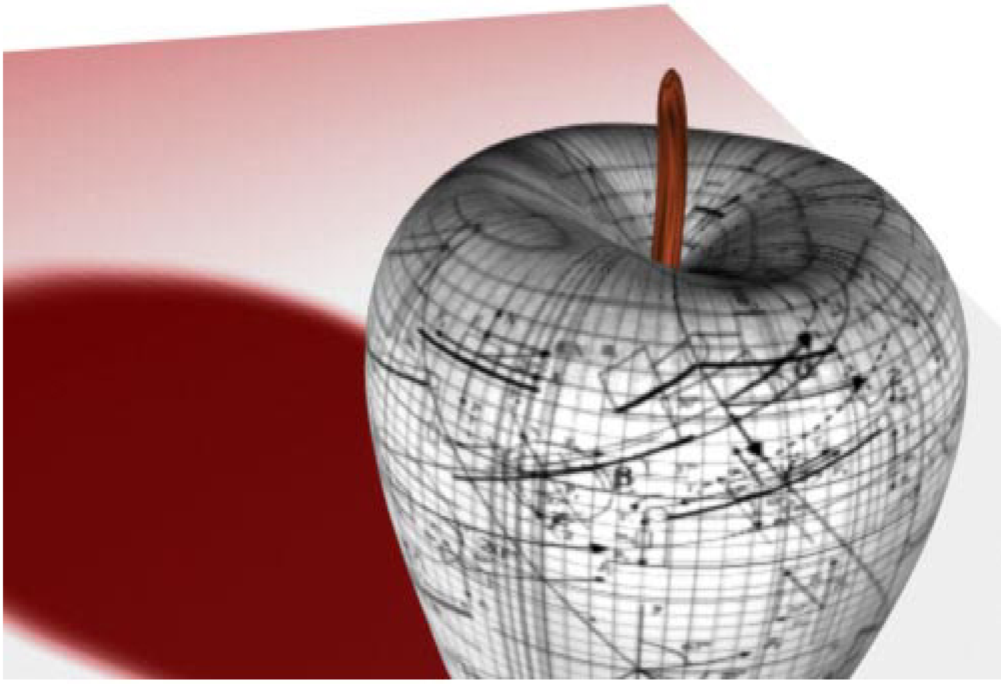
Problemes de física per a batxillerat i cicles formatius

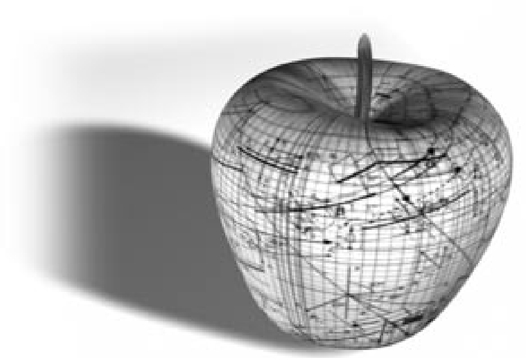
M. Lluïsa Escoda Acero, Jesús Planella Morató,
Joan Josep Suñol Martínez



Problemes de física per a batxillerat i cicles formatius

M. Lluïsa Escoda Acero, Jesús Planella Morató,
Joan Josep Suñol Martínez

Departament de Física



Universitat de Girona. 2005. 1 ed. Català.
Edició electrònica.

ISBN: 84-8458-220-5

Ressenya:
Aquest manual recull un conjunt de problemes que engloben els principals camps de la física clàsica. El seu enfocament està dirigit a estudis preuniversitaris (batxillerat, cicles formatius de grau superior) i pretén ser un complement tant dels manuals ja existents, com una ajuda per aquells estudiants ja universitaris que vulguin repassar els seus coneixements previs.

Problemes de física per a batxillerat i cicles formatius

Autors: M. Lluïsa Escoda Acero, Jesús Planella Morató, Joan Josep Suñol Martínez

Coautoria d'aquesta edició electrònica: M. Lluïsa Escoda Acero, Jesús Planella Morató, Joan Josep Suñol Martínez i Universitat de Girona
Edició electrònica per a la intranet docent La Meva, setembre 2005

ISBN: 84-8458-220-5

Dipòsit legal: GI.1103-2005

Edita:
Universitat de Girona
La Factoria de Recursos Docents
Biblioteca de Montilivi
Campus de Montilivi s/n
Tel. (972)41 89 06 / 639 40 89 73
lafactoria@udg.es

Índex

MESURA FÍSICA: MAGNITUDS i UNITATS

Índex

P.1. Magnituds físiques. Unitats

Definicions

T.1.1. **Magnitud física**. És una qualitat mesurable directament, o indirectament emprant equacions, i utilitzada en l'estudi de fenòmens físics. En són exemples la longitud, el temps, la massa o l'energia.

T.1.2. **Unitat**. Tota magnitud física té associada com a resultat de la mesura una quantitat; aquesta unitat és el valor 1 d'aquesta magnitud.

T.1.3. **Sistemes d'unitats**. Les unitats es poden considerar fonamentals (no es deriven d'altres), derivades o complementàries. Les unitats s'agrupen en sistemes d'unitats. El sistema més generalitzat és el sistema internacional (SI) d'unitats. Les unitats fonamentals en el SI d'unitats són:

Magnitud	**Unitat**	
	Nom	**Simbol**
Longitud	Metre	m
Temps	Segon	s
Massa	Quilogram	kg
Intensitat de corrent	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Quantitat de substància	Mol	mol
Intensitat lluminosa	Candela	cd

Les unitats es poden expressar en múltiples i submúltiples:

Símbol (denominació)	Equivalència	Exemple
G (giga)	10^9	Gs (gigasegon)
M (mega)	10^6	MPa (megapascal)
k (kilo)	10^3	Kg (kilogram)
d (deci)	10^{-1}	dm (decímetre)
c (centi)	10^{-2}	cm (centímetre)
m (mil·li)	10^{-3}	mV (mil·livolt)
μ (micro)	10^{-6}	μA (microampere)
n (nano)	10^{-9}	nC (nanocoulomb)

T.1.4. **Factors de conversió**. Com que hi ha diferents sistemes d'unitats, cal conèixer algunes de les conversions típiques entre unitats. Els factors de conversió es poden expressar com una fracció en què el numerador i el denominador són quantitats equivalents expressades en unitats diferents. Per exemple: 1000 mm / 1m.

Exercicis

E.1.1. Expresseu en unitats del SI les mesures següents:
(a) 144 km / h, (b) 2 g / cm^{-3}

Solució

a) $144\,\dfrac{km}{h} = 144\,\dfrac{km}{h}\cdot\dfrac{1000\ m}{1\,km}\cdot\dfrac{1\,h}{3600\ s} = 40\ m/s$

b) $2\,\dfrac{g}{cm^3} = 2\,\dfrac{g}{cm^3}\cdot\dfrac{1\,kg}{1000\ g}\cdot\dfrac{10^6\ cm^3}{1\,m^3} = 2000\ kg/m^3$

E.1.2. Expresseu en hores, minuts i segons un temps de 10.000 segons.

Solució

$$10.000\ s\cdot\frac{1\,\text{min}}{60\ s} = 166{,}67\ \text{min}$$

$$166{,}67\ \text{min}\cdot\frac{1\,h}{60\ \text{min}} = 2{,}77\ h$$

La fracció sencera és 2 h; la resta s'ha de convertit primer en minuts i després en segons: 2h = 120 min, llavors 166,67 - 120 = 46,67 min. La fracció sencera és de 46 min. La resta és:

$$0{,}67 \text{ min} \cdot \frac{60\ s}{1 \text{ min}} = 40\ s$$

En conseqüència, 2h 46 min 40 s.

Tornem-hi…

P.1.1. Escriviu les magnituds següents en unitats del sistema internacional: densitat, velocitat i acceleració. Sol.: kg/m^3, m/s, m/s^2.

P.1.2. Un vehicle circula a una velocitat de 144 km/h. Quina és la seva velocitat expressada en unitats del sistema internacional? Sol.: 40 m/s.

P.1.3. Un mòbil circula a una velocitat de 50 m/s. Quina és la seva velocitat expressada en km/h? Sol.: 180 km/h.

P.1.4. Expresseu 2 m^3 en litres, en decímetres cúbics, en centímetres cúbics i en quilòmetres cúbics. Sol.: $2\cdot10^3$ l, $2\cdot10^3$ dm^3, $2\cdot10^6$ cm^3, $2\cdot10^{-9}$ km^3.

P.1.5. Expresseu en minuts un temps de 900 s. Sol.: 15 min.

P.1.6. Expresseu un temps d'1 dia 10h i 30 min en segons. Sol. 127.800 s.

P.1.7. Quina és l'àrea associada a un quadrat de L metres de costat? I a un de costat 3L m? Sol.: L^2 m^2, $9L^2$ m^2.

P.1.8. Expresseu en radiants l'angle de 10º35'.

Sol.: 0,18 rad.

P.2. Anàlisi dimensional

Definicions

T.2.1. **Equació de dimensions**. Si a les magnituds fonamentals se'ls associen lletres, l'equació de dimensions ens permet expressar magnituds derivades en funció de la fonamental. En mecànica clàssica, les lletres assignades són *L* (longitud), *T* (temps) i *M* (massa).

E.2.1. Quina és l'equació de dimensions de l'acceleració?

Solució:

L'acceleració és una velocitat per unitat de temps:

$$[a] = \frac{L\,T^{-1}}{T} = \frac{L}{T^{-2}}\,.$$

Tornem-hi…

P.2.1. Equació de dimensions de la superfície. Sol.: [S] = L^2

P.2.2. Equació de dimensions de la superfície. Sol.: [V] = L^3

P.2.3. Equació de dimensió de la densitat. Sol.: [?] = M L^{-3}

P.2.4. Equació de dimensió de l'energia. Sol.: [E] = M L^2 T^{-2}

P.2.5. Equació de dimensió de la força. Sol.: [F] = M L T^{-2}

P.2.6. Equació de dimensió de la pressió. Sol.: [p] = M L^{-1} T^{-2}

P.3. Arrodoniments

T.3.1. **Xifres significatives**. Nombre de dígits d'una mesura. Ex.: 43,4 m té 3 xifres significatives.

T.3.2. **Arrodoniment**. Quan hi ha diferents xifres significatives en una operació matemàtica, cal arrodonir el resultat final a un nombre de xifres significatives realista en funció de les magnituds mesurades.

T.3.3. **Criteris d'arrodoniment**

Criteri 1. Sumes i restes: el nombre de xifres significatives és del mateix ordre de magnitud que la menys significativa comuna.

Criteri 2. Multiplicacions i divisions: el nombre de xifres significatives és el de la magnitud amb menys xifres significatives.

Criteri 3. Funcions transcendents (sin, log…): el resultat té el mateix nombre de xifres significatives que l'argument.

Criteri 4. Si la primera xifra eliminada és 5 o superior a 5 s'afegeix una unitat a la xifra significativa anterior. En cas contrari, no es modifica aquesta xifra.

E.3.1. Arrodoniu el resultat de l'operació matemàtica següent:
12,34 + 3,12 – 3,0 - 4,78 + 3,141593

Solució

12,34 + 3,12 – 3,0 - 4,78 + 3,141593 = 10,821593

La darrera xifra significativa comuna és la dels decimals. Aleshores, el resultat de l'arrodoniment és 10,8.

E.3.2. Arrodoniu el resultat de sin 40°30'.

Solució

sin 40°30' = 0,649448048. L'arrodoniment és 0,6494.

Tornem-hi…

P.3.1. Arrodoniu el resultat de l'operació següent (dades en s):
-0,34 + 123 + 12,4 – 19,8 – 13,4 + 76,8 + 68,4
Sol.: 274 s

P.3.2. Arrodoniu el resultat de l'operació següent (dades en mA):
-12,4 + 89,467 + 34,2 +12,2 -64,5 +6,4
Sol.: 65 mA

P.3.3. Arrodoniu el resultat de l'operació següent (dades en g):
12,4 + 11,8 + 12,9 + 6,2 + 7,4 + 8,8 + 10,4 + 23,8
Sol.: 65 g

P.3.4. Arrodoniu el resultat de l'operació següent (dades en m):
3000,21 + 3103 + 122,8 +13 + 1234,5 + 133 + 55,6
Sol.: 7662 m

P.3.5. Arrodoniu el resultat de l'operació següent (dades en J):
37,25 + 4,7 + 46, 75 + 98, 5 + 64,76
Sol.: 252 J

P.3.6. Arrodoniu el resultat de multiplicar dues distàncies: 3,4 i 115 (en m).
Sol.: 390 m^2 amb dues xifres significatives.

P.3.7. Arrodoniu el resultat de dividir dos temps: 12,4 entre 3,5 (en s).
Sol.: 3,5 (adimensional)

P.3.8. Arrodoniu el resultat de cos 30°20'. Sol.: 0,8631

P.3.9. Arrodoniu el resultat de log 10,4. Sol.: 1,02

P.4. Mesura i error

Definicions

T.4.1. **Error**. Tota mesura té associada una incertesa, una certa manca de precisió anomenada error. L'error es pot expressar amb una quota d'error absolut o amb una quota d'error relatiu.

T.4.2. **Quota d'error absolut**. Dóna el marge d'incertesa en el resultat obtingut. S'expressa en les mateixes unitats i xifres significatives que la mesura. Ex: 1,5 ± 0,2 s. En aquest exemple 0,2 és la quota d'error absolut, ε_A.

T.4.3. **Quota d'error relatiu**. És el quocient entre la quota d'error relatiu i la quantitat mesurada. És adimensional. També és pot expressar en %.
Ex: seguint amb l'exemple de la quota d'error absolut:

$$e_r = \frac{0{,}2}{1{,}6} = 0{,}125 \qquad 1{,}25\%$$

E.4.1. Calculeu l'error relatiu si l'error absolut d'una mesura de 10,4 s és de 0,1 s.

Solució

$$e_r = \frac{0{,}1}{10{,}4} = 0{,}0096 \qquad aprox. 1\ \%$$

Tornem-hi…

P.4.1. Si la mesura feta és de 12 V, amb una quota d'error absolut de 2 V, calculeu la quota d'error relatiu.
Sol.: 0,25 2,5%

P.4.2. Si la mesura feta és de 50 mA, amb una quota d'error absolut de 4 mA, calculeu la quota d'error relatiu.
Sol.: 0,08 8%

P.4.3. Si la mesura feta és de 35 ms, amb una quota d'error absolut de 7 ms, calculeu la quota d'error relatiu.
Sol.: 0,2 20%

P.4.4. Si la mesura feta és de 1000 mm, amb una quota d'error absolut d'1 mm, calculeu la quota d'error relatiu.
Sol.: 0,001 0,1%

P.4.5. Si la mesura feta és de 12,4 cd, amb una quota d'error absolut de 12,4 cd, calculeu la quota d'error relatiu.
Sol.: 0,29 29%

P.4.6. Sobre el mateix total, què preferiu: guanyar 1 euro de cada 10 o 2 de cada 25?
Sol.: millor 1 sobre 10, ja que $\frac{1}{10} > \frac{2}{25}$

P.5. Tractament estadístic

T.5.1. **Mitjana aritmètica**. Quan es tenen diverses mesures d'una magnitud, cal fer un tractament estadístic dels resultats. La mitjana aritmètica dóna el valor característic del conjunt de mesures.

$$m = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{N}$$

on m_i és el valor d'una mesura en particular, m la mitjana de les mesures i N el nombre total de mesures.

T.5.2. **Desviació estàndard**. Quan es tenen diverses mesures es pot fer un tractament estadístic de l'error. El paràmetre utilitzat és la desviació estàndard, s. S'expressa en les mateixes unitats i xifres significatives que la magnitud associada. Per calcular la desviació estàndard, l'equació utilitzada és:

$$s = \sqrt{\frac{(m_1 - m)^2 + (m_2 - m)^2 + ... + (m_N - m)^2}{N - 1}}$$

E.5.1. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de longituds en cm:
2,1 2,3 2,4 2,5 2,5 2,7

Solució

Primer es calcula la mitjana aritmètica

$$m = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{N} = \frac{2{,}1 + 2{,}3 + 2{,}4 + 2{,}5 + 2{,}5 + 2{,}7}{5} = 2{,}4167 \text{ cm}$$

Aquest valor s'hauria d'arrodonir a 2,4 cm.

A continuació s'ha de calcular la desviació estàndard:

$$s = \sqrt{\frac{(m_1 - m)^2 + (m_2 - m)^2 + ... + (m_N - m)^2}{N - 1}}$$

Substituint els valors

$$s = = \sqrt{\frac{(2{,}1 - 2{,}4)^2 + (2{,}3 - 2{,}4)^2 + (2{,}4 - 2{,}4)^2 + (2{,}5 - 2{,}4)^2 + (2{,}5 - 2{,}4)^2 + (2{,}7 - 2{,}4)^2}{6 - 1}}$$

Fent el càlcul i arrodonint:

$$s = 0{,}2\ cm$$

Tornem-hi…

En aquest conjunt de problemes, l'arrodoniment no és complet per comprovar millor la validesa del càlcul.

P.5.1. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de temps en ms: 10, 11, 10, 12, 9, 13, 10, 8.
Sol.: 10,375 ms 1,598 ms

P.5.2. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de tensions elèctriques en V: 3,4 3,5 3,6 3,3 3,6 3,4 3,7.
Sol.: 3,5 V 0,14 V

P.5.3. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures d'intensitat lluminosa en cd: 46,4 46,4 46,6 46,5 46,5.
Sol.: 46,48 cd 0,0837 cd

P.5.4. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de quantitat de substància en mols: 10,52 10,53 10,54 10,52 10,52 10,52 10,52 10,51 10,51 10,50 10,53.
Sol.: 10,52 mols 0,0109 mols

P.5.5. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de capacitat d'un condensador en mF: 7,3 7,5 7,7 7,6 7,9 7,8.
Sol.: 7,633 mF 0,216 mF

P.5.6. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de temps en ms: 312, 314, 317, 311, 316, 318, 309, 310, 318, 313, 310, 315.
Sol.: 313,58 ms 3,23 ms

P.5.7. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de intensitat de corrent en mA: 750, 749, 732, 764, 742, 738, 756, 749, 739, 738, 751, 747.
Sol.: 746,25 mA 8,9 mA

P.5.8. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de longitud en mm: 78, 77, 79, 76, 75, 77, 72, 80, 68, 74.
Sol.: 75,6 mm 3,57 mm

P.5.9. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures d'energia en kJ: 24, 23, 26, 22, 21, 28, 26, 29, 24, 26.
Sol.: 24,9 kJ 2,558 kJ

P.5.10. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de temps en s: 84,12 84,11 84,18 84,15 84,13 84,17 84, 16 84,12 84,18 84,20.
Sol.: 84,15 s 0,03 s

P.5.11. Calculeu la mitjana aritmètica i la desviació estàndard del següent conjunt de mesures de pressió en hPa: 94, 95, 98, 93, 96, 94, 90, 89, 98, 93, 91.
Sol.: 93,72 hPa 2,96 hPa

ÀLGEBRA VECTORIAL

Índex

P.1. Vectors

Definicions

T.1.1. ***Magnituds vectorials***. Moltes magnituds físiques no es poden caracteritzar només amb un nombre i unes unitats, sinó que cal indicar una direcció i un sentit. En són exemples la força, la velocitat o l'acceleració. Es diferencien d'altres, anomenades escalars, les quals no tenen una direcció i un sentit associats.

T.1.2. ***Vector***. És la representació d'una magnitud vectorial. Es caracteritza per tenir mòdul (quantitat), direcció i sentit.

El vector representat, a més del valor numèric amb les unitats correponents, té una direcció (traç discontinu) i un sentit determinat en aquesta direcció (donat per la fletxa).

T.1.3. ***Components d'un vector***. Són les seves projeccions sobre uns eixos de coordenades determinats. Un exemple en coordendes cartesianes és:

$$\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

on 3, -2 i 4 són les projeccions en els eixos *x*, *y*, y *z* respectivament.

T.1.4. ***Mòdul d'un vector***. És el nombre associat al vector. Es pot calcular a partir de les components d'un vector. Prenent com a exemple el vector $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, el seu mòdul és:

$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

Aquest fet permet expressar un vector amb un mòdul i un angle. Per exemple, en dues dimensions es pot escriure que:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

on A_x i A_y són les components escalars del vector $\vec{A}$. Per trobar l'angle que forma el vector $\vec{A}$ respecte a un dels eixos de coordenades cal prosseguir de la manera següent (on ? és l'angle que forma el vector $\vec{A}$ respecte a l'eix de les abscisses):

$$tgq = \frac{A_y}{A_x}, \quad \text{per tant,} \quad q = arctg\frac{A_y}{A_x}$$

E.1.1. Calculeu el mòdul del vector velocitat $\vec{A} = (2\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k})\ m/s$

Solució

$$A = \sqrt{2^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{93}\ \text{m/s}$$

E.1.2. Les components escalars d'un vector $\vec{A}$ són, respectivament, A_x = 3 i A_y = 4. Trobeu el mòdul del vector $\vec{A}$ i l'angle que forma respecte a l'eix de les abscisses.

Solució

El vector $\vec{A}$ es pot expressar com a $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$. Aplicant la definició de mòdul d'un vector s'obté:

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Si ? és l'angle format pel vector respecte a l'eix positiu de les abscisses, per tant:

$$tgq = \frac{A_y}{A_x} = \frac{3}{4}, \quad \text{per tant,} \quad q = arctg 0.75 = 36^\circ 52'$$

Tornem-hi…

P.1.1. Calculeu el mòdul del vector $\vec{A}=(6\bar{i}+2\vec{j}-6\vec{k})$.
Sol.: $A=\sqrt{74}$

P.1.2. Calculeu el mòdul del vector força $\vec{A}=(-2\bar{i}+3\vec{j}-\vec{k})\ N$.
Sol.: $A=\sqrt{14}\ N$

P.1.3. Calculeu el mòdul del vector $\vec{A}=(\bar{i}+2\vec{j}-9\vec{k})$.
Sol.: $A=\sqrt{86}$

P.1.4. Calculeu el mòdul del vector acceleració $\vec{A}=(8\bar{i}-2\vec{j}-5\vec{k})\ m/s^2$.
Sol.: $A=\sqrt{93}\ m/s^2$

P.1.5. Un objecte està situat respecte d'un sistema d'eixos coordenats en la posició x = 4 m, y = 4 m. Expresseu el vector posició en coordenades polars (mòdul i angle).
Sol.: mòdul = $\sqrt{32}$ m, angle = 45º.

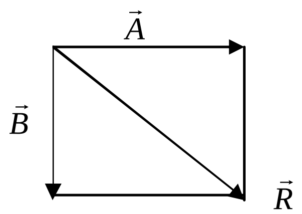
P.1.6. Expresseu en les seves components cartesianes un vector de mòdul 10 que forma un angle de 30º amb el semieix *ox* positiu.
Sol.: A_x = 8,66, A_y = 5

P.1.7. Donades les components escalars d'un vector A_x = 3, i A_y = 2, calculeu el mòdul del vector i l'angle que forma respecte a l'eix de l'ordenada.
Sol.: $A=\sqrt{13}$, ? = 56º19'

P.2. Suma i resta de vectors

Definicions

T.2.1. ***Vector resultant***. Els vectors es poden sumar i restar. El vector solució s'anomena vector resultant.



on $\vec{R}$ és el vector resultant de la suma vectorial dels vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, és a dir:

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$$

El mòdul del vector resultant $\vec{R}$ es pot amb els mòduls dels altres vectors:

$$R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

T.2.2. ***Suma i resta de vectors***. Per sumar i/o restar diversos vectors cal sumar i/o restar els seus components.

E.2.1. Calculeu la suma i la resta dels vectors acceleració $\vec{A}=(\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})\ m/s^2$ i $\vec{B}=(2\vec{i}-8\vec{j}+3\vec{k})\ m/s^2$

Solució

La suma dels vectors és:

$$\vec{A}+\vec{B}=\left((1+2)\ \vec{i}\ +(3-8)\ \vec{j}\ +(-6+3)\ \vec{k}\right)=(3\,\vec{i}\ -5\ \vec{j}\ -3\ \vec{k})\ \ \mathrm{m/s^2}$$

I la resta:

$$\vec{A}-\vec{B}=\left((1-2)\ \vec{i}\ +(3-(-8))\ \vec{j}\ +(-6-3)\ \vec{k}\right)=(-1\,\vec{i}\ +11\ \vec{j}\ -9\ \vec{k})\ \ \mathrm{m/s^2}$$

Tornem-hi…

P.2.1. Sumeu els vectors $\vec{A}=+2\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}$ i $\vec{B}=-2\vec{i}-7\vec{j}-8\vec{k}$
Sol.: $-4\vec{j}$

P.2.2. Resteu els vectors: $\vec{A}=+7\vec{i}+2\vec{k}$ i $\vec{B}=+7\vec{j}+2\vec{k}$
Sol.: $7\vec{i}-7\vec{j}$

P.2.3. Quin vector cal restar a $\vec{A}=+6\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ per obtenir un resultat de $\vec{R}=+\vec{j}-3\vec{k}$
Sol.: $+\vec{j}-3\vec{k}$

P.2.4. Quin és el vector resultant de la següent operació: $\vec{R}=3\ \vec{A}-7\ \vec{B}+2\ \vec{C}$, si:
$\vec{A}=-2\ \vec{i}\ -3\ \vec{j}\ +2\ \vec{k}$, $\vec{B}=3\ \vec{i}\ -4\ \vec{j}\ +5\ \vec{k}$ i $\vec{C}=9\ \vec{i}\ -3\ \vec{j}\ -2.5\ \vec{k}$
Sol.: $\vec{R}=-9\ \vec{i}\ +13\ \vec{j}\ -34\ \vec{k}$

P.2.5. Donats els vectors $\vec{A}=6\vec{i}+7\vec{j}-11\vec{k}$ i $\vec{B}=6\vec{i}-3\vec{j}+12\vec{k}$, trobeu els vectors $\vec{A}+\vec{B}$ i $\vec{A}-\vec{B}$.
Sol.: $\vec{A}+\vec{B}=12\vec{i}+4\vec{j}+1\vec{k}$ $\vec{A}-\vec{B}=0\ \vec{i}\ +10\vec{j}-23\vec{k}$

P.3. Producte d'un escalar per un vector

Definicions

T.3.1. ***Producte d'un escalar per un vector***. El resultat és un vector en què els components queden multiplicats per l'escalar: si l'escalar és n i el vector $\vec{A}$, el mòdul del vector resultant és n vegades el de $\vec{A}$.

E.3.1. Un vehicle té una velocitat $\vec{A}=(5\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})\ m/s$. Si l'avança un vehicle que va al doble de velocitat en la mateixa direcció però en sentit oposat, calculeu: (*a*) el vector velocitat del segon vehicle, (*b*) el mòdul de la velocitat del segon vehicle.

Solució

Si va al doble de velocitat en la mateixa direcció i en sentit oposat, l'escalar corresponent és -2. Aleshores, el vector resultant és -2 $\vec{A}$.

$$\vec{B}=-2\vec{A}=\left(-2\cdot(5)\ \vec{i}\ +(-2\cdot(3))\ \vec{j}\ +(-2\cdot(-6))\ \vec{k}\right)=(-10\ \vec{i}\ -6\ \vec{j}\ +12\ \vec{k})\ \text{ m/s}$$

I el mòdul del nou vector és:

$$B=\sqrt{(-10)^2+(-6)^2+(12)^2}=\sqrt{280}\ m/s$$

Tornem-hi…

P.3.1. Calculeu el producte del vector $\vec{A}=7\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ per l'escalar 3.
Sol.: $21\vec{i}+9\vec{j}-18\vec{k}$

P.3.2. Calculeu el producte del vector $\vec{A}=8\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ per la quantitat escalar -0,5.
Sol.: $-2\vec{i}-1{,}5\vec{j}-2\vec{k}$

P.3.3. Calculeu el producte del vector $\vec{A}=2\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$ per l'escalar 10.
Sol.: $20\vec{i}-40\vec{j}-50\vec{k}$

P.3.4. Calculeu el vector de mateix mòdul i direcció que el vector $\vec{A}=4\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$, però de sentit oposat.
Sol.: $-4\vec{i}-2\vec{j}-8\vec{k}$

P.3.5. Si un vehicle va a una velocitat $\vec{A} = (4\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k})\ km/h$ i el voleu avançar anant en un vehicle en la mateixa direcció i el mateix sentit al doble de velocitat, quin vector expressa la velocitat del vostre vehicle?

Sol.: $\vec{A} = (8\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k})\ km/h$

P.4. Vector unitari

Definicions

T.4.1. ***Vector unitari***. És un vector de mòdul unitat.

T.4.2. ***Vector unitari d'un vector donat***. És un vector de mòdul unitat, i amb la direcció i el sentit del vector donat. Cal remarcar que en expressar els vectors en components, per exemple en els eixos ortogonals *x y z*, ja hem emprat tres vectors unitaris: el vector unitari $\vec{i}$ en l'eix de la *x*, el vector unitari $\vec{j}$ en l'eix de la *y* i el vector unitari $\vec{k}$ en l'eix de la *z*. Per tant, qualsevol vector es pot escriure com a producte del mòdul pel seu vector unitari:

$$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{u}_{\vec{A}} \qquad \text{i} \qquad \vec{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

E.4.1. Donat el vector $\vec{A} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$, determineu-ne el vector unitari.

Solució

Utilitzant la definició de vector unitari d'un vector determinat, $\vec{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$, el mòdul del vector $\vec{A}$ és: $|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + (-7)^2} = \sqrt{117}$

per tant, el vector unitari és:

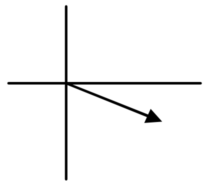
$$\vec{u}_A = -\frac{2}{\sqrt{117}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{117}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{117}}\vec{k}$$

Cal remarcar que el vector $\vec{u}_{\vec{A}}$ té la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector $\vec{A}$, però el seu mòdul és la unitat.

Tornem-hi…

P.4.1. Dibuixeu el vector $\vec{A} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$. Trobeu-ne el vector unitari.

Sol.: $\vec{u}_{\vec{A}} = \dfrac{6}{\sqrt{52}}\vec{i} - \dfrac{4}{\sqrt{52}}\vec{j}$



P.4.2. Expresseu el vector $\vec{A} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$ en funció del seu vector unitari.

Sol.: $\vec{A} = \sqrt{29}\left[\dfrac{3}{\sqrt{29}}\,\vec{i} - \dfrac{4}{\sqrt{29}}\,\vec{j} - \dfrac{2}{\sqrt{29}}\,\vec{k}\right]$

P.4.3. Trobeu un vector de mòdul 1 en la direcció del vector $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Sol.: $\vec{u}_{\vec{A}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{14}}\vec{j} + \dfrac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

P.4.4. Expresseu el vector $\vec{A}=2\vec{i}+7\vec{j}-2\vec{k}$ en funció del seu vector unitari.

Sol.: $\vec{A}=\sqrt{57}\left[\dfrac{2}{\sqrt{57}}\vec{i}+\dfrac{7}{\sqrt{57}}\vec{j}-\dfrac{2}{\sqrt{57}}\vec{k}\right]$

P.4.5. Expresseu el vector $\vec{A}=6\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$ en funció del seu vector unitari.

Sol.: $\vec{A}=\sqrt{46}\left[\dfrac{6}{\sqrt{46}}\vec{i}-\dfrac{1}{\sqrt{46}}\vec{j}-\dfrac{3}{\sqrt{46}}\vec{k}\right]$

P.5. Producte escalar

Definicions

T.5.1. ***Producte escalar***. El resultat de l'operació del producte escalar de dos vectors és un escalar, i es calcula fent el producte dels mòduls dels vectors i multiplicant-los pel cosinus de l'angle que formen. Si $\vec{A}$ i $\vec{B}$ són dos vectors que formen un angle ?, aleshores el producte escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ té l'expressió següent:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot \cos q$$

T.5.2. ***Propietats del producte escalar***. Les principals propietats del producte escalar són:

Propietat commutativa: $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$. En particular, si dos vectors són perpendiculars, el seu producte escalar és igual a zero, ja que cos 90º = 0; per tant, els productes dels vectors unitaris associats als eixos de coordenades següents és:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$$

El producte escalar d'un vector per ell mateix és igual al seu mòdul al quadrat, ja que cos 0º =1; per tant:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

E.5.1. (*a*) Calculeu el producte escalar dels vectors $\vec{A}=(\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})$ i $\vec{B}=(2\vec{i}-8\vec{j}+3\vec{k})$ (*b*) trobeu l'angle que formen entre si.

Solució:

(a) Primer cal fer el producte escalar:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 1\cdot 2 + (3\cdot(-8)) + ((-6)\cdot 3) = 2 - 24 - 18 = -40$$

(b) L'angle es calcula aplicant la definició del producte escalar de dos vectors,

$$\cos q = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A\cdot B} = \frac{-40}{\sqrt{46}\cdot\sqrt{104}} = 0{,}579$$, per tant, $q = \arccos 0{,}579 = 54^\circ 37'$

Tornem-hi…

P.5.1. Donats els vectors $\vec{A} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, i $\vec{B} = 5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$, calculeu-ne el producte escalar.
Sol.: 21

P.5.2. Donats els vectors $\vec{A} = -6\,\vec{i} + \vec{j} + 8\,\vec{k}$, i $\vec{B} = 5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 3\vec{k}$, calculeu el producte escalar $\vec{R}=\vec{A}\cdot\vec{B}$ i el producte escalar $\vec{R}=\vec{B}\cdot\vec{A}$.
Sol.: -50, -50

P.5.3. Donats els vectors $\vec{A}=+3\vec{i}+4\vec{j}+-5\vec{k}$, i $\vec{B}=4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$, calculeu-ne el producte escalar.
Sol.: 5

P.5.4. Donats els vectors $\vec{A}=-\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}$, i $\vec{B}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, calculeu-ne el producte escalar.
Sol.: 0.

P.5.5. Donats els vectors $\vec{A} = -2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$, i $\vec{B} = -2\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 3\vec{k}$, calculeu l'angle que formen entre ells.
Sol.: 128º 40'

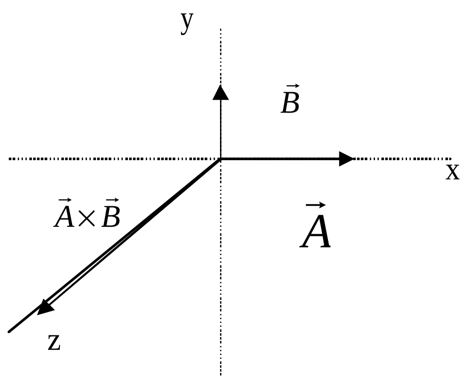
P6. Producte vectorial

Definicions

T.6.1. ***Producte vectorial***. El resultat de l'operació del producte vectorial de dos vectors és un vector, i el seu mòdul es calcula fent el producte dels mòduls dels vectors implicats i multiplicant-los pel sinus de l'angle que formen. Si $\vec{A}$ i $\vec{B}$ són dos vectors que formen un angle ?, el producte vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ té l'expressió següent:

$$\vec{A}\times\vec{B} = A\cdot B\cdot \sin q$$

La direcció del vector resultant de l'operació del producte vectorial entre $\vec{A}$ i $\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{B}$ és perpendicular al pla determinat per $\vec{A}$ i $\vec{B}$. El sentit el determina la regla de la mà dreta, anàloga a la del tornavís, essent el sentit de gir de $\vec{A}$ cap a $\vec{B}$ per l'angle més petit. La figura següent n'és un exemple:



T.6.2. ***Propietats del producte vectorial***. Les principals propietats del producte escalar són:

Propietat anticommutativa: $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$.

El producte vectorial d'un vector per ell mateix és zero en ser *sin 0º* = 0. En conseqüència:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$

Mòdul del producte vectorial de dos vectors: és l'àrea del paral·lelogram que determinen aquests vectors.

E.6.1. Calculeu: (*a*) el producte vectorial dels vectors $\vec{A}=(2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k})$ i $\vec{B}=(-2\vec{i}+4\vec{j}+9\vec{k})$ i (*b*) l'àrea del paral·lelogram determinat per aquests vectors.

Solució

(a) Primer cal fer el producte vectorial

Com a conseqüència de la definició de producte vectorial: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, etc. Per tant, el producte $\vec{A}\times\vec{B}$ en les seves components coincideix amb el desenvolupament d'un determinant format de la manera següent: a la primera fila s'hi posen els vectors unitaris associats als eixos de coordenades $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; a la segona fila, les components del primer vector A_x, A_y i A_z,, i a la tercera fila les components del segon vector B_x, B_y i B_z..

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=((A_y\cdot B_z)-(A_z\cdot B_y))\,\vec{i}-((A_x\cdot B_z)-(A_z\cdot B_x))\vec{j}+((A_x\cdot B_y)-(A_y\cdot B_x))\vec{k}$$

En aquest cas concret:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -3\\ -2 & 4 & 9\end{vmatrix}=((4\cdot9)-((-3)\cdot4))\,\vec{i}-(2\cdot9)-((-3)\cdot(-2)))\,\vec{j}+((2\cdot4)-(4\cdot(-2)))\,\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=48\,\vec{i}-12\vec{j}+16\,\vec{k}$$

(b) Per trobar l'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ cal buscar el mòdul del seu producte vectorial.

El mòdul de $\vec{A}\times\vec{B}$ és $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{48^2+(-12)^2+16^2}=\sqrt{2304}$; per tant, l'àrea del paral·lelogram val $\sqrt{2304}$.

Tornem-hi…

P.6.1. Donats els vectors $\vec{A}=7\,\vec{i}-2\,\vec{j}+4\,\vec{k}$, i $\vec{B}=2\vec{i}-3\vec{j}$, calculeu-ne el producte vectorial.
Sol.: $6\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

P.6.2. Donats els vectors $\vec{A}=3\vec{j}+\vec{k}$, i $\vec{B}=2\,\vec{i}+5\,\vec{j}-4\vec{k}$, calculeu-ne el producte vectorial.
Sol.: $-12\,\vec{i}+36\,\vec{j}+39\,\vec{k}$

P.6.3. Donats els vectors $\vec{A}=2\bar{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, i $\vec{B}=7\bar{i}-9\vec{j}-6\vec{k}$, calculeu-ne el producte vectorial.
Sol.: $-36\bar{i}-2\vec{j}-39\vec{k}$

P.6.4. Donats els vectors $\vec{A}=3\,\bar{i}-8\,\vec{j}+\vec{k}$, i $\vec{B}=-2\,\bar{i}+6\,\vec{j}-3\vec{k}$, calculeu el producte vectorial $\vec{R}=\vec{A}\times\vec{B}$ i el producte vectorial $\vec{R}=\vec{B}\times\vec{A}$.
Sol.: $18\,\bar{i}+7\,\vec{j}+2\,\vec{k}$, $-18\,\bar{i}-7\,\vec{j}-2\,\vec{k}$

P.6.5. Donats els vectors $\vec{A}=-3\,\bar{i}+2\,\vec{j}+\vec{k}$, i $\vec{B}=-2\,\bar{i}+4\,\vec{j}-4\,\vec{k}$, calculeu l'àrea del paral·lelogram que determinen.
Sol.: 20.

MOVIMENT DE CAIGUDA LLIURE. MOVIMENT CIRCULAR

Índex

P1. Moviment de caiguda lliure

Definicions

T.1.1. ***Conceptes bàsics***. En el moviment rectilini de caiguda lliure, la partícula descriu una trajectòria rectilínia en què el vector velocitat és variable en el temps i el vector acceleració és el de la gravetat. Aquest manté el mòdul, la direcció i el sentit invariables en el temps. Anem a veure les equacions de la posició i de la velocitat en funció del temps per a aquest tipus de moviment. Recordeu-vos que es treballa en una dimensió i, per tant, no és imprescindible la notació vectorial.

$$y = y_0 \pm v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

On *y* és la posició de la partícula en l'instant de temps *t*, y_0 és la posició de la partícula en l'instant de temps $t = 0$, v_{0y} és la velocitat d'aquesta en l'instant de temps $t = 0$, i $g = 9{,}81 \, m/s$ és l'acceleració en l'eix *Y*.

La velocitat en l'eix *Y* correspon a la d'un moviment uniformement variat:

$$v_y = \pm v_{0y} - gt \qquad (2)$$

D'aquí $\vec{v} = (0, v_y) = (0, v_{0y} - gt)$

On $\vec{v}$ és la velocitat de la partícula en l'instant de temps *t*.

Cal dir que l'acceleració de la gravetat és negativa, atès que la força de la gravetat que l'origina té el sentit de les *Y* negatives.

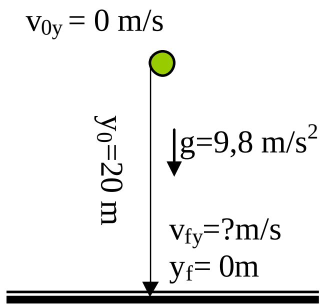
Exercicis

E.1.1. Newton va deixar caure una poma des d'una torre de 20 m. Trobeu la velocitat quan arriba a terra (velocitat d'impacte de la poma amb el terra)

Solució

La poma descriu un moviment de caiguda lliure en l'eix de l'ordenada, l'eix *Y*; per tant, serà un moviment rectilini uniformement accelerat, amb acceleració constant igual a la de la gravetat.

El primer pas que hem de fer és representar el moviment sobre un dibuix i escriure les dades de l'enunciat amb les unitats del sistema internacional.



Per poder calcular la velocitat d'impacte, necessitem saber el temps que triga per arribar a terra.

Hem d'emprar l'equació en què tenim més informació per calcular el temps.

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

En el nostre cas:

$$0 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2$$

Per tant:

$-20 = -4.9 \cdot t^2$ **,** és a dir, $20 = 4.9 \cdot t^2$; i d'aquí deduïm que :

$$t^2 = \frac{20}{4.9} = 4.1, \Rightarrow \boldsymbol{t = 2s,}$$

que és el temps que triga la poma per arribar al terra.

Utilitzant, ara, l'equació de la velocitat del moviment uniformement variat, s'obté:

$v_y = v_{0y} - gt$; per tant**:**

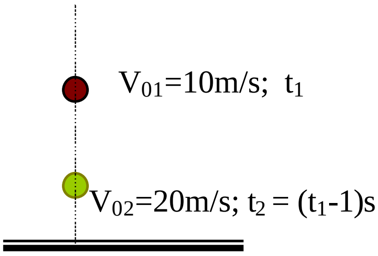
$$v_y = 9.8 \cdot 2 = 19.6 \frac{m}{s}$$

$\boxed{19{,}6\ \text{m/s}}$

> E.1.2. Es llença des del terra una pilota amb una velocitat inicial de 10 m/s. Un segon després es llença des del mateix punt una altra pilota amb una velocitat de 20 m/s. Indiqueu si es troben les dues pilotes, i en cas afirmatiu, en quin lloc i en quin temps.

Solució

Primer farem el dibuix que representi el moviment dels dos objectes de manera aproximada. Hi posarem tota la informació de l'enunciat amb les unitats del sistema internacional (SI).



No sabem si es troben quan els dos objectes pugen o bé en una altra situació, però el que és clar és que en el moment de trobar-se tots dos objectes tenen la mateixa posició: $y_1 = y_2$; aleshores:

$$y_{01} + v_{01}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = y_{02} + v_{02}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

Substituint les dades de l'enunciat a l'equació anterior, ens queda:

$$10t_1 - \frac{1}{2}9{,}8t_1^2 = 20t - \frac{1}{2}9{,}8(t_1 - 1)^2$$

On t_1 = 1,26 s. Ara podem calcular el lloc on es troben substituint el temps que hem trobat en qualsevol de les equacions anteriors de posició temps:

$$y = 10t_1 - \frac{1}{2}9{,}8t_1^2 = 10 \cdot 1{,}26 - \frac{1}{2}9{,}8 \cdot 1{,}26^2 = 4{,}82\text{m}$$

Si volem saber en quina situació es troben, hem d'emprar l'equació velocitat temps.

$$v_1 = 10 - 9{,}8 \cdot 1{,}26 = -2{,}35\text{m/s}$$

$$v_2 = 20 - 9{,}8 \cdot (1{,}26 - 1) = 17{,}45\text{m/s}$$

Fixeu-vos que el mòbil 1 té una velocitat negativa: vol dir que està baixant. En canvi, el mòbil 2 té la velocitat positiva: això representa que està pujant.

$\boxed{\text{Si es troben; 4,82 m, } t_1\text{=1,26 s}}$

Tornem-hi…

P.1.1. Es deixa caure un objecte des d'una altura de 100 m. Calculeu la velocitat d'impacte i el temps que triga per arribar a terra. Dades: g = 9,81 m/s^2. Sol.: 44,27 m/s; 4,52 s.

P.1.2. Es llança verticalment cap avall un objecte amb una velocitat de 10 m/s des d'una altura de 100 m. Calculeu la velocitat d'impacte i el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 45,38 m/s; 3,81 s.

P.1.3. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 10 m/s i des d'una altura de 100 m. Calculeu la velocitat d'impacte i el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 45,37 m/s; 5,85 s.

P.1.4. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 20 m/s i des d'una altura de 100 m. Calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) la velocitat d'impacte; (c) el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 120,46 m; 48,5 m/s; 6,99 s.

P.1.5. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 20 m/s i des d'una altura de 200 m. Calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) la velocitat d'impacte; (c) el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 220,46 m; 65,28 m/s; 8,74 s.

P.1.6. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 15 m/s i des d'una altura de 150 m. Calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) la velocitat d'impacte, (c) el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 161,47 m; 56,26 m/s; 7,27 s.

P.1.7. Un objecte es llança des de terra amb una velocitat de 20 m/s, calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) el temps total que triga per arribar de nou a terra; (c) la velocitat d'impacte. Sol.: 20,4 m; 4,08 s; 20 m/s.

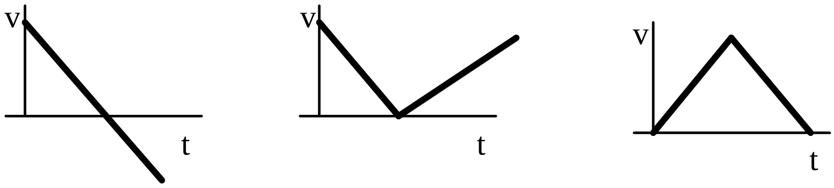
P.1.8. Un objecte es llança des de terra amb una velocitat de 40 m/s, calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) el temps total que triga per arribar de nou a terra; (c) la velocitat d'impacte. Sol.: 81,63 m; 40 m/s; 8,16 s.

P.1.9. Un objecte es llança cap amunt amb una velocitat inicial 10 m/s des d'una altura de 50 m. Determineu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) el temps total que triga per arribar a terra; (c) la velocitat d'impacte. Sol.: 55,10 m; 4,37 s; 32,86 m/s.

P.1.10. Un objecte es llança cap avall amb una velocitat inicial 15 m/s des d'una altura de 100 m. Determineu: (a) el temps total que triga per arribar a terra, (b) la velocitat d'impacte. Sol.: 3,24 s; 46,74 m/s.

P.1.11. Una pilota que es llança verticalment cap amunt tarda 4 s a tornar a terra. Determineu: (a) quina va ser la velocitat de llançament; (b) quina altura va aconseguir la pilota. Sol.: 19,6 m/s, 19,6 m

P.1.12. Quin gràfic representa la velocitat d'una pedra que es llança verticalment cap amunt en l'instant t = 0 i cau de nou? Quin valor ha de tenir el pendent en cada tram? Sol.: la del mig; l'acceleració de la gravetat.



P.1.13. Es dispara un projectil verticalment amb una velocitat de 100 m/s. Mig segon més tard, amb la mateixa arma, es dispara un segon projectil en la mateixa direcció. Determineu: (a) la posició on es troben els dos mòbils; (b) la velocitat de cada un en trobar-se. Sol.: 510 m i (-2,41 m/s ; 2,49 m/s).

P.1.14. Es llança des del terra una pilota amb una velocitat inicial de 20 m/s. Un segon després es llança des del mateix punt una altra pilota amb una velocitat de 30 m/s. Indiqueu si es troben les dues pilotes, i en cas afirmatiu, en quin lloc i en quin temps. Sol.: 20 m; 1,76 s.

P.1.15. Un paracaigudista salta amb una velocitat vertical cap avall de 10 m/s, baixa 50 m sense fricció de l'aire. Obre el paracaigudes en aquest punt i l'aire el frena amb una acceleració de 2 m/s^2, baixa verticalment i arriba al terra amb una velocitat de 3 m/s. Determineu l'altura en què es trobava el paracaigudista i el temps que va estar en l'aire. Sol.: 317,75 m; 17,26 s.

P.2. Composició de moviments. Tir parabòlic

Definicions

T.2.1. **Conceptes bàsics**. L'estudi del moviment d'un projectil en un llançament oblic es fa component dos moviments rectilinis en uns eixos de coordenades *xy*. L'un és uniforme en l'eix de les abscisses, i l'altre uniformement variat en l'eix de les ordenades. S'ha de tenir en compte que l'única força que actua sobre el cos és el pes; per tant, en tot moment l'acceleració d'aquest cos és la de la gravetat: $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$. Per desenvolupar un problema d'aquestes característiques, el que s'ha de fer primer és expressar el vector velocitat inicial en les seves components:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cdot \cos\varphi\,\vec{i} + v_0 \cdot \sin\varphi\,\vec{j} = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j} \qquad (3)$$

Aleshores, les equacions del moviment són:

$$x = x_0 + v_{0x}t \qquad (4)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (5)$$

La velocitat del projectil en qualsevol instant es trobarà de la manera següent:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = v_{0x}\vec{i} + \left(\pm v_{0y} - gt\right)\vec{j} \qquad (6)$$

on: $v_x = v_{0x}$ i, $v_y = \pm v_{0y} - gt$

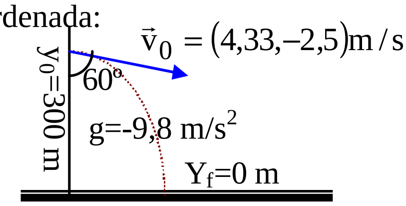
Exercicis

> E.2.1. En Newton tira una poma cap avall des d’una torre de 300 m d’alçària respecte al terra, que forma un angle de 60º amb la vertical. Si la velocitat inicial és de 5 m/s, trobeu el temps que triga per arribar a terra i la velocitat d’impacte.

Solució

Per poder respondre a les qüestions de l’enunciat haurem de fer el dibuix col·locant tota la informació de l’enunciat amb les unitats adients indicades pel sistema internacional (SI).

Si escrivim l’equació de moviment aplicada al nostre enunciat i considerem que el moviment uniformement variat es localitza en l’eix de l’ordenada:



$$y = y_0 \pm v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 .$$

on $v_{0y} = v_0 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 0.5 = 2.5\,\frac{m}{s}$

Aquesta component de la velocitat, d’acord amb el dibuix, és negativa. Quan la poma arriba a terra, $y = 0$. Amb aquestes dades resolem l’equació posició temps:

$0 = 300 - 2.5t - 4.9\,t^2$

i, per tant, $t = 7.6s$

Per calcular la velocitat en el moment d’arribar a terra emprem l’equació velocitat temps del tir parabòlic:

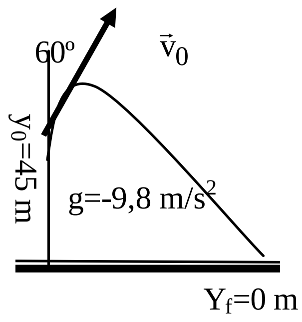
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = (v_{0x}, \left(v_{0y} - gt\right) = \left(4{,}33,\ -2{,}5 - 9{,}8 \cdot 7{,}6\right) = \left(4{,}33\ \ ,\ \ -76{,}98\ \ \right)m/s$$

$\boxed{\vec{v}_f = (4.33}$

> E.2.2. En Newton, molt juganer, tira ara la poma cap amunt des d’una torre de 45 m d’alçària respecte al terra, que forma un angle de 60º amb la vertical. Si la velocitat inicial és de 200 m/s, trobeu: (a) el temps que triga per arribar a terra i la velocitat d’impacte; (b) l’altura màxima; (c) la distància màxima sobre l’eix de les *X* (abast).

Solució

Per poder respondre a les qüestions de l'enunciat haurem de fer el dibuix col·locant tota la informació de l'enunciat amb les unitats adients indicades pel sistema internacional (SI).



a) Si escrivim l'equació de moviment aplicada al nostre enunciat, el moviment uniformement es localitza en l'eix de l'ordenada; per tant:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{0x} = 200 \cdot \sin 60^\circ = 173.2\,\frac{m}{s}$$

i, $v_{0y} = 200 \cdot \cos 60^\circ = 100\,\frac{m}{s}$

La component v_{0y} de la velocitat, d'acord amb el dibuix, és positiva.

Quan la poma arriba a terra, es compleix que y = 0. Amb aquestes dades resolem l'equació posició temps de l'eix Y:
$0 = 45 + 100t - 4.9\, t^2$

Com que és una equació de segon grau, obtenim dos resultats matemàtics:
t_1= 20.8 s; t_2=.-........s.

Triarem el valor que tingui significat físic.

Per calcular la velocitat en el moment d'arribar a terra, emprem l'equació velocitat temps del tir parabòlic:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = (v_{0x}, (v_{0y} - gt) = (173,2\ ,\ 100 - 9,8 \cdot 20,8) = (173,2\ \ ,\ \ - ....\ )m/s$$

b) Quan la poma assoleixi l'altura màxima, la coordenada y de la velocitat, v_y, valdrà zero; per tant, a partir de l'equació de la velocitat d'un moviment rectilini uniformement variat es pot calcular el temps que trigarà la poma a assolir l'altura màxima.

$$v_y = v_{0y} - gt \Rightarrow t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{100}{9.8} = 10.2s$$

Substituint aquest temps en l'equació de la posició de l'eix de l'ordenada, trobem l'altura màxima.

$$y = y_0 \pm v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

$$y_{màx} = 45 + 100 \cdot 10.2 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10.2)^2 = 555.2\text{m}$$

c) Substituint aquest temps en l’equació de la posició en l’eix de les abscisses, obtenim l’abast de la poma, és a dir, la distància respecte al peu de la torre.

$$x = x_0 + v_{0x} t = 173.2 \cdot 20.8 = 3607.8\text{m} \approx 3.6\text{km}$$

$$\boxed{3.607{,}8 \text{ m}}$$

Tornem-hi…

P.2.1. Un saltador de longitud arriba a una velocitat de 10 m/s en l’instant en què inicia el salt. Si la inclinació amb què el fa és de 25º respecte a l’horitzontal, determineu: (a) el temps total que es troba en l’aire; (b) la longitud mínima que ha de tenir el clot de sorra si comença el salt a 27 cm d’aquest clot. Sol.: 0,86 s i 7,55 m.

P.2.2. Des d’un campanar de 15 m d’alçària llancem obliquament un petard cap amunt amb una velocitat inicial de 30 m/s, que forma un angle de 60º amb l’horitzontal. Calculeu: (a) l’abast horitzontal; (b) la velocitat amb què el petard cau a terra, (c) l’altura màxima i la component *x* d’aquest punt (x, y_{max}). Sol.: 87,45 m, 34,57 m/s, 34,5 m, 39,75 m.

P.2.3. Llancem un cos obliquament cap amunt amb una velocitat de 40 m/s que forma un angle de 60º amb l’horitzontal. Calculeu: (a) l’abast horitzontal; (b) la velocitat 2 segons després d’haver-lo llançat; (c) l’altura màxima; (d) l’equació de la trajectòria. Sol.: 141,4 m, 25 m/s, 61,22 m, y=1’732x – 0,0122x^2.

P.2.4. Llancem un cos obliquament cap amunt amb una velocitat de 40 m/s que forma un angle de 30º amb l’horitzontal. Calculeu: (a) l’abast horitzontal; (b) la velocitat 1 segon després d’haver-lo llançat; (c) l’altura màxima; (d) l’equació de la trajectòria. Sol.: 70,66 m, 36,11 m/s, 20,41 m, y=0,577-0,00408x^2.

P.2.5. Llancem un cos obliquament cap amunt amb una velocitat de 40 m/s que forma un angle de 45º amb l’horitzontal. Calculeu: (a) l’abast horitzontal; (b) la velocitat 1 segon després d’haver-lo llançat; (c) l’altura màxima; (d) l’equació de la trajectòria. Sol.: 163,24 m, 33,78 m/s, 40,8 m, y = x -0,006127x^2.

P.2.6. Una avioneta vola horitzontalment a 108 km/h a una altura de 300 m i deixa anar un paquet que ha de caure al terrat d’un edifici de 50 m d’alçària. A quina distància del terra, mesurada horitzontalment, ha de deixar anar el paquet perquè caigui al terra de l’edifici? Sol.**:** 214,28 m.

P.2.7. Una avioneta vola horitzontalment a 108 km/h, a una altura de 300 m, i deixa anar un paquet que ha de caure al terrat d’un edifici de 80 m d’alçària. A quina distància del terra, mesurada horitzontalment, ha de deixar anar el paquet perquè caigui al terra de l’edifici? Sol.: 201 m.

P.2.8. Una avioneta vola horitzontalment a 144 km/h, a una altura de 400 m, i deixa anar un paquet que ha de caure al terrat d'un edifici de 50 m d'alçària. A quina distància del terra, mesurada horitzontalment, ha de deixar anar el paquet perquè caigui al terra de l'edifici? Sol.: 383,3 m.

P.2.9. Un futbolista xuta una pilota amb un angle de 37º i una velocitat de 14,4 m/s. Un segon futbolista, situat a 30 m del primer, comença a córrer cap a la pilota en el mateix moment en què el primer jugador xuta. Quina velocitat mínima ha de portar el segon jugador per arribar a la pilota abans que aquesta xoqui a terra? Sol.**:** 5,46 m/s.

P.2.10. Des d'un penya-segat de 20 m d'alçària, llancem obliquament cap amunt una pedra amb una velocitat de 20 m/s, que forma un angle amb l'horitzontal de 37º. A 10 m del penya-segat hi ha un obstacle i la pedra xoca amb la part de dalt d'aquest obstacle. Calculeu: (a) l'alçària que té l'obstacle; (b) la velocitat amb què la pedra xoca amb l'obstacle. Sol.**:** 25,62 m i 17,03 m/s.

P.2.11. Des d'un penya-segat de 40 m d'alçària, llancem obliquament cap amunt una pedra amb una velocitat de 20 m/s, que forma un angle amb l'horitzontal de 30º. A 10 m del penya-segat hi ha un obstacle i la pedra xoca amb la part de dalt d'aquest obstacle. Calculeu: (a) l'alçària que té l'obstacle; (b) la velocitat amb què la pedra xoca amb l'obstacle. Sol.: 14,13 m, 18,74 m/s.

P.2.12. Llancem un objecte des del terra amb una velocitat inicial de $\vec{v}_o = 20\vec{i} + 40\vec{j}$ m/s, i quan baixa, cau al terrat d'una casa de 35 m d'alçària. Calculeu el temps de volada de l'objecte, la distància a la qual es troba la casa i l'altura màxima a la qual arriba l'objecte. Sol.: 7,17 s; 143,33 m; 81,63 m.

P.2.13. Un noi vol menjar-se una poma situada a la part més alta d'un arbre. Per poder-ho fer, llança una pedra amb el tirador amb una velocitat de 30 m/s, la qual forma un angle α amb l'horitzontal, de manera que sin α = 0,8 i cos α = 0,6. Si l'arbre és a 80 m del noi i aquest llança la pedra des d'1 m del terra, determineu l'alçària de l'arbre i la velocitat de la pedra quan toca la poma. Sol.: 10.88 m i $\vec{v} = 18\vec{i} - 19{,}56\vec{j} m/s$.

P.2.14. Un helicòpter vola a 180 km/h, a una altura de 500 m, i veu venir un camió en sentit contrari. Calculeu a quina distància del camió ha de deixar anar un paquet per fer-lo caure dins la caixa del camió si aquest es mou amb una velocitat constant de 72 km/h. Sol.**:** 707,1 m.

P.2.15. Un helicòpter vola a 200 km/h a una altura de 1000 m i veu venir un camió en sentit contrari. Calculeu a quina distància del camió ha de deixar anar un paquet per fer-lo caure dins la caixa del camió si aquest es mou amb una velocitat constant de 72 km/h. Sol.**:** 707,1 m.

P.2.16. Un caça bombarder vola horitzontalment a 1500 m, amb una velocitat de 180 km/h, i veu venir un tanc en sentit contrari. Calculeu a quina distància del tanc ha de deixar anar un míssil per fer-lo caure sobre el tanc si aquest es mou amb una velocitat constant de 45 km/h. Sol.: 1093,56 m.

P3. Moviment circular uniforme

Definicions

T.3.1. **Conceptes bàsics**. La partícula que descriu un moviment circular uniforme té una velocitat angular constant, i per tant el mòdul del vector velocitat lineal també ho és. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \qquad (7)$$

on *q* i *w* són el desplaçament i la velocitat angular, respectivament, en un instant de temps t, i θ_0 i ω_0 són el desplaçament i la velocitat angular, respectivament, en l'instant de temps $t = 0$.

Cal remarcar que **en un moviment circular uniforme**, malgrat que el mòdul del vector velocitat lineal sigui constant, **la seva direcció no ho és**. L'acceleració centrípeta o normal $\vec{a}_c$ és la magnitud física que mesura la variació de la direcció del vector velocitat. Aquesta acceleració és perpendicular a la trajectòria de la partícula i va dirigida cap al centre de la trajectòria circular. El mòdul de $\vec{a}_c$ ve donat per:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \qquad (8)$$

T.3.2. **Recordeu**

Relació entre magnituds		
Magnitud lineal	*Magnitud angular*	*Relació*
Espai lineal (m)	Espai angular (rad)	S=θ R
Velocitat lineal (m/s)	Velocitat angular (rad/s)	V=ω R

Moviment circular uniforme	
$v = \frac{S}{t}$	$\omega = \frac{\theta}{t}$

Exercicis

E.3.1. Si estem escoltant música d'un disc que gira a raó d'1,5p rad/s durant 10 min, calculeu el desplaçament angular total que ha descrit aquest en unitats del sistema internacional.

Solució:

El disc descriu un moviment circular uniforme, per tant:
$\theta = \theta_0 + \omega t$; en el nostre cas:

$$t = 10\,\text{min} \cdot \frac{60\text{s}}{1\,\text{min}} = 600\text{s}$$

aleshores: $\theta = 1.5\pi \cdot 600 = 900\pi\text{rad}$

$\boxed{900\pi\ \text{rad}}$

> E.3.2. Trobeu l’acceleració centrípeta que adquireix un nen que ha pujat a les voladores de fires quan aquestes giren a una velocitat angular de 0.5π rad/s, i la distància radial és de 3 m.

