ÀLGEBRA VECTORIAL: VECTORS

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

ÀLGEBRA VECTORIAL: VECTORS

Carles Cassú, Joan Bonet,
Xavier Bertran, Joan Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Dades recomanades per la Biblioteca de la UdG

CIP 512.6 ALG

Àlgebra vectorial : vectors / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1995. - p. ; cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 6)
ISBN 84-88762-36-4
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1. Àlgebra vectorial 2. Àlgebra vectorial - Problemes, exercicis, etc.
CIP 512.6 ALG

Primera edició: desembre de 1995

Segona edició: octubre de 1996

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la Universitat de Girona

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

© Carles Cassú, Joan Bonet, Xavier Bertran, Joan Carles Ferrer

ISBN: 84-88762-36-4
Dipòsit legal: GI-1.599-95

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG.
Joan Bonet, Xavier Bertran, i Joan Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

Sota les sancions establertes per les lleis, queden rigorosament prohibides, sense l'autorització per escrit dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol mitjà o procediment –incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic– i la distribució d'exemplars d'aquesta edició mitjançant lloguer o préstec públics.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col·lecció de setze petits volums agrupats en els dos móduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra Lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra Moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra Matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria Analítica), mentre que el mòdul de Càlcul Infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul Funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul Diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions Diferencials).

Amb aquest sisè volum de la col·lecció iniciem l'estudi de l'Àlgebra vectorial a partir de conceptes propers a la intuició com son els vectors del pla i de l'espai per, a continuació, fer una generalització del concepte de vector a altres ens matemàtics com polinomis, successions, magnituds econòmiques, etc. En aquest volum utilitzarem sovint la notació matricial, ja coneguda i emprada en volums anteriors, i que esdevé una eina idònia per facilitar la notació dels conceptes i del càlcul entre vectors. Seguim amb l'estudi axiomàtic de l'estructura d'espai vectorial i les seves propietats, que com veurem en el proper volum ens permetrà, entre altres aplicacions a l'economia, deduir els valors i vectors propis d'un endomorfisme i diagonalitzar formes quadràtiques.

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manerà lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, novembre de 1995

Els autors

Capítol 1: **Càlcul vectorial**

a) Bibliografia escollida	10
b) Programa i simbologia	11
c) Conceptes i exemples	12
d) Formulació matemàtica	23
e) Problemes resolts	30
f) Problemes proposats	74

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

THOMAS ARA, L. *Álgebra Lineal.* P306/325

SPIEGEL, MURRAY R. *Análisis Vectorial.* P1/34

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P137/141.

LIPSCHUTZ, S. *Algebra Lineal.* P45/86.

Addicional

DELGADO, M. *Matemáticas: Algebra, Cálculo, Geometria, Probabilidad.* P87/89.

TUDURI, J. *Matemáticas de C.O.U.* P145/158.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P33/52.

PRIETO, E. *Matemáticas para economistas. Algebra Lineal.* P337/367.

ROJO, A. *Algebra II.* P214/236.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 VECTORS EN EL PLA I EN L'ESPAI

1) **Concepte de vector.** Punts origen (P_1) i extrem (P_2), vector del pla ($\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ...), components horitzontal (a) i vertical (b), pendent (m) i inclinació (α). Vectors equipolents ($\approx$). Conjunts de vectors fixos ($\mathbf{V}$) i vectors lliures (V). Vectors de l'espai, inclinacions (α, β, γ).

2) **Suma i producte per un escalar.** Suma geomètrica de dos vectors, regla del paral·lelogram. Suma en funció de les components (+), estructura de grup abelià, vector nul ($\mathbf{0}$), vector oposat ($-\mathbf{v}$), diferència de vectors (-). Producte d'un escalar per un vector (.), propietats. Partició d'un segment, punt i constant de partició (k). Casos particulars: punts interior i exterior al segment, punt mig (P_m).

3) **Norma d'un vector.** Concepte de norma($\|\mathbf{v}\|$), distància entre dos punts (d). Propietats de la norma: positivitat, escalaritat i desigualtat triangular. Tipus de vectors: unitari ($\mathbf{u}$), vectors ortogonals i ortonormals, vectors canònics ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$). Descomposició canònica.

1.2 PRODUCTES ENTRE VECTORS

1) **Producte escalar.** Projecció perpendicular, producte escalar ($\bullet$), propietats. Producte escalar en funció de les components. Angle format per dos vectors (α). Casos particulars: paral·lelisme ($\|$) i perpendicularitat ($\perp$).

2) **Producte vectorial.** Norma, direcció i sentit del producte vectorial ($\wedge$), propietats. Producte vectorial en funció de les components. Àrea d'un triangle.

3) **Producte mixt.** Producte mixt de tres vectors (PM=[ ]). Interpretació geomètrica: volum del paral·lelepípede. Producte mixt en funció de les components. Propietats. Volum d'un tetraedre.

4) **Altres productes entre vectors.** Doble producte vectorial de tres vectors. Producte escalar de productes vectorials, identitat de Lagrange.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 VECTORS EN EL PLA I EN L'ESPAI

1.1.1 CONCEPTE DE VECTOR. Si $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ són dos punts qualssevol del pla, on al primer li diem *punt origen* i al segon *punt extrem*, anomenem *vector del pla* la fletxa dirigida des del punt origen fins al punt extrem.

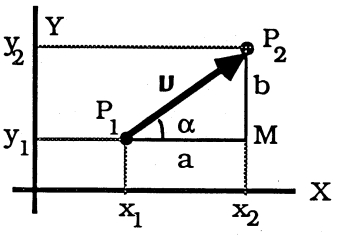
Simbolitzarem els vectors per les lletres $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$,... i si volem indicar els punts origen i extrem, posarem una fletxa sobre aquests punts:

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{P_1P_2}$$

Definim les *components d'un vector* com les projeccions d'aquest vector sobre els eixos coordenats X i Y, que denotarem per a i b. La primera és la *component horitzontal* i la segona la *component vertical*. Tenim:

$$a=x_2-x_1 \quad \text{i} \quad b=y_2-y_1$$

Podrem posar $\mathbf{u}=(a,b)$, això indica que té de components a i b.



També definim el *pendent del vector* i el simbolitzem per m, com el quocient entre la component vertical i l'horitzontal, és a dir, $m=b/a$. La *inclinació del vector* és l'angle α que forma amb l'horitzontal i, aplicant trigonometria, serà $\tan(\alpha)=b/a$, $\alpha=\arctan(m)$.

Exemple 1. Sigui el vector $\mathbf{u}$ d'origen $P_1(2,1)$ i extrem $P_2(6,4)$. La component horitzontal és $a=6-2=4$ i la vertical $b=4-1=3$.

Podem designar el vector per $\mathbf{u}=(4,3)$. D'aquí es veu que el pendent és $m=3/4=0'75$ i en percentatge $m=75\%$. La inclinació, agafant una calculadora, serà $\alpha=\arctan(0'75)= 36° \; 52' \; 11''$.

Donats dos vectors $\mathbf{u}_1=(a_1, b_1)$ i $\mathbf{u}_2=(a_2, b_2)$, direm que són *equipolents*, si i només si tenen les mateixes components: $a_1=a_2$ i $b_1=b_2$.

Ho expressarem per $\mathbf{u}_1 \approx \mathbf{u}_2$ i si els dibuixéssim veuríem que són paral·lels (igual direcció) i tenen el mateix sentit i longitud (més endavant en direm "norma").

Exemple 2. A més del vector $\mathbf{u}$ anterior, dibuixem el nou vector $\mathbf{w}$ d'origen $Q_1(3,5)$ i $Q_2(7,8)$. Les components són $a=7-3=4$ i $b=8-5=3$.

Per tant, $\mathbf{w}=(4,3)$ i com també $\mathbf{u}=(4,3)$, aquests dos vectors són equipolents. Fem la gràfica i veurem que, fent una translació d'un vector, es pot superposar amb l'altre.

Observem que estem treballant amb dos tipus de vectors:

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{i} \quad \mathbf{u}=(a,b)$$

Els primers, en donar-nos els punts origen i extrem, seran *vectors fixos*, ja que queden dibuixats d'una manera única en el pla. El *conjunt dels vectors fixos* el simbolitzarem per **U**.

Els vectors del segon tipus sols ens donen les seves components i els podrem dibuixar prenent com a origen qualsevol punt del pla. Anomenarem *vectors lliures* aquests tipus de vectors. El *conjunt dels vectors lliures* el designarem amb **V**.

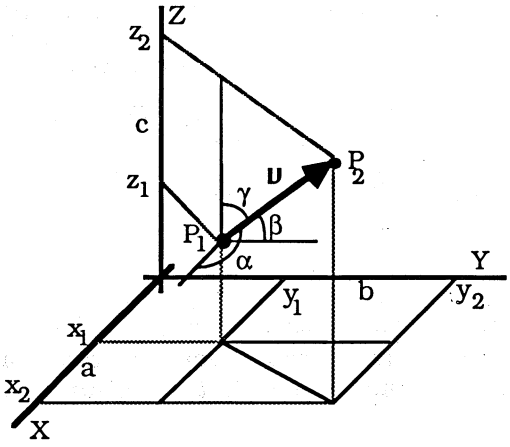
Recordant el que vam estudiar en el llibre d'Àlgebra moderna, clarament es veu que l'equipolència de vectors (≈) és una relació d'equivalència.

Si formem el seu "conjunt quocient" veurem que **V**=**U**/(≈). A menys que es digui res en contra, treballarem amb vectors lliures.

Exemple 3. Completem l'exemple anterior amb un nou vector **u** d'origen $R_1(10, 9)$ i extrem $R_2(14, 12)$. També és equipolent als anteriors perquè les seves components són a=4 i b=3.

De la gràfica comprova les propietats de la relació d'equivalència per a la relació (≈): Reflexiva (tot vector té les mateixes components que ell mateix), Simètrica (si el 1r és equipolent al 2n, llavors el 2n és equipolent al 1r) i Transitiva (si el 1r és equipolent al 2n i aquest és equipolent al 3r, llavors el 1r és equipolent al 3r).

El mateix estudi efectuat en el pla es pot fer en l'espai, cosa que dóna lloc als *vectors de l'espai.*



Per tant, donats els punts origen $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i extrem $P_2(x_2, y_2, z_2)$, el vector de l'espai tindrà de components

$$a=x_2-x_1 \qquad b=y_2-y_1 \qquad c=z_2-z_1$$

Si observem el vector **u**=(a, b, c) i anomenem L la longitud del vector (distància entre P_1 i P_2), veurem que hi ha tres tipus d'*inclinacions*, α, β i γ, segons si ens fixem amb l'angle format pel vector i els eixos X, Y i Z, respectivament. Aplicant trigonometria tindrem

$$\alpha=\text{arc cos } (a/L) \quad , \quad \beta=\text{arc cos } (b/L) \quad \text{i} \quad \gamma=\text{arc cos } (c/L)$$

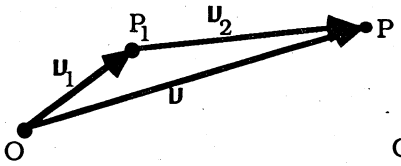
Naturalment, l'*equipolència de vectors de l'espai* és definida de la mateixa manera que en el pla.

Exemple 4 . Un vector **u** de l'espai, de longitud 13 unitats, té per punts origen $P_1(3, -4, 1)$ i extrem $P_2(6, 8, 5)$.

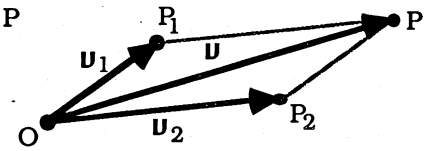
Components: a=6-3=3, b=8-(-4)=12 i c=5-1=4, és a dir, **u**=(3, 12, 4).

Les inclinacions són: Eix X: α=arccos(3/13)=76° 39' 27" , Eix Y: β=arccos(12/13)=22° 37' 11" i Eix Z: γ=arccos(4/13)=72° 4' 47".

1.1.2 SUMA I PRODUCTE PER UN ESCALAR. Per efectuar la *suma geomètrica de dos vectors*, els posarem l'un a continuació de l'altre, de manera que l'extrem del primer coincideixi amb l'origen del segon. El vector suma serà aquell que té per origen l'origen del primer i per extrem, l'extrem del segon:



Suma de vectors



LLei del paral.lelogram

També podem emprar la *regla del paral·lelogram*, que consisteix a fer coincidir els dos punts origen i després, passant pels punts extrems, traçar dues rectes paral·leles als vectors. El vector suma tindrà per origen l'origen comú i per extrem el punt de tall de les dues rectes anteriors.

Donats els vectors $\mathbf{v}_1=(a_1, b_1)$ i $\mathbf{v}_2=(a_2, b_2)$, la *suma en funció de les components* serà molt fàcil de fer: només haurem de sumar les components respectives:

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=(a_1+a_2, b_1+b_2)$$

En l'espai serà exactament igual: $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2)$. Si considerem el conjunt de vectors lliures amb l'operació de suma de vectors $(\mathbf{V}, +)$, es veu clarament que té l'*estructura de grup abelià*. És a dir, es compleixen les propietats següents:

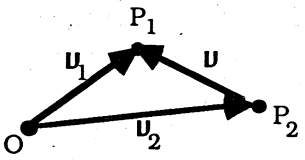
Operació interna (la suma de dos vectors és un altre vector).

Associativa i commutativa.

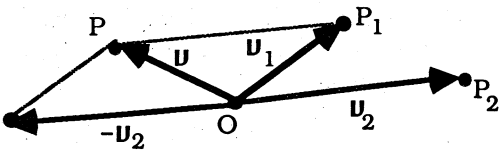
Element neutre (és el *vector nul*, de components nul·les $\mathbf{0}=(0, 0)$ i on coincideixen els punts origen i extrem).

Element oposat (és el *vector oposat*, $-\mathbf{v}=(-a, -b)$, de components oposades a l'original i que té la mateixa longitud i direcció, però és de sentit contrari).

Aquesta última propietat ens permet definir la *diferència de vectors:* per restar dos vectors, sumarem el primer amb l'oposat del segon. Geomètricament es pot fer com s'indica en les figures:



Diferència de vectors



Llei del paral·lelogram

Conseqüentment, $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+(-\mathbf{v}_2)$, però a la pràctica la diferència de dos vectors en funció de les components l'obtindrem restant les seves components:

En el pla $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=(a_1-a_2, b_1-b_2)$ i en l'espai $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=(a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2)$.

Quant al *producte d'un escalar per un vector*, obtindrem un altre vector que tindrà la mateixa direcció i que serà del mateix sentit si l'escalar és positiu i de sentit contrari si és negatiu. A més, si en valor absolut l'escalar és més gran que la unitat, s'allarga la longitud del vector, mentre que si és inferior a la unitat, s'escurça.

Si és k l'escalar i $\mathbf{u}=(a,b)$ el vector, el nou vector és $k.\mathbf{u}=(k.a,\ k.b)$, és a dir, per multiplicar un escalar per un vector, multiplicarem cadascuna de les seves components:

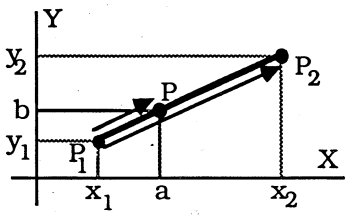
En el pla $k.\mathbf{u}=(k.a,\ k.b)$ i en l'espai $k.\mathbf{u}=(k.a,\ k.b,\ k.c)$.

Quant a les *propietats*, exposades en la part de Formulació matemàtica, diem que són: operació externa, associativitat escalar, distributivitats escalar i vectorial i element unitat.

Exemple 5. Pels escalars $k_1=2$ i $k_2=3$ i els vectors $\mathbf{u}_1=(4,7)$ i $\mathbf{u}_2=(5,6)$ la seva *combinació lineal* és el vector:

$$\mathbf{u}=k_1.\mathbf{u}_1+k_2.\mathbf{u}_2= 2.(4,7)+3.(5,6)= (8,14)+(15,18)= (23,32)$$

Una aplicació important del producte d'un escalar per un vector és la *partició d'un segment*.



Siguin $P_1(x_1,\ y_1)$ i $P_2(x_2,\ y_2)$ les coordenades dels punts origen i extrem del segment P_1P_2 del pla. El *punt de partició* P(x, y) serà un punt situat en la mateixa recta P_1P_2 i que serà determinat per la *constant de partició* k, definida pel quocient:

$$k=\overrightarrow{P_1P}/\overrightarrow{P_1P_2}$$

Observem que el quocient anterior està ben definit, pel fet que els vectors són de la mateixa direcció. Emprant components tenim:

$$k=(P-P_1)/(P_2-P_1)\ ,\ P-P_1=k.(P_2-P_1)\ ,\ P=(1-k).P_1+k.P_2$$

És a dir, $x=(1-k).x_1+k.x_2$ i $y=(1-k).y_1+k.y_2$.

Com a *casos particulars* veiem que si k=0 el punt de partició del segment és el seu origen P_1, si k=1 és l'extrem P_2, si $0<k<1$ és un *punt interior* i si $k<0$ o bé $k>1$ és un *punt exterior* al segment.

També, si substituïm k=1/2, obtindrem el *punt mitjà del segment* P_m. Per tant, $P_m=(P_1+P_2)/2$, és a dir, $x_m=(x_1+x_2)/2$ i $y_m=(y_1+y_2)/2$ i així el punt mitjà d'un segment és la mitjana dels seus extrems.

Exemple 6. El segment P_1P_2 té d'origen $P_1(-1,\ 2)$ i extrem $P_2(7,\ 8)$. Si la constant de partició és k=3/2, ens resultarà el punt de partició P de coordenades

$$x=(1-3/2).(-1)+(3/2).7=\ldots=11\ ,\quad y=(1-3/2).2+(3/2).8=\ldots=11$$

Directament, fent la mitjana de les coordenades, veiem que el punt mitjà del segment és $P_m(3,\ 5)$.

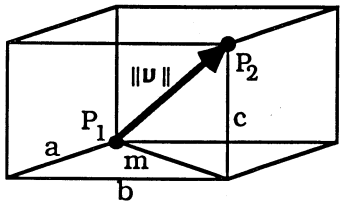
Com k=3/2 i si fem la seva gràfica, veurem que el punt P(11, 11) es pot obtenir dividint el segment P_1P_2 en dues parts, i resultarà el punt P_m. Després, posant a continuació de P_1 tres vegades el segment P_1P_m, ens donarà com a punt extrem el punt de partició P.

1.1.3 NORMA D'UN VECTOR. Entenem la *norma d'un vector* $\mathbf{v}$ com la seva longitud, és a dir, la distància entre els punts extrems.

Si la simbolitzem per $\|\mathbf{v}\|$, podrem escriure $\|\mathbf{v}\|=d(P_1,P_2)$. Posem ara la norma en funció de les components.

En el pla, si el vector és de components a i b, és clar que

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{a^2+b^2}$$



En l'espai veiem que

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{m^2+c^2} \quad \text{i que } m^2=a^2+b^2$$

Substituint, $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Podem afirmar, doncs, que la norma d'un vector és igual a l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les seves components.

Apuntem també les fórmules de la *distància entre dos punts*, que evidentment serà igual a la norma del vector que té aquests punts per extrems:

En el pla, $d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

En l'espai, $d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Exemple 7. El vector de l'exemple anterior $\mathbf{v}$ té d'origen $P_1(-1, 2)$ i extrem $P_2(7, 8)$. Les seves components seran a=7-(-1)=8 i b=8-2=6. Conseqüentment, la seva norma serà:

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

Per tant, la longitud del vector és de 10 unitats.

Entre les *propietats de la norma* destaquem les següents, que es poden comprovar fàcilment dibuixant els vectors:

Positivitat. La norma d'un vector mai no és negativa, i únicament és zero quan es tracta del vector nul.

Escalaritat. La norma del producte d'un escalar per un vector és igual al valor absolut de l'escalar multiplicat per la norma del vector.

Desigualtat triangular. La norma de la suma de dos vectors és inferior o igual a la suma de les normes.

Exemple 8. Donats els vectors de l'espai $\mathbf{v}_1=(2, 3, -6)$ i $\mathbf{v}_2=(-2, 9, 6)$ que tenen de normes

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7 \quad \text{i} \quad \|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{(-2)^2+9^2+6^2}=11$$

Si ara formem el vector suma $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=(0, 12, 0)$, que evidentment té de norma 12, ens quedarà comprovada la desigualtat triangular, ja que $12\leq 7+11$.

Atenent la seva norma, estudiarem alguns *tipus de vectors*. Comencem pel *vector unitari*, que és un vector de norma o longitud igual a la unitat.

Direm que $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ són dos *vectors ortogonals* si les seves direccions són perpendiculars, és a dir, si formen un angle de 90°.

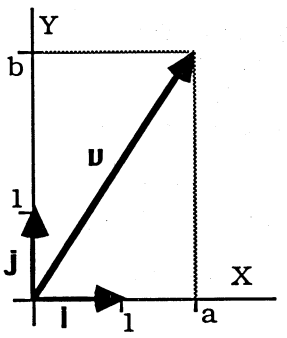
Si a més de ser ortogonals els dos vectors són unitaris, direm que són *vectors ortonormals*.

Exemple 9. Tenim els vectors $\mathbf{u}_1$=(0'6, 0'8) i $\mathbf{u}_2$=(0'8, -0'6) que són unitaris, ja que si calcules la seva norma veuràs que és la unitat. També són ortogonals, com pots veure dibuixant-los, o bé trobant les seves inclinacions

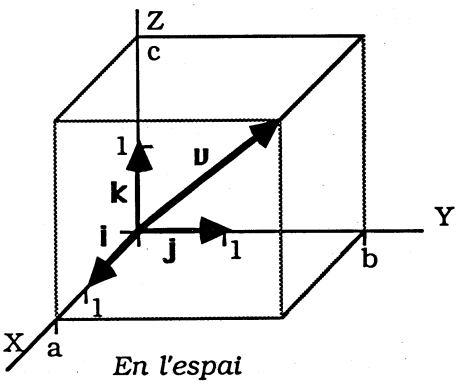
$$\alpha_1=\arctan(0'8/0'6)\approx 53° \quad \text{i} \quad \alpha_2=\arctan(-0'6/0'8)\approx 143°$$

Com que es diferencien de 143°-53°=90°, seran perpendiculars o ortogonals. Així, els vectors donats són ortonormals.

Els vectors ortonormals més senzills es designen per **i**, **j** i **k** i s'anomenen *vectors canònics.*, i, com veiem a la figura, van en les direccions dels eixos coordenats.



En el pla



En l'espai

Observem que en el pla aquests vectors canònics són **i**=(1, 0) i **j**=(0, 1), i en l'espai **i**=(1, 0, 0), **j**=(0, 1, 0) i **k**=(0, 0, 1).

Donat un vector qualsevol del pla **u**=(a, b) o de l'espai **u**=(a, b, c), el podrem posar immediatament com a combinació lineal dels seus vectors canònics, i obtenir les *descomposicions canòniques*,

$$\mathbf{u}=a.\mathbf{i}+b.\mathbf{j} \quad \text{i} \quad \mathbf{u}=a.\mathbf{i}+b.\mathbf{j}+c.\mathbf{k}$$

Exemple 10. El vector **u**=(2, 4, 3) equivaldrà al **u**=2.**i**+4.**j**+3.**k**, ja que **u**=(2, 4, 3)=2.(1, 0, 0) + 4.(0, 1, 0) +3.(0, 0, 1) = 2.**i**+4.**j**+3.**k**.

1.2 PRODUCTES ENTRE VECTORS

1.2.1 PRODUCTE ESCALAR. Donats dos vectors lliures, $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$, farem que siguin concurrents en un mateix punt O, que pot ser l'origen, de manera que obtinguem els dos extrems P_1 i P_2, respectivament.

Obtindrem la *projecció perpendicular* del segon vector sobre el primer, baixant des de l'extrem P_2 una recta perpendicular al primer vector, que el tallarà en un punt P (mireu la figura). Doncs bé, aquesta projecció perpendicular serà el segment OP.

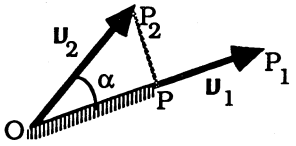
Definim el *producte escalar*, $\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2$, de dos vectors com aquell número obtingut multiplicant la longitud d'un d'ells per la longitud de la projecció perpendicular de l'altre.

Per tant, $\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = OP_1.OP$, i emprant trigonometria, com $\cos(\alpha)=OP/OP_2$,

$$\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = OP_1.OP_2.\cos(\alpha)$$

I en funció de les normes,

$$\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = \|\mathbf{u}_1\|.\|\mathbf{u}_2\|.\cos(\alpha)$$



En conseqüència, el producte escalar de dos vectors és el valor obtingut multiplicant les seves normes pel cosinus de l'angle que formen.

Exemple 11. Partim dels vectors del pla $\mathbf{u}_1=(8, 6)$ i $\mathbf{u}_2=(1, 7)$. Si fem la gràfica veurem que la longitud del primer és 10 i que la projecció perpendicular del segon és 5. Per tant, el producte escalar serà 50.

Analíticament, haurem de calcular les dues longituds

$$\|\mathbf{u}_1\|=\sqrt{8^2+6^2}=10 \quad \text{i} \quad \|\mathbf{u}_2\|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$$

També haurem de trobar l'angle que formen, buscant primer les inclinacions

$$\alpha_1=\arctan(6/8)=36°52'11" \quad \text{i} \quad \alpha_2=\arctan(7/1)=81°52'11"$$

L'angle format per $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ és $\alpha=\alpha_2-\alpha_1=45°$. Cm que $\cos(45°)=\sqrt{2}/2$, el producte escalar serà

$$\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = \|\mathbf{u}_1\|.\|\mathbf{u}_2\|.\cos(\alpha)=10.\sqrt{50}.\sqrt{2}/2= 10.5=50$$

De la definició anterior es poden demostrar que es verifiquen les següents *propietats del producte escalar*:

Commutativa. L'ordre dels factors no altera el producte escalar.

Distributivitat. El producte escalar és distributiu respecte a la suma.

Escalaritat. Es verifica l'associativitat entre el producte d'un escalar per un número i el producte escalar: $(k.\mathbf{u}_1)\bullet\mathbf{u}_2=k.(\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_2)$.

Paral·lelisme. Si dos vectors són paral·lels (tenen la mateixa direcció), el producte escalar és igual al producte de les normes. En particular resulta que $\mathbf{i}\bullet\mathbf{i}=1$, $\mathbf{j}\bullet\mathbf{j}=1$ i $\mathbf{k}\bullet\mathbf{k}=1$.

Perpendicularitat. Donats dos vectors perpendiculars, el seu producte escalar és nul. En particular, $\mathbf{i}\bullet\mathbf{j}=0$, $\mathbf{j}\bullet\mathbf{k}=0$ i $\mathbf{i}\bullet\mathbf{k}=0$.

Si ens aprofitem d'aquestes propietats, trobarem molt fàcilment el *producte escalar en funció de les components*. Només caldrà substituir els vectors per la seva descomposició canònica i aplicar les propietats anteriors.

En el pla, si $\mathbf{u}_1=(a_1, b_1)$ i $\mathbf{u}_2=(a_2, b_2)$, obtindrem

$$\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = a_1.a_2 + b_1.b_2$$

En l'espai, si $\mathbf{u}_1=(a_1, b_1, c_1)$ i $\mathbf{u}_2=(a_2, b_2, c_2)$, ens quedarà

$$\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2$$

Podem dir, doncs, que el producte escalar de dos vectors és igual a la suma dels productes de les seves components correlatives.

Exemple 12. Siguin els dos vectors del pla $\mathbf{v}_1=(8, 6)$ i $\mathbf{v}_2=(1, 7)$ de l'exemple anterior. Efectuem el seu producte escalar

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 8.1 + 6.7 = 8+42 = 50$$

Ens ha donat igual que abans, però ara molt més senzillament.

Si apliquem el resultat anterior, $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\cos(\alpha)$, podrem calcular directament l'*angle format per dos vectors*,

$$\alpha = \text{arc cos } [(\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2)/(\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|)]$$

Haurem de substituir tant el producte escalar com les normes dels vectors per les seves components.

Exemple 13. Calculem l'angle format per $\mathbf{v}_1=(8, 6)$ i $\mathbf{v}_2=(1, 7)$. Ja hem trobat el producte escalar i les normes

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 50 \quad , \quad \|\mathbf{v}_1\|=10 \quad \text{i} \quad \|\mathbf{v}_2\|=5.\sqrt{2}$$

Per tant, $\alpha = \text{arc cos } [50/(10.5.\sqrt{2})] = \text{arc cos } (\sqrt{2}/2) = 45°$

Com a *casos particulars*, tenim el *paral·lelisme de vectors*, $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$, on l'angle format és de 0°. Substituint en la fórmula de l'angle, ens resultarà que dos vectors són paral·lels si les seves components són proporcionals:

En el pla, $a_1/a_2=b_1/b_2$. A més, si recordem que els pendents són $m_1=b_1/a_1$ i $m_2=b_2/a_2$, arribarem a la conclusió que $m_1=m_2$. Per tant, dos vectors del pla seran paral·lels si tenen el mateix pendent.

En l'espai s'haurà de complir, $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$.

També hi pot haver la *perpendicularitat de vectors*, $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, on ara l'angle serà de 90°. Substituint en la fórmula de l'angle, deduirem que dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és nul:

En el pla, $a_1.a_2+b_1.b_2=0$, i si fem servir els pendents arribarem a la conclusió que $m_2=-1/m_1$. Conseqüentment, dos vectors del pla seran perpendiculars si els seus pendents són inversos i oposats.

En l'espai es verificarà que $a_1.a_2+b_1.b_2+c_1.c_2=0$.

Exemple 14. Pels vectors $\mathbf{v}_1=(-2, 6, -8)$, $\mathbf{v}_2=(1, -3, 4)$ i $\mathbf{v}_3=(-2, 6, 5)$ de l'espai observem que els dos primers són paral·lels, perquè les seves components són proporcionals

$$-2/1 = 6/(-3) = -8/4 \quad \text{on } k=-2 \text{ i, per tant, } \mathbf{v}_1=k.\mathbf{v}_2$$

En canvi, els dos últims són perpendiculars, ja que

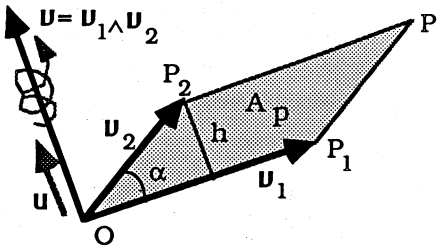
$$\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_3 = 1.(-2)+(-3).6+4.5=-2-18+20=0$$

Escriurem, $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3$.

1.2.2 PRODUCTE VECTORIAL. A diferència del producte escalar que tenia com a resultat un valor numèric (escalar), el *producte vectorial* de dos vectors és un altre vector.

Aquest nou vector, designat per $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$, té per *norma* (o longitud) l'àrea del paral·lelogram format pels dos vectors. Per tant,

$$\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\| = A_P = OP_1.h$$



Si apliquem trigonometria, com $\sin(\alpha)=h/OP_2$, tindrem

$$\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\| = OP_1.OP_2.\sin(\alpha)$$

En funció de les normes,

$$\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\sin(\alpha)$$

És a dir, la norma del producte vectorial és igual al producte de les seves normes pel sinus de l'angle que formen.

La *direcció* del producte vectorial és la de la recta perpendicular al pla format pels dos vectors, mentre que el *sentit* és el d'avanç d'un tornavís quan es fes girar des del primer vector fins al segon.

Anomenant $\mathbf{u}$ el vector unitari que té aquesta direcció i aquest sentit, s'haurà de verificar que

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}_1 = 0$ i $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}_2 = 0$, ja que és perpendicular a ambdós.

Expressem el producte vectorial com a $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\|.\mathbf{u}$.

Exemple 15. Siguin els vectors $\mathbf{v}_1=(2, 3, 6)$ i $\mathbf{v}_2=(8, -4, 1)$. Si trobes les seves normes i el seu producte escalar, tindràs

$$\|\mathbf{v}_1\|=7 \ , \ \|\mathbf{v}_2\|=9 \ \text{ i } \ \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2=10$$

D'aquí podem deduir l'angle que formen

$$\alpha = \text{arc cos}\,[10/(7.9)] = 80°\ 52'.$$

La norma del producte vectorial és

$$\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\sin(\alpha) = 7.9.\sin(80°\ 52') = 63.0'9873 = 62'2$$

Ens falta trobar el vector unitari $\mathbf{u}=(a, b, c)$ que va en la direcció i el sentit del producte vectorial, que ha de ser perpendicular amb els dos vectors donats. Per tant,

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}_1 = 2.a+3.b+6.c = 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}_2 = 8.a-4.b+c = 0$$

El sistema format té per infinites solucions $a=-27.c/32$ i $b=-23.c/16$, que depenen del paràmetre c i que trobarem imposant la condició que la norma del vector unitari és igual a la unitat,

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1 \ , \ (-27.c/32)^2+(-23.c/16)^2+c^2=1$$

Fent operacions obtenim $c=\pm 0'5144$, on els signes indiquen els dos sentits del vector unitari. Substituint en aquest vector obtindrem

$$\mathbf{u} = \pm\,(-0'4340, -0'7394, 0'5144)$$

Però el vector que busquem és el producte vectorial $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\|.\mathbf{u}$, que trobarem multiplicant el vector unitari per la norma, 62'2,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \pm\,62'2.(-0'4340, -0'7394, 0'5144) = \pm\,(27, 46, -32)$$

Faltaria saber quin dels dos signes hem d'agafar, però ho deixarem, perquè explicarem una manera molt més senzilla, mitjançant determinants, per a calcular el producte vectorial

Partint de la definició es poden demostrar les següents *propietats del producte vectorial*:

Anticommutativitat. Canviant d'ordre els vectors, el producte vectorial té la mateixa direcció, però sentit diferent.

Distributivitat. El producte vectorial és distributiu respecte a la suma de vectors.

Escalaritat. Es compleix la propietat associativa entre el producte d'un escalar per un vector i el producte vectorial, en el sentit que $(k.\mathbf{u}_1)\wedge\mathbf{u}_2=k.(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2)$.

Paral·lelisme. Si dos vectors són paral·lels, el seu producte vectorial és nul. En particular es verifica $\mathbf{i}\wedge\mathbf{i}=\mathbf{0}$, $\mathbf{j}\wedge\mathbf{j}=\mathbf{0}$ i $\mathbf{k}\wedge\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

Perpendicularitat. La norma del producte vectorial de dos vectors perpendiculars és igual al producte de les seves normes. Pels vectors canònics tenim $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}=\mathbf{i}$ i $\mathbf{k}\wedge\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

Fent servir aquestes propietats, podrem calcular immediatament el *producte vectorial en funció de les components.* Sols haurem de substituir els vectors per la seva descomposició canònica.

Si els vectors són del pla, el seu producte vectorial és expressat per un determinant de segon ordre

$$\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.\mathbf{k}$$

Si els vectors són de l'espai, el determinant és de tercer ordre

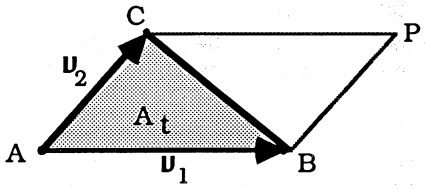
$$\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Exemple 16. Pels vectors $\mathbf{u}_1=(2, 3, 6)$ i $\mathbf{u}_2=(8, -4, 1)$ de l'exemple anterior, calcularem el producte vectorial

$$\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix}=(3.\mathbf{i}+48.\mathbf{j}-8.\mathbf{k}) - (24.\mathbf{k}-24.\mathbf{i}+2.\mathbf{j})$$

Per tant, $\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2=27.\mathbf{i}+46.\mathbf{j}-32.\mathbf{k}$ o també $\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2=(27, 46, -32)$.

El producte vectorial ens pot servir per a calcular l'*àrea d'un triangle*, ja que per definició la norma del producte vectorial és igual a l'àrea del paral·lelogram format pels dos vectors, i sabem que l'àrea del triangle serà la meitat de la del paral·lelogram.



En l'espai, si els vèrtexs del triangle són $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ i $C(x_3, y_3, z_3)$, trobarem la seva àrea, A_t, per la fórmula

$$A_t=(1/2).\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$$

Exemple 17. En el triangle de vèrtexs A(-3, 1, 0), B(-1, 4, 6) i C(5, -3, 1), trobem primer dos vectors dels costats

$$\mathbf{u}_1=\overrightarrow{AB}=(2, 3, 6) \quad \text{i} \quad \mathbf{u}_2=\overrightarrow{AC}=(8, -4, 1)$$

El seu producte vectorial ja l'hem calculat, $\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2=(27, 46, -32)$, on la seva norma és 62'2. Per tant, l'àrea és $A_t=(1/2).62'2=31'1$.

Si el triangle del pla és de vèrtexs $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$, i substituïm en la fórmula anterior, l'àrea del triangle serà

$$A_t=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Encara que no ho hàgim posat per no complicar, se sobreentén que s'ha d'agafar el valor absolut, ja que l'àrea és sempre positiva.

Exemple 18 . Sigui el triangle del pla A(-4, -3), B(4, 3) i C(-3, 4). Trobem la seva àrea per mitjà del determinant:

$$A_t=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}.50=25$$

També hauríem pogut calcular l'àrea aplicant la fórmula del producte vectorial, però ara serien nul·les les terceres components.

1.2.3 PRODUCTE MIXT. Donats tres vectors de l'espai, el *producte mixt* és, com diu el seu nom, una combinació dels productes escalar i vectorial. El simbolitzarem i definirem per

$$PM=[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]= \mathbf{u}_1\bullet(\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3)$$

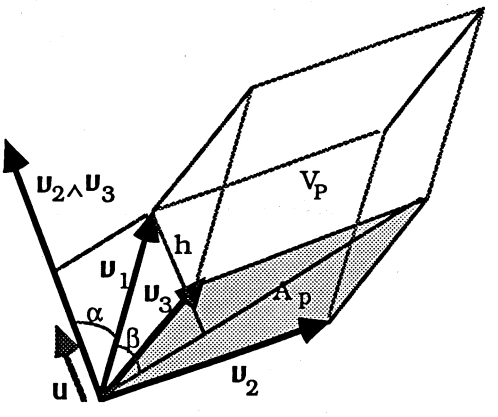
Estudiarem a continuació la *interpretació geomètrica* d'aquest producte mixt.

Observem la figura i apliquem la definició de producte escalar

$$PM= \|\mathbf{u}_1\|.\|\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3\|.\cos(\alpha)$$

Veiem que el primer i darrer factor és l'alçada h, i recordant que el producte vectorial té per norma l'àrea A_P del paral·lelogram, tindrem

$$PM= A_P.h = V_P$$



És a dir, el producte mixt de tres vectors coincideix amb el *volum del paral·lelepípede* que té per arestes els tres vectors.

A continuació deduirem una fórmula que ens doni el *producte mixt en funció de les components*. Aplicarem la definició de producte mixt:

$$PM= (a_1.\mathbf{i}+b_1.\mathbf{j}+c_1.\mathbf{k})\bullet\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Operant, arribarem a la conclusió que el producte mixt equival al *determinant* format per les components dels vectors:

$$PM=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Exemple 19. Donats els vectors $\mathbf{u}_1=(2, 3, 6)$, $\mathbf{u}_2=(8, -4, 1)$ i $\mathbf{u}_3=(5, 9, 7)$, el seu producte mixt serà

$$PM=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 8 & -4 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \end{vmatrix}=\ldots=325$$

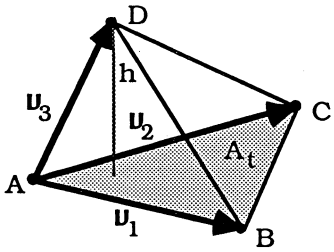
Es pot comprovar, trobant primer $\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3=(-37, -51, 92)$ i després fent el producte escalar amb el primer vector. Ens donarà també 325.

Les *propietats del producte mixt* seran, evidentment, les mateixes que les propietats dels determinants. En particular, destacarem les propietats de:

Commutativitat operacional. En el producte mixt es poden permutar els productes escalar i vectorial, $\mathbf{u}_1\bullet(\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3)=(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2)\bullet\mathbf{u}_3$ (observeu que els vectors no han canviat d'ordre).

Coplanarietat. El producte mixt de tres vectors coplanaris és nul, la qual cosa és lògica ja que amb ells no es pot formar cap paral·lelepípede. A més, si tres vectors són coplanaris, un d'ells es podrà posar en combinació lineal dels altres dos i així el determinant serà zero.

Com una aplicació del producte mixt, també podem calcular el *volum d'un tetraedre* determinat pels quatre vèrtexs A, B, C i D.



Comprovem que el volum del tetraedre format per tres vectors és igual a la sisena part del volum del paral·lelepípede, doncs

$$V_T=(1/3).A_t.h=(1/3).(A_p/2).h=PM/6$$

Per tant, si agafem com a vectors les arestes, tindrem

$$V_T=(1/6).[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$$

Una altra manera de calcular-lo és posar-ho en funció de les coordenades dels quatre vèrtexs. De l'expressió anterior es dedueix:

$$V_T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple 20. Un tetraedre té de vèrtexs A(-3, 8, 1), B(-1, 3, 7), C(5, -4, 2) i D(2, 9, 8). Si volem calcular el seu volum, podem començar trobant els vectors de les arestes

$$\overrightarrow{AB}=(2, 3, 6)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(8, -4, 1)\ \text{ i }\ \overrightarrow{AD}=(5, 9, 7)$$

Com que ja hem calculat abans el seu producte mixt, PM=325, obtindrem que el volum del tetraedre és $V_T=(1/6).325=54'16$.

Es pot comprovar el resultat anterior aplicant la fórmula del determinant. Observeu que si a totes les files els restem la primera, el determinant es podrà reduir a un de tercer ordre.

1.2.4 ALTRES PRODUCTES ENTRE VECTORS. Per acabar aquest estudi, introduirem el concepte de *doble producte vectorial* que serà un vector definit per $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1\wedge(\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3)$.

Es prova que el doble producte vectorial es pot expressar també pel determinant:

$$\mathbf{u}_1\wedge(\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3)=\begin{vmatrix} \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_3 \end{vmatrix}$$

D'aquí es dedueix que el doble producte vectorial no té la propietat associativa. És a dir, en general $\mathbf{u}_1\wedge(\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3)\neq(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2)\wedge\mathbf{u}_3$.

Un altre producte entre vectors és el *producte escalar de productes vectorials*, $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2)\bullet(\mathbf{u}_3\wedge\mathbf{u}_4)$. Sols comentarem que es verifica la *identitat de Lagrange*,

$$(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2)\bullet(\mathbf{u}_3\wedge\mathbf{u}_4)=\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_2\bullet\mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2\bullet\mathbf{u}_4 \end{vmatrix}$$

Exemple 21. Trobem el producte vectorial dels vectors $\mathbf{u}_1=(2, 3, 6)$, $\mathbf{u}_2=(8, -4, 1)$ i $\mathbf{u}_3=(5, 9, 7)$. Haurem de fer dos productes vectorials,

$$\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & -4 & 1 \\ 5 & 9 & 7 \end{vmatrix}=\ldots=(-37, -51, 92)$$

$$\mathbf{u}_1\wedge(\mathbf{u}_2\wedge\mathbf{u}_3)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ -37 & -51 & 92 \end{vmatrix}=\ldots=(582, -406, 9)$$

Si ara tenim un nou vector $\mathbf{u}_4=(0, -1, -2)$ i volem trobar el producte escalar de productes vectorials, calcularem primer

$$\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix}=(27, 46, -32) \qquad \mathbf{u}_3\wedge\mathbf{u}_4=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 9 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-11, 10, -5)$$

Farem després el producte escalar, que serà:

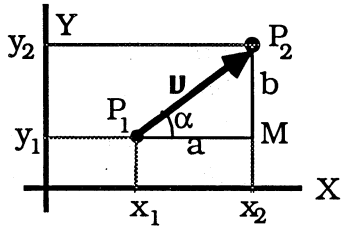
$$\mathbf{u}=27.(-11)+46.10+(-32).(-5)=323.$$

Finalment, podem comprovar la identitat de Lagrange, resultant el determinant de termes $a_{11}=79$, $a_{12}=-15$, $a_{21}=11$ i $a_{22}=2$. El seu valor és precisament 323.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Vectors en el pla

Eixos coordenats. Abscisses: **X** Ordenades: **Y**



Definició de vector: **Fletxa** $\mathbf{u}=\overrightarrow{P_1P_2}$

Origen: $P_1(x_1,y_1)$ Extrem: $P_2(x_2,y_2)$

Components: **Projeccions eixos**

$\mathbf{u}=(a,b) \Rightarrow a=x_2-x_1 \quad b=y_2-y_1$

Components horitzontal: **a** vertical: **b**

Pendent: $m=b/a$ Inclinació: $\alpha=\text{arc tg } m$

Vectors equipolents:

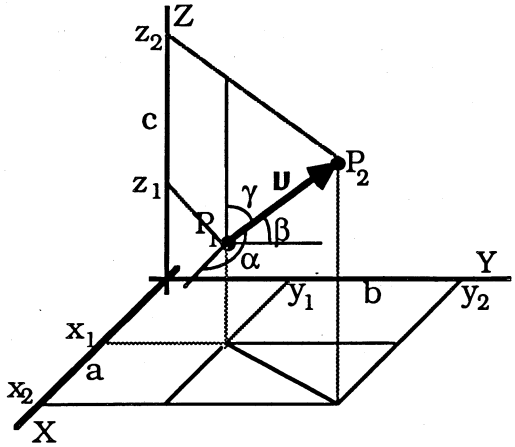
$$\mathbf{u}_1=(a_1,b_1),\ \mathbf{u}_2=(a_2,b_2),\ \mathbf{v}_1\approx\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow a_1=a_2 \wedge b_1=b_2$$

Vect. fixos: $\mathbf{u}=\overrightarrow{P_1P_2}$ Conj. v. fixos: $\mathbf{U}=\{\overrightarrow{P_1P_2},\ \forall P_1,P_2\in R^2\}$

Vect. lliures: $\mathbf{u}=(a,b)$ C. v. lliures: $\mathbf{V}=\{(a,b),\ \forall a,b\in R\}$, $\mathbf{V}=\mathbf{U}/(\approx)$

Vectors en l'espai

Eixos coordenats: **X, Y, Z** Origen: **O**



Components: $\mathbf{u}=(a,b,c)$

$a=x_2-x_1 \quad b=y_2-y_1$

$c=z_2-z_1$

Inclinacions: $(L=P_1P_2)$

$\alpha=\text{arc cos } (a/L)$

$\beta=\text{arc cos } (b/L)$

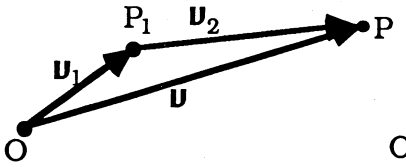
$\gamma=\text{arc cos } (c/L)$

Vectors equipolents:

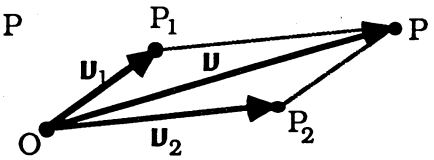
$$\mathbf{u}_1=(a_1,b_1,c_1),\ \mathbf{u}_1=(a_1,b_1,c_1),\ \mathbf{u}_1\approx\mathbf{u}_2 \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2 \wedge a_3=b_3$$

Suma de vectors

Suma geomètrica de vectors lliures:



Suma de vectors



Llei del paral·lelogram

Suma en funció de les components:

En el pla: $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=(a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2)$

En l'espai: $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=(a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2\ ,\ c_1+c_2)$

Propietats de la suma de vectors:

Estructura de grup abelià:

Operació interna: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V \Rightarrow \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\in V$

Associativa: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\in V \Rightarrow (\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1+(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)$

Commutativa: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V \Rightarrow \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1$

El. neutre: $\exists \mathbf{0}\in V$, $\mathbf{0}$=**vector nul** / $\forall \mathbf{v}\in V \Rightarrow \mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$

En el pla: $\mathbf{0}=(0,0)$ En l'espai: $\mathbf{0}=(0,0,0)$

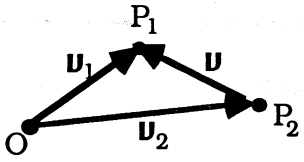
El. oposat: $\forall \mathbf{v}\in V \Rightarrow \exists(-\mathbf{v})$=**vector oposat** / $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$

En el pla: $-\mathbf{v}=(-a,-b)$ En l'espai: $-\mathbf{v}=(-a,-b,-c)$

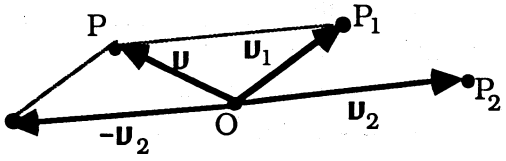
Diferència de vectors

Diferència: $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}=\mathbf{v}_1+(-\mathbf{v}_2)$

Diferència geomètrica de vectors:



Diferència de vectors



Llei del paral·lelogram

Diferència en funció de les components:

En el pla: $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=(a_1-a_2\ ,\ b_1-b_2)$

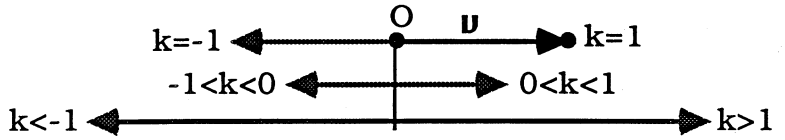
En l'espai: $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=(a_1-a_2\ ,\ b_1-b_2\ ,\ c_1-c_2)$

Producte d'un escalar per un vector

Definició geomètrica:

$k.\mathbf{u}$=homotècia de valor k en el vector $\mathbf{u}$

Casos particulars:



Producte en funció de les components:

En el pla: $\mathbf{k.u=(k.a\ ,\ k.b)}$ En l'espai: $\mathbf{k.u=(k.a\ ,\ k.b\ ,\ k.c)}$

Propietats:

Operació externa: $\forall \mathbf{k}\in\mathbf{R} \wedge \forall \mathbf{u}\in\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{k.u}\in\mathbf{V}$

Assoc. escalar: $\forall \mathbf{k_1,k_2}\in\mathbf{R} \wedge \forall \mathbf{u}\in\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{k_1.(k_2.u)=(k_1.k_2).u}$

Distrib. escalar: $\forall \mathbf{k_1,k_2}\in\mathbf{R} \wedge \forall \mathbf{u}\in\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{(k_1+k_2).u=k_1.u+k_2.u}$

Distrib. vectorial: $\forall \mathbf{k}\in\mathbf{R} \wedge \forall \mathbf{u_1,u_2}\in\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{k.(u_1+u_2)=k.u_1+k.u_2}$

El. unitat: $\exists 1\in\mathbf{R}\ /\ \forall \mathbf{u}\in\mathbf{V} \Rightarrow 1.\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Partició d'un segment

Origen del segment: $\mathbf{P_1(x_1,\ y_1)}$ Extrem: $\mathbf{P_2(x_2,\ y_2)}$

Punt de partició: $\mathbf{P(x,\ y)}$ Constant de partició: $\mathbf{k}$

Condició: $\overrightarrow{\mathbf{P_1P}}=\mathbf{k}.\overrightarrow{\mathbf{P_1P_2}} \Rightarrow \mathbf{P}=(1-\mathbf{k}).\mathbf{P_1}+\mathbf{k}.\mathbf{P_2}$

Punt interior: $\mathbf{0<k<1}$ Punt exterior: $\mathbf{k<0}$ o $\mathbf{k>1}$

Punt mitjà d'un segment: $\mathbf{k=1/2} \Rightarrow \mathbf{P_m=(P_1+P_2)/2}$

Norma d'un vector

Definició de norma:

$\|\mathbf{u}\|$=longitud del vector $\Rightarrow \|\mathbf{u}\|=\mathbf{d(P_1,P_2)}$

Norma en funció de les components:

En el pla: $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}$ En l'espai: $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}$

Distància entre dos punts: $\mathbf{d(P_1,P_2)}=\|\mathbf{u}\|$

En el pla: $\mathbf{d(P_1,P_2)}=\sqrt{(\mathbf{x_2-x_1})^2+(\mathbf{y_2-y_1})^2}$

En l'espai: $\mathbf{d(P_1,P_2)}=\sqrt{(\mathbf{x_2-x_1})^2+(\mathbf{y_2-y_1})^2+(\mathbf{z_2-z_1})^2}$

Norma d'un vector (cont.)

