ÀLGEBRA MATRICIAL: DETERMINANTS

CARLES CASSÚ
JOAN BONET
XAVIER BERTRAN
J. CARLES FERRER

Universitat de Girona

$$(g \cdot f)(x) = g[f(x)] = g(2x+3)$$

ÀLGEBRA MATRICIAL: DETERMINANTS

Guia didàctica de la Matemàtica universitària

ÀLGEBRA MATRICIAL: DETERMINANTS

Carles Cassú, Joan Bonet,
Xavier Bertran, Joan Carles Ferrer

Universitat de Girona
Departament d'Economia

Dades recomanades per la Biblioteca de la UdG

CIP 512.643 ALG

Àlgebra matricial: determinants / Carles Cassú ... [et al.]. - Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 1995. - p. ; cm. - (Guia didàctica de la matemàtica universitària ; 4)
ISBN 84-88762-39-9
I. Cassú, Carles II. Universitat de Girona. Departament d'Economia
1.Determinants 2. Determinants - Problemes, exercicis, etc.

CIP 512.643 ALG

Primera edició: gener de 1996

Amb la col·laboració del Comissionat per a Universitats i Recerca i del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya

Edita: Servei de Publicacions de la Universitat de Girona

Assessorament lingüístic: Servei de Normalització Lingüística de la Universitat de Girona

Universitat de Girona
Edifici Les Àligues
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel. (972) 41 82 06 - Fax (972) 41 80 31

© Carles Cassú, Joan Bonet, Xavier Bertran, Joan Carles Ferrer

ISBN: 84-88762-39-9
Dipòsit legal: GI-31-96

Carles Cassú és doctor en Ciències i catedràtic d'Escola Universitària de la UdG.
Joan Bonet, Xavier Bertran, i Joan Carles Ferrer són llicenciats en Ciències Matemàtiques i professors titulars d'Escola Universitària del Departament d'Economia de la UdG.

Sota les sancions establertes per les lleis, queden rigorosament prohibides, sense l'autorització per escrit dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol mitjà o procediment –incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic– i la distribució d'exemplars d'aquesta edició mitjançant lloguer o préstec públics.

PRÒLEG

Oferim als estudiants universitaris i als lectors interessats aquesta guia didàctica de la matemàtica universitària com a fruit dels nostres anys de docència de les matemàtiques a la Universitat. El resultat final ha esdevingut una col.lecció de setze petits volums agrupats en els dos m˜Oduls d'Àlgebra Lineal i de Càlcul Infinitesimal.

Per raons de contingut, el mòdul d'Àlgebra lineal s'ha subdividit en les tres parts corresponents d'Àlgebra moderna (dos volums: Conjunts i Estructures), Àlgebra matricial (tres volums: Matrius, Determinants i Sistemes d'equacions) i Àlgebra vectorial (tres volums: Vectors, Endomorfismes i Geometria analítica) i el mòdul de Càlcul infinitesimal agrupa les tres parts corresponents a Càlcul funcional (dos volums: Funcions i Continuïtat), Càlcul diferencial (quatre volums: Derivades, Corbes, Derivades parcials i Optimització) i Càlcul integral (dos volums: Integrals i Equacions diferencials).

Dins la part d'Àlgebra matricial, aquest volum, titulat *Determinants*, és continuació natural de l'anterior, *Matrius*, ja que el determinant és un valor numèric que s'associa a una matriu quadrada. Amb el seu estudi aconseguirem una notació millor i un criteri unificat de resolució de sistemes d'equacions, diagonalització de matrius, etc., com veurem en propers volums.

Pensem que, en l'estudi de la Matemàtica, l'alumne universitari podrà servir-se d'aquesta guia didàctica tant per a la confecció dels seus propis apunts com per a l'estudi dels diferents temes que conformen les assignatures corresponents a les matèries tractades. Per aquest motiu es presenta una breu *Bibliografia escollida* classificada en bàsica i addicional, segons el grau de dificultat que presenta.

Exposem el *Programa* i la *Simbologia*, on indiquem els conceptes que la integren, conjuntament amb el simbolisme que farem servir al llarg de l'obra. Hem procurat fer un programa racional en què els conceptes es van deduint els uns dels altres de manera lògica.

En cada volum es destaca especialment el contingut en *Conceptes* i *Exemples*, de gran importància per a la comprensió de les matèries tractades, en les quals, sovint, es prescindeix de demostracions formalistes d'acord amb l'esperit de l'obra, que, com el seu títol indica, pretén ser una guia didàctica.

A continuació presentem una *Formulació matemàtica*, expressada en símbols formals dels conceptes estudiats, que ajudaran, sens dubte, a la rigorositat en la resolució de qüestions i problemes.

Continuem el desenvolupament amb la part dedicada a l'estudi de *Problemes resolts*. És important que l'estudiant comprengui fins l'últim detall aquests problemes, que, en realitat, són una continuïtat en grau de dificultat dels exemples senzills estudiats anteriorment.

Presentem després una col.lecció de *Problemes proposats* amb la intenció que el lector els resolgui de manera natural mitjançant els coneixements adquirits als apartats anteriors.

A l'apèndix s'inclou una *Prova d'autoavaluació* que consta d'una sèrie de "problemes parametritzats"; és a dir, problemes que depenen d'un paràmetre (a=1,2,3,4). Per a cada valor del paràmetre la solució serà diferent i estarà inclosa entre alguna de les vuit possibles. Aquest tipus de problemes es podrà resoldre quatre vegades amb números diferents.

Finalment, a més de la *Bibliografia escollida*, un *Glossari* de tots els conceptes matemàtics exposats al llarg de l'obra en facilita la ràpida localització.

Girona, novembre de 1995

Els autors

Capítol 1: **Determinants**

a) BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

Bàsica:

ALEGRE, P. *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1.* P15/22 i P59/82.

SAMAMED, O. *Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría.* P75/107.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Lineal.* P290/329.

GUTIERREZ GOMEZ, A. *Álgebra Lineal. Tomo (II).* P168/194 i P203/219.

AYRES, F. *Matrices.* P20/38.

RODRIGUEZ, A. *Matemáticas para economistas* P143/160.

CANCELO, J. R. *Problemas de Álgebra Lineal para Economistas. Tomo I.* P191/291.

HERAS, A. *Problemas de Álgebra Lineal para la Economía.* P6/12 i P31/43.

MUÑOZ, F. *Manual de Álgebra Lineal.* P20/31 i P52/58.

Addicional:

DOWLING, E.T. *Matemáticas para Economistas.* P208/228.

THOMAS ARA, L. *Álgebra Lineal.* P231/254.

PRIETO, E. *Matemáticas para Economistas. Álgebra Lineal.* P143/175.

BOADAS, J. *Álgebra Moderna a través de los problemas. Tomo II.* P158/233.

DIAZ HERNANDO, J. A. *Álgebra, Geometría, Cálculo. Tomo II.* P159/198.

DIEGO, B. *Problemas de Álgebra y Geometría. Problemas de Álgebra Lineal.* P43/84.

b) PROGRAMA I SIMBOLOGIA

1.1 INTRODUCCIÓ ALS DETERMINANTS

1) **Aplicació determinant.** Matriu quadrada i determinant (A). Aplicació determinant (det), axiomes de definició.
2) **Inversions d'una permutació.** Permutació (σ), conjunt de les permutacions ($\mathcal{P}_n$), nombre total. Ordre natural, permutació principal (σ_1), termes en successió i en inversió, nombre total d'inversions ($i(\sigma)$), permutacions parelles i imparelles, signatura d'una permutació ($\varepsilon(\sigma)$). Definició de determinant.
3) **Determinants de segon i tercer ordre.** Determinants de 2n ordre, els determinants com una eina de càlcul. Determinants de 3r ordre, regla de Sarrus, sumands positius i negatius, regla de les columnes agregatives.
4) **Propietats dels determinants.** Algunes propietats dels determinants: línia nul·la, línies iguals o proporcionals, combinació lineal de línies, etc.

1.2 DETERMINANTS D'ORDRE SUPERIOR

1) **Mètode del pivot.** Passos que s'han de seguir, columna de sumes, elements pivot.
2) **Menors i adjunts d'un element.** Submatriu quadrada i menor, menor complementari d'un element ($|A_{ij}|$). Paritat i signatura (ε_{ij}) d'índexs, adjunt d'un element ($|\mathcal{A}_{ij}|$), propietats. Regla de Laplace, reducció de l'ordre d'un determinant, obtenció d'elements nuls. Matriu adjunta ($\mathcal{A}$) i determinant adjunt ($|\mathcal{A}|$), propietats.
3) **Menors i adjunts generalitzats.** Menor ($|M_{K,L}|$), ordre d'un menor (r), conjunts d'índexs de files (K) i de columnes (L), tipus de menors. Menor complementari d'una submatriu ($|A_{K,L}|$), ordre del menor complementari (r'). Suma d'índexs (s_{ij}), signatura d'índexs (ε_{ij}), adjunt generalitzat ($|\mathcal{A}_{K,L}|$). Regla de Laplace generalitzada.
4) **Menors principals.** Definició de menor principal ($|M_K|_r$), conjunt de línies (K), ordre (r), nombre total de menors principals. Teorema de Jacobi, menor principal de la matriu adjunta ($|\mathcal{M}_K|_r$).

1.3 APLICACIONS A LES MATRIUS

1) **Rang i matriu inversa.** Càlcul del rang d'una matriu per determinants, menor orlat. Càlcul de la matriu inversa per adjunts.
2) **Determinants de matrius especials.** Determinants de matrius triangulars i ortogonals, determinants de matrius semblants, determinant de Vandermonde ($|D_V|$). Determinants de matrius rectangulars, determinant generalitzat ($|A|$), matrius horitzontals i verticals.

c) CONCEPTES I EXEMPLES

1.1 INTRODUCCIÓ ALS DETERMINANTS

1.1.1 APLICACIÓ DETERMINANT. Sabem que una *matriu quadrada* A_n, on els seus termes a_{ij} són elements d'un cos K, és una disposició rectangular que està composta per n files i n columnes d'elements de K. Generalment, K és el cos dels nombres reals, i en aquest cas els elements que componen la matriu són números. Com veurem, el *determinant* és un valor numèric que s'assigna a una matriu quadrada. Quant a la notació, per distingir matriu de determinant, com que expressàvem les matrius entre parèntesis, $A=(a_{ij})$, ara el determinant el posarem entre dues barres verticales, $|A|=|a_{ij}|$.

Exemple 1. Per a la matriu quadrada A de tercer ordre següent, el seu determinant $|A|$ és

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Més endavant veurem que aquest determinant val $|A|=54$.

Anomenarem *aplicació determinant*, det, una aplicació entre el conjunt de les matrius quadrades d'ordre n, $\mathcal{M}_n$, definides en el cos K de manera que a cada matriu quadrada A li correspon un valor ben "determinat" del cos K, $|A|$, que anomenarem *determinant de la matriu*. Per tant, escriurem $\det(A)=|A|$.

L'aplicació haurà de complir una sèrie de requisits o *axiomes de l'aplicació determinant*. Ho expressarem matemàticament emprant les columnes de la matriu, encara que la definició és equivalent si es fa amb les files:

(1) SUMA DE LÍNIES. Si una línia d'una matriu és suma de dos sumands, llavors el seu determinant és igual a la suma dels dos determinants formats pel primer i el segon sumand:

$$\det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_i+\mathbf{c}_j \ldots \mathbf{c}_n) = \det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_n) + \det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_j \ldots \mathbf{c}_n)$$

(2) PRODUCTE PER UN ESCALAR. Si un escalar (número) multiplica tota una línia d'una matriu, llavors el seu determinant és igual a l'escalar multiplicat pel determinant de la matriu original. És a dir, s'ha tret factor comú l'escalar:

$$\det(\mathbf{c}_1 \ldots \alpha.\mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_n) = \alpha.\det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_n)$$

(3) ALTERNANÇA. Si es permuten dues línies d'una matriu, llavors el seu determinant té signe oposat al determinant de la matriu original:

$$\det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_j \ldots \mathbf{c}_n) = -\det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_j \ldots \mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_n)$$

(4) NORMALITAT. El determinant de la matriu unitat és igual a la unitat:

$$\det(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n) = 1$$

Exemple 2. Indiquem amb matrius particulars els quatre axiomes anteriors, on hem de tenir en compte que encara no coneixem mètodes pràctics per calcular els valors dels determinants, cosa que veurem més endavant. L'exemple serveix únicament per a constatar els axiomes de la definició per un cas concret, i el lector hi pot tornar després de l'apartat 1.1.3. Prendrem com a base la matriu A de l'exemple anterior, on el determinant val |A|=54.

Primer axioma:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&5&3\\4&2&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&1+2\\4&2&2+4\\7&8&6+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&1\\4&2&2\\7&8&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&5&2\\4&2&4\\7&8&3\end{vmatrix}=(-36)+90=54$$

Segon axioma:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&5&3\\4&2&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&3.1\\4&2&3.2\\7&8&3.3\end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix}1&5&1\\4&2&2\\7&8&3\end{vmatrix}=3.18=54$$

Tercer i quart axiomes:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&5&3\\4&2&6\\7&8&9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3&5\\4&6&2\\7&9&8\end{vmatrix}=-(-54)=54 \qquad |I|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$

1.1.2 INVERSIONS D'UNA PERMUTACIÓ. Per trobar l'aplicació determinant que verifiqui els axiomes anteriors, ens servirem del concepte d'"inversions d'una permutació", ja estudiat al volum 2.

Recordem que, donat un conjunt finit d'elements d'un cos totalment ordenat K, $A=\{a_1, a_2,\dots, a_n\}$, una *permutació* ($\sigma$) és una aplicació bijectiva del conjunt indexat I_n al conjunt A. En altres paraules, una permutació és una certa ordenació dels elements d'un conjunt. Representarem per $\mathcal{P}_n$ el *conjunt de les permutacions* on el seu *nombre total* (o cardinal) és n!.

Exemple 3. Sigui el conjunt de xifres imparelles A={1,3,5,7,9}. Si volem formar tots els números possibles de 5 xifres imparelles no repetides, haurem d'obtenir les permutacions de A. En total n'hi ha 5!=5.4.3.2.1=120. Algunes són 37.591, 59.317, 71.953... Observem que són reordenacions dels elements del conjunt donat.

Com que els termes de la permutació són d'un cos totalment ordenat K, n'hi haurà una on els seus termes estaran completament ordenats; és a dir, els seus termes seguiran l'*ordre natural*. Serà la més senzilla de totes elles i en direm *permutació principal* (σ_1).

Donats dos termes qualssevol (a_i, a_j) d'una certa permutació, si segueixen l'ordre natural (és a dir, $a_i<a_j$), direm que són *termes en successió*. En canvi, si no segueixen l'ordre natural ($a_i>a_j$), direm que són *termes en inversió*. Per a una permutació donada serà interessant saber el *nombre total d'inversions*, $i(\sigma)$, i això ho aconseguirem prenent les combinacions de dos en dos de tots els termes de la permutació, i observant si estan en o no en inversió.

Segons que el nombre total d'inversions sigui parell o imparell, podrem classificar les permutacions en *permutacions parelles* i *imparelles*. D'altra banda, la *signatura d'una permutació*, $\varepsilon(\sigma)$, és el valor numèric que es dóna a una permutació: si és parella val +1 i si és imparella val -1.

Exemple 4. Pel conjunt A={1,3,5,7,9} de l'exemple anterior, la permutació principal és el número σ_1=13.579.

Considerem la permutació 37.591, on agafarem els termes en combinacions de dos: 37, 35, 39, 31 ; 75, 79, 71 ; 59, 51 ; 91. Comptem els termes que no segueixen l'ordre natural, és a dir, les inversions: 31, 75, 71, 51 i 91. En total, 5 inversions. Per tant, com que 5 és imparell, es tracta d'una permutació imparella de signatura -1.

Fem el mateix per a la permutació 59.317, en què, com abans, prenem els termes en combinacions de dos: 59, 53, 51, 57 ; 93, 91, 97 ; 31, 37 ; 17. Les inversions són 53, 51, 93, 91, 97 i 31. Com que en total hi ha 6 inversions, la permutació és parella i amb signatura+1.

Pots comprovar també que la permutació 71.953 és parella, ja que també té 6 inversions.

A partir d'aquí, indiquem la *definició de determinant.* Sigui $A=(a_{ij})$ una matriu quadrada d'ordre n i sigui σ una permutació del conjunt indexat $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$.

«El determinant d'una matriu d'ordre n és igual a la suma algebraica de tots els productes possibles de n termes de la matriu, ordenats per files, de manera que no n'hi hagi dos de la mateixa fila ni dos de la mateixa columna, i tots portant de coeficient la signatura de la permutació»

Ho expressarem simbòlicament amb el sumatori següent:

$$|A| = \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma).a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Aquesta definició és difícil de comprendre, per la qual cosa ho explicarem amb un cas particular. Després, una vegada compresa la idea, caldria repassar la definició.

Exemple 5. Partim d'una matriu genèrica A de tercer ordre i apuntem tots els productes possibles de tres termes, de manera que no n'hi hagi dos a la mateixa fila ni a la mateixa columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{cases} p_1=a_{11}.a_{22}.a_{33} \\ p_2=a_{12}.a_{23}.a_{31} \\ p_3=a_{13}.a_{21}.a_{32} \end{cases} \text{ i } \begin{cases} p_4=a_{13}.a_{22}.a_{31} \\ p_5=a_{12}.a_{21}.a_{33} \\ p_6=a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{cases}$$

En aquests productes, els índexs de les files són en l'ordre natural, mentre que els de les columnes formen les permutacions σ_1=(1,2,3), σ_2=(2,3,1), σ_3=(3,1,2), σ_4=(3,2,1), σ_5=(2,1,3) i σ_6=(1,3,2).

Mirarem ara les inversions de cada permutació i en deduirem la signatura. Per exemple per σ_2 tenim 23, 21 i 31. Les inversions són 21 i 31. Com que en total són dos, la permutació és parella i la signatura +1. El sumand corresponent en el determinant serà $+p_2$.

Si ho féssim per σ_5 veuríem que hi ha una sola inversió, 21, d'on la permutació seria imparella i la signatura -1. El sumand seria $-p_5$.

Procedint així amb totes les permutacions trobaríem que el determinant és donat per $|A|=+p_1+p_2+p_3-p_4-p_5-p_6$.

Finalment, indiquem que es pot provar que l'aplicació determinant definida a partir de les inversions d'una permutació compleix efectivament els quatre axiomes de l'apartat anterior.

1.1.3 DETERMINANTS DE SEGON I TERCER ORDRE. A partir de la definició anterior, es dedueix que un *determinant de segon ordre* és donat pel producte dels termes de la diagonal principal menys el producte dels termes de la diagonal secundària. Així, doncs,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Podem comprovar ara que la definició anterior de determinant compleix els quatre axiomes exigits.

Exemple 6. Partim d'una matriu de 2n ordre i trobem el determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5.8 - 4.7 = 40-28 = 12$$

Primer axioma:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1+3 \\ 7 & 2+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (5.2-1.7)+(5.6-3.7) = 3+9 = 12$$

Segon axioma:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4.1 \\ 7 & 4.2 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4.(10-7) = 4.3 = 12$$

Tercer i quart axiomes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -(28-40) = -(-12) = 12 \qquad |I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

En aquest punt cal justificar la introducció dels determinants com a *eina de càlcul*, ja que els emprarem principalment en la resolució de sistemes d'equacions lineals. Sigui, per exemple, un sistema de dues equacions amb dues incògnites que, si es resol per algun mètode clàssic, dóna com a solució, si $a.d-b.c \neq 0$,

$$\begin{cases} a.x + b.y = m \\ c.x + d.y = n \end{cases} \Rightarrow x = \frac{m.d-b.n}{a.d-b.c} \text{ i } y = \frac{a.n-m.c}{a.d-b.c}$$

Ara bé, per recordar els valors de les incògnites, podem emprar la noció de determinant com a regla mnemotècnica, apuntant el determinant dels coeficients D_c, el de la x, D_x, i el de la y, D_y,

$$D_c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$$

D'aquesta manera es pot veure que $x=D_x/D_c$ i $y=D_y/D_c$, expressió anomenada *regla de Cramer*, molt més fàcil de recordar.

Exemple 7. Resolem el sistema següent per determinants, aplicant la regla de Cramer

$$\begin{cases} 5.x + 2.y = 32 \\ 7.x + 3.y = 46 \end{cases}$$

Formem els tres determinants

$$D_c = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad D_x = \begin{vmatrix} 32 & 2 \\ 46 & 3 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{i} \quad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 32 \\ 7 & 46 \end{vmatrix} = 6$$

Per tant, $x=4/1=4$ i $y=6/1=6$.

Per als *determinants de tercer ordre*, el seu valor numèric ja l'hem introduït parcialment en l'exemple 5. El valor del determinant és:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{cases}$$

Per recordar aquesta expressió ens servirem de la *regla de Sarrus*, on dels tres *sumands positius* el primer està format pel producte dels termes de la diagonal principal i els altres dos pels productes de dos termes paral·lels a la diagonal principal pel "vèrtex oposat":

$$p_1: \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}, \quad p_2: \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad p_3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Quant als tres *sumands negatius*, diem que s'obtenen de manera anàloga, però canviant la diagonal principal per la secundària:

$$p_4: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad p_5: \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad p_6: \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Amb la regla de Sarrus obtenim el valor d'un determinant de tercer ordre, que és $|A|=(p_1+p_2+p_3)-(p_4+p_5+p_6)$.

Exemple 8. En l'exemple 1 havíem trobat $|A|=54$. Comprovem amb la regla de Sarrus que, efectivament, aquest és el seu valor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1.2.9+5.6.7+4.8.3) - (3.2.7+5.4.9+6.8.1)$$

Operant, $|A| = (18+210+96) - (42+180+48) = 324-270 = 54$.

Un mètode alternatiu a la regla de Sarrus consisteix a disposar la matriu original de manera diferent i emprar l'anomenada *regla de les columnes agregatives*, que consisteix a afegir darrere la matriu les dues primeres columnes i on els sumands positius (negatius) són el producte dels termes de la diagonal principal (secundària) més els productes dels termes de les de les dues línies paral·leles.

Exemple 9. Calculem el determinant de l'exemple anterior apuntant els sumands positius

$$P^+ = \begin{bmatrix} \boxed{1}\boxed{5}\boxed{3} & 1 & 5 \\ 4 & \boxed{2}\boxed{6}\boxed{4} & 2 \\ 7 & 8 & \boxed{9}\boxed{7}\boxed{8} \end{bmatrix} = 1.2.9 + 5.6.7 + 3.4.8 = 18+210+96 = 324$$

Els sumands negatius seran

$$P^- = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \boxed{3}\boxed{1}\boxed{5} \\ 4 & \boxed{2}\boxed{6}\boxed{4} & 2 \\ \boxed{7}\boxed{8}\boxed{9} & 7 & 8 \end{bmatrix} = 3.2.7 + 1.6.8 + 5.4.9 = 42+48+180 = 270$$

El determinant valdrà $|A| = P^+ - P^- = 324-270 = 54$, com ja sabíem.

