

Treball final de grau

Estudi: Grau en Tecnologies Industrials

Títol: Regions de visió de cel profund des d'una òrbita al voltant del punt L2 del sistema Sol-Terra

Document: Memòria

Alumne: Coral Vidal Peracaula

Tutor: Esther Barrabés Vera

Departament: Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística

Àrea: Matemàtica aplicada

Convocatòria (mes/any): 06/2017

Índex

Índex.....	2
1 Introducció.....	4
1.1 Antecedents.....	4
1.2 Objecte	4
1.3 Especificacions i abast.....	5
2 Model matemàtic.....	6
2.1 Problema restringit de tres cossos.....	6
2.2 Punts de Lagrange	9
2.3 Energia associada (constant de Jacobi)	12
2.4 Superfícies de velocitat zero	14
2.5 Òrbites periòdiques al voltant del punt L_2	16
2.5.1 Òrbites periòdiques al pla.....	16
2.5.2 Òrbites quasi periòdiques.....	16
2.5.3 Òrbites periòdiques a l'espai	16
2.6 Estabilitat de les òrbites periòdiques	17
3. Metodologia i desenvolupament.....	18
3.1 Mètodes generals	18
3.1.1 Mètode d'integració numèrica Runge-Kutta-Fehlberg.....	19
3.1.2 Mètode de Ridders	20
3.2. Òrbites periòdiques planes.....	21
3.2.1 Secció de Poincaré	23
3.2.2 Càlcul d'una òrbita periòdica	25
3.2 Famílies d'òrbites periòdiques: Continuació.....	27
3.3 Òrbites a l'espai	29
3.3.1 Variacions de la posició inicial.....	29
3.3.2 Variacions de la velocitat inicial.....	31
4 Resultats.....	34
4.1 Òrbites planes	34
4.2 Òrbites verticals amb z inicial	36
4.2.1 Cas 1	37
4.2.2 Cas 2	39
4.2.3 Cas 3	42

4.3 Òrbites verticals amb z inicial.....	46
4.3.1 Cas 1	46
4.3.2 Cas 2	49
4.3.3 Cas 3	52
5 Resum del pressupost.....	56
6 Conclusions.....	57
7 Relació de documents.....	59
8 Bibliografia.....	60
ANNEXOS	61
A - CODI INFORMÀTIC.....	61
A.1 Funció.....	61
A.2 energia	61
A.3 velocitaty	61
A.4 SeccioY	62
A.5 SeccioXp.....	62
A.6 SeccioZ	62
A.7 calculOrbita.....	62
A.8 orbita.....	63
A.9 puntseccio.....	64
A.10 ridders	64
A.11 riddersOP	66
A.12 riddersZ.....	67
A.13 CalculOP.....	69
B. Pressupost.....	72

1 Introducció

1.1 Antecedents

La mecànica celeste és una branca de l'astronomia i la mecànica que estudia el moviment dels cossos celestes degut als efectes gravitatoris que exerceixen uns cossos sobre altres.

El punt L_2 del sistema Sol-Terra és un dels anomenats punts de Lagrange (explicats en detall a l'apartat 2.2). Aquests punts són localitzacions en un sistema definit a l'espai on els efectes gravitatoris sobre un cos situat en aquest punt queden compensats per els diversos cossos del sistema. El sistema en el que es centra aquest estudi és un model Sol-Terra on només es tenen en compte aquests dos cossos, anomenats primaris, i un tercer sense efectes sobre els primers.

En el punt L_2 del sistema Sol-Terra es troben els satèl·lits WMAP i Planck, i es preveu enviar el James Webb Space Telescope. Aquest lloc és ideal per a les observacions astronòmiques ja que queda amagat del Sol darrera la Terra i ofereix una visió clara per als telescopis de l'espai profund. El WMAP observa més d'un 30% del cel cada dia, incloent sempre els pols eclíptics.

La motivació per realitzar aquest treball sorgeix de l'interès que tinc en ampliar el coneixement adquirit en el grau d'enginyeria en l'àmbit de les matemàtiques aplicades a sistemes dinàmics i en tècniques de programació.

1.2 Objecte

L'objectiu d'un satèl·lit col·locat en el punt L_2 és observar el màxim rang de cel (o espai) profund. Prenent com a model aproximat el problema restringit de tres cossos RTBP, Sol-Terra-satèl·lit, aquestes missions acostumen a posicionar els satèl·lits en òrbites fora del pla de l'eclíptica (pla orbital de la Terra) seguint el que es coneix com a òrbites Halo. Aquestes formen una família d'òrbites de diferent període i amplitud.

L'objectiu del projecte és explorar les regions de cel que pot observar un satèl·lit col·locat en una òrbita plana al voltant del punt L_2 del sistema Sol-Terra a la que se li donarà una empenta o alçada vertical, i determinar quines ofereixen un rang de visió major. Considerarem un model en el que el satèl·lit es mourà degut a l'acció gravitatòria del Sol i la Terra.

Per a dur a terme el treball, primer ens familiaritzarem amb el problema restringit de tres cossos (explicat a l'apartat 2.1). A partir d'unes condicions inicials properes al punt L_2 calcularem les òrbites planes periòdiques per diferents nivells d'energia. Posteriorment, aplicant petites variacions en el desplaçament i la velocitat del terme z de les condicions inicials, calcularem les òrbites verticals al voltant del punt L_2 , generades a partir de les òrbites periòdiques planes, i a partir d'aquestes explorarem quina són les regions d'observació. Finalment analitzarem en quins casos la regió explorada és major, i si queden regions fora de l'abast d'observació.

1.3 Especificacions i abast

Per l'execució de l'estudi es simularan òrbites planes i verticals al voltant del punt L_2 executant diversos programes que s'han desenvolupat amb el software Matlab que s'exposen en els següents apartats de la memòria. No es pretén determinar les òrbites Halo al voltant del punt L_2 sinó buscar les òrbites verticals que s'obtenen a l'introduir petites variacions en el terme z de les condicions inicials de les òrbites periòdiques planes. El resultat que s'obté no són òrbites periòdiques sinó que són una aproximació d'aquestes trajectòries i que donen una idea de quina és la regió en la que ens hauríem de moure per aconseguir trobar les òrbites periòdiques a l'espai que ens permetessin obtenir una major visualització del cel profund.

2 Model matemàtic

2.1 Problema restringit de tres cossos

El problema restringit de tres cossos (RTBP Restricted Three Body Problem) estudia el moviment d'un cos de massa m_3 prou petita com per considerar-la negligible, afectat per l'acció gravitatòria de dos cossos de massa considerable m_1 i m_2 , els quals anomenarem primaris, que es mouen descrivint òrbites circulars i coplanars al voltant del seu centre de masses. El RTBP ens permet obtenir una bona aproximació de la dinàmica del moviment d'un sistema Sol+Planeta+Asteroides/satèl·lit artificial.

En aquest estudi m_1 fa referència al Sol, m_2 a la Terra (o al sistema Terra-Lluna) i m_3 el satèl·lit.

En aquets capítol es descriuen les equacions del moviment del problema restringit dels tres cossos i algunes propietats que són la base d'aquest treball.

Per estudiar la dinàmica del sistema es té en compte un model on les dues masses primàries es mouen en òrbites circulars al voltant del seu centre de masses i exerceixen un força sobre el tercer cos mentre que aquest no té cap afectació sobre el moviment de les masses m_1 i m_2 .

Prenent $\vec{r}(x, y, z)$ com la posició del tercer cos, de forma vectorial tenim que el moviment del tercer cos es descriu segons l'equació:

$$\ddot{\vec{r}} = G \cdot m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} + G \cdot m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3} \quad (2.1.1)$$

On G és la constant de la gravitació universal i on $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ són les posicions del cos primari i secundari respecte el centre de masses del sistema.

Assumint que $m_1 > m_2$ definim la relació de masses entre els dos cossos primaris:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1.2)$$

Per tal de simplificar el problema es realitza un canvi d'unitats de tal manera que la unitat de massa és:

$$G(m_1 + m_2) = 1 \quad (2.1.3)$$

Aquest canvi permet escriure les equacions en funció del paràmetre μ :

$$\ddot{\mathbf{r}} = (1 - \mu) \frac{\overrightarrow{r_1 - \mathbf{r}}}{|r_1 - r|^3} + \mu \frac{\overrightarrow{r_2 - \mathbf{r}}}{|r_2 - r|^3} \quad (2.1.4)$$

De forma gràfica el problema es descriu com en la figura 1:

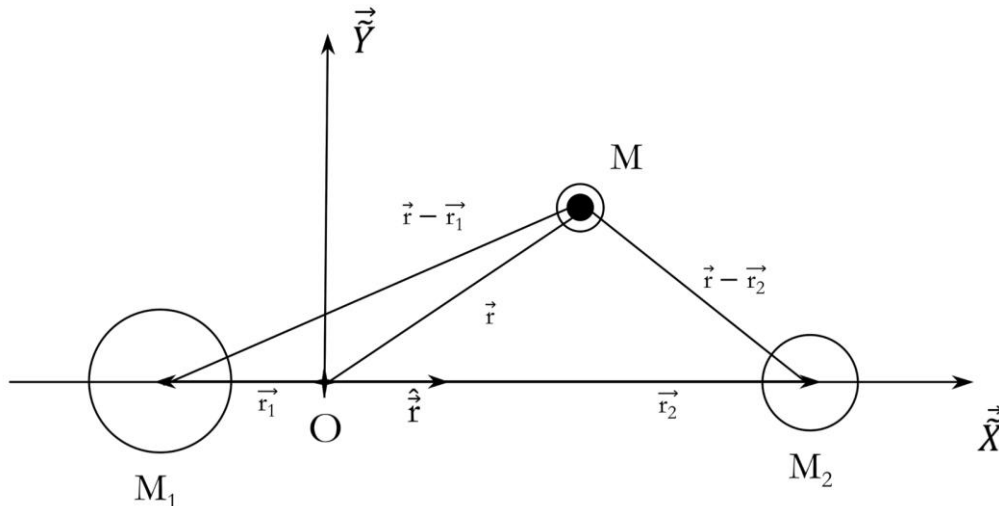


Figura 1: Representació al pla del model restringit a tres cossos on M_1 correspon a la massa del Sol, M_2 a la massa de la Terra i M representa el tercer cos de massa menyspreable, en el nostre cas, el satèl·lit. El punt O correspon al centre de masses dels dos cossos primaris. En el nostre estudi, l'anàlisi s'ha realitzat col·locant el sistema de tal manera que M_2 es situa al costat esquerra de M_1 , al revés del que es mostra a la figura. FONT: [6]

Sabem que les dues masses primàries es mouen circularment al voltant del seu centre de masses amb una distància fixada entre elles i a una velocitat angular constant. D'una banda podem fixar com a unitat la distància entre elles.

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 1 \quad (2.1.5)$$

També es pot fer un canvi d'unitats de temps de manera que la velocitat angular sigui 1, i per tant el període de l'òrbita terrestre serà 2π . Finalment, es fa un canvi a un sistema en rotació en el que els dos primaris estaran fixats sobre l'eix Ox sobre les posicions $(\mu, 0, 0)$ el cos de massa m_1 i $(\mu - 1, 0, 0)$ el cos de massa m_2 .

El fet que tinguem el tercer cos movent-se dins un sistema en rotació fa que aparegui l'acceleració de Coriolis en les equacions que defineixen el problema. Tenint en compte aquesta consideració tenim que les equacions del RTBP són:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\delta\Omega}{\delta x} \quad (2.1.6)$$

$$\dot{y} + 2\dot{x} = \frac{\delta\Omega}{\delta y} \quad (2.1.7)$$

$$\ddot{z} = \frac{\delta\Omega}{\delta z} \quad (2.1.8)$$

On Ω ve donat per l'equació:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1 - \mu}{d_1} + \frac{\mu}{d_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (2.1.9)$$

I la distància a la que es troben els dos cossos primaris respecte al tercer cos ve donada per les expressions:

$$d_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2 \quad (2.1.10)$$

$$d_2^2 = (x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2 \quad (2.1.11)$$

Aquest sistema d'equacions diferencials de segon ordre es pot reduir a un de primer ordre si n'augmentem la dimensió fent els següents canvis en les variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= x & x_4 &= \dot{x} \\ x_2 &= y & x_5 &= \dot{y} \\ x_3 &= z & x_6 &= \dot{z} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

De manera que ens queda el següent sistema d'equacions diferencials de primer ordre:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_5 \\ \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_4 &= 2x_5 + \frac{\delta\Omega}{\delta x_1} \\ \dot{x}_5 &= -2x_4 + \frac{\delta\Omega}{\delta x_2} \\ \dot{x}_6 &= \frac{\delta\Omega}{\delta x_3} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

On les derivades diferencials del terme Ω són:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta x_1} = x_1 - \frac{(1-\mu)(x_1-\mu)}{\sqrt{((x_1-\mu)^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} - \frac{\mu(x_1-\mu+1)}{\sqrt{((x_1-\mu+1)^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta x_2} = x_2 - \frac{\mu x_2}{\sqrt{((x_1-\mu+1)^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} - \frac{x_2(1-\mu)}{\sqrt{((x_1-\mu)^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} \quad (2.1.15)$$

$$\frac{\delta\Omega}{\delta x_3} = -\frac{x_3(1-\mu)}{\sqrt{((x_1-\mu)^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} - \frac{x_3 \cdot \mu}{\sqrt{((x_1-\mu)^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} \quad (2.1.16)$$

El sistema d'equacions diferencials (2.1.13) ens ofereix la solució del RTBP en el sistema en rotació. Integrant numèricament les equacions del sistema s'obté la posició i velocitat del cos de massa m_3 respecte al centre de masses dels dos cossos primaris.

Com hem indicat al principi d'aquest capítol, els cossos primaris del sistema que s'està estudiant corresponen al Sol i la Terra. Per tal de simplificar el problema, no s'ha situat la Lluna en el nostre sistema sinó que s'ha considerat el baricentre del sistema Terra + Lluna com si hi hagués un sol cos amb la massa de la Terra i la Lluna juntes. És per això que el valor de $\mu = 0.304018792 \cdot 10^{-5}$ utilitzat en aquest estudi no correspon al del sistema Sol-Terra sinó que és el referent al sistema Sol - (Terra + Lluna).

Per al nostre estudi hem tingut en compte un sistema on el cos de massa m_1 es troba a la dreta del centre de masses i el cos de massa m_2 es situa a l'esquerra de manera que totes les equacions desenvolupades segueixen aquest criteri. Per tant, la figura 1, on es mostra una representació gràfica del problema, les dues masses principals es troben al costat oposat d'on s'han situat per a la realització d'aquest estudi, i és només un gir respecte del que treballem.

2.2 Punts de Lagrange

Tot i que no es coneixen les solucions explícites del Problema Restringit de Tres Cossos es poden trobar algunes solucions. Per exemple, és possible trobar les

solucions estacionàries, els punts on el cos de massa menyspreable té velocitat i acceleració nul·les dins el sistema en rotació. Aquestes solucions són el que anomenem punts d'equilibri del sistema, i es defineixen com aquelles localitzacions dins el sistema en rotació on un cos de massa negligible afectat per l'acció gravitatòria de m_1 i m_2 pot romandre en estat estacionari.

Aquests punts d'equilibri són coneguts com els punts de Lagrange i en el RTBP en podem trobar cinc.

Distingirem aquests punts com L_1 , L_2 , L_3 , L_4 i L_5 . Els punts L_1 , L_2 i L_3 són col·lineals amb els primaris (estan situats sobre el mateix eix) mentre que els punts L_4 i L_5 formen un triangle equilàter amb m_1 i m_2 .

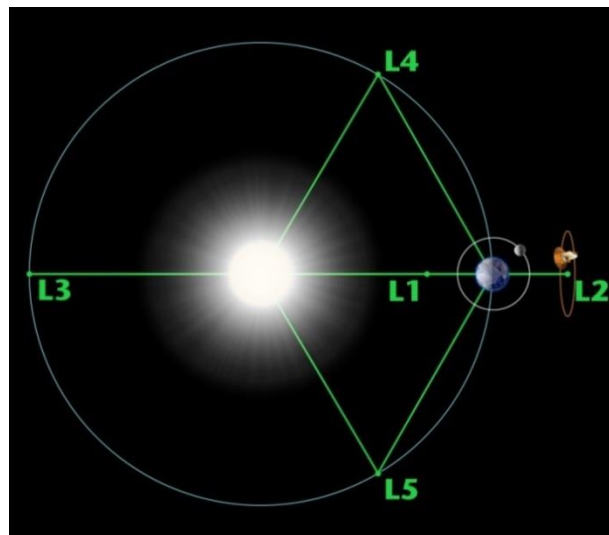


Figura 2: Representació dels punts de Lagrange en el sistema Sol-Terra de RTBP. En aquest imatge s'observa una òrbita plana al voltant de L_2 . FONT: [9]

L_1 es situa entre el Sol i la Terra, sobre la recta que els uneix, en el punt exacte on les forces gravitatòries dels dos cossos es compensen. L_2 es troba sobre l'eix definit per els dos cossos primaris però a una distància més gran de la que està la Terra respecte el Sol, en la mateixa direcció (a 1.5 milions de quilometres darrera la Terra), i L_3 es localitza sobre el mateix eix que els punts L_1 i L_2 a una distància respecte el Sol igual que la distància Sol-Terra, però en el sentit oposat.

Un cos situat sobre un dels punts L_1 , L_2 L_3 del sistema Sol-Terra té una òrbita en el sistema inercial original amb un període igual al de la Terra gràcies a la força

d'atracció que aquesta genera sobre el cos, combinada amb l'acció gravitatòria del Sol.

Els punts L_1 , L_2 i L_3 són inestables, una lleugera pertorbació sobre un cos situat en un d'aquest punts fa que la trajectòria d'aquest s'escapi de l'entorn del punt d'equilibri. Es coneix però que nombroses missions espacials han estat enviades a òrbites al voltant dels punts L_1 i L_2 . S'ha demostrat que existeixen òrbites periòdiques al voltant dels punts d'equilibri (planes i verticals). Si el model fos exacte seria possible col·locar un objecte al voltant d'un d'aquestes punts d'equilibri, exactament sobre aquestes òrbites, sense que s'escapés, però com que el model no és exacte els cossos col·locats en aquests punts requereixen d'alguna força motora que generi, de forma constant, una correcció de la posició per tal de no perdre la periodicitat del recorregut.

Alguns exemples de missions espacials enviades a aquest dos punts són les missions SOHO (Solar and Heliospheric Observation) i ACE (Advanced Composition Explorer), col·locades en una òrbita al voltant del punt L_1 , o les missions Herchel i Planck, enviades al punt L_2 .

Aquests dos punts d'equilibri són interessants per a captar imatges del cel. L_1 està ben situat per captar imatges del Sol mentre que el punt d'equilibri L_2 permet obtenir una visió, sense interrupcions, del cel profund.

L_3 no ha estat utilitzat per missions espacials perquè la seva localització no ofereix característiques qualitatives per a l'obtenció d'imatges de l'espai.

Els punts L_4 i L_5 es situen al tercer vèrtex dels triangles equilàters que formen amb el Sol i la Terra i en el seu pla orbital, sobre la mateixa òrbita que L_3 . Aquest dos punts són estables, i un cos situat al seu voltant tendeix a romandre-hi.

En els punts L_4 i L_5 del sistema Sol-Júpiter es situen els coneguts asteroides Troians, que es mouen descrivint òrbites al voltant del respectiu punt d'equilibri en dues regions allargades i corbades al voltant d'aquests punts anomenades camp grec i camp romà. (veure Figura 3).

Aquests dos punts han estat motiu d'estudi, degut a la seva estabilitat, per a situar-hi colònies permanents en un futur.

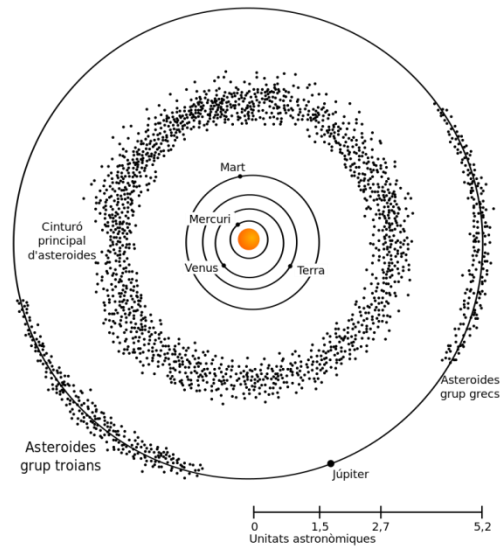


Figura 3: Representació dels asteroides Troians de Júpiter. FONT: [5]

Centrem l'estudi de la dinàmica al voltant del punt L_2 , i en concret en el comportament de les òrbites del cos de massa negligible al voltant d'aquest punt.