Propietats de la norma:

Positivitat: $\|\mathbf{v}\|\geq 0 \quad \forall \mathbf{v}\in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \|\mathbf{v}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{v}=\mathbf{0}$

Escalaritat: $\|\mathbf{k}.\mathbf{v}\|=|\mathbf{k}|.\|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{k}\in \mathbf{R} \wedge \forall \mathbf{v}\in \mathbf{V}$

Desigualtat triangular: $\|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\|+\|\mathbf{v}_2\| \quad \forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in \mathbf{V}$

Tipus de vectors

Vector unitari: $\mathbf{u}$**=v.unitari** $\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\|=1$

V. ortogonals: $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$**=v.ortogonals** $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1\perp\mathbf{v}_2$

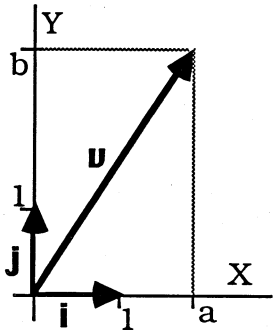
V. ortonormals: v. ortogonals + v. unitaris

$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$**=v.ortonormals** $\Leftrightarrow \mathbf{u}_1\perp\mathbf{u}_2 \;,\; \|\mathbf{u}_1\|=1 \wedge \|\mathbf{u}_2\|=1$

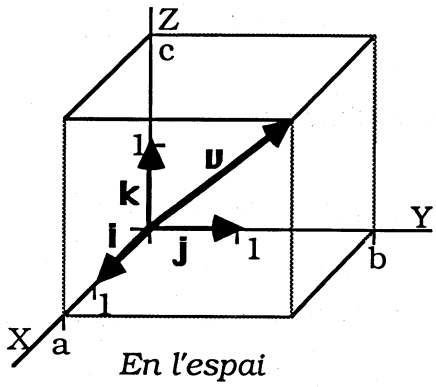
Vectors canònics: v. ortonormals sobre els eixos

En el pla: $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$

En l'espai: $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$



En el pla



En l'espai

Descomposició canònica:

En el pla: $\mathbf{v}=\mathbf{a}.\mathbf{i}+\mathbf{b}.\mathbf{j}$ En l'espai: $\mathbf{v}=\mathbf{a}.\mathbf{i}+\mathbf{b}.\mathbf{j}+\mathbf{c}.\mathbf{k}$

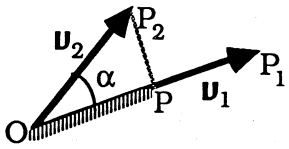
.....

Producte escalar

Concepte geomètric: $\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=\mathbf{OP}_1.\mathbf{OP}$

OP=Proj. $\mathbf{v}_2$ sobre $\mathbf{v}_1 \Rightarrow OP=OP_2.\cos(\alpha)$

Definició: $\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\cos(\alpha)$



Producte escalar (cont.)

Propietats del producte escalar:

Commutativitat: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_1$

Distributivitat: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v}_1 \bullet (\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_3$

Escalaritat: $\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R} \wedge \forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V} \Rightarrow (\mathbf{k}.\mathbf{v}_1) \bullet \mathbf{v}_2 = \mathbf{k}.(\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2)$

Paral·lelisme: **Si** $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|$

Igualtat: $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow \mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1$

Perpendicularitat: **Si** $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 0$

$\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{i} \bullet \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{j} \bullet \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{k} \bullet \mathbf{j} = 0$

Producte escalar en funció de les components:

En el pla: $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = a_1.a_2 + b_1.b_2$

En l'espai: $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2$

Angle entre dos vectors

Definició: $\alpha = \mathbf{arc\ cos}\left(\dfrac{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|}\right)$

En el pla: $\alpha = \mathbf{arc\ cos}\left(\dfrac{a_1.a_2+b_1.b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)$

En l'espai: $\alpha = \mathbf{arc\ cos}\left(\dfrac{a_1.a_2+b_1.b_2+c_1.c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$

Paral.lelisme de vectors: $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2 \Rightarrow \alpha = 0°$

En el pla: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ (components proporcionals)

Pendents: $m_1 = \dfrac{b_1}{a_1} \wedge m_2 = \dfrac{b_2}{a_2} \Rightarrow m_1 = m_2$

En l'espai: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

Perpendicularitat de vectors: $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Rightarrow \alpha = 90°$

En el pla: $a_1.a_2 + b_1.b_2 = 0$ (producte escalar nul)

Pendents: $m_2 = -1/m_1$

En l'espai: $a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 = 0$

Producte vectorial

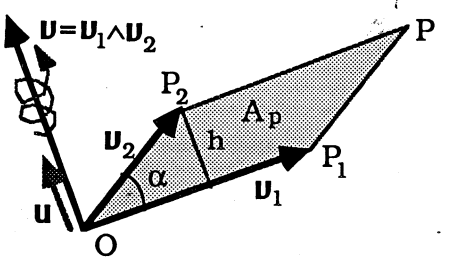
Concepte geomètric:

Producte vectorial: $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$

Longitud: $\mathbf{A_p}$ / $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\mathbf{A_p}$

Direcció: $\mathbf{u}$ / $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_2$

Sentit: **El del tornavís** $\mathbf{v}_1\rightarrow\mathbf{v}_2$



Norma: $\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|=\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\mathbf{sin}(\alpha)$ $\qquad \mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|.\mathbf{u}$

Propietats del producte vectorial:

Anticommutativitat: $\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=-(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_1)$

Distributivitat: $\mathbf{v}_1\wedge(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)=(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)+(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_3)$

Escalaritat: $(\mathbf{k}.\mathbf{v}_1)\wedge\mathbf{v}_2=\mathbf{k}.(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)$

Paral·lelisme: $\mathbf{v}_1\|\mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\mathbf{0}$

Igualtat: $\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{i}\wedge\mathbf{i}=\mathbf{0}$, $\mathbf{j}\wedge\mathbf{j}=\mathbf{0}$, $\mathbf{k}\wedge\mathbf{k}=\mathbf{0}$

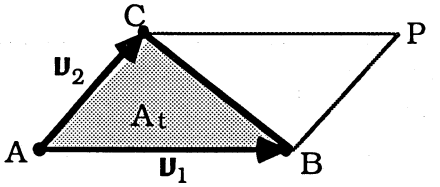
Perpendicularitat: $\mathbf{v}_1\perp\mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\mathbf{u}$

$\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}=-\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\wedge\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\wedge\mathbf{i}=\mathbf{j}$, $\mathbf{k}\wedge\mathbf{j}=-\mathbf{i}$

Producte vectorial en funció de les components:

$$\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}$$

Àrea d'un triangle



Triangle en l'espai: $\widehat{\mathbf{ABC}}$

Vèrtexs triangle: $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_2)$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_3,\mathbf{z}_3)$

Àrea: $\mathbf{A_t}=(1/2).\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}\|$

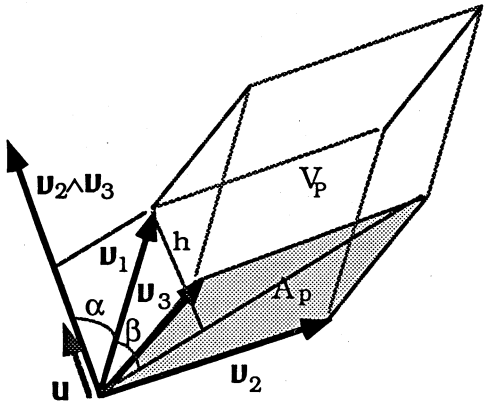
Cas particular:

Triangle en el pla: $\widehat{\mathbf{ABC}}$

Vèrtexs: $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_3)$

Àrea: $$\mathbf{A_t}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 & 1 \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 & 1 \\ \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Producte mixt



Producte mixt:

$[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=\mathbf{v}_1\bullet(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)$

Interpret. geomètrica:

Volum paral.lelepípede

$V_P=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$

P. mixt i components:

$$PM=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

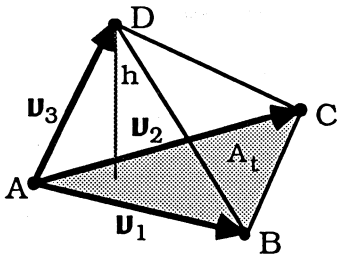
Propietats del producte mixt: (=propietats dels determinants)

Commutativitat operacional: $\mathbf{v}_1\bullet(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)=(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)\bullet\mathbf{v}_3$

Coplanarietat:

Si $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\in\pi$ (π=Pla) $\Rightarrow$ $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=0$

Volum d'un tetraedre



Tetraedre: $\widehat{ABCD}$

Volum: $V_T=\frac{1}{6}.[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]$

Volum en funció dels vèrtexs:

$$V_T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Altres productes entre vectors

Doble producte vectorial: $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)$

Propietat: $\mathbf{v}_1\wedge(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)=\begin{vmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_3 \end{vmatrix}$ (No associativitat)

Producte escalar de prod. vectorials: $\mathbf{v}=(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)\bullet(\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4)$

Propietat: $(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)\bullet(\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4)=\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_4 \end{vmatrix}$ (Ident. Lagrange)

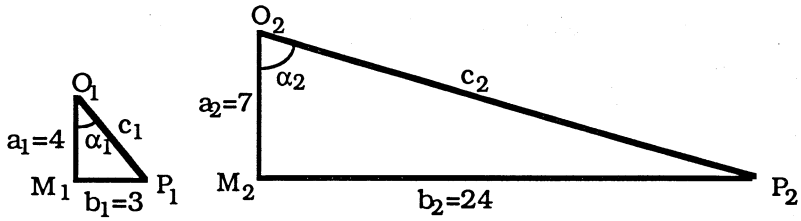
e) PROBLEMES RESOLTS

1.1 VECTORS EN EL PLA I EN L'ESPAI

Primeres nocions sobre vectors

1. Tenim dos triangles rectangles $O_1M_1P_1$ i $O_2M_2P_2$ que tenen de catets respectius O_1M_1=4 cm, M_1P_1=3 cm, O_2M_2=7cm i M_2P_2=24 cm. Calcula quantes vegades és més gran l'àrea del 2n triangle que la del 1r. Fes el mateix per les longituds dels vectors hipotenusa i també per les seves inclinacions en els vèrtexs O_1 i O_2.

Solució. Si dibuixem els dos triangles rectangles donats a escala, podrem calcular aproximadament les hipotenuses i els angles, per mitjà d'una regla i un transportador.



Fem, però, els càlculs analíticament, utilitzant les fórmules corresponents.

ÀREES. Com que l'àrea d'un triangle és igual al semiproducte de la base per l'altura,

Primer triangle: $A_1=b_1.a_1/2=3.4/2=12/2=6$ cm^2

Segon triangle: $A_2=b_2.a_2/2=24.7/2=168/2=84$ cm^2

Relació: $k_1=A_2/A_1=84/6=14$, $\boxed{k_1=14}$

HIPOTENUSES. Utilitzem el teorema de Pitàgores,

Primer triangle: $c_1=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$ cm

Segon triangle: $c^2=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$ cm

Relació: $k_2=c_2/c_1=25/5=5$, $\boxed{k_2=5}$

INCLINACIONS. Són els angles donats per α=arctan(b/a),

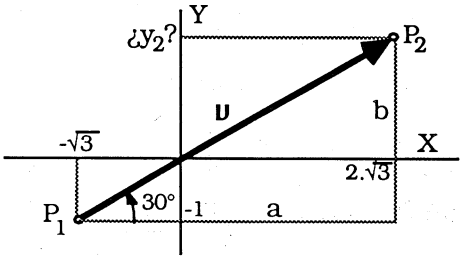
Primer triangle: α_1=arctan(3/4)=36°52'11"

Segon triangle: α_2=arctan(24/7)=73°44'22"

Relació: $k_3=\alpha_2/\alpha_1$=(73°44'22")/(36°52'11")=2 , $\boxed{k_3=2}$

2. La inclinació d'un vector $\mathbf{v}$ és de 30° i el seu origen és el punt $P(-\sqrt{3},-1)$. Si la primera coordenada del seu extrem és igual a $2.\sqrt{3}$, quant valdrà la segona coordenada?

Solució. El problema es podria fer geomètricament, dibuixant el punt P_1 i el vector $\mathbf{v}$ amb una inclinació de 30°. Sabent x_2, es podria determinar y_2.



Components del vector $\mathbf{v}$ d'origen P_1 i extrem P_2:

$$\mathbf{v}=\overrightarrow{P_1P_2}\ \begin{cases} a=x_2-x_1=2.\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=3.\sqrt{3} \\ b=y_2-y_1=y_2-(-1)=y_2+1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}=(3.\sqrt{3},\ y_2+1)$$

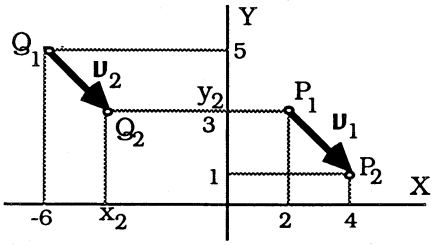
El pendent serà $m=b/a=(y_2+1)/(3.\sqrt{3})$

Però com que $m=\tan(\alpha)=\tan(30°)=\sqrt{3}/3$, igualant,

$$\frac{y_2+1}{3.\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{y_2+1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ ,\ y_2+1=(\sqrt{3})^2\ ,\ y_2+1=3\ ,\ \boxed{y_2=2}$$

3. L'origen d'un vector és $P_1(2,3)$ i el seu extrem és $P_2(4,1)$. Un altre vector equipolent a l'anterior té el seu origen en $Q_1(-6,5)$. Calcula les coordenades del seu extrem Q_2 i també els seus pendents i inclinacions. Dibuixa-ho.

Solució. Fem la gràfica dels punts P_1, P_2 i Q_1 i el vector $\mathbf{v}_1$.



Clarament es veu que si els vectors són equipolents, tindran la mateixa longitud i direcció i el mateix sentit.

Primer vector $\mathbf{u}_1$ d'origen $P_1(2, 3)$ i extrem $P_2(4, 1)$,

$$\mathbf{u}_1=\overrightarrow{P_1P_2} \begin{cases} a_1=x_2-x_1=4-2=2 \\ b_1=y_2-y_1=1-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}_1=(2, -2)$$

Segon vector $\mathbf{u}_2$ d'origen $Q_1(-6, 5)$ i extrem $Q_2(x_2, y_2)$,

$$\mathbf{u}_2=\overrightarrow{Q_1Q_2} \begin{cases} a_2=x_2-x_1=x_2-(-6)=x_2+6 \\ b_2=y_2-y_1=y_2-5 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}_2=(x_2+6, y_2-5)$$

Si són equipolents, tindran les mateixes components. Per tant,

$x_2+6=2$, $x_2=2-6$, $x_2=-4$ $y_2-5=-2$, $y_2=-2+5$, $y_2=3$

El punt extrem de $\mathbf{u}_2$ serà, $\boxed{Q_2(-4, 3)}$

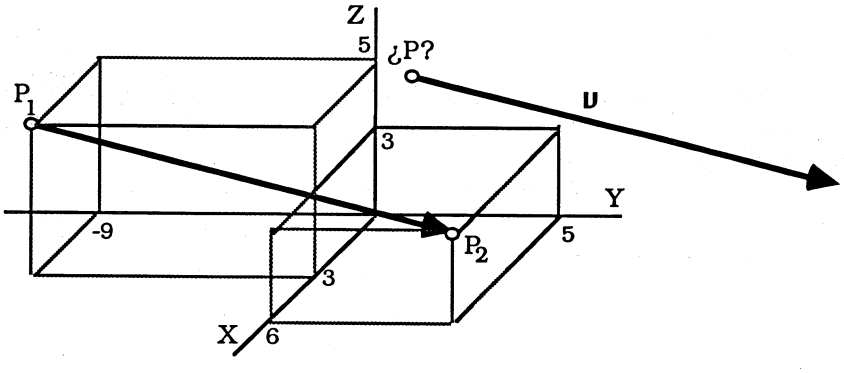
Evidentment, els pendents dels dos vectors, com també les seves inclinacions, seran iguals,

Pendents: $m=b/2=-2/2=-1$, $\boxed{m=-1}$

Inclinacions: $\alpha=\arctan(m)=\arctan(-1)=-45°$, $\boxed{\alpha=-45°}$

4. Donat el camp vectorial $\mathbf{u}=(5x-y+2z, z+3y-x, 2y+3x-z)$, troba el punt de l'espai $P(x,y,z)$ en què aquest vector serà equipolent al vector $\mathbf{w}$ que té per origen $P_1(3,-9,5)$ i extrem $P_2(5,6,3)$. Resol el sistema per la regla de Cramer.

Solució. Si volem fer la figura en l'espai haurem de dibuixar els tres eixos X, Y i Z, mútuament perpendiculars, i els dos punts P_1 i P_2, fent els dos paral·lelepípedes d'arestes les tres coordenades del punt.



En aquest espai es troba situat un camp vectorial. És a dir, en cada un dels seus punts $P(x,y,z)$ ens hem d'imaginar que hi surt un vector $\mathbf{u}$ de components $a=5x-y+2z$, $b=z+3y-x$ i $c=2y+3x-z$. Es tracta, doncs, de trobar el punt P tal que les components siguin precisament les del vector donat.

Vector $\mathbf{u}$ d'origen $P_1(4,-5,1)$ i extrem $P_2(6,-2,7)$,

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{P_1P_2}\begin{cases} a=x_2-x_1=5-3=2 \\ b=y_2-y_1=6-(-9)=15 \\ c=z_2-z_1=3-5=-2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}=(2,\ 15,\ -2)$$

Si volem que el vector d'origen, el punt P del camp vectorial, sigui equipolent a l'anterior, hauran de tenir les mateixes components. Igualant, tindrem el sistema:

$$\begin{cases} 5x-y+2z=2 \\ z+3y-x=15 \\ 2y+3x-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x\ \ -y+2z=2 & (1) \\ -x+3y\ +z=15 & (2) \\ 3x+2y\ \ -z=-2 & (3) \end{cases}$$

Aquest sistema el podem resoldre per la regla de Cramer, trobant primer el determinant dels coeficients,

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(-15-4-3)-(18+10-1)=-22-27=-49$$

De la mateixa manera, podem trobar els determinants de les incògnites, reemplaçant la columna de la incògnita per la dels termes independents,

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 15 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\ldots=49 \qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 15 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\ldots=-147$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 15 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\ldots=-245$$

Aplicant la regla de Cramer, $x=|A_x|/|A|=49/(-49)=-1$

$y=|A_y|/|A|=-147/(-49)=3 \qquad z=|A_z|/|A|=-245/(-49)=5$

El punt P que cercàvem és $\boxed{P(-1,3,5)}$.

5. Quines són les components del vector de l'espai que té d'origen $P_1(4,-5,1)$ i extrem $P_2(6,-2,7)$? Fes la gràfica i troba la seva longitud aplicant el teorema de Pitàgores.

Quines són les inclinacions α, β i γ d'aquest vector sobre els eixos? Quant val l'arrel quadrada de la suma de les inclinacions? Quina serà la suma dels quadrats dels cosinus?

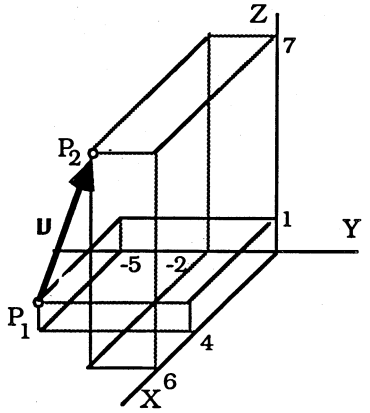
Solució. Trobem les components del vector $\mathbf{u}$ que té per origen $P_1(5,-5,1)$ i per extrem $P_2(6,-2,7)$

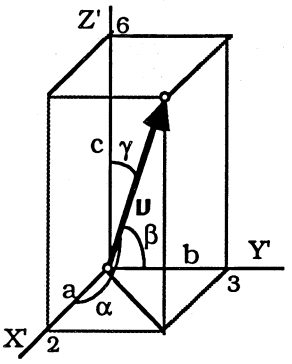
$$\mathbf{u}=\overrightarrow{P_1P_2}\begin{cases} a=x_2-x_1=6-4=2 \\ b=y_2-y_1=-2-(-5)=3 \\ c=z_2-z_1=7-1=6 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}=(2,\ 3,\ 6)$$

La longitud, o norma del vector, ens és donada per l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les seves components,

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=\boxed{7}$$

En aquest cas no es podrà comprovar gràficament la longitud, perquè la figura és en l'espai,





Per veure el significat de les *inclinacions*, o angles directors, hem realitzat la figura de la dreta traslladant els eixos coordenats en el punt P_1. Les inclinacions seran les que formaran el vector amb els eixos X', Y' i Z',

$$\alpha=\text{arc cos}(a/\|\mathbf{u}\|)=\text{arc cos}(2/7)=73°23'$$

$$\beta=\text{arc cos}(b/\|\mathbf{u}\|)=\text{arc cos}(3/7)=64°37'$$

$$\gamma=\text{arc cos}(c/\|\mathbf{u}\|)=\text{arc cos}(6/7)=31°00'$$

L'arrel quadrada de la suma dels angles directors és,

$$R=\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}=\sqrt{73°23'+64°37'+31°00'}=\sqrt{169}=\boxed{13}$$

Mentre que la suma dels quadrats dels cosinus directors és,

$$S=\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{4}{49}+\frac{9}{49}+\frac{36}{49}=\frac{49}{49}=\boxed{1}$$

Clarament es veu que, si apliquem la definició de norma o longitud d'un vector, llavors es verificarà sempre que

$$\boxed{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=1}$$

Suma de vectors i producte d'un escalar per un vector

6. Quatre forces $\mathbf{f}_1=4\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{f}_2=5.\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{f}_3=6\mathbf{i}.\mathbf{i}-7.\mathbf{j}$ i $\mathbf{f}_4=-3.\mathbf{i}-2.\mathbf{j}$, mesurades en kp, actuen sobre el mateix punt P(-8,3). Determina la força resultant $\mathbf{f}$, com també la seva intensitat, fent servir el teorema de Pitàgores. Comprova-ho després gràficament aplicant la regla del paral·lelogram. Quin serà l'extrem Q?

Solució. Si posem les quatre forces donades en la notació de parèntesis i les sumem, obtindrem

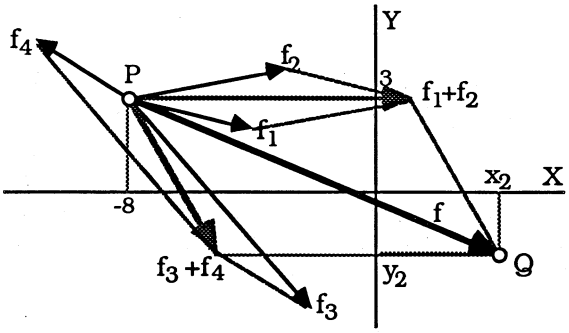
$$\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_4=(4,-1)+(5,1)+(6,-7)+(-3,-2)=(4+5+6-3,\ -1+1-7-2)$$

La força resultant serà $\mathbf{f}=(12,\ -5)$ o també $\boxed{\mathbf{f}=12.\mathbf{i}-5.\mathbf{j}}$

Aquesta força $\mathbf{f}$ anirà del punt P(-8,3) al punt desconegut Q. Trobem-lo, sabent que les components de la força són a=12 i b=-5,

$$\mathbf{f}=\overrightarrow{PQ}\ \begin{cases}a=x_2-x_1\\ b=y_2-y_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=a+x_1=12+(-8)=4\\ y_2=b+y_1=-5+3=-2\end{cases}$$

L'extrem Q serà, doncs, $\boxed{Q(4,-2)}$.



A la figura superior s'ha fet el problema gràficament, dibuixant en el punt P les quatre forces i sumant-les per mitjà de la *regla del paral·lelogram*. Primer hem sumat les dues primeres forces, després les dues últimes, i per fi les dues resultants obtingudes. L'extrem Q coincideix amb el trobat, Q(4,-2).

7. Determina un vector $\mathbf{w}$ paral·lel al vector $\mathbf{v}=16.\mathbf{i}-15.\mathbf{j}+12.\mathbf{k}$, però de sentit oposat i de mòdul 75 unitats.

Solució. Dos vectors són paral·lels si les seves components són proporcionals. Simbòlicament,

$$\mathbf{w}\|\mathbf{v} \Leftrightarrow \exists k\in\Re\ /\ \mathbf{w}=k.\mathbf{v}$$

Per tant, un vector paral·lel al donat $\mathbf{v}=(16,-15,12)$ podrà ser

$$\mathbf{w}=k.(16,-15,12)=(16.k,\ -15.k,\ 12.k)$$

El seu mòdul, o norma, és

$$\|\mathbf{w}\|=\sqrt{(16k)^2+(-15k)^2+(12k)^2}=\sqrt{625.k^2}=25.|k|$$

I com que ha de valer 75 unitats, $25.|k|=75$, $|k|=3$, $k=\pm 3$.

Si k=3 tindrà el mateix sentit, però si volem que tingui el sentit contrari, haurem d'agafar $\boxed{k=-3}$

8. En el triangle de vèrtexs A(-5,7,3), B(8,4,-9) i C(6,1,0) determina un punt G que faci nul·la la suma dels vectors $\mathbf{u}_A$=GA, $\mathbf{u}_B$=GB i $\mathbf{u}_C$=GC. Com es diu aquest punt? Comprova que és la mitjana dels seus vèrtexs.

Solució. Sigui G(x,y,z) el punt que busquem. Els vectors que tenen per origen aquest punt i per extrem un dels vèrtexs del triangle són

$$\mathbf{u}_A=(-5-x,7-y,3-z) \qquad \mathbf{u}_B=(8-x,4-y,-9-z) \qquad \mathbf{u}_C=(6-x,1-y,0-z)$$

Formem la suma $\mathbf{s}$ d'aquests tres vectors

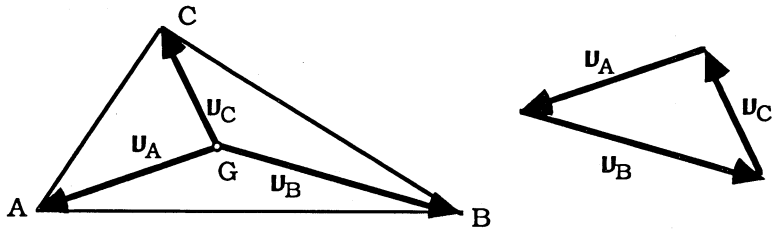
$$\mathbf{s}=(-5-x+8-x+6-x,\ 7-y+4-y+1-y,\ 3-z-9-z-z)=\ (9-3x,\ 12-3y,\ -6-3z)$$

Com que aquesta suma ha de ser el vector nul $\mathbf{0}$=(0,0,0) tindrem el sistema immediat

$$9-3x=0\ ,\ x=3 \qquad 12-3y=0\ ,\ y=4 \qquad -6-3z=0\ ,\ z=-2$$

El punt que ens demanaven és $\boxed{G(3,4,-2)}$

Fem un esquema per comprendre millor el problema:



Com veurem més endavant, aquest punt G s'anomena *baricentre* i coincideix amb el centre de gravetat del triangle.

Comprovem que és la mitjana dels tres vèrtexs

$$x_G=(x_A+x_B+x_C)/3=(-5+8+6)/3=9/3=3$$
$$y_G=(y_A+y_B+y_C)/3=(7+4+1)/3=12/3=4$$
$$z_G=(z_A+z_B+z_C)/3=(3-9+0)/3=-6/3=-2.$$

Norma d'un vector

9. Ordena en funció de la seva longitud els vectors $\mathbf{u}_1$=(12, 16), $\mathbf{u}_2$=(10, 0), $\mathbf{u}_3$=(-15, 8) i $\mathbf{u}_4$=(-7,-24), per mitjà de les normes. Fes el mateix amb els vectors $\mathbf{w}_1$=(4'5, 2'8), $\mathbf{w}_2$=(-4'8, 1'4), $\mathbf{w}_3$=(-4'4, 3'3), $\mathbf{w}_4$=(-3'24, -4'32), $\mathbf{w}_5$=(2'4, -4'5) i $\mathbf{w}_6$=(2, 4'8). Pot ser que aquests vectors siguin els costats d'un polígon tancat?

Solució. Primerament trobarem les normes de tots els vectors donats, fent servir la fórmula deduïda del teorema de Pitàgores,

$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{400}=20$ $\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{100}=10$

$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{(-15)^2+8^2}=\sqrt{289}=17$ $\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2}=\sqrt{625}=25$

Ordenant-los per longitud, $\boxed{\mathbf{v}_2<\mathbf{v}_3<\mathbf{v}_1<\mathbf{v}_4}$

Fem el mateix per a l'altra família de vectors,

$\|\mathbf{w}_1\|=\sqrt{(4'5)^2+(2'8)^2}=5'3$ $\|\mathbf{w}_2\|=\sqrt{(-4'8)^2+(1'4)^2}=5$

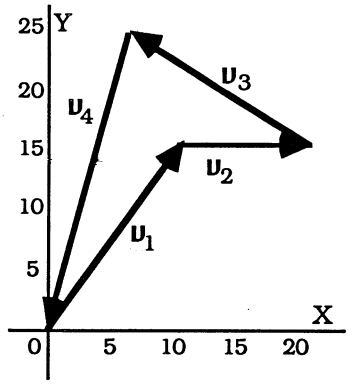
$\|\mathbf{w}_3\|=\sqrt{(-4'4)^2+(3'3)^2}=5'5$ $\|\mathbf{w}_4\|=\sqrt{(-3'24)^2+(-4'32)^2}=5'4$

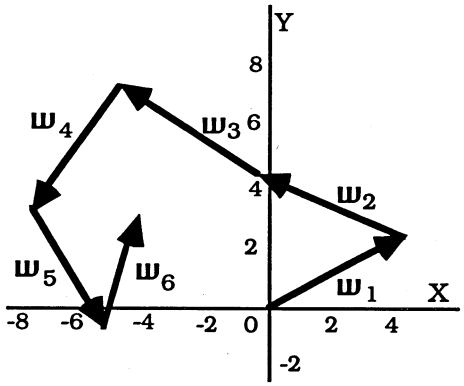
$\|\mathbf{w}_5\|=\sqrt{2'4^2+(-4'5)^2}=5'1$ $\|\mathbf{w}_6\|=\sqrt{2^2+4'8^2}=5'2$

Si també els ordenem segons les seves longituds, obtindrem

$$\boxed{\mathbf{w}_2<\mathbf{w}_5<\mathbf{w}_6<\mathbf{w}_1<\mathbf{w}_4<\mathbf{w}_3}$$

Estudiem ara si les dues famílies de vectors formen polígons tancats. Comprovem-ho gràficament:





Observem que només en el primer cas la suma de vectors serà el vector nul, és a dir que partint de l'origen i sumant vectorialment, retornarem a l'origen.

Comprovem-ho, trobant les dues components del vector suma,

$a=a_1+a_2+a_3+a_4=12+10+(-15)+(-7)=22-22=0$

$b=b_1+b_2+b_3+b_4=16+0+8+(-24)=24-24=0$

Pel segon conjunt de vectors no es verifica. El motiu és que en les components horitzontals només hi ha un número imparell, 4'5, i sumant-lo amb altres parells, mai no ens podrà donar el 0, que és parell. Comprovem-ho, tot i això, per veure la seva resultant:

$a=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=4'5-4'8-4'4-3'24+2'4+2=-3'54$

$b=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=2'8+1'4+3'3-4'32-4'5+4'8=3'48$

I, evidentment, no ens ha quedat el vector nul.

10. Calcula la norma dels vectors $\mathbf{v}_1=(3, 4, 12)$, $\mathbf{v}_2=(4, 5, 20)$ i $\mathbf{v}_3=(5, 6, 30)$. Si et fixes en les seves components, podríes trobar mentalment la longitud del vector $\mathbf{v}_4=(6, 7, 42)$? Passarà sempre per un vector $\mathbf{v}=(a, a+1, a.(a+1))$?

Solució. Trobem les longituds dels tres vectors donats,

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

$$\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{4^2+5^2+20^2}=\sqrt{16+25+400}=\sqrt{441}=21$$

$$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{5^2+6^2+30^2}=\sqrt{25+36+900}=\sqrt{961}=31$$

I com que $\|(3, 4, 12)\|=13$, $\|(4, 5, 20)\|=21$ i $\|(5, 6, 30)\|=31$, on les dues primeres components són consecutives, la tercera és el producte d'aquestes dues, i la norma és una unitat més que la 3a component. Per tant, lògicament

$$\|\mathbf{v}_4\|=\sqrt{6^2+7^2+42^2}=43$$

Comprovem que per al vector $\mathbf{v}=(a, a+1, a.(a+1))$ es verificarà

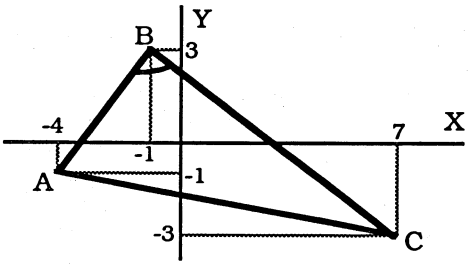
$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2&=a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2=a^2+(a^2+2a+1)+(a^4+2a^3+a^2)=\\&=a^4+2a^3+3a^2+2a+1=(a^4+a^3+a^2)+(a^3+a^2+a)+(a^2+a+1)=\\&=a^2.(a^2+a+1)+a.(a^2+a+1)+1.(a^2+a+1)=(a^2+a+1).(a^2+a+1)=\\&=(a^2+a+1)^2=[a.(a+1)+1]^2\end{aligned}$$

Concloem que $\|\mathbf{v}\|=a.(a+1)+1$, com havíem de provar.

Per acabar, diem que es verifica per qualsevol nombre real. Per exemple, si a=2'5, tindrem a+1=3'5 i a.(a+1)=8'75 i la norma del vector que té aquestes tres components serà 9'75.

11. Trobant les longituds dels seus costats, analitza si el triangle de vèrtexs A(-1,-4), B(3,-1) i C(-3,7) és un triangle rectangle.

Solució. Fem la figura i veurem que, si hi ha un angle recte, aquest haurà de ser el B,



Comprovem amb un transportador que efectivament és així.

Del triangle donat de vèrtexs A(-4,-1), B(-1,3) i C(7,-3), trobem les longituds dels seus costats,

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1+4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(7+4)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}\approx 11'18$$

$$BC=\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(7+1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

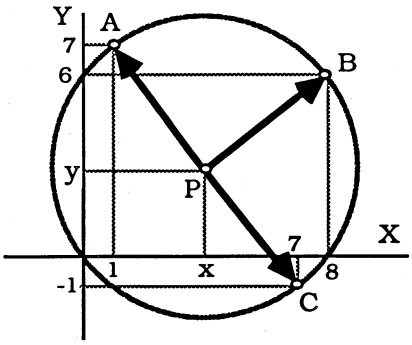
El més llarg d'ells és el costat AC i haurà de ser la hipotenusa. Comprovem que es verifica el teorema de Pitàgores

$$AB^2+BC^2=5^2+10^2=25+100=125=AC^2$$

Per tant, es tractarà d'un triangle rectangle, ja que B=90°.

12. Determina les coordenades x i y d'un punt P que equidisti dels punts A(1,7), B(8,6) i C(7,-1). Sabríes dir la propietat que té?

Solució. Sigui el punt P(x,y) que equidista dels punts A, B i C, és a dir, que té la mateixa distància AP=BP=CP.



Trobem aquestes distàncies,

$$AP=\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}=\sqrt{x^2-2x+1+y^2-14y+49}=\sqrt{x^2+y^2-2x-14y+50}$$

$$BP=\sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2}=\sqrt{x^2-16x+64+y^2-12y+36}=\sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}$$

$$CP=\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2-14x+49+y^2+2y+1}=\sqrt{x^2+y^2-14x+2y+50}$$

Igualant AP=BP i BP=CP, i de passada elevant al quadrat, ens quedarà el sistema,

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-14y+50=x^2+y^2-16x-12y+100 \\ x^2+y^2-16x-12y+100=x^2+y^2-14x+2y+50 \end{cases}$$

Simplificant, obtindrem

$$\begin{cases} -2x-14y+16x+12y=100-50 \\ -16x-12y+14x-2y=50-100 \end{cases}, \quad \begin{cases} 14x-2y=50 \\ -2x-14y=-50 \end{cases}, \quad \begin{cases} 7x-y=25 & (1) \\ x+7y=25 & (2) \end{cases}$$

Per resoldre aquest sistema d'equacions lineals, podem recordar el mètode de reducció de Gauss.

Triangularitzem la matriu del sistema,

$$M=\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -1 & 25 \\ 1 & 7 & 25 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -1 & 25 \\ 0 & 50 & 150 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -1 & 25 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema donat serà equivalent al següent:

$$\begin{cases} 7x-y=25 & (1') \\ \quad y=3 & (2') \end{cases}$$

Substituint (2') en (1'), $7x-3=25$, $7x=28$, $x=4$.

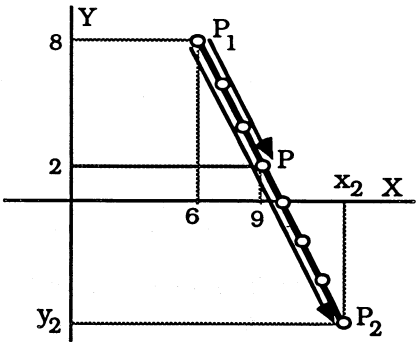
Per tant, el punt buscat és el $\boxed{P(4,3)}$

La propietat geomètrica és que aquest punt és el centre de la circumferència que passa pels punts A, B i C, ja que n'equidista. El seu radi és:

$$R=AP=\sqrt{(4-1)^2+(3-7)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

13. Sabent que el punt P(9,2) divideix el segment que determinen els punts $P_1(6,8)$ i $P_2(x_2,y_2)$ en la relació $k=3/7$, troba les coordenades de P_2. Comprova-ho després trobant les longituds P_1P_2, P_1P i PP_2.

Solució. Fem la figura per comprendre millor el problema. Hem dividit el segment en 3 parts i després l'hem allargat 7-3=4 parts més, fins a obtenir el punt P_2,



Si els vectors de la figura són paral·lels, haurà de passar que

$$\overrightarrow{P_1P}=k.\overrightarrow{P_1P_2}, \text{ on per hipòtesi } k=3/7$$

Trobant les components del dos vectors, tindrem

$$\overrightarrow{P_1P}=(9-6,\ 2-8)=(3,\ -6) \quad \wedge \quad \overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-6,\ y_2-8)$$

Substituint, $(3,\ -6)=(3/7).(x_2-6,\ y_2-8)$ i operant,

$$7.(3,\ -6)=3.(x_2-6,\ y_2-8) \quad , \quad (21,\ -42)=(3.x_2-18,\ 3.y_2-24)$$

Igualant components, $3.x_2-18=21$, $3.x_2=39$, $x_2=13$

I l'altra coordenada és, $3.y_2-24=-42$, $3.y_2=-18$, $y_2=-6$

L'extrem P_2 serà $\boxed{P_2(13,-6)}$

Comprovem-ho calculant les longituds P_1P_2, P_1P i PP_2,

$P_1P_2=\sqrt{(13-6)^2+(-6-8)^2}=\sqrt{49+196}=\sqrt{245}=7.\sqrt{5}\approx 15'65$

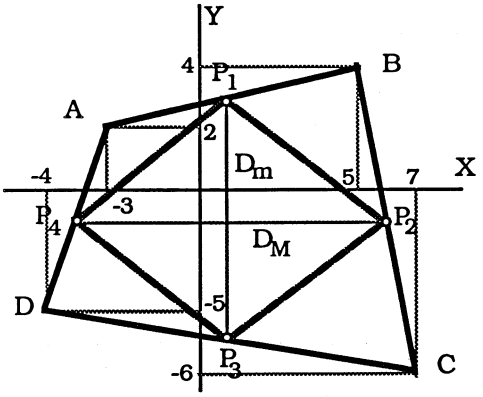
$P_1P=\sqrt{(9-6)^2+(2-8)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3.\sqrt{5}\approx 6'71$

$PP_2=\sqrt{(13-9)^2+(-6-2)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4.\sqrt{5}\approx 8'94$

Observem clarament que $P_1P_2=P_1P+PP_2$.

14. Pel quadrilàter de vèrtexs A(-3,2), B(5,4), C(7,-6) i D(-5,-4), calcula l'àrea del rombe format en ajuntar els punts mitjans dels seus costats. Quina és la suma de les diagonals del quadrilàter? Quant fa el perímetre del rombe? Què dedueixes?

Solució. Fem la figura del rombe format en unir els punts mitjans dels costats del quadrilàter,



Per trobar els punts mitjans farem la mitjana dels seus extrems,

Punt mitjà de AB, $P_1((-3+5)/2,\ (2+4)/2)$ $\boxed{P_1(1,3)}$

Punt mitjà de BC, $P_2((5+7)/2,\ (4-6)/2)$ $\boxed{P_2(6,-1)}$

Punt mitjà de CD, $P_3((7-5)/2,\ (-6-4)/2)$ $\boxed{P_3(1,-5)}$

Punt mitjà de DA, $P_4((-5-3)/2,\ (-4+2)/2)$ $\boxed{P_4(4,-1)}$

Per trobar l'àrea del rombe $P_1P_2P_3P_4$, tindrem en compte que és el semiproducte de les diagonals, $A_r=(D_M.D_m)/2$, on

$D_M=P_4P_2=\sqrt{(6+4)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{100+0}=10$

$D_m=P_3P_1=\sqrt{(1-1)^2+(3+5)^2}=\sqrt{0+64}=8$

L'àrea del rombe serà $A_r=(10.8)/2=80/2=40$, $\boxed{A_r=40}$

Calculem ara les longituds de les diagonals del quadrilàter, que no hem dibuixat per no complicar la figura

$$AC=\sqrt{(7+3)^2+(-6-2)^2}=\sqrt{100+64}=\sqrt{164}=2.\sqrt{41}\approx 12'8$$

$$BD=\sqrt{(-5-5)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{100+64}=\sqrt{164}=2.\sqrt{41}\approx 12'8$$

La suma de les diagonals serà $AC+BD=4.\sqrt{41}\approx 25'6$

Calculem a continuació les longituds dels costats del rombe,

$$P_1P_2=\sqrt{(6-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}\approx 6'4$$

$$P_2P_3=\sqrt{(1-6)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}\approx 6'4$$

$$P_3P_4=\sqrt{(-4-1)^2+(-1+5)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}\approx 6'4$$

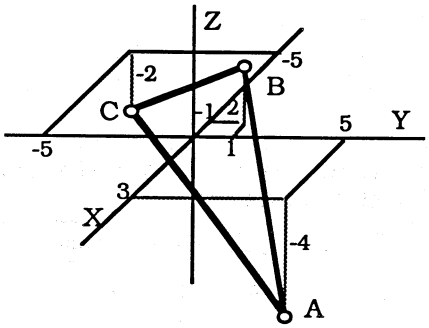
$$P_4P_1=\sqrt{(-4-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}\approx 6'4$$

El perímetre serà $P=P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_1=4.\sqrt{41}\approx 25'6$

Notem que la suma de les diagonals del quadrilàter coincideix amb el perímetre del rombe.

15. Calculant les longituds dels seus costats, digues si el triangle on A(3,5,-4), B(-1,1,2) i C(-5,-5,-2) és equilàter, isòsceles o escalè.

Solució. Dibuixant la figura no podem dir de quin tipus és, ja que és en l'espai i la perspectiva canvia les distàncies,



Calculem les longituds dels tres costats,

$$AB=\sqrt{(-1-3)^2+(1-5)^2+(2+4)^2}=\sqrt{16+16+36}=\sqrt{68}\approx 8'24$$

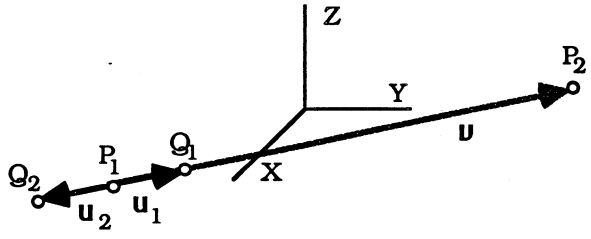
$$AC=\sqrt{(-5-3)^2+(-5-5)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{64+100+4}=\sqrt{168}\approx 12'96$$

$$BC=\sqrt{(-5+1)^2+(-5-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{16+36+16}=\sqrt{68}\approx 8'24$$

Com que el triangle té sols dos costats iguals, resultarà ser un triangle *isòsceles*. Veiem que no és rectangle perquè no es compleix el teorema de Pitàgores, $8'24+8'24\neq 12'96$.

16. Troba dos vectors unitaris d'igual direcció, però de sentit igual o diferent, que el vector $\mathbf{v}$ que té per origen $P_1(9,-8,-7)$ i per extrem $P_2(-3,7,9)$. Quines serien les coordenades Q_1 i Q_2 dels seus extrems si l'origen és també P_1? Troba després les longituds Q_1P_2 i Q_2P_2 i comenta el resultat.

Solució. Fem la figura aproximada per veure les longituds i els punts que ens demanen:



El vector $\mathbf{v}$ que té per origen $P_1(9,-8,-7)$ i extrem $P_2(-3,7,9)$, tindrà de components

$$\mathbf{v}=\overrightarrow{P_1P_2}=(-3-9,\ 7+8,\ 9+7)=(-12,\ 15,\ 16)$$

La seva longitud serà

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{(-12)^2+15^2+16^2}=\sqrt{144+225+256}=\sqrt{625}=25$$

Si un vector $\mathbf{u}$ ha de tenir la mateixa direcció que $\mathbf{v}$, llavors hauran de ser proporcionals, $\mathbf{u}=k.\mathbf{v}$. La norma verificarà

$$\|\mathbf{u}\|=\|k.\mathbf{v}\| \quad , \quad \|\mathbf{u}\|=|k|.\|\mathbf{v}\| \text{ , on } |k| \text{ és el valor absolut de } k$$

Com que hem trobat $\|\mathbf{v}\|=25$, i com que per hipòtesi $\mathbf{u}$ ha de ser unitari, la seva norma serà la unitat. Substituint,

$$1=|k|.25 \quad , \quad |k|=1/25 \quad , \ k=\pm 0'04, \text{ d'on } k_1=0'04 \ \text{ i } \ k_2=-0'04$$

PRIMERA POSSIBILITAT. Per $k_1=0'04$ el vector unitari tindrà la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector donat, ja que k és positiva. Aquest vector unitari és

$$\mathbf{u}_1=k_1.\mathbf{v}=0'04.(-12,15,16) \quad , \quad \boxed{\mathbf{u}_1=(-0'48,\ 0'60,\ 0'64)}$$

Si l'origen és també $P_1(9,-8,-7)$, calcularem ara el seu extrem $Q_1(x_1,y_1,z_1)$

$$\mathbf{u}_1=(x_1-9,\ y_1+8,\ z_1+7)=(-0'48,\ 0'60,\ 0'64)$$

Identificant components, ens quedarà el sistema immediat de tres equacions amb tres incògnites

$$x_1-9=-0'48 \quad , \quad y_1+8=0'60 \quad , \quad z_1+7=0'64$$

D'on resulta $x_1=8'52$, $y_1=-7'40$ i $z_1=-6'36$

El punt extrem serà $\boxed{Q_1(8'52,-7'40,-6'36)}$

SEGONA POSSIBILITAT. Per k_1=-0'04 el vector unitari tindrà ara sentit contrari, perquè la k és negativa. Tindrem,

$$\mathbf{u}_2=k_2.\mathbf{u}=-0'04.(-12,15,16) \quad , \quad \boxed{\mathbf{u}_2=(0'48,\ -0'60,\ -0'64)}$$

Com que l'origen és també el punt $P_1(9,-8,-7)$, trobarem el seu extrem $Q_2(x_2,y_2,z_2)$, que serà

$$\mathbf{u}_2=(x_2-9,\ y_2+8,\ z_2+7)=(0'48,\ -0'60,\ -0'64)$$

Identificant components,

$$x_2-9=0'48 \quad , \quad y_2+8=-0'60 \quad , \quad z_2+7=-0'64$$

D'on resulta x_2=9'48 , y_2=-8'60 i z_2=-7'64

El punt extrem serà $\boxed{Q_1(9'48,-8'60,-7'64)}$

Trobem a continuació la longitud del vector $\mathbf{w}_1$ que té per origen $Q_1(8'52,-7'40,-6'36)$ i extrem $P_2(-3,7,9)$,

$$\mathbf{w}_1=\overrightarrow{Q_1P_2}=(-3-8'52,\ 7+7'40,\ 9+6'36)=(-11'52,\ 14'40,\ 15'36)$$

La seva norma serà

$$\|\mathbf{w}_1\|=\sqrt{(-11'52)^2+14'40^2+15'36^2}=\sqrt{576}=\boxed{24}$$

Anàlogament, el vector $\mathbf{w}_2$, que té per origen $Q_2(9'48,-8'6,-7'64)$ i extrem també $P_2(-3,7,9)$, serà

$$\mathbf{w}_2=\overrightarrow{Q_2P_2}=(-3-9'48,\ 7+8'60,\ 9+7'44)=(-12'48,\ 15'60,\ 16'44)$$

Aquest vector té de norma

$$\|\mathbf{w}_2\|=\sqrt{(-12'48)^2+15'60^2+16'64^2}=\sqrt{676}=\boxed{26}$$

En resum, les dues longituds han donat 24 i 26. És lògic, ja que al vector de longitud 25 se li ha restat i sumat el vector unitari.