1.1.4 PROPIETATS DELS DETERMINANTS. Sabem que, per tal que el valor donat per la regla de Sarrus sigui el determinant d'una matriu de tercer ordre, s'han de complir necessàriament els quatre axiomes de la definició. Com a exercici, el lector pot tornar a l'exemple 2 per fer la comprovació en un cas particular.

Si partim dels quatre axiomes anteriors, es pot demostrar que els determinants compleixen, a més, les *propietats* següents, on les seves línies les hem simbolitzat per columnes (el mateix podíem haver fet amb les files):

(5) LÍNIA NUL·LA. Si una matriu té una línia (fila o columna) formada per zeros, llavors el seu determinant és nul.

(6) LÍNIES IGUALS (O PROPORCIONALS). Si una matriu té dues línies iguals (o proporcionals), el seu determinant també és nul.

(7) COMBINACIÓ LINEAL. Si una línia d'una matriu és combinació lineal d'altres línies paral·leles, el seu determinant és nul.

Exemple 10. Aplicant la regla de Sarrus, comprova que són nuls els determinants següents, on en el segon $\mathbf{c}_3=2.\mathbf{c}_1$ i en l'últim $\mathbf{f}_3=2.\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_1$.

$$|A|=\begin{vmatrix}5&3&1\\0&0&0\\2&8&4\end{vmatrix}\ ,\ |B|=\begin{vmatrix}1&5&2\\3&7&6\\4&9&8\end{vmatrix}\ \text{ i }\ |C|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

(8) REDUCCIÓ DE DETERMINANTS. Si sumem a una línia d'una matriu una combinació lineal d'altres línies paral·leles, llavors el seu determinant serà el mateix que el de la matriu original.

Exemple 11. Amb aquesta propietat podrem fer que s'anul·lin alguns termes de la matriu. Si en el determinant següent, $|A|=\ldots=17$, substituïm la fila $\mathbf{f}_2$ per la combinació lineal $\mathbf{g}_2=\mathbf{f}_2-2.\mathbf{f}_1$, tindrem

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&4\\2&8&7\\0&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&4\\0&2&-1\\0&5&6\end{vmatrix}=(12+0+0)-(0+0-5)=17.$$

Aquest càlcul és més ràpid d'obtenir, ja que hi ha un zero de més.

(9) PRODUCTE DE MATRIUS. El determinant d'un producte de matrius és igual al producte dels seus determinants, $|A\bullet B|=|A|\cdot|B|$.

Exemple 12. Per a les matrius següents A i B, calcula el producte matricial A•B.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}\ \text{ i }\ A\bullet B=\ldots=\begin{pmatrix}7&1&2\\13&1&2\\5&0&1\end{pmatrix}$$

Si calcules ara els determinants, obtindràs $|A|=-2$, $|B|=3$ i $|A\bullet B|=-6$. Evidentment, $|A\bullet B|=|A|\cdot|B|$.

(10) MATRIU INVERSA. El determinant de la matriu inversa és igual a l'invers del determinant de la matriu original, $|A^{-1}|=1/|A|$.

Exemple 13. Donada la matriu A, pots trobar-ne la inversa A^{-1} per algun dels mètodes estudiats. Trobaràs que

$$A=\begin{pmatrix}4&1&7\\9&3&5\\6&2&4\end{pmatrix}\ \text{ i }\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1&5&-8\\-3&-13&43/2\\0&-1&3/2\end{pmatrix}$$

Si calcules els determinants, veuràs que $|A|=2$ i que $|A^{-1}|=1/2$.

(11) HOMOTÈCIA. Si multipliquem un número per una matriu d'ordre n, llavors el seu determinant queda multiplicat per l'enèsima potència d'aquest número, $|k.A|=k^n.|A|$.

Exemple 14. Per trobar el determinant de la matriu A^{-1} de l'exemple anterior podiem haver multiplicat tota la matriu per 2, i obtindríem,

$$|2.A^{-1}|=\left|2.\begin{pmatrix}1 & 5 & -8\\ -3 & -13 & 43/2\\ 0 & -1 & 3/2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}2 & 10 & -16\\ -6 & -26 & 43\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=\ldots=4$$

Si apliquéssim la propietat d'homotècia, $|2.A^{-1}|=2^3.|A^{-1}|=8.(1/2)=4$, obtindríem un resultat igual a l'anterior.

Com a conseqüència de la propietat anterior, veiem que «per multiplicar un número per un determinant, només s'ha de multiplicar una sola de les seves línies per aquest número».

Exemple 15. Calculem el determinant de la matriu A^{-1} fent servir aquesta conseqüència:

$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1 & 5 & -8\\ -3 & -13 & 43/2\\ 0 & -1 & 3/2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 5 & -16\\ -3 & -13 & 43\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=\ldots=\frac{1}{2}.(1)=\frac{1}{2}.$$

(12) TRANSPOSICIÓ. El determinant de la matriu transposada és igual al determinant de la matriu original, $|A'|=|A|$.

Exemple 16. Hem trobat que $|A|=2$ en la matriu en estudi de l'exemple 13. Fem la seva transposada i veurem que el seu determinant no canvia:

$$|A'|=\begin{vmatrix}4 & 9 & 6\\ 1 & 3 & 2\\ 7 & 5 & 4\end{vmatrix}=(48+126+30)-(126+36+40)=\ldots=2.$$

1.2 DETERMINANTS D'ORDRE SUPERIOR

1.2.1 MÈTODE DEL PIVOT. A continuació, analitzarem els mètodes per a calcular determinants d'ordre superior a 3. A la pràctica, ja no es podrà emprar cap regla similar a la de Sarrus (per un de 4t ordre hi hauria 4!=4.3.2.1=24 productes, per un de 5è ordre 5!=120 productes, etc.).

Un mètode senzill i amb poques possibilitats d'error és el *mètode del pivot*. Expliquem-ho per a una matriu de 4t ordre.

PRIMER PAS. Escrivim tot el bloc de termes de la matriu, separats a la dreta per una barra vertical on després col·locarem la *columna de sumes*, $S_1=(s_1\ s_2\ s_3\ s_4)'$, on cadascun d'aquests termes és igual a la suma de tots els termes de la matriu que són a la mateixa fila. Aquesta columna de sumes serveix únicament per a comprovar els càlculs.

Requadrarem també el terme situat a la part superior esquerra, a_{11}, que serà l'*element pivot*, $p_1=a_{11}$.

SEGON PAS. Aplicarem després l'algorisme (operacions) del pivot, ja estudiat al volum anterior. És a dir, deixarem la primera fila igual, substituirem per zeros els termes sota el pivot i farem els determinants de segon ordre amb els altres termes, incloent-hi també els de la columna de sumes.

TERCER I QUART PASSOS. Partint del nou element pivot $p_2=b_{22}$ (el que queda a la 2a fila i a la 2a columna), deixarem la 2a fila igual, posarem zeros sota el b_{22} i farem les operacions pertinents. Continuarem així també en el quart pas, on tindrem el nou pivot $p_3=c_{33}$. Finalment, després de triangularitzar la matriu, el darrer terme de la diagonal principal el designarem per $p_4=d_{44}$.

Es pot demostrar que el determinant d'una matriu de 4t ordre, A_4, és expressat per $|A_4|=p_4/[(p_1)^2.p_2]$. Fixem-nos que aquesta expressió pot posar-se en la forma $|A_4|=(p_4)^1.(p_3)^0.(p_2)^{-1}.(p_1)^{-2}$.

En general, si volem trobar pel mètode del pivot el determinant d'una matriu quadrada d'ordre n, haurem d'emprar la fórmula

$$|A_n|=(p_n)^1.(p_{n-1})^0.(p_{n-2})^{-1}.....(p_1)^{2-n}.$$

Observem que la diferència entre el subíndex i l'exponent sempre és igual a n-1.

Exemple 17. Suposem que volem calcular el determinant següent:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Podem aplicar el mètode del pivot, on separarem per una barra vertical la columna de les sumes

$$M=\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 6 & 7 & 17 \\ 2 & 5 & 8 & 4 & 19 \\ 4 & 8 & 5 & 2 & 19 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 17 \end{array}\right]\equiv\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 7 & 17 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 & -10 & -15 \\ 0 & -4 & -19 & -26 & -49 \\ 0 & -15 & -39 & -48 & -102 \end{array}\right]\equiv$$

$$\equiv\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 7 & 17 \\ 0 & -1 & -4 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -14 & -11 \\ 0 & 0 & -21 & -102 & -123 \end{array}\right]\equiv\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 7 & 17 \\ 0 & -1 & -4 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -14 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-600} & -600 \end{array}\right]$$

Veiem que els elements pivot són $p_1=1$, $p_2=-1$, $p_3=3$ i $p_4=-600$. Per tant, el determinant de quart ordre val

$$|A|=(p_4)^1.(p_3)^0.(p_2)^{-1}.(p_1)^{-2}=(-600)^1.3^0.(-1)^{-1}.1^{-2}=-600.(-1)=600.$$

1.2.2 MENORS I ADJUNTS D'UN ELEMENT. Sabem ja que una *submatriu* és una matriu dins una matriu donada. En el cas que la submatriu sigui quadrada, anomenarem *menor* (o també *determinant menor*) el valor del seu determinant i el simbolitzarem per $|M|$.

D'altra banda, donada una matriu quadrada A, definirem el *menor complementari d'un element* a_{ij} com el determinant de la submatriu obtinguda eliminant la fila i la columna on està situat l'element. Representem per $|A_{ij}|$ el determinant menor complementari de a_{ij}.

Anomenarem *paritat d'índexs* d'un element el valor parell o imparell de la suma d'índexs de fila i columna de l'element. Al mateix temps, direm que la *signatura d'índexs*, ε_{ij}, pren el valor +1 o -1 segons que la paritat d'índexs sigui parella o imparella. Matemàticament, la signatura és expressada per $\varepsilon_{ij}=(-1)^{i+j}$.

Finalment, definim l'*adjunt d'un element* com el producte de la signatura d'índexs pel determinant menor complementari. Si simbolitzem l'adjunt a_{ij} per $|\mathcal{A}_{ij}|$, tindrem $|\mathcal{A}_{ij}|=\varepsilon_{ij}.|A_{ij}|$.

Exemple 18. Donada la matriu A de l'exemple anterior ens fixem en els termes a_{23} i a_{42}, on requadrem (a la pràctica, tatxem) la fila i la columna a què pertanyen,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \boxed{6} & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{8} & \boxed{4} \\ 4 & 8 & \boxed{5} & 2 \\ 7 & 6 & \boxed{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 6 & 7 \\ 2 & \boxed{5} & 8 & 4 \\ 4 & \boxed{8} & 5 & 2 \\ \boxed{7} & \boxed{6} & \boxed{3} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Els termes o elements restants formen una submatriu quadrada, que té per determinant els anomenats menors complementaris

$$|A_{23}|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=-198 \quad \text{i} \quad |A_{42}|=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=\ldots=-86$$

Per al primer element a_{23}, la paritat d'índexs és imparella, ja que 2+3=5 és imparell. Per al segon, a_{42}, serà parella perquè 4+2=6 és parell.

Quant a la signatura d'índexs, diem que $\varepsilon_{23}=-1$ i $\varepsilon_{42}=+1$, ja que les seves paritats són imparella i parella, respectivament.

Els adjunts dels elements donats es trobaran fàcilment fent el producte de la signatura pel determinant menor complementari,

$$|\mathcal{A}_{23}|=\varepsilon_{23}.|A_{23}|=-1.(-198)=198 \qquad |\mathcal{A}_{42}|=\varepsilon_{42}.|A_{42}|=+1.(-86)=-86$$

Veurem ara dues *propietats dels adjunts* d'un element que tindran importància a l'hora de reduir determinants de 4t o 5è ordre o també per calcular la inversa d'una matriu per determinants:

PRIMERA PROPIETAT. La suma dels productes dels elements d'una línia d'una matriu pels seus adjunts respectius és igual al determinant de la matriu.

Exemple 19. Partim de la primera fila de la matriu A de quart ordre,

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{7} \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La primera propietat ens diu que es compleix

$$a_{11}.|\mathcal{A}_{11}|+a_{12}.|\mathcal{A}_{12}|+a_{13}.|\mathcal{A}_{13}|+a_{14}.|\mathcal{A}_{14}|=|A|$$

Trobarem tots aquests adjunts i col·locarem directament la signatura davant del seu determinant menor complementari,

$$|\mathcal{A}_{11}|=+\begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=+(+3)=3 \qquad |\mathcal{A}_{12}|=-\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-(-14)=14$$

$$|\mathcal{A}_{13}|=+\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=+(-86)=-86 \qquad |\mathcal{A}_{14}|=-\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}=-(-153)=153$$

Per tant, substituint, 1.(3)+3.(14)+6.(-86)+7.153)=...=600, resultat que coincideix efectivament amb el valor del determinant calculat anteriorment amb el mètode del pivot.

SEGONA PROPIETAT. La suma dels productes dels elements d'una línia d'una matriu pels adjunts dels elements corresponents a una línia paral·lela és igual a zero.

Exemple 20. Per a la matriu A anterior, prendrem els elements de la primera fila i els multiplicarem pels adjunts respectius de la segona fila, i comprovarem que el resultat és nul. És a dir,

$$a_{11}.|\mathcal{A}_{21}|+a_{12}.|\mathcal{A}_{22}|+a_{13}.|\mathcal{A}_{23}|+a_{14}.|\mathcal{A}_{24}|=0$$

Per operar còmodament, apuntarem de nou la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{8} & \boxed{4} \\ 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobem ara els adjunts dels elements requadrats

$$|\mathcal{A}_{21}|=-\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-(-21)=21 \qquad |\mathcal{A}_{22}|=+\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}=+(-102)=-102$$

$$|\mathcal{A}_{23}|=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=-(-198)=198 \qquad |\mathcal{A}_{24}|=+\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}=+(-129)=-129$$

Substituint tindrem 1.(21)+3.(-102)+6(198)+7.(-129)=...=0, amb la qual cosa queda comprovada la segona propietat dels adjunts.

La primera propietat dels adjunts ens servirà per a transformar un determinant en una combinació lineal de determinants d'ordre inferior, més ràpids de calcular. Aplicarem, doncs, aquesta propietat, que és coneguda com a *regla de Laplace.*

La regla anterior permet fer una *reducció de l'ordre d'un determinant.* Així, si hem de calcular un determinant de 4t ordre podrem desenvolupar per adjunts de la primera fila, i haurem de calcular quatre determinants de 3r ordre. Si fos un determinant de 5è ordre, necessitaríem calcular 5 determinants de 4t ordre, etc.

Per fer el càlcul més lleuger és convenient emprar la tècnica d'*obtenció d'elements nuls*, que consisteix a anul·lar, mitjançant combinacions lineals, tots els termes d'una línia, excepte un, i després utilitzar la regla de Laplace en aquesta línia. Així, si en un determinant de 4t ordre hem aconseguit, sumant combinacions lineals, que tots els termes de la primera fila, menys el primer, siguin nuls, tindrem:

$$|A|=a_{11}.|\mathcal{A}_{11}|+0.|\mathcal{A}_{12}|+0.|\mathcal{A}_{13}|+0.|\mathcal{A}_{14}|=a_{11}.|\mathcal{A}_{11}|$$

És a dir, el càlcul queda reduït a un determinant de 3r ordre.

Exemple 21. Apliquem la regla de Laplace al determinant |A| dels exemples anteriors. Si desenvolupem per adjunts de la primera columna, on el seu primer terme $a_{11}=1$, obtindrem

$$|A|=a_{11}.|\mathcal{A}_{11}|+a_{21}.|\mathcal{A}_{21}|+a_{31}.|\mathcal{A}_{31}|+a_{41}.|\mathcal{A}_{41}|$$

Per no calcular tants determinants, farem combinacions lineals perquè s'anul·lin els termes a_{21}, a_{31} i a_{41}.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -4 & -10 \\ 0 & -4 & -19 & -26 \\ 0 & -15 & -39 & -48 \end{vmatrix}\begin{matrix} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-2.f_1 \\ g_3=f_3-4.f_1 \\ g_4=f_4-7.f_1 \end{matrix}$$

Ara ens quedarà $|A|=1.|\mathcal{A}_{11}|+0.|\mathcal{A}_{21}|+0.|\mathcal{A}_{31}|+0.|\mathcal{A}_{41}|=|\mathcal{A}_{11}|$. Calculem, doncs, aquest adjunt,

$$|A|=|\mathcal{A}_{11}|=+\begin{vmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -4 & -19 & -26 \\ -15 & -39 & -48 \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 4 & 19 & 26 \\ 15 & 39 & 48 \end{vmatrix}=-(-600)=600.$$

valor que ja havíem trobat anteriorment, però que ara amb la regla de Laplace ens ha resultat més ràpid de calcular.

Si per una matriu quadrada A calculem els adjunts $|\mathcal{A}_{ij}|$ de cada element a_{ij}, i substituïm aquests elements pels adjunts respectius trobats, obtindrem una nova matriu que s'anomena *matriu adjunta* de l'anterior i que simbolitzem per $\mathcal{A}$. Per exemple, si la matriu A és de 4t ordre, tindrem:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} |\mathcal{A}_{11}| & |\mathcal{A}_{12}| & |\mathcal{A}_{13}| & |\mathcal{A}_{14}| \\ |\mathcal{A}_{21}| & |\mathcal{A}_{22}| & |\mathcal{A}_{23}| & |\mathcal{A}_{24}| \\ |\mathcal{A}_{31}| & |\mathcal{A}_{32}| & |\mathcal{A}_{33}| & |\mathcal{A}_{34}| \\ |\mathcal{A}_{41}| & |\mathcal{A}_{42}| & |\mathcal{A}_{43}| & |\mathcal{A}_{44}| \end{pmatrix}$$

Una *propietat* interessant de la matriu adjunta, deduïda directament de les dues propietats dels adjunts és que el producte de la matriu original per la transposada de la matriu adjunta és igual a la matriu escalar del determinant.

Matemàticament, es pot escriure com a $A\bullet\mathcal{A}'=|A|.I$.

Exemple 22. Per a la nostra matriu A de 4t ordre ja hem calculat els adjunts de les dues primeres línies. Aquests són

$|\mathcal{A}_{11}|=3$ $\quad|\mathcal{A}_{12}|=14$ $\quad|\mathcal{A}_{13}|=-86$ $\quad|\mathcal{A}_{14}|=153$

$|\mathcal{A}_{21}|=21$ $\quad|\mathcal{A}_{22}|=-102$ $\quad|\mathcal{A}_{23}|=198$ $\quad|\mathcal{A}_{24}|=-129$

Com a pràctica es poden calcular els adjunts de les dues últimes files. Obtindrem:

$|\mathcal{A}_{31}|=-129$ $\quad|\mathcal{A}_{32}|=198$ $\quad|\mathcal{A}_{33}|=-102$ $\quad|\mathcal{A}_{34}|=21$

$|\mathcal{A}_{41}|=153$ $\quad|\mathcal{A}_{22}|=-86$ $\quad|\mathcal{A}_{43}|=14$ $\quad|\mathcal{A}_{44}|=3$

Apuntem la matriu original A i l'adjunta $\mathcal{A}$, obtinguda aquesta última substituint cada terme de la matriu A pel seu adjunt respectiu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathcal{A}=\begin{pmatrix} 3 & 14 & -86 & 153 \\ 21 & -102 & 198 & -129 \\ -129 & 198 & -102 & 21 \\ 153 & -86 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

Notem que són del mateix ordre i, com a aspecte curiós d'aquest cas, observem que, començant per l'a_{11} i seguint en direccions paral·leles a la diagonal secundària a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}..., veurem que aquesta successió de termes és capicua.

Quant a la propietat de la matriu adjunta, es pot comprovar que es verifica la propietat assenyalada anteriorment, ja que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 3 & 21 & -129 & 153 \\ 14 & -102 & 198 & -86 \\ -86 & 198 & -102 & 14 \\ 153 & -129 & 21 & 3 \end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix} 600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 600 \end{pmatrix}$$

És a dir, es compleix que $A\bullet\mathcal{A}'=|A|.I$.

Per a algunes aplicacions pot resultar útil saber el *determinant adjunt*, $|\mathcal{A}|$, que és el determinant de la matriu adjunta. Es pot provar la *propietat* que el determinant adjunt coincideix amb la (n-1) èsima potència del determinant de la matriu original, $|\mathcal{A}| = |A|^{n-1}$.

Exemple 23. Com a pràctica de l'aplicació dels mètodes de reducció estudiats, explicarem com es calcula el determinant adjunt de la matriu A. Comencem traient factor comú 3 en la primera i l'última columnes i factor comú 2 en les columnes centrals,

$$|\mathcal{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 14 & -86 & 153 \\ 21 & -102 & 198 & -129 \\ -129 & 198 & -102 & 21 \\ 153 & -86 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 3.2.2.3. \begin{vmatrix} 1 & 7 & -43 & 51 \\ 7 & -51 & 99 & -43 \\ -43 & 99 & -51 & 7 \\ 51 & -43 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

A l'última columna li restem la primera i a la tercera li restem la segona. Després traiem factor comú 50 en les dues últimes columnes,

$$|\mathcal{A}| = 36. \begin{vmatrix} 1 & 7 & -50 & 50 \\ 7 & -51 & 150 & -50 \\ -43 & 99 & -150 & 50 \\ 51 & -43 & 50 & -50 \end{vmatrix} = 36.50.50. \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & -51 & 3 & -1 \\ -43 & 99 & -3 & 1 \\ 51 & -43 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Conservem la primera fila i fem les combinacions lineals adients, restant o sumant, de manera que obtinguem zeros en l'última columna, i, a continuació, desenvolupem per adjunts,

$$|\mathcal{A}| = 90.000. \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 1 \\ 8 & -44 & 2 & 0 \\ -44 & 92 & -2 & 0 \\ 52 & -36 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 90.000.(-1). \begin{vmatrix} 8 & -44 & 2 \\ -44 & 92 & -2 \\ 52 & -36 & 0 \end{vmatrix}$$

Podem continuar reduint el determinant i traient factor comú 4 en la primera i segona columnes i 2 en l'última i després sumant a la segona fila la primera

$$|\mathcal{A}| = -90.000.4.4.2. \begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ -11 & 23 & -1 \\ 13 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -2.880.000. \begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ -9 & 12 & 0 \\ 13 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalment, desenvolupant per adjunts de l'última columna i calculant el determinant de segon ordre resultant, obtenim:

$$|\mathcal{A}| = -2.880.000.(+1). \begin{vmatrix} -9 & 12 \\ 13 & -9 \end{vmatrix} = -2.800.000.(-75) = 216.000.000$$

Un valor ben gran! Podem comprovar així la propietat dels determinants adjunts, i veiem efectivament que

$$|A|^{n-1} = (600)^{4-1} = (600)^3 = 216.000.000 = |\mathcal{A}|$$

1.2.3 MENORS I ADJUNTS GENERALITZATS. Donada una matriu quadrada A d'ordre n, sabem que un *menor* és el determinant d'una submatriu quadrada d'aquesta matriu. Si el menor està format per r línies (r files i r columnes), direm que l'*ordre del menor* és r.

