# ÀLGEBRA MATRICIAL: SISTEMES D'EQUACIONS

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

# ÀLGEBRA MATRICIAL: SISTEMES D'EQUACIONS

**Carles Cassú, Joan Bonet, Xavier Bertran, J. Carles Ferrer**

Universitat de Girona
**Departament d'Economia**

Dades recomanades per la Biblioteca de la UdG

CIP 517.9

Àlgebra matricial : sistemes d'equacions / Carles Cassú ... [et al.]. -
Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1996.
145 p. ; cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 5)
ISBN 84-88762-48-8
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1. Equacions - Problemes, exercicis, etc. 2. Equacions
CIP 517.9 ALG

**Primera edició:** març de 1996

**Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya**

**Edita:** Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

**Assessorament lingüístic:** Servei de Normalització Lingüística de la UdG

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

© Carles Cassú, Joan Bonet, Xavier Bertran, J. Carles Ferrer

**ISBN: 84-88762-48-8**
**Dipòsit legal: GI-346-96**

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG. Joan Bonet, Xavier Bertran, i J. Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

Sota les sancions establertes per les lleis, queda rigorosament prohibida, sense l'autorització per escrit dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol mitjà o procediment –incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic.

# PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col·lecció de setze petits volums agrupats en els dos mòduls d'Àlgebra lineal i de Càlcul infinitesimal.

Per raons de contingut el mòdul d'Àlgebra lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra moderna (dos volums: Conjunts i Estructures algebraiques), Àlgebra matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra Vectorial (tres volums: Vectors, Aplicacions lineals i Geometria analítica), mentre que el mòdul de Càlcul infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul Integral (dos volums: Integrals i Equacions diferencials).

En aquest volum utilitzem bona part dels conceptes estudiats en els anteriors, principalment els dos últims: matrius i determinants. Es comença definint la terminologia bàsica dels sistemes, utilitzant la nomenclatura i els conceptes apresos en els volums anteriors. A partir del concepte de rang d'una matriu es dedueix l'important teorema de Rouché-Fröbenius en el qual s'analitzen les condicions perquè un sistema sigui compatible, i a continuació s'introdueixen els principals mètodes de resolució de sistemes d'equacions lineals. Finalment, es fa un breu estudi dels sistemes d'equacions no lineals, i dels sistemes d´equacions diofàntiques que són aquells en què només té sentit considerar les solucions enteres de les incògnites.

Creiem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com en l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que l'integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Seguim el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins a l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col·lecció de Problemes proposats amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, març de 1996

Els autors

# Capítol 1: **Sistemes d'equacions**

## a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

**Bàsica:**


ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P97/131.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P121/144.

GUTIÉRREZ GÓMEZ, A. *Álgebra Lineal. Tomo (II).* P277/305.

CANCELO, J.R. *Problemas de Álgebra Lineal para Economistas. Tomo I.* P95/168.

HERAS, A. *Problemas de Álgebra Lineal para la Economía.* P13/22, P43/48.

MUÑOZ, F. *Manual de Álgebra Lineal.* P31/46 P59/65.

RODRÍGUEZ, A. *Matemáticas para Economistas.* P161/172.


**Addicional:**


AYRES, F. *Fundamentos de Matemáticas superiores.* P55/72 P144/149.

AYRES, F. *Matrices.* P75/84.

GARCÍA SESTAFE, J. *Curso de Matemáticas en forma de problemas.* P295/310.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Lineal.* P1/44.

THOMAS ARA, L. *Álgebra Lineal.* P261/284.

VEGAS PÉREZ, A. *Elementos de Matemáticas para Economistas. Tomo 1.* P53/67.

CASANOVA, J. *Exámenes de Álgebra Lineal.* P38/49.

DÍAZ HERNANDO, J. A. *Álgebra, Geometría, Cálculo. Tomo II.* P199/234.

LUZÁRRAGA, A. *Problemas de Álgebra Lineal.* P329/342.