El motiu pel qual per aquest estudi hem col·locat el satèl·lit en el punt L_2 és que aquest ofereix uns avantatges per a les missions espacials que tenen com a objectiu visualitzar el cel profund. En aquesta situació la Terra es troba a una distància suficient com perquè l'ombra d'aquesta no privi el satèl·lit de la llum solar i que la intensitat de la llum solar no sigui suficient com per cegar-lo. Això és un punt fort ja que permet al satèl·lit alimentar-se de l'energia del Sol amb panells solars. Per altra banda, el fet de trobar-se fora l'ombra de la Terra i amb una exposició solar constant permet al satèl·lit mantenir una temperatura gairebé estable. Aquest fet pot ser interessant pels possibles instruments sensibles als canvis tèrmics que pot tenir el satèl·lit.

2.3 Energia associada (constant de Jacobi)

El sistema restringit de tres cossos és un sistema conservatiu, fet que indica que hi ha una quantitat que es conserva al llarg de tota una trajectòria. En el RTBP hi ha una única quantitat conservada coneguda i aquesta és la Constant de Jacobi.

El valor de la Constant de Jacobi es pot obtenir mitjançant l'expressió:

$$2\Omega(x, y, z) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = C_j \quad (2.3.1)$$

L'energia del cos en moviment està directament relacionada amb aquesta quantitat, és per això que en aquest estudi ens referirem a la Constant de Jacobi quan parlem d'energia. La relació entre l'energia i la Constant de Jacobi ve donada per l'equació:

$$E = \frac{-C_j}{2} \quad (2.3.2)$$

El fet que l'energia o Constant de Jacobi es mantingui permet estudiar les òrbites per capes: fixar un valor de C_j i estudiar les òrbites que tenen exactament aquest valor obtenint així una família d'òrbites per a cada nivell d'energia.

Cadascun dels punts de Lagrange té un valor propi de la C_j :

$$C_{j1} = 3 + 9\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - 11\left(\frac{\mu}{3}\right) + O\left(\mu^{4/3}\right) \quad (2.3.3)$$

$$C_{j2} = 3 + 9\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - 7\left(\frac{\mu}{3}\right) + O\left(\mu^{4/3}\right) \quad (2.3.4)$$

$$C_{j3} = 3 + 2\mu - \frac{49}{48}\mu^2 + O(\mu^3) \quad (2.3.5)$$

L'últim terme d'aquestes equacions, una funció O de μ , és el que s'anomena cota superior asimptòtica, funció que ens indica l'ordre de magnitud de l'últim terme de l'equació.

Aplicant les equacions (2.3.3), (2.3.4) i (2.3.5) per un valor de $\mu = 0.304018792 \cdot 10^{-5}$, obtenim que els valors de la Constant de Jacobi per als punts d'equilibri col·lineals en el nostre model són:

$$C_{j1} = 3.000896881934 \quad (2.3.6)$$

$$C_{j2} = 3.000900935559 \quad (2.3.7)$$

$$C_{j3} = 3.000006080366 \quad (2.3.8)$$

2.4 Superfícies de velocitat zero

Fixada la constant de Jacobi, C_j , no tota localització d'un cos movent-se dins el sistema en rotació serà admissible. El moviment dels cossos seguint òrbites definides per el nostre model estarà restringit per les regions on la velocitat sigui nul·la, és a dir, només serà possible el moviment per aquelles regions de l'espai on es compleixi la següent expressió:

$$v^2 = 2\Omega(x, y, z) - C_j \geq 0 \quad (2.4.1)$$

Les corbes de velocitat zero que defineixen els límits de les regions no admissibles venen donades per l'equació:

$$2\Omega(x, y, z) - C_j = 0 \quad (2.4.2)$$

Per un valor fixat de μ les regions de moviment varien en funció de la Constant de Jacobi i per cada valor de C_j tenim una sèrie de punts del pla que ens permeten dibuixar les superfícies que el cos no pot recórrer. En els gràfics que es mostren a continuació es pot observar com es comporten aquestes superfícies segons diversos valors de C_j .

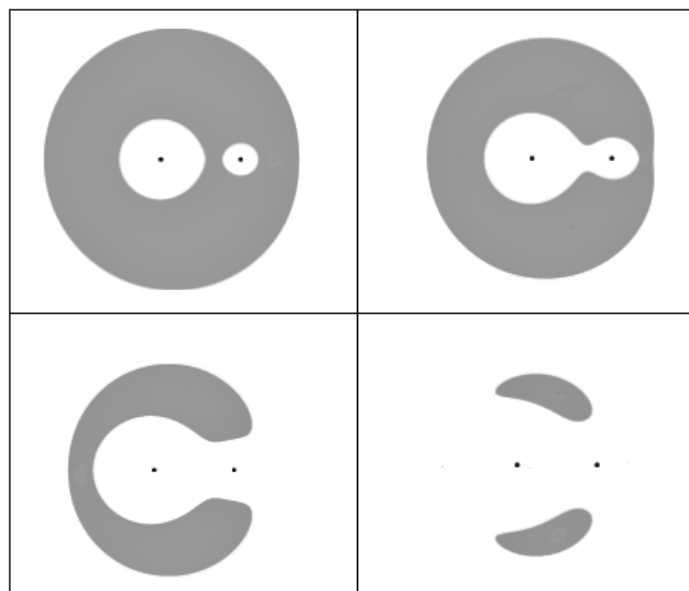


Figura 4. Projecció de les superfícies de velocitat zero al pla x-y (zones ombrejades). De dreta a esquerra i de dalt a baix es mostren les regions no admissibles per valors de C_j : $C_j > C_{j1}$, $C_{j2} > C_j > C_{j1}$, $C_{j3} > C_j > C_{j2}$ i $C_j < C_{j3}$. FONT: [8]

En aquesta figura la regió ombrejada, en el pla de posicions (x, y) , correspon a la regió que el cos no podrà recórrer. El primer gràfic fa referència a la situació en que l'energia del cos és superior a la del primer punt d'equilibri. La imatge ens mostra com el Sol i la Terra estan separats per una regió de velocitat zero que impedeix al cos traslladar-se entre els dos cossos primaris i que només permet traçar trajectòries al voltant dels dos cossos individualment o al voltant dels dos però amb una òrbita major al perímetre exterior de la superfície restringida. El següent gràfic, a dalt a la dreta, representa la casuística en què el cos té una energia inferior a la del segon punt de Lagrange però superior a la del primer. En aquest cas podem veure com el cos pot traçar trajectòries entre els dos cossos primaris a través del canal creat entre aquests. Amb aquesta energia el cos pot recórrer òrbites al voltant dels dos cossos de forma individual, al voltant dels dos cossos per la part exterior de la zona ombrejada i al voltant dels dos cossos dins del perímetre interior de la regió de velocitat zero. El següent gràfic, a baixa a l'esquerra, correspon al cas en que el cos té una energia que es troba entre la del segon i el tercer punt d'equilibri. Aquí el cos es pot moure entre el Sol i la Terra i pot accedir de l'interior a l'exterior de la zona delimitada per la superfície de velocitat nul·la. Finalment l'últim gràfic correspon al cas en que l'energia del cos és inferior a la del tercer punt de Lagrange. En aquest cas la regió inaccessible es divideix en dos i permet al cos moure's lliurement entre els dos cossos primaris i pràcticament per tot el pla.

Els casos en que les zones de moviment no admissible es van obrint i creen canals per on el cos sí que es pot moure, corresponen exactament als valors de la constant de Jacobi en els punts d'equilibri.

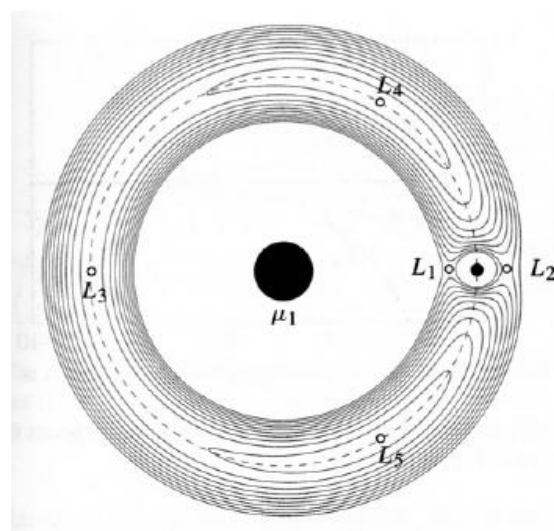


Figura 5. Representació dels punts d'equilibri i de les corbes de velocitat zero per diferents nivells d'energia. Font: [4]

2.5 Òrbites periòdiques al voltant del punt L_2

Malgrat que els punts L_1 , L_2 i L_3 són inestables, es coneix que és possible trobar òrbites periòdiques al voltant d'aquests en el RTBP, per valors de la Constant de Jacobi $C_j < C_{ji}$ on $i = 1,2,3$. Tot i així, aquestes òrbites hereten la inestabilitat del punt d'equilibri, i per tant, un cos movent-se en una òrbita al voltant d'aquests punts requereix un sistema de propulsió per corregir la posició cada cert temps.

2.5.1 Òrbites periòdiques al pla

Són trajectòries planes i periòdiques al voltant dels punts de Lagrange anomenades òrbites de Lyapunov. Aquestes òrbites es troben en el pla orbital dels cossos primaris. L'objectiu d'aquest estudi, en un primer anàlisi, consisteix en explorar famílies d'òrbites planes de Lyapunov al voltant del punt d'equilibri L_2 .

2.5.2 Òrbites quasi periòdiques

Són òrbites quasi periòdiques anomenades òrbites de Lissajous. Aquestes òrbites són tridimensionals i tot i que no tanquen mai (no retornen al punt d'origen amb la mateixa velocitat), no s'escapen i romanen al mateix lloc. Hi ha múltiples missions espacials que han utilitzat aquestes òrbites. N'és un exemple l'observatori Herschel llançat el 2009 amb el satèl·lit Planck.

2.5.3 Òrbites periòdiques a l'espai

Existeixen dos famílies d'òrbites periòdiques tridimensionals al voltant dels punts d'equilibri: les òrbites de Lyapunov verticals i les òrbites Halo. Les primeres són famílies d'òrbites al voltant dels punts col·lineals de Lagrange, periòdiques, tridimensionals i simètriques respecte l'eix $y = 0$. Les òrbites Halo també són famílies d'òrbites periòdiques i tridimensionals que apareixen a l'incrementar l'energia i sorgeixen de la combinació de les òrbites de Lyapunov verticals i horitzontals. L'any 2018 es preveu enviar el telescopi James Webb a una òrbita Halo al voltant del punt L_2 del sistema Sol-Terra.

A la imatge que es mostra a continuació es poden observar les tres famílies d'òrbites citades. En blau, una òrbita de Lyapunov plana; en vermell, un òrbita de Lyapunov vertical, i en verd, una òrbita de Lissajous.

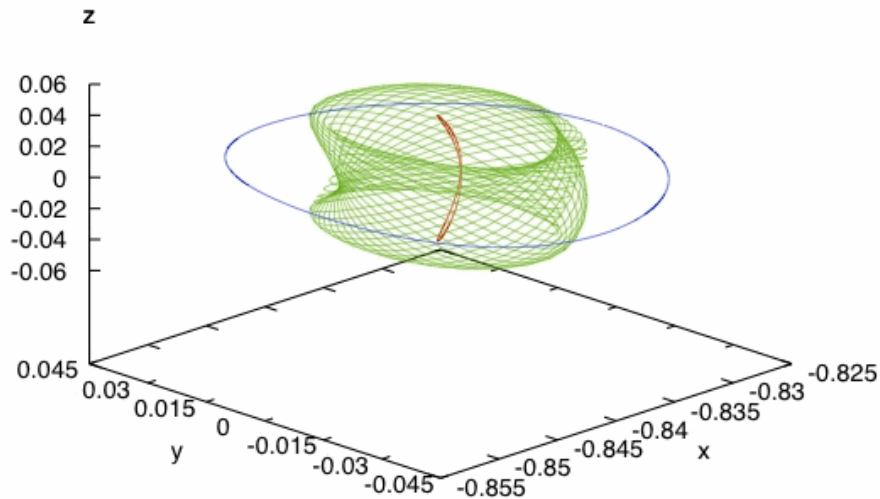


Figura 6. Representació a l'espai de les òrbites de Lyapunov plana (blau), de Lyapunov vertical (vermell) i de Lissajous (verd). FONT: [2]

2.6 Estabilitat de les òrbites periòdiques

Com s'ha dit anteriorment, els punts col·lineals de Lagrange són inestables i, conseqüentment, les òrbites al voltant d'aquests també ho són. Això vol dir que si variem les condicions inicials d'una òrbita periòdica, la trajectòria resultant acabarà escapant. De totes maneres, hem de pensar que, malgrat que es parli d'òrbites periòdiques al voltant dels punts L_1 , L_2 i L_3 , en el Sistema Solar real aquestes sempre requereixen que el cos que les recorre disposi d'un sistema propulsor que realitzi maniobres de correcció de l'òrbita per tal que el cos no s'allunyi del punt d'equilibri. Aquestes maniobres suposen una despesa de combustible per al satèl·lit i una restricció per al disseny de la missió ja que la durada d'aquesta ve condicionada per la capacitat de combustible que té el satèl·lit enviat a l'espai.

Les òrbites al voltant del punt L_1 requereixen un ús bastant baix del propulsor per mantenir-se estables durant dècades. Les missions espacials que es troben al voltant d'aquest punt, com la missió ACE o la missió SOHO, corregeixen les seves òrbites de forma anual.

L'observatori Herschel, situat al punt L_2 del sistema Sol-Terra va necessitar un manteniment mensual per tal de mantenir-se en la seva òrbita de Lissajous i es preveu que el telescopi espacial James Webb es llanci a l'espai amb una càrrega de combustible suficient per mantenir-se orbitant durant deu anys.

3. Metodologia i desenvolupament

En aquest capítol s'exposa la metodologia que s'ha utilitzat en totes les fases del desenvolupament d'aquest estudi. Tots els càlculs realitzats per a la resolució del problema s'han realitzat amb el software Matlab.

3.1 Mètodes generals

Gran part de les equacions que apareixen en problemes reals no es poden resoldre de forma exacta i requereixen recórrer a algun tipus d'aproximació per obtenir les seves solucions.

En el nostre cas el problema a resoldre consisteix en un sistema d'equacions diferencials ordinàries i s'engloba dins el conjunt de problemes anomenats problemes de valor inicial. En aquest model és impossible trobar les solucions explícites i únicament es pot trobar una solució numèrica aproximada a partir d'una condició inicial de manera que, per a aquest vector de condicions inicials, existeix una única solució. Aquesta solució es troba fent ús d'un integrador numèric, el qual a partir de les condicions inicials, calcula la solució per petits intervals de temps de forma consecutiva. La solució que s'obté d'aquest procediment és una aproximació de la solució exacta i l'error de l'aproximació dependrà de la tolerància que accepti el mètode utilitzat.

El mètode numèric que s'ha escollit en aquest estudi per resoldre el RTBP a partir d'un conjunt de condicions inicials és el mètode de Runge-Kutta-Fehlberg (veure apartat 3.1.1).

Amb la integració numèrica serem capaços de calcular òrbites a partir d'unes condicions inicials però per fer el càlcul d'òrbites periòdiques ens caldrà trobar els zeros d'una certa funció. Per això serà necessari un mètode numèric de cerca d'arrel per fer un càlcul aproximat del punt on la funció compleix la condició:

$$f(x) = 0 \tag{3.1.1}$$

El mètode numèric utilitzat en aquest estudi per trobar el zero de la funció és el mètode de Ridders (veure apartat 3.1.2).

3.1.1 Mètode d'integració numèrica Runge-Kutta-Fehlberg

Els mètodes numèrics de Runge-Kutta-Fehlberg són una sèrie de mètodes numèrics iteratius utilitzats per trobar aproximacions de les solucions d'equacions diferencials per unes determinades condicions inicials. Van ser desenvolupats per els matemàtics C. Runge, M. W. Kutta i Erwin Fehlberg l'any 1900 i sorgeixen com una millora del mètode d'Euler. Aquests mètodes aconseguen l'exactitud de procediment del teorema de Taylor però sense necessitat de fer el càlcul de derivades superiors.

El mètode de Runge-Kutta-Fehlberg permet donar una aproximació de la solució a temps $t + h$ a partir de les dades a temps t :

$$(t, r(t), \dot{r}(t)) \rightarrow (t + h, r(t + h), \dot{r}(t + h)) \quad (3.1.1.1)$$

On $(t, r(t), \dot{r}(t))$ són el temps, la posició i la velocitat inicials de l'interval i h és el pas d'integració.

Per tal de resoldre el sistema d'equacions diferencials que ens planteja el Problema Restringit dels Tres Cossos en aquest estudi s'ha utilitzat el mètode numèric de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 7 i 8. Aquest mètode avalua la solució del sistema a partir d'unes condicions inicials (temps, posició i velocitat) i aplicant petits increments de temps fent ús del pas d'integració adaptatiu. El RKF78 executa el mètode RK7 i el mètode integrat RKF8 i se'n calcula l'error relatiu entre un i l'altre. El fet de treballar amb els ordres 7 i 8 suposa que per cada pas d'integració es requereixin 13 avaluacions de la funció.

El pas d'integració adaptatiu permet modificar l'increment de temps, augmentant-lo o disminuint-lo segons el valor de l'error relatiu i assegurant que aquest es mantingui dins els límits establerts. Per tant, es defineixen un límit d'error relatiu superior i un d'inferior.

El software Matlab disposa d'una funció de llicència pública general per executar el mètode RKF78 anomenada *ode78*. Aquesta funció ens ofereix una alta precisió en el càlcul de les òrbites. En aquest estudi s'ha treballat amb un error relatiu màxim de 10^{-9} .

3.1.2 Mètode de Ridders

El mètode de Ridders és un mètode de cerca d'arrel basat en el mètode de la regla falsi i l'ús d'una funció exponencial per aproximar de forma successiva l'arrel d'una funció f dins d'un interval donat $[x_1, x_2]$ on es compleix que:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \quad (3.1.2.1)$$

L'objectiu final de l'algorisme és trobar el punt on la funció pren el valor:

$$f(x) = 0 \quad (3.1.2.2)$$

Per cada tram s'avalua la funció en un nou punt que es troba en la posició intermèdia de l'interval $[x_1, x_2]$:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3.1.2.3)$$

I posteriorment, aplicant el mètode de la regla falsi, s'obté el nou punt:

$$x_4 = x_3 - (x_3 - x_1) \frac{\text{sign}[f(x_1) - f(x_2)]f(x_3)}{\sqrt{f(x_3)^2 - f(x_1)f(x_2)}} \quad (3.1.2.4)$$

Després de cada iteració es re defineixen els extrems de l'interval sent el nou punt trobat un dels extrems del nou interval i l'altre extrem un dels límits de l'interval inicial (x_1 o x_2) tal que la imatge dels dos extrems de l'interval tingui signe oposat. Per tant, si es compleix que $f(x_1) \cdot f(x_4) < 0$, el nou interval serà $[x_1, x_4]$. En canvi si tenim que $f(x_2) \cdot f(x_4) < 0$, es defineix el nou interval com $[x_4, x_2]$.

Aquest procediment es repeteix fins a aconseguir la tolerància desitjada.

L'eq. (3.1.2.4) ens ofereix bones propietats tals com que garanteix que el punt x_4 està dins l'interval $[x_1, x_2]$ o que convergeix quadràticament i per tant el nombre de dígits significatius es duplica amb cada iteració. Per cada una de les iteracions, la funció ha de ser avaluada dues vegades fet que ens ofereix un ordre de convergència igual a $\sqrt{2}$. Aquestes característiques converteixen el mètode de Ridders en un algorisme robust amb una alta fiabilitat i rapidesa.

3.2. Òrbites periòdiques planes

Com s'ha comentat en capítols anteriors, es coneix que existeixen òrbites periòdiques al voltant dels punts d'equilibri. En aquest capítol s'exposa quina ha sigut la metodologia utilitzada en aquest estudi per calcular les òrbites periòdiques planes al voltant del punt de Lagrange L_2 .

Per realitzar el càlcul de les òrbites periòdiques planes cal tenir en compte que per cada nivell d'energia amb un valor de la Constant de Jacobi fixat existeix una única òrbita periòdica. Per això, per cada valor de la Constant de Jacobi es va a buscar quines condicions inicials donen lloc a l'òrbita periòdica.

Les òrbites periòdiques planes que explorem són simètriques respecte a l'eix $y = 0$. Aquest tipus d'òrbites tenen com a característica que hi ha dos instants de temps en els que la posició i velocitat són de la forma:

$$c. i. = (x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, 0) \quad (3.2.1)$$

$$c. f. = (x_f, 0, 0, 0, \dot{y}_f, 0) \quad (3.2.2)$$

Les anomenem condicions inicials i finals de la trajectòria, i l'objectiu és trobar els valors de la condició inicial tal que, quan la trajectòria travessa l'eix $y = 0$, tenim de nou $\dot{x}_f = 0$. Així la condició final serà de la forma desitjada i tindrem una òrbita periòdica.

