacions de les f. contínues. Funcions exponencials

137. Es disposan de dues màquines que tenen per ritmes de depreciació $Q_1(t)=5.000.000.e^{-0'371.t}$ i $Q_2(t)=8.000.000.e^{-0'465.t}$. Quin és el valor de cadascuna al cap de 3 anys? I al cap de 8 anys? Prova que hi haurà un any de l'interval (3, 8) en què les dues màquines tindran el mateix valor. De quin any es tracta? Al cap de quant temps el valor de la primera màquina serà el doble del de la primera?

Solució. Al cap de 3 anys el valor de cada màquina serà

$$Q_1(3)=5_1000.000.e^{-0'371.3} \approx 1_1642.858 \text{ PTA}$$

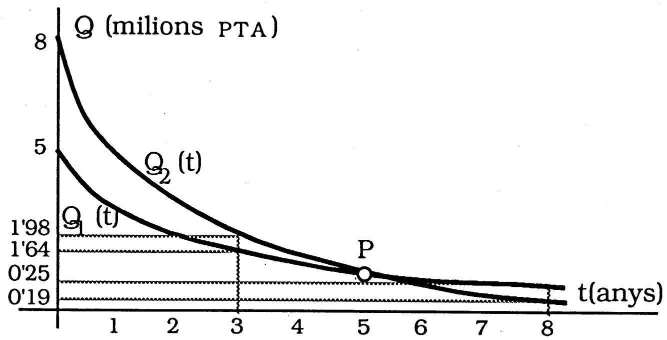
$$Q_2(3)=8_1000.000.e^{-0'465.3} \approx 1_1982664 \text{ PTA}$$

Al cap de 8 anys, el nou valor de les dues màquines serà

$$Q_1(8)=5_1000.000.e^{-0'371.8} \approx 257.030 \text{ PTA}$$

$$Q_2(8)=8_1000.000.e^{-0'465.8} \approx 193.871 \text{ PTA}$$

A partir d'aquests valors, i sabent que $Q_1(0)=5_1000.000$ PTA i que $Q_2(0)=8_1000.000$ PTA, podem fer un esquema d'aquestes dues funcions exponencials decreixents:



Ja veiem gràficament que hi ha un any t de l'interval (3, 8) en què $Q_1(t)=Q_2(t)$. Ho provarem, però, aplicant el teorema de Bolzano a la nova funció $f(t)=Q_1(t)-Q_2(t)$.

Aquesta funció és contínua per ser la diferència de les dues exponencials decreixents, que són funcions contínues. A més, en els extrems de l'interval (3, 8), la funció f té per imatges,

$$f(3)=Q_1(3)-Q_2(3)=1_1642.858-1_1982.664=-339.806<0$$

$$f(8)=Q_1(8)-Q_2(8)=257.030-193.871=63.159>0$$

Com que els valors són de signe contrari, podem assegurar que existirà un any t de l'interval (3, 8) tal que $f(t)=0$, $Q_1(t)-Q_2(t)=0$, i per tant, $Q_1(t)=Q_2(t)$.

Calcularem aquest any t, plantejant la igualtat,

$$5.000.000.e^{-0'371.t} = 8.000.000.e^{-0'465.t}$$

Simplificant i ordenant termes,

$$(e^{-0'371.t})/(e^{-0'465.t}) = 8/5 \text{ , } e^{-0'371.t+0'465.t}=1'6 \text{ , } e^{0'094.t}=1'6$$

Aplicant logaritmes neperians,

$$0'094.t=Ln(1'6) \text{ , } 0'094.t=0'47, \boxed{t=5 \text{ anys}}$$

Si calculem el valor de les màquines per t=5 anys resultarà que, aproximadament, les dues màquines valen Q=782.265 PTA.

Finalment, calcularem el temps en què el valor de la primera màquina és el doble del de la segona, $Q_1(t)=2.Q_2(t)$. Procedirem de manera anàloga al càlcul anterior,

$$5.000.000.e^{-0'371.t} = 2.(8.000.000.e^{-0'465.t})$$

$$(e^{-0'371.t})/(e^{-0'465.t}) = 16/5\ ,\quad e^{0'094.t}=3'2\ .\quad 0'094.t=Ln(3'2)$$

Obtindrem t=12'373945 anys que transformat la part decimal a mesos i dies correspón a $\boxed{\text{t=12 anys 4 mesos i 14 dies}}$.

138. Prova utilitzant la fórmula de la continuïtat en funció dels increments, que tota corba logística $y=a/(1+b.e^{-k.x})$, on b>0, és contínua en tots els punts reals, i després resol el problema següent:

«Una empresa ha llançat un producte al mercat, amb anuncis i propaganda en diferents mitjans de comunicació. Se sap que el nombre N de persones, en una ciutat de 327.680 habitants, que han sentit parlar del producte, després de t hores del seu llançament, ve donat per la corba logística $N(t)=P/(1+C.e^{-k.t})$. Si després de 7 hores ja està assabentada la desena part de la població i al cap d'un dia, la cinquena part, calcula les constants C i k. Quant temps ha transcorregut si unes 144.150 persones coneixen ja el producte?»