17. Si A(3,-4,2), B(7,4,10) i C(9,8,6) són tres dels quatre vèrtexs d'un paral·lelogram ABCD, quin serà el punt M en el qual es tallen les diagonals? Quin serà el quart vèrtex D? Calculant les longituds dels seus costats, serà un quadrat? I un rectangle?

Solució. Sigui el paral·lelogram de vèrtexs consecutius A, B, C i D. Com que en un paral·lelogram les diagonals es tallen en el punt mitjà, tindrem que M serà el punt mitjà de A i C. És a dir,

$$x_M=(x_A+x_C)/2=(3+9)/2=6 \qquad y_M=(y_A+y_C)/2=(-4+8)/2=2$$

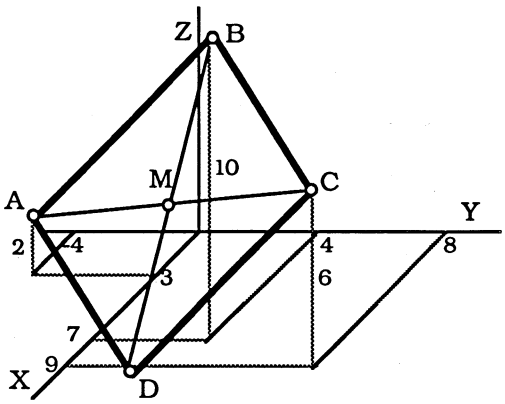
$$y_M=(y_A+y_C)/2=(2+6)/2=4$$

Així, el punt mitjà és $\boxed{M(6,2,4)}$

D'altra banda, M també serà el punt mitjà de la diagonal BD. En conseqüència, tindrem

$x_M=(x_B+x_D)/2$, $6=(7+x_D)/2$, $12=7+x_D$, $x_D=5$
$y_M=(y_B+y_D)/2$, $2=(4+y_D)/2$, $4=4+y_D$, $y_D=0$
$z_M=(z_B+z_D)/2$, $4=(10+z_D)/2$, $8=10+z_D$, $z_D=-2$

El vèrtex que faltava és $\boxed{D(5,0,-2)}$. Fem la gràfica en l'espai del paral·lelogram:



Trobem les longituds dels seus costats, AB=CD i BC=AD, ja que es tracta d'un paral·lelogram.

$$AB=\sqrt{(7-3)^2+(4+4)^2+(10-2)^2}=\sqrt{16+64+64}=\sqrt{144}=\boxed{12}$$

$$BC=\sqrt{(9-7)^2+(8-4)^2+(6-10)^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=\boxed{6}$$

No serà un quadrat, ja que els dos costats són diferents,. Per veure si és un rectangle trobarem la longitud de la diagonal AC,

$$AC=\sqrt{(9-3)^2+(8+4)^2+(6-2)^2}=\sqrt{36+144+16}=\sqrt{196}=\boxed{14}$$

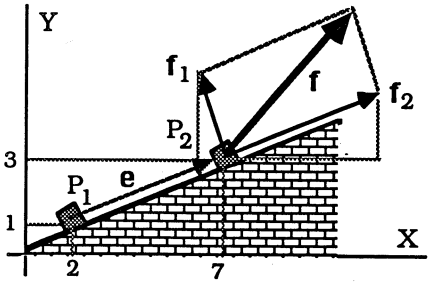
Com que no es verifica el teorema de Pitàgores $AB^2+BC^2\neq AC^2$, doncs $12^2+6^2=144+36=180$ mentre que $14^2=196$, l'angle en B no serà recte, i el paral·lelogram no serà tampoc un rectangle.

1.2 PRODUCTES ENTRE VECTORS

Producte escalar

18. En Física definim el treball T com el producte escalar del vector força **f** pel vector espai **e**. Si dues persones exerceixen les forces $\mathbf{f}_1=-\mathbf{i}+3.\mathbf{j}$ i $\mathbf{f}_2=5.\mathbf{i}+2.\mathbf{j}$ sobre un objecte, desplaçant-lo des del punt $P_1(2,1)$ fins al punt $P_2(7,3)$, quin serà el treball total realitzat? (Les forces estan mesurades en newtons i l'espai en metres).

Solució. En aquesta primera aplicació del producte escalar, hem fet una gràfica d'un cos que és desplaçat per una rampa. La resultant de les dues forces s'ha obtingut per la regla del paral·lelogram:



Calculem la resultant **f** sumant les dues forces donades,

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2=(-1,3)+(5,2)=(-1+5,\ 3+2)=(4,\ 5)$$

El vector desplaçament és

$$\mathbf{e}=\overrightarrow{P_1P_2}=(7-2,\ 3-1)=(5,\ 2)$$

El treball serà el producte escalar dels dos vectors anteriors, és a dir, del vector força pel vector desplaçament,

$$T=\mathbf{f}\bullet\mathbf{e}=(4,\ 5)\bullet(5,\ 2)=4.5+5.2=20+10=30$$

Recordem que en Física, si la força és mesurada en newtons (N) i el desplaçament en metres (m), llavors el treball és donat en joules (J).

Per tant, el treball efectuat és $\boxed{T=30\ J}$.

19. Donats els vectors $\mathbf{v}_1=6.\mathbf{i}+8.\mathbf{j}$ i $\mathbf{v}_2=24.\mathbf{i}-7.\mathbf{j}$, troba les seves normes i el seu producte escalar. A partir d'aquestes dades, podries saber l'angle que formen? Quina serà l'àrea del triangle, si és donada pel semiproducte de les seves normes pel sinus de l'angle que formen?

Solució. Calculem en primer lloc les normes o longituds dels vectors, que es poden expressar també amb la notació de parèntesis per $\mathbf{v}_1=(6,8)$ i $\mathbf{v}_2=(24,-7)$,

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

$$\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{24^2+(-7)^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25$$

El producte escalar dels dos vectors, que com sabem no és un vector, sinó un número, serà

$$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=(6,8)\bullet(24,-7)=6.24+8.(-7)=144-56=88$$

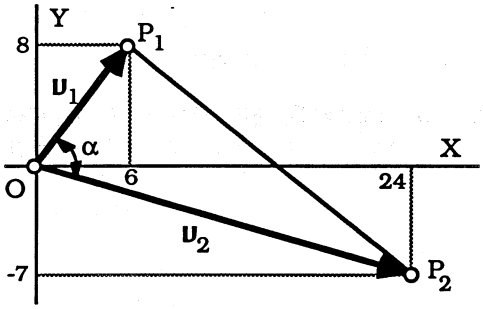
Per trobar l'angle que formen, podem utilitzar la mateixa definició del producte escalar,

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|}$$

Substituint

$$\cos(\alpha)=88/(10.25) \quad , \quad \cos(\alpha)=0'352 \quad , \quad \alpha=\text{arc}\cos(0'352)$$

Amb una calculadora obtindrem $\boxed{\alpha=69°23'35''}$, valor que es podria comprovar amb la gràfica:



Per trobar l'àrea emprarem la fórmula que ens han donat,

$$A_t=(1/2).\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\sin(\alpha)=0'5.10.25.\sin(69°23'25'')=125.0'936$$

Multiplicant, obtindrem $\boxed{A_t=117}$.

20. Dos vectors del pla $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ tenen de normes 2 i 5 unitats, respectivament. Si l'angle format per aquests vectors és de 120°, calcula el producte escalar dels vectors $\mathbf{w}_1=3.\mathbf{v}_1+2.\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{w}_2=2.\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$.

Solució. Trobem el producte escalar $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2$ que ens farà falta per trobar el que realment ens demanen,

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2=\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\cos(\alpha)=2.5.\cos(120°)=10.(-0'5)=-5$$

Calculem ara el nou producte escalar $\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2$, fent servir en primer lloc la propietat distributiva

$$\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2=(3.\mathbf{v}_1+2.\mathbf{v}_2)\bullet(2.\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=6.\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1-3.\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2+4.\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_1-2.\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2$$

Fent sortir la norma, i per tenir el producte escalar la propietat commutativa,

$$\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2=6.\|\mathbf{v}_1\|^2+\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2-2.\|\mathbf{v}_2\|^2$$

Finalment, substituint pels seus valors

$$\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2=6.2^2+(-5)-2.5^2=24-5-50= \boxed{-31}$$

21. Prova que $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2.(\|a\|^2+\|b\|^2)$. Després, si $\|a\|=13$, $\|b\|=19$ i $\|a+b\|=24$, calcula $\|a-b\|$. Quin significat geomètric té?

Solució. Començarem pel primer costat, tindrem en compte que la norma al quadrat és igual al producte escalar del vector per ell mateix, aplicarem la propietat distributiva, etc i arribarem al segon costat.

$$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=(a+b)\bullet(a+b)+(a-b)\bullet(a-b)=$$
$$=a\bullet a+a\bullet b+b\bullet a+b\bullet b + a\bullet a+a\bullet(-b)+(-b)\bullet a+(-b)\bullet(-b)=$$
$$=\|a\|^2+a\bullet b+a\bullet b+\|b\|^2+\|a\|^2-a\bullet b-a\bullet b+\|b\|^2=$$
$$=2.\|a\|^2+2.\|b\|^2=2.(\|a\|^2+\|b\|^2)$$

Si ara sabem que $\|a\|=13$, $\|b\|=19$ i $\|a+b\|=24$, és a dir, les longituds de dos vectors i de la seva suma, també podrem deduir la longitud de la seva diferència, aplicant la fórmula anterior:

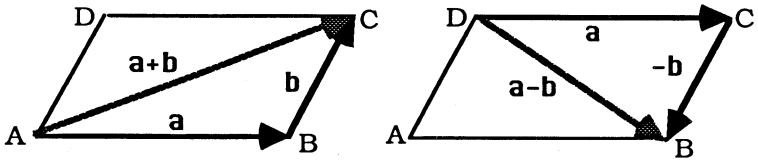
$$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2.(\|a\|^2+\|b\|^2) \quad , \quad 24^2+\|a-b\|^2=2.(13^2+19^2)$$

Elevant al quadrat i operant,

$$\|a-b\|^2=2.(169+361)-576 \quad , \quad \|a-b\|^2=484 \quad , \quad \|a-b\|=\sqrt{484}$$

Per tant, la norma de la diferència serà $\boxed{\|a-b\|=22}$

Veiem ara el significat geomètric de la fórmula anterior:



Voldrà dir clarament que «la suma dels quadrats de les dues diagonals d'un paral·lelogram és igual a la suma dels quadrats dels seus quatre costats».

22. Un quadrilàter de l'espai té per vèrtexs A(1,-2,2), B(1,4,0), C(-4,1,1) i D(-5,-5,3). Prova vectorialment que les seves diagonals AC i BD són perpendiculars entre si. Es pot expressar la diagonal AC com a combinació lineal de AB i AD? Seran els quatre punts A, B, C i D en un mateix pla?

Solució. Calculem les components de les dues diagonals,

$$\overrightarrow{AC}=(-4-1,\ 1+2,\ 1-2)=(-5,\ 3,\ -1)$$

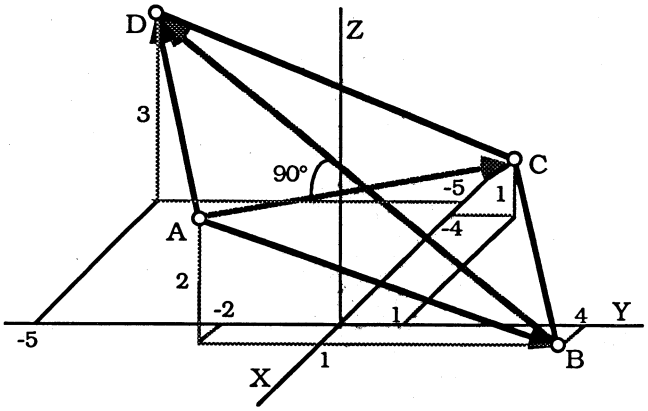
$$\overrightarrow{BD}=(-5-1,\ -5-4,\ 3-0)=(-6,\ -9,\ 3)$$

El seu producte escalar és

$$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=(-5,3,-1)\bullet(-6,-9,3)=(-5).(-6)+3.(-9)+(-1).3=30-27-3=0$$

Com que $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=0$ voldrà dir que $\boxed{\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}}$

Fem una figura per intuir millor el problema:



Ara hem de veure si el vector de la diagonal AC es pot posar en combinació lineal dels vectors dels costats AB i AD, que són:

$$\overrightarrow{AB}=(1-1,\ 4+2,\ 0-2)=(0,6,-2) \qquad \overrightarrow{AD}=(-5-1,\ -5+2,\ 3-2)=(-6,-3,1)$$

Posar-los en combinació lineal voldrà dir que existiran dos números a i b, tals que

$$\overrightarrow{AC}=a.\overrightarrow{AB}+b.\overrightarrow{AD}$$

Substituint per les components,

$$(-5,3,-1)=a.(0,6,-2)+b.(-6,-3,1) \quad , \quad (-5,3,-1)=(-6b,\ 6a-3b,\ -2a+b)$$

Identificant components obtindrem el sistema,

$$-6b=-5 \quad (1) \qquad 6a-3b=3 \quad (2) \qquad -2a+b=-1 \quad (3)$$

Observem que la (2) i la (3) són iguals. De (1) tenim b=5/6, que substituït en (3) ens dóna 2a=b+1 , 2a=(5/6)+1 , 2a=11/6. És a dir, a=11/12.

Per tant, $\overrightarrow{AC}=(11/12).\overrightarrow{AB}+(5/6).\overrightarrow{AD}$

23. Calcula un vector $\mathbf{v}$ de manera que els seus productes escalars amb els vectors $\mathbf{v}_1=(1,-3,2)$, $\mathbf{v}_2=(2,-1,3)$ i $\mathbf{v}_3=(3,2,-4)$ siguin iguals als escalars -11, -5 i 20, respectivament. Fes el sistema per Gauss. Troba el producte escalar de $\mathbf{v}$ amb $\mathbf{w}=5.\mathbf{v}_1-3.\mathbf{v}_2+2.\mathbf{v}_3$. Comprova-ho.

Solució. Sigui el vector $\mathbf{v}=(x,y,z)$. Formem els productes escalars amb els vectors donats,

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_1=(x,y,z)\bullet(1,-3,2)=x-3y+2z \qquad x-3y+2z=-11 \quad (1)$$
$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_2=(x,y,z)\bullet(2,-1,3)=2x-y+3z \qquad 2x-y+3z=-5 \quad (2)$$
$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_3=(x,y,z)\bullet(3,2,-4)=3x+2y-4z \qquad 3x+2y-4z=20 \quad (3)$$

Resoldrem el sistema anterior amb el mètode de reducció de Gauss. Triangularitzem, doncs, la matriu conjunta,

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -11 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -4 & 20 \end{array}\right)\begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 17 \\ 0 & 11 & -10 & 53 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ g_2=f_2-2.f_1 \\ g_3=f_3-3.f_1 \end{array} \equiv$$

$$\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -39 & 78 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ h_3=5.g_3-11.g_2 \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ i_3=h_3/(-39) \end{array}$$

Observem que $\rho(A)=\rho(M)=n=3$, és a dir, els rangs de les matrius dels coeficients i ampliada són igual al nombre d'incògnites. Pel teorema de Rouché, el sistema serà compatible determinat.

Trobem l'única solució partint del sistema equivalent,

$$\left\{\begin{array}{rl} x-3y+2z=-11 & (1) \\ 5y \quad -z=17 & (2) \\ z=-2 & (3) \end{array}\right.$$

Substituint (3) en (2), $5y-(-2)=17$, $5y=15$, $y=3$

Substituint en (1), $x=3y-2z-11=3.3-2.(-2)-11=9+4-11$, $x=2$

El vector que hem estat buscant és $\boxed{\mathbf{v}=(2,\ 3,\ -2)}$

Donat ara el vector $\mathbf{w}=5.\mathbf{v}_1-3.\mathbf{v}_2+2.\mathbf{v}_3$, determinarem el seu producte escalar amb el vector que hem trobat,

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=\mathbf{v}\bullet(5.\mathbf{v}_1-3.\mathbf{v}_2+2.\mathbf{v}_3)=5.(\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_1)-3.(\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_2)+2.(\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_3)$$

Substituint pels valors donats,

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=5.(-11)-3.(-5)+2.20=-55+15+40=\boxed{0} \Rightarrow \mathbf{v}\perp\mathbf{w}$$

Per fer la *comprovació*, trobarem primer les components del nou vector,

$$\mathbf{w}=5.\mathbf{v}_1-3.\mathbf{v}_2+2.\mathbf{v}_3=5.(1,-3,2)-3.(2,-1,3)+2.(3,2,-4)=$$
$$=(5,-15,10)+(-6,3,-9)+(6,4,-8)=(5,-8,-7)$$

Multiplicant escalarment,

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=(2,3,-2)\bullet(5,-8,-7)=2.5+3.(-8)+(-2).(-7)=10-24+14=0$$

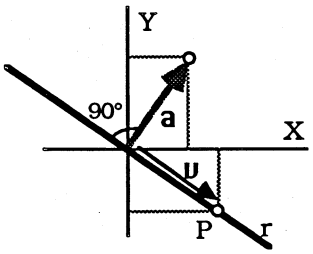
Queda així comprovat el producte escalar.

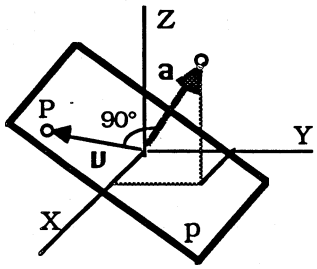
24. Troba el "lloc geomètric" dels extrems P(x,y) dels vectors del pla $\mathbf{v}=x.\mathbf{i}+y.\mathbf{j}$ que són ortogonals al vector fix $\mathbf{a}=2.\mathbf{i}+3.\mathbf{j}$. Fes-ne el dibuix. Generalitza-ho per l'espai, on ara $\mathbf{a}=2.\mathbf{i}+3.\mathbf{j}+4.\mathbf{k}$.

Solució. Donat el vector fix $\mathbf{a}=(2,3)$ i un vector qualsevol $\mathbf{v}(x,y)$ del pla, si han de ser ortogonals (és a dir, perpendiculars), el seu producte escalar s'haurà d'anul·lar,

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}=(2,3)\bullet(x,y)=2.x+3.y \quad , \quad \mathbf{a}\bullet\mathbf{v}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x+3y=0}$$

El lloc geomètric demanat serà precisament una recta que passa per l'origen,





Generalitzant-ho, pels dos vectors $\mathbf{a}=(2,3,4)$ i $\mathbf{v}=(x,y,z)$ de l'espai, tindrem de manera similar que

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}=(2,3,4)\bullet(x,y,z)=2x+3y+4z \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x+3y+4z=0}$$

En aquest cas, el lloc geomètric serà un pla que passa per l'origen de coordenades.

25. Troba un vector $\mathbf{v}=(a,b,c)$ de components enteres sabent que la seva norma és 11, que és perpendicular al vector $\mathbf{w}_1=(3,4,2)$ i que el seu producte escalar amb el $\mathbf{w}_2=(4,2,1)$ és igual a 5.

Solució. Haurem de plantejar un sistema de tres equacions amb les tres incògnites a, b i c.

Com que la norma del vector ha de ser 11,

$$\|\mathbf{v}\|=11 \quad , \quad \sqrt{a^2+b^2+c^2}=11 \quad , \quad \boxed{a^2+b^2+c^2=121} \quad (1)$$

Si $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}_1$ han de ser perpendiculars, llavors el seu producte escalar s'haurà d'anul·lar,

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}_1=(a,b,c)\bullet(3,4,2)=3a+4b+2c \quad , \quad \boxed{3a+4b+2c=0} \quad (2)$$

Finalment, com que el producte escalar de $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}_2$ ha de ser 5,

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}_2=(a,b,c)\bullet(4,2,1)=4a+2b+c \quad , \quad \boxed{4a+2b+c=5} \quad (3)$$

Ens ha quedat el sistema {(1),(2),(3)} d'equacions no lineals que resoldrem fàcilment, fent la combinació lineal

$$2.(3)-(2): \quad 5a+0b+0c=10 \quad , \quad 5a=10 \quad , \quad \boxed{a=2}$$

Substituint en (1) i en (2), ens quedarà el nou sistema,

$$\begin{cases}4+b^2+c^2=121\\6+4b+2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b^2+c^2=117 & (1')\\2b+c=-3 & (2')\end{cases}$$

De (2') podem aïllar c, c=-3-2b, i substituir-ho en (1'),

$$b^2+(-3-2b)^2=117 \ , \ b^2+9+12b+4b^2=117 \ , \ 5.b^2+12.b-108=0$$

Resolent aquesta equació de segon grau,

$$b=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4.5.(-108)}}{10}=\frac{-12\pm\sqrt{2304}}{10}=\frac{-12\pm48}{10}$$

De les dues solucions b=(-12+48)/10=3'6 i b=(-12-48)/10=-6, ens hem de quedar amb la segona $\boxed{b=-6}$, ja que en l'enunciat ens diuen que ha de ser de components enteres.

Substituint en (2'), c=-3-2.b=-3-2.(-6)=-3+12=9 , $\boxed{c=9}$

Per tant, el vector cercat serà $\boxed{\mathbf{v}=(2,-6,9)}$.

26. Donats els tres vectors **a**, **b** i **c** que corresponen als costats AB, BC i CA d'un triangle de longituds respectives 1, 2 i 7, quin serà l'escalar k donat per k=**a**•**b**+**b**•**c**+**c**•**a**? I si **v** és un vector tal que l'escalar m=(**a**+**v**)•(**b**+**v**)+(**a**+**v**)•(**c**+**v**)+(**b**+**v**)•(**c**+**v**) és nul, quant valdrà la norma d'aquest vector **v**?

Solució. Si aquests tres vectors formen triangle, voldrà dir que la seva suma és nul·la, **a**+**b**+**c**=**0**. Per tant,

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\bullet(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}+\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}+\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})+(\mathbf{b}\bullet\mathbf{a}+\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}+\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})+$$
$$+(\mathbf{c}\bullet\mathbf{a}+\mathbf{c}\bullet\mathbf{b}+\mathbf{c}\bullet\mathbf{c})=\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2+\|\mathbf{c}\|^2+2.\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}+2.\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}+2.\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}$$

Com que **a**+**b**+**c**=**0** , també $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=0$. En conseqüència,

$$\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2+\|\mathbf{c}\|^2+2.(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}+\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})=0$$

Substituint, $1^2+2^2+7^2+2.k=0$, $2.k=-54$, $\boxed{k=-27}$

Trobem ara un vector **v** que verifiqui

$$m=(\mathbf{a}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{b}+\mathbf{v})+(\mathbf{a}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{c}+\mathbf{v})+(\mathbf{b}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{c}+\mathbf{v})=0$$

Apliquem la propietat distributiva del producte escalar,

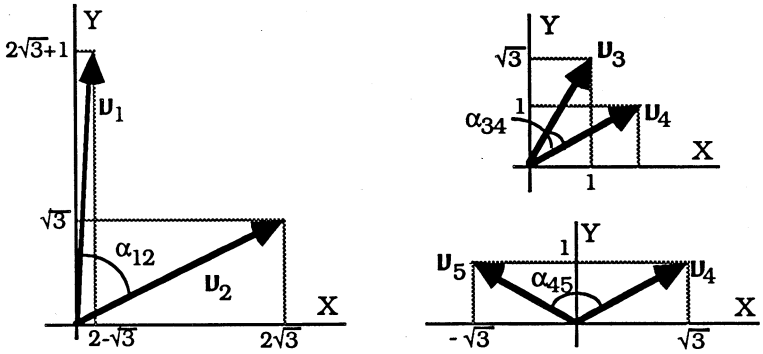
$$m=(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}+\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{b}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{v})+(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{b}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{v})+(\mathbf{c}\bullet\mathbf{a}+\mathbf{c}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{a}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{v})=$$
$$=(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}+\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{c}\bullet\mathbf{a})+2.\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}+2.\mathbf{b}\bullet\mathbf{v}+2.\mathbf{c}\bullet\mathbf{v}+\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2=$$
$$=k+2.(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\bullet\mathbf{v}+3.\|\mathbf{v}\|^2=-27+2.\mathbf{0}\bullet\mathbf{v}+3.\|\mathbf{v}\|^2=-27+3.\|\mathbf{v}\|^2$$

Com que m=0, $-27+3.\|\mathbf{v}\|^2=0$, $3.\|\mathbf{v}\|^2=27$, $\|\mathbf{v}\|^2=9$, $\boxed{\|\mathbf{v}\|=3}$.

Angle entre dos vectors

27. Donats els vectors del pla $\mathbf{v}_1=(2-\sqrt{3},\ 2.\sqrt{3}+1)$, $\mathbf{v}_2=(2.\sqrt{3},\ \sqrt{3})$, $\mathbf{v}_3=(1,\ \sqrt{3})$, $\mathbf{v}_4=(\sqrt{3},1)$ i $\mathbf{v}_5=(-\sqrt{3},1)$, comprova que l'angle format pels dos primers és el doble del format pel 3r i 4t, però la meitat del format pels dos últims.

Solució. Fem les tres figures que corresponen als tres angles demanats:



PRIMER ANGLE: $\mathbf{v}_1=(2-\sqrt{3},\ 2.\sqrt{3}+1)$ i $\mathbf{v}_2=(2.\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=(2-\sqrt{3}).(2.\sqrt{3})+(2.\sqrt{3}+1).\sqrt{3}=4.\sqrt{3}-2.3+2.3+\sqrt{3}=5.\sqrt{3}$

$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+(2.\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{4-4.\sqrt{3}+4.3+4.\sqrt{3}+1}=\sqrt{20}=2.\sqrt{5}$

$\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4.3+3}=\sqrt{15}$

$$\cos(\alpha_{12})=\frac{\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|}=\frac{5.\sqrt{3}}{2.\sqrt{5}.\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{75}}{2.\sqrt{75}}=\frac{1}{2}$$

$\alpha_{12}=\text{arc cos }(1/2)=60°$. Per tant, $\boxed{\alpha_{12}=60°}$

SEGON ANGLE: $\mathbf{v}_3=(1,\ \sqrt{3})$ i $\mathbf{v}_4=(\sqrt{3},\ 1)$

$\mathbf{v}_3\bullet\mathbf{v}_4=1.\sqrt{3}+\sqrt{3}.1=2.\sqrt{3}$

$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$ $\qquad$ $\|\mathbf{v}_4\|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$

$$\cos(\alpha_{34})=\frac{\mathbf{v}_3\bullet\mathbf{v}_4}{\|\mathbf{v}_3\|.\|\mathbf{v}_4\|}=\frac{2.\sqrt{3}}{2.2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha_{34}=\text{arc cos }(\sqrt{3}/2)=30°$. Per tant, $\boxed{\alpha_{34}=30°}$

TERCER ANGLE: $\mathbf{v}_4=(\sqrt{3},\ 1)$ i $\mathbf{v}_5=(-\sqrt{3},\ 1)$

$\mathbf{v}_4\bullet\mathbf{v}_5=\sqrt{3}.(-\sqrt{3})+1.1=-3+1=-2$

$\|\mathbf{v}_4\|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$ $\qquad$ $\|\mathbf{v}_5\|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$

$$\cos(\alpha_{45})=\frac{\mathbf{v}_4\bullet\mathbf{v}_5}{\|\mathbf{v}_4\|.\|\mathbf{v}_5\|}=\frac{-2}{2.2}=\frac{-1}{2}$$

α_{45}=arc cos (-1/2)=120°. Per tant, $\boxed{\alpha_{45}=120°}$

Observem que $\boxed{\alpha_{12}=2.\alpha_{34}}$, però que $\boxed{\alpha_{12}=(\alpha_{45})/2}$.

28. Donat el triangle de vèrtexs A(4,3), B(6,-2) i C(-11,-3), prova per mitjà de la fórmula de l'angle entre dos vectors, que es tracta d'un triangle rectangle. Què passaria si els tres vèrtexs fossin A'(5,3), B'(-1,1) i C'(-10,-2)? Fes les dues gràfiques.

Solució. Si fem la figura veurem que, si hi ha un angle recte, aquest haurà de ser el A, que serà determinat pels vectors,

$\overrightarrow{AB}$=(6-4, -2-3)=(2,-5) $\overrightarrow{AC}$=(-11-4, -3-3)=(-15,-6)

El seu producte escalar és,

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=(2,-5)\bullet(-15,-6)=2.(-15)+(-5).(-6)=-30+30=0$$

Com que és nul aquest producte escalar, ja podríem dir que són perpendiculars i, per tant, l'angle en A és recte. No obstant això, farem tot el procés, trobant les normes i el seu producte:

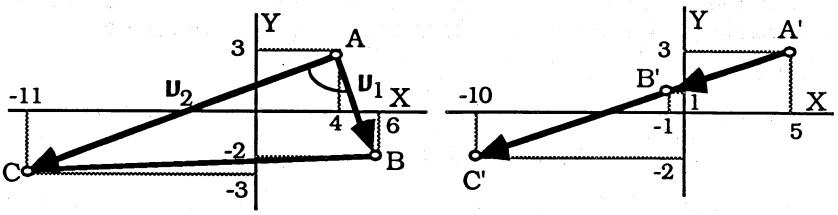
$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$ $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-15)^2+(-6)^2}=\sqrt{261}$

$$\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{29}.\sqrt{261}=\sqrt{7569}=87$$

L'angle serà

$$\cos(\widehat{A})=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{0}{87}=0 \Rightarrow \widehat{A}=\text{arc cos}(0)=90°$$

Per tant, el triangle serà rectangle, com podem veure en la primera figura :



Quant a la figura de la dreta veiem que els nous punts A', B' i C' estan alineats, doncs

$\overrightarrow{A'B'}$=(-1-5, 1-3)=(-6,-2) $\overrightarrow{A'C'}$=(-10-5, -2-3)=(-15,-5)

El producte escalar és

$$\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}=(-6,-2)\bullet(-15,-5)=(-6).(-15)+(-2).(-5)=90+10=100$$

Les dues normes i el seu producte són

$$\|\overrightarrow{A'B'}\|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{40} \qquad \|\overrightarrow{A'C'}\|=\sqrt{(-15)^2+(-5)^2}=\sqrt{250}$$

$$\|\overrightarrow{A'B'}\|.\|\overrightarrow{A'C'}\|=\sqrt{40}.\sqrt{250}=\sqrt{10.000}=100$$

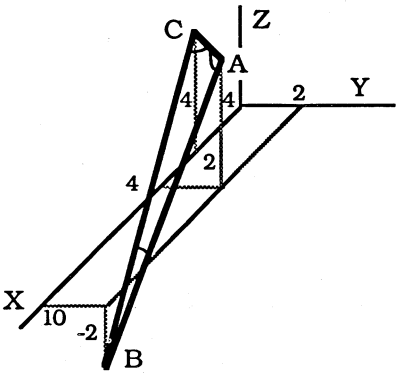
L'angle és

$$\cos(\widehat{A'})=\frac{\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}}{\|\overrightarrow{A'B'}\|.\|\overrightarrow{A'C'}\|}=\frac{100}{100}=1 \quad\Rightarrow\quad \widehat{A'}=\text{arc}\cos(1)=0°$$

El resultat és ben lògic, ja que, com hem vist gràficament, els vectors no formaven triangle: estaven alineats.

29. És agut o obtús l'angle A del triangle de vèrtexs A(4,2,4), B(10,2,-2) i C(2,0,4)? I els angles B i C? Pel fet que el triangle és en l'espai, la suma d'aquests tres angles també serà 180°?

Solució. Encara que no és necessària, la figura ens podrà servir per a veure que en estar el triangle contingut en un pla, la suma dels seus angles interiors haurà de valer 180°:



De cada vèrtex, trobarem els vectors, el producte escalar, el producte de les normes i, finalment, l'angle que formen.

VÈRTEX A.

$$\overrightarrow{AB}=(10-4,\ 2-2,\ -2-4)=(6,0,-6) \qquad \overrightarrow{AC}=(2-4,\ 0-2,\ 4-4)=(-2,-2,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=6.(-2)+0.(-2)+(-6).0=-12+0+0=-12$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{6^2+0^2+(-6)^2}=\sqrt{72} \qquad \|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{8}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{72}.\sqrt{8}=\sqrt{576}=24$$

$$\cos(\widehat{A})=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{-12}{24}=-0'5 \quad\Rightarrow\quad \widehat{A}=\text{arc}\cos(-0'5)=\boxed{120°}$$

Aquest angle serà *obtús*, perquè és més gran que 90°.

VÈRTEX B.

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(-6,0,6)$ $\overrightarrow{BC}=(2-10,\ 0-2,\ 4+2)=(-8,-2,6)$

$$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=(-6).(-8)+0.(-2)+6.6=48+0+36=84$$

$\|\overrightarrow{BA}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{72}$ $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-8)^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{104}$

$$\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{72}.\sqrt{104}=\sqrt{7488}\approx 86'5332$$

$$\cos(\hat{B})=\frac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|}\approx\frac{84}{86'5332}\approx 0'9707 \Rightarrow \hat{B}\approx \boxed{13°54'}$$

Veiem que l'angle és *agut*, ja que és inferior a un de recte.

VÈRTEX C.

$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$ $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=(8,2,-6)$

$$\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=2.8+2.2+0.(-6)=16+4+0=20$$

$\|\overrightarrow{CA}\|=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{8}$ $\|\overrightarrow{CB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{104}$

$$\|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{8}.\sqrt{104}=\sqrt{832}\approx 28'8444$$

$$\cos(\hat{C})=\frac{\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\|}\approx\frac{20}{28'8444}\approx 0'6933 \Rightarrow \hat{C}\approx \boxed{46°6'}$$

També és *agut*, perquè és més petit que 90°.

Comprovem que la suma dels tres angles és de 180°,

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=120°+13°54'+46°6'=179°60'=180°.$$

30. A partir de la fórmula de l'angle entre dos vectors, demostra que, si els vectors $\mathbf{v}=(a,b,c)$ i $\mathbf{w}=(m,n,p)$ són paral·lels, llavors les seves components hauran de ser proporcionals. Comprova-ho per $\mathbf{v}=(14,-42,63)$ i $\mathbf{w}=(-8,24,-36)$.

Solució. Si els vectors són paral·lels, l'angle que formen serà de 0°. Substituint en la definició del producte escalar,

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=\|\mathbf{v}\|.\|\mathbf{w}\|.\cos(0°)=\|\mathbf{v}\|.\|\mathbf{w}\|.1 \Rightarrow \mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=\|\mathbf{v}\|.\|\mathbf{w}\|$$

Expressant-ho en funció de les components,

$$a.m+b.n+c.p=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{m^2+n^2+p^2}$$

Elevant cada costat al quadrat,

$$(a.m+b.n+c.p)^2=(a^2+b^2+c^2).(m^2+n^2+p^2)$$

Desenvolupant el quadrat i multiplicant,

$$a^2.m^2+b^2.n^2+c^2.p^2+2.a.m.b.n+2.a.m.c.p+2.b.n.c.p=$$
$$=a^2.m^2+a^2.n^2+a^2.p^2+b^2.m^2+b^2.n^2+b^2.p^2+c^2.m^2+c^2.n^2+c^2.p^2$$

Simplificant,

$$2.a.m.b.n+2.a.m.c.p+2.b.n.c.p=$$
$$=a^2.n^2+a^2.p^2+b^2.m^2+b^2.p^2+c^2.m^2+c^2.n^2$$

Passant al primer costat i canviant els signes,

$$a^2.n^2+a^2.p^2+b^2.m^2+b^2.p^2+c^2.m^2+c^2.n^2-$$
$$-2.a.m.b.n-2.a.m.c.p-2.b.n.c.p=0$$

Agrupant els termes per poder formar quadrats perfectes,

$$(a^2.n^2-2.a.m.b.n+b^2.m^2)+(a^2.p^2-2.a.m.c.p+c^2.m^2)+$$
$$+(b^2.p^2-2.b.n.c.p+c^2.n^2)=0$$

Ens quedarà, doncs,

$$(a.n-b.m)^2+(a.p-c.m)^2+(b.p-c.n)^2=0$$

Ara bé, si la suma de quadrats ha de ser nul·la, voldrà dir que tots els termes seran nuls,

$$a.n-b.m=0 \quad , \quad a.p-c.m=0 \quad , \quad b.p-c.n=0$$

Per tant, $a.n=b.m$, $a.p=c.m$, $b.p=c.n$.

Expressant-ho en forma de fracció,

$$a/m=b/n \quad , \quad a/m=c/p \quad , \quad b/n=c/p$$

Concloem que si els vectors $\mathbf{v}=(a,b,c)$ i $\mathbf{w}=(m,n,p)$ són paral·lels, llavors les components hauran de ser proporcionals:

$$\boxed{\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}}$$

En el cas particular dels vectors $\mathbf{v}=(14,-42,63)$ i $\mathbf{w}=(-8,24,-36)$ tindrem:

$$14/(-8)=-1'75 \quad , \quad -42/24=-1'75 \quad , \quad 63/(-36)=-1'75$$

Com que són iguals aquestes proporcions, podem dir que són paral·lels. Es pot comprovar-ho trobant l'angle que formen. S'obtindrà:

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=3388 \quad , \quad \|\mathbf{v}\|=77 \quad , \quad \|\mathbf{w}\|=44 \quad , \quad \cos(\alpha)=1 \quad , \quad \alpha=0°.$$

31. Calcula en graus, minuts i segons els tres angles interiors del triangle que té per vèrtexs A(1,2,1), B(3,-1,7) i C(7,4,-2). Quina classe de triangle és? Justifica-ho observant els seus costats.

Solució. Com que el problema és similar al 29, posarem només els resultats dels passos més importants.

ANGLE A.

$\overrightarrow{AB}=(2,-3,6)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}=(6,2,-3)$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-12$

$\|\overrightarrow{AB}\|=7$ $\quad$ $\|\overrightarrow{AC}\|=7$ $\quad$ $\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|=49$

$\cos(\hat{A})=-12/49 \quad \Rightarrow \quad \hat{A}=\boxed{104°10'32''}$

ANGLE B.

$\overrightarrow{BA}=(-2,3,-6)$ $\overrightarrow{BC}=(4,5,-9)$ $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=61$

$\|\overrightarrow{BA}\|=7$ $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{122}$ $\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|=7.\sqrt{122}$

$\cos(\hat{B})=61/[7.\sqrt{122}] \Rightarrow \hat{B}=\boxed{37°54'43''}$

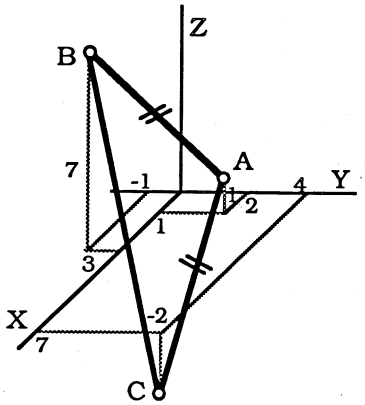
ANGLE C.

$\overrightarrow{CA}=(-6,-2,3)$ $\overrightarrow{CB}=(-4,-5,9)$ $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=61$

$\|\overrightarrow{CA}\|=7$ $\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{122}$ $\|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\|=7.\sqrt{122}$

$\cos(\hat{C})=61/[7.\sqrt{122}] \Rightarrow \hat{C}=\boxed{37°54'43''}$

Com que hi ha dos angles iguals, es tractarà d'un triangle *isòsceles*. Dibuixem la figura:



S'observa clarament que els dos costats AB i AC també són iguals, ja que les seves longituds o normes són totes dues iguals a 7.

32. En l'espai dibuixa un cub d'aresta a, en l'octant positiu i en el qual un dels vèrtexs estigui en l'origen de coordenades. Determina l'angle format per dues diagonals interiors d'aquest cub.

Solució. Si observem el cub de la plana següent, veurem que les diagonals OG i CD formen un angle que haurem de determinar. Si l'aresta del cub és a, llavors els vectors dels seus costats són,

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FG}=a.\mathbf{i}=a.(1,0,0)=(a,0,0)$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EG}=a.\mathbf{j}=a.(0,1,0)=(0,a,0)$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DG}=a.\mathbf{k}=a.(0,0,1)=(0,0,a)$$

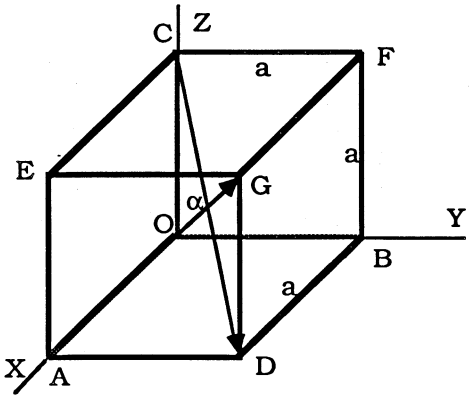
Ara bé, ens interessa trobar els vectors de les diagonals OG i CD, en funció de les components.

Per això farem les sumes vectorials,

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=(a,0,0)+(0,a,0)+(0,0,a)=(a,a,a)$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GD}=(a,0,0)+(0,a,0)+(0,0,-a)=(a,a,-a)$$

La figura és:



El producte escalar dels vectors diagonals és

$$\overrightarrow{OG}\bullet\overrightarrow{CD}=(a,a,a)\bullet(a,a,-a)=a^2+a^2-a^2=a^2$$

Les normes i el seus producte són

$$\|\overrightarrow{OG}\|=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3.a^2}=\sqrt{3}.a \qquad \|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{a^2+a^2+(-a)^2}=\sqrt{3.a^2}=\sqrt{3}.a$$

$$\|\overrightarrow{OG}\|.\|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{3}.a.\sqrt{3}.a=3.a^2$$

L'angle que formen serà

$$\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{OG}\bullet\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{OG}\|.\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{a^2}{3.a^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha=\text{arc cos}\left(\frac{1}{3}\right)=\boxed{70°31'43''}$$

Producte vectorial

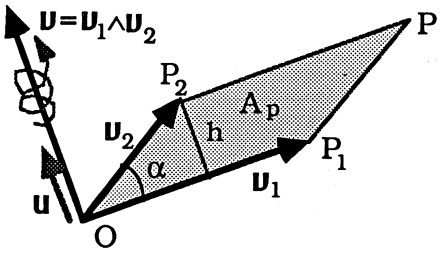
33. Donats els vectors $\mathbf{v}_1=2.\mathbf{i}-3.\mathbf{j}-\mathbf{k}$ i $\mathbf{v}_2=\mathbf{i}+4.\mathbf{j}-2.\mathbf{k}$, troba el vector donat per $\mathbf{w}=3.(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)-2.(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_1)$. Es podrà posar en combinació lineal de $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$?

Solució. Primer de tot calcularem els productes vectorials, aplicant determinants,

$$\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=(6.\mathbf{i}+8.\mathbf{k}-\mathbf{j})-(-3.\mathbf{k}-4.\mathbf{i}-4.\mathbf{j})=10.\mathbf{i}+3.\mathbf{j}+11.\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_1=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=(-4.\mathbf{i}-3.\mathbf{k}-4.\mathbf{j})-(8.\mathbf{k}+6.\mathbf{i}-\mathbf{j})=-10.\mathbf{i}-3.\mathbf{j}-11.\mathbf{k}$$

Si comparem els dos resultats anteriors, veurem que el producte vectorial és anticommutatiu. Recordem la noció de producte vectorial entre dos vectors:



Si en la figura anterior s'hagués trobat $\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_1$, la regla del tornavís hauria fet que el vector tingués la mateixa direcció, però de sentit contrari (cap a baix).

Dels vectors obtinguts $\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=(10,3,11)$ i $\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_1=(-10,-3,-11)$, calculem ara el vector

$$\mathbf{w}=3.(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)-2.(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_1)=3.(10,3,11)-2.(-10,-3,-11)=5.(10,3,11)$$

Per tant, el vector $\mathbf{w}$ serà $\boxed{\mathbf{w}=(50,15,55)}$

Ens pregunten si el vector anterior $\mathbf{w}$ es podrà posar en combinació lineal dels vectors $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. La resposta és clarament no, perquè, si mirem la figura veurem que el primer està en la direcció perpendicular al pla format pels altres dos.

Fem-ho, malgrat tot, partint de la definició de combinació lineal,

$$\mathbf{w}=c.l.(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \Leftrightarrow \exists a,b\in R \ / \ \mathbf{w}=a.\mathbf{v}_1+b.\mathbf{v}_2$$

Substituint per les seves components,

$$(50,15,55)=a.(2,-3,-1)+b.(1,4,-2)=(2.a+b,\ -3.a+4.b,\ -a-2.b)$$

Si identifiquem components tindrem el sistema

$$\begin{cases} 2.a \quad +b=50 & (1) \\ -3.a+4.b=15 & (2) \\ \quad -a-2.b=55 & (3) \end{cases}$$

Estudiarem aquest sistema pel teorema de Rouché, trobant la matriu conjunta i triangularitzant-la per la regla del pivot,

$$M=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 50 \\ -3 & 4 & 15 \\ -1 & -2 & 55 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 50 \\ 0 & 11 & 180 \\ 0 & -3 & 160 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 50 \\ 0 & 11 & 180 \\ 0 & 0 & 2300 \end{array}\right)$$

Observem que $\rho(A)\neq\rho(M)$, ja que el rang de la matriu dels coeficients és 2 i el de la matriu ampliada és 3. Això vol dir que el sistema és incompatible, no té solució.

Per tant, ens resulta que $\mathbf{w}\neq c.l.(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$.

34. Determina l'angle α_{12} que formen els dos vectors $\mathbf{v}_1=(4,2,4)$ i $\mathbf{v}_2=(-6,6,3)$, fent servir la definició de producte vectorial. Com seran els vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$? Comprova-ho amb el producte escalar.

Solució. Sabem que $\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|=\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\sin(\alpha_{12})$. És a dir, la norma del producte vectorial és igual al producte de les normes pel sinus de l'angle que formen.

Trobem, doncs, el producte vectorial i les normes anteriors,

$$\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ -6 & 6 & 3 \end{vmatrix}=(6.\mathbf{i}+24.\mathbf{k}-24.\mathbf{j})-(-12.\mathbf{k}+24.\mathbf{i}+12.\mathbf{j})=-18.\mathbf{i}-36.\mathbf{j}+36.\mathbf{k}$$

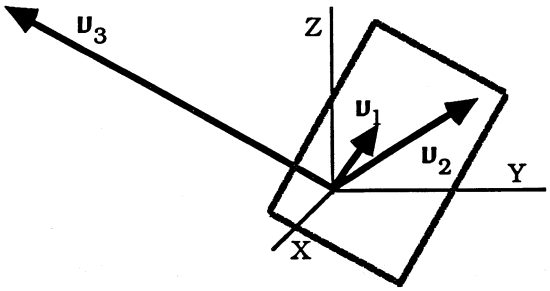
$$\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|=\sqrt{(-18)^2+(-36)^2+36^2}=\sqrt{324+1296+1296}=\sqrt{2916}=54$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=\sqrt{36}=6 \qquad \|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{(-6)^2+6^2+3^2}=\sqrt{81}=9$$

Calculem l'angle que formaran $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$,

$$\sin(\alpha_{12})=\frac{\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|}=\frac{54}{6.9}=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{12}=\text{arc sin } 1=\boxed{90°}$$

Observant els vectors $\mathbf{v}_1=(4,2,4)$, $\mathbf{v}_2=(-6,6,3)$ i $\mathbf{v}_3=(-18,-36,36)$, arribarem a la conclusió que són mútuament perpendiculars perquè, com acabem de veure, els dos primers formen un angle de 90° i a més el 3r és perpendicular tant al 1r com al 2n, ja que és el seu producte vectorial.



De la figura anterior no ens queda clar que els vectors siguin perpendiculars, perquè es veu en perspectiva.

Podem fer la comprovació amb els tres productes escalars,

$$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=(4,2,4)\bullet(-6,6,3)=4.(-6)+2.6+4.3=-24+12+12=0$$

$$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_3=(4,2,4)\bullet(-18,-36,36)=-72-72+144=0$$

$$\mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_3=(-6,6,3)\bullet(-18,-36,36)=108-216+108=0$$

Com que són nuls tots tres productes escalars, voldrà dir que els tres vectors són perpendiculars entre si, igual que els tres eixos coordenats X, Y i Z.

35. Determina un vector unitari $\mathbf{u}$ perpendicular al pla format pels vectors $\mathbf{v}_1=2.\mathbf{i}-6.\mathbf{j}-3.\mathbf{k}$ i $\mathbf{v}_2=4.\mathbf{i}+3.\mathbf{j}-\mathbf{k}$, trobant primer la norma del seu producte vectorial. Comprova que, efectivament, $\mathbf{u}$ és un vector unitari.

Solució. Pels vectors donats $\mathbf{v}_1=(2,-6,-3)$ i $\mathbf{v}_2=(4,3,-1)$, trobem el seu producte vectorial,

$$\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(6.\mathbf{i}+6.\mathbf{k}-12.\mathbf{j})-(-24.\mathbf{k}-9.\mathbf{i}-2.\mathbf{j})=15.\mathbf{i}-10.\mathbf{j}+30.\mathbf{k}$$

La seva norma és

$$\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|=\sqrt{15^2+(-10)^2+30^2}=\sqrt{225+100+900}=\sqrt{1225}=35$$

Com que $\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$ és perpendicular tant a $\mathbf{v}_1$ com a $\mathbf{v}_2$, el vector $\mathbf{u}$ que cerquem tindrà la direcció del producte vectorial. Si volem que sigui unitari, l'haurem de dividir per la seva norma,

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|}=\frac{15.\mathbf{i}-10.\mathbf{j}+30.\mathbf{k}}{35}=\frac{3.\mathbf{i}-2.\mathbf{j}+6.\mathbf{k}}{7} \qquad \boxed{\mathbf{u}=\frac{3}{7}.\mathbf{i}-\frac{2}{7}.\mathbf{j}+\frac{6}{7}.\mathbf{k}}$$

Comprovem que $\mathbf{u}$ és efectivament un vector unitari,

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{-2}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{49}+\frac{4}{49}+\frac{36}{49}}=\sqrt{\frac{49}{49}}=\sqrt{1}=1$$

La norma ens ha donat la unitat. Precisament per això es diu que és un vector unitari.

36. Donats els vectors $\mathbf{a}=(3,-1,-2)$ i $\mathbf{b}=(1,2,-1)$, determina els productes vectorials $\mathbf{v}_1=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2=(2.\mathbf{a}+\mathbf{b})\wedge\mathbf{b}$ i $\mathbf{v}_3=(2.\mathbf{a}-\mathbf{b})\wedge(2.\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Justifica que tenen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ el mateix sentit i direcció. En quin tipus de successió estan?