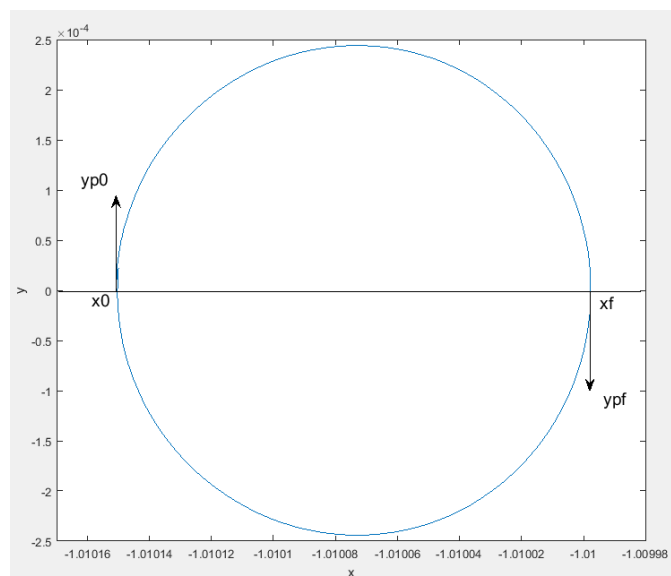


Figura 7: Representació al pla x-y d'una òrbita simètrica respecte l'eix $y = 0$ on x_0 i x_f fan referència a la posició inicial de la trajectòria

El procediment que s'ha seguit per determinar les condicions inicials per el càlcul de les òrbites consisteix en: agafant com a punt de partida el punt L_2 i una Constant de Jacobi fixada propera a la del punt d'equilibri i per sota (per garantir que està dins la regió admissible tal i com s'ha dit a l'apartat 2.5. $C_j < C_{j2}$), generar una sèrie de punts propers al punt L_2 aplicant un petit pas (de l'ordre de 10^{-8}), sobre el mateix eix i en el sentit desitjat. L'equació que defineix aquest procés iteratiu és:

$$x = x_{L_2} - hx \cdot k \quad (3.2.3)$$

On la k fa referència al nombre de posicions x que es generen per cada C_j i hx fa referència al pas d'iteració.

Coneguts els valors de la Constant de Jacobi i la posició x_0 , a partir de l'eq. (2.4.1) podem calcular el mòdul de la velocitat de la partícula per cada posició inicial:

$$|V| = \sqrt{2\Omega(x, y, z) - C_j} \quad (3.2.4)$$

Per calcular les òrbites periòdiques s'han desenvolupat varies funcions al Matlab. Aquestes s'engloben totes dins el programa principal *CalculOP* (veure apartat A.13 de l'annex) el qual, a partir de els condicions inicials, mostra els resultats obtinguts mitjançant les funcions desenvolupades.

Abans de desenvolupar el programa *CalculOP*, vam desenvolupar-ne un de més senzill per poder visualitzar les òrbites generades a partir d'unes condicions inicials determinades i el vam anomenar *CalculOrbita* (veure apartat A.7 annex). Per generar aquest programa va ser necessari primerament desenvolupar una funció amb el sistema d'equacions del RTBP la qual vam anomenar *Funcio* (veure apartat A.1 de l'annex). Així vam obtenir un programa que a partir d'unes condicions inicials, fa el càlcul de la trajectòria de la partícula executant la funció *ode78* per un rang de temps determinat.

A la figura 8 es mostra un exemple d'una trajectòria obtinguda amb el programa *CalculOrbita* amb unes condicions inicials $(-1.0100769, 0, 0, 0, 0.000557253, 0)$ en el sistema Sol-Terra i per un rang de 8 unitats de temps (el punt vermell marca el punt inicial de l'òrbita).

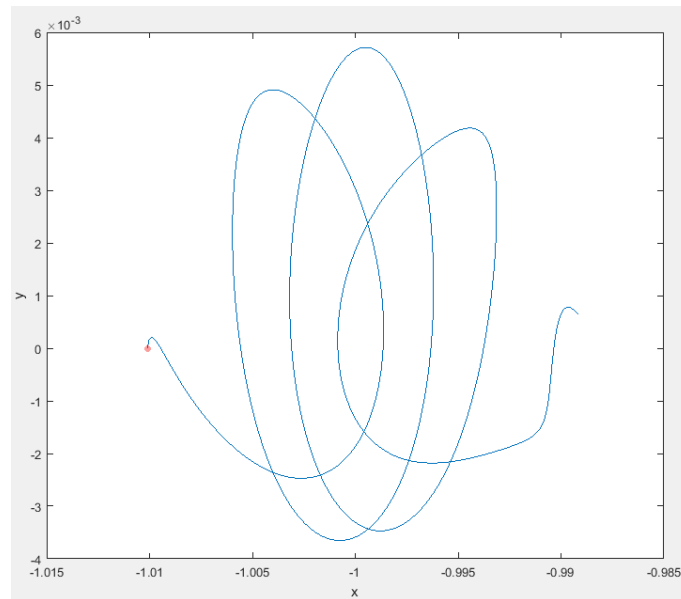


Figura 8: Representació al pla x-y de la trajectòria de condicions inicials $(-1.0100769, 0, 0, 0, 0.000557253, 0)$, en el sistema de referència del RTBP Sol-Terra.

3.2.1 Secció de Poincaré

La secció de Poincaré és una aplicació que donat un punt sobre una secció coneguda, retorna el punt on la trajectòria torna a intersecar la secció.

Per tal de garantir que una òrbita sigui periòdica s'ha de complir que en el moment que la trajectòria interseca el pla $y = 0$, \dot{x} sigui exactament 0, tal com s'ha explicat abans.

Per tant, sortint d'una condició inicial sobre la secció $y = 0$, el primer pas es trobar el punt (i instant de temps) en que la òrbita torna a travessar la secció. Després mirarem si el valor de \dot{x} és zero o no. Si no ho és, canviarem la condició inicial (amb l'equació 3.2.3) i tornarem a buscar la intersecció amb la secció.

El procediment que s'ha seguit per trobar les seccions de Poincaré amb el programa que s'ha desenvolupat a Matlab segueix la seqüència que s'explica a continuació. Abans però cal dir que per cada òrbita només s'ha fet el càlcul d'una secció ja que amb la informació extreta d'aquesta és suficient per conèixer la periodicitat de l'òrbita.

A partir d'unes condicions inicials, s'executa la funció *orbita* la qual ens retorna les coordenades de cada punt obtingut durant les integracions. Per cada tram es comprova el signe del terme y del primer i l'últim punt de l'interval amb la funció *SeccioY* (veure apartat A.4 de l'annex) desenvolupada al Matlab. Si aquests són diferents, en aquell tram es situa el punt de tall amb la secció $y = 0$. Prenent aquest interval, apliquem el mètode de Ridders (explicat a l'apartat 3.1.2) per trobar les

coordenades de la trajectòria en el punt de tall. Així obtenim la primera secció de Poincaré.

A la figura 9 es mostra un exemple de la primera secció de Poincaré (marcada en vermell) d'una òrbita de condicions inicials $(-1.01009493, 0, 0, 0, 0.00447253233, 0)$ per un valor de la constant de Jacobi $C_j = 3.000876881933879$ (lleugerament inferior a la Constant de Jacobi del punt L_2).

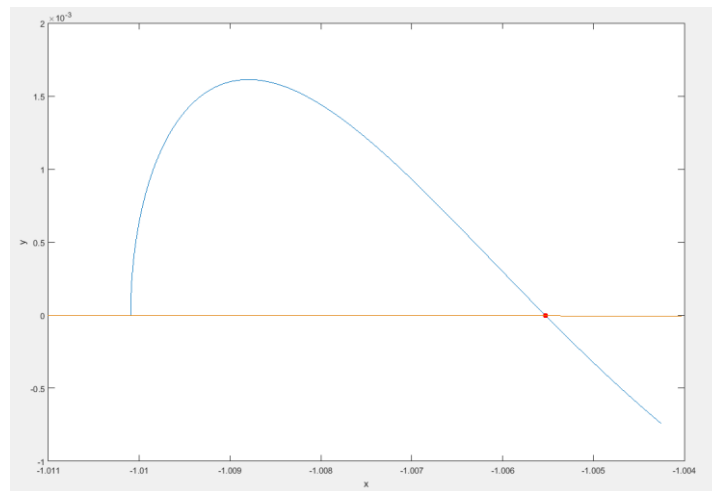


Figura 9. Representació al pla de la primera secció de Poincaré de l'òrbita de condicions inicials $(-1.01009493, 0, 0, 0, 0.00447253233, 0)$, en el sistema de referència del RTBP.

Per al desenvolupament d'aquesta fase del procediment primerament vam explorar una sola condició inicial i posteriorment vam repetir l'exploració per un conjunt de condicions inicials per a la mateixa Constant de Jacobi. A la figura 10 es mostra un conjunt d'òrbites ($C_j = 3.000876881933879$) i la seva corresponent secció de Poincaré.

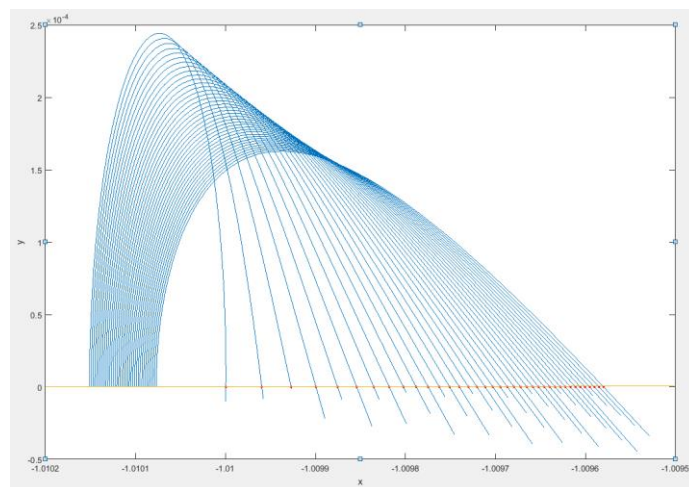


Figura 10: Representació al pla, en el sistema de referència del RTBP, de la primera secció de Poincaré d'una família d'òrbites que viuen al nivell d'energia corresponent a $C_j = 3.000876881933879$.

Les seccions de Poincaré, marcades amb punts de color vermell a les figures 7 i 8, s'han obtingut de fer el càlcul numèric amb el mètode de Ridders, amb la funció *Ridders* (veure apartat A.10 de l'Annex) desenvolupada al Matlab, entre els dos punts de l'interval d'integració en el que s'ha detectat un canvi de signe de la coordenada y .

3.2.2 Càlcul d'una òrbita periòdica

Donada una constant de Jacobi, un cop conegudes les seccions de Poincaré per a totes les òrbites del problema busquem quina d'aquestes òrbites és periòdica. Existeix una única òrbita periòdica per a cada nivell d'energia.

Per trobar-la busquem quina de les seccions de Poincaré calculades compleix la condició $\dot{x} = 0$. Mitjançant la funció *SeccioXp* (veure apartat A.5 de l'Annex) comprovem el signe del terme \dot{x} de cada secció de Poincaré. L'objectiu és trobar entre quines dues òrbites es genera el canvi de signe del terme x de la velocitat. Quan el trobem, igual que s'ha fet anteriorment, s'aplica Ridders per trobar les coordenades de la secció que tenen $\dot{x} = 0$, amb una tolerància de 10^{-12} .

En aquest cas, l'aplicació del mètode de Ridders és més complex que en l'aplicació que es fa a les seccions de Poincaré ja que aquí la funció de la que es busca el zero és

$$\dot{x}_f(x_0) = 0$$

Això és, es busca quin és la condició inicial tal que la velocitat de la condició final sobre la secció és zero.

Per tant, l'interval $[x_1, x_2]$ es refereix al terme \dot{x} de les dues seccions de Poincaré entre les quals es detecta un canvi de signe en \dot{x} i per tant, els dos extrems de l'interval corresponen a dues òrbites diferents. S'ha requerit desenvolupar una nova funció a Matlab que hem anomenat *RiddersOP* (veure apartat A.11 de l'Annex).

A la figura 11 podem veure com de l'exploració feta a l'apartat anterior per un conjunt d'òrbites de les quals s'ha calculat la secció de Poincaré, existeix una òrbita entre les dues que es troben més a l'esquerra del gràfic, que creua l'eix d'abscisses amb $\dot{x} = 0$ i que correspon a una òrbita periòdica.

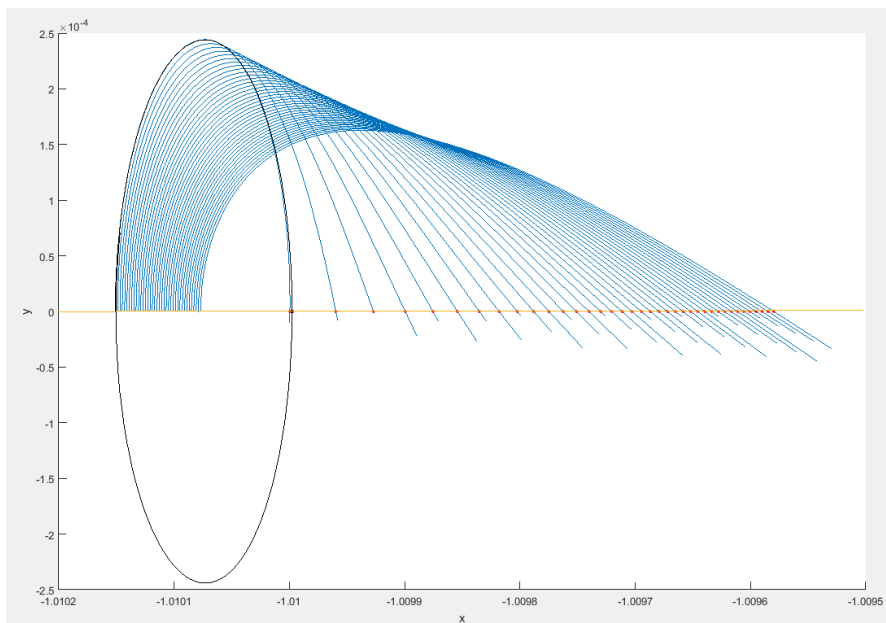


Figura 11: Representació al pla, en el sistema de referència del RTBP, de l'òrbita periòdica (negre) calculada a partir de les òrbites de la figura 10.

A la figura 12 es mostra un gràfic en el que s'observa una corba $\dot{x}_f(x_0)$ que representa les velocitats \dot{x} de totes les seccions de Poincaré calculades unides amb una línia, i en vermell, el punt exacte on la corba creua l'eix $\dot{x} = 0$. Aquest punt ha estat calculat amb el mètode de Ridders en l'interval generat per les dues seccions de Poincaré entre les quals s'ha detectat un canvi de signe en $\dot{x} = 0$.

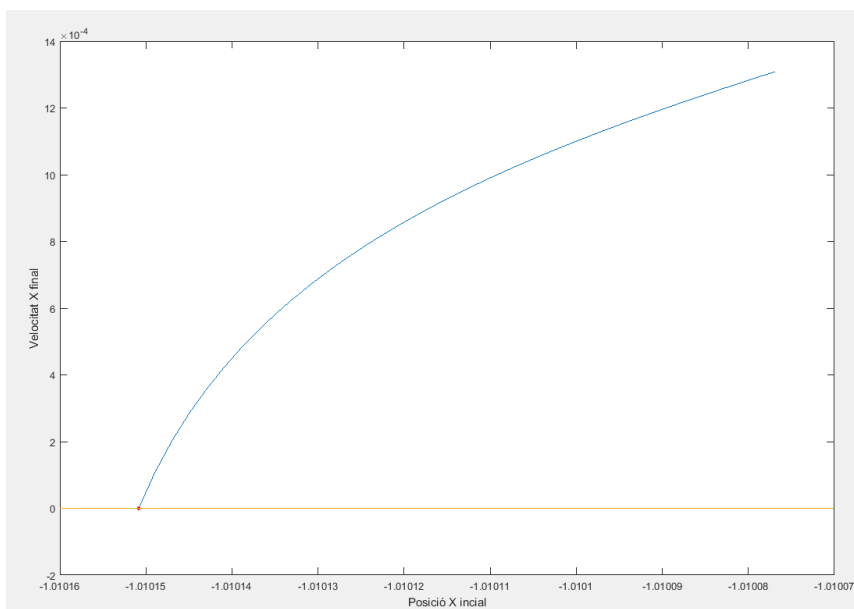


Figura 12. Representació del punt on es troba l'òrbita que travessa la secció $y = 0$ amb $\dot{x} = 0$ per una família d'òrbita amb un valor de la constant de Jacobi $C_j = 3.000876881933879$, en el sistema de referència del RTBP

Desenvolupades les funcions que calculen els punts sobre la secció $y = 0$ corresponents a les òrbites que la creuen amb $\dot{x} = 0$, el darrer algorisme que vam desenvolupar per fer el càlcul d'aquestes òrbites i comprovar que són periòdiques consistia en extreure'n les condicions inicials, calculades dins la funció *RiddersOP*, i entrar-les a la funció *orbita* per fer el càlcul de la trajectòria per un període. Així, l'òrbita periòdica obtinguda a partir de la secció marcada en vermell de la figura 11 correspon al següent gràfic:

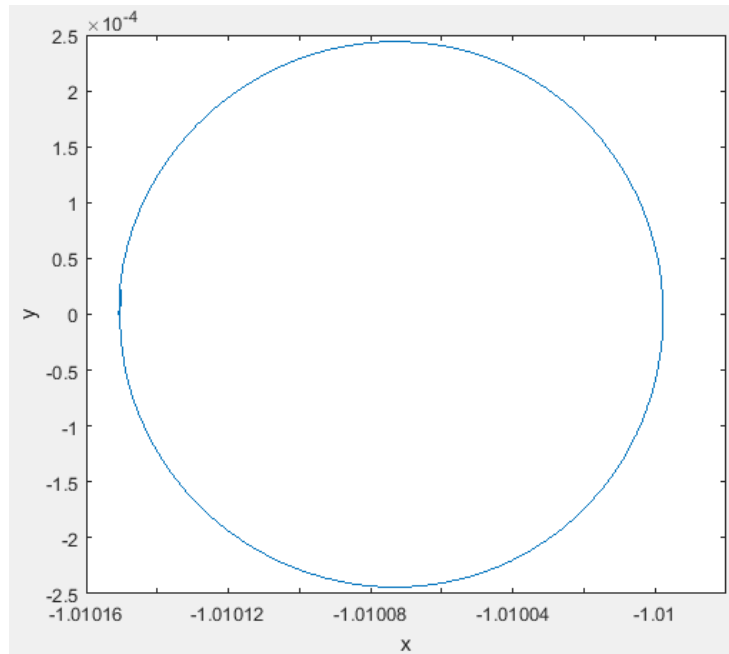


Figura 13: Representació, en el sistema de referència del RTBP, de l'òrbita periòdica obtinguda a partir de la família d'òrbites calculades amb una $C_j = 3.000876881933879$

3.2 Famílies d'òrbites periòdiques: Continuació

Com en totes les fases d'aquest estudi, primerament vam realitzar l'exploració per una sola Constant de Jacobi i posteriorment es va afegir una condició que ens permetés explorar les òrbites periòdiques per un rang de constants de Jacobi determinat segons els nivells d'energia que interessessin per a l'anàlisi.

L'equació que defineix el procés iteratiu per a calcular diverses constant de Jacobi és:

$$C_j = C_{jL_2} - hc \cdot N \quad (3.2.3)$$

On N correspon al nombre de constants de Jacobi que es volen explorar i hc és el pas iteratiu (de l'ordre de 10^{-8}).

A la figura 14 podem veure la funció $\dot{x}_f(x_0)$ (com en la figura 12) per a diferents valors de C_j .

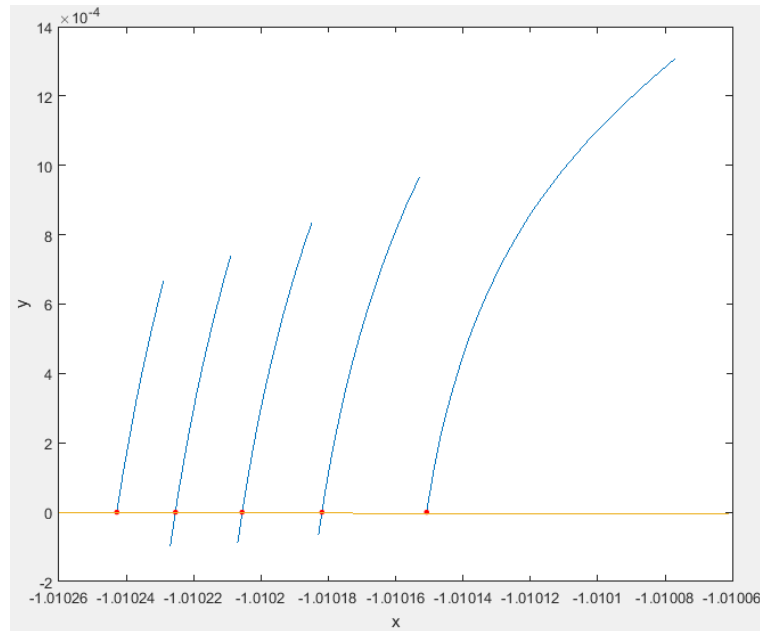


Figura 14. Representació del punt on es troba l'òrbita que travessa la secció $y = 0$ amb $\dot{x} = 0$ per les òrbites de 5 nivells d'energia diferents, en el sistema de referència del RTBP.