Hi haurà $C_{n,r}$ maneres (combinacions de n elements agafats de r en r) d'escollir les r files de les n possibles. El mateix podem dir per a les columnes. Conseqüentment, en una matriu A_n el nombre total de menors d'ordre r és donat per $(C_{n,r})^2$.

Exemple 24. Per a una matriu A de quart ordre (n=4), el nombre total de menors de segon ordre (r=2 files o 2 columnes) és:

$$(C_{4,2})^2 = \binom{4}{2}^2 = \left(\frac{4.3}{2.1}\right)^2 = 6^2 = 36$$

Simbolitzarem els menors per $|M_{K,L}|$, on K i L representen respectivament els *conjunts d'índexs per files i columnes* que formen part del menor. Segons l'ordre pot haver-hi diferents *tipus de menors*. (Ho estudiarem per a una matriu de quart ordre):

MENORS D'ORDRE 1. Són determinants formats per 1 fila i 1 columna; és a dir, constaran d'un sol element. Lògicament, en total n'hi ha $(C_{4,1})^2=4^2=16$, els 16 termes de la matriu.

MENORS D'ORDRE 2. Estan formats per 2 files i 2 columnes. Com ja hem vist, en total n'hi ha 36.

MENORS D'ORDRE 3. Són els que consten de 3 files i 3 columnes i en total se'n poden formar $(C_{4,3})^2=4^2=16$. És lògic que hi hagi tants menors d'ordre 3 com d'ordre 1, ja que els menors d'ordre 3 no són més que els menors complementaris dels termes que no són en cap de les línies del menor.

Exemple 25. Considerem la matriu A emprada en exemples anteriors

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples de menors de primer ordre poden ser $|M_{2,3}|=8$ i $|M_{4,2}|=6$. Com que són de 1r ordre, també els podem simbolitzar per $|M_{23}|$ i $|M_{42}|$, així ens estalviem la coma i simplifiquem la notació.

Per als de segon ordre podem considerar els $|M_{12,34}|$ i $|M_{24,12}|$, on el primer està format per les files 1 i 2 i les columnes 3 i 4,

$$|M_{12,34}|=\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=24-56=-32 \quad \text{i} \quad |M_{24,12}|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}=12-35=-23$$

Finalment, com a menors de 3r ordre podem esmentar com a exemples el $|M_{123,124}|$ i el $|M_{234,234}|$,

$$|M_{123,124}|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}=-14 \quad \text{i} \quad |M_{234,234}|=\begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3$$

De manera natural, definirem ara el *menor complementari d'una submatriu*. Donada la submatriu $M_{K,L}$ d'ordre r, formada per les r files del conjunt K i les r columnes del L, el seu menor complementari és el determinant de la nova submatriu que s'origina en suprimir les r files i les r columnes en la submatriu donada.

Simbolitzarem el menor complementari de la submatriu $M_{K,L}$ per $|A_{K,L}|$. A més, l'*ordre del menor complementari*, r', és evidentment igual a r'=n-r. També, i segons l'ordre, hi haurà diferents tipus de menors complementaris: d'ordre 1, d'ordre 2 i d'ordre 3.

Exemple 26. Per a la matriu A trobarem els menors complementaris dels menors de l'exemple anterior. Comencem pels $|M_{2,3}|$ i $|M_{4,2}|$

$$|A_{2,3}|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=-198 \quad \text{i} \quad |A_{42}|=\begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3$$

Veiem que $|A_{2,3}|=|M_{134,124}|$, ja que el $|A_{2,3}|$ és el determinant que resulta d'eliminar la fila 2 i la columna 3. A més, el $|A_{2,3}|$ coincideix amb el menor complementari d'un element estudiat abans. Podem dir el mateix de $|A_{4,2}|=|M_{123,134}|$ i $|A_{4,2}|=|A_{42}|$.

Calculem ara els menors complementaris de $|M_{12,34}|$ i $|M_{24,12}|$. Tenim

$$|A_{12,34}|=|M_{34,12}|=\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}=-32 \quad \text{i} \quad |A_{24,12}|=|M_{13,34}|=\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-23$$

Per acabar, trobem els menors complementaris de $|M_{123,124}|$ i $|M_{234,234}|$, que seran termes de la matriu, ja que r'=4-3=1,

$$|A_{123,124}|=|M_{4,3}|=a_{43}=3 \quad \text{i} \quad |A_{234,234}|=|M_{1,1}|=a_{11}=1$$

Sigui $|A_{K,L}|$ el menor complementari d'una submatriu $M_{K,L}$ d'ordre r, on $K=\{i_1, i_2,\dots, i_r\}$ i $L=\{j_1, j_2,\dots, j_r\}$ són els conjunts d'índexs de files i de columnes que s'han de suprimir per obtenir el seu menor complementari. Anomenem *suma d'índexs*, s_{ij}, la suma de tots aquests índexs de files i columnes, $s=(i_1+i_2+\dots+i_r)+(j_1+j_2+\dots+j_r)$.

També definirem la *signatura d'índexs*, ε_{ij}, com el signe positiu o negatiu segons que la suma d'índexs sigui parella o imparella. Tindrem $\varepsilon_{ij}=(-1)^s$.

Un concepte similar al d'adjunt d'un element, $|\mathcal{A}_{ij}|$, és el d'*adjunt d'una submatriu* (o també *adjunt generalitzat*), que es defineix com el producte de la signatura d'índexs pel menor complementari de la submatriu donada.

Simbolitzant-ho per $|\mathcal{A}_{K,L}|$, tindrem $|\mathcal{A}_{K,L}|=(-1)^s.|A_{K,L}|$. Resumint, direm que «l'adjunt d'una submatriu és igual al seu determinant menor complementari, precedit del signe positiu o negatiu, segons que la suma total dels índexs de les files i columnes eliminades sigui parella o imparella».

És clar que l'ordre d'un adjunt generalitzat coincideix amb l'ordre del seu menor complementari, ja que es diferencia únicament en el signe positiu o negatiu.

Exemple 27. Trobem en primer lloc els adjunts de tercer ordre dels menors complementaris $|A_{2,3}|$ i $|A_{4,2}|$. Tenim:

$$|\mathcal{A}_{2,3}|=(-1)^{2+3}.|A_{2,3}|=(-1).(-198)=+198$$

$$|\mathcal{A}_{4,2}|=(-1)^{4+2}.|A_{4,2}|=(+1).(+3)=+3$$

Continuem amb els de segon ordre,

$$|\mathcal{A}_{12,34}|=(-1)^{1+2+3+4}.|A_{12,34}|=(+1).(-32)=-32$$

$$|\mathcal{A}_{24,12}|=(-1)^{2+4+1+2}.|A_{24,12}|=(-1).(-23)=+23$$

Finalment, els de primer ordre són:

$$|\mathcal{A}_{123,124}|=(-1)^{1+2+3+1+2+4}.|A_{123,124}|=(-1).(+3)=-3$$

$$|\mathcal{A}_{234,234}|=(-1)^{2+3+4+2+3+4}.|A_{234,234}|=(+1).(+1)=+1$$

Com a aplicació dels adjunts de submatrius indiquem la *regla de Laplace generalitzada*, que ens diu que «el valor d'un determinant és igual a la suma algebraica de tots els productes que es poden formar amb els menors d'unes línies determinades pels seus adjunts respectius». Per veure una aplicació pràctica d'aquesta regla, considerem com a cas particular una matriu A de 4t ordre i treballem amb tots els menors de les dues primeres columnes.

Exemple 28. Calcularem el determinant de la matriu A amb la regla de Laplace generalitzada,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \vdots & 6 & 7 \\ 2 & 5 & \vdots & 8 & 4 \\ 4 & 8 & \vdots & 5 & 2 \\ 7 & 6 & \vdots & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Els menors de segon ordre de les dues primeres columnes valen

$$|M_{12,12}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad |M_{13,12}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -4 \qquad |M_{14,12}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -15$$

$$|M_{23,12}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -4 \qquad |M_{24,12}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -23 \qquad |M_{34,12}| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

Trobem a continuació els seus menors complementaris,

$$|A_{12,12}| = |M_{34,34}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_{13,12}| = |M_{24,34}| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_{14,12}| = |M_{23,34}| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad |A_{23,12}| = |M_{14,34}| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$|A_{24,12}| = |M_{13,34}| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -23 \qquad |A_{34,12}| = |M_{12,34}| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -32$$

Els adjunts generalitzats d'aquests menors complementaris són

$$|\mathcal{A}_{12,12}| = (-1)^6 . |A_{12,12}| = +(-1) = -1 \qquad |\mathcal{A}_{13,12}| = (-1)^7 . |A_{13,12}| = -(-4) = +4$$

$$|\mathcal{A}_{14,12}| = (-1)^8 . |A_{14,12}| = +(-4) = -4 \qquad |\mathcal{A}_{23,12}| = (-1)^8 . |A_{23,12}| = +(-15) = -15$$

$$|\mathcal{A}_{24,12}| = (-1)^9 . |A_{24,12}| = -(-23) = +23 \qquad |\mathcal{A}_{34,12}| = (-1)^{10} . |A_{34,12}| = +(-32) = -32$$

Podrem aplicar tot seguit la regla de Laplace,

$$|A| = |M_{12,12}| . |\mathcal{A}_{12,12}| + \ldots + |M_{34,12}| . |\mathcal{A}_{34,12}|$$

Substituint pels valors obtinguts obtenim

$$|A| = (-1).(-1) + (-4).(+4) + (-15).(-4) + (-4).(-15) + (-23).(+23) + (-32).(-32)$$

Operant, resulta $|A| = 600$, que coincideix amb el valor que ja hem obtingut amb l'aplicació d'altres mètodes.

1.2.4 MENORS PRINCIPALS. Hem vist que els menors d'ordre r d'una matriu quadrada A_n són determinants $|M_{K,L}|$ formats per les r files del conjunt $K=\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ i les r columnes de $L=\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$. Anomenarem *menor principal* el menor que tingui el mateix ordre en files i columnes. És a dir, en un menor principal tindrem K=L.

Com a conseqüència d'aquesta definició, veiem geomètricament que els termes de la diagonal principal, d_p, del menor principal també són termes de la diagonal principal de la matriu, D_p.

En lloc de simbolitzar els menors principals per $|M_{K,K}|$, utilitzarem la notació $|M_K|_r$, on la K és el *conjunt de línies* i la r indica l'*ordre* del menor principal.

En una matriu d'ordre n el *nombre total de menors principals* d'ordre r és $C_{n,r}$, ja que només hem d'escollir r files de les n possibles (recordem que en un menor principal l'ordre de les columnes és el mateix que el de les files).

Exemple 29. Per a la matriu A dels exemples anteriors, el menor principal de 2n ordre format per les línies primera i tercera és

$$|M_{13}|_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

Igualment, el menor principal de tercer ordre generat per les línies (files i columnes) 1, 2 i 4 és

$$|M_{124}|_3=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=-102$$

Notem també que els menors principals d'ordre 1 coincideixen amb els termes de la diagonal principal. Així, $|M_2|_1=5$. L'únic d'ordre 4 és el determinat de la matriu, $|M_{1234}|_4=|A|$.

En els volums d'Àlgebra vectorial analitzarem les aplicacions dels menors principals i també observarem la seva importància en la teoria de l'optimització. Ara, per acabar aquest apartat, anunciarem el *teorema de Jacobi*, que en l'estudi d'alguns problemes econòmics utilitzarem per calcular un menor principal de rang r de la matriu adjunta, sense necessitat de calcular prèviament la matriu adjunta.

Considerem una matriu quadrada A d'ordre n, on suposem conegut el seu determinant, $|A|$, i es tracta de calcular un cert *menor principal de la matriu adjunta* $\mathcal{A}$, de conjunt de línies K i de rang r, designat per $|\mathcal{M}_K|_r$.

Amb aquesta finalitat observem el menor principal corresponent de la matriu donada, $|M_K|_r$, i calculem el seu menor complementari, que també serà un menor principal designat per $|A_K|_{n-r}$. Per trobar el menor principal que busquem, aplicarem el teorema de Jacobi, que estableix la igualtat següent:

$$|\mathcal{M}_K|_r=|A_K|_{n-r}.|A|^{r-1}$$

Exemple 30. Suposem que volem trobar $|\mathcal{M}_{13}|_2$, oés a dir, el menor principal d'ordre 2, format per les línies 1 i 3, de la matriu adjunta de la matriu de treball A.

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & \boxed{6} & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ \boxed{4} & 8 & \boxed{5} & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathcal{A}=\begin{pmatrix} \boxed{x_{11}} & x_{12} & \boxed{x_{13}} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \boxed{x_{31}} & x_{32} & \boxed{x_{33}} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

Observem que, en la matriu donada, el menor principal corresponent al buscat (que no cal trobar) i el seu complementari són

$$|M_{13}|_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad |A_{13}|_{4-2}=|M_{24}|_2=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-19$$

Com que sabem que $|A|=600$, només caldrà substituir en la fórmula donada pel teorema de Jacobi,

$$|\mathcal{M}_{13}|_2=|A_{13}|_{4-2}.|A|^{2-1}=(-19).(600)1=-11.400$$

Farem ara la comprovació, perquè ja hem calculat la matriu adjunta en un exemple anterior:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 3 & 14 & -86 & 153 \\ 21 & -102 & 198 & -129 \\ -129 & 198 & -102 & 21 \\ 153 & -86 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

El menor principal $|\mathcal{M}_{13}|_2$ d'aquesta matriu adjunta és

$$|\mathcal{M}_{13}|_2=\begin{vmatrix} 3 & -86 \\ -129 & -102 \end{vmatrix}=-306-11094=-11.400$$

Veiem, efectivament, que s'obté el mateix valor,

1.3 APLICACIONS A LES MATRIUS

1.3.1 RANG I MATRIU INVERSA. Per calcular el rang d'una matriu, a més de poder-ho fer pel mètode de Gauss, també es pot realitzar amb un mètode alternatiu aplicant determinants.

Recordem que el rang d'una matriu, $\rho(A)$, és el nombre màxim de files (o columnes) linealment independents.

Exemple 31. Considerem les dues matrius de tercer ordre

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Per a la matriu A mirem si les files són linealment independents. Escriurem la combinació lineal nul·la,

$$a.\mathbf{f}_1 + b.\mathbf{f}_2 + c.\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_0 \Rightarrow a.(4\ 1\ 7) + b.(9\ 3\ 5) + c.(6\ 2\ 4) = (0\ 0\ 0)$$

Si multipliquem, sumem i igualem, resulta un sistema de tres equacions i tres incògnites. Resolent-lo s'obté a=b=c=0, la qual cosa vol dir que les tres files són linealment independents.

Per tant, per la definició de rang deduïm que $\rho(A)=3$.

Si fem el mateix per a la matriu B, veurem que el sistema resulta indeterminat, on una de les infinites solucions pot ser a=1, b=-2 i c=1. En conseqüència, les files seran linealment dependents i l'equació de lligadura serà

$$1.\mathbf{f}_1 - 2.\mathbf{f}_2 + 1.\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_0 \quad \text{o bé} \quad \mathbf{f}_3 = 2.\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$$

És a dir, la tercera fila és igual al doble de la segona, menys la primera. Així, el rang de la matriu B ha de ser més petit que 3.

Com que clarament $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ no són proporcionals, tenim $\rho(B)=2$.

Podem realitzar tot el procés anterior a partir dels determinants. Emprarem la propietat setena, que, aplicada en el cas de les files, diu que «si una fila d'un determinant és combinació lineal d'altres files paral·leles, llavors el determinant és nul».

Com que la recíproca també es compleix, podem assegurar que, si un determinant és nul, llavors les seves files són linealment dependents. I, recíprocament, si el determinant és diferent de zero, voldrà dir que les files són linealment independents.

A continuació veurem com es pot realitzar el *càlcul del rang d'una matriu per determinants*. Començarem cercant un menor (és a dir, el determinant d'una submatriu) de 2n ordre diferent de zero. Si el trobem voldrà dir que el rang r de la matriu és $r \geq 2$.

Després, a aquest menor no nul, hi afegirem una fila i una columna, i obtindrem un nou determinant de 3r ordre anomenat *menor orlat*. Si aquest determinant és nul, canviarem la fila i la columna orlades per unes altres, i obtindrem així un altre menor orlat. Si torna a donar zero, anirem provant amb tots les orlacions possibles i, si totes ens donen zero, conclourem que el rang no pot ser 3. El rang serà 2.

En canvi, si el menor de 3r ordre no és nul, el rang serà superior o igual a 3. A continuació, i si és possible, el tornarem a orlar amb una fila i una columna i calcularem aquest menor de 4t ordre, etc. El procés acabarà quan s'arribi al determinant de major ordre possible.

Exemple 32. Trobem en primer lloc el rang de la matriu A, calculant un menor de segon ordre i després el seu menor orlat,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad |M_{12,12}|=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}=3\neq 0 \quad |M_{123,123}|=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\ldots=2\neq 0$$

Com que també el de 3r ordre és diferent de zero, tenim $\rho(A)=3$.

En canvi, el rang de la matriu B serà $\rho(B)=2$, ja que el determinant de 3r ordre és nul,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad |M_{12,12}|=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \quad |M_{123,123}|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=\ldots=0$$

Una altra aplicació interessant dels determinants és facilitar el *càlcul de la matriu inversa* d'una matriu. És clar que la matriu ha de ser una matriu regular (si no no existiria la inversa) i, per tant, el seu rang ha de ser igual a l'ordre de la matriu, la qual cosa equival a dir que $|A|\neq 0$. Si el determinant és nul, es tracta d'una matriu singular i no existeix la inversa.

Per calcular la inversa ens basarem en la propietat de la matriu adjunta i així podem deduir que

$$A\bullet\mathcal{A}'=|A|.I \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\mathcal{A}'/|A|$$

Per tant, «la matriu inversa és igual a la transposada de la matriu adjunta dividida pel determinant de la matriu».

Exemple 33. Proposem-nos calcular, si és possible, les matrius inverses de les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

El primer que hem de saber són els seus determinants, $|A|=2$ i $|B|=0$, d'on veiem directament que la matriu B no té inversa. Pel que fa a la matriu A, haurem de buscar en primer lloc la matriu adjunta, calculant primer tots els seus adjunts,

$$|\mathcal{A}_{11}|=+\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2 \quad |\mathcal{A}_{12}|=-\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-6 \quad |\mathcal{A}_{13}|=+\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$|\mathcal{A}_{21}|=-\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10 \quad |\mathcal{A}_{22}|=+\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-26 \quad |\mathcal{A}_{23}|=-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

$$|\mathcal{A}_{31}|=+\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-16 \quad |\mathcal{A}_{32}|=-\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=43 \quad |\mathcal{A}_{33}|=+\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}=3$$

La matriu adjunta i la seva transposada seran

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 10 & -26 & -2 \\ -16 & 43 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathcal{A}'=\begin{pmatrix} 2 & 10 & -16 \\ -6 & -26 & 43 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalment, la matriu inversa serà

$$A^{-1}=\frac{\mathcal{A}'}{|A|}=\frac{1}{|A|}.\mathcal{A}'=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2 & 10 & -16 \\ -6 & -26 & 43 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -3 & -13 & 43/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Per acabar, el lector pot comprovar que el producte de la matriu original per la seva inversa és efectivament igual a la matriu unitat, és a dir, es verifica que $A\bullet A^{-1}=I$.

1.3.2 DETERMINANTS DE MATRIUS ESPECIALS. Algunes vegades ens trobem amb matrius on el seu determinant es pot conèixer fàcilment. Així, el *determinant d'una matriu triangular*, que té un triangle de zeros per sota o per sobre de la diagonal principal, és igual al producte dels termes d'aquesta diagonal.

Exemple 34. Siguin la matriu triangular superior A i la inferior B,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Si calculem mentalment per Sarrus els seus determinants, tindrem $|A|=1.(-5).7=-35$ i $|B|=8.4.(-5)=-160$.

Una matriu ortogonal és una matriu A tal que la seva transposada A' coincideix amb la seva inversa A^{-1}. Resultarà, per tant, que $A \bullet A'=I$. D'aquesta igualtat es desprèn que el *determinant d'una matriu ortogonal* és igual a +1 o -1.

Exemple 35. Donada la matriu ortogonal, calculem el determinant

$$|A|=\begin{vmatrix} 0'96 & 0'28 \\ -0'28 & 0'96 \end{vmatrix} = (0'96)^2+(0'28)^2 = 0'9216+0'0784 =1.$$

Esmentem també el cas en què tinguem dues matrius matrius semblants A i B, on existeix una matriu de pas regular P tal que es verifiqui $B=P^{-1} \bullet A \bullet P$. D'aquesta igualtat es dedueix fàcilment que els *determinants de matrius semblants* són iguals, $|A|=|B|$.

Exemple 36. Tenim les matrius semblants A i B, que tenen per matriu de pas P i on sabem també la seva inversa, P^{-1},

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -95 & -151 \\ 56 & 89 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P^{1}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trobem els determinants de les matrius semblants, $|A|=8-7=1$ i $|B|=(-95).89-(-151).56= -8455+8456=1$. Obtenim així el mateix valor.

Un altre determinant que apareix en diferents problemes és el *determinant de Vandermonde*, $|D_V|$, un determinant on els termes de les columnes són les potències successives d'un element, començant per l'exponent 0 a la primera fila, l'1 a la segona, etc.

Així, per exemple, per a un determinant de Vandermonde de quart ordre tenim

$$|D_V|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Es pot provar (problema 91) que per a un determinant de Vandermonde de segona fila (a b c d) es verifica:

$$|D_V| = (b-a).(c-a).(d-a).\ (c-b).(d-b).\ (d-c)$$

Observeu la regularitat d'aquesta fórmula, que és generalitzable a qualsevol ordre del determinant de Vandermonde.