Solució. Trobem cadascun dels tres productes vectorials

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(\mathbf{i}+6.\mathbf{k}-2.\mathbf{j})-(-\mathbf{k}-4.\mathbf{i}-3.\mathbf{j})=5.\mathbf{i}+\mathbf{j}+7.\mathbf{k}=\boxed{(5,1,7)}$$

Com que $2.\mathbf{a}+\mathbf{b}=2.(3,-1,-2)+(1,2,-1)=(6,-2,-4)+(1,2,-1)=(7,0,-5)$, el nou producte vectorial serà

$$\mathbf{v}_2=(2.\mathbf{a}+\mathbf{b})\wedge\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(14.\mathbf{k}-5.\mathbf{j})-(-10.\mathbf{i}-7.\mathbf{j})=\boxed{(10,2,14)}$$

Com que $2.\mathbf{a}-\mathbf{b}=2.(3,-1,-2)-(1,2,-1)=(6,-2,-4)-(1,2,-1)=(5,-4,-3)$, ens quedarà:

$$\mathbf{v}_3=(2.\mathbf{a}-\mathbf{b})\wedge(2.\mathbf{a}+\mathbf{b})=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -4 & -3 \\ 7 & 0 & -5 \end{vmatrix}=(20.\mathbf{i}-21.\mathbf{j})-(-28.\mathbf{k}-25.\mathbf{j})=\boxed{(20,4,28)}$$

En resum, $\mathbf{v}_1=(5,1,7)$, $\mathbf{v}_2=(10,2,14)$ i $\mathbf{v}_3=(20,4,28)$. Observem que estan en progressió geomètrica de raó 2, ja que cada vector és igual a l'anterior multiplicat per aquesta constant,

$$\mathbf{v}_2=2.\mathbf{v}_1 \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_3=2.\mathbf{v}_2=4.\mathbf{v}_1$$

No calia fer el càlcul dels determinants per arribar a aquesta conclusió. Ho podíem haver vist directament, aplicant les propietats del producte vectorial,

$$\mathbf{v}_2=(2.\mathbf{a}+\mathbf{b})\wedge\mathbf{b}=(2.\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}+\mathbf{b}\wedge\mathbf{b}=2.(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})+\mathbf{0}=2.\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3=(2.\mathbf{a}-\mathbf{b})\wedge(2.\mathbf{a}+\mathbf{b})=(2.\mathbf{a})\wedge(2.\mathbf{a})+(2.\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}+(-\mathbf{b})\wedge(2.\mathbf{a})+(-\mathbf{b})\wedge\mathbf{b}=$$
$$=\mathbf{0}+2.(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})-2.(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})-\mathbf{0}=2.(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})+2.(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})=4.(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})=4.\mathbf{v}_1.$$

37. Les normes de dos vectors $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ són, respectivament, 10 i 2 unitats, i el seu producte escalar és igual a la suma d'aquestes dues normes. Quina és la norma del producte vectorial?

Solució. Com que tenim $\|\mathbf{v}_1\|=10$, $\|\mathbf{v}_2\|=2$ i $\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=10+2=12$, podem fer servir la definició de producte escalar

$$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\cos(\alpha) \quad , \quad 12=10.2.\cos(\alpha) \quad , \quad \cos(\alpha)=0'6$$

També podem trobar l'angle que formen, encara que no sigui ben bé necessari,

$$\alpha=\text{arc}\ \cos(0'6)=53°7'48''$$

A partir d'aquí podem calcular la norma del producte vectorial, que és definida per

$$\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|=\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_2\|.\sin(\alpha)=10.2.\sin(53°7'48'')=20.0'8=\boxed{16}.$$

Àrea d'un triangle

38. Descomponent-lo en tres triangles, troba l'àrea del pentàgon de vèrtexs A(2,7), B(5,1), C(2,-4), D(-5,-2) i E(-2,5).

Solució. Com es pot veure a la figura de la plana següent, hem descompost el triangle donat en els tres triangles ABC, ACD i ADE. Per trobar cadascuna d'aquestes àrees farem servir la definició de producte vectorial, on la seva norma és l'àrea del paral·lelogram format pels dos vectors.

Per tant, l'àrea del triangle serà la meitat d'aquesta norma, que és donada en funció d'un determinant. Notem que sempre haurem d'agafar el seu valor absolut, encara que no li hàgim posat, ja que l'àrea és sempre positiva.

ÀREA DEL TRIANGLE ABC. A(2,7) B(5,1) C(2,-4)

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}\|=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 1\end{vmatrix}=\frac{-33}{2} \qquad S_{ABC}=16'5$$

ÀREA DEL TRIANGLE ACD. A(2,7) C(2,-4) D(-5,-2)

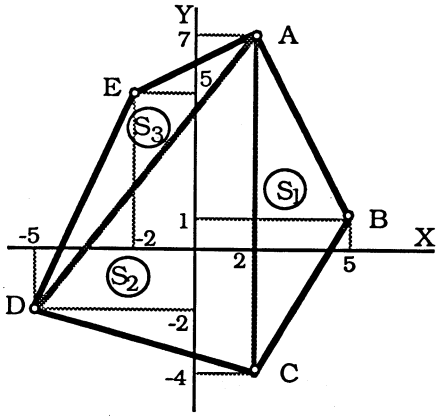
$$S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\|=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_C & y_C & 1\\ x_D & y_D & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ -5 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{-77}{2} \qquad S_{ACD}=38'5$$

ÀREA DEL TRIANGLE ADE. A(2,7) D(-5,-2) E(-2,5)

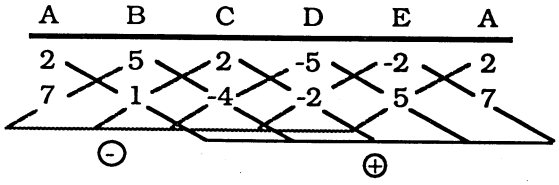
$$S_{ADE}=\frac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}\|=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_D & y_D & 1\\ x_E & y_E & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1\\ -5 & -2 & 1\\ -2 & 5 & 1\end{vmatrix}=-11 \qquad S_{ADE}=11$$

Com podem veure a la figura, l'àrea del pentàgon serà la suma de les tres anteriors,

$$S_p=S_{ABC}+S_{ACD}+S_{ADE}=16'5+38'5+11=\boxed{66}$$



Per calcular directament l'àrea de qualsevol polígon tancat en el pla, podem fer servir el següent mètode, similar al càlcul d'un determinant per la regla de la "columna agregativa".



Fixem-nos que hem tornat a afegir la columna del vèrtex A.

S'hauran de multiplicar els números en diagonal i després sumar-los. Obtindrem dos tipus de productes: els positius P, dirigits cap a la dreta, i els negatius N, dirigits cap a l'esquerra. L'àrea del polígon serà la semidiferència d'aquests dos tipus de productes, en valor absolut: Sp=|(P-N)/2|.

En el nostre cas,

P=2.1+5.(-4)+2.(-2)+(-5).5+(-2).7=2-20-4-25-14=-61

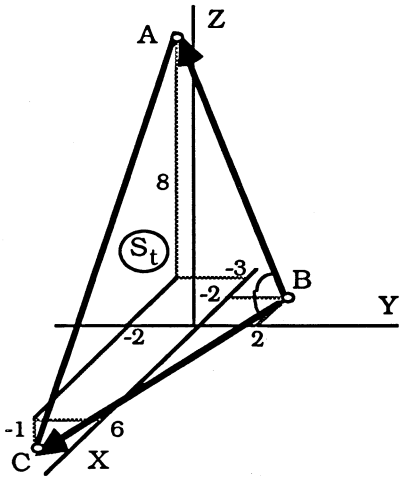
N=7.5+1.2+(-4).(-5)+(-2).(-2)+5.2=35+2+20+4+10=71

Per tant, Sp=|(-61-71)/2|=|-132/2|=|-66|=$\boxed{66}$

Coincideix amb el que hem trobat abans, però és més fàcil!

39. Partim del triangle rectangle de vèrtexs A(-3,-2,8), B(-2,2,0) i C(6,-2,-1). Calcula la seva àrea a partir del producte vectorial. Comprova després que es tracta d'un triangle rectangle. Quin és l'angle recte? Calcula les longituds dels dos catets i troba directament l'àrea d'aquest triangle.

Solució. Fem primer la figura, on l'angle recte aparenta ser el B. Dibuixem-hi també dos vectors que surten d'aquest vèrtex,



Les components dels dos vectors són:

$\overrightarrow{BA}$=(-3+2, -2-2, 8-0)=(-1,-4,8) $\overrightarrow{BC}$=(6+2, -2-2, -1-0)=(8,-4,-1)

Trobem ara el seu producte vectorial,

$$\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -4 & 8 \\ 8 & -4 & -1 \end{vmatrix}=(4.i+4.k+64.j)-(-32.k-32.i+j)=(36,63,36)$$

La seva norma és,

$$\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{36^2+63^2+36^2}=\sqrt{1296+3969+1296}=\sqrt{6561}=81$$

Sabem que l'àrea del triangle és precisament la meitat,

$$S_t=(1/2).\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|=81/2=40'5 \qquad \boxed{S_t=40'5}$$

Per estudiar si B és un angle recte podem fer servir el producte escalar,

$$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=(-1,-4,8)\bullet(8,-4,-1)=(-1).8+(-4).(-4)+8.(-1)=-8+16-8=0$$

Com que ens ha donat 0 voldrà dir que B=90°, és a dir, és un angle recte, i així ABC serà un triangle rectangle.

Calculem la longitud dels catets,

$$\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+8^2}=\sqrt{1+16+64}=\sqrt{81}=9$$

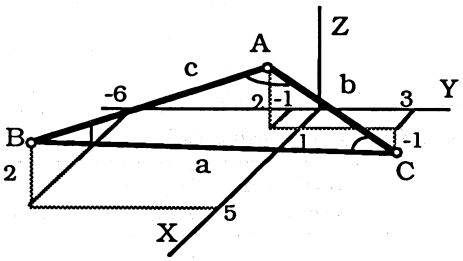
$$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(8)^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{64+16+1}=\sqrt{81}=9$$

Com que són iguals les longituds voldrà dir que es tracta d'un $\boxed{\text{triangle rectangle isòsceles}}$. Comprovem la seva àrea:

$$S_t=\frac{b.h}{2}=\frac{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|}{2}=\frac{9.9}{2}=\frac{81}{2}=40'5$$

40. Troba els angles, els costats i comprova el teorema del sinus, a/sin(A)=b/sin(B)=c/sin(C), pel triangle ABC on A(1,-1,2), B(5,-6,2) i C(1,3,-1).

Solució. Dibuixarem la figura en l'espai per calcular després més fàcilment els angles i els vectors dels seus costats,



Trobem els *angles interiors*, el primer per la fórmula del producte escalar, el segon per la del vectorial i el tercer pel mètode que vulguis.

VÈRTEX A . A(1,-1,2) B(5,-6,2) C(1,3,-1)

$$\overrightarrow{AB}=(5-1,\ -6+1,\ 2-2)=(4,-5,0) \qquad \overrightarrow{AC}=(1-1,\ 3+1,\ -1-2)=(0,4,-3)$$

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=(4,-5,0)\bullet(0,4,-3)=4.0+(-5).4+0.(-3)=-20$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4^2+(-5)^2+0^2}=\sqrt{41} \qquad \|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\cos(\hat{A})=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{-20}{5.\sqrt{41}}=\frac{-4}{\sqrt{41}}\approx-0'6246\ldots \Rightarrow \boxed{\hat{A}=128°39'36''}$$

VÈRTEX B. B(5,-6,2) A(1,-1,2) C(1,3,-1) (Pel producte vectorial)

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(-4,5,0) \qquad \overrightarrow{BC}=(1-5,\ 3+6,\ -1-2)=(-4,9,-3)$$

$$\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix}=(-15.i-36.k)-(-20.k+12.j)=(-15,-12,-16)$$

$$\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-15)^2+(-12)^2+(-16)^2}=\sqrt{225+144+256}=\sqrt{625}=25$$

$$\|\overrightarrow{BA}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{41} \qquad \|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-4)^2+9^2+(-3)^2}=\sqrt{16+81+9}=\sqrt{106}$$

$$\sin(\hat{B})=\frac{\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{25}{\sqrt{41}.\sqrt{106}}\approx0'3792\ldots \Rightarrow \boxed{\hat{B}=22°17'8''}$$

VÈRTEX C. C(1,3,-1) A(1,-1,2) B(5,-6,2) Ha de donar

$$\overrightarrow{CA}=(0,-4,3) \qquad \overrightarrow{CB}=(4,-9,3) \qquad \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=45 \qquad \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=(15,12,16)$$

$$\|\overrightarrow{CA}\|=5 \qquad \|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{106} \qquad \|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\|=25$$

$$\cos(\hat{C})=\frac{9}{\sqrt{106}},\quad \sin(\hat{C})=\frac{5}{\sqrt{106}} \quad \Rightarrow \boxed{\hat{C}=29°3'16''}$$

Podem comprovar que els resultats són correctes fent la suma dels tres angles

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=128°39'36''+22°17'8''+29°3'16''=179°59'60''=180°$$

Comprovem ara el *teorema del sinus*,

$$a/\sin(\hat{A})=\sqrt{106}/\sin(128°39'36'')\approx10'2956/0'7808\approx13'18$$

$$b/\sin(\hat{B})=5/\sin(22°17'8'')\approx5/0'3792\approx13'18$$

$$c/\sin(\hat{C})=\sqrt{41}/\sin(29°3'16'')\approx6'4031/0'4856\approx13'18$$

Per tant, es verifica el teorema del sinus:

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}}$$

És clar que aquest teorema es verifica per a qualsevol triangle, ja que, com que l'àrea ve donada pel semiproducte de dos costats pel sinus de l'angle que formen, tenim

$$S_t=\frac{b.c.\sin(\hat{A})}{2} \qquad S_t=\frac{c.a.\sin(\hat{B})}{2} \qquad S_t=\frac{a.b.\sin(\hat{C})}{2}$$

Trobant el valor de D=(a.b.c)/(2.St) en cadascuna resultarà el teorema del sinus. Com a curiositat diem que D és el diàmetre de la circumferència circumscrita al triangle.

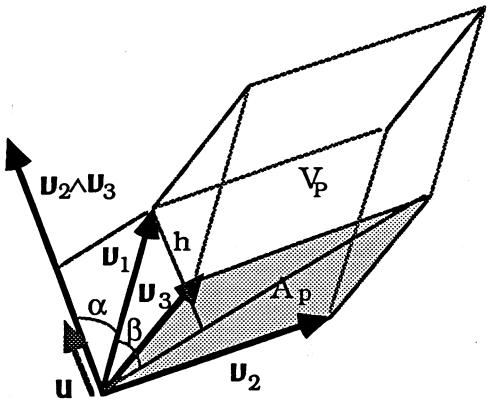
Producte mixt

41. Si $\mathbf{v}_1=(2,-3,0)$, $\mathbf{v}_2=(1,1,-1)$ i $\mathbf{v}_3=(3,0,-1)$, calcula el producte mixt $PM=\mathbf{v}_1\bullet(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)$ fent els productes vectorial i escalar exigits. Comprova després que aquest producte mixt PM equival al determinant que té per files els vectors donats, amb el seu ordre respectiu.

Solució. El producte mixt de tres vectors és una combinació dels productes escalar i vectorial

$$PM=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=\mathbf{v}_1\bullet(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)$$

El seu significat geomètric és el volum del paral·lelepípede que té per arestes els tres vectors. Com veiem en la figura, l'àrea marcada amb puntets és, com ja sabem, la norma del producte vectorial, mentre que la h és la projecció del primer vector sobre el producte vectorial dels altres dos:



En el nostre cas tenim $\mathbf{v}_1=(2,-3,0)$, $\mathbf{v}_2=(1,1,-1)$ i $\mathbf{v}_3=(3,0,1)$. El producte vectorial dels dos últims és

$$\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-\mathbf{i}-3.\mathbf{j})-(3.\mathbf{k}-\mathbf{j})=-\mathbf{i}-2.\mathbf{j}-3.\mathbf{k}=(-1,-2,-3)$$

Fent el producte escalar amb el primer,

$$\mathbf{v}_1\bullet(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)=(2,-3,0)\bullet(-1,-2,-3)=2.(-1)+(-3).(-2)+0.(-3)=4$$

Per tant, el producte mixt és $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=4$, $\boxed{PM=4}$

Comprovem-ho amb el determinant que té per termes les components dels vectors

$$PM=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-2+0+9)-(0+0+3)=7-3=4$$

42. Aplicant les propietats dels determinants, demostra que el producte mixt de tres vectors coplanaris ha de ser necessàriament nul. Seran coplanaris els vectors **a**=(2,-1,5), **b**=(3,7,8) i **c**(-1,9,-4)? Pertanyeran al mateix pla els quatre punts de l'espai A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1) i D(2,1,3)?

Solució. Siguin els vectors de l'espai **a**=(a_1,b_1,c_1), **b**=(a_2,b_2,c_2) i **c**=(a_3,b_3,c_3). El seu producte mixt és

$$PM=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

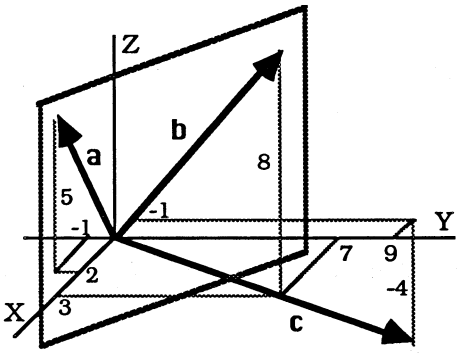
Si els tres vectors són coplanaris, és a dir, si són en el mateix pla, llavors un d'ells es pot posar com a combinació lineal dels altres dos. Per exemple **c**=m.**a**+n.**b** on m,n∈R.

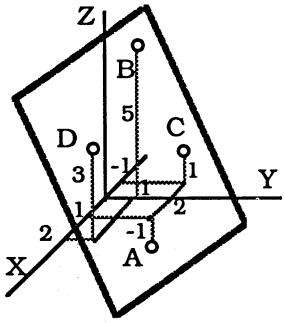
Això voldrà dir que la fila f_3 és combinació lineal de la f_1 i la f_2. Doncs bé, si tenim en compte les propietats dels determinants, aquest haurà de ser nul. Per tant, PM=0.

Siguin ara els tres vectors **a**=(2,-1,5), **b**=(3,7,8) i **c**=(-1,9,-4). Per saber si són coplanaris, trobarem el seu producte mixt,

$$PM=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ -1 & 9 & -4 \end{vmatrix}=(-56+135+8)-(-35+144+12)=87-121=-34$$

Com que PM≠0 voldrà dir que *els tres vectors no són coplanaris*, com es pot veure si en fem la representació gràfica:





Per al cas dels quatre punts A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1) i D(2,1,3), trobarem primer els vectors

$\overrightarrow{AB}$=(0-1, 1-2, 5+1)=(-1,-1,6) $\overrightarrow{AC}$=(-1-1, 2-2, 1+1)=(-2,0,2)

$\overrightarrow{AD}$=(2-1, 1-2, 3+1)=(1,-1,4)

Com que clarament el 3r és la diferència del 1r i el 2n, segur que amb el determinant obtindrem PM=0. Per tant, els tres vectors seran en un mateix pla, i així *els punts seran coplanaris*.

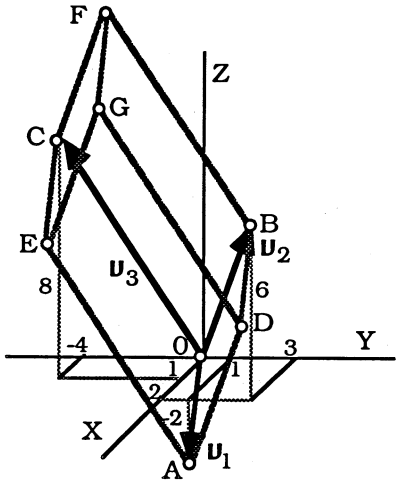
Volum del paral·lelepípede i del tetraedre

43. Calcula el volum del paral·lelepípede que té per arestes els vectors $\mathbf{v}_1=(2,1,-2)$, $\mathbf{v}_2=(2,3,6)$ i $\mathbf{v}_3=(1,-4,8)$. Quin és el perímetre total? Troba també l'àrea total de les seves cares, fent servir el producte vectorial.

Solució. Per calcular el volum del paral·lelepípede farem servir la fórmula del determinant que té per files les coordenades de cada punt:

$$V=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix}=(48+16+6)-(-6-48+16)=70-(-38)=\boxed{108}$$

Fem la gràfica, perquè ens pot ajudar a visualitzar el perímetre i l'àrea que hem de trobar



Calculem les longituds de les seves arestes,

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3 \qquad \|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{49}=7$$

$$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{1^2+(-4)^2+8^2}=\sqrt{81}=9$$

Com que cada aresta està repetida quatre vegades, el *perímetre total* serà expressat per

$$P_T=4.(\|\mathbf{v}_1\|+\|\mathbf{v}_2\|+\|\mathbf{v}_3\|)=4.(3+7+9)=4.19=\boxed{76}$$

Per calcular l'àrea total haurem de trobar primer cadascuna de les àrees i, per això, farem servir els productes vectorials,

$$\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}=(6.\mathbf{i}+6.\mathbf{k}-4.\mathbf{j})-(2.\mathbf{k}-6.\mathbf{i}+12.\mathbf{j})=(12,-16,4)$$

$$\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_3=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix}=(8.\mathbf{i}-8.\mathbf{k}-2.\mathbf{j})-(\mathbf{k}+8.\mathbf{i}+16.\mathbf{j})=(0,-18,-9)$$

$$\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix}=(24.\mathbf{i}-8.\mathbf{k}+6.\mathbf{j})-(3.\mathbf{k}-24.\mathbf{i}+16.\mathbf{j})=(48,-10,-11)$$

Aquests productes vectorials tenen per normes

$$\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\|=\sqrt{12^2+(-16)^2+4^2}=\sqrt{144+256+16}=\sqrt{416}$$

$$\|\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_3\|=\sqrt{0^2+(-18)^2+(-9)^2}=\sqrt{0+324+81}=\sqrt{405}$$

$$\|\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3\|=\sqrt{48^2+(-10)^2+(-11)^2}=\sqrt{2304+100+121}=\sqrt{2525}$$

Per tant, les àrees formades pels vectors són

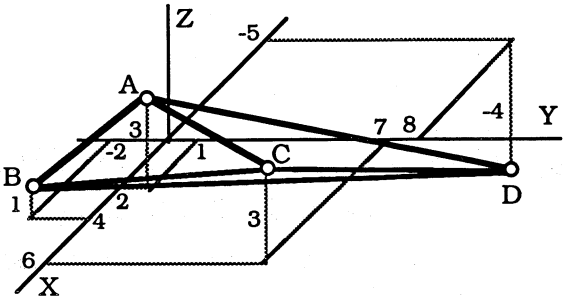
$$S_{12}=\sqrt{416} \qquad S_{13}=\sqrt{405} \qquad S_{23}=\sqrt{2525}$$

Com que cada àrea s'ha de comptar dues vegades, l'*àrea total* és

$$S_T=2.(\sqrt{416}+\sqrt{405}+\sqrt{2525})\approx\boxed{181'54}$$

44. Si A(2,1,3), B(4,-2,1), C(6,7,3) i D(-5,8,-4) són els quatre vèrtexs d'un tetraedre, quin serà el seu volum? Quina serà l'àrea del triangle ABC? Quant valdrà la longitud de l'altura baixada des del vèrtex D fins a la base ABC?

Solució. Fem la figura en l'espai, observant que queda en forma de tetraedre, o piràmide de base triangular:



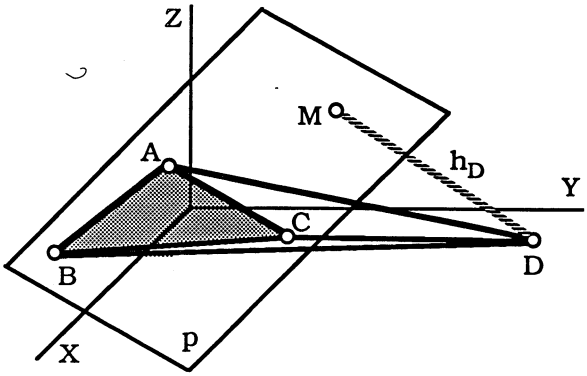
El volum del tetraedre el podem calcular a partir de la fórmula donada en funció del determinant

$$V_T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 3 & 1 \\ -5 & 8 & -4 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 & 0 \\ -11 & 1 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

Hem restat a cada fila l'anterior perquè ara es podrà desenvolupar per adjunts de la 4a columna:

$$V_T=\frac{1}{6}.(-1).\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 9 & 2 \\ -11 & 1 & -7 \end{vmatrix}=\frac{-1}{6}.[(-126-4+66)-(198+4+42)]=...=\boxed{\frac{154}{3}}$$

Per trobar l'àrea del triangle ABC, tornem a fer una altra figura, on també s'ha indicat l'alçada baixada des del vèrtex D al pla que conté el triangle:



Trobem l'àrea del triangle ABC, on A(2,1,3), B(4,-2,1) i C(6,7,3)

$$\overrightarrow{AB}=(4-2,\ -2-1,\ 1-3)=(2,-3,-2) \qquad \overrightarrow{AC}=(6-2,\ 7-1,\ 3-3)=(4,6,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}=(12.\mathbf{k}-8.\mathbf{j})-(-12.\mathbf{k}-12.\mathbf{i})=(12,-8,24)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{12^2+(-8)^2+24^2}=\sqrt{144+64+576}=\sqrt{784}=28$$

Per tant, l'àrea del triangle serà

$$S_t=(1/2).\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=(1/2).28=\boxed{14}$$

Finalment, per determinar l'altura baixada des del vèrtex D fins al triangle ABC, podrem emprar la fórmula del volum del tetraedre,

$$V_T=(1/3).S_t.h \quad\Rightarrow\quad h=3.V_T/S_t=3.(154/3)/14=154/14=\boxed{11}$$

Més endavant podrem comprovar aquesta altura h_D, per mitjà de la distància d'un punt (el D) a un pla (el format per A,B i C).

Altres productes entre vectors

45. Partint dels vectors $\mathbf{v}_1=(1,-1,-1)$, $\mathbf{v}_2=(1,-2,3)$ i $\mathbf{v}_3=(2,-3,2)$, comprova que el doble producte vectorial $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)$ pot ser expressat pel determinant de termes $a_{11}=\mathbf{v}_2$, $a_{12}=\mathbf{v}_3$, $a_{21}=\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2$ i $a_{22}=\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_3$. Quin és el producte mixt d'aquests tres vectors? Què es pot deduir?

Solució. Calcularem el doble producte vectorial fent primer el que es troba entre parèntesis

$$\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(-4.\mathbf{i}-3.\mathbf{k}+6.\mathbf{j})-(-4.\mathbf{k}-92.\mathbf{i}+2.\mathbf{j})=(5,4,1)$$

Tornem a fer el producte vectorial,

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(-\mathbf{i}+4.\mathbf{k}-5.\mathbf{j})-(-5.\mathbf{k}-4.\mathbf{i}+\mathbf{j})=\boxed{(3,-6,9)}$$

Hem de calcular també els productes escalars,

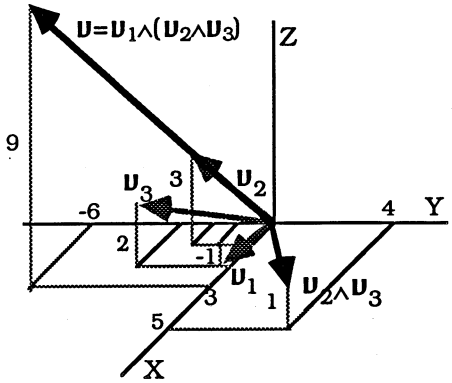
$$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=(1,-1,-1)\bullet(1,-2,3)=1.1+(-1).(-2)+(-1).3=1+2-3=0$$

$$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_3=(1,-1,-1)\bullet(2,-3,2)=1.2+(-1).(-3)+(-1).2=2+3-2=3$$

Comprovem que el doble producte vectorial és igual al vector

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (1,-2,3) & (2,-3,2) \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3.(1,-2,3)=(3,-6,9)$$

A la figura següent hem dibuixat tots els vectors que hem fet servir, on s'observa clarament que $\mathbf{v}=k.\mathbf{v}_2$ (on k=3):



Finalment, calculem el producte mixt dels tres vectors donats,

$$PM=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=\ldots=0\text{ , doncs } f_3=f_1+f_2$$

Com que el producte mixt és nul, voldrà dir que els tres vectors són coplanaris, és a dir, que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ són en un mateix pla.

d) PROBLEMES PROPOSATS

1.1. VECTORS EN EL PLA I EN L'ESPAI

Primeres nocions sobre vectors

46. Els extrems de dos vectors són B(1,6) i B'(7,8) i els seus orígens A(-2,4) i A'(2,-4). Quins són els seus pendents? Quines són les seves inclinacions? Quantes vegades és més gran el pendent i la inclinació del 2n vector que els del 1r?

Sol. m=2/3, m'=12/5, α=33°41', α'=67°22', m'=3'6.m, α'=2.α.

47. Estudia si són o no equipolents els vectors $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ d'orígens $P_1(4,1)$ i $Q_1(-1,5)$ i extrems $P_2(5,4)$ i $Q_2(0,8)$, respectivament. Fes-ne la gràfica.

Sol. Sí, $\mathbf{u}=(1,3)$.

48. Troba els valors que hauran de tenir els paràmetres x i y perquè siguin equipolents els vectors següents:

$$\mathbf{u}_1=\left(\frac{x+y}{2}\,,\ 1+\frac{x+y}{9}\right) \quad \text{i} \quad \mathbf{u}_2=\left(11-\frac{x-y}{3}\,,\ \frac{x}{4}\right)$$

Sol. Sistema, x=12, y=6.

49. Tres forces $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ d'intensitats 2, 10 i 11 quiloponds, respectivament, estan aplicades en un mateix punt i tenen les seves direccions mútuament perpendiculars. Troba la intensitat de la força resultant $\mathbf{f}$ aplicant el teorema de Pitàgores en l'espai. Calcula també els angles que aquesta resultant forma amb els eixos.

Sol. $\mathbf{f}=2.\mathbf{i}+10.\mathbf{j}+11.\mathbf{k}$, f=15 kp , α=82°20' , β=48°11' , γ=42°50'.

Suma de vectors i producte d'un escalar per un vector

50. Donat el pentàgon de vèrtexs A(-3,2), B(-1,6), C(5,7), D(8,4) i E(1,-2), calcula la suma vectorial:

$$\mathbf{s}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}$$

Sol. $\mathbf{s}=\mathbf{0}$

51. Per mitjà de sumes i productes d'un escalar per un vector, posa el vector de l'espai $\mathbf{v}=(11,-6,5)$ en combinació lineal dels vectors $\mathbf{v}_1=(3,-2,1)$, $\mathbf{v}_2=(-1,1,-2)$ i $\mathbf{v}_3=(2,1,-3)$. Resol per Cramer el sistema resultant.

Sol. $\mathbf{v}=2.\mathbf{v}_1-3.\mathbf{v}_2+1.\mathbf{v}_3$.

52. Calcula vectorialment el valor que ha de tenir el paràmetre m perquè els punts A(-2,-3), B(1,2) i C(m,12) estiguin en la mateixa línia.

Sol. $\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}$, k=3 , m=7.

53. Posa els quatre vectors $\mathbf{v}=(11,-6,5)$, $\mathbf{v}_1=(3,-2,1)$, $\mathbf{v}_2=(-1,1,-2)$ i $\mathbf{v}_3=(2,1,-3)$ en funció dels vectors canònics $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ i calcula després els valors que haurien de tenir a_1, a_2 i a_3, perquè es compleixi la condició $v=a_1.\mathbf{v}_1+a_2.\mathbf{v}_2+a_3.\mathbf{v}_3$.

Sol. $\mathbf{v}=11.\mathbf{i}-6.\mathbf{j}+5.\mathbf{k}$,... Sistema , $a_1=2$, $a_2=-3$ i $a_3=1$.

Norma d'un vector

54. Una figura de l'espai té per costats els vectors $\mathbf{v}_1=(0'5,-2,\ 0'4)$, $\mathbf{v}_2=(1'9,-0'4,0'8)$, $\mathbf{v}_3=(-1'3,1'6,04)$ i $\mathbf{v}_4=(-1'1,0'8,-1'6)$. Troba les seves longituds. Partint del vèrtex A(0,0,0), podríes trobar els altres vèrtexs? Es tracta d'un quadrat en l'espai?

Sol. Tots igual longitud, $\|\mathbf{v}\|=2'1$, B(0'5,-2,0'4) , C(2'4,-2'4,1'2) D(1'1,-0'8,1'6). No, la figura no és en un pla.

55. Dedueix quins d'aquests tres vectors del pla $\mathbf{v}_1=(0'6,-0'8)$, $\mathbf{v}_2=(-8/17,15/17)$ i $\mathbf{v}_3=(0'769,1'847)$ són vectors unitaris.

Sol. $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, $\|\mathbf{v}_3\|=2$.

56. Prova que els punts A(6,2), B(-4,5) i C(-1,-5) són els vèrtexs d'un triangle isòsceles, calculant les longituds. Fes-ne la gràfica.

Sol. $AB=BC=\sqrt{109}$, $AC=\sqrt{98}$.

57. Calcula la distància del punt P, intersecció de les rectes del pla, r_1: 2x+3y-25=0 i r_2: 5x-4y+18=0, al punt mitjà M del segment d'extrems $P_1(3,0)$ i $P_2(7,6)$.

Sol. P(2,7), M(5,3), d=5.

58. Si $A_m(2,1)$, $B_m(3,3)$ i $C_m(6,2)$ són els punts mitjans dels costats BC, AC i AB, respectivament, d'un triangle, quines seran les coordenades dels seus vèrtexs A, B i C?

Sol. A(7,4), B(5,0) i C(-1,2).

59. Calculant les longituds dels seus costats, estudia si és equilàter, isòsceles o escalè el triangle de vèrtexs A(13'6,12'6), B(6'88,-12'48) i C(-11'48,5'88).

Sol. AB=AC=BC=25'9 , equilàter.

60. Dibuixa en l'espai els punts $P_1(5,-4,-7)$ i $P_2(2,8,-3)$ i forma el vector $\mathbf{v}$ d'origen P_1 i extrem P_2. Quina és la seva norma? Si un altre vector $\mathbf{w}$ és de longitud triple que l'anterior i té el seu origen en el punt $Q_1(5,-19,-4)$, quines seran les coordenades del seu extrem Q_2, sabent que aquests vectors són paral·lels?

Sol. $\|\mathbf{v}\|=13$, $\mathbf{w}=(-9,36,12)$, $Q_2(-4,17,8)$.

61. Calculant les longituds dels seus tres costats, prova que és rectangle el triangle de vèrtexs A(3,-1,6), B(-1,7,-2) i C(1,-3,2). Dibuixa'l en l'espai. En quin vèrtex hi ha l'angle recte?

Sol. AB=12 , AC=$2.\sqrt{6}$, BC=$2.\sqrt{30}$, Pitàgores, C=90°.

1.2 PRODUCTES ENTRE VECTORS

Producte escalar

62. Els orígens de dos vectors són $P_1(-2,-1)$, $Q_1(1,2)$ i els seus extrems són $P_2(3,2)$ i $Q_2(-2,7)$. Calcula el producte escalar d'aquests dos vectors. Si els dibuixem, com seran entre ells?

Sol. $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2=0$, $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.

63. Tenim els vectors del pla $\mathbf{v}_1=(11,-7)$ i $\mathbf{v}_2=(6,5)$. Troba les components d'un altre vector $\mathbf{v}$ perquè es compleixin els següents productes escalars: $\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_1=-3$ i $\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}_2=16$.

Sol. $\mathbf{v}=(x,y)$, sistema, $\mathbf{v}=(1,2)$.

64. Per mitjà del producte escalar, prova que tot triangle ABC verifica el "teorema del cosinus" $c^2=a^2+b^2-2.a.b.\cos(C)$, on a, b i c són els costats. Generalitza la fórmula per a^2 i b^2. Comprova-ho pel triangle que té per vèrtexs A(10,5), B(3,2) i C(6,-5), trobant els tres angles dels vèrtexs A, B i C. Quina classe de triangle és?

Sol. $c^2=\|\mathbf{c}\|^2=\mathbf{c}\bullet\mathbf{c}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\bullet(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\ldots$, $a^2=b^2+c^2-2.b.c.\cos(A)$

$b^2=a^2+c^2-2.a.c.\cos(B)$, $a=c=\sqrt{58}$, $b=\sqrt{116}$.

A=C=45°, B=90°, tr. rectangle isòsceles.

65. Comprova que $\mathbf{i}'=(1/2).\mathbf{i}+(\sqrt{3}/2).\mathbf{j}$, $\mathbf{j}'=(\sqrt{3}/2).\mathbf{i}-(1/2).\mathbf{j}$ són dos vectors ortogonals i unitaris. Siguin ara els vectors $\mathbf{a}=2.\mathbf{i}'+3.\mathbf{j}'$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}'-4.\mathbf{j}'$. Troba directament el producte escalar $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$. Posa després els vectors $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ en funció de $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$, calculant novament el producte escalar $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$. Coincidiran?

Sol. $\mathbf{i}'\bullet\mathbf{j}'=0$, $\|\mathbf{i}'\|=\|\mathbf{j}'\|=1$, $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=-10$, $\mathbf{a}=(1+3.\sqrt{3}/2).\mathbf{i}+(\sqrt{3}-3/2).\mathbf{j}$

$\mathbf{b}=(1/2-2.\sqrt{3}).\mathbf{i}-(1/2).\mathbf{j}$, $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=-10$, Sí.

66. Els vectors $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ formen un angle de $\pi/3$ radians i les seves normes respectives són 5 i 8 unitats. Calcula, per mitjà del producte escalar, la longitud del vector diferència.

Sol. $\alpha=60°$, $\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=20$, $\|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\|^2=(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\bullet(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\ldots$ $\|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\|=7$.

67. Quina condició han de complir els vectors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ perquè les normes de la seva suma i de la seva diferència siguin iguals? Comprova-ho després pels vectors $\mathbf{v}=(2,3,6)$ i $\mathbf{w}=(3,-4,1)$.

Sol. $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\bullet(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{v}-\mathbf{w})\bullet(\mathbf{v}-\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=0 \Rightarrow \mathbf{v}\perp\mathbf{w}$

$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|=\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|=5.\sqrt{3}$

68. Si $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ són dos vectors qualssevol del pla, calcula els escalars M i N definits per les expressions:

$$M=\frac{\|\mathbf{u}+\mathbf{w}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2}{\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}} \quad \text{i} \quad N=\frac{\|\mathbf{u}+\mathbf{w}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{w}\|^2}$$

Sol. M=4 , N=2.

69. Els punts del pla A(3,-4), B(11,2), C(-6,8) i D(8,6) formen un quadrilàter. Per càlcul vectorial i fent servir els costats AB, AC i BD, prova que es tracta d'un trapezi rectangle. Quina és la seva àrea?

Sol. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD}$, $S=\left(\frac{B+b}{2}\right).h$, $S=100\ u^2$.

70. Pels vectors $\mathbf{u}_1=2.\mathbf{i}-3.\mathbf{j}+6.\mathbf{k}$ i $\mathbf{u}_2=-2.\mathbf{i}+\mathbf{j}+2.\mathbf{k}$, troba les normes, el producte escalar i, a partir d'aquí, l'angle que formen. Quin seria el vector $\mathbf{u}=0'4.\mathbf{u}_1+0'2.\mathbf{u}_2$? I la seva norma? Fes la figura en l'espai.

Sol. $\|\mathbf{u}_1\|=7$, $\|\mathbf{u}_2\|=3$, $\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_2=5$, $\alpha=76°13'$, $\mathbf{u}=(0'4,-1,2'8)$, $\|\mathbf{u}\|=3$.

71. Quatre punts de l'espai, formant un quadrilàter, es mouen en funció del temps t segons les expressions A(2t-5, -3t+7, t-1), B(3t-7, 2t-3, -t-2), C(-4t+8, t-2, 2t-5) i D(t-8, -2t+1, t+3), on t està mesurat en hores. Calcula el temps que haurà de passar perquè siguin perpendiculars les diagonals AC i BD d'aquest quadrilàter, sabent que és un nombre exacte d'hores.

Sol. $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=0$, $2.t^2-29.t+69=0$, $t_1=3h$ Sí, $t_2=11h\ 30min$ No.

Angle entre dos vectors

72. Sabent que els vectors $\mathbf{u}=(2m, 6)$ i $\mathbf{w}=(9, 3m)$ formen un angle de $\pi/6$ radians, quins són els dos possibles valors que podrà tenir el paràmetre m? Troba després dos altres valors de m, però que l'angle sigui ara de 36°52'11".

Sol. $m_1=3.\sqrt{3}$, $m_2=\sqrt{3}$, $\cos(\alpha)=0'8$, $m'_1=6$, $m'_2=1'5$.

73. Calculant els angles interiors del triangle que té per vèrtexs A(-4,1,-2), B(2,-5,1) i C(-1,7,4), dedueix de quin tipus de triangle es tracta. Quin serà el seu perímetre?

Sol. A=90°, B=C=45° , t. rect. isòsceles, P=30'69.

74. Donades les parelles de vectors $\mathbf{v}_1=(6,3'2)$ i $\mathbf{v}_2=(4'8,-1'4)$, $\mathbf{w}_1=(8,-3'9)$ i $\mathbf{w}_2=(6'4,4'8)$ troba els dos angles que formen i digues quin és l'angle més gran. Comprova-ho fent les dues gràfiques i ajudan-te d'un transportador d'angles.

Sol. $\alpha=44°48'46"$, $\beta=62°51'32"$. El segon.

75. Sense utilitzar taules trigonomètriques ni calculadora, troba l'angle A del triangle de vèrtexs A(17,4,-7), B(5,-12,8) i C(-15,3,8). Per mitjà del producte escalar, troba l'angle B. Quant valdrà l'últim angle C?

Sol. $\cos(A)=\sqrt{2}/2$, $A=45°$, $B=90°$, $C=180°-(A+B)=45°$.

76. Un vector $\mathbf{v}$ és perpendicular als vectors $\mathbf{v}_1=3.\mathbf{i}+2.\mathbf{j}+2.\mathbf{k}$ i $\mathbf{v}_2=18.\mathbf{i}-22.\mathbf{j}-5.\mathbf{k}$, formant amb l'eix d'ordenades un angle obtús. Troba les seves components, sabent que la seva longitud és de 14 unitats. Quin és l'angle obtús?

Sol. $\mathbf{v}=x.\mathbf{i}+y.\mathbf{j}+z.\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}=0$, $\mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}=0$, $y<0$, $\mathbf{v}=-4.\mathbf{i}-6.\mathbf{j}+12.\mathbf{k}$
$\alpha=115°22'37"$.

77. Siguin els punts de l'espai A(-7,-2,-3) i B(-4,-6,9). Quines són les components del vector d'origen A i extrem B? Quina és la seva norma? Quin és el vector $\mathbf{v}_1$ perpendicular a l'anterior, de components positives, paral·lel al pla XOY i de longitud 15 unitats? Si col·loquem el vector $\mathbf{v}_1$ en A, quines seran les coordenades del seu extrem C?

Sigui ara un nou vector $\mathbf{v}_2=(3,12,-4)$. Calcula les components d'un altre vector $\mathbf{v}_3$, paral·lel a l'anterior, però de norma 39 unitats.

Si l'origen de $\mathbf{v}_3$ és el punt B, quines seran les coordenades del seu extrem D? Quina serà la distància de C a D? Quant valdrà l'angle D format per BD i CD?

Fes uns esquemes en un sistema de coordenades en l'espai, explicant tots els passos efectuats.

Sol. $\overrightarrow{AB}=(3,-4,12)$, $\|\overrightarrow{AB}\|=13$, $\mathbf{v}_1=(12,9,0)$, C(5,7,-3)
$\mathbf{v}_3=(9,36,-12)$, D(5,30,-3) , d(C,D)=23 , $D=22°37'$.

Producte vectorial

78. Mitjançant els quatre punts de l'espai $P_1(2,-5,-3)$, $P_2(5,-4,1)$, $Q_1(0,6,-1)$ i $Q_2(4,7,5)$, calcula el producte vectorial dels vectors $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ d'orígens P_1, Q_1 i extrems P_2, Q_2. Quina és la norma d'aquest producte vectorial?

Sol. $\mathbf{u}=2.\mathbf{i}-2.\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\|\mathbf{u}\|=3$.

79. Fent servir el producte vectorial, calcula l'angle format pels vectors $\mathbf{u}_1=(2,-2,1)$ i $\mathbf{u}_2=(2,3,6)$. Comprova-ho fent servir la definició de producte escalar.

Sol. $\|\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2\|=5.\sqrt{17}$, $\alpha=79°1'\ 10''$, $\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_2=4$.

80. Pels vectors $\mathbf{u}_1=3.\mathbf{i}-\mathbf{j}-2.\mathbf{k}$ i $\mathbf{u}_2=2.\mathbf{i}+3.\mathbf{j}+\mathbf{k}$, troba els vectors $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{w}=(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\wedge(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)$. Quantes vegades és més llarg el segon que el primer? Tenen el mateix sentit?

Sol. $\mathbf{u}=5.\mathbf{i}-7.\mathbf{j}+11.\mathbf{k}$, $\mathbf{w}=-10.\mathbf{i}+14.\mathbf{j}-22.\mathbf{k}$, dues vegades, no.

81. Donat el triangle de vèrtexs $A(-4,-3,7)$, $B(-3,1,-1)$ i $C(5,-3,-2)$ troba els angles A, B i C fent servir la definició de producte vectorial. De quin triangle es tracta? Dibuixa-ho en l'espai.

Sol. $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\sin(A)$, $A=C=45°$, $B=90°$, t. rect. isòs.

Àrea d'un triangle

82. Amb els sis punts del pla $A(4,-1)$, $B(6,5)$, $C(-2,9)$, $D(4,-3)$, $E(9,4)$ i $F(-3,6)$, calcula l'àrea dels triangles ABC i DEF. Quin és el més gran?

Sol. $S_{ABC}=28$, $S_{DEF}=47$, el segon.

83. Calcula l'àrea total dels tres triangles T_1, T_2 i T_3 de vèrtexs respectius $A_1(2,3)$, $B_1(1,-4)$, $C_1(5,6)$; $A_2(4,-1)$, $B_2(0,2)$ i $C_2(6,7)$; $A_3(2,6)$, $B_3(-3,2)$ i $C_3(1,4)$.

Sol. $S_1=9$, $S_2=19$, $S_3=3$, $S_T=31$.

84. Per mitjà de la fórmula de l'àrea d'un triangle de vèrtexs A, B i C, dedueix el "teorema del sinus" a/sin(A) = b/sin(B) = c/sin(C), on a, b i c són els costats oposats als angles respectius. Comprova-ho pel triangle de costats 1, $\sqrt{3}$ i 2, trobant primer els angles.

Sol. $S_t=(1/2).b.c.\sin(A)$, $S_t=(1/2).a.c.\sin(B)$, ... Igualar.
Triang. rect. A=30° , B=60° , C=90° , k=2.

85. Dibuixa en l'espai el triangle ABC on els vèrtexs són A(6,5,-3), B(4,7,-2) i C(2,-5,-6). Quina és la seva àrea? Quina és la longitud de l'altura h_C?

Sol. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(4,-10,28)$, $S_t=15$, $\|\overrightarrow{AB}\|=3$, $h_C=10$.

Producte mixt

86. Calcula els productes mixtos $PM_1=\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$ i $PM_2=(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$ pels vectors $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3.\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-2.\mathbf{i}+2.\mathbf{j}+\mathbf{k}$ i $\mathbf{c}=3.\mathbf{i}-2.\mathbf{j}+5.\mathbf{k}$. Són iguals aquests dos productes mixtos? Comprova el resultat amb el determinant format per les components dels vectors.

Sol. $\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=12.\mathbf{i}+13.\mathbf{j}-2.\mathbf{k}$, $PM_1=-7$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=-7.\mathbf{i}-7.\mathbf{j}$, $PM_1=-7$, Sí.

87. Tenim els vectors $\mathbf{a}=(2,0,-3)$, $\mathbf{b}=(1,4,-2)$ i $\mathbf{c}=(0,-2,5)$. Troba primer els productes vectorials $\mathbf{u}=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $\mathbf{v}=\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ i $\mathbf{w}=\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}$. Després calcula els productes mixtos $m=\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$ i $n=\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$. Comprova finalment que $m=\sqrt{n}$.

Sol. $\mathbf{u}=(12,1,8)$, $\mathbf{v}=(16,-5,-2)$, $\mathbf{w}=(6,10,4)$, m=38, n=1444.

Volum del paral·lelepípede i del tetraedre

88. Calcula el volum del tetraedre que té per vèrtexs els punts de l'espai A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1) i D(4,1,3). Fes-ne la gràfica aproximada en l'espai.

Sol. $V_T=(1/6).[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$, V=3.

Altres productes entre vectors

89. Calculant els dobles productes vectorials $\mathbf{v}_1=(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ i $\mathbf{v}_2=\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$, observa si són iguals i estudia així si es verifica l'associativitat del producte vectorial. Els vectors de partida són $\mathbf{a}=(2,-3,1)$, $\mathbf{b}=(-3,1,2)$ i $\mathbf{c}=(1,2,3)$.

Sol. $\mathbf{v}_1=(-7,14,-7)$, $\mathbf{v}_2=(10,13,19)$, No: $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$.

90. Sigui l'operació composta de producte escalar de productes vectorials $k=(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)\bullet(\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4)$ i siguin també els vectors $\mathbf{v}_1=(3,5,7)$, $\mathbf{v}_2=(1,2,3)$, $\mathbf{v}_3=(6,2,-3)$ i $\mathbf{v}_4=(-4,-1,2)$. Comprova que es compleix l'anomenada "identitat de Lagrange":

$$(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)\bullet(\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4)=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_4\\ \mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_4\end{vmatrix}$$

Sol. $\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=(1,-2,1)$, $\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4=(1,0,2)$, $k=3$.

Capítol 2: **Espais vectorials**

a) Bibliografia escollida 84

b) Programa i simbologia 84

c) Conceptes i exemples 86

d) Formulació matemàtica 107

e) Problemes resolts 115

f) Problemes proposats 139

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P1/11, i P31/46.

CALLE. M. L.; VENDRELL, R. *Problemes d'àlgebra lineal i càlcul infinitesimal.* P99/139

HERAS, A. *Problemas de Algebra Lineal para la Economía.* P53/132.

GUTIERREZ GOMEZ, A. *Algebra Lineal Tomo (II).* P69/145.

LIPSCHUTZ, S. *Algebra Lineal.* P167/238.

CANCELO, J.R. *Problemas de Algebra Lineal para Economistas. Tomo I.* P17/75.

THOMAS ARA, L. *Algebra Lineal.* P119/144.

MUÑOZ, F. *Manual de Algebra Lineal.* P11/20 i P47/52.

Addicional:

TUDURI, J. *Matemáticas.* P5/22.

DELGADO, M. *Matemáticas, Álgebra, Cálculo,....* P1/22.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa.* P5/31.