Introduint les condicions inicials de les òrbites corresponents a les seccions en $\dot{x} = 0$ de la figura 14 a la funció *orbita*, obtenim que les òrbites periòdiques corresponents a les 5 constants de Jacobi explorades són les que es mostren a la següent figura.

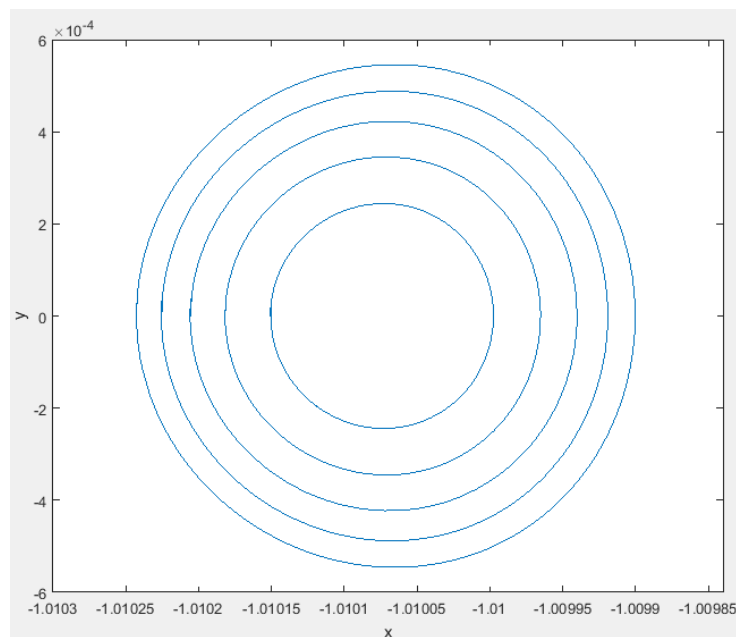


Figura 15: Representació, en el sistema de referència del RTBP, de les òrbites periòdiques obtingudes per una exploració amb 5 valors diferents de la constant de Jacobi.

3.3 Òrbites a l'espai

L'objectiu inicial del problema era el de trobar les òrbites periòdiques a l'espai, les òrbites Halo, adients per poder realitzar una bona visualització del cel.

Degut a la dificultat que vam tenir per calcular les òrbites periòdiques planes vam creure adient basar-nos en els resultats obtinguts fins al moment i les funcions ja desenvolupades i centrar-nos només en variacions verticals de les òrbites planes que hem calculat.

Així, amb les òrbites planes calculades vam aplicar petites variacions tan en la posició com en la velocitat z inicials amb l'objectiu de generar òrbites verticals a partir d'òrbites planes.

Per fer-ho vam utilitzar el programa *OrbitesOP* donant un rang de valors als termes z de la posició i la velocitat i seguint el mateix procediment que en les òrbites planes.

3.3.1 Variacions de la posició inicial

Per tal de fer el càlcul de les òrbites verticals el que hem fet ha sigut donar valor als termes z de les condicions inicials sense modificar la resta de termes.

En aquest apartat s'exposa el procediment que s'ha seguit per calcular les òrbites a l'espai quan les condicions inicials eren del tipus: $(x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$.

Per definir els termes de les condicions inicials es fixa una Constant de Jacobi i un valor per z_0 . Amb aquests dos valors fixats, x_0 i \dot{y}_0 es calculen seguint el mateix procediment que en les òrbites planes (equacions (3.2.1) i (3.2.2)).

Així es genera una taula de condicions inicials amb els valors de la Constant de Jacobi, la posició i la velocitat del cos en l'instant t_0 .

Per definir els valors de z_0 utilitzats per trobar les òrbites periòdiques verticals es van escollir una sèrie de valors coherents amb els resultats de les òrbites planes obtingudes i que asseguressin que l'òrbita no s'escapés ràpidament del punt d'equilibri.

Un cop definides les condicions inicials, es calculen les trajectòries de les noves òrbites executant la funció *orbita* i integrant la trajectòria fins que aquesta creua l'eix $y = 0$ per segona vegada (ja que la primera correspon a la meitat del període).

En aquest punt és important remarcar que el que estem fent és que el punt inicial de l'òrbita vertical es situï inicialment a una certa distància, en la direcció z , del punt inicial de l'òrbita periòdica plana. Això, en un satèl·lit, suposaria que aquest hagués de generar una força/empenta en vertical per col·locar-se en la z_0 i a partir d'aquí iniciar la trajectòria amb una x i y idèntiques a la de l'òrbita periòdica plana corresponent. És per això que direm que aquestes trajectòries són artificials ja que requereixen d'una força externa per col·locar-se en el punt inicial de la seva trajectòria.

A la figura 16 podem veure una òrbita vertical obtinguda a partir de les condicions inicials d'una òrbita periòdica plana i introduint un valor de $z_0 = 0,00005$. L'òrbita s'ha integrat fins a $y = 0$ i podem observar que el tancament de la trajectòria no és exacte. A l'apartat 5 s'analitzarà amb més detall l'error de posició entre el punt inicial i final de les òrbites.

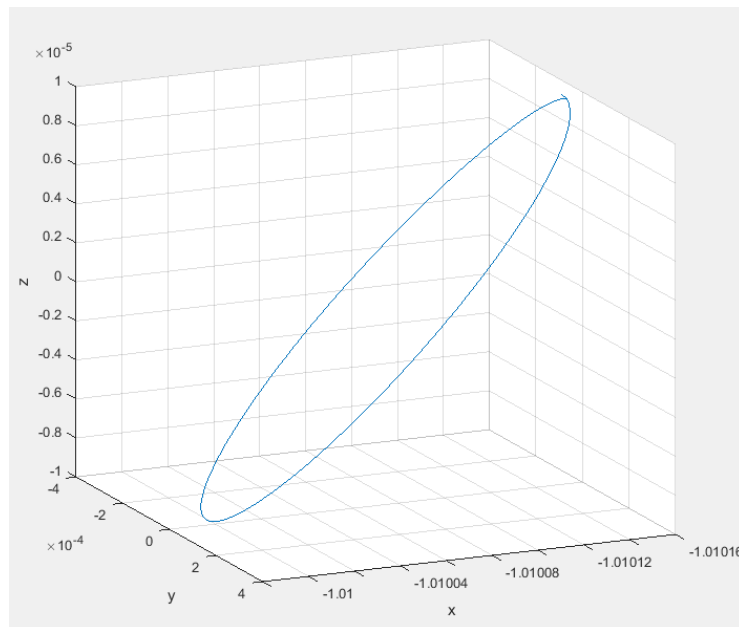


Figura 16: Representació tridimensional, en el sistema de referència del RTBP, de l'òrbita periòdica obtinguda a partir de la família d'òrbites calculades amb una $C_j = 3.000876881933879$, del sistema Sol-Terra aplicant una posició z inicial.

3.3.1.1 Famílies d'òrbites: continuació

Seguint el mateix procediment que en les òrbites planes, el següent pas consisteix en explorar famílies d'òrbites per a diferents nivells d'energia obtenint així una òrbita periòdica per a cada valor de la constant de Jacobi.

Com en els casos anteriors hem agafat 5 valors diferents de la constant de Jacobi aplicant un pas $h_c = 10^{-8}$ a una constant de Jacobi inicial corresponent a C_{j2} . En totes les òrbites calculades la posició z inicial és $z_0 = 0.00001$. El resultat obtingut es mostra a la figura 17:

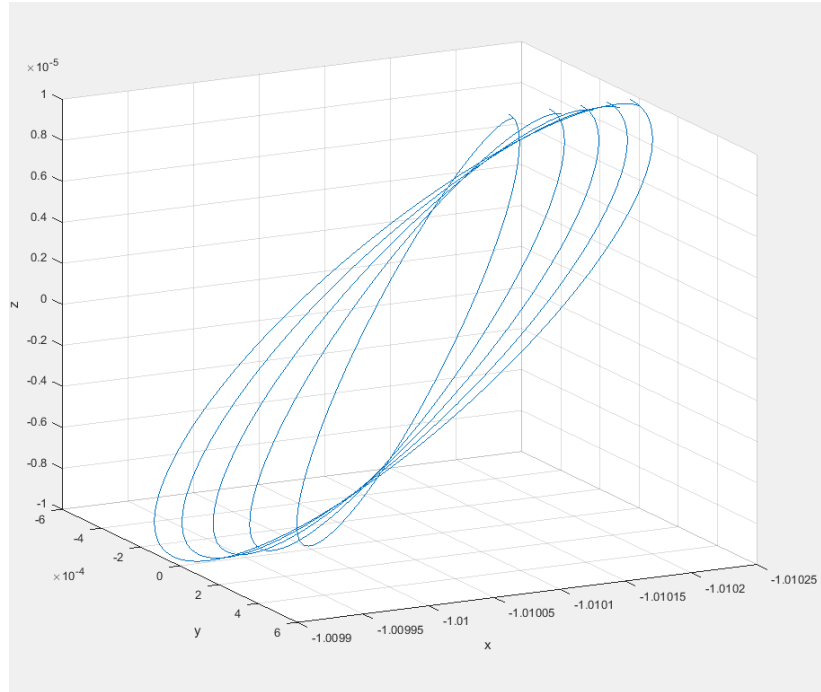


Figura 17: Representació, en el sistema de referència del RTBP, de les òrbites periòdiques a l'espai obtingudes per una exploració amb 5 valors diferents de la constant de Jacobi aplicant una posició z inicial.

3.3.2 Variacions de la velocitat inicial

En aquest apartat s'exposa el procediment que s'ha seguit per calcular les òrbites a l'espai quan les condicions inicials eren del tipus: $(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

Per definir els termes de les condicions inicials es fixa una Constant de Jacobi i un valor per \dot{z}_0 . Amb aquests dos valors fixats, x_0 i \dot{y}_0 es calculen seguint el mateix procediment que en les òrbites planes.

Així es genera una taula de condicions inicials amb els valors de la Constant de Jacobi, la posició i la velocitat del cos en l'instant t_0 .

Per definir els valors de \dot{z}_0 , s'ha seguit el mateix criteri que en el procediment anterior; que els valors fossin coherents amb els resultats obtinguts en el càlcul de les òrbites planes i que asseguressin que l'òrbita no s'escapés ràpidament del punt d'equilibri.

Aquí la condició entrada al programa per limitar el càlcul de l'òrbita era que la integració numèrica s'acabés quan la trajectòria retornava al punt $z = 0$ per segona vegada (la primera correspon a la meitat del període), per això hem desenvolupat la funció *SeccioZ* (veure apartat A.6 de l'Annex), per detectar en quin interval hi havia un canvi de signe en el terme z de la posició, i la funció *riddersZ* (veure apartat A.12 de l'Annex) per calcular numèricament en quin moment exacte el valor de la z era nul.

En aquest cas el que estem fent és donar una certa velocitat en la direcció z a les condicions inicials de l'òrbita periòdica plana. A diferència del que passava amb les òrbites de l'apartat anterior, aquest procediment és més natural ja que no és necessari moure el punt inicial de la trajectòria sinó que l'únic que fem és variar la velocitat introduint-li un petit valor en \dot{z}_0 (mitjançant l'encesa d'un motor del satèl·lit que li doni velocitat inicial vertical).

Per una primera exploració s'ha agafat un valor de $\dot{z}_0 = 0.00001$ i un valor de la constant de Jacobi $C_j = 3.000876881933879$. Seguint els passos ja explicats en els apartats anteriors s'aplica aquest valor de \dot{z}_0 a les condicions inicials d'una òrbita periòdica plana ja calculada i, executant la funció *orbita*, s'integra la trajectòria fins a $z = 0$ (segona intersecció de la secció), tal i com es mostra a la figura 18:

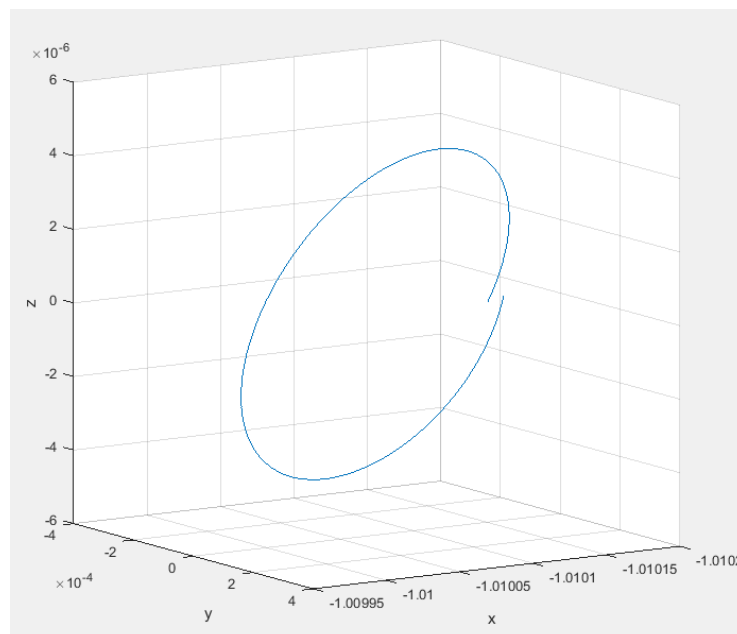


Figura 18: Representació tridimensional, en el sistema de referència del RTBP, de l'òrbita periòdica obtinguda a partir de la família d'òrbites calculades amb una $C_j = 3.000876881933879$, del sistema Sol-Terra aplicant una velocitat \dot{z} inicial.

3.3.1.1 Famílies d'òrbites: continuació

Seguint el mateix procediment que en els apartats anteriors, el següent pas consisteix en explorar famílies d'òrbites per a diferents nivells d'energia obtenint així una òrbita periòdica per a cada valor de la constant de Jacobi.

Per a aquesta exploració s'han agafat 5 valors diferents de la constant de Jacobi aplicant un pas $h_c = 10^{-8}$ a una constant de Jacobi inicial corresponent a C_{J_2} . En totes les òrbites calculades la velocitat z inicial és $\dot{z}_0 = 0.00001$. El resultat obtingut es mostra a la figura 21:

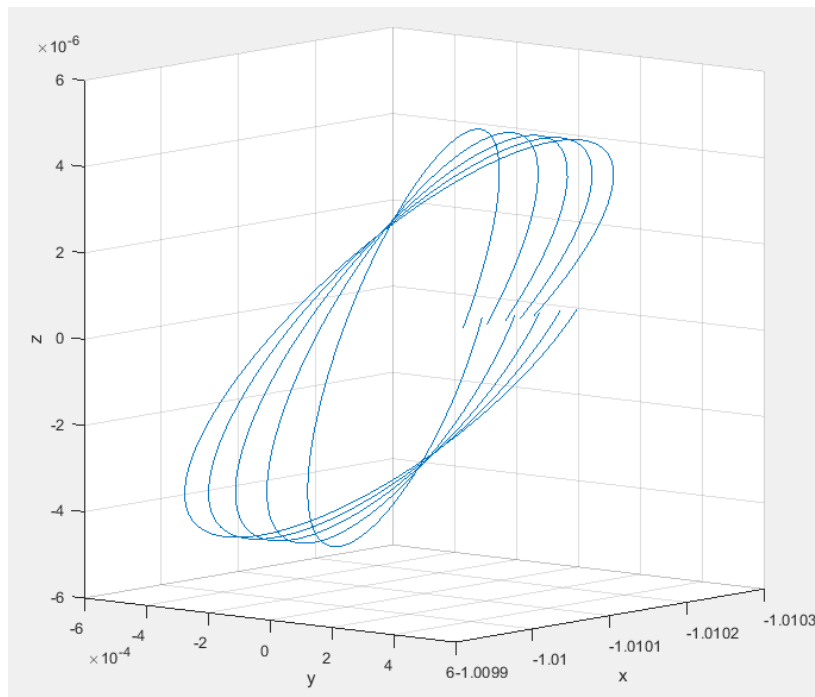


Figura 19: Representació, en el sistema de referència del RTBP, de les òrbites periòdiques a l'espai obtingudes per una exploració amb 5 valors diferents de la constant de Jacobi aplicant una velocitat z a les condicions inicials.

Podem observar, pel que hem vist fins al moment, que les òrbites verticals obtingudes introduint un valor en el terme z de la posició inicial tanquen millor que les que s'han obtingut aplicant velocitat \dot{z} a les condicions inicials. A l'apartat de resultats s'analitzaran totes les òrbites més detalladament.

4 Resultats

En aquest capítol s'exposen les simulacions realitzades i el càlcul de les òrbites planes i verticals, i les regions de visió de cel que serà possible explorar des d'aquestes.

Per a cadascuna de les simulacions s'ha estudiat un seguit de condicions inicials per cadascun dels valors de la Constant de Jacobi. Aquestes condicions inicials s'han obtingut modificant les variables x_0 , z_0 i \dot{z}_0 per cada nivell d'energia (o constant de Jacobi).

Per a l'anàlisi visual dels resultats s'ha fet una conversió d'unitats per tal de mostrar les òrbites en les unitats del sistema internacional multiplicant els valors obtinguts per el valor de la unitat astronòmica $UA = 1.4960 \cdot 10^{11} m..$ Les òrbites planes s'han representat en el pla x-y mentre que les verticals es mostren a l'espai x-y-z.

Els gràfics que es mostren en aquest apartat corresponen a les trajectòries de les òrbites per un període i el rang de visió de l'espai que es pot obtenir des d'un satèl·lit situat sobre aquestes òrbites.

Per a mostrar el rang de visió es fa mitjançant dues gràfiques per a cada exploració: la primera mostra la projecció de la direcció tangent, de cada punt d'integració de l'òrbita, sobre una esfera de radi 1 que simula el cel, i la segona mostra quines són les longituds (ϑ) i latituds (φ) recorregudes sobre l'esfera en un gràfic ϑ/φ .

En aquest capítol també es fa un estudi de l'error de posició i velocitat entre els punts inicials i finals de l'òrbita.

El capítol es divideix en tres apartats; un primer on es mostren les òrbites planes calculades, el segon amb els resultat de les òrbites verticals obtingudes per la variació de la posició z_0 i l'últim corresponent a les òrbites verticals obtingudes per la variació de la velocitat \dot{z}_0 .

4.1 Òrbites planes

Per fer l'exploració de les òrbites planes hem executat el programa calculOP per un conjunt de punts inicials corresponents 200 constants de Jacobi. La integració numèrica de les òrbites s'ha realitzat per un període, considerant que aquest tenia una durada des que la trajectòria sortia del punt inicial fins que retornava a $y = 0$ per

segona vegada (ja que el primer cop que creua l'eix de les abscisses correspon a la meitat del període).

Les òrbites obtingudes per aquesta exploració corresponen al gràfic de la figura 22.

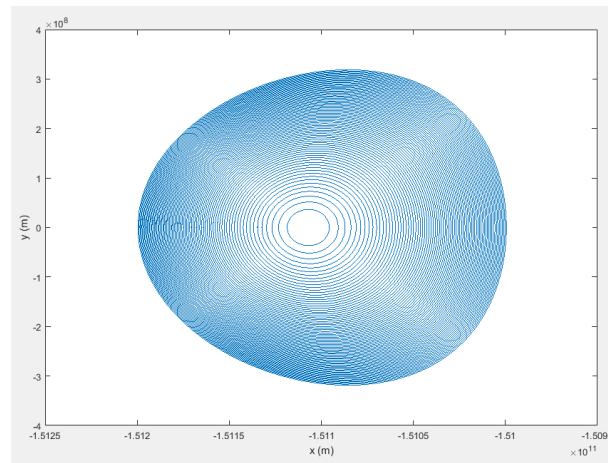


Figura 20. Representació, al pla x-y, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt de constants de Jacobi.

En aquest gràfic s'observa que les òrbites obtingudes es mouen amb una amplitud entre una valors de l'ordre de $-100000 < x < 100000$ Km i $-32000 < y < 32000$ Km.

Malgrat que la condició entrada al programa era que s'exploressin 200 valors de la constant de Jacobi, l'exploració s'ha aturat quan la C_j ha pres un valor de $C_j = 3.0008816819$ ja que aquest ha sigut l'últim nivell d'energia explorat en què s'ha trobat una òrbita plana que no s'allunyés del punt d'equilibri. Podem veure a la següent figura quina és la trajectòria que segueixen les òrbites amb una constant de Jacobi inferior a la que nosaltres hem pres com a C_j final.