Exemple 37. Sigui el determinant de Vandermonde de 5è ordre

$$|D_V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 9 & 25 & 4 & 36 & 16 \\ 27 & 125 & 8 & 216 & 64 \\ 81 & 625 & 16 & 1296 & 256 \end{vmatrix}$$

Si ens fixem en la f_2=(3 5 2 6 4) podrem escriure els productes

$$|D_V| = (5-3).(2-3).(6-3).(4-3).\ (2-5).(6-5).(4-5).\ (6-2).(4-2).\ (4-6)$$

Operant s'obté ràpidament $|D_V|$=288.

En acabar aquest capítol dedicat a l'estudi dels determinants de matrius quadrades, ens podem preguntar si té sentit parlar dels *determinants de matrius rectangulars*. La resposta és afirmativa: en alguns problemes d'economia ens trobem sovint amb determinants d'aquests tipus que anomenem *determinants generalitzats*, ja que són efectivament una generalització dels determinants normals (els de matrius quadrades).

Per a una *matriu horitzontal* (una matriu rectangular $A_{m\times n}$ on m<n) el determinant generalitzat, que simbolitzem per [A], és definit per l'arrel quadrada del determinant de la matriu producte entre la matriu donada i la seva transposada. Matemàticament,

$$[A] = \sqrt{|A \bullet A'|}$$

Si aquesta definició l'apliquem a una matriu vertical $A_{m\times n}$ (matriu on m>n), observem que el determinant generalitzat, [A], és nul.

Exemple 38. Volem trobar el determinant generalitzat de la matriu,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 7 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

Farem primer el producte de la matriu per la seva transposada

$$A \bullet A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 7 & 6 & -20 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \\ -12 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169 & 286 \\ 286 & 485 \end{pmatrix}$$

El seu determinant i el determinant generalitzat de A seran

$$|A \bullet A'| = \begin{vmatrix} 169 & 286 \\ 286 & 485 \end{vmatrix} = 169 \quad \text{i} \quad [A] = \sqrt{|A \bullet A'|} = 13$$

d) FORMULACIÓ MATEMÀTICA

Aplicació determinant

Matriu quadrada:

$\mathbf{A_n}$ $(=A_{n\times n})$

Disposició rectangular formada per n files i n columnes

Determinant:

$|\mathbf{A}|$ =valor numèric assignat a una matriu quadrada

Aplic. determ.: $\mathbf{det}: \mathcal{M}_n \to \mathbf{K}$ / $\forall A \in \mathcal{M}_n \Rightarrow \mathbf{det}(A)=|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{A}| \in \mathbf{K}$

Axiomes de l'aplicació determinant:

Si $A=(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_n) \Rightarrow \det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_n)=|A| \Leftrightarrow$ es verifica:

(1) $\mathbf{det}(\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_i+\mathbf{c}_j \dots \mathbf{c}_n) = \mathbf{det}(\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_i \dots \mathbf{c}_n)+\mathbf{det}(\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_j \dots \mathbf{c}_n)$

(2) $\mathbf{det}(\mathbf{c}_1 \dots \alpha.\mathbf{c}_i \dots \mathbf{c}_n) = \alpha.\mathbf{det}(\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_i \dots \mathbf{c}_n)$

(3) $\mathbf{det}(\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_i \dots \mathbf{c}_j \dots \mathbf{c}_n) = -\mathbf{det}(\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_j \dots \mathbf{c}_i \dots \mathbf{c}_n)$

(4) $\mathbf{det}(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n)=\mathbf{1}$ on $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n)=I_n$

El determinant com a inversions d'una permutació

Cos ordenat: **K** Elements del cos: $\mathbf{a_i}$

Permutació en $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: **Ap. biject** $\sigma: \mathbf{I_n} \to \mathbf{A}$, $\mathbf{I_n}=\{1,2,\dots,n\}$

Conj. permutacions: $\mathcal{P}_n$ Nre. total de permutacions: $\mathbf{n!}$

Permutació principal: $\mathbf{A}=\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}\}$=**ordre natural**

Termes en successió: $(\mathbf{a_i},\mathbf{a_j})$=**ordre natural**

Termes en inversió: $(\mathbf{a_i},\mathbf{a_j})\neq$**ordre natural**

Nre. total d'inversions: $\mathbf{i}(\sigma)$ Signatura: $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{\mathbf{i}(\sigma)}$

Definició de determinant: $A=I_n$ $\sigma: I_n \to I_n$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(\sigma).\mathbf{a}_{1\sigma(1)}.\mathbf{a}_{2\sigma(2)} \dots \mathbf{a}_{n\sigma(n)}$$

«El determinant d'una matriu d'ordre n és igual a la suma algebraica de tots els productes possibles de n termes de la matriu ordenats per files, de manera que no n'hi hagi dos de la mateixa fila ni dos de la mateixa columna, i amb signes positiu o negatiu segons que el nombre d'inversions dels índexs de les columnes sigui parell o imparell.»

Determinants de segon ordre

Regla d'obtenció: $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

El determinant com a eina de càlcul: (sistema d'equacions)

$$\begin{cases} a.x + b.y = m \\ c.x + d.y = n \end{cases} \Rightarrow x = \frac{m.d - b.n}{a.d - b.c} \wedge y = \frac{a.n - m.c}{a.d - b.c}$$

Per recordar: $a.d - b.c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = D_c$

$$m.d - b.n = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = D_x \qquad a.n - m.c = \begin{vmatrix} a & m \\ b & n \end{vmatrix} = D_y$$

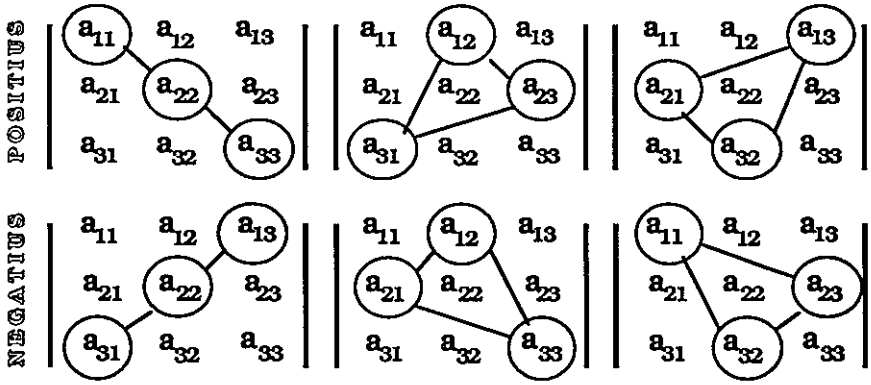
Solució sistema: $x = D_x / D_c \wedge y = D_y / D_c$

Determinants de tercer ordre

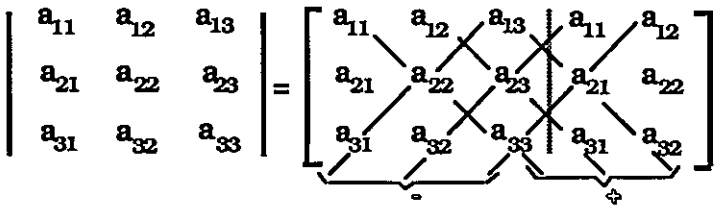
Valor del determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{cases}$$

Regla de Sarrus:



Regla de les columnes agregatives:



Propietats dels determinants

Les propietats, que estan indicades per les columnes, són igualment vàlides per les files. Incloem també els axiomes.

Axiomes:

(1) $\det(c_1 \dots c_i+c_j \dots c_n) = \det(c_1 \dots c_i \dots c_n)+\det(c_1 \dots c_j \dots c_n)$

(2) $\det(c_1 \dots \alpha.c_i \dots c_n) = \alpha.\det(c_1 \dots c_i \dots c_n)$

(3) $\det(c_1 \dots c_j \dots c_i \dots c_n) = -\det(c_1 \dots c_i \dots c_j \dots c_n)$

(4) $\det(e_1\ e_2 \dots e_n)=1$ on $(e_1\ e_2 \dots e_n)=I \Leftrightarrow |I|=1$

Altres propietats:

(5) $\det(c_1\ c_2 \dots c_0 \dots c_n) = 0$ on $c_0=(0\ 0 \dots 0)'$

(6) $\det(c_1 \dots c_i \dots c_i \dots c_n) = 0$, $\det(c_1 \dots c_i \dots \alpha.c_i \dots c_n) = 0$

(7) $\det(c_1 \dots c_i \dots c_j \dots \alpha.c_i+\beta.c_j \dots c_n) = 0$

(8) $\det(c_1 \dots c_i \dots c_j \dots c_k+\alpha.c_i+\beta.c_j \dots c_n) = \det(c_1 \dots c_n)$

(9) $|A \bullet B| = |A|.|B|$ (10) $|A^{-1}| = 1/|A|$

(11) $|k.A| = k^n.|A|$ (12) $|A'| = |A|$

.....

Mètode del pivot

Procés: s'utilitza la regla del pivot i, per comprovar les operacions, es fan servir les columnes de sumes s_1, s_2,...:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & s_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & s_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & s_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & s_4 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & s_1 \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24} & t_2 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & t_3 \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & t_4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & s_1 \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24} & t_2 \\ 0 & 0 & \boxed{c_{33}} & c_{34} & u_3 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & u_4 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & s_1 \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24} & t_2 \\ 0 & 0 & \boxed{c_{33}} & c_{34} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{d_{44}} & v_4 \end{array}\right.$$

Elements pivot: $p_1=a_{11}$, $p_2=b_{22}$, $p_3=c_{33}$, $p_4=d_{44}$

Determinant: $|A_4| = \dfrac{p_4}{p_1^2.p_2}$ En general: $|A_n| = \prod_{i=1}^{n} p_i^{(i+1)-n}$

Menors i adjunts d'un element

Menor = determinant d'una submatriu quadrada

Menor complementari de l'element a_{ij}:

$$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Suma d'índexs: $i+j$ Signatura: $\varepsilon_{ij}=(-1)^{i+j}$

Adjunt de l'element a_{ij}:

$$|\mathcal{A}_{ij}|=(-1)^{i+j}.|A_{ij}| \quad \text{o bé} \quad |\mathcal{A}_{ij}|=\varepsilon_{ij}.|A_{ij}|$$

Propietats dels adjunts:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.|\mathcal{A}_{ij}|=|A| \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.|\mathcal{A}_{ij}|=|A|$

«La suma dels productes dels elements d'una línia pels seus adjunts respectius és igual al determinant».

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.|\mathcal{A}_{kj}|=0 \ (k\neq i) \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.|\mathcal{A}_{ik}|=0 \ (k\neq j)$

«La suma dels productes dels elements d'una línia pels adjunts d'una línia paral.lela és igual a zero».

Regla de Laplace

Per reduir l'ordre d'un determinant (prop. 1)

Per files f_i: $|A|=a_{i1}.|\mathcal{A}_{i1}|+a_{i2}.|\mathcal{A}_{i2}|+\ldots+a_{in}.|\mathcal{A}_{in}|$

Per columnes c_j: $|A|=a_{1j}.|\mathcal{A}_{1j}|+a_{2j}.|\mathcal{A}_{2j}|+\ldots+a_{nj}.|\mathcal{A}_{nj}|$

Obtenció d'elements nuls: (exemple)

1r pas. Escollim, si n'hi ha, una línia amb zeros i partim d'un element unitat. Si no hi és, fem, per exemple:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

on $b_{12}=a_{12}/a_{11}$, $b_{13}=a_{13}/a_{11}$ i $b_{14}=a_{14}/a_{11}$

Regla de Laplace (cont.)

2n pas. Transformem els altres elements de la línia en zeros, fent servir el mètode de reducció de Gauss:

$$|A| = a_{11}\cdot\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & f_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & f_4 \end{array}\right| = a_{11}\cdot\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & g_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & g_2 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & g_3 \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & g_4 \end{array}\right|$$

on $g_1=f_1$, $g_2=f_2-a_{21}.f_1$, $g_3=f_3-a_{31}.f_1$ i $g_4=f_4-a_{41}.f_1$

3r pas. Desenvolupem per la línia de zeros transformats:

$$|A|=a_{11}.\ (\ 1.|\mathcal{A}_{11}|+ 0.|\mathcal{A}_{21}|+ 0.|\mathcal{A}_{31}|+0.|\mathcal{A}_{21}|)$$

$$\Rightarrow \quad |A|= a_{11}\cdot\left|\begin{array}{ccc} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right| \quad \text{(det. d'ordre inferior)}$$

4t pas. Si el determinant encara és d'ordre elevat, anem al primer pas. En cas contrari, resolem el determinant i acabem.

Matriu i determinants adjunts

Mat. adjunta: $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} |\mathcal{A}_{11}| & |\mathcal{A}_{12}| & \cdots & |\mathcal{A}_{1n}| \\ |\mathcal{A}_{21}| & |\mathcal{A}_{22}| & \cdots & |\mathcal{A}_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |\mathcal{A}_{n1}| & |\mathcal{A}_{21}| & \cdots & |\mathcal{A}_{nn}| \end{pmatrix}$. Propietat: $A\bullet\mathcal{A}'=|A|.I$

Determinant adjunt: $|\mathcal{A}|$ Propietat: $|\mathcal{A}|=|A|^{n-1}$

Menors generalitzats

Ordre d'un menor: **r**=nombre de files o columnes que conté

Tipus de menors:

Ordre 1: $|M_{i,j}|=|a_{ij}|= a_{ij}$

Ordre 2: $|M_{i_1i_2,j_1j_2}|$ Ordre 3: $|M_{i_1i_2i_3,j_1j_2j_3}|$

Ordre r: $|M_{K,L}|$ on $K=\{i_1, i_2,\ldots, i_r\}$ $\wedge$ $L=\{j_1, j_2,\ldots, j_r\}$

Menor complementari (d'un altre menor):

$|A_{K,L}|$ = menor resultant de suprimir les files i columnes d'un menor d'ordre r

Ordre d'un menor complementari: $r'=n-r$

Menors generalitzats (cont.)

Tipus de menors complementaris:

Ordre n-1: $|A_{i,j}| = |A_{ij}|$ Ordre n-2: $|A_{i_1 i_2, j_1 j_2}|$

Ordre n-r: $|A_{K,L}|$ eliminant $K=\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \wedge L=\{j_1, j_2, \ldots j_r\}$

Adjunts generalitzats

Suma d'índexs: $s=(i_1+i_2+\ldots+i_r)+(j_1+j_2+\ldots+j_r)$

Signatura d'índexs: $\varepsilon_{ij}=(-1)^s$

Adjunt generalitzat:

$$|\mathcal{A}_{K,L}| = (-1)^s . |A_{K,L}| \quad \text{o bé} \quad |\mathcal{A}_{K,L}| = \varepsilon_{ij} . |A_{K,L}|$$

«L'adjunt és igual al menor complementari precedit del signe positiu o negatiu, segons que la suma total dels índexs de les files i columnes eliminades sigui parell o imparell».

Tipus d'adjunts:

Ordre n-1: $|\mathcal{A}_{i,j}| = (-1)^{i+j} . |A_{i,j}| \Rightarrow |\mathcal{A}_{i,j}| = |\mathcal{A}_{ij}|$ (ja estudiat)

Ordre n-2: $|\mathcal{A}_{i_1 i_2, j_1 j_2}| = (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} . |A_{i_1 i_2, j_1 j_2}|$ etc.

Generalització de la regla de Laplace:

«El valor d'un determinant és igual a la suma algebraica de tots els productes que es poden formar amb els menors d'unes línies determinades pels seus adjunts respectius».

Exemple: $A \in \mathcal{M}_4$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Partim de c_1 i c_2 i agafem les files de dos en dos. Es poden formar en total $\binom{4}{2}=6$ menors d'ordre 2:

$|M_{12,12}|$, $|M_{13,12}|$, $|M_{14,12}|$, $|M_{23,12}|$, $|M_{24,12}|$, $|M_{34,12}|$

Menors complementaris:

$|A_{12,12}| = |M_{34,34}|$, $|A_{13,12}| = |M_{24,34}|$, $|A_{14,12}| = |M_{23,34}|$

$|A_{23,12}| = |M_{14,34}|$, $|A_{24,12}| = |M_{13,34}|$, $|A_{34,12}| = |M_{12,34}|$

Adjunts:

$$|\mathcal{A}_{12,12}| = (-1)^{1+2+1+2} . |A_{12,12}| = +|M_{34,34}|$$

$$|\mathcal{A}_{13,12}| = (-1)^{1+3+1+2} . |A_{13,12}| = -|M_{24,34}|$$

Adjunts generalitzats (cont.)

Adjunts: (cont.)

$$|\mathcal{A}_{14,12}|=+|\mathbf{M}_{23,34}| \qquad |\mathcal{A}_{23,12}|=+|\mathbf{M}_{14,34}|$$

$$|\mathcal{A}_{24,12}|=-|\mathbf{M}_{13,34}| \qquad |\mathcal{A}_{34,12}|=+|\mathbf{M}_{12,34}|$$

Per la regla de Laplace:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{cases} |\mathbf{M}_{12,12}|.|\mathcal{A}_{12,12}|+|\mathbf{M}_{13,12}|.|\mathcal{A}_{13,12}| \\ +|\mathbf{M}_{14;12}|.|\mathcal{A}_{14,12}|+|\mathbf{M}_{23,12}|.|\mathcal{A}_{23,12}| \\ +|\mathbf{M}_{24,12}|.|\mathcal{A}_{24,12}|+|\mathbf{M}_{34,12}|.|\mathcal{A}_{34,12}| \end{cases}$$

El determinant serà:

$$|\mathbf{A}| = \begin{cases} |\mathbf{M}_{12,12}|.|\mathbf{M}_{34,34}|-|\mathbf{M}_{13,12}|.|\mathbf{M}_{24,34}|+ \\ +|\mathbf{M}_{14,12}|.|\mathbf{M}_{23,34}|+|\mathbf{M}_{23,12}|.|\mathbf{M}_{14,34}|- \\ -|\mathbf{M}_{24,12}|.|\mathbf{M}_{13,34}|-|\mathbf{M}_{34,12}|.|\mathbf{M}_{12,34}| \end{cases}$$

Cas particular: (partició en què una submatriu és nul·la)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{T} & \mathbf{U} \end{vmatrix} \textbf{ Partició } \Rightarrow |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{vmatrix} \textbf{ O=m. nul·la } \Rightarrow |\mathbf{A}| = |\mathbf{M}|.|\mathbf{P}|$$

Menors principals

Menor qualsevol: $|\mathbf{M}_{K,L}|$ Ordre del menor: $\mathbf{r}$

Cas particular: K=L $\Rightarrow$ Menor principal: $|M_{K,K}|$

Notació: $|\mathbf{M}_K|_r$ Conjunt de línies: $\mathbf{K}$

Conseqüència:

Diagonal determinant: $\mathbf{D_p}$ Diagonal menor: $\mathbf{d_p}$

Menor principal: $|\mathbf{M}_K|_r$=**men. princ.** $\Rightarrow$ $\mathbf{d_p} \subseteq \mathbf{D_p}$

Nombre menors princ. ordre r: $\mathbf{C_{n,r}}=\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}$

Exemple: $A \in \mathcal{M}_4$

Ordre 1: $|\mathbf{M}_1|_1=a_{11}$ $|\mathbf{M}_2|_1=a_{22}$ $|\mathbf{M}_3|_1=a_{33}$ $|\mathbf{M}_4|_1=a_{44}$

Ordre 2:

$$|\mathbf{M}_{12}|_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad |\mathbf{M}_{13}|_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |\mathbf{M}_{14}|_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{M}_{23}|_2=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |\mathbf{M}_{24}|_2=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \quad |\mathbf{M}_{34}|_2=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Menors principals (cont.)

Ordre 3:

$$|M_{123}|_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{124}|_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|M_{134}|_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad |M_{234}|_3=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Ordre 4: $|M_{1234}|_4=|A|$

Teorema de Jacobi:

Matriu: A Determinant: $|A|$ Mat. adjunta: $\mathcal{A}$

Menor princ. d'ordre r de la mat. adjunta: $|\mathcal{M}_K|_r$

Menor princ. corresponent de la mat. donada: $|M_K|_r$

Menor complementari de l'anterior: $|A_K|_{n-r}$

Conclusió: $\boxed{|\mathcal{M}_k|_r = |A_K|_{n-r} \cdot |A|^{r-1}}$

.....

Rang d'una matriu per determinants

Rang d'una matriu: $\rho(A)$=**Nre. files linealment independents**

Propietat: **rang per files = rang per columnes**

Conseqüència: $\rho(A)=r \Rightarrow \exists |M_{K,L}|_r \neq 0 \ \wedge \ \forall |M_{K,L}|_{r+1}=0$

Menor orlat: **menor al qual s'ha afegit una fila i una columna**

Procediment per a calcular el rang:

(1) Partir d'un menor no nul: $|M_{K,L}|_r \neq 0$

(2) Orlar-lo amb una fila i una columna: $|M_{K,L}|_{r+1}$

(3) Calcular el determinant:

a) **Si** $\forall |M_{K,L}|_{r+1}=0 \Rightarrow \rho(A)=r$.

b) **Si** $\exists |M_{K,L}|_{r+1} \neq 0$ tornem a (2).

Inversa d'una matriu quadrada per adjunts

Existència d'inversa: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \rho(A)=n$ (n=ordre) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Matriu inversa: A^{-1} **inversa de A** $\Leftrightarrow A \bullet A^{-1}=A^{-1} \bullet A=I$

Càlcul de la inversa: $\boxed{A^{-1}= \mathcal{A}' / |A|}$

Inversa d'una matriu per adjunts (cont.)