CASANOVA, J. *Examenes de Algebra Lineal.* P50/86.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

2.1 CONCEPTE D'ESPAI VECTORIAL

1) **Vectors generalitzats.** Ampliació del concepte dels vectors geomètrics, vectors generalitzats. Conjunts de vectors (V) i d'escalars (K), suma vectorial (+) i producte extern (.), vectors ($\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$,...) i escalars (λ, μ,...). Cas real. Estructura d'espai vectorial (**V**), axiomes de definició. Exemple clàssic, els vectors del pla. Espai vectorial real.

2) **Altres exemples i propietats.** Complexos ($z=a+b.i$), vectors de l'espai ($\mathbf{u}=a.\mathbf{i}+b.\mathbf{j}+c.\mathbf{k}$), polinomis de grau $\leq n$ (p), matrius ($A_{m\times n}$), successions de números reals ((a_n)). Propietats dels espais vectorials, simplificació escalar i vectorial. Espai vectorial producte ($V\times W$).

3) **Sistemes generadors i lliures.** Sistema de vectors (C), combinació lineal. Sistema generador d'un espai vectorial (S_G), descomposició vectorial, sistemes generadors equivalents. Combinació lineal nul·la, vectors linealment independents, sistema lliure (S_L). Rang d'un sistema de vectors ($\rho(C)$), mètode de reducció de Gauss i regla del pivot. Sistema lligat (S_{LL}), vectors linealment dependents, equació de lligadura.

4) **Base d'un espai vectorial.** Concepte de base (B), descomposició única, components d'un vector. Base canònica (B_C), vectors canònics ($\mathbf{e}_i$), casos particulars ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$), descomposició canònica. Teorema de Steinitz, corol·lari, dimensió d'un espai vectorial ($\dim(\mathbf{V})=n$), altres conseqüències del teorema.

5) **Canvi de base.** Bases inicial (B_i) i final (B_f), matrius de les bases (B_i i B_f). Components inicials (x_i) i finals (x'_i), matrius de les components inicial (X_i) i final (X_f). Matriu de pas (P), fórmules del canvi de base.

2.2 SUBESPAI VECTORIAL

1) **Definició de subespai vectorial.** Subespai vectorial ($\mathbf{S}$), condicions doble i única. Subespais impropis. Subespais propis, dimensió d'un subespai vectorial ($\dim(\mathbf{S})=m$).

2) **Exemples de subespais.** Plans i rectes que passen per l'origen, vectors característic ($\mathbf{u}'$), de posició ($\mathbf{u}$) i direccional ($\mathbf{u}$). Equacions cartesianes i paramètriques dels subespais. Subespai engendrat per un sistema de vectors, subespai clausura ($S(C)$).

3) **Subespais intersecció i suma.** Subespai intersecció ($\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2$), subespais independents. Unió de subespais. Subespai suma ($\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$). Relació de Grassmann.

4) **Suma directa de subespais.** Subespais complementaris, suma directa d'un espai ($\mathbf{V}=\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2$). Descomposició única, components d'un vector segons els subespais, projeccions sobre els subespais (p_1, p_2). Suma directa d'un subespai ($\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2$).

c) CONCEPTES I EXEMPLES

2.1 CONCEPTE D'ESPAI VECTORIAL

2.1.1 VECTORS GENERALITZATS. Ara ens proposem realitzar una *ampliació del concepte de vector.* Els vectors ja no hauran de ser necessàriament del pla o de l'espai, sinó que podran ser altres ens matemàtics com ara polinomis, matrius, etc.

Definirem, doncs, aquests *vectors generalitzats* d'una manera axiomàtica; és a dir, imposant una sèrie de condicions o axiomes que s'hauran de complir perquè l'ens en estudi sigui realment un vector generalitzat. Per brevetat, en direm només vector.

Sigui un conjunt $\mathbf{V}=\{\mathbf{u}, \mathbf{w},...\}$, anomenat *conjunt de vectors*, el qual gaudeix d'una operació interna, simbolitzada per (+), i que en direm *suma vectorial.* Observeu que simbolitzem els *vectors* igual com si fossin vectors del pla o de l'espai.

Sigui també un altre conjunt K={k, l,...}, anomenat *conjunt d'escalars*, proveït d'una operació externa amb el conjunt de vectors que la simbolitzem per (.) i en direm *producte extern.*

A més, en el conjunt K també hi ha definides dues operacions internes, la suma i el producte, que li proporcionen l'estructura de *cos commutatiu.* Si no diem res en contra tindrem com a cas particular de treball el cos dels nombres reals R; així els *escalars* no seran res més que números reals.

Exemple 22. Sigui **V** el conjunt de polinomis de segon grau $\mathbf{P}_2$. Estarà constituït per polinomis de la forma $p=a.x^2+b.x+c$, on els coeficients són reals.

Podriem simbolitzar també el polinomi per $\mathbf{p}=(a, b, c)$, sobreentenent que s'haurà de multiplicar la a per x^2, la b per x i sumar-ho tot. Observeu ja la similitud entre un polinomi i un vector de l'espai. Tant cert és que en podrem dir un *vector polinomi.*

D'aquesta manera la suma de polinomis (operació interna) quedarà reduïda a la suma de vectors. Veiem un exemple numèric,

Si $p_1=3.x^2+4.x+5$ i $p_2=6.x^2+7.x+8$, tenim $p_1+p_2= 9.x^2+11.x+13$

Vectorialment seria, $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=(3, 4, 5)+(6, 7, 8)= (9, 11, 13)$

També el producte d'un escalar per un polinomi (operació externa) es pot visualitzar com el producte d'un número per un vector. Així, si l'escalar és k=2 i el polinomi $p=3.x^2+4.x+5$, tindrem

$$2.p= 2.(3.x^2+4.x+5)= 6.x^2+8.x+10$$

Vectorialment serà $2.\mathbf{p}= 2.(3, 4, 5)= (6, 8, 10)$.

Amb els dos conjunts de vectors V i d'escalars K (cos commutatiu) i les dues operacions de suma de vectors (+) i de producte extern (.), definirem un nou concepte matemàtic.

Direm que la terna $\mathbf{V}=(V, +, .)$ té l'*estructura d'espai vectorial* sobre K si i només si es verifiquen deu condicions o *axiomes de definició*, on cinc són per a l'operació de suma i els altres cinc per al producte.

PER A LA SUMA. El parell (V, +), és a dir, el conjunt V amb l'operació de suma de vectors, ha de tenir l'estructura de *grup abelià*. Per tant, s'hauran de complir els axiomes: (consulteu l'apartat de formulació)

(I) *Operació interna.* La suma de dos vectors ha de ser un altre vector.

(II) *Commutativa.* L'ordre dels sumands no altera la suma.

(III) *Associativa.* Si s'han de sumar tres vectors, és indiferent l'ordre en que es fan les operacions: la suma dels dos primers amb l'últim és igual a la suma del primer amb els dos últims.

(IV) *Element neutre.* Hi ha un vector, el **0**, anomenat *vector nul*, tal que si el sumem amb qualsevol altre vector en dóna aquest mateix vector.

(V) *Element oposat.* Cada vector **u** té un altre vector **-u**, anomenat *vector oposat*, tals que si els sumem ens dóna el vector nul.

PER AL PRODUCTE. Perquè **V**=(V, +, .) sigui un espai vectorial sobre K, s'han de verificar encara els cinc axiomes següents:

(VI) *Operació externa.* El producte d'un escalar per un vector és un altre vector.

(VII) *Associativitat escalar.* Si es multiplica un vector per un escalar i el resultat per un altre escalar, seria igual multiplicar primer els dos escalars i després multiplicar el resultat pel vector.

(VIII) *Distributivitat escalar.* La suma de dos escalars multiplicada per un vector és igual a la suma dels productes de cada escalar epl vector.

(IX) *Distributivitat vectorial.* El producte d'un escalar per la suma de dos vectors és igual a la suma dels productes de l'escalar per cadascun dels vectors.

(X) *Element unitat.* En el cos K hi ha un escalar, e, que en diem *escalar unitat*, tal que si el multipliquem per qualsevol vector ens dóna el mateix vector.

Ja hem dit que si no s'especifica res en contra, la terna **V**=(V, +, .) es considerarà un espai vectorial sobre R. En aquest cas se'n dirà un *espai vectorial real.*

Com a *exemple clàssic* d'espai vectorial posem el dels vectors del pla, que vam estudiar al capítol anterior.

Exemple 23. Veiem amb exemples numèrics que els vectors del pla amb les operacions de suma de vectors i producte d'un número real per un vector, (V_2, +, .) és un espai vectorial real.

PER A LA SUMA.

Operació interna: (4, 5)+(6, 7) = (10, 12) vector

Commutativa: (4, 5)+(6, 7) = (6, 7)+(4, 5) = (10, 12)

Associativa: [(4, 5)+(6, 7)]+(8, 9) = (4, 5)+[(6, 7)+(8, 9)] = (18, 21)

Element neutre: (0, 0) , (2, 3)+(0, 0) = (2, 3)

Element oposat de (2, 3): (-2, -3) , (2, 3)+(-2, -3) = (0, 0)

PER AL PRODUCTE.

Operació externa: 2.(4, 5)= (8, 10) vector

Associativitat escalar: 2.[3.(4, 5)] = (2.3).(4, 5) = (24, 30)

Distributivitat escalar: (2+3).(4, 5) = 2.(4, 5)+3.(4, 5) =(20, 25)

Distributivitat vectorial: 2.[(4, 5)+(6, 7)] = 2.(4, 5)+2.(6, 7) =(20, 24)

Element unitat: 1 , 1.(4, 5) = (4, 5).

2.1.2 ALTRES EXEMPLES I PROPIETATS. Per comprendre millor els axiomes anteriors seria interessant comprovar-los amb *altres exemples d'espais vectorials*:

(1) *Nombres complexos.* Recordem que un nombre complex és de la forma $z=a+b.i$, on $i=\sqrt{-1}$ és la unitat imaginària. Es poden escriure com $z=(a, b)$ que representa un vector del pla.

(2) *Vectors de l'espai.* Són del tipus $\mathbf{u}=(a, b, c)$, on aquests tres nombres reals simbolitzen les components del vector.

(3) *Polinomis de grau inferior o igual a n.* Seran definits per l'expressió $p=a_0+a_1.x+a_2.x^2+...+a_n.x^n$ i que també es podrà posar en la forma $p=(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$.

(4) *Matrius d'ordre m×n.* Són matrius rectangulars de termes reals formades per m files i n columnes. Si poséssim les files una a continuació de l'altra, la matriu quedaria en la forma d'un vector de m.n components, $A=(a_{11},...,a_{1n}, a_{21} ..., a_{mn})$.

(5) *Successions de nombres reals.* Estan formades per infinits termes $(a_n)=(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ i, com sabem, la suma s'efectua sumant els termes correlatius. També, lògicament, el producte d'un nombre real per la successió es realitza multiplicant aquest número per tots els termes de la successió.

Exemple 24. Efectuem exemples numèrics les operacions interna i externa dels exemples anteriors. Els altres axiomes es poden comprovar com a exercici.

Nombres complexos: $(3+4.i)+(5+6.i) = 8+10.i$, $2.(3+4.i) = 6+8.i$.

Vectors de l'espai: $(3, 4, 5)+(6, 7, 8) = (9, 11, 13)$, $2.(3, 4, 5) = (6, 8, 10)$.

Polinomis de grau inferior o igual a 3:

$$(3+4.x+5.x^2+6.x^3)+(7+8.x+9.x^2+10.x^3) = 10+12.x+14.x^2+16.x^3$$

$$2.(3+4.x+5.x^2+6.x^3) = 6+8.x+10.x^2+12.x^3$$

Matrius d'ordre 2×3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$2.\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 20 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Successions de termes reals:

$$(729, 243, 81, ..., 3, ...) + (64, 32, 16, ..., 2, ...) = (793, 275, 97, ..., 5,...)$$

$$2.(729, 243, 81, ..., 3, ...) = (1458, 486, 162, ..., 6, ...)$$

Notem que les successions donades són progressions geomètriques decreixents de raons 1/3 i 1/2, respectivament.

Si **V**=(V, +, .) és un espai vectorial sobre el cos commutatiu K, es compliran els deu axiomes de definició. A partir d'ells es pot comprovar que es verifiquen també les següents *propietats dels espais vectorials*. (Consulta l'apartat de Formulació):

(1) «El producte d'un nombre real qualsevol pel vector nul és igual al vector nul».

(2) «El producte de l'escalar nul per qualsevol vector és igual al vector nul».

(3) «Si el producte d'un escalar per un vector és el vector nul, llavors hi ha dues possibilitats: que l'escalar sigui nul o bé que el vector sigui nul». (Naturalment, també es poden verificar ambdues coses a la vegada).

(4) «El producte de l'oposat d'un escalar per un vector és igual a l'oposat del vector resultant de multiplicar l'escalar pel vector».

(5) «Si el producte d'un escalar per un vector és igual al producte del mateix escalar per un altre vector, i l'escalar és no nul, llavors els dos vectors hauran de ser iguals». És a dir, es verifica la *simplificació escalar*.

(6) «Si el producte d'un escalar per un vector és igual al producte d'un altre escalar pel mateix vector, i el vector és diferent del vector nul, llavors els dos escalars hauran de ser iguals». D'aquesta propietat en podem dir *simplificació vectorial*.

Exemple 25. Demostrem com a exemple la primera propietat

$$(1)\ \forall a \in R \Rightarrow a.\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

Comencem apuntant $a.(\mathbf{u}+\mathbf{0}) = a.\mathbf{u} + a.\mathbf{0}$, ja que hem aplicat l'axioma (IX) de distributivitat vectorial.

També podíem haver fet $a.(\mathbf{u}+\mathbf{0}) = a.\mathbf{u} = a.\mathbf{u} + \mathbf{0}$, ja que hem aplicat dues vegades consecutives l'axioma (IV) d'element neutre.

Igualant els dos segons costats anteriors, $a.\mathbf{u} + a.\mathbf{0} = a.\mathbf{u} + \mathbf{0}$.

Sumant cada membre pel vector oposat al $a.\mathbf{u}$, és a dir $-(a.\mathbf{u})$ obtindríem

$$-(a.\mathbf{u})+[a.\mathbf{u} + a.\mathbf{0}] = -(a.\mathbf{u})+[a.\mathbf{u} + \mathbf{0}]$$

Aplicant ara l'axioma (III) d'associativitat

$$[-(a.\mathbf{u})+a.\mathbf{u}] + a.\mathbf{0} = [-(a.\mathbf{u})+a.\mathbf{u}] + \mathbf{0}$$

Ara bé, els claudàtors són el vector nul, perquè es verifica l'axioma (V) d'element oposat. Per tant,

$$\mathbf{0} + a.\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

I finalment, fent servir l'axioma (IV) d'element neutre, ens quedarà la propietat que havíem de demostrar,

$$a.\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Notem que de la igualtat $a.\mathbf{u} + a.\mathbf{0} = a.\mathbf{u} + \mathbf{0}$, ja podíem haver obtingut la conclusió anterior si haguéssim aplicat la propietat simplificativa de la suma, que aquí també es verifica.

També es podria parlar ara de l'*espai vectorial producte*, **V**×**W**, obtingut a partir de dos espais vectorials **V** i **W**, definits sobre el mateix cos commutatiu K. En aquest cas, els elements de l'espai vectorial producte seran parells de vectors.

Per efectuar les operacions de suma (+) i producte extern (.) es farà igual com si fossin parells de números, en comptes de parells de vectors:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)+(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)=(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2) \quad , \quad k.(\mathbf{u}, \mathbf{w})=(k.\mathbf{u}, k.\mathbf{w})$$

Exemple 26. Suposem els espais vectorials **V** dels complexos i **W** dels polinomis de grau inferior o igual a 2.

De l'espai vectorial producte **V**×**W** podem agafar dos vectors i fer-ne la suma:

$$(3+4.i, 1+2.x+3.x^2) + (5+6.i, 4+5.x+6.x2) = (8+10.i, 5+7.x+9.x^2)$$

Notem que fem servir el mateix signe de suma (+) tant si es tracta de suma de complexos, de polinomis o bé d'elements de l'espai vectorial producte (parelles de complexos i polinomis).

També podem multiplicar per un escalar,

$$2.(3+4.i, 1+2.x+3.x^2) = (6+8.i, 2+4.x+6.x^2)$$

2.1.3 SISTEMES GENERADORS I LLIURES. Sigui un espai vectorial (V, +, .) sobre un cos K. Anomenarem *sistema de vectors* un conjunt finit de vectors de V.

Donat un sistema de vectors, $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_n\}$ i un altre vector $\mathbf{u}$, direm que aquest últim vector és *combinació lineal* dels vectors del sistema, si existeixen escalars $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, tals que

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1 + \lambda_2.\mathbf{u}_2 +...+ \lambda_n.\mathbf{u}_n$$

Exemple 27. En el conjunt de vectors del pla tenim el conjunt format per dos vectors, $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$., on $\mathbf{u}_1=(1, 2)$ i $\mathbf{u}_2=(3, 4)$.

Estudiem si el nou vector $\mathbf{u}=(5, 6)$ es pot posar com a combinació lineal dels anteriors. Haurem de calcular els coeficients λ_1 i λ_2 corresponents:

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2 \quad \Rightarrow \quad (5, 6)=\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)$$

Multiplicant, sumant i igualant components ens quedarà el sistema

$$\lambda_1+3.\lambda_2=5 \quad \text{i} \quad 2.\lambda_1+4.\lambda_2=6$$

Resolt, obtenim $\lambda_1=-1$ i $\lambda_2=2$. D'aquesta manera el vector $\mathbf{u}$ és combinació lineal de $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$,

$$\mathbf{u}= -1.\mathbf{u}_1+ 5.\mathbf{u}_2$$

Direm que un conjunt de vectors $S_G=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_n\}$ és un *sistema generador d'un espai vectorial* **V**, si qualsevol vector d'aquest espai es pot posar com a combinació lineal dels vectors de S_G.

En aquest cas, direm que els vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_n$ generen l'espai vectorial **V**.

Exemple 28. El conjunt $C=\{\mathbf{u}_1\}$ format pel vector $\mathbf{u}_1=(1, 2)$ no és sistema generador de l'espai vectorial dels vectors del pla. Sols cal veure, per exemple, que el vector $\mathbf{u}=(1, 0)$ no es pot posar com a combinació lineal del vector donat. En altres paraules, no és cap múltiple seu.

Sí que ho seria en canvi el conjunt $S_G=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ on $\mathbf{u}_1=(1, 2)$ i $\mathbf{u}_2=(3, 4)$, ja que per un vector qualsevol $\mathbf{u}=(a, b)$ tindríem

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2 \Rightarrow (a, b)=\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)$$

Operant, resulta el sistema $\lambda_1+3.\lambda_2=a$ i $2.\lambda_1+4.\lambda_2=b$, que resolt dóna $\lambda_1=(-4.a+3.b)/2$ i $\lambda_2=(2.a-b)/2$.

En el cas particular del vector $\mathbf{u}=(1,0)$ seria $\lambda_1=-2$ i $\lambda_2=1$ i, efectivament, $-2.\mathbf{u}_1+1.\mathbf{u}_2=-2.(1, 2)+1.(3, 4)=(1,0)=\mathbf{u}$.

Donat un sistema generador S_G d'un espai vectorial **V**, ja sabem que qualsevol vector de l'espai es pot posar com a combinació lineal dels vectors del sistema. Direm que s'ha efectuat una *descomposició vectorial*.

També direm que S_G i S'_G són dos *sistemes generadors equivalents* si generen el mateix espai vectorial.

Exemple 29. El nou conjunt $S'_G=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ on $\mathbf{u}_3=(5, 6)$ i on els dos primers són els mateixos que en l'exemple anterior, també és sistema generador de l'espai vectorial dels vectors del pla.

Per a un vector qualsevol $\mathbf{u}=(a, b)$ tindríem

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\lambda_3.\mathbf{u}_3 \Rightarrow (a, b)=\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)+\lambda_3.(5, 6)$$

Ens quedarà el sistema $\lambda_1+3.\lambda_2+5.\lambda_3=a$ i $2.\lambda_1+4.\lambda_2+6.\lambda_3=b$. Si el resolem veurem que és indeterminat i té per infinites solucions totes depenent del paràmetre k,

$$\lambda_1=(-4.a+3.b+2.k)/2 \ , \ \lambda_2=(2.a-b-4.k)/2 \ \text{ i } \ \lambda_3=k$$

Pel cas particular del vector $\mathbf{u}=(1, 0)$ tindrem, després de simplificar,

$$\lambda_1=k-2 \ , \ \lambda_2=1-2.k \ \text{ i } \ \lambda_3=k$$

Si per exemple k=0 ens queda $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=0$, d'on s'obté la descomposició

$$\mathbf{u}=-2.\mathbf{u}_1+1.\mathbf{u}_2+0.\mathbf{u}_3$$

Si fos k=1, obtindríem la nova descomposició

$$\mathbf{u}=-1.\mathbf{u}_1-1.\mathbf{u}_2+1.\mathbf{u}_3$$

Igualment per a qualsevol valor real de k. Així, doncs, hi hauria infinites maneres de descompondre el vector $\mathbf{u}$ en funció dels vectors del sistema generador S'_G.

Observem que els sistemes S_G de l'exemple anterior i aquest S'_G són equivalents, perquè generen el mateix espai vectorial, que en aquest cas és el dels vectors del pla.

Anomenarem *combinació lineal nul·la* una combinació lineal de vectors que tenen com a resultat el vector nul. A partir d'aquesta definició podem dir que un conjunt de *vectors* són *linealment independents* si i només si l'única manera de poder escriure la combinació lineal nul·la és fer que tots els coeficients siguin nuls. En altres paraules,

Els vectors $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ seran linealment independents si i només si $\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+...+\lambda_n.\mathbf{u}_n=\mathbf{0}$ implica $\lambda_1=0, \lambda_2=0, ..., \lambda_n=0$.

Anomenarem *sistema lliure*, S_L, un conjunt de vectors linealment independents.

Exemple 30. Per la propietat (3) sabem que tot vector diferent del nul és linealment independent, ja que, per exemple:

$$\lambda_1.\mathbf{u}_1=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1.(1, 2)=(0, 0) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0$$

Així, el conjunt $S_L=\{\mathbf{u}_1\}$ és un sistema lliure.

També serà lliure el nou sistema $S'_L=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, on $\mathbf{u}_2=(3, 4)$, perquè imposant la combinació lineal nul·la,

$$\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)=(0, 0)$$

ens queda el sistema $\lambda_1+3.\lambda_2=0$ i $2.\lambda_1+4.\lambda_2=0$ que, si el resols, et donarà $\lambda_1=0$ i $\lambda_2=0$.

En canvi, el conjunt $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, on $\mathbf{u}_3=(5, 6)$, no és un sistema lliure, ja que de la combinació lineal nul·la

$$\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)+\lambda_3.(5, 6)=(0, 0)$$

s'obté el sistema $\lambda_1+3.\lambda_2+5.\lambda_3=0$ i $2.\lambda_1+4.\lambda_2+6.\lambda_3=0$ que és indeterminat, és a dir, té infinites solucions que depenen d'un paràmetre k

$$\lambda_1=k \ , \ \lambda_2=-2.k \quad \text{i} \quad \lambda_3=k$$

Observem que, a més de la solució trivial ($\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ i $\lambda_3=0$), que és l'única que hauria de tenir perquè el conjunt C fos un sistema lliure, té altres solucions, com per exemple (1, -2, 1), (2, -4, 2), (3, -6, 3),... totes elles proporcionals.

Donat el conjunt de vectors $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_n\}$, anomenarem *rang del sistema* el nombre màxim de vectors linealment independents.

Per calcular aquest rang, que simbolitzarem per $\rho(C)$, farem servir el *mètode de reducció de Gauss*, que, com sabem, consisteix a apuntar els vectors en forma matricial i després escalonar la matriu per mitjà de combinacions lineals entre els vectors fila o bé emprant la *regla del pivot*.

És clar que el nou sistema $S_L=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_\rho\}$, on $\rho\leq n$, serà un sistema lliure.

Exemple 31. Donat el conjunt $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de l'exemple anterior, trobarem un subconjunt que sigui lliure. Ho farem aplicant la regla del pivot en el mètode de reducció de Gauss,

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prescindint de l'última fila, que representa el vector nul i aquest no pot formar part mai d'un sistema lliure (ja que de $\lambda.\mathbf{0}=\mathbf{0}$ pot ser molt bé $\lambda\neq0$), ens queda el sistema lliure $S_L=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_2\}$, on $\mathbf{u}'_2=(0, 1)$.

Si un sistema de vectors no és lliure, l'anomenarem *sistema lligat* i el simbolitzarem per S_{LL}. Als seus *vectors* els anomenarem *linealment dependents*, ja que no són linealment independents.

Lògicament, si $S_{LL}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_n\}$ és un sistema lligat, de la combinació lineal nul·la $\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+...+\lambda_n.\mathbf{u}_n=\mathbf{0}$, ens ha de resultar que no tots els coeficients han de ser nuls.

En conseqüència, si suposem, per exemple, que $\lambda_1\neq 0$, en la combinació lineal nul·la podrem aïllar el primer vector, posar-lo en combinació lineal dels restants.

En general, si un sistema és lligat, existirà almenys un vector que es pugui posar en combinació lineal dels altres. Per aquest motiu es diu que els vectors són linealment dependents, relacionats per la combinació lineal nul·la que anomenem *equació de lligadura*.

Exemple 32. Ja sabem que el sistema $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, format pels vectors (1, 2), (3, 4) i (5, 6), respectivament, no és un sistema lliure. Serà, per tant, un sistema lligat. Apuntem l'equació lineal nul·la

$$\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)+\lambda_3.(5, 6) = (0, 0)$$

Si consultem l'exemple 30 veurem que una possible solució és $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ i $\lambda_3=1$, d'on obtenim l'equació de lligadura,

$$1.\mathbf{u}_1-2.\mathbf{u}_2+1.\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$$

Podem posar un dels seus vectors en combinació lineal dels altres dos. Per exemple:

$$\mathbf{u}_2=(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_3)/2$$

D'aquí es pot dir que el segon vector és la mitjana del primer i l'últim.

2.1.4 BASE D'UN ESPAI VECTORIAL. Direm que $B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_n\}$ és una *base* d'un espai vectorial **V** si i només si és a la vegada un sistema generador de V i un sistema lliure. Didàcticament, podem escriure:

BASE = SISTEMA GENERADOR + SISTEMA LLIURE

En altres paraules, una base d'un espai vectorial es pot considerar com un dels seus sistemes generadors format per vectors linealment independents.

Per tant, podrem trobar una base a partir d'un sistema generador aplicant el mètode de reducció de Gauss, ja que els vectors obtinguts són linealment independents, i el nou sistema obtingut continua sent generador (sols li hem tret vectors dependents).

Exemple 33. En els exemples anteriors hem vist que el conjunt $S_G=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ on $\mathbf{u}_1=(1, 2)$, $\mathbf{u}_1=(3, 4)$ i $\mathbf{u}_1=(5, 6)$, és un sistema generador de l'espai vectorial dels vectors del pla.

També hem aplicat el mètode de reducció de Gauss i hem obtingut el nou conjunt $B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_2\}$, on $\mathbf{u}'_2=(0, 1)$, i que, efectivament, és una base perquè és per hipòtesi un sistema lliure i també un sistema generador.

Comprovem-ho per un vector qualsevol del pla $\mathbf{u}=(a, b)$. Tenim $\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(0, 1)=(a, b)$, d'on ens resulta quasi directament $\lambda_1=a$ i $\lambda_2=b-2.a$. Així si $\mathbf{u}=(5, 6)$ tindrem $\mathbf{u}=5.\mathbf{u}_1-4.\mathbf{u}'_2$.

Donada una base $B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ i un vector $\mathbf{u}$ d'un espai vectorial **V**, en ser un sistema generador existiran escalars $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tals que

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_n.\mathbf{u}_n$$

Podem provar fàcilment que hi ha una *descomposició única* d'un vector segons els vectors d'una base. Imaginem-nos que hi hagués una altra descomposició

$$\mathbf{u}=\mu_1.\mathbf{u}_1+\mu_2.\mathbf{u}_2+\ldots+\mu_n.\mathbf{u}_n$$

Si restem ambdues descomposicions tindrem

$$\mathbf{0}=(\lambda_1-\mu_1).\mathbf{u}_1+(\lambda_2-\mu_2).\mathbf{u}_2+\ldots+(\lambda_n-\mu_n).\mathbf{u}_n$$

Notem que aquesta és la combinació lineal nul·la i que, en ser B una base, també és un sistema lliure. Aplicant la seva definició resulta

$$\lambda_1-\mu_1=0 \ , \quad \lambda_2-\mu_2=0 \ , \ldots, \lambda_n-\mu_n=0$$

És a dir, $\lambda_1=\mu_1, \lambda_2=\mu_2, \ldots, \lambda_n=\mu_n$, i així la descomposició és única.

Aquests coeficients únics $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, s'anomenen *components* del vector segons la base donada B. Ho escriurem en la forma

$$\mathbf{u}=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_B$$

Exemple 34. Sigui $B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, on $\mathbf{u}_1=(1, 2)$ i $\mathbf{u}_2=(3, 4)$, una base dels vectors del pla i sigui $\mathbf{u}=(5, 6)$ un vector qualsevol. Ja hem trobat que $\mathbf{u}=-1.\mathbf{u}_1+2.\mathbf{u}_2$, per la qual cosa podem posar $\mathbf{u}=(-1, 2)_B$.

Com a exercici, comprova que $B'=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, on $\mathbf{u}'_1=(-1, 0)$ i $\mathbf{u}'_2=(3, 2)$, és una nova base dels vectors del pla. Si calcules les components del vector donat $\mathbf{u}=(5, 6)$ respecte a aquesta base, veuràs que el podem escriure com a $\mathbf{u}=(4, 3)_{B'}$.

De les infinites bases que pot tenir un espai vectorial, la més senzilla és la *base canònica*, $B_C=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, formada pels *vectors canònics*, que són expressats per

$$\mathbf{e}_1=(1, 0, \ldots, 0), \ \mathbf{e}_2=(0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n=(0, 0, \ldots, 1)$$

Ja hem estudiat els *casos particulars* del pla i de l'espai. En el pla, la base canònica és $B_C=\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, on $\mathbf{i}=(1, 0)$ i $\mathbf{j}=(0,1)$, i en l'espai, la base canònica és $B_C=\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, on ara $\mathbf{i}=(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}=(0, 1, 0)$ i $\mathbf{k}=(0, 0, 1)$.

Per a un vector qualsevol, $\mathbf{u}=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, d'un espai vectorial, si no hi assenyalem cap base, voldrà dir que se sobreentén que és la canònica i es podrà escriure de seguida la *descomposició canònica*

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{e}_1+\lambda_2.\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda_n.\mathbf{e}_n$$

Exemple 35. Donat el vector de l'espai $\mathbf{u}=(2, 3, 4)$, expressat en la base canònica, posem $\mathbf{u}=2.\mathbf{e}_1+3.\mathbf{e}_2+4.\mathbf{e}_3$ o també $\mathbf{u}=2.\mathbf{i}+3.\mathbf{j}+4.\mathbf{k}$. En efecte,

$$\mathbf{u}=2.\mathbf{i}+3.\mathbf{j}+4.\mathbf{k}= 2.(1, 0, 0)+3.(0, 1, 0)+4.(0, 0, 1)= (2, 3, 4)$$

Si la base fos diferent de la canònica, per exemple $B=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, on $\mathbf{u}_1=(4, 1, 6)$, $\mathbf{u}_2=(2, 7, 0)$ i $\mathbf{u}_3=(0, 5, -2)$, les seves components serien ara $\mathbf{u}=(3, -5, 7)_B$, ja que

$$\mathbf{u}=3.\mathbf{u}_1-5.\mathbf{u}_2+7.\mathbf{u}_3=3.(4, 1, 6)-5.(2, 7, 0)+7.(0, 5, -2)=\ldots=(2, 3, 4).$$

Siguin $S_L=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_m\}$ i $B=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ i un sistema lliure i una base d'un espai vectorial $\mathbf{V}=(V, +, .)$. Es prova, mitjançant el *teorema de Steinitz*, que necessàriament ha de ser $m \leq n$ i que el sistema lliure es pot ampliar amb n-m vectors més fins a obtenir una altra base de l'espai vectorial

$$B'=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$

Com a *corol·lari* (o conseqüència) important d'aquest teorema es veu que dues bases qualssevol B_1 i B_2 del mateix espai vectorial hauran de tenir el mateix nombre de vectors.

En efecte, si $B_1=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ i $B_2=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_m\}$ són dues bases, i si apliquem dues vegades el teorema de Steinitz, veurem que d'una banda $n \leq m$ i de l'altra $m \leq n$. Per tant, $m=n$.

Anomenem *dimensió d'un espai vectorial*, dim(**V**), aquest nombre determinat de vectors que tenen totes les seves bases.

Exemple 36. Totes les bases dels vectors del pla, com per exemple la canònica, $B_C=\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, estan formades per dos vectors. Direm, doncs, que la dimensió de l'espai vectorial dels vectors del pla és 2 (també diem que un pla té dues dimensions).

Podem simbolitzar aquest espai vectorial com a V_2, indicant que la dimensió és dos, o bé com R^2, entenent així que els vectors són parelles de nombres reals.

El mateix podem dir dels vectors de l'espai, però ara la dimensió és 3 perquè totes les seves bases consten de tres vectors. El simbolitzarem per V_3 o bé per R^3.

Podem deduir *altres conseqüències* del teorema de Steinitz, aplicades a un espai vectorial de dimensió n, dim(**V**)=n. Aquestes són:

(1) Si un sistema de m vectors és generador, llavors $m \geq n$.

(2) Si un sistema de m vectors és lliure, llavors $m \leq n$.

(3) Si un sistema de n vectors és generador, també serà base.

(4) Si un sistema de n vectors és lliure, també serà base.

Aquestes conseqüències ens podran servir per a demostrar que un conjunt de vectors és una base.

Exemple 37. Provem que $B=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, on $\mathbf{v}_1=(1, 2)$ i $\mathbf{v}_1=(3, 4)$, és una base dels vectors del pla. Veiem primer que és un sistema lliure,

$$\lambda_1.\mathbf{v}_1+\lambda_2.\mathbf{v}_2=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)=(0, 0)$$

Resolent el sistema resultant, $\lambda_1+3.\lambda_2=0$ i $3.\lambda_1+4.\lambda_2=0$, ens donarà $\lambda_1=0$ i $\lambda_2=0$, la qual cosa vol dir que és un sistema lliure.

Aplicant ara la conseqüència (4) del teorema de Steinitz, com que el nombre de vectors és igual a la dimensió de l'espai vectorial, dim(**V**)=2, i com que el sistema és lliure, també serà una base.

També podiem haver provat que $B=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ és un sistema generador, fent $\lambda_1.(1, 2)+\lambda_2.(3, 4)=(a, b)$ i aïllant λ_1 i λ_2. Obtindríim $\lambda_1=(-4.a+3.b)/2$ i $\lambda_2=(2.a-b)/2$, que vol dir que per cada vector $\mathbf{v}=(a, b)$ hi haurà una descomposició. És a dir, és un sistema generador.

Si apliquem la conseqüència (3) del teorema de Steinitz, veurem que el sistema donat també és una base.

2.1.5 CANVI DE BASE. Estudiarem ara el *canvi de base* en un espai vectorial V_n, és a dir, un espai vectorial **V** de dimensió n, la qual cosa vol dir que totes les bases constaran de n vectors.

Siguin dues bases, $B_i=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ i $B_f=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots \mathbf{u}'_n\}$, que anomenem *base inicial* i *base final*, respectivament. Com que cada vector consta de n components, podem escriure els vectors de la base com a columnes d'una matriu quadrada que anomenarem *matriu de la base*. Òbviament, tindrem la *matriu de la base inicial* i la *matriu de la base final* que, per no complicar, simbolitzarem igual que abans, B_i i B_f, respectivament, $B_i=(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_n)$ i $B_f=(\mathbf{u}'_1\ \mathbf{u}'_2\ \ldots\ \mathbf{u}'_n)$.

Exemple 38. Sigui la base inicial $B_i=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, on $\mathbf{u}_1=(1, 2)$ i $\mathbf{u}_2=(3, 4)$, i la base final $B_f=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, on $\mathbf{u}'_1=(-1, 0)$ i $\mathbf{u}'_2=(3, 2)$.

Fent servir vectors columna, podem escriure les matrius de les bases inicial i final següents:

$$B_i=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B_f=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donat un vector $\mathbf{u}$ de l'espai vectorial, el podrem descompondre segons les seves bases,

$$\mathbf{u}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{Bi} \quad \text{i} \quad \mathbf{u}=(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{Bf}$$

La primera expressió l'anomenarem *components inicials* del vector, i la segona, *components finals*.

Si volem, també podem escriure matricialment aquests vectors. Farem servir matrius columna:

$$X_i=(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)' \quad \text{i} \quad X_f=(x'_1\ x'_2\ \ldots\ x'_n)'$$

De la primera, en direm *matriu de les components inicials*, i de la segona, *matriu de les components finals*. Observeu que la (') indica matriu transposada, és a dir, està escrita com una fila però indica una columna.

Com que $\mathbf{u}=(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)_{Bi}$ i com que $B_i=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, vol dir que es verifica $\mathbf{u}=x_1.\mathbf{u}_1+x_2.\mathbf{u}_2+\ldots+x_n.\mathbf{u}_n$. Fent servir les matrius de la base inicial i de les components inicials, podem escriure $\mathbf{u}=B_i \bullet X_i$.

De la mateixa manera $\mathbf{u}=(x'_1\ x'_2\ \ldots\ x'_n)_{Bf}$ i $B_f=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$, on es verifica que $\mathbf{u}=x'_1.\mathbf{u}'_1+x'_2.\mathbf{u}'_2+\ldots+x'_n.\mathbf{u}'_n$. Expressat en forma matricial, tindrem $\mathbf{u}=B_f \bullet X_f$.

Exemple 39. En l'exemple 34 ja vam calcular les components del vector $\mathbf{u}=(5, 6)$ segons les bases B_i i B_f de l'exemple anterior. Aquestes són $\mathbf{u}=(-1, 2)_{Bi}$ i $\mathbf{u}=(4, 3)_{Bf}$.

També les podem escriure matricialment, i obtindrem les matrius de les components inicials i finals següents $X_i=(-1\ 2)'$ i $X_f=(4\ 3)'$ o bé

$$X_i=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad X_f=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Comprovem que es verifiquen les relacions $\mathbf{u}=B_i \bullet X_i$ i $\mathbf{u}=B_f \bullet X_f$.

$$B_i \bullet X_i=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}=\mathbf{u} \quad \text{i} \quad B_f \bullet X_f=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}=\mathbf{u}$$

En l'espai vectorial **V** tenim les matrius de les bases inicial i final,

$$B_i=(\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2\ \ \dots\ \mathbf{u}_n) \text{ i } B_f=(\mathbf{u}'_1\ \ \mathbf{u}'_2\ \ \dots\ \mathbf{u}'_n)$$

Mirem de trobar una *relació entre les dues bases*. Com que $\mathbf{u}'_1$ és un vector de l'espai vectorial i B_i una base (i per tant, sistema generador), existiran els escalars $p_{11}, p_{21}, \dots, p_{n1}$ tals que

$$\mathbf{u}'_1=p_{11}.\mathbf{u}_1+p_{21}.\mathbf{u}_2+\dots+p_{n1}.\mathbf{u}_n$$

Pasarà el mateix per als altres vectors de la base B_f i podrem escriure el sistema en forma clàssica i també en forma matricial

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_1=p_{11}.\mathbf{u}_1+p_{21}.\mathbf{u}_2+\dots+p_{n1}.\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}'_2=p_{12}.\mathbf{u}_1+p_{22}.\mathbf{u}_2+\dots+p_{n2}.\mathbf{u}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{u}'_n=p_{1n}.\mathbf{u}_1+p_{2n}.\mathbf{u}_2+\dots+p_{nn}.\mathbf{u}_n \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

Transposant l'última expressió, i com que la transposada del producte és igual al producte de les transposades canviades d'ordre,

$$(\mathbf{u}'_1\ \ \mathbf{u}'_2 \cdots \mathbf{u}'_n) = (\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n) \bullet \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Ja coneixem les dues primeres matrius, que són la matriu de la base final B_f i la matriu de la base inicial B_i. L'altra matriu l'anomenem *matriu de pas* i la simbolitzem amb la lletra P,

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

És molt important veure que la matriu de pas té per vectors columna les components dels vectors de la base final referits a la base inicial.

Per tant, es podrà escriure $B_f=B_i \bullet P$. Aquesta relació ens servirà per a trobar les *fórmules del canvi de base*, unes fórmules on, donades les coordenades finals, podem trobar les inicials, o viceversa.

En efecte, un mateix vector $\mathbf{u}$, segons si està referit a la base inicial B_i o a la base final B_f, tindrà les matrius de components X_i o X_f, respectivament.

Es verificarà que $\mathbf{u}=B_i \bullet X_i$ i també $\mathbf{u}=B_f \bullet X_f$. Igualant, $B_i \bullet X_i=B_f \bullet X_f$. Com que $B_f=B_i \bullet P$, substituint $B_i \bullet X_i=B_i \bullet P \bullet X_f$. i simplificant

$$\boxed{X_i=P \bullet X_f}$$

Fórmula que, donades les coordenades finals, ens permet trobar les inicials. Multiplicant a l'esquerra per P^{-1}, ens queda

$$\boxed{X_f=P^{-1} \bullet X_i}$$

Ara, donades les coordenades inicials, si apliquem aquesta fórmula, podrem calcular les coordenades finals.

Exemple 40. Tenim la base inicial $B_i=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, on $\mathbf{u}_1=(1, 2)$ i $\mathbf{u}_2=(3, 4)$, i la base final $B_f=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, on $\mathbf{u}'_1=(-1, 0)$ i $\mathbf{u}'_2=(3, 2)$.

A partir d'aquestes dades ja podem calcular la matriu de pas P. Posarem els vectors de la base final en funció dels de la inicial

$$\mathbf{u}'_1=p_{11}.\mathbf{u}_1+p_{21}.\mathbf{u}_2 \quad \text{i} \quad \mathbf{u}'_2=p_{12}.\mathbf{u}_1+p_{22}.\mathbf{u}_2$$

Substituint per les components en la primera equació,

$$(-1, 0)=p_{11}.(1, 2)+p_{21}.(3, 4)$$

Resolent el sistema $p_{11}+3.p_{21}=-1$ i $2.p_{11}+4.p_{21}=0$ tindrem $p_{11}=2$ i $p_{21}=-1$. Aquesta serà la primera columna de la matriu de pas.

Procedint igual amb la segona equació, veurem que la segona columna de la matriu de pas tindrà de termes $p_{12}=-3$ i $p_{22}=2$. La matriu de pas serà

$$P=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Suposem ara que coneixem les components d'un vector respecte a la base inicial, $\mathbf{u}=(-1, 2)_{B_i}$, ¿com podrem trobar les seves components respecte a la base final?

Haurem de fer un canvi de base. Com que sabem P, $X_i=(-1\ 2)'$ i volem saber X_f, haurem d'aplicar que $X_f=P^{-1}\bullet X_i$. Si trobes primer la matriu inversa P^{-1} i substitueixes, obtindràs:

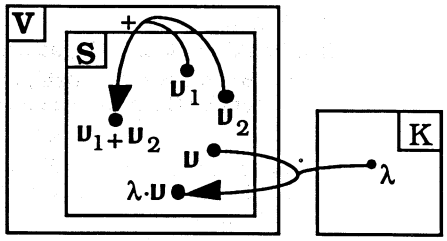
$$X_f=P^{-1}\bullet X_i=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Així $X_f=(4\ 3)'$ i tindrem $\mathbf{u}=(4, 3)_{B_f}$.

2.2 SUBESPAI VECTORIAL

2.2.1 DEFINICIÓ DE SUBESPAI VECTORIAL. Tenim que **V**=(V,+,.) és un espai vectorial sobre un cos K i que S és un subconjunt de V diferent del buit. Direm que **S**=(S,+,.) és un *subespai vectorial* de l'espai vectorial **V** si i només si **S** és un espai vectorial per ell mateix.

En conseqüència, la terna (S,+,.) haurà de complir els deu axiomes de definició. Alguns d'ells, com per exemple el (III) d'associativitat, ja es compliran, però altres, com el (IV) d'el. neutre, s'hauran d'estudiar.



Per tant, resulta que els deu axiomes es podran resumir en:

Condició doble. La suma de vectors i el producte d'un escalar per un vector són operaciones tancades en S:

(1) La suma de dos vectors de S és també un vector de S.

(2) El producte de qualsevol escalar per un vector de S és també un vector de S.

Condició única. La combinació lineal és una operació tancada en S.

(3) Donats dos escalars qualssevol i dos vectors de S, la seva combinació lineal també és un vector de S.

Exemple 40. Partim de l'espai vectorial **V** dels vectors del pla i del subconjunt $S=\{(x,y)\in V \ / \ y=k.x, \ k\in R\}$. Provem que és un subespai vectorial de **V** amb la condició doble.

(1) SUMA. Si $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in V$ tindrem $\mathbf{u}_1=(x_1, y_1)$ i $\mathbf{u}_2=(x_2, y_2)$. Si ambdós vectors pertanyen a S, compliran $y_1=k.x_1$ i $y_2=k.x_2$.

Formem ara el vector suma

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

Estudiem si aquest vector $\mathbf{u}=(x, y)$, on $x=x_1+x_2$ i $y=y_1+y_2$, és també de S. Haurà de complir $y=k.x$.

$$y=y_1+y_2=k.x_1+k.x_2=k.(x_1+x_2)=k.x$$

Es complirà, doncs, la primera condició.

(2) PRODUCTE EXTERN. Si $\lambda\in K$ i $\mathbf{u}\in S$ serà $\mathbf{u}=(x, y)$ on $y=k.x$. Formem el producte extern, $\mathbf{w}=\lambda.\mathbf{u}=\lambda.(x, y)=(\lambda.x, \lambda.y)$.

Mirem si el nou vector $\mathbf{w}=(x', y')$, on $x'=\lambda.x$ i $y'=\lambda.y$, pertany a S, és a dir, si es compleix $y'=k.x'$,

$$y'=\lambda.y=\lambda.(k.x)=k.(\lambda.x)=k.x'$$

Com que també es compleix la segona condició, ja podem assegurar que S és un subespai vectorial de V.

En tot espai vectorial V sempre hi ha dos subespais que es poden considerar *casos extrems*:

- El subespai vectorial format per un únic vector, el nul, $S=\{\mathbf{0}\}$.
- El subespai vectorial format per tots els vectors, S=V.

D'aquests dos subespais vectorials en direm *subespais impropis*. Lògicament, tots els altres seran els *subespais propis*.

També és clar que la *dimensió d'un subespai vectorial* serà inferior o igual a la dimensió de l'espai vectorial d'origen. Abreujadament, si dim(S)=m i dim(V)=n, llavors $m\leq n$.

Exemple 41. Hem vist que la terna $\mathbf{S}=(S,+,.)$, on S és el subconjut $S=\{(x,y)\in V \ / \ y=k.x, \ k\in R\}$, és un subespai vectorial dels vectors del pla.

Trobem la seva dimensió, calculant abans una de les seves bases. Els vectors de S seran de la forma

$$\mathbf{u}=(x, y)=(x, k.x)=x.(1, k)$$

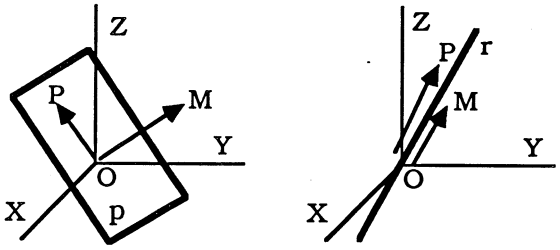
Com que tots seran múltiples del vector (1, k), resulta que la base pot ser $B=\{(1, k)\}$ i a com que està formada per un sol vector, deduïm que dim(S)=1.

En efecte, si dibuixéssim la gràfica $y=k.x$ en el pla, veuríem que és una recta que passa per l'origen (és lògic perquè la seva dimensió és 1). Observeu que la suma de dos vectors d'aquesta recta serà un altre vector de la mateixa recta, i que el producte d'un nombre real per un vector de la recta també és un altre vector de la mateixa recta.

Els subespais impropis serien els formats només per l'origen de coordenades (vector nul), de dimensió 0, i el mateix pla (tot l'espai vectorial) de dimensió 2.

2.2.2 EXEMPLES DE SUBESPAIS. Com que l'espai vectorial **V** dels *vectors de l'espai* té de dimensió 3, tindrà com a subespais impropis el format pel vector nul, de dimensió zero, i l'espai total, de dimensió 3. Els que ens interessen, però, són els subespais propis.

Els subespais propis són els *plans i rectes que passen per l'origen*, ja que tots els subespais han de tenir l'element nul. Els primers són de dimensió 2 i els segons 1.



En el pla que passa per l'origen tenim dos vectors

$$\mathbf{u}'=\overrightarrow{OM}=(a,\ b,\ c) \quad \text{i} \quad \mathbf{u}=\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z)$$

El primer representa un vector perpendicular al pla, que anomenem *vector característic*, i el segon és un vector del pla, anomenat *vector de posició*. Com que aquests vectors són perpendiculars, el seu producte escalar s'haurà d'anul·lar:

$$\mathbf{u}'\bullet\mathbf{u}=(a,\ b,\ c)\bullet(x,\ y,\ z)=a.x+b.y+c.z=0$$

Per tant, l'equació d'un pla que passa per l'origen serà de la forma $p=\{(x,\ y,\ z)\ /\ a.x+b.y+c.z=0\}$

Exemple 42. Comprovem que $S=\{(x,\ y,\ z)\ /\ 3.x+2.y+1.z=0\}$ és un subespai de V_3. Farem servir la condició única.

Siguin $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in S$, llavors $\mathbf{u}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ i $\mathbf{u}_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ on es verifica $3.x_1+2.y_1+z_1=0$ i $3.x_2+2.y_2+z_2=0$.

Per a qualssevol $\lambda_1,\lambda_2\in R$ formem la combinació lineal

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2=\lambda_1.(x_1,\ y_1,\ z_1)+\lambda_2.(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

Operant ens quedarà de la manera

$$\mathbf{u}=(\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2,\ \lambda_1.y_1+\lambda_2.y_2,\ \lambda_1.z_1+\lambda_2.z_2)$$

Mirem si aquest vector $\mathbf{u}=(x,\ y,\ z)$ complirà l'equació del subespai,

$$3.x+2.y+1.z=3.(\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2)+2.(\lambda_1.y_1+\lambda_2.y_2)+(\lambda_1.z_1+\lambda_2.z_2)=$$

$$=\ldots=\lambda_1.(3.x_1+2.y_1+z_1)+\lambda_2.(3.x_2+2.y_2+z_2)=\lambda_1.0+\lambda_2.0=0$$

Per tant, el vector combinació lineal compleix la condició única i així S serà un subespai vectorial de V_3.