Solució

L’acceleració centrípeta ve donada per l’expressió:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = 2.47 \cdot 3 = 7.4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$\boxed{7{,}4\ \text{m/s}^2}$

> E.3.3. Una mosca es diposita a una distància de 3 cm del centre d’un disc de 15 cm de radi que fa voltes sobre un tocadiscs a una velocitat angular de ω = 45 rpm. Trobeu en unitats del sistema internacional la velocitat lineal de la mosca. Si aquesta hagués caigut sobre la perifèria del mateix disc, quina velocitat lineal portaria?

Solució

Primer cal passar les unitats de la velocitat angular a unitats del sistema internacional.

$$\omega = 45\text{rpm} = 45\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} = 1.5\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

La velocitat lineal i la velocitat angular d’una partícula estan relacionades mitjançant l’expressió:

$v = \omega \cdot R$

En el primer cas, R = 0.03 m, i en el segon cas, R = 0.15 m ; per tant:

$$v = 1.5 \cdot \pi \cdot 0.03 = 0.14 \frac{m}{s}$$

i, $v = 1.5 \cdot \pi \cdot 0.15 = 0.71 \frac{m}{s}$

Cal adonar-se que malgrat que la mosca gira a la mateixa velocitat angular en ambdós casos, la velocitat lineal és diferent, depenent d'on es troba aquesta respecte a l'eix de rotació:

0,14 m/s i 0,71 m/s

Tornem-hi…

P.3.1. Un disc gira amb una velocitat de 45 rpm. Calculeu-ne la velocitat angular en rad/s. Sol.: 3π/2 rad/s.

P.3.2. Un cotxe recorre una pista circular de 50 m de radi. Quan ha recorregut 200 m, quants radiants ha descrit? Sol.: 4 rad.

P.3.3. Una roda gira a raó de 40 rad/s. Calculeu: (a) la celeritat d'un punt de la roda situat a 20 cm del centre de la roda; (b) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 30 cm del centre de la roda. Sol.: 8 m/s; 12 m/s.

P.3.4. Una roda gira a raó de 45 rpm. Calculeu: (a) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 20 cm del centre de la roda: (b) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 30 cm del centre de la roda. Sol.: 0,3π m/s; 0,9π/2 m/s.

P.3.5. Una roda gira a raó de 40/π voltes/s. Calculeu: (a) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 20 cm del centre de la roda; (b) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 30 cm del centre de la roda. Sol.: 16 m/s.

P.3.6. Determineu la velocitat angular de les tres busques dels rellotge en rad/s. Sol.: horari: 1,45 10^{-4} rad/s; minutera: 1,74 10^{-3} rad/s, i secundària: 0,105 rad/s.

P.3.7. Un punt de la perifèria d'una roda de 50 cm de radi es mou amb una velocitat lineal de 72 km/h. Calculeu: (a) la velocitat angular de la roda; (b) el nombre de voltes que fa en 10 s. Sol.: 40 rad/s, 400 voltes.

P.3.8. Un punt de la perifèria d'una roda de 40 cm de radi es mou amb una velocitat lineal de 36 km/h. Calculeu: (a) la velocitat angular de la roda (b) el nombre de voltes que fa en 20 s. Sol.: 25 rad/s, 500 voltes.

P.3.9. Un punt de la perifèria d'una roda de 20 cm de radi ha descrit un arc de 20 cm en un temps de 10 s. Calculeu: (a) la velocitat lineal del punt; (b) la velocitat angular de la roda; (c) l'espai lineal que recorre en 2 minuts. Sol.: 0'02 m/s, 0'1 rad/s, 2'4 m.

P.3.10. Un punt de la perifèria d'una roda de 20 cm de radi ha descrit un angle de 45º en un temps de 10 s. Calculeu: (a) la velocitat lineal del punt; (b) la velocitat angular de la roda; (c) el nombre de voltes que fa en 2 minuts. Sol.: 0'005π m/s, π/40 rad/s.

P.3.11. Una mosca se situa en un plat de microones de 10 cm de radi que gira a 10 voltes/s. Si la mosca es troba a una distància de 5 cm del centre, determineu: (a) el nombre de voltes que descriu la mosca en un temps de 10 s; (b) la velocitat lineal de la mosca. Sol.: 100 voltes, π m/s.

P.3.12. Observem diferents punts d'una roda que es mou amb una celeritat angular constant. D'acord amb la taula, distància del punt al centre i velocitat lineal corresponent, determineu la velocitat angular de la roda de manera gràfica.

Radi (m)	Velocitat (m/s)
0	0
0,2	0,2
0,4	0,4
0,6	0,6
0,8	0,8
1	1

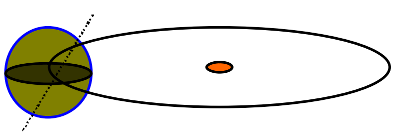
Sol.: 1 rad/s.

P.3.13. Trobeu la velocitat de l'extrem de l'agulla que indica els segons i la seva freqüència. Dada: longitud de l'agulla = 12 mm. Sol.: 1,26 10^{-3} m/s, 1/60 Hz.

P.3.14. Suposant que la Terra gira al voltant del seu eix amb moviment circular uniforme, trobeu: (a) la velocitat angular de la Terra; (b) la freqüència i el seu període. Sol.: 2π/86400 rad/s; $1,16 \times 10^{-5}$ Hz; 86400 s.

P.3.15. Suposant que la Terra gira al voltant del seu eix amb moviment circular uniforme, trobeu: (a) la velocitat lineal d'un punt situat a l'equador de la Terra. (b) la velocitat lineal del punt que representa el centre de la Terra. Dades: radi de la Terra = 6370 km. Sol.: 147,45π m/s; 0 m/s

P.3.16. Determineu la velocitat angular de la Terra al voltant del Sol.



Sol.: $2 \cdot 10^{-7}$ rad/s

P.3.17. En Pere porta un rellotge que té una agulla minutera d'1 cm. Trobeu: (a) la velocitat angular de l'agulla; (b) la velocitat lineal d'un punt situat a l'extrem de l'agulla; (c) la freqüència i el seu període. Sol.: π/1800 rad/s; $\pi/18 \times 10^{4}$ m/s; $2,78 \times 10^{-4}$ Hz; 3600 s.

P.3.18. Un disc de 2 m de radi gira al voltant d'un eix perpendicular pel seu centre, amb celeritat constant. Si fa una volta completa en 4 s, es demana:

(a) la velocitat angular de dos punts, un situat a 1 m del seu centre (A) i l'altre a la perifèria (B); (b) la velocitat lineal dels dos punts anteriors; (c) la freqüència del moviment; (d) l'angle girat en un temps de 6 s; (e) la distància recorreguda pels dos punts A i B en 6 s. Sol.: $\pi/2$ rad/s; $\pi/2$ m/s, π m/s, 0,25 Hz, 3π rad; 3π m; 6π m.

P.3.19. Un disc de 2 m de radi gira al voltant d'un eix perpendicular pel seu centre, amb celeritat constant. Si fa una volta completa en 2 s, es demana:

(a) la velocitat angular de dos punts, un situat a 1 m del seu centre (C) i l'altre a la perifèria (D); (b) la velocitat lineal dels dos punts anteriors; (c) la freqüència del moviment; (d) l'angle girat en un temps de 6 s; (e) la distància recorreguda pels dos punts C i D en 6 s. Sol.: π rad/s; π m/s, 2π m/s, 0,5 Hz, 6π rad; 6π m; 12π m.

P.3.20. Un disc de 2 m de radi gira al voltant d'un eix perpendicular pel seu centre, amb celeritat constant. Si fa una volta completa en 4 s, es demana:

(a) la velocitat angular de dos punts, un situat a 0 m del seu centre (A) i l'altre a la perifèria (B); (b) la velocitat lineal dels dos punts anteriors; (c) la freqüència del moviment; (d) l'angle girat en un temps de 6 s; (e) la distància recorreguda pels dos punts A i B en 6 s. Sol.: $\pi/2$ rad/s; 0π m/s, π m/s, 0,25 Hz, 3π rad; 0π m; 6π m.

P.3.21. El diàmetre de les rodes grosses d'una bicileta d'infant és de 0,8 m, i el de les rodes petites de 20 cm. Per anar al jardí les rodes grosses han fet 800 voltes a 40 rpm. Calculeu la velocitat de la bicicleta i el nombre de voltes que han fet les rodes petites. Sol.: 3'35 m/s, 3200 voltes.

P.3.22. El diàmetre de les rodes grosses d'una bicileta d'infant és de 0,6 m i el de les rodes petites de 30 cm. Per anar al jardí les rodes grosses han girat 800 voltes a 40 rpm. Calculeu la velocitat de la bicicleta i el nombre de voltes que han fet les rodes petites. Sol.: 2'51 m/s, 960 voltes.

P.3.23. Determineu l'acceleració normal d'un ciclista que descriu una trajectòria circular de 100 m de radi amb una velocitat de 72 km/h. Sol.: 4 m/s^2.

P.3.24. Suposant que la Terra gira al voltant del seu eix amb moviment circular uniforme. Trobeu: (a) la velocitat lineal d'un punt situat a l'equador de la Terra; (b) l'acceleració normal o radial d'aquest punt. Dades: radi de la Terra = 6370 km. Sol.: $147{,}45\pi$ m/s; $3{,}41\pi^2 \text{x} 10^{-3}$ m/s^2.

P.4. Moviment circular uniformement variat

Definicions

T.4.1. **Conceptes bàsics**. En aquest tipus de moviment el que és invariable és l'acceleració angular, mentre que la velocitat angular canvia en el temps. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \qquad (9)$$

i, $\omega = \omega_0 + \alpha t$

Si s'elimina el temps entre les dues equacions, s'obté:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \qquad (10)$$

essent: $\Delta\theta = \theta - \theta_0$

Cal dir que les equacions del moviment circular uniforme i del moviment circular uniformement variat són anàlogues respectivament a les del moviment rectilini; només canvien les magnituds lineals per les angulars.

En aquest tipus de moviment, el vector velocitat lineal té el mòdul i la direcció variables. **La magnitud que mesura la variació del mòdul de la velocitat és l'acceleració tangencial $\vec{a}_t$, i aquesta és tangent a la trajectòria** de la partícula.

L'expressió del mòdul de $\vec{a}_t$ ve donada per:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad (11)$$

$$a_t = R \cdot \alpha \qquad (12)$$

L'acceleració tangencial és perpendicular a l'acceleració centrípeta, i ambdues són les **components intrínseques** del vector acceleració; per tant, es pot escriure:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t \qquad (13)$$

i el mòdul del vector acceleració és el següent:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Exercicis

E.4.1. Un disc amb un eix fix de 30 cm de radi, inicialment en repòs, gira amb una acceleració angular constant d'1.5 rad/s^2 durant 10 s. Trobeu el nombre de voltes que fa aquest disc.

Solució

L'equació del desplaçament angular d'un moviment circular uniformement accelerat ve donada per:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

En el nostre cas, q_0 = 0, i w_0 = 0, per tant:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot (10)^2 = 75\text{rad}$$

Aleshores:

$$75\text{rad} \cdot \frac{1\text{volta}}{2\pi\text{rad}} = 11{,}94\text{voltes}$$

$\boxed{\text{11,94 voltes}}$

E.4.2. Una ciclista que surt del repòs descriu un *looping* circular de 200 m de radi, i assoleix els 72 km/h en 0,5 minuts. Trobeu l'acceleració total de la ciclista un cop ha transcorregut aquest temps.

Solució

El que cal fer primer és unificar unitats:

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \cdot \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} = 20.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$0.5\,\text{min} \cdot \frac{60\text{s}}{1\,\text{min}} = 30\text{s}$$

Per trobar l'acceleració total $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$ cal buscar les seves components vectorials.

El mòdul de l'acceleració tangencial és:

$$a_t = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{20}{30} = 0.67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

El mòdul de l'acceleració centrípeta és:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(20)^2}{200} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

El mòdul de l'acceleració total és:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 2{,}11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

La direcció del vector acceleració total es pot trobar calculant l'angle que forma aquest amb el vector $\vec{a}_t$: $\varphi = \text{arctg}\dfrac{a_c}{a_t} = \text{arctg}\dfrac{2}{2{,}11} = 43{,}46^\circ$

$\boxed{2{,}11\ \text{m/s}^2}$

T.4.2. **Recordeu**

Relació entre magnituds		
Magnitud lineal	*Magnitud angular*	*Relació*
Espai lineal, S,(m)	Espai angular, θ, (rad)	S=θ R
Velocitat lineal (m/s)	Velocitat angular (rad/s)	v=ω R
Acceleració lineal o tangencial (m/s²)	Acceleració angular (rad/s²)	$a_{tang} = \alpha R$

Moviment circular uniformement variat	
$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$
$v = v_0 + a\,t$	$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$
$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$

Tornem-hi…

P.4.1. En una fira, una atracció augmenta la velocitat en 10 voltes/s en 2 minuts. Calculeu-ne l'acceleració angular en rad/s^2. Sol**.:** $\pi/6$ rad/s^2.

P.4.2. Una atracció de fira que parteix del repòs adquireix una velocitat angular de 10π rad/s en dos segons. Considerant un moviment circular uniformement variat, calculeu: (a) la seva acceleració angular en rad/s^2; (b) el nombre de voltes que fa en aquest temps. Sol.: 5π rad/s^2 , 5 voltes.

P.4.3. Quant tardarà a aturar-se un disc que gira a 60 rpm si comença a frenar amb una acceleració constant de 2 rad/s^2? Sol.: 3,14 s.

P.4.4. Una atracció de fires va fent voltes i descriu un cercle amb una acceleració angular constant. La velocitat angular en els dos primers segons és de 90 radiants per segon. Si es considera que parteix del repòs, trobeu l'acceleració i el desplaçament angular en aquest període. Sol.: 45 rad/s^2; 90 rad.

P.4.5. Les rodes d'un camió giren amb una velocitat angular constant de ω = 100 rad/s. El conductor veu un obstacle a la carretera i frena, i triga 2 s a aturar-se. Calculeu l'acceleració angular amb la qual frena. Sol.: 50 rad/s^2.

P.4.6. Un disc, partint del repòs, adquireix una velocitat de 45 rpm en un temps d'1,5 s. Calculeu: (a) la seva acceleració angular; (b) el nombre de voltes que fa en aquest temps. Sol.: π rad/s^2; 0,56 voltes.

P.4.7. En una fira, una atracció disminueix la velocitat en 10 voltes/s en 2 minuts. Calculeu l'acceleració angular en rad/s^2. Sol = $\pi/6$ rad/s^2.

P.4.8. Una atracció de fira que es mou amb una velocitat angular de 10π rad/s frena i es para en dos segons. Considerant un moviment circular uniformement variat, calculeu: (a) la seva acceleració angular en rad/s^2; (b) el nombre de voltes que fa fins que es para. Sol.: 5π rad/s^2 , 5 voltes.

P.4.9. Un disc partint que gira inicialment amb una velocitat de 45 rpm es para en un temps d'1,5 s. Si es considera un moviment circular uniformement variat, calculeu: (a) la seva acceleració angular; (b) el nombre de voltes que fa fins a aturar-se. Sol.: π rad/s^2; 0,56 voltes

P.4.10. La velocitat angular d'un volant disminueix uniformement de 900 a 800 voltes per minut en 5 s. Calculeu: (a) l'acceleració angular del moviment; (b) el nombre de voltes que fa en aquests 5 s; (c) el temps que triga a parar-se a partir d'aquest instant. Sol.: 2,1 rad/s^2; 70, 8 voltes; 40 s.

P.4.11. La velocitat angular d'una roda disminueix uniformement de 1000 rpm a 500 rpm en 10 s. Calculeu: (a) el nombre de voltes que fa en aquests 10 s; (b) el temps necessari fins a aturar-se. Sol.: 124,9 voltes; 20 s.

P.4.12. La velocitat angular d'una roda disminueix uniformement de 1000 rpm a 500 rpm en 10 s. Calculeu la distància recorreguda en els 10 s per un punt situat a 50 cm de la perifèria. Sol.: 392,5 m.

P.4.13. Un mòbil descriu un moviment circular de 50 m de radi amb una acceleració tangencial o lineal de 2 m/s^2. Si quan el cronòmetre indica 4 s, el mòbil es troba en un angle de 3 rad i movent-se amb una velocitat de 6 m/s, determineu: (a) la posició i la velocitat inicial del mòbil considerant un moviment circular uniformement variat; (b) l'acceleració normal al cap de 4 s. Sol.: -2 m/s; 142 m; 0,72 m/s^2.

P.4.14. Un mòbil descriu un moviment circular de 100 m de radi amb una acceleració tangencial o lineal de 4 m/s^2. Si quan el cronòmetre indica 4 s, el mòbil es troba en un angle de 3 rad i movent-se amb una velocitat de 6 m/s, determineu: (a) la posició i la velocitat inicial del mòbil considerant un moviment circular uniformement variat; (b) l'acceleració normal al cap de 4 s. Sol.: -10 m/s; 308 m; 0,36 m/s^2.

P.4.15. Un mòbil descriu un moviment circular de 50 m de radi amb una acceleració angular de 0,04 rad/s^2. Si quan el cronòmetre indica 4 s, el mòbil es troba en un angle de 150 rad i movent-se amb una velocitat de 6 m/s, determineu: (a) la posició i la velocitat inicial del mòbil considerant un moviment circular uniformement variat; (b) l'acceleració normal al cap de 4 s. Sol.: -2 m/s; 142 m; 0,72 m/s^2.

P.4.16. Un tractor inicialment en repòs es desplaça durant un temps de 90 s. Les rodes del tractor, de 100 cm de radi, giren amb una acceleració angular d'1 rad/s^2 durant els primers 60 s, i mantenen la velocitat adquirida durant els 30 s restants. Determineu: (a) la velocitat final del tractor i (b) el nombre de voltes que fa una roda. Sol.: 60 m/s; 573,25 m.

P.4.17. Un tractor inicialment en repòs es desplaça durant un temps de 120 s. Les rodes del tractor, d'1 m de radi, giren amb una acceleració angular d'1 rad/s^2 durant els primers 60 s, i mantenen la velocitat adquirida durant els 60 s restants. Determineu: (a) la velocitat final del tractor i (b) el nombre de voltes que fa una roda. Sol.: 60 m/s; 859,87 m.

P.4.18. Un tractor inicialment es desplaça amb una velocitat de 72 km/h considerada constant durant 10 s. Seguidament frena amb una acceleració d'1 m/s^2 fins a aturar-se. Les rodes grosses del tractor tenen 1 m de radi, i les petites 50 cm. Ompliu les dues taules següents:

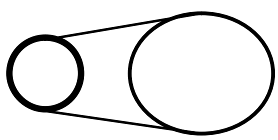
Primer tram	*Velocitat roda gran*	*Velocitat roda petita*	*Espai recorregut roda gran*	*Espai recorregut roda petita*
lineal				
angular				

Segon tram	*Acceleració roda gran*	*Acceleració roda petita*	*Espai recorregut roda gran*	*Espai recorregut roda petita*
lineal				
angular				

P.4.19. Un tractor inicialment es desplaça amb una velocitat de 72 km/h considerada constant durant 10 s. Seguidament frena amb una acceleració d'1 m/s^2 fins a aturar-se. Les rodes grosses del tractor tenen 1 m de radi, i les petites 50 cm. Determineu: (a) la velocitat angular de cada roda en iniciar la frenada; (b) el nombre de voltes totals que ha fet la roda gran. Sol.: ωg = 20 rad/s; ωp = 40 rad/s; 63,7 voltes.

P.4.20. Un mòbil A descriu una trajectòria circular de 50 m de radi amb una velocitat angular constant de 0,3 rad/s. Al cap de 5 s d'haver partit A, surt a darrere seu un altre mòbil B, des del repòs i amb una acceleració de 0,1 rad/s^2. Determineu: (a) la posició i l'instant en què B s'encreua amb A; (b) la velocitat lineal i angular de B en el moment en què s'encreuen els dos mòbils. Sol.: 4,26 rad; 0,92 rad/s; 46 m/s.

P.4.21. La roda petita d'un transmissor de velocitat té un radi de 15 cm, i la roda grossa de 45 cm. El sistema es troba inicialment en repòs. Si la roda petita arranca amb una acceleració, considerada constant, d'1 rad/s^2 ompliu la taula per un temps t = 4 s.



	Acceleració roda petita	*Acceleració roda gran*	*Velocitat (t=4s) roda petita*	*Velocitat (t=4 s) roda gran*
lineal				
angular				

P.5. Moviment circular variat

Definicions

T.5.1. **Conceptes bàsics**. La trajectòria d'una partícula que descriu un moviment circular és una circumferència. Si la partícula es desplaça des d'un punt 1 fins a un punt 2 (vegeu el dibuix), la velocitat angular mitjana es defineix com l'angle central escombrat pel radi, anomenat desplaçament angular (expressat en unitats de radiant en el sistema internacional; el radiant és adimensional), dividit pel temps que triga la partícula per anar des del punt 1 fins al punt 2, és a dir:

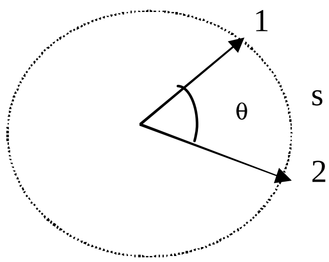
$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \qquad (14)$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero, obtenim la velocitat angular instantània:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (15)$$

La unitat de la velocitat angular en el sistema d'unitats internacional és el radiant per segon, rad/s. En alguns casos, aquesta velocitat es dóna en unitats de rpm, que vol dir revolucions dividit per minut; una revolució és igual a 2π radiant. Cal recordar que el desplaçament angular és igual a l'arc *s* (magnitud lineal), descrit per la partícula, dividit pel radi *R* de la circumferència, és a dir:

$$q = \frac{s}{R} \quad ; \quad s = \theta \cdot R$$



per tant:

$$v = w \cdot R \quad \text{ja que} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

L'acceleració angular mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 fins a una posició 2 és el quocient entre la variació de la velocitat angular entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \qquad (16)$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero, obtenim l'acceleració angular instantània:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (17)$$

La unitat de l'acceleració angular en el sistema d'unitats internacional és el radiant per segon al quadrat, rad /s^2.

Exercicis

E.5.1. L'equació del desplaçament angular d'una partícula que volta sobre una circumferència de radi R = 3 m ve donada per l'expressió $\theta = 4t^2 + 3t$. Trobeu la velocitat lineal i l'acceleració angular en l'instant t = 2 s. (Les unitats de θ és el radiant, i el temps s'expressa en segons.)

Solució

Ja s'ha comentat que l'arc que descriu la partícula en un moviment circular és una magnitud lineal; per tant:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

On arc = R·θ i:
Arc= s=3(4t^2 +3t) = (12t^2 + 9t) m; per tant:

$$v = (24t + 9)\frac{m}{s}.$$

Quan el temps és igual a t = 2s, aleshores:

$$v(2) = 57\,\frac{m}{s}$$

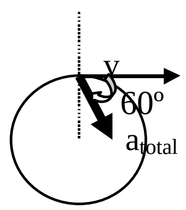
Com que:

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, i $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, aleshores:

$\omega = (8t + 3)\frac{rad}{s}$, i $\alpha = 8\frac{rad}{s}$; per tant, l'acceleració angular és constant.

10 m/s; 308 m; 0,36 m/s^2

E.5.2. Una partícula porta una velocitat de 6 m/s en un instant determinat i la seva acceleració és de 8 m/s^2. Si els seus vectors representatius formen un angle de 60º, calculeu: (a) les components intrínseques de l'acceleració i (b) el radi de curvatura.



Solució

La figura ens permet determinar les components intrínseques de l'acceleració, atès què:

a) Per trigonometria es poden calcular les components de l'acceleració:

$$a_t = \frac{ds}{dt} = |\vec{a}|\cos 60º = 8 \cdot 0{,}5 = 4 m/s^2$$

i: $a_n = \dfrac{v^2}{R} = |\vec{a}|\sin 60º = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6{,}93 m/s^2$

b) Com que:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 6{,}93 \Rightarrow R = \frac{6^2}{6{,}93} = 5{,}19 m$$

(a) 4 m/s^2 ; 6,93 m/s^2 (b) 5,19 m.

Tornem-hi…

P.5.1. Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de 250 cm de radi segons l'equació següent: q = $2t^2$-$4t$ + 6, q expressat en radiant i t en segons. Determineu l'acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del sistema internacional, en l'instant de temps t = 3 s. Sol.: 10 m/s^2 (correspon a un moviment circular uniformement variat).

P.5.2. Segons l'equació de la trajectòria circular del problema anterior, calculeu la velocitat angular, així com l'acceleració centrípeta o radial i angular, expressades en el sistema internacional, en l'instant de temps t = 2 s. Sol.: 4 rad/s; 40 m/s^2; 4 rad/s^2

P.5.3. Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de 250 cm de radi segons l'equació següent: q = $4t^2$-$2t$ + 6; q expressat en radiant i t en segons. Ompliu la taula en unitats del sistema internacional, per a l'instant de temps t = 3 s.

	ω	α	a_{tan}	a_{normal}	a_{total}	Angle ($a_{tan,} a_{normal}$)
magnitud						
unitats						

Sol.: 22 rad/s, 8 rad/s^2, 20 m/s^2, 1210 m/s^2, 1210'16 m/s^2, 90º

P.5.4. Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de 200 cm de radi segons l'equació següent: q = $8t^2$-$2t$ + 6; q expressat en radiant i t en segons. Ompliu la taula en unitats del sistema internacional, per a l'instant de temps t = 2 s.

	ω	α	a_{tan}	a_{normal}	a_{total}	Angle (a_{tan}, a_{normal})
magnitud						
unitats						

Sol.: 30 rad/s, 16 rad/s^2, 32 m/s^2, 1800 m/s^2, 1800’28 m/s^2, 90º

P.5.5. Una partícula descriu la trajectòria d’un cercle de 250 cm de radi segons l’equació següent: $q = 4t^3 - 2t + 6$; q expressat en radiant i t en segons. Ompliu la taula en unitats del sistema internacional, per a l’instant de temps $t = 1$ s.

	ω	α	a_{tan}	a_{normal}	a_{total}	Angle (a_{tan}, a_{normal})
magnitud						
unitats						

Sol.: 10 rad/s, 24 rad/s^2, 60 m/s^2, 250 m/s^2, 257’1 m/s^2, 90º

P.5.6. Una partícula descriu la trajectòria circular de radi R segons l’equació següent: $S = 2t^2 - 4t + 6$; S expressat en metres i t en segons. Determineu l’acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del sistema internacional, en l’instant de temps $t = 3$ s. Sol.: 4 m/s^2.

P.5.7. Una partícula descriu la trajectòria circular de radi R segons l’equació següent: $S = 3t^2 - 4t + 6$; S expressat en metres i t en segons. Determineu l’acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del sistema internacional, en l’instant de temps $t = 1$ s. Sol.: 6 m/s^2.

P.5.8. El vector posició d’un mòbil és $\vec{r} = 3t\vec{i} + t^2\vec{j} - 3\vec{k}$ (en unitats del sistema internacional). Trobeu les components intrínseques de l’acceleració i el radi de curvatura per a $t = 1$ s.

Sol.: $a_t = 4\sqrt{13}/13$ m/s^2, $a_n = 6\sqrt{13}/13$ m/s^2, $R = 13\sqrt{13}/6$ m

P.5.9. El vector posició d’un mòbil és $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + t\ \vec{j} - 3\vec{k}$ (en unitats del sistema internacional). Trobeu les components intrínseques de l’acceleració i el radi de curvatura per a $t = 1$ s.

Sol.: $a_t = 36\sqrt{37}/37$ m/s^2, $a_n = 6\sqrt{37}/37$ m/s^2, $R = 37\sqrt{37}/6$ m

P.5.10. El vector posició d’un mòbil és $\vec{r} = 3t\vec{i} + t\vec{j} - 3\vec{k}$ (amb unitats del sistema internacional). Trobeu les components intrínseques de l’acceleració i el radi de curvatura per a $t = 1$ s.

Sol.: $a_t = 0$ m/s^2, $a_n = 0$ m/s^2, $R = 0$ m trajectòria rectilínia.

DINÀMICA

P.1. Càlcul de la resultant de forces aplicades sobre un cos

Definicions

T.1.1. ***Resultant***. Sabent que tota força aplicada en un sòlid rígid es pot traslladar en la seva direcció a qualsevol punt del sòlid, anomenem *resultant* d'un conjunt de forces la suma vectorial de les forces (ja que aquestes són vectors), i ho representarem de la manera següent:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i} \qquad (1)$$

on el subíndex *i* indica les forces aplicades al sòlid rígid.

T.1.1. ***Càlcul de la resultant d'un conjunt de forces***. Per calcular la resultant la millor opció és escriure les forces en notació vectorial i després fer-ne la suma vectorial corresponent.

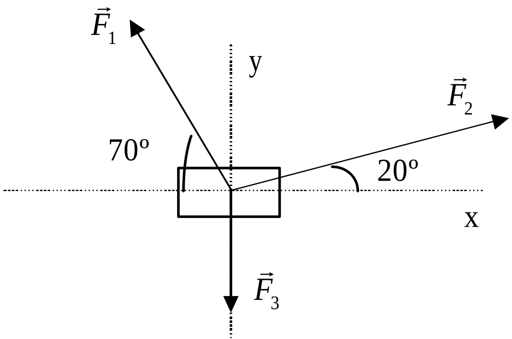
Exercicis

E.1.1. Calculeu la força resultant del sistema de forces que actua sobre el cos representat a la figura:

$F_1 = 80$ N

$F_2 = 100$ N

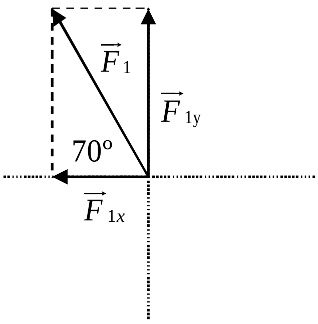
$F_3 = 40$ N



Solució

Per calcular la força resultant, primer cal descompondre totes les forces en el mateix sistema d'eixos. Escollim com a sistema d'eixos *x* i *y*, que hi ha marcats a la figura.

Descomponem la força F_1, que és un vector, en les seves dues components *x* i *y* de la manera següent:



— Utilitzem la regla del paral·lelogram i tracem rectes paral·leles als eixos que passen per l'extrem del vector F_1. Així, aquest vector queda descompost en dues components que anomenarem F_{1x} i F_{1y} , el valor de les quals podem calcular aplicant la trigonometria:

$\sin 70º = \dfrac{F_{1y}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que $F_{1y} = F_1 \cdot \sin 70º$

$\cos 70º = \dfrac{F_{1x}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que $F_{1x} = F_1 \cdot \cos 70º$

Si ara fem els càlculs numèrics, sabent que F_1 val 80 N:

F_{1y} = 80·sin 70 = 75'17 N
F_{1x} = 80·cos 70 = 27'36 N

Així podem escriure el vector F_1 de la manera següent:

$$\boxed{F_1 = (-27'36,\ 75'17)\ \text{N}}$$

(Observeu que posem el signe negatiu a la component x de la força, perquè escollim la direcció esquerra de l'eix x com a negativa.)

Procedim de la mateixa manera per a la força F_2, descomponent-la en les dues components dels eixos:

$\sin 20 = \dfrac{F_{2y}}{F_2}$ i d'aquí obtenim que $F_{2y} = F_2 \cdot \sin 20º$

$\cos 20º = \dfrac{F_{2x}}{F_2}$ i d'aquí obtenim que $F_{2x} = F_2 \cdot \cos 20º$

Sabent que F_2 val 100 N, fem els càlculs:

F_{2x} = 100·cos 20º = 93'97 N
F_{2y} = 100·sin 20º = 34'2 N

Així, escrivim el vector F_2 de la manera següent:

$$\boxed{F_2 = (93'97,\ 34'20)\ \text{N}}$$

Si observem la força F_3, aquesta ja no cal descompondre-la perquè ja ho està. La seva direcció cau sobre un dels eixos, l'eix *y*; per tant:

$$\boxed{F_3 = (0, -40)\ \text{N}}$$

(Noteu que li hem col·locat un signe negatiu perquè el vector es dirigeix cap avall, que nosaltres escollim com a signe negatiu.)

— Un cop descompostes totes les forces, podem calcular la resultant de les forces, que correspon a la suma de totes les forces que hi hagi aplicades sobre el cos:

$$\Sigma\vec{F} = (-27'36,\ 75'17)\ \text{N} + (93'97,\ 34'20)\ \text{N} + (0,\ -40)\ \text{N} = \mathbf{(66'61,\ 69'37)\ N}$$

La resultant podem deixar-la expressada en forma de vector amb dues components (com en el resultat anterior) o bé donar-ne el mòdul i la direcció:

Mòdul: $R = \sqrt{R_x + R_y} = \sqrt{66'61^2 + 69'37^2} = \mathbf{96'17\ N}$

Direcció: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{69'37}{66'61}$; $\text{tg}\ \alpha = 1'04$

R_y representa el sin α i R_x representa el cos α, segons la definició de la tg α, que per definició és sin α / cos α. Com que tots dos són positius, el sinus i el cosinus també ho són. Per tant, l'angle que estem buscant es troba en un quadrant on el sinus i el cosinus són positius, és a dir, al primer quadrant. L'angle solució, doncs, haurà de ser del primer quadrant:

$\alpha = \text{arc tg}\ 1'04 = \mathbf{46'16º}$

La força resultant, doncs, és un vector de mòdul **96'17 N** que forma un angle de **46'16º** respecte a l'eix horitzontal de les *x*.

Tornem-hi…

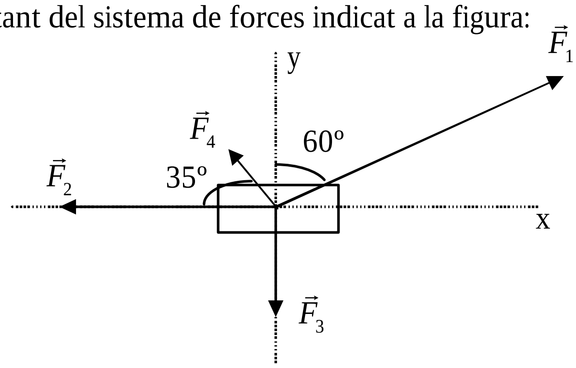
P.1.1. Calculeu la resultant del sistema de forces indicat a la figura:

F_1 = 160 N

F_2 = 120 N

F_3 = 80 N

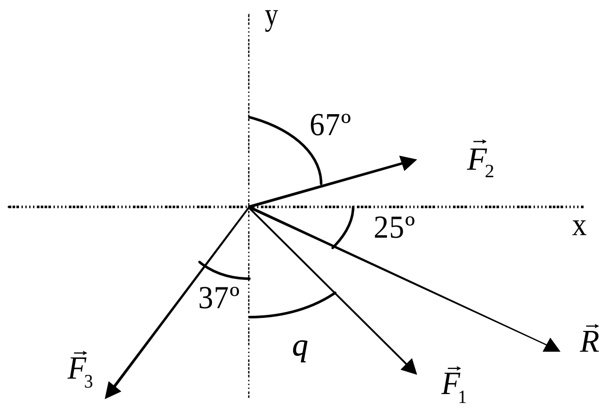
F_4 = 40 N



Solució: $\vec{F}$ = (-14'2, 22'94) N

P.1.2. Calculeu la força $\vec{F}_1$ del sistema de forces de la figura següent, on el mòdul de la força resultant, $\vec{R}$, val 200 N i les forces $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ tenen de mòdul 50 N i 100 N respectivament.

Solució: $\vec{F}_1$ = (195'44, -24'19) N



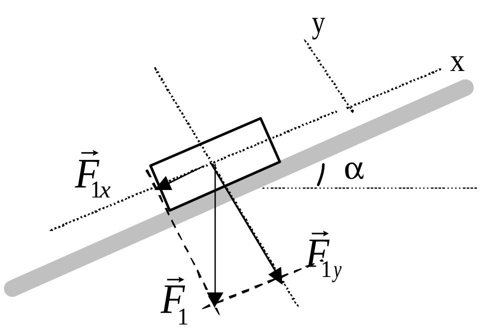
P.1.3. Dibuixeu, a escala adient, un sistema de forces format per tres forces concurrents de mòduls 100 N, 200 N i 300 N que formen angles de 60º, 120º i 180º amb l'eix horitzontal. Després calculeu la resultant d'aquest sistema de forces.

$\vec{R}$ = (-350, 259'8) N

P.2. Descomposició de forces en un pla inclinat

Definicions

T.1.1. ***Mètode general per descompondre una força***. Per descompondre les forces respecte a uns eixos, un dels quals és paral·lel al pla inclinat i l'altre perpendicular al pla, cal aplicar la regla del paral·lelogram: primerament es traslladen els eixos a l'origen de la força (generalment se solen traslladar totes les forces al centre de la figura, i és allà on es fa la descomposició de la força). Es tracen les rectes paral·leles als eixos donats que passin per l'extrem del vector força tal com indica la figura:

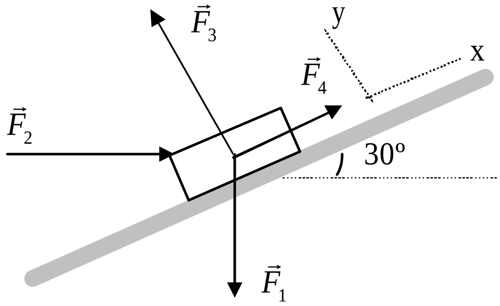


Després s'identifica l'angle α en els triangles que apareixen a la descomposició de les forces i, mitjançant les raons trigonomètriques adients, es calculen els valors de $\vec{F}_{1x}$ i $\vec{F}_{1y}$ $\vec{F}_{1y}$, conegut el valor de $\vec{F}$.

Exercicis

E.2.1. *Problema resolt*. Calculeu la força total exercida sobre el cos de la figura, descomponent les forces adients segons els eixos indicats a la figura:

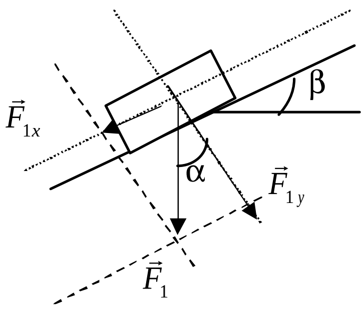
F_1 = 40 N
F_2 = 60 N
F_3 = 50 N
F_4 = 25 N



Solució

Primerament, caldrà descompondre totes les forces respecte als eixos *x-y* indicats a la figura. De fet, les forces F_3 i F_4 són paral·leles als eixos, per tant, no caldrà descompondre'ls.

Comencem per la força F_1:



Primer cal localitzar l'angle del pla inclinat en el triangle format per la força F_1 i les seves components F_{1x} i F_{1y}. Sabent que els angles aguts de costats perpendiculars entre ells són iguals, podem veure fàcilment que l'angle α marcat a la figura és el mateix que l'angle β (els costats que formen els dos angles són perpendiculars un a un). Així, l'angle α = 30º. Aplicant-hi la trigonometria podem veure que:

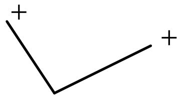
$\cos 30º = \dfrac{F_{1y}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que $F_{1y} = F_1 \cdot \cos 30º$

$\sin 30º = \dfrac{F_{1x}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que $F_{1x} = F_1 \cdot \sin 30º$

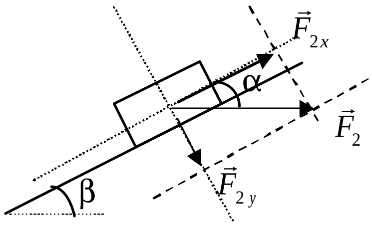
Fent els càlculs adients, obtenim que $F_{1x} = 40 \cdot \cos 30º$ = **34'64 N** i $F_{1y} = 40 \cdot \sin 30º$ = **20 N**, i així la descomposició de la força en forma de vector segons els eixos indicats l'escriurem de la manera següent:

$\boxed{\vec{F}_1 = (\,-34'64,\ -20)\ \mathrm{N}}$

Criteri de signes:



Ara descompondrem la força F_2, localitzant un altre cop l'angle corresponent. Per fer-ho correctament traslladem la força F_2 al centre del cos i llavors dibuixem els eixos donats:



Tracem el paral·lelogram des de l'extrem de la força F_2, i les seves projeccions sobre els eixos són les dues components que el formen: F_{2x} i F_{2y}. Sabent que els angles aguts de costats paral·lels entre els dos angles són iguals, podem veure fàcilment que l'angle α i l'angle β són iguals, i iguals a 30º. Aplicant la trigonometria obtindrem les components de F_2:

F_{2x} = F_2·cos 30º = 60·cos 30º = **51'96 N**

F_{2y} = F_2·sin 30º = 60·sin 30º = **30 N**

Seguint el mateix criteri de signes que hem utilitzat per a la F_1, podem escriure el vector F_2 en components de la manera següent:

$\boxed{\vec{F}_2 = \mathbf{(51'96,\ -30)\ \ N}}$

Escrivim ara F_3 i F_4 en components respecte als eixos. Aquestes forces no caldrà descompondre-les perquè ja queden sobre un dels eixos de la figura: la F_3 és paral·lela a l'eix *y*, i així l'escriurem:

$\boxed{\vec{F}_3 = \mathbf{(0,\ 50)\ \ N}}$

En canvi, la F_4 és una força paral·lela a l'eix *x*, de manera que la seva descomposició en components l'escriurem de la manera següent:

$\boxed{\vec{F}_4 = \mathbf{(25,\ 0)\ N}}$

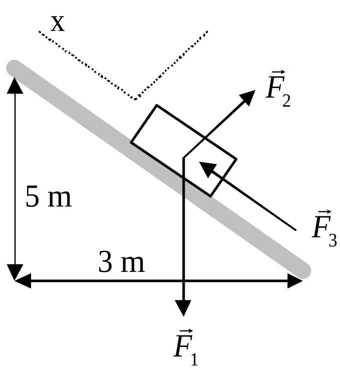
La resultant total la calcularem sumant totes les forces aplicades sobre el cos:

$\Sigma\vec{F}$ = (-34'64, -20) N + (51'96, -30) N + (0, 50) N + (25, 0) N = **(42'32, 0) N**

La **resultant** és una força que té de mòdul **42'32 N** i que té una direcció paral·lela al pla inclinat i de sentit cap amunt.

Tornem-hi…

P.2.1 Calculeu la força resultant del sistema de forces que actua sobre el cos. La força $\vec{F}_2$ forma 90º amb la superfície inclinada, $\vec{F}_3$ és paral·lela a la superfície i $\vec{F}_1$ és paral·lela al costat de 5 m. Els mòduls de les forces aplicades són:



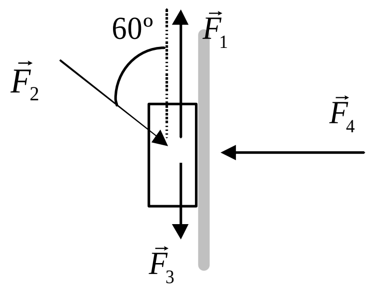
F_1 = 150 N

F_2 = 77’2 N
F_3 = 50 N

(Determineu primer l’angle d’inclinació del pla inclinat, mitjançant la trigonometria.)

Solució: $\vec{F}$ = (-78’57, 0) N

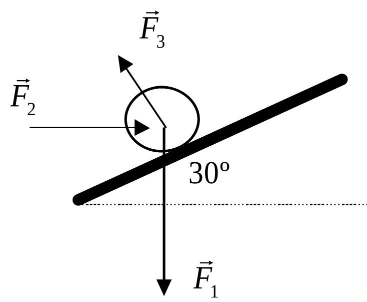
P.2.2 El cos de la figura està situat sobre una paret vertical tal com indica la figura, i està sotmès al sistema de forces que hi ha dibuixat sobre el cos. Calculeu la força neta del sistema de forces sabent que els mòduls de les forces són:



F_1 = 40 N
F_2 = 60 N
F_3 = 10 N
F_4 = 30 N

Solució: $\vec{F}$ = (-21’96, 0) N

P.2.3 Calculeu la força total exercida sobre el cos de la figura. Les dades en mòduls de les forces són F_1 = 10 N, F_2 = 5 N i F_3 = 3 N, sabent que F_3 és una força perpendicular a la superfície.



Solució: $\vec{F}$ = (0’67, -8’16) N

P.3. Aplicacions de la 1a Llei de Newton

Definicions

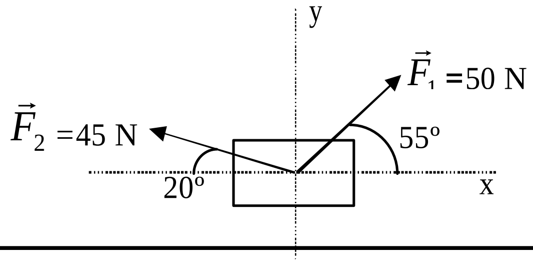
T.3.1. ***Primera llei de Newton***. Recordem el primer principi de la dinàmica, també conegut com la primera llei de Newton:

> Si sobre un cos no hi actua cap força, aquest es mantindrà en repòs o en moviment rectilini i uniforme.

T.3.2. ***Conseqüències de la 1a llei de Newton***. Si la resultant de forces aplicades sobre un cos val zero, aquest no modificarà el seu moviment: si està en repòs continuarà en repòs, si es mou a una determinada velocitat continuarà movent-se a aquesta velocitat.

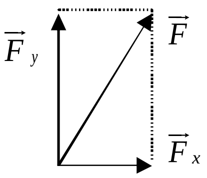
Exercicis

E.3.1. Trobeu el valor de la força $\vec{F}_3$ per tal que el sistema següent estigui en equilibri.



Solució

Primer de tot caldrà descompondre les forces donades en les direccions que considerem més adients. Segons el dibuix, els eixos millors són els que ja ens han donat: *x* i *y*.



— Utilitzem la regla del paral·lelogram, igual com fèiem als exercicis del començament de la unitat. Les components F_{1x} i F_{1y} valdran:

$\sin 55º = \dfrac{F_{1y}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que $F_{1y} = 50\ \text{N} \cdot \sin 55º$

$\cos 55º = \dfrac{F_{1x}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que $F_{1x} = 50\ \text{N} \cdot \cos 55º$

Així, obtenim que el valor de la força és: $\boxed{\vec{F}_1 = (28'68,\ 40'96)\ \text{N}}$

Seguint el procediment anterior es descompon la força $\vec{F}_2$ i s'obté el resultat següent:

$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 20º = 42'29$ N
$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 20º = 15'39$ N
$\vec{F}_2 = \boxed{(-42'29,\ 15'39)\ \text{N}}$

Com que han d'estar en equilibri, s'ha de complir que la suma de totes les forces aplicades sobre el cos sigui nul·la:

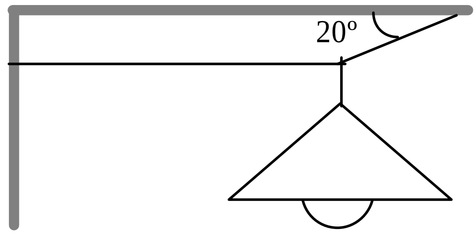
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0,0)$$

i aïllant $\vec{F}_3$ s'obté:

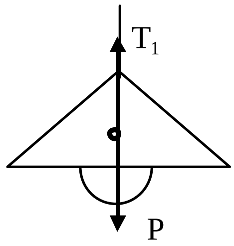
$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -(28'68,\ 40'96) - (-42'29,\ 15'39) = \mathbf{(13'61,\ -56'35)\ N}$$

(Es deixa com a exercici obtenir el mòdul i la direcció de la força F_3, que es pot obtenir seguint els exercicis anteriors resolts. El mòdul val 57'97 N i la direcció és de -76'42º respecte a l'eix positiu de les X.)

E.3.2. Un llum que pesa 150 N s'aguanta mitjançant tres cables tal com indica la figura. Determineu les tensions de cada un dels cables.



Solució:



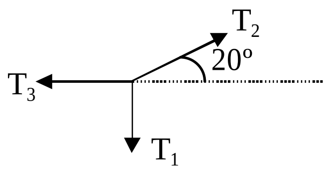
Dibuixem el diagrama del sòlid lliure del cos que estudiem (el llum): les forces que hi actuen són la tensió T_1 del cable, que el subjecta, i el pes del llum P, que val 150 N. Pel fet d'estar en equilibri sabem, pel primer principi de la dinàmica, que la resultant de les forces que actuen sobre el cos és zero, i per tant:

$T_1 - P = 0$

(Observeu que prescindim del caràcter vectorial de la força, ja que ara l'equilibri es produeix en una única direcció, la direcció vertical.)

D'aquesta manera s'obté que $T_1 = P = \boxed{150\ \text{N}}$

Per trobar les altres tensions haurem de buscar un punt adient on apareguin les altres tensions. Evidentment, aquest punt ha de ser el nus on s'ajunten els cables; aquí l'equilibri de les forces és el que es representa a la figura adjunta.



S'ha de complir doncs, que la resultant sigui zero:

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$

$\vec{T}_1 = (0, -150)$ N *(Ara sí que cal un tractament vectorial, ja que les forces tenen diferents direccions!)*

Per calcular $\vec{T}_2$ hem d'aplicar la descomposició de forces en les dues components, tal com hem fet a l'exercici anterior. S'obté el resultat següent:

$\vec{T}_2 = (T_2 \cdot \cos 20º, T_2 \cdot \sin 20º)$ N

$\vec{T}_3 = (-T_3 , 0)$ N

Així:

$(0,-150) + (T_2 \cdot \cos 20º, T_2 \cdot \sin 20º) + (-T_3 , 0) = (0, 0)$

Separem les dues components d'aquesta equació i obtindrem dues equacions amb dues incògnites (T_1 i T_2):

$$\begin{cases} T_2 \cdot \cos 20º - T_3 = 0 \\ -150 + T_2 \,.\, \sin 20º = 0 \end{cases}$$

I resolent-ho, obtenim: $\mathbf{T_2 = 412'12\ N}$ i $\mathbf{T_3 = 438'57\ N}$

(Es poden donar els resultats següents, corresponents al mòdul de les tensions, en forma vectorial: només cal escriure les tensions en les seves respectives components.)

Tornem-hi...

P.3.1 Una caixa que pesa 500 N està en equilibri sobre un pla inclinat que forma un angle de 50º amb el pla horitzontal. Descomponeu el pes de la caixa en dues components, l'una paral·lela i l'altra perpendicular al pla.

a) Doneu el valor de la força que fa el pla inclinat per sostenir la caixa.
b) Quin és el valor de la força de fricció?

Solució: a) 321'39 N, b) 383 N.

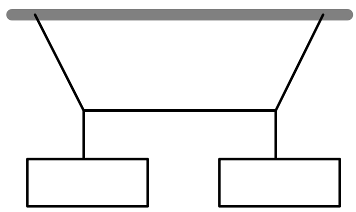
P.3.2 Una caixa que pesa 200 N es troba en equilibri. Dibuixeu les forces que hi actuen i calculeu els valors de cada força en els casos que s'indiquen a continuació:

a) Està situada en un pla horitzontal.
b) Està situada damunt d'un pla inclinat que forma 60º amb l'horitzontal.
c) Està situada sobre un pla horitzontal i l'estirem amb una força paral·lela al pla inclinat i que val 20 N.
d) Està situada sobre un pla inclinat de 30º i l'estirem amb una força paral·lela al pla inclinat, i en sentit cap amunt, de 52 N.
e) Està situada sobre un pla inclinat de 45º i l'estirem amb una força que forma un angle de 20º amb la direcció del pla inclinat i cap amunt, de valor 45 N.

Solució: a) 200 N, b) 173'2 N, 100 N, c) 173'2 N, 100 N, d) 173'2 N, 48 N, e) 126 N, 99'14 N.

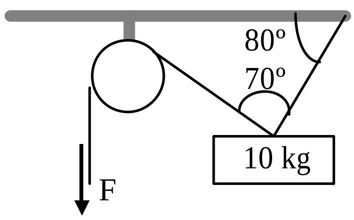
P.3.3 A la figura adjunta hi ha dos blocs de 500 g, de manera que l'angle que formen les cordes amb el sostre és de 60º. Calculeu les tensions de les cordes.

Solució: 2'83 N, 4'9 N i 5'66 N.



P.3.4 Determineu la força F que hem d'aplicar des de l'extrem lliure de la politja i les tensions del sistema següent, si volem que estigui en equilibri.

Solució: F = 98 N, tensions: 18'06 N i 90'32 N.



P.3.5 Estirem un cos de 20 kg de massa que es troba sobre un pla inclinat de 25º mitjançant una força paral·lela al pla inclinat i sentit cap amunt de valor 60 N. Si el coeficient de fricció estàtic de la superfície és de 0'3 i el dinàmic 0'2, es demana:

a) Diagrama del sòlid lliure i valor de la força que fa el pla inclinat per aguantar el cos.
b) Determineu si el cos es troba en equilibri sobre el pla inclinat.
c) Quin és el valor de la força mínima que caldria fer perquè el cos comencés a moure’s cap amunt?

Solució: a) Està en equilibri, ja que la força neta de baixada és menor que F_{Re} màxima. b) 118’35 N.

P.4. Aplicacions de la segona llei de Newton

Definicions

T.4.1. ***Segona llei de Newton***. L’enunciat del segon principi de la dinàmica (corresponent a la segona llei de Newton) diu:
Les acceleracions que adquireix un cos són directament proporcionals a les forces que hi actuen, i

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}} \qquad (2)$$

aquesta constant de proporcionalitat s’anomena massa d’inèrcia.

T.4.2. ***Conseqüències de la segona llei de Newton***. Del segon enunciat se’n desprèn que si sobre un cos on la resultant de forces és zero hi apliquem una força, aquesta força canviarà la velocitat del cos (en mòdul o en direcció), i aquest canvi de la velocitat en el temps correspon al que entenem com a acceleració. Per això generalment es diu que les forces són causes que produeixen acceleracions en els cossos.

T.4.3. ***Aplicacions de la segona llei de Newton: problemes bàsics amb politges***. Quan es volen resoldre aquests problemes d’aplicació de la segona llei de Newton, cal fer el diagrama de forces per a cada un dels cossos que ens interessin (diagrama del sòlid lliure). Després cal escollir un sistema de coordenades adient per a cada objecte i dibuixar-lo també en els cossos d’estudi. Aquests eixos sempre s’escullen de manera que siguin paral·lels a la direcció de l’acceleració. Tenint en compte que si els sistemes estan lligats per cordes apareixeran les tensions corresponents als cables, i sense oblidar la fricció (que s’oposa al moviment) i la força normal (que la fa la superfície per aguantar l’objecte), es plantegen les equacions de la segona llei de Newton (mitjançant components o en forma vectorial) i es resolen les incògnites de les equacions.

T.4.4. ***Força de fricció***. La força de fricció es calcula mitjançant l’expressió següent:

$$\boxed{\overrightarrow{F_R} = \mu \cdot \overrightarrow{N}} \qquad (3)$$

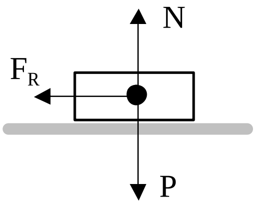
on μ és el coeficient de fricció (estàtic o dinàmic, depenent de la situació en què ens trobem) i $\overrightarrow{N}$ és la força normal.

Exercicis

E.4.1. Una massa *m* és llançada per un pla horitzontal amb una velocitat de 10 m/s i després de recórrer 10 metres es para.

a) Dibuixeu el diagrama del cos lliure (és a dir, totes les forces que actuen sobre el cos).
b) Calculeu l'acceleració que actua durant el trajecte.
c) Calculeu el coeficient de fricció entre el cos i el pla horitzontal.

a)



Les forces que actuen sobre el cos són evidents:

- El **pes P**, que és la força que fa la terra sobre el cos.
- La **força normal**, **N**, que és la força que fa la superfície horitzontal per aguantar el cos.
- La **força de fricció**, $\mathbf{F_R}$, que és la força que fa el terra sobre el cos, oposant-se al seu moviment.

(Tingueu en compte que la velocitat no és cap força, i per tant, no hi ha cap força endavant durant aquest moviment. Aquesta força ha existit en el moment de donar-li l'impuls, però durant el moviment no hi és!)

b) Per calcular l'acceleració podem fer-ho mitjançant la segona llei de Newton ($\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) o bé amb les fórmules de cinemàtica, en el cas que tinguem les dades adients. Coneixem:
v_0 = 10 m/s (velocitat inicial que ens donen al problema)
v = 0 m/s (ja que al final el cos es para)
Δx = 10 m (desplaçament)

Utilitzant la fórmula de cinemàtica següent:

$$\boxed{\mathbf{v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot}\mathrm{D}\mathbf{x}}$$

Substituïm les dades i obtenim:

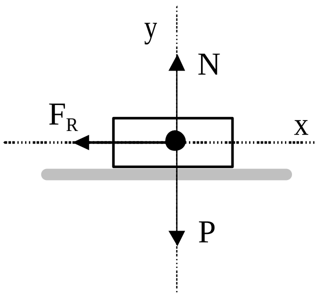
$0^2 = 10^2 + 2 \cdot a \cdot 10 \quad \Longrightarrow \quad a = -5\ m/s^2$

(Evidentment, el resultat de l'acceleració ha de ser negatiu, ja que l'objecte es frena i acaba parant-se!)

c) Calculem el coeficient de fricció: aquest coeficient només apareix quan calculem la força de fricció, ja que $F_R = \mu \cdot N$, on μ és el coeficient de fricció i N la força normal. Per tant, ara sí, haurem d'utilitzar la segona llei de Newton:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Com que és una equació vectorial, caldrà escriure les forces com a vectors o bé separar les components respecte als eixos adients. Aquests eixos sempre són el de la direcció de moviment i el seu perpendicular. Així doncs, dibuixem els eixos al diagrama del sòlid rígid, i en separem les components segons els eixos:



Es pot veure que totes les forces queden sobre els eixos, i per tant, no se n'haurà de descompondre cap. Separem, doncs, les forces segons es trobin en direcció a l'eix *x* o a l'eix *y*:

Eix x

$\Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x$

$-F_R = m \cdot a$

Eix y

$\Sigma \vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_y$

$N - P = 0$
(No es mou en la direcció vertical.)

Si agafem l'equació de l'eix *x* i canviem l'expressió de la força de fricció:

$-\mu \cdot N = m \cdot a$ (1)

Calculem la normal ara de l'expressió de l'eix *y*:

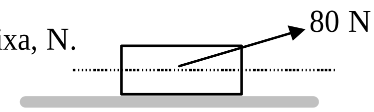
$N = P = m \cdot g$ i la posem a (1)

$-\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$, simplifiquem les masses a costat i costat de l'expressió i trobem μ:

m = -a/g = -(-5)/9'8 = **0'51** *(Recordeu que el coeficient de fricció no té unitats!)*

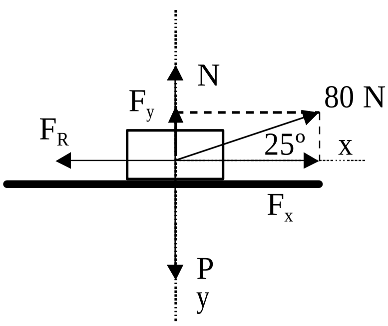
E.4.2. Una caixa de 20 kg, en repòs, es troba a terra amb un coeficient de fricció de 0.2. L'empenyem amb una força de 80 N que forma un angle de 25º amb el terra, tal com indica la figura. Calculeu:

a) La força normal que fa el terra contra la caixa, N.
b) L'acceleració amb què es mou la caixa.
c) L'espai recorregut al cap de 10 segons.



Solució

Primer de tot, cal dibuixar el diagrama del cos lliure:



Els eixos per descompondre les forces són el de la direcció del moviment i el seu perpendicular (*x* i *y* de la figura). Descomponem la força de 80 N en les seves dues components, F_x i F_y, i els seus mòduls els calculem per trigonometria:

$\sin 25º = \dfrac{F_{1y}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que

$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 25º = 80 \text{ N} \cdot \sin 25º = 33'8 \text{ N}$

$\cos 25º = \dfrac{F_{1x}}{F_1}$ i d'aquí obtenim que

$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 25º = 80 \text{ N} \cdot \cos 25º = 72'5 \text{ N}$

a) Si volem calcular la força normal, N, caldrà aplicar la segona llei de Newton a l'eix vertical:

$\Sigma\vec{F}_y = m\cdot\vec{a}_y$ on $a_y = 0$, ja que no hi ha moviment en la direcció vertical.

$P - F_y - N = 0$, i d'aquí traiem N:

N = P - F_y = 20·9'8 – 33'8 = **162'2 N**

b) Si volem calcular l'acceleració, caldrà aplicar la segona llei de Newton, però a l'eix horitzontal:

$\Sigma\vec{F}_x = m\cdot\vec{a}_x$, on a_x és l'acceleració amb què es mou la caixa, que li diem *a*.