Solució. Per a demostrar per increments que la funció logística $y=a/(1+b.e^{-k.x})$ és contínua en tots els punts, trobarem primer Δy:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)= \frac{a}{1+b.e^{-k.(x+\Delta x)}} - \frac{a}{1+b.e^{-k.x}} =$$

$$= \frac{a[1+b.e^{-k.x}] -a.[1+b.e^{-k.(x+\Delta x)}]}{[1+b.e^{-k.(x+\Delta x)}].[1+b.e^{-k.x}]} = \frac{a[1+b.e^{-k.x}-1-b.e^{-k.(x+\Delta x)}]}{[1+b.e^{-k.(x+\Delta x)}].[1+b.e^{-k.x}]} =$$

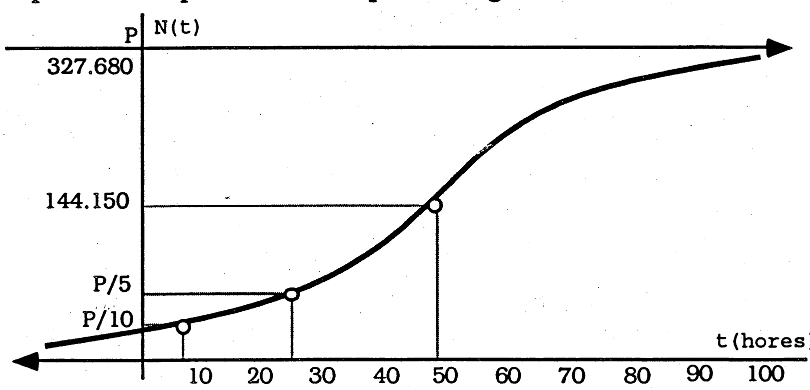
$$= \frac{ab.[e^{-k.x} - e^{-k.x}.e^{-k.\Delta x}]}{[1+b.e^{-k.(x+\Delta x)}].[1+b.e^{-k.x}]} = \frac{a.b.e^{-k.x}[1 - e^{-k.\Delta x}]}{[1+b.e^{-k.(x+\Delta x)}].[1+b.e^{-k.x}]}$$

Si fem ara que Δx tendeix a zero,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a.b.e^{-k.x}[1 - e^{-k.\Delta x}]}{[1+b.e^{-k.(x+\Delta x)}].[1+b.e^{-k.x}]} = \frac{a.b.e^{-k.x}[1 - e^{-k.0}]}{[1+b.e^{-k.(x+0)}].[1+b.e^{-k.x}]} =$$

$$= \frac{a.b.e^{-k.x}[1 - 1]}{[1+b.e^{-k.x}].[1+b.e^{-k.x}]} = \frac{a.b.e^{-k.x}.0}{[1+b.e^{-k.x}]^2} = 0$$

Com que el resultat ha estat zero, la funció logística és contínua, com podem comprovar en l'esquema següent:



En la corba logística $N(t)=P/(1+C.e^{-k.t})$ tenim $N(7)=P/10$ i $N(24)=P/5$. Per tant, substituint,

$$\frac{P}{1+C.e^{-k.7}}=\frac{P}{10}\ ,\quad 10.P=(1+C.e^{-7.k}).P\ ,\quad 9=C.e^{-7.k}\ ,\quad \boxed{C=9.e^{7.k}}$$

$$\frac{P}{1+C.e^{-k.24}}=\frac{P}{5}\ ,\quad 5.P=(1+C.e^{-24.k}).P\ ,\quad 4=C.e^{-24.k}\ ,\quad \boxed{C=4.e^{24.k}}$$

Resolent per igualació el sistema anterior,

$$9.e^{7.k}=4.e^{24.k}\ ,\quad 9/4=e^{24.k}/e^{7.k}\ ,\quad 2'25=e^{17.k}\ ,\quad 17.k=Ln(2'25)$$

$$17.k=0'81093\ ,\quad \boxed{k=0'0477}\ ,\quad C=9.e^{7.0'0477}\ ,\quad \boxed{C=12'5677}$$

La corba logística és $N(t)=327.680/(1+12'5677.e^{-0'0477.t})$

Sabem ara que, en un moment desconegut t, han sentit a parlar del producte un total de $N(t)=144.150$ persones. Substituint,

$$144.150=327.680/(1+12'5677.e^{-0'0477.t})$$

Calculem el valor de t que satisfà aquesta equació,

$$1+12'5677.e^{-0'0477.t}=2'2731877\ ,\quad e^{-0'0477.t}=0'1013063\ ,$$

$$-0'0477.t=Ln(0'1013063)\ ,\quad -0'0477.t=-2'2896063$$

Deduïm t=48 hores. És a dir, al cap de $\boxed{\text{2 dies}}$ coneixeran el producte 144.150 persones.