Per comprovar la dimensió, primer trobarem una base de S. Els vectors de S compliran $3.x+2.y+1.z=0$, o també $z=-3.x-2.y$. Per tant, un vector qualsevol de S serà

$$\mathbf{u}=(x,\ y,\ z)=(x,\ y,\ -3.x-2.y)=(x,\ 0,\ -3.x)+(0,\ y,\ -2.y)=x.(1,\ 0,\ -3)+y.(0,\ 1,\ -2)$$

És clar que una base pot ser $B=\{(1,\ 0,\ -3),\ (0,\ 1,\ -2)\}$, ja que generen qualsevol vector de S (la x i la y poden ser qualssevol) i a més són linealment independents (no són proporcionals).

Com que la base consta de dos vectors, tindrem $\dim(S)=2$, la qual cosa ja sabiem, perquè S és un pla.

Observant la figura de la plana anterior, també aquí, en la recta en l'espai, ens trobem amb els mateixos vectors: el $\mathbf{u}=(a, b, c)$, que ara anomenarem *vector direccional* perquè indica la direcció de la recta, i el $\mathbf{v}=(x, y, z)$, que continuem dient vector de posició.

Ara, però, els dos vectors seran paral·lels, la qual cosa significa que les seves components han de ser proporcionals

$$x/a = y/b = z/c$$

Conseqüentment, les equacions de les rectes en l'espai seran de la forma $S=\{(x, y, z) \ / \ x/a= y/b= z/c\}$.

Fixem-nos que la condició anterior es pot descompondre en dues equacions: $x/a=z/c$ i $y/b=z/c$. Operant, queda $c.x-a.z=0$ i $c.y-b.z=0$, que són les equacions de dos plans que passen per l'origen i tenen per vectors característics $(c, 0, -a)$ i $(0, c, -b)$, respectivament. Per tant, la recta anterior podràser definida com la intersecció de dos plans.

Exemple 43. Sigui $S=\{(x, y, z) \ / \ x/3 =y/2 =z/1\}$ un subespai de V_3 que, com hem dit, representa una recta que passa per l'origen i porta la direcció del vector $\mathbf{u}=(3, 2, 1)$.

Podem considerar-la com a intersecció dels plans $x/3=z/1$ i $y/2=z/1$, és a dir, $x-3.z=0$ i $y-2.z=0$. Podriem escriure S com $S=\{(x, y, z) \ / \ x-3.z=0 \text{ i } y-2.z=0\}$.

Com a exercici, prova que S és en efecte un subespai vectorial, on ara s'hauran de complir dues condicions, $x=3.z$ i $y=2.z$.

Per saber la dimensió, trobarem primer una base. Els vectors de S seran de la forma

$$\mathbf{v}=(x, y, z)=(3.z, 2.z, z)=z.(3, 2, 1)$$

Una base pot ser $B=\{(3, 2, 1)\}$, que és evident perquè aquest és el vector direccional i on tots els vectors de S són múltiples seus. Per tant, $\dim(S)=1$.

Les equacions que hem fet servir per determinar els subespais vectorials s'anomenen *equacions cartesianes*. Si la dimensió de l'espai vectorial és $\dim(V)=n$ i la del subespai, $\dim(S)=m$, el nombre d'equacions serà $p=n-m$ i seran de la forma

$$\begin{cases} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\ldots+a_{1n}.x_n=0 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\ldots+a_{2n}.x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}.x_1+a_{p2}.x_2+\ldots+a_{pn}.x_n=0 \end{cases}$$

Una altra manera d'expressar els subespais és fent servir les *equacions paramètriques*, en les quals cada variable està aïllada i en el segon membre intervenen m paràmetres. Tenen la forma:

$$\begin{cases} x_1=b_{11}.\lambda_1+b_{12}.\lambda_2+\ldots+b_{1m}.\lambda_m \\ x_2=b_{21}.\lambda_1+b_{22}.\lambda_2+\ldots+b_{2m}.\lambda_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=b_{n1}.\lambda_1+b_{n2}.\lambda_2+\ldots+b_{nm}.\lambda_m \end{cases}$$

Donant valors a cadascun dels m paràmetres, anirem obtenint els diferents punts del subespai.

Exemple 44. En el pla S={(x, y, z) / 3.x+2.y+z=0}, l'equació cartesiana és la donada, 3.x+2.y+z=0. Com que m=dim(S)=2, hi haurà dos paràmetres λ_1 i λ_2 que podem igualar, per exemple, a les dues últimes variables i després aïllar la x.

Les equacions paramètriques seran $x=(-2.\lambda_1-\lambda_2)/3$, $y=\lambda_1$ i $z=.\lambda_2$.

En el cas de la recta S={(x, y, z) / x/3 =y/2 =z/1}, les equacions cartesianes (n'hi ha dues perquè p=n-m=3-1=2) seran x/3=z/1 i y/2=z/1, o millor x-3.z=0 i y-2.z=0.

Quant a les equacions paramètriques, com que m=1, hi haurà un sol paràmetre que podem igualar a l'última variable. Deduïm de seguida que les equacions paramètriques seran $x=3.\lambda$, $y=2.\lambda$ i $z=\lambda$.

Donat un espai vectorial **V**, un altre exemple de subespai és el *subespai engendrat per un sistema de vectors* o *subespai clausura.*

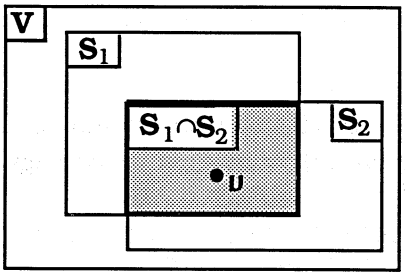
Es parteix d'un conjunt de vectors $C=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ i es formen amb ells totes les combinacions lineals possibles. Es prova fàcilment que el nou conjunt obtingut S(C) és un subespai vectorial de **V**.

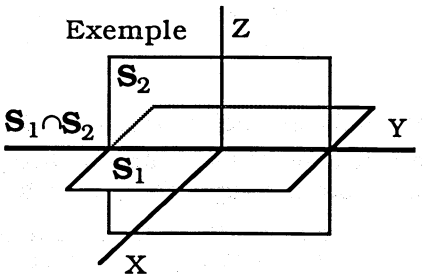
Exemple 45. En V_3 tenim el conjunt C format pels vectors $\mathbf{u}_1=(1, 0, -3)$ i $\mathbf{u}_2=(0, 1, -2)$. Si formem totes les combinacions lineals possibles, obtindrem vectors de la forma

$$\mathbf{u}=x.\mathbf{u}_1+y.\mathbf{u}_2=x.(1, 0, -3)+y.(0, 1, -2)=(x, y, -3.x-2y)$$

Com que l'última component ha de ser z, igualant, z=-3.x-2.y, o també 3.x+2.y+z=0, que com sabem és un pla que passa per l'origen, és a dir un subespai vectorial.

2.2.3 SUBESPAIS INTERSECCIÓ I SUMA. Tenim dos subespais $\mathbf{S}_1$ i $\mathbf{S}_2$ d'un espai vectorial $\mathbf{V}=(V,+,.)$ i formem el conjunt intersecció de S_1 i S_2 definit per $S_1 \cap S_2=\{\mathbf{u} \in V \ / \ \mathbf{u} \in S_1 \wedge \mathbf{u} \in S_2\}$.





Es prova fàcilment que la terna $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2=(S_1 \cap S_2,+,.)$ és un subespai vectorial de V, anomenat *subespai intersecció.*

Exemple 46. En la figura tenim el subespais S_1=pla XY i S_2=pla YZ. Si fem la intersecció obtindrem $S_1 \cap S_2$=eix Y que, en ser una recta, és també un subespai vectorial.

Fem-ho una mica més complicat. Partim dels subespais de V_3,

$\mathbf{S}_1$={(x, y, z) / 3.x+2.y+z=0} i $\mathbf{S}_2$={(x, y, z) / 4.x+5.y+6.z=0}

Sabem que representen dos plans i que la seva intersecció serà una recta de l'espai donada per

$$\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \{(x, y, z) \ / \ 3.x+2.y+z=0 \wedge 4.x+5.y+6.z=0\}$$

Les equacions anteriors són les cartesianes de la recta. Per trobar les equacions paramètriques, resoldrem el sistema i, com que la dimensió de la recta és 1, voldrà dir que hi haurà un sol paràmetre. Posarem $z=\lambda$.

El sistema serà $3.x+2.y=-\lambda$ i $4.x+5.y=-6.\lambda$

Resolt ens queda, $x=\lambda$ i $y=-2.\lambda$. Aïllant les λ i igualant, ens queda l'equació de la recta

$$x/1 = y/(-2) = z/1$$

Veiem que un vector director de la recta és $\mathbf{u}=(1, -2, 1)$ i la base la podrem considerar formada per un sol vector $B=\{\mathbf{u}\}$. Per tant, la dimensió és $\dim(\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2)=1$.

Si la intersecció de dos subespais és $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \{\mathbf{0}\}$, és a dir, que es redueix al vector nul, direm que $\mathbf{S}_1$ i $\mathbf{S}_2$ són dos *subespais independents*.

Exemple 47. Els dos subespais de l'exemple anterior no són independents, perquè la seva intersecció és una recta.

Si que no ho seran en canvi els següents subespais que representen un pla i una recta, respectivament

$\mathbf{S}_1=\{(x, y, z) \ / \ 3.x+2.y+z=0\}$ i $\mathbf{S}_3=\{(x, y, z) \ / \ x/3=y/2=z/1\}$

Comprovem-ho. El subespai intersecció serà

$$S_1 \cap S_3 = \{(x, y, z) \ / \ 3.x+2.y+z=0 \wedge x/3=y/2=z/1\}$$

Podrem resoldre aquest sistema passant la recta a paramètriques, per la qual cosa igualarem a λ i aïllarem les variables, cosa que ens donarà $x=3.\lambda$, $y=2.\lambda$ i $z=\lambda$.

Substituint en l'equació del pla, $3.(3.\lambda)+2.(2.\lambda)+\lambda=0$, $14.\lambda=0$, $\lambda=0$. Tornant a substituir en les paramètriques, ens queda $x=0$, $y=0$ i $z=0$.

Concloem que $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_3 = \{\mathbf{0}\}$ i en conseqüència els subespais donats són independents.

Si amb els subespais $\mathbf{S}_1$ i $\mathbf{S}_2$ de l'espai vectorial $\mathbf{V}$ fem el seu conjunt unió $S_1 \cup S_2 = \{\mathbf{u} \in V \ / \ \mathbf{u} \in S_1 \vee \mathbf{u} \in S_2\}$, es pot veure de seguida que no pot ser cap subespai vectorial.

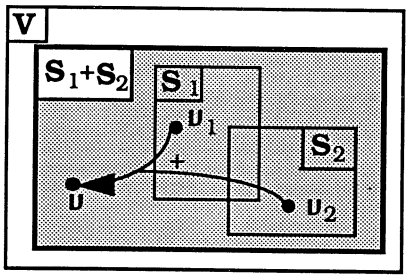
Exemple 48. Podem suposar que en V_3 els subespais són $\mathbf{S}_1$=eix X i $\mathbf{S}_2$=eix Y. El conjunt unió no és el pla XY, sinó el subconjunt $S_1 \cup S_2$=(eix X)$\cup$(eix Y).

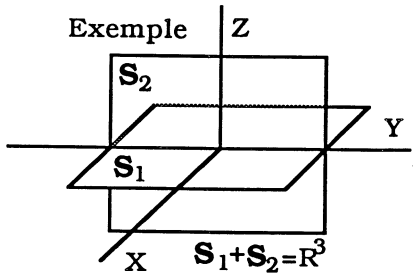
Aquest conjunt no és subespai vectorial, ja que si agafem dos vectors de $S_1 \cup S_2$, per exemple $\mathbf{u}_1=(1, 0, 0)$ i $\mathbf{u}_2=(0, 1, 0)$, la seva suma hauria de pertànyer a $S_1 \cup S_2$, ja que s'hauria de verificar la condició (1) de subespai vectorial.

Però $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=(1, 0, 0)+(0, 1, 0)=(1, 1, 0)$ i aquest vector no pertany ni a S_1 (no és de l'eix X) ni a S_2 (no és de l'eix Y). En conclusió $v \notin S_1 \cup S_2$, i així, en general, la unió de subespais no serà un subespai vectorial.

Un subespai important és el *subespai suma*, $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$, on cadascun dels seus vectors s'obtindrà sumant un vector de $\mathbf{S}_1$ amb un altre de $\mathbf{S}_2$. Simbòlicament

$$\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2=\{\mathbf{u}\in V \ / \ \mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2 \ , \ \mathbf{u}_1\in S_1 \ \wedge \ \mathbf{u}_2\in S_2\}$$





Es pot provar com a exercici que la terna $(S_1+S_2,+,.)$ és efectivament un subespai vectorial de $(V,+,.)$. Nosaltres ho comprovarem amb un cas particular

Exemple 49. En la figura superior tenim $\mathbf{S}_1$=pla XY i $\mathbf{S}_2$=pla YZ. Si sumem un vector de S_1 amb un de S_2 podem obtenir qualsevol vector de l'espai. Per tant, $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2=V$.

Siguin ara els dos subespais següents que representen dues rectes de l'espai,

$$\mathbf{S}_3=\{(x, y, z) \ / \ x/3=y/2=z/1\} \quad \text{i} \quad \mathbf{S}_4=\{(x, y, z) \ / \ x/4=y/5=z/6\}$$

Passant a paramètriques les dues rectes tenim

$$\mathbf{S}_3=\{x=3.\lambda, \ y=2.\lambda, \ z=\lambda\} \quad \text{i} \quad \mathbf{S}_4=\{x=4.\mu, \ y=5.\mu, \ z=6.\mu\}$$

Obtenim el subespai $\mathbf{S}_3+\mathbf{S}_4$ sumant un vector de S_3, $\mathbf{u}_3=(3.\lambda, 2.\lambda, \lambda)=\lambda.(3, 2, 1)$, amb un de S_4, $\mathbf{u}_4=(4.\mu, 5.\mu, 6.\mu)=\mu.(4, 5, 6)$,

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_4=\lambda.(3, 2, 1)+\mu.(4, 5, 6)$$

Com que v és un vector de V serà v=(x, y, z) i, fent operacions, veiem que les equacions paramètriques del pla resultant són:

$$x=3.\lambda+4.\mu \ , \ y=2.\lambda+5.\mu \ , \ z=1.\lambda+6.\mu$$

Podem deduir l'equació cartesiana del pla, resolent el sistema format per les dues primeres equacions, $\lambda=(5.x-4.y)/7$ i $\mu=(-2.x+3.y)/7$, i substituint en la tercera equació, $z=1.\lambda+6.\mu$.

Operant ens quedarà, $x-2.y+z=0$, que és un pla de vector característic (o vector perpendicular) $\mathbf{u}'=(1, -2, 1)$.

Observa que podies haver deduït directament aquest vector (i per tant, l'equació del pla) veient que $\mathbf{u}'$ ha de ser perpendicular tant al vector director de la primera recta, $\mathbf{u}_1=(3, 2, 1)$, com al de la segona, $\mathbf{u}_2=(4, 5, 6)$, és a dir, el vector característic del pla tindrà la direcció del seu producte vectorial, $\mathbf{u}'=\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2$. Comprova-ho.

Si per a dos subespais $\mathbf{S}_1$ i $\mathbf{S}_2$ d'un espai vectorial $(V,+,.)$ trobem els subespais intersecció $\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2$ i suma $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$, es pot demostrar que les seves dimensions verifiquen la següent *relació de Grassmann*:

$$\dim(\mathbf{S}_1) + \dim(\mathbf{S}_2) = \dim(\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2) + \dim(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)$$

Exemple 50. En l'exemple de la figura teníem dos plans que es tallaven amb una recta i on la suma era tot l'espai. La relació de Grassmann és 2+2=1+3.

En l'exemple anterior eren dues rectes que es tallaven en un punt i on la suma era un pla. En aquest cas la relació de Grassmann és 1+1=0+2.

Com a exercici pots trobar el subespai suma dels subespais

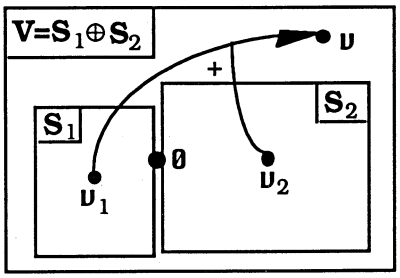
$$S_1=\{(x, y, z) \ / \ 3.x+2.y+z=0\} \quad \text{i} \quad S_3=\{(x, y, z) \ / \ x/3=y/2=z/1\}$$

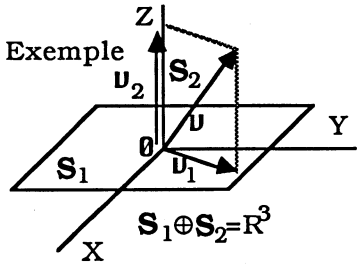
T'ha de donar que és tot l'espai. Com que en l'exemple 47 van veure que eren independents ($S_1 \cap S_2=\{\mathbf{0}\}$), podem veure que la relació de Grassmann serà 2+1=0+3.

2.2.4 SUMA DIRECTA DE SUBESPAIS. Dos subespais S_1 i S_2 d'un espai vectorial **V** s'anomenen *subespais complementaris*, si i només si són independents i la seva suma és tot l'espai vectorial. S'haurà de complir, doncs, que

$$S_1 \cap S_2=\{\mathbf{0}\} \quad \text{i} \quad S_1+S_2=V$$

Si dos subespais són complementaris, direm que l'espai vectorial és *suma directa* dels subespais donats.





Escriurem $V=S_1 \oplus S_2$, volent dir que l'espai vectorial es pot descompondre com a suma de dos subespais vectorials que només tenen en comú el vector nul.

Exemple 51. Si en l'espai V_3 els dos subespais vectorials fossin dos plans, no serien complementaris perquè la seva intersecció (una recta) és diferent del vector nul. La suma no seria directa.

Si els subespais fossin dues rectes, tampoc no serien complementaris, ja que la seva suma (un pla) no seria tot l'espai. La suma tampoc no seria directa.

En el cas d'un pla i una recta no continguda en el pla, com podem veure en la figura, sí que serien complementaris, perquè la intersecció (un punt) seria el vector nul i la suma seria tot l'espai. En aquest cas la suma seria directa.

Una conseqüència important del fet de ser suma directa és la de *descomposició única:*

«Tot vector de l'espai es pot descompondre de manera única com a suma d'un vector del primer subespai amb un altre del segon subespai».

D'aquests vectors únics $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$, on $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{S}_1$ i $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{S}_2$ i tals que $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\mathbf{u}$, en diem *components del vector segons els subespais.*

Podem posar $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. A més, de les seves normes (o longituds) en direm *projeccions sobre els subespais.*

Si les simbolitzem per p_1 i p_2, tindrem $p_1=\|\mathbf{u}_1\|$ i $p_2=\|\mathbf{u}_2\|$

Exemple 52. Siguin els subespais de V_3 on el primer és un pla i el segon una recta,

$$\mathbf{S}_1=\{(x, y, z) \,/\, 3.x+2.y+1.z=0\} \quad \text{i} \quad \mathbf{S}_3=\{(x, y, z) \,/\, x/3=y/2=z/1\}$$

Ja hem vist que són subespais complementaris i que la seva suma és directa. A més, si observes el vector característic del pla i el vector director de la recta veuràs que són iguals, $\mathbf{u}'=\mathbf{u}=(3, 2, 1)$. Això ens voldrà dir que la recta és perpendicular al pla.

Sigui un vector qualsevol de l'espai, per exemple $\mathbf{u}=(8, 1, 2)$, i mirem de trobar dos únics vectors $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{S}_1$ i $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{S}_1$ tals que $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$.

Ja s'ha vist que una base de $\mathbf{S}_1$ és $B_1=\{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\}$. Per tant, tot vector d'aquest subespai es pot escriure de la forma

$$\mathbf{u}_1=\lambda_1.(1, 0, -3)+\lambda_2.(0, 1, -2).$$

Igualment, com que una base de $\mathbf{S}_2$ és $B_2=\{(3, 2, 1)\}$ tenim que els seus vectors seran

$$\mathbf{u}_2=\lambda_3.(3, 2, 1)$$

Així, un vector de $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2$ serà $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$. Substituint i igualant al vector que hem de descompondre, tenim

$$\lambda_1.(1, 0, -3)+\lambda_2.(0, 1, -2)+\lambda_3.(3, 2, 1) = (8, 1, 2)$$

Operant, ens queda el sistema

$$\lambda_1+3.\lambda_3=8 \;,\; \lambda_2+2.\lambda_3=1 \quad \text{i} \quad -3.\lambda_1-2.\lambda_2+\lambda_3=2$$

Si el resolem, aïllant λ_1 i λ_2 en les dues primeres equacions i substituint en la tercera, obtindrem $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$ i $\lambda_3=2$. Els vectors dels subespais seran

$$\mathbf{u}_1=2.(1, 0, -3)-3(0, 1, -2)=(2, -3, 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{u}_2=2.(3, 2, 1)=(6, 4, 2)$$

Veiem que sumats donen $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=(2, -3, 0)+(6, 4, 2)=(8, 1, 2)=\mathbf{u}$.

Les projeccions del vector seran

$$p_1=\|\mathbf{u}_1\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{13} \quad \text{i} \quad p_2=\|\mathbf{u}_2\|=\sqrt{6^2+4^2+2^2}=\sqrt{56}$$

Podem comprovar el resultat anterior trobant la norma del vector donat $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{8^2+1^2+2^2}=\sqrt{69}$ i recordant que el pla i la recta són perpendiculars. Per tant, es verificarà el teorema de Pitàgores,

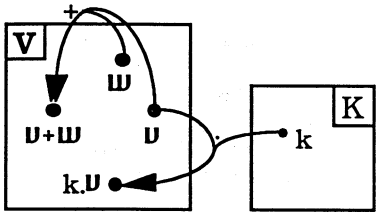
$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{(p_1)^2+(p_2)^2}=\sqrt{13+56}=\sqrt{69}.$$

Com a cas particular, la *suma directa d'un subespai* $\mathbf{S}$ com a suma d'altres dos $\mathbf{S}_1$ i $\mathbf{S}_2$ haurà de complir: $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2=\{\mathbf{0}\}$ i $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2=\mathbf{S}$.

Exemple 53. En V_3 el subespai $\mathbf{S}$=pla XY es pot descompondre com a suma directa dels subespais $\mathbf{S}_1$=eix X i $\mathbf{S}_2$=eix Y.

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Vectors i escalars



Conj.vectors: **V={v, w, ...}**
Op. interna en V: (+)

Conjunt escalars: **K={k, l, ...}**
Op. externa en K: (.)
Cas particular de treball: **K=R**

Definició d'espai vectorial

Conjunts i operacions: **(V, +, .)** i **K=cos commutatiu**
Axiomes d'un espai vectorial (V,+,.) sobre un cos K:
PER A LA SUMA: **(V,+)=Grup abelià**

(I) Operació interna: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in V \Rightarrow \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \in V$.

(II) Commutativa: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in V \Rightarrow \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1$

(III) Associativa: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \in V \Rightarrow (\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1+(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)$

(IV) El. neutre: $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V} \;/\; \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$

(V) El. oposat: $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\;,\; \exists(-\mathbf{v}) \in \mathbf{V} \;/\; \mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$

PER AL PRODUCTE: $\forall k,k_1,k_2 \in K \;\wedge\; \forall \mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in V$ es verifica

(VI) Operació externa: $\mathbf{k.v} \in \mathbf{V}$

(VII) Associativitat escalar: $\mathbf{k_1.(k_2.v)=(k_1.k_2).v}$

(VIII) Distributivitat escalar: $\mathbf{(k_1+k_2).v=k_1.v + k_2.v}$

(IX) Distributivitat vectorial: $\mathbf{k.(v_1+v_2)=k.v_1 + k.v_2}$

(X) Element unitat: $\exists \mathbf{e} \in \mathbf{K} \;/\; \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{e.v=v}$

Espai vectorial real

Definició: **(V,+,.) sobre R** Element unitat: **e=1**
Nota: **si no s'especifica és V=(V,+, .) sobre R**

Exemple clàssic: **Vectors del pla**
Suma: Suma vectorial Producte: Prod. escalar per vector

Altres exemples d'espais vectorials

Nombres complexos: $z=a+b.i$ **on** $i=\sqrt{-1}$

Op. int.: $z_1=a_1+b_1.i$, $z_2=a_2+b_2.i \Rightarrow z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2).i$

Op. ext.: $k\in R$, $z=a+b.i \Rightarrow k.z=(k.a)+(k.b).i$

Vectors de l'espai: $u=a.i+b.j+c.k$ **on** $\{i,j,k\}$=**vect. canònics**

Op. int.: $u_1+u_2=(a_1+a_2).i+(b_1+b_2).j+(c_1+c_2).k$

Op. ext.: $k.u=(k.a).i+(k.b).j+(k.c).k$

Polinomis de grau $\leq n$: $p=a_0+a_1.x+a_2.x^2+...+a_n.x^n$

Op. int.: $p_1+p_2=(a_0+b_0)+(a_1+b_1).x+(a_2+b_2).x+...+(a_n+b_n).x^n$

Op. ext.: $k.p=(k.a_0)+(k.a_1).x+(k.a_2).x^2+...+(k.a_n).x^n$

Matrius d'ordre $m\times n$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Op. int.: $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

Op. ext.: $k.A=\begin{pmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & \cdots & k.a_{1n} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & \cdots & k.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k.a_{m1} & k.a_{m2} & \cdots & k.a_{mn} \end{pmatrix}$

Successions: $(a_n)=(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$

Op. int.: $(a_n)+(b_n)=(a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n, ...)$

Op. ext.: $k.(a_n)=(k.a_1, k.a_2, ..., k.a_n, ...)$

Propietats dels espais vectorials

Entre altres, es verifiquen les propietats:

(1) $\forall a\in R \Rightarrow a.0=0$ (2) $\forall u\in V \Rightarrow 0.u=0$

(3) $a.u=0 \Rightarrow a=0$ o bé $u=0$ (4) $(-a).u=-(a.u)$

(5) $a.u=a.w \wedge a\neq 0 \Rightarrow u=w$ (6) $a.u=b.u \wedge u\neq 0 \Rightarrow a=b$

Espai vectorial producte

Conjunt: $\mathbf{V,W=E.vect} \Rightarrow \mathbf{V\times W=\{(v, w) \,/\, v\in V \wedge w\in W\}}$

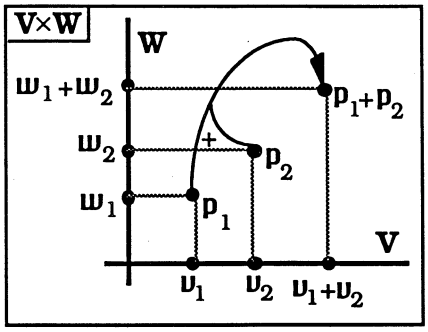
Elements: $\mathbf{p\in V\times W} \Rightarrow \exists \mathbf{v\in V} \wedge \exists \mathbf{w\in W} \;/\; \mathbf{p=(v,w)}$

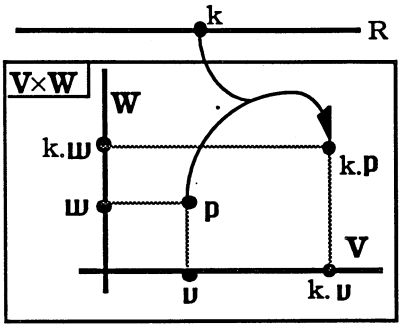
Operació interna: (+)

$$\mathbf{p_1=(v_1, w_1)} \wedge \mathbf{p_2=(v_2, w_2)} \Rightarrow \mathbf{p_1+p_2=(v_1+v_2, w_1+w_2)}$$

Operació externa: (.)

$$\mathbf{k\in R} \wedge \mathbf{p=(v,w)} \Rightarrow \mathbf{k.p=(k.v, k.w)}$$





Combinació lineal

Sistema de vectors: $\mathbf{C=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}}$

Combinació lineal de vectors:

$$\mathbf{v} \text{ c.l. } \mathbf{C} \Leftrightarrow \exists \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in \mathbf{R} \;/\; \mathbf{v}=\lambda_1.\mathbf{v_1}+\lambda_2.\mathbf{v_2}+\ldots+\lambda_n.\mathbf{v_n}$$

Notació simplificada:

$$\mathbf{v}=\lambda_1.\mathbf{v_1}+\lambda_2.\mathbf{v_2}+\ldots+\lambda_n.\mathbf{v_n} \Leftrightarrow \mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\mathbf{v_i}$$

Sistema generador

Sistema generador: $\mathbf{S_G=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}}$, $\mathbf{V=Esp.\ vectorial}$

$$\mathbf{S_G} \text{ s.g. } \mathbf{V} \Leftrightarrow \forall \mathbf{v\in V} \,,\; \exists \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in \mathbf{R} \;/\; \mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\mathbf{v_i}$$

Vectors generadors: $\mathbf{S_G}$ **s.g.** $\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v_1,v_2,\ldots,v_n}$ **generen V**

Sistemes generadors equivalents:

$$\mathbf{S_G\equiv S'_G} \Leftrightarrow \mathbf{S_G} \text{ genera } \mathbf{V} \wedge \mathbf{S'_G} \text{ genera } \mathbf{V}$$

Sistema lliure

Combinació lineal nul.la: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\mathbf{u}_i=\mathbf{0}$

Vectors linealment independents:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \text{ l.i. } \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\mathbf{u}_i=\mathbf{0} \Rightarrow \lambda_i=0 \ \forall i\right]$$

Sistema lliure: $\mathbf{S_L}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ **s.ll.** $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ **l.i.**

Rang d'un sistema

Rang d'un sistema de vectors: ρ= **màx. nombre vectors lin. ind.**

Càlcul del rang: $\mathbf{C}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \rightarrow \mathbf{S_L}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\rho\}$

Mètode que s'ha d'utilitzar: **mètode de reducció de Gauss**

Sistema lligat

Vectors linealment dependents:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \text{ l.d. } \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\mathbf{u}_i=\mathbf{0} \Rightarrow \exists\lambda_j \ (1\leq j\leq n) \ / \ \lambda_j\neq 0$$

Sistema lligat: $\mathbf{S_{LL}}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ **s.lligat** $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ **l.d.**

Conseqüència:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}=\mathbf{S_{LL}} \Leftrightarrow \exists\mathbf{u}_j \ (1\leq j\leq n) \ / \ \mathbf{u}_j=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\mathbf{u}_i \ (i\neq j)$$

(Existeix almenys un vector que es pot posar en c. l. dels altres)

Base d'un espai vectorial

Definició: $\mathbf{B}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \Leftrightarrow \mathbf{B}=\mathbf{S_G} \wedge \mathbf{B}=\mathbf{S_L}$.

Càlcul d'una base a partir d'un sistema generador:

$\mathbf{S_G}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \rightarrow \mathbf{S_L}=\mathbf{S'_G}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\rho\} \Rightarrow \mathbf{B}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\rho\}$

Descomposició única d'un vector segons una base:

Si $\mathbf{u}\in\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ **base de V** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{R} \ / \ \mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_n.\mathbf{u}_n$$

Components d'un vector

Components d'un vector respecte a una base: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
(coeficients únics de la seva descomposició)

Vector en funció de les components:

$$\mathbf{v}=\lambda_1.\mathbf{v}_1+\lambda_2.\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n.\mathbf{v}_n \Leftrightarrow \mathbf{v}=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_B$$

Vectors canònics: $\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,\ldots,0)$, ..., $\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$

Base canònica: $B_C=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$

Casos particulars estudiats:

Vectors del pla: $B_C=\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ **on** $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$.

Vectors espai: $B_C=\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ **on** $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$.

Expressió d'un vector segons la base canònica:

$$\mathbf{v}=\lambda_1.\mathbf{e}_1+\lambda_2.\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda_n.\mathbf{e}_n \Leftrightarrow \mathbf{v}=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Dimensió d'un espai vectorial

Teorema de Steinitz:

Hipòtesi: $(V,+,.)$, $S_L=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \wedge B=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Tesi: $m\leq n \wedge B'=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ **nova base.**

Conseqüència important: (corol·lari)

$B_1=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \wedge B_2=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ **bases de V** $\Rightarrow m=n$.

Dimensió d'un espai vect.: **dim(V)=nombre vectors de la base.**

Altres conseqüències:

(1) $\mathbf{Dim(V)=n} \wedge \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}=S_G \Rightarrow m\geq n$

(2) $\mathbf{Dim(V)=n} \wedge \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}=S_L \Rightarrow m\leq n$

(3) $\mathbf{Dim(V)=n} \wedge \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}=S_G \Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}=B$

(4) $\mathbf{Dim(V)=n} \wedge \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}=S_L \Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}=B$

Canvi de base

Bases inicial i final:

$B_i=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ $\qquad$ $B_f=\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$

Matrius de les bases: (mateixa notació)

$B_i=(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n)$ $\qquad$ $B_f=(\mathbf{v}'_1\ \mathbf{v}'_2\ \ldots\ \mathbf{v}'_n)$

Canvi de base (cont.)

Vector inicial: $\mathbf{U}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{Bi}$ Matriu: $\mathbf{X_i}=(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)'$

Vector final: $\mathbf{U}=(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{Bf}$ Matriu: $\mathbf{X_f}=(x'_1\ x'_2\ \ldots\ x'_n)'$

Expressió vectorial:

$$\mathbf{U}=x_1.\mathbf{U}_1+x_2.\mathbf{U}_2+\ldots+x_n.\mathbf{U}_n \qquad \mathbf{U}=x'_1.\mathbf{U}'_1+x'_2.\mathbf{U}'_2\ldots+x'_n.\mathbf{U}'_n$$

Expressió matricial: $\mathbf{U}=\mathbf{B_i}\bullet\mathbf{X_i}$ $\mathbf{U}=\mathbf{B_f}\bullet\mathbf{X_f}$

Relació entre les dues bases:

$$\begin{cases} \mathbf{U}'_1=p_{11}.\mathbf{U}_1+p_{21}.\mathbf{U}_2+\ldots+p_{n1}.\mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}'_2=p_{12}.\mathbf{U}_1+p_{22}.\mathbf{U}_2+\ldots+p_{n2}.\mathbf{U}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{U}'_n=p_{1n}.\mathbf{U}_1+p_{2n}.\mathbf{U}_2+\ldots+p_{nn}.\mathbf{U}_n \end{cases} \qquad \mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriu de pas: **P** (columnes=comp. vectors de B_f respecte a B_i)

Relació matricial: $(\mathbf{B_f})'=\mathbf{P}'\bullet(\mathbf{B_i})'$ $\Rightarrow$ $\mathbf{B_f}=\mathbf{B_i}\bullet\mathbf{P}$

Fórmules del canvi de base:

$X_f \rightarrow X_i$: $\mathbf{X_i}=\mathbf{P}\bullet\mathbf{X_f}$ $X_i \rightarrow X_f$: $\mathbf{X_f}=\mathbf{P}^{-1}\bullet\mathbf{X_i}$

.....

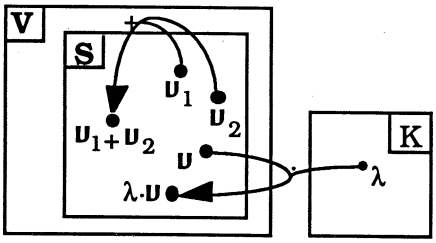
Subespai vectorial

Espai vectorial: **(V, +, .)** Subconjunt: $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{V}$ $(\mathbf{S}\neq\emptyset)$

Subespai vectorial: **S sub.vect. de V** $\Leftrightarrow$ **(S, +, .) esp. vect.**

Condicions de sub. vect.: **complir els axiomes (I), (II), ..., (X).**

Sintetització de les condicions:



Condició doble:

(1) $\forall \mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2\in\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{U}_1+\mathbf{U}_2\in\mathbf{S}$

(2) $\forall \lambda\in\mathbf{K} \wedge \forall \mathbf{U}\in\mathbf{S} \Rightarrow \lambda.\mathbf{U}\in\mathbf{S}$

Condició única:

(3) $\forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{K} \wedge \forall \mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2\in\mathbf{S}$

$\Rightarrow \lambda_1.\mathbf{U}_1+\lambda_2.\mathbf{U}_2\in\mathbf{S}$

S. vect. impropis: $\mathbf{S}=\{\mathbf{0}\} \wedge \mathbf{S}=\mathbf{V}$ S. vect. propis: **Els altres**

Dimensió d'un sub. vect.: $\mathbf{dim(S)=m} \wedge \mathbf{dim(V)=n} \Rightarrow \mathbf{m\leq n}$

Subespai vectorial (cont.)

Exemples de subespais en V_3: (passen per l'origen)

Pla: $\mathbf{a.x+b.y+c.z=0}$ Vector característic: $\mathbf{u'=(a, b, c)}$

Recta: $\mathbf{x/a= y/b =z/c}$ Vector director: $\mathbf{u=(a, b,c)}$

Equacions dels subespais:

Equacions cartesianes: (p=n-m) p equacions i n variables

$$\begin{cases} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\ldots+a_{1n}.x_n=0 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\ldots+a_{2n}.x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}.x_1+a_{p2}.x_2+\ldots+a_{pn}.x_n=0 \end{cases}$$

Equacions paramètriques: n equacions i m paràmetres

$$\begin{cases} x_1=b_{11}.\lambda_1+b_{12}.\lambda_2+\ldots+b_{1m}.\lambda_m \\ x_2=b_{21}.\lambda_1+b_{22}.\lambda_2+\ldots+b_{2m}.\lambda_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=b_{n1}.\lambda_1+b_{n2}.\lambda_2+\ldots+b_{nm}.\lambda_m \end{cases}$$

Subespai engendrat per un sistema de vectors:

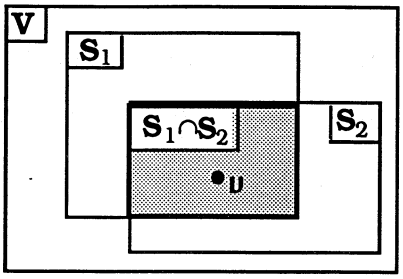
Sistema de vectors: $\mathbf{C=\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}}$

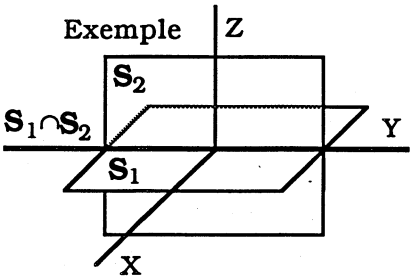
Subespai engendrat:

$$S(C)=\{\ u\in V\ /\ \exists\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in K\ \wedge\ u=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i.u_i\ \}$$

Subespai intersecció

Subespai intersecció: $S_1\cap S_2=\{u\in V\ /\ u\in S_1\ \wedge\ u\in S_2\}$





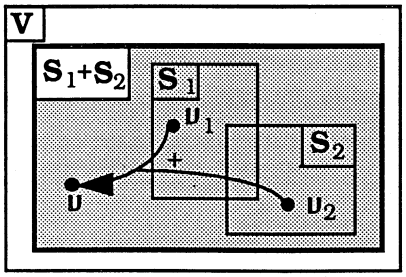
Subespais independents: S_1 , S_2 **ind.** $\Leftrightarrow$ $S_1\cap S_2=\{0\}$

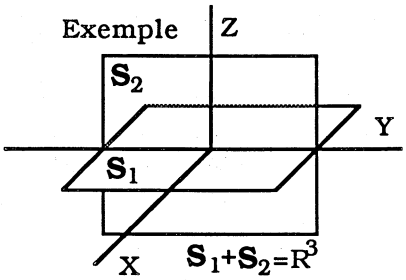
Conjunt unió de subespais:

$S_1\cup S_2=\{u\in V\ /\ u\in S_1\ \vee\ u\in S_2\}$ **No sub. vect.**

Subespai suma

Subespai suma: $\mathbf{S_1+S_2=\{u\in V \ / \ u=u_1+u_2 \ , \ u_1\in S_1 \ \wedge \ u_2\in S_2\}}$





Relació de Grassmann:

$$\mathbf{dim(S_1) + dim(S_2) = dim(S_1\cap S_2) + dim(S_1+S_2)}$$

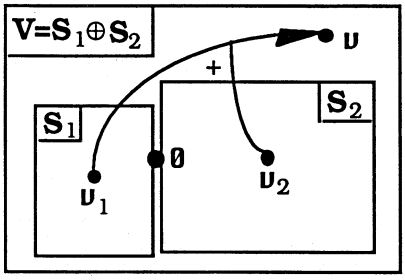
Suma directa

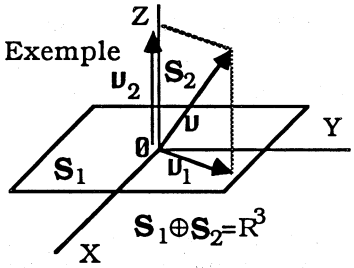
Subespais complementaris:

$$\mathbf{S_1,S_2\subseteq V \ compl. \ \Leftrightarrow \ S_1\cap S_2=\{0\} \ \wedge \ S_1+S_2=V}$$

Suma directa d'un espai vectorial:

Suma directa: $\mathbf{V=S_1\oplus S_2 \ \Leftrightarrow \ S_1,S_2\subseteq V \ compl.}$





Unicitat dels vectors components:

$$\mathbf{V=S_1\oplus S_2 \ \Leftrightarrow \ \forall u\in V \ , \ \exists u_1\in S_1 \ \wedge \ \exists u_2\in S_2 \ / \ u=u_1+u_2}$$

Components segons els subespais: $\mathbf{u_1 \ , \ u_2 \ \Rightarrow \ u=(u_1, u_2)}$

Projeccions sobre els subespais: $\mathbf{p_1=\|u_1\| \ , \ p_1=\|u_1\|}$

Suma directa d'un subespai:

$$\mathbf{S=S_1\oplus S_2 \ \Leftrightarrow \ S_1\cap S_2=\{0\} \ \wedge \ S_1+S_2=S}$$

(Exemple: en R^3 tenim S=pla XY, S_1=eix X i S_2=eix Y)

e) PROBLEMES RESOLTS

2.1 CONCEPTE D'ESPAI VECTORIAL

Estructura d'espai vectorial

91. Pels escalars $k_1=5$ i $k_2=-2$ i pels vectors complexos $\mathbf{u}_1=-1+2.i$ i $\mathbf{u}_2=4-3.i$, comprova que es verifiquen les propietats distributives del producte extern.

Solució. Haurem de provar les dues propietats de distributivitat escalar i de distributivitat vectorial.

DISTRIBUTIVITAT ESCALAR. $\boxed{(k_1+k_2.).\mathbf{u}=k_1.\mathbf{u}+k_2.\mathbf{u}}$

Si per exemple $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1$, trobarem cada costat per separat

$$\begin{cases} (k_1+k_2).\mathbf{u}_1=[5+(-2)].(-1+2.i)=3.(-1+2.i)=-3+6.i \\ k_1.\mathbf{u}_1+k_2.\mathbf{u}_1=5.(-1+2.i)+(-2).(-1+2.i)=-5+10.i+2-4.i=-3+6.i \end{cases}$$

Podries fer el mateix per $\mathbf{u}_2$, que et donaria 12-9.i.

DISTRIBUTIVITAT VECTORIAL. $\boxed{k.(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=k.\mathbf{u}_1+k.\mathbf{u}_2}$

Si per k agafem el $k_1=5$ tindrem

$$\begin{cases} k_1.(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=5.[(-1+2.i)+(4-3.i)]=5.(3-i)=15-5.i \\ k_1.\mathbf{u}_1+k_1.\mathbf{u}_2=5.(-1+2.i)+5.(4-3.i)=-5+10.i+20-15.i=15-5.i \end{cases}$$

Per $k_2=-2$ t'hagués donat -6+2.i.

En resum, en quedar els dos costats igual, queden comprovades les dues propietats de distributivitat.

92. Demostra que el conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$, amb les operacions usuals, no és un espai vectorial sobre el cos dels nombres reals R. Seria espai vectorial (R,+, .) sobre $\mathbb{Q}$?

Solució. Comprovem en principi que $(\mathbb{Q},+)$ té l'estructura de grup abelià. Si agafem tres racionals qualssevol p,q, i r, tindrem:

(I) OPERACIÓ INTERNA: $p+q\in\mathbb{Q}$

Ex. $(3/2),(5/4)\in\mathbb{Q}$ i $(3/2)+(5/4)=11/4\in\mathbb{Q}$

(II) COMMUTATIVA: $p+q=q+p$

Ex. $(3/2)+(5/4)=11/4$, $(5/4)+(3/2)=11/4$

(III) ASSOCIATIVA: $(p+q)+r=p+(q+r)$

Ex. $[(3/2)+(5/4)]+(7/6)=(11/4)+(7/6)=47/12$

$(3/2)+[(5/4)+(7/6)]=(3/2)+(29/12)=47/12$

(IV) EL. NEUTRE: $\exists 0 \in Q \ / \ \forall p \in Q \Rightarrow p+0=p$

Ex. $(3/2)+0=(3/2)+(0/2)=3/2$

(V) EL. OPOSAT: $\forall p \in Q \ , \ \exists (-p) \in Q \ / \ p+(-p)=0$

Ex. $(3/2)+(-3/2)=(3-3)/2=0/2=0$

Pel que fa a la segona operació, el producte on el cos d'escalars és el dels nombres reals, K=R.

(VI) OPERACIÓ EXTERNA: $\forall k \in R \wedge \forall p \in Q \not\Rightarrow k.p \in Q$

Ex. Si $k=\sqrt{2}$ i $p=3/2 \Rightarrow 3.\sqrt{2}/2 \notin Q$

Com que no es compleix aquest axioma, resulta que l'estructura (Q,+,.,R) $\boxed{\text{no serà un espai vectorial}}$

Canviem ara els papers i estudiem l'estructura (R,+,.,Q).

És clar que $\boxed{\text{(R,+) és un grup abelià}}$, com ja s'ha estudiat en algunes lliçons anteriors. Fem la segona operació.

(VI) OPERACIÓ EXTERNA: $\forall k \in Q \wedge \forall p \in R \Rightarrow k.p \in R$ (ja que $R \supset Q$)

Ex. Si $k=3/2 \wedge p=\sqrt{2} \Rightarrow (3/2).\sqrt{2} \in R$

(VII) ASSOCIATIVITAT ESCALAR: $k_1.(k_2.p)=(k_1.k_2).p$ on $k_1,k_2 \in Q$

Ex. $(3/2).[(5/4).\sqrt{2}]=[(3/2).(5/4)].\sqrt{2} \ =(15/8).\sqrt{2}$

(VIII) DISTRIBUTIVITAT ESCALAR: $(k_1+k_2).p=k_1.p+k_2.p$

Ex. $[(3/2)+(5/4)].\sqrt{2}=(3/2).\sqrt{2}+(5/4).\sqrt{2} \ =(11/4).\sqrt{2}$

(IX) DISTRIBUTIVITAT VECTORIAL: $k.(p+q)=k.p+k.q$ on $p,q \in R$

Ex. $(3/2).(\sqrt{2}+\sqrt{8})=(3/2).\sqrt{2}+(3/2).\sqrt{8} \ =(9/2).\sqrt{2}$

(X) ELEMENT UNITAT: $\exists 1 \in Q \ / \ \forall p \in R \Rightarrow 1.p=p$

Ex. $1.(3/2)=(1/1).(3/2)=3/2$

Pel fet d'haver-se verificat tots els 10 axiomes anteriors, resulta que l'estructura $\boxed{\text{(R,+,.,Q) és un espai vectorial}}$

Pots comprovar que també ho serien (Q,+,.,Q) i (R,+,.,R).

93. Definim les següents operacions interna i externa en R^3 per $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x', \ y+y', \ z+z')$ i $k.(x,y,z)=(k^2.x, \ k^2.y, \ k^2.z)$. Prova que no és espai vectorial sobre R. Quin axioma falla?

Solució. Per a la primera operació és ben fàcil comprovar que té l'estructrua de *grup abelià*. Apuntem només els axiomes, ja que els pots comprovar sense dificultat.

(I). OPERACIÓ INTERNA: $(x,y,z)+(x',y',z') \in R^3$

(II) COMMUTATIVA: $(x,y,z)+(x',y',z')=(x',y',z')+(x,y,z)$

(III) ASSOCIATIVA:

$$[(x,y,z)+(x',y',z')]+(x'',y'',z'')=(x,y,z)+[(x',y',z')+(x'',y'',z'')]$$

(IV) EL. NEUTRE: $\exists(0,0,0)\in R^3 \quad / \quad (x,y,z)+(0,0,0)=(x,y,z)$

(V) EL. OPOSAT: $\exists(-x,-y,-z)\in R^3 \quad / \quad (x,y,z)+(-x,-y,-z)=(0,0,0)$

Per al producte definit per $k.(x,y,z)=(k^2.x,\ k^2.y,\ k^2.z)$ estudiem si es verifiquen el axiomes corresponents,

(VI) OPERACIÓ EXTERNA:

$$\forall k\in R \ \wedge\ \forall(x,y,z)\in R^3 \ \Rightarrow\ k.(x,y,z)=(k^2.x,\ k^2.y,\ k^2.z)\in R^3$$

(VII) ASSOCIATIVITAT ESCALAR: si $k,m\in R$ i $\mathbf{u}=(x,y,z)\in R^3$, provem que $k.(m.\mathbf{u})=(k.m).\mathbf{u}$, partint del 1r costat i arribant al 2n,

$$k.(m.\mathbf{u})=k.[m.(x,y,z)]=k.(m^2.x,\ m^2.y,\ m^2.z)=$$
$$=(k^2.(m^2.x),k^2.(m^2.y),k^2.(m^2.z))=((k^2.m^2).x,\ (k^2.m^2).y,(k^2.m^2).z)=$$
$$=((k.m)^2.x,(k.m)^2.y,(k.m)^2.z)=(k.m).(x,y,z)=(k.m).\mathbf{u}$$

(VIII) DISTRIBUTIVITAT ESCALAR: $(k+m).\mathbf{u}=k.\mathbf{u}+m.\mathbf{u}$ Trobem cada cantó separadament i veurem que són diferents

$$(k+m).\mathbf{u}=(k+m).(x,y,z)=((k+m)^2.x,\ (k+m)^2.y,\ (k+m)^2.z) \quad (1)$$

$$k.\mathbf{u}+m.\mathbf{u}=k.(x,y,z)+m.(x,y,z)=(k^2.x,\ k^2.y,\ k^2.z)+(m^2.x,\ m^2.y,\ m^2.z)=$$
$$=((k^2+m^2).x,\ (k^2+m^2).y,\ (k^2+m^2).z) \quad (2)$$

Veiem que $(1)\neq(2)$, ja que $(k+m)^2=k^2+2.k.m+m^2\neq k^2+m^2$. Com que no es compleix l'axioma (VIII), $\boxed{\text{no és un espai vectorial}}$.