$F_x - F_R = m\cdot a$ canviant $F_R = \mu\cdot N$

72'5 - 0'2·162'2 = 20·a

a = 40'06/20 = **2 m/s²**

c) Per calcular la distància recorreguda podem utilitzar les fórmules de cinemàtica:

$$\boxed{\mathbf{x = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2}}$$

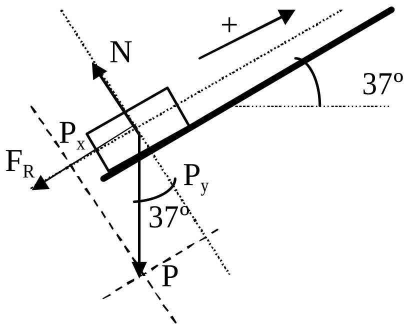
Sabent que x_0 = 0 m, v_0 = 0 m/s (inicialment està en repòs), *a* = 2 m/s², podem calcular el desplaçament:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^2 = \mathbf{100\ m}$$

E.4.3. Un cos de massa *m* és a la part més baixa d'un pla inclinat de 37º, és llançat cap amunt a una velocitat de 20 m/s i arriba a recórrer 20 m. Determineu:

a) El coeficient de fricció entre el cos i el pla.
b) La velocitat amb què tornarà a arribar a baix.

a. El coeficient de fricció s'obté a partir de la força de fricció, ja que $F_R = \mu\cdot N$; per tant, hem de dibuixar el diagrama del cos lliure i després plantejar les lleis de Newton en forma vectorial o separant les dues components directament (eix *x* / eix *y*):



Marquem els eixos, tenint en compte la direcció del moviment, que serà positiva, i l'eix perpendicular. En aquests eixos, l'única força que caldrà descompondre és la força pes, P. Seguint el mateix procediment que hem utilitzat a l'exercici 1, podem identificar l'angle de 37º en el triangle format pel pes i les seves components, i d'aquesta manera calcular les components Px i Py en funció de la massa, ja que aquesta és un valor *m*:

$P_x = P\cdot \sin 37º = m\cdot g \cdot \sin 37º = 5'87\ m\ \ N$
$P_y = P\cdot \cos 37º = m\cdot g\cdot \cos 37º = 7'59\ m\ \ N$

Aplicant les lleis de Newton a cada un dels eixos, obtindrem:

Eix x:	*Eix y:*
$-F_R - P_x = m\cdot a$	$N - P_y = 0$
$-\mu N - 5'87m = m\cdot a$	$N = 7'59m\ \ N$

Substituint el valor de la força normal N a l'expressió de l'eix *x*, s'obté:

$-7'59m\cdot\mu - 5'87m = m\cdot a$

I simplificant les masses obtenim:

$-7'59\mu - 5'87 = a$

Per trobar el coeficient de fricció ens cal, doncs, determinar el valor de l'acceleració. Com que sabem que $v_0 = 20$ m/s i que recorre $\Delta x = 20$ m, utilitzem la fórmula de cinemàtica:

$v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta x,$
$0 = 20^2 + 40a$
a = $-400/40 =$ **-10 m/s²**

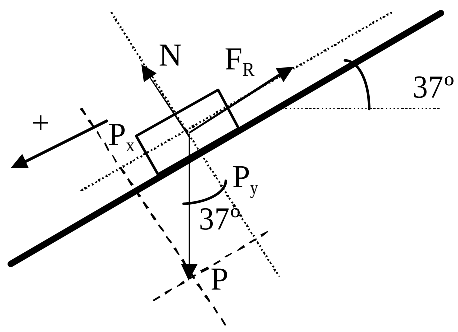
i ara calculem el valor del coeficient de fricció:
$-7'59\mu - 5'87 = -10$

Així:
m **=** (-10 + 5'87) / -7'59 = **0'54**

b. Per trobar la velocitat amb què arriba a baix, utilitzarem la fórmula de cinemàtica següent:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta x}$$

Caldrà calcular l'acceleració de baixada, que no és la mateixa mentre pujava, ja que la força de fricció canvia de sentit:



Les components del pes no hauran canviat de valor. Les noves equacions a cada un dels eixos les escriurem de la manera següent:

Eix x:	*Eix y:*
$- F_R + P_x = m \cdot a$	$N - P_y = 0$
$- \mu N + 5'87m = m \cdot a$	$N = 7'59m$ N

Coneixent el valor del coeficient de fricció, que hem obtingut a l'apartat *a*, podem arreglar l'equació a l'eix *x* i calcular l'acceleració *a* de baixada:

$- 0'54 \cdot 7'59m + 5'87m = m \cdot a$

Si ara simplifiquem les masses:

$-4'1 + 5'87 = a$

a = 1'77 m/s²

Coneixent l'acceleració, busquem ara la velocitat amb què arriba a baix:

$v^2 = 2 \cdot (1'77) \cdot 20 = 70'8$

v = 8'41 m/s

Tornem-hi…

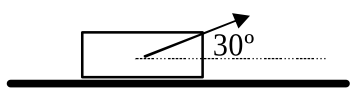
T.4.1. Un bloc de 20 kg es troba al damunt d'una taula amb un coeficient de fricció de valor 0'25. L'estirem amb una força de 80 N en direcció paral·lela a la taula.

a) Representeu gràficament el diagrama del cos lliure per a aquesta situació.
b) Calculeu el valor de la força normal, N.
c) Calculeu l'acceleració amb què es mou el bloc.
d) Determineu el temps que triga a recórrer 10 metres per damunt de la taula.

Solució: b) 196 N, c) 1'55 m/s², d) 3'6 s.

P.4.2 Un bloc de massa 10 kg es troba inicialment en repòs, damunt d'un pla horitzontal que té un coeficient de fricció de 0'15. L'estirem amb una força de 30 N que forma un angle de 30º amb l'horitzontal. Calculeu:

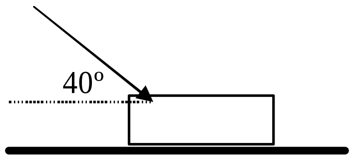
a. L'acceleració que adquireix.
b. La força normal.
c. La velocitat que porta quan ha recorregut 10 metres pel pla horitzontal.



Solució: a) 1'35 m/s², b) 83 N, c) 5'2 m/s.

P.4.3 Empenyem amb una força de 150 N un bloc de 30 kg, inicialment en repòs, amb un angle de 40º, tal com indica la figura. Si entre el bloc i la taula hi ha un coeficient de fricció de 0’1, calculeu:

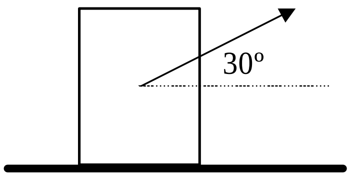
a. El valor de la força normal, N.
b. L’acceleració que adquireix.
c. El desplaçament que ha fet quan han transcorregut 5 segons.



Solució: a) 390’4 N, b) 2’53 m/s^2, c) 31’65 m.

P.4.4 Un cos de massa 2 kg es troba en repòs sobre una superfície horitzontal amb un coeficient de fricció de 0’3. L’estirem amb una força F que forma un angle de 30º respecte a l’horitzontal, tal com indica la figura.

a. Feu un diagrama de totes les forces que actuen sobre el cos i descomponeu-les segons els eixos que considereu adequats.
b. Quin ha de ser el valor de la força F perquè aquest cos es desplaci amb una acceleració de 2 m/s^2?
c. Quant val, en el cas de l’apartat *b*, la força normal?
d. Quin ha de ser el valor de la força F perquè aquest cos es desplaci a una velocitat constant?
e. Quant val, en el cas de l’apartat *d*, la força normal?



Solució: b) 9’78 N, c) 14’7 N, d) 5’82 N, e) 16’69 N.

P.4.5 Una massa de 2 kg és llançada des de la part baixa d’un pla inclinat de 20º amb una velocitat de 18 m/s. Si el coeficient de fricció és de 0’2, determineu:

a. L’acceleració de pujada
b. El temps que trigarà a parar-se.
c. El recorregut que farà abans de parar-se.
d. L’acceleració quan baixi.
e. El temps que trigarà a baixar.

Solució: a) -5’2 m/s^{2,}, b) 3’46 s, c) 31’15 m, d) 1’51 m/s^2, e) 6’44 s.

P.4.6 Una massa *m* es troba a la part més baixa d’un pla inclinat de 30º i és llançada cap amunt amb una velocitat de 10 m/s, i es mou pel pla inclinat fins que s’atura. Si el coeficient de fricció entre el pla inclinat i el cos és de 0’2:

a. Feu el diagrama del cos lliure i calculeu l’acceleració del cos.
b. Calculeu el temps que està lliscant pel damunt del pla inclinat fins a aturar-se.
c. Calculeu la distància que recorre pel pla inclinat abans d’aturar-se.

Solució: a) -6’6 m/s^2, b) 1’5 s, c) 7’57 m.

P.4.7 Un cos de massa *m* rellisca per un pla inclinat des d'una altura de 2 m. Si la inclinació del pla és de 25º , la velocitat inicial cap a baix és de 5 m/s i la velocitat amb què arriba el cos a baix és de 6 m/s, determineu:

a. L'acceleració amb què baixa el cos (feu el diagrama del cos lliure)
b. El coeficient de fricció del cos amb el pla inclinat.

Solució: a) 1'16 m/s^2, b) 0'33.

P.4.8 Una massa de 10 kg cau per un pla inclinat sense fricció en un instant en què la seva velocitat és de 5 m/s, i quan ha avançat 4 m la seva velocitat és de 8 m/s. Determineu:

a. L'acceleració amb què cau el cos pel pla inclinat.
b. L'angle d'inclinació del pla inclinat.
c. Quin hauria de ser el coeficient de fricció perquè el cos baixés a velocitat constant pel pla inclinat?

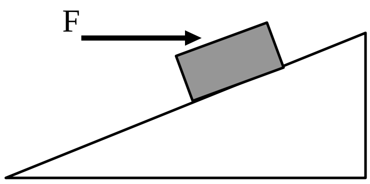
Solució: *a)* 4'875 m/s^2, b) 29'83º, c) 0'57.

P.4.9 Una massa *m* es troba a la part més baixa d'un pla inclinat de 30º i és llançada cap amunt amb una velocitat de 20 m/s. Després de recórrer 3 m amb un coeficient de fricció de 0'2 salta pel final del pla inclinat. Calculeu:

a. L'acceleració que porta el cos mentre puja pel pla inclinat.
b. La velocitat que porta el cos quan arriba a dalt del pla inclinat.
c. Quants segons trigarà per arribar al terra?

Solució: *a)* -6'6 m/s^2, b) 18'98 m/s, c) 2'08 s.

P.4.10 Calculeu la força que cal aplicar en sentit horitzontal perquè la massa de 2 kg de la figura no es mogui cap amunt. Sobre el pla inclinat hi actua un coeficient de fricció de 0'3, i l'angle d'inclinació és de 60º. Quant val la força normal que actua sobre el bloc?



Solució: a) 82'97 N, b) 81'65 N.

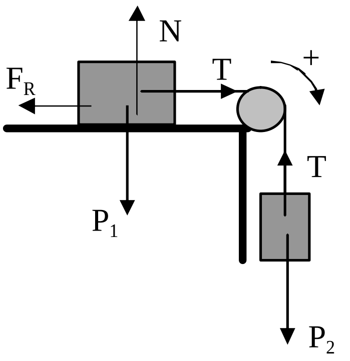
Exercicis, ara amb politges…

E.4.4. Una politja de baixa fricció es troba al cantell d'una taula horitzontal en la qual hi ha una massa de 6 kg amb la qual exerceix una força de fricció de coeficient μ = 0'25. Aquesta massa està lligada a un fil que passa per una politja i a l'altre extrem hi penja una massa de 2 kg. Determineu:

a) L'acceleració del sistema.
b) La tensió de la corda.

Primerament caldrà dibuixar el sistema i indicar les forces que actuen sobre cada cos. És important, en aquests tipus de problemes, escollir bé el sentit del moviment, ja que aquest sentit ens determina el sentit d'algunes forces, com ara la força de fricció:

a)



Cal indicar que les tensions són forces d'acció i reacció, i per tant, segons la tercera llei de Newton, són iguals i de sentit contrari. De fet, el cos 1 estira cap amunt el cos 2 amb una força igual a la força amb què el cos 2 estira cap avall el cos 1. Aquestes forces que es transmeten mitjançant cordes o cables s'anomenen *tensions.* Apliquem les lleis de Newton a cada component de cada un dels cossos i obtenim les equacions següents.

Cos 1: *Eix x*	*Eix y*
$- F_R + T = m_1 \cdot a$	$N - P_1 = 0$
$- \mu N + T = m_1 \cdot a$	$N = P_1 = m_1 \cdot g = 58'8$ N

Si volem trobar l'acceleració ens cal una altra equació, ja que tenim dues incògnites: *T* i *a*.

Cos 2: *Eix y* (les forces només estan en aquest eix *y*)

$$P_2 - T = m_2 \cdot a$$

Si ara ajuntem les dues equacions:

$$-\mu N + T = m_1 \cdot a$$
$$\underline{P_2 - T = m_2 \cdot a}$$
$$-\mu N + P_2 = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$\mathbf{a} = \frac{-\mu \cdot N + P_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{0'61\ m/s^2}$$

b) Per calcular la tensió agafem una de les dues equacions que tenim (la del cos 1 o la del cos 2, és un sistema, podem substituir on vulguem) i substituïm el valor de l'acceleració. Després aïllem *T*:

Escollim la del cos 2,

$$P_2 - T = m_2 \cdot a$$

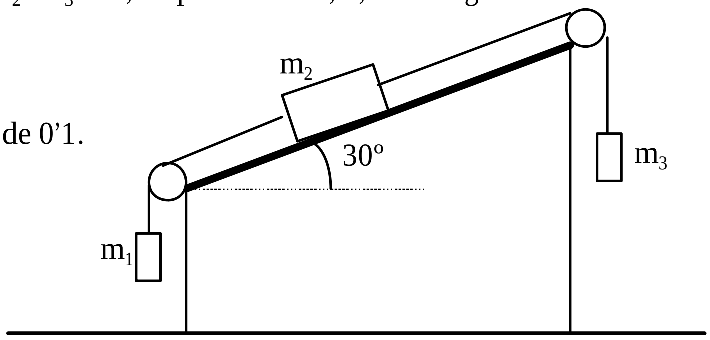
$$\mathbf{T} = P_2 - m_2 \cdot a = \mathbf{18'4\ N}$$

E.4.5. En la figura, les masses m_1, m_2 i m_3 són, respectivament, 4, 10 i 2 kg. Calculeu:

a) L'acceleració del sistema.

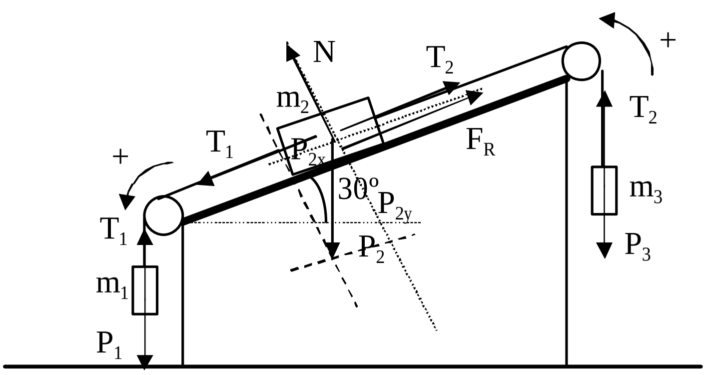
b) Les tensions de les cordes.

Suposeu un coeficient de fricció de 0'1.



Solució

a) Dibuixem les forces que actuen sobre cada un dels blocs:



Com que el cos que pesa més és la massa 2, és d'esperar que el sentit de moviment sigui cap a la massa m_1. Aquest sentit l'escollirem com a positiu, i caldrà descompondre la força pes en les seves components, P_x i P_y.
Les tensions són diferents quan uneixen cossos diferents: hi ha una T_1 entre els cossos 1 i 2, i una tensió T_2 entre els cossos 2 i 3.

Aplicant la segona llei de Newton a cada bloc:

Cos 1: *Eix y*

$P_1 - T_1 = m_1 \cdot a$ (1)

Cos 2: *Eix x:*

$T_1 + P_{2x} - T_2 - F_R = m_2 \cdot a$

Eix y:

$N - P_{2y} = 0; N = P_{2y}$
$N = m_2 \cdot g \cdot \sin 30°$

Cos 3: *Eix y:*

$T_2 - P_3 = m_3 \cdot a$ (2)

Si sumem les equacions del moviment dels tres cossos:

$P_1 - \cancel{T_1} = m_1 \cdot a$
$\cancel{T_1} + P_{2x} - \cancel{T_2} - F_R = m_2 \cdot a$
$\cancel{T_2} - P_3 = m_3 \cdot a$
$P_1 + P_{2x} - F_R - P_3 = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$

$$a = \frac{m_1 \cdot g + m_2 \cdot g \cdot \sin 30^\circ - \mu \cdot N - m_3 \cdot g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 \cdot g + m_2 \cdot g \cdot \sin 30^\circ - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos 30^\circ - m_3 \cdot g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Substituint valors s'obté $\boxed{\mathbf{a = 3'75\ m/s^2}}$

b) Si ara volem calcular les tensions, haurem d'escollir les equacions adients i substituir el valor de l'acceleració:

De l'equació (1) traiem T_1:

$\mathbf{T_1} = -m_1 \cdot a + m_1 \cdot g$ **= 24'2 N**

De l'equació (2) traiem T_2:

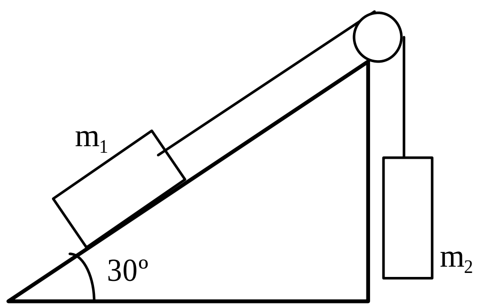
$\mathbf{T_2} = m_3 g + m_3 a$ **= 27'1 N**

Tornem-hi...

P.4.11 Una massa de 4 kg es troba damunt d'una taula horitzontal de coeficient de fricció 0,15 i està lligada a una de 8 kg que penja per l'altre costat. Determineu l'acceleració del sistema i la tensió de la corda.
Solució: a) 6'04 m/s^2, b) 26'74 N.

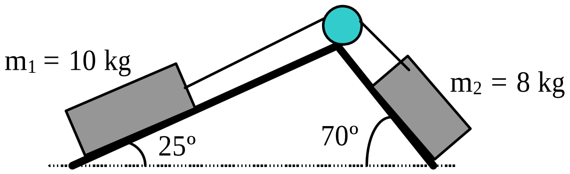
P.4.12 Una massa de 4 kg es troba al damunt d'un pla inclinat de 30º lligat a una de 6 kg mitjançant una politja situada a l'extrem superior del pla inclinat. La massa de 6 kg penja lliurement per l'altre costat del pla. El coeficient de fricció entre la massa de 4 kg i el pla és de 0'3.

a) Dibuixeu el diagrama del cos lliure per a cada un dels cossos i descomponeu les forces que calgui respecte al sistema d'eixos adient.
b) Calculeu l'acceleració del sistema.
c) Calculeu la tensió de la corda.
d) Calculeu el temps que triga la massa de 6 kg a baixar 2 metres.
e) Quin hauria de ser el coeficient de fricció màxim que permetés el moviment?



Solució: b) 2'9 m/s^2, c) 41'4 N, d) 1'17 s, e) 1'15.

P.4.13 Calculeu l'acceleració i la tensió en el sistema de la figura:

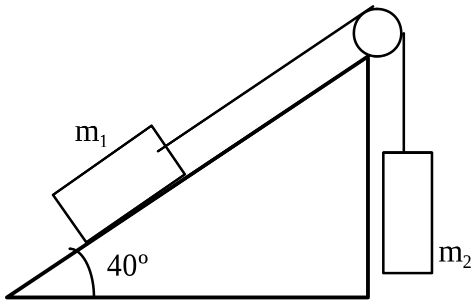


μ_1(entre cos 1/pla incl.) = 0,2
μ_2(entre cos 2/pla incl.) = 0,1

Solució: 0'65 m/s^2, T = 65'7 N.

P.4.14 Una massa m_2 de 3 kg penja d'una corda sense massa apreciable que està lligada a una massa m_1 = 5 kg que es troba en un pla inclinat d'angle 40º.

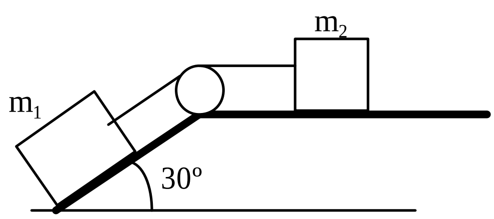
a) Si no hi hagués fricció, quina seria l'acceleració del sistema?
b) Sabem que l'acceleració és, en realitat, de 0'2 m/s^2. Determineu el coeficient de fricció en el pla inclinat.



Solució: a) 0'26 m/s^2, b) 0'013.

P.4.15 Dos blocs de masses m_1 = 10 kg i m_2 = 12 kg es troben sobre un pla inclinat i una superfície horitzontal, tal com indica la figura:

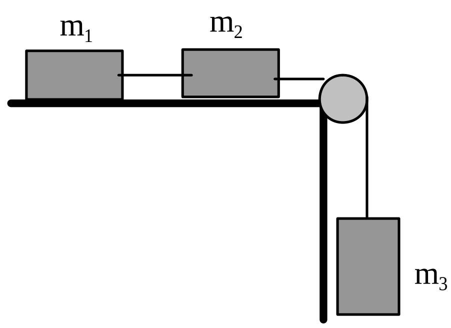
a) Quin ha de ser el coeficient de fricció, si en deixar-los anar el conjunt es mou amb una velocitat constant?
b) Si afegim una massa de 5 kg sobre la massa m_1, calculeu l'acceleració del sistema i la tensió de la corda.



Solució: a) 0'24, b) 0'54 m/s^2.

P.4.16 Dos blocs de masses m_1 = 15 kg i m_2 = 10 kg estan sobre una superfície horitzontal amb un coeficient de fricció de 0'25. Es connecten mitjançant una corda de massa negligible. Una massa m_3 de 15 kg penja com es veu a la figura. Calculeu:

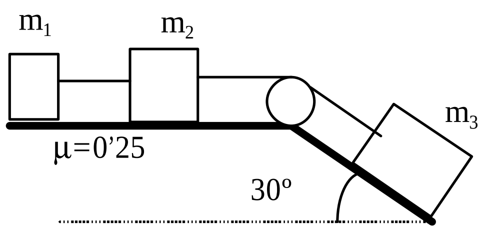
a) L'acceleració del sistema.
b) La tensió de cada corda.



Solució: a) 2'14 m/s^2, b) T = 69 N i T' = 114'9 N.

P.4.17 Tenim tres masses de m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg i m_3 = 8 kg, unides tal com s'indica a la figura mitjançant una corda inextensible de massa negligible.

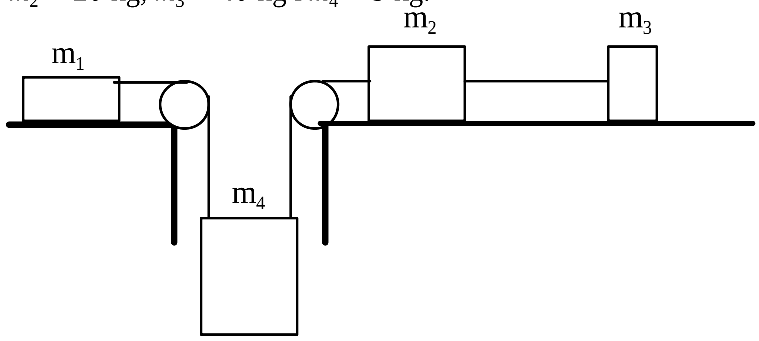
a) Raoneu cap a on es mourà el sistema.



b) Dibuixeu el diagrama del cos lliure de cadascun dels blocs tenint en compte que hi ha fricció per a la superfície horitzontal i no per al pla inclinat.
c) Calculeu l'acceleració del sistema.
d) La velocitat de cada bloc quan la massa m_3 hagi baixat una altura de 8 metres respecte a la seva posició inicial de repòs.

Solució: c) 2'89 m/s^2, d) 6'8 m/s.

P.4.18 Calculeu les tensions de les cordes, així com l'acceleració del sistema de la figura, suposant un coeficient de fricció dinàmic de 0'15. Les masses valen m_1 = 10 kg, m_2 = 20 kg, m_3 = 40 kg i m_4 = 5 kg.

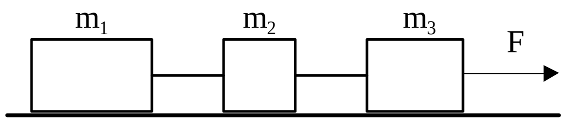


Solució: a = 4'54 m/s^2, T = 30 N, T' = 60'1 N, T'' = 150'2 N

P.4.19 Calculeu el valor del coeficient de fricció que actua en el sistema de la figura sabent que m_1 = 1 kg, m_2 = 500 g i m_3 = 1'5 kg, així com les tensions que apareixen en les cordes, sabent que l'estirem amb una força de 13'35 N.

L'acceleració del sistema és:

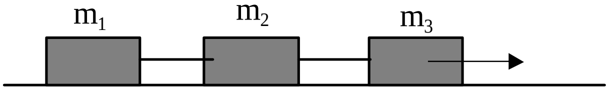
$\boxed{a = 2 \text{ m/s}^2}$



Solució: 0'25

P.4.20 Quina força cal fer en el sistema de la figura perquè tot el sistema es mogui amb una acceleració d'1 m/s^2?

μ = 0'3
m_1 = 5 kg
m_2 = 10 kg
m_3 = 5 kg



Solució: 78'8 N

P.5. Tercera llei de Newton. Forces d'acció i reacció

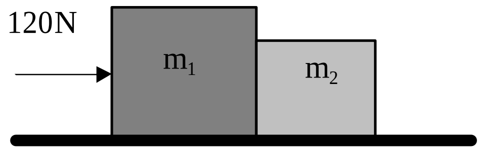
Definicions

T.5.1. ***Tercera llei de Newton***. El tercer principi de la dinàmica (tercera llei de Newton: principi d'acció i reacció) diu:

> *Si un cos exerceix una força (acció) sobre un altre, aquest segon exerceix simultàniament sobre el primer una altra força (reacció) igual i de sentit contrari.*

És a dir, les forces sempre es presenten de dues en dues: mai no existeix només l'acció d'un cos sobre un altre, sinó una interacció mútua entre tots dos.

E.5.1. Calculeu l'acceleració amb què es mouen els blocs sobre una superfície horitzontal de coeficient de fricció dinàmic 0'3 i la força mútua de contacte que s'exerceixen sabent que m_1=10 kg i m_2=4 kg si apliquem sobre la massa m_1 una força de 120 N.

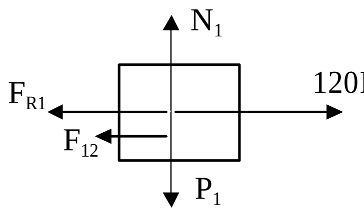


Solució

Primerament, cal dibuixar el diagrama del cos lliure per a cada un dels blocs. S'han de col·locar les forces de contacte que es fan els dos cossos (forces iguals i de sentit contrari), que anomenarem F_{12} i F_{21}. Cal fixar-se que si empenyem el cos 1, aquest farà una força sobre el cos 2 (F_{12}: acció), però el cos 2 farà una força igual i de sentit contrari sobre el cos 1 (F_{21}: reacció). És el que ens diu la tercera llei de Newton.

Dibuixem, doncs, els diagrames del cos lliure per a cada bloc:

Cos 1:

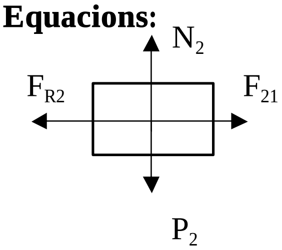


Equacions:

$$\begin{cases} 120 - F_{R1} - F_{12} = m_1 a \\ N_1 - P_1 = 0 \end{cases}$$

Cos 2:

Equacions:



$$\begin{cases} F_{21} - F_{R2} = m_2 a \\ N_2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

(Fixeu-vos que l'acceleració amb què es mouen els dos cossos és la mateixa.)

Canviant el valor de la força de fricció per l'expressió $F_R = \mu \cdot N$, i buscant els valors de la força normal a partir del balanç fet a la direcció vertical, obtenim:

$N_1 = P_1 = 10 \cdot 9'8 = \boxed{98\ \text{N}}$

$N_2 = P_2 = 4 \cdot 9'8 = \boxed{39'2\ N}$

$F_{R1} = \mu \cdot N_1 = 0'3 \cdot 98 = \boxed{29'4\ N}$

$F_{R2} = \mu \cdot N_2 = 0'3 \cdot 39'2 = \boxed{11'76\ N}$

Agafant les dues equacions de la component horitzontal per als dos cossos, obtenim:

$$\begin{cases} 120 - 29'4 - F_{12} = 10a \\ F_{21} - 11'76 = 4a \end{cases}$$

Si les sumem, com que F_{12} i F_{21} són iguals, podem aïllar l'acceleració *a*:

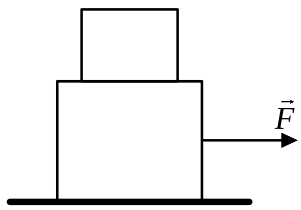
$a = 5'63\ m/s^2$

Si substituïm a la segona equació podem obtenir el valor de la força de contacte:

$F_{12} = F_{21} = 34'28\ N$

E.5.2. Un bloc de 3 kg està situat al damunt d'un altre cos de 5 kg, que està situat sobre una taula sense fricció. El coeficient de fricció estàtic entre els dos cossos val 0'3 i el dinàmic val 0'2.

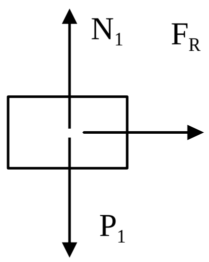
a) Calculeu el valor de la força màxima que podem exercir sobre el cos gran perquè tots dos es moguin amb la mateixa acceleració. Quin és el valor d'aquesta acceleració en aquest cas?
b) Si apliquem ara una força que val la meitat del valor obtingut a l'apartat anterior, calculeu les acceleracions dels dos cossos.



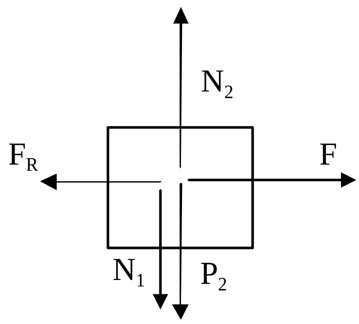
Solució

a) Dibuixem el diagrama del sòlid lliure per a cada un dels objectes. Cal anar amb compte en diversos aspectes: la força és aplicada a l'objecte gran, per tant, tal com diu la primera llei de Newton, sobre el petit no hi actua cap força i per tant tendirà a estar en repòs. Però el gran té tendència a moure's cap endavant; per tant, apareixerà una força de fricció sobre el petit que anirà cap endavant, ja que aquest objecte podríem dir que té tendència a quedar-se enrere. Aquesta força de fricció la fa el cos gran sobre el petit; per tant, el petit també fa una força de fricció igual i de sentit contrari sobre el gran. A més, el principi d'acció i reacció també ens diu que si el gran fa força per aguantar el petit (N_1 ?), el petit fa una força igual i de sentit contrari sobre el gran (N_1 ?). Tot això ens queda reflectit al diagrama del sòlid lliure:

Cos petit:



Cos gran:



Escrivim les equacions del moviment, sabent que $F_R = \mu_e \cdot N_1$ (*el coeficient que hem d'utilitzar és l'estàtic, ja que l'enunciat ens demana la força perquè tots dos es moguin alhora: justament quan es trenqui el valor de la fricció estàtica, el cos petit començarà a moure's amb una acceleració diferent del gran*).

Eix x

$$\begin{cases} F_R = m_1 \cdot a \\ F - F_R = m_2 \cdot a \end{cases}$$

Eix y

$$\begin{cases} N_1 - P_1 = 0 \\ N_2 - N_1 - P_2 = 0 \end{cases}$$

Canviant la fricció i substituint valors, s'obté:

$\mathbf{F_R = 8'82\ N}$

$\mathbf{a = 2'94\ m/s^2}$

$$\boxed{F = 23'52\ \text{N}}$$

b) Si apliquem una força que val la meitat de l'anterior, sabem que amb aquesta força els dos cossos es continuaran movent junts, ja que la força màxima que podem fer de manera que es desplacin amb la mateixa acceleració és 23'52 N.

$F = 11'76$ N

Amb aquesta força podem calcular la força de fricció i l'acceleració (*tingueu en compte que ara la força de fricció no val* $m \cdot N_1$ *, ja que ara no s'assoleix el valor màxim!*):

$$\begin{cases} F_R = 3 \cdot a \\ 11'76 - F_R = 5 \cdot a \end{cases}$$

Sumant-les obtenim l'acceleració, i substituint després a la primera equació, s'obté la força de fricció:

$$\boxed{a = 1'47\ \text{m/s}^2} \qquad \boxed{F_R = 4'41\ \text{N}}$$

Tornem-hi…

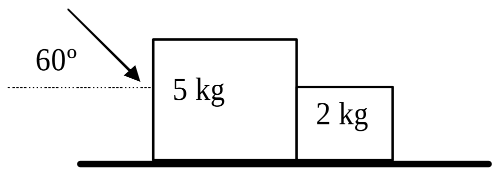
P.5.1 Si al problema resolt E.5.2 estirem la massa gran amb una força de 40 N, quines serien les acceleracions de cada un dels blocs? I la fricció entre ambdos blocs?

Solució: el de 5 kg es mou a 6’82 m/s^2, el de 3 kg es mou a 1’96 m/s^2

P.5.2 Repetiu el problema resolt E.5.1, però en el cas que apliquéssim la força de 120 N sobre el bloc de massa 4 kg.

Solució: a = 5’63 m/s^2, F_{12} = 56’31 N

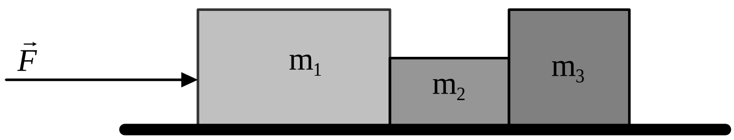
P.5.3 Calculeu les forces de contacte que apareixen entre els dos blocs de la figura, quan el valor de la força $\vec{F}$ és de 100 N en la direcció que està dibuixada a la figura i si no hi actua fricció.



Solució: 7’14 m/s^2, F_{12} = 14’28 N.

P.5.4 Calculeu les forces de contacte que apareixen entre els cossos de la figura quan s’aplica horitzontalment una força de 140 N sobre el cos m_1, sabent que en tota la superfície horitzontal hi ha un coeficient de fricció dinàmic de 0’25.

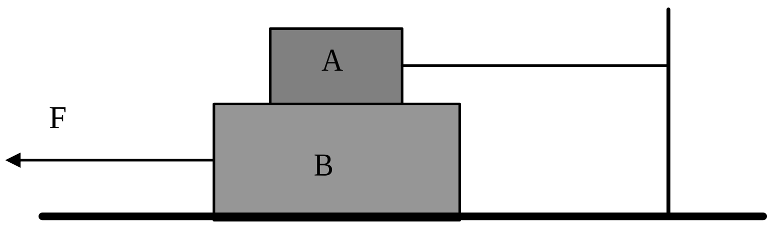
Dades: m_1 = 10 kg, m_2 = 4 kg, m_3 = 6 kg.



Solució: 4’55 m/s^2, F_{12} = 70 N i F_{23} = 42 N

P.5.5 El bloc A de la figura inferior té una massa de 4 kg, i el bloc B de 8 kg. El coeficient de fricció entre les superfícies és de 0’25.

c) Calculeu la força F necessària per arrossegar el bloc B cap a l’esquerra a velocitat constant si el cos A es manté en repòs.
d) Quina tensió suporta el



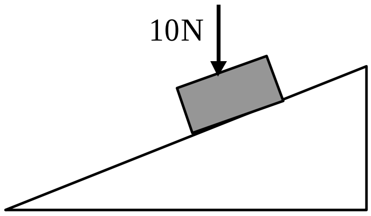
cable en aquest cas?

Solució: a) 39’2 N, b) 9’8 N

P.5.6 Un camió transporta un bloc rectangular de 2 m d’alçada i 1 m d’amplada. Sabent que el coeficient de fricció entre el bloc i la caixa és de 0’6, calculeu l’acceleració màxima que pot donar-se al camió perquè el bloc no llisqui sobre la caixa.

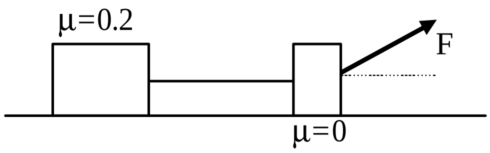
Solució: 5’88 m/s^2

P.5.7 Sobre una massa de 4 kg s’aplica una força vertical de 10 N, tal com indica la figura. L’angle d’inclinació és de 30º. Si sobre el pla hi actua un μ estàtic de 0’3, calculeu si aquesta massa es mourà, i si es mou, calculeu l’acceleració amb què es mou (μ dinàmic val 0’2). Calculeu el valor de la força normal.



Solució: 4’02 m/s^2, N = 42’6 N.

P.5.8 Dos blocs de masses 4 kg i 8 kg, units per una corda, es mouen sobre una superfície horitzontal. El fregament del primer amb el terra és negligible i per al segon el coeficient de fricció dinàmic amb el terra val 0’2. S’aplica una força F = 50 N al primer cos, que forma un angle de 40º amb l’horitzontal.



e) Dibuixeu totes les forces que actuen sobre cada un dels cossos.
f) Calculeu l’acceleració dels cossos i el valor de la tensió de la corda.
g) Expliqueu quines de les forces que heu dibuixat són d’acció i reacció.

Solució: b) 1’88 m/s^2 30’76 N

P.6. Dinàmica del moviment circular

Definicions

P.6.1 ***Conceptes previs: acceleració normal i acceleració tangencial***. Recordem que si una partícula es mou amb una velocitat v seguint una trajectòria circular de radi R, l’acceleració a què està sotmesa aquesta partícula té dues components:

Mòdul de l’acceleració normal: $$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}} \qquad (4)$$

Mòdul de l’acceleració tangencial: $$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}} \qquad (5)$$

P.6.2 ***Aplicacions problemes de dinàmica del moviment circular***. Si el moviment és un moviment circular uniforme, llavors només hi actua acceleració normal (ja que el vector velocitat només canvia de direcció, però no pas de valor del mòdul). Per resoldre els problemes de dinàmica del moviment circular caldrà dibuixar totes les forces que actuen sobre el cos que hem d'estudiar i descompondre aquestes forces segons uns eixos que vagin en direcció paral·lela i perpendicular a l'acceleració normal. Traslladarem aquests eixos al cos i després aplicarem la segona llei de Newton i resoldrem les incògnites que ens apareguin a cada component.

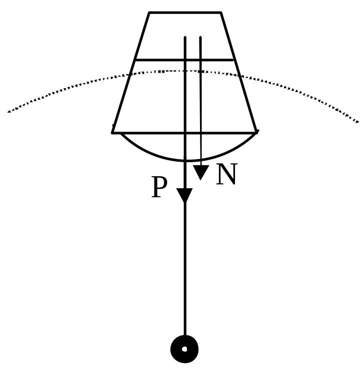
Exercicis

E.6.1. Es fa girar una galleda d'aigua que descriu una trajectòria circular en el pla vertical d'1 metre de radi. Calculeu: (massa d'aigua = 1'5 kg)

a) La força que fa la galleda sobre l'aigua a la part més alta, si la velocitat a la part més alta és de 5 m/s.
b) La força que fa la galleda sobre l'aigua a la part més baixa, si la velocitat en aquest punt és de 7 m/s.
c) La força que fa la galleda sobre l'aigua quan es troba al mateix nivell del centre de la circumferència i la velocitat és de 6 m/s.
d) La força que fa la galleda sobre l'aigua quan es troba 20 cm per sobre del centre de la circumferència i porta una velocitat de 6'4 m/s.
e) Les acceleracions normal, tangencial i total en el punt *c* i en el punt *d*.
f) La velocitat mínima amb què ha de girar la galleda perquè l'aigua no es vessi.

Solució

a) Fem el diagrama del sòlid lliure amb les forces que actuen sobre la galleda en el punt més elevat:
ens interessa calcular la força que fa la galleda sobre l'aigua (N), i com que descriu un moviment circular, sabem que hi actua una acceleració normal que sempre està dirigida cap al centre de la circumferència que descriu.



Així, aplicant la segona llei de Newton:

$P + N = m \cdot a_n \Longrightarrow N = m \cdot v^2/R - mg$

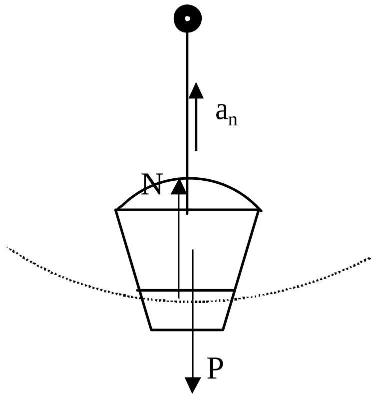
on hem substituït el valor de l'acceleració normal pel seu valor: v^2/R

$N = 1'5 \cdot 5^2/1 - 1'5 \cdot 9'8 = \boxed{22'8\ N}$

b) Fem un altre cop el diagrama del sòlid lliure que actua sobre l'aigua, però en el punt més baix:
Aplicant la segona llei de Newton, i prenent la direcció de l'acceleració normal com a positiva, s'obté:

$N - P = m \cdot a_n \Longrightarrow N = m \cdot v^2/R + mg$

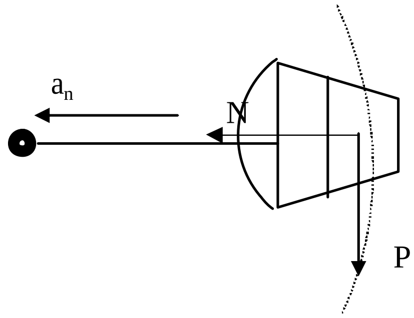
$\boxed{N = 88'2\ N}$



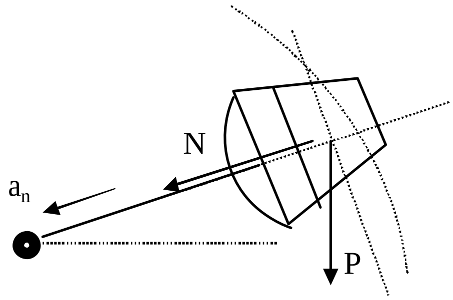
c) Tornem a dibuixar el diagrama del sòlid lliure en aquesta direcció i plantegem l'equació per a les forces en la direcció de l'acceleració normal:

$N = m \cdot a_n \Longrightarrow \boxed{N = 54\ N}$

(Fixeu-vos que el pes P no intervé en aquesta equació, ja que en la direcció que actua l'acceleració normal només hi ha la força de la galleda, N.)



d) Quan es troba 20 cm per sobre del centre de la circumferència, si dibuixem les forces que actuen sobre l'aigua, veiem que si volem aplicar les lleis de Newton caldrà descompondre-les segons uns eixos que tinguin la mateixa direcció que l'acceleració normal i el perpendicular a aquesta acceleració. En aquests eixos la normal ja està bé però el pes P s'ha de descompondre.



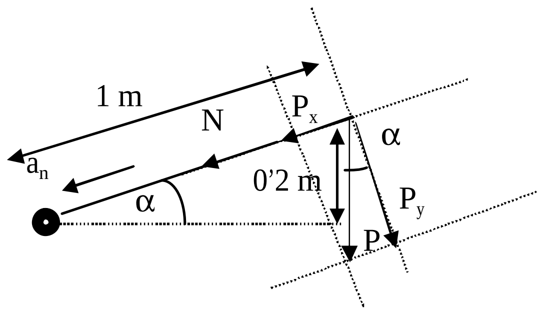
Busquem primer el valor de l'angle d'inclinació entre el cable i l'horitzontal:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{h}{L} = \frac{0'2}{1} = 11'31^{\circ}$$

Un cop conegut l'angle α, podem calcular el valor de les components del pes P:

$P_x = P \cdot \sin 11'31 = 2'88\ N$

$P_y = P \cdot \cos 11'31 = 14'41\ N$

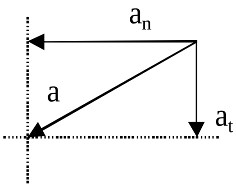


Aplicant ara la segona llei de Newton en la direcció de l'acceleració normal, obtenim:

$N + P_x = m \cdot a_n \Longrightarrow N = m \cdot v^2/R - 2'88$

N = 58’56 N

e) Punt *c*: en aquest punt l’acceleració normal val $\mathbf{a_n} = v^2/R = \mathbf{36\ m/s^2}$, l’acceleració tangencial (paral·lela a la velocitat) val la gravetat $\mathbf{a_t = 9'8\ m/s^2}$ i la total es calcula fent la suma vectorial de totes dues i després fent-ne el mòdul:



$a^2 = a_n^2 + a_t^2 \Longrightarrow$ **a = 37’31 m·s^{-2}**

En el punt *d*: $\mathbf{a_n} = v^2/R = \mathbf{40'96\ m/s^2}$, l’acceleració tangencial serà la indicada per la direcció de la component del pes P_y i per trobar-la caldrà aplicar la segona llei de Newton en aquesta direcció: $P_y = m \cdot a_t$ i d’aquí s’obté $\mathbf{a_t} = 9'8 \cdot \cos 11'31^o = \mathbf{9'61\ m/s^2}$. L’acceleració total s’obté de la mateixa manera que s’ha fet per al punt *c*: $\mathbf{a = 42'07\ m/s^2}$.

f) Si volem trobar la velocitat mínima perquè l’aigua no vessi caldrà fer un balanç de forces en el punt més alt (com a l’apartat *a*):

$N + P = m \cdot v^2/R$

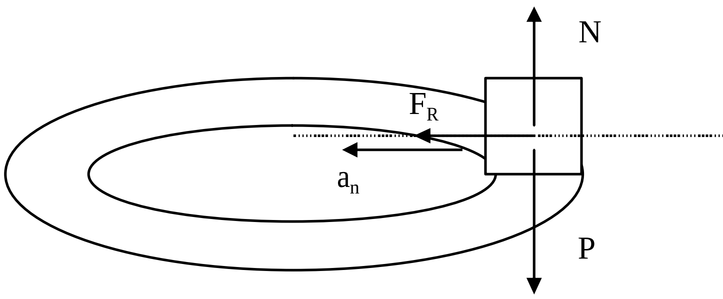
La velocitat serà mínima quan l’aigua comenci a vessar i en aquest moment la normal N val 0. Aplicant aquesta condició a l’equació anterior, s’obté:

$v_{min} = \sqrt{R \cdot g} = \boxed{3'13\ m/s}$

> E.6.2. En unes proves es comprova que el temps que triga un ciclista a donar una volta a una pista circular de 40 m de radi és de 45 km/h sense lliscar.
> a) Calculeu l’acceleració normal que actua sobre el ciclista.
> b) Quin és el valor del coeficient de fricció estàtic?

Solució

Dibuixem les forces que actuen sobre el ciclista: cal tenir en compte que la força de fricció actua cap a dins del cercle, ja que el ciclista té tendència a sortir de la pista i, per tant, la fricció actua en sentit contrari.



a) $a_n = v^2/R = 12'5^2/40 = \boxed{3'9\ m \cdot s^{-2}}$ *(Vigileu amb les unitats! Cal passar la velocitat al SI.)*

b) Si apliquem la segona llei de Newton en la direcció de l’acceleració normal, obtenim:

$$F_R = m \cdot a_n$$

Si ens fixem en la direcció vertical el ciclista ha d’estar en equilibri, llavors:

$$N = P = m \cdot g$$

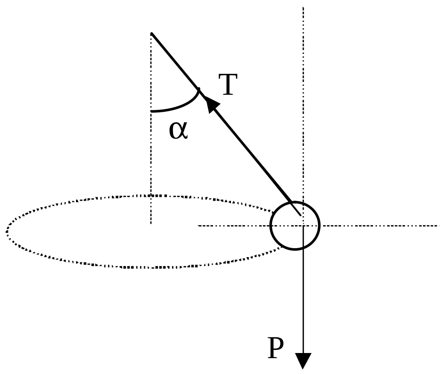
Canviant el valor de la F_R, obtenim:

$$\mu \cdot N = m \cdot a_n \Longrightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a_n$$

$$\mu = a_n / g = \boxed{0'4}$$ *(Recordeu que el coeficient de fricció no té unitats...)*

E.6.3. Una massa de 300 g penja del sostre mitjançant un cable d'1 m de longitud. Es fa girar a velocitat constant descrivint una circumferència en el pla horitzontal (pèndol cònic) de 0'5 m de radi. Si la tensió màxima que pot resistir la corda és de 100 N, calculeu l'angle d'inclinació del pèndol respecte a la vertical i la velocitat amb què gira el pèndol, en rpm.

Solució



Les forces que actuen sobre la massa de 300 g són: la tensió que fa el sostre per aguantar la massa (tensió T) i la força d'atracció terrestre (el pes, P). Apliquem la segona llei de Newton:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Haurem de descompondre les forces en uns eixos adients: sempre les descomponem mirant quina és la direcció de l'acceleració. Com que és un moviment circular uniforme, hi actua una acceleració normal cap al centre de la circumferència. Els eixos seran doncs: una direcció paral·lela cap al centre de la circumferència, i una altra direcció perpendicular a aquesta. Segons aquests eixos, caldrà descompondre la tensió en dues components. Anomenarem *x* la component que va en la mateixa direcció que l'acceleració normal, i *y* la que va en la direcció perpendicular. Aplicant la trigonometria obtenim:

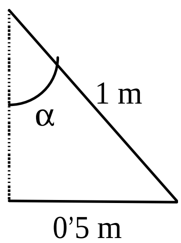
$T_x = T \cdot \sin \alpha$

$T_y = T \cdot \cos \alpha$

Aplicant la segona llei de Newton en cada una de les direccions escollides, s'obté:

$$\begin{cases} T_x = m \cdot a_n \\ T_y - P = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T \cdot \sin a = m \cdot \dfrac{v^2}{R} \\ T \cdot \cos a = m \cdot g \end{cases}$$

L'angle el podem trobar per trigonometria, ja que la corda fa un triangle rectangle amb el radi i la vertical:



$$\sin \alpha = \frac{0'5}{1} = \boxed{30^{\circ}}$$

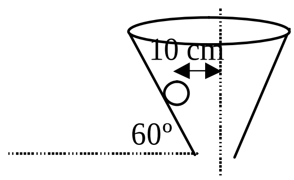
Si dividim les dues equacions podrem trobar la velocitat, ja que les tensions desapareixeran:

$$\text{tg } a = \frac{v^2/R}{g} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{R \cdot g \cdot \text{tg}a} = 1\text{'}68 \text{ m/s}$$

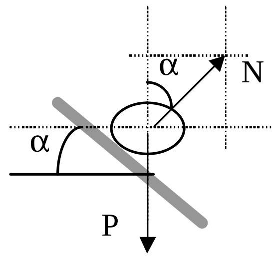
Si volem la velocitat angular: $\omega = v/R = 3\text{'}36$ rad/s i amb factors de conversió (1 volta corresponen a 2π radiants, i 60 segons a 1 minut), obtenim:

$$\boxed{\omega = 32\text{'}08 \text{ rpm (rev/min)}}$$

E.6.4. Una boleta de 100 g gira dins d'un embut de fricció negligible. Calculeu la velocitat amb què ha de girar l'embut perquè la boleta no surti disparada cap amunt.
(distància boleta-eix: 10 cm)



Solució



Dibuixem el diagrama del sòlid lliure per a la boleta. Escollim com a eixos els de la direcció de l'acceleració. Com que gira amb un moviment circular uniforme, hi ha acceleració normal dirigida cap al centre de la circumferència que descriu la boleta en girar dins l'embut. Plantejant les equacions per la segona llei de Newton:

(Observeu la localització de l'angle del pla inclinat en la descomposició de la força N: els dos angles assenyalats són iguals, ja que són angles aguts i de costats perpendiculars.)

$$\begin{cases} N_x = m \cdot a_n \\ N_y - P = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} N \cdot \sin 60 = m \cdot \dfrac{v^2}{R} \\ N \cdot \cos 60 = m \cdot g \end{cases}$$

De la segona equació traiem el valor de la normal N: N = 1'96 N

Anant a la primera equació obtenim: $v = 1\text{'}3$ m/s i $\omega = v/R = 13$ rad/s

Tornem-hi…

P.6.1 Un motorista dóna voltes al voltant d'una pista circular de 100 m de diàmetre que té un peralt de 30º. Calculeu la velocitat màxima a què pot anar el motorista sense sortir de la pista.

Solució: 16'82 m/s

P.6.2 Una boleta de 400 g penja d'una corda d'1 metre de longitud que gira en un pla horitzontal. La tensió màxima que pot suportar aquest fil és de 7 N. Trobeu:
a) El valor màxim que pot tenir l'angle sense que es trenqui el fil.
b) La velocitat amb què gira aquesta partícula.

Solució: a) 56º, b) 3'46 m/s.

P.6.3 En un parc d'atraccions, els participants s'aguanten contra les parets d'un cilindre giratori. Si el radi del cilindre és de 4 m, i el coeficient de fricció entre el participant i la paret és de 0'4, determineu: (massa dels participants: 70 kg)
g) La força que fa la paret contra els participants.
h) El nombre mínim de revolucions per minut necessari perquè els participants no caiguin.

Solució: a) 1715 N, b) 23'6 rpm.

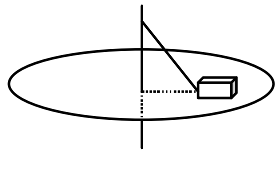
P.6.4 Un pèndol de 200 g gira en un pla horitzontal. Si la tensió màxima que pot suportar el pèndol és de 10 N, calculeu la velocitat màxima de gir i l'angle que forma el pèndol amb la vertical en aquest cas.

Solució: 8'5 m/s

P.6.5 Una avioneta descriu un bucle (*looping*) de 10 m de diàmetre a una velocitat constant de 48 km/h. Si el pilot té una massa de 80 kg, calculeu:
a) La força que fa el seient contra el pilot en el punt més alt.
b) La força que fa el seient contra el pilot en el punt més baix.
c) La força que fa el seient contra el pilot quan es troba a 1 m per sobre del punt més baix.
d) Quina velocitat mínima ha de portar l'avió per descriure el bucle?

Solució: a) 2060'4 N, b) 3628'4 N, c) 2687'6 N, d) 7 m/s.

P.6.6 Una plataforma gira al voltant d'un eix a raó d'1 volta per segon. Lliguem amb una corda de 20 cm de longitud un objecte de 200 g, amb un angle d'inclinació de 40º respecte a l'eix. La tensió màxima que pot suportar la corda és de 30 N. Calculeu si es trencarà la corda o l'objecte girarà a la plataforma, sabent que el coeficient de fricció entre el cos i la plataforma és de 0'8.



Solució: No es trencarà la corda.

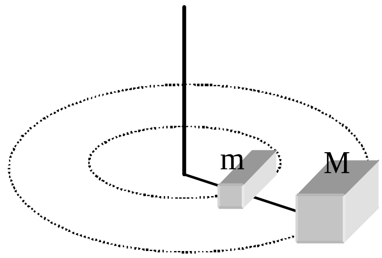
P.6.7 Un pilot d'avió de massa 65 kg es llança cap avall per descriure un ris fent una circumferència en el pla vertical de 250 m de radi. A la part inferior de la trajectòria, on va a 150 km/h, es demana:

a. Direcció i valor de l'acceleració.
b. Quina és la força neta que actua sobre el pilot a la part més baixa de la trajectòria?
c. Quina força fa el seient contra el pilot a la part més baixa de la trajectòria?

Solució: a) 6'94 m/s^2 i dirigida cap al centre de la circumferència, b) 3130'63 N, c) 3767'6 N.

P.6.8 Un bloc de massa $m = 2$ kg està lligat a una corda de longitud 50 cm fixa per un extrem, i descriu una trajectòria circular sobre una taula sense fricció.

d. Calculeu la tensió de la corda si triga 3 segons a fer una volta.
e. Lliguem ara el bloc de 2 kg a un altre bloc de $M = 4$ kg mitjançant una corda de 20 cm de longitud, i els fem girar a velocitat constant descrivint una circumferència, de manera que ara triga 5 segons a fer una volta. Calculeu els valors de les noves tensions en aquesta situació.



Solució: a) 4'41 N, b) 4'42 N i 5'98 N

P.6.9 La corda d'un pèndol cònic té 40 cm de longitud i hi penja una massa de 400 g. Si la tensió aplicada a la corda és deu vegades el valor del pes, calculeu:

f. L'angle que fa el pèndol amb la vertical.
g. El període del pèndol.

Solució: a) 84'26º, b) 0'4 s.

P.6.10 Una carretera està peraltada de manera que un cotxe d'1 tona que es desplaci a 50 km/h pugui agafar la corba de 30 m de radi si la carretera està glaçada (és a dir, el coeficient de fricció sigui pràcticament nul).

h. Calculeu el peralt de la carretera.
i. Calculeu quin és l'interval de velocitats que podrà agafar el cotxe si la carretera està seca (el coeficient de fricció entre els pneumàtics i la carretera val llavors 0'3).

Solució: a) 33'23º, b) Entre 33'64 km/h i 67'4 km/h.

TREBALL I ENERGIA

Index

P.1. Concepte de treball

Definicions

T.1.1 **Definició de treball**. Definim el treball (W) realitzat per una força constant $\vec{F}$ en desplaçar-se una distància $\overrightarrow{?x}$, com el producte escalar entre la força i el vector desplaçament:

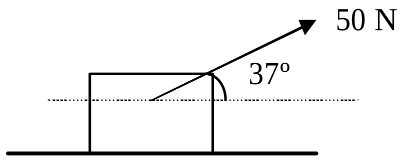
$$\boxed{W = \vec{F} \cdot ?\vec{x} = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha} \quad (1)$$

on F representa el mòdul de la força, Δx el desplaçament i α l'angle que formen el desplaçament amb la força aplicada.
Unitats: joule (J)

Exercicis

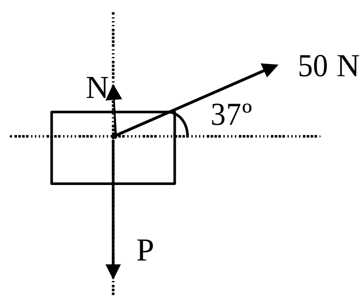
E.1.1. Estirem una maleta de 8 kg de massa amb una força de 50 N que forma un angle de 37º amb l'horitzontal per una superfície rugosa que té un coeficient de fricció dinàmic de 0'25. Calculeu:

a) El treball realitzat per cada una de les forces que actuen sobre la maleta quan aquesta s'ha desplaçat 5 m.
b) El treball total realitzat sobre la maleta.



Solució

Dibuixem el diagrama del sòlid lliure amb totes les forces que hi actuen i en calculem els valors:



F = 50 N
P = 8·9'8 = 78'4 N
N = P – F·sin 37º = 48'31 N

$F_R = \mu_d \cdot N = 12'08$ N

(El subíndex d *indica que el coeficient de fricció és dinàmic, ja que la maleta s'està movent...)*

Els treballs corresponents són:

$W_F = 50 \cdot 5 \cdot \cos 37 =$ **199'65 J**
$W_P = 78'4 \cdot 5 \cdot \cos 270° =$ **0 J**
$W_N = 48'31 \cdot 5 \cdot \cos 90° =$ **0 J**
$W_{FR} = 12'08 \cdot 5 \cdot \cos 180° =$ **-60'4 J**

(Noteu que les forces perpendiculars al desplaçament no fan treball, i les forces que actuen en sentit contrari al desplaçament donen valors del treball negatius!)

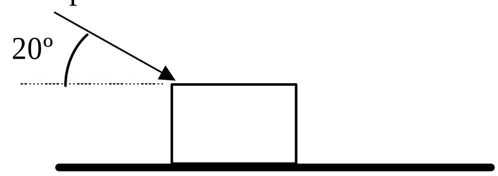
b) El treball total correspondrà a la suma de tots els treballs que actuen sobre la maleta:

$W_T = 199'5 - 60'4 + 0 + 0 = \boxed{139'1 \text{ J}}$

Tornem-hi...

P.1.1 Un bloc de 5 kg de massa que es troba sobre una superfície horitzontal es pressiona amb una força de 40 N. El coeficient de fricció estàtic val 0'3 i el dinàmic 0'2.

a) Demostreu que el cos llisca sobre la superfície horitzontal.
b) Calculeu el treball de cada una de les forces que actuen sobre el bloc, quan aquest s'ha desplaçat 3 metres.
c) Calculeu el treball total realitzat sobre el bloc en els 3 metres.



Solució: b) W_{FR}=-37'6 J, W_F=112'76 J, c) W=75'16 J.

P.1.2 Un bloc de 3 kg de massa llisca per un pla inclinat sense fricció. L'angle que fa el pla inclinat amb l'horitzontal és de 45º.

a) Calculeu el treball que fa cada una de les forces que actuen sobre el bloc quan el cos ha baixat una altura de 50 cm.
b) Quin és el treball total realitzat sobre el bloc?

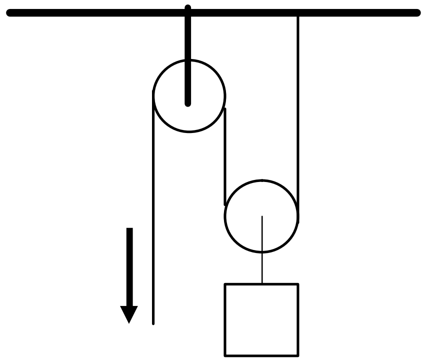
Solució: a) W_P = 14'7 J, b) W = 14'7 J.

P.1.3 Repetiu el problema anterior però suposant que la superfície del pla inclinat té un coeficient de fricció estàtic de valor 0'4 i un de dinàmic de valor 0'3. Comproveu primer que amb aquestes condicions el cos llisca pel pla inclinat.

Solució: *a)* W_P = 14'7 J, W_{FR} = -4'41 J,b) W=10'29 J.

P.1.4 A la figura tenim dues politges que s'utilitzen per aixecar una càrrega de 80 kg. Estirem la corda amb una força suficient perquè la caixa pugi a velocitat constant. Si no hi ha fricció entre la corda i les politges, i aquestes tenen una massa negligible, calculeu:

a) La força amb què l'estirem.
b) El treball que hem de fer perquè la caixa pugi mig metre.
c) Quin seria el treball que hauríem de fer si aixequéssim la caixa directament del terra mig metre?



Solució: a) 392 N, b) 392 J, c) la mateixa.

P.2. Teorema del treball i de l'energia cinètica

Definicions

T.2.1 **Energia**. És la capacitat que té un cos per desenvolupar un treball. De la mateixa definició d'energia es dedueix que les unitats de l'energia són les mateixes que les del treball: el joule (J).

T.2.2 **Definició de l'energia cinètica**. És l'energia associada a un cos pel fet de tenir moviment, i es calcula a partir de l'expressió:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2} \qquad (2)$$

T.2.3 **Teorema del treball i de l'energia cinètica**. Aquest teorema ens diu el següent: el treball total realitzat sobre la partícula és igual a la seva variació d'energia cinètica i se simbolitza mitjançant l'equació:

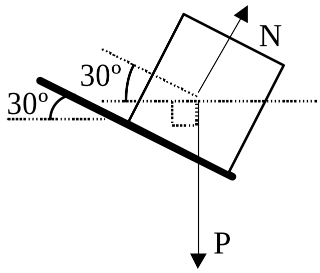
$$\boxed{W_{total} = \Delta E_c} \qquad (3)$$

on ΔE_c representa la diferència entre l'energia cinètica final i la inicial.

Exercicis

E.2.1. Un bloc de 2 kg de massa és llançat amb una velocitat inicial v_0, des de baix de tot d'un pla inclinat sense fricció que té una inclinació de 30º respecte a l'horitzontal. Després de recórrer 2 metres sobre el pla inclinat, s'atura. Calculeu la velocitat amb què s'ha llançat el bloc.

Solució



Aplicant el teorema de l'energia cinètica sabem que:

$W_{total} = E_{c\,f} - E_{c\,0}$

Hem de buscar el treball total de les forces que actuen sobre el bloc:

$W_N = 0$ J (direcció perpendicular al desplaçament)
$W_P = P\cdot \Delta x \cdot \cos \alpha = 2\cdot 9'8\cdot 2\cdot \cos(30+90) = -19'6$ J

$W_{total} = -19'6$ J

$$-19'6 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot v_0^{\,2}$$

Aïllant de l'expressió anterior la velocitat, s'obté:

$\boxed{v_0 = 4'42 \text{ m/s}}$

E.2.2. Es dispara un projectil verticalment i cap amunt amb una velocitat de 1200 m/min. Si la massa del projectil és de 50 g i considerem negligible la resistència de l'aire, calculeu:

a) L'altura màxima a què arriba, utilitzant el teorema de l'energia cinètica.
b) L'energia cinètica que té quan es troba a 5 metres de terra.
c) El temps que triga a tornar a terra.