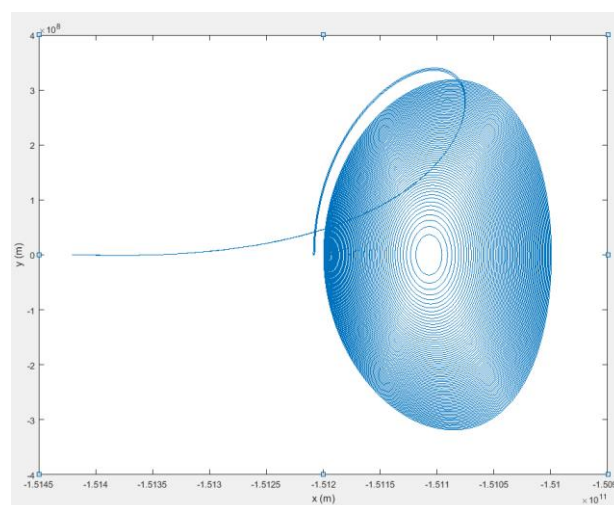


Figura 21. Representació, al pla x-y, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt C_j on s'observa que a partir d'un nivell d'energia les trajectòries s'escapen de l'entorn del punt d'equilibri.

Es pot observar, a simple vista, en el gràfic de la figura 20 que, per un període, el punt final de la trajectòria de les òrbites coincideix amb el punt inicial. Per comprovar-ho, però, es va fer un estudi de quina és la diferència entre les coordenades dels dos punts i el resultat obtingut va ser que, malgrat que sembli que tanquen, existeix una diferència considerable en el punt en què l'òrbita torna a l'eix $y = 0$. Aquest error es deu a la precisió en la que s'ha treballat (10^{-12}) i es plasma a la figura 23 on s'observa que a mesura que disminueix el valor de la x_0 i per tant, que s'allunya del punt L_2 , l'error, tant de posició com de velocitat, augmenta progressivament. De manera que si féssim l'exploració per uns valors de C_j fora del rang, les òrbites escaparien del punt d'equilibri.

L'error que apareix als gràfic correspon al mòdul de la diferència entre els vectors de posició i velocitat inicials i finals de la trajectòria.

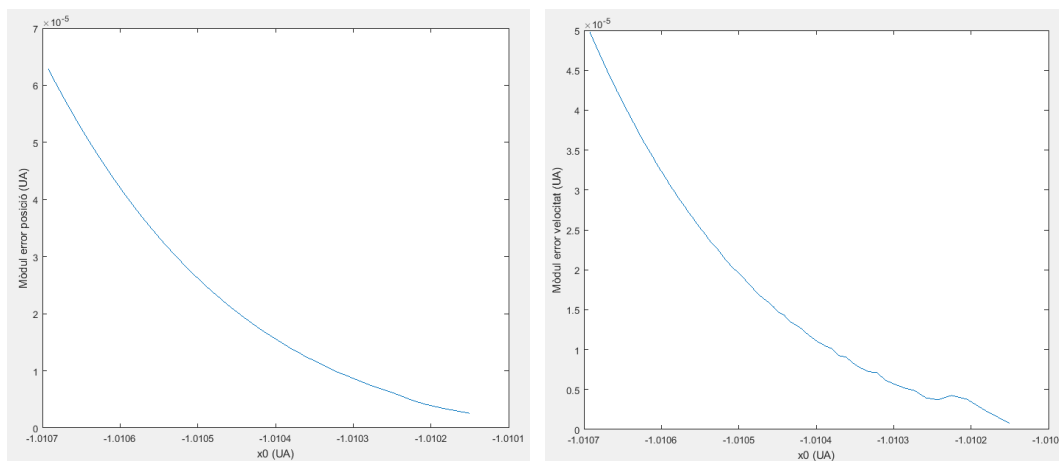


Figura 22. Al gràfic de la dreta, representació de l'error de posició entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial. Al gràfic de l'esquerra, representació de l'error de velocitat entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial.

A la figura 22 es mostra l'error en Unitats Astronòmiques i veiem que pren uns valors de l'ordre de 10^{-5} tan en la posició com en la velocitat. Aquest error és degut a la tolerància amb la que s'està treballant en les funcions desenvolupades.

4.2 Òrbites verticals amb z inicial

En aquest anàlisi s'exploren les òrbites obtingudes en modificar les condicions inicials de manera que siguin del tipus $(x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$.

S'ha repetit l'exploració per tres valors de la z_0 dels quals el més gran correspon a $z_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ en les unitats del model RTBP (en unitats reals aquest valor correspon a 7480 Km). El motiu pel qual aquest ha sigut el major valor explorat és que per valors més grans les òrbites deixaven de moure's a l'entorn del punt L_2 i s'escapaven de l'entorn idoni per realitzar les visualitzacions del cel.

Així les exploracions realitzades en aquest apartat han pres uns valors de z_0 mostrats a la següent taula:

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
z_0 (UA)	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$

Taula 1: Valors de z_0 per a les exploracions de l'apartat 4.2.

4.2.1 Cas 1

A la figura 23 podem veure el resultat obtingut de la primera exploració per un conjunt de punts inicials corresponents a valors de la constant de Jacobi de $3,0008816819 < C_j < C_{jL_2}$.

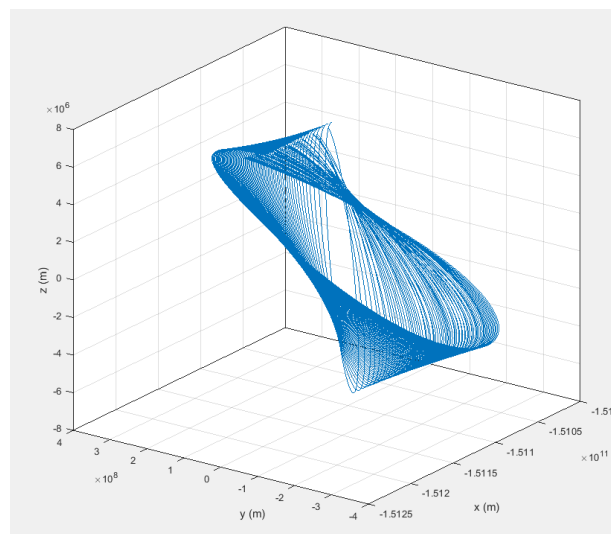


Figura 23. Representació, al pla x-y-z, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt de constants de Jacobi.

En aquest gràfic podem observar que, com s'ha dit en l'apartat anterior, les òrbites no són exactament periòdiques ja que el punt inicial ha estat modificat respecte al punt inicial de l'òrbita periòdica plana corresponent.

Referent a la magnitud d'aquestes òrbites s'ha obtingut que en les direccions x i y l'amplitud és igual que en les òrbites planes i que en la direcció z l'amplitud de les

òrbites pren uns valors de l'ordre de $-7378 < z < 7480$ Km. Recordem que l'amplitud de les òrbites en el pla x-y era de $-100000 < x < 100000$ Km i $-32000 < y < 32000$ Km i que per tant, l'abast que té l'òrbita en la direcció z és inferior que en les altres dos direccions.

En la següent figura es mostra el mòdul de l'error dels vectors de posició i velocitat entre els punts inicials i finals en funció de la corresponent posició inicial x_0 . En aquesta exploració el mòdul de l'error té un comportament molt irregular i pren uns valors de l'ordre 10^{-4} , sense seguir cap patró.

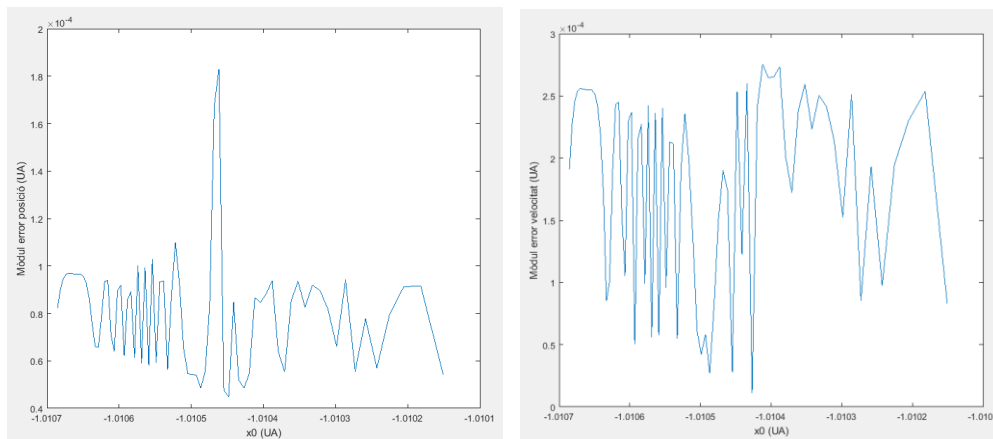


Figura 24. Al gràfic de la dreta, representació de l'error de posició entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial. Al gràfic de l'esquerra, representació de l'error de velocitat entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial.

A la figura 25 es mostren els rangs de visió possibles des d'un satèl·lit situat sobre d'aquestes trajectòries, projectat sobre una esfera de radi 1.

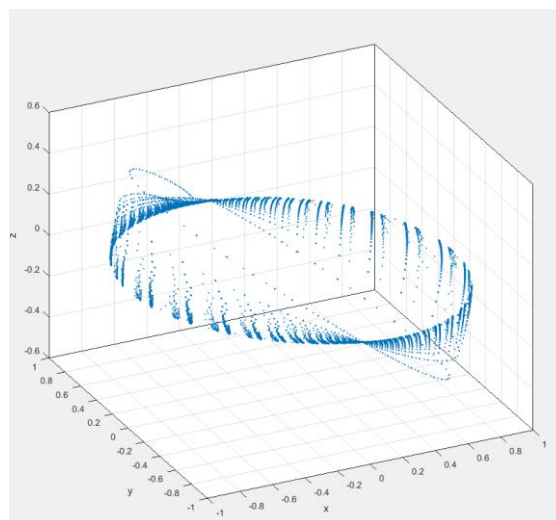


Figura 25. Representació, al pla x-y-z, del rang d'observació de les òrbites verticals obtingudes en introduir a la condició inicial un valor de $z_0 = 5 \cdot 10^{-5}$.

Com s'ha dit en l'apartat anterior, aquest gràfic mostra la projecció, sobre una esfera de radi 1, de la direcció tangent de la trajectòria en cada punt de l'òrbita.

A la següent figura s'observa un gràfic ϑ/φ que mostra quines són les longituds i latituds recorregudes sobre l'esfera de radi 1.

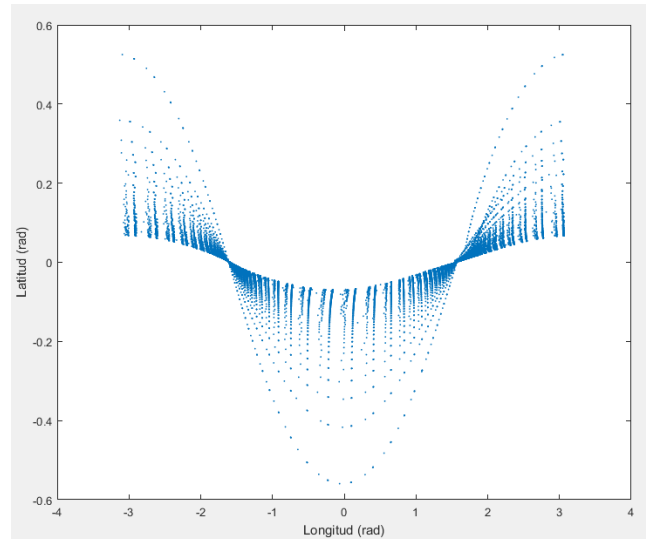


Figura 26. Representació de les longituds (ϑ) i latituds (φ) de l'esfera observades des de les òrbites verticals obtingudes.

Com a conclusió d'aquesta exploració podem dir que amb les òrbites verticals obtingudes en aquest apartat no és possible rastrejar tots els angles de visió de l'espai. Els valors dels angles ϑ i φ recorreguts prenen uns valors de:

$$-\pi < \vartheta < \pi$$

$$-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$$

Aquests valors ens indiquen que amb les òrbites obtingudes és possible visualitzar un 33% del cel (prenent aquest com una esfera de radi 1). No és estrany que obtinguem aquest resultat tenint en compte que la magnitud de l'òrbita en la direcció x és 14 vegades major que en la direcció z.

4.2.2 Cas 2

En aquest cas, en què $z_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ en les unitats del sistema del RTBP (en unitats reals aquest valor correspon a 748 Km), s'han obtingut les òrbites mostrades a la figura 27. La única diferència que s'observa respecte a les òrbites obtingudes en l'exploració anterior (figura 23) és l'abast d'aquestes trajectòries en la direcció z. En

aquesta exploració els valors de z recorreguts per l'òrbita tenen una amplitud de $-738 < z < 748$ Km.

Convé comentar que aquests valors de z són 150 vegades més petits que l'abast de les òrbites en la direcció x i 45 vegades menors que en la direcció y . Aquestes diferències queden plasmades en el gràfic amb l'escala dels eixos.

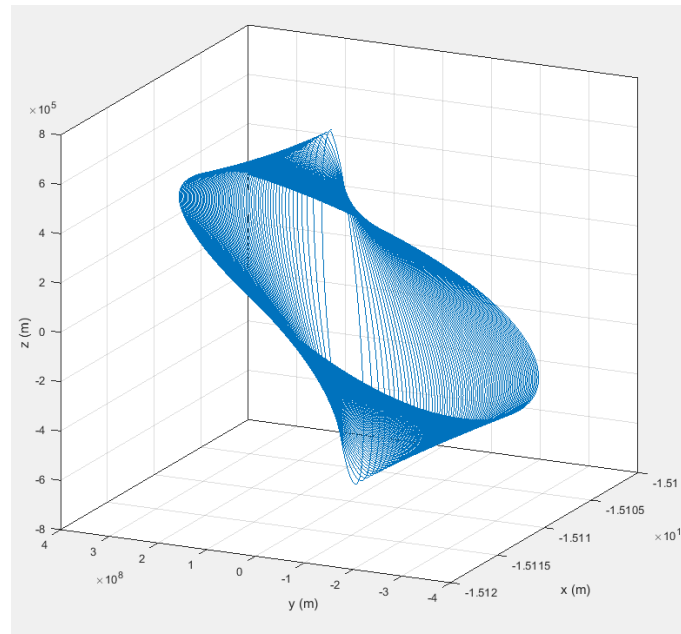


Figura 27. Representació, al pla x-y-z, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt de constants de Jacobi.

En la següent figura es mostra l'error en la posició i velocitat de les òrbites i , igual que en l'exploració de les òrbites planes, s'observa que l'error augmenta progressivament a mesura que el valor de la x_0 s'allunya del punt L_2 .

L'error obtingut en aquesta exploració és pràcticament igual que l'error obtingut en l'anàlisi de les òrbites planes (de l'ordre de 10^{-5}). Aquest fet es deu a que les òrbites es situen molt a prop del pla x-y.

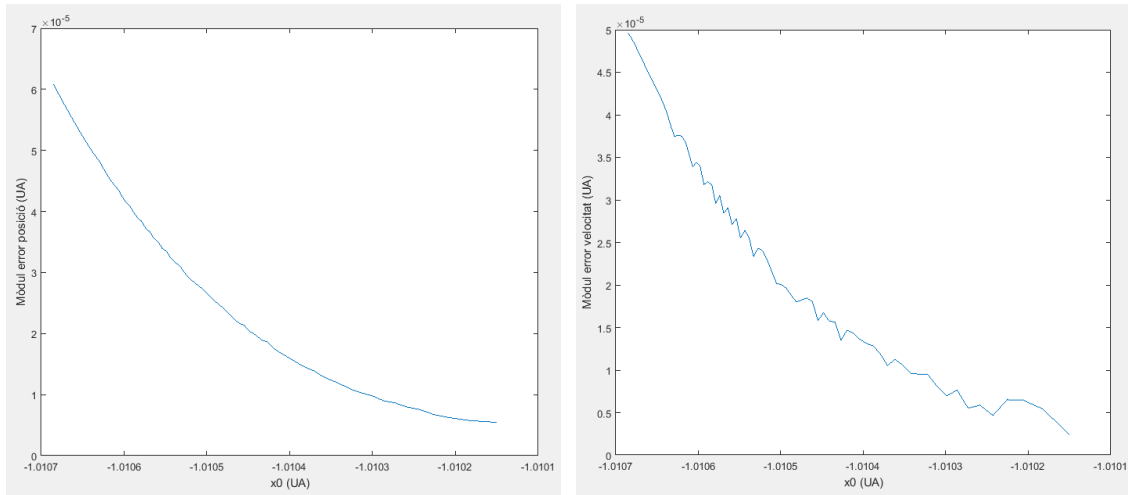


Figura 28. Al gràfic de la dreta, representació de l'error de posició entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial. Al gràfic de l'esquerra, representació de l'error de velocitat entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial.

A la figura 31 es mostren els rangs de visió d'aquestes òrbites obtinguts en generar la projecció de la tangent, en cada punt de la trajectòria, sobre una esfera de radi 1.

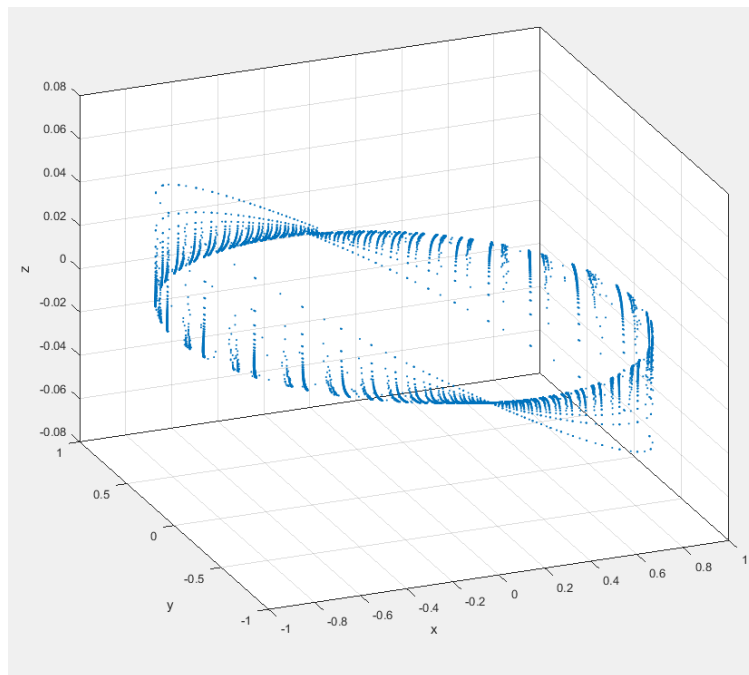


Figura 29. Representació, al pla x-y-z, del rang d'observació de les òrbites verticals obtingudes en introduir a la condició inicial un valor de $z_0 = 5 \cdot 10^{-6}$.

A la següent figura s'observa un gràfic ϑ/φ que mostra quines són les longituds i latituds recorregudes sobre l'esfera de radi 1.

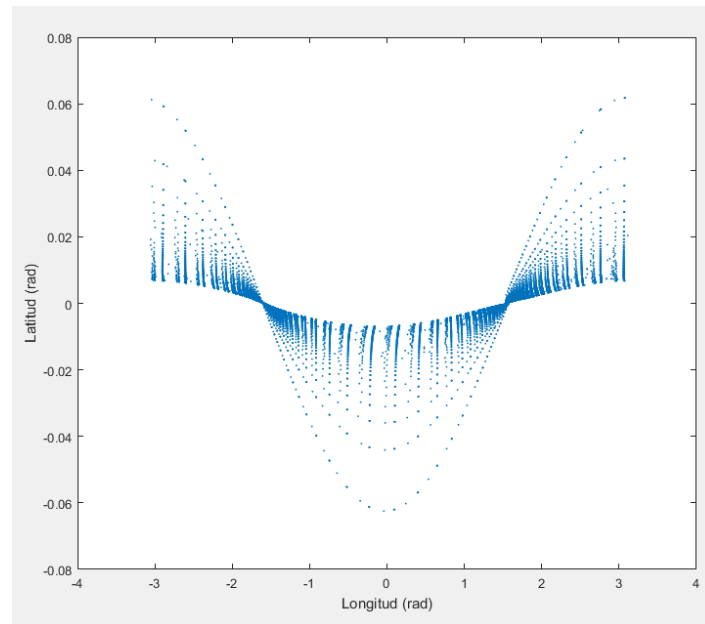


Figura 30. Representació de les longituds (ϑ) i latituds (φ) de l'esfera observades des de les òrbites verticals obtingudes.