Cas particular: $A \in \mathcal{M}_3 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Determinant: $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **Si** $|A|\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

Adjunts de cada element:

$$|\mathcal{A}_{11}|=(-1)^{1+1}.|A_{11}|=+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}.a_{33}-a_{23}.a_{32}$$

$$|\mathcal{A}_{12}|=(-1)^{1+2}.|A_{12}|=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-a_{21}.a_{33}+a_{23}.a_{31} \quad \text{etc.}$$

Matriu adjunta i la seva transposada:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} |\mathcal{A}_{11}| & |\mathcal{A}_{12}| & |\mathcal{A}_{13}| \\ |\mathcal{A}_{21}| & |\mathcal{A}_{22}| & |\mathcal{A}_{23}| \\ |\mathcal{A}_{31}| & |\mathcal{A}_{32}| & |\mathcal{A}_{33}| \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}'=\begin{pmatrix} |\mathcal{A}_{11}| & |\mathcal{A}_{21}| & |\mathcal{A}_{31}| \\ |\mathcal{A}_{12}| & |\mathcal{A}_{22}| & |\mathcal{A}_{32}| \\ |\mathcal{A}_{13}| & |\mathcal{A}_{23}| & |\mathcal{A}_{33}| \end{pmatrix}$$

Matriu inversa: $A^{-1}=\mathcal{A}'/|A|$

Determinants de matrius especials

Determ. matriu triangular: $|A|=a_{11}.a_{22}...a_{nn}$

Det. matriu ortogonal: $A \bullet A'=I \Rightarrow |A|.|A'|=|I| \Rightarrow |A|=\pm 1$

Det. matrius semblants: $B=P^{-1} \bullet A \bullet P \Rightarrow |A|=|B|$

Determinant de Vandermonde: $|D_V|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

Sol: $|D_V|=(b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).(d-c)$

Determinants de matrius rectangulars

Determinant generalitzat:

Si $A_{m \times n} \wedge m<n \Rightarrow [A]=\sqrt{|A \bullet A'|}$ (Matriu horitzontal)

Propietat: **Si** $A_{m \times n} \wedge m>n \Rightarrow [A]=0$ (Matriu vertical)

e) PROBLEMES RESOLTS

1.1 INTRODUCCIÓ ALS DETERMINANTS

Definició de determinant

1. Sigui la matriu $A \in \mathcal{M}_2$ i l'aplicació determinant $\det(A)=|A|$, definida per $|A|=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$. Prova que es verifiquen els axiomes de definició, partint de les columnes de la matriu A $\mathbf{c}_1=(a_{11}\ a_{21})'$ i $\mathbf{c}_2=(a_{12}\ a_{22})'$ i les addicionals $\mathbf{b}_1=(b_{11}\ b_{21})'$ i $\mathbf{b}_2=(b_{12}\ b_{22})'$, que conformen una altra matriu B.

Solució. Siguin les dues matrius matrius quadrades de segon ordre, A i B, que tenen per columnes

$$A=\left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \end{array}\right) \quad \wedge \quad B=\left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{array}\right)$$

Apuntem ara els quatre axiomes de la definició de *determinant* i comprovem que es verifiquen pel cas particular $|A|=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$.

(1) $\boxed{\det(\mathbf{c}_1...\mathbf{c}_i+\mathbf{c}_j...\mathbf{c}_n)=\det(\mathbf{c}_1...\mathbf{c}_i...\mathbf{c}_n)+\det(\mathbf{c}_1...\mathbf{c}_j...\mathbf{c}_n)}$

En altres paraules, «si una línia (en aquest cas, una columna) d'una matriu és suma de dos (o més) sumands, llavors el determinant de la matriu és igual a la suma dels determinants formats per cadascuna de les línies».

PRIMER COSTAT. En el nostre cas tenim

$$\det(\mathbf{c}_1+\mathbf{b}_1\ \ \mathbf{c}_2)=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Aplicant la definició,

$$\det(\mathbf{c}_1+\mathbf{b}_1\ \mathbf{c}_2)=(a_{11}+b_{11}).a_{22}-a_{12}.(a_{21}+b_{21})=$$
$$=a_{11}.a_{22}+b_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}-a_{12}.b_{21}$$

SEGON COSTAT. Tindrem els dos determinants següents

$$\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)+\det(\mathbf{b}_1\ \mathbf{c}_2)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Per tant,

$$\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)+\det(\mathbf{b}_1\ \mathbf{c}_2)=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}+b_{11}.a_{22}-a_{12}.b_{21}$$

Observem que s'obté el mateix resultat que abans.

També tenim $\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2+\mathbf{b}_2)=\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)+\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{b}_2)$, que podem provar fàcilment. Per ambdós costats obtindríem el valor comú

$$a_{11}.a_{22}+a_{11}.b_{22}-a_{12}.a_{21}-a_{21}.b_{12}$$

En definitiva, hem comprovat que es verifica l'axioma (1).

(2) $\boxed{\det(\mathbf{c}_1 \ldots \alpha.\mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_n)=\alpha.\det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_n)}$

Aquest axioma ens indica que «si una línia d'una matriu està multiplicada per un número, llavors el determinant de la matriu és igual al número multiplicat pel determinant de la matriu original». Estudiem el nostre cas particular

$$\det(\alpha.\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)=\begin{vmatrix} \alpha.a_{11} & a_{12} \\ \alpha.a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(\alpha.a_{11}).a_{22}-a_{12}.(\alpha.a_{21})=\alpha.a_{11}.a_{22}-\alpha.a_{12}.a_{21}$$

$$\alpha.\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)=\alpha.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\alpha.(a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21})=\alpha.a_{11}.a_{22}-\alpha.a_{12}.a_{21}$$

Com que s'obté el mateix resultat, es verifica l'axioma (2).

També es podia haver provat que $\det(\mathbf{c}_1\ \alpha.\mathbf{c}_2)=\alpha.\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)$. Ens quedaria igual que abans.

(3) $\boxed{\det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_j \ldots \mathbf{c}_n)=-\det(\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_j \ldots \mathbf{c}_i \ldots \mathbf{c}_n)}$

Podem dir que «si es permuten dues línies d'una matriu, llavors el determinant de la nova matriu és l'oposat del determinant de la matriu inicial». En el nostre cas, tenim:

$$\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$$

$$-\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=-(a_{12}.a_{21}-a_{11}.a_{22})=-a_{12}.a_{21}+a_{11}.a_{22}$$

També s'obté el mateix resultat i, per tant, es verifica (3)

(4) $\boxed{\det(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n)=1}$

Aquest últim axioma diu que «el determinant de la matriu unitat I és igual a la unitat». Comprovem-ho amb el nostre cas particular,

$$\det(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1.1-0.0=1-0=1$$

Queden provats tots els axiomes i, així, $|A|=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$ és un "determinant" de la matriu A. Serà precisament aquesta expressió la que ens servirà per a calcular el determinant d'una matriu de segon ordre.

2. Partim de la matriu $A\in\mathcal{M}_3$ de termes $A=(a_{ij})$, que té per índexs de files $I=\{1,2,3\}$ i de columnes $J=\{1,2,3\}$. Quants productes pots formar entre els elements de la matriu de manera que no n'hi hagi dos a la mateixa fila ni a la mateixa columna? Digues quins són i apunta'ls de manera que els índexs de files estiguin en l'ordre natural.

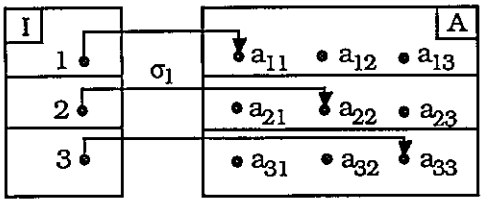
Fixa't ara en els índexs de les columnes i troba el nombre total d'inversions de cada factor. Quines són les seves signatures respectives? Aplicant la definició de determinant definit segons les inversions d'una permutació, dedueix finalment la regla de Sarrus.

Solució. La matriu de termes a_{ij} que té per índexs de files I={1,2,3} i de columnes J={1,2,3} és la matriu quadrada

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Pels productes que hem de fer en aquesta matriu calculem primer quantes aplicacions hi ha que van del conjunt indexat I={1,2,3} a la matriu $A=(a_{ij})$, de manera que la imatge de l'1 sigui un terme de la 1a fila, la del 2 un de la 2a i la del 3 un de la 3a.

Una possible aplicació pot ser σ_1, que a la terna (1,2,3) li fa correspondre (a_{11}, a_{22}, a_{33}), com podem veure a la figura":



Si deixem fixos els índexs de les files i variem només els de les columnes, 1, 2 i 3, veurem que en total el nombre d'aplicacions és igual al de permutacions de tres elements $P_3=3!=3.2.1=6$, que són 123, 132, 213, 231, 312 i 321.

Apuntem les aplicacions corresponents, on col·loquem de manera ordenada els índexs de les files:

$\sigma_1=(a_{11}, a_{22}, a_{33})$ $\sigma_2=(a_{11}, a_{23}, a_{32})$ $\sigma_3=(a_{12}, a_{21}, a_{33})$

$\sigma_4=(a_{12}, a_{23}, a_{31})$ $\sigma_5=(a_{13}, a_{21}, a_{32})$ $\sigma_6=(a_{13}, a_{22}, a_{31})$

Els productes dels termes de cada aplicació, on, com veiem, no n'hi ha dos de la mateixa fila ni dos de la mateixa columna, són:

$p_1=a_{11}.a_{22}.a_{33}$ $p_2=a_{11}.a_{23}.a_{32}$ $p_3=a_{12}.a_{21}.a_{33}$

$p_4=a_{12}.a_{23}.a_{31}$ $p_5=a_{13}.a_{21}.a_{32}$ $p_6=a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Per poder calcular la "signatura", positiva o negativa, d'aquests productes, farem la taula següent:

Prod.	Col.	Inversions possibles			Total inv.	Signatura
p_1	123	12=no	13=no	23=no	$i(p_1)=0$	$\varepsilon(p_1)=+1$
p_2	132	13=no	12=no	32=sí	$i(p_2)=1$	$\varepsilon(p_2)=-1$
p_3	213	21=sí	23=no	13=no	$i(p_3)=1$	$\varepsilon(p_3)=-1$
p_4	231	23=no	21=sí	31=sí	$i(p_4)=2$	$\varepsilon(p_4)=+1$
p_5	312	31=sí	32=sí	12=no	$i(p_5)=2$	$\varepsilon(p_5)=+1$
p_6	321	32=sí	31=sí	21=sí	$i(p_6)=3$	$\varepsilon(p_6)=-1$

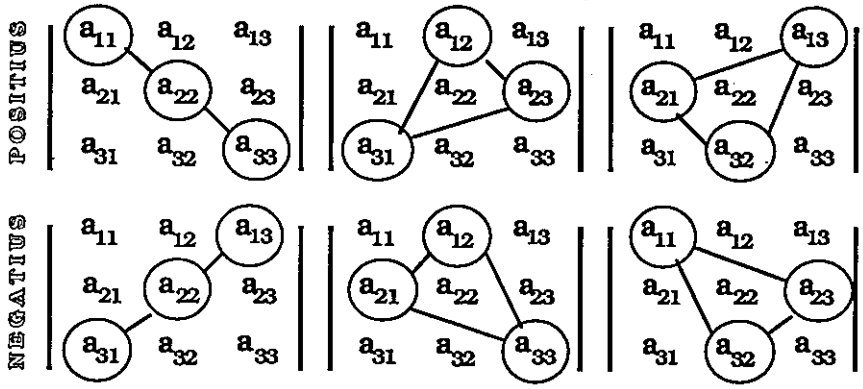
Recordem que el determinant d'una matriu ens és definit com la suma de tots els productes anteriors, amb el signe positiu o negatiu de la seva signatura,

$$|A|=+p_1-p_2-p_3+p_4+p_5-p_6=(p_1+p_4+p_5)-(p_2+p_3+p_6)$$

Escrivint aquests productes obtenim la *regla de Sarrus:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{cases}$$

Gràficament ens resulta la disposició ja coneguda:



3. L'aplicació lineal det(A)=|A| s'anomena alternada perquè, si es permuten dues línies, llavors el determinant canvia de signe. Comprova-ho per un determinant genèric de 3r ordre, aplicant la regla de Sarrus i considerant que les línies que es permuten són la primera i segona files.

Solució. Comprovarem que en un determinant |A| es verifica que $\det(f_2\ f_1\ f_3)' = -\det(f_1\ f_2\ f_3)'$.

$$\det(f_2\ f_1\ f_3)' = \det\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per la regla de Sarrus obtindrem

$$\det(f_2\ f_1\ f_3)' = +a_{21}.a_{12}.a_{33} + a_{22}.a_{13}.a_{31} + a_{11}.a_{32}.a_{23} - a_{31}.a_{12}.a_{23} - a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{13}.a_{21}$$

D'altra banda,

$$\det(f_1\ f_2\ f_3)' = \det\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Desenvolupant directament per Sarrus,

$$\det(f_1\ f_2\ f_3)' = +a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}$$

Ja queda comprovat, perquè tots els signes han quedat canviats.

Determinants de segon ordre

4. Per a la matriu A de columnes $\mathbf{c}_1=(5\ 7)'$ i $\mathbf{c}_2=(8\ 2)'$ i la B també de columnes $\mathbf{d}_1=(9\ 3)'$ i $\mathbf{d}_2=(2\ 4)'$, comprova que $|A+B|$ és igual a $|A|+|B|$. Es verificarà sempre aquesta propietat? Demostra que perquè es compleixi en general aquesta propietat per a les matrius de columnes $A=(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2)$ i $B=(\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2)$ és necessari que es verifiqui la relació: $\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{d}_2)=\det(\mathbf{c}_2\ \mathbf{d}_1)$.

Solució. Apuntem les matrius donades

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}5 & 8\\ 7 & 2\end{pmatrix}\\ \mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\end{array} \quad \wedge \quad B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}9 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\\ \mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2\end{array}$$

Fem ara les operacions indicades pel determinant de la suma i la suma dels determinants

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 7 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 10\\ 10 & 6\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}14 & 10\\ 10 & 6\end{vmatrix}=14.6-10.10=84-100=\boxed{-16}$$

$$|A|+|B|=\begin{vmatrix}5 & 8\\ 7 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}9 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(10-56)+(36-6)=-46+30=\boxed{-16}$$

Encara que hàgim obtingut $|A+B|=|A|+|B|$ en aquest cas particular, això no significa que es verifiqui sempre. Trobem la condició que s'haurà de complir per a les dues matrius generals de segon ordre següents:

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}b\\ d\end{matrix}}\end{pmatrix}\\ \mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\end{array} \quad \wedge \quad B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}m\\ p\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}n\\ q\end{matrix}}\end{pmatrix}\\ \mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2\end{array}$$

Fem les mateixes operacions que abans, però ara treballarem amb lletres, en comptes de números. El determinant de la suma és

$$A+B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+m & b+n\\ c+p & d+q\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}a+m & b+n\\ c+p & d+q\end{vmatrix}=(a+m).(d+q)-(b+n).(c+p) \qquad (1)$$

Quant a la suma dels determinants, tindrem

$$|A|+|B|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}m & n\\ p & q\end{vmatrix}=(a.d-b.c)+(m.q-n.p) \qquad (2)$$

Si volem que $|A+B|=|A|+|B|$, igualarem (1)=(2), multiplicarem i després simplificarem

$$a.d+a.q+m.d+m.q-b.c-b.p-n.c-n.p=a.d-b.c+m.q-n.p$$

$$a.q+m.d-b.p-n.c=0\ ,\ a.q-n.c=b.p-m.d$$

Observem que els membres de l'última igualtat són els valors dels determinants

$$\begin{vmatrix} a & n \\ c & q \end{vmatrix} = a.q-n.c \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} b & m \\ d & p \end{vmatrix} = b.p-m.d$$

Com que el 1r determinant té de columnes $\mathbf{c}_1$ i $\mathbf{d}_2$, i el 2on $\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{d}_1$, s'ha de verificar:

$$\boxed{\det(\mathbf{c}_1\ \mathbf{d}_2)=\det(\mathbf{c}_2\ \mathbf{d}_1)}$$

En altres paraules, perquè el determinant de la suma sigui igual a la suma de determinants, s'haurà de complir que «el determinant format per les columnes extremes sigui igual al determinant format per les columnes mitjanes».

5. Els quatre coeficients d'una matriu A(t) de 2n ordre són variables i depenen del temps t en la forma indicada a baix. Calcula les tres primeres matrius en els instants t=1, 2 i 3. Quins serien els seus determinants respectius? Si una magnitud econòmica ens ve donada per la suma dels cubs dels determinants, quant valdrà $D=|A(1)|^3+|A(2)|^3+|A(3)|^3$? Quina propietat observes en aquesta relació? Els quatre coeficients de la matriu A(t) són:

$a_{11}(t)=(-3.t^2+17.t-8)/2$ $\qquad$ $a_{12}(t)=(3.t^2-7.t+8)/2$

$a_{21}(t)=-t^2+4.t-2$ $\qquad$ $a_{22}(t)=(-5.t^2+19.t-2)/2$

Solució. Calculem els termes de la matriu i el seu determinant pels diferents valors del paràmetre t:

Per t=1:

$a_{11}(1)=(-3.1+17.1-8)/2=3$ $\qquad$ $a_{12}(1)=(3.1-7.1+8)/2=2$

$a_{21}(1)=-1+4-2=1$ $\qquad$ $a_{22}(1)=(-5.1+19.1-2)/2=6$

$$A(1)=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad |A(1)|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=3.6-2.1=18-2=\boxed{16}$$

Per t=2:

$a_{11}(2)=(-3.4+17.2-8)/2=7$ $\qquad$ $a_{12}(2)=(3.4-7.2+8)/2=3$

$a_{21}(2)=-4+4.2-2=2$ $\qquad$ $a_{22}(2)=(-5.4+19.2-2)/2=8$

$$A(2)=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad |A(2)|=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=7.8-3.2=56-6=\boxed{50}$$

Per t=3:

$a_{11}(3)=(-3.9+17.3-8)/2=8$ $\qquad$ $a_{12}(3)=(3.9-7.3+8)/2=7$

$a_{21}(3)=-9+4.3-2=1$ $\qquad$ $a_{22}(3)=(-5.9+19.3-2)/2=5$

$$A(3)=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad |A(3)|=\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=8.5-7.1=40-7=\boxed{33}$$

Calculem a continuació la suma dels cubs d'aquests determinants

$$D=|A(1)|^3+|A(2)|^3+|A(3)|^3=16^3+50^3+33^3=\ldots=165033$$

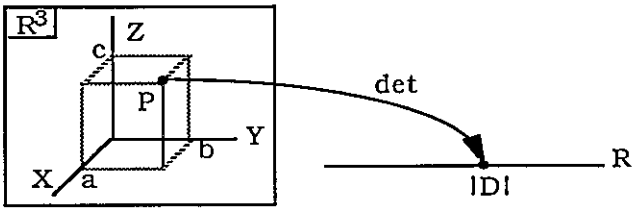
Veiem que, curiosament, estan formats per les mateixes xifres!:

$$\boxed{16^3+50^3+33^3=165033}$$

Determinants de tercer ordre

6. Donats tres nombres reals a, b i c, considerem l'aplicació determinant det(a,b,c)=|D|, on aquest és el determinant de la matriu de files f_1=(b+c b c), f_2=(a c+a c) i f_3=(a b a+b). Calcula l'expressió simplificada. Comprova-la trobant det(1 2 3) primer per mitjà del determinant i després per la fórmula deduïda.

Solució. L'aplicació determinant donada, "det", es pot visualitzar gràficament, i es pot observar que a cada punt de l'espai P(a,b,c) se li fa correspondre un nombre real, com ara la temperatura, el grau d'humitat, etc.



Resoldrem ara el problema apuntant primer el determinant de la matriu D, que és

$$|D|=\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$$

Desenvolupem-lo per la regla de Sarrus,

$$|D|=[(b+c).(c+a).(a+b)+a.b.c+b.c.a]-[c.(c+a).a+c.b.(b+c)+b.a.(a+b)]$$

Efectuant els productes i simplificant,

$$|D|=[(b.c+b.a+c^2+c.a).(a+b)+2.a.b.c]-(c^2.a+c.a^2+c.b^2+c^2.b+b.a^2+b^2.a)=$$
$$=b.c.a+b^2.c+b.a^2+b^2.a+c^2.a+c^2.b+c.a^2+c.a.b+2.a.b.c-c^2.a-c.a^2-c.b^2-$$
$$-c^2.b-b.a^2-b^2.a = b.c.a+c.a.b+2.a.b.c=4.a.b.c$$

Per tant, $\boxed{\det(a,b,c)=4.a.b.c}$

Per al cas particular del punt P(1,2,3), tindrem a=1, b=2 i c=3 i així el determinant ens quedarà

$$|D|=\begin{vmatrix} 2+3 & 2 & 3 \\ 1 & 3+1 & 3 \\ 1 & 2 & 1+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per Sarrus,

$$|D|=(5.4.3+2.3.1+1.2.3)-(3.4.1+3.2.5+2.1.3)=$$
$$=(60+6+6)-(12+30+6)=72-48=\boxed{24}$$

I si haguéssim aplicat la fórmula: det(1,2,3)=4.1.2.3=$\boxed{24}$

Queda, doncs, comprovat que det(a,b,c)=4.a.b.c, ja que hem obtingut el mateix valor.

7. En un problema d'aplicació econòmica es tenim dos determinants $D_1(x)$ i $D_2(x)$. Per quins valors x es podrà verificar la igualtat entre els determinants? Els determinants són:

$$D_1(x)=\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D_2(x)=\begin{vmatrix} 2.x & -x & 4.x \\ -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solució. Desenvolupant els determinants donats per la regla de Sarrus, obtindrem

$$D_1(x)=[4.7.x+x.12.3+6.5.(-1)]-[6.7.3+12.(-1).4+x.5.x]=$$
$$=(28x+36x-30)-(126-48+5x^2)=\boxed{-5.x^2+64.x-108}$$

$$D_2(x)=[2x.2.2+(-x)(-5).0+(-3).1.4x]-[4x.2.0+1.(-5).2x+(-3)(-x).2]=$$
$$=(8x+0-12x)-(0-10x+6x)=(-4x)-(-4x)=\boxed{0}$$

Igualant els determinants, $D_1(x)=D_2(x)$, resulta l'equació de 2n grau $-5.x^2+64.x-108=0$ o bé $\boxed{5.x^2-64.x+108=0}$. Si la resolem,

$$x=\frac{-(-64)\pm\sqrt{(-64)^2-4.5.108}}{2.5}=\frac{64\pm\sqrt{1936}}{10}=\frac{64\pm44}{10}$$

Pel signe positiu, $x_1=(64+44)/10=108/10=10'8$ i pel signe negatiu, $x_2=(64-44)/10=20/10=2$.

Per tant, els valors de x demanats són $\boxed{x_1=10'8}$ i $\boxed{x_2=2}$.