# b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

## 1.1 SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

1) **Conceptes bàsics.** Equació, incògnites ($x_j$). Equació lineal, forma canònica. Sistemes d'equacions lineals ($S_{m,n}$), coeficients sistema ($a_{ij}$), termes independents ($b_i$). Mètodes clàssics de resolució: substitució, igualació i eliminació.
2) **Notació matricial.** Forma matricial, matrius coeficients (A), incògnites (X) i termes independents (B). Matriu ampliada ($M=(A|B)$), rang de les matrius ($\rho$).
3) **Tipus de solucions.** Solució del sistema, matriu solució (C). Sistemes incompatibles i compatibles, compatibles determinats i indeterminats. Sistemes equivalents ($\approx$).
4) **Discussió de sistemes.** Teorema de Rouché-Frobenius, rang de la matriu dels coeficients ($\rho(A)$) i de la matriu ampliada ($\rho(M)$), discussió del tipus de sistema segons el rang. Graus de llibertat (d), incògnites principals ($X_P$) i secundàries ($X_S$), paràmetres ($a, b, \ldots, \lambda, \mu, \ldots$).
5) **Resolució de sistemes.** Mètodes matricials, sistemes quadrats i de Cramer. Mètode de la matriu inversa. Regla de Cramer, determinants dels coeficients ($|A|$) i de les incògnites ($|A_i|$). Mètodes de reducció de Gauss i de Gauss-Jordan.
6) **Sistemes homogenis i paramètrics.** Sist. homogenis, solució trivial. Sist. paramètrics, paràmetres, discussió per reducció matricial i per determinants.

## 1.2 SISTEMES D'EQUACIONS NO LINEALS

1) **Resolució de sistemes no lineals.** Equació polinòmica, grau, equació homogènia. Resolució.
2) **Intersecció de còniques.** Intersecció de corbes en el pla. Les còniques, equacions polinòmica i matricial. Punts de tall de dues còniques.
3) **Intersecció de quàdriques.** Intersecció de superfícies en l'espai. Les quàdriques, equac. polinòmica i matricial. Punts de tall de tres quàdriques.
4) **Sistemes amb equacions diofàntiques.** Eq. diofàntica, resolució de sistemes diofàntics.

# c) CONCEPTES I EXEMPLES

## 1.1 SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

**1.1.1 CONCEPTES BÀSICS.** Una *equació* és una relació d'igualtat de tal manera que en algun dels seus membres es troben unes variables indeterminades, les *incògnites*, de les quals, per resoldre l'equació, s'ha de calcular el valor. Direm que una *equació* és *lineal* si està formada per una combinació lineal de les incògnites. La podrem posar en la *forma canònica* $A_1.x_1+A_2.x_2+...+A_n.x_n=B$ i, per simbolitzar les incògnites, generalment farem servir les últimes lletres de l'alfabet: x, y, z, t, u, v i w.

*Exemple 1.* Una equació té la forma

$$\frac{3x+4y-2z+2}{4x+7y-6z+5}=\frac{2}{3}$$

Si igualem el producte d'extrems al producte de mitjos

$$9x+12y-6z+6 = 8x+14y-12z+10$$

i passem les incògnites al primer membre i els termes independents al segon, ens quedarà

$$x-2y+6z = 4$$

que és la forma canònica d'aquesta equació lineal.

Un *sistema d'equacions lineals*, $S_{m,n}$, és un conjunt de m equacions lineals amb n incògnites. Adoptarà la forma canònica:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$$

A més de les incògnites ($x_j$), hi podem observar els *coeficients del sistema* ($a_{ij}$) i els *termes independents* ($b_i$).

La *resolució d'un sistema* d'equacions lineals consisteix a calcular el valor de les incògnites que satisfan simultàniament totes les equacions del sistema. Són coneguts els tres *mètodes clàssics* de resolució següents:

a) El mètode de *substitució*, que consisteix a aïllar una incògnita en una equació (la més fàcil d'aïllar) i substituir-la en les altres dues, així el sistema queda reduït d'ordre.

*Exemple 2.* Considerem el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 1.x-2.y+6.z=4 & (1) \\ 2.x+3.y-7.z=-3 & (2) \\ -3.x+5.y+4.z=5 & (3) \end{cases}$$

Si aïllem x en l'equació (1), x=4+2.y-6.z, i la substituïm en (2) i (3),

$$\begin{cases} 2.(4+2y-6z)+3y-7z=-3 \\ -3.(4+2y-6z)+5y+4z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y-19z=-11 & (2') \\ -y+22z=17 & (3') \end{cases}$$

Novament podem aïllar y en (3'), $y=22.z-17$, i substituir-ho en (2')

$$7.(22z-17)-19z=-11 \quad , \quad 135z=108 \quad , \quad z=4/5$$

Si ho substituïm en (3') obtindrem $y=3/5$ i si finalment ho substituïm en (1) resulta $x=2/5$.

b) En el mètode d'*igualació*, aïllarem la mateixa incògnita en totes les equacions i les igualarem de dues en dues. També queda un sistema reduït d'ordre.