En aquest cas la conclusió es semblant a l'anterior exploració i és que no és possible obtenir una visió de la totalitat del cel des de les òrbites explorades. En aquesta exploració els valors dels angles ϑ i φ recorreguts prenen uns valors de:

$$-\pi < \vartheta < \pi$$

$$-\frac{\pi}{300} < \varphi < \frac{\pi}{300}$$

Aquests valors ens indiquen que amb les òrbites obtingudes és possible visualitzar un 0,66% del cel (prenent aquest com una esfera de radi 1). Com s'ha comentat, la magnitud de la coordenada z per les trajectòries explorades és molt inferior a les coordenades x i y i aquestes òrbites es mouen per un entorn molt proper al pla x-y. Per tant no es d'estranyar que el rang d'observació que s'obté sigui molt proper a l'equador de l'esfera.

4.2.3 Cas 3

L'última exploració d'aquest apartat correspon al cas en què les condicions inicials prenen un valor de $z_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ en les unitats del sistema RTBP (en unitats reals aquest valor correspon a 74,8 Km). Les òrbites obtingudes en aquest anàlisi es mostren a la figura 31 on es pot observar que la magnitud de l'amplitud d'aquestes

òrbites en la direcció z ha disminuït a uns valors de $-73,8 < z < 74,8$ Km, mentre que ens les direccions x i y l'amplitud no es veu modificada.

Com en l'anterior exploració, és interessant comentar que aquests valors de z són 1300 vegades més petits que l'abast de les òrbites en la direcció x i 430 vegades menors que en la direcció y . Aquestes diferències queden plasmades en el gràfic amb l'escala dels eixos.

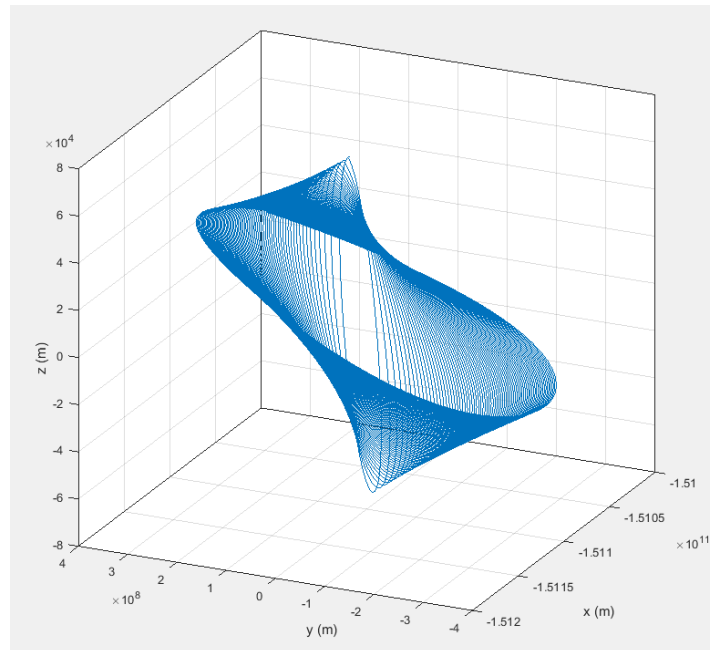


Figura 31. Representació, al pla x-y-z, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt de constants de Jacobi.

En la següent figura es mostra el mòdul de l'error entre els vectors de posició i velocitat inicial i final i s'observa que té el mateix comportament i magnitud que en l'anterior exploració. L'error augmenta progressivament a mesura que el valor de la x_0 s'allunya del punt L_2 . El motiu pel qual l'error d'aquesta exploració és tan semblant a l'anterior (de l'ordre de 10^{-5}) és que s'està treballant amb valors molt petits de z , en referència a les altres coordenades, i per tant la magnitud de l'error absolut z resulta pràcticament inapreciable en comparació al de x i y .

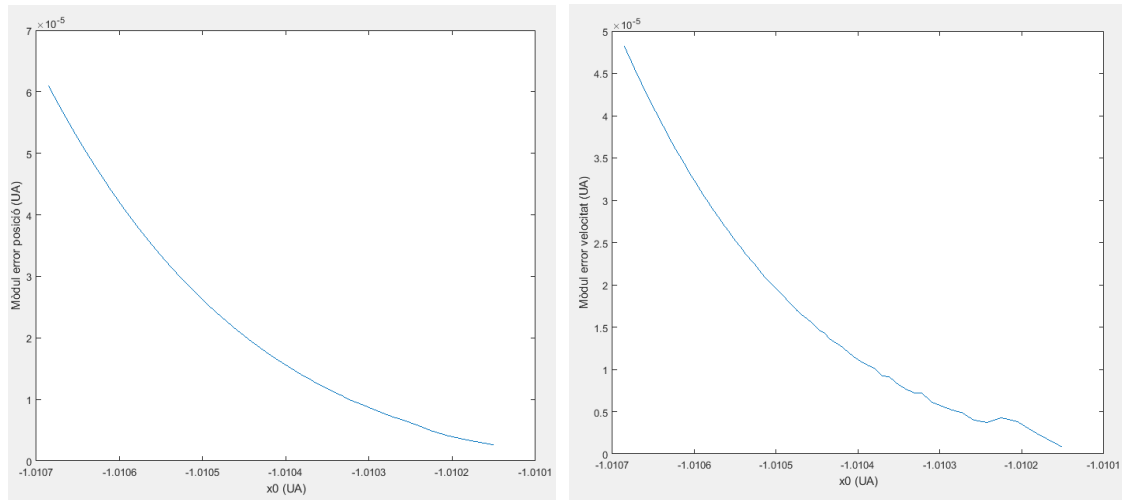


Figura 32. Al gràfic de la dreta, representació de l'error de posició entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial. Al gràfic de l'esquerra, representació de l'error de velocitat entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial.

A la figura 33 es mostren els rangs de visió (projectats sobre una esfera de radi 1) possibles des d'un satèl·lit sobre d'aquestes trajectòries.

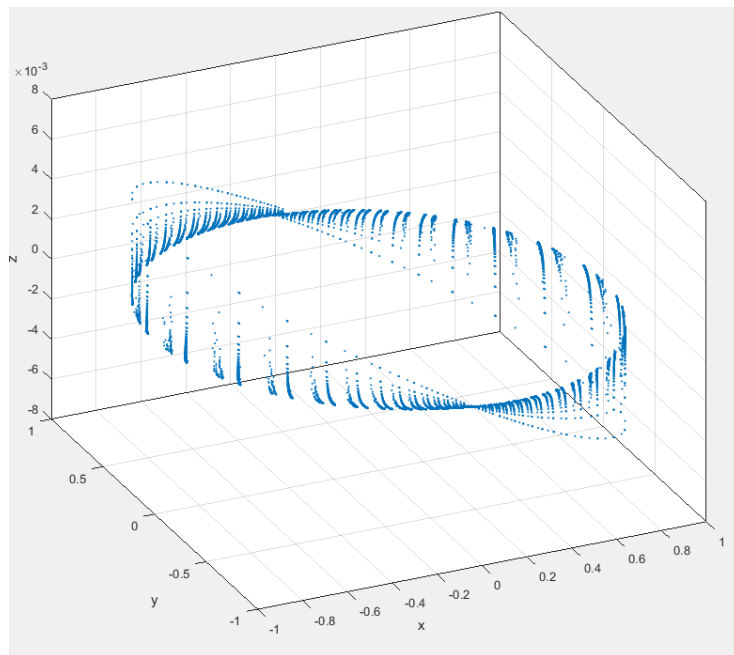


Figura 33. Representació, al pla x-y-z, del rang d'observació de les òrbites verticals obtingudes en introduir a la condició inicial un valor de $z_0 = 5 \cdot 10^{-7}$.

A la següent figura s'observa un gràfic ϑ/φ que mostra quines són les longituds i latituds recorregudes sobre l'esfera de radi 1.

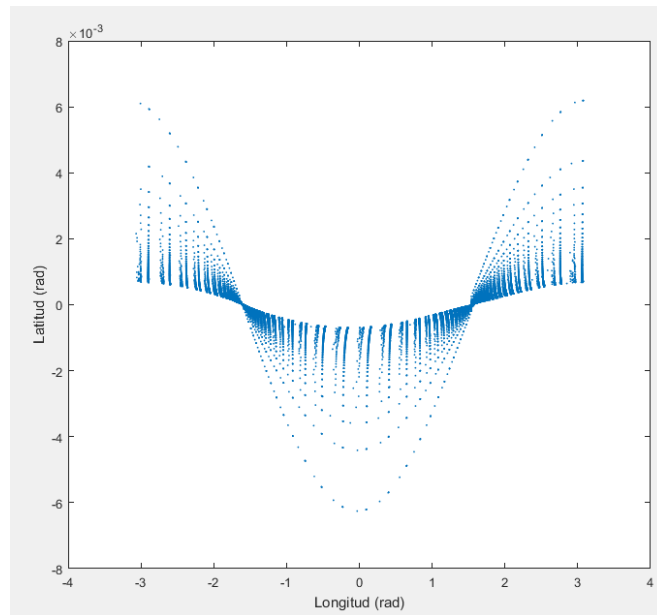


Figura 34. Representació de les longituds (ϑ) i latituds (φ) de l'esfera observades des de les òrbites verticals obtingudes.

En aquest cas també, la conclusió es pràcticament calcada a l'anterior exploració i és que no és possible obtenir una visió de la totalitat del cel des de les òrbites explorades. En aquesta exploració els valors dels angles ϑ i φ recorreguts sobre l'esfera prenen uns valors de:

$$-\pi < \vartheta < \pi$$

$$-\frac{\pi}{500} < \varphi < \frac{\pi}{500}$$

Aquests valors ens indiquen que amb les òrbites obtingudes és possible visualitzar un 0,4% del cel (prenent aquest com una esfera de radi 1). A la figura 34 cal prestar especial atenció a l'escala del eixos per adonar-nos que el rang de visió que s'obté d'aquesta exploració correspon a una línia molt fina al voltant de l'equador de la circumferència.

Com a conclusió general d'aquest apartat podem dir que no ha estat possible obtenir un conjunt d'òrbites que ens permetessin veure la totalitat del cel. Per un major valor de la z_0 , més rang de visió s'ha obtingut, per tant, per tal de poder augmentar el rang d'observació s'hauria d'haver introduït un valor de z_0 major, fet que en aquest cas no era possible perquè les òrbites s'escapaven de l'entorn de L_2 . Referent a l'error hem vist que aquest augmentava a mesura que les òrbites s'allunyaven del punt d'equilibri i

que per una valors de z_0 majors, l'error té una magnitud superior (malgrat que en els casos 2 i 3 l'error era pràcticament igual que en les òrbites planes).

4.3 Òrbites verticals amb \dot{z} inicial

En aquest anàlisi s'exploren les òrbites obtingudes en modificar les condicions inicials de tal manera que siguin del tipus $(x_0, 0, 0, 0, y_0, \dot{z}_0)$.

En aquest cas també s'ha repetit l'exploració per tres valors de la \dot{z}_0 dels quals el més gran correspon a $\dot{z}_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ en les unitats del RTBP (en unitats reals aquest valor correspon a 7480 Km/s). Igual que en l'exploració anterior el motiu pel qual aquest ha sigut el major valor explorat és que per valor més grans les òrbites deixaven de moure's a l'entorn del punt L_2 i s'escapaven de l'entorn idoni per realitzar les visualitzacions del cel.

Així les exploracions realitzades en aquest apartat han pres uns valors de \dot{z}_0 mostrats a la següent taula:

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
\dot{z}_0 (UA/s)	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$

Taula 2: Valors de \dot{z}_0 per a les exploracions de l'apartat 4.3.

4.3.1 Cas 1

A la figura 35 podem veure el resultat obtingut d'aquesta primera exploració per un conjunt de condicions inicials corresponents a uns valors de la constant de Jacobi de $3,0008816819 < C_j < C_{jL}$. (aquests valors han estat escollits a l'apartat 4.1)

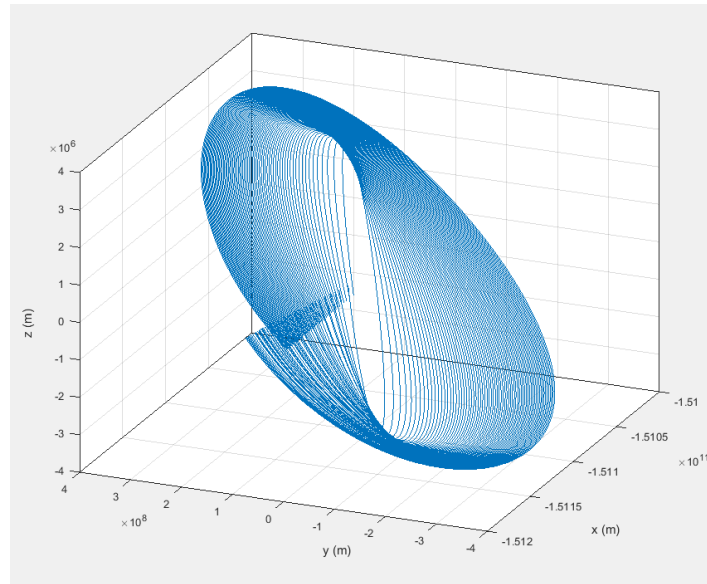


Figura 35. Representació, al pla x-y-z, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt de constants de Jacobi.

En aquesta figura s'observa que les òrbites generades no són periòdiques. En el punt en què l'òrbita retorna a $z = 0$, les condicions finals no coincideixen amb les condicions inicials. Aquest fet queda plasmat a la figura 36 en la que es mostra un gràfic amb la variació de l'error de posició i velocitat en funció de la posició inicial x_0 .

Abans però val la pena comentar que la magnitud de les òrbites obtingudes en aquesta exploració és pràcticament igual que en les exploracions que s'han fet variant el terme z de les condicions inicials. Mentre que en les direccions x i y els valors de l'amplitud no varien respecte de les òrbites planes calculades a l'apartat 4.1, en la direcció z les amplituds de òrbites prenen uns valors de l'ordre de $-3945 < z < 3945$ Km, lleugerament inferior que en l'apartat anterior 4.2.1.

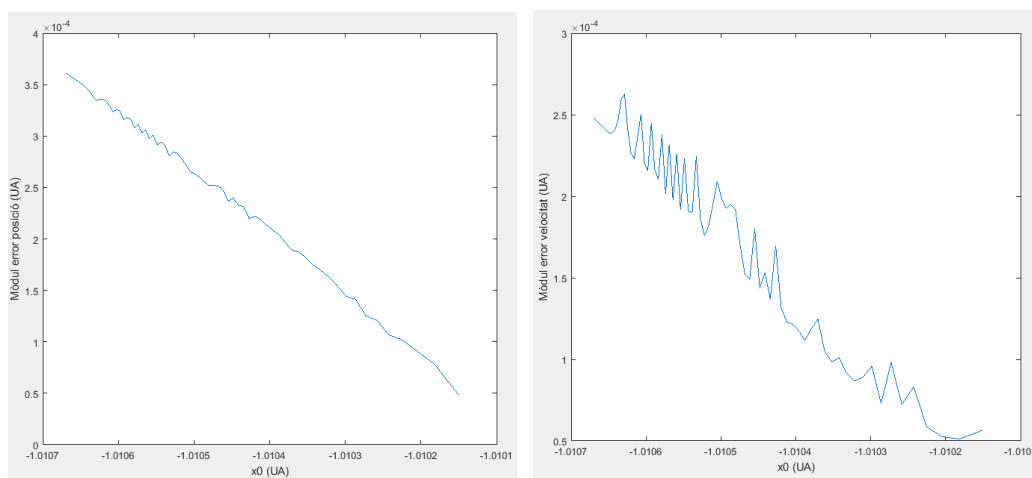


Figura 36. Al gràfic de la dreta, representació de l'error de posició entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial. Al gràfic de l'esquerra, representació de l'error de velocitat entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial.

Als gràfic de la figura 36 s'observa que igual que passava en els apartats anterior, l'error augmenta a mesura que ens allunyem del punt d'equilibri. És important destacar també que en aquesta exploració l'error pren uns valors de l'ordre de 10^{-4} UA, igual que en l'apartat 4.2.1. Per tant, en termes de precisió, és indiferent quina de les variacions li apliquem, de posició o de velocitat, a les condicions inicials de l'òrbita periòdica plana..

Els rangs de visió que s'obtenen d'aquestes òrbites es mostren a la figura 37, projectades sobre una esfera de radi 1.

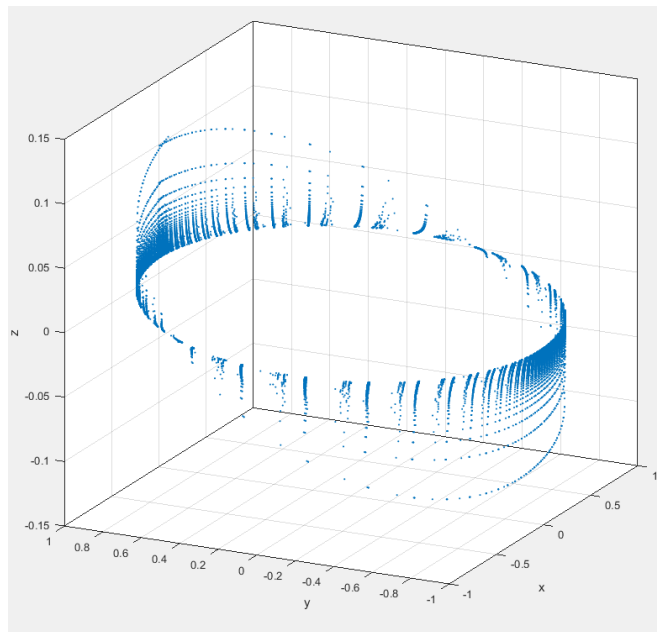


Figura 37. Representació, al pla x-y-z, del rang d'observació de les òrbites verticals obtingudes en introduir a la condició inicial un valor de $\dot{z}_0 = 5 \cdot 10^{-5}$.

A la següent figura s'observa un gràfic ϑ/φ que mostra quines són les longituds i latituds recorregudes sobre l'esfera de radi 1.

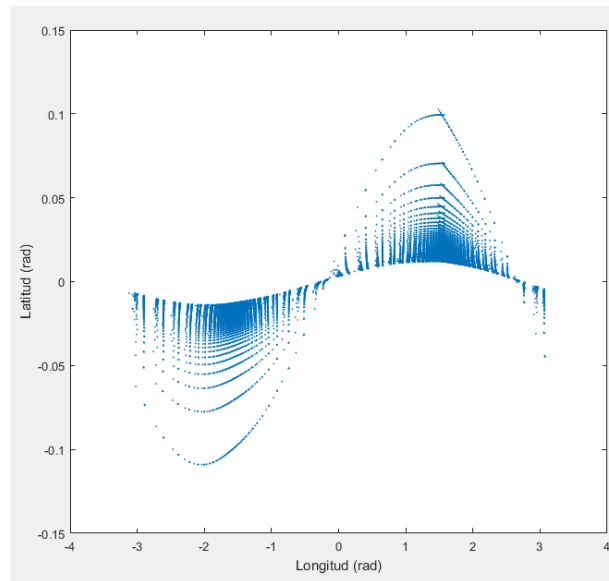


Figura 38. Representació de les longituds (ϑ) i latituds (φ) de l'esfera observades des de les òrbites verticals obtingudes.

Com a conclusió d'aquesta exploració podem dir que amb les òrbites verticals obtingudes en aquest apartat no és possible rastrejar tots els angles de visió de l'espai. Els valors dels angles ϑ i φ recorreguts sobre l'esfera prenen uns valors de:

$$-\pi < \vartheta < \pi$$

$$-\frac{\pi}{30} < \varphi < \frac{\pi}{30}$$

Aquests valors ens indiquen que amb les òrbites obtingudes és possible visualitzar un 6,666% del cel (prenent aquest com una esfera de radi 1). No és estrany que obtinguem aquest resultat tenint en compte que la magnitud de l'amplitud de l'òrbita en la direcció x és 25 vegades major que en la direcció z.

Comparant-ho amb l'exploració realitzada amb $z_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, hem obtingut un rang de visualització menor ja que, com hem vist a la figura 35, el màxim valor de z era inferior a l'obtingut a la primera exploració de l'apartat 4.2.

4.3.2 Cas 2

En aquest cas, en què $\dot{z}_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ en les unitats del RTBP (en unitats reals aquest valor correspon a 748 Km/s), s'han obtingut les òrbites mostrades a la figura 39. La única diferència que s'observa respecte a les òrbites obtingudes en l'apartat anterior

és l'abast d'aquestes trajectòries en la direcció z. En aquesta exploració els valors de l'amplitud de les òrbites en la direcció z són $-395 < z < 395$ Km.