8. Calcula el valor del determinant $|A|=|M\bullet N-N\bullet M|$ on les matrius M i N són expressades per:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad N=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució. Efectuem els productes matricials M•N i N•M, que segurament seran diferents, ja que en general (•) no és commutatiu

$$M\bullet N=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+4+0 & 4+1+0 & 6+2+6 \\ 2+16+0 & 4+4+0 & 6+8+2 \\ 3+8+0 & 6+2+0 & 9+4+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 14 \\ 18 & 8 & 16 \\ 11 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

$$N\bullet M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+4+9 & 1+8+6 & 3+2+15 \\ 8+2+6 & 4+4+4 & 12+1+10 \\ 0+0+6 & 0+0+4 & 0+0+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 \\ 16 & 12 & 23 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Realitzem tot seguit la diferència d'aquestes dues matrius

$$A=M\bullet N-N\bullet M=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 14 \\ 18 & 8 & 16 \\ 11 & 8 & 23 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 \\ 16 & 12 & 23 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -10 & -6 \\ 2 & -4 & -7 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Finalment, calculem el determinant $|A|$ per la regla de Sarrus

$$|A| = [(-9).(-4).13+(-10).(-7).5+2.4.(-6)]-[5.(-4).(-6)+4.(-7).(-9)+ +2.(-10).13] = (468+350-48)-(120+252-260) = 770-112 = \boxed{658}.$$

Propietats dels determinants

9. Prova que el determinant $|A|$ és múltiple del determinant $|B|$ fent servir algunes de les propietats dels determinants. Les matrius que has de fer servir són:

$$A=\begin{pmatrix} x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \\ a+b & b+c & c+a \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Solució. Partirem del determinant $|A|$, aplicant en primer lloc la propietat (1), ja que la 1a columna és suma de dos sumands,

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y+z & z+x \\ p & q+r & r+p \\ a & b+c & c+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & y+z & z+x \\ q & q+r & r+p \\ b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

Per la mateixa propietat (1), com que la 2a columna és suma de dos sumands, podem descompondre el determinant $|A|$ com a

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z+x \\ p & q & r+p \\ a & b & c+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & z & z+x \\ p & r & r+p \\ a & c & c+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & y & z+x \\ q & q & r+p \\ b & b & c+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & z+x \\ q & r & r+p \\ b & c & c+a \end{vmatrix}$$

Com que el 3r determinant té dues columnes iguals, per la propietat (6), tindrà valor nul

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z+x \\ p & q & r+p \\ a & b & c+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & z & z+x \\ p & r & r+p \\ a & c & c+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & z+x \\ q & r & r+p \\ b & c & c+a \end{vmatrix}$$

Apliquem la propietat (1) descomponent cada determinant com a suma de dos

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & x \\ p & q & p \\ a & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & z & z \\ p & r & r \\ a & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & z & x \\ p & r & p \\ a & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & z \\ q & r & r \\ b & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & x \\ q & r & p \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Per la propietat (6), seran nuls tots els determinants interiors,

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & z & x \\ q & r & p \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Finalment, per la propietat (3), si es permuten dues columnes, el determinant canvia de signe. Fem aquesta operació dues vegades seguides en el segon determinant, i resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y & x & z \\ q & p & r \\ b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & x \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & x \end{vmatrix}$$

D'aquí podem deduir que $\boxed{|A|=2.|B|}$, és a dir, que el primer determinant és igual al doble del segon.

10. Donades les matrius A i B següents, comprova que el determinant del producte de les matrius és igual al producte dels determinants de les matrius respectives. Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució. Trobarem en primer lloc el producte de les dues matrius donades. Suposem que és el A•B,

$$A\bullet B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+0+6 & -1+0-4 & 3+0+0 \\ 6+1-6 & -3+0+4 & 9-1+0 \\ 0-2+9 & 0+0-6 & 0+2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

El seu determinant és

$$|A\bullet B|=\begin{vmatrix} 8 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ 7 & -6 & 2 \end{vmatrix}=(16-18-280)-(21-384-10)=-282+373=\boxed{91}$$

D'altra banda, trobem els determinants de les dues matrius donades

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(3-12+0)-(0+4+0)=-9-4=\boxed{-13}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(0-6+3)-(0+4+0)=-3-4=\boxed{-7}$$

Si fem el seu producte, $|A|.|B|=(-13).(-7)=91$. Queda comprovat en aquest cas que el determinant del producte de matrius és igual al producte dels seus determinants, $\boxed{|A\bullet B|=|A|.|B|}$

Observem que passaria el mateix amb el determinant $|B\bullet A|$, com podem comprovar fàcilment:

$$B\bullet A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-3+0 & 0+1+6 & -4-2-9 \\ -1+0+0 & 0+0+2 & 2+0-3 \\ -3+6+0 & 0-2+0 & 6+4+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -15 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Calculem el seu determinant,

$$|B\bullet A|=\begin{vmatrix} -1 & 7 & -15 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 10 \end{vmatrix}=(-20-30-21)-(-90-2-70)=(-71)-(-162)=\boxed{91}$$

També es desprèn, lògicament, que $|A\bullet B|=|B\bullet A|$.

11. Sense desenvolupar-lo, prova que és nul el determinant D_A de la matriu $A=(a_{ij})$. Serà també nul el determinant D_B de la matriu $B=(a_{ij}^2)$ formada pels quadrats de cadascun dels termes de la matriu donada A? En cas negatiu, troba l'arrel novena de D_B. La matriu A és:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Solució. Veiem que $\mathbf{c}_1=(5\ 7\ 9)'$, $\mathbf{c}_2=(7\ 9\ 11)'$ i $\mathbf{c}_3=(9\ 11\ 13)'$ tenen els elements en progressió aritmètica de diferència 2. Si apliquem la propietat (8) dels determinants, tindrem:

$$D_A=\begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2= \\ f_3 \end{matrix}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-f_1 \\ g_3=f_3-f_2 \end{matrix}=0$$

ja que per tenir dues files iguals, la propietat (6) ens indica que s'ha d'anul·lar.

Trobem ara la matriu B formada pels quadrats dels termes de la matriu anterior A,

$$B=\begin{pmatrix} 5^2 & 7^2 & 9^2 \\ 7^2 & 9^2 & 11^2 \\ 9^2 & 11^2 & 13^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 49 & 81 \\ 49 & 81 & 121 \\ 81 & 121 & 169 \end{pmatrix}$$

Per calcular el seu determinant D_B, aplicarem la propietat (8) fent combinacions lineals entre les files o columnes amb la finalitat que els termes de la matriu ens quedin més petits:

$$D_B=\begin{vmatrix} 25 & 49 & 81 \\ 49 & 81 & 121 \\ 81 & 121 & 169 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2= \\ f_3 \end{matrix}\begin{vmatrix} 25 & 49 & 81 \\ 24 & 32 & 40 \\ 32 & 40 & 48 \end{vmatrix}\begin{matrix} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-f_1 \\ g_3=f_3-f_2 \end{matrix}$$

Traient factor comú en la 2a i 3a files,

$$D_B=8^2\cdot\begin{vmatrix} 25 & 49 & 81 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix}=64\cdot\begin{vmatrix} 25 & 49 & 81 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} h_1=g_1 \\ h_2=g_2 \\ h_3=g_3-g_2 \end{matrix}$$

Podem continuar simplificant el determinant, restant a cada columna l'anterior, dues vegades seguides,

$$D_B=64\cdot\begin{vmatrix} 25 & 24 & 32 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=64\cdot\begin{vmatrix} 25 & 24 & 8 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

D'on, directament, $D_B=64.[(0+0+0)-(8+0+0)]=64.(-8)=\boxed{-512}$

La seva arrel novena la trobarem a partir de la descomposició de 512 en factors primers, $512=2^9$,

$$x=\sqrt[9]{-512}=-\sqrt[9]{512}=-\sqrt[9]{2^9}=\boxed{-2}$$

Fem notar que hem tret el signe menys fora de l'arrel perquè l'índex d'aquesta arrel és imparell.

12. Una variable D(a,b,c), que depèn de tres paràmetres a, b i c, és expressada en forma de determinant. Quin valor assolirà quan els paràmetres valguin a=1/6, b=4/3 i c=3/2? El determinant és:

$$D(a,b,c)=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Solució. La manera més senzilla de resoldre aquest exercici serà substituir cada paràmetre pel seu valor. Abans, però, trobem les sumes següents

$$b+c=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{8+9}{6}=\frac{17}{6} \qquad c+a=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=\frac{9+1}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$a+b=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{1+8}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

El determinant serà

$$D=\begin{vmatrix} (17/6)^2 & (4/3)^2 & (3/2)^2 \\ (1/6)^2 & (5/3)^2 & (3/2)^2 \\ (1/6)^2 & (4/3)^2 & (3/2)^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 289/36 & 16/9 & 9/4 \\ 1/36 & 25/9 & 9/4 \\ 1/36 & 16/9 & 9/4 \end{vmatrix}$$

Per la propietat (2) dels determinants, podrem treure factor comú a cada columna,

$$D=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{4}\cdot\begin{vmatrix} 289 & 16 & 1 \\ 1 & 25 & 1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{144}\cdot\begin{vmatrix} 289 & 16 & 1 \\ -288 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_2 \end{matrix}$$

Finalment, aplicant la regla de Sarrus,

$$D=(1/144).[(0+2592+0)-(0+0+0)]=2592/144=\boxed{18}$$

Desenvolupant primer el determinant donat i simplificant obtindràs $D(a,b,c)=2.a.b.c.(a+b+c)^3$. Substituint pel cas particular a=1/6, b=4/3 i c=3/2, obtindrem lògicament D=18.

1.2. DETERMINANTS D'ORDRE SUPERIOR

Mètode del pivot

13. Pel mètode del pivot troba el determinant |A| i després comprova que és igual al producte dels determinants |B| i |C|, on

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -3 & 8 \\ 9 & -3 & 6 & 5 \end{vmatrix}, \quad |B|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad |C|=\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Solució. Per calcular un determinant pel mètode del pivot, apuntarem les columnes de la matriu, seguides d'una columna addicional de sumes, que ens servirà per a comprovar els càlculs. Així, per exemple, $s_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=3+1+0+0=4$.

c_1	c_2	c_3	c_4	s
$\boxed{3}$	1	0	0	4
2	-4	0	0	-2
5	7	-3	8	17
9	-3	6	5	17

Ara prendrem com a element pivot el terme superior esquerre, $p_1=3$, i obtindrem els nous termes a partir de determinants de 2n ordre. Per exemple, $b_{11}=3.(-4)-2.1=-14$, $b_{12}=3.0-2.0=0$, etc.

Procedint d'aquesta manera anirem obtenint els diferents elements pivot: $p_2=-14$, $p_3=126$ i $p_4=-111132$, com es pot veure en els càlculs següents, comprovats tots per la columna de sumes:

$\boxed{-14}$	0	0	-14
16	-9	24	31
-18	18	15	15

$\boxed{126}$	-336	-210
-252	-210	-462

$\boxed{-111132}$	-111132

El determinant serà expressat pel producte

$$|A|=\prod_{i=1}^{4}(p_i)^{i-4+1}=\prod_{i=1}^{4}(p_i)^{i-3}=(p_1)^{-2}.(p_2)^{-1}.(p_3)^{0}.(p_4)^{1}=\frac{p_4}{(p_1)^2.p_2}$$

Substituint pels valors corresponents,

$$|A|=\frac{-111132}{(3)^2.(-14)}=\frac{111132}{126}=\boxed{882}$$

D'altra banda, calculem els determinants de segon ordre

$$|B|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=3.(-4)-2.1=\boxed{-14} \qquad |C|=\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 6 & 5\end{vmatrix}=-3.5-6.8=\boxed{-63}$$

Com que $|B|.|C|=(-14).(-63)=882$, queda comprovada la relació.

14. Donades les matrius A, B i C, resol l'equació de tercer grau $x^3+|A|.x^2+|B|.x+|C|=0$, on els seus coeficients són els determinants de les matrius donades. Aplica el mètode del pivot per trobar el determinant de 4t ordre. Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -8\\ 2 & -7\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 6 & 5 & 10\\ 5 & 4 & -2\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C=\begin{pmatrix}-8 & 0 & 2 & 3\\ -3 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Solució. Els determinants de 2n i 3r ordre no presenten gens de dificultat. Apliquem la regla de Sarrus per al càlcul de $|B|$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}=3.(-7)-2.(-8)=-21+16=\boxed{-5}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 10 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}=(-30+72+100)-(75+120-24)=142-171=\boxed{-29}$$

Per al determinant de 4t ordre farem servir el mètode del pivot. El primer pas, en què $p_1=-8$, és

c_1	c_2	c_3	c_4	s
$\boxed{-8}$	0	2	3	-3
-3	2	4	1	4
1	4	1	2	8
4	3	3	0	10

Pels tres passos següents, esquematitzats a continuació, veiem que els seus elements pivots corresponents són $p_2=-16$, $p_3=-672$ i $p_4=-107520$

$\boxed{-16}$	26	1	-41
-32	10	-19	-61
-24	32	-12	-68

$\boxed{-672}$	236	-336
-112	216	104

$\boxed{-107520}$	-107520

Per tant, el determinant $|C|$ serà expressat per la fórmula de productes de l'exercici anterior

$$|C|=\frac{p_4}{(p_1)^2.p_2}=\frac{-107520}{(-8)^2.(-16)}=\frac{107520}{1024}=\boxed{105}$$

Si substituïm en l'equació de tercer grau, ens quedarà

$$x^3+|A|.x^2+|B|.x+|C|=0 \quad \Rightarrow \quad x^3-5.x^2-29.x+105=0$$

Les possibles arrels enteres seran els divisors de 105, que són ±1, ±3, ±5, ±7, etc. Provem x=3 per la regla de Ruffini,

	1	-5	-29	105
3		3	-6	-105
	1	-2	-35	0

És a dir, que una solució és x=3. Les altres dues les obtindrem resolent l'equació de 2n grau resultant, $x^2-2.x-35=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.(-35}}{2.1}=\frac{2\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{2\pm12}{2}=1\pm6$$

Pel signe positiu ens queda x=1+6=7, i pel negatiu x=1-6=-5. En resum, les tres solucions de l'equació de tercer grau donada per $x^3+|A|.x^2+|B|.x+|C|=0$ són $\boxed{x_1=3}$, $\boxed{x_2=7}$ i $\boxed{x_3=-5}$.

Menor complementari i adjunt d'un element

15. Sigui la matriu A que té per columnes $\mathbf{c}_1=(1\ 1\ 1)'$, $\mathbf{c}_2=(0\ 1\ 1)'$ i $\mathbf{c}_3=(1\ 0\ 1)'$. Troba tots els menors complementaris dels elements d'aquesta matriu i agrupa'ls segons el seu valor en les tres classes $|A|_{(1)}$, $|A|_{(0)}$, $|A|_{(-1)}$. Fes el mateix amb els adjunts.

Solució. Si suprimim la fila $\mathbf{f}_i$ i la columna $\mathbf{c}_j$ d'un element a_{ij} d'una matriu quadrada A de 3r ordre, obtindrem una matriu de 2n ordre que representem per A_{ij} i anomenen "matriu menor complementària".

En total trobarem 9 matrius d'aquestes:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0\ 1} \\ \boxed{1} & 1\ 0 \\ \boxed{1} & 1\ 1 \end{pmatrix} \qquad A_{12}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{13}=\begin{pmatrix} \boxed{1\ 0} & \boxed{1} \\ 1\ 1 & \boxed{0} \\ 1\ 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0\ 1 \\ \boxed{1} & \boxed{1\ 0} \\ \boxed{1} & 1\ 1 \end{pmatrix} \qquad A_{22}=\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23}=\begin{pmatrix} 1\ 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1\ 1} & \boxed{0} \\ 1\ 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$A_{31}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0\ 1 \\ \boxed{1} & 1\ 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1\ 1} \end{pmatrix} \qquad A_{32}=\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad A_{33}=\begin{pmatrix} 1\ 0 & \boxed{1} \\ 1\ 1 & \boxed{0} \\ \boxed{1\ 1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Com sabem, els *menors complementaris*, simbolitzats per $|A_{ij}|$, seran els determinants de les matrius anteriors,

$$|A_{11}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad |A_{12}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad |A_{13}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$|A_{21}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \qquad |A_{22}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad |A_{23}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$|A_{31}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1 \qquad |A_{32}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1 \qquad |A_{33}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

Segons el seu resultat, -1, 0 o +1, els podem classificar en els tres conjunts,

$$|A|_{(-1)}=\{|A_{21}|,\ |A_{31}|,\ |A_{32}|\} \qquad |A|_{(0)}=\{|A_{13}|,\ |A_{22}|\}$$
$$|A|_{(+1)}=\{|A_{11}|,\ |A_{12}|,\ |A_{23}|,\ |A_{33}|\}$$

Els *adjunts*, simbolitzats per $|\mathcal{A}_{ij}|$, no seran més que els menors complementaris, precedits del signe més o menys segons que la suma dels índexs de fila i de columna sigui parell o imparell. Expressat per mitjà d'una fórmula, escriurem:

$$\boxed{|\mathcal{A}_{ij}|=(-1)^{i+j}.|A_{ij}|}$$

Calculem ara tots aquests determinants adjunts,

$$|\mathcal{A}_{11}|=(-1)^{1+1}.|A_{11}|=+(1)=1 \qquad |\mathcal{A}_{12}|=(-1)^{1+2}.|A_{12}|=-(1)=-1$$
$$|\mathcal{A}_{13}|=(-1)^{1+3}.|A_{13}|=+(0)=0 \qquad |\mathcal{A}_{21}|=(-1)^{2+1}.|A_{21}|=-(-1)=1$$

$|\mathcal{A}_{22}|=(-1)^{2+2}.|A_{22}|=+(0)=0$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{23}|=(-1)^{2+3}.|A_{23}|=-(1)=-1$

$|\mathcal{A}_{31}|=(-1)^{3+1}.|A_{31}|=+(-1)=-1$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{32}|=(-1)^{3+2}.|A_{32}|=-(-1)=1$

$|\mathcal{A}_{33}|=(-1)^{3+3}.|A_{33}|=+(1)=1$

Classificant també aquests adjunts segons el seu valor, -1, 0 o 1, obtindrem els tres conjunts següents

$$|\mathcal{A}|_{(-1)}=\{|\mathcal{A}_{12}|,\ |\mathcal{A}_{23}|,\ |\mathcal{A}_{31}|\} \qquad |\mathcal{A}|_{(0)}=\{|\mathcal{A}_{13}|,\ |\mathcal{A}_{22}|\}$$

$$|\mathcal{A}|_{(+1)}=\{|\mathcal{A}_{11}|,\ |\mathcal{A}_{21}|,\ |\mathcal{A}_{32}|,\ |\mathcal{A}_{33}|\}.$$

Regla de Laplace i obtenció d'elements nuls

16. Calcula el valor del determinant D per mitjà dels adjunts de la 3a fila. Troba també aquest determinant aplicant la regla de Sarrus fent en primer lloc que dos termes de la 1a fila siguin iguals a zero. El determinant ens ve donat per:

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Solució. Si volem emprar la *regla de Laplace* per calcular el determinant D per mitjà dels adjunts de la 3a fila, tindrem

$$D=a_{31}.|\mathcal{A}_{31}|+a_{32}.|\mathcal{A}_{32}|+a_{33}.|\mathcal{A}_{33}|$$

Substituint pels seus termes, $D=5.|\mathcal{A}_{31}|+2.|\mathcal{A}_{32}|+1.|\mathcal{A}_{33}|$ (1)

Calculem aquests adjunts,

$$|\mathcal{A}_{31}|=(-1)^{3+1}.|A_{31}|=+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}=+(9-6)=3$$

$$|\mathcal{A}_{32}|=(-1)^{3+2}.|A_{32}|=-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-(15-4)=-11$$

$$|\mathcal{A}_{33}|=(-1)^{3+3}.|A_{33}|=+\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=+(30-12)=18$$

Substituint en (1), ens quedarà,

$$D=5.(3)+2.(-11)+1.(18)=15-22+18 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=11}$$

Calculem a continuació el determinant fent en primer lloc que els termes a_{11} i a_{12} de la primera fila es transformin en zeros. Per això farem la combinació lineal següent entre les columnes:

$$c'_1=c_1-5.c_3 \quad \wedge \quad c'_2=c_2-3.c_3$$

Aplicant la *regla de Sarrus* al determinant així obtingut, tenim:

$$D=\begin{vmatrix} 5-5 & 3-3 & 1 \\ 4-15 & 6-9 & 3 \\ 5-5 & 2-3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -11 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0+11+0)-(0+0+0)=\boxed{11}$$

17. Per al determinant de 4t ordre D fes les operacions elementals que creguis convenients entre les seves files fins a reduir-lo a un determinant de 2n ordre, i després calcula'n el valor. Indica clarament quines són aquestes operacions. El determinant és:

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solució. Mirarem de transformar la 1a columna en zeros excepte el a_{11}. Amb aquesta finalitat sumarem la primera fila a cadascuna de les altres,

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} g_1=f_1 \\ g_2=f_2+f_1 \\ g_3=f_3+f_1 \\ g_4=f_4+f_1 \end{matrix} =2.2.2.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observem que hem tret factor comú, propietat (2), en cadascuna de les files 2a, 3a i 4a.

Ara, fent servir la *regla de Laplace*, desenvoluparem per adjunts de la primera columna,

$$D=8.[a_{11}.|\mathcal{A}_{11}|+a_{21}.|\mathcal{A}_{21}|+a_{31}.|\mathcal{A}_{31}|+a_{41}.|\mathcal{A}_{41}|]$$

Com que $a_{11}=-1$, $a_{21}=0$, $a_{31}=0$ i $a_{41}=0$, el determinant quedarà reduït únicament a

$$D=-8.|\mathcal{A}_{11}|=-8.(-1)^{1+1}.|A_{11}|=-8.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Per convertir aquest determinant en un de 2n ordre, tornarem a desenvolupar per adjunts de la primera columna,

$$D=-8.[a_{11}.|\mathcal{A}_{11}|+a_{21}.|\mathcal{A}_{21}|+a_{31}.|\mathcal{A}_{31}|]$$

I com que $a_{11}=0$, $a_{21}=0$ i $a_{31}=1$, ens quedarà

$$D=-8.|\mathcal{A}_{31}|=-8.(-1)^{3+1}.|A_{31}|=-8.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-8.[1-(-1)]=-8.2=\boxed{-16}$$

18. Resol l'equació de tercer grau en forma de determinant, D(x)=0, desenvolupant per adjunts de la primera fila i després trobant les tres solucions de l'equació. Aquesta equació és:

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

Solució. Desenvolupant per adjunts de la primera fila, obtindrem

$$D(x)=a_{11}.|\mathcal{A}_{11}|+a_{12}.|\mathcal{A}_{12}|+a_{13}.|\mathcal{A}_{13}|+a_{14}.|\mathcal{A}_{14}|$$

Substituint els termes en aquest desenvolupament per Laplace, obtenim:

$$D(x)=x^3.|\mathcal{A}_{11}|+x^2.|\mathcal{A}_{12}|+x.|\mathcal{A}_{13}|+1.|\mathcal{A}_{14}| \quad (1)$$

Calculem ara cadascun dels adjunts, fent servir la regla de Sarrus

$$|\mathcal{A}_{11}|=(-1)^{1+1}.|A_{11}|=+\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=+[(12+0+0)-(9+8+0)]=12-17=\boxed{-5}$$

$$|\mathcal{A}_{12}|=(-1)^{1+2}.|A_{12}|=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -9 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-[(12+9+0)-(3+8+0)]=-(21-11)=\boxed{-10}$$

$$|\mathcal{A}_{13}|=(-1)^{1+3}.|A_{13}|=+\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -9 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=+[(0-27-8)-(0-24-36)]=-35+60=\boxed{25}$$

$$|\mathcal{A}_{14}|=(-1)^{1+4}.|A_{14}|=-\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-[(0+0+6)-(0+18+18)]=-(6-36)=\boxed{30}$$

Substituint en (1) obtindrem $D(x)=(-5).x^3+(-10).x^2+25.x+1.30$. Per tant, l'equació $D(x)=0$ serà

$$-5.x^3-10.x^2+25.x+30=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^3+2.x^2-5.x-6=0}$$

Per calcular les tres solucions o arrels d'aquesta equació farem servir la regla de Ruffini. Comprovem que $x=-1$ és una solució

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	1	-6	(0

L'equació de segon grau resultant serà $1.x^2+1.x-6=0$, que tindrà per arrels

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-6)}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}$$

Pel signe més tindrem, $x=(-1+5)/2=4/2=2$. I pel signe menys, $x=(-1-5)/2=-6/2=-3$.