Solució

a) L'única força que actua sobre el projectil és el pes, P = 0'05·9'8 = 0'49 N.
Apliquem el teorema del treball i l'energia cinètica:

$$W_{total} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_f^{\,2} - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^{\,2}$$

Com que coneixem les velocitats (a l'altura màxima la velocitat final és nul·la i la inicial la passem a m/s i s'obté 20 m/s), podem trobar el W_{total}:
$W_{total} = -10$ J

Si calculem el treball total: $W_{total} = W_{pes} = 0'49\cdot h\cdot \cos 180^\circ = -0'49\,h$
(L'angle és de 180º, ja que el projectil es desplaça cap amunt i el pes va en sentit contrari, cap avall.)

Per tant,

-0’49h = -10

h = $\boxed{20'41 \text{ m}}$

b) Aplicant un altre cop el teorema anterior:

W_{total} = 0’05·9’8 · 5· cos 180º = - 2’45 J

-2’45 = $\frac{1}{2} \cdot 0'05 \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot 0'05 \cdot 20^2$

$\boxed{v = 17'38 \text{ m/s}}$

c) Aplicant les fórmules de cinemàtica podem trobar el temps que triga a assolir l’altura màxima, ja que coneixem l’espai recorregut (20’41 metres) i les velocitats inicial i final (20 m/s i 0 m/s, respectivament)

$v = v_0 + a \cdot t$

t = $\frac{0-20}{-9'8}$ = 2’041 s

Com que el temps de pujada és igual al de baixada, podem trobar el temps total que triga a tornar a terra:

$\boxed{t_{total} = 4'082 \text{ s}}$

Tornem-hi...

P.2.1 Un cos de 5 kg de massa rellisca per un pla inclinat sense fricció de 3 metres de longitud. Si la inclinació del pla inclinat és de 42º respecte a l’horitzontal, trobeu la velocitat amb què arriba el cos a baix del pla inclinat.

Solució: 6’27 m/s

P.2.2 Repetiu el problema anterior però tenint en compte que la superfície del pla inclinat té un coeficient de fricció dinàmic de 0’15.

Solució: 5’72 m/s

P.2.3 Un cos de 250 g és llançat des de dalt d’un pla inclinat amb una velocitat de 5 m/s. Si el pla inclinat té una altura de 8 metres i la seva inclinació respecte a l’horitzontal és de 37º, calculeu la velocitat amb què el cos arribarà a baix del pla inclinat:

a) Si no hi actua fricció.
b) Si la superfície té un coeficient de fricció dinàmic de 0’2.

Solució: a) 13’48 m/s, b) 11’84 m/s.

P.2.4 Una caixa de 40 kg és arrossegada mitjançant una força horitzontal paral·lela al terra de valor 175 N. Els coeficients de fricció estàtic i dinàmic són 0’35 i 0’27, respectivament.

a) Demostreu que la caixa llisca per la superfície horitzontal.
b) Calculeu el treball total que es fa sobre la caixa en 10 metres.
c) Quina velocitat adquirirà la caixa quan s’hagi desplaçat 10 metres pel terra? (utilitza el teorema del treball i l’energia cinètica).

Solució: b) 691’6 J, c) 5’88 m/s.

P.2.5 Una massa de 12 kg, inicialment en repòs, s’aixeca fins a una altura de 4 metres mitjançant una força vertical de 180 N.

a) Calculeu el treball realitzat per les forces que actuen sobre l’objecte, així com el treball total realitzat sobre aquest.
b) L’energia cinètica final del bloc i la seva velocitat.

Solució: a) 249’6 J, b) 6’45 m/s.

P.2.6 Una caixa de 12 kg es mou sobre una superfície horitzontal amb fricció en aplicar-hi una força horitzontal constant de 200 N. Si en el moment d’aplicar-hi la força la caixa anava a una velocitat de 15 m/s, i al cap de 5 segons es mou amb una velocitat de 60 m/s, calculeu:

a) El treball total aplicat sobre la caixa.
b) La força de fricció que actua sobre la caixa.
c) El coeficient de fricció dinàmic.

Solució: a) W = 20.250 J, b) 92 N, c) 0’78.

P.3. Concepte de potència

Definicions

T.3.1. **Potència**. Definim la potència P subministrada per una força F com el treball que fa aquesta força per unitat de temps.

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \qquad (4)$$

Unitats: 1 J/s = 1 Watt (W)

T.3.2. **Potència i velocitat**. Si suposem que la partícula es desplaça amb una velocitat instantània *v*, llavors el desplaçament realitzat en un interval petit de temps el podem expressar com: dx = v·dt, i per tant la potència en aquest interval petit de temps serà:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx \cdot \cos\alpha}{dt} = F \cdot v \cdot \cos\alpha$$

Si la força i la velocitat van en la mateixa direcció i sentit, llavors l’expressió anterior la podem escriure com:

$$\boxed{P = F \cdot v} \quad (5)$$

T.3.3. En motors, se sol definir el rendiment del motor com:

$$\boxed{? = \frac{P_{util}}{P_{consumida}} \cdot 100} \quad (6)$$

on P útil és la potència utilitzada per generar treball de tota la potència consumida pel motor (és evident que una part d'aquesta energia es perd en forma de calor, friccions…). El valors dels rendiments s'expressen en forma de percentatges.

Exercicis

E.3.1. Un motor d'una grua aixeca caixes de 100 kg de pes fins a una altura de 15 metres en 30 segons. Calculeu la potència mínima que ha de donar el motor per aixecar les caixes.

Solució

Podem calcular la potència aplicant la fórmula anterior:

$$P = \frac{W}{t}$$

El treball haurà de ser el treball mínim, ja que el problema ens demana la potència mínima. El treball mínim es produirà quan la força que estiri les caixes sigui mínima, i per tant, l'acceleració que les aixequi sigui la mínima possible. El valor mínim de l'acceleració és 0, i per tant, les caixes pugen a velocitat constant. Així:

$$F - P = m \cdot a \quad \Longrightarrow \quad a = 0;\ F = P = 100 \cdot 9'8 = 980\ N$$

$$W = 980 \cdot 15 = 14700\ J$$

$$P = \frac{14700}{30} = 490\ W$$

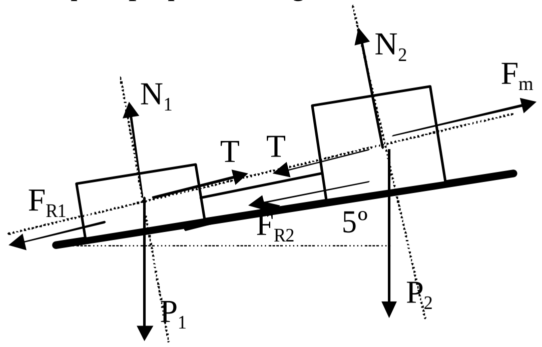
E.3.2. Un cotxe de 800 kg arrossega un remolcador carregat que pesa 100 kg per una carretera que s'enfila amb un pendent de 5º d'inclinació i on hi ha un coeficient de fricció de 0'2. Si el cotxe va a una velocitat constant de 60 km/h, calculeu la potència que fa el cotxe.

Solució

La potència és el treball per unitat de temps. Caldrà calcular el treball que fa el cotxe per unitat de temps. Com que sabem la velocitat del cotxe, utilitzarem l'expressió:

$P = F\cdot v$

Per trobar la força que fa el cotxe només cal que apliquem la segona llei de Newton al conjunt cotxe-remolcador:



Com que es mou a velocitat constant, l'acceleració és nul·la. Fent el balanç de forces en la direcció paral·lela al pla inclinat:

$F_m - F_{R1} - F_{R2} - T + T - P_{x1} - P_{x2} = 0$

Canviant les forces de fricció per les seves expressions corresponents,

$F_m = P_1\cdot \sin 5^o + P_2 \cdot \sin 5^o + \mu\cdot (N_1 + N_2)$

(Noteu que el coeficient de fricció correspondria al coeficient de fricció dinàmic. Els dos objectes llisquen per la carretera.)

$\mathbf{F_m = 2526\ N}$

(S'han obtingut els valors de les normals fent el corresponent balanç de forces en la direcció horitzontal.)

$P = 2526\ N \cdot 16'67\ m/s = \boxed{42.108'42\ W}$

Tornem-hi…

P.3.1 Un ascensor té una massa de 1.200 kg i pot transportar una càrrega màxima de 600 kg. Uns rodets posats a les cares laterals friccionen amb la paret i frenen el moviment de l'ascensor. El valor d'aquesta força de fricció es pot suposar constant i de valor 4.200 N. Calculeu:

a) La potència mínima que ha de donar el motor per poder aixecar l'ascensor amb la seva càrrega màxima a una velocitat de 2 m/s.
b) La potència instantània que dóna el motor si es construeix de manera que s'assoleixi una acceleració cap amunt d'1'5 $m\cdot s^{-2}$ (deixeu el resultat en funció de la velocitat instantània).

Solució: a) 43680 W, b) 24540· v.

P.3.2 Un motor estira una caixa de 150 kg per una superfície plana horitzontal que té un coeficient de fricció de 0'35. Calculeu:

a) La potència que ha de donar el motor per moure la caixa a una velocitat constant de 5 m/s.

b) El treball que fa el motor en 5 minuts.

Solució: a) 2572’5 W, b) 771’75 kJ.

P.3.3 Un motor de 8 kW funciona 8 hores cada dia i consumeix 10 litres de combustible. Si aquest combustible té un poder energètic de $3 \cdot 10^7$ J per litre, calculeu:

a) La potència consumida pel motor en un dia.
b) El rendiment del motor.

Solució: a) 10’15 kW, b) 76’8 %

P.3.4 Un motor de 20 kW de potència consumeix 5 kg de combustible per cada hora de funcionament i té un rendiment del 40 %. Calculeu:

a) La potència consumida, en kW.
b) L’energia consumida per cada hora de funcionament, expressada en kJ.
c) El poder energètic del combustible, expressat en kJ/kg.

Solució: a) 50 kW, b) $1'8 \cdot 10^4$ kJ, c) 36.000 kJ/kg.

P.3.5 Una bomba accionada per un motor elèctric ha elevat 200 m^3 d’aigua a 50 m d’altura. Calculeu:

a) El treball realitzat en joules.
b) Si l’energia elèctrica consumida ha estat de 70 kWh, quin ha estat el rendiment de la instal·lació?

Solució: a) $9'8 \cdot 10^7$ J, b) 38’8 %.

P.4. Forces conservatives i energia potencial

Definicions

T.4.1. **Forces conservatives**. Definim una *força conservativa* si el treball que fa per anar d’un punt *A* a un punt *B* és sempre el mateix, independentment del camí que segueix per anar d’aquest punt *A* al punt *B*. Podem concloure, doncs, que el treball que fa una força conservativa és independent de la trajectòria quan ens movem d’un punt a un altre.

T.4.2. **Energia potencial associada a una força conservativa**. A aquestes forces conservatives podem associar-los una funció anomenada funció *energia potencial* (que representarem mitjançant la lletra *U*). Es defineix de tal manera que el treball realitzat per una força conservativa per anar d’un punt A a un punt B és igual a la disminució de la funció energia potencial:

$$\boxed{W = -\int \vec{F} \cdot d\vec{x} = -?\,U} \qquad (7)$$

T.4.3. **Exemples de forces conservatives i càlcul de la seva energia potencial**. Són conservatives les forces següents: la força gravitatòria, la força elàstica d'una molla i la força elèctrica, entre d'altres. Substituint el valor de la força en la integral anterior, fent el producte escalar corresponent i integrant l'expressió resultant es poden obtenir els valors de les energies potencials per als casos anteriors, que anotem a continuació (el valor de l'energia potencial elèctrica ja es donarà a l'apartat corresponent de camp elèctric).

T.4.4. **Energia potencial gravitatòria (associada a la força gravitatòria)**

$$\boxed{U_{pg} - U_{pg0} = m \cdot g \cdot h} \qquad (8)$$

on *m* és la massa de l'objecte, *g* el valor de la gravetat i *h* la variació d'altura que experimenta el cos. Col·locant els valors amb les unitats del SI, s'obté el resultat en joules.

Generalment escollim el valor de U_{pg0} com a zero, quan la partícula es troba a l'altura h=0, i llavors la fórmula anterior queda simplificada, ja que aquest terme desapareix.

T.4.5. **Energia potencial elàstica (associada a la força elàstica d'una molla)**

$$\boxed{U_{pe} - U_{pe0} = \frac{1}{2} k \cdot ?\, x^2} \qquad (9)$$

on *k* és la constant de la molla (mesurada en N/m) i Δx representa el que s'allarga respecte a la seva posició d'equilibri sense tensar (x_0): $\Delta x = x - x_0$ (en m). El resultat també és en joules, si es treballa amb les unitats del SI.

Generalment escollim el valor de U_{pe0} com a zero, quan la molla es troba a la posició $x_0=0$ sense tensar, i llavors l'expressió se simplifica, ja que aquest terme desapareix, i l'expressió amb $\Delta x = x - x_0$ val només *x*. De manera que podem escriure: $U_{pe} = 1/2 \cdot k \cdot x^2$.

Recordeu que **la força elàstica** d'una molla val **F = -k·x.**

Exercicis

E.4.1. Un cos de 2 kg cau des d'una altura de 5 metres. Determineu:

a) L'energia potencial del cos quan es troba a 1 metre del terra.
b) L'energia cinètica just abans de tocar amb el terra i la velocitat d'impacte amb el terra.

Solució

a) Agafant com a valor de l'energia potencial gravitatòria igual a 0 quan l'altura és 0, podem calcular el valor de l'energia potencial gravitatòria a 1 metre:

U_{pg} = m·g·h = 2·9'8·1 = 19'6 J.

b) Per trobar l'energia cinètica en el moment de l'impacte podem utilitzar el teorema de l'energia cinètica:
$W_{total} = \Delta E_c$

El treball total és el treball de totes les forces que actuen sobre el cos. Però com que és una caiguda lliure, aquest objecte només està sotmès a la força gravitatòria (el seu pes). Com que és una força conservativa, sabem que el treball val la diferència d'energia potencial entre els dos punts que estudiem; llavors:

$W_P = -\Delta U = -(U - U_0) = -(0 - 98) = 98$ J

$W_{total} = 98 = E_{cf} - E_{c0} = E_{cf} - 0$

$\boxed{E_{cf} = 98 \text{ J}}$

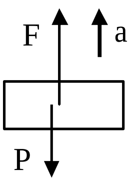
I canviant el valor de l'energia cinètica per la seva expressió, s'obté el valor de la velocitat, que és: $\boxed{v = 9'89 \text{ m/s}}$

E.4.2. Una grua aixeca un bloc de 15 kg amb una força de 170 N vertical i cap amunt. Calculeu:

a) L'energia cinètica i la velocitat que porta el bloc al cap de 15 segons.
b) L'energia potencial al cap dels 15 segons.
c) La potència instantània que desenvolupa la grua en l'instant t=15 s.

Solució

a) Calculem l'acceleració amb què puja el bloc a partir de la segona llei de Newton:



$F - P = m \cdot a \Longrightarrow a = 1'53 \text{ m/s}^2$

I ara, per cinemàtica, la velocitat al cap de 15 s:

$v = 0 + 1'53 \cdot 15 = \boxed{22'95 \text{ m/s}}$

L'energia cinètica, calculada a través de la fórmula corresponent, val:

$E_c = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 22'95^2 = \boxed{3950'27 \text{ J}}$

(Aquest apartat també es podria fer a partir del teorema del treball i l'energia cinètica, però caldria buscar primer de tot el desplaçament...)

b) A partir de la definició, calculem U_{pg} = 15·9'8· 172'125 = 25.302'38 J

Calculem, amb les fórmules de cinemàtica, l'altura a la qual està quan han transcorregut els 15 segons:

$$v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot \Delta x \Longrightarrow \Delta x = 172'125 \text{ m.}$$

c) La potència és el treball per unitat de temps. Com que coneixem la velocitat instantània a 15 segons i la força de la grua, podem aplicar P = F·v; llavors:

$$P = 300 \cdot 22'95 = \boxed{6.885 \text{ W}}$$

E.4.3. Una molla té una constant de 10^4 N/m. Quant ha d'allargar-se perquè la seva energia potencial sigui de 100 J?

Solució

Prenent com a energia potencial elàstica 0 quan no està estirada, llavors apliquem la fórmula de l'energia potencial i aïllem *x*:

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k\cdot x^2 \Longrightarrow \boxed{x = 0'141 \text{ m}}$$

E.4.4. La força que actua sobre una partícula que es mou sobre l'eix de les *x* ve donada per l'expressió $F = -a\cdot x^2$, on *a* és una constant:

a) Calculeu l'energia potencial *U*(*x*), sabent que *U* = 0 quan *x* = 0

b) Representeu-la gràficament.

a) A partir de la definició de l'energia potencial obtenim:

$$? U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{x} = -\int F\cdot dx\cdot \cos 0^o = -\int_0^x -ax^2 dx = \left[\frac{a\,x^3}{3}\right]_0^x$$

$$U(x) - U(0) = \frac{ax^3}{3}$$

I com que U(0) = 0, obtenim que: $\boxed{U(x) = \frac{ax^3}{3}}$

b) Només cal donar valors a la funció i després representar-la gràficament (és un polinomi de tercer grau; per tant, amb simetria imparell passant pel punt (0,0)). Haureu de graduar les divisions verticals i horitzontals en funció de *a*.

E.4.5. Determineu la força F que actua en la direcció de les *x*, si aquesta força està associada amb la funció d'energia potencial $U(x) = k\cdot x^4$. Calculeu també els punts on aquesta força és nul·la.

Solució

a) Si l'energia potencial s'obté a partir de la integral de la força, és fàcil deduir que la força s'obtindrà a partir de la funció inversa, és a dir, de la derivada de l'energia potencial:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -4\cdot k\cdot x^3$$

b) Si volem els punts on la força és nul·la, només hem d'igualar el resultant anterior a zero, del qual es veu clarament que $x = 0$. Per tant, només hi ha un punt.

Tornem-hi…

P.4.1 Una caixa de 2 kg cau des del punt més alt d'un pla inclinat sense fricció de 10 m de longitud i que té un angle d'inclinació de 30º. Determineu:

a) L'energia potencial en el moment en què comença a caure.
b) L'energia cinètica i la velocitat quan arriba a baix de tot del pla inclinat.
c) L'energia cinètica i la velocitat quan es troba a la meitat del recorregut.

Solució: a) 98 J, b) 98 J, 9'89 m/s, c) 49 J, 7 m/s.

P.4.2 Apliquem una força de 50 N sobre una molla i aconseguim comprimir-la 1 cm. Calculeu:

a) La constant de la molla, en N/m.
b) L'energia potencial elàstica de la molla quan s'ha comprimit 5 cm.

Solució: a) 5.000 N/m, b) 6'25 J.

P.4.3 Disparem verticalment i cap amunt un projectil de 100 g de massa amb una velocitat de 20 m/s. Podem suposar que sobre el projectil hi actua una força de fricció constant durant tot el recorregut i de valor 0'5 N. Calculeu:

a) L'energia cinètica que té quan es dispara el projectil.
b) L'energia potencial que assoleix quan es troba en el punt més alt de la trajectòria.
c) El treball realitzat per la força de fricció durant tot el recorregut.

Solució: a) 20 J, b) 13'25 J, c) -6'75 J.

P.4.4 Una força aplicada sobre l'eix de les x té una energia potencial associada de valor $U = \frac{A}{x^2}$. Determineu:

a) El valor de la força en funció de x.
b) La relació entre la força quan passa del punt $x=1$ al punt $x=2$.

Solució: a) $2A/x^3$, b) 1/8.

P.4.5 Una força aplicada sobre l'eix de les x ve donada per l'expressió $F(x) = 5x^3 - 2x^2$, en unitats del SI. Determineu:

a) L'expressió, en funció de x, de l'energia potencial $U(x)$ sabent que U= 0 al punt $x=0$.
b) Hi ha algun altre punt on l'energia potencial sigui nul·la?

Solució: a) $5x^4/4 - 2x^3/3$ b) 8/15 m

P.4.6 Comprimim 2 cm una molla de constant k= 100 N/m que està lligada per un extrem, i a l'altre extrem hi ha una massa d' 1 kg. El conjunt molla-bloc es troba sobre una taula sense fricció. Calculeu:

a) L'energia potencial elàstica que té la molla quan està comprimida.
b) El treball total que fa la molla des de l'inici fins que es descomprimeix.
c) L'energia cinètica i la velocitat que adquireix el bloc d'1 kg quan la molla s'ha descomprimit.

Solució: a) 0'02 J, b) 0'02 J, c) 0'02 J, 0'2 m/s.

P.5. Forces no conservatives

Definicions

T.5.1. **Forces no conservatives**. Són aquelles forces en què el treball que fa la força per anar d'un punt A a un punt B depèn del camí que segueix. Un exemple d'aquestes forces és la fricció. El treball que fan aquests tipus de forces es calcula a partir de la definició de treball (punt 1), i en aquestes forces no es pot definir una funció energia potencial.

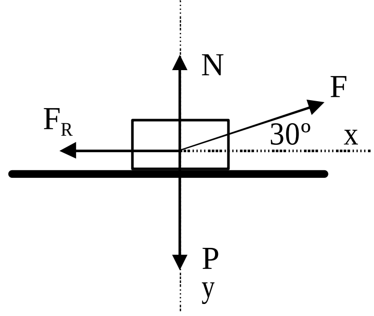
Exercicis

E.5.1. Una força constant de 4 N actua formant un angle de 30º amb l'horitzontal sobre una caixa de 2 kg de massa que descansa sobre una superfície horitzontal rugosa. La caixa es mou a una velocitat constant de 50 cm/s. Determineu:

a) La força normal que exerceix la taula sobre la caixa i el coeficient de fricció.
b) La potència de la força aplicada.
c) El treball realitzat per la força de fricció durant 3 segons.

Solució

a) Per calcular la força normal cal aplicar la segona llei de Newton per a les components verticals. Sabent que la caixa no es mou en aquesta direcció (a_y = 0) trobem que:



$N + F_y - P = 0$

Utilitzant la trigonometria i aïllant N obtenim:

$N = P - F_y = P - F\cdot\sin30º = \boxed{17'6\text{ N}}$

Per trobar el coeficient de fricció plantegem el balanç de forces però en la direcció horitzontal. Com que sabem que va a velocitat constant, a_x = 0:

$F_x - F_R = 0 \Longrightarrow F_R = F \cdot \cos 30^\circ = 3'46$ N

Si $F_R = \mu \cdot N$, aïllant el coeficient de fricció obtenim:

$\boxed{\mu = 0'2}$

b) Apliquem la relació que hi ha entre la potència, la força i la velocitat i obtenim:

$P = F_x \cdot v = 3'46 \cdot 0'5 = \boxed{1'73 \text{ W}}$

c) La definició del treball és $W = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha$, on α és l'angle entre la força i el desplaçament. En aquest cas la força de fricció s'oposa al moviment i per tant $\alpha = 180^\circ$.

Hem de calcular la distància recorreguda en 3 segons, però com que va a velocitat constant podem utilitzar les expressions per al moviment rectilini i uniforme:

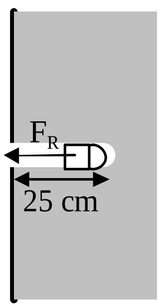
$x = 0'5 \cdot 3 = 1'5$ m

$W_{FR} = 3'46 \cdot 1'5 \cdot \cos 180^\circ = \boxed{-5'19 \text{ J}}$

E.5.2. Un projectil que pesa 500 g es llança contra una paret a una velocitat de 600 m/s i penetra dins de la paret una distància de 25 cm. Determineu:

a) L'energia cinètica inicial de la bala.
b) El treball que ha fet la paret contra la bala.
c) La resistència, suposada constant, que ha oposat la paret.

Solució



a) Substituint a la fórmula de l'energia cinètica obtenim:

$E_{c0} = \frac{1}{2} m v^2 = \boxed{90.000 \text{ J}}$

b) Quan és a dins de la paret l'única força que actua sobre la bala és la resistència de la paret (F_R). Aplicant el teorema del treball i l'energia cinètica:

$W_{total} = \Delta E_c = E_c - E_{c0} = 0 - 90.000 = \boxed{-90.000 \text{ J}}$

c) A partir de la definició del treball, com que el treball total correspon al que fa la resistència, obtenim el seu valor:

$F_R = W/(\Delta x \cdot \cos 180^\circ) = -90.000/(0'25 \cdot -1) = \boxed{36.000 \text{ N}}$

Tornem-hi…

P.5.1 Un balí de 15 grams es dispara amb una velocitat de 450 m/s i travessa un tauló de 10 cm de gruix. El tauló oposa una resistència de 1800 N. Calculeu:

a) L'energia cinètica inicial del balí.
b) El treball que fa el tauló sobre el balí.
c) L'energia cinètica i la velocitat amb què surt el balí del tauló.

Solució: a) 1518,75 J, b) -180 J, c) 1338'75, 422'5 m/s

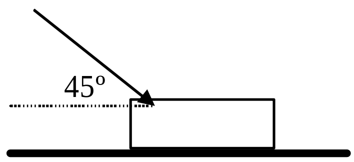
P.5.2 Un camió de 6 tones de massa va a una velocitat de 72 km/h. De cop i volta, frena i s'atura al cap de 100 metres. Calculeu:

a) L'acceleració de frenada del camió.
b) La força que han de fet els frens perquè el camió s'aturi al cap dels 100 metres.
c) El treball que han fet els frens.
d) Expliqueu amb què es transforma l'energia cinètica durant la frenada.

Solució: a) -2 m/s^2, b) -12.000 N, c) -1'2 · 10^6 J

P.5.3 Premem amb una força de 50 N un bloc de 10 kg de massa de manera que es desplaça sobre una superfície horitzontal de coeficient de fricció 0'2. Calculeu:

a) L'acceleració amb què es mou la massa.
b) El treball que fan totes les forces que actuen sobre el cos quan ha recorregut 250 m.
c) La velocitat que adquireix al cap d'aquests 250 m.



Solució: a) 0'867 m/s^2, b) 2171'33 J, c) 20'83 m/s.

P.6. Conservació de l'energia

Definició

P.6.1 **Energia mecànica**. Definim l'energia mecànica d'un sistema com la suma de l'energia potencial i l'energia cinètica d'un sistema.

$$\boxed{E_m = E_c + U} \qquad (10)$$

P.6.2 **Teorema de la conservació de l'energia mecànica**. Distingirem dos casos:

1) *Si el treball total realitzat per les forces no conservatives és zero.* L'energia mecànica d'un sistema es conserva si el treball total realitzat per totes les forces no conservatives és zero.

$$\boxed{\Delta E_m = 0 \Longrightarrow E_{m0} = E_{mf}} \qquad (11)$$

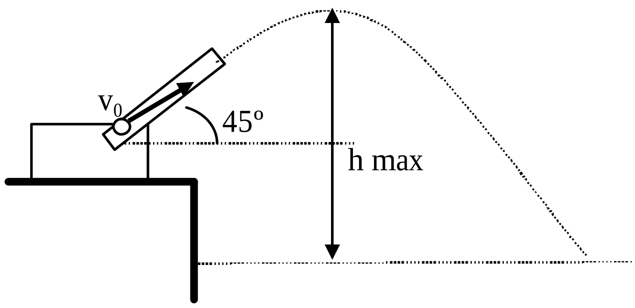
2) *Si el treball total realitzat per les forces no conservatives no és zero*. L'energia no es crea ni es destrueix, sinó que es transforma. Per tant, la variació d'energia mecànica experimentada en un procés és igual a la suma dels treballs realitzats per les forces no conservatives sobre el sistema:

$$\boxed{\sum W_{nc} = ?\,E_m = E_{mf} - E_{m0}} \qquad (12)$$

Exercicis

E.6.1. Un canó llança un projectil de 200 g amb una velocitat de 100 m/s i amb un angle de 45º respecte a l'horitzontal des d'un penya-segat de 100 m d'altura. Negligint la resistència de l'aire, calculeu:

a) La velocitat amb què el projectil impacta a l'aigua.
b) L'altura màxima que assoleix el projectil.
c) La velocitat que porta quan es troba a 150 metres d'altura.



Solució

a) Com que no hi ha fricció, sabem que: $E_{m0} = E_{mf}$

Prenem com a origen d'energia potencial gravitatòria el nivell d'impacte amb l'aigua (h=0). Inicialment, el projectil porta velocitat i està situat a una altura determinada. Quan impacti amb l'aigua, no tindrà energia potencial gravitatòria i la seva energia cinètica haurà augmentat.

$$E_{c0} + U_{pg} = E_{cf} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

Substituint els valors s'obté:

$$\boxed{v = 109'36 \text{ m/s}}$$

b) Si volem calcular l'altura màxima, compararem el punt inicial amb el punt d'altura màxima, sabent que en aquest punt la component vertical de la velocitat s'anul·la i només hi ha component horitzontal (vegeu els problemes corresponents al tir parabòlic en l'apartat de cinemàtica). Per tant, la velocitat en el punt més alt és:

$\mathbf{v_x}$ = v· cos 45º = **70'71 m/s**

Llavors,

$$E_{c0} + U_{pg0} = E_{cf} + U_{pg\,final}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_x^{\ 2} + mgh_{màx}$$

Aïllant d'aquesta darrera expressió el valor de l'altura màxima obtenim:

$\boxed{h_{màx} = 355'1 \text{ metres}}$ (respecte al nivell de l'aigua)

c) Plantegem la conservació de l'energia mecànica entre el punt inicial i el punt d'altura *h* = 150 m. En aquest darrer punt hi haurà energia potencial gravitatòria (evidentment tenim altura) i energia cinètica:

$$E_{c0} + U_{pg0} = E_{cf} + U_{pg\ final}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

D'aquesta darrera expressió aïllem *v* i aconseguirem la velocitat a *h*=150 m:

$\boxed{v = 94'97 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$

E.6.2. Un pèndol de 70 cm de longitud, de l'extrem del qual penja una massa de 100 g, pot oscil·lar lliurement al voltant de l'altre extrem. El deixem anar des d'una posició que forma un angle de 70º amb la vertical. Calculeu:

a) La velocitat que portarà el pèndol quan passi per la part més baixa.
b) La tensió de la corda quan es troba a la part més baixa del moviment.
c) L'energia cinètica i la velocitat del pèndol quan aquest forma un angle de 20º amb la horitzontal.

Solució

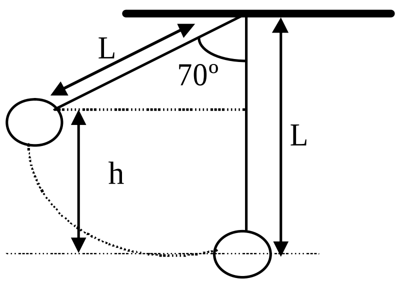
a) Apliquem el principi de conservació de l'energia, ja que podem considerar negligibles les friccions amb l'aire.

Prenem l'origen d'energia potencial gravitatòria en el punt més baix de la trajectòria. D'aquesta manera, a la posició inicial, la massa té energia potencial gravitatòria (ja que la deixem anar), i a baix de tot (posició final) té energia cinètica.

$$E_{m0}=E_{mf} \Longrightarrow U_{pg0} = E_{cf}$$

Hem de trobar l'altura inicial. Si ens fixem en el dibuix, podem comprovar que:

h = L – L· cos 70º =
=0'7 · (1 – cos 70º) = **0'46 m**



Així:

$$m \cdot g \cdot h = \Longrightarrow \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \boxed{3\ \text{m/s}}$$

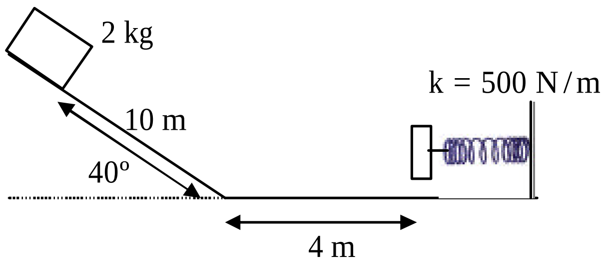
b) Per trobar la tensió a la part més baixa hem de fer el balanç de forces en la direcció vertical. Plantegem el diagrama del cos lliure, tenint en compte que el cos descriu un moviment circular, i per tant, té acceleració normal en la direcció que uneix el cos amb el centre del cercle descrit. D'aquesta manera:

$$T - P = m \cdot a_n \Longrightarrow T = mg + m\frac{v^2}{R} = \boxed{2'26\ \text{N}}$$

E.6.3. Un bloc de 2 kg es llança des de la part més alta d'un pla inclinat de 10 m de longitud i un angle d'inclinació de 40º amb una velocitat de 5 m/s. Quan arriba a baix es mou per una superfície horitzontal. Després de recórrer 4 m xoca amb una molla de massa negligible i de constant elàstica de 500 N/m. Si durant tot el recorregut podem negligir la fricció, calculeu:

a) La velocitat amb què el bloc arriba a baix del pla inclinat.
b) La compressió màxima de la molla.
c) La velocitat que porta el bloc quan la molla està comprimida 10 cm.

Solució



a) Apliquem el teorema de la conservació de l'energia entre el punt més alt i el punt més baix del pla inclinat. Com que inicialment el cos té velocitat, el balanç és el següent:

$$E_{m0} = E_{mf} \Longrightarrow U_{pg0} + E_{c0} = E_{cf}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2} m v^2$$

Busquem l'altura inicial per trigonometria: **h** = 10· sin 40º = **6'43 m** .

Aïllant la velocitat obtenim $\boxed{v = 12'29\ \text{m/s}}$

b) Tota l'energia cinètica que té quan arriba a baix del pla inclinat es converteix en energia potencial elàstica quan la molla es comprimeix del tot, ja que no hi ha pèrdua d'energia pel camí (no hi ha fricció). És evident que quan estigui del tot comprimida la massa estarà en repòs, i per tant, no hi haurà energia cinètica.

$E_{m0}=E_{mf} \Longrightarrow E_c = U_{pe}$

$\frac{1}{2} m\,v^2 = \frac{1}{2} k\,x^2$ i d'aquí obtenim $\boxed{x = 0'77\ m}$

c) Quan la molla està comprimida 10 cm, el bloc té energia cinètica i energia potencial elàstica, ja que la compressió màxima es produeix a 60 cm (v = 0). Apliquem un altre cop el teorema de conservació de l'energia entre el punt més baix del pla inclinat i el punt en què la molla està comprimida 10 cm:

$E_{m0}=E_{mf} \Longrightarrow E_c= U_{pef} + E_{cf}$

$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_f^2 + \frac{1}{2} kx^2$ i aïllant v_f obtenim: $\boxed{v_f = 12'2\ m/s}$

> E.6.4. Repetiu el problema anterior però suposant que entre la superfície del pla inclinat i el bloc hi ha un coeficient de fricció de 0'2 i que entre la superfície horitzontal i el bloc hi actua una fricció de 0'3.

Solució

d) Aplicarem el teorema de conservació de l'energia, però ara tenim fricció. Per tant, l'aplicarem per al cas de forces no conservatives:

$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

Substituint cada una de les expressions anteriors, obtenim:

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = E_{cf} - U_{pg0}$

La força de fricció val $\mu \cdot N$, on N és la força normal. Si apliquem la segona llei de Newton per a les components perpendiculars al pla inclinat podem trobar el valor d'aquesta força:

$N = P_y = P \cdot \cos 40^o = 2 \cdot 9'8 \cdot \cos 40^o = 15\ N$
$\mathbf{F_R} = 0'2 \cdot 15 = \mathbf{3\ N}$

Tornant a l'expressió de la conservació de l'energia:

$- 3 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 - 2 \cdot 9'8 \cdot 6'43$

$\boxed{v = 9'79\ m/s}$

e) Aplicant el teorema de conservació de l'energia quan intervenen forces no conservatives:
$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = U_{pe} - E_c$

Com que ara ens trobem sobre una superfície horitzontal i hi ha equilibri en la direcció vertical, llavors N = P. I així:

$\mathbf{F_R} = \mu \cdot N =$ **5’88 N**

Substituint a l’expressió anterior:

$$-5'88 \cdot (4 + x) = \frac{1}{2} 500 \cdot x^2 - \frac{1}{2} 2 \cdot 9'79^2$$

(Noteu que la fricció actua durant els 4 metres que hi ha de distància entre el pla inclinat i la molla, però també a la distància x *mentre es comprimeix la molla!)*

Resolent l’equació de segon grau s’obté $\boxed{x = 0'61 \text{ m}}$

f) Aplicant el mateix procediment que en els apartats anteriors:
$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = (U_{pe} + E_{cf}) - E_c$

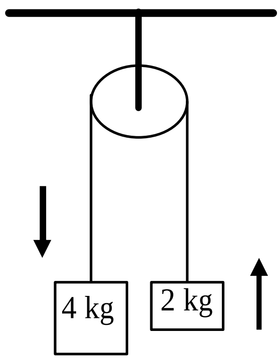
$$-5'88 \cdot 4'1 = \left(\frac{1}{2} 500 \cdot 0'1^2 + \frac{1}{2} 2 \cdot v^2 \right) - \frac{1}{2} 2 \cdot 9'79^2$$

Aïllant la velocitat obtenim: $\boxed{v = 8'32 \text{ m/s}}$

E.6.5. Dos cossos de 4 kg i 2 kg de massa, respectivament, estan units per un cable inextensible mitjançant una politja de massa negligible. Utilitzant el principi de la conservació de l’energia, trobeu la velocitat de les masses quan la massa de 2 kg ha baixat 2 metres.

Solució

Prenem com a valor zero de l’energia potencial el nivell en què es troben les dues masses inicialment. Com que no hi ha fricció, al final els dos cossos hauran adquirit energia cinètica, el cos de 2 kg haurà guanyat energia potencial (haurà pujat respecte al nivell zero d’energia potencial) i el cos de 4 kg haurà perdut energia potencial (haurà baixat respecte al nivell zero d’energia potencial).



$E_{m0} = E_{mf} \Longrightarrow 0 = E_c + U_{pg}$

Substituint les expressions de l’energia s’obté:

$$0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 - m_1 g h_1 + m g h_2$$

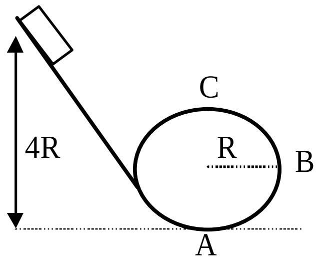
(Noteu que les dues velocitats del cos 1 i el cos 2 són les mateixes, ja que la corda no s'estira, sinó que es desplaça la mateixa distància d'un costat i de l'altre; per tant, com que també es mouen amb la mateixa acceleració, les dues masses adquireixen la mateixa velocitat.)

$$0 = \frac{1}{2}4v^2 + \frac{1}{2}2v^2 - 4\cdot 9'8\cdot 2 + 2\cdot 9'8\cdot 2$$

$$\boxed{v = 3'61\ \mathrm{m/s}}$$

5.6.6. Un cos es deixa anar per un carril sense fricció des d'una altura de 4R. Quan arriba a baix fa voltes dins d'un *looping* de radi R. Calculeu:

a) La velocitat que porta el cos en el punt més baix del *looping* (A).
b) La velocitat que porta el cos en el punt més alt del *looping* (C).
c) La força que fa el carril sobre el cos en els punts A, B i C.
d) La velocitat mínima amb què s'hauria de llançar perquè fes una volta completa al ris.



Solució

a) Prenem com a origen d'energia potencial gravitatòria el punt més baix del carril. Apliquem el teorema de la conservació de l'energia entre el punt inicial —com que es deixa anar només té energia potencial gravitatòria— i el punt de baix (només hi ha energia cinètica).

$$E_{m0}=E_{mf} \Longrightarrow U_{pg0} = E_c$$

$$m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}m\,v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{2gh} = \boxed{\sqrt{8gR}\ \mathrm{m/s}}$$

b) Tornem a aplicar la conservació de l'energia però ara entre el punt inicial i el punt de dalt del *looping* (C):

$$E_{m0}=E_{mf} \Longrightarrow U_{pg0} = E_c + U_{pg}$$

$$m\cdot g\cdot h_0 = \frac{1}{2}m\,v^2 + m\cdot g\cdot h$$

$$4mgR = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR \Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{4gR}\ \mathrm{m/s}}$$

c) La força que fa el carril sobre el cos és la força normal. Cal fer un balanç de forces en els punts A, B i C:

Punt A:

$N - P = m \cdot a_n$

$N = mg + m\dfrac{v^2}{R} = 9mg$ N

Punt C:

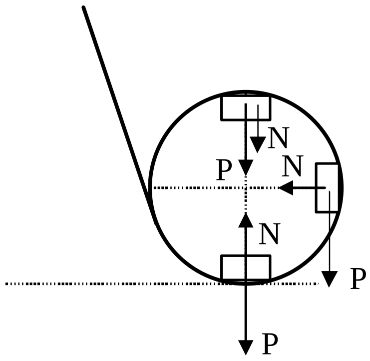
$N + P = m \cdot a_n$

$N = m\dfrac{v^2}{R} - mg = 3mg$ N

Punt B:

$N = m \cdot a_n$

$N = m \cdot \dfrac{v^2}{R} = 6mg$ N



d) Per poder fer una volta al *looping* la velocitat mínima que hauria de portar al punt de dalt es calcula imposant que a dalt la normal valgui 0. Llavors:

$P = m \cdot a_n = m \cdot \dfrac{v_{min}^2}{R}$ i $\boxed{v_{min} = \sqrt{Rg} \ \ m/s}$

Per trobar la velocitat amb què s'hauria de llançar inicialment apliquem la conservació de l'energia entre el punt inicial i el punt més alt del *looping*, on coneixem la velocitat i l'altura.

$E_{m0} = E_{mf} \Longrightarrow U_{pg0} = E_c + U_{pg}$

$m \cdot g \cdot h_0 = \dfrac{1}{2} m\, v_{min}^2 + m \cdot g \cdot h$

$mgh_0 = \dfrac{1}{2} m\left(\sqrt{gR}\right)^2 + 2mgR \Longrightarrow \boxed{h_0 = 3R}$

E.6.7. Un cos de 5 kg de massa comprimeix 20 cm una molla sobre una taula horitzontal de coeficient de fricció 0'4. Quan deixem anar la molla el cos recorre 50 cm sobre la taula horitzontal i s'atura. Calculeu:

g) La constant elàstica de la molla.
h) La velocitat amb què el cos abandona la molla.

Solució

a) Com que hi ha fricció, apliquem el teorema de la conservació de l'energia però amb forces no conservatives. Com que al final s'atura, s'ha transformat tota l'energia potencial elàstica que tenia la molla en calor per fricció.

$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = 0 - U_{pe}$

$$-\mu \cdot N \cdot ?\, x = -\frac{1}{2} kx^2$$

(Noteu que Dx representa la distància que frega el cos sobre la taula i que val 50 cm; en canvi x *representa la compressió de la molla, d'un valor de 20 cm.)*

Substituint trobem el valor de la constant elàstica:

$\boxed{k = 490\ N/m}$

b) Apliquem el teorema de la conservació de l'energia amb forces no conservatives:

$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = E_c - U_{pe0}$

$$-\mu \cdot N \cdot x = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$\boxed{v = 1'53\ m \cdot s^{-1}}$

Tornem-hi...

P.6.1 Un cos de 50 kg de massa es llança verticalment i cap amunt amb una velocitat de 20 m/s. A partir del teorema de la conservació de l'energia, calculeu:

a) L'altura que assoleix el projectil.
b) La velocitat que porta el projectil quan és a 10 m d'altura.

Solució: a) 20'4 m, b) 14'28 m/s

P.6.2 Es deixa anar una bola d'acer de 800 g de massa des d'una altura desconeguda. Quan arriba a terra porta una velocitat de 40 m/s. Calculeu:

a) L'altura inicial des de la qual s'ha deixat anar la bola.
b) La distància que ha recorregut la bola quan porta una velocitat de 20 m/s.

Solució: a) 81'6 m, b) 61'22 m

P.6.3 Una caixa de 30 N es deixa anar des de la part més alta d'un pla inclinat de 5 m d'altura i una inclinació de 30º. Si entre la caixa i la superfície del pla inclinat hi ha un coeficient de fricció de 0'25, calculeu:

a) La velocitat quan arriba a baix del pla inclinat.
b) L'energia perduda en forma de calor a causa de la fricció.

Solució: a) 7'45 m/s, b) -64'9 J.

P.6.4 Disparem un cos de 200 g per una superfície horitzontal sense fricció a una velocitat de 4 m/s. A un metre de distància hi ha un pla inclinat (de fricció negligible) de 50º d'inclinació. Calculeu la distància que recorrerà el cos per sobre la superfície del pla inclinat.

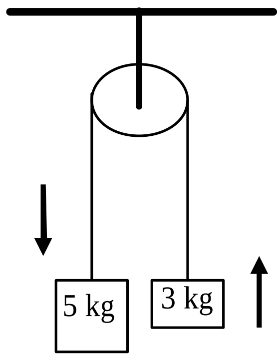
Solució: 1'06 m.

P.6.5 En el problema anterior suposeu que durant tot el recorregut hi ha actuat una fricció de $\mu = 0'32$. Es demana:

a) Arribarà el cos a pujar pel pla inclinat? En cas afirmatiu determineu la velocitat amb què arriba a baix del pla inclinat. En cas contrari, determineu l'espai recorregut damunt del pla inclinat.
b) Si la resposta de l'apartat *a* ha estat afirmativa, determineu l'altura màxima que assoleix el cos damunt del pla inclinat.
c) Quina ha estat la pèrdua d'energia en forma de calor deguda a la fricció?

Solució: a) Sí, 3'12 m/s, b) 0'3 m, c) -0'524 J.

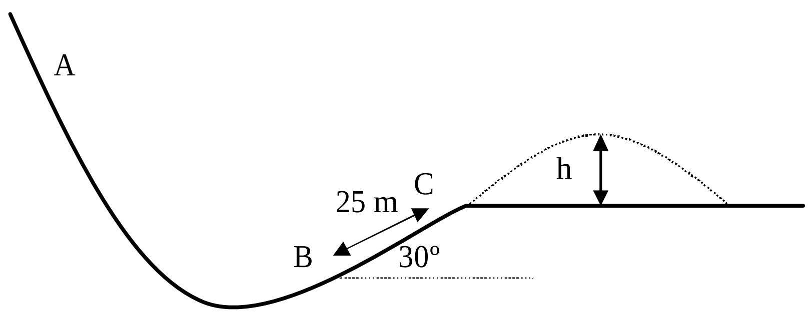
P.6.6 Dues masses de 5 kg i 3 kg estan unides amb una corda mitjançant una politja sense fricció ni massa, tal com indica la figura. A partir del teorema de conservació de l'energia, determineu la velocitat final de la massa de 3 kg quan aquesta massa ha pujat 2 metres.



Solució: 3'13 m/s

P.6.7 Un esquiador de 80 kg de massa surt des del punt A i arriba fins al punt B amb una velocitat de 35 m/s. Quan passa per C la seva velocitat és de 20 m/s. Sabent que la distància entre B i C és de 25 metres, calculeu:

a) L'energia que perd per fricció en el tram que va de B a C i el valor de la força de fricció en aquest tram (suposada constant).
b) Si la pista s'acaba al punt C i l'esquiador fa un salt parabòlic, quina és l'altura

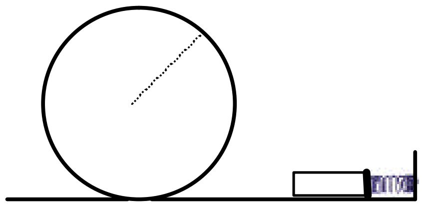


màxima que arribarà (mesurada sobre C)? Negligiu les friccions amb l'aire.

Solució: a) -23200 J, b) 5’1 m

P.6.8 Una massa de 4 kg comprimeix 10 cm d’una molla de constant elàstica 1000 N/m. A 30 cm del cos hi ha un ris de 50 cm de radi. Si durant el trajecte no hi ha fricció,

a) Esbrineu si la massa farà la volta completa al ris.
b) Quina és la compressió que s’hauria de fer a la molla perquè fes la volta?
c) Quina força fa el carril a la part inferior del ris?



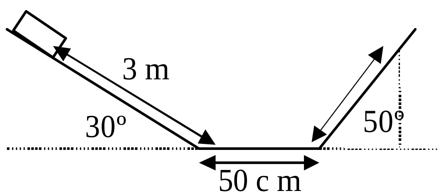
Solució: a) no fa la volta, b) 0’31 m, c) 59’17 N.

P.6.9 Feu el problema anterior però suposant que sobre la superfície horitzontal hi actua una fricció de μ=0’2.

Solució: a) no, b) 0’32 m, c) 49’79 N.

P.6.10 Un bloc de 0’5 kg de massa es deixa anar des de la part més alta d’un pla inclinat de 3 metres de longitud i un angle d’inclinació de 30º. Quan arriba a la part més baixa, es mou per una superfície horitzontal de 50 cm de longitud i torna a pujar per un pla inclinat de 50º d’inclinació. Si en el pla horitzontal hi ha un coeficient de fricció de 0’2, i en els plans inclinats la fricció es negligible, determineu:

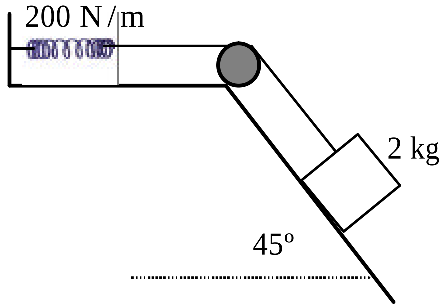
a) La velocitat amb què arriba a la part inferior del segon pla inclinat.
b) La distància que puja pel segon pla inclinat abans d’aturar-se.
c) Si en el primer pla inclinat hi hagués una fricció de μ=0’15, arribaria el cos a pujar pel segon pla inclinat? En cas afirmatiu, determineu l’altura que pujaria per aquest pla inclinat.



Solució: a) 4’43 m/s, b) 1’3 m, c) sí, 0’795 m.

P.6.11 Un bloc de 2 kg situat sobre un pla inclinat amb fricció s'uneix a una molla de massa negligible de constant k = 120 N/m. Es deixa anar el sistema quan la molla no està deformada i el bloc es mou 15 cm cap avall abans d'aturar-se. Trobeu:

a) El coeficient de fricció dinàmic entre la superfície i el bloc.
b) L'energia perduda per fricció.

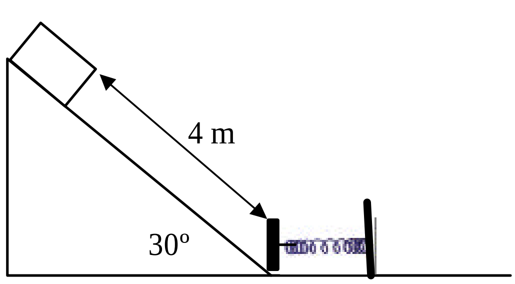


Solució: a) 0'24, b) -0'519 J

P.6.12 Una massa de 2 kg es deixa anar per un pla inclinat de 30º. Quan ha recorregut una distància de 4 m arriba al final del pla inclinat i xoca amb una molla sense massa i de constant elàstica 100 N/m. Si el coeficient de fricció entre la massa i el pla inclinat és de 0'2 , trobeu:

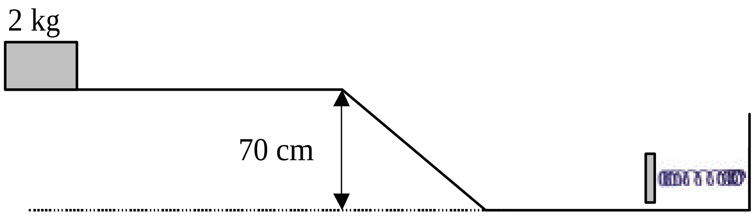
a) La compressió màxima de la molla.
b) Fins a quin punt tornarà a pujar de nou pel pla inclinat, després de deixar la molla?

(Suposeu que en el pla horitzontal no hi ha fricció.)



Solució: a) 0'716 m, b) 1'94 m.

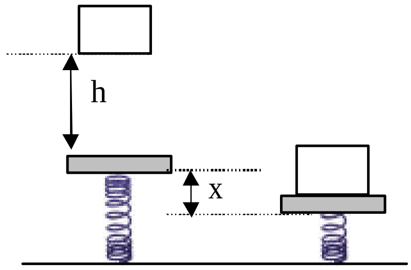
P.6.13 En el sistema de la figura, un cos de 2 kg es mou a 3 m/s sobre un pla horitzontal que està elevat 70 cm sobre el terra. Es demana:



a) Quina velocitat porta el cos quan ha comprimit 5 cm la molla, de constant elàstica 4000 N/m? Suposeu que no hi ha fricció.
b) Quina és la compressió màxima de la molla?
c) Quina velocitat portarà el cos quan torni a passar per la posició inicial?

Solució: a) 4'21 m/s, b) 0'106 m, c) la mateixa.

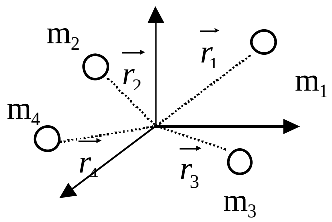
P.6.13. Deixem anar un cos de 100 g sobre una molla de constant elàstica 400 N/m. La distància entre el cos i la molla és de h = 5 m. Calculeu el desplaçament x de la molla.
Preneu g = 10 m/s^2.



Solució: 0'16 m.

DINÀMICA DE SISTEMES DE PARTÍCULES

P.1. Concepte de centre de masses



Definicions

T.1.1 **Posició del centre de masses**. Donat un sistema de N partícules situades en uns eixos de coordenades, de manera que el vector posició de la partícula *i* és indicat pel vector $\vec{r}_i = x_i\,\vec{i} + y_i\,\vec{j} + z_i\,\vec{k}$, podem determinar el vector posició del centre de masses com:

$$\boxed{\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}} \qquad (1)$$

Exercicis

E.1.1. Tres masses puntuals estan situades al pla XY de la manera següent: una massa d'1 kg està situada a l'origen de coordenades, una segona massa d'1 kg és al punt (4,0) i la darrera massa de 2 kg és al punt (2,2). Determineu el centre de masses.

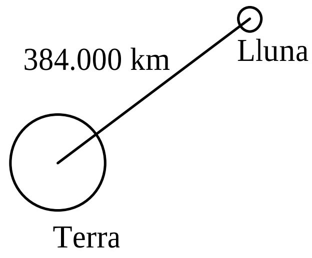
Solució

Aplicant la definició de centre de masses, calculem la seva posició:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1\cdot(0,0)+1\cdot(4,0)+2\cdot(2,2)}{4} = \frac{(8,4)}{4} = \boxed{(2,\ 1)\text{ m.}}$$

E.1.2. La Terra té un radi de 6370 km i la Lluna té un radi de 1738 km. La distància que separa el centre de la Terra i el de la Lluna és, de mitjana, de 384.000 km. Calculeu a quina distància de la superfície de la Terra està situat el centre de masses, sabent que la massa de la Terra és unes 83 vegades més gran que la de la Lluna.

Solució

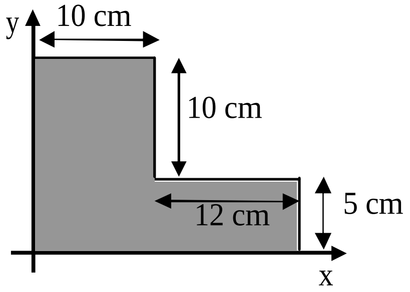


Dibuixem el sistema Terra-Lluna i prenem com a origen de coordenades el centre de la Terra. Podem considerar llavors que és un sistema unidimensional, on la coordenada *x* representa la recta que uneix els dos cossos:

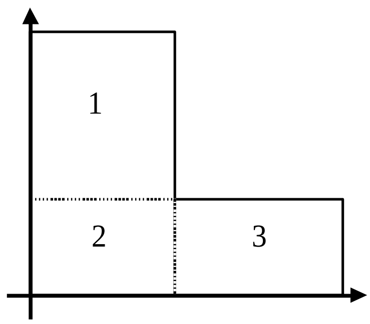
$$x_{CM} = \frac{83M_{LL} \cdot 0 + M_{LL} \cdot 384.000}{84M_{LL}} = 4.571{,}43\text{km}$$

Es troba a una distància de 4571 km del centre de la Terra. Per tant, respecte a la superfície es troba a 2129 km per sota de la superfície terrestre.

E.1.3. Determineu el centre de masses de la peça següent:



Solució



Si la figura té simetria, el centre de masses de la figura està situat al seu centre de simetria. Aquesta figura la podem dividir en tres rectangles, el centre de simetria dels quals es troba al mig de cada rectangle.
La figura 1 té el centre de simetria al punt de coordenades $P_1(5, 7'5)$.
La figura 2 té el centre de simetria al punt de coordenades $P_2(5,2'5)$.
La figura 3 té el centre de simetria al punt de coordenades $P_3(16, 2'5)$.

Per determinar les masses se suposa que el cos és de densitat uniforme. D'aquesta manera, la massa és proporcional a l'àrea que ocupa, ja que si la figura té dues dimensions, llavors podem escriure la densitat com:

$? = \frac{m}{A}$ i per tant $m = \rho \cdot A$

La figura 1 té una àrea de $A_1 = 100\ cm^2$, la segona una àrea de $A_2 = 50\ cm^2$ i la tercera una àrea de $A_3 = 60\ cm^2$.

D'aquesta manera, determinem el centre de masses com:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{100? \cdot (5{,}7'5) + 50? \cdot (5{,}2'5) + 60? \cdot (16{,}2'5)}{210?} = \frac{(1710{,}1025)}{210} = (8'14{,}4'9) \text{ m.}$$

$\boxed{(8'14{,}4'9) \text{ m}}$

Tornem-hi…

P.1.1 Quatre boletes de 4 kg, 3 kg, 2 kg i 1 kg de massa estan situades respectivament als vèrtexs d'un quadrat de vèrtexs A(0,0), B(0,5), C(5,5) i D(5,0). Trobeu les coordenades del centre de masses de la distribució de masses. Dades SI.

Solució: (1'5, 2'5) m

P.1.2 Tres masses puntuals estan localitzades sobre l'eix *y* de manera que la primera massa, de 4 kg, està situada a l'origen, la segona massa, també de 4 kg, es troba al punt y = 20 cm i la tercera massa, de 10 kg, es troba al punt y = 80 cm. Determineu el centre de masses del sistema.

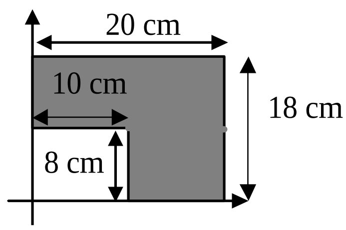
Solució: (0 , 48'89) cm

P.1.3 Un sistema està format per tres masses puntuals unides per barres de massa negligible. La primera massa, de 100 g, està situada a l'origen de coordenades; la segona massa, de 200 g, està situada al punt de coordenades (2,1), i la tercera massa, també de 200 g, és al punt de coordenades (5,0). Determineu les coordenades del centre de masses.

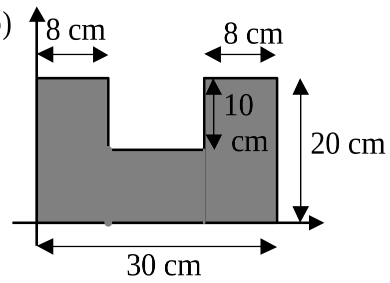
Solució: (2'8,0'4) cm

P.1.4 Determineu la posició del centre de masses a les figures següents (suposeu que la densitat del material és uniforme en tots els casos):

a)

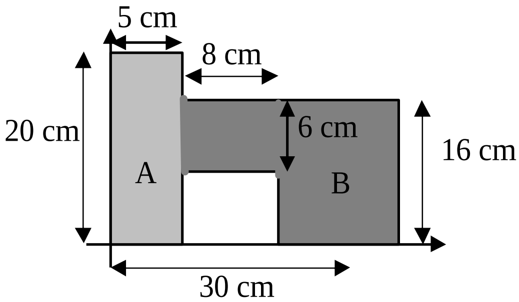


b)



Solució: a) (11'43 ,10'43) cm; b) (15 , 8'48) cm

P.1.5 Determineu la posició del centre de masses de la figura següent, si la densitat del material A és $\rho_A = 5\ g/cm^2$ i la del material B és $\rho_B = 8\ g/cm^2$.



Solució: (16’83 , 8’95) cm

P.2. Moviment del centre de masses

Definicions

T.2.1 **Velocitat del centre de masses**. La velocitat del centre de masses es pot expressar de la manera següent:

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i}{M}} \qquad (2)$$

on m_i representa la massa de cada partícula, M la massa total i $\vec{v}_i$ la velocitat de cada una de les partícules.

T.2.2 **Acceleració del centre de masses**. De la mateixa manera, podem definir l’acceleració del centre de masses com:

$$\boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i}{M}} \qquad (3)$$

on m_i representa la massa de cada partícula, M la massa total i $\vec{a}_i$ la velocitat de cada una de les partícules.

T.2.3 **Segona llei de Newton per a un sistema de partícules**. La segona llei de Newton aplicada a un sistema de partícules es pot escriure de la manera següent:

$$\boxed{} \qquad (4)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

on $\vec{F}_{ext}$ indica la suma de totes les forces externes al sistema que actuen sobre el sistema, M la massa total de les partícules que formen el sistema i $\vec{a}_{CM}$ l'acceleració del centre de masses. Per tant, el que ens diu aquesta equació és que el sistema de partícules es mou com si tinguéssim una sola partícula de massa M (massa total) situada a la posició del centre de masses i que estigués sotmesa a la suma total de forces externes que actuen sobre el sistema. Això pot ser molt útil, ja que el tractament del moviment de cada una de les partícules separadament sol ser força complicat. D'aquesta manera reduïm l'estudi al tractament d'una partícula puntual (el centre de masses).

E.2.1. Tenim tres partícules d'1 kg, 2 kg i 3 kg situades als punts A(1,1,0), B(1,0,1) i C(0,1,1), respectivament, que tenen unes velocitats $\vec{v}_A$ =(1,2,0), $\vec{v}_B$ =(2,2,1) i $\vec{v}_C$ =(0,3,1). Les magnituds anteriors estan expressades en el SI. Sobre la massa d'1 kg hi apliquem una força de 5 N en sentit positiu de l'eix z, i sobre la massa de 2 kg, una força de 4 N en el sentit negatiu de l'eix de les x. Determineu:

a) La posició inicial del centre de masses.
b) La velocitat inicial del centre de masses.
c) L'acceleració del centre de masses.
d) La posició al cap de dos segons d'haver aplicat les forces.
e) L'energia cinètica del sistema al cap d'aquests dos segons.