*Exemple 3.* Partim del mateix sistema d'equacions lineals de l'exemple anterior:

$$\begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 & (1) \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 & (2) \\ -3.x + 5.y + 4.z = 5 & (3) \end{cases}$$

Aïllem la y en cada una de les tres equacions,

$$y=\frac{4-x-6z}{-2} \quad , \quad y=\frac{-3-2x+7z}{3} \quad i \quad y=\frac{5+3x-4z}{5}$$

Igualant la primera amb la segona i la segona amb la tercera,

$$\begin{cases} (4-x-6z)/(-2) = (-3-2x+7z)/3 \\ (-3-2x+7z)/3 = (5+3x-4z)/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+\ 4z=6 \\ -19x+47z=30 \end{cases}$$

De nou aïllarem la z en ambdues equacions,

$$z=\frac{6-7x}{4} \quad i \quad z=\frac{30+19x}{47}$$

Igualant, tindrem $282-329x=120+76x$, resulta $x=2/5$.

Substituint en una z i una y anteriors, ens donarà $z=4/5$ i $y=3/5$.

c) Finalment, el mètode de *reducció* o d'*eliminació* consisteix a eliminar una incògnita per mitjà d'operacions lineals en les equacions i reduir així el sistema.

*Exemple 4.* Resolem el sistema de l'exemple anterior,. Prenemen primer lloc les dues primeres i eliminem la z fent la combinació lineal següent, consistent a multiplicar la primera equació per 7 i la segona per 6, i sumant les dues equacions. És a dir,

$$\begin{cases} x-2y+6z=4 & .(7) \\ 2x+3y-7z=-3 & .(6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-14y+42z=28 \\ 12x+18y-42z=-18 \end{cases}$$

Si sumem ens queda l'equació $19x+4y=10$ (2')

De manera similar, amb la primera i la tercera també eliminarem z:

$$\begin{cases} x-2y+6z=4 & .(2) \\ -3x+5y+4z=5 & .(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y+12z=8 \\ 9x-15y-12z=-15 \end{cases}$$

Sumant, $11x-19y=-7$ (3'). Formem ara el sistema (2') i (3') i eliminem la incògnita y fent la combinació lineal següent:

$$\begin{cases} 19x+4y=10 & .(19) \\ 11x-19y=-7 & .(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 361x+76y=190 \\ 44x-76y=-28 \end{cases}$$

Sumant de nou, $405x=162$ , $x=162/405$ , $x=2/5$. Substituint en la que hem multiplicat per 19 tindrem $y=3/5$. Per acabar substituïrem en la primera equació i resulta $x=4/5$.

**1.1.2 NOTACIÓ MATRICIAL.** Observem que un sistema d'equacions lineals es pot expressar en la *forma matricial*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si les *matrius dels coeficients, de les incògnites i dels termes independents* les simbolitzem respectivament per A, X i B, el sistema es podrà escriure molt simplificadament per A•X=B.

*Exemple 5.* Considerem el sistema d'equacions lineals anterior que simbolitzem per $(S_1)$ i que està donat en la seva forma canònica,

$$(S_1) \begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 \\ -3.x + 5.y + 4.z = 5 \end{cases}$$

Escrivint-lo ara en la forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

podem veure que és de la forma A•X=B, on la matriu dels coeficients A, la de les incògnites X i la dels termes independents B són

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

En els mètodes de resolució de sistemes utilitzarem una matriu, anomenada *matriu ampliada*, formada conjuntament per la matriu dels coeficients i la dels termes independents. La simbolitzarem per M=(A|B).

També necessitarem calcular els *rangs de les matrius* A i M. En l'últim cas, el rang de la matriu ampliada M també s'anomena rang del sistema, ja que significarà el nombre màxim d'equacions linealment independents.