Aplicacions de les f. discontínues. Equacions en diferències

139. En un model de determinació d'ingressos retardat, el govern realitza uns costos que depenen dels ingressos de l'any anterior en la forma $C_t=732+0'92.Y_{t-1}$. Se sap també que els ingressos actuals han de ser iguals als costos més les inversions, $Y_t=C_t+I_t$, on I_t és fix i igual a 648. Si els ingressos inicials varen ser de $Y_0=32875$, troba l'equació en diferències que determina els ingressos en funció del temps i dibuixa la corba pels primers tres anys. Calcula i interpreta la successió formada pels salts de discontinuïtat.

Solució. Substituïm $C_t=732+0'92.Y_{t-1}$ i $I_t=648$ en $Y_t=C_t+I_t$,

$$Y_t=732+0'92.Y_{t-1}+648\ ,\quad Y_t=1380+0'92.Y_{t-1}$$

Si comparem aquesta equació en diferències amb la general, $y_t=a+b.y_{t-1}$, deduirem que a=1380 i b=0'92. Ara podrem calcular els nous coeficients A i B de la funció temporal $Y_t=A+B.b^t$,

$$A=a/(1-b)=1380/(1-0'92)=17250$$

$$B=Y_0-A=32875-17250=15625$$

La funció temporal és $\boxed{Y_t=17250+15625.(0'92)^t}$.

Com que 0<b<1 i B>0, ja podem assegurar que la trajectòria dels ingressos és monòtona decreixent i convergent. Ho comprovarem, però, gràficament.

Substituint per t=1, 2, 3, etc., obtindrem els ingressos anuals, que, en unitats monetàries, són els següents:

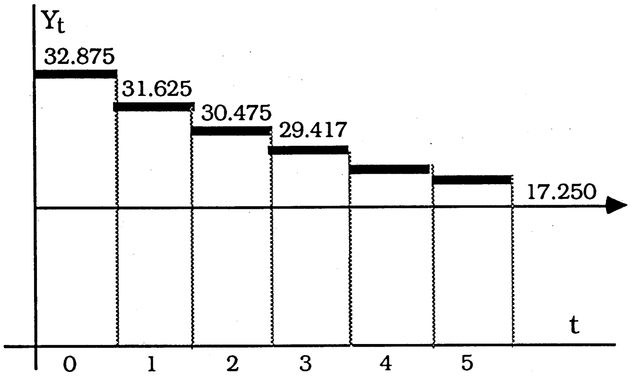
$$Y_1=31.625\ ,\ Y_2=30.475\ ,\ Y_3=29.417\ ,\ \ldots$$

Observem en aquesta successió i en la gràfica de la plana següent que es tracta d'una successió monòtona decreixent

El valors del salt en el primer punt de discontinuïtat és

$$S_1=Y_1-Y_0=31.625-32.875=-1.250$$

Calculant de la mateixa manera els altres salts, obtenim la successió S=(-1.250, -1.150, -1.058,...), de la qual, si trobéssim més termes, veuríem que es tracta d'una successió infinitesimal, és a dir, que tendeix a zero. En conseqüència, la successió d'ingressos (Yn) és una successió de Cauchy, on els seus termes es fan cada vegada més pròxims, i convergiran a un valor real.



Podem trobar fàcilment aquest valor de convergència, calculant el límit de la successió (Y_n):

$$\text{Lim}(Y_t)=17.250+15.625.(0'92)^{\infty}= 17.250+15.625.(0)= 17.250$$

Així, doncs, la trajectòria temporal és monòtona decreixent i convergent.

140. Una economia nacional utilitza el model de Harrod per suposar que els estalvis S_t són proporcionals als ingressos Y_t en la forma $S_t=0'55.Y_t$, mentre que la inversió I_t es considera proporcional a la diferència entre els ingressos d'aquest any i els de l'any passat en la forma $I_t=1'21.(Y_t-Y_{t-1})$. Si en l'equilibri succeeix que $S_t=I_t$, posa els ingressos en funció del temps i fes la gràfica pels tres primers anys i indica l'estabilitat del model, sabent que les unitats són en milions PTA i que, actualment, $Y_0=27.000$ milions PTA. Apunta també la successió formada pels salts en els punts de discontinuïtat.

Solució. Tenim les relacions $S_t=0'55.Y_t$, $I_t=1'21.(Y_t-Y_{t-1})$ i $S_t=I_t$. Substituint les dues primeres en la tercera,

$$0'55.Y_t=1'21.(Y_t-Y_{t-1})\ ,\ \ 0'55.Y_t=1'21.Y_t-1'21.Y_{t-1}\ ,$$

$$-0'66.Y_t=-1'21.Y_{t-1}\ ,\ Y_t=1'8333.Y_{t-1}$$

Comparant-la amb l'equació general, $Y_t=a+b.Y_{t-1}$ veiem que a=0 i b=1'8333. Les noves constants A i B seran,