En resum, les solucions de l'equació en forma de determinant són $\boxed{x_1=-1}$, $\boxed{x_2=2}$ i $\boxed{x_3=-3}$.

19. Desenvolupa el determinant de 4t ordre D(a,b) per mitjà de les propietats dels determinants i deixa finalment el resultat simplificat en forma de potència:

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

Solució. Si fem $\mathbf{c}'_1=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_4$, és a dir, si a la primera columna li sumem les altres tres, veurem que tots els seus termes ens quedaran iguals a $a^2+2.a.b+b^2$, i per tant a $(a+b)^2$,

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ab & ab & b^2 \\ (a+b)^2 & a^2 & b^2 & ab \\ (a+b)^2 & b^2 & a^2 & ab \\ (a+b)^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

Si ara traiem factor comú fora del determinant el terme $(a+b)^2$ i després a cada fila li restem la primera, obtindrem

$$D(a,b)=(a+b)^2.\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} =(a+b)^2.\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2-ab & b^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & b^2-ab & a^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

Desenvolupem per adjunts de la primera columna:

$$D(a,b)=(a+b)^2.[1.|\mathcal{A}_{11}|+0.|\mathcal{A}_{21}|+0.|\mathcal{A}_{31}|+0.|\mathcal{A}_{41}|]=(a+b)^2.|\mathcal{A}_{11}|$$

Per tant,

$$D(a,b)=(a+b)^2.(-1)^{1+1}.|A_{11}|=(a+b)^2.\begin{vmatrix} a^2-ab & b^2-ab & ab-b^2 \\ b^2-ab & a^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

Tornant a desenvolupar per adjunts de la tercera fila,

$$D(a,b)=(a+b)^2.[0.|\mathcal{A}_{31}|+0.|\mathcal{A}_{32}|+(a^2-b^2).|\mathcal{A}_{33}|]=$$
$$=(a+b)^2.(a^2-b^2).|\mathcal{A}_{33}|=(a+b)^2.(a^2-b^2).|A_{33}| \quad (1)$$

Trobem a part aquest determinant $|A_{33}|$,

$$|A_{33}|=\begin{vmatrix} a^2-ab & b^2-ab \\ b^2-ab & a^2-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a.(a-b) & -b.(a-b) \\ -b.(a-b) & a.(a-b) \end{vmatrix} =(a-b)(a-b).\begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

És a dir,

$$|A_{33}|=(a-b)^2.[a.a-(-b).(-b)]=(a-b)^2.(a^2-b^2)$$

Substituint en (1),

$$D(a,b)=(a+b)^2.(a^2-b^2).(a-b)^2.(a^2-b^2)=[(a+b)^2.(a-b)^2].(a^2-b^2)^2=$$
$$=[(a+b).(a-b)]^2.(a^2-b^2)^2=(a^2-b^2)^2.(a^2-b^2)^2=\boxed{(a^2-b^2)^4}.$$

20. Per al determinant de 5è ordre que té per files $\mathbf{f}_1=(a\ 1\ 1\ 1\ 1)$, $\mathbf{f}_2=(1\ a\ 1\ 1\ 1)$, $\mathbf{f}_3=(1\ 1\ a\ 1\ 1)$, $\mathbf{f}_4=(1\ 1\ 1\ a\ 1)$ i $\mathbf{f}_5=(1\ 1\ 1\ 1\ a)$, calcula'n el valor D(a) en funció del paràmetre a. Quant valdrà en el cas que a=1? Comprova-ho observant el determinant.

Solució. Apuntem el determinant, i com que cada columna està formada pel paràmetre a i quatre uns, sumarem a la primera fila les altres quatre,

$$D(a)=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4 & a+4 & a+4 & a+4 & a+4 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Traient factor comú a+4 en la primera fila i després restant a cada fila l'anterior, resulta:

$$D(a)=(a+4).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+4).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

Observem que hem obtingut una matriu triangular superior i, per tant, el determinant és igual al producte dels termes de la diagonal principal,

$$D(a)=(a+4).1.(a-1).(a-1).(a-1).(a-1) \Rightarrow \boxed{D(a)=(a+4).(a-1)^4}$$

En el cas de a=1, tindrem $D(1)=(1+4).(1-1)^4=5.0^4=0$, la qual cosa és lògica, ja que si substituïm a=1 en el determinant original ens quedarà format totalment per uns, que, òbviament, és zero perquè té files i columnes iguals.

21. Calcula en funció dels paràmetres a, b i c els determinants següents |A| i |B|. Després troba el nou valor C i calcula'l seguidament pels valors a=2, b=3 i c=6. Tenim:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{vmatrix},\ |B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{vmatrix} \text{ i } C=\sqrt{\frac{(|A|-1)^2+|B|}{2}}$$

Solució. Per al primer determinant, |A|, sumarem a la primera columna les altres dues,

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+1 & b & c \\ a+b+c+1 & b+1 & c \\ a+b+c+1 & b & c+1 \end{vmatrix}$$

Com que la primera columna té tots els termes iguals, podrem treure fora del determinant aquest valor comú. Després a cada fila li restarem la primera,

$$|A|=(a+b+c+1).\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+1 & c \\ 1 & b & c+1 \end{vmatrix} = (a+b+c+1).\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{a+b+c+1}$$

ja que ens ha quedat el determinant d'una matriu triangular.

Calculem ara el segon determinant, $|B|$, restant la 2a fila a la 3a, i la 3a a la 4a,

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 0 & -c & c & b-a \\ 0 & c-b & -a & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3-f_2 \\ f_4-f_3 \end{matrix}$$

Desenvolupant per adjunts de la 1a columna, ens quedarà

$$|B|=0.|\mathcal{A}_{11}|+1.|\mathcal{A}_{21}|+0.|\mathcal{A}_{31}|+0.|\mathcal{A}_{41}|=|\mathcal{A}_{21}|=-|A_{21}|$$

Consegüentment,

$$|B|=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -c & c & b-a \\ c-b & -a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -c & c & b-a \\ b-c & a & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 2c & b-a-c \\ b-c & a-b+c & -2a \end{vmatrix}$$

En el pas anterior s'ha multiplicat la 3a fila per (-1) i, després, a cada columna se li ha restat l'anterior. Ara desenvoluparem per adjunts de la 1a fila, aplicant la regla de Laplace,

$$|B|=1.|\mathcal{A}_{11}|+0.|\mathcal{A}_{12}|+0.|\mathcal{A}_{13}| = |\mathcal{A}_{11}| = +|A_{11}|$$

Per tant,

$$|B|=\begin{vmatrix} 2c & b-a-c \\ a-b+c & -2a \end{vmatrix} = (2c).(-2a)-(b-a-c).(a-b+c) = -4.a.c+(a-b+c)^2$$

Aplicant la fórmula del quadrat d'un trinomi,

$$|B|=-4.a.c+(a^2+b^2+c^2-2.a.b+2.a.c-2.b.c)$$

Finalment, $\boxed{|B|=a^2+b^2+c^2-2.a.b-2.a.c.-2.b.c}$

Per trobar el valor de C, calcularem abans l'expressió

$$(|A|-1)^2=(a+b+c+1-1)^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2.a.b+2.a.c+2.b.c$$

Per tant, es veu fàcilment que $(|A|-1)^2+|B|=2.(a^2+b^2+c^2)$

$$C=\sqrt{\frac{(|A|-1)^2+|B|}{2}}=\sqrt{\frac{2.(a^2+b^2+c^2)}{2}} \Rightarrow \boxed{C=\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Per al cas particular quedarà $C(2,3,6)=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=\boxed{7}$.

22. Donat el determinant D format pels cubs dels 7 primers nombres naturals, aplica-hi algunes de les propietats dels determinants per reduir-lo a un de segon ordre. Calcula també la seva arrel quàrtica. El determinant és:

$$D=\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \end{vmatrix}$$

Solució. Com que $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$ i $7^3=343$, substituirem i després restarem a cada fila l'anterior,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \\ 27 & 64 & 125 & 216 \\ 64 & 125 & 216 & 343 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 7 & 19 & 37 & 61 \\ 19 & 37 & 61 & 91 \\ 37 & 61 & 91 & 127 \end{vmatrix}\begin{matrix} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-f_1 \\ g_3=f_3-f_2 \\ g_4=f_4-f_3 \end{matrix}$$

Ara tornem a restar a cada fila l'anterior i després traiem de factor comú 6 a les dues últimes files,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 6 & 11 & 10 & -3 \\ 12 & 18 & 24 & 30 \\ 18 & 24 & 30 & 36 \end{vmatrix}\begin{matrix} h_1=g_1 \\ h_2=g_2-g_1 \\ h_3=g_3-g_2 \\ h_4=g_4-g_3 \end{matrix} = 6.6.\begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 6 & 11 & 10 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i_3=h_3/6 \\ i_4=h_4/6 \end{matrix}$$

Si a continuació restem a l'última fila la penúltima i després restem a cada columna l'anterior,

$$D=36.\begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 6 & 11 & 10 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ j_4=i_4-i_3 \end{matrix} =36.\begin{vmatrix} 1 & 7 & 19 & 37 \\ 6 & 5 & -1 & -13 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Apliquem la regla de Laplace, desenvolupant per adjunts de l'última fila,

$$D=36.[1.|\mathcal{A}_{41}|+0.|\mathcal{A}_{42}|+0.|\mathcal{A}_{43}|+0.|\mathcal{A}_{44}|]=36.|\mathcal{A}_{41}|=-36.|A_{41}|$$

Substituint, restant a cada columna l'anterior, i traient factor 6 en les dues últimes columnes,

$$D=-36.\begin{vmatrix} 7 & 19 & 37 \\ 5 & -1 & -13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36.\begin{vmatrix} 7 & 12 & 18 \\ 5 & -6 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36.6.6.\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per adjunts de l'última fila, i després trobant el determinant,

$$D=-1296.[1.|\mathcal{A}_{31}|+0.|\mathcal{A}_{32}|+0.|\mathcal{A}_{33}|]=-1296.|\mathcal{A}_{31}|=-1296.|A_{31}|=$$
$$=-1296.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1296.[2.(-2)-3.(-1)] = -1296.(-1) = \boxed{1296}$$

Per trobar l'arrel quàrtica d'aquest determinant, ho podem fer mitjançant dues arrels quadrades consecutives,

$$\sqrt[4]{D}=\sqrt[4]{1296}=\sqrt{\sqrt{1296}}=\sqrt{36}=\boxed{6}$$

Per fer més pràctica, i a partir del que hem fet en aquest exercici, calcula els nous determinants de bases iguals que l'anterior, però d'exponents diferents,

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \wedge \quad D_2=\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

T'han de donar tots dos nuls.

23. Calcula els determinants $|A|_2$, $|A|_3$ i $|A|_4$, que, com pots veure, segueixen una certa llei de formació. Podries escriure el $|A|_5$? Comprova també que tots aquests determinants verifiquen la fórmula que tenim al final del problema. Quant valdran $|A|_5$ i $|A|_6$? Tenim els determinants:

$$|A|_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix},\ |A|_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix},\ |A|_4=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\ldots$$

Fórmula: $|A|_n=.(-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}.\frac{n.(n+1)}{2}.n^{n-2}$

Solució. Per al determinant de segon ordre es veu fàcilment que $|A|_2=1.1-2.2=1-4=\boxed{-3}$

Emprarem la regla de Sarrus per calcular el determinant de tercer ordre,

$$|A|_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=(6+6+6)-(27+1+8)=18-36=\boxed{-18}$$

Per al de quart ordre, sumem en primer lloc a la primera fila les altres,

$$|A|_4=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&10&10&10\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$$

Ara traiem factor comú 10 i a continuació restem a cada columna l'anterior

$$|A|_4=10.\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10.\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&1&-3\\3&1&-3&1\\4&-3&1&1\end{vmatrix}$$

Desenvolupem per adjunts de la primera fila,

$$|A|_4=10.[1.|\mathcal{A}_{11}|+0.|\mathcal{A}_{12}|+0.|\mathcal{A}_{13}|+0.|\mathcal{A}_{14}|]=10.|\mathcal{A}_{11}|=10.|A_{11}|$$

Ara substituïm el menor complementari i tot seguit trobem el determinant per la regla de Sarrus,

$$|A|_4=10.\begin{vmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{vmatrix}\ 10.[(-3-3-3)-(-27+1+1)]=10.(-9+25)=\boxed{160}$$

El determinant $|A|_5$ el podem escriure sense complicació, si observem els elements d'una línia paral·lela a la diagonal secundària que estan formades pels mateixos números,

$$|A|_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{vmatrix}$$

Comprovem tot seguit la complicada fórmula de l'enunciat

$$|A|_n = (-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}} . \frac{n.(n+1)}{2} . n^{n-2}$$

Utilitzem els valors n=2, n=3 i n=4:

Per n=2 $\Rightarrow$ $|A|_2 = (-1)^{\frac{2.(1)}{2}} . \frac{2.(3)}{2} . 2^0 = (-1)^1.3.1 = \boxed{-3}$

Per n=3 $\Rightarrow$ $|A|_3 = (-1)^{\frac{3.(2)}{2}} . \frac{3.(4)}{2} . 3^1 = (-1)^3.6.3 = \boxed{-18}$

Per n=4 $\Rightarrow$ $|A|_4 = (-1)^{\frac{4.(3)}{2}} . \frac{4.(5)}{2} . 4^2 = (-1)^6.10.16 = \boxed{160}$

Per calcular els determinants de cinquè i sisè ordre, $|A|_5$ i $|A|_6$, aplicarem de nou la fórmula, ja que es pot comprovar que aquesta és vàlida en general,

$$|A|_5 = (-1)^{\frac{5.(4)}{2}} . \frac{5.(6)}{2} . 5^3 = (-1)^{10}.15.115 = \boxed{1875}$$

$$|A|_6 = (-1)^{\frac{6.(5)}{2}} . \frac{6.(7)}{2} . 6^4 = (-1)^{15}.21.1296 = \boxed{-27216}$$

Matriu adjunta i determinant adjunt

24. Sigui la matriu $A \in \mathcal{M}_4$. Quin és el seu determinant? Calcula els menors complementaris i els adjunts de cada element per formar la matriu adjunta. A què és igual el producte de la matriu donada per la transposada de la seva adjunta? Quin és el determinant adjunt? Comprova la propietat que relaciona el determinant de la matriu amb el seu determinant adjunt. La matriu donada és:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució. En primer lloc calculem el determinant de la matriu de 4t ordre. Perquè quedi una expressió més senzilla farem $g_3 = f_3 + 2.f_2$, és a dir, sumarem a la 3a fila el doble de la 2a,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Com que a l'última columna només un element és diferent de zero, podrem rebaixar l'ordre del determinant fent servir la regla de Laplace, és a dir, aplicant adjunts,

$$|A| = 0.|\mathcal{A}_{14}| + (-1).|\mathcal{A}_{24}| + 0.|\mathcal{A}_{34}| + 0.|\mathcal{A}_{44}| = -|\mathcal{A}_{24}| = -|A_{24}|$$

Si també restem a cada fila l'anterior, ens quedarà

$$|A| = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\ [(0+0+0)-(-3+0+0)] = \boxed{-3}$$

Calculem ara els determinants *menors complementaris*. Ho haurem de fer per cadascun dels 16 termes de la matriu.

PRIMERA FILA.

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1-4)-(-3+0+0) = -5+3 = \boxed{-2}$$

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1+8)-(6+2+0) = 7-8 = \boxed{-1}$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0+1+0)-(-2-2+0) = 1-(-4) = \boxed{5}$$

$$|A_{14}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2+0)-(4+3+0) = -1-7 = \boxed{-8}$$

SEGONA FILA. Posarem directament el resultat, que es pot calcular, en cada cas, aplicant la regla de Sarrus:

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{2} \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{-2}$$

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{-2} \qquad |A_{24}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{5}$$

TERCERA FILA.

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{-1} \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{1}$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{1} \qquad |A_{34}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{-1}$$

QUARTA FILA.

$$|A_{41}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{-3} \qquad |A_{42}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{0}$$

$$|A_{43}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{9} \qquad |A_{44}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{-15}$$

Calcularem ara els determinants *adjunts*, $|\mathcal{A}_{ij}| = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$. Sabem que seran iguals als determinants menors complementaris, precedits del signe més o menys, segons que la suma d'indexs de fila i columna sigui un nombre parell o imparell, respectivament.

Per tant, els setze determinants adjunts seran,

PRIMERA FILA.

$|\mathcal{A}_{11}|=+|A_{11}|=+(-2)=\boxed{-2}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{12}|=-|A_{12}|=-(-1)=\boxed{1}$

$|\mathcal{A}_{13}|=+|A_{13}|=+(5)=\boxed{5}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{14}|=-|A_{14}|=-(-8)=\boxed{8}$

SEGONA FILA.

$|\mathcal{A}_{21}|=-|A_{21}|=-(2)=\boxed{-2}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{22}|=+|A_{22}|=+(-2)=\boxed{-2}$

$|\mathcal{A}_{23}|=-|A_{23}|=-(-2)=\boxed{2}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{24}|=+|A_{24}|=+(5)=\boxed{5}$

TERCERA FILA.

$|\mathcal{A}_{31}|=+|A_{31}|=+(-1)=\boxed{-1}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{32}|=-|A_{32}|=-(1)=\boxed{-1}$

$|\mathcal{A}_{33}|=+|A_{33}|=+(1)=\boxed{1}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{34}|=-|A_{34}|=-(-1)=\boxed{1}$

QUARTA FILA.

$|\mathcal{A}_{41}|=-|A_{41}|=-(-3)=\boxed{3}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{42}|=+|A_{42}|=+(0)=\boxed{0}$

$|\mathcal{A}_{43}|=-|A_{43}|=-(9)=\boxed{-9}$ $\quad$ $|\mathcal{A}_{44}|=+|A_{44}|=+(-15)=\boxed{-15}$

Donada la matriu $A=(a_{ij})$, la seva *matriu adjunta*, $\mathcal{A}=(|\mathcal{A}_{ij}|)$ és aquella en la qual s'ha substituït cada element pel seu adjunt respectiu. Tindrem, per tant,

$$\boxed{\mathcal{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix}}$$

La seva transposada $\mathcal{A}'$ s'obté directament canviant files per columnes. Trobem a continuació el producte de la matriu donada per la transposada de l'adjunta,

$$A\bullet\mathcal{A}'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -9 \\ 8 & 5 & 1 & -15 \end{pmatrix}$$

Multiplicant,

$$A\bullet\mathcal{A}'=\begin{pmatrix} -6-2+5+0 & -6+4+2+0 & -3+2+1+0 & 9+0-9+0 \\ -2+0+10-8 & -2+0+4-5 & -1+0+2-1 & 3+0-18+15 \\ -2+1-15+16 & -2-2-6+10 & -1-1-3+2 & 3+0+27-30 \\ -4-1+5+0 & -4+2+2+0 & -2+1+1+0 & 6+0-9+0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$A\bullet\mathcal{A}'=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=-3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=-3.I$$

Ara bé, com que el determinant de la matriu donada és $|A|=-3$, podrem escriure $\boxed{A.\mathcal{A}'=|A|.I}$

Com veurem en exercicis posteriors, aquesta fórmula ens servirà per a trobar la matriu inversa A^{-1}. Resultarà que $A^{-1}=\mathcal{A}'/|A|$.

Hem de calcular ara el *determinant adjunt*, $|\mathcal{A}|$, és a dir, el determinant de la matriu adjunta. Per calcular-lo canviarem de signes tant la 1a com la 2a columna (el determinant no varia), de manera que la 3a fila estigui formada tota per uns. Després restarem a cada columna la 1a,

$$|\mathcal{A}|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -9 & -15 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

Desenvoluparem per adjunts de la 3a fila, i com que l'element $a_{31}=1$ té la suma d'índexs parells, el seu adjunt serà positiu. En resum, ens quedarà el determinant de tercer ordre,

$$|\mathcal{A}|=\begin{vmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix}=(0+0+27)-(0+54+0)=\boxed{-27}$$

Comprovem finalment la relació, $|\mathcal{A}|=|A|^{n-1}$, que hi ha entre els determinants adjunt i el d'una matriu quadrada d'ordre n,

$$|A|^{n-1}=(-3)^{4-1}=(-3)^3=-27=|\mathcal{A}|.$$

Menors i menors complementaris

25. Per a la matriu A de 5è ordre, troba'n en primer lloc el determinant $|A|$. Quants menors de primer ordre es poden formar? Quants de 2n, 3r i 4t ordre? Quin és el determinant menor $|M_{3,3}|$ i el seu determinant menor complementari $|A_{3,3}|$? I els $|M_{12,45}|$ i $|A_{12,45}|$? Quin és el rang d'un menor? La matriu A és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Solució. Per calcular el determinant, restarem a cada fila la 1a,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ara podrem desenvolupar per adjunts de l'última fila (també ho podríem fer per als elements de l'última columna),

$$|A|=4.|\mathcal{A}_{51}|+0.|\mathcal{A}_{52}|+0.|\mathcal{A}_{53}|+0.|\mathcal{A}_{54}|+0.|\mathcal{A}_{55}|=4.|\mathcal{A}_{51}|=$$
$$=4.(-1)^{5+1}.|A_{51}|=4.|A_{51}|$$

El nou determinant de 4t ordre quedarà,

$$|A| = 4.\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per adjunts de l'última columna,

$|A|=4.[5.|\mathcal{A}_{14}|+0.|\mathcal{A}_{24}|+0.|\mathcal{A}_{34}|+0.|\mathcal{A}_{44}|]=20.|\mathcal{A}_{14}|=-20.|A_{14}|$

Substituint, obtindrem

$$|A| = -20.\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20.(-6) = \boxed{120}$$

Recordem que un menor d'ordre r en una matriu $A=(a_{ij})$ és un determinant format per r files i r columnes d'aquesta matriu. En el nostre cas, la matriu A és de 5è ordre i es podran formar els menors següents:

MENORS DE PRIMER ORDRE. Tenen una sola fila i una sola columna, és a dir, estaran formats per un sol terme de la matriu,

Ex. $|M_{1,1}|=|a_{11}|=1$, $|M_{1,2}|=|a_{12}|=5$, etc.