Solució

a) Aplicant la fórmula de la posició del centre de masses obtenim:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1(1,1,0)+2(1,0,1)+3(0,1,1)}{6} = \frac{(3,4,6)}{6} = \boxed{(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)\ \text{m.}}$$

b) Aplicant la fórmula corresponent al càlcul de la velocitat del centre de masses:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1(1,2,0)+2(2,2,1)+3(0,3,1)}{6} = \frac{(5,15,5)}{6} = \boxed{(5/6,\ 5/3,\ 5/6)\ \text{m/s.}}$$

c) Aplicant la fórmula corresponent al càlcul de l'acceleració del centre de masses, a partir de les forces externes:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{M} = \frac{(0,0,5)+(4,0,0)}{6} = \boxed{(2/3,\ 0,\ 5/6)\ \text{m/s}^2}$$

d) El CM es mou com una partícula puntual de massa M amb una trajectòria rectilínia uniformement accelerada; per tant, la posició al cap d'un temps t serà:

$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + ½ \cdot \vec{a}_{CM}\, t^2$

Substituint els valors dels apartats anteriors obtenim:

$\vec{r}_{CM} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1) + (5/6, 5/3, 5/6)\, t + ½ \cdot (2/3, 0, 5/6) t^2$

$\vec{r}_{CM} = (1/3 + 5/6\, t + 2/6\, t^2, 2/3 + 5/3\, t, 1 + 5/6\, t + 5/12\, t^2)$ m

Si volem saber la posició al cap de 2 segons, substituïm el valor del temps:

$\boxed{\vec{r}_{CM} = (10/3, 4, 13/3) \text{ m.}}$

e) L'energia cinètica del sistema la podem calcular sabent la velocitat del centre de masses al cap de 2 segons, ja que:

$E_c = \frac{1}{2} M \cdot v_{CM}^2$

$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_0 + \vec{a}_{CM} \cdot t = (5/6, 5/3, 5/6) + (2/3, 0, 5/6) \cdot 2 = (13/6, 5/3, 5/2)$ m/s

Calculem el mòdul, de manera que la velocitat v_{CM} al cap de 2 segons val:

$v_{CM} = 3'7$ m/s

$E_c = \boxed{41'07 \text{ J}}$

E.2.2. Un projectil és llançat enlaire des de 50 m d'altura amb una velocitat de 40 m/s i amb un angle d'inclinació de 30º amb el terra. En un moment determinat explota en dos trossos, un dels quals té una massa que és el doble que l'altre. El de massa més petita cau a 100 metres del punt de llançament. A quina distància ha caigut el segon tros?

Solució

Suposem que el projectil és el nostre sistema. Les forces que apareixen en l'explosió són forces internes del sistema, de manera que l'única força externa que hi actua és la força de la gravetat. Per tant, després de l'explosió podem suposar el moviment com si tota la massa estigués concentrada al centre de masses, que seria el punt del projectil si aquest no hagués explotat.

Calculem la posició del projectil quan arriba a terra si no hagués explotat (posició del centre de masses al punt final), a partir de les fórmules de cinemàtica corresponents. Quan arribi a terra: $y = 0$. Com que a la direcció y és un moviment rectilini uniformement accelerat, obtenim:

$y = y_0 + v_0 \cdot \sin 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \Longrightarrow t = 5'82 \text{ s}$

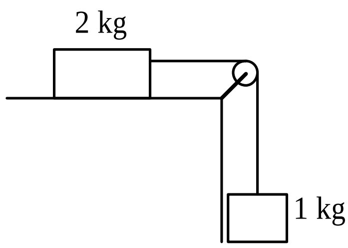
x $= v_0 \cdot \cos 30^\circ \cdot t = 201'6$ m

Per tant, la posició del CM quan els trossos arriben a terra és 201'6. Si sabem la distància on cau la massa més petita (x_1=100 m), podem trobar on cau l'altra massa mitjançant la fórmula de la posició del CM:

$x_{CM} = 201'6 = \frac{m \cdot 100 + 2m \cdot x_2}{3m} \Longrightarrow \boxed{x_2 = 252'41 \text{ m}}$

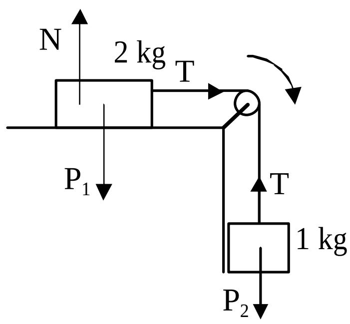
E.2.3. Una massa de 2 kg està unida a una massa d'1 kg a través d'una corda inextensible que passa per una politja de massa i fricció negligibles tal com indica la figura. Calculeu:

a) L'acceleració del centre de masses.
b) La velocitat del centre de masses quan hagi transcorregut un segon.



Solució

a) Si el sistema és el conjunt format per les dues masses, dibuixem totes les forces externes que actuen sobre les masses (tingueu en compte que les tensions són forces internes del sistema, però actuen en direccions perpendiculars; per tant, no s'anul·len).



Com que el cos de 2 kg està en equilibri vertical, es verifica que N = P_1, i per tant, s'anul·len:

$\Sigma \vec{F}_{\text{resultant}} = (0, P_2) + (T, 0) + (0, -T) = (T, P_2 - T)$

(Agafem P_2 positiva, ja que va en direcció del moviment.)

Busquem el valor de la tensió per dinàmica:

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ P - T = m_2 a \end{cases} \Longrightarrow T = 6'53 \text{ N}$$

D'aquesta manera, aplicant la segona llei de Newton per a un sistema de partícules, obtenim:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_{resultant}}{M} = \boxed{(2'17\ ,\ 1'09)\ m/s^2}$$

b) Aplicant les fórmules de l'MRUA per al centre de masses obtenim:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_0 + \vec{a}_{CM} \cdot t = (0,0) + (2'17,1'09) \cdot 1 = \boxed{(2'17,\ 1'09)\ m/s}$$

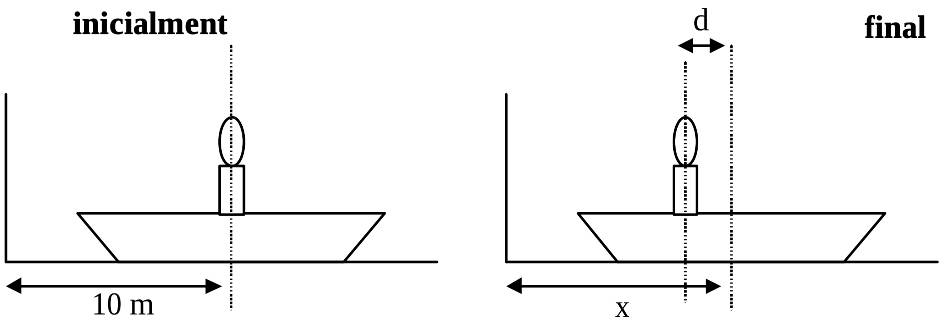
E.2.4. Dins d'una barca de 150 kg que està en repòs hi ha un home de 90 kg de pes assegut al mig de la barca. De cop i volta, aquest home s'aixeca i comença a caminar cap a la costa a una velocitat de 2 m/s. Si la distància inicial de l'home a la costa és de 10 metres, calculeu:

a) La posició inicial i final del centre de masses.
b) La distància de la costa a què es trobarà l'home al cap de 3 segons.

Suposem que la força horitzontal que fa l'aigua sobre la barca és negligible. En aquestes condicions, podem dir que en el sistema format per l'home i la barca no hi actua cap força externa, ja que el pes de la barca i el pes de l'home estan equilibrats amb les forces verticals que exerceix la barca per aguantar l'home i les que exerceix l'aigua per aguantar la barca. Així, si la barca està en repòs, com que no hi ha forces externes, l'acceleració és zero, i per tant, segons la primera llei de Newton, continua en repòs.

a) La posició del CM al començament és 10 m de la vora, i al final també.

b) Al començament, els dos centres de massa, tant el de la barca com el de l'home, es troben a 10 metres. Després l'home s'ha mogut una distància $d = 2 \cdot 3 = 6$ m.



Calculem la distància x:

$$x_{CM} = 10 = \frac{150 \cdot x + 90 \cdot (x-6)}{240} \quad ; \quad x = 12'25\ m$$

Per tant, l'home es troba a $a = 12'25 - 6 = \boxed{6'25\ m}$ de la costa.

Tornem-hi…

P.2.1 Dues partícules de 2 kg i 3 kg de massa estan situades respectivament en els punt de coordenades (2,1) i (-3, 1). Les coordenades són en metres. La primera es mou a 10 m/s paral·lelament a l' eix de les *X* en sentit positiu, i la segona a una velocitat de 8 m/s en una direcció que forma un angle de 120 º amb l' eix de les *X* i cap amunt. Calculeu:

a) El seu CM.
b) La velocitat inicial amb què es mou el CM.
c) L' expressió per la posició del CM, referida als eixos de coordenades.
d) La velocitat del centre de masses al cap de 5 segons.

Solució: a) (-1,1); b) (1'6,4'6); c) (-1+1'6t,1+4'16t); d) la mateixa.

P.2.2 Es dispara un projectil des del terra de manera que descrigui un tir parabòlic amb una velocitat de 100 m/s i amb un angle d'inclinació de 40º. En el punt més alt de la seva trajectòria explota en dos fragments d'igual massa. Si un dels projectils cau verticalment cap avall, a quina distància del punt de llançament cau el segon fragment?

Solució: 1507'58 m.

P.2.3 Dos nois es troben dins d'una barca en repòs. Un d'ells, de 75 kg de massa, és al centre de la barca i l'altre, de massa 90 kg, és en un extrem de la barca, a 2 metres de l'altre. La barca té una massa de 100 kg. Si el que és al centre s'apropa 1 metre a l'altre:

a) Quina és la posició del centre de masses inicial i final?
b) Quina serà la distància que s'haurà mogut la barca?

Solució: a) 0'68 m tant a l'inici com al final; b) 0'46 m.

P.2.4 Dues masses de 15 kg i 4 kg estan situades als punts de coordenades (0,5) i (7,0), respectivament, i estan unides per una barra de massa negligible. Inicialment el sistema està en repòs. Sobre la primera massa hi actua una força de 12**i** N i sobre la segona una força de 4**j** N (totes dues són forces externes). Calculeu:

a) La posició inicial del centre de masses.
b) L'acceleració del centre de masses.
c) La posició del centre de masses quan han transcorregut 5 segons.
d) La velocitat del centre de masses quan han transcorregut 5 segons.

Solució: a) (28/19, 75/19) m; b) (12/19,4/19) m/s^2; c) (178/19,125/19) m; d) (60/19, 20/19) m/s.

P.3. Quantitat de moviment. Conservació de la quantitat de moviment

Definicions

T.3.1 **Quantitat de moviment**. Definim la quantitat de moviment (també anomenada moment lineal) com el producte de la massa per la velocitat:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}} \qquad (5)$$

Unitats: $kg \cdot m/s^2$

Es pot demostrar fàcilment que la quantitat de moviment d'un conjunt de N partícules que formen un sistema es pot calcular de la manera següent:

$$\boxed{\vec{P}_{sist} = M \cdot \vec{v}_{CM}} \qquad (6)$$

La segona llei de Newton aplicada a un sistema de N partícules es pot escriure de la manera següent:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt}} \qquad (7)$$

T.3.2 **Relació entre la quantitat de moviment d'un sistema de partícules i la velocitat del centre de masses**. Aquesta darrera expressió ens indica que els canvis en la quantitat de moviment són produïts pel conjunt de les forces externes que actuen en el sistema. D'aquesta manera, si la suma de les forces externes que actuen sobre un sistema és zero, la quantitat de moviment es manté constant al llarg del temps (ja que la derivada de la quantitat de moviment del sistema es fa nul·la). Si la quantitat de moviment es manté constant, això implica que la velocitat del centre de masses del sistema també és constant.

Exercicis

E.3.1. Una vagoneta que pesa 80 kg es mou a 10 m/s seguint una trajectòria rectilínia i horitzontal. De cop i volta, un noi de 60 kg que es troba en repòs salta cap a la vagoneta en la mateixa direcció i sentit en què es desplaça la vagoneta, i a una velocitat de 2'5 m/s. Calculeu:

a) La velocitat de la vagoneta després del salt.
b) Avalueu la velocitat de la vagoneta, en mòdul i direcció, si aquesta es pot desplaçar en qualsevol direcció, però si el noi salta a 2'5 m/s però cap a la dreta.

Solució

a) Si avaluem les forces externes que actuen sobre la vagoneta i el noi (que formen el sistema) abans de saltar, podem comprovar que són zero, ja que el pes de l'home i del noi són compensats per les forces normals que desenvolupa el terra. Després del salt, també es pot veure fàcilment que les forces externes també són zero.

Per tant: $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Longrightarrow \vec{p}_{\text{abans impacte}} = \vec{p}_{\text{després impacte}}$

— Abans de l'impacte tenim un cos (la vagoneta) que es mou a una velocitat de 10 m/s i el noi que es mou a 2'5 m/s en la mateixa direcció.
— Després del salt tenim un cos (la vagoneta + noi) que es mou tot junt.

No cal que utilitzem els vectors, ja que el moviment va sempre en la mateixa direcció:

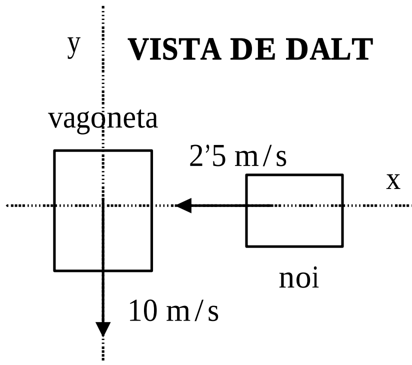
$80 \cdot 10 + 60 \cdot 2'5 = 140 \cdot v$

$\boxed{v = 6'78\ m/s}$

b) En aquest cas les forces externes continuen valent zero i, per tant, hi podem aplicar el mateix que hem aplicat al cas anterior:

Per tant: $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Longrightarrow \vec{p}_{\text{abans impacte}} = \vec{p}_{\text{després impacte}}$

— Abans de l'impacte tenim un cos (la vagoneta) que es mou a una velocitat de 10 m/s i el noi que es mou a 2'5 m/s cap a la dreta.
— Després del salt tenim un cos (la vagoneta + noi) que es mou tot junt.



Ara utilitzem els vectors, ja que el moviment es produeix en diferents direccions:

$80(0,-10) + 60(-2'5,0) = 140\vec{v}$

$\vec{v} = (-1'07, -5'71)$ m/s

$\boxed{v = 5'81\ m/s}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = 5'33 \Longrightarrow$ $\boxed{\alpha = 79'38°\text{, cap avall i cap a l'esquerra.}}$

E.3.2. Una molla de constant elàstica 2 N/m està comprimida 5 cm entre dues masses d'1 kg i 2 kg i sobre una taula sense fricció. Quan deixem anar la molla, calculeu la velocitat amb què es mouen els dos cossos i la quantitat de moviment de cada un.

Solució

Com que no hi actuen forces no conservatives, podem dir que tota l'energia mecànica inicial (abans de deixar-les anar) es transforma en energia mecànica final (la molla retorna a la longitud inicial i les masses guanyen velocitat).

Així:

$E_{m0}=E_{mf} \Longrightarrow U_{pe0} = E_{cf}$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

En aquesta equació apareixen dues incògnites, les dues velocitats. Ens cal una altra equació: com que sobre el sistema no hi actuen forces externes (ja que els pesos estan compensats per les corresponents forces normals i van dirigits en direccions perpendiculars a la direcció del moviment), llavors la quantitat de moviment en la direcció horitzontal es conserva. Aquest cop tampoc no utilitzarem vectors, ja que el moviment es produeix, tal com hem dit, en una única direcció:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Longrightarrow \vec{p}_{abans} = \vec{p}_{després}$$

Abans de deixar-les anar, les dues partícules estan quietes.
Després de deixar-les anar, les dues partícules adquireixen velocitat

$0 = 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2$

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} 0 = 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 \\ 0'0025 = 0'5\cdot v_1^2 + 1\cdot v_2^2 \end{cases}$$ i s'obté: $\boxed{v_1 = -0'057 \text{ m/s}}$ i $\boxed{v_2 = 0'029 \text{ m/s}}$

E.3.3. Un jugador de tennis utilitza una màquina llançapilotes (de 50 kg de massa) per entrenar-se. Si la màquina llança horitzontalment una pilota de 200 g a una velocitat de 90 km/h,

a) quina és la velocitat de retrocés de la màquina?
b) Si sobre el terra hi actua una fricció de 0'2, quina distància recorrerà sobre la pista abans d'aturar-se?

Solució

a) Suposarem que el llançament ha estat instantani. Si analitzem el sistema format pel llançapilotes i la pilota de tennis, no hi ha forces externes: el pes s'anul·la amb la normal, ja que durant el llançament aquests valors no varien. Adoneu-vos que la força que s'aplica a la pilota de tennis és una *força interna* del sistema. A més, el moviment es produeix en la direcció horitzontal, per tant, el pes de la pilota després del llançament tampoc no afecta aquesta direcció i el moment és constant en la direcció x. Així, no cal utilitzar vectors, ja que el moviment apareix en una sola direcció, la direcció horitzontal:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Longrightarrow \vec{p}_{abans} = \vec{p}_{després}$$

$0 = 0'2 \cdot 25 + 50v \Longrightarrow v = 0'1 \text{ m/s}$

(Observeu que hem posat les unitats de la velocitat i les masses en el SI!)

b) Per calcular la distància podem aplicar els conceptes de cinemàtica i dinàmica, o bé el teorema de la conservació de l'energia. Ho farem d'aquesta darrera manera:

$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = 0 - E_{c0}$

Com que ara ens trobem sobre una superfície horitzontal i hi ha equilibri en la direcció vertical, llavors N = P. I així:

$\mathbf{F_R} = \mu \cdot N = 0'2 \cdot 50 \cdot 9'8 = \mathbf{98\ N}$

Substituint a l'expressió anterior:

$$-98 \cdot x = -\frac{1}{2} 50 \cdot 0'1^2$$

Llavors: $\boxed{x = 2'55 \cdot 10^{-3}\ m}$

E.3.4. Un projectil que es mou horitzontalment a una velocitat de 10 m/s esclata en dos trossos, un dels quals té una massa que és el triple que l'altre. El fragment petit surt disparat en direcció vertical i cap amunt a 20 m/s. Calculeu:

a) La velocitat, en mòdul i direcció, amb què surt el fragment gran.
b) L'energia que adquireixen els fragments del projectil, en funció de la massa del fragment petit.

Solució

Quan l'objecte esclata ho fa a causa de *forces internes* (reaccions que es puguin donar dins l'objecte): la quantitat de moviment just abans de l'explosió ha de valer el mateix que just després de l'explosió, ja que les forces que provoquen l'explosió són internes i no poden afectar la quantitat de moviment total. Treballarem amb vectors, perquè ara sí que tenim el moviment en diferents direccions.

a) Anomenem M i 3M les masses dels fragments; d'aquesta manera, la total val 4M.

$\vec{p}_{\text{abans}} = \vec{p}_{\text{després}}$

$4M \cdot (10,0) = M \cdot (0,20) + 3M \cdot (v_x, v_y)$

Separant les dues components de l'equació anterior i simplificant la massa M que apareix repetida a tots els termes, obtenim:

$$\begin{cases} 40 = 3v_x \\ 0 = 20 + 3v_y \end{cases}$$ i d'aquí obtenim v_x=40/3 m/s i v_y = -20/3 m/s

Fent el mòdul obtenim: $\boxed{v = 14'9 \text{ m/s}}$

Direcció i sentit: tg $\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-20/3}{40/3} = -0'5$; $\boxed{\alpha = -26'56^o}$

(L'angle es troba al quart quadrant, ja que pels signes de la velocitat podem comprovar com es mou cap a la dreta i cap avall, que correspon precisament al quart quadrant.)

b) Si calculem les energies final i inicial:

$E_{cf} = \frac{1}{2}3M(14'9)^2 + \frac{1}{2}M(20)^2 = 533M$ J

$E_{c0} = \frac{1}{2}4M(10)^2 = 200M$ J

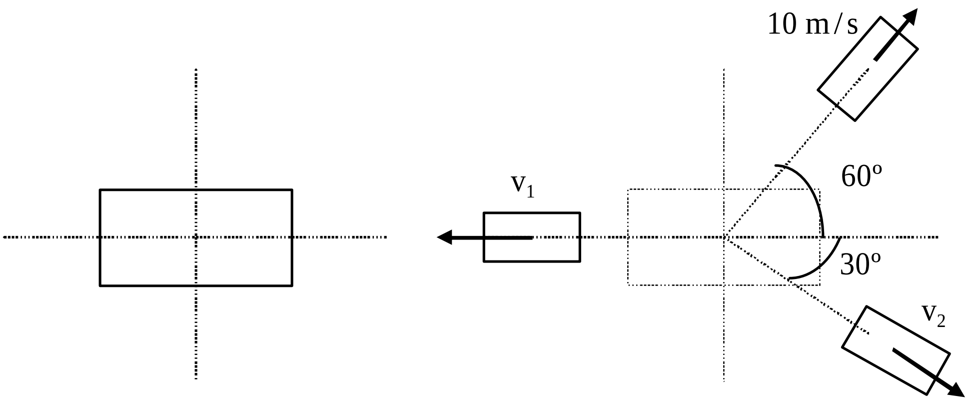
$\boxed{\Delta E_c = 333M \text{ J}}$

On M representa la massa del fragment petit.

E.3.5. Una bala que està en repòs esclata en tres parts iguals. El primer fragment surt disparat en direcció horitzontal, el segon surt cap avall amb un angle de 30º i el tercer surt cap amunt amb un angle de 60º i una velocitat de 10 m/s. Calculeu:

c) La velocitat dels dos fragments.
d) L'augment de l'energia cinètica deguda a l'explosió.

Solució



Just abans de l'explosió **Just després de l'explosió**

Igual que en el problema anterior, com que l'explosió és produïda per forces internes, la quantitat de moviment just abans i just després del xoc no pot variar. Noteu que la velocitat del fragment 1 ha d'anar cap a l'esquerra, ja que si els altres dos van cap a la dreta i inicialment el cos estava en repòs l'única possibilitat que es conservi la quantitat de moviment és que aquest fragment surti disparat en direcció contrària.

a) Anomenem M les masses dels fragments, i la massa total valdrà 3M.

$\vec{p}_{\text{abans}} = \vec{p}_{\text{després}}$

3M·(0,0) = M·(-v_1, 0) + M·(v_2,cos 30, -v_2 sin 30) + M(10·cos 60º, 10·sin 60º)

Separant les dues components de l'equació anterior i simplificant la massa M que apareix repetida a tots els termes, obtenim:

$\begin{cases} 0 = -v_1 + v_2 \cos 30^o + 10\cos 60^o \\ 0 = -v_2 \sin 30^o + 10 \sin 60^o \end{cases}$ i d'aquí obtenim $\boxed{v_1 = 20 \text{ m/s i } v_2 = 17'32 \text{ m/s}}$

b) Calculant la variació d'energia cinètica entre l'inicial i el final:

$$\Delta E_c = (\frac{1}{2}M(20)^2 + \frac{1}{2}M(17'32)^2 + \frac{1}{2}M(10)^2) - (0) = \boxed{400M \text{ J}}$$

Tornem-hi…

P.1.1. Dos blocs es col·loquen sobre una taula horitzontal sense fricció. Un té quatre vegades la massa de l'altre. Una molla de constant 100 N/m s'uneix a un dels blocs i els dos blocs s'ajunten, amb la molla al mig. Deixem anar el conjunt i s'observa com el bloc gran es mou a una velocitat de 3 m/s. Calculeu:

a) La velocitat amb què es mou el segon cos.
b) L'energia cinètica total dels dos cossos, en funció de la massa del cos petit.
c) La compressió que hi havia entre els dos blocs abans de deixar-los anar, en funció de la massa del més petit.

Solució: a) -12 m/s; b) 90m J, c) $\sqrt{\left(\frac{9m}{5}\right)}$

P.1.2. Un noi de 60 kg es troba sobre una planxa de fusta de 40 kg que reposa sobre una superfície sense fricció. Inicialment es troben en repòs. El noi comença a caminar sobre la planxa a una velocitat de 1 m/s. Calculeu:

a) La velocitat de la planxa respecte al terra.
b) La velocitat del noi respecte a la planxa.

Solució: a) -1'5 m/s; b) v_{noi} = 2'5 m/s

P.1.3. Un objecte de 4 kg de massa es mou horitzontalment a una velocitat de 20 m/s cap a la dreta. En un instant determinat, l'objecte explota i es divideix en dues parts iguals. La velocitat després del xoc d'una d'aquestes meitats és de (30,-10) m/s. Determineu:

a) La velocitat de sortida de l'altra meitat.
b) L'augment d'energia cinètica deguda a l'explosió.

Solució: a) (10,10) m/s, b) 400m J

P.1.4. Una granada de mà cau verticalment i es trenca en dos fragments, un dels quals té el doble de massa que l'altre, quan es troba a 1.000 metres d'altura. Els dos fragments es mouen en la mateixa direcció vertical. La seva velocitat en el moment de l'explosió és de 40 m/s. El fragment més petit surt disparat a 60 m/s. Determineu:

a) La velocitat de l'altre fragment després de l'explosió.
b) La variació de l'energia cinètica després de l'explosió.

Solució: a) 30 m/s; b) -300m J.

P.4. Teorema de l'impuls mecànic

Definicions

T.1.1. **Impuls mecànic**. L'impuls mecànic, per a una força constant, es defineix com el producte entre la força i l'interval de temps en què ha estat actuant la força:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t} \quad (8)$$

Unitats: N· s (equivalen a kg·m/s)

Com que la força és una magnitud vectorial, l'impuls també és una magnitud vectorial.

Si la força és una magnitud vectorial, és una força variable que depèn del temps; llavors, l'impuls és la integral per a cada interval petit de temps:

$$\boxed{\vec{\mathrm{I}} = \int \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{dt}} \quad (9)$$

Si representem gràficament la força en funció del temps, l'àrea compresa entre la corba i l'eix d'abscisses és l'impuls mecànic.

T.1.2. **Teorema de l'impuls mecànic**. L'expressió de l'impuls mecànic es pot relacionar amb la quantitat de moviment a partir de la segona llei de Newton, i obtenir el teorema de l'impuls mecànic:

$$\boxed{\vec{\mathrm{I}} = ?\, \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{sist}}} \quad (10)$$

L'impuls mecànic és útil per calcular la força mitjana durant l'interval Δt: la força mitjana és la força constant que produeix el mateix impuls que la força real en aquest interval de temps Δt. Aquesta força mitjana es pot calcular a partir de la variació de la quantitat de moviment, si coneixem l'interval de temps.

E.4.1. Un tenista llança una pilota de 100 g de massa que impacta amb la raqueta del tennista contrincant a una velocitat de 80 km/h. Aquest connecta un *drive* guanyador a contrapeu i envia la pilota a 90 km/h en la mateixa direcció i sentit contrari al que li ha enviat el primer jugador. Si la pilota ha estat en contacte 2 centèsimes de segon amb la raqueta, calculeu:

a) La variació de la quantitat de moviment de la pilota i l'impuls mecànic donat a la pilota.

b) La força mitjana que exerceix la raqueta sobre la pilota.

Solució

a) $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0$

Podem treballar sense vectors, ja que la pilota es mou sempre sobre la mateixa direcció. Passant les velocitats al sistema internacional i substituint la quantitat de moviment per la seva expressió, m·v, s'obté:

$\Delta p = 0'1 \cdot 25 - 0'1 \cdot (-22'2) = \boxed{4'72 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$

Com que segons el teorema de l'impuls mecànic, l'impuls correspon a la variació de la quantitat de moviment del sistema, llavors:

$I = \boxed{4'72 \text{ N} \cdot \text{s}}$

(Recordeu que els N· s corresponen a les mateixes unitats que kg·m/s.)

b) A partir de la definició de l'impuls, calculem la força mitjana:

$$F_m = \frac{I}{\Delta t} = \boxed{236 \text{ N}}$$

E.4.2. Avalueu la força mitjana que exerceix un cinturó de seguretat d'un cotxe sobre un passatger de 80 kg de massa, quan el cotxe xoca frontalment contra un mur a una velocitat de 120 km/h. Suposeu que en el xoc la part davantera del cotxe s'ha escurçat 1 metre i que el cotxe queda en repòs després del xoc.

Solució

$$F_m = \frac{I}{\Delta t}$$

Caldrà buscar l'impuls a partir del teorema de l'impuls mecànic. Aquest cop tampoc no cal escriure la velocitat com a vector, ja que el cotxe només es mou en una direcció:

$I = \Delta p = 80 \cdot (33'3) - 80 \cdot 0 = 2.666'67 \text{ N} \cdot \text{s}$

Per calcular l'interval de temps, ho fem a partir de les fórmules de cinemàtica. Com que recorre un metre fins a aturar-se:
$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x$

$\boxed{a = -555'5 \text{ m/s}^2}$

I llavors,
$v = v_0 + a \cdot \Delta t$

$\boxed{\Delta t = 0'06 \text{ s}}$

Substituint a l'expressió de la força mitjana obtenim: $\boxed{F_m = 44'4 \text{ kN}}$

Tornem-hi…

P.4.1. Es llança una pilota de 500 g contra una paret a una velocitat de 15 m/s i formant un angle de 45º amb la superfície. La pilota rebota formant el mateix angle i amb la mateixa velocitat, però en sentit contrari. Si la bola està en contacte amb la paret 0'15 segons, calculeu:

a) La variació de la quantitat de moviment de la pilota.
b) La força mitjana que exerceix la paret sobre la pilota.

Solució: a) (0, 10'6) kg m/s; b) 70'6 N

P.4.2. Una pilota de 300 g és llançada a una velocitat de 15 m/s en direcció horitzontal. Un noi que es troba parat a 10 metres l'atura en 0.05 segons. Calculeu:

a) L'impuls mecànic que s'ha donat a la pilota.
b) La força mitjana que fa el noi per aturar la pilota.

Solució: a) 4'5 N·s; b) 90 N

P.4.3. Un camió arrenca davant d'un semàfor que es posa verd, i arriba a 60 km/h en 6 segons. Calculeu:

a) L'impuls mecànic que ha experimentat el conductor de 80 kg que és a dins del camió.
b) La força mitjana que exerceix el motor del camió sobre el conductor.

Solució: a) 1.333'3 N; b) 222'2 N

P.4.4. Una força té l'expressió següent en funció del temps: F(t)= 100 – 5t (en N). Calculeu:

a) El temps que triga a deixar d'actuar la força.
b) L'impuls mecànic que ha experimentat una bola de 20 kg des del moment en què comença a actuar la força (t=0) fins que s'anul·la.
c) Comproveu el resultat de l'apartat *b* a partir del gràfic corresponent.
d) Si la pilota anava a 20 m/s quan comença a actuar la força, avalueu la velocitat en l'instant en què la força s'anul·la, a partir del teorema de l'impuls mecànic.

Solució: a) 20 s; b) 1000 N·s, d) 70 m/s

P.5. Xocs

Definicions

T.5.1. **Xoc**. En els xocs considerarem que el temps que estan en contacte els dos cossos és molt petit, i per tant, els considerarem *instantanis*. Sota aquesta condició les úniques forces importants que actuen sobre el sistema són les que s'exerceixen mútuament, que són *forces internes* del sistema. Per tant, considerarem que la quantitat de moviment del sistema és constant en el xoc. Per tant, això implica que *la quantitat de moviment just abans del xoc i la quantitat de moviment just després del xoc és la mateixa*. No passa el mateix amb l'energia: generalment, en un xoc es perd energia en la col·lisió, ja que els objectes friccionen i es deformen.

T.5.2. **Tipus de xocs**. Segons el que succeeixi amb l'energia els xocs, els xocs poden ser de dos tipus:
1) **Elàstics**. Anomenem xocs elàstics aquells que conserven l'energia en el xoc. En aquests xocs podem emprar que l'energia abans del xoc és la mateixa que després del xoc.
2) **Inelàstics**. Anomenem xocs inelàstics aquells que no conserven l'energia abans i després del xoc. Generalment, es refereixen a xocs totalment inelàstics a aquells on després del xoc les dues masses queden enganxades.

També podem distingir els xocs segons la dimensió en què es produeixen:
1) **En una dimensió**. Els cossos que xoquen es mouen immediatament abans i immediatament després del xoc en la mateixa direcció. En aquests tipus de problemes no caldrà utilitzar la velocitat com a vector, ja que el signe de la velocitat ens indicarà si es mou en un sentit o en un altre.
2) **En dues o tres dimensions**. En aquest cas caldrà indicar les velocitats com a vectors i treballar en els problemes amb les diferents components vectorials de la quantitat de moviment.

E.5.1. Dos cotxes de masses M_1 = 800 kg i M_2 = 600 kg es mouen en direccions perpendiculars. El primer, a una velocitat horitzontal v_1 = 36 km/h, i el segon, a una velocitat vertical v_2 = 18 km/h. Els cotxes xoquen de manera totalment inelàstica. Calculeu:

a) La velocitat, en mòdul i direcció, del conjunt després del xoc.
b) Quanta energia s'ha perdut en el xoc?
c) L'impuls mecànic que rep el cotxe de 800 kg.

Solució

a) Sabem que en un xoc que la quantitat de moviment just abans i just després del xoc es conserva; per tant:

$$\vec{p}_{\text{abans}} = \vec{p}_{\text{després}}$$

Ara cal treballar amb vectors, ja que el xoc es produeix en dues dimensions. Suposem que el primer es mou cap a la dreta i el segon cap amunt.
$800\cdot(10, 0) + 600\cdot(0, 5) = 1400\cdot(v_x, v_y)$

Separant en components:

$\begin{cases} 8000 = 1400 v_x \\ 3000 = 1400 v_y \end{cases}$ i obtenim:

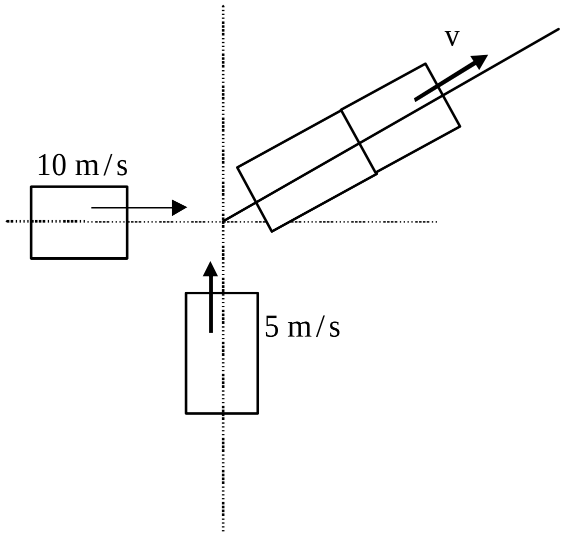
$v_x = 5'71$ m/s i $v_y = 2'14$ m/s

El vector velocitat l'escriurem doncs:

$\vec{v} = (5'71, 2'14)$ m/s

Mòdul: $\boxed{v = 6'1 \text{ m/s}}$

Direcció: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = 0'37$ $\boxed{\alpha = 20'5^{\circ}}$



b) Calculem la diferència d'energia cinètica inicial i final:

$E_{cf} = \dfrac{1}{2}1400\cdot(6'1)^2 = 26.047$ J

$E_{c0} = \dfrac{1}{2}800(10)^2 + \dfrac{1}{2}600(5)^2 = 47.500$ J

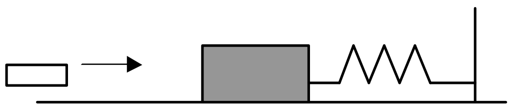
$\boxed{\Delta E_c = -21.453 \text{ J}}$

c) Fent un tractament vectorial de l'impuls mecànic, ja que la velocitat té diferents direccions, i utilitzant el teorema de l'impuls pel cos de 800 kg:

$\vec{I} = \Delta\vec{p} = 800\cdot(5'71, 2'14) - 800\cdot(10,0) = \boxed{(-3.432, 1.712) \text{ N}\cdot\text{s}}$

E.5.2. Un bloc de fusta de 2 kg de massa està en repòs sobre una taula. El coeficient de fricció entre el bloc i la taula és de 0'8. El bloc està unit a una molla de constant elàstica 100 N/m que està fixada per l'altre extrem. Una bala de 50 g de massa xoca contra el bloc i s'hi enganxa. Suposant que el xoc és instantani i que la molla s'ha comprimit 10 cm, calculeu:

a) La velocitat del conjunt immediatament després del xoc.
b) La velocitat inicial amb què s'ha disparat la bala.
c) L'energia que ha perdut en el xoc.



Solució

És una col·lisió totalment inelàstica, ja que la bala queda enganxada al bloc. La quantitat de moviment es conserva, i no calen vectors, ja que les velocitats immediatament abans i després del xoc tenen lloc en una única direcció (eix *x*).

a) $p_{\text{abans}} = p_{\text{després}}$

$0'05 \cdot v_0 = 2'05 \cdot v$

En aquesta equació no sabem ni la velocitat inicial de la bala ni la velocitat del conjunt.

Estudiem la situació immediatament després del xoc: com que sabem la compressió de la molla, mitjançant el teorema de la conservació de l'energia (amb fricció) podem trobar la velocitat immediatament després del xoc. Alerta! No es podria aplicar aquest teorema comparant abans i després del xoc, ja que el xoc és inelàstic i no conserva l'energia!

Després del xoc:

$W_R = E_{pe} - E_{c0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180° = E_{pe} - E_{c0}$

Com que ens trobem sobre una superfície horitzontal i hi ha equilibri en la direcció vertical, llavors N = P. I així:

$\mathbf{F_R} = \mu \cdot N = 0'8 \cdot 2'05 \cdot 9'8 = \mathbf{16'07\ N}$

Substituint a l'expressió anterior:

$$-16'07 \cdot 0'1 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0'1^2 - \frac{1}{2} 2'05 v^2$$

$$\boxed{v = 1'43\ m/s}$$

b) Retornem a l'equació de la conservació de la quantitat de moviment:

$$\boxed{v_0 = 58'78\ m/s}$$

c) Calculem les energies cinètiques immediatament abans i immediatament després:

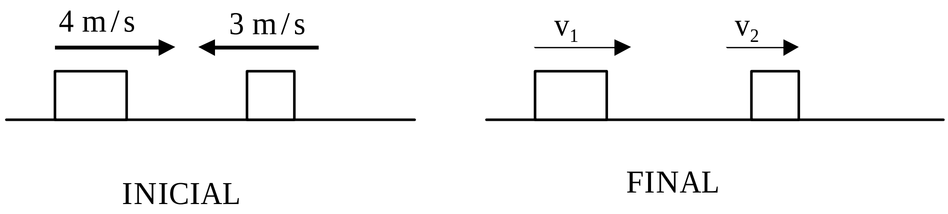
$$E_{cf} = \frac{1}{2} 2'05 \cdot (1'43)^2 = 2'09\ J$$

$$E_{c0} = \frac{1}{2} 0'05 (58'78)^2 = 86'37\ J$$

$\boxed{\Delta E_c = --84'29\ J}$

> E.5.3. Dos blocs llisquen un cap a l'altre sobre una superfície llisa. Un dels blocs, de 8 kg, va cap a la dreta a una velocitat de 4 m/s, i l'altre, de 5 kg, va cap a l'esquerra a 3 m/s. Si es produeix un xoc frontal elàstic, calculeu:
> a) Les velocitats després del xoc.
> b) La velocitat del CM abans i després del xoc.

Solució



El moviment es produeix en una única direcció; no caldran vectors. Com que no sabem cap on es mouran després del xoc, escollim la direcció de la dreta com a positiva. Si es mou en direcció contrària, ja ens apareixerà el signe contrari. El xoc ara és elàstic, i per tant, es conserva l'energia abans i després del xoc.

a) $p_{\text{abans}} = p_{\text{després}}$

$$8\cdot 4 + 5\cdot(-3) = 8\cdot v_1 + 5\cdot v_2$$

$$E_{m,\text{abans}} = E_{m,\text{després}}$$

$$\frac{1}{2}8\cdot 4^2 + \frac{1}{2}5\cdot(-3)^2 = \frac{1}{2}8\cdot v_1^2 + \frac{1}{2}5\cdot v_2^2$$

$$86'5 = 4\cdot v_1^2 + 2'5\cdot v_2^2$$

Resolent el sistema, obtenim:

$v_1 = 4$ m/s o bé $v_1 = -1'38$ m/s
$v_2 = -3$ m/s o bé $v_2 = 5'6$ m/s

Evidentment, els primers valors són il·lògics, ja que després del xoc les seves velocitats canviaran. Per tant:

$\boxed{v_1 = -1'38\ \text{m/s} \qquad v_2 = 5'6\ \text{m/s}}$

(El primer surt rebotat cap a l'esquerra, i el segon cap a la dreta.)

b) Calculant la velocitat del centre de masses amb la fórmula corresponent, obtenim:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{8 \cdot 4 + 5 \cdot (-3)}{13} = \boxed{1'31 \text{ m/s}}$$

Després del xoc la velocitat del centre de masses es conserva; per tant, és la mateixa.

> E.5.4. Un cos de massa *m* que va a 1’5 m/s atrapa un altre cos de massa 2 m que va en la mateixa direcció i sentit, però a 1 m/s. Després del xoc, el primer surt rebotat en direcció perpendicular i cap amunt, i el segon surt amb un angle α, a 2 m/s. Calculeu:
> a) La velocitat amb què surt el primer cos.
> b) L’angle amb què surt rebotat el segon cos.
> c) És un xoc elàstic? Raoneu la resposta.

Solució

a) Com que

Ara les velocitats abans i després del xoc no van en la mateixa direcció; caldrà efectuar el problema amb components vectorials:

$$\vec{p}_{\text{abans}} = \vec{p}_{\text{després}}$$

m·(1’5,0) + 2m·(1,0)= m·(0 ,v) + 2m(2·cos α, -2·sin α)

Simplificant les masses i separant en les dues components, *x* i *y*, s’obté:

$$\begin{cases} 3'5 = 0 + 4\cos a \\ 0 = v - 4\sin a \end{cases}$$

$$\boxed{v = 1'94 \text{ m/s}}$$

b) $\boxed{\alpha = 29^\circ}$

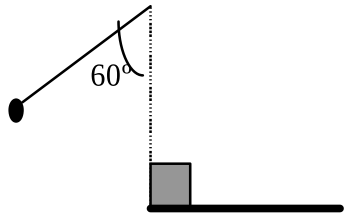
c) Si fos un xoc elàstic es conservaria l’energia. Busquem les energies abans i després del xoc i mirem si valen el mateix:

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m \cdot (1'94)^2 + \frac{1}{2} 2m \cdot (2)^2 = 5'88m \text{ J}$$

$$E_{c0} = \frac{1}{2} m (1'5)^2 + \frac{1}{2} 2m (1)^2 = 2'125m \text{ J}$$

El xoc, doncs, no és elàstic.

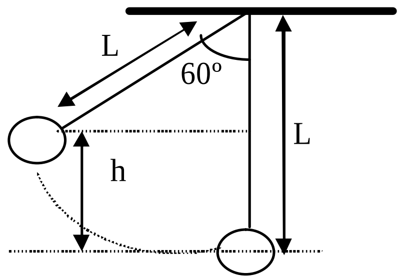
E.5.5. Un pèndol d'1 kg de massa i 1'5 m de longitud forma, inicialment, un angle de 60º amb la vertical. Es deixa anar i quan arriba a la posició vertical xoca amb una massa d'1'5 kg inicialment en repòs, amb la qual fa un xoc totalment elàstic. Com a conseqüència del xoc, la massa llisca sobre un pla horitzontal de coeficient de fricció 0.3.



a) Quina velocitat té la massa d'1kg quan xoca contra la d'1'5 kg?
b) Quina velocitat adquireix la massa d'1'5 kg? I la d'1 kg?
c) Quina distància recorre la massa d'1 kg abans de parar-se?
d) Quin valor té la tensió de la corda quan arriba just a la posició vertical?

Solució

a) Per trobar la velocitat de la massa d'1 kg immediatament abans de xocar, podem aplicar la conservació de l'energia:



Abans del xoc:

$E_{m0} = E_{mf}$

$U_{pg} = E_{cf}$

$$m\,g\,h = \frac{1}{2} m\,v^2$$

Calculem l'altura *h* des d'on s'ha deixat anar la massa d'1 kg a partir de la trigonometria, tal com indica el dibuix:

$h = L - L\cdot\cos 60º = 0'75$ m

Llavors:

$$v = \sqrt{2gh} = \boxed{3'83\ m/s}$$

b) Si el xoc és elàstic aplicarem la conservació de l'energia just abans i just després del xoc. A més, en el xoc es conserva la quantitat de moviment. Com que en aquest moment la velocitat va en la direcció horitzontal i just després també conservaran la direcció, no caldrà un tractament vectorial.

$$p_{abans} = p_{després}$$

$$1'5\cdot 3'83 + 1\cdot(0) = 1'5\cdot v_1 + 1\cdot v_2$$

$$E_{m,abans} = E_{m,després}$$

$$\frac{1}{2}1'5\cdot 3'83^2 = \frac{1}{2}1'5\cdot v_1^2 + \frac{1}{2}1\cdot v_2^2$$

$$11 = 0'75\cdot v_1^2 + 0'5\cdot v_2^2$$

Resolent el sistema s'obté:

v_1 = 3’83 m/s o bé v_1 = 0’76 m/s
v_2 = 0 m/s o bé v_2 = 4’605 m/s

Després del xoc és impossible que el cos d’1 kg no es mogui; per tant, els resultats correctes són:

$\boxed{v_1 = 0'76 \text{ m/s} \quad \text{i} \quad v_2 = 4'605 \text{ m/s}}$

c) Després del xoc, el cos d’1 kg llisca per una superfície amb fricció. Apliquem els teoremes de conservació de l’energia quan intervenen forces no conservatives:

$$W_R = E_{mf} - E_{m0}$$

$$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^{\circ} = - E_{c0}$$

Com que ens trobem sobre una superfície horitzontal i hi ha equilibri en la direcció vertical, llavors N = P. I així:

$$\mathbf{F_R} = \mu \cdot N = 0'3 \cdot 1 \cdot 9'8 = \mathbf{2'94\ N}$$

Substituint a l’expressió anterior:

$$-2'94 \cdot 0'3 \cdot x = 0 - \frac{1}{2} 1 \cdot 4'605^2$$

$$\boxed{x = 12'02 \text{ m}}$$

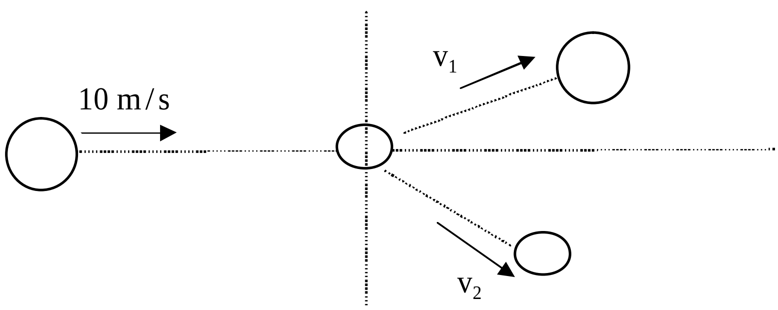
d) Aplicant els conceptes de la dinàmica del moviment circular, ja que el pèndol descriu una trajectòria circular, obtenim:

$T - P = m \cdot a_n$
$T = P + m \cdot v^2/R = \boxed{29'37 \text{ N}}$

E.5.6. Un objecte de 200 g que es mou horitzontalment a 10 m/s xoca amb un objecte de 100 g inicialment parat. Després de xocar, el primer surt desviat amb un angle de 30º i el segon surt amb un angle de 50º. Calculeu la velocitat de cada un després de xocar.

Solució

Com que les velocitats tenen direccions diferents, utilitzarem la conservació de la quantitat de moviment en el xoc en notació vectorial:



$$\vec{p}_{\text{abans}} = \vec{p}_{\text{després}}$$

$0'2\cdot(10,0) = 0'2\cdot(v_1\cdot \cos 30º, v_1\cdot \sin 30º) + 0'1\cdot(v_2\cdot\cos 50º, -v_2\cdot\sin 50º)$

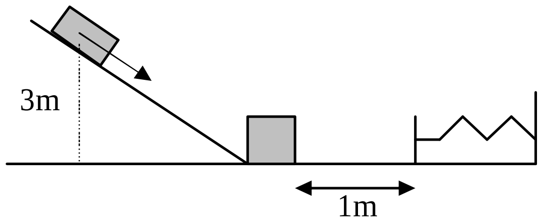
Separant les components en *x* i *y*, obtenim:

$$\begin{cases} 2 = 0'173v_1 + 0'064v_2 \\ 0 = 0'1v_1 - 0'076v_2 \end{cases}$$

I resolent el sistema: $\boxed{v_1 = 7'73 \text{ m/s} \quad \text{i} \quad v_2 = 10'17 \text{ m/s}}$

E.5.7. Un objecte de 3 kg de massa es llança amb una velocitat de 5 m/s des de dalt d'un pla inclinat de 3 m d'altura i 30º d'inclinació. Quan arriba a baix de tot xoca amb una massa de 2 kg i queden enganxats. El conjunt comprimeix una molla de constant 400 N/m situada al final del pla horitzontal.

a) Si en el pla inclinat i el pla horitzontal no hi ha fricció, calculeu la distància en la qual es comprimirà la molla.
b) Si en el pla inclinat i el pla horitzontal hi actua un coeficient de fricció de 0.2, calculeu la distància en la qual es comprimirà la molla.



Solució

a) *Abans del xoc*: primer caldrà buscar la velocitat immediatament abans del xoc. Ho farem per energies:

$E_{m,abans} = E_{m,després}$

$E_{c0} + U_{pg0} = E_c$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + m\,g\,h = \frac{1}{2}m\,v^2 \Longrightarrow \boxed{v = 9'15 \text{ m/s}}$$

Xoc: la quantitat de moviment es conserva. No calen vectors perquè el xoc es produeix en la direcció horitzontal.

$p_{abans} = p_{després}$

$$3\cdot 9'15 = 5\cdot v' \Longrightarrow \boxed{v' = 5'5 \text{ m/s}}$$

Després del xoc: l'energia mecànica es conserva, ja que no hi actuen forces de fricció.

$E_{m,abans} = E_{m,després}$

$E_{c0} = U_{pe}$

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}k\,x^2 \Longrightarrow \boxed{x = 61'5 \text{ cm}}$$

b) *Abans del xoc*: haurem de trobar la velocitat, però tenint en compte que hi ha fricció. Ho fem per energies (també es podria buscar per cinemàtica i dinàmica…).

$W_R = E_{cf} - U_{pg0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180º = \frac{1}{2} m v^2 - (m g h + \frac{1}{2} m v_0^2)$

Com que ens trobem sobre un pla inclinat i hi ha equilibri en la direcció perpendicular al pla, llavors $N = P_y$. I així:

$\mathbf{F_R} = \mu \cdot N = 0'2 \cdot 3 \cdot 9'8 \cdot \cos 30º = \mathbf{5'1\ N}$

El desplaçament sobre el pla inclinat es calcula per trigonometria, a partir de l'angle i l'altura del pla:
$\Delta x = h / \sin 30º = 6$ m

Substituint a l'expressió anterior:
$$-5'1 \cdot 6 = \frac{1}{2} 3 \cdot v^2 - (3 \cdot 9'8 \cdot 3 + \frac{1}{2} 3 \cdot 5^2)$$

$v = \boxed{7'96\ m/s}$

Xoc: la quantitat de moviment es conserva. No calen vectors, perquè el xoc es produeix en la direcció horitzontal.

$p_{abans} = p_{després}$

$3 \cdot 7'96 = 5 \cdot v' \Rightarrow \boxed{v' = 4'77\ m/s}$

Després del xoc:

$W_R = E_{pe} - E_{c0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180º = E_{pe} - E_{c0}$

Com que ara ens trobem sobre una superfície horitzontal i hi ha equilibri en la direcció vertical, llavors $N = P$. I així:

$$-49 \cdot (1 + x) = \frac{1}{2} 400\, x^2 - \frac{1}{2} 5 \cdot 4'77^2$$

$\boxed{x = 35'6\ cm}$

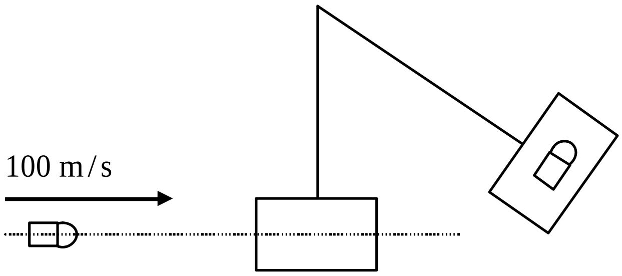
E.5.8. Un pèndol de 375 g de massa i una longitud d'1'2 m està en repòs en posició vertical. Es dispara una bala de 25 g de massa contra el pèndol a una velocitat de 100 m/s, i la bala s'incrusta en el pèndol. Calculeu:

a) La velocitat del conjunt immediatament després del xoc.
b) Descriurà un *looping*? En cas afirmatiu, trobeu la tensió del conjunt en el conjunt més alt del *looping*. En cas contrari, trobeu l'altura màxima que assoleix. Tracteu el conjunt com una massa puntual.
c) El percentatge d'energia perduda en el xoc.

Solució

a) Xoc:

$p_{abans} = p_{després}$



$0'025 \cdot 100 = 0'4 \cdot v'$

$\boxed{v = 6'25 \text{ m/s}}$

b) Si descriu un *looping* ha de superar la velocitat mínima a dalt (vegeu els problemes de dinàmica del moviment circular).

$v_{min} = \sqrt{R \cdot g} = 3'42 \text{ m/s}$

Busquem ara quina velocitat tindrà el conjunt quan arribi a dalt. Després del xoc podem aplicar la conservació de l'energia mecànica:

$E_{m,abans} = E_{m,després}$

$E_{c0} = U_{pg} + E_c$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}m\,v'^2$$

on h = 2·L = 2'4 m,

Fent aquest balanç no es pot calcular v', ja que s'obté un valor del quadrat de la velocitat negatiu. Per tant, no arriba ni a la velocitat mínima. No descriu un *looping*.

Després del xoc: altura màxima que assoleix

$E_{m,abans} = E_{m,després}$

$E_{c0} = U_{pg}$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow \boxed{h = 2 \text{ m}}$$

c) Energia perduda en el xoc:

$$E_{cf} = \frac{1}{2}0'4\cdot(6'25)^2 = 7'8125\ \text{J}$$

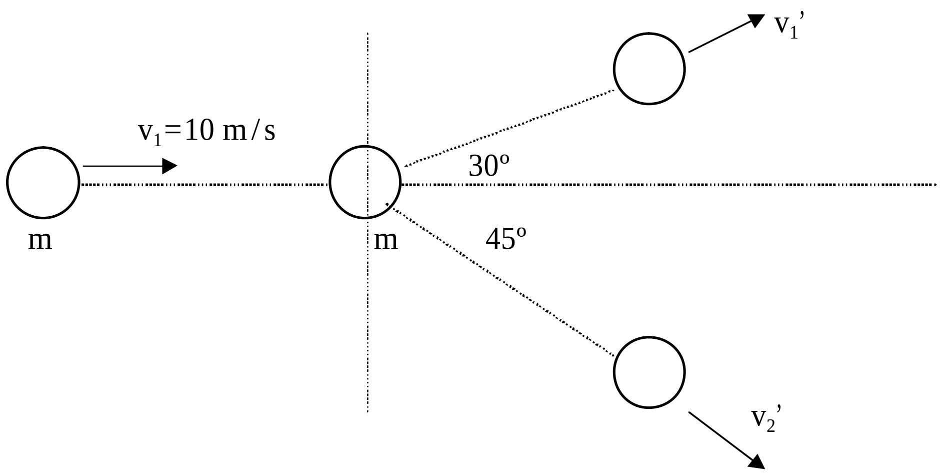
$$E_{c0} = \frac{1}{2}0'025(100)^2 = 125\ \text{J}$$

$$\Delta E_c = -117'1875\ \text{J}$$

$$\%\Delta E_c = \frac{|\Delta E_c|}{E_{c0}}\cdot 100 = \boxed{93'75\%}$$

Tornem-hi…

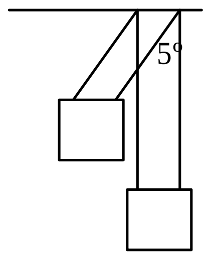
P.5.1. El cos 1 de la figura, que va a una velocitat de 10 m/s, xoca amb el cos 2, inicialment en repòs, que és idèntic al primer. El cos 1 surt amb un angle de 30º i el cos 2 amb un angle de 45º, tal com indica la figura:



a) Calculeu les velocitats de les masses després del xoc.
b) És un xoc perfectament elàstic? Raoneu la resposta.

Solució: a) 7'35 m/s, 5'2 m/s b) No.

P.5.2. Una bala de 30 g xoca horitzontalment contra una caixa de sorra de 18 kg, on queda encastada. La caixa penja d'uns fils verticals i paral·lels de 180 cm de longitud, que li permeten retrocedir sense rotació. Si la caixa, inicialment en repòs, retrocedeix fins que els fils formen un angle de 5º amb la vertical, calculeu:



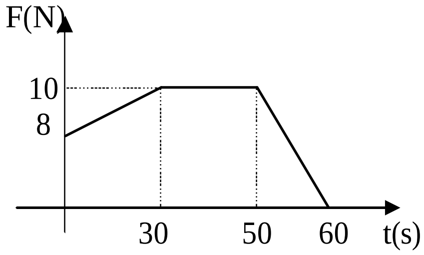
a) La velocitat del conjunt immediatament després del xoc.
b) La velocitat inicial de la bala.
c) El percentatge d'energia perdut en el xoc.

Solució: a) 0'36 m/s; b) 220'21 m/s c) 99'84%

P.5.3. Sobre una partícula de 20 kg hi actua una força variable, tal com indica la figura. Calculeu:

a) L'impuls que rep aquesta partícula fins que s'anul·la la força.

b) La velocitat que porta al final si inicialment portava una velocitat de 2 m/s.



Solució: 520 N· s, 28 m/s.

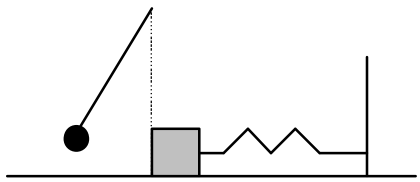
P.5.4. Una granada, inicialment en repòs, explota en tres fragments. El primer, de massa *m*, surt en direcció horitzontal i cap a la dreta a una velocitat de 10 m/s. El segon, de massa el doble del primer, surt cap amunt i cap a la dreta formant un angle de 30º amb l'horitzontal i amb una velocitat de 6 m/s. Si el tercer té la mateixa massa que el primer fragment, contesteu els apartats següents:

a) Raoneu en quin sentit i en quina direcció anirà el tercer fragment.
b) Calculeu la velocitat amb què surt el tercer fragment.
c) Calculeu l'angle amb què surt el tercer fragment.

Solució: b) (-20'4, -6) m/s, c) 196'39º respecte a l'eix positiu de les X

P.5.5. Un pèndol de 100 g de massa i 60 cm de longitud està inclinat 30º respecte a la vertical. Es deixa anar i quan arriba a la posició vertical xoca amb una massa de 500 g, inicialment en repòs, que està enganxada a una molla. El xoc és totalment elàstic i la superfície on es troba la massa no té fricció. Si el conjunt es comprimeix 75 cm, calculeu:

a) La velocitat amb què arriba el pèndol a la posició vertical.
b) La velocitat amb què surt la massa de 500 g.
c) La constant elàstica de la molla.



Solució: a) 1'25 m/s; b) 0'416 m/s, c) 0'31 N/m

P.5.6. Es dispara un projectil de 100 g amb una velocitat de 60 m/s en direcció horitzontal contra un bloc de fusta de 2 kg inicialment en repòs. La bala surt rebotada verticalment i amb una velocitat de 40 m/s. Calculeu la velocitat del bloc i l'angle de desviació respecte a l'horitzontal amb què es mou.

Solució: 3'6 m/s, -33'7º respecte l'eix positiu de les X

P.5.7. Un objecte que es mou horitzontalment a 20 m/s es trenca en tres trossos. El primer surt disparat verticalment i cap amunt amb una velocitat de 30 m/s; el segon, que té la mateixa massa que el primer, surt disparat formant un angle de 45º cap amunt amb la direcció horitzontal i a 25 m/s. Calculeu la velocitat, la direcció i el sentit amb què surt el tercer fragment, si té el doble de massa que el primer.

Solució: 39'22 m/s, -37'41º respecte a l'eix positiu de les X.

P.5.8. Un objecte de 200 g que es mou horitzontalment a 10 m/s xoca amb un objecte de 100 g inicialment parat. Després de xocar, el primer surt desviat 30º respecte a l'horitzontal i a 6 m/s. Calculeu la velocitat, la direcció i el sentit amb què surt el segon.

Solució: 11'32 m/s, -32º respecte a l'eix positiu de les X.

P.5.9. Un cos de 10 kg que es mou a 2 m/s es mou cap a l'est. Un altre cos de 15 kg es mou a 5 m/s però en direcció nord. Si tots dos xoquen i queden enganxats, quina serà la velocitat, la direcció i el sentit després d'haver-se produït la col·lisió?

Solució: 3'1 m/s, 75º

P.5.10. Dues masses d'1 kg i 2 kg es mouen en la mateixa direcció i el mateix sentit. La més petita viatja a 10 m/s i és atrapada per la més gran, que va a 15 m/s. Si el xoc és perfectament elàstic, calculeu les velocitats a què es mouen després del xoc.

Solució: 11'6 m/s, 14'16 m/s

P.5.11. Un bloc de massa 200 g es mou cap a la dreta amb una velocitat de 10 m/s. Un altre bloc de 500 g de massa es mou cap a l'esquerra amb una velocitat de 2 m/s. Si els dos blocs xoquen frontalment i de forma elàstica, calculeu:

a) Les velocitats amb què es mouen els dos cossos després del xoc.
b) La velocitat del centre de masses.

Solució: a) -7'14 m/s, 4'85 m/s b) 1'43 m/s

P.5.12. Una granada, inicialment en repòs, es trenca en tres trossos d'igual massa. El primer surt disparat horitzontalment a 10 m/s i el segon surt cap amunt formant un angle de 60º amb l'horitzontal. Quina és la velocitat, en mòdul, direcció i sentit, del tercer?

Solució: -14'55 m/s, 170'11º.