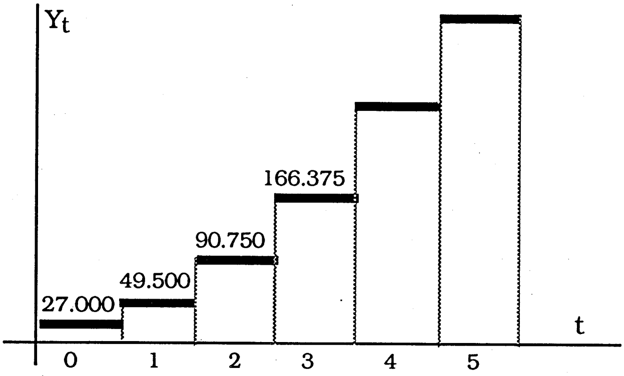
$$A=a/(1-b)=0/(1-1'8333)=0 \quad i \quad B=Y_0-A=27.000-0=27.000$$

La funció temporal és $Y_t=A+B.b^t$, $\boxed{Y_t=27.000.(1'8333)^t}$.

Per als tres primers anys tindrem els ingressos següents, on les unitats són en milions de PTA:

$$Y_1=49.500 \ , \ Y_2=90.750 \ i \ Y_3=166.375$$

Construïm la gràfica de l'equació en diferències:



Fixem-nos que la trajectòria temporal dels ingressos és monòtona creixent i divergent, la qual cosa és lògica perquè es verifica que b>1 i B>0.

Si calculem els salts, $S_t=Y_t-Y_{t-1}$ en els punts de discontinuïtat, obtindrem la successió S=(22.500, 41.250, 75.625, ...), on el salt es fa cada vegada més gran i, per tant, la trajectòria temporal ha de ser necessàriament divergent.

f) PROBLEMES PROPOSATS

3.1 LÍMIT D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

Límits laterals i càlcul de límits

141. Calcula en l'origen a=0 els límits laterals de les funcions següents:

$$f_1(x)=e^{1/x} \qquad f_2(x)=\frac{3^{1/x}+1}{3^{1/x}-1} \qquad f_3(x)=\frac{|x|}{\sin(x)} \qquad f_4(x)=E(x)$$

Sol. $f_1(0^-)=0 \quad f_1(0^+)=+\infty \quad , \quad f_2(0^-)=-1 \quad f_2(0^+)=+1$

$f_3(0^-)=-1 \quad f_3(0^+)=+1 \quad , \quad f_4(0^-)=-1 \quad f_4(0^+)=0$

142. Calcula, en el punt que s'indica, els límits de les funcions racionals següents:

$$b_1=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4} \qquad b_2=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x}-\frac{6}{1-x^3}\right)$$

Sol. Descomp. en factors. $b_1=5$, $b_2=-2$.

143. Per a la funció $f(x)=u^v$, on $u=(x+1)/(x-1)$ i $v=(x+3)/5$, calcula en el més infinit els límits de la base i de l'exponent. Troba després el límit en el més infinit de la funció donada.

Sol. Indeterm. 1^∞ , $b=\sqrt[5]{e^2}$.

144. Per mitjà d'un canvi de variable adequat, troba els límits següents:

$$b_1=\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[2]{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} \qquad b_2=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2.\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$$

Sol. $x=t^6 \Rightarrow b_1=3$, $x=t^3 \Rightarrow b_2=1/9$.

145. Aplicant infinitèsims equivalents, determina en l'origen els límits de les funcions trigonomètriques següents:

$$f_1(x)=\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \qquad f_2(x)=\frac{1-\cos(x^2)}{x^2} \qquad f_3(x)=\frac{3.\mathrm{arc}\tan(2x)}{2.\sin(3x)}$$

Sol. $b_1=5/2$, $b_2=0$, $b_3=1$.

3.2 CONTINUÏTAT D'UNA FUNCIÓ

Funció contínua i discontinuïtats

146. Estudia si en x=2 és contínua la funció següent definida per:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)/[1+e^{1/(x-2)}] & \text{si } x\neq 2\\ 0 & \text{si } x=2\end{cases}$$

Sol. $b=f(2^-)=f(2^+)=0$, $b=f(2)=0 \Rightarrow$ Contínua.

147. Analitza la continuïtat en x=0, estudiant els límits laterals de la funció $f(x)=\sin(1/x)/(1+e^{1/x})$.

Sol. $f(0^-)=$No ex. , $f(0^+)=0 \Rightarrow$ No cont. (disc. essencial).

148. Determina els intervals de continuïtat de la funció definida a trossos per: $f(x)=0$ si $x<0$, $f(x)=x$ si $0\leq x<1$, $f(x)=-x^2+4x-2$ si $1\leq x<3$ i $f(x)=4-x$ si $x\geq 3$.

Sol. I=R (sempre contínua).

149. Les funcions següentsno estan definides en x=0. Troba el valor que se'ls ha d'assignar en aquest punt perquè siguin contínues:

$$f_1(x)=\frac{(1+x)^3-1}{x} \qquad f_2(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

$$f_3(x)=\frac{Ln(1+x)-Ln(1-x)}{x} \qquad f_4(x)=\frac{x.\cos(x)}{\sin(x)}$$

Sol. $f_1(0)=3$, $f_2(0)=1/2$, $f_3(0)=2$ $\wedge$ $f_4(0)=1$.