94. En R^2 definim la suma usual $(x,y)+(x',y')=(x+x',\ y+y')$ i el producte per un escalar $k.(x,y)=(k.y,\ k.x)$. Comprova que fallen dos axiomes perquè l'estructura $(R^2,+,\ .)$ sigui un espai vectorial sobre R.

Solució. Ja sabem que per a la suma usual el parell $(R^2,+)$ tindrà l'estructura de *grup abelià*. Estudiem, per tant, els axiomes per la segona operació: $k.(x,y)=(k.y,k.x)$

(VI) OP. EXTERNA: si $k\in R$ i $(x,y)\in R^2 \ \Rightarrow\ k.(x,y)=(ky,k.x)\in R^2$

(VII) ASSOCIATIVITAT ESCALAR: si $k,m\in R$ i $\mathbf{u}=(x,y)\in R^2$, analitzem si $k.(m.\mathbf{u})=(k.m).\mathbf{u}$. Trobem cada costat,

$$k.(m.\mathbf{u})=k.[m.(x,y)]=k.(m.y,\ m.x)=(k.(m.x),\ k.(m.y))=(k.m.x,\ k.m.y)$$

$$(k.m).\mathbf{u}=(k.m).(x,y)=((k.m).y,\ (k.m).x)=(k.m.y,\ k.m.x)$$

Com que dóna un resultat diferent, vol dir que \x(falla l'axioma (VIII)) i així ja no serà un espai vectorial.

Com que, segons l'enunciat, falla un altre axioma, continuarem, doncs, estudiant els que segueixen.

(VIII) DISTRIBUTIVITAT ESCALAR: $(k+m).\mathbf{u}=k.\mathbf{u}+m.\mathbf{u}$. Comprovem que es verifica, partint del 1r costat i arribant al 2n,

$$(k+m).\mathbf{u}=(k+m).(x,y)=((k+m).y,\ (k+m).x)=(k.y+m.y,\ k.x+m.x)=$$
$$=(k.y,\ k.x)+(m.y,\ m.x)=k.(x,y)+m.(x,y)=k.\mathbf{u}+m.\mathbf{u}$$

(IX) DISTRIBUTIVITAT VECTORIAL: si $\mathbf{u}=(x,y)$ i $\mathbf{u}'=(x',y')$ provarem que $k.(\mathbf{u}+\mathbf{u}')=k.\mathbf{u}+k.\mathbf{u}'$. Fem-ho trobant cada costat,

$$k.(\mathbf{u}+\mathbf{u}')=k.[(x,y)+(x',y')]=k.(x+x',\ y+y')=(k.(y+y'),\ k.(x+x')=$$
$$=(k.y+k.y',\ k.x+k.x')$$

$$k.\mathbf{u}+k.\mathbf{u}'=k.(x,y)+k.(x',y')=(k.y,\ k.x)+(k.y',\ k.x')=(k.y+k.y',\ k.x+k.x')$$

(X) ELEMENT UNITAT: la que ens ha de fallar ha de ser aquesta, ja que és l'única que ens queda per provar. Ens preguntem

$$\exists e\in R\ /\ \forall(x,y)\in R^2 \Rightarrow e.(x,y)=(x.y)\ ?$$

Mirem-ho. Com que per definició $e.(x,y)=(e.y,\ e.x)$, haurà de passar que $(e.y,\ e.x)=(x,y)$; és a dir, $e.y=x$ i $e.x=y$.

Aïllant la e en cadascuna, $e=x/y$ i $e=y/x$. Igualant, $x/y=y/x$. És a dir, s'ha de verificar que $x^2=y^2$. Com que això no sempre passa, perquè (x,y) és un parell qualsevol, vol dir que $\boxed{\text{no es compleix (X)}}$.

95. Prova que en els axiomes de la definició d'espai vectorial, l'axioma de commutativitat per a l'operació interna és innecessari, ja que es dedueix dels altres.

Solució. Si $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ són dos vectors qualssevol de l'espai vectorial, provarem que $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_1$ i ho farem partint de l'expressió $(e+e).(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)$, on e és l'el. unitat del producte extern.

Aplicant primer l'axioma (IX) de distributivitat vectorial i després el (VIII) de distributivitat escalar,

$$(e+e).(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=(e+e).\mathbf{u}_1+(e+e).\mathbf{u}_2=e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_2+e.\mathbf{u}_2 \quad (1)$$

Si, en canvi, apliquem primer el (VIII) i després el (IX) tindrem

$$(e+e).(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=e.(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)+e.(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_2+e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_2 \quad (2)$$

Igualant (1) amb (2),

$$e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_2+e.\mathbf{u}_2 = e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_2+e.\mathbf{u}_1+e.\mathbf{u}_2$$

En ser e l'element unitat del producte extern, $e.\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\forall\mathbf{u}\in V$. En conseqüència, tindrem

$$\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$$

Sumant a l'esquerra per l'oposat de $\mathbf{u}_1$ (axioma (V)) i per la dreta per l'oposat de $\mathbf{u}_2$, que equivaldrà a simplificar a l'esquerra per $\mathbf{u}_1$ i a la dreta per $\mathbf{u}_2$, tindrem finalment $\boxed{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_1}$.

Base i dimensió d'un espai vectorial

96. Els vectors $\mathbf{u}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{u}_2=(2,1,3)$, $\mathbf{u}_3=(1,-2,4)$ formen un sistema lligat. Quina és l'equació de lligadura?

Solució. Que els tres vectors $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ formin un sistema lligat vol dir que són linealment dependents; és a dir, que un d'ells, per ex. el $\mathbf{u}_3$, es pot posar en combinació lineal de $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$. Per tant,

$$\exists\lambda_1,\lambda_2\in R \quad / \quad \mathbf{u}_3=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2$$

Trobem aquests λ_1 i λ_2 substituint per les components,

$$(1,-2,4)=\lambda_1.(1,1,1)+\lambda_2.(2,1,3)$$

Multiplicant, sumant i igualant components, ens ha de quedar el sistema format per les tres equacions,

$$\lambda_1+2.\lambda_2=1 \quad (1) \qquad \lambda_1+\lambda_2=-2 \quad (2) \qquad \lambda_1+3.\lambda_2=4 \quad (3)$$

Si ens quedem amb les dues primeres i les restem, (1)-(2), ens quedarà $\lambda_2=3$. Substituint en (1), $\lambda_1+2.3=1$, d'on $\lambda_1=-5$.

Per tant, tindrem la relació de dependència

$$\mathbf{u}_3= -5.\mathbf{u}_1+3.\mathbf{u}_2$$

Passant-ho tot al 1r membre ens quedarà l'equació de lligadura

$$\boxed{5.\mathbf{u}_1 -3.\mathbf{u}_2 +\mathbf{u}_3 =\mathbf{0}}.$$

97. Demostra que els vectors de l'espai $\mathbf{u}_1=(3,7,2)$, $\mathbf{u}_2=(9,-2,5)$ i $\mathbf{u}_3=(-1,-4,-3)$ són linealment independents.

Solució. Una manera de fer-ho seria comprovar que no són dependents; és a dir, que un d'ells no es pot posar en combinació lineal dels altres.

Ho farem, no obstant això, partint de la definició de sistema lliure (o conjunt de vectors linealment independents),

$$\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\lambda_3.\mathbf{u}_3=\mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=0 \wedge \lambda_3=0$$

Substituint cada vector per les seves components en aquesta combinació lineal nul·la,

$$\lambda_1.(3,7,2)+\lambda_2.(9,-2,5)+\lambda_3.(-1,-4,-3)=(0,0,0)$$

Multiplicant, sumant i igualant components, ens quedarà

$$\begin{cases} 3.\lambda_1+9.\lambda_2 -\lambda_3=0 & (1) \\ 7.\lambda_1 -2.\lambda_2-4.\lambda_3=0 & (2) \\ 2.\lambda_1+5.\lambda_2-3.\lambda_3=0 & (3) \end{cases}$$

Observem que és un sistema homogeni, ja que són nuls tots els termes independents.

Si el sistema de vectors ha de ser lliure, voldrà dir que l'única solució possible és que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. En altres paraules, el sistema anterior ha de tenir únicament la "solució trivial". Recordem que, perquè això passi, el determinant dels coeficients ha de ser diferent de zero. Comprovem-ho.

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 7 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} =(18-35-72)-(4-60-189)=-89+245=156\neq 0$$

En conclusió, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, i els tres vectors $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{u}_3$ formen un sistema lliure, per la qual cosa $\boxed{\text{són linealment independents}}$

98. Prova que els vectors $\mathbf{u}_1=(1,-2,0)$, $\mathbf{u}_2=(-3,0,2)$ i $\mathbf{u}_3=(0,-1,3)$ formen una base B de l'espai R^3, provant en primer lloc que és un sistema generador i després que és un sistema lliure. Busca també les components del vector $\mathbf{u}=(11,-14,8)$ en aquesta base.

Solució. Sabem que perquè $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ sigui una base, ha de passar a la vegada que sigui un sistema generador i un sistema lliure. Provem que efectivament és així.

SISTEMA GENERADOR. Donat un vector qualsevol $\mathbf{u}=(x,y,z)$ de R^3, hem de trobar tres coeficients, per exemple a, b i c, tals que

$$\mathbf{u}=a.\mathbf{u}_1+b.\mathbf{u}_2+c.\mathbf{u}_3$$

Substituint per les components de cada vector,

$$(x,y,z)=a.(1,-2,0)+b.(-3,0,2)+c.(0,-1,3)$$

Si, com sempre, multipliquem, sumem i igualem components, ens quedarà el sistema

$$\begin{cases} a-3.b \quad =x & (1) \\ -2.a \quad -c=y & (2) \\ 2.b+3.c=z & (3) \end{cases}$$

Per resoldre'l utilitzarem, per exemple, la regla de Cramer. Trobem en primer lloc el determinant dels coeficients,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =(0+0+0)-(0-2+18)=-16$$

Després calcularem els determinants de les incògnites,

$$D_a=\begin{vmatrix} x & -3 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} =(0+0+3.z)-(0-2.x-9.y)=2.x+9.y+3.z$$

I de la mateixa manera,

$$D_b=\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ -2 & y & -1 \\ 0 & z & 3 \end{vmatrix} =6.x+3.y+z \qquad D_c=\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ -2 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} =-4.x-2.y-6.z$$

Aplicant la regla de Cramer, podrem trobar les incògnites

$$a=\frac{D_a}{D}=\frac{2.x+9.y+3.z}{-16} \qquad b=\frac{D_b}{D}=\frac{6.x+3.y+z}{-16}$$

$$c=\frac{D_c}{D}=\frac{-4.x-2.y-6.z}{-16}=\frac{2.x+y+3.z}{8}$$

En resum, per a cada vector de R^3, $\mathbf{u}=(x,y,z)$ hem sabut trobar tres coeficients a, b i c tals que $\mathbf{u}=a.\mathbf{u}_1+b.\mathbf{u}_2+c.\mathbf{u}_3$. Per tant, el sistema donat serà generador de R^3.

SISTEMA LLIURE. La c. l. nul.la $a.\mathbf{u}_1+b.\mathbf{u}_2+c.\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$ ha d'implicar que a=b=c=0. Fixem-nos que podem fer servir els valors de a, b i c en funció de les components x, y i z del vector. En aquest cas, com que es tracta del vector nul, x=0, y=0 i z=0. Substituint,

$$a=\frac{2.0+9.0+3.0}{-16}=\frac{0}{-16}=0$$

Fàcilment es veu que també b=0 i c=0. Així, doncs, el sistema donat serà lliure. En altres paraules, els tres vectors $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{u}_3$ són linealment independents.

Concloem que $\boxed{B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\} \text{ és una base de } R^3}$ perquè és sistema generador i sistema lliure.

Per posar el vector $\mathbf{u}=(11,-4,8)$ en funció d'aquesta base B, substituirem x=11, y=-4 i z=8 en les expressions que s'han deduït,

$$a=\frac{2.11+9.(-14)+3.8}{-16}=\frac{22-126+24}{-16}=\frac{-80}{-16}=5$$

$$b=\frac{6.11+3.(-14)+8}{-16}=-2 \qquad c=\frac{2.11+(-14)+3.8}{8}=4$$

D'aquesta manera $\boxed{\mathbf{u}=(5,-2,4)_B}$. Si es vol, es pot comprovar les components anteriors segons la base B, només s'ha de veure que es compleix $\mathbf{u}=5.\mathbf{u}_1-2.\mathbf{u}_2+4.\mathbf{u}_3$.

99. Siguin els conjunts de vectors de $\mathcal{P}_3$ següents: $B_1=\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ i $B_2=\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}$ on $\mathbf{p}_1=1$, $\mathbf{p}_2=2x$, $\mathbf{p}_3=3.x^2$, $\mathbf{p}_4=4.x^3$, $\mathbf{q}_1=2$, $\mathbf{q}_2=-2+x$, $\mathbf{q}_3=1+x^2$ i $\mathbf{q}_4=x^3$. Demostra que B_1 i B_2 són bases. Calcula les components de cada vector d'una base respecte a la de l'altra.

Solució. El símbol $\mathcal{P}_3$ representa el conjunt dels polinomis de grau més petit o igual que 3. Aquests vectors polinomis seran de la forma $\mathbf{p}=a+b.x+c.x^2+d.x^3$, o bé, simplificadament, $\mathbf{p}=(a,b,c,d)$.

Com que el vector $\mathbf{p}$ té 4 components, deduïm que $\mathcal{P}_3$ és isomorf a R^4 i, en conseqüència, $\boxed{\dim(\mathcal{P}_3)=4}$

PRIMER CONJUNT DE VECTORS. $B_1=\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$

Provarem que B_1 és una base de $\mathcal{P}_3$, veient únicament que els vectors de B_1 són *linealment independents*, perquè si apliquem la 4a conseqüència del teorema de Steinitz, com que la dimensió és 4 i hi ha 4 vectors en B_1, voldrà dir que ja és sistema generador.

Partim de la "combinació lineal nul.la", on $\mathbf{p}_0=0+0.x+0.x^2+0.x^3$,

$$\lambda_1.\mathbf{p}_1+\lambda_2.\mathbf{p}_2+\lambda_3.\mathbf{p}_3+\lambda_4.\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_0$$

Substituint, obtindrem

$$\lambda_1.1+\lambda_2.2.x+\lambda_3.3.x^2+\lambda_4.4.x^3=0+0.x+0.x^2+0.x^3$$

Com que aquesta expressió s'ha de verificar per a qualsevol valor de x, haurem d'identificar coeficients,

$$1.\lambda_1=0 \quad , \quad 2.\lambda_2=0 \quad , \quad 3.\lambda_3=0 \quad , \quad 4.\lambda_4=0$$

És a dir, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ i $\lambda_4=0$. El conjunt B_1 serà, doncs, un sistema lliure i com que apliquem el teorema de Steinitz, resulta que $\boxed{B_1 \text{ serà una base de } \mathcal{P}_3}$.

SEGON CONJUNT DE VECTORS. $B_2=\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}$

Fem exactament el mateix que a l'apartat anterior. Partim de

$$\lambda_1.\mathbf{q}_1+\lambda_2.\mathbf{q}_2+\lambda_3.\mathbf{q}_3+\lambda_4.\mathbf{q}_4=\mathbf{p}_0$$

Substituïm, posant-ho en funció de la indeterminada x,

$$\lambda_1.2+\lambda_2.(-2+x)+\lambda_3.(1+x^2)+\lambda_4.x^3=0+0.x+0.x^2+0.x^3$$

Ordenem el polinomi del primer costat,

$$(2.\lambda_1-2.\lambda_2+\lambda_3)+4.\lambda_2.x+\lambda_3.x^2+\lambda_4.x^3=0+0.x+0.x^2+0.x^3$$

Identificant coeficients ens quedarà el sistema

$$2.\lambda_1-2.\lambda_2+\lambda_3=0 \quad , \quad 4.\lambda_2=0 \quad , \quad \lambda_3=0 \quad , \quad \lambda_4=0$$

Directament ens resulta, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. Així, el sistema B_2 serà lliure i, per Steinitz, ens resultarà que $\boxed{B_2 \text{ és base de } \mathcal{P}_3}$

Ara calcularem les components de cada vector d'una base respecte a l'altra base.

VECTORS DE LA PRIMERA BASE. $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$.

Sigui $\mathbf{p}\in\mathcal{P}_3$, serà de la forma $\mathbf{p}=a+b.x+c.x^2+d.x^3$. Expressem-ho en funció dels vectors de la base B_2,

$$\mathbf{p}=\lambda_1.\mathbf{q}_1+\lambda_2.\mathbf{q}_2+\lambda_3.\mathbf{q}_3+\lambda_4.\mathbf{q}_4 \qquad (1)$$

Substituint ens quedarà

$$a+b.x+c.x^2+d.x^3=\lambda_1.(2)+\lambda_2.(-2+x)+\lambda_3.(1+x^2)+\lambda_4.(x^3)$$

Ordenant el segon costat segons els valors creixents de x, ens quedarà la igualtat de polinomis

$$a+b.x+c.x^2+d.x^3=(2.\lambda_1-2.\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2.x+\lambda_3.x^2+\lambda_4.x^3$$

Identificant coeficients, ens quedarà el sistema en lambdes,

$$2.\lambda_1-2.\lambda_2+\lambda_3=a \quad , \quad \lambda_2=b \quad , \quad \lambda_3=c \quad \text{i} \quad \lambda_4=d$$

Substituint la 2a i la 3a en la 1a, $2.\lambda_1-2.b+c=a$, i per tant deduïm que $\lambda_1=(a+2.b-c)/2$. Substituint en (1) obtindrem

$$\mathbf{p}=[(a+2.b-c)/2].\mathbf{q}_1+b.\mathbf{q}_2+c.\mathbf{q}_3+d.\mathbf{q}_4 \qquad (2)$$

Les components d'un vector $\mathbf{p}\in\mathcal{P}_3$ segons la base B_2 seran

$$\mathbf{p}=((a+2.b-c)/2,\ b,\ c,\ d)_{B2} \qquad (3)$$

Ara, com a cas particular de $\mathbf{p}$, agafarem els vectors de B_1,

$$\mathbf{p}_1=1=1+0.x+0.x^2+0.x^3 \Rightarrow a=1\ ,\ b=0\ ,\ c=0 \quad \text{i} \quad d=0$$

Substituint en (3), $\boxed{\mathbf{p}_1=(1/2,\ 0,\ 0,\ 0)_{B2}}$

$$\mathbf{p}_2=2.x=0+2.x+0.x^2+0.x^3 \Rightarrow a=0\ ,\ b=2\ ,\ c=0 \quad \text{i} \quad d=0$$

Substituint, $\boxed{\mathbf{p}_2=(2,\ 2,\ 0,\ 0)_{B2}}$

$$\mathbf{p}_3=3.x^2=0+0.x+3.x^2+0.x^3 \Rightarrow a=0\ ,\ b=0\ ,\ c=3 \quad \text{i} \quad d=0$$

Substituint, $\boxed{\mathbf{p}_3=(-3/2,\ 0,\ 3,\ 0)_{B2}}$

$$\mathbf{p}_4=4.x^3=0+0.x+0.x^2+4.x^3 \Rightarrow a=0\ ,\ b=0\ ,\ c=0 \quad \text{i} \quad d=4$$

Substituint, $\boxed{\mathbf{p}_2=(0,\ 0,\ 0,\ 4)_{B2}}$

VECTORS DE LA SEGONA BASE. $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_4$.

El vector genèric $\mathbf{p}\in\mathcal{P}_3$ donat per $\mathbf{p}=a+b.x+c.x^2+d.x^3$ l'expressem ara en funció dels vectors de la base B_1,

$$\mathbf{p}=\mu_1.\mathbf{p}_1+\mu_2.\mathbf{p}_2+\mu_3.\mathbf{p}_3+\mu_4.\mathbf{p}_4 \qquad (4)$$

Posant-ho tot en funció de la indeterminada x,

$$a+b.x+c.x^2+d.x^3=\mu_1.1+\mu_2.2.x+\mu_3.3.x^2+\mu_4.4.x^3$$

Identificant coeficients,

$$\mu_1=a \quad , \quad 2.\mu_2=b \quad , \quad 3.\mu_3=c \quad \text{i} \quad 4.\mu_4=d$$

Per tant, directament $\mu_2=b/2$, $\mu_3=c/3$ i $\mu_4=d/4$.

Substituint en (4), $\mathbf{p}=a.\mathbf{p}_1+(b/2.).\mathbf{p}_2+(c/3).\mathbf{p}_3+(d/4).\mathbf{p}_4$ (5)

D'aquesta manera, les components d'un vector qualsevol $\mathbf{p}$, en funció dels vectors de la base B_1, seran

$$\mathbf{p}=(a,\ b/2,\ c/3,\ d/4)_{B1} \qquad (6)$$

Particularitzant $\mathbf{p}$ pels vectors $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ i $\mathbf{q}_4$ de la base B_2,

$$\mathbf{q}_1=2=2.1+0.x+0.x^2+0.x^3 \Rightarrow a=2\ ,\ b=0\ ,\ c=0 \quad \text{i} \quad d=0$$

Substituint en (6), $\boxed{\mathbf{q}_1=(2,\ 0,\ 0,\ 0)_{B1}}$

De la mateixa manera trobaràs $\boxed{\mathbf{q}_2=(-2,\ 1/2,\ 0,\ 0)_{B1}}$,

$\boxed{\mathbf{q}_3=(1,\ 0,\ 1/3,\ 0)_{B1}}$ i $\boxed{\mathbf{q}_4=(0,\ 0,\ 0,\ 1/4)_{B1}}$.

100. Sigui l'espai vectorial $(C^2,+,.)$ sobre R, on C és el conjunt dels nombres complexos i les operacions (+) i (.) són les usuals. Demostra que els vectors complexos $\mathbf{u}_1=(1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,i)$, $\mathbf{u}_3=(i,1)$ i $\mathbf{u}_4=(i,-i)$ formen una base B de C^2. Quina és la dimensió de C^2? Calcula també les components del vector $\mathbf{u}=(2+3.i,\ -4+5.i)$ respecte d'aquesta base.

Solució. Els vectors de l'espai vectorial $(C^2,+,.)$ estaran fòrmats per parelles de complexos i seran de la forma

$$\mathbf{u}=(a+b.i,\ c+d.i) \quad \text{on } a,b,c,d\in R \quad (i=\sqrt{-1})$$

Per veure que el conjunt $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ és una base de C^2, provarem en primer lloc que és un *sistema generador.*

Haurà de passar que

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\lambda_3.\mathbf{u}_3+\lambda_4.\mathbf{u}_4 \quad \text{on } \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in R$$

Substituint pels vectors corresponents,

$$(a+b.i,\ c+d.i)=\lambda_1.(1,1)+\lambda_2.(1,i)+\lambda_3.(i,1)+\lambda_4.(i,-i)$$

Multiplicant i sumant components,

$$(a+b.i,\ c+d.i)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.i+\lambda_4.i,\ \lambda_1+\lambda_2.i+\lambda_3-\lambda_4.i)$$

Identificant components,

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.i+\lambda_4.i=a+b.i \quad , \quad \lambda_1+\lambda_2.i+\lambda_3-\lambda_4.i=c+d.i$$

Agrupant parts reals i imaginàries,

$$(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_3+\lambda_4).i=a+b.i \quad , \quad (\lambda_1+\lambda_3)+(\lambda_2-\lambda_4).i=c+d.i$$

Igualant les parts reals i també les imaginàries, ens quedarà el sistema de 4 equacions amb 4 incògnites,

$$\lambda_1+\lambda_2=a \ (1)\ , \quad \lambda_3+\lambda_4=b \ (2)\ , \quad \lambda_1+\lambda_3=c \ (3)\ , \quad \lambda_2-\lambda_4=d \ (4)$$

Resolem-lo sumant primer (1)+(2) i (3)+(4),

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=a+b \quad , \quad \lambda_1+\lambda_3+\lambda_2-\lambda_4=c+d$$

Restant aquestes dues últimes,

$$2.\lambda_4=a+b-c-d \quad \text{i, per tant,} \quad \boxed{\lambda_4=(a+b-c-d)/2}$$

Substituint en (2), $\lambda_3=b-\lambda_4=b-\ (a+b-c-d)/2=(2.b-a-b+c+d)/2$

Per tant, $\boxed{\lambda_3=(-a+b+c+d)/2}$

Substituint en (4), $\lambda_2=d+\lambda_4=d+\ (a+b-c-d)/2=(2.d+a+b-c-d)/2$

Obtenim, $\boxed{\lambda_2=(a+b-c+d)/2}$

Substituint en (1), $\lambda_1=a-\lambda_2=a-\ (a+b-c+d)/2=(2.a-a-b+c-d)/2$

Finalment, $\boxed{\lambda_1=(a-b+c-d)/2}$

Donat un $\mathbf{u}=(a+b.i,\ c+d.i)\in C^2$, sabem trobar els λ_i tals que

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\lambda_3.\mathbf{u}_3+\lambda_4.\mathbf{u}_4$$

Això voldrà dir que el conjunt de vectors $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ és un sistema generador de C^2.

Provem que també B és un *sistema lliure*. Partim doncs de la combinació lineal nul·la

$$\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\lambda_3.\mathbf{u}_3+\lambda_4.\mathbf{u}_4=\mathbf{u}_0 \quad \text{on } \mathbf{u}_0=(0+0.i,\ 0+0.i)$$

Observem que podem trobar de seguida el λ_1, ja que podem substituir a=0, b=0, c=0 i d=0, en les expressions anteriors,

$$\lambda_1=(a-b+c-d)/2=(0-0+0-0)/2=0$$

I també, directament, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ i $\lambda_4=0$.

Com que tots els coeficients són nuls, el sistema serà lliure i, com que ja hem provat que és generador, resultarà que

$$\boxed{B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\} \text{ serà una base de } C^2}$$

Pel fet que aquesta base està formada per 4 vectors, ja podem dir que la dimensió de l'espai vectorial és 4, $\boxed{\dim(C^2)=4}$.

A continuació, hem de posar el vector $\mathbf{u}=(2+3.i,\ -4+5.i)$ en combinació lineal dels vectors d'aquesta base. Evidentment, tenim a=2, b=3, c=-4 i d=5. En conseqüència,

$$\lambda_1=\frac{2-3+(-4)-5}{2}=\frac{-10}{2}=-5 \qquad \lambda_2=\frac{2+3-(-4)+5}{2}=\frac{14}{2}=7$$

$$\lambda_3=\frac{-2+3+(-4)+5}{2}=\frac{2}{2}=1 \qquad \lambda_4=\frac{2+3-(-4)-5}{2}=\frac{4}{2}=2$$

És a dir, obtenim $\mathbf{u}=-5.\mathbf{u}_1+7.\mathbf{u}_2+1.\mathbf{u}_3+2.\mathbf{u}_4$

Finalment, les components del vector $\mathbf{u}$ segons la base B són

$$\boxed{\mathbf{u}=(-5,7,1,2)_B}.$$

101. Donat el vector $\mathbf{u}=(2,-1,3,-4)_{B_i}$, on $B_i=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$. Calcula les components del vector $\mathbf{u}$ en la base $B_f=\{\mathbf{u}'_1,\ \mathbf{u}'_2,\ \mathbf{u}'_3,\ \mathbf{u}'_4\}$ on es verifiquen les relacions $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}'_1+\mathbf{u}'_2$, $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}'_1-\mathbf{u}'_3$, $\mathbf{u}_3=\mathbf{u}'_2+\mathbf{u}'_4$ i $\mathbf{u}_4=\mathbf{u}'_1+\mathbf{u}'_2+\mathbf{u}'_3+\mathbf{u}'_4$.

Solució. Com que $\mathbf{u}$ està donat en la base inicial B_i resulta

$$\mathbf{u}=2.\mathbf{u}_1-1.\mathbf{u}_2+3.\mathbf{u}_3-4.\mathbf{u}_4$$

Ara bé, si tenim en compte les relacions entre les dues bases i les substituïm en l'expressió anterior,

$$\mathbf{u}=2.(\mathbf{u}'_1+\mathbf{u}'_2)-1.(\mathbf{u}'_1-\mathbf{u}'_3)+3.(\mathbf{u}'_2+\mathbf{u}'_4)-4.(\mathbf{u}'_1+\mathbf{u}'_2+\mathbf{u}'_3+\mathbf{u}'_4)$$

Multiplicant i agrupant termes,

$$\mathbf{u}=(2-1-4).\mathbf{u}'_1+(2+3-4).\mathbf{u}'_2+(1-4).\mathbf{u}'_3+(3-4).\mathbf{u}'_4$$

Com que $\mathbf{u}=-3.\mathbf{u}'_1+1.\mathbf{u}'_2-3.\mathbf{u}'_2-1.\mathbf{u}'_4$, les components en B_f seran

$$\boxed{\mathbf{u}=(-3,1,-3,-1)_{B_f}}.$$

102. En un espai vectorial tenim les bases $B_i=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ i $B_f=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2,\mathbf{u}'_3\}$, on les relacions entre elles són $\mathbf{u}'_1=\mathbf{u}_1+2.\mathbf{u}_2+3.\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}'_2=2.\mathbf{u}_1+4.\mathbf{u}_2+5.\mathbf{u}_3$ i $\mathbf{u}'_3=3.\mathbf{u}_1+5.\mathbf{u}_2+6.\mathbf{u}_3$. Escriu la matriu de pas P i la seva inversa. Si les components d'un vector $\mathbf{u}$ són 2, 3 i 4, respecte a la base inicial, quines seran les components respecte a la base final?

Solució. Recordem que la matriu de pas P té per columnes les components dels vectors de la base final B_f respecte als vectors de la inicial B_i. Com que ja ens donen aquestes relacions, tindrem

$$P=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$$

Per trobar la matriu inversa, podem fer-ho per adjunts, on la inversa és definida per $P^{-1}=\mathcal{P}'/|P|$. És a dir, la inversa és igual a la transposada de l'adjunta, dividit pel determinant de la matriu.

Comencem, doncs, trobant el determinant, que haurà de ser diferent de zero, si volem que existeixi la inversa...

$$|P|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{vmatrix}=(24+30+30)-(36+25+24)=84-85=-1$$

Calculem a continuació els determinants adjunts,

$$|\mathcal{P}_{11}|=+\begin{vmatrix}4&5\\5&6\end{vmatrix}=-1 \qquad |\mathcal{P}_{12}|=-\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}=3 \qquad |\mathcal{P}_{13}|=+\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}=-2$$

$$|\mathcal{P}_{21}|=-\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}=3 \qquad |\mathcal{P}_{22}|=+\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}=-3 \qquad |\mathcal{P}_{23}|=-\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=1$$

$$|\mathcal{P}_{31}|=+\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-2 \qquad |\mathcal{P}_{32}|=-\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}=1 \qquad |\mathcal{P}_{33}|=+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0$$

La matriu adjunta i la seva transposada seran

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\3&-3&1\\-2&1&0\end{pmatrix} \qquad \mathcal{P}'=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\3&-3&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

Observem que han quedat iguals, ja que $\mathcal{P}$ és simètrica. Per tant, com que el determinant és $|P|=-1$, la inversa serà l'oposada

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

Si ens fixem en les seves columnes, que representaran les components dels vectors de la base inicial, B_i, en funció de les components de la base final, B_f, tindrem

$$\mathbf{u}_1=1.\mathbf{u}'_1-3.\mathbf{u}'_2+2.\mathbf{u}'_3 \qquad \mathbf{u}_2=-3.\mathbf{u}'_1+3.\mathbf{u}'_2-1.\mathbf{u}'_3 \qquad \mathbf{u}_3=2.\mathbf{u}'_1-1.\mathbf{u}'_2+0.\mathbf{u}'_3$$

Ens diuen que un vector $\mathbf{u}$ té de components 2, 3 i 4 respecte a la base inicial $B_i=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$. Per tant,

$$\mathbf{u}=(2,3,4)_{Bi}=2.\mathbf{u}_1+3.\mathbf{u}_2+4.\mathbf{u}_3$$

Substituint per les relacions deduïdes de la matriu inversa,

$$\mathbf{v}=2.(\mathbf{v}'_1-3.\mathbf{v}'_2+2.\mathbf{v}'_3)+3.(-3.\mathbf{v}'_1+3.\mathbf{v}'_2-\mathbf{v}'_3)+4.(2.\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2)$$

Multiplicant i agrupant,

$$\mathbf{v}=(2-9+8).\mathbf{v}'_1+(-6+9-4).\mathbf{v}'_2+(4-3).\mathbf{v}'_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}=\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2+\mathbf{v}'_3$$

En conseqüència, les components del vector v respecte a la base final B_f seran $\boxed{\mathbf{v}=(1,-1,1)_{Bf}}$.

Podíem haver arribat a la mateixa conclusió, i d'una manera més ordenada, fent servir el càlcul matricial. Recordem les fórmules que ens passen les components de la base a les d'una altra,

$$X_i \to X_f : \boxed{X_f=P^{-1}\bullet X_i} \qquad X_f \to X_i : \boxed{X_i=P\bullet X_f}$$

Com que hem de passar de la base B_i a la B_f, farem servir la primera,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-9+9 \\ -6+9-4 \\ 4-3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, també $\boxed{\mathbf{v}=(1,-1,1)_{Bf}}$

103 Siguin les relacions $\mathbf{v}'_1=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}'_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}'_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ que lliguen les bases $B_i=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ i $B_f=\{\mathbf{v}'_1,\mathbf{v}'_2,\mathbf{v}'_3\}$ d'un espai vectorial V. A partir del vector genèric $\mathbf{v}$ expressat en la base inicial, $\mathbf{v}=(x_1,x_2,x_3)_{Bi}$, i en la final, $\mathbf{v}=(x'_1,x'_2,x'_3)_{Bf}$, quines seran les equacions cartesianes que ens permetran passar de B_i a B_f? I les de pas de B_f a B_i? Aplica-ho després al vector $\mathbf{v}=(-4,6,3)_{Bi}$ en el primer cas i a $\mathbf{w}=(-3,4,-1)_{Bf}$ en el segon cas.

Solució. Com que ja coneixem les components dels vectors de la base final B_f en funció de les de la inicial B_i, posarem aquestes components en columnes i ens quedarà la matriu de pas,

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De passada, i com que ens farà falta, trobarem la seva matriu inversa, però ara ho farem tot recordant el mètode de Gauss-Jordan, on hem emprat la regla del pivot,

$$M=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

En conseqüència, la *matriu inversa* de P és

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Com que hem de trobar les equacions cartesianes que ens permeten passar de B_i a B_f, podrem fer servir aquesta matriu, perquè ja sabem que $X_f=P^{-1}\bullet X_i$.

En el nostre cas tindrem

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicant les dues matrius i igualant els termes correlatius tindrem el sistema

$$\boxed{\begin{cases} x'_1= \quad -x_2 \quad +x_3 \\ x'_2=-x_1-x_2+2.x_3 \\ x'_3= x_1+x_2 \quad -x_3 \end{cases}} \qquad (1)$$

A partir de la matriu de pas P, i donades les coordenades finals, podrem trobar les inicials, ja que $X_f \rightarrow X_i$: $X_i=P\bullet X_f$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicant, sumant i igualant els termes correlatius, ens quedaran les *equacions cartesianes* que ens permeten passar d'un vector expressat en B_f en el mateix vector expressat en B_i.

$$\boxed{\begin{cases} x_1= x'_1 \quad +x'_3 \\ x_2=-x'_1+x'_2+x'_3 \\ x_3= \quad x'_2+x'_3 \end{cases}} \qquad (2)$$

Si ens donen el vector $\mathbf{u}=(-4,6,3)_{Bi}$ voldrà dir que coneixem les components inicials $x_1=-4$, $x_2=6$ i $x_3=3$. Per trobar les finals farem servir les primeres equacions cartesianes, (1),

$$x'_1=-6+3=-3 \quad , \quad x'_2=-(-4)-6+2.3=4 \quad , \quad x'_3=-4+6-3=-1$$

Per tant, en funció de la base final, serà $\boxed{\mathbf{u}=(-3,4,-1)_{Bf}}$.

Si, finalment, coneixem $\mathbf{w}=(-3,4,-1)_{Bf}$, ja ens podem imaginar el que donarà en la base inicial. Comprovem-ho amb (2),

$$x_1=-3+(-1)=-4 \quad , \quad x_2=-(-3)+4+(-1)=6 \quad , \quad x_3=4+(-1)=3$$

I, lògicament, serà $\boxed{\mathbf{w}=(-4,6,3)_{Bi}}$.

2.2. SUBESPAI VECTORIAL

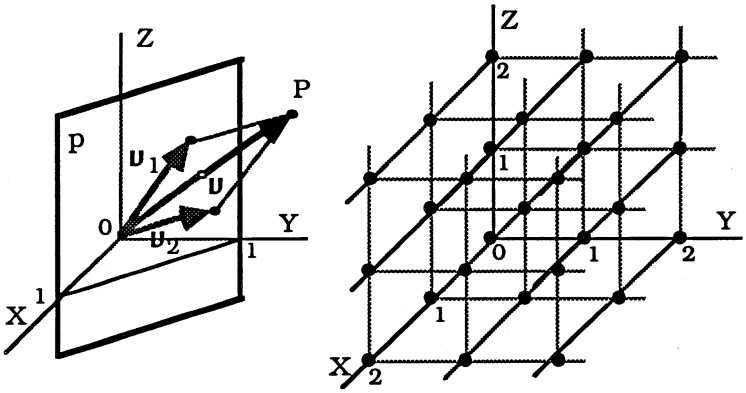
Definició de subespai vectorial

104. En l'espai vectorial $V=(R^3,+,.)$ considerem els dos conjunts $A=\{\mathbf{u}=(x,y,z) \ / \ x+y=1\}$ i $B=\{(x,y,z) \ / \ x,y,z\in N_0\}$. Són subespais de V?

Solució. Si fem els dos dibuixos ja veurem de seguida que cap d'ells no serà subespai vectorial de V:

El primer, perquè sumant dos vectors d'origen el de coordenades i extrem un punt del pla donat p: x+y=1, s'obté un vector que no és en P.

El segon, perquè multiplicant un vector, que surt de O i acaba en un dels punts aïllats del conjunt B, per un nombre real, ens pot quedar un extrem que no sigui de coordenades naturals:



Provem-ho analíticament, fent servir les dues condicions perquè un subconjunt S sigui *subespai vectorial* de V:

$$\text{(I)}\ \forall \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in S \Rightarrow \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\in S \qquad \text{(II)}\ \forall\lambda\in K \wedge \forall \mathbf{u}\in S \Rightarrow \lambda.\mathbf{u}\in S$$

PRIMER SUBCONJUNT: $A=\{(x,y,z)\in R^3 \ / \ x+y=1\}$

Siguin $\mathbf{u}_1=(x_1,y_1,z_1)$ i $\mathbf{u}_2=(x_2,y_2,z_2)$ dos vectors de R^3 tals que pertanyin al conjunt A. Es complirà, per tant, que

$$x_1+y_1=1 \quad \text{i} \quad x_2+y_2=1$$

Formem la seva suma, $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ i ens preguntem si pertanyerà també al conjunt A. És a dir, si la suma de les dues primeres components serà igual a la unitat. Vegem-ho.

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=1+1=2$$

Com que el resultat és diferent de 1, no es compleix la primera condició i, per tant, $\boxed{\text{A no és subespai vectorial de } R^3}$.

SEGON SUBCONJUNT: $B=\{(x,y,z)\in R^3 \ / \ x,y,z\in N_0\}$

Aquest subconjunt de l'espai està format per infinits punts de coordenades els naturals ampliats, $N_0=\{0,1,2,3,...\}$. Mirem si es compleixen les dues condicions de subespai.

PRIMERA CONDICIÓ. Siguin, com abans, $\mathbf{u}_1=(x_1,y_1,z_1)$ i $\mathbf{u}_2=(x_2,y_2,z_2)$ dos vectors de B. Així, les seves components compliran

$$x_1,y_1,z_1\in N_0 \quad \text{i} \quad x_2,y_2,z_2\in N_0$$

Si fem la suma, $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$. Aquest vector també pertany a B, ja que la suma de dos nombres naturals és natural. Així es compleix la 1a condició.

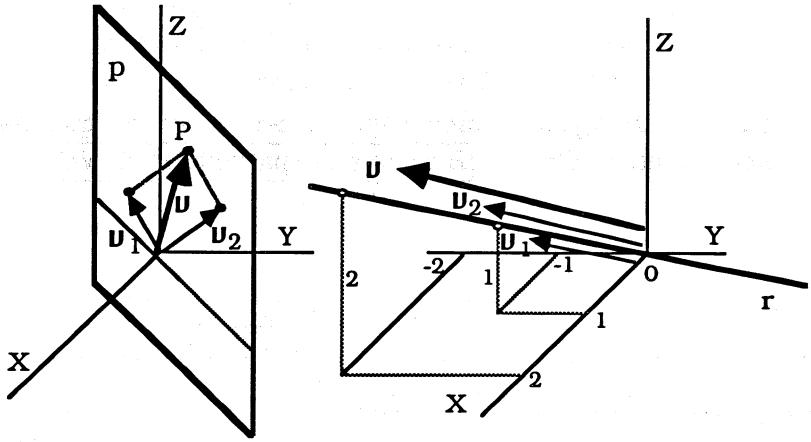
SEGONA CONDICIÓ Si $\mathbf{u}=(x,y,z)\in B$, tindrem $x,y,z\in N_0$. Ara multiplicarem aquest vector per un nombre real λ,

$$\lambda.\mathbf{u}=\lambda.(x,y,z)=(\lambda.x,\ \lambda.y,\ \lambda.z)$$

Però aquestes components no són necessàriament naturals, ja que per exemple si $\lambda=\sqrt{2}$ i $x=3$ resulta que $3.\sqrt{2}\notin N_0$. Com que no es compleix la 2a condició, tenim que $\boxed{\text{B no és subespai de } R^3}$.

105. En l'espai vectorial $V_3=\{\mathbf{u}=(x,y,z) \ / \ x,y,z\in R\}$ dels vectors de l'espai, considerem els dos subconjunts de vectors $A=\{\mathbf{u} \ / \ x=y\}$ i $B=\{\mathbf{u} \ / \ x=-y=z\}$. Quins d'ells són subespais vectorials de V_3?

Solució. De les gràfiques dels subconjunts donats de l'espai, un pla i una recta que passen per l'origen de coordenades, es veu que tots dos són subespais vectorials.



Fixem-nos que tant la suma com l'homotècia de vectors dels subconjunts també pertanyeran al subconjunt.

Per variar, emprarem la *condició única* per demostrar que un subconjunt de V_3 és subespai vectorial,

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in K \ \wedge \ \forall \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in S \ \Rightarrow \ \lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2\in S$$

PRIMER SUBCONJUNT: $A=\{(x,y,z) \ / \ x=y\}$ o també $A=\{(x,y,z) \ / \ x-y=0\}$

Siguin dos nombres reals λ_1 i λ_2 i dos vectors $\mathbf{u}_1=(x_1,y_1,z_1)$ i $\mathbf{u}_2=(x_2,y_2,z_2)$ que pertanyen al conjunt A. Es complirà

$$x_1-y_1=0 \qquad \text{i} \qquad x_2-y_2=0 \qquad (1)$$

Formem el vector combinació lineal

$$\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2=\lambda_1.(x_1,y_1,z_1)+\lambda_2.(x_2,y_2,z_2)$$

Multiplicant i sumant,

$$\mathbf{u}=(\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2,\ \lambda_1.y_1+\lambda_2.y_2,\ \lambda_1.z_1+\lambda_2.z_2)$$

Mirem si és nul.la la resta de les dues primeres components,

$$x-y=(\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2)-(\lambda_1.y_1+\lambda_2.y_2)=\lambda_1.(x_1-y_1)+\lambda_2.(x_2-y_2)$$

Substituint per les condicions (1),

$$x-y=\lambda_1.0+\lambda_2.0=0$$

Per tant, $\mathbf{u}\in A$ i així $\boxed{\text{A és un subespai vectorial de } V_3}$.

SEGON SUBCONJUNT: $B=\{(x,y,z) \ / \ x=-y=z\}$

També podem posar $B=\{(x,y,z) \ / \ x+y=0 \ \wedge \ x-z=0\}$. Siguin els vectors $\mathbf{u}_1=(x_1,y_1,z_1)$ i $\mathbf{u}_2=(x_2,y_2,z_2)$ que pertanyen al conjunt B. Es compliran les condicions

$$x_1+y_1=0 \ , \ x_1-z_1=0 \ , \ x_2+y_2=0 \ , \ x_2-z_2=0 \qquad (2)$$

Si fem la combinació lineal $\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2$ tindrem

$$\mathbf{u}=(\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2,\ \lambda_1.y_1+\lambda_2.y_2,\ \lambda_1.z_1+\lambda_2.z_2)$$

Igual que en l'apartat anterior, tindrem, aplicant (2),

$$x+y=\ldots=\lambda_1.(x_1+y_1)+\lambda_2.(x_2+y_2)=\lambda_1.0+\lambda_2.0=0$$

$$x-z=\ldots=\lambda_1.(x_1-z_1)+\lambda_2.(x_2-z_2)=\lambda_1.0+\lambda_2.0=0$$

Com que $\mathbf{u}=(x,y,z)$ verifica $x+y=0$ i $x-z=0$, vol dir que $\mathbf{u}\in B$ i, finalment, podem dir que $\boxed{\text{B és un subespai vectorial de } V_3}$.

106. Trobant les seves equacions cartesianes, comprova que el subespai engendrat pels vectors $\mathbf{u}_1=(1,2,3)$ i $\mathbf{u}_2=(2,-1,1)$ és el mateix que l'engendrat per $\mathbf{w}_1=(3,2,5)$ i $\mathbf{w}_2=(-1,4,3)$.

Solució. Tenim el conjunt $C_1=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$. El subespai engendrat per ell estarà format per totes les combinacions lineals possibles que es poden formar amb aquests dos vectors. És a dir,

$$S(C_1)=\{\mathbf{u}\in R^3 \ / \ \exists\lambda_1,\lambda_2\in R \ \wedge \ \mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2\}$$

Si $\mathbf{u}=(x,y,z)$ i substituïm $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ per les seves components,

$$(x,y,z)=\lambda_1.(1,2,3)+\lambda_2.(2,-1,1)$$

Operant, ens quedarà el sistema d'equacions lineals,

$$\lambda_1+2.\lambda_2=x \ (1) \quad , \quad 2.\lambda_1-\lambda_2=y \ (2) \quad , \quad 3.\lambda_1+\lambda_2=z \ (3)$$

Eliminem λ_1 i λ_2 fent el sistema {(2),(3)} i substituint-ho en (1).

Sumem primer (2)+(3), $5.\lambda_1=y+z$, $\lambda_1=(y+z)/5$. Substituint en (3), ens quedarà

$$\lambda_2=z-3.\lambda_1=z-3.(y+z)/5=(5.z-3.y-3.z)/5 \quad , \quad \lambda_2=(-3.y+2.z)/5$$

Substituint λ_1 i λ_2 en (1),

$$(y+z)/5+2.(-3.y+2.z)/5=x \quad , \quad y+z-6.y+4.z=5.x \quad , \quad -5.y+5.z=5.x$$

Simplificant i ordenant termes, obtindrem l'*equació cartesiana* del subespai $S(C_1)$,

$$-y+z=x \quad , \quad -x-y+z=0 \quad , \quad \boxed{x+y-z=0}$$

SEGON SUBESPAI. $S(C_2)=\{\mathbf{w}\in R^3 \ / \ \exists\mu_1,\mu_2\in R \wedge \mathbf{w}=\mu_1.\mathbf{w}_1+\mu_2.\mathbf{w}_2\}$

Substituint, en la combinació lineal anterior, cada vector per les seves components, obtindrem

$$(x,y,z)=\mu_1.(3,2,5)+\mu_2.(-1,4,3)$$

Multiplicant, sumant i igualant components ens quedarà el sistema d'equacions lineals,

$$3.\mu_1-\mu_2=x \ (1) \quad , \quad 2.\mu_1+4.\mu_2=y \ (2) \quad , \quad 5.\mu_1+3.\mu_2=z \ (3)$$

Sumant les dues primeres, $5.\mu_1+3.\mu_2=x+y$, observarem que el primer costat és igual al de la (3). Per tant, $x+y=z$.

L'*equació cartesiana* del subespai $S(C_2)$ serà $\boxed{x+y-z=0}$.

Queda comprovat, doncs, que els conjunts de vectors C_1 i C_2 són equivalents, ja que generen el mateix subespai, $S(C_1)=S(C_2)$.

107. Sigui el conjunt $S=\{A\in\mathcal{M}_2 \ / \ \tau(A)=0\}$, és a dir, el conjunt de les matrius de segon ordre de traça nul.la. Demostra que S és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_2$ sobre R. Calcula després una de les seves bases i digues la dimensió.

Solució. Com ja sabem, la "traça" d'una matriu és igual a la suma dels elements de la diagonal principal. Així, el conjunt S és

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2 \ / \ a+d=0\right\}$$

Siguin A_1 i A_2 dues matrius que pertanyen a S. Tindrem

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ on } a_1+d_1=0 \quad \text{i} \quad A_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \text{ on } a_2+d_2=0$$

Per veure que S és un subespai de $\mathcal{M}_2$, aplicarem la condició

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in R\ ,\ \ \forall A_1,A_2\in S\ \wedge\ A=\lambda_1.A_1+\lambda_2.A_2\ \Rightarrow\ A\in S$$

Formem la combinació lineal,

$$A=\lambda_1\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1.a_1+\lambda_2.a_2 & \lambda_1.b_1+\lambda_2.b_2\\ \lambda_1.c_1+\lambda_2.c_2 & \lambda_1.d_1+\lambda_2.d_2\end{pmatrix}$$

Estudiem si la seva traça és zero,

$$\tau(A)=(\lambda_1.a_1+\lambda_2.a_2)+(\lambda_1.d_1+\lambda_2.d_2)=\lambda_1.(a_1+d_1)+\lambda_2.(a_2+d_2)$$

I com que les traces de A_1 i A_2 són nul.les,

$$\tau(A)=\lambda_1.0+\lambda_2.0=0$$

Deduïm, doncs, que $\boxed{\text{S és un subespai vectorial}}$ de l'espai vectorial de les matrius de segon ordre.

Trobem ara una *base* d'aquest espai vectorial. Com que en S es verifica a+d=0, tindrem d=-a, i així les matrius de S es podran posar en la forma,

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=a.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Simbolitzem aquestes noves matrius per

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,\ \ A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ \ \text{i}\ \ A_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

És clar que el conjunt $B=\{A_1,A_2,A_3\}$ és un *sistema generador* de S, ja que es pot escriure $A=a.A_1+b.A_2+c.A_3$, on A és una matriu qualsevol de S.

També és un *sistema lliure*, perquè per obtenir la matriu nul.la A=O, que també pertany a S, ja que la traça és nul.la, ens resulta que a=0, b=0 i c=0.

En resum, $\boxed{B=\{A_1,A_2,A_3\}\text{ és una base}}$ del subespai S, i com que està formada per tres vectors, la seva dimensió serà $\boxed{\dim(S)=3}$.