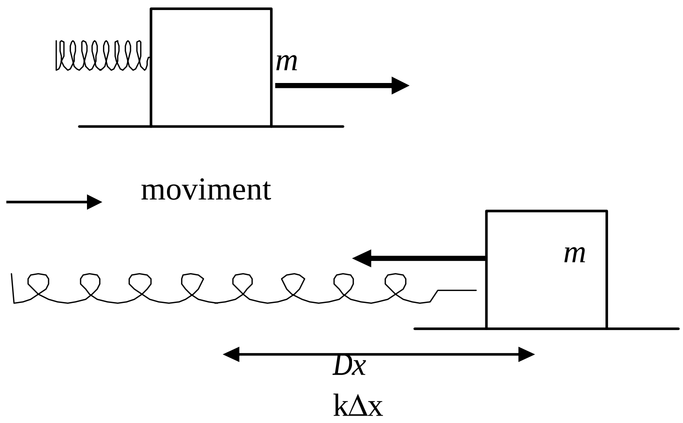
MOVIMENT OSCIL·LATORI

Índex

P.1. Moviment vibratori harmònic simple (MHS)

Definicions

T.4.1. **Conceptes bàsics**. Una partícula descriu un moviment vibratori o oscil·latori quan es desplaça successivament a un costat i l'altre de la seva posició d'equilibri, repetint a intervals regulars les seves variables cinètiques (moviment periòdic). Per observar un cas concret de MHS, podem efectuar el muntatge de la figura. Col·loquem un cos de massa *m* subjectat a una molla elàstica de longitud l_0, fixada per un extrem i que pot lliscar sense fricció per una superfície horitzontal.



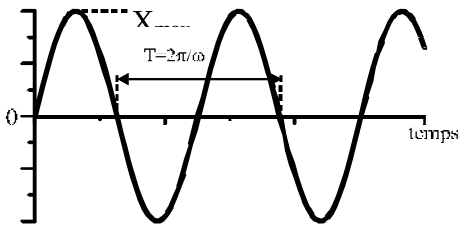
En aplicar una força exterior a la molla desplacem el cos una longitud Δx respecte a la seva posició inicial de repòs. Quan la força cessa, el cos descriu un moviment oscil·latori al voltant de la posició inicial d'equilibri. Aquest moviment el fa perquè la molla exerceix una força sobre el cos, una força recuperadora $\vec{F}$ que el retorna a la posició d'equilibri.

La força recuperadora $\vec{F}$ és la força elàstica que fa la molla sobre l'objecte de massa *m*. Aquesta força segueix la llei de Hooke: $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$, on $D\vec{x}$ és la deformació experimentada per la molla.

Les equacions característiques del moviment vibratori harmònic simple es poden deduir a partir d'aquestes dades experimentals obtingudes amb una molla de constant recuperadora *k*:

Temps (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posició (m) respecte a l'equilibri	0	5	8,6	10	8,6	5	0	-5	-8,6	-10	-8,6

Si representem gràficament aquestes dades, en forma x=f(t), on *x* correspon a la posició de la partícula de massa *m* respecte a la posició inicial i s'anomena elongació. Observem que correspon a una funció sinusoïdal:



$$x(t) = x_{màx} sinwt = Asinwt$$

On *A* correspon a l'elongació màxima i $\omega = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{rad}{s}\right)$ correspon a la pulsació o freqüència angular del moviment periòdic.

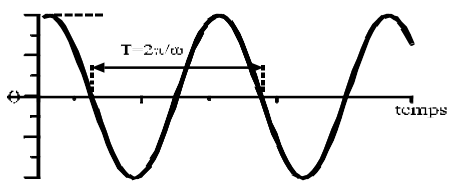
Si la molla no parteix de la seva longitud original, l_0, l'equació del moviment correspon a:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)..(metres) \qquad (1)$$

on $wt + j$ = l'angle de fase (rad) i j = fase inicial (rad) i correspon a la posició de la massa *m* per a *t*=0 s.

Equació de la velocitat d'oscil·lació de la partícula

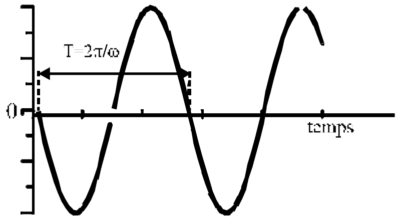
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)(m/s) \qquad (2)$$



El gràfic de la velocitat-temps té un desfasament de 90º respecte al de posició tmps x=x(t). Això representa que quan la partícula es troba en la posició d'equilibri, la velocitat és màxima, i en canvi, per a x=$|A|$, la velocitat és nul·la.

Equació de l'acceleració d'oscil·lació de la partícula

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -Aw^2 sin(wt + j) = -wx.(m/s^2) \qquad (3)$$



El gràfic de l'acceleració-temps està desfasat 180º respecte al de x = f(t). Això representa que quan la partícula es troba en la posició d'equilibri l'acceleració és nul·la, i en canvi per a x=/A/, l'acceleració pren els valors màxims.

Exercicis

E.1.1. Una determinada partícula es mou amb MHS segons l'equació següent: $x = 0{,}01 \sin 10\pi t$ (SI). Calculeu: (a) la fase inicial; (b) l'amplitud; (c) la pulsació; (d) el període, la freqüència i el valor de l'elongació per a t=0 s i per a t=0,025 s.

Solució

a, b i c) Per calcular aquests apartats hem de comparar l'equació de l'enunciat amb l'equació corresponent del moviment oscil·latori. En el nostre cas:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

D'aquesta expressió es dedueix que l'amplitud del moviment, *A*, és de 0,01 m; la fase inicial, f , és nul·la i la pulsació, ? , és de 10p rad/s.

d) Per calcular el període i la freqüència anem a l'expressió de la pulsació:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0{,}5\,s$$

Com que el període és la inversa de la freqüència=

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,Hz$$

e) Per saber quin és el valor de l'elongació per a un temps determinat:

$$x(t) = 0{,}01 \sin 10\pi t \Rightarrow x(0) = 0{,}01 \sin 10\pi \cdot 0 = 0\,m$$

Per a t=0,025 s:

$$x(t) = 0{,}01\sin 10\pi t \Rightarrow x(0{,}025) = 0{,}01\sin 10\pi \cdot 0{,}025 = 7{,}1\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

x(0)= 0 m; x(0,025)=0,0071m

E.1.2 Una determinada partícula es mou amb un MHS. La sev fase inicial és nul·la, la *f* = 50 Hz i l'amplitud A= 10 cı Trobeu: (a) el període i la pulsació i (b) l'equació (l'elongació.

Solució

a) Com que el període és la inversa de la freqüència=

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\text{s}$$

l'expressió de la pulsació:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0{,}02} = \frac{2\pi}{0{,}02} = 100\pi \quad \text{rad/s}$$

b) Per calcular aquest apartat hem de cercar en l'enunciat els paràmetres de l'equació corresponent del moviment oscil·latori. En el nostre cas:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

D'aquesta expressió s'obté: $x(t) = 0'1\sin(100\pi t + 0) = 0'03\sin 100\pi t$

x(t)=0,03sin100pt m

Tornem-hi...

P.1.1. Una determinada partícula es mou amb MHS segons l'equació següent: $x = 0{,}05 sin 20\Pi t (SI)$. Calculeu: (a) la fase inicial; (b) l'amplitud; (c) la pulsació; (d) el *T* i la *f*; el valor de l'elongació en t=0 s i en t=0,025 s. Sol.: 0 rad/s; 0,05 m; 20π rad/s; 0,1 s; 10 Hz; x=0 i x=0,05 m.

P.1.2. Una determinada partícula es mou amb MHS segons l'equació següent: $x = 0{,}05\sin(3t + \frac{\pi}{2})(\text{SI})$. Calculeu: (a) el valor de l'elongació en t=π s i (b) la velocitat del cos quan $t = \frac{p}{2}$ s. Sol.: x=-0,05 m i 0,15 m/s.

P.1.3. Una determinada partícula es mou amb un MHS. La seva fase inicial és nul·la, la *f*=50 Hz i l'amplitud A= 3 cm. Trobeu: (a) el període i la pulsació, i (b) l'equació de l'elongació. Sol.: 0,02 s; 100π rad/s i $x = 0{,}03\,sin(100\,pt)\,m$.

> E.1.3 Determineu l'equació de l'elongació d'un moviment harmònic simple de 0,03 m d'amplitud i una freqüència de 150 Hz si en l'instant inicial la partícula es troba en el punt de màxima elongació.

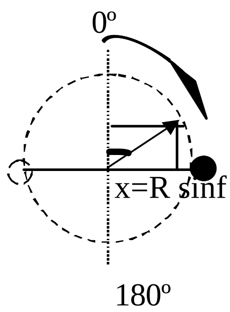
Solució

a) Per calcular l'equació de moviment hem de cercar en l'enunciat els paràmetres de l'equació corresponent. En el nostre cas:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

D'aquesta expressió, per a t=0 ens queda:

$x(0) = A\sin(0 + \varphi) = A\sin\varphi$



De l'enunciat: $A = A\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 1$

El primer valor de l'angle pel qual el seu sinus és la unitat correspon a $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

I d'acord amb el criteri de la figura adjunta, l'equació ens queda:

$x(t) = A\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) = 0{,}03\sin(300\pi t + \dfrac{\pi}{2})\ \text{m}$.

x(t)=0,03sin(300pt+ p/2) m

Tornem-hi...

P.1.4. Determineu l'equació de l'elongació d'un moviment harmònic simple de 0,03 m d'amplitud i una freqüència de 150 Hz si en l'instant inicial la partícula es troba en el punt de màxima elongació. Sol.: $x = 0{,}03\sin(300\,\pi t + \dfrac{\pi}{2})\,\text{m}$

P.1.5. Una partícula es desplaça amb un MHS de 150 Hz de freqüència i 5 cm d'amplitud. (a) Calculeu el període i la pulsació. (b) Escriviu l'equació de l'elongació si per a t=0 passa pel centre d'oscil·lació amb velocitat positiva. Sol.: 0,0067 s ; 300π rad/s.

E.1.4. L'amplitud d'un moviment MHS és de 5 cm i la seva freqüència de 5 Hz, essent $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.
(a) Escriviu l'equació x(t); v(t) i a(t).
(b) Expresseu en funció del temps en quines situacions l'elongació és màxima.

Solució

a) Per calcular l'equació de moviment hem de cercar en l'enunciat els paràmetres de l'equació corresponent. En el nostre cas:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = 0{,}05\sin\left(2\pi\cdot 5t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}05\sin\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{S.I}$$

Per calcular la velocitat hem de tenir l'elongació instantània, és a dir, l'elongació en funció del temps; en cas contrari, no podrem derivar respecte al temps.

Sabem que la velocitat és la derivada de la posició respecte al temps:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -10\pi\cdot 0{,}05\cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)\text{m/s}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -0{,}5\pi\sin\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)\text{m/s}$$

Per calcular l'acceleració hem de tenir la velocitat instantània, és a dir, la velocitat en funció del temps; en cas contrari, no podrem derivar respecte al temps.

Sabem que l'acceleració és la derivada de la velocitat respecte al temps:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -(10\pi)^2\cdot 0{,}05\sin\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)\text{m/s}^2$$

$$a(t) = -5\pi^2\sin\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)\text{m/s}^2$$

b) L'elongació serà màxima quan $\sin\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Això es verifica quan $\left(10pt + \frac{3p}{2}\right) = \frac{p}{2}$ o bé de manera general quan correspon a un nombre imparell de $\frac{p}{2}$

Hem de trobar una sèrie que compleixi aquesta situació. Podria ser 2n+1 per n= 0,1,2,3-

Ho afegim a la condició de màxim: $\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

Aïllem el temps de l'expressió anterior: $t = \frac{(2n+1)-3}{20}$. Fixeu-vos que donant valors a *n* trobem els diferents valors de *t* on hi ha un màxim de l'elongació. El valor màxim és $x(t)_{màxim}$=A m.

$$\boxed{t = \frac{(2n+1)-3}{20}}$$

Tornem-hi...

P.1.6. L'amplitud d'un moviment MHS és de 3 cm i la seva freqüència és de 5 Hz, essent $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Escriviu l'equació x(t); v(t) i a(t).

Sol.: $x(t) = 0{,}03\,sin(10pt + \frac{3p}{2})m$

P.1.7. Calculeu el valor de la velocitat màxima d'un MHS d'expressió $x(t) = 0{,}20\sin(10\,t + \frac{\pi}{2})m$ en unitats del SI. Podem predir exactament la posició de la partícula quan la seva velocitat és màxima? I el sentit del seu moviment? Sol.: ± 2 m/s.

P.1.8. Si la freqüència d'un MHS val 50 Hz, quant val l'acceleració per a x= -0,001 m? Sol.: π^2 m/s^2.

P.1.9. Llegiu les característiques dels MHS següents i determineu el que es demana: (a) la posició i el període si a = -90 m/s^2 quan x= 0,10 m; (b) l'acceleració quan x= -0,01 m si la seva freqüència és de 5 Hz; (c) el període i l'equació de l'elongació si l'expressió de l'acceleració és a = -2x i l'amplitud val 0,01 m. Sol.: 30 rad/s; 0,21 s; π^2 m/s^2; $\sqrt{2\pi}$ s.

P.1.10. Un ressort que vibra amb MHS efectua 15 vibracions en 40 s. Calculeu: (a) la freqüència d'aquest moviment i (b) el període i la pulsació. Sol.: 0,375 Hz; 2,67 s; 2,36 rad/s.

P.1.11. Una partícula es mou amb MHS; la seva fase inicial és $\varphi_0=\pi/4$, la seva freqüència és de 60 Hz i la seva amplitud és de 2 m. Trobeu: (a) el període i (b) l'equació de l'elongació. Sol.: 0,017 s; $x(t) = 2\sin(120\,\pi t + \frac{\pi}{4})m$

P.1.12. L'elongació màxima d'una partícula amb MHS és de 0,05 m i el seu període val 4 s. Si quan t=0 es troba en el centre d'oscil·lació amb velocitat positiva, trobeu: (a) la fase inicial, (b) la pulsació, (c) l'equació de l'elongació i (d) el valor de l'elongació 1 s després d'iniciar el moviment. Sol.: 0 rad; $\pi/2$ rad/s; $x(t) = 0{,}05\sin(\frac{\pi}{2}t)m$ i 0,05 m.

P.1.13. Determineu l'equació de l'elongació d'un MHS de 0,03 m d'amplitud i una freqüència de 150 Hz, si en l'instant inicial la partícula es troba en el punt de màxima elongació. Sol.: $x(t) = 0{,}03 \sin(300\pi t + \frac{\pi}{2})\mathrm{m}$.

P.1.14. L'amplitud d'un MHS és de 3 cm i la seva freqüència és de 5 Hz, essent $\varphi_0=3\pi/2$. Escriviu: (a) l'equació de l'elongació; (b) l'equació de la velocitat; (c) l'equació de l'acceleració d'aquest moviment. Sol.:

$$x(t) = 0{,}03 \sin(10\pi t + \frac{3\pi}{2})\mathrm{m}\ ;\ v(t) = 0{,}3\pi \cos(10\pi t + \frac{3\pi}{2})\mathrm{m/s}\ ;$$

$$a(t) = -3\pi^2 \sin(10\pi t + \frac{3\pi}{2})\mathrm{m/s^2}$$

P.1.15. Un determinat MHS té un període de 0,5 s i una amplitud de 0,05 m. Calculeu l'elongació, la velocitat i l'acceleració al cap de 10 s d'haver iniciat el moviment si $\varphi_0=0$. Sol.: 0 m; 0,20 π m/s; 0 m/s^2.

P.1.16. Un determinat MHS té un període de 4 s i una amplitud de 0,2 m. Calculeu l'expressió de l'elongació, la velocitat i l'acceleració si $\varphi_0=\pi/3$. Sol.:

$$x(t) = 0{,}2 \sin(\frac{1}{2}\pi t + \frac{\pi}{3})\mathrm{m}\ ;\ v(t) = 0{,}1\pi \cos(\frac{1}{2}\pi t + \frac{\pi}{3})\mathrm{m/s}\ ;$$

$$a(t) = -0{,}05\pi^2 \sin(\frac{1}{2}\pi t + \frac{\pi}{3})\mathrm{m/s^2}$$

P.1.17. Una partícula es mou amb un MHS. Quan t=2s, la partícula passa pel punt d'equilibri amb velocitat positiva i quan t=4 s la seva velocitat és de +4m/s. Si el període de l'oscil·lació és de 16 s, calculeu: (a) l'amplitud del moviment; (b) la seva acceleració en t=2 s; (c) la seva velocitat màxima; (d) escriviu les expressions de l'elongació, la velocitat i l'acceleració en funció del temps. Sol.: 14,4 m; 0 m/s^2; ± 5,65 m/s.

$$x(t) = 14{,}4 \sin(\frac{1}{8}\pi t - \frac{\pi}{4})\mathrm{m}\ ;\ v(t) = 5{,}65 \cos(\frac{1}{8}\pi t - \frac{\pi}{4})\mathrm{m/s}\ ;$$

$$a(t) = -2{,}22 \sin(\frac{1}{8}\pi t - \frac{\pi}{4})\mathrm{m/s^2}$$

P.1.18. Un oscil·lador harmònic simple es troba a x= 3,36 m amb una velocitat de 0,216 m/s quan t=5 s. Si la seva pulsació és de 0,1 rad/s, determineu: (a) la freqüència i l'amplitud; (b) la fase inicial; (c) l'acceleració quan t= 5 s; (d) la posició, la velocitat i acceleració quan t=0 s; (e) escriviu les expressions de l'elongació, la velocitat i l'acceleració en funció del temps. Sol.: (0,05/π) Hz; 4 m; b) 0,5 rad; c)-0,03 m/s^2, d)1,9 m; 0,35 m/s; -0,02 m/s^2.

P.1.19. L'acceleració d'un MHS val a= - 16 π^2 x m/s^2. Si la màxima elongació és de 0,04 m i s'ha començat a comptar el temps quan l'acceleració té el seu màxim valor absolut en el sentit dels desplaçaments positius, calculeu els valors absoluts màxims de la velocitat i de l'acceleració. Sol.: ±0,16 π m/s; ±0,64 π^2 m/s^2.

P.1.20. Una partícula es mou amb un MHS. Quan t=0,75 s, la partícula passa per x = 2 m i quan t=3,75 s la seva velocitat s'anul·la. Si el període de l'oscil·lació és de 6 s, calculeu: (a) l'amplitud del moviment, (b) la seva acceleració per a t= 3,75 s; (c) la seva velocitat màxima; (d) escriviu les equacions de l'elongació, la velocitat i l'acceleració en funció del temps. Sol.: A=2 m ; a= 2,2 m/s^2; ±2,1 m/s.

P.1.21. Una partícula inicia un MHS en l'extrem de la seva trajectòria, en el sentit dels desplaçaments positius, i tarda 0,1 s a arribar al centre de la trajectòria. Si la distància entre els dos extrems de la trajectòria és de 0,2 m, calculeu: (a) el període i la pulsació del moviment; (b) la posició de la partícula 1 s després d'iniciat el moviment. Sol.: 0,4 s; 5π rad/s i 0,1 m.

P.1.22. En un MHS de 0,04 m d'amplitud, en l'instant en què l'elongació és de $\sqrt{7}$ m la seva velocitat és de 6π m/s. Calculeu la seva freqüència. Sol.: 100 Hz

P.1.23. Justifiqueu si en un MHS l'acceleració i el vector posició poden tenir el mateix sentit. I l'acceleració i la velocitat? I la velocitat i el desplaçament?

P.1.24. Determineu el valor de l'elongació d'un MHS en l'instant en què la seva velocitat té la meitat del seu valor màxim. Expresseu el resultat en funció de l'amplitud, *A*.

P.1.25. Donada l'equació $x(t) = 0{,}05\cos(4\pi t)\,\mathrm{m}$, representeu l'elongació en funció del temps d'una partícula que descriu un MHS. Determineu el valor màxim de la velocitat i de l'acceleració. Sol.: ± 0,20 π m/s; ± 7,91 m/s^2.

P.1.26. Donada l'equació $x(t) = 0{,}04\cos(10\,t)\,\mathrm{m}$, representeu l'elongació en funció del temps d'una partícula que descriu un MHS. Determineu el valor de l'acceleració en l'instant en què l'elongació és de 0,03 m. Sol.: -3,0 m/s^2.

P.2. Dinàmica i energia del moviment harmònic simple

Definicions

T.2.1. **Conceptes bàsics**. Fins ara ens hem limitat a estudiar les característiques cinemàtiques, sense preocupar-nos de la força recuperadora de la molla definida per la llei de Hooke:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} \qquad (4)$$

Si aquesta és l'única força que actua sobre l'objecte de massa *m*, d'acord amb la segona llei de Newton tenim:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} = m\vec{a}$$

Com que tot el moviment té lloc sobre un eix i d'acord amb l'expressió obtinguda de l'acceleració, ens queda:

$$F = -k\Delta x = -m\omega^2 x$$

Si tenim que $\Delta x = x - x_0 = x - 0 = x$, deduïm: $k = mw^2$, i d'aquí podem calcular la pulsació i el període del moviment:

$$\omega = \frac{k}{m} \ldots (\text{rad}/\text{seg})$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (5)$$

El període d'un oscil·lador sotmès a una força elàstica depèn de la seva constant recuperadora i de la massa, però no depèn de l'amplitud del moviment.

Una força és conservativa quan es compleix que el treball realitzat per aquesta força no depèn del camí recorregut. Una definició equivalent és que el treball realitzat per la força al llarg d'un camí tancat és zero.

Són forces conservatives: la gravitatòria, **l'elàstica**, l'elèctrica. Els efectes de qualsevol força conservativa es poden descriure mitjançant un terme d'energia potencial. En general, per qualsevol força conservativa que realitzi treball es compleix:

$$W_{conserv} = -\Delta U$$

Si un objecte de massa *m* unit a una molla de constant elàstica *K* es desplaça des d'una posició inicial fins a una posició final, el treball realitzat per la força elàstica de la molla és:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_i^f -kx dx = \left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \right)$$

Per tant, en aquest cas l'energia potencial elàstica és el terme

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \qquad (6)$$

I l'energia cinètica de la partícula serà:

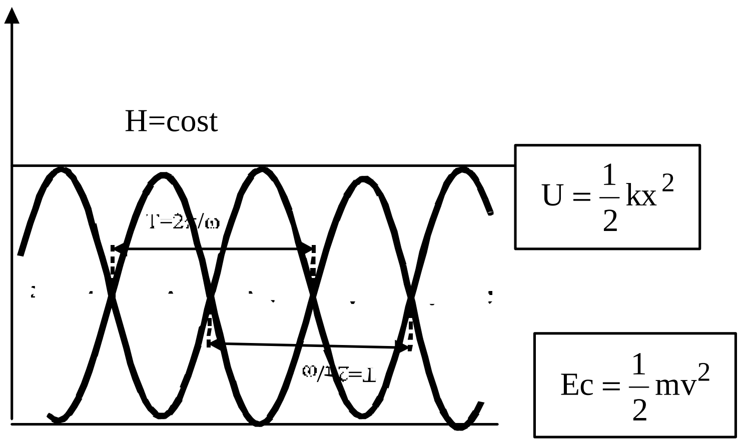
$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \qquad (7)$$

I d'aquí:

$$H = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\ ] = \frac{1}{2}kA^2.$$

$$H = \text{cons}\tan\text{t} = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (8)$$

L'energia mecànica de l'oscil·lador harmònic és una constant que li és característica i que és proporcional al quadrat de l'amplitud d'oscil·lació.



Tornem-hi...

P.2.1. Un cos unit a un ressort horitzontal oscil·la amb MHS sobre una superfície horitzontal sense fricció. Si es duplica la massa del cos, com varien la freqüència, la pulsació, el període, la velocitat màxima i l'acceleració màxima?

P.2.2. Subjectem un cos de 200 g a l'extrem lliure d'un ressort de constant recuperadora k=25 N/m i el fem oscil·lar verticalment. Calculeu l'amplitud del moviment i el període. Sol.: 0,08 m i 0,56 s.

P.2.3. Calculeu la constant *k* d'una molla si sabem que, quan es penja un objecte de 50 g de massa a l'extrem lliure del ressort i es fa oscil·lar verticalment, el període val 1,5 s. Sol.: 0,88 N/m.

P.2.4. Un determinat ressort té subjectat un cos de 2 kg en el seu extrem lliure i es requereix una força de 8 N per mantenir-lo a 20 cm del punt d'equilibri. Si el cos fa un MHS quan se'l deixa anar, trobeu la *k* de la molla i el període de l'oscil·lació. Sol.: 40 N/m i 1,4 s.

P.2.5. Un cos de 2 kg col·locat a l'extrem d'una molla de constant recuperadora 65 N/m s'estira 0,3 m des de la seva posició d'equilibri i es deixa anar des del repòs. Calculeu l'energia potencial inicial elàstica i la velocitat màxima que assolirà el cos. Sol.: 2,92 J i ± 1,7 m/s.

P.2.6. Un bloc d'acer de 1,5 kg, subjectat a un ressort de k= 1,5 N/m, efectua un moviment. Si la seva màxima velocitat és de ± 3 m/s, calculeu l'energia del bloc aturat i l'acceleració màxima. Sol.: 6,75 J i ± 3m s^{-2}.

P.2.7. Un cos de 2 kg col·locat a l'extrem d'una molla de constant recuperadora 65 N/m s'estira 0,3 m des de la seva posició d'equilibri i es deixa anar des del repòs. (a) Quant val l'energia potencial inicial del cos? (b) Quina velocitat màxima assolirà? Sol.: 2,92 J i ± 1,7 m/s.

CAMP ELÈCTRIC

Índex

P.1. Càlcul del camp elèctric en un punt

Definicions

T.1.1. ***Electrostàtica***. És la part de l'electricitat que estudia els fenòmens elèctrics produïts per les càrregues elèctriques en *repòs*.

T.1.2. ***Càrrega elèctrica***. Correspon al defecte o excés d'electrons que té un cos. Si té un excés d'electrons s'anomena càrrega negativa, i si és al contrari, positiva.

T.1.3. ***Substàncies electritzades***. Són substàncies que en ser friccionades adquireixen un estat especial que es manifesta en adquirir una atracció o repulsió d'altres. El comportament d'un grup de substàncies en ser friccionades és diferent del d'un altre. Per això es pensa que hi ha dos tipus d'electricitat: l'electricitat vítria o positiva, que és la que s'obté en friccionar el vidre, i correspon a la positiva; i l'electricitat resinosa o negativa, que és la que s'obté en friccionar una resina, i és negativa.

T.1.4. ***Llei de Coulomb***. La força amb què s'atrauen o es repel·leixen dues càrregues elèctriques *puntuals i en repòs* és directament proporcional al producte de les càrregues i inversament proporcional al quadrat de la distància que les separa.

$$\vec{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{u} \qquad (1)$$

T.1.5. ***Concepte de camp***. Anomenem camp la pertorbació real o fictícia de l'espai determinada per l'assignació a cada punt del valor d'una magnitud.

T.1.6. ***Intensitat d'un camp elèctric en un punt***. És la força que el camp efectua sobre la unitat de càrrega *col·locada* en aquest punt.

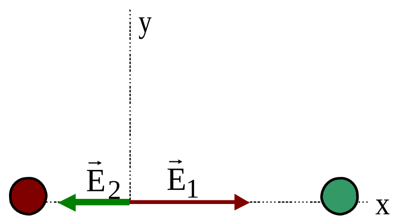
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \qquad (2)$$

T.1.7. ***Principi de la superposició***. La intensitat en un punt del camp elèctric originat per diverses càrregues, la trobarem *sumant sectorialment* les intensitats parcials degudes a cada una de les càrregues.

$$\vec{E}_{Total} = \sum \vec{E}_i \qquad (3)$$

Exercicis

E.1.1. Dues càrregues puntuals Q_1= +1μC i Q_2= +3μC estan situades en el buit a 50 cm l'una de l'altra. Calculeu el camp elèctric en el punt P situat sobre el segment que uneix les dues càrregues i a 10 cm de Q_1.



Solució

Per calcular el camp total en el punt P(0,0), primer és necessari dibuixar els vectors camp elèctric originat per cada una de les càrregues, tot considerant el conveni de signes *el camp originat per una càrrega puntual positiva en un punt s'allunya de la càrrega; si és negativa, s'acosta*.

Expressem cada vector camp elèctric en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{E} = E\,\vec{u}$.
En el nostre cas, $\vec{E}_2 = E_2(-\vec{i})$; $\vec{E}_1 = E_1(+\vec{i})$

Calculem el camp elèctric creat per Q_1 a P:

$$\vec{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2}\vec{u} = 9\times10^9\,\frac{1\times10^{-6}}{0{,}1^2}(\vec{i})\,\frac{N}{C}$$

Fem el mateix per calcular el camp elèctric creat per Q_2 a P:

$$\vec{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2}\vec{u} = 9\times10^9\,\frac{3\times10^{-6}}{0{,}4^2}(-\vec{i})\,\frac{N}{C}$$

Seguidament, apliquem el principi de superposició per calcular el vector camp $\vec{E}_T = \sum \vec{E}_i$

El camp elèctric resultant a P és:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 9\times10^5(+\vec{i}) + 1{,}7\times10^5(-\vec{i}) = 7{,}3\times10^5(+\vec{i})\frac{N}{C}$$

De mòdul i direcció: E=7,3 10^5 N/C i angle respecte a l'eix *x* nul.

El vector resultant podem deixar-lo expressat en forma de vector amb dues components, o bé donar-ne el mòdul i la direcció.

Així, podem escriure el vector resultant de la manera següent:

$$\boxed{\vec{E}_P = (7{,}3\ ,\ 0)10^5\ \mathrm{N/C}}$$

O bé:
El vector intensitat de camp elèctric resultant en el punt P(0,0) és un vector de mòdul $7{,}3\ 10^5\ \mathrm{N/C}$ que forma un angle de 0º respecte a l'eix horitzontal de les *x*.

(Observeu que posem el signe positiu a la component *x* del vector, perquè escollim la direcció esquerra de l'eix *x* com a negativa.)

Tornem-hi…

P.1.1. Dues càrregues puntuals Q_1= +0,01μC i Q_2= - 0,02μC estan situades en els punts (0,0) i (2,0) m. Determineu la intensitat del camp elèctric en el punt P(1,0). Sol.: $\vec{E} = (270,0)\ \mathrm{N/C}$.

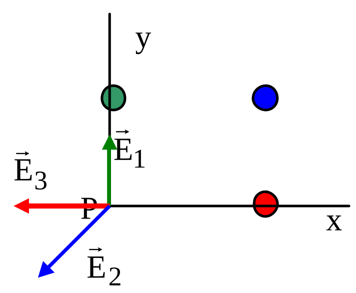
P.1.2. Dues càrregues puntuals Q_1= +0,01μC i Q_2= - 0,02μC estan situades en els punts (0,0) i (2,0) m. Determineu la intensitat del camp elèctric en el punt B(0,1). Sol.: $\vec{E} = (32'2{,}73'9)\ \mathrm{N/C}$.

P.1.3. La distància que separa dues càrregues puntuals Q_1= +0,1μC i Q_2= - 0,3μC és d=1 m. Determineu el punt sobre la recta que les uneix on la intensitat de camp elèctric s'anul·la. Sol.: A(36'6,0) cm

P.1.4. Dues càrregues puntuals Q_1= +0,01μC i Q_2= - 0,02μC estan situades en els punts (0,0) i (2,0) m. Determineu en quin punt de la recta que les uneix la intensitat del camp elèctric és nul·la. Sol.: B(-4'8,0) m

P.1.5. Les càrregues puntuals Q_1= - 7,2μC; Q_2= - 40μC i Q_3= +6,4μC es troben en els punts (0,6), (8,6) i (8,0) respectivament. Calculeu $\vec{E}_T$ en el punt (0,0) i la força que actua sobre una Q_4=-1μC situada en aquest punt. Sol.:

E.1.2. Les càrregues puntuals Q_1= - 7,2μC; Q_2= - 40μC i Q_3= +6,4μC es troben en els punts (0,6), (8,6) i (8,0), respectivament. Calculeu $\vec{E}_T$ en el punt P(0,0) i la força que actua sobre una Q_4=-1μC que se situa en aquest punt.



Solució

a) Per calcular el camp total en el punt P(0,0), primer és necessari dibuixar els vectors camp elèctric originat per cada una de les càrregues, tot considerant el conveni de signes.

Expressem cada vector camp elèctric en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{E} = E\,\vec{u}$ d'acord amb la seva representació gràfica. En el nostre cas,
$\vec{E}_2 = E_2(\vec{u}_2); \vec{E}_1 = E_1(+\vec{j}); \vec{E}_3 = E_3(-\vec{i})$

La determinació dels vectors unitaris $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ és immediata a partir del dibuix dels vectors corresponents. En canvi, la determinació del vector unitari $\vec{u}_2$ requereix el seu càlcul, on $\vec{r}_2 = (8,6)$ m; de mòdul r_2= 10 m i per tant : $\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \left(\frac{8}{10}, \frac{6}{10}\right)$

Calculem el camp elèctric creat per Q_1 a P:

$$\vec{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1{}^2}\vec{u} = 9\times10^9\,\frac{7{,}2\times10^{-6}}{6^2}(\vec{j})\,\frac{N}{C}$$

Ara calculem el camp elèctric creat per Q_2 i Q_3 a P:

$$\vec{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2{}^2}\vec{u} = 9\times10^9\,\frac{40\times10^{-6}}{10^2}(0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j})\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{Q_3}{r_3{}^2}\vec{u} = 9\times10^9\,\frac{6{,}4\times10^{-6}}{8^2}(-\vec{i})\,\frac{N}{C}$$

Seguidament, apliquem el principi de superposició per calcular el vector camp $\vec{E}_T = \sum \vec{E}_i$

El camp elèctric resultant a P(0,0) és:
$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 1'98\times10^3(\vec{i}) + 3{,}96\times10^3(\vec{j})\frac{N}{C}$$

El seu mòdul és E=............................ N/C

El vector resultant podem deixar-lo expressat en forma de vector amb dues components, o bé donar-ne el mòdul i la direcció:

Així, podem escriure el vector resultant de la manera següent:

$\boxed{\vec{E}_P = (\ldots\ldots, \ldots\ldots.)10^{\cdots}\ \mathrm{N/C}}$

O bé:

Mòdul: $R = \sqrt{R_x + R_y} = \sqrt{\left(.......^2 + ...^2\right)} =$ ………... N/C

Direcció: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{..........}{..........}$; $\operatorname{tg} \alpha =$ **……**

El vector intensitat de camp elèctric resultant en el punt P(0,0) és un vector de mòdul ....N/C que forma un angle de .... respecte a l'eix horitzontal de les *x* positives.

b) Per calcular la força apliquem l'expressió que relaciona el vector intensitat de camp elèctric amb el vector força: $\vec{F} = \pm q\vec{E}$

$$\vec{F} = Q\vec{E} = -1\times10^{-6} \cdot (1980,3960) = (-1'98\times10^{-3}, -3'96\times10^{-3})\ \text{N}$$

Així, podem escriure el vector resultant de la manera següent:

$$\boxed{\vec{F}_P = (\ldots\ldots , \ldots\ldots.)10^{\cdots}\ \text{N/C}}$$

O bé:

Mòdul: $R = \sqrt{R_x + R_y} = \sqrt{\left(.......^2 + ...^2\right)} =$ ………... N/C

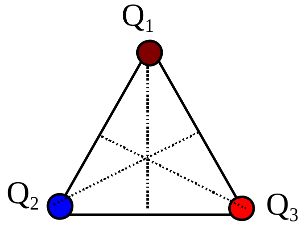
Direcció: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{..........}{..........}$; $\operatorname{tg} \alpha =$ ……

El vector força que actua sobre la càrrega Q_4 situada en el punt P(0,0) és un vector de mòdul ....N que forma un angle de .... respecte a l'eix horitzontal de les *x*. positives

Tornem-hi...

P.1.6. Una càrrega d'1 nC està situada a l'origen de coordenades, una segona càrrega de valor desconegut està situada en el punt (5,0) m i una tercera càrrega de 0,5 nC està situada en el punt (10,0) m. Determineu el valor de la càrrega desconeguda si en el punt (12,0) la intensitat del camp elèctric originat per les càrregues és de 50 N/C. Sol.: 0,27 μC.

P.1.7. Si la longitud del catet d'un triangle equilàter és de 2 m i Q_1= - 20μC; Q_2= 10μC i Q_3= -10μC, calculeu la intensitat de camp elèctric en el centre del triangle. Sol.: $\vec{E} = (1'17, 1'35)\times10^{5}$ N/C.



P.2. Càlcul del potencial elèctric en un punt

Definicions

T.2.1. ***Potencial elèctric***. El potencial elèctric en un punt és el treball necessari per portar la unitat de càrrega positiva des de l'infinit fins a aquest punt.

$$V = \frac{W}{Q}; \quad \text{unitats}\left(\frac{J}{C}\right) \qquad (4)$$

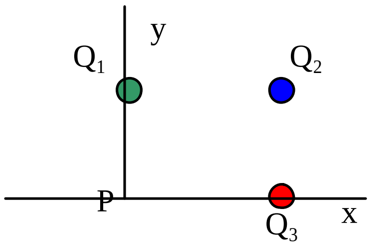
T.2.2. ***Treball elèctric***. La diferència de potencial entre dos punts d'un camp elèctric mesura el treball necessari per transportar la unitat de càrrega des del punt d'inferior potencial fins al punt de major potencial.

$$W_A^B = \pm Q(V_A - V_B) \qquad (5)$$

T.2.3. ***Superfícies equipotencials***. Correspon a una representació gràfica que recull tots els punts en què el valor numèric del potencial és el mateix.

Exercicis

E.2.1. Les càrregues puntuals Q_1= - 7,2μC; Q_2= -40μC i Q_3= +6,4μC es troben en els punts (0,6), (8,6) i (8,0), respectivament. Calculeu el treball que fa el camp elèctric en desplaçar la càrrega Q_2 fins al punt P (0,0).



Solució

Per calcular el potencial total en el punt P(0,0), primer s'han de dibuixar les càrregues en les seves posicions corresponents i indicar si són positives o negatives. Recordeu que *el potencial originat per una càrrega positiva és positiu i el d'una càrrega negativa és negatiu.*

Calculem del potencial originat per les càrregues Q_1 i Q_3 en els punts A(8,6) i B(0,0):

$$V_A = V_{A1} + V_{A3} = \frac{KQ_1}{r_{A1}} + \frac{KQ_3}{r_{A3}} =$$

$$9\cdot 10^9 \frac{\left(-7'2\cdot 10^{-6}\right)}{8} + 9\cdot 10^9 \frac{\left(6'4\cdot 10^{-6}\right)}{6} = 1500 \text{ J/C}$$

$$V_B = V_{B1} + V_{B3} = \frac{KQ_1}{r_{B1}} + \frac{KQ_3}{r_{B3}} =$$

$$9\cdot 10^9 \frac{\left(-7'2\cdot 10^{-6}\right)}{6} + 9\cdot 10^9 \frac{\left(6'4\cdot 10^{-6}\right)}{8} = -3600 \text{ J/C}$$

Fixeu-vos que s'ha aplicat el principi de superposició per calcular el potencial total en un punt. $V = \sum V_i$

Per calcular el treball que fa *el camp* per traslladar la càrrega Q_2 des d'A fins a B correspon a:

$$W_A^B = \pm Q_2\left(V_A - V_B\right) = -40\cdot 10^{-6}(1500 - (-3600)) = -0'204\ \text{J}$$

Observeu que posem el signe de la càrrega que es desplaça. És important que recordeu que *el potencial és una magnitud escalar* i, per tant, queda definit indicant el valor numèric i les unitats.

-0,204 J

Tornem-hi…

P.2.1. Una càrrega puntual Q_1= 36 μC es troba en el punt (0,0) cm d'un sistema de coordenades cartesianes, i una altra càrrega Q_2= - 36μC, també puntual, es troba en el punt (8,0) cm. Quin treball fa el camp elèctric si es trasllada una càrrega elèctrica Q_3= 4μC des del punt A(0,6) cm fins al punt B(4,0)? Sol.: $W_A^B = -4{,}32\text{J}$.

P.2.2. En cada un dels vèrtexs d'un triangle equilàter de 10 cm de catet hi ha una càrrega d'1 nC. Determineu la intensitat de camp elèctric i el potencial en el centre del triangle. Sol.: $\vec{E} = \vec{0}$ N/C; 465 V.

P.2.3. Una càrrega puntual origina en un punt, a una distància *r*, una intensitat de camp de 12 N/C i un potencial de 180 J/C. Calculeu el valor de la càrrega i la distància *r*. Sol.: 0,3μC i 15 m.

P.2.4. En el punt M(0,4,0) hi ha una càrrega puntual Q_1= 5 nC, i en el punt N(2,3,0) una altra càrrega Q_2= -10nC. Determineu: (*a*) la força que actuaria sobre una càrrega puntual Q_3= -2μC que se situa en el punt A(0,03); (*b*) el treball que fa el camp elèctric, originat per Q_2, en desplaçar la càrrega Q_1 fins al punt O(0,0,0). Sol.: $(-3'52,-8'12,3'08)\cdot 10^{-6}$ N; $6'3\cdot 10^{-8}$ J.

P.2.5. Representeu el camp elèctric originat per una càrrega puntual i positiva mitjançant les línies de camp i les superfícies equipotencials.

P.2.6. Donat un anell de radi R que està carregat amb una càrrega Q, distribuïda uniformement, cerqueu en la bibliografia l'expressió de la intensitat del camp elèctric i el potencial originat per l'anell en un punt A(0,0,Z) situat en la recta perpendicular al pla de l'anell i que passa pel seu centre, i indiqueu quin és el significat de cada un dels paràmetres que hi intervenen. Sol.:

$$\vec{E} = K\frac{QZ}{\left(Z^2+R^2\right)^{3/2}}(0{,}01)\ \text{N/C};\quad V = K\frac{Q}{\left(Z^2+R^2\right)^{1/2}}\ \text{J/C}$$

P.3. Problemes bàsics d'estàtica de forces a l'interior de camps elèctrics uniformes

Definicions

T.3.1. ***Camp elèctric uniforme***. Correspon a un camp en què el vector intensitat de camp és independent de la distància a la seva causa. Una placa o bé dues plaques carregades uniformement, per exemple, generen un camp elèctric d'aquest estil.

T.3.2. ***Potencial a l'interior d'un camp elèctric uniforme***. El treball per unitat de càrrega efectuat per un camp elèctric uniforme $\vec{E}$ entre dos punts A i B correspon a:

$$V_A - V_B = E(X_B - X_A) = E \cdot d \qquad (6)$$

Exercicis

E.3.1. Tenim dues plaques idèntiques carregades però amb una càrrega de signe contrari. Les dues plaques estan separades per una distància de 20 cm i la diferència de potencial entre elles és de $V_+ - V_- = E \cdot d = 5000\,V$. Si entre les dues plaques es col·loca un pèndol elèctric l'esfera del qual té un radi d'1mm i una densitat de 5 g/cm^3, determineu l'angle que forma el pèndol amb la vertical si la càrrega de l'esfera és de $Q = 2'22 \cdot 10^{-10}\,C$

Solució

Per poder apreciar quines són les forces que actuen sobre la boleta, primer farem el dibuix. Hem de considerar que hi ha una força de contacte que és la tensió dirigida en la direcció de la corda i dues forces a distància que són la del camp elèctric, $\vec{F}$, i la del camp gravitatori, $\vec{P}$. Per poder donar una direcció i un sentit a la força elèctrica és necessari dibuixar les línies de camp uniforme situades entre les plaques (de placa positiva a placa negativa) i considerar l'expressió: $\vec{F} = \pm Q\vec{E}$

Seguidament, triarem el sistema d'eixos i calcularem els components dels vectors força. Seguidament, aplicarem la primera llei de Newton o principi de la inèrcia, atès que es pretén que la boleta estigui en equilibri sota l'acció d'aquestes tres forces.

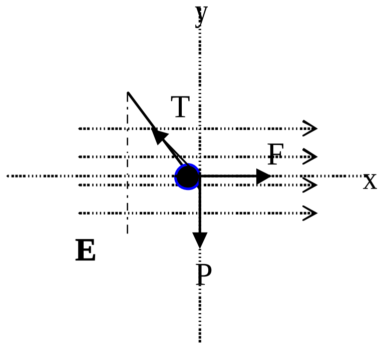
Fem els càlculs corresponents:

$\vec{T} = \left(-T_x, T_y\right)$

$\vec{P} = (0, -P)$

$\vec{F} = (QE, 0)$

$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F} = (0,0)$



L'equació vectorial es pot treballar emprant les components de les forces sobre els eixos:
$\begin{matrix} QE - T\sin\phi = 0; \\ T\cos\phi - mg = 0 \end{matrix}$. Si dividim una equació per l'altra ens queda: $\text{tag}\phi = \dfrac{QE}{mg}$, i si ho substituïm per les dades del problema i calculem la massa de la bola emprant la densitat ens queda que $\phi = 1{,}5^\circ$

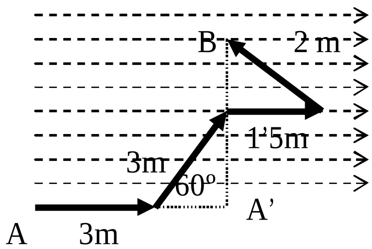
$\boxed{\phi = 1{,}5^\circ}$

Tornem-hi…

P.3.1. Una boleta metàl·lica petita carregada penja d'un fil aïllat en una zona en què hi ha un camp elèctric uniforme de 2 10^5 N/C. Determineu la càrrega de la boleta si la seva massa és de 10 g i forma un angle amb la vertical de 15º. Sol.: 0,13µC.

P.3.2. Determineu el camp elèctric necessari per equilibrar el pes d'un electró i d'una gota d'oli de 10^{-13} kg amb una càrrega de 10 electrons. Sol.: 5,6 10^{-11} C i 6,1 10^5 N/C.

P.3.3. Calculeu el treball necessari per portar una càrrega de 5µC del punt A al punt B de la figura si la intensitat de camp és de 6000 N/C. Sol.: 0,135.



P.4. Problemes bàsics de moviment de càrregues puntuals a l'interior de camps elèctrics uniformes

Exercicis

E.4.1. Es connecten dues làmines planes a una diferència de potencial de 10^6 V. A continuació es deixa en llibertat, just sobre la làmina positiva, una partícula de 0,1 mg de massa i 10 nC. Es demana la velocitat amb què arribarà a la placa negativa considerant que l'acció del pes és negligible respecte a la força del camp elèctric.

Solució

Per poder saber quin tipus de moviment efectua la càrrega a l'interior del camp elèctric uniforme és necessari fer el dibuix situant els vectors força que actuen sobre la bola carregada. Això representa que per saber l' $\vec{F}$ deguda al camp elèctric hem de dibuixar, també les línies de camp. El vector força elèctrica $\vec{F} = \pm Q\vec{E}$

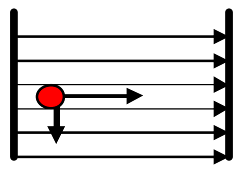
Seguidament, hem de triar els eixos i descompondre els vectors, i aplicar la segona llei de Newton.

$\vec{P} + \vec{F} \approx (QE,0) = (ma,-g)$

Es considera el pes negligible comparat amb la força deguda al camp elèctric.

L'equació vectorial es pot treballar mitjançant escalars i queda:

$$QE = ma;$$
$$\text{aïllant l'acceleració:}$$
$$a = \frac{QE}{m}$$



Com que correspon a un moviment rectilini uniformement accelerat, podem escriure:

$$v^2 = v_o^2 + 2as \Rightarrow v^2 = 0_o^2 + 2\frac{QE}{m}d \, .$$

$$v = 14{,}14 m/s$$

Hi ha un altre procediment per resoldre el problema. Farem el dibuix situant els vectors força que actuen sobre la bola carregada i dibuixarem les línies de camp uniforme situades entre les plaques. Ens permetrà dibuixar el vector força elèctrica $\vec{F} = \pm Q\vec{E}$

Observarem si la força resultant en la direcció del moviment és *conservativa.*

Aplicarem el concepte energètic més adient. En aquest cas el *principi de conservació de l'energia mecànica*:

$$E_{p.el.o} + E_{co} = E_{p.el.f} + E_{cf}$$

$$Q(V_0 - V_F) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = 14{,}14 \text{ m/s}$$

$$\boxed{14{,}14 \text{ m/s}}$$

Tornem-hi…

P.4.1. Es connecten dues làmines planes a una diferència de potencial de 10^6 V. A continuació es deixa en llibertat, just sobre la làmina positiva, una partícula de 0,2 mg de massa i 20 nC. Es demana: (*a*) la velocitat amb què arribarà a la placa negativa considerant que l'acció del pes és negligible respecte a la força del camp elèctric; (*b*) l'energia cinètica amb què arriba a la làmina expressada en eV. Sol.: 14,14 m/s.

P.4.2. En un camp elèctric uniforme E = 60000 N/C originat per dues plaques carregades i separades per una distància de 2,5 cm, es demana: (*a*) l'acceleració a què es troba sotmès un electró en aquest camp; (*b*) si l'electró parteix del repòs i d'una de les plaques, la velocitat amb què arriba a l'altra placa; (*c*) el temps que trigarà l'electró a creuar l'espai que separa ambdues plaques. Sol.: 1'05 10^{16} m/s^2; 2'23 10^7 m/s, 2'24 10^{-9} s.

P.4.3. Un electró entra a l'interior d'un camp elèctric uniforme perpendicularment a les línies de camp amb una velocitat de 10000 m/s. La intensitat de camp és de 100000 N/C. Determineu l'equació de la trajectòria de l'electró. Sol.: $y = y_0 + 8'79 \cdot 10^7 x^2$.

P.5 Conductors en equilibri electrostàtic, aplicacions a conductors de simetria esfèrica

Definicions

T.5.1. ***Conductors en equilibri electrostàtic***. Es diu que un conductor es troba en equilibri electrostàtic quan tot ell es comporta com una gran superfície equipotencial i el camp elèctric en el seu interior és nul.

T.5.2. ***Capacitat d'un conductor***. Hi ha una proporcionalitat directa entre el potencial a què es connecta un conductor i la càrrega que assoleix aquest. La constant de proporcionalitat s'anomena capacitat.

$$Q = CV \qquad (7)$$

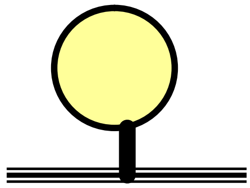
T.5.3. ***Capacitat d'una esfera conductora***. La capacitat d'una esfera conductora és directament proporcional al seu radi: $C = 4\pi\varepsilon_a R$.

T.5.4. ***Energia electrostàtica***. L'energia electrostàtica emmagatzemada per un conductor en equilibri electrostàtic es pot determinar amb l'expressió:

$$E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C} \qquad (8)$$

Exercicis

E.5.1. Una esfera conductora de 8 cm de radi té una càrrega elèctrica de 0,3 µC . Calculeu: (*a*) el potencial en un punt de la seva superfície; (*b*) l'energia elèctrica emmagatzemada a l'esfera:



Solució

Per calcular el potencial en un punt de la seva superfície hem de comprovar, en l'enunciat, si es tracta d'un conductor.

Comprovarem si el conductor té una forma geomètrica corresponent a una esfera, per poder aplicar el formulari corresponent a intensitat de camp, potencial i capacitat d'un *conductor de forma esfèrica en equilibri electrostàtic.*

Si analitzem la condició d'equilibri electrostàtic referent al potencial ens diu: "el potencial d'un conductor esfèric en qualsevol punt *de l'interior* és el mateix que en la seva superfície".

La distribució de càrrega esfèrica permet considerar-la com una càrrega puntual situada en el centre quan es calcula la magnitud intensitat de camp i potencial en un punt de la *superfície i de l'exterior* d'aquesta.

a) Per a un punt de la superfície

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 9\cdot 10^9 \frac{0'3\cdot 10^{-6}}{0'08} = 33750 \frac{J}{C}$$

b) Els mateixos conceptes teòrics de l'apartat anterior ens permeten determinar l'energia emmagatzemada en el conductor esfèric:

$$E = \frac{1}{2}QV = 0'3\cdot 10^{-6} \circ 33750 = 5'6\cdot 10^{-3}\,J$$

33750 J/C; 0,0056 J

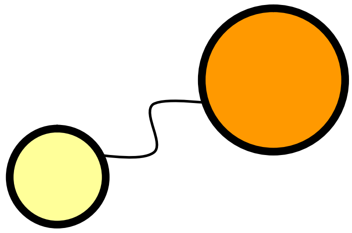
Tornem-hi…

P.5.1. Es carreguen dos conductors esfèrics A i B, de 10 cm de radi, amb càrregues Q_A=3 !0^{-8} C i Q_B=6 !0^{-8} C. Es demana el potencial que assoleix cada esfera (considereu que es negligeix la interacció entre els conductors). Sol.: V_A= 2700 V; V_B= - 5400 V.

P.5.2. Determineu la càrrega que assoleix una esfera conductora de 10 cm de radi que es connecta al pol positiu d'un generador que subministra una diferència de potencial de 900 V. Es considera que el pol negatiu del generador es connecta a terra. Sol.: 10 nC.

P.5.3. Una esfera conductora en equilibri electrostàtic té una càrrega superficial s coneguda, repartida homogèniament. El potencial originat per l'esfera a una distància **L** del seu centre és 1/10 del potencial en la seva superfície. Calculeu: (*a*) el seu radi; (*b*) la càrrega elèctrica de l'esfera; el potencial elèctric de l'esfera. Sol.: $R = \frac{L}{10}$; $Q = 0{,}04\pi\sigma L^2$; $V = \frac{\sigma L}{10\varepsilon_a}$

E.5.2. Una esfera metàl·lica aïllada, de 10 cm de radi, es carrega amb una tensió de 10000 V. A continuació s'uneix a una altra esfera descarregada i aïllada de 5 cm de radi. Es demana la càrrega de cada esfera i el potencial comú després de la connexió.



Solució

Per calcular el potencial en un punt de la seva superfície hem de comprovar, en l'enunciat, si es tracta de conductors. Per aplicar els conceptes de potencial i camp elèctric d'un conductor en equilibri electrostàtic s'ha de comprovar si els conductors tenen forma geomètrica corresponent a una esfera, per poder aplicar el formulari corresponent a intensitat de camp, potencial i capacitat d'un *conductor de forma esfèrica*.

El potencial d'un conductor esfèric en qualsevol punt de l'interior és el mateix que en la seva superfície. Es comporta com una superfície equipotencial; això ens permet calcular-ne la càrrega:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R};10000 = 9\cdot 10^9 \frac{Q}{0'10} \Rightarrow Q = \frac{1000}{9}10^{-9}\,C$$

Quan la connectem a l'altra esfera hi ha un moviment de càrregues, fins que tots dos conductors arriben a un nou equilibri electrostàtic; és a dir, tot el conjunt es comporta com un únic conductor de potencial V'. Si apliquen el càlcul de potencial a aquesta nova situació:

$$V' = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

I com que el sistema està aïllat, la càrrega inicial Q està distribuïda de manera que es verifica: $Q = \frac{1000}{9}10^{-9} = Q_1 + Q_2$

Ens queda un sistema d'equacions que permet calcular Q_1 i Q_2.

La solució matemàtica d'aquest sistema indica que $Q_2 = \frac{1000}{27}10^{-9}\,C; Q_1 = \frac{2000}{27}10^{-9}\,C$

Substituint en l'equació de càlcul del potencial, ens queda:

$$V' = \frac{2}{27}10^{5}\ {}^{J}\!/_{C}$$

$$\boxed{Q_2 = \frac{1000}{27}10^{-9}C; Q_1 = \frac{2000}{27}10^{-9}C} \quad \boxed{V' = \frac{2}{27}10^{5}\ {}^{J}\!/_{C}}$$

Tornem-hi....

P.5.4. Una esfera metàl·lica aïllada de 10 cm de radi es carrega amb una tensió de 5000 V. A continuació s'uneix a una altra esfera descarregada i aïllada de 8 cm de radi. Es demana la càrrega de cada esfera i el potencial comú després de la connexió. Sol.: 2777V; Q=3 10^{-8} C i Q'= 2'47 10^{-8}C.

P.5.5. Dues esferes amb uns radis de 6 cm i 9 cm es carreguen amb 1µC cada una i s'uneixen amb un conductor de capacitat negligible. Es demana: (*a*) el potencial de cada esfera aïllada; (*b*) el potencial després de la unió; (*c*) la càrrega de cada esfera després de la unió. Sol.: (*a*) V=15 10^4V i V'=10 10^4V; (*b*) 12 10^4V; (*c*) Q=0'8µC i Q'=1,2µC.

P.6. Problemes d'aplicacions de càlcul amb condensadors

Definicions

T.6.1. ***Condensador***. És un aparell elèctric format per dos conductors, degudament aïllats, anomenats "armadures" (plaques), separats entre si per un aïllant anomenat dielèctric.

T.6.2. ***Capacitat d'un condensador***. És la relació entre la quantitat d'electricitat Q emmagatzemada en el condensador i la diferència de potencial V que hi ha entre les seves armadures:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV \qquad (9)$$

T.6.3. ***Expressió de càlcul de la capacitat d'un condensador de plaques paral·leles***:

$$C = \varepsilon_a \frac{S}{d} \qquad (11)$$

On e_a és la constant dielèctrica absoluta de l'aïllant; *S* la superfície de les plaques enfrontades entre si i *d* és la distància que separa les dues plaques.

T.6.4. ***Energia electrostàtica emmagatzemada per un condensador carregat***. L'energia electrostàtica emmagatzemada per un condensador carregat es pot determinar amb les expressions:

$$E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C} \qquad (12)$$

Exercicis

P.6.1. Un condensador pla té dues plaques de 30p cm^2 de superfície, i la distància entre aquestes plaques és de 4 mm. Té un dielèctric de constant relativa 6. Calculeu la capacitat, la càrrega i l'energia emmagatzemada del condensador si es connecta a 2000 V. Sol.: 0'125 nF; 0'25µC; 25000 J

P.6.2. Tenim un condensador aïllat de 4 pF i carregat amb $1x10^{-8}$ C. La distància entre les plaques és de 2 cm. Calculeu: (*a*) la diferència de potencial i la intensitat de camp elèctric entre les plaques; (*b*) si hi posem un dielèctric de constant relativa 5, el potencial assolit, i (*c*) l'energia electrostàtica en les dues situacions. Sol.: (*a*) 2500 V i 125000 N/C ; (*b*) 500 V; (*c*) 12,5µJ i 2'5µJ.

P.6.3. Un condensador aïllat de plaques paral·leles i amb dielèctric de constant relativa 4 té una capacitat de 12 nF i una diferència de potencial entre les plaques de 1000 V. Calculeu el treball necessari per treure-li el dielèctric. Sol.: 0'018 J.

P.6.4. Calculeu el treball que cal per separar les plaques d'un condensador de plaques paral·leles una distància tres vegades com la que hi ha inicialment. La capacitat inicial del condensador és de 5 nF i la seva càrrega és de 30µc. Sol.: 0,18 J.

P.6.5. Un condensador aïllat, de plaques paral·leles, té una capacitat de 6µF i una diferència de potencial de 500 V. Calculeu: (*a*) la càrrega i l'energia electrostàtica emmagatzemada; (*b*) si ara hi posem un dielèctric de constant relativa 3, la nova diferència de potencial entre plaques i l'energia emmagatzemada pel condensador amb la nova capacitat. Sol.: (*a*) 0'003 C; 0'75 J; (*b*) 500/3 V i 0,25 J.

P.6.6. Un condensador té una capacitat de 5 nF i es connecta a 800 V. (*a*) Calculeu la seva càrrega; (*b*) si sense desconnectar-lo hi posem un dielèctric de constant relativa 4, calculeu la càrrega que tindrà ara; (*c*) si el dielèctric l'hi posem havent desconnectat prèviament el condensador, calculeu la càrrega i el potencial en aquesta nova situació. Sol.: (*a*) 4µC; (*b*) 16µC; (*c*) 4µC i 200 J/C.

P.6.7. Entremig de les plaques d'un condensador pla de 6 pF hi ha un camp elèctric de 4000 N/C. La separació entre plaques és de 5 mm. Es demana la diferència de potencial entre plaques i la càrrega del condensador. Sol.: 200 V, $12\ 10^{-10}$ C.

P.6.8. Un estany circular de 1000 km^2 té al cim a una alçada de 500 m un núvol tempestuós també circular i de la mateixa àrea. L'estany, de 2 m de fondària, és ple d'aigua. Calculeu l'energia que absorbeix l'aigua si es produeix una descàrrega elèctrica núvol-aigua. El camp elèctric considerat constant entre el núvol i l'aigua és de 100 N/C. Sol.: 5307'84 cal.

TEORIA DE CIRCUITS. CORRENT CONTINU

Índex

P.1. Problemes d'aplicació de càlculs fonamentals de teoria de circuits

Definicions

T.1.1. **Corrent elèctric**. És un pas d'electrons, a través d'un cos conductor, entre dos punts que es troben a diferent potencial elèctric. El sentit convencional del corrent elèctric va del pol positiu al pol negatiu.

T.1.2. **Quantitat d'electricitat**. És el nombre de càrregues elèctriques transportades en un cert temps. Aquesta magnitud es representa per **Q.**

T.1.3. **Intensitat de corrent**. És el nombre de càrregues elèctriques, Q, transportades en la unitat de temps. Aquesta magnitud es representa per I i la seva expressió de càlcul correspon a:

$$I = \frac{Q}{t} \left[\frac{\text{coul}}{\text{segon}} = A \right] \tag{1}$$

T.1.4. **Llei d'Ohm**. La intensitat de corrent que travessa un conductor és directament proporcional a la diferència de potencial que hi ha entre dos punts del conductor i inversament proporcional a la seva resistència. Matemàticament:

$$I = \frac{V}{R} \tag{2}$$

T.1.5. **Potència elèctrica**. S'anomena potència elèctrica, P, al treball realitzat pel corrent elèctric en la unitat de temps:

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \left[\frac{\text{joules}}{\text{segon}} \right] = W \tag{3}$$

T.1.6. **Expressió general de potència**: $P = \frac{\text{Energia}}{\text{temps}}$

T.1.7. **Efecte Joule**. L'energia calorífica que desprèn un conductor és directament proporcional a la resistència del conductor, al quadrat de la intensitat de corrent que el travessa i al temps.

Tornem-hi…

P.1.1. Calculeu la intensitat que circula per un circuit si en 5 h 30'30'' hi ha circulat un total de 39600 C. Sol.: 1,99 A.

P.1.2. Calculeu la quantitat de càrrega Q que és transportada per un fil conductor en el qual hi circula una intensitat de corrent de 5 S durant 2 h 30'. Sol.: 45000 C.

P.1.3. Una planxa elèctrica de 25 O es connecta a una diferència de potencial de 100 V. Calculeu la potència elèctrica consumida per la planxa. Sol.: 400 W.

P.1.4. Calculeu la calor produïda per una intensitat de 2 A en un forn connectat a 100 V durant un temps de 24 hores. Sol.: 17,28 10^6 J.

P.1.5. Una làmpada consumeix 60 W quan es connecta a 120 V. Calculeu: (a) la seva resistència elèctrica; (b) la intensitat elèctrica que circula per la làmpada. Sol.: 240 O; 0,5 A.

P.1.6. Si un KWh val 0,012 €, calculeu el cost que representa tenir encesa una bombeta de 100 W un temps de 12 h. Sol.: 0,0144 €.