150. Quins són els límits laterals de la funció $f(x)=1-x.\sin(1/x)$ en x=0? És una funció discontínua? De quin tipus? Quin valor se li hauria de donar a f(0) perquè fos contínua?

Sol. $f(0^-)=f(0^+)=1$, f(0)=Indet. , Sí, disc. evit. , f(0)=1.

151. Determina els infinits punts de discontinuïtat de la funció trigonomètrica $f(x)=\tan(\pi x/(x+1))$.

Sol. tan(x) disc. $\Rightarrow x=(2k+1)\pi/2$,
f(x) disc. $\Rightarrow x=(2k+1)/(1-2k)$ o $x=-1$.

152. Estudia en quins punts és contínua o discontínua la funció $f(x)=(|x-2|-1)/(|x+1|-2)$. Dibuixa-la mitjançant una taula de valors. Indica també el tipus de discontinuïtat en els punts en què la funció no és contínua.

Sol. $x=1$ disc. evit. , $x=-3$ disc. de salt infinit.

Teoremes de continuïtat

153. Observant que la funció $f(x)=x^5-3x-1$ és sempre contínua, prova que l'equació $x^5=3x+1$ té almenys una solució real situada en l'interval $(1,2)$.

Sol. $f(1)<0$ i $f(2)>0$, T. Bolzano.

154. Demostra que l'equació trigonomètrica següent, on la x està mesurada en radians, té almenys una arrel real $x=c$, i digues l'interval on està situada:

$$x^{341}+\frac{341}{1+x^2+\cos^2(x)}=3410$$

Sol. $I=(1,\ 2)$, T. Bolzano.

155. En un cap de setmana, un excursionista marxa a les 9h del matí des de la catedral de Girona i arriba a les 12h del migdia a l'ermita dels Àngels. Com que té el dia lliure, s'hi queda tota la tarda i acampa durant la nit per tornar a sortir l'endemà a les 9h del matí i, tranquil·lament, arribar a les 12h a Girona.

Suposant que tant en l'anada com en la tornada hagi passat pel mateix camí, demostra que hi haurà almenys un punt del recorregut en que haurà passat a la mateixa hora del dia.

Sol. Observa les fites de km comptats des de Girona.
Anada: $f(9)=0$ km, $f(12)=L$.
Tornada: $g(9)=L$, $g(12)=0$
Funció $h(t)=f(t)-g(t)$, T. Bolzano.

156. Observa que la funció $f(x)=(x-1)/(x-3)$ pren valors de signes oposats en els extrems de l'interval $[2,4]$ i, no obstant això, no s'anul·la en cap punt d'aquest interval. Contradiu aquest fet el teorema de Bolzano? Justifica-ho fent la gràfica per mitjà d'una taula de valors i estudiant la continuïtat.

Sol. $f(2)<0$, $f(4)>0$, No (disc. en $x=3$).

3.3 APLICACIONS DE LA CONTINUÏTAT

Funcions exponencials en l'economia

157. El producte nacional brut P d'un país era de 2'5 bilions de PTA l'any passat i el d'aquest any és de 3'2 bilions. Suposant que segueix la corba exponencial $P=P_0.e^{k.t}$, on P_0 i k són constants positives, quin serà el PNB de l'any següent? I el d'aquí a dos anys?

Sol. $t=-1$, $P=2'5$; $t=0$, $P=P_0=3'2$; $k=0'24686$
$P_1=4'096$ bilions , $P_2=5'2428$ bilions.

158. La velocitat d'escriure a màquina d'una oficinista augmenta segons la corba d'aprenentatge $V(t)=350-235.e^{-0'35.t}$, on V és el nombre de pulsacions per minut i t és el temps d'aprenentatge en setmanes. Quina velocitat tenia quan va entrar a l'oficina? Quina serà la seva velocitat límit? Si actualment la seva velocitat és de 345 pols/min, quantes setmanes fa que treballa?

Sol. $V(0)=115$ puls/min , $V(\infty)=350$; $V(t)=345$, $t=11$ setm.

Equacions en diferències

159. La funció de demanda de llavors per a un cert tipus de plantes ve donada per $QD_t=1950-0'48.P_t$, on P_t és el preu actual i la funció d'oferta és $QS_t=-780+0'36.P_{t-1}$, ja que depèn del preu P_{t-1} de l'any anterior. Si en aquest model, anomenat de la "teranyina", el preu inicial és $P_0=3506$ PTA, troba el preu d'equilibri P_e i estudia l'estabilitat de la trajectòria, fent la gràfica pels primers quatre anys.

Sol. $QD_t=QS_t$, $P_t=5687'5-0'75.P_{t-1}$, $P_t=3250+256.(-0'75)^t$
$P_1=3058$, $P_2=3394$, $P_3=3142$, $P_4=3331$, osc. conv. $P_e=3250$.