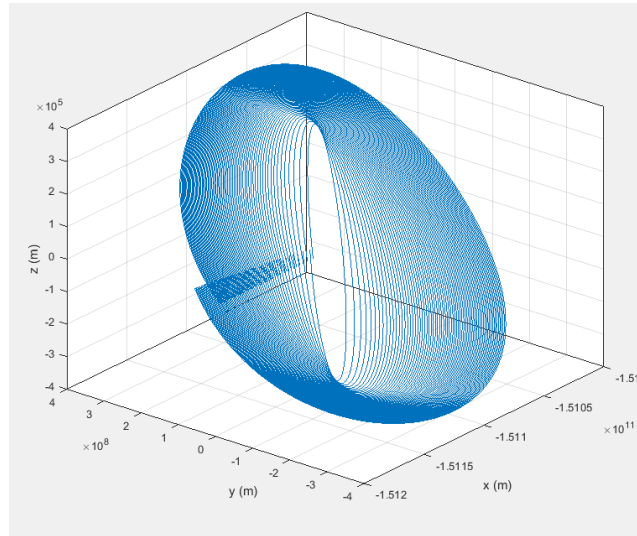


Figura 39. Representació, al pla x-y-z, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt de constants de Jacobi.

En la següent figura es mostra l'error en la posició i velocitat de les òrbites i, s'observa que té el mateix comportament i magnitud que en l'anterior exploració. L'error augmenta progressivament a mesura que el valor de la x_0 s'allunya del punt L_2 . El motiu pel qual l'error d'aquesta exploració és tan semblant a l'anterior és que, com en l'apartat 4.2, s'està treballant amb valors molt petits de z, en referència a les altres coordenades, i per tant la magnitud de l'error absolut en z resulta pràcticament inapreciable en comparació al de x i y.

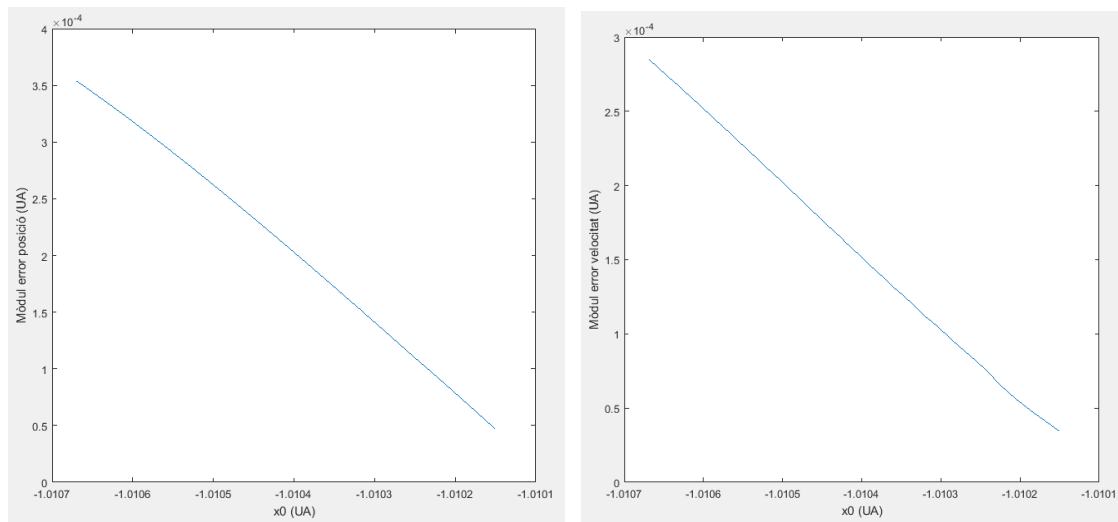


Figura 40. Al gràfic de la dreta, representació de l'error de posició entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial. Al gràfic de l'esquerra, representació de l'error de velocitat entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial.

Comentar també que en aquest apartat 4.3 els errors que s'obtenen són lleugerament superior que els obtinguts en els apartats 4.1 i 4.2.

Els rangs de visió que s'obtenen d'aquestes òrbites es mostren a la figura 41, projectades sobre una esfera de radi 1. De la figura 42, en què es mostra el gràfic de longituds i latituds recorregudes sobre l'esfera, s'extreu que els valors dels angles ϑ i φ recorreguts prenen uns valors de:

$$-\pi < \vartheta < \pi$$

$$-\frac{\pi}{300} < \varphi < \frac{\pi}{300}$$

Aquests valors ens indiquen que amb les òrbites obtingudes és possible visualitzar un 0,666% del cel (prenent aquest com una esfera de radi 1).

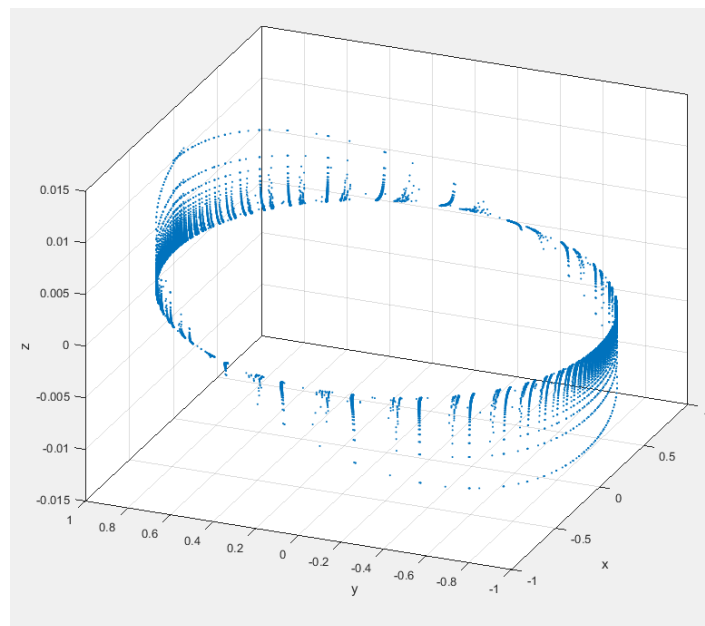


Figura 41. Representació, al pla x-y-z, del rang d'observació de les òrbites verticals obtingudes en introduir a la condició inicial un valor de $\dot{z}_0 = 5 \cdot 10^{-6}$.

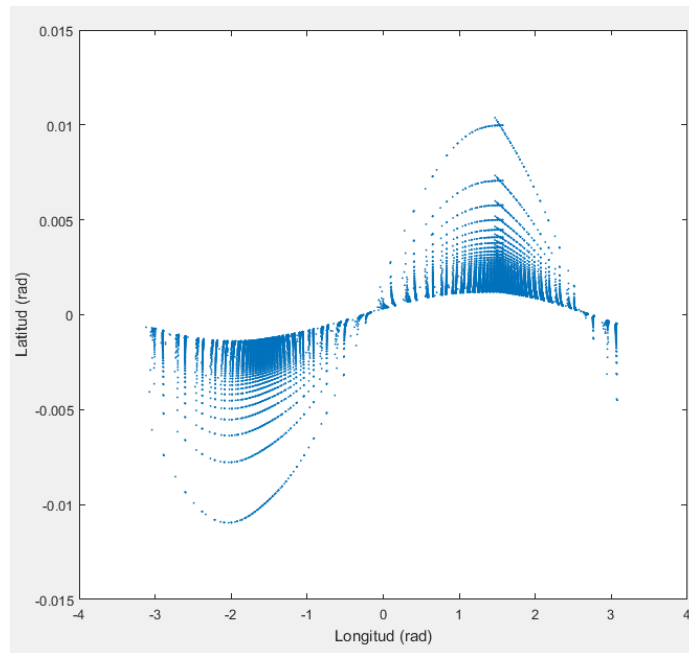


Figura 32. Representació de les longituds (ϑ) i latituds (φ) de l'esfera observades des de les òrbites verticals obtingudes.

Com s'ha comentant en apartats anteriors, per entendre la magnitud de la projecció cal fixar-se en l'escala dels eixos de la figura 41 per adonar-nos que mentre que l'eix de les x i de les y prenen valors dins de l'interval $[-1, 1]$, l'eix de les z pren una valors entre -0.015 i 0.015 .

4.3.3 Cas 3

L'última exploració d'aquest apartat correspon al cas en què les condicions inicials prenent un valor de $\dot{z}_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ en les unitats del RTBP (en unitats reals aquest valor correspon a 74,8 Km/s). Les òrbites obtingudes en aquest anàlisi es mostren a la figura 33 on es pot observar que la magnitud de l'amplitud d'aquestes òrbites en la direcció z ha disminuït a uns valors de $-39,5 < z < 39,5$ Km, mentre que en les direccions x i y l'amplitud no es veu modificada.

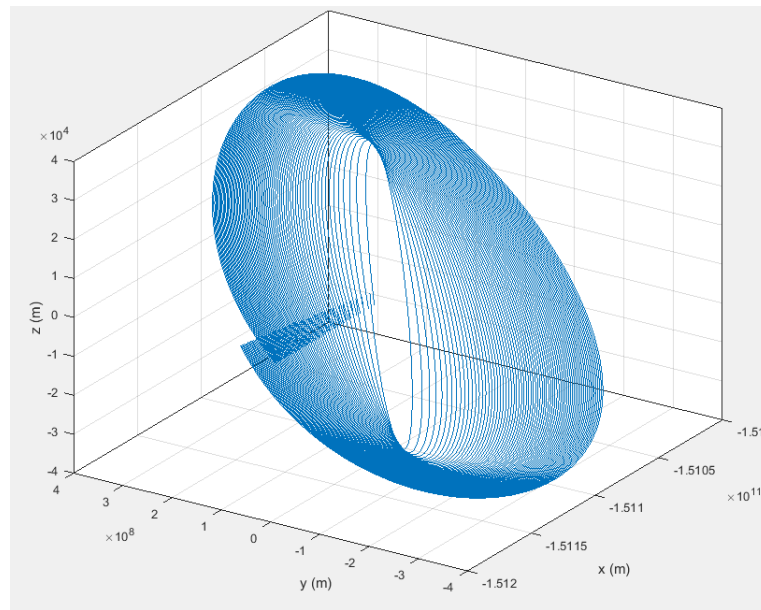


Figura 42. Representació, al pla x-y-z, del conjunt d'òrbites obtingudes per un conjunt de constants de Jacobi.

En la següent figura es mostra l'error en la posició i velocitat de les òrbites i, s'observa que té el mateix comportament i magnitud que en l'anterior exploració. L'error augmenta progressivament a mesura que el valor de la x_0 s'allunya del punt L_2 . Com s'ha anat dient s'està treballant amb valors molt petits de z , en referència a les altres coordenades, i per tant la magnitud de l'error absolut en z resulta pràcticament inapreciable en comparació al de x i y .

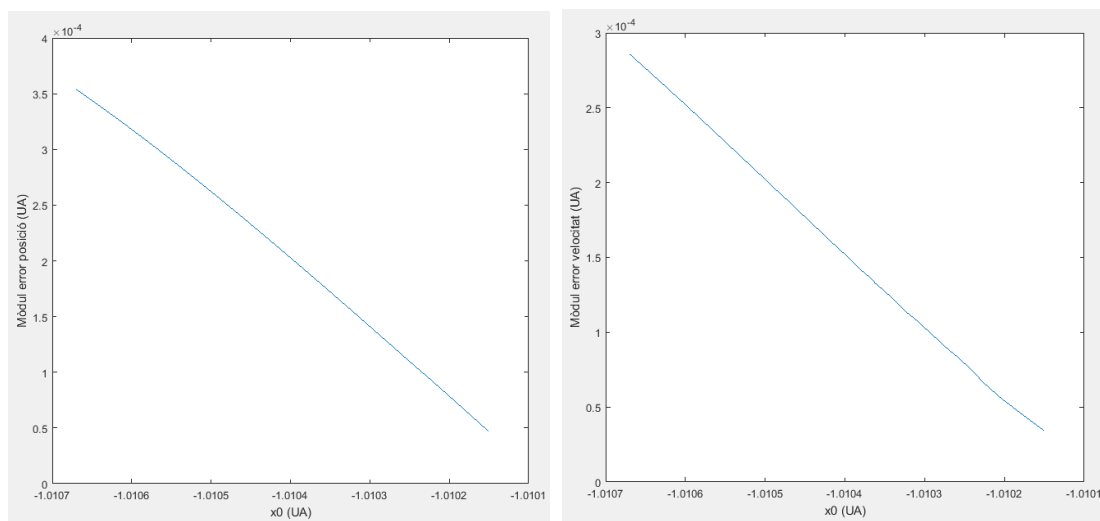


Figura 43. Al gràfic de la dreta, representació de l'error de posició entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial. Al gràfic de l'esquerra, representació de l'error de velocitat entre l'inici i el final de la trajectòria respecte de la posició x_0 inicial.

Els rangs de visió que s'obtenen d'aquestes òrbites es mostren a la figura 44, projectades sobre una esfera de radi 1. Seguint la tendència de les anteriors exploracions, en aquest últim anàlisi el rang de visió suposa un percentatge molt petit de la totalitat de l'esfera.

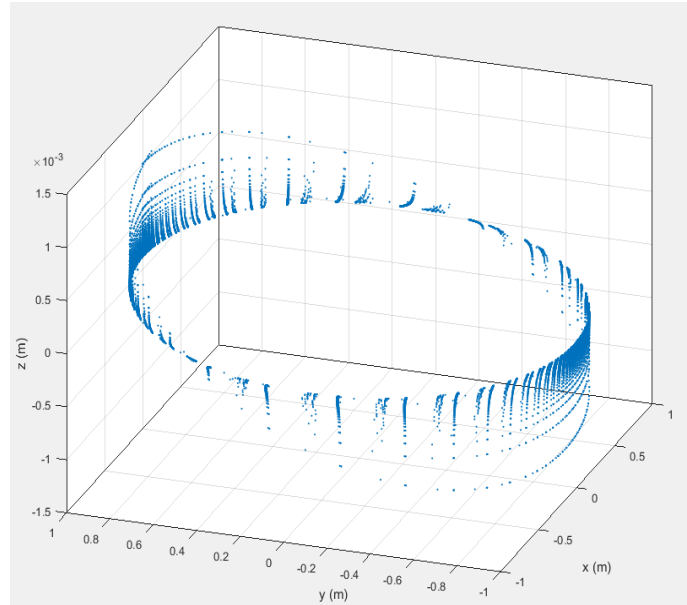


Figura 44. Representació, al pla x-y-z, del rang d'observació de les òrbites verticals obtingudes en introduir a la condició inicial un valor de $\dot{z}_0 = 5 \cdot 10^{-7}$.

A la següent figura s'observa un gràfic ϑ/φ que mostra quines són les longituds i latituds recorregudes sobre l'esfera de radi 1.

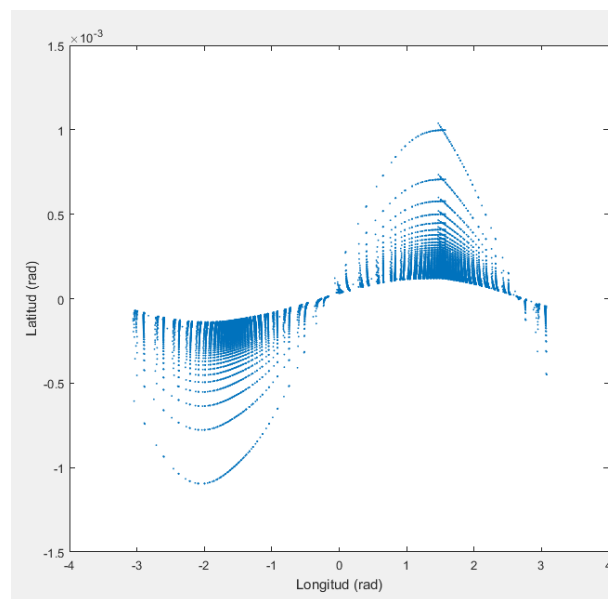


Figura 35. Representació de les longituds (ϑ) i latituds (φ) de l'esfera observades des de les òrbites verticals obtingudes.

Els valors dels angles ϑ i φ recorreguts sobre l'esfera prenen uns valors de:

$$-\pi < \vartheta < \pi$$
$$-\frac{\pi}{3000} < \varphi < \frac{\pi}{3000}$$

Aquests valors ens indiquen que amb les òrbites obtingudes és possible visualitzar un 0,0666% del cel (prenent aquest com una esfera de radi 1).

Com a conclusió general d'aquest apartat podem dir que no ha estat possible obtenir un conjunt d'òrbites que ens permetessin veure la totalitat del cel. Per tal de poder augmentar el rang de visió s'hauria d'haver introduït un valor de \dot{z}_0 major, fet que en aquest cas no era possible perquè les òrbites s'escapaven de l'entorn de L_2 .

Referent a l'error hem vist que, igual que en l'apartat 4.2, aquest augmentava a mesura que les òrbites s'allunyaven del punt d'equilibri i que per una valors de \dot{z}_0 majors, l'error té una magnitud superior (malgrat que en els casos 2 i 3 l'error era pràcticament igual que en les òrbites planes).

5 Resum del pressupost

Resum del pressupost general d'execució:

PRESSUPOST D'EXECUCIÓ	6933,33	€
14% de despeses generals d'empresa	970,67	€
6% de benefici industrial	416,00	€
PRESSUPOST D'EXECUCIÓ TOTAL A FALTA D'IVA	8320,00	€

El pressupost general d'execució a falta d'IVA és de vuit-mil tres-cents vint euros.

6 Conclusions

L'objectiu del treball es pot dividir en dos aspectes. D'una banda, l'aprenentatge de conceptes i metodologies dels sistemes dinàmics (en concret, models amb equacions diferencials, i en particular de la mecànica celeste) i de l'altra la resolució d'un problema concret, en aquest cas, l'estudi de les zones de visualització de cel profund d'una càmera fixa situada en un satèl·lit que es mou sobre unes trajectòries determinades.

Pel que fa al primer objectiu, el treball m'ha permès millorar la comprensió de models d'equacions diferencials i sobretot ampliar el meu coneixement i desenvolupament en la programació de mètodes numèrics.

Pel que fa al segon objectiu, inicialment ens havíem proposat calcular òrbites periòdiques verticals, sobre les que es mouria el suposat satèl·lit. Per aconseguir-ho, vam començar centrant-nos en el càlcul d'òrbites periòdiques planes. Aquesta part del treball, degut al baix coneixement inicial en programació, em va suposar invertir un temps major al que tenia previst i, per manca de temps, es van re definir els objectius i baixar les expectatives. Ens vam centrar en les òrbites periòdiques planes i vam decidir analitzar les trajectòries obtingudes en introduir pertorbacions verticals a les òrbites planes.

Convé comentar que aquest estudi ha centrat les seves bases en un model, el problema restringit de tres cossos, Sol – (Terra + Lluna) – satèl·lit, i que aquest no és una representació exacta del Sistema Solar sinó una aproximació d'aquest, tot i que suficientment bona per a un estudi preliminar.

Analitzant els resultats, hem pogut calcular òrbites periòdiques planes simètriques al voltant del punt de Lagrange L_2 fins que la família se'ns inestabilitza massa com per continuar la família. Hem calculat òrbites periòdiques que arriben a una amplitud de fins a 100000 Km. Tenint en compte que es conegut que el telescopi James Webb Space Telescope està previst que segueixi una òrbita d'amplitud aproximada de 300000 Km, considerem que no es necessari anar més lluny.

A continuació, per a cada una de les òrbites planes calculades s'introdueixen dos tipus de pertorbació. En un cas, es prenen les mateixes condicions inicials que les òrbites planes i es canvia l'altitud. Aquest és un cas fictici ja que per col·locar el satèl·lit en el mateix punt i amb la mateixa velocitat però a una certa altitud faria falta algun tipus de dispositiu artificial. Tot i així l'estudiem per poder comparar i veure si s'obtidrien bons

resultats. En l'altre cas, es prenen les mateixes condicions inicials i es canvia la velocitat inicial vertical. Aquesta pertorbació és més factible ja que només representa encendre un motor del satèl·lit que li doni velocitat en la direcció vertical.

En el primer cas s'arriba a escanejar unes latituds de fins a $\frac{\pi}{6}$ en l'exploració en què s'aplica una variació de major magnitud de la posició inicial. En el segon cas les latituds rastrejades arriben fins a $\frac{\pi}{30}$ quan apliquem una major variació de la velocitat inicial. Així podem concloure que la regió de cel que s'observa es major com més gran és la posició o velocitat inicial en la direcció z i dels dos casos, tot i ser un cas fictici, dóna una rangs majors de visualització el cas en què el satèl·lit es comença a moure amb z inicial.

Malgrat no haver obtingut una visió total del cel s'ha aconseguit calcular unes òrbites verticals al voltant del punt de Lagrange L_2 a partir d'unes òrbites periòdiques planes obtingudes en un model Sol-Terra, les quals poden rastrejar, en el millor dels casos, un 30% del cel per un període. Això tenint en compte que els rangs de visió s'han obtingut agafant la direcció tangent de cada punt de l'òrbita sense tenir en compte l'angular de la càmera. Tampoc s'ha considerat introduir un motor de rotació en la càmera del satèl·lit ja que aquest podria suposar un pes excessiu per el cos en moviment i un manteniment periòdic.