P.1.7. Un escalfador elèctric connectat a una línia de 220 V escalfa, en un temps de 13'20", una quantitat de 2,4 L d'aigua i fa que la seva temperatura passi de 10ºC a 90ºC. Calculeu: (a) la potència elèctrica de l'escalfador; (b) la seva resistència elèctrica. Nota: recordeu que $Q = mc(T_f - T_o)$. Sol.: 1000 W; 48,4 O.

P.1.8. Introduïm un escalfador d'immersió que porta la inscripció "110 V; 500 W" en 1,5 L d'aigua a 10ºC. L'aigua comença a bullir en un temps de 25 minuts. Calculeu: (a) l'energia elèctrica consumida per l'escalfador; (b) l'energia útil subministrada per l'aparell; (c) el rendiment de l'aparell elèctric. Nota: recordeu la definició de rendiment: $\text{rendiment} = \frac{\text{útil}}{\text{total}}$ Sol.: 750 kcal; 135 kcal; 18%.

P.1.9. Una bateria de cotxe de 6 V pot proporcionar un corrent de 12 A durant un temps de 6 hores quan està completament carregada. Calculeu: (a) la quantitat d'energia que allibera, (b) els quilograms d'aigua que poden escalfar-se amb aquesta bateria des d'una temperatura inicial de 20ºC fins a una temperatura final de 80 ºC. Sol.: 1.5 10^6 W.s; 6.2 kg.

P.2. Càlcul de resistències

Definicions

T.2.1. **Resistència elèctrica**. S'anomena resistència elèctrica d'un conductor la major o menor dificultat que ofereix al pas del corrent elèctric. La resistència és directament proporcional a la longitud del conductor i inversament proporcional a la seva secció. Matemàticament :

$$R = \frac{? \cdot L}{S} \qquad (4)$$

Tornem-hi…

P.2.1. En la pràctica es considera la resistivitat d'un material, ?, com la resistència d'un cable d'aquest material de longitud L= 1 m i d'àrea S= 1 mm^2. Així, per exemple, la resistivitat del coure correspon a 0.17 O mm^2/m. Calculeu la resistivitat del coure en unitats del SI. Sol.: 1.7 10^{-8} O m.

P.2.2. Considerant la resistivitat del coure del problema anterior, calculeu la resistència d'un fil de coure de 3,4 mm^2 de secció i de 4 km de longitud. Sol.: 20 O.

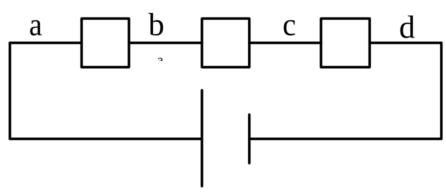
P.3. Problemes bàsics d'associacions de resistències

Definicions

T.3.1. **Associació de resistències. Resistència equivalent**. S'anomena resistència equivalent d'altres resistències la resistència que posada en el circuit en el lloc de les altres produeix els mateixos efectes.

T.3.2. **Resistència en sèrie**. L'associació de resistències en sèrie es fa col·locant les resistències una a continuació de les altres, unint el final d'una resistència amb l'origen de l'altra.

Si considerem el circuit de la figura, format per resistències connectades en sèrie, i seguim els raonaments següents obtenim l'expressió de càlcul de la resistència equivalent del circuit.



Si apliquem la llei d'Ohm a cada una de les resistències:

$V_A - V_B = R_{AB} I; V_B - V_C = R_{BC} I; V_C - V_D = R_{CD} I$

Si sumem ordenadament les diferències de potencial ens queda que:

$V_{TOTAL} = V_A - V_D = (R_{AB} + R_{BC} + R_{CD}) \cdot I$

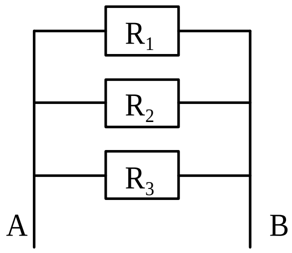
on es dedueix que: $(R_{AB} + R_{BC} + R_{CD}) = \frac{V_{TOTAL}}{I}$

El terme $(R_{AB} + R_{BC} + R_{CD})$ correspon a la ressistència que hi ha entre els extrems A i D del conductor. Si anomenem $R = (R_{AB} + R_{BC} + R_{CD})$ aquesta resistència tenim que la resistència equivalent a les connectades en sèrie equival a:

$R = \sum R_i$

$$R_{Equivalent} = \sum R_i \qquad (5)$$

T.3.3. **Resistència en paral·lel**. L’associació de resistències en paral·lel es fa unint entre si, en un punt comú, A, l’extrem inicial de cada una de les resistències, i unint a un altre punt comú, B, l’extrem final de cada una de les resistències:



Si considerem el circuit de la figura, forrmat per resistències connectades en paral·lel, i seguim els raonaments següents, obtenim l’expressió de càlcul de la resistència equivalent del circuit:

$I = I_1 + I_2 + I_3$

Si apliquem la llei d'Ohm entre els punts A i B a través de cada resistència ens queda:

$$I_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1};\ I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2};\ I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_3}$$

Si sumem el tres termes per calcular la intensitat total del circuit ens queda:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_3} = I$$

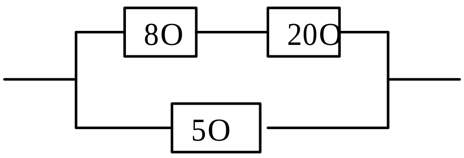
Divid int l'expressió anterior per la diferència de potencial:

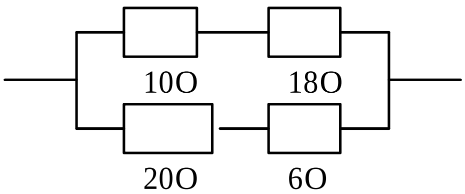
$\frac{I}{V_A - V_B} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Anomenem R la resistència equivalent que produeix el mateix efecte que les altres tres: $\frac{1}{R} = \frac{I}{V_A - V_B} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$; es dedueix que $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$

$$\frac{1}{R_{Equivalent}} = \sum \frac{1}{R_i} \qquad (6)$$

Tornem-hi…

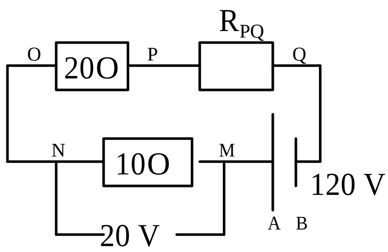
P.3.1. Calculeu la resistència equivalent de la figura 1 i la figura 2:





Sol.:4,24 O¸13,48 O

P.3.2. Observeu l'esquema de la figura i contesteu les preguntes següents: (a) les resistències estan connectades en sèrie o en paral·lel? (b) quina és la diferència de potencial entre els punts O i P? (c) i entre i P i Q? (d) quant val la resistència PQ? Sol.: 40 V; 60 V; 30 O.



P.3.3. Un corrent de 30 A es bifurca per dues resistències de 2 i 3 ohms. Es demana: (a) la resistència equivalent; (b) les intensitats parcials; (c) la diferència de potencial entre els extrems de la bifurcació. Sol.: 6/5 ohms; 12 i 18 A; 36 V.

P.4. Aplicacions de l'expressió característica d'un generador

Definicions

T.4.1. **Generadors elèctrics**. Són aparells que s'utilitzen per establir i mantenir una diferència de potencial entre dos punts d'un circuit elèctric. Les característiques d'un generador de corrent continu són: força electromotriu (fem) i la resistència interior.

T.4.2. **Força electromotriu d'un generador (fem), E**. És el treball necessari per transportar la unitat de càrrega des del pol negatiu fins al pol positiu per l'interior del generador:

$$E = \frac{\text{treball}}{q} \Rightarrow \text{treball} = E \cdot q = E \cdot I \cdot t$$

Aquestes fórmules ens donen el treball o energia que pot subministrar un generador al circuit elèctric. Si considerem que la potència és treball per unitat de temps, podem expressar la potència d'un generador en funció de la seva fem com: $P = E \cdot I$

T.4.3. **Resistència interior d'un generador, r.** És la dificultat que ofereix el generador al pas del corrent elèctric. Atès aquesta resistència interna, en l'interior, del generador apareix una caiguda de tensió, V_c, que val d'acord amb la llei d'Ohm: $V_c = I \cdot r$

T.4.4. **Tensió en borns d'un generador**. És la porció de força electromotriu del generador disponible entre els seus borns o pols, A i B, i que pot ser consumida en el circuit exterior. $V_A - V_B = E - I \cdot r$ D'aquesta equació s'obté l'expressió de la fem, $E = V_A - V_B + I \cdot r$, que ens indica quina fracció de l'E del generador s'utilitza en vèncer la pròpia resistència interior i quina fracció se subministra a l'exterior.

$$E = V_A - V_B + I \cdot r \qquad (7)$$

La fem d'un generador i la tensió en borns són iguals únicament en el cas que el circuit estigui obert. En les altres situacions, la tensió en borns és inferior a la fem del generador.

Tornem-hi…

P.4.1. Un generador de corrent continu de fem 120 V produeix un corrent de 20 A al connectar-li una resistència exterior. S'observa que la tensió en borns és, aleshores, de 115 V. Calculeu: (a) la resistència interior del generador; (b) la resistència exterior connectada al generador; (c) la potència subministrada pel generador. Sol.: 0.25 O; 5.75 O; 2400 watts.

P.4.2. Un generador té 0.4 O de resistència interna i produeix 10 A d'intensitat. La tensió en borns del generador és de 220 V. Calculeu: (a) la fem del generador; (b) la potència útil o subministrada pel generador al circuit; (c) el rendiment del generador. Sol.: 224 V; 2200 watts; 98.21%.

P.4.3. Unint mitjançant un conductor els pols d'una bateria de 9 V de fem i 1.5 O de resistència interna, hi circula un corrent de 2A durant un temps de 10'. Calculeu: (a) l'energia elèctrica produïda per la bateria; (b) la tensió en borns del generador; (c) la resistència del conductor; (d) la caiguda de tensió a l'interior del generador. Sol.: 10800 J; 6 V; 3 O; 3 V.

P.4.4. Una pila té una fem de 10 V. Quan es connecta a una resistència de 50 O, la tensió en borns del generador és de 9.5 V. Determineu: (a) la intensitat de corrent; (b) la resistència interna de la pila; (c) l'energia calorífica dissipada en la resistència exterior al generador en un temps de 5'. Sol.: 0.19 A.; 2.63 ohms; 136.8 cal.

P.4.5. Es disposa d'un generador de corrent continu de 42 V de fem i 2 O de resistència interna. També es disposa de tres resistències de valors 2, 4 i 6 O (a) Quina intensitat de corrent circula pel circuit si aquestes resistències es connecten en sèrie entre si i al generador? (b) I si les resistències es connecten en paral·lel i el conjunt es connecta al generador? (c) Quina potència absorbeix en cada cas la resistència de 4 O? Sol.: 3 A; 13.59 A; 36 watts i 54.76 watts.

P.4.6. Una pila està connectada a un circuit en el qual hi ha una resistència, un amperímetre, un voltímetre i un interruptor. Quan el circuit és obert, el voltímetre indica un tensió en borns de 1.52 V. Què marcarà l'amperímetre? Quan es tanca el circuit, el voltímetre indica 1.37 V i l'amperímetre 1.5 A. Calculeu la fem de la pila i la seva resistència interna. Sol.: 1.52 V i 0.1 ohm.

P.4.7. Una bateria produeix corrent elèctric a través d'una resistència amb una intensitat de 4.3 A i amb una tensió en borns de 9.2 V. Si es canvia la resistència exterior al generador, el corrent és de 6.1 a i la tensió en borns 8.6 V. Calculeu la fem i la resistència interna del generador. Sol.: 10.66 V i 0.34 O.

P.5. Aplicacions de l'expressió característica d'un receptor

Definicions

T.5.1. **Receptors químics i mecànics. Característiques**: tot receptor de tipus químic o mecànic es caracteritza per uns valors propis de l'aparell, les seves característiques, que són: força contraelectromotriu (fcem), E', i la seva resistència interior, r'. En un receptor es verifica que la seva tensió en borns es reparteix de la manera següent:

$$V_A - V_B = E' + I \cdot r' \qquad (8)$$

Com a conseqüència de la fcem d'un receptor de tipus químic o mecànic s'ha d'aplicar la llei d'Ohm generalitzada per a l'estudi de les magnituds elèctriques del circuit.

T.5.2. **Expressió de la llei d'Ohm generalitzada**

$$I = \frac{\sum E - \sum E'}{R_{equivalent} + \sum r + \sum r'} \qquad (9)$$

Exercicis

E.5.1. Un circuit està format per un generador de E= 88 V i r=2O, un motor de E'=12 V i r'=1.5O i una resistència calefactora de 111.5 O. Determineu: (a) la intensitat de corrent del circuit, (b) la diferència de potencial en els terminals de cada element; (c) la potència absorbida pel motor i la potència mecànica que desenvolupa; la potència calorífica que dissipa la resistència calefactora.

Solució:

a) Per calcular la intensitat de corrent del circuit aplicarem la llei d'Ohm generalitzada a tot el circuit, considerat la fem positiva i la fcem negativa.

$$I = \frac{88 - 12}{2 + 1.5 + 111.5} = 0.66\,A$$

b) La diferència de potencial en els terminals de cada element l'obtindrem a partir de les equacions característiques:

$$V_{generador} = E - Ir = 88 - 2 \cdot 0.66 = 86.68\,V$$

$$V_{motor} = E' + Ir' = 12 + 1.5 \cdot 0.66 = 12.99\,V$$

$$V_{resistència} = IR = 111.5 \cdot 0.66 = 73.59\,V$$

c) Per calcular la potència absorbida pel motor i la seva potència mecànica:

$$P_{absorbida} = V_{motor} \cdot I = 12.99 \cdot 0.66 = 8.57\,W$$

$$p_{mecànica} = E' \cdot I = 12 \cdot 0.66 = 7.92\,W$$

I la potència dissipada en la resistència calefactora correspon a:

$$P = V_{resistència} \cdot I = 73.59 \cdot 0.66 = 48.57\,W$$

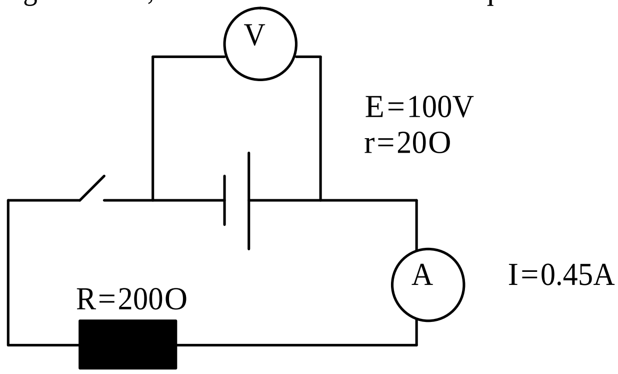
0,66 A;

86,68 V; 12,99 V; 73,59 V

8,57 W; 7,92 W; 48,57 W

Tornem-hi…

P.5.1. En el circuit de la figura calculeu el valor que indica el voltímetre connectat als terminals del generador, tant en circuit obert com quan hi circula el corrent. Sol.: 100V; 91V



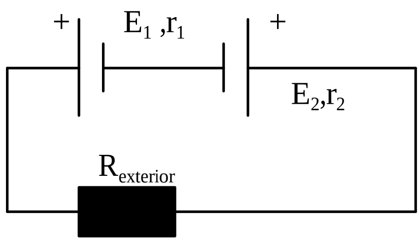
P.5.2. Els pols d'un generador de 100 V de fem i 2 O de resistència interna s'uneixen, mitjançant conductors d'una resistència total de 3 O, a un receptor de 80 V de fcem i una resistència interna d'1 O. Calculeu: (a) la intensitat de corrent; (b) la tensió en borns en el receptor; (c) la potència absorbida pel receptor; (d) el rendiment del receptor. Sol.: 3.34 A; 83.34 V; 277.8 V; 96 %.

P.5.3. Els pols d'un generador de 10 V de fem i 0.5 O de resistència interna alimenten un motor de 6 V de fcem i una resistència interna de 4.5 O. Calculeu: (a) la potència útil del motor; (b) la potència dissipada pel motor per efecte Joule; (c) el rendiment del motor; (d) la tensió en borns del motor i del generador. Sol.: 4.8 watts; 2.88 watts; 62.5%; 9.6 V.

P. 6. Circuits bàsics amb generador i receptor. Aplicacions de la llei d'Ohm generalitzada

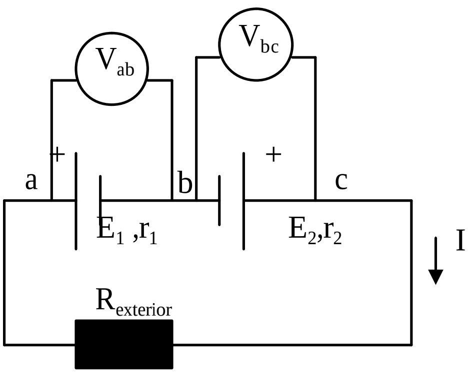
Exercicis

E.6.1. Calculeu la I del circuit de la figura i la potència de cada element elèctric:



Solució

a) Per calcular la intensitat de corrent donarem un sentit arbitrari a la intensitat. En aquest cas li donarem un sentit horari:



D’acord amb el sentit de la intensitat observarem quins aparells són generadors i quins són receptors. Es considera receptor aquell aparell en què la intensitat entra pel seu pol positiu i surt pel seu pol negatiu. Un generador és l’aparell contrari**.** En l’exemple E_1 és un receptor i E_2 és un generador.

Seguidament aplicarem **la llei d’Ohm generalitzada** al circuit, tot considerant que les forces contraelectromotrius es consideren negatives i les electromotrius positives. Les resistències òhmiques sempre són positives.

Farem els càlculs següents:

$$I=\frac{\sum E-\sum E'}{R_{equivalent}+\sum r+\sum r'}=\frac{E_2-E_1}{R_{exterior}+r_1+{}_2}$$

El signe de la intensitat calculada indica el seu sentit. Si el resultat és positiu, vol dir que el sentit donat a l’inici és correcte. Si surt negatiu, el sentit és contrari a l’assignat.

Considerem que el sentit assignat és correcte. Aleshores, E_2 és realment un generador i E_1 un receptor:

Potència teòrica subministrada al circuit: $P=E_2I$
Potència útil subministrada al circuit: $P=V_{bc}I$
Potències absorbides pel circuit:

Útil del receptor: $P=E_1I$
Teòrica del receptor: $P=V_{ab}I$
Dissipada en el receptor: $P=I^2r_1$
Dissipada en el generador: $P=I^2r_2$
Dissipada en el conductor: $P=I^2R_{exterior}$

D’acord amb la llei de conservació de l’energia, es verifica que la potència que entra al circuit és igual a la que surt $E_2I=E_1I+I^2\left(R_{exterior}+r_1+r_2\right)$

Tornem-hi…

P.6.1. En el circuit de la figura 1 calculeu quant assenyala un voltímetre connectat als terminals del generador, tant en circuit obert com quan hi circula el corrent. Sol.:

Figura 1

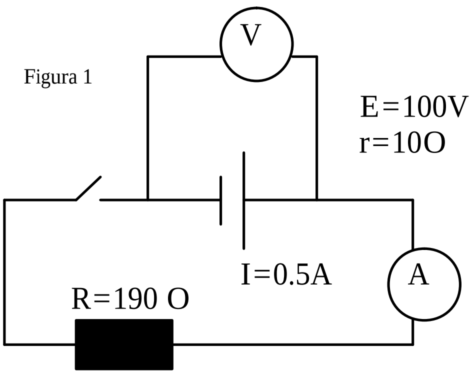
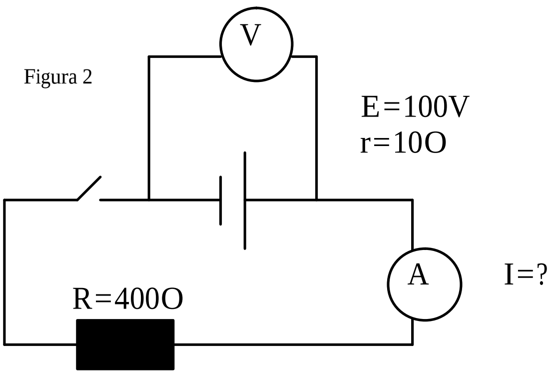
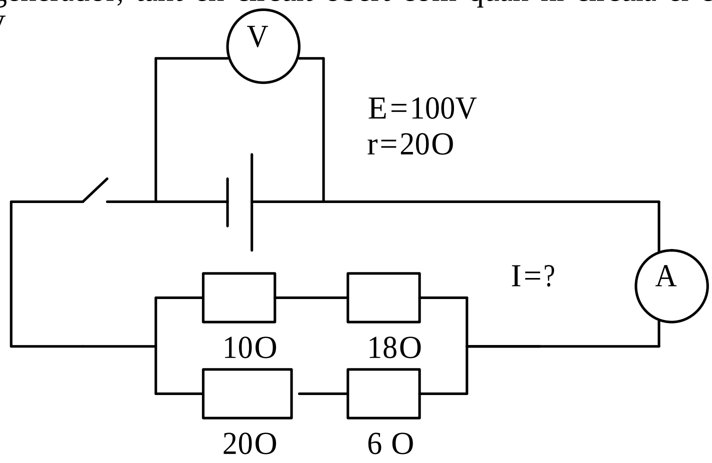


Figura 2



P.6.2. En el circuit de la figura 2 calculeu quant assenyala un voltímetre connectat als terminals del generador, tant en circuit obert com quan hi circula el corrent. Sol.: 100 V; 97,56 V

P.6.3. En el circuit de la figura calculeu quant assenyala un voltímetre connectat als terminals del generador, tant en circuit obert com quan hi circula el corrent. Sol: 100 V; 40,26 V



CAMP MAGNÈTIC

Índex

Estudi de forces originades per camps magnètics uniformes

P.1. Càlcul de la força magnètica sobre una càrrega puntual

Definicions

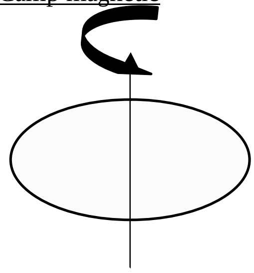
T.1.1. **Electromagnetisme**. És la part de l'electricitat que estudia la relació entre els fenòmens elèctrics i els fenòmens magnètics.

T.1.2. **Camp magnètic**. Correspon a la regió de l'espai en la qual es fan sensibles les forces magnètiques.

T.1.3. **Inducció magnètica**. Es representa per la lletra **B**; és un vector que ens indica el valor numèric, la direcció i el sentit del camp magnètic en un punt del camp.

T.1.4. **Línies de camp**. El camp magnètic es materialitza per mitjà d'unes línies tangents en cada punt del camp al vector inducció. Aquestes línies s'anomenen línies de camp magnètic.

T.1.5. **Camp magnètic originat per un corrent rectilini de longitud infinita**. Quan un corrent elèctric circula a través d'un conductor rectilini, genera un camp magnètic circular amb centre en el mateix conductor. El sentit de les línies de camp es determina aplicant **la regla de la mà dreta.**



$$\vec{B} = 4\pi 10^{-7} \frac{I}{2\pi r}\vec{u}_t \qquad (1)$$

On *r* és la distància perpendicular del punt al conductor, és a dir, és el radi de la línia circular corresponent.
I és la intensitat de corrent que circula pel conductor.
$\vec{u}_t$ és el vector unitari tangent a la línia de camp en el punt.

T.1.6. **Regla de la mà dreta**. Suposem que agafem el conductor amb la mà dreta, de manera que el dit gros assenyali la direcció i el sentit del corrent; la posició dels altres quatre dits de la mà ens indica el sentit de les línies de camp originat pel corrent elèctric.

T.1.7. **Concepte de camp magnètic constant**. És el camp en el qual el mòdul, la direcció i el sentit del vector inducció es mantenen constants. Es representa mitjançant línies de camp paral·leles.

T.1.8. **Unitats del vector inducció magnètica**. Si col·loquem a l'interior d'un camp magnètic uniforme **B** un conductor rectilini de longitud **l** travessat per un corrent elèctric d'intensitat **I**, de manera que el conductor és perpendicular a les línies de camp, el conductor rep una força magnètica $\vec{F}_m$, definida per l'expressió $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. En el sistema internacional:

$$B = \frac{1\,\text{newton}}{1\,\text{amper}.1\,\text{metre}} = 1\,\text{tesla} = 1\,\text{T}$$

T.1.9. **Principi de la superposició**. La intensitat en un punt del camp magnètic originat per diverses causes de camp, la trobarem **sumant vectorialment** les intensitats parcials degudes a cada una de les causes.

$$\vec{B}_{Total} = \sum \vec{B}_i \qquad (2)$$

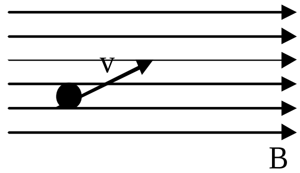
T.2.1. **Força magnètica sobre una càrrega puntual en moviment**. La força magnètica que actua sobre una càrrega puntual que es mou a l'interior d'un camp magnètic uniforme s'obté a partir de l'expressió:

$\vec{F} = \pm q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Fixeu-vos que és perpendicular al pla format per $\vec{v}$ i $\vec{B}$.

Exercicis

E.1.1. Una càrrega puntual $Q_1 = +1\mu C$ es mou amb una velocitat de 10 m/s i forma un angle de 30º amb les línies de camp magnètic. Si el vector inducció de camp magnètic és $\vec{B} = (3,0,0)\,T$, calculeu el vector força magnètica que actua sobre la càrrega puntual.



Solució

Per calcular la força, primer s'han de dibuixar els vectors camp magnètic i velocitat, tot considerant el signe de la càrrega.

Expressem cada vector en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{B} = B\,\vec{u}$; o bé en funció de les seves components cartesianes $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. En el nostre cas $\vec{B} = (3,0,0)\mathrm{T}$ i $\vec{v} = (10\cos 30, 10\sin 30, 0)$ m/s

Calculem la força magnètica:

$$\vec{F} = \pm q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 1\,10^{-6} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8{,}6 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\left(15\vec{k}\right) \cdot 1\,10^{-6} = 15(-\vec{k})\mu\mathrm{N}$$

De mòdul i direcció F=15 10^{-6} N i sobre l'eix perpendicular al pla del paper i en el sentit entrant.

El vector resultant podem deixar-lo expressat en forma de vector amb tres components, o bé donar-ne el mòdul i la direcció.

Així, podem escriure el vector resultant de la manera següent:

$$\boxed{\vec{F} = (0,0,-15)10^{-6}\ \mathrm{N}}$$

O bé:
El vector força que actua sobre la càrrega puntual és un vector de mòdul **15 10^{-6} N** que és perpendicular al pla del paper i en el sentit entrant.

Tornem-hi…

P.1.1. Una partícula carregada es desplaça per l'interior d'un camp magnètic uniforme sense experimentar cap força. Quina ha de ser la direcció d'aquest camp magnètic?

P.1.2. Una força magnètica que actua sobre una càrrega puntual en moviment realitza treball?

P.1.3. En l'equació $\vec{F} = \pm q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ alguns vectors són sempre perpendiculars entre si; altres no necessàriament ho han de ser. Justifiqueu la resposta.

P.1.4. Un camp magnètic uniforme $\vec{B} = (0,0,0.8)\mathrm{T}$ actua sobre un protó (q_p=+1,6 10^{-19} C) que es desplaça amb una velocitat $\vec{v} = (0,5,0)10^{-6}\,\mathrm{m/s}$. Calculeu la força magnètica que rep la partícula. Sol.: $\vec{F} = 6{,}4\,10^{-13}\,\vec{i}$ N.

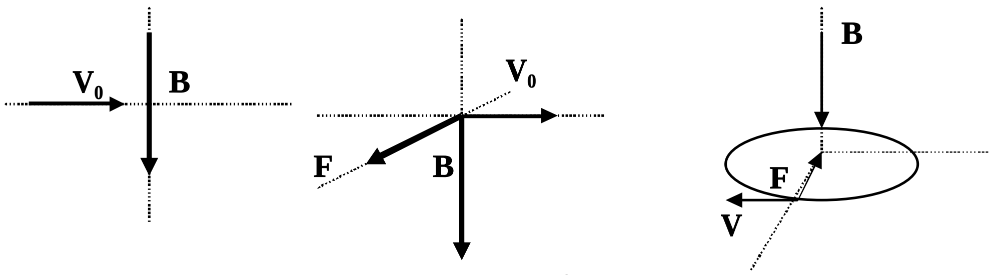
P.1.5. Un camp magnètic uniforme $\vec{B} = (0,0,0.8)\mathrm{T}$ actua sobre un protó ($q_p = +1{,}6$ 10^{-19} C) que es desplaça amb una velocitat $\vec{v} = (5,0,0)10^{-6}\,\mathrm{m/s}$. Calculeu la força magnètica que rep la partícula. Sol.: $\vec{F} = 6{,}4 10^{-13}\vec{j}\ \mathrm{N}$.

P.1.6. Un camp magnètic uniforme $\vec{B} = (0,0,0.8)\mathrm{T}$ actua sobre un protó ($q_p = +1{,}6$ 10^{-19} C) que es desplaça amb una velocitat $\vec{v} = (0,0,5)10^{-6}\,\mathrm{m/s}$. Calculeu la força magnètica que rep la partícula. Sol.: $\vec{F} = (0,0,0)\mathrm{N}$.

P.2. Problemes de moviment d'una càrrega puntual a l'interior d'un camp magnètic uniforme

T.2.1. **Força magnètica sobre una càrrega puntual en moviment**. La força magnètica que actua sobre una càrrega puntual que es mou a l'interior d'un camp magnètic uniforme s'obté a partir de l'expressió $\vec{F} = \pm q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Aquesta força és perpendicular al vector velocitat de la partícula:

En el cas particular que representa la figura (vectors perpendiculars):



Del producte vectorial es dedueix que la força magnètica es dirigeix cap al centre de curvatura i la càrrega, *q*, es trasllada seguint una **trajectòria circular**; en aquest cas, en sentit horari.

Si apliquem la segona llei de Newton, li correspondrà una acceleració, l'acceleració normal, de manera que:

$$\vec{F} = \pm q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \left|\vec{F}\right| = qvB \sin 90 = qvB$$

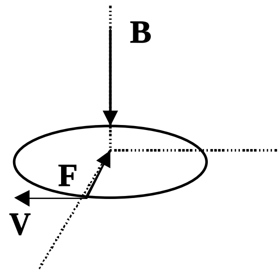
$$qvB = ma_N \qquad (3)$$

T.2.2. **Camps encreuats**. Quan un camp elèctric uniforme se superposa perpendicularment a un camp magnètic uniforme es diu que tenim camps encreuats. Una partícula carregada es mourà en línia recta quan es verifica: $qvB = qE$. La seva velocitat serà:

$$v = \frac{E}{B} \qquad (4)$$

Exercicis

E.2.1. Un electró descriu una òrbita circular amb una velocitat 5 10^6 m/s en un camp magnètic uniforme B = 0,02 T. Si la massa d'electró és de 9,1 10^{-31} kg i la càrrega és de -1,6 10^{-19} C, calculeu:
(a) El mòdul de la força magnètic, tot considerant que la velocitat i el camp magnètic són vectors perpendiculars.
(b) El radi de curvatura.
(c) El període de revolució.



Solució

a) Per calcular la força primer s'han de dibuixar els vectors camp magnètic i velocitat, tot considerant el signe de la càrrega.

Expressem cada vector en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{B} = B\,\vec{u}$; o bé en funció de les seves components cartesianes $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. En el nostre cas, $\vec{B} = (0,\text{-}0.02,0\,)\mathrm{T}$ i $\vec{v}$ = (-5, 0,0)10^{6} m/s

Calculem la força magnètica:

$$\vec{F} = \pm q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -1{,}6 10^{-19} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} 10^{6} = +\left(0{,}1\vec{k}\right) \cdot (-1{,}6 10^{-19}) \cdot 10^{6} = 1{,}6 10^{-14} (-\vec{k})\mathrm{N}$$

De mòdul F=1,6 10^{-14} N

També podem calcular directament el mòdul del vector força si apliquem la definició matemàtica de producte vectorial:

$$\vec{F} = \pm q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \left|\vec{F}\right| = qvB \sin 90 = qvB$$

I per calcular la direcció i el sentit apliquem **la regla de la mà dreta**.

Així, podem escriure que el mòdul del vector resultant correspon a:

$\boxed{F = 1{,}6\ 10^{-14}\ \mathrm{N}}$

b) Per calcular el radi de curvatura de l'òrbita circular descrita per l'electró, apliquem la segona llei de Newton en l'eix radial:

$$F = qvB = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{9{,}110^{-31}\cdot\left(510^6\right)^2}{1{,}610^{-19}\cdot 510^6\cdot 0{,}02} = 1{,}410^{-3}\,\mathrm{m}$$

R= 1,4 mm

c) Per calcular el període hem de recordar que el moviment circular uniforme és un moviment periòdic en el qual es verifica que:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}410^{-3}}{510^6} = 1{,}7610^{-9}\,\mathrm{s}$$

T= 1,76 10^{-9} s

Tornem-hi...

P.2.1. Una partícula amb càrrega elèctrica penetra a l'interior d'un camp magnètic uniforme. Indiqueu quan la trajectòria és circular i quan és helicoïdal.

P.2.2. Un electró penetra perpendicularment dins d'un camp magnètic uniforme, $\vec{B}$, de mòdul 0,02 T, amb una velocitat de 10^5 m/s. Determineu el període de la seva trajectòria circular. Dades: m_e= 9,1 10^{-31} kg; q_e = 1,6 10 $^{-19}$ C. Sol.: 1,79 10^{-9} s.

P.2.3. Un electró penetra perpendicularment dins d'un camp magnètic uniforme, $\vec{B}$, de mòdul 0,04 T, amb una velocitat de 210^5 m/s. Determineu: (a) el radi de la trajectòria circular i (b) el període de la seva trajectòria circular. Dades: m_e= 9,1 10^{-31} kg; q_e = 1,6 10 $^{-19}$ C. Sol.: $2{,}8510^{-5}$m; 8,94 10^{-10} s.

P.2.4. Un electró d'1 eV d'energia gira en òrbita circular plana i horitzontal dins d'un camp magnètic uniforme d'1 10^{-4} T dirigit perpendicularment de dalt cap a baix. Es demana: (a) el radi de l'òrbita de l'electró; (b) el sentit de gir de l'electró i el seu període; dades: m_e= 9,1 10^{-31} kg; q_e = 1,6 10 $^{-19}$ C, 1eV=1,6 10^{-19} J. Sol.: 0,034 m; sentit horari i 3,57 10^{-7}s.

P.2.5. Un electró es mou per una òrbita circular de 0,5 m de radi, perpendicularment a un camp magnètic uniforme de 2,5 T. Determineu: (a) la velocitat angular de l'electró; (b) el període del moviment; (c) l'energia que té expressada en MeV. Dades: m_e= 9,1 10^{-31} kg; q_e = 1,6 10 $^{-19}$ C; 1 eV=$1{,}1610^{-19}$J. Sol.: 0,44 10^{12} rad/s; 14,3 10^{-12}s; 1,38 10^5 MeV.

P.2.6. Al voltant de les estrelles de neutrons hi ha camps magnètics molt intensos. (a) Quant val la freqüència en hertzs d'un protó en un camp magnètic de 10^5 T? (b) Quina ha de ser la velocitat d'un protó perquè pugui descriure una trajectòria circular d'1μm dins d'aquest camp magnètic? Dades: m_p= 1,67 10^{-27} kg, q= 1,60 10^{-19} C. Sol.: 1.525 10^{12} Hz; 9.581 10^6 m/s.

P.2.7. Els valors típics de la pedra en una pedregada són: un pes de 2 g, una càrrega de -7 10^{-12} C i una caiguda en vertical a una velocitat de 80 m/s. A l'atmosfera hi ha presents tres camps diferents: el gravitatori, $\vec{g}$; l'elèctric, $\vec{E}$, i el magnètic $\vec{B}$, que tenen els valors següents: g = 9.8 m/s^2, E = 120 N/C i B = 40mT. Els camps $\vec{g}$ i $\vec{E}$ es dirigeixen verticalment cap avall; en canvi, el camp magnètic $\vec{B}$ és horitzontal i es dirigeix cap al nord. (a) Calculeu la força que fa cadascun d'aquests camps al damunt de la pedra. (b) Podem negligir alguna d'aquestes forces? (c) Esmenteu qualsevol altra força que pugui actuar sobre la pedra. Sol.: F_e=8,4 10^{-10} N, F_g=0,0196 N, F_m=2,24 10^{-11} N.

E.2.2. Si s'acceleren una partícula α i un protó mitjançant una diferència de potencial ΔV i penetren perpendicularment en un camp magnètic uniforme $\vec{B}$, determineu: (a) les relacions entre les energies cinètiques amb què entren en el camp magnètic, (b) la relació entre els radis de les seves trajectòries respectives. Dades: m_p=m; m_α= 4m; q_p=q; q_α=2q.

Solució

a) Per calcular l'energia cinètica de cada partícula hem de recordar que el camp elèctric és un camp conservatiu i, per tant, l'energia mecànica es conserva, o dit d'una altra manera, l'energia potencial es transforma en energia cinètica:

$$\Delta E_{potencial} = q\Delta V \Rightarrow q\Delta V = \Delta E_{cinètica}$$

Si desenvolupem l'expressió anterior per a cada partícula tenim:

$$E_{cinètica,protó} = q\Delta V$$

$$E_{cinètica,\alpha} = 2q\Delta V$$

La relació entre les dues energies cinètiques és: $\dfrac{E_{cinètica,\alpha}}{E_{cinètica,protó}} = 2$

L'energia cinètica de la partícula α és el doble que la del protó.

$$\boxed{E_{cinètica,\alpha}=2\ E_{cinètica\ protó}}$$

b) El radi de la trajectòria correspon a: $R = \dfrac{m \cdot v}{q \cdot B}$; això representa que primer hem d'obtenir una expressió de la velocitat.

Si considerem que l'energia cinètica inicial de les partícules és nul·la.

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \left(\frac{2q\Delta V}{m}\right)^{1/2}$$

Si apliquem l'expressió per a cada partícula tenim:

$$v_{protó} = \left(\frac{2q\Delta V}{m}\right)^{1/2}; v_{\alpha} = \left(\frac{q\Delta V}{m}\right)^{1/2}$$

Aquests valors els substituïm en l'expressió del radi i ens queda:

$$R_{protó} = \frac{m\left(\frac{2q\Delta V}{m}\right)^{1/2}}{qB}; R_{\alpha} = \frac{4m\left(\frac{q\Delta V}{m}\right)^{1/2}}{2qB}$$

I la relació entre radis és $\frac{R_{\alpha}}{R_{protó}} = \sqrt{2}$

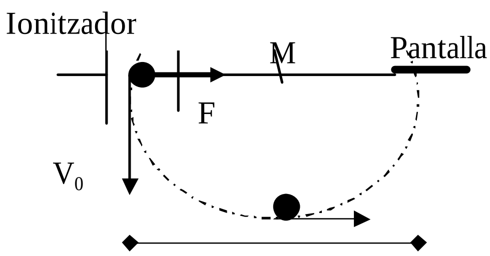
$$\boxed{R_{\alpha}=(2)^{1/2}\,R_{protó}}$$

Tornem-hi...

P.2.8. Si s'acceleren una partícula α i un protó mitjançant una diferència de potencial $\Delta V = 100\,V$ i penetren perpendicularment en un camp magnètic uniforme $|\vec{B}| = 0{,}01T$, determineu: (a) les relacions entre les energies cinètiques amb què entren en el camp magnètic, (b) la relació entre els radis de les seves trajectòries respectives. Dades: m_p=m=1,67 10^{-27} kg; m_{α}= 4m; q_p=q=1,16 10^{-19} C; q_{α}=2q. Sol.: 2 i $\sqrt{2}$.

P.2.9. Si s'acceleren una partícula δ i un protó mitjançant una diferència de potencial $\Delta V = 100\,V$ i penetren perpendicularment en un camp magnètic uniforme $|\vec{B}| = 0{,}01T$, determineu: (a) les relacions entre les energies cinètiques amb què entren en el camp magnètic, (b) la relació entre els radis de les seves respectives trajectòries. Dades: m_p=m=1,67 10^{-27} kg; m_{δ}= 4m; q_p=q=1,16 10^{-19} C; q_{δ}=4q. Sol.: 4 i 1.

P.2.10. En una cambra d'ionització s'injecta hidrogen i s'obtenen ions H_2^+ que posteriorment s'acceleren mitjançant una diferència de potencial ΔV i penetren a l'interior d'un camp magnètic uniforme $\vec{B}$ perpendicular a la velocitat dels ions $\vec{v}_0$. Es demana: (a) el sentit del camp magnètic si el detector d'ions es troba a la dreta de la cambra d'ionització; (b) si el detector es troba a 20 cm del punt de sortida dels ions, calculeu la diferència de potencial que s'ha de d'aplicar als ions, ΔV, perquè



arribin al detector. Dades: B=0,08 T, m=3,34 10^{-27} kg. Sol.: perpendicular al pla del paper i endins; 1533 V

d=20 cm

P.2.11. En una regió on hi ha un camp elèctric uniforme $\vec{E} = 1000\vec{k}\,V/m$ (vertical ascendent) i un camp magnètic $\vec{B} = 0{,}5\vec{j}\,T$ (horitzontal cap a la dreta) penetra un protó perpendicularment a tots dos camps i s'observa que no es desvia. Determineu el vector velocitat del protó. Sol.: $\vec{v} = (-2000{,}0{,}0)m/s$.

d=20 cm

P.2.12. En una regió on hi ha un camp elèctric uniforme $\vec{E} = 2000\vec{k}\,V/m$ (vertical ascendent) i un camp magnètic $\vec{B} = 1\vec{j}\,T$ (horitzontal cap a la dreta) penetra un protó perpendicularment a tots dos camps, i s'observa que no es desvia. Determineu el vector velocitat del protó. Sol.: $\vec{v} = (-2000{,}0{,}0)m/s$.

P.2.13. Un protó, després de ser accelerat per una diferència de potencial de 25000 V, penetra perpendicularment en un camp magnètic uniforme i descriu una trajectòria circular de 40 cm de radi. Determineu: (a) la intensitat de camp magnètic, (b) el radi de la trajectòria per a un valor doble de la intensitat de camp magnètic. Sol.: 0,057 T, 20 cm.

P.3. Càlcul de la força magnètica sobre un fil conductor rectilini

T.3.1. **Força magnètica sobre un fil conductor rectilini en el qual circula una intensitat I**. La força magnètica que actua sobre un fil conductor pel qual circula una intensitat I quan es troba a l'interior d'un camp magnètic uniforme s'obté a partir de l'expressió:

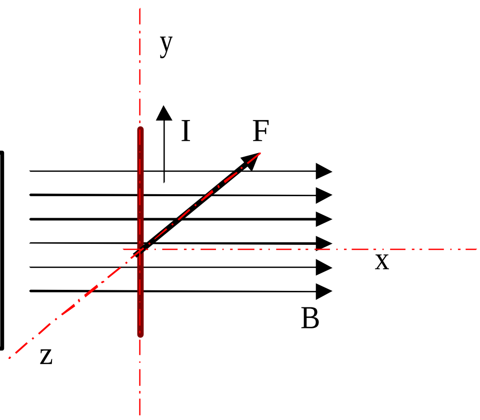
$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \qquad (5)$$

On $\vec{l}$ té la direcció i el sentit de la intensitat del corrent

Fixeu-vos que $\vec{F}$ és perpendicular al pla format per $\vec{l}$ i $\vec{B}$.

Exercicis

E.3.1. Un corrent de 5 A recorre una vareta d'1 m de longitud perpendicular a un camp magnètic uniforme de 0,005 T. Determineu la força magnètica que actua sobre la vareta.



Solució

Per calcular la força, primer s'han de dibuixar els vectors camp magnètic i longitud, aquest últim considerant el sentit de la intensitat del corrent.

Expressem cada vector en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{B} = B\,\vec{u}$; o bé en funció de les seves components cartesianes $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$. En el nostre cas, $\vec{B} = (5,0,0)10^{-3}\,T$ i $\vec{l} = (0,1,0)\quad m$.

Calculem la força magnètica:

$$\vec{F} = I\cdot\vec{l}\times\vec{B} = 5\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}10^{-3} = -\left(5\vec{k}\right)\cdot(5)\cdot10^{-3} = 25 10^{-3}(-\vec{k})N$$

De mòdul F=0,025 N

També podem calcular directament el mòdul del vector força si apliquem la definició matemàtica de producte vectorial:

$\vec{F} = I\cdot\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow \left|\vec{F}\right| = IlB\sin 90 = IlB$

I per calcular la direcció i el sentit apliquem **la regla de la mà dreta**.

Així, podem escriure que el mòdul del vector resultant correspon a:

$$\boxed{F = 0{,}025\ N}$$

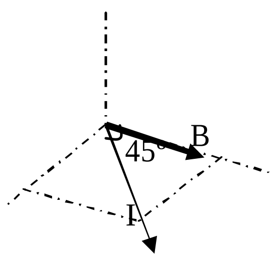
Tornem-hi...

P.3.1. Un corrent d'1 A recorre una vareta de 10 m de longitud perpendicular a un camp magnètic uniforme de 0,05 T. Determineu el vector força magnètica que actua sobre la vareta. Sol.: $\vec{F} = 0{,}5(-\vec{k})N$.

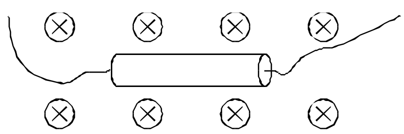
P.3.2. Un corrent de 10 A recorre una vareta de 5 m de longitud perpendicular a un camp magnètic uniforme de 0,5 T. Determineu el vector força magnètica que actua sobre la vareta. Sol.: $\vec{F} = 25(-\vec{k})N$.

P.3.3. Per un conductor de 0,5 m de longitud situat en l'eix de les Y circula un corrent d'1 A en el sentit positiu de l'eix. Si el conductor es troba a l'interior d'un camp magnètic uniforme definit per $\vec{B} = (1{,}0{,}3)10^{-2}\ T$, calculeu la força que actua sobre el conductor. Sol.: 1,6 10^{-2} N.

P.3.4. Un conductor de 0,2 m de longitud situat en un camp magnètic B=0,5 T forma amb el camp un angle de 45º. (a) Calculeu la força que actua sobre el conductor. (b) Representeu la variació de força magnètica en funció de l'angle. Sol.: 0,21 N; F(ϕ)=0,3 sinϕ.



P.3.5. Col·loquem una vareta conductora perpendicular a un camp magnètic $\vec{B}$ de mòdul 200 mT



(vegeu la figura). La densitat de massa de la vareta és $\rho = 2{,}7 \quad 10^{-3} \quad kg/m^3$ i la seva secció és d'àrea A = 100 mm^2. Els extrems de la vareta estan connectats a dos fils flexibles pels quals passa un corrent d'intensitat *I*, de manera que la força magnètica compensa el pes de la vareta. (a) Determineu la intensitat. (b) Quin sentit té el corrent? Sol.: 13.23 μA.; d'esquerra a dreta.

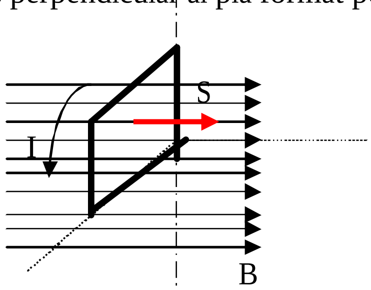
P.4. Càlcul del moment del parell de forces magnètiques sobre una espira conductora

T.4.1. **El moment del parell de forces magnètiques sobre una espira conductora per la qual circula una intensitat I.** El moment magnètic que actua sobre una espira d'àrea S, per la qual circula una intensitat de corrent I, col·locada a l'interior d'un camp magnètic uniforme s'obté a partir de l'expressió:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B} \qquad (6)$$

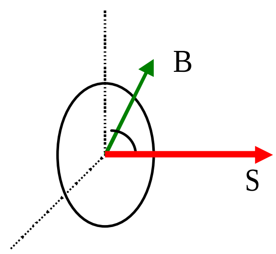
On $\vec{S}$ té la direcció perpendicular al pla de l'espira i el sentit definit per la regla de la mà dreta. Aquest moment resultant origina una rotació.

Fixeu-vos que $\vec{F}$ és perpendicular al pla format per $\vec{S}$ i $\vec{B}$.



Exercicis

E.4.1. Una espira plana de 0,03 m de radi se situa a l'interior d'un camp magnètic de 0,6 T. Calculeu el moment del parell de forces que actuen sobre l'espira d'intensitat 4 A si el camp magnètic forma un angle de 60° amb la perpendicular al pla de l'espira.



Solució

Per calcular el moment del parell de forces s'han de dibuixar els vectors camp magnètic i superfície, aquest últim considerant que és perpendicular al pla de l'espira.

Expressem cada vector en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{B} = B\,\vec{u}$; o bé en funció de les seves components cartesianes $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$. En el nostre cas $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)T$ i $\vec{S} = (S, 0,0)\quad m^2$.

Calculem la força magnètica:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B} = 4\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ S & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{bmatrix}1 = SB_y\left(\vec{k}\right) \cdot 4 = 4SB_y(\vec{k})N \cdot m$$

Anem a calcular el mòdul del vector superfície. Com que es tracta d'una superfície circular ,tindrem: $S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}03)^2 = 0{,}0028 m^2$, i la component *Y* del camp serà: $B_y = B \sin 60 = 0{,}6 \cdot 0{,}87 = 0{,}52T$.

Si substituïm en l'expressió de càlcul del moment ens queda $\vec{M} = 5{,}81 \cdot 10^{-2}(\vec{k})N \cdot m$.

També podem calcular directament el mòdul del vector moment si apliquem la definició matemàtica de producte vectorial:
$\vec{F} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B} \Rightarrow \left|\vec{M}\right| = ISB \sin 60$

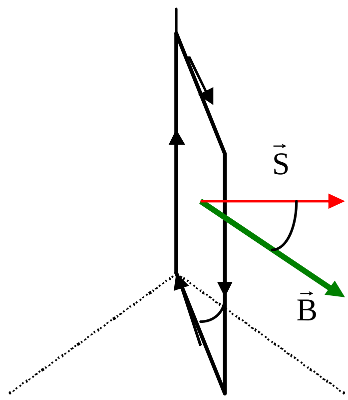
I per calcular la direcció i el sentit apliquem **la regla de la mà dreta**.

Així, podem escriure que el mòdul del vector resultant correspon a:

M= 5,81 10^{-2} N.m

Tornem-hi...

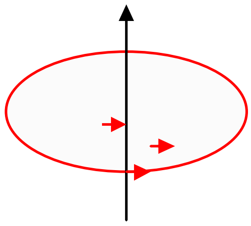
P.4.1. Una espira rectangular de 0,1m x 0,25m pot girar al voltant de l'eix *z*, i es troba en una regió de camp magnètic uniforme de 0,01 T i paral·lel a l'eix de la *y*: $\vec{B} = 0{,}01(\vec{j})T$. Si per l'espira hi circula una intensitat de 5 A, es demana: (a) determineu el valor i la direcció de la força que actua en cadascun dels segments de l'espira; (b) determineu el moment del parell de forces que actuen sobre l'espira; (c) per a quina orientació de l'espira serà màxim el parell de forces? Sol.: 0,006 N; 0,005 N; 1,08 10^{-3} Nm; pla de l'espira normal a B.



P.5. Problemes de fonts de camp magnètic

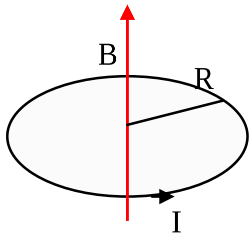
T.5.1. **Camp magnètic originat per un conductor rectilini de longitud infinita**. Quan un corrent elèctric circula a través d'un conductor rectilini, genera un camp magnètic circular amb centre en el mateix conductor. El sentit de les línies de camp es determina aplicant **la regla de la mà dreta**.

$$\vec{B} = 4\pi 10^{-7}\frac{I}{2\pi r}\vec{u}_t \qquad (7)$$



On *r* és la distància perpendicular del punt al conductor, és a dir, és el radi de la línia circular corresponent;
I és la intensitat de corrent que circula pel conductor;
$\vec{u}_t$ és el vector unitari tangent a la línia de camp en el punt.

T.5.2. **Camp magnètic originat per un conductor circular (espira)**. Quan un corrent elèctric circula a través d'una espira, genera un camp magnètic perpendicular al pla de l'espira i important en el seu centre El sentit de $\vec{B}$ s'obté aplicant la **regla de la mà dreta**. El mòdul d'aquest camp magnètic és directament proporcional a la intensitat del corrent i inversament proporcional al radi de l'espira.



L'expressió de càlcul correspon a:

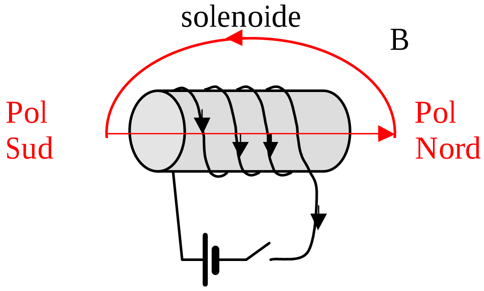
$$\vec{B} = 4\pi 10^{-7}\frac{I}{2R}\vec{u}_\perp \qquad (8)$$

On R és el radi de l'espira;
I és la intensitat del corrent;
$\vec{u}_\perp$ és el vector unitari perpendicular al pla de l'espira.

T.5.3. **Definició de solenoide**. Un solenoide és un cos format per un conjunt de corrents elèctrics circulars, plans, iguals i pròxims uns als altres. Quan en un solenoide circula una intensitat de corrent *I*, es comporta com un imant, amb totes les característiques pròpies dels imants; per exemple, presenta una doble polaritat.

T.5.4. **Camp magnètic en l'interior d'un solenoide**. Quan un corrent elèctric circula a través d'un solenoide, genera un camp magnètic per l'interior que va des del pol sud fins al pol nord, i el circuit magnètic es tanca per l'exterior del solenoide des del pol nord fins al pol sud. L'expressió de càlcul del mòdul del vector $\vec{B}$ correspon a :

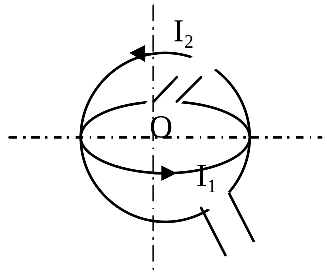
$$\vec{B} = 4\pi 10^{-7}\frac{N \cdot I}{l}\vec{u}_\perp \qquad (9)$$



On N és el nombre d'espires;
l la longitud de la bobina en metres;
I la intensitat del corrent;
$\vec{u}_\perp$ és el vector unitari perpendicular al pla del solenoide i definit per la **regla de la mà dreta**

Exercicis

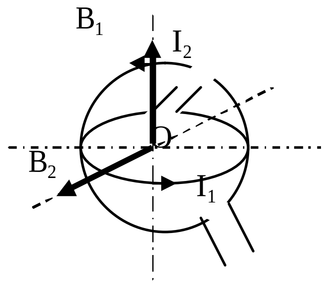
E.5.1. Tenim dues espires conductores de radis iguals, col·locades en plans perpendiculars i amb centre comú. Les recorren intensitats de I_1= 6 A i I_2=8 A. Calculeu el mòdul i la direcció del camp magnètic en el punt O. Radi de les espires: R=4p cm



Solució

Per calcular el camp magnètic resultant en el punt O s'han de dibuixar els vectors camp magnètic originats per cada una de les espires de forma independent. Recordeu-vos que el camp magnètic és perpendicular al pla de l'espira i de sentit definit per la regla de la mà dreta.

Expressem cada vector en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{B} = B\,\vec{u}$; o bé en funció de les seves components cartesianes $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. En el nostre cas, $\vec{B}_1 = (0, B_1, 0)$ T i $\vec{B}_2 = (0, 0, B_2)$ T.



Calculem els mòduls dels vectors intensitat de camp magnètic :

$$\vec{B}_1 = 4\pi 10^{-7}\frac{I}{2R}\vec{u}_\perp \Rightarrow B_1 = 4\pi 10^{-7}\frac{6}{4\pi 10^{-2}\cdot 2} = 310^{-5}\,\mathrm{T}$$

i

$$\vec{B}_2 = 4\pi 10^{-7}\frac{I}{2R}\vec{u}_\perp \Rightarrow B_2 = 4\pi 10^{-7}\frac{8}{4\pi 10^{-2}\cdot 2} = 410^{-5}\,\mathrm{T}$$

Si apliquem el principi de superposició, podrem obtenir l'expressió del camp magnètic resultant en el punt O:

$$\vec{B}_{T,O} = \vec{B}_{1,O} + \vec{B}_{2,O} = (0,3,0)10^{-5} + (0,0,4)10^{-5} = (0,3,4)10^{-5}\,\mathrm{T}$$

Podem escriure que el mòdul del vector resultant correspon a:

$$\boxed{B = 10^{-5}\sqrt{3^2 + 4^2} = 510^{-5}\,\mathrm{T}}$$

Tornem-hi...

P.5.1. Calculeu la intensitat de camp magnètic en el centre d'una espira de 32 cm de radi si el corrent és de 4 A. Sol.: 7,8 µT.

P.5.2. Calculeu la intensitat de camp magnètic en el centre d'una espira de 20 cm de radi si el corrent és de 4 A. Sol.: 0,125 µT.

P.5.3. Calculeu la intensitat de corrent que circula per un fil conductor semicircular de 80 cm de radi si en el seu centre hi ha un camp magnètic de 2 μT. Sol.: 5 A.

P.5.4. Calculeu la intensitat de corrent que circula per un fil conductor semicircular de 80 cm de radi si en el seu centre hi ha un camp magnètic de 4 μT. Sol.: 10 A.

P.5.5. Determineu la intensitat de camp magnètic en un punt situat a 10 cm d'un conductor rectilini molt llarg pel qual circula un corrent de 8 A. Sol.: 16 μT.

P.5.6. Trobeu la intensitat de corrent que circula per un fil rectilini llarg si a la distància de 56 cm hem mesurat un camp magnètic de $3\ 10^{-6}$ T. Sol.: 8,4 A.

P.5.7. Trobeu la intensitat de corrent que circula per un fil rectilini llarg si a la distància de 28 cm hem mesurat un camp magnètic de $6\ 10^{-6}$ T. Sol.: 8,4 A.

P.5.8. Calculeu la intensitat de camp magnètic a l'interior d'un solenoide de 2000 espires, 0,80 m de longitud i un radi de 0,04 m si hi circula una intensitat d'1,8 A. Sol.: 5,65 mT.

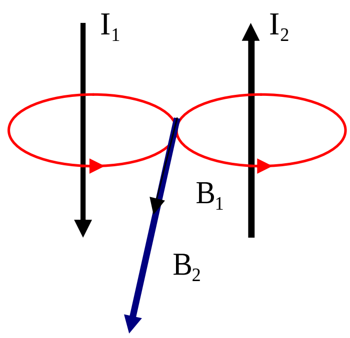
P.5.9. Calculeu la intensitat de camp magnètic a l'interior d'un solenoide de 4000 espires i un radi de 0,04 m si hi circula una intensitat d'1,8 A. Sol.: 11,30 mT.

P.6. Problemes bàsics de càlcul simultani de fonts de camp magnètic i accions

Exercicis

E.6.1. Dos fils conductors rectilinis, paral·lels i indefinits, pels quals circulen corrents de 2 A i 4 A en sentit contrari, estan separats per una distància de 60 cm. Calculeu el valor de la intensitat de camp magnètic en un punt P situat entre els dos fils, en el pla definit per tots dos i a 30 cm del primer.

Solució



Per calcular el camp magnètic resultant en el punt P és necessari dibuixar els vectors camp magnètic originats per cada una dels fils conductors de forma independent. Recordeu-vos que el camp magnètic originat per un fil conductor de longitud infinita és tangencial en el punt a la superfície circular. El radi d'aquesta superfície circular és la distància perpendicular del punt al fil conductor.

Expressem cada vector en funció del mòdul i del seu vector unitari, $\vec{B} = B\,\vec{u}$; o bé en funció de les seves components cartesianes $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. En el nostre cas $\vec{B}_1 = (0,0,B_1)$ T i $\vec{B}_2 = (0,0,B_2)$ T.

Calculem els mòduls dels vectors intensitat de camp magnètic:

$$\vec{B}_1 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{I}{2\pi R}\,\vec{u}_t \Rightarrow B_1 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{2}{30 10^{-2}\cdot 2\pi} = \_\_\_\_\ 10^{-6}\,T$$

i

$$\vec{B}_2 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{I}{2\pi R}\,\vec{u}_t \Rightarrow B_2 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{4}{30 10^{-2}\cdot 2\pi} = \_\_\_\_\ 10^{-6}\,T$$

Si apliquem el principi de superposició, podrem obtenir l'expressió del camp magnètic resultant en el punt O:

$$\vec{B}_{T,O} = \vec{B}_{1,O} + \vec{B}_{2,O} = (0,0,---)10^{-6} + (0,0,---)10^{-6} = (0,0,---)10^{-6}\,T$$

Així, podem escriure que el mòdul del vector resultant correspon a:

B= ---------10^{-6} T=------µT

Tornem-hi...

P.6.1. Considereu el camp magnètic en punts situats entre dos fils llargs, rectes i paral·lels amb corrent. En quin cas és més gran el camp, per a corrents del mateix sentit o per a corrents de sentit oposat? Expliqueu la resposta. En cada cas, en quins punts es més gran el camp magnètic? i en quin punts és més petit?

P.6.2. Entre dos fils rectilinis paral·lels i indefinits hi circulen intensitats de corrent de 5 A i 1 A en el mateix sentit. Si els fils estan separats per una distància de 4 cm, calculeu la intensitat de camp magnètic en un punt situat entre els dos fils, en el pla que els conté i equidistant de tots dos. Sol.: 40µT.

P.6.3. Dos fils conductors rectilinis, paral·lels i indefinits, pels quals circulen corrents de 2 A i 4 A en el mateix sentit, estan separats per una distància de 60 cm. Calculeu el valor de la intensitat de camp magnètic en un punt P situat entre els dos fils, en el pla definit per tots dos i a 20 cm del primer. Sol.: 0 T.

P.6.4. Dos fils conductors rectilinis, paral·lels i indefinits, pels quals circulen corrents de 2 A i 3 A en sentits oposats, estan separats per una distància de 20 cm. Calculeu el valor de la intensitat de camp magnètic en un punt P situat entre els dos fils, en el pla definit per tots dos i a 7 cm del primer. Sol.: 10 µT.

P.4.2. Un solenoide ha estat bobinat erròniament de la manera següent: una capa de voltes ha estat bobinada en forma d'espiral a dretes, i a sobre s'hi ha bobinat una segona capa de voltes. Quan es fa passar un corrent *I* pel solenoide, el camp magnètic en els punts interiors pròxims a l'eix és pràcticament zero. Expliqueu per què succeeix aquest fet.