160. En un model de mercat amb inventari es tenen les funcions de demanda $QD_t=m-n.P_t$ i d'oferta $QS_t=-p+q.P_t$, i on el preu d'un any depèn de l'anterior en la forma $P_t=P_{t-1}-r(QS_{t-1}-QD_{t-1})$. Sabent que tots els paràmetres són positius, determina l'equació en diferències $P_t=a+b.P_{t-1}$ i posa després el preu en funció del temps.

Si amb estudis fets en el mercat s'ha trobat que $n=0'6$ i $q=0'4$, analitza l'estabilitat de la trajectòria pels següents valors del paràmetre r: $r_1=0'5$, $r_2=1'5$ i $r_3=2'5$.

Sol. $P_t=(m+p).r+[1-(n+q).r].P_{t-1}$, $A=(m+p)/(n+q)$, $B=P_0-A$
$P_t=A+B.b^t$, $b=1-r$, $b_1=0'5$ mon. conv. , $b_2=-0'5$ oscil. conv.
$b_3=-1'5$ oscil. diverg.

APÈNDIX

A) Prova d'autoavaluació

B) Bibliografia escollida

C) Glossari de conceptes

PROVA D'AUTOAVALUACIÓ

PROBLEMES PARAMETRITZATS

Presentem a continuació una sèrie de dotze problemes que, com es pot suposar, no són pas representatius de la gran varietat d'exercicis que es podrien proposar. Tots aquests problemes de topologia, successions, sèries i continuïtat, depenen d'un *paràmetre* "a", que pot valer 1, 2, 3 o 4. Per a cadascun d'aquests valors s'obté una resposta diferent entre les vuit possibles donades.

En els següents *problemes parametritzats* substitueix en primer lloc el paràmetre a pel valor que vulguis entre 1, 2, 3 o 4, resol el problema, escull l'opció correcta i després fes una creu al quadre de respostes:

Topologia

1. Un triangle està format per les rectes

r_1: $(12-5a).x+(10-2a).y+(16.a^2-69a+62)=0$

r_2: $(18-7a).x+(5a-12).y+(-a^2+18a-42)=0$

r_3: $(6-2a).x+(7a-22).y+(22.a^2-139a+220)=0$

Calcula els tres vèrtexs d'aquest triangle. El seu perímetre p val:

A) p=10'24	B) p=42'56	C) p=19'04	D) p=31'96
E) p=27'37	F) p=39'19	G) p=15'71	H) p=48'13

2. Sigui el conjunt $M=\{(x,y)\in R^2 \ / \ (x-m)^2+(y-n)^2 \leq r^2\}$, on

$$m=\frac{4.\cos[(2a-1).\pi/4]}{|\cos[(2a-1).\pi/4]|}, \quad n=\frac{3.\sin[(2a-1).\pi/4]}{|\sin[(2a-1).\pi/4]|} \quad \text{i} \quad r=5.$$

Classifica en interior (i), frontera (f) i exterior (e) els quatre punts següents: $P_1(0, 3)$, $P_2(9, 3)$, $P_3(0, -6)$ i $P_4(-4, -3)$. Obtindràs

A) f-e-i-i	B) i-f-e-e	C) f-i-e-i	D) i-e-e-e
E) e-e-f-i	F) e-e-f-e	G) i-e-f-f	H) e-f-i-f

3. Partim dels conjunts de la recta real

$X=\{x\in R \ / \ |x-3(a-2)|<2\}$ $\quad Y=[-6, 0]\cup\{2\}\cup[6, 9]$

$Z=\{x\in R \ / \ -4\leq x\leq -2\}\cup\{x\in R \ / \ 0<x<2\}\cup\{x\in R \ / \ x^2-36=0\}$.

Troba els conjunts $M=X\cup Y$ i $N=X\cap Z$ i estudia si són tancats (t), oberts (o) o ni tancats ni oberts, és a dir res (r). Veuràs que M i N són, resp.:

A) t, t	B) o, r	C) r, t	D) o, o
E) o, t	F) r, o	G) r, r	H) t, o

Successions i sèries

4. Els costos d'una empresa en els dos primers anys han estat de $C_1=m/(a+1)$ i $C_2=m/(a+2)$, on m=10 milions PTA. Si s'ha comprovat que la successió de costos anuals és una progressió geomètrica, troba els costos totals en PTA acumulats en els dos primers quinquennis.