Com a propostes de millora, hagués sigut interessant realitzar un estudi amb un conjunt més gran de condicions inicials. El motiu pel qual han estat limitades les condicions inicials en aquest estudi ha estat que els programes requerien un temps molt elevat per completar-se. Per tant també es podria estudiar realitzar la programació de les funcions executades amb un altre software que permetés una major capacitat de còmput.

Una altra proposta de millora seria generar un conjunt de condicions inicials a l'espai a partir de les quals s'obtinguessin les conegudes òrbites Halo, de manera que la tercera dimensió no vingués condicionada per unes òrbites planes prèviament calculades.

A partir d'aquest treball també es podria realitzar un estudi en el que s'analitzés el comportament de les òrbites aplicant maniobres de correcció de la posició cada període de temps determinat.

A nivell personal aquest nivell m'ha aportat coneixement en l'àmbit de la mecànica celeste i m'ha permès ampliar els meu coneixements en mètodes numèrics aplicats a sistemes dinàmics i programació adquirits al grau d'enginyeria industrial.

7 Relació de documents

La relació de documents que componen aquest projecte és:

- 1- Memòria i Annexes

8 Bibliografia

[1] ABAD, A. Astrodinámica. Grupo de Mecánica Espacial. Universidad de Zaragoza. 2012.

[2] BARRABÉS, E., GÓMEZ, G. Space Manifold Dynamics. (2011). http://www.scholarpedia.org/article/Space_Manifold_dynamics. 20 maig 2017.

[3] BARRABÉS, E., MIKKOLA, S. (2004). *Families of periòdic horseshoe orbits in the restricted three-body problema*. Astronomy & Astrophysics manuscrit.

[4] DERMOTT, S.F., MURRAY, C.D. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press. Cambridge.

[5] DUNFORD, B. Solar System Exploration. NASA Science. <https://solarsystem.nasa.gov>. 10 maig 2017.

[6] ETIENNE, T. Associate Professor – Theoretical Chemistry & Molecular Physics. <https://thibaudetienne.wordpress.com>. 27 abril 2017.

[7] GURFIL, P., KASDIN, N. J., KOLEMEN, E. (2007) *Quasi-Periodic Orbits of the Restricted Three-Body Problem Made Easy*. Editorial Belbruno. AIP Conference Proceedings (Vol. 886, No. 1, pp. 68-77). AIP.

[8] WORTHINGTON, J. *A study of the planar circular restricted three body problem and the vanishing twist*. (2012). Doctoral dissertation, PhD thesis, Thesis, Univ. Sydney.

[9] CORNISH, N.J. NASA. WMAP. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. https://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory_l2.html. 3 maig 2017.

[10] Guia de usuario de MATLAB. MathWorks

.

ANNEXOS

A - CODI INFORMÀTIC

A.1 Funció

```
%Definició de la funció
% Sistema d'equacions RTBP
function eq = Funcio(t,x)
%Definició de mu
global mu;
%Definició de paràmetres
xm1 = x(1)-mu;
xm2 = x(1)-mu+1;
r12 = xm1^2 +x(2)^2+x(3)^2;
r22 = xm2^2 +x(2)^2+x(3)^2;
r1 = sqrt(r12);
r2 = sqrt(r22);
%Equacions:
eq=[x(4);x(5);x(6); 2*x(5)+x(1)-(1-mu)*(x(1)-mu)/(r1^3)-mu*(x(1)-
mu+1)/(r2^3); -2*x(4) + x(2)*(1-(1-mu)/(r1^3)-mu/(r2^3));-x(3)*((1-
mu)/(r1^3)+mu/(r2^3))];
end
```

A.2 energia

```
%Funció que calcula la constant de Jacobi a partir d'un valor de mu i
%d'unes coordenades (x,y,z,x',y',z')
```

```
function [ C ] = energia( x,mu )
% Definició parametres
xm1 = x(1)-mu;
xm2 = x(1)-mu+1;
r12 = xm1^2 +x(2)^2+x(3)^2;
r22 = xm2^2 +x(2)^2+x(3)^2;
r1 = sqrt(r12);
r2 = sqrt(r22);

% Calcul constant
C=x(1)^2+x(2)^2+2*(1-mu)/r1+2*mu/r2+mu*(1-mu)-(x(4)^2+x(5)^2+x(6)^2);

end
```

A.3 velocitat

```
%Funcio que fa el calcul del terme y de la velocitat
% a partir de la constant de Jacobi i la posicio x del punt inicial
function [ y ] = velocitaty( x,C )
global mu;
% Definicions
xm1 = x-mu;
xm2 = x-mu+1;
r12 = xm1^2;
```

```

r22 = xm2^2;
r1 = sqrt(r12);
r2 = sqrt(r22);

y=sqrt(x^2+2*(1-mu)/r1+2*mu/r2+mu*(1-mu)-C);

end

```

A.4 SeccioY

```

function Sec=SeccioY(x0,xf)

%Funció que a partir de dos punts determina si la seva unió a través
de les equacions "Funcio" talla una determinada secció
%En aquest cas la secció és Y=0

Sec=x0(2)*xf(2);

end

```

A.5 SeccioXp

```

function Secp=SeccioXp(x1,x2)
%Funció que a partir de dos punts determina si la seva unió a través
de les equacions "Funcio" talla una determinada secció
%En aquest cas la secció és X'=0
Secp=x1(6)*x2(6);
end

```

A.6 SeccioZ

```

function SecZ=SeccioZ(CI,xff)
%Funció que a partir de dos punts determina si la seva unió a través
de les equacions "Funcio" talla una determinada secció
%En aquest cas la secció és z=0
SecZ=CI(3)*xff(3);
end

```

A.7 calculOrbita

```

%Algoritme per dibuixar una òrbita a partir d'unes dades inicials i de
les
%equacions definides al fitxer Funcio
%Definició de mu
mu=0.304018792*10^(-5);

%Definim les condicions inicials per les sis variables

```

```

x0=[1 0 0 0 1 0];

t0=0; %l'instant de temps inicial és zero
h=0.01;
hmax=5.d-3;
tfi=20;
contador=0;
TXY_matrix=[];
orbites=[];

while t0 < tfi
    tspan=[t0,t0+h];
    [t,x]=ode78('Funcio',tspan,x0,0,1.e-8,0,0,hmax);
    orbites=[orbites; t x];
    [filesx,columnsex]=size(x);
    xf=x(filesx,:);
    tf=t0+h;

    %nova iteració
    t0=tf;
    x0=xf;
    %pause; %per mostrar els valors de la següent iteració clicar intro
end;
plot(orbites(:,2),orbites(:,3));

```

A.8 orbita

```

%Funció que a partir d'unes condicions incials fa el calcul de
l'òrbita
%i ens dona la matriu orbites que conté temps i posicio de cada
iteració i la matriu camera amb les coordenades esfèriques
%i per les orbites 3D calcula la secció z per establir el període
function[orbitesP zsect camera B F
T]=orbita(contadorZ,orbitesP,t0,hmax,CI,camera)
mu=0.304018792*10^(-5);
format long;
while contadorZ <2
    tspan2=[t0,t0+hmax];
    [t,x]=ode78('Funcio',tspan2,CI,0,1.e-12,0,0,hmax); %càlcul
de l'òrbita
    orbitesP=[orbitesP;t x];

    xp = orbitesP(:,5);
    yp = orbitesP(:,6);
    zp = orbitesP(:,7);
    params = table(xp,yp,zp);
    B = rowfun(@v,params,'OutputVariableNames','V');
    F = rowfun(@phi,params,'OutputVariableNames','PHI');
    T = rowfun(@theta,params,'OutputVariableNames','THETA');

    tableBFT = [B F T];
    camera = table2array(tableBFT);

    %Càlcul secció x per establir el període de les orbites 3D
    [filesx,columnsex]=size(x);
    xff=x(filesx,:);
    SecZ=SeccioZ(CI,xff);

```

```

        if SecZ < 0 %si l'orbita travessa l'eix de les x,
calculem en quin punt ho fa
            contadorZ = contadorZ+1;
            tff=t(filesx,:);
            [tsect,zsect,flag]=riddersZ(t0,tff,CI,xff);
        end

        CI=xff;
        t0=t0+hmax;

end

```

A.9 puntseccio

```

%Funcio que a partir d'unes condicions inicials fa el calcul de
l'orbita
%fins al punt a la seccio y i mostra, cridant la funció Ridders, les
%coordenades del punt a secció
function[tsect xsect orbites ]=puntseccio(contador,orbites,t0,hmax,x0)

while contador <1 %calculem l'orbita fins que trobem una seccióy
    tspan2=[t0,t0+hmax];
    [t,x]=ode78('Funcio',tspan2,x0,0,1.e-12,0,0,hmax); %càlcul
de l'òrbita
    orbites=[orbites;t x];

    [filesx,columnesx]=size(x);
    xf=x(filesx,:);
    Sec=SeccioY(x0,xf);

        if Sec < 0 %si l'orbita travessa l'eix de les x,
calculem en quin punt ho fa
            tfi=t(filesx,:);
            contador = contador+1;
            [tsect,xsect,flag]=ridders(t0,tfi,x0,xf);
        end

        x0=xf;
        t0=t0+hmax;

end

```

A.10 ridders

```

%Mètode numèric de Ridders per refinar el punt a la seccio y
function [t4,x4,flag]=ridders(t0,tf,x0,xf)

flag=0;
N=0; %nombre d'iteracions
tol= 1.e-12; %tolerancia

```



```

t1=t0;
t2=tf;
y1=x0;
y2=xf;
f1=x0(2); %(y de la funcio amb les condicions inicials)
f2=xf(2); %(y de la funcio amb les dades de tf)

f4=1;

if abs(f4) > tol
t3=(t1+t2)/2;

if f1-f2>0
    sign = 1;
else sign = -1;
end

%per trobar f3
hmax=1.d-2;
tspan3=[t1,t3];
[t13,x13]=ode78('Funcio',tspan3,y1,0,1.e-8,0,0,hmax);

[filesx13,columnesx13]=size(x13);
x3=x13(filesx13,:);%vector que conté l'ultim punt de la iteració
f3=x3(2);

%per trobar f4
s = sqrt(f3^2 - f1*f2);
t4 = t3 + (t3 - t1)*sign*f3/s;
tspan4=[t1,t4];
[t14,x14]=ode78('Funcio',tspan4,y1,0,1.e-8,0,0,hmax);

[filesx14,columnesx14]=size(x14);
x4=x14(filesx14,:);%vector que conté l'ultim punt de la iteració

f4=x4(2);

%Actualitzem els punts per a la següent iteració

if t3 < t4
    if f3*f4 > 0
        if f1*f4 > 0
            t1=t4;
            y1=x4;
        else
            t2=t4;
            y2=x4;
        end
    else
        t1=t3;
        y1=x3;
        t2=t4;
        y2=x4;
    end
end

else
    if f3*f4 > 0
        if f1*f4 < 0
            t1=t3;
            y1=x3;
        end
    end
end

```

```

        else
            t2=t4;
            y2=x4;
        end
    else
        t1=t3;
        y1=x3;
        t2=t4;
        y2=x4;
    end
end
end

N=N+1;

while N>25
    break
end;

end;
flag=1;

```

A.11 riddersOP

```

%Mètode numèric de Ridders per refinar el punt a la seccio xp
function [tsect,xsect,flag,xiOP]=riddersOP(x1,x2,idir,C,orbites,xiOP)

flag=0;
N=0; %nombre d'iteracions
tol= 1.e-12; %tolerancia
s1=x1(1);
s2=x2(1);
f1=x1(6);
f2=x2(6);
f4=1;
contador=0;

if abs(f4) > tol
s3=(s1+s2)/2;
if f1-f2>0
    sign = 1;
    else sign = -1;
end

%per trobar f3
yp3=idir*velocitaty(s3,C);
x3 = [s3 0 0 0 yp3 0]; %condicions inicials 3
t0=0;
hmax=0.05;
x0=x3;

[tsect,xsect,orbites]=puntseccio(contador,orbites,t0,hmax,x0);%punt a
secció amb condició inicial s3 per trobar la velocitat x'3
f3=xsect(end,4);

```

```

%per trobar f4
s = sqrt(f3^2 - f1*f2);
s4 = s3 + (s3 - s1)*sign*f3/s;
yp4=idir*velocitaty(s4,C);
xiOP = [s4 0 0 0 yp4 0];
x0=xiOP;
[tsect,xsect,orbites]=puntseccio(contador,orbites,t0,hmax,x0);%punt a
secció amb condició inicial s4 per trobar la velocitat x'4
f4=xsect(end,4);

%Actualitzem els punts per a la següent iteració

if s3 < s4
    if f3*f4 > 0
        if f1*f4 > 0
            s1=s4;
            x1=xiOP;
        else
            s2=s4;
            x2=xiOP;
        end
    else
        s1=s3;
        x1=x3;
        s2=s4;
        x2=xiOP;
    end
else
    if f3*f4 > 0
        if f1*f4 < 0
            s2=s3;
            x2=x3;
        else
            s1=s3;
            x1=x3;
        end
    else
        s1=s4;
        x1=xiOP;
        s2=s3;
        x2=x3;
    end
end
end

N=N+1;
while N>25
    break
end;

end;
flag=1;

```

A.12 riddersZ

```

%Mètode numèric de Ridders per refinar el punt a la secció z

```

```

function [t4,z4,flag]=riddersZ(t0,tff,CI,xff)

flag=0;
N=0; %nombre d'iteracions
tol= 1.e-12; %tolerancia
t1=t0;
t2=tff;
y1=CI;
y2=xff;
f1=CI(3); %(y de la funcio amb les condicions inicials)
f2=xff(3); %(y de la funcio amb les dades de tf)

f4=1;

if abs(f4) > tol
t3=(t1+t2)/2;
if f1-f2>0
    sign = 1;
else sign = -1;
end

%per trobar f3
hmax=1.d-2;
tspan3=[t1,t3];
[t13,x13]=ode78('Funcio',tspan3,y1,0,1.e-8,0,0,hmax);
[filesx13,columnesx13]=size(x13);
x3=x13(filesx13,:);%vector que conté l'ultim punt de la iteració
f3=x3(2);

%per trobar f4
s = sqrt(f3^2 - f1*f2);
t4 = t3 + (t3 - t1)*sign*f3/s;
tspan4=[t1,t4];
[t14,x14]=ode78('Funcio',tspan4,y1,0,1.e-8,0,0,hmax);
[filesx14,columnesx14]=size(x14);
z4=x14(filesx14,:);%vector que conté l'ultim punt de la iteració
f4=z4(2);

%Actualitzem els punts per a la següent iteració

if t3 < t4
    if f3*f4 > 0
        if f1*f4 > 0
            t1=t4;
            y1=z4;
        else
            t2=t4;
            y2=z4;
        end
    else
        t1=t3;
        y1=x3;
        t2=t4;
        y2=z4;
    end
else
    if f3*f4 > 0
        if f1*f4 < 0
            t1=t3;
            y1=x3;

```

```

        else
            t2=t4;
            y2=z4;
        end
    else
        t1=t3;
        y1=x3;
        t2=t4;
        y2=z4;
    end
end
end

```

```

N=N+1;
while N>25
    break
end;

```

```

end;
flag=1;

```

A.13 CalculOP

%Programa principal que mostra els resultats finals de l'exploració

```

format long;
global mu;
mu=0.304018792*10^(-5);

x12=-1-(mu/3)^(1/3)-(1/3)*(mu/3)^(2/3)+28/27*mu; %càlcul del punt L2
l2=[x12 0 0 0 0 0];
C2=energia(l2,mu); %Càlcul de la constant de Jacobi al punt L2
display([x12,C2]);
idir=1;
%Constants
hx=2*10e-7;
hc=2*10e-8;
N=1;
%matris de resultats
orbites=[];
puntseccioy=[];
puntseccioz=[];
orbitesP=[];
OP=[];
zmax=[];
camera=[];
OPreal=[];
CIreal=[];
orbitesreal=[];
PSreal=[];
CIm=[];

%Generem taula de punts inicials
while N <= 1

```

```

%Nombre de constants de Jacobi que volem
display(N);
C=C2-hc*N;
k=1;
hmax=0.05;
CI=[];
contadorOP=0;

while k <= 200 && contadorOP < 1 %Condicions per seguir calculant
per cada constant de jacobi
    x0i=x12-k*hx;
    yp=idir*velocitaty(x0i,C);
    zp=0.000001;
    x0 = [x0i 0 0 0 yp zp]; %punt inicial de l'òrbita
    CIm=[CIm;x0];

    t0=0;
    contador=0;

    %calcul punt a seccio y
    [tsect xsect orbites]=puntseccio(contador,orbites,t0,hmax,x0);
    puntseccioy = [puntseccioy;x0i tsect xsect];

    while zp > 0.000001
    %calcul OP
    if k>1
        x1=puntseccioy(end-1,:); %penúltim punt de la matriu TXY
        x2=puntseccioy(end,:); %últim punt de la matriu TXY
        Secp=SeccioXp(x1,x2);

        contadorZ=0;
        if Secp < 0 %si entre dues orbites hi ha un canvi de
signe en la velocitat x, calculem en quin moment passa i a quina
orbita correspon
            contadorOP=contadorOP+1;

        [tsect,xsect,flag,xiOP]=riddersOP(x1,x2,idir,C,orbites); %refinar punt
seccio
            CI=[xiOP(1),0,0,0,xiOP(5),zp]; %condicions
inicials del punt que hem trobat amb RidderOP
            tfi=abs(tsect*4);
            [orbitesP zsect camera B F
T]=orbita(contadorZ,orbitesP,t0,hmax,CI,camera); %càlcul de l'òrbita
periòdica

            puntseccioz=[puntseccioz;zsect];
            xf=orbitesP(end,:);
            Error=sqrt((xf(2)-
xiOP(1))^2+xf(3)^2+xf(5)^2+(xf(6)-xiOP(5))^2+(xf(3)-xiOP(3))^2);
            orbitesP = [orbitesP;NaN(1,7)];
            % z més gran que s'obté amb la OP
            zmax=[zmax;N xiOP(1) xiOP(5) zp
sqrt((zsect(1)-xiOP(1))^2+(zsect(2)-xiOP(2))^2+(zsect(3)-xiOP(3))^2)
sqrt((zsect(4)-xiOP(4))^2+(zsect(5)-xiOP(5))^2+(zsect(6)-xiOP(6))^2)
max(orbitesP(:,4))];

            OP=[OP;xiOP(1) xiOP(5) tsect xsect C Error];

    end

end
end

```

```

        zp=zp*0.1;

        end

        orbites = [orbites;NaN(1,7)];
        k=k+1;

    end
    puntseccioy = [puntseccioy;NaN(1,8)];
    N=N+1;

end

figure
plot(orbites(:,2),orbites(:,3));
hold on;
plot(puntseccioy(:,3),puntseccioy(:,4),'*');

figure
plot(puntseccioy(:,1),puntseccioy(:,6));
hold on;
plot(OP(:,1),OP(:,7),'*');
hline = reffline([0]);
hline.Color = 'r';
title('Secció de Poincaré')
xlabel('Posició X inicial')
ylabel('Velocitat X final')

figure
grid on;
plot3(OPreal(:,2),OPreal(:,3),OPreal(:,4));
grid on;
grid minor;
title('Orbites periòdiques')
xlabel('X')
ylabel('Y')
hold on;
a=-1.4960e11;
b=0;
c=0;
plot3(a,b,c,'*');
d=0;
plot3(d,b,c,'*');
plot3(puntseccioz(:,1),puntseccioz(:,2),puntseccioz(:,3),'*');

figure
plot(OP(:,1),OP(:,11));
title('Propagació error')
xlabel('X')
ylabel('Error')

figure
plot3(orbitesP(:,5),orbitesP(:,6),orbitesP(:,7),'*');
xlabel('X')
ylabel('Y')
ylabel('Y')

```

```

figure
plot(camera(:,3),camera(:,2));

figure
plot(zmax(:,2),zmax(:,7));

figure
plot(CIreal(:,1),CIreal(:,2),'*');
hold on;
plot(xl2*1.4960e11,0,'*');

```

B. Pressupost

El pressupost desglossat es troba a les taules següents:

Elaboració del projecte			
COST D'ENGINYERIA			
Descripció	Cost horari (€/h)	Hores	Import(€)
Recerca bibliogràfica	25	40	1000
Programació codi	25	150	3750
Elaboració document	25	50	1250
TOTAL			6000

Amortitzacions					
COST EQUIPS INFORMÀTICS I SOFTWARE					
Descripció	Unitats totals	Preu unitari(€)	Import(€)	Nº anys	€/any
Ordinador	1	600	600	3	200
Paquet Office	1	200	200	3	66,67
Matlab	1	2000	2000	3	666,67
TOTAL					933,33 €