*Exemple 6.* La matriu ampliada del sistema anterior és

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -7 & -3 \\ -3 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

El rang de la matriu dels coeficients A, que és l'anterior a la línia de separació vertical, el podem trobar per determinants,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \quad \rho(A) \geq 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \ldots = 135 \neq 0 \quad \rho(A) \geq 3$$

I com que ja no pot ser més gran, deduïm que $\rho(A)=3$.

Quant al rang de la matriu ampliada M, en ser una ampliació de l'anterior, sempre serà $\rho(M) \geq \rho(A)$. Com que en aquest cas, en M no podem formar cap menor d'ordre superior a 3, tenim $\rho(M)=3$.

De $\rho(M)=3$ deduïm que les tres equacions del sistema són linealment independents (no hi ha cap equació que depengui linealment de les altres ).

**1.1.3 TIPUS DE SOLUCIONS.** Sigui un sistema $S_{m,n}$ format per m equacions lineals i n incògnites. S'anomena *solució del sistema* un conjunt de n valors $c_1, c_2, \dots, c_n$ de les respectives incògnites $x_1, x_2, \dots, x_n$ que satisfan les m equacions del sistema. En forma matricial tindrem $C=(c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n)'$, on direm que C és una *matriu solució.*

Si el sistema no té cap solució direm que es tracta d'un *sistema incompatible.*

*Exemple 7.* Sigui el sistema d'equacions lineals:

$$(S_2) \begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 \\ -3x \; - y + \; z = 5 \end{cases}$$

Si per eliminar la x sumem les tres equacions, obtindrem la igualtat 0=6, que és una contradicció. Això vol dir que no hi ha solució per al sistema, perquè les tres equacions són incompatibles (és a dir, no es poden verificar simultàniament). El sistema és, per tant, incompatible.

Si el sistema lineal té alguna solució direm que és *compatible.* En aquest cas pot ser que només hi hagi una n-pla de valors que són solució del sistema o una sola matriu solució, la qual cosa equival a dir que el sistema té una única solució. Direm que es tracta d'un *sistema compatible determinat.*

*Exemple 8.* El sistema $S_1$ que hem resolt pels tres mètodes clàssics és un exemple de sistema compatible determinat.

Si en un sistema d'equacions lineals hi haguessin dues solucions, $c_i$ i $d_i$, és fàcilment comprovable que en realitat n'hi hauria infinites, ja que també serien solucions totes les seves combinacions lineals, $a.c_i+b.d_i$, on a i b poden ser qualssevol.

Per tant, si el conjunt de solucions del sistema és de cardinal infinit direm que hi ha infinites solucions i que es tracta d'un *sistema compatible indeterminat.*

*Exemple 9.* Considerem ara el sistema d'equacions lineals

$$(S_3) \begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 \\ -3x \; - y + \; z = -1 \end{cases}$$

Amb l'objectiu d'eliminar la incògnita x, sumem les tres equacions i resulta 0=0. Aquesta identitat significa que les tres equacions són dependents. Efectivament, l'última és l'oposada de la suma de les dues primeres.

Per tant, l'última equació no ens aporta nova informació i en podem prescindir per la resolució del sistema; aquest queda reduït a dues equacions amb tres incògnites. Aïllant la x en la primera, $x=4+2y-6z$, i substituint en la segona,

$$2(4+2y-6z)+3y-7z=-3 \; , \; 7y-19z=-11 \; , \; z=(7y+11)/19$$

Donant valors arbitraris a la y anirem trobant valors de z (i també de x). El sistema tindrà, doncs, infinites solucions i és, per tant, un sistema compatible indeterminat.

Donats dos sistemes d'equacions lineals $S_1$ i $S_2$, direm que són *sistemes equivalents*, i escriurem $S_1 \approx S_2$, si i només si tenen el mateix conjunt de solucions.

*Exemple 10.* Suposem el sistema $S_4$ d'equacions lineals

$$(S_4) \begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 \\ 5.x + 4.y \ -8.z = -2 \end{cases}$$

Comprovem que també és compatible indeterminat (aïllant x en la primera i substituint-la en les altres dues), i obtenim també la relació $z=(7y+11)/19$. Com que els sistemes $S_3$ de l'exemple anterior i $S_4$ tenen les mateixes solucions, és a dir, es tracta de sistemes equivalents ($S_3 \approx S_4$).