A) $11_1426.258$ B) $10_1384.944$ C) $12_1770.198$ D) $15_1428.726$
E) $13_1428.731$ F) $14_1826.585$ G) $16_1231.175$ H) $17_1195.242$

5. Una successió té de terme general

$$a_n=\frac{210.[(p.n+q)^4 - (p.n-q)^4]}{n.[(r.n+s)^3 - (r.n-s)^3]}$$

on els paràmetres són p=9-2a, q=a+1, r=5-a i s=2a-1. El límit d'aquesta successió és:

A) 560 B) 12.005 C) 15.600 D) 8.750
E) 74'3 F) 200 G) 3.428 H) 1.512

6. Per mitjà d'infinitèsims equivalents, calcula el límit de la successió (a_n) quocient de les dues successions (b_n) i (c_n) de terme general

$$b_n=3n.\sin\left(\frac{8-a}{n}\right).\mathrm{Ln}\left[1+\tan^2\left(\frac{7-a}{n}\right)\right] \quad \text{i} \quad c_n=(n+1).\tan\left(\frac{6-a}{n}\right).\left[1-\cos\left(\frac{5-a}{n}\right)\right]$$

El valor del límit de $(a_n)=(b_n/c_n)$ és:

A) 18'9 B) 40 C) 25 D) 63'4
E) 108 F) 9'28 G) 256 H) 84'5

7. Aplicant la fórmula de Stirling, calcula el límit

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(a.n)!}{[(5-a).n]!.n^{(2a-5)n}}}$$

Aquest límit és

A) $e^2/64$ B) $e^3/256$ C) 0 D) $256/e^3$
E) ∞ F) $4e/27$ G) $27/(4e)$ H) $64/e^2$

8. Estudia la convergència (c) o divergència (d) de les tres sèries següents

$$\sum\frac{n!.\pi^n}{(a+\pi).(a+2\pi)...(a+n\pi)} \qquad \sum\sqrt{\left[\frac{a.n+(12/a)}{(5-a)n+3}\right]^n} \qquad \sum\frac{(a+1).n^{12/a}+(7-2a)}{(2a-1).n^{13-2a}+(6-a)}$$

emprant respectivament els criteris de D'Alembert/Raabe, Cauchy i Pringsheim. Obtindràs

A) d-d-d B) c-d-c C) c-c-d D) d-c-d
E) d-d-c F) d-c-c G) c-d-d H) c-c-c

Continuïtat

9. La funció racional següent

$$f(x)= -60.\frac{(a+1) + (a+2).(a+3)^{(a+4)/x}}{(a+3)^{(a+2)/x}.(a+1) + a}$$

presenta una discontinuïtat en l'origen. El valor del seu salt S és:

A) S=15	B) S=5	C) S=27	D) S=30
E) S=10	F) S=8	G) S=3	H) S=36

10. Sigui la funció definida per intervals com a

$$f(x)= Ln[e^{a.x}+\cos(x)]^{p/\pi^2} \text{ si } x\leq\pi/2 \quad i \quad f(x)= \frac{2a-3}{x-E(x/2)} \text{ si } x>\pi/2$$

Determina el valor que ha de tenir p perquè sigui contínua en $x=\pi/2$.

A) p=4	B) p=1	C) p=-4	D) p=-2
E) p=5	F) p=0	G) p=2	H) p=-3

11. S'ha fet una predicció econòmica amb dos estudis diferents, per mitjà de dues funcions contínues: una corba d'aprenentatge i una corba logística. Aquestes dues corbes venen expressades, respectivament, per les funcions

$$f(x)=(2a+3)-(5-a).e^{-(a+1).x/10} \quad i \quad g(x)= \frac{9-2a}{1+(a+2).e^{-(a+1).x/10}}$$

Estudia els possibles valors de x en que es verificarà la mateixa predicció. Obtindràs que x val aproximadament

A) 9'1 i 0'4	B) -3'7	C) 5'6	D) 7'8
E) No exist. x	F) 2 i 6'9	G) -2'5	H) -4'7

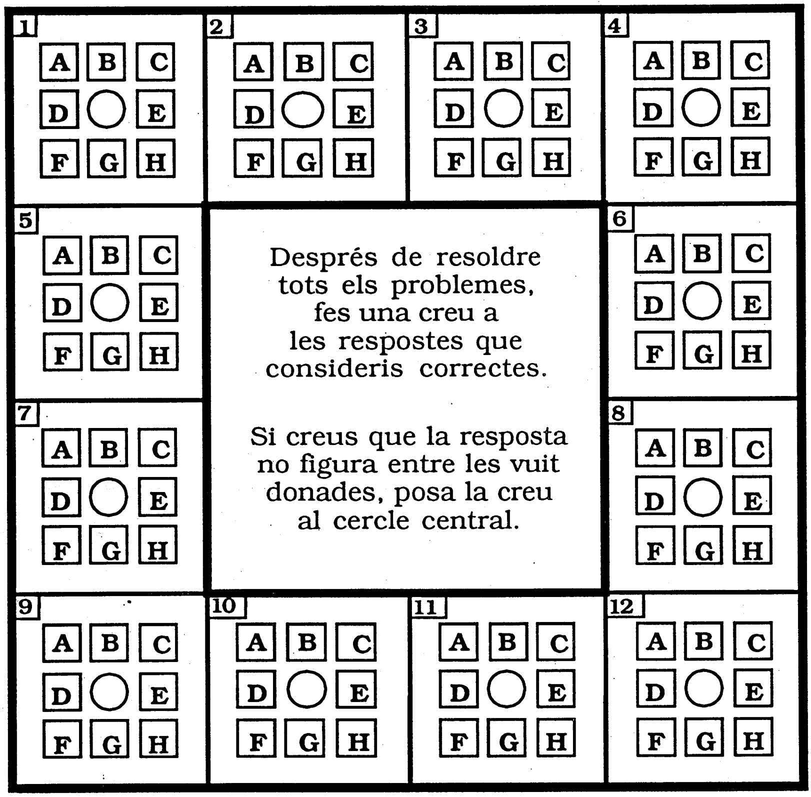
12. Una funció discontínua varia periòdicament en la forma lineal $y_t=m+n.y_{t-1}$, on y_t és el valor de la funció en el període t i y_{t-1} el valor de la funció en el període anterior. Se sap que, inicialment, $y_0=10$ milions i que