108. Sigui $S=\{p\in\mathcal{P}_3\ /\ p(0)=p(1)\}$, on $\mathcal{P}_3$ és l'espai vectorial de polinomis d'indeterminada x i de grau més petit o igual que 3. Demostra que S és un subespai vectorial donant una de les seves bases i la dimensió.

Solució. Un polinomi de $\mathcal{P}_3$ és de la forma $p=a+b.x+c.x^2+d.x^3$, on a,b,c,d són nombres reals. Si el polinomi pertany a S voldrà dir que coincideixen els seus valors numèrics resultants de substituir la indeterminada x per 0 i per 1, respectivament.

Tenim $S=\{p\in\mathcal{P}_3\ /\ p(0)=p(1)\}$ o també $S=\{p\in\mathcal{P}_3\ /\ p(0)-p(1)=0\}$. Provem que S és un subespai vectorial de $\mathcal{P}_3$.

Si $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\in S$ s'hauran de complir les condicions de definició

$$\mathbf{p}_1(0)-\mathbf{p}_1(1)=0 \quad \text{i} \quad \mathbf{p}_2(0)-\mathbf{p}_2(1)=0$$

Sigui ara el polinomi $\mathbf{p}=\lambda_1.\mathbf{p}_1+\lambda_2.\mathbf{p}_2$, on $\lambda_1,\lambda_2\in R$. Hem de provar que també $\mathbf{p}\in S$, és a dir que $\mathbf{p}(0)-\mathbf{p}(1)=0$. Efectivament,

$$\mathbf{p}(0)-\mathbf{p}(1)=[\lambda_1.\mathbf{p}_1(0)+\lambda_2.\mathbf{p}_2(0)]-[\lambda_1.\mathbf{p}_1(1)+\lambda_2.\mathbf{p}_2(1)]=$$
$$=\lambda_1.[\mathbf{p}_1(0)-\mathbf{p}_1(1)]+\lambda_2.[\mathbf{p}_2(0)-\mathbf{p}_2(1)]=\lambda_1.0+\lambda_2.0=0$$

Així, doncs, $\boxed{\text{S és un subespai de } \mathcal{P}_3}$.

Trobarem una *base* de S, partint del polinomi $\mathbf{p}$ de $\mathcal{P}_3$,

$$\mathbf{p}=a+b.x+c.x^2+d.x^3 \quad \text{on } a,b,c,d\in R \quad (1)$$

Si $\mathbf{p}\in S$ haurà de passar que $\mathbf{p}(0)-\mathbf{p}(1)=0$ i com que aquests valors són $\mathbf{p}(0)=a$ i $\mathbf{p}(1)=a+b+c+d$, tindrem $a-(a+b+c+d)=0$, $-b-c-d=0$, d'on $d=-b-c$. Substituint en (1),

$$\mathbf{p}=a+b.x+c.x^2+(-b-c).x^3 \Rightarrow \mathbf{p}=a.1+b.(x-x^3)+c.(x^2-x^3)$$

Si anomenen $\boxed{\mathbf{p}_1=1}$, $\boxed{\mathbf{p}_2=x-x^3}$ i $\boxed{\mathbf{p}_3=x^2-x^3}$, tindrem

$$\mathbf{p}=a.\mathbf{p}_1+b.\mathbf{p}_2+c.\mathbf{p}_3 \quad (2)$$

Observem que els tres polinomis pertanyen a S, ja que

$$\mathbf{p}_1(0)-\mathbf{p}_1(1)=1-1=0 \qquad \mathbf{p}_2(0)-\mathbf{p}_2(1)=(0-0^3)-(1-1^3)=0-0=0$$
$$\mathbf{p}_3(0)-\mathbf{p}_3(1)=(0^2-0^3)-(1^2-1^3)=0-0=0$$

A més, de (2) es dedueix que $B=\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\}$ formen un *sistema generador*. També formen un *sistema lliure*, ja que per a la combinació lineal nul.la tindrem

$$a.\mathbf{p}_1+b.\mathbf{p}_2+c.\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_0 \quad \text{on } \mathbf{p}_0=0+0.x+0.x^2+0.x^3$$

Substituint i operant tindrem

$$a+b.x+c.x^2+(-b-c).x^3 = 0+0.x+0.x^2+0.x^3$$

Identificant components es veu clarament que $a=b=c=0$.

En conseqüència, $\boxed{B=\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\} \text{ és una base de S}}$. Com que consta de tres vectors, deduïm que $\boxed{\dim(S)=3}$.

Subespais intersecció i suma

109. Siguin en l'espai R^4 els subespais $S_1=\{(x,y,z,t) \ / \ x+t=y+z\}$, $S_2=\{(x,y,z,t) \ / \ x+2z=y \ , \ x=y\}$. Calcula una base i la dimensió de S_1 i S_2. Troba $S_1\cap S_2$ i S_1+S_2, com també les seves dimensions i una base de cadascun d'ells. Comprova també la fórmula de Grassmann.

Solució. No cal provar que S_1 i S_2 són subespais de R^4, perquè ja ens diuen que ho són. Trobem una base de cadascun, partint d'un vector genèric de R^4,

$$\mathbf{v}=(x,y,z,t) \quad \text{on } x,y,z,t\in R \quad (1)$$

PRIMER SUBESPAI. $S_1=\{(x,y,z,t) \ / \ x+t=y+z\}$. Aïllant t en la condició d'aquest subespai vectorial, $t=-x+y+z$, i substituint en (1),

$$\mathbf{v}=(x,y,z,-x+y+z)=(x,0,0,-x)+(0,y,0,y)+(0,0,z,z)$$

Traient factor comú, $\mathbf{v}=x.(1,0,0,-1)+y.(0,1,0,1)+z(0,0,1,1)$, i si anomenem

$$\boxed{\mathbf{w}_1=(1,0,0,-1)} \quad \boxed{\mathbf{w}_2=(0,1,0,1)} \quad \boxed{\mathbf{w}_3=(0,0,1,1)}$$

tindrem $\mathbf{v}=x.\mathbf{w}_1+y.\mathbf{w}_2+z.\mathbf{w}_3$ (2)

Fixem-nos que $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\in S_1$, ja que compleixen la condició "la suma de les components extremes és igual a la de les mitjanes".

Per tant, de (2) ja veiem que aquests tres vectors formen un *sistema generador* de S_1.

També formen un *sistema lliure* ja que de $x.\mathbf{w}_1+y.\mathbf{w}_2+z.\mathbf{w}_3=\mathbf{0}$, si substituïm ens queda, $(x,y,z,-x+y+z)=(0,0,0,0)$, d'on $x=y=z=0$.

Deduïm, doncs, que $\boxed{B_1=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\} \text{ és una base de } S_1}$ i com que té tres vectors, $\boxed{\dim(S_1)=3}$.

SEGON SUBESPAI. $S_2=\{(x,y,z,t) \ / \ x+2.z=y \ , \ x=y\}$. De la 2a condició tenim, $y=x$, que substituïda en la 1a dóna $x+2.z=x \ , \ 2z=0 \ , \ z=0$.

Si el vector $\mathbf{v}\in S_2$ serà de la forma

$$\mathbf{v}=(x,x,0,t)=(x,x,0,0)+(0,0,0,t)=x.(1,1,0,0)+t.(0,0,0,1)$$

Si anomenem $\mathbf{w}_4=(1,1,0,0)$ i $\mathbf{w}_5=(0,0,0,1)$ tindrem

$$\mathbf{v}=x.\mathbf{w}_4+t.\mathbf{w}_5 \quad (3)$$

Com que tant $\mathbf{w}_4$ com $\mathbf{w}_5$ pertanyen a S_2, perquè $x=y$ i $z=0$, deduïm de (3) que formaran un *sistema generador* de S_2. També serà un *sistema lliure*, ja que

$$x.\mathbf{w}_4+t.\mathbf{w}_5=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (x,x,0,t)=(0,0,0,0) \quad \Rightarrow \quad x=t=0$$

Concloem que $\boxed{B_2=\{\mathbf{w}_4,\mathbf{w}_5\} \text{ és una base de } S_2}$ i la seva dimensió és $\boxed{\dim(S_2)=2}$, ja que la base consta de dos vectors.

Calculem el *subespai intersecció*, $S_1\cap S_2$. Si $\mathbf{v}=(x,y,z,t)$ és un vector que pertany al conjunt intersecció, voldrà dir que pertany a la vegada a S_1 i a S_2. Haurà de complir les condicions de cadascun d'ells, que són

$$S_1: \ t=-x+y+z \qquad S_2: \ y=x \ \text{ i } \ z=0$$

Substituint les dues últimes en la 1a, $t=-x+x+0 \ , \ t=0$. Per tant, els vectors de la intersecció hauran de ser de la forma

$$\mathbf{v}=(x,x,0,0)=x.(1,1,0,0)=x.\mathbf{w}_4$$

Clarament, $\boxed{B_3=\{\mathbf{w}_4\} \text{ és una base de } S_1\cap S_2}$ i la seva dimensió és $\boxed{\dim(S_1\cap S_2)=1}$.

Trobem el *subespai suma*, S_1+S_2, que està format per tots els vectors de la forma $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, on $\mathbf{v}_1\in S_1$ i $\mathbf{v}_2\in S_2$. Com que

$$\mathbf{v}_1=\lambda_1.\mathbf{w}_1+\lambda_2.\mathbf{w}_2+\lambda_3.\mathbf{w}_3 \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_2=\lambda_4.\mathbf{w}_4+\lambda_5.\mathbf{w}_5$$

Substituint, ens quedarà

$$\mathbf{v}=\lambda_1.\mathbf{w}_1+\lambda_2.\mathbf{w}_2+\lambda_3.\mathbf{w}_3+\lambda_4.\mathbf{w}_4+\lambda_5.\mathbf{w}_5$$

Deduïm d'aquesta expressió que $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3,\mathbf{w}_4,\mathbf{w}_5\}$ serà un *sistema generador* de S_1+S_2. És clar que ens sobren vectors, perquè estem en l'espai R^4.

Trobarem un *sistema lliure* aplicant el mètode de reducció de Gauss. Esquemàticament, resulta

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que el rang d'aquesta matriu és $\rho(M)=4$, voldrà dir que els 4 primers vectors, que són precisament $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_5$, seran linealment independents, és a dir, formaran un sistema lliure, i com que encara continuen essent sistema generador, tindrem que $\boxed{B_4=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3 \text{ i } \mathbf{w}_5\} \text{ és una base de } S_1+S_2}$ i que la seva dimensió és $\boxed{\dim(S_1+S_2)=4}$

Finalment, comprovarem la *fórmula de Grassmann*, que ens diu

$$\boxed{\dim(S_1)+\dim(S_2)=\dim(S_1\cap S_2)+\dim(S_1+S_2)}$$

En efecte, substituint, $3+2=1+4$, $5=5$.

110. Troba el subespai S_2 que és complementari del subespai $S_1=\{(x, y, x-y, -y)\in R^4\}$, calculant primerament una base de S_1 i ampliant-la després fins a obtenir una base de R^4.

Solució. Partim del vector genèric $\mathbf{v}=(x,y,x-y,-y)\in S_1$, i deduïm una base d'aquest subespai vectorial,

$$\mathbf{v}=(x,0,x,0)+(0,y,-y,-y)=x.(1,0,1,0)+y.(0,1,-1,-1)$$

Anomenant, $\mathbf{v}_1=(1,0,1,0)$ i $\mathbf{v}_2=(0,1,-1,-1)$, ens quedarà

$$\mathbf{v}=x.\mathbf{v}_1+y.\mathbf{v}_2 \quad (1)$$

És clar que $\boxed{B_1=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\} \text{ és una base de } S_1}$, ja que els dos vectors formen un sistema generador de S_1 i són linealment independents.

Com que la dimensió de S_1 és $\boxed{\dim(S_1)=2}$ i la de l'espai vectorial és $\dim(R^4)=4$, voldrà dir que a més dels dos vectors de la base B_1, ens en faltaran 2 més per aconseguir una base de R^4.

Els possibles candidats són, lògicament, els de la *base canònica*, ja que són els més senzills. Tenim $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$, on

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0,0) \quad , \quad \mathbf{e}_2=(0,1,0,0) \quad , \quad \mathbf{e}_3=(0,0,1,0) \quad , \quad \mathbf{e}_4=(0,0,0,1)$$

Expressem el vector $\mathbf{u}_1$ en funció d'aquesta base,

$$\mathbf{u}_1=(1,0,1,0)=(1,0,0,0)+(0,0,1,0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3 \quad (2)$$

Aïllant $\mathbf{e}_1$, tindrem $\mathbf{e}_1=\mathbf{u}_1-\mathbf{e}_3$.

Així, substituint en la base canònica

$$B=\{\mathbf{u}_1-\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\}$$

Sumant al 1r vector el 3r ens quedarà la nova base de R^4,

$$\boxed{B'=\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\}}$$

Posem també el vector $\mathbf{u}_2$ en funció de la base anterior,

$$\mathbf{u}_2=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{e}_2+\lambda_3.\mathbf{e}_3+\lambda_4.\mathbf{e}_4 \quad (3)$$

Substituint per les seves components,

$$(0,1,-1,-1)=\lambda_1.(1,0,1,0)+\lambda_2.(0,1,0,0)+\lambda_3.(0,0,1,0)+\lambda_4.(0,0,0,1)$$

Operant, ens quedarà el sistema

$$\lambda_1=0 \quad , \quad \lambda_2=1 \quad , \quad \lambda_1+\lambda_3=-1 \quad , \quad \lambda_4=-1$$

Substituint $\lambda_1=0$ en la 3a queda $\lambda_3=-1$. Substituint en (3),

$$\mathbf{u}_2=0.\mathbf{u}_1+1.\mathbf{e}_2-1.\mathbf{e}_3-1.\mathbf{e}_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_2=\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4$$

Aïllant $\mathbf{e}_2$ tindrem, $\mathbf{e}_2=\mathbf{u}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$ i substituint en la base B',

$$B'=\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4\ ,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\}$$

Si al 2n vector li restem el 3r i el 4t ens quedarà la nova base

$$\boxed{B''=\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\}}$$

Encara que no és necessari, podem veure de seguida que B" és una base de R^4, ja que està formada per 4 vectors que són linealment independents perquè la matriu formada per ells, en estar escalonada, té de rang 4,

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De les bases $B''=\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\}$ de R^4 i $B_1=\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ de S_1, podem deduir la *base del subespai complementari*, que estarà formada pel conjunt complementari de B_1 en B"; és a dir,

$$\boxed{B_2=\{\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\}}$$

D'aquesta manera, el *subespai complementari* de S_1 en R^4 serà

$$\boxed{S_2=\{\mathbf{u}\in R^4 \ / \ \exists\lambda_1,\lambda_2\in R \ \wedge \ \mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{e}_3+\lambda_2.\mathbf{e}_4\}}$$

Expressem-lo en l'*equació cartesiana*, substituint els vectors per les seves components,

$$(x,y,z,t)=\lambda_1.(0,0,1,0)+\lambda_2.(0,0,0,1) \ \Rightarrow \ (x,y,z,t)=(0,0,\lambda_1,\lambda_2)$$

Igualant components, $x=0$, $y=0$, $z=\lambda_1$ i $t=\lambda_2$.

Com sempre, les dues primeres components són nul.les i les dues últimes poden ser qualssevol. Els vectors de S_2 seran de la forma $\mathbf{u}=(0,0,z,t)$.

L'equació cartesiana és $\boxed{S_2=\{(x,y,z,t)\in R^4 \ / \ x=0 \ \wedge \ y=0\}}$.

Hem de comprovar que la suma dels dos subespais és *suma directa*, $S_1\oplus S_2=R^4$. S'hauran de complir les dues condicions:

1) PRIMERA CONDICIÓ: $\boxed{S_1\cap S_2=\{\mathbf{0}\}}$

Si $\mathbf{u}=(x,y,z,t)\in S_1\cap S_2$, voldrà dir que $\mathbf{u}\in S_1$ i també $\mathbf{u}\in S_2$. Així es compliran les condicions de les seves equacions cartesianes,

$$S_1\text{: } z=x-y \text{ i } t=-y \qquad S_2\text{: } z=0 \text{ i } t=0$$

Substituint la 4a en la 2a tenim $y=0$. Substituint en la 1a ens quedarà $x=0$. En resum, l'únic vector que pot pertànyer a la vegada a S_1 i a S_2 és el de components nul.les, és a dir, $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

2) SEGONA CONDICIÓ: $\boxed{S_1+S_2=R^4}$

Aquesta condició es compleix trivialment per la construcció que hem fet de les bases.

Així, doncs, només ens queda dir que, en complir-se les dues condicions anteriors, $\boxed{\text{la suma és directa, } S_1\oplus S_2=R^4}$.

f) PROBLEMES PROPOSATS

2.1 ESPAIS VECTORIALS

Estructura d'espai vectorial

111. Comprova que els vectors polinomi de primer grau $\mathbf{u}_1=2x-3$, $\mathbf{u}_2=-5x+6$ i $\mathbf{u}_3=7x-1$, compleixen la propietat associativa per a la suma.

Sol. $(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)+\mathbf{u}_3=\ldots=4.x+2$.

112. En R^2 es defineixen les operacions de suma (+) i producte per un escalar (.) per $(x,y)+(x',y')=(x+x',\ y+y')$ i $k.(x,y)=(0,\ k.y)$. És l'estructura $(R^2,+,\ .)$ un espai vectorial sobre R? Justifica la teva conclusió.

Sol. No, falla l'axioma (X) d'element unitat.

113. Sigui el conjunt $V=\{z\in R\ /\ z=x+y.\sqrt{2}\ ,\ x,y\in Q\}$. Definim en V l'operació de suma $(x+y.\sqrt{2})+(x'+y'.\sqrt{2})=(x+x')+(y+y').\sqrt{2}$ i de producte per un escalar $k.(x+y.\sqrt{2})=(k.x)+(k.y).\sqrt{2}$. És $(V,+,\ .)$ un espai vectorial sobre Q? I sobre R?

Sol. $(V,+,\ .,\ Q)$=esp. vect. , $(V,+,\ .,\ R)$=No E.V. $(k.x\notin Q)$.

114. En el conjunt $\mathcal{F}=\{f\colon R\to R\ /\ f=\text{aplicació}\}$, és a dir el conjunt de les funcions reals de variable real, definim les operacions de suma $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ i de producte per un escalar $(k.f)(x)=k.f(x)$. Demostra que $(\mathcal{F},+,\ .)$ és un espai vectorial sobre R.

Sol. Aplicar axiomes , el. neutre $f_0(x)=0$, $\forall x\in R$.

115. Sigui $V=(Z/2)\times(Z/2)$ i $K=Z/2$, on $Z/2$ és el cos de les classes residuals mòdul 2. Comprova que l'estructura $(V,+,\ .)$, on (+) i (.) són les operacions usuals, és un espai vectorial sobre K. Fes les dues taules pitagòriques.

Sol. Comprova tots els 10 axiomes.

Base i dimensió d'un espai vectorial

116. Determineu els paràmetres m i n de manera que els vectors de R^4, $\mathbf{v}_1=(3,-2,-1,3)$, $\mathbf{v}_2=(1,0,2,4)$ i $\mathbf{v}_3=(11,-6,m,n)$ siguin vectors linealment dependents i escriu la relació de dependència.

Sol. m=1 , n=17 , $3.\mathbf{v}_1+2.\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3=0$.

117. Si $\mathcal{A}$ és el conjunt de les matrius de segon ordre, comprova que són independents les matrius:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\quad \text{i}\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Sol : $\lambda_1.\mathbf{A}+\lambda_2.\mathbf{B}+\lambda_3.\mathbf{C}=\mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

118. En l'espai vectorial dels polinomis de grau més petit o igual que 3, $\mathcal{P}_3$, sobre el cos dels nombres reals, considerem els polinomis $\mathbf{p}_1=1$, $\mathbf{p}_2=1+x$, $\mathbf{p}_3=(1+x)^2$ i $\mathbf{p}_4=(1+x)^3$. Prova que aquests vectors formen una base B de $\mathcal{P}_3$ i digues la dimensió. Calcula també les components del polinomi $\mathbf{p}=-4-4.x+x^2+2.x^3$ en aquesta base.

Sol. $\dim(\mathcal{P}_3)=4$, $p=(-1,\ 0,\ -5,\ 2)_B$.

119. Demostra que si el conjunt de vectors $B=\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$ forma una base d'un espai vectorial V, també $B'=\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{u}+\mathbf{w},\ \mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ constituirà una base de V. Inventa't després tres vectors que formin base i comproba que les seves sumes binàries també seran base.

Sol. S_L: $\lambda_1.(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\ldots=\mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1=\ldots=0$

$\dim(V)=3$ 4a cons. teor. Steinitz $\Rightarrow$ B'=base.

120. Considerem l'espai vectorial (V,+, .) sobre $\mathbb{Q}$ on el conjunt V està definit per $V=\{\mathbf{v}\ /\ \mathbf{v}=a+b.\sqrt{2}+c.\sqrt{3}\ ,\ a,b,c\in\mathbb{Q}\}$. Quina és la base canònica d'aquest espai? Quina és la seva dimensió?

Siguin els tres vectors donats per $\mathbf{v}_1=3+4.\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\mathbf{v}_2=2+6.\sqrt{2}+\sqrt{3}$ i $\mathbf{v}_3=5+2.\sqrt{2}+3.\sqrt{3}$. Comprova que $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ és una base de V i calcula les components del vector $\mathbf{w}=9+4.\sqrt{2}+4.\sqrt{3}$ respecte d'aquesta base.

Sol. $B_C=\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$, $\dim(V)=3$, $B=S_L$, $\mathbf{w}=(2,-1,1)_B$.

121. Les components d'un vector $\mathbf{u}$ són (1,2,1) referides a la base $B_i=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$. Calculeu les seves components respecte de la base $B_f=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$, sabent que $\mathbf{u}'_1=3.\mathbf{u}_1+2.\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}'_2=4.\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$ i $\mathbf{u}'_3=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$.

Sol. $X_f=P^{-1}\bullet X_i$, $\mathbf{u}=(-1/5, 4/5, -8/5)_{Bf}$.

122. Siguin les bases $B_i=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ i $B_f=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2,\mathbf{u}'_3,\mathbf{u}'_4\}$ d'un espai vectorial V i siguin les relacions $\mathbf{u}'_1=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}'_2=\mathbf{u}_1+$ $+2.\mathbf{u}_2+2.\mathbf{u}_3+2.\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}'_3=\mathbf{u}_1+2.\mathbf{u}_2+3.\mathbf{u}_3+3.\mathbf{u}_4$ i $\mathbf{u}'_1=\mathbf{u}_1+2.\mathbf{u}_2+3.\mathbf{u}_3+4.\mathbf{u}_4$. Donat el vector $\mathbf{u}=(1,-2,3,4)$ referit a la base inicial Bi, calcula per mitjà de matrius les seves components respecte a la base final.

Sol. $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}=(4,-8,4,1)_{Bf}$.

2.2. SUBESPAI VECTORIAL

Definició de subespai vectorial

123. Estudia si el vector $\mathbf{u}=(2,14,-34,3)$ de $V=(R^4,+, .)$ pertany al subespai generat pels vectors $\mathbf{u}_1=(1,4,-5,3)$ i $\mathbf{u}_2=(1,2,3,4)$.

Sol. Sí, $\mathbf{u}=5.\mathbf{u}_1-3.\mathbf{u}_2$.

124. En l'espai vectorial $V_2=\{\mathbf{u}=(x,y) \ / \ x,y\in R\}$ dels vectors del pla, determina quins dels següents subconjunts $A=\{(x,y) \ / \ x+y=0\}$ i $B=\{(x,y) \ / \ x-y=1\}$ constitueixen un subespai vectorial de V_2.

Sol. Només A.

125. Donats els tres vectors de R^4, $\mathbf{u}_1=(1,-1,0,0)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,0,1)$ i $\mathbf{u}_3=(2,0,1,1)$, el subespai S generat per ells estarà format pels vectors $\mathbf{u}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tals que $\mathbf{u}=\lambda_1.\mathbf{u}_1+\lambda_2.\mathbf{u}_2+\lambda_3.\mathbf{u}_3$. Podries deduir quina és l'equació cartesiana d'aquest subespai S?

Sol. Subst. i eliminar les λ. $x_1+x_2-2.x_4=0$.

126. Considerem el subespai S generat pels vectors $\mathbf{v}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{v}_2=(1,2,1)$ i $\mathbf{v}_3=(0,1,1/2)$. Troba en primer lloc una base de S i la seva dimensió. Calcula també les equacions paràmetriques i cartesianes de S.

Sol. $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$, dim(S)=2 , Eq. par. $x=\lambda_1+\lambda_2$, $y=2.\lambda_2$, $z=\lambda_2$.
Eq. cart. $y-2.z=0$.

127. En l'espai vectorial R^3 considerem els subconjunts de vectors donats per $S_k=\{(x,y,z) \ / \ 2x-3y+4z+k=0 \ , \ k\in R\}$. Quin serà el valor que haurà de tenir k perquè el subconjunt S_k sigui un subespai vectorial de R^3. Troba una de les seves bases i digues la dimensió d'aquest subespai vectorial.

Sol. k=0 S_0 sub.esp. B: $\mathbf{v}_1=(2,0,-1)$, $\mathbf{v}_2=(0,4,3)$, $\dim(S_0)=2$.

128. Sigui el subespai S engendrat per les aplicacions $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-x}$ i $f_3(x)=(e^x - e^{-x})/2$. Busca una base d'aquest subespai. Dibuixa també les tres funcions donades per mitjà de taules de valors i comprova el resultat a partir d'aquestes mateixes taules.

Sol. $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-x}$.

Subespais intersecció i suma

129. Comprova que són complementaris els dos subespais de R^3, $S_1=\{(x,y,z) \ / \ 2x-3y=z\}$ i $S_2=\{(x,y,z) \ / \ x+2y+z=0 \ , \ x=3y\}$. Interpreta geomètricament cadascun d'aquests dos subespais.

Sol. $S_1\cap S_2=\{\mathbf{0}\}$, $S_1+S_2=R^3$, S_1=pla , S_2=recta (passen per O)

130. Prova que els subespais S_1, generat per $\mathbf{w}_1=(1,1,1)$, i el S_2, generat per $\mathbf{w}_2=(1,0,0)$ i $\mathbf{w}_3=(0,0,-1)$, són complementaris en R^3. Si $\mathbf{v}=(7,5,3)$ és un vector de R^3, calcula les seves components $\mathbf{v}_1\in S_1$ i $\mathbf{v}_2\in S_2$, tals que $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$. Troba les seves projeccions sobre S_1 i S_2.

Sol. $S_1\cap S_2=\{\mathbf{0}\}$, $S_1+S_2=R^3$, $\mathbf{v}_1=(5,5,5)$, $\mathbf{v}_2=(2,0,-2)$

$p_1=5.\sqrt{3}$, $p_2=2.\sqrt{2}$.

APÈNDIX

A) Prova d'autoavaluació

B) Bibliografia escollida

C) Glossari de conceptes

PROVA D'AUTOAVALUACIÓ

PROBLEMES PARAMETRITZATS

Presentem a continuació una sèrie de dotze problemes que, com és lògic, no abasten la totalitat de l'àmplia gamma d'exercicis que es podrien proposar. Tots aquests problemes de càlcul vectorial i espais vectorials depenen d'un *paràmetre* "a", que pot valer 1, 2, 3 o 4. Per a cadascun dels valors anteriors s'obté una resposta diferent entre les vuit possibles donades.

En els següents *problemes parametritzats*, substitueix en primer lloc el paràmetre a pel valor que desitgis entre 1, 2, 3 o 4, resol el problema, escull l'opció correcta i després fes una creu al quadre de respostes:

Càlcul vectorial

1. Siguin els dos vectors $\mathbf{v}_1$=(a, a+1, a+2) i $\mathbf{v}_2$=(10-a, 9-a, 8-a). Calcula les seves normes i el seu producte escalar. Si després trobes l'angle que formen t'ha de donar aproximadament:

A) α=23°49' B) α=25°13' C) α=18°32' D) α=21°52'
E) α=31°04' F) α=19°17' G) α=28°02' H) α=16°35'

2. Els dos punts de l'espai P_1(1, 2, 3) i P_2(12/a, 3.a, 8-a) determinen un vector, el qual, com saps, forma amb els eixos coordenats tres angles anomenats inclinacions. La suma S d'aquests angles és:

A) S=150°52' B) S=175°45' C) S=160°37' D) S=155°28'
E) S=165°26' F) S=185°13' G) S=170°08' H) S=180°00'

3. En un segment P_1P_2 del pla s'ha realitzat una partició de constant k=(a+1)/(a+2), obtenint el punt P(60, 2.a+3). Si se sap que el punt origen és P_1(a+1, a+2), llavors el punt extrem P_2 haurà de ser:

A) P_2(74, 10) B) P_2(93, 5) C) P_2(85, 7) D) P_2(71, 12)
E) P_2(72, 11) F) P_2(79, 8) G) P_2(76, 9) H) P_2(89, 6)

4. Donats els vectors de l'espai $\mathbf{v}_1$=(a+1, a-2, a+4), $\mathbf{v}_2$=(a-3, a, a-1) i $\mathbf{v}_3$=(a+3, a-4, a+2), troba el vector "doble producte vectorial" donat per $\mathbf{w}=(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)\wedge\mathbf{v}_3$. La seva norma w=$\|\mathbf{w}\|$ té un valor aproximat de:

A) w=152'71 B) w=289'29 C) w=106'86 D) w=48'35
E) w=27'93 F) w=182'10 G) w=64'42 H) w=230'14

5. Un dipòsit d'aigua en forma de paral·lelepípede té per arestes els vectors de l'espai $\mathbf{v}_1=P_0P_1$, $\mathbf{v}_2=P_0P_2$ i $\mathbf{v}_3=P_0P_3$, on els quatre vèrtexs són $P_0(1, 2, 3)$, $P_1(a+8, 2a+2, 2a+3)$, $P_2(7, a+1, 9)$ i $P_3(9, 10, a+4)$. Calcula el seu volum V_P per mitjà del càlcul vectorial. Es vol canviar la forma del dipòsit a una en forma de cub que ocupi el mateix volum. L'aresta o costat x d'aquest cub serà:

A) x=8 B) x=9 C) x=6 D) x=5
E) x=2 F) x=7 G) x=3 H) x=4

6. Els punts de l'espai P(1,2,3), Q(a, a-1, a+1) i R(3a+1, 2a+2, a+3) formen un triangle. Per mitjà del càlcul vectorial troba l'àrea del triangle i la longitud de la base PQ. Llavors el valor aproximat de l'altura h baixada des del vèrtex R serà expressada per

A) h=7'348 B) h=8'327 C) h=2'9 D) h=3
E) h=6'148 F) h=4'72 G) h=9 H) h=5'554

Espais vectorials

7. En l'espai R^4 tenim dos sistemes de vectors $S_1=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ i $S_2=\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$, on aquests vectors són:

$\mathbf{v}_1=(-8, 1, -4, 2)$ $\mathbf{w}_1=(-2, 8, 4, -3)$
$\mathbf{v}_2=(3, -7, 6, -5)$ $\mathbf{w}_2=(-6, 5, -1, 7)$
$\mathbf{v}_3=(a^2-3.a+7, 6, -2, 3)$ $\mathbf{w}_3=(4, 3, a^2-6.a+13, -10)$
$\mathbf{v}_4=(-2, a^2-4.a-10, 8, -8)$ $\mathbf{w}_4=(-2, 11, 9, a^2-3.a-11)$

Si utilitzes el mètode de reducció de Gauss per calcular els rangs r_1 i r_2 dels dos sistemes S_1 i S_2, obtenint així el màxim nombre de vectors linealment independents, et resultarà respectivament:

A) 2 i 3 B) 3 i 4 C) 4 i 4 D) 3 i 2
E) 4 i 2 F) 3 i 3 G) 2 i 4 H) 4 i 3

8. Considerem el subespai de les matrius de segon ordre de termes reals i tals que el terme a_{22} és nul. Siguin també les matrius

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A_3=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Comprova que la nova matriu A de termes $a_{11}=a^2$, $a_{12}=-(a^2-3.a+7)$, $a_{21}=a^2+5.a+2$ i $a_{22}=0$ és combinació lineal de les matrius anteriors; és a dir, troba els coeficients λ_1, λ_2 i λ_3 tals que $A=\lambda_1.A_1+\lambda_2.A_2+\lambda_3.A_3$. Quant valdrà la suma S d'aquests coeficients?

A) S=2 B) S=1 C) S=10 D) S=8
E) S=6 F) S=0 G) S=4 H) S=7

9. Siguin les dues bases $Bi=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ i $Bf=\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ d'un espai vectorial V, on es verifiquen les relacions $\mathbf{u}_1=a.\mathbf{u}'_1-2.\mathbf{u}'_2+(a+1).\mathbf{u}'_3$, $\mathbf{u}_2=(5-a).\mathbf{u}'_1+(2-a).\mathbf{u}'_2+3.\mathbf{u}'_3$ i $\mathbf{u}_3=4.\mathbf{u}'_1+(a-1).\mathbf{u}'_2+(3-a).\mathbf{u}'_3$. Si sabem que en V les components de dos altres vectors $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ respecte a la base inicial B_i són $\mathbf{w}_1=(2, -3, 1)_{Bi}$ i $\mathbf{w}_2=(3, 1, -2)_{Bi}$, quines seran les components dels vectors respecte a la base final $\mathbf{w}'_1=(x_1, y_1, z_1)_{Bf}$ i $\mathbf{w}'_2=(x_2, y_2, z_2)_{Bf}$? Quin serà el producte escalar $P=\mathbf{w}'_1 \bullet \mathbf{w}'_2$?

A) P=-47 B) P=-14 C) P=3 D) P=-25
E) P=-8 F) P=26 G) P=0 H) P=12

10. En $\mathcal{R}^4$ tenim quatre conjunts formats pels vectors $\mathbf{u}=(x,y,z,t)$ que vénen definits per les seves equacions C_1: $(2-a).x+(1-a).y+3.z+4.t=0$, C_2: $3.x+y+(a-1).z+(a-3).t=a$, C_3: $2.x+5.y+(a+2).z+(a+4).t=2.a$ i finalment C_4: $(4-a).x+(3-a).y+2.z+3.t=0$, . Quins d'ells són subespais vectorials de R^4? Troba el subespai intersecció S d'aquests subespais. Veuràs que la seva equació és de la forma $z=m.x+n.y$, $t=p.x+q.y$. Quant valdrà el valor de la constant $K=(m+n)-(p+q)$?

A) K=20 B) K=24 C) K=22 D) K=16
E) K=26 F) K=18 G) K=30 H) K=28

11. Considerem els subespais $S,T \in \mathcal{M}_2$ definits per

$$S=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \ / \ n=p\right\} \quad i \quad T=\left\{\begin{pmatrix} m' & n' \\ p' & q' \end{pmatrix} \ / \ m'=a.(n'+p')\right\}$$

Si calcules el subespai intersecció, $S \cap T$, veuràs que una possible base és de la forma

$$B(S \cap T)=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Quant valdrà el terme a_{11}?

A) $a_{11}=3$ B) $a_{11}=8$ C) $a_{11}=2$ D) $a_{11}=1$
E) $a_{11}=7$ F) $a_{11}=6$ G) $a_{11}=4$ H) $a_{11}=5$

12. Siguin les dues bases $B_i=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ i $B_f=\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ d'un espai vectorial, on els vectors estan relacionats per les equacions:

$$\mathbf{v}'_1=\mathbf{v}_1+a.\mathbf{v}_2-2.\mathbf{v}_3 \quad , \quad \mathbf{v}'_2=\mathbf{v}_2 \quad i \quad \mathbf{v}'_3=-\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$$

Emprant la matriu de pas P i sabent les components d'un vector $\mathbf{v}=(1,2,3)$ respecte a la base inicial B_i, calcula les components x'_1, x'_2 i x'_3 d'aquest vector respecte a la base final B_f. El valor de x'_2 serà:

A) $x'_2=15$ B) $x'_2=13$ C) $x'_2=21$ D) $x'_2=11$
E) $x'_2=19$ F) $x'_2=25$ G) $x'_2=17$ H) $x'_2=23$

QUADRE DE RESPOSTES:

1 A B C D ○ E F G H	2 A B C D ○ E F G H	3 A B C D ○ E F G H	4 A B C D ○ E F G H
5 A B C D ○ E F G H	Després de resoldre tots els problemes, fes una creu a les respostes que consideris correctes. Si creus que la resposta no figura entre les vuit donades, posa la creu al cercle central.		6 A B C D ○ E F G H
7 A B C D ○ E F G H			8 A B C D ○ E F G H
9 A B C D ○ E F G H	10 A B C D ○ E F G H	11 A B C D ○ E F G H	12 A B C D ○ E F G H

Respostes correctes en funció del paràmetre:

P_1: G-D-F-C	P_2: B-E-G-B	P_3: H-F-A-D	P_4: G-C-F-B
P_5: C-D-H-G	P_6: D-A-E-H	P_7: A-D-B-H	P_8: B-G-H-C
P_9: F-C-B-D	P_{10}: G-E-C-F	P_{11}: C-G-F-B	P_{12}: D-A-E-H

Puntuació:

Respostes encertades: ☐ Punts positius (×4): ☐

equivocades: ☐ negatius (×(-1)): ☐

Puntuació total: ☐

Qualificació:

Per obtenir la nota N farem servir la "Part entera", on prendrem l'enter inferior a la puntuació donada. Així, E(5'3)=5. Quant a la qualificació, ens basarem en el barem següent:

Susp.(N<5) Apr.(5≤N<7) Not.(7≤N<9) Exc.(N≥9)

Nota [N=(E(P+3)/5)]: [ ] Qualificació: [ ]

Si la puntuació no ha estat prou alta, es pot tornar a resoldre la prova, repassant abans els conceptes i exemples, però ara emprant un valor diferent pel paràmetre "a" que ha de ser 1, 2, 3 o 4.

BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemàticas Empresariales 1.* Ed. A. C. Madrid. 1990.

CALLE, M. L.; VENDRELL, R. *Problemes d'àlgebra linela i càlcul infinitesimal.* Ed. Eumo. Vic. 1992.

CANCELO, J. R. *Problemas de Algebra Lineal para Economistas. Tomos (I) y (II).* Ed. Tebar Flores. Madrid. 1987.

CASANOVA, J. *Exámenes de Algebra Lineal.* Ed. Universidad y Cultura. Madrid. 1987.

DELGADO, M. *Matemáticas: Algebra, Cálculo, Geometría, Probabilidad.* Serie Schaum. Ed. McGraw-Hill. Madrid. 1989.

GUTIERREZ, A., GARCIA CASTRO, F. *Algebra Lineal. Tomos (I) y (II).* Ed. Pirámide. Madrid. 1981.

HERAS, A., VILAR, J. L. *Problemas de Algebra Lineal para la Economía.* Ed. A. C. Madrid. 1988.

LIPSCHUTZ, S. *Àlgebra Lineal.* Serie Schaum. Ed. McGraw-Hill. Madrid. 1992

MUÑOZ, F. *Manual de Algebra Lineal.* Ed. Ariel Economía. Barcelona. 1988.

PRIETO, E. y G. *Matemática para Economistas: Algebra Lineal.* Ed. ICE. Madrid. 1977.

ROJO, A.O. *Algebra. Tomo (II).* Ed.El Ateneo. Buenos Aires. 1983.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* Ed. C. E. R. Areces. Madrid. 1991.

SAINZ, M. A., SERAROLS, J. L., PEREZ, A. M. *Algebra.* Ed. Palahí. Girona. 1990.

SPIEGEL, MURRAY R. *Algebra Superior.* Schaum. Ed. McGraw-Hill. Mèxico. 1969.

THOMAS ARA, L., RIOS GARCIA, M. E. *Algebra Lineal.* Ed. El Autor. Madrid. 1974.

TUDURI, J. *Matemáticas C.O.U.* Ed. El Autor. Terrassa. 1982.

GLOSSARI DE CONCEPTES

Exposem a continuació un recull dels termes matemàtics emprats, seguits de la plana en què es poden trobar. Els números en negreta indiquen que la paraula és a la part de "Formulació matemàtica". En cas contrari, són a la part de "Conceptes i exemples":

A

Abscisses, eix **23**
Angle entre vectors 17 **27**
Anticommutativitat, prop. 18 **28**
Àrea d'un triangle 19 **28**
Associativa, prop. 87 **107**
Associativitat escalar **25** 87 **107**
Axiomes de definició 86 **107**

B

Base canònica 94 **111**
d'un esp. vectorial 93 **110**
final 95 **111**
inicial 95 **111**
Base, canvi de 95 **111**
matriu de la 95 **111**
Bases, relacions 97 **112**

C

Canònica, base 94 **111**
descomp. 15 **26** 94 **111**
Canònics, vect. 15 **26** 94 **111**
Canvi de base 95 **111**
Canvi de base, fórmules 97 **112**
vector 100 **113**
Cartesianes, equacions 101 **113**
Clausura, subespai 102 **113**
Combinació lineal 90 **109**
nul·la 91 **110**
Commutativa, prop. 16 21 **27** **29** 87 **107**
Complementaris, subespais 105 **114**
Complexos, nombres 88 **108**
Component horitzontal 10 **23**
vertical 10 **23**
Components d'un vector 10 **23** 94 **111** 106 **114**
Components finals 95 **112**
inicials 95 **112**
Condició doble 98 **112**
única 99 **112**
Conjunt d'escalars 86 **107**
de vectors 86 **107**
unió 103 **113**
vectors fixos 11 **23**
vectors lliures 11 **23**
Constant de partició 13 **25**
Coordenats, eixos **23**
Coplanarietat, prop. 21 **29**
Cos commutatiu 86 **107**

D

Definició, axiomes 86 **107**
Dependents, vectors lin. 92 **110**
Descomposició canònica 15 **26** 94 **111**
única 94 **110** 105 **114**
vectorial 91 **109**
Desigualtat triangular, prop. 14 **26**
Determinant 19 20 **28** **29**
Diferència de vectors 12 **24**
Dimensió d'un esp. vect. 95 **111**
subespai vect. 99 **112**
Direccional, vector 101 **113**
Direcció d'un vector 18 28
Directa, suma 105 **114**
Distància dos punts 14 **25**
Distributivitat escalar **25** 87 **107**
vectorial **25** 87 **107**

Distributivitat, prop. 16 **27** 19 **28**
Doble prod. vectorial 22 **29**
Doble, condició 98 **112**
Dos punts, distància 14 **25**

- E -

Eixos coordenats **23**
Element neutre, prop. 87 **107**
oposat, prop. 87 **107**
unitat **25** 87 **107**
Engendrat, subespai 102 **113**
Equacions cartesianes 101 **113**
paramètriques 101 **113**
Equació de lligadura 93
Equipolents, vectors 10 **23**
Escalar 86 **107**
Escalar unitat 87 **107**
Escalar, associat. **25** 87 **107**
distributivitat **25** 87 **107**
producte 16 **26**
simplificació 89 **108**
Escalar-vector, producte 13 **25**
Escalaritat, prop. 14 16 19 **26** **27** **28**
Escalars, conjunt 86 **107**
Espai vect. producte 89 **109**
real 87 **107**
base d'un 93 **110**
dimensió 95 **111**
estructura 86 **107**
Espai, vectors 11 **23** 88 100 **108** **113**
Espais vectorials, prop. 89 **108**
Estructura de grup abelià 12 **24** 87 **107**
Exterior, punt 13 **25**
Externa, operació **25** 87 **107**
Extrem, punt 10 **23**

- F -

Final, base 95 **111**
components 95 **112**
Fixos, vectors 11 **23**
Fletxa, vector 10 **23**
Fórmules canvi de base 97 **112**

- G -

Gauss, mètode reduc. 92 **110**
Generador, sistema 90 **109**
Generadors equivalents, sist. 91 **109**
Generalitzats, vectors 86 **107**
Grassmann, relació 104 **114**
Grup abelià, estructura 12 **24** 87 **107**

- H -

Homotècia **25**
Horitzontal, component 10 **23**

- I -

Identitat de Lagrange 22 **29**
Impropis, subespais 99 **112**
Inclinacions 11 **23**
Inclinació d'un vector 10 **23**
Independents, subesp.103 **113**
vectors lin. 91 **110**
Inicial, base 95 **111**
Inicials, components 95 **112**
Interior, punt 13 **25**
Interna, operació 87 **107**
Intersecció, subespai 102 **113**

- L -

Lagrange, identitat 22 **29**
Lineal, combinació 90 **109**
Linealment dep. vect. 92 **110**
indep., vectors 91 **110**
Lligadura, equació de 93
Lligat, sistema 92 **110**
Lliure, sistema 92 **110**
Lliures, vectors 11 **23**
Longitud d'un vector 18 **28**

- M -

Matriu de la base 95 **111**
de pas 97 **112**

Matrius 88 **108**
Mètode reduc. de Gauss 92 **110**
Mitjà, punt 13 **25**
Mixt, producte 20 **29**

- N -

Nombres complexos 88 **108**
Norma d'un vector 14 **25**
Norma, propietats 14 **26**
Notació simplificada **109**
Nul, vector 12 **24**
Nul·la, combin. lineal 91 **110**

- O -

Operació externa **25** 87 **107**
  interna 87 **107**
Oposat, vector 12 **24**
Ordenades, eix **23**
Origen, punt 10 **23**
Ortogonals, vectors 14 **26**
Ortonormals, vectors 15 **26**

- P -

Paral·lelepípede, volum 20 **29**
Paral·lelisme de vectors 17 **27**
  propietat 16 19 **27 28**
Paral·lelogram, regla 12 **24**
Paramètriques, equac. 101 **113**
Partició d'un segment 13 **25**
  constant 13 **25**
  punt 13 **25**
Pas, matriu de 97 **112**
Pendent d'un vector 10 **23**
Perpendicular, projecció 15 **26**
  vectors 17 **27**
  propietat 19 16 **27 28**
Pivot, regla 92
Plans 100 **113**
Polinomis 88 **108**
Posició, vector de 100 **113**
Positivitat, prop. 14 **26**
Producte escalar 16 **26**
  propietats 16 **27**
Producte escalar-vector 13 **25**
Producte mixt 20 **29**
  propietats 21 **29**
Producte vectorial 17 **28**
  propietats 18 **28**
Producte, espai vect. 89 **109**
Projeccions 106 **114**
Projecció perpendicular 15 **26**
Propietats espais vect. 89 **108**
  norma 14 **26**
  prod. escalar 16 **27**
  prod. mixt 21 **29**
  prod. vectorial 18 **28**
Propis, subespais 99 **112**
Punt de partició 13 **25**
  exterior 13 **25**
  extrem 10 **23**
  interior 13 **25**
  mitjà 13 **25**
  origen 10 **23**

- R -

Rang d'un sistema 92 **110**
Real, espai vectorial 87 **107**
Rectes 100 **113**
Regla del paral·lelogram 12 **24**
  del pivot 92
Relacions entre bases 97 **112**
Relació de Grassmann 104 **114**

- S -

Segment, partició d'un 13 **25**
Sentit d'un vector 18 **28**
Simplificació escalar 89 **108**
  vectorial 89 **108**
Simplificada, notació **109**
Sistema de vectors 90 **109**
  generador 90 **109**
  lligat 92 **110**
  lliure 92 **110**
  rang d'un 92 **110**
Sistemes gen. equiv. 91 **109**
Steinitz, teorema 95 **111**
Subespai clausura 102 **113**
  engendrat 102 **113**
  intersecció 102 **113**
  suma 104 **114**

vect., dimensió 99 **112**
vectorial 98 **112**
suma directa 106 **114**
Subespais complem. 105 **114**
impropis 99 **112**
independents 103 **113**
propis 99 **112**
Successions 88 **108**
Suma de vectors 12 **24**
directa 105 **114**
directa subespais 106 **114**
vectorial 86 **107**
Suma, subespai 104 **114**

T

Teorema de Steinitz 95 **111**
Tetraedre, volum 21 **29**
Tipus de vectors 14 **26**
Triangle, àrea 19 **28**

U

Única, condició 99 **112**
descomp. 94 105 **110** **114**
Unió, conjunt 103 **113**
Unitari, vector 14 **26**
Unitat, element **25** 87 **107**
escalar 87 **107**

V

Vector característic 100 **113**
de posició 100 **113**
del pla 10 **23**
direccional 101 **113**
nul 12 **24**
oposat 12 **24**
unitari 14 **26**
Vector, components 10 **23** 94
106 **111** **114**
direcció 18 **28**
longitud 18 **28**
norma 14 **25**
sentit 18 **28**
Vectorial, descomp. 91 **109**
distributivitat **25** 87 **107**
doble prod. 22 **29**
producte 17 **28**
simplificació 89 **108**
subespai 98 **112**
suma 86 **107**
Vectors canònics 15 **26** 94 **111**
de l'espai 11 **23** 88 100
108 **113**
equipolents 10 **23**
fixos 11 **23**
generalitzats 86 **107**
lin. dependents 92 **110**
linealment indep. 91 **110**
lliures 11 **23**
ortogonals 14 **26**
ortonormals 15 **26**
Vectors, angle entre 17 **27**
conjunt 86 **107**
diferència 12 **24**
paral·lelisme 17 **27**
perpendicularitat 17 **27**
sistema 90 **109**
suma 12 **24**
tipus 14 **26**
Vertical, component 10 **23**
Volum paral·lelepípede 20 **29**
tetraedre 21 **29**

ÍNDEX

1. CÀLCUL VECTORIAL.....7
BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA.....8
PROGRAMA I SIMBOLOGIA.....9
CONCEPTES I EXEMPLES.....10
1.1 Vectors en el pla i en l'espai.....10
1.1.1 Concepte de vector.....10
1.1.2 Suma i producte per un escalar.....12
1.1.3 Norme d'un vector.....14
1.2 Productes entre vectors.....15
1.2.1 Producte escalar.....15
1.2.2 Producte vectorial.....17
1.2.3 Producte mixt.....20
1.2.4 Altres productes entre vectors.....22
FORMULACIÓ MATEMÀTICA.....23
PROBLEMES RESOLTS.....30
PROBLEMES PROPOSATS.....74

2. ESPAIS VECTORIALS.....83
BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA.....84
PROGRAMA I SIMBOLOGIA.....84
CONCEPTES I EXEMPLES.....86
2.1 Concepte d'espai vectorial.....86
2.1.1 Vectors generalitzats.....86
2.1.2 Altres exemples i propietats.....88
2.1.3 Sistemes generadors i lliures.....90
2.1.4 Base d'un espai vectorial.....93
2.1.5 Canvi de base.....96
2.2 Subespais vectorial.....98
2.2.1 Definició de subespai vectorial.....98
2.2.2 Exemples de subespais.....100
2.2.3 Subespais intersecció i suma.....102
2.2.4 Suma directa de subespais.....105
FORMULACIÓ MATEMÀTICA.....107
PROBLEMES RESOLTS.....115
PROBLEMES PROPOSATS.....139

APÈNDIX **143**

A) Prova d'autoavaluació 145

B) Bibliografia escollida 150

C) Glossari de conceptes 151