**1.1.4 DISCUSSIÓ DE SISTEMES.** Per conèixer, abans de resoldre'l, si un sistema lineal és incompatible o compatible, i en aquest últim cas si és determinat o indeterminat, efectuarem els passos que expliquem a continuació i que són expressats pel que es coneix amb el nom de *Teorema de Rouché-Frobenius.*

En primer lloc, escriurem la matriu conjunta $M=(A|B)$ i trobarem el *rang de la matriu dels coeficients* i el *rang de la matriu ampliada.*

a) SISTEMA INCOMPATIBLE. Si $\rho(A)\neq\rho(M)$ llavors $\rho(A)<\rho(M)$ i voldrà dir que podem extreure algunes equacions que tenen els seus primers membres linealment dependents però, en canvi, les equacions completes són independents. Si resolguéssim el sistema ens quedaria una contradicció de la forma $0=k$, amb $k\neq 0$. Vol dir que no hi ha cap solució i el sistema és incompatible.

*Exemple 11.* Partim del sistema $S_2$ que, com hem vist, no té cap solució,

$$(S_2) \begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 \\ -3.x \ - y + \ z = 5 \end{cases}$$

Formem la matriu ampliada

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -7 & -3 \\ -3 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

Els rangs que cerquem són $\rho(A)=2$ i $\rho(M)=3$, ja que el menor $M_{12,12}\neq 0$ i tenim els determinants

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=0 \quad \text{i} \quad |M_{123,124}|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=\ldots=48\neq 0$$

Aplicant el teorema de Rouché, com que $\rho(A)\neq\rho(M)$ el sistema és incompatible, com ja havíem comprovat en solucionar-lo.

b) SISTEMA COMPATIBLE DETERMINAT. Si $\rho(A)=\rho(M)$ el sistema és compatible de rang r, perquè no hi ha contradicció amb les equacions; és a dir, hi haurà solució. Per saber si aquesta solució és única, ens fixarem en el nombre n d'incògnites.

Si resulta que el rang anterior és igual al nombre d'incògnites, r=n, significa que hi ha n equacions linealment independents, i llavors el sistema serà compatible determinat.

*Exemple 12.* Sigui el sistema $S_1$ que hem emprat en els primers exemples i que donava l'única solució $x=2/5$, $y=3/5$ i $z=4/5$:

$$(S_1)\quad \begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 \\ -3.x + 5.y + 4.z = 5 \end{cases}$$

Ja vam trobar que $\rho(A)=3$ i $\rho(M)=3$ en l'exemple 87. Com que coincideixen, el sistema serà compatible i com que, a més, aquest rang r=3 és igual al nombre d'incògnites, n=3, el sistema serà també determinat.

c) SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINAT. Com hem vist, si $\rho(A)=\rho(M)$ el sistema és compatible. Si aquest únic rang r és més petit que el nombre d'incògnites, r<n, el sistema serà compatible indeterminat, és a dir, tindrà infinites solucions.

*Exemple 13.* Sigui el sistema $S_3$ que, com ja hem comprovat, és compatible indeterminat

$$(S_3)\quad \begin{cases} 1.x - 2.y + 6.z = 4 \\ 2.x + 3.y - 7.z = -3 \\ -3.x \;\; - y + \;\; z = -1 \end{cases}$$

Formem a continuació la seva matriu ampliada, que és la formada per la matriu dels coeficients i la matriu columna dels termes independents,

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -7 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Calculem els rangs $\rho(A)$ i $\rho(M)$, i veiem que ambdós són superiors o iguals que 2, perquè el menor $|M_{12,12}|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=0 \quad \text{i} \quad |M_{123,124}|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\ldots=0$$

Com que $\rho(A)=\rho(M)$ el sistema és compatible de rang r=2 i com que el nombre d'incògnites és n=3 i r<n, el sistema serà indeterminat i tindrà infinites solucions.

Per saber si les infinites solucions depenen d'un o més paràmetres, emprarem el concepte de *graus de llibertat*, simbolitzat per la lletra d, i donat per la diferència entre el nombre d'incògnites i el rang, d=n-r. Els graus de llibertat determinen el nombre de paràmetres lliures dels quals depèn l'expressió de la solució.