a	1	2	3	4
y_1	$5_1369.500$	$7_1221.700$	$8_1456.500$	$9_1338.500$
y_2	$3_1054.250$	$5_1276.890$	$7_1170.250$	$8_1724.250$

Calcula els coeficients m i n i determina després y_8. Obtindràs que val, aproximadament:

A) $1_1272.878$	B) $3_1428.931$	C) 775.175	D) $7_1125.624$
E) $5_1857.943$	F) $4_1728.965$	G) $2_1892.811$	H) $6_1846.931$

QUADRE DE RESPOSTES:



Puntuació:

Respostes encertades: ☐ Punts positius (×4): ☐

equivocades: ☐ negatius (×(-1)): ☐

Puntuació total: ☐

Respostes correctes en funció del paràmetre:

(a=1, 2, 3 i 4, respectivament)

P_1: F-C-A-E	P_2: B-D-E-F	P_3: A-H-F-C	P_4: F-C-A-B
P_5: B-D-H-F	P_6: A-C-B-E	P_7: B-F-G-D	P_8: D-F-E-B
P_9: D-E-B-G	P_{10}: C-G-A-E	P_{11}: F-G-B-H	P_{12}: C-A-G-E

Qualificació:

Per a obtenir la nota N farem servir la "Part entera", on prendrem l'enter inferior a la puntuació donada. Així E(5'3)=5. En quant a la qualificació ens basarem en el següent barem:

Susp.($N<5$) Apr.($5\leq N<7$) Not.($7\leq N<9$) Exc.($N\geq 9$)

Nota [N=E(P+3)/5]: $\boxed{}$ Qualificació: $\boxed{}$

Si la puntuació no ha estat suficientment alta, es pot tornar a resoldre la prova, repassant abans els conceptes i exemples, però ara emprant per al paràmetre "a", que ha de ser 1, 2, 3 o 4.

BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales.* Ed. A.C. Madrid. 1990.

AYRES, F. *Fundamentos de Matemáticas Superiores.* Ed. McGraw-Hill. Mèxic. 1969.

BERMAN, G. N. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* Ed. Mir. Moscou. 1977.

CHIANG, A. C. *Métodos Fundamentales de Economía Matemàtica.* Ed. McGraw-Hill. Madrid. 1987.

DELGADO, M. *Matemáticas: Álgebra, Cálculo, Geometría y Probabilidad.* Ed. Mc-Graw-Hill. Madrid. 1989.

DÍAZ HERNANDO, J.A. *Álgebra, Geometría y Cálculo. Tomo IV.* Ed. Tebar Flores. Madrid.

FERNANDEZ VIÑA, J. A. *Ejercicios y complementos de Análisis Matemático.* Ed. Tecnos. Madrid. 1979.

GARCÍA CASTRO, F. *Cálculo Infinitesimal, I-1.* Ed. Pirámide. Madrid. 1980.

LIPSCHUTZ, S. *Topología General.* Ed. McGraw-Hill. Mèxic. 1970.

PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* Ed. Montaner y Simón. Barcelona. 1978.

REY PASTOR, J. *Análisis Matemático. Tomo I.* Ed. Kapelusz. Buenos Aires. 1969.

RODRÍGUEZ, A. *Matemáticas para Economistas, II.* Ed. Romargraf. Barcelona. 1978.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid. 1988.

SPIEGEL, M. *Cálculo Superior.* Ed. Mc-Graw-Hill. Madrid. 1985.

TEBAR FLORES, E. *Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tomo I.* Ed. T. Flores. Madrid. 1977.

THOMAS ARA, L. *Cálculo.* Ed. Los Autores. Santander. 1972.

YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas.* Ed. Ariel. Barcelona. 1983.

GLOSSARI DE CONCEPTES

Exposem a continuació un recull dels termes matemàtics emprats, seguits de la plana en què es poden trobar. Els números en negreta indiquen que el concepte és a la part de "Formulació matemàtica". En cas contrari, és a la part de "Conceptes i exemples":

- A -

- B -

- C -

D

E

N

O

P

Q

R

S

- T -

- U -

- V -

- W -

ÍNDEX