P.6.5. Per dos fils conductors paral·lels i rectilinis, hi circulen corrents de 2A i 3A en sentits oposats. Si estan separats per 0,12 m, calculeu la força que s'exerceixen mútuament per unitat de longitud i digueu si és atractiva o repulsiva. Sol.: 1 10^{-5} N/m, repulsiva.

P.6.6. Per dos fils conductors paral·lels i rectilinis, hi circulen corrents de 2A i 5A en el mateix sentit. Si estan separats 0,10 m, calculeu la força que s'exerceixen mútuament per unitat de longitud i digueu si és atractiva o repulsiva. Sol.: 2 10^{-5} N / m, d'atracció.

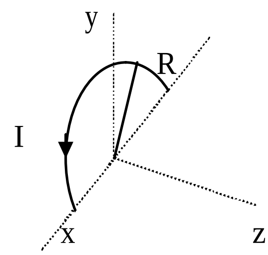
P.6.7. Quina direcció té la força magnètica que fa un fil llarg i recte sobre un altre fil paral·lel quan ambdós tenen corrents en el mateix sentit? I quan els corrents tenen sentits oposats?

P.6.8. En quines condicions dos fils conductors rectilinis, paral·lels i de longitud infinita s'atreuen? En quines condicions es repel·leixen?

P.6.9. Per dos conductors rectilinis, paral·lels i indefinits, hi circulen corrents d'intensitat I_1 i I_2 en sentits oposats. Si $I_1=2I_2$, determineu en quins punts el camp magnètic és nul.

P.6.10. Per una barra horitzontal hi circula un corrent de 200 A. Es demana el valor de la intensitat de corrent que hauria de passar per un fil conductor col·locat paral·lelament a la barra i a 5 cm de distància per sota d'aquesta, si cada metre d'aquest fil té 80 g de massa i volem que s'aguanti sense caure. Sol.: 1000 A.

E.6.2. Calculeu el camp magnètic en el centre d'un conductor en forma de semicircumferència, de 10 cm de radi, pel qual circula un corrent de 2 A.



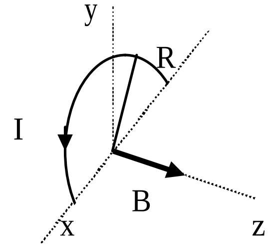
Solució

Per calcular el camp magnètic resultant en el centre de la semicircumferència és necessari dibuixar els vectors camp magnètic originat aplicant **la regla de la mà dreta**. Seguidament recordarem l'expressió de camp magnètic degut a una espira circular:

$$\vec{B}_{cercle} = 4\pi 10^{-7}\,\frac{I}{2R}\,\vec{u}_{\perp}$$

Com que la causa de camp correspon a la meitat de l'expressió anterior, tenim que per a un semicercle de radi R, el camp magnètic originat en el seu centre és:

$$\vec{B}_{semicercle} = \frac{\vec{B}_{cercle}}{2} = 4\pi 10^{-7}\,\frac{I}{4R}\,\vec{u}_{\perp}$$



Si substituïm els valors numèrics de l'enunciat ens queda:

$$\vec{B}_{semicercle} = 4\pi 10^{-7}\,\frac{I}{4R}\,\vec{u}_{\perp} \Rightarrow B = 4\pi 10^{-7}\,\frac{2}{4\cdot 0{,}1} = 6{,}28\cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

El mòdul del vector resultant correspon a:

B= 6,28 10^{-6} T=------μT

Tornem-hi...

P.6.11. Calculeu el camp magnètic en el centre d'un conductor en forma de semicircumferència, de 10 cm de radi, pel qual circula un corrent d'1 A. Sol.: 3,14 μT.

P.6.12. Per un solenoide de 50 cm de longitud format per 500 espires hi circula un corrent de 2 A. (a) Calculeu el camp magnètic que hi ha a l'interior del solenoide. (b) En el forat del solenoide hi col·loquem un conductor rectilini de 30 cm de longitud, paral·lel a l'eix del solenoide i amb una intensitat de 2 A. Quina és la força que fa el solenoide sobre el conductor? Sol.: 2,5 mT,0 N.

P.6.13. A l'interior d'un solenoide hi ha un camp magnètic de 0,6 T. En el forat del solenoide hi col·loquem un conductor rectilini de 30 cm de longitud, paral·lel a l'eix del solenoide i amb una intensitat de 4 A. (a) Quina és la força que el solenoide fa sobre el conductor? (b) Quina és la força quan el conductor forma un angle de 30º amb l'eix del solenoide? Sol.: 0 N; 0,36 N.

P.7. Problemes bàsics d'inducció electromagnètica

T.7.1. **Flux magnètic**. És el nombre de línies de camp que travessen una superfície onada, S, col·locada perpendicularment a aquestes línies de camp. L'expressió matemàtica correspon a:

$$\phi = \vec{B} \circ \vec{S} = BS\cos\beta \qquad (10)$$

On ß és l'angle que formen el vector superfície i el vector intensitat de camp magnètic. Les unitats del flux magnètic són $T.m^2$=weber=Wb. En els problemes que hi ha a continuació varia l'angle o bé la superfície.

T.7.2. **Flux magnètic que travessa un solenoide**. El flux magnètic que circula a través d'un solenoide és igual al producte de l'àrea del solenoide per la component perpendicular del camp magnètic uniforme multiplicat pel nombre d'espires N.

T.7.3. **Força electromotriu induïda**. Si el camp magnètic que travessa un solenoide varia en funció del temps, s'indueix en el solenoide o bobina una força electromotriu. La magnitud de la força electromotriu induïda és igual a la celeritat en què canvia el flux que travessa la bobina: $\in = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$

T.7.4. **Llei de la inducció de Faraday. Llei de Lenz**. L'expressió anterior es coneix com a llei de la inducció de Faraday. El signe menys ens indica que aquesta força electromotriu induïda sempre és oposada a la causa que l'origina (llei de Lenz) $\in = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$ (11)

T.7.5. **Deduccions a partir de la llei de Faraday**

1. (Variacions en l'àrea tancada). Un filferro prim de longitud *l* que es mou a l'interior d'un camp magnètic uniforme, *B*, amb una velocitat, *v*, i perpendicular a aquest camp, té una força electromotriu induïda en els seus extrems que s'obté a partir de l'expressió:

$$\in = B \cdot l \cdot v \qquad (12)$$

2. (Camp magnètic en funció del temps). Quan el camp magnètic varia en funció del temps es pot obtenir una expressió a partir de la llei de Faraday que ens permet obtenir la força electromotriu induïda:

$$\in = -N\frac{S(\Delta B)}{\Delta t}; \qquad \lim_{\Delta t \to 0}\left[-NS\frac{\Delta B}{\Delta t}\right] = -NS\frac{dB}{dt}$$

El signe menys correspon a **la llei de Lenz**.

Exercicis

E.7.1. Una bobina plana de 40 espires i una superfície de 0,04 m² es troba dins d'un camp magnètic uniforme de 0,2 T i perpendicular a l'eix de la bobina, si gira en 0,2 s fins que el camp és paral·lel a l'eix de la bobina. Calculeu la força electromotriu induïda.

Solució

Per calcular la força electromotriu ens hem de fixar si hi ha una variació de flux en funció del temps. En aquest cas és afirmatiu. Seguidament, escrivim l'expressió de la llei de Faraday corresponent: $\in = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$.

En l'expressió apareix el terme de variació de flux com: $\Delta\phi = \phi_F - \phi_0$. Hem de calcular quin és el flux inicial, ϕ_0 i el flux final, ϕ_F, en la bobina formada per N espires

$\phi_0 = N\vec{B} \circ \vec{S} = NBS\cos 90 = 0$ perquè els dos vectors són perpendiculars.

Per al flux final: $\phi_F = N\vec{B} \circ \vec{S} = NBS\cos 0 = 40 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}2 = 0{,}32\,Wb$

La celeritat de flux per una espira correspon a: $\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{0{,}32 - 0}{0{,}2} = 1{,}6\frac{Wb}{s}$

$\in = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \in = 1{,}6 = 1{,}6V$ oposada a la causa que l'origina (llei de Lenz).

Així, podem respondre que el valor numèric de la força electromotriu induïda originada per la variació de flux correspon a:

$$\boxed{\in = 1{,}6\ V = 1{,}6\ J/C}$$

Tornem-hi...

P.7.1. Una espira de 0,5 m^2 d'àrea es troba en l'interior d'un camp magnètic uniforme de 0,02 T. Calculeu el flux que travessa l'espira quan: (a) es troba perpendicularment al camp; (b) el pla de l'espira forma un angle de 60º amb el camp magnètic. Sol.: 0,01 Wb; 9 mWb.

P.7.2. Tenim un solenoide de 500 espires enrotllades en un nucli de ferro de 30 cm de longitud i una secció transversal de 0,05 m^2. Pel fil circula un corrent de 0,02 A. Calculeu (a) el camp magnètic a l'interior de la bobina o solenoide, (b) el flux magnètic que travessa la bobina. Sol.: 1,14 10^{-4} T; 2,86 10^{-3} Wb.

P.7.3. Tenim un solenoide de 500 espires enrotllades en un nucli de ferro de 30 cm de longitud i una secció transversal de 0,05 m^2. Pel fil circula un corrent de 0,02 A. Calculeu (a) el camp magnètic a l'interior de la bobina o solenoide, (b) el flux magnètic que travessa la bobina. Nota: μ_{ferro}=350→350·4p10^{-7} (S.I) Sol.: 0,04 T; 1 Wb.

P.7.4. Una bobina plana de 40 espires i una superfície de 0,04 m^2 es troba dins d'un camp magnètic uniforme de 0,1 T i perpendicular a l'eix de la bobina. Si gira en 0,2 s fins que el camp és paral·lel a l'eix de la bobina, calculeu la força electromotriu induïda. Sol.: 0,8 V.

P.7.5. Una bobina plana de 80 espires i una superfície de 0,04 m^2 es troba dins d'un camp magnètic uniforme de 0,2 T i perpendicular a l'eix de la bobina. Si gira en 0,2 s fins que el camp és paral·lel a l'eix de la bobina, calculeu la força electromotriu induïda. Sol.: 3,2 J/C.

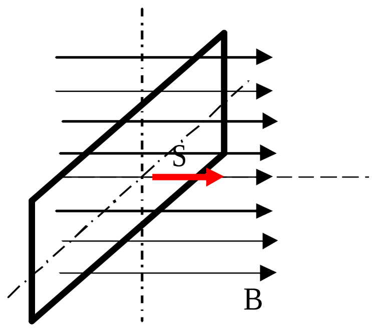
P.7.6. Una bobina plana de 200 espires i un radi de 0,08 m es col·loca perpendicularment a les línies d'un camp magnètic uniforme de 0,8 T. Calculeu la força electromotriu induïda en la bobina, si en 0,2 s: (a) la bobina gira un angle de 90º; (b) si gira 180º Sol.: 16,08 V; 32,16 V.

Exercicis

E.7.2. Una bobina plana quadrada de 10 espires i de 12 cm de costat, gira a velocitat angular constant en un camp magnètic uniforme de 3 T. Es demana:
(a) Dibuixeu la direcció del vector superfície respecte al camp magnètic perquè la força electromotriu induïda sigui màxima.
(b) En aquest cas el valor màxim de la força electromotriu induïda és de 2,4 V. Quina és la seva velocitat de rotació?

Solució

a) Dibuixarem el vector superfície considerant que ha de ser perpendicular al pla de l'espira i amb un sentit definit per la regla de la mà dreta.



El flux que travessa les N espires correspon a:

$$\phi = N\vec{B} \circ \vec{S} = NBS\cos\beta$$

L'angle ß és l'angle que forma el vector intensitat de camp magnètic i el vector superfície, però també és l'espai angular que recorre el vector superfície en girar l'espira amb una velocitat angular ? , és a dir ϕ = ? t.

Si substituïm en l'expressió anterior ens queda que:

$$\phi = N\vec{B} \circ \vec{S} = NBS\cos\beta = NBS\cos\omega t$$

Per calcular la força electromotriu ens hem de fixar si hi ha una variació de flux en funció del temps. En aquest cas és afirmatiu.

Seguidament, escrivim l'expressió de la llei de Faraday corresponent: $\in = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$.

En l'expressió apareix el terme de variació de flux com: $\Delta\phi = \phi_F - \phi_0$. Hem de calcular aquesta variació per a valors molt petits de temps, és a dir:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d(NBS\cos\omega t)}{dt} = -NBS\omega\sin\omega t$$

Fixeu-vos que és una funció sinusoïdal amb valor absolut: $NBS\omega\sin\omega t$.

Si substituïm ara en la llei de Faraday:

$$\in = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -(-NBS\omega\sin\omega t) = NBS\omega\sin\omega t$$

El valor màxim de la funció és NBS? . Si ara considerem les dades de l'enunciat que ens dóna el valor màxim de la força electromotriu induïda tenim:

$$\in_{màxim} = NBS\omega \Rightarrow 2{,}4 = 10\cdot 3\cdot (0{,}12)^2\,\omega$$

$$\omega = 5{,}56 \text{ rad/s}$$

Així, podem donar la resposta:

$$\boxed{? = 5{,}56 \text{ rad/s} = 5{,}56 \text{ s}^{-1}}$$

Tornem-hi...

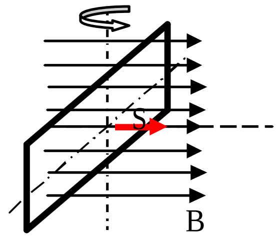
P.7.7. Una bobina gira a l'interior d'un camp magnètic uniforme de 0,4 T a una velocitat de 20 rad/s. Si el radi de la bobina és de 6 cm i el nombre d'espires és 100, calculeu la força electromotriu màxima induïda. Sol.: 9,04 V.

P.7.8. Una bobina gira a l'interior d'un camp magnètic uniforme de 0,2 T a una velocitat de 20 rad/s. Si el radi de la bobina és de 6 cm i el nombre d'espires és 100, calculeu la força electromotriu màxima induïda. Sol.: 4,52 V.

P.7.9. Una bobina gira a l’interior d’un camp magnètic uniforme de 0,2 T a una velocitat de 40 rad/s. Si el radi de la bobina és de 6 cm i el nombre d’espires és 100, calculeu la força electromotriu màxima induïda. Sol.: 9,04 V.

P.7.10. Una bobina de 1500 espires és travessada per un flux magnètic que varia a raó de 0,25 Wb per cada 5 s. Calculeu la força electromotriu induïda que es genera a la bobina. Sol.: 75 V.

P.7.11. Un bobinatge pla, de gruix negligible, que té 50 espires i 100 cm^2 d’àrea per espira, està situat, inicialment, de manera que el seu pla és perpendicular a un camp magnètic uniforme i estàtic de 0,1 T. Se’l fa girar a una velocitat constant de 10 voltes/s al voltant d’un eix que conté el seu pla i perpendicular al camp magnètic. Calculeu la força electromotriu induïda en funció del temps. Sol.: 3,14 sin20pt (SI).



P.7.12. Si es mou una espira paral·lelament al seu pla a l’interior d’un camp magnètic uniforme, indiqueu si s’origina una força electromotriu en l’espira. Sol.: No, perquè…

P.7.13. Una bobina plana quadrada de 5 espires i de 12 cm de costat gira a una velocitat angular constant en un camp magnètic uniforme de 3 T. Es demana:

(a) Dibuixeu la direcció del vector superfície respecte al camp magnètic perquè la força electromotriu induïda sigui màxima.

(b) En aquest cas el valor màxim de la força electromotriu induïda és de 2,4 V. Quina és la seva velocitat de rotació? Sol.: 11,12 rad/s.

P.7.14. Una bobina plana quadrada de 20 espires i de 12 cm de costat gira a una velocitat angular constant en un camp magnètic uniforme de 3 T. Es demana:

(a) Dibuixeu la direcció del vector superfície respecte al camp magnètic perquè la força electromotriu induïda sigui màxima.

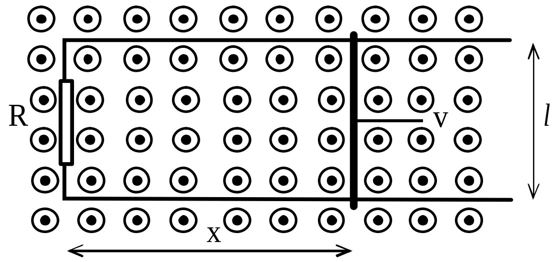
(b) En aquest cas el valor màxim de la força electromotriu induïda és de 2,4 V. Quina és la seva velocitat de rotació? Sol.: 2,78 rad/s.

P.7.15. La bobina d’un alternador consta de 25 espires de 60 cm^2 i gira amb una freqüència de 50 Hz en un camp magnètic uniforme de 0,4 T. Calculeu: (a) la força electromotriu induïda en funció del temps; (b) la força electromotriu màxima; (c) la intensitat màxima del corrent induït si la bobina i el circuit exterior sumen una resistència de 75 O. Sol.: 6psin(100pt) V; 18,8 V; 0,25 A.

P.7.16. La bobina d’un alternador consta de 30 espires de 40 cm^2 i gira amb una freqüència de 50 Hz en un camp magnètic uniforme de 0,3 T. Calculeu: (a) la força electromotriu induïda en funció del temps; (b) la força electromotriu màxima. Sol.: 3,6psin(100pt) V; 11,3 V.

P.7.17. Una bobina d’un alternador de 20 O de resistència total consta de 150 espires de 3 cm de radi. Calculeu la freqüència amb què ha de girar en un camp magnètic uniforme de 0,6 T per produir una intensitat màxima de 4 A. Sol.: 50 Hz.

P.7.18. Una vareta metàl·lica de 2 m de longitud es desplaça amb una velocitat constant, *v*, tal com indica la figura. Si el camp magnètic és de 40 μT, perpendicular al pla del paper i en sentit cap enfora, i la força electromotriu induïda és de 2 mV, (a) calculeu la velocitat de la vareta, (b) indiqueu el sentit de la intensitat de corrent induït. Sol.: 25 m/s, horari.



P.7.19. La vareta metàl·lica de l'exercici anterior es desplaça amb una velocitat constant, *v*=10 m/s , tal com indica la figura. Si el camp magnètic és de 40 μT perpendicular al pla del paper i en sentit cap enfora, calculeu: (a) la força electromotriu induïda, (b) la intensitat de corrent que circula per la resistència R= 1 O. Sol.: 0,0008 V; 0,8 mA.

P.7.20. Les rodes i els eixos d'un vagó de ferrocarril mantenen contacte elèctric amb els rails i formen un circuit similar al de la figura del problema anterior (imagineu que hi ha una resistència que connecta els dos rails en un punt llunyà). Estimeu la fem induïda en aquest circuit per un tren de mercaderies típic que es mou a 194,4 km/h en una regió on la component vertical del camp magnètic terrestre té un valor de 0.1 mT i l'amplada dels rails és d'1 m. Sol.: $5.4\cdot10^{-3}$ V.

P.7.21. Una barra metàl·lica de 80 cm cau de 45 cm d'altura. Calculeu la força electromotriu induïda entre els seus extrems en l'instant d'arribar a terra. El camp magnètic és perpendicular al pla del paper i amb el sentit cap enfora, i de mòdul 0,2 T. Sol.: 4,8 10^{-4} V.

E.7.3. Una espira quadrada de 5 cm de costat és en un camp magnètic uniforme, normal a l'espira i variable en un temps $B=4t^2$ (SI). Determineu: (a) l'expressió del flux a través seu; (b) el valor de la força electromotriu per a un temps *t*= 2 s.

S*olució*

a) Anirem a l'expressió bàsica de flux $\phi = N\vec{B}\circ\vec{S} = NBS\cos\beta = NBS$;
en el nostre cas N=1, atès què tenim una espira. La superfície és $S = (5\cdot10^{-2}) = 25\cdot10^{-4}\,m^2$. Seguidament, amb aquestes dades i el valor del camp en funció del temps obtenim: $\phi = N\vec{B}\circ\vec{S} = NBS\cos\beta = 2510^{-4}\cdot 4t^2 = 10^{-2}\,t^2 Wb$

Fixeu-vos que el flux és una funció del temps, i el podríem representar gràficament.

$\phi=0{,}01\ t^2$ Wb

b) Escriurem l'expressió de la llei de Faraday corresponent, tot considerant que B és una funció del temps:

$\in = -NS\dfrac{dB}{dt}$. Si substituïm les dades per les de l'enunciat i les obtingudes en l'apartat anterior obtindrem l'expressió de la força electromotriu induïda:

$$\in = -NS\frac{dB}{dt} \Rightarrow \in = \left|NS\frac{dB}{dt}\right| = \left|\frac{d(NSB)}{dt}\right| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = 0{,}02t\ \mathrm{V}$$

Observem que aquesta força electromotriu també és una funció del temps. Per a un temps t= 2 s ens queda que $\in = 0{,}02 \cdot 2 = 0{,}04$ V.

$$\boxed{\in = 0{,}04\ \mathrm{V}}$$

P.7.22. Una espira quadrada de 5 cm de costat és en un camp magnètic uniforme, normal a l'espira i variable en un temps $B=2t^2$ (SI). Determineu: (a) l'expressió del flux a través seu; (b) el valor de la força electromotriu per a un temps *t* = 4 s. Sol.: 0,005 t^2 Wb; 0,04 V.

P.8. Problemes bàsics d'inducció electromagnètica originats per variacions de la intensitat del corrent, I, en funció del temps

T.8.1. **Flux magnètic**. És el nombre de línies de camp que travessen una superfície onada, S, col·locada perpendicularment a aquestes línies de camp. L'expressió matemàtica correspon a:

$$\phi = \vec{B} \circ \vec{S} = BS\cos\beta$$

On ß és l'angle que formen el vector superfície i el vector intensitat de camp magnètic. Les unitats del flux magnètic són $T.m^2$=weber=Wb. En els problemes que hi ha a continuació l'angle es mantindrà constant, igual que la superfície.

T.8.2. **Flux magnètic que travessa un solenoide**. El flux magnètic que circula a través d'un solenoide és igual al producte de l'àrea del solenoide per la component perpendicular del camp magnètic uniforme multiplicat pel nombre d'espires del solenoide N.

T.8.3. **Força electromotriu autoinduïda**. Si el camp magnètic que travessa un solenoide varia en funció del temps, s'indueix en la mateixa bobina una força electromotriu que es diu que és autoinduïda. La magnitud de la força electromotriu es dedueix a partir de

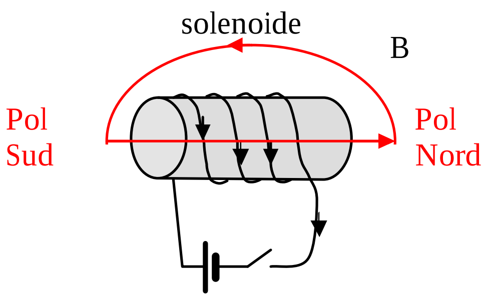
$\phi = NBS$

On B és el camp magnètic generat per ella mateixa

$B = 4\pi 10^7 \dfrac{NI}{l}$; si substituïm en l'expressió de flux.

$$\phi = NBS = NS \cdot 4\pi 10^7 \frac{N}{l} I$$

Fixeu-vos que tot el terme que multiplica a la intensitat és una constant característica de la bobina. Aquesta constant s'anomena coeficient d'autoinducció i es representa amb la lletra *L*. La seva unitat és l'henry (H). D'aquí:



$L_{bobina} = 4\pi 10^7 \dfrac{N^2 S}{l}$; podem escriure que $\phi = L \cdot I$

Ara podem escriure la llei de Faraday per a aquesta nova situació:

$$\in = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad (13)$$

Tornem-hi...

P.8.1. Calculeu el coeficient d'autoinducció, *L*, si la intensitat de corrent que hi circula és de 0,03 A i el flux magnètic que la travessa és de 0,3 Wb. Sol.: 10 H.

P.8.2. Calculeu el coeficient d'autoinducció, *L*, si la intensitat de corrent que hi circula és de 0,03 A i el flux magnètic que la travessa és de 0,6 Wb. Sol.: 20 H.

P.8.3. Calculeu el coeficient d'autoinducció d'una bobina sense nucli, de 13 espires, de 0,0002 m^2 d'àrea i una longitud de 0,6 m. Sol.: 7,07 10^{-8} H.

P.8.4. Calculeu el coeficient d'autoinducció d'una bobina sense nucli, de 13 espires, de 0,0004 m^2 d'àrea i una longitud de 0,6 m. Sol.: 14,14 10^{-8} H.

P.8.5. Calculeu el coeficient d'autoinducció d'una bobina amb nucli, de 13 espires, de 0,0002 m^2 d'àrea i una longitud de 0,6 m amb un nucli on μ_r= 7500. Sol.: 5,3 10^{-4} H.

P.8.6. Calculeu el coeficient d'autoinducció d'una bobina, de 1000 espires, de 60 cm^2 d'àrea i una longitud de 30 cm: (a) sense nucli; (b) amb un nucli on μ_r= 1500. Sol.: 25 10^{-3} H; 37,5 H.

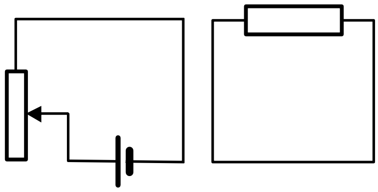
P.8.7. En obrir un circuit pel qual circulava un corrent de 24 A s'indueix una força electromotriu de 60 V. Calculeu el coeficient d'autoinducció del circuit si la intensitat tarda 2 ms a anul·lar-se. Sol.: 5 mH.

P.8.8. En tancar un circuit el corrent varia de 0 A a 24 A en 1 ms; aquest procés genera una força electromotriu de 60 V. Calculeu el coeficient d'autoinducció del circuit s. Sol.: 2,5 mH.

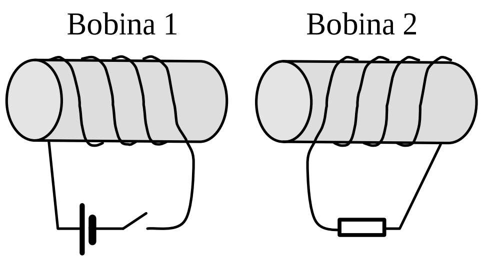
P.8.9. La intensitat d'una bobina amb coeficient d'autoinducció de 4 H varia de 4 A a 24 A en un temps de 5 s. Es demana el valor de la força electromotriu autoinduïda que es genera a la bobina. Sol.: 16 V.

P.8.10. Una bobina de 10 cm de longitud està formada per 100 espires de 60 cm^2 de superfície. Determineu la força electromotriu autoinduïda a la bobina quan la intensitat varia de 10 A a 4 a en 1 ms. Sol.: 4,6 V.

P.8.11. Doneu el sentit del corrent induït que travessa la resistència del circuit de la dreta quan la resistència del de l'esquerra sobtadament (a) augmenta, i (b) disminueix. Sol.: (a) $\leftarrow$, (b) $\rightarrow$



P.8.12. Dues bobines estan enrotllades sobre cilindres aïllants en sentits contraris i connectades com es mostra a la figura. (a) Quin sentit tindrà el corrent en la resistència R_2 just després de tancar l'interruptor del circuit 1? (b) Si la bobina 2 estigués bobinada en sentit contrari, quina seria la resposta a la pregunta anterior? (c) Què passaria si les dues bobines estiguessin enrotllades en sentits contraris als representats? Sol.: (a) $\leftarrow$, (b) $\rightarrow$, (c) $\leftarrow$



TEORIA DE CIRCUITS. CORRENT ALTERN

Índex

P.1. Problemes de generació de corrent altern

Definicions

T.1.1. ***Corrent altern***. És un corrent en què la intensitat canvia, de forma periòdica, de sentit. Aquesta intensitat és una funció sinusoïdal del temps. Com a funció periòdica, es poden definir dos conceptes: *període, T,* i *freqüència, f*.

T.1.2. ***Generació del corrent altern***: Quan una bobina gira amb una velocitat angular constant, ? , a l'interior d'un camp magnètic uniforme, B, es genera una força electromotriu induïda obeint la llei de la inducció de Faraday:

$\in = -N\dfrac{d\phi}{dt} \Rightarrow \in = NBS\sin\omega t$. Aquesta expressió ens dóna el valor de la força electromotriu instantània. On el valor màxim de la funció és $\in_{màxim} = \in_0 = NBS$

Intensitat de corrent. Si apliquem la llei d'Ohm en un circuit format per un generador de corrent altern i una resistència òhmica, R, obtenim que $i = \dfrac{\in}{R} = \dfrac{NBS}{R}\sin\omega t$. Aquesta expressió ens dóna el valor de la intensitat instantània. El valor màxim de la funció és $i_{màximi} = i_0 = \dfrac{NBS}{R}$

T.1.3. ***Fase. Pulsació***. S'anomena fase el valor de l'angle f = ?t que descriu la bobina en girar a l'interior d'un camp magnètic uniforme. La pulsació és el valor de la velocitat angular amb què gira la bobina en un camp magnètic. Quan la força electromotriu i la intensitat de corrent tenen la mateixa fase es diu que es troben en concordança de fase; en cas contrari, hi ha un desfasament.

T.1.4. ***Intensitat eficaç, I***, d'un corrent altern és el valor de la intensitat d'un corrent continu que circulant en el mateix circuit, i en el mateix temps, produeix la mateixa quantitat de calor que la del corrent altern. La seva expressió de càlcul correspon a:

$$I = \frac{i_0}{\sqrt{2}}\left[\frac{\text{coul}}{\text{segon}} = A\right]$$

De la mateixa manera, es pot definir el valor eficaç de la força electromotriu.

$$E = \frac{\in_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{joul}}{\text{coul}} = V\right]$$

Exercicis

P.1.1. El valor eficaç de la intensitat d'un circuit de corrent altern és de 105 A. Calculeu el valor màxim d'aquest corrent. Sol.: 148,05 A.

P.1.2. El valor instantani de la intensitat de corrent és de 2 A; si la fase és de 15º, calculeu el valor màxim i eficaç de la funció. Sol.: 7,69 A; 5,44 A.

P.1.3. El valor instantani de la intensitat de corrent que flueix per un circuit elèctric és de 10 A. Calculeu el valor màxim de la funció quan la fase és de 30º. Sol.: 20 A.

P.1.4. Els aparells de mesura en corrent altern indiquen els valors eficaços de les funcions. Si un voltímetre marca una tensió de 127 V, calculeu el valor màxim de la tensió. Sol.: 79 V.

P.1.5. Calculeu la pulsació d'un corrent altern de període 0,01 s. Sol.: 200p rad/s.

P.1.6. Calculeu la pulsació d'un corrent altern de període 0,02 s. Sol.: 100p rad/s.

P.1.7. Calculeu la pulsació d'un corrent altern de freqüència 100 Hz s. Sol.: 200p rad/s.

P.1.8. El valor instantani de la intensitat de corrent és de 2 A. La fase és de 15º i la resistència òhmica del sistema, 20 O. Determineu el valor eficaç i màxim de la tensió del sistema. Sol.: 109,17 V; 154,4 V.

P.1.9. El valor instantani de la intensitat de corrent és de 2 A. La fase és de 30º i la resistència òhmica del sistema, 20 O. Determineu el valor eficaç i màxim de la tensió del sistema. Sol.: 56,56 V; 80 V.

P.1.10. Una resistència òhmica pura de 20 O està interposada en un circuit de corrent altern. El valor màxim de la tensió és de 70,5 V. Calculeu la intensitat eficaç i màxima del circuit. Sol.: 3,44 A; 2,43 A.

P.2. Càlcul d'impedàncies

Definicions

T.2.1. ***Resistència elèctrica***. S'anomena resistència elèctrica d'un conductor la major o menor dificultat que ofereix al pas del corrent elèctric. La *resistència òhmica* és directament proporcional a la longitud del conductor i inversament proporcional a la seva secció. Matemàticament:

$$R = \frac{? \cdot L}{S} \ (O) \qquad (1)$$

T.2.2. ***Reactància inductiva, X_L***. Una autoinducció (bobina) produeix en un circuit de corrent altern els efectes d'una resistència anomenada reactància inductiva. Una bobina pura avança la tensió respecte a la intensitat un angle de f = p/2. L'expressió de càlcul correspon a:

$$X_L = \omega L \ (\Omega) \qquad (2)$$

T.2.3. ***Reactància capacitativa, X_C***. Un condensador ofereix una dificultat al pas del corrent elèctric, produeix un efecte de resistència anomenat reactància capacitativa. Un condensador origina un retard de la tensió respecte a la intensitat un angle de f = p/2. L'expressió de càlcul correspon a:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \ (\Omega) \qquad (3)$$

T.2.4. ***Impedància, Z***. És la reactància total d'un circuit i és deguda a la presència de resistències òhmiques, inductives i capacitatives.

Tornem-hi…

P.2.1. Una branca d'un circuit de corrent altern conté una bobina de coeficient d'autoinducció $L = \frac{0,010}{\pi}$ O i un condensador de capacitat $C = \frac{1000}{\pi}\mu F$. Si la pulsació del circuit és de $\omega = 100\pi$ rad/s, determineu la reactància de cada element del circuit. Sol.: 1 O; 10 O.

P.2.2. Una branca d'un circuit de corrent altern conté una bobina de coeficient d'autoinducció $L = \frac{0,10}{\pi}$ O i un condensador de capacitat $C = \frac{2000}{\pi}\mu F$. Si la pulsació del circuit és de $\omega = 100\pi$ rad/s, determineu la reactància de cada element del circuit. Sol.: 10 O; 5 O.

P.2.3. Una branca d'un circuit de corrent altern conté una bobina de coeficient d'autoinducció $L = \frac{1}{\pi}$ O i un condensador de capacitat $C = \frac{500}{\pi}\mu F$. Si la freqüència del circuit és de $f = 50$ Hz, determineu la reactància de cada element del circuit. Sol.: 100 O; 20 O.

P.2.4. Una branca d'un circuit de corrent altern conté una bobina de coeficient d'autoinducció $L = \frac{1}{\pi}$ O i un condensador de capacitat $C = \frac{500}{\pi}\mu F$. Si el període del circuit és de $T = 0,02$ s, determineu la reactància de cada element del circuit. Sol.: 100 O; 20 O.

P.2.5. En un circuit de 50 Hz de freqüència i angle de desfasament tensió intensitat, $\varphi = 45^{o}$, hi ha connectades en sèrie una bobina pura i una resistència òhmica, R = 314 O. Calculeu, amb aquestes dades, la reactància inductiva i el coeficient d'autoinducció de la bobina. Sol.: 100pO, 1 H.

P.2.6. En un circuit de 50 Hz de freqüència i angle de desfasament tensió intensitat, $\varphi = 45^{o}$, hi ha connectades en sèrie una bobina pura i una resistència òhmica, R = 628 O.

Calculeu, amb aquestes dades, la reactància inductiva i el coeficient d'autoinducció de la bobina. Sol.: 200pO, 2 H.

P.2.7. En un circuit de 50 Hz de freqüència i angle de desfasament tensió intensitat, $\varphi = 45^{\circ}$, hi ha connectades en sèrie un condensador i una resistència òhmica, R = 314 O. Calculeu, amb aquestes dades, la reactància capacitativa, la capacitat del condensador i la impedància total. Sol.: 314 O, 10,14µF; 444,06 O.

P.3. Problemes bàsics d'associacions de resistències

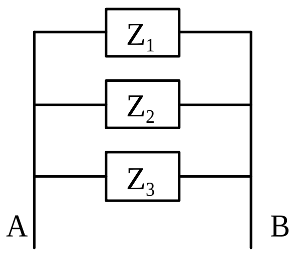
Definicions

T.3.1. ***Associació d'impedàncies. Impedància equivalent***. S'anomena impedància equivalent d'altres impedàncies la impedància que posada en el circuit en el lloc de les altres produeix els mateixos efectes.

T.3.2. ***Impedàncies en sèrie***. L'associació d'impedàncies en sèrie es fa col·locant les impedàncies una a continuació de les altres, unint el final d'una impedància amb l'origen de l'altra. La impedància equivalent del circuit és: $\overline{Z}_{\text{equivalent}} = \sum \overline{Z}_i$

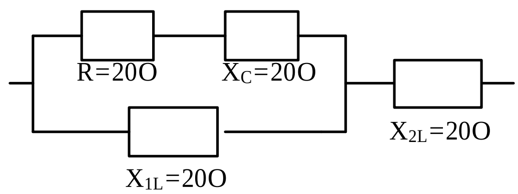
T.3.3. ***Impedància en paral·lel***. L'associació d'impedàncies en paral·lel es fa unint entre si, en un punt comú, A, l'extrem inicial de cada una de les impedàncies, i unint a un altre punt comú, B, l'extrem final de cada una de les impedàncies:

La impedància total o equivalent del circuit es calcula: $\dfrac{1}{\overline{Z}} = \sum \dfrac{1}{\overline{Z}_i}$



Exercicis

E.3.1. Per a l'esquema de la figura contesteu les preguntes següents: (*a*) quina és la impedància de cada branca del paral·lel?, (*b*) quina és la impedància total del circuit?

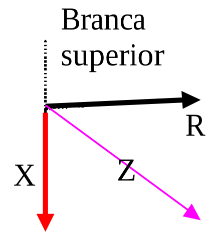


Solució

a) Per calcular la impedància de cada branca del tros de circuit en paral·lel utilitzarem la notació del nombre complex. Col·locarem la resistència òhmica en l'eix dels reals i les reactàncies en l'eix dels imaginaris, tot considerant que la de la bobina és positiva i la del condensador és negativa:

Per a la branca superior tenim que hi ha dos elements connectats en sèries:

$\overline{Z}_{equivalent} = \sum \overline{Z}_i$ per tant $\overline{Z}_1 = 20 - 20\bar{j} = 20 - 20\bar{j}\ \ \Omega$



En notació polar: $\overline{Z}_1 = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28{,}28_{-45^o}\,\Omega$

Per a la branca inferior fem el mateix en l'element existent:

$\overline{Z}_2 = 0 + 20\bar{j} = 0 + 20\bar{j}\ \ \Omega$

En notació polar: $\overline{Z}_2 = \sqrt{0^2 + 20^2} = 20_{90^o}\,\Omega$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{Z}_1 &= 28{,}28_{-45^o}\,\Omega \\ \overline{Z}_2 &= 20_{90^o}\,\Omega\end{aligned}}$$

b) La impedància total del paral·lel, Z_{12}, la calcularem:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{12}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} \Rightarrow \overline{Z}_{12} = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$$

Recordeu-vos que per multiplicar complexos, aquests han d'estar expressats en notació polar, i per sumar en forma bionòmica:

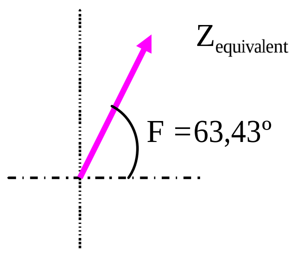
$$\overline{Z}_{12} = \frac{28{,}28_{-45^o} \cdot 20_{90^o}}{(20 - 20\,j) + (0 + 20\,j)} = \frac{565{,}6_{45^o}}{20 + 0\,j} = \frac{565{,}6_{45^o}}{20_{0^o}} = 28{,}28_{45^o}\,\Omega$$

El circuit simplificat que ens queda està format per dos elements resistors, $\overline{Z}_{12}$ i X_{2L}, connectats en sèrie:

$$\overline{Z}_{equivalent} = \sum \overline{Z}_i = (28{,}28_{45^o}) + 20_{90^o} = (20 + 20\,j) + (0 + 20\,j) = 20 + 40\,j = 44{,}72_{63{,}43^o}\,\Omega$$

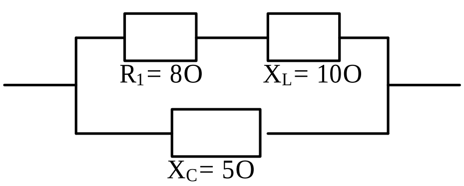
Fixeu-vos que el valor numèric de la impedància total del circuit és de 44,72 O i que forma un angle de 63,43º respecte a l'eix dels reals. Gràficament:

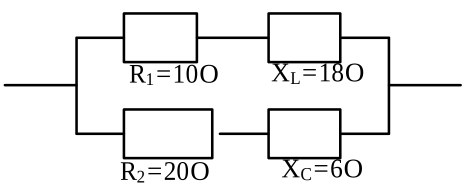
$$\boxed{\overline{Z}_{equivalent} = 44{,}72_{63{,}43^o}\,\Omega}$$



Tornem-hi…

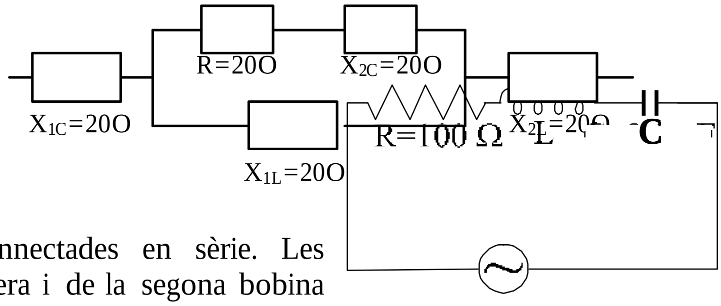
P.3.1. Calculeu la impedància equivalent de la figura 1 i de la figura 2:





Sol.: $9{,}434_{-70{,}66^o}\,\Omega$; $11{,}81_{22{,}45^o}\,\Omega$

P.3.2. Per a l’esquema de la figura: (*a*) calculeu la impedància de cada branca del paral·lel; (*b*) calculeu la impedància total del circuit. Feu la representació gràfica de la impedància total del circuit.



Sol.: $28{,}28_{45}\Omega$

P.3.3. Dues bobines estan connectades en sèrie. Les resistències òhmiques de la primera i de la segona bobina són R_1= 5 O i R_2= 20 O, respectivament, i els coeficients d’autoinducció són L_1= 0,01/p H i L_2= 0,05/p H.

$$\in = 10\sqrt{2}\sin 100\pi t$$

P.3.4. Determineu les impedàncies de cada bobina i la impedància total del circuit. La freqüència és de 50 Hz. Sol.: $5{,}01_{11{,}31^{o}}\Omega; 20{,}61_{14{,}03^{o}}\Omega; 25{,}71_{13{,}49^{o}}\Omega$.

Definicions

T.3.4. ***Llei d’Ohm***. La intensitat de corrent que travessa un conductor és directament proporcional a la diferència de potencial que hi ha entre dos punts del conductor, i inversament proporcional a la seva impedància. Matemàticament:

$$I = \frac{\overline{V}}{\overline{\overline{Z}}} \qquad (4)$$

T.3.5. ***Factor de potència***. S’anomena factor de potència el cosinus de l’angle de desfasament.

Exercicis

E.3.2. En el circuit de la figura, en què L = 0,28/p H i C = 1000/p µF, determineu: (*a*) la reactància inductiva i capacitativa, (*b*) la impedància del circuit, (*c*) la intensitat de corrent i (*d*) l’angle de desfasament entre la tensió i la intensitat.

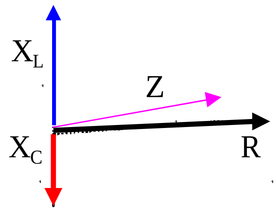
Solució:

a) Per calcular les reactàncies hem de calcular quina és la pulsació del circuit. Si comparem l’expressió de la força electromotriu en funció del temps de l’enunciat amb la genèrica, obtenim que: $\in = \in_0 \sin \omega t = 10\sqrt{2}\sin 100\pi t$; d’aquí es dedueix que ? = 100p rad/s.

Seguidament, substituïm en les expressions de càlcul de les reactàncies respectives.

$$X_L = \omega L = 100\pi \frac{0{,}28}{\pi} = 28\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\pi \cdot (100010^{-6}/\pi)} = \frac{10^6}{100000} = 10\ \Omega$$



b) Per calcular la impedància del circuit utilitzarem la notació del nombre complexos. Col·locarem la resistència òhmica en l'eix dels reals i les reactàncies en l'eix dels imaginaris, tot considerant que la de la bobina és positiva i la del condensador és negativa: $\overline{Z} = 100 + 28\overline{j} - 10\overline{j} = 100 + 18\overline{j}\ \ \Omega$.

En notació polar: $\overline{Z} = \sqrt{100^2 + 18^2} = 101{,}61_{10{,}20^\circ}\,\Omega$

$$\boxed{\overline{Z}_{equivalent} = 101{,}61_{10{,}20^\circ}\,\Omega}$$

c) i d) Seguidament, aplicarem la llei d'Ohm al circuit de corrent altern. Com que els tres elements es troben en sèrie, la magnitud que és comuna correspon a la intensitat. Aquesta magnitud la situarem sobre l'eix dels reals amb la resistència òhmica; això representa que $I = I_{0^\circ}$ A.

$$I = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} \Rightarrow I_{0^\circ} = \frac{10_x}{101{,}61_{10{,}20^\circ}} = 0{,}098\,\text{A}$$

Per saber l'angle de desfasament entre tensió i intensitat, resolem l'equació: 0 = x-10,20º, on x = 10,20º. L'angle f = 10,20º, és a dir, la tensió del circuit avança la intensitat en 10,20º. És un circuit inductiu.

Hem d'expressar el resultat en el sistema internacional: 10,20º = 0,18 rad.

$$\boxed{\overline{I} = 44{,}72_{0^\circ}\,\text{A}} \qquad \boxed{\varphi = 0{,}18\ \text{rad}}$$

P.3.5. Un circuit de corrent altern està format per una font de tensió de 100 V, una resistència òhmica de 20 O i una bobina de 0,04 H connectades en sèrie. Si la freqüència del corrent és de 50 Hz, determineu: (*a*) la intensitat del corrent i (*b*) la tangent de l'angle de desfasament entre la tensió i la intensitat. Sol.: 4,3 A; 0,628.

P.3.6. Dues bobines estan connectades en sèrie. Les resistències òhmiques de la primera i la segona bobina són R_1= 6 O i R_2= 10 O, respectivament, i les reactàncies inductives X_{1L} = 10 O i X_{2L} = 12 O. Determineu la intensitat de corrent que passa pel circuit si la tensió és de 120 V. Sol.: 4,4 A.

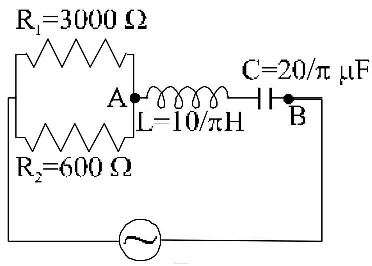
P.3.7. Una bobina de coeficient d'autoinducció 2,55 mH i resistència òhmica R = 6 O està connectada a una xarxa de corrent altern amb una tensió de 12 V i 500 Hz de freqüència. Determineu la reactància inductiva, X_L, la impedància del circuit, Z, la seva intensitat de corrent, I, i el cosinus de l'angle de desfasament. Sol.: 8 O; 10 O; 1,2 A i 0,6.

P.3.8. Un condensador de 10 µ F de capacitat està acoblat, en sèrie, a una residència òhmica de 800 O. La tensió del circuit és de 120 V i la seva freqüència és de 50 Hz. Determineu: (*a*) la impedància del circuit, (*b*) la intensitat del corrent, (*c*) la tensió a la resistència òhmica i (*d*) la tensió del condensador. Sol.: 861 O; 0,14 A; 112 V; 44,57 V.

P.3.9. Una bobina de coeficient d'autoinducció 0,05 H i resistència òhmica R = 10 O està connectada en sèrie a un condensador de 2 µF i a una xarxa de corrent altern amb una tensió de 100 V i 500 Hz de freqüència. Determineu: (*a*) la impedància del circuit, (*b*) la intensitat del corrent i (*c*) l'angle de desfasament. Sol.: 10,19 O, 9,81 A; f =-11,48º.

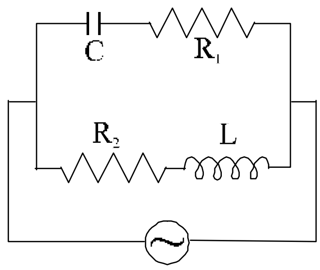
P.3.10. Es connecten en sèrie i per aquest ordre una resistència òhmica, una bobina i un condensador. Calculeu: (*a*) la diferència de potencial entre la resistència i la bobina i el seu angle de desfasament, f_{RL}, (*b*) la diferència de potencial del circuit i el seu angle de desfasament, $f_{total;,}$ (*c*) la diferència de potencial en el condensador i el seu corresponent angle de desfasament. Dades: R = 40 O; X_L = 50 O; X_C = 20 O, V = 100 V. Sol.: 128,06 V $\varphi_{AC} = 51{,}20^\circ$; 100 V $\varphi_{AD} = 36{,}52^\circ$;40 V $\varphi_{CD} = -90^\circ$.

P.3.11. Calculeu: (*a*) la intensitat que circula pel circuit i per les resistències R_1 i R_2, (*b*) el valor eficaç de la diferència de potencial entre A i B. Dades: V = 200 V. Sol.: $I_C = \frac{\sqrt{2}}{4}$ A, $I_{R1} = \frac{\sqrt{2}}{24}$ A, $I_{R2} = \frac{5\sqrt{2}}{24}$ A ; $V_{AB} = 125\sqrt{2}$ V.

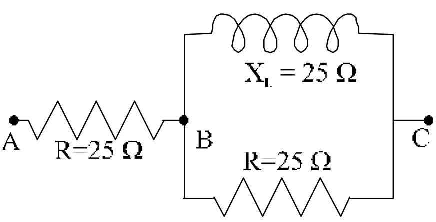


P.3.12. Donat el circuit de la figura, (*a*) quant val la reactància de cada branca?; (*b*) calculeu la intensitat i fase a cada branca respecte al voltatge aplicat. Dades: X_C = 10 Ω, R_1 = 10 Ω, R_2 = 10 Ω i X_L = 20 Ω, V = 10V. Sol.:

$\overline{Z}_1$ = 10-10j Ω, $\overline{Z}_2$ = 10+20j Ω; $\frac{1}{\sqrt{2}}\Omega$, $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{1}{\sqrt{5}}\Omega$, 1,01 rad



P.3.13. Si connectem una font de corrent altern amb una diferència de potencial de 100 V entre els punts A i C. Trobeu: (*a*) la impedància equivalent del circuit; (*b*) la intensitat total que circula pel circuit; (*c*) la tensió entre els punts A i B i entre els punts B i C, i (*d*) la intensitat que circula per la bobina i per la resistència. Sol.: $39{,}53_{18{,}4^\circ}\ \Omega$; (b) $2{,}53_{-18{,}4^\circ}\text{A}$; $\overline{V}_{AB} = 63{,}25_{-18{,}4^\circ}\text{V}$, $\overline{V}_{BC} = 44{,}72_{26{,}6^\circ}\text{V}$; $1{,}79_{26{,}6^\circ}\text{A}$,$1{,}79_{63{,}6^\circ}\text{A}$.



P.3.14. En els terminals A i B d'un generador de corrent altern es connecten en paral·lel una bobina i un condensador d'impedàncies 20 O i 10 O, respectivament. Si la intensitat total del circuit és de 4 A, es demana: (*a*) la tensió del generador, (*b*) la intensitat en cada una de les branques, (*c*) l'angle de desfasament entre la tensió i la intensitat del circuit. Sol.: 80 V; 4 A i 8 A; f = 40º

P.4. Aplicacions en el càlcul de potències

Definicions

T.4.1. ***Potència instantània***. La potència instantània es determina fent el producte entre el valor instantani de la intensitat i el valor instantani de la tensió. Matemàticament: $p(t) = i(t) \cdot v(t)$, però aquest valor no té significat físic.

T.4.2. ***Potència total o aparent***. Es determina mitjançant el producte dels valors eficaços de la tensió i de la intensitat. Aquest producte no considera el desfasament entre la tensió i la intensitat. Les seves unitats són el "$volt \cdot ampere = V \cdot A$".

T.4.3. ***Potència activa o eficaç***. És la potència que tindria un corrent continu que produís o dissipés per unitat de temps la mateixa quantitat de calor que el corrent altern. És la potència real del circuit. Considerant que aquesta potència en un circuit de corrent continu seria $P = I^2 R$ i que en corrent altern es verifica $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}}$; i que $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$, podem escriure: $P = I^2 R = VI\cos\varphi$. la unitat de la potència activa és *el watt*. També la podem definir com el producte de la potència aparent i el factor de potència.

$$P_{activa} = VI\cos\varphi \qquad (5)$$

Exercicis

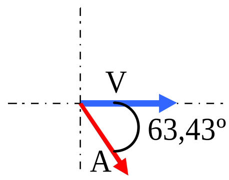
E.4.1. Una bobina té una resistència òhmica de 10 O i una reactància inductiva de 20 O. Està connectada a un corrent altern de 314 rad/s de pulsació i una força electromotriu eficaç de 110 V. Calculeu: (*a*) la intensitat del circuit i l'angle de desfasament entre la tensió i la intensitat; (*b*) el factor de potència; (*c*) la potència dissipada per efecte Joule, i (*d*) la potència aparent o total del circuit.

Solució

a) Per calcular la intensitat de corrent del circuit aplicarem la llei d'Ohm aplicada a tot el circuit, però primer hem de calcular la impedància del circuit:

$$\bar{Z} = 10 + 20j = \sqrt{\left(10^2 + 20^2\right)} = 22{,}36_{63{,}43^{o}}\,\Omega$$

Si considerem que la tensió del circuit té argument zero, és a dir, es troba en l'eix dels reals, tindrem:



$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{\bar{Z}}} = \frac{110_{0}}{22{,}36_{63{,}43^{o}}} = 4{,}92_{-63{,}43^{o}}\ A$$

Si observem la representació gràfica, la intensitat està endarrerida respecte a la tensió en un angle f = 63,43º.

$$\boxed{\bar{I} = 4{,}82_{-63{,}43}\ A}$$

b) El factor de potència correspon al cosinus de l'angle de desfasament entre la tensió i la intensitat, en el nostre cas: $\cos(-63{,}43) = 0{,}447$.

$$\boxed{\cos\varphi = 0{,}447}$$

c) Per calcular la potència dissipada per efecte Joule, hem de considerar que només es transforma energia elèctrica en calorífica en les resistències òhmiques:

$$P_{dissipada} = I^2 R = 4{,}92^2 \cdot 10 = 242\ \frac{J}{C}$$

o bé :

$$P_{dissipada} = V \cdot I \cdot \cos\varphi = 110 \cdot 4{,}92 \cdot 0{,}447 = 242\ \frac{J}{C}$$

La solució de l'apartat *c* correspon a:

$$\boxed{242\ W}$$

d) I la potència total o aparent es calcula amb l'expressió:

$$P = V \cdot I = 110 \cdot 4{,}92 = 541{,}2\ \ VA$$

$$\boxed{541{,}2\ VA}$$

Tornem-hi…

P.4.1. Una font de tensió alterna produeix una força electromotriu induïda $\in (t) = 40 \sin(2\pi t)$ S.I. i produeix en un determinat circuit una intensitat expressada per $i(t) = 4\sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$ S.I. Determineu: (*a*) la impedància del circuit, (*b*) la potència aparent del circuit i (*c*) la potència activa. Sol.: 10 O; 80 VA; 69,28 W.

P.4.2. Una bobina de resistència òhmica $5\ 10^4$ O i coeficient d'autoinducció $L = \frac{2}{\pi}$ H es connecta a un circuit de 5000 Hz i força electromotriu en valor eficaç de 110 V. Determineu: (*a*) la intensitat del circuit i l'angle de desfasament, (*b*) la potència dissipada per efecte Joule i (*c*) la potència aparent del circuit. Sol.: $\bar{I} = 20{,}45 \cdot 10^{-4}{}_{21{,}8^{o}}$ A ; 0,21 W; 0,22 VA.

P.4.3. Un circuit RLC (resistència òhmica, bobina i condensador) es connecta a una tensió $\in(t) = 50 \sin 100\pi t$ S.I. Calculeu: (*a*) el factor de potència i (*b*) la potència activa del circuit. Dades: R = 100 O; L = 1,26 H; C = 2µF. Sol.: cos f = 0,707; 0,74 W.

P.4.4. Un circuit RLC (resistència òhmica, bobina i condensador) es connecta a una tensió $\in(t) = 220\sqrt{2} \sin 100\pi t$ S.I. Calculeu: (*a*) el factor de potència i (*b*) la potència activa del circuit. Dades: R = 100 O; L = 1,26 H; C = 2µF. Sol.: cos f = 0,707; 3,35 W.

P.4.5. Per una làmpada circula un corrent de 10 A i té una potència activa de 900 W quan es connecta a una línia de 220 V i 50 Hz. (*a*) Calculeu la impedància de la làmpada; (*b*) si la intensitat està endarrerida respecte a la tensió, quin és el factor de potència del circuit?; (*c*) quina és la potència aparent de la làmpada? Sol.: 22 O; cos f = 0,41; 2200 VA.

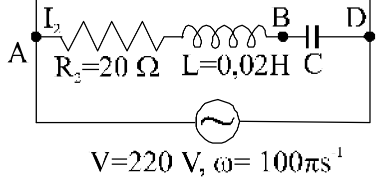
P.4.6. Per una làmpada circula un corrent de 10 A i té una potència activa de 1800 W quan es connecta a una línia de 220 V i 50 Hz. (*a*) Calculeu la impedància de la làmpada; (*b*) si la intensitat està endarrerida respecte a la tensió, quin és el factor de potència del circuit? (*c*) quina és la potència aparent de la làmpada? Sol.: 22 O; cos f = 0,82; 2200 VA

P.4.7. Per una làmpada circula un corrent de 22 A i té una potència activa de 900 W quan es connecta a una línia de 220 V i 50 Hz. (*a*) Calculeu la impedància de la làmpada; (*b*) si la intensitat està endarrerida respecte a la tensió, quin és el factor de potència del circuit?; (*c*) quina és la potència aparent de la làmpada? Sol.: 10 O; cos f = 0,186; 4840 VA.

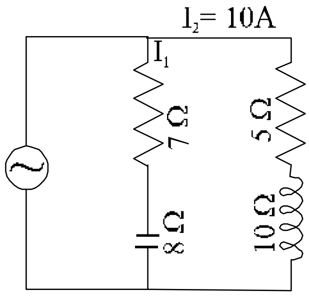
P.4.8. Una bobina de 10 O de resistència òhmica s'uneix a una xarxa de corrent altern de tensió $\in(t) = 200\sqrt{2} \sin 100\pi t$ S.I. En 5 minuts desprèn 585,84 kJ quan s'introdueix en un calorímetre. Calculeu: (*a*) la intensitat eficaç del circuit i (*b*) el factor de potència. Sol.: 13,94 A; cos f = 0, 697.

P.4.9. Una bobina de 5 O de resistència òhmica s'uneix a una xarxa de corrent altern de tensió $\in(t) = 200\sqrt{2} \sin 100\pi t$ S.I. En 5 minuts desprèn 585,84 kJ quan s'introdueix en un calorímetre. Calculeu: (*a*) la intensitat eficaç del circuit; (*b*) el factor de potència. Sol.: 19,76 A; cos f = 0, 494.

P.4.10. Si la capacitat del condensador de la figura és de 5,066 10^{-4}F, (*a*) calculeu la diferència de potencial entre els punts A i B, i el desfasament; (*b*) calculeu la potència dissipada entre els punts A i B. Sol.: 230,56 V; 17,44º 2420 W.



P.4.11. 11 Donat el circuit de la figura, calculeu: (*a*) la impedància de cada branca, (*b*) els valors eficaç i màxim de la tensió aplicada; (*c*) la intensitat I_1 i el seu angle de desfasament respecte a la tensió; (*c*) la intensitat total *I*, així com el seu angle de desfasament respecte a la tensió, (*d*) la potència dissipada a cada branca i la total. Sol.: $\overline{Z}_1 = 7 - 8j\Omega; \overline{Z}_2 = 10 + 5j\Omega$; 112 V; 158 V; $\overline{I}_1 = 10{,}5_{48{,}8^o}$ A ; $\overline{I}_{total} = 16{,}28_{12{,}24^o}$ A P_1= 776 W, P_2 = 1000 W, P_{Tot} = 1776 W.



P.5. Aplicacions de càlcul en circuits en sèrie ressonants

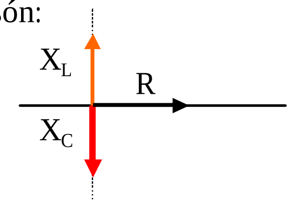
Definicions

T.5.1. ***Ressonància***. Un circuit en sèrie RLC es troba en ressonància quan X_L.= X_C , o dit d'una altra manera, quan el factor de potència és igual a la unitat. Matemàticament:

$$\overline{Z} = R + (X_L - X_C)j = R + 0j \qquad (6)$$

Això representa que el circuit no té part reactiva i es comporta com un circuit purament òhmic. Les característiques d'un circuit ressonant són:

a) la intensitat del circuit en ressonància és màxima;
b) la potència activa també és màxima.



T.5.2. ***Obtenció de circuits ressonants RLC***

a) Amb un condensador de capacitat variable.
b) Amb acoblament de bobines en sèrie.
c) Treballant amb una freqüència anomenada de ressonància.

T.5.3. ***Freqüència de ressonància***. Si considerem que tenim un circuit amb freqüències variables, la de ressonància es pot obtenir a partir de la condició de ressonància: $X_L = X_c$; això representa: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$

D'aquí s'obté que: $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, que és la freqüència de ressonància d'un circuit en sèrie RLC.

Tornem-hi…

P.5.1. Un circuit elèctric conté una autoinducció de 0,1 H i una resistència òhmica de 100 O, i l'alimenta un generador de 4 V de tensió eficaç i 1000 Hz de freqüència. Calculeu la capacitat del condensador que col·locat en sèrie origina un circuit ressonant. Quant val la intensitat d'aquest circuit? Sol.: 0,25 µF, 0,04 A

P.5.2. Si la intensitat màxima mesurada és I = 0,01 A en un circuit RLC en sèrie on: $V = 15/\sqrt{2}$ V; R = 100 O; L = L H i C = 0,1 µF i ? = 200p rad/s , determineu: (*a*) el coeficient d'autoinducció L; (*b*) la capacitat del condensador que s'ha de connectar **en sèrie** amb C = 0,1μF per tal que el circuit entri en ressonància. Sol.: L = 27,7 H; C' = 1 μF.

P.5.3. Calculeu la reactància, el desfasament del corrent i la freqüència de ressonància del circuit RLC, on R = 40 O; L = 0,1 H i C = 10μF i ? = 120 p rad/s. Sol.: 231 Ω, 1.40 rad i f_0 = 159 Hz.

P.5.4. Calculeu la reactància, el desfasament del corrent i la freqüència de ressonància del circuit RLC, on R = 100 O; L $= \frac{1}{\pi}$ H i C $= \frac{10}{\pi}$ μF i ? = 100 p rad/s. Sol.: $\overline{Z} = 100 - 900\,j\Omega$, 83,66º i $\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{10}} s^{-1}$.