En total hi haurà $N_1=5.5=\boxed{25}$ menors de 1r ordre.

MENORS DE SEGON ORDRE. Consten de dues files i dues columnes. Així $|M_{ij,kl}|$ estarà format per les files $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{f}_j$ i les columnes $\mathbf{c}_k$ i $\mathbf{c}_l$.

Ex. $|M_{12,23}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=25-10=15$, etc.

Com que de cinc files n'hem d'agafar dues, hi haurà $C_{5,2}=(5.4)/(2.1)=10$ possibilitats d'agafar les files. El mateix podem dir per a les columnes. En conseqüència, hi ha $N_2=10.10=\boxed{100}$ menors de 2n ordre.

MENORS DE TERCER ORDRE. Estaran formats per tres files i tres columnes. Se simbolitzen per $|M_{ijk,lmn}|$, on les files són $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}_k$ i les columnes $\mathbf{c}_l$, $\mathbf{c}_m$ i $\mathbf{c}_n$.

Ex. $|M_{123,135}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\ldots=-40$, etc.

Tindrem $C_{5,3}=(5.4.3)/(3.2.1)=60/6=10$ possibilitats d'escollir les tres files, i també 10 d'escollir les columnes. Conseqüentment, el nombre de menors de 3r ordre serà $N_3=10.10=\boxed{100}$.

MENORS DE QUART ORDRE. Formats per 4 files i 4 columnes i representats per $|M_{ijkl,mnop}|$.

Ex. $|M_{2345,1235}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}=\ldots=0$, etc.

Hi haurà en total $C_{5,4}=C_{5,1}=5$ possibilitats d'escollir les files i 5 més les columnes i, així, $N_4=5.5=\boxed{25}$ menors de 4t ordre.

MENORS DE CINQUÈ ORDRE. Com que hi ha 5 files i 5 columnes, l'única possiblitat, $N_5=\boxed{1}$ és el determinant de la matriu. És a dir, que $|M_{12345,12345}|=|A|=120$.

Formem ara els *determinants menors* i *menors complementaris* demanats. Com que el menor $|M_{3,3}|$ consta únicament de la 3a fila i la 3a columna, tindrem $|M_{3,3}|=|a_{33}|=\boxed{3}$.

El seu determinant menor complementari $|A_{3,3}|$, que en l'estudi elemental anterior simbolitzàvem per $|A_{33}|$, serà el que resulta de suprimir la 3a fila i la 3a columna,

$$|A_{3,3}|=|M_{1245,1245}|=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4-f_1 \end{matrix}$$

Desenvolupant per adjunts de la 4a fila, ens quedarà reduït a

$$|A_{3,3}|=4.|\mathcal{A}_{41}|=4.(-1)^{4+1}.|A_{41}|=-4.|A_{41}|$$

Substituint,

$$|A_{3,3}|=-4.\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-4.(15-0)=\boxed{-60}$$

El menor $|M_{12,45}|$ és un determinant de 2n ordre de la matriu A, format per les files f_1 i f_2 i les columnes c_4 i c_5,

$$|M_{12,45}|=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=\boxed{0}$$

Quant al seu menor complementari, el trobarem eliminant precisament les files i les columnes anteriors,

$$|A_{12,45}|=|M_{345,123}|=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}=\boxed{0}$$

26. Calcula el determinant $|A|$, provant que és independent del seu paràmetre x. Utilitza el mètode d'anul·lació d'un menor. És a dir, considera el determinant subdividit en 4 menors R, S, T i U i aconsegueix, per exemple, que T es transformi en la matriu nul·la O:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & x & 12 \\ 3 & 6 & 13 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Solució. Suposem el determinant dividit en quatre parts iguals, essent cada una d'elles una matriu menor de segon ordre:

$R=M_{12,12}$, $S=M_{12,34}$, $T=M_{34,12}$ i $U=M_{34,34}$

Expressant-los en funció dels seus elements,

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ x & 12 \end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \wedge U=\begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Mirem de transformar la matriu T en la matriu nul·la O. En primer lloc, restarem la 1a fila a les files 3a i 4a. Després a la 2a columna li sumarem la 4a,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & \vdots & 4 & 2 \\ 4 & 10 & \vdots & x & 12 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 6 & \vdots & 13 & 9 \\ 3 & 8 & \vdots & 5 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & \vdots & 4 & 2 \\ 4 & 10 & \vdots & x & 12 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -3 & \vdots & 1 & 3 \\ 0 & -1 & \vdots & -7 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & \vdots & 4 & 2 \\ 4 & 22 & \vdots & x & 12 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \vdots & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

Hem obtingut així quatre nous menors que designem per

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 22 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ x & 12 \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que, com que hi ha la matriu nul·la O, el determinant $|A|$ és el producte dels dos determinants $|M|$ i $|P|$. Per tant,

$$|A|=|M|.|P|=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 22 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}=(22-20).(1+21)=2.22=\boxed{44}$$

En conseqüència, el valor del determinant és independent de x.

Adjunts, generalització de la regla de Laplace

27. Partim d'un determinant de 4t ordre D(a,b,c,d) que depèn dels paràmetres a, b, c i d. Desenvolupa'l, per mitjà de la regla de Laplace generalitzada, fent servir els menors de 2n ordre de les dues primeres columnes. Deixa el resultat en forma de quadrat. El determinant és:

$$D(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

Solució. Considerem les dues primeres columnes $\mathbf{c}_1$ i $\mathbf{c}_2$ i formem tots els determinants menors $|M_{ij,12}|$ que es poden fer. En total seran $C_{4,2}=(4.3)/(2.1)=6$ menors, ja que de les 4 files de la matriu hem d'escollir-ne cada vegada dues.

$$|M_{12,12}|=\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}=a^2+b^2 \qquad |M_{13,12}|=\begin{vmatrix} a & b \\ -c & -d \end{vmatrix}=-a.d+b.c$$

$$|M_{14,12}|=\begin{vmatrix} a & b \\ -d & c \end{vmatrix}=a.c+b.d \qquad |M_{23,12}|=\begin{vmatrix} -b & a \\ -c & -d \end{vmatrix}=b.d+a.c$$

$$|M_{24,12}|=\begin{vmatrix} -b & a \\ -d & c \end{vmatrix}=-b.c+a.d \qquad |M_{34,12}|=\begin{vmatrix} -c & -d \\ -d & c \end{vmatrix}=-c^2-d^2$$

Ara trobem els determinants *menors complementaris*, amb el benentès que, per exemple, per trobar $|A_{34,12}|$, que és el menor complementari de $|M_{34,12}|$, suprimirem en la matriu A les files 3a i 4a i les columnes 1a i 2a. Per tant, $|A_{34,12}|=|M_{12,34}|$.

$$|A_{12,12}|=|M_{34,34}|=\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}=a^2+b^2 \qquad |A_{13,12}|=|M_{24,34}|=\begin{vmatrix} d & -c \\ -b & a \end{vmatrix}=a.d-b.c$$

$$|A_{14,12}|=|M_{23,34}|=\begin{vmatrix} d & -c \\ a & b \end{vmatrix}=b.d+a.c \qquad |A_{23,12}|=|M_{14,34}|=\begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix}=a.c+b.d$$

$$|A_{24,12}|=|M_{13,34}|=\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=b.c-a.d \qquad |A_{34,12}|=|M_{12,34}|=\begin{vmatrix} c & d \\ d & -c \end{vmatrix}=-c^2-d^2$$

Els determinants *adjunts* dels anteriors $|\mathcal{A}_{ij,12}|$ seran iguals als seus menors complementaris, però precedits del signe més o menys segons que la suma de tots els índexs de les files i les columnes sigui un nombre parell o imparell:

$$|\mathcal{A}_{ij,12}|=(-1)^{i+j+1+2}.|A_{ij,12}|$$

Trobem-los tots,

$$|\mathcal{A}_{12,12}|=+|A_{12,12}|=a^2+b^2 \qquad |\mathcal{A}_{13,12}|=-|A_{13,12}|=-a.d+b.c$$

$$|\mathcal{A}_{14,12}|=+|A_{14,12}|=b.d+a.c \qquad |\mathcal{A}_{23,12}|=+|A_{23,12}|=a.c+b.d$$

$$|\mathcal{A}_{24,12}|=-|A_{24,12}|=-b.c+a.d \qquad |\mathcal{A}_{34,12}|=+|A_{12,12}|=-c^2-d^2$$

La *regla de Laplace generalitzada* ens indica que el determinant de la matriu $|A|$ serà la suma de tots els productes que es poden formar entre els menors $|M_{ij,12}|$ pels seus adjunts respectius $|\mathcal{A}_{ij,12}|$. És a dir,

$$|A|=|M_{12,12}|.|\mathcal{A}_{12,12}|+|M_{13,12}|.|\mathcal{A}_{13,12}|+|M_{14,12}|.|\mathcal{A}_{14,12}|+$$
$$+|M_{23,12}|.|\mathcal{A}_{23,12}|+|M_{24,12}|.|\mathcal{A}_{24,12}|+|M_{34,12}|.|\mathcal{A}_{34,12}|$$

Substituint,

$$|A|=(a^2+b^2).(a^2+b^2)+(b.c-a.d).(b.c-a.d)+(a.c+b.d).(a.c+b.d)+$$
$$+(a.c+b.d).(a.c+b.d)+(a.d-b.c).(a.d-b.c)+(-c^2-d^2).(-c^2-d^2)$$

Simplificant,

$$|A|=(a^2+b^2)^2+2.(a.c+b.d)^2+2.(a.d-b.c)^2+(c^2+d^2)^2$$

Si desenvolupéssim cada sumand obtindríem el quadrat d'un quadrinomi, però ho farem d'una manera alternativa. Si traiem 2 factor comú,

$$|A|=(a^2+b^2)^2+2.[(a.c+b.d)^2+(a.d-b.c)^2]+(c^2+d^2)^2 \quad (1)$$

Desenvolupant el claudàtor,

$$(a.c+b.d)^2+(a.d-b.c)^2=a^2.c^2+2.a.c.b.d+b^2.d^2+a^2.d^2-2.a.d.b.c+b^2.c^2=$$
$$=a^2.c^2+a^2.d^2+b^2.c^2+b^2.d^2=(a^2+b^2).(c^2+d^2)$$

Substituint en (1) ens quedarà,

$$|A|=(a^2+b^2)^2+2.(a^2+b^2).(c^2+d^2)+(c^2+d^2)^2$$

Per la fórmula del quadrat d'una suma,

$|A|=[(a^2+b^2)+(c^2+d^2)]^2$, o millor, $\boxed{|A|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}$.

Menors principals, teorema de Jacobi

28. Donada la matriu de 4t ordre, calcula els menors principals de segon ordre $|M_{12}|$, $|M_{13}|$, $|M_{14}|$, $|M_{23}|$, $|M_{24}|$ i $|M_{34}|$. Quant valdrà l'expressió $S=(|M_{12}|+...+|M_{34}|)^4$? Quina relació curiosa observes? La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Solució. Recordem que un determinant menor de 2n ordre d'una matriu A és simbolitzat per $|M_{ij,kl}|$, ja que està format per les línies f_i, f_j, c_k i c_l.

Com a cas particular tenim els determinants *menors principals*, simbolitzats per $|M_{ij}|$, que és una abreviació de $|M_{ij,ij}|$, ja que estan formats per les mateixes files i columnes. Observem que, com a conseqüència d'aquesta igualtat, la seva diagonal principal estarà formada per termes de la *diagonal principal* de la matriu A.

Seguidament trobarem tots els menors principals de 2n ordre que es poden formar a partir de la matriu donada,

$$|M_{12}|=|M_{12,12}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}=10-8=\boxed{2}$$

$$|M_{13}|=|M_{13,13}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=8-5=\boxed{3}$$

$$|M_{14}|=|M_{14,14}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=12-8=\boxed{4}$$

$$|M_{23}|=|M_{23,23}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=20-18=\boxed{2}$$

$$|M_{24}|=|M_{24,24}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=30-25=\boxed{5}$$

$$|M_{34}|=|M_{34,34}|=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}=24-18=\boxed{6}$$

Calcularem la quarta potència de la suma de tots aquests menors principals de segon ordre,

$$S=(|M_{12}|+|M_{13}|+|M_{14}|+|M_{23}|+|M_{24}|+|M_{34}|)^4=$$
$$=(2+3+4+2+5+6)^4=21^4=234256$$

Ens resulta que els sumands que formen la base de la potència i el seu resultat estan formats pels mateixos números,

$$\boxed{(2+3+4+2+5+6)^4=234256}$$

Apuntem, com a curiositat, unes quantes igualtats més d'aquest mateix tipus:

$(8+1)^2=81$ $(5+8+3+2)^3=5832$ $(1+7+5+7+6)^3=17576$
$(3+9+0+6+2+5)^4=390625$ $(6+1+4+6+5+6)^4=614656$
$(1+7+2+1+0+3+6+8)^5=172103685$ etc.

29 Calcula tots els menors principals de primer, segon, tercer i quart ordre que es poden extreure de la matriu M. Després, si definim les *traces generalitzades* com la suma de tots el menors principals del mateix ordre, calcula els seus valors a la matriu

$$M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix}$$

Solució. Per a la matriu quadrada M de 4t ordre podrem formar els següents menors principals d'ordre r, on r=1,2,3 i 4.

MENORS PRINCIPALS DE PRIMER ORDRE. (r=1). Constaran d'una sola fila i d'una sola columna (la mateixa) i seran, per tant, els termes de la diagonal principal. En total en tindrem $N_1=4$, que seran

$$|M_1|=|M_{1,1}|=|a_{11}|=\boxed{-2} \qquad |M_2|=|M_{2,2}|=|a_2|=\boxed{-2}$$

$$|M_3|=|M_{3,3}|=|a_{33}|=\boxed{1} \qquad |M_4|=|M_{4,4}|=|a_{44}|=\boxed{-15}$$

MENORS PRINCIPALS DE SEGON ORDRE. (r=2). Com que, de 4 línees, n'hem d'escollir 2, el nombre total serà $C_{4,2}=(4.3)/(2.1)=6$. Calculem-los,

$$|M_{12}|=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=4+2=\boxed{6} \qquad |M_{13}|=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2+5=\boxed{3}$$

$$|M_{14}|=\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}=30-24=\boxed{6} \qquad |M_{23}|=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2+2=\boxed{0}$$

$$|M_{24}|=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -15 \end{vmatrix}=30-0=\boxed{30} \qquad |M_{34}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -9 & -15 \end{vmatrix}=-15+9=\boxed{-6}$$

MENORS PRINCIPALS DE TERCER ORDRE. (r=3). En aquest cas en tindrem $N_3=C_{4,3}=(4.3.2)/(3.2.1)=4$, que seran

$$|M_{123}|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(4+10-2)-(10+4-2)=12-12=\boxed{0}$$

$$|M_{124}|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 8 \\ -2 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -15 \end{vmatrix}=(-60+0+15)-(-48+0+30)=-45+18=\boxed{-27}$$

$$|M_{134}|=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & -15 \end{vmatrix}=(30+72+15)-(24+18+75)=117-117=\boxed{0}$$

$$|M_{234}|=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -15 \end{vmatrix}=(30+45+0)-(0+18+30)=75-48=\boxed{27}$$

MENORS PRINCIPALS DE QUART ORDRE. (r=4). Evidentment, només n'hi haurà $N_4=1$, que serà el determinant de la matriu.

$$|M_{1234}|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -9 & -15 \end{vmatrix}=-3.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

En el pas anterior hem canviat els signes de les dues primeres columnes, per la qual cosa el determinant no canviarà de valor, i després hem tret factor comú -3 a l'última fila. Ara restarem a cada columna l'anterior i a continuació treurem -1 factor comú en la segona columna,

$$|M_{1234}| = -3.\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per adjunts de la tercera fila,

$$|M_{1234}|=3.[1.|\mathcal{A}_{31}|+0.|\mathcal{A}_{32}|+0.|\mathcal{A}_{33}|+0.|\mathcal{A}_{34}|]=+3.|A_{31}|$$

Substituint i aplicant la regla de Sarrus tindrem,

$$|M_{1234}| = 3.\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =3.[(0+0+18)-(0+27+0)]=3.(-9)= \boxed{-27}$$

Quant a les *traces generalitzades* de la matriu M, seran les sumes de tots els menors principals del mateix ordre,

$$\tau_1(M)=|M_1|+|M_2|+|M_3|+|M_4|=-2-2+1-15= \boxed{-18}$$

$$\tau_2(M)=|M_{12}|+|M_{12}|+|M_{14}|+|M_{23}|+|M_{24}|+|M_{34}|=$$
$$=6+3+6+0+30-6= \boxed{39}$$

$$\tau_3(M)=|M_{123}|+|M_{124}|+|M_{134}|+|M_{234}|=0-27+0+27= \boxed{0}$$

$$\tau_4(M)=|M_{1234}|=|M|= \boxed{-27}$$

Fem notar que, si no s'especifica res, la traça d'una matriu quadrada, $\tau(M)$, significa la $\tau_1(M)$, que coincideix amb la suma dels termes de la diagonal principal.

30. Donada la matriu A de 4t ordre, volem trobar els menors principals de la matriu adjunta, però sense calcular-la prèviament. Amb aquesta finalitat, fes servir el teorema de Jacobi, trobant primer el determinant de la matriu donada, que és la següent:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució. Calcularem primer el determinant $|A|$, sumant a la 3a fila el doble de la 2a,

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per adjunts de l'última columna,

$$|A|=0.|\mathcal{A}_{14}|+(-1).|\mathcal{A}_{24}|+0.|\mathcal{A}_{34}|+0.|\mathcal{A}_{44}|=-|\mathcal{A}_{24}|=-|A_{24}|$$

Per tant,

$$|A|=-\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = -[(3-3-4)-(2-3-6)]=-(-4+7)=\boxed{-3}$$

Calculem seguidament tots els *menors principals* dels diferents ordres.

PRIMER ORDRE.

$|M_1|=\boxed{3}$ $\quad |M_2|=\boxed{0}$ $\quad |M_3|=\boxed{-3}$ $\quad |M_4|=\boxed{0}$

SEGON ORDRE.

$$|M_{12}|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-(-2)=\boxed{2} \qquad |M_{13}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-9-1=\boxed{-10}$$

$$|M_{14}|=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0-0=\boxed{0} \qquad |M_{23}|=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=0-2=\boxed{-2}$$

$$|M_{24}|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0-1=\boxed{-1} \qquad |M_{34}|=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-2=\boxed{-2}$$

TERCER ORDRE.

$$|M_{123}|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=(0+1-4)-(0+6+6)=-3-12=\boxed{-15}$$

$$|M_{124}|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(0+0+4)-(0+3+0)=4-3=\boxed{1}$$

$$|M_{134}|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0+0+4)-(0+6+0)=4-6=\boxed{-2}$$

$$|M_{234}|=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0-1-4)-(-3+0+0)=-5+3=\boxed{-2}$$

Trobarem els determinants *menors principals complementaris* dels anteriors, de manera directa perquè el complementari d'un menor principal és també un menor principal,

$|A_1|=|M_{234}|=\boxed{-2}$ $\qquad |A_2|=|M_{134}|=\boxed{-2}$

$|A_3|=|M_{124}|=\boxed{1}$ $\qquad |A_4|=|M_{123}|=\boxed{-15}$

$|A_{12}|=|M_{34}|=\boxed{-2}$ $\qquad |A_{13}|=|M_{24}|=\boxed{-1}$

$|A_{14}|=|M_{23}|=\boxed{-2}$ $\qquad |A_{23}|=|M_{14}|=\boxed{0}$

$|A_{24}|=|M_{13}|=\boxed{-10}$ $\qquad |A_{34}|=|M_{12}|=\boxed{2}$

$|A_{123}|=|M_4|=\boxed{0}$ $\qquad |A_{124}|=|M_3|=\boxed{-3}$

$|A_{134}|=|M_2|=\boxed{0}$ $\qquad |A_{234}|=|M_1|=\boxed{3}$

El *teorema de Jacobi* ens serveix per a calcular els menors principals de la matriu adjunta, sense necessitat de conèixer aquesta adjunta. La fórmula donada pel teorema és:

$$\boxed{|\mathcal{M}_K|_r=|A_K|_{n-r}.|A|^{r-1}}$$

Designem per $|\mathcal{M}_K|_r$ el menor principal de la matriu adjunta $\mathcal{A}$, que té el conjunt K d'índexs de files i columnes, i és de rang r. Ja sabem que $|A_K|_{n-r}$, o més senzillament $|A_K|$, serà el menor complementari de $|M_{K'}|_r$, que és un menor principal de la matriu donada A de conjunt d'índexs de línies K' i rang r.

Ho comprendrem millor si trobem tots els menors principals de la matriu adjunta:

PRIMER ORDRE. (r=1)

$|\mathcal{M}_1|=|\mathcal{M}_1|_1=|A_1|_3.|A|^{1-1}=|A_1|.|A|^0=(-2).(-3)^0=\boxed{-2}$

$|\mathcal{M}_2|=|A_2|.|A|^0=(-2).(-3)^0=\boxed{-2}$

$|\mathcal{M}_3|=|A_3|.|A|^0=(1).(-3)^0=\boxed{1}$

$|\mathcal{M}_4|=|A_4|.|A|^0=(-15).(-3)^0=\boxed{-15}$

SEGON ORDRE. (r=2)

$|\mathcal{M}_{12}|=|A_{12}|.|A|^1=(-2).(-3)^1=\boxed{6}$

$|\mathcal{M}_{13}|=|A_{13}|.|A|^1=(-1).(-3)^1=\boxed{3}$

$|\mathcal{M}_{14}|=|A_{14}|.|A|^1=(-2).(-3)^1=\boxed{6}$

$|\mathcal{M}_{23}|=|A_{23}|.|A|^1=(0).(-3)^1=\boxed{0}$

$|\mathcal{M}_{24}|=|A_{24}|.|A|^1=(-10).(-3)^1=\boxed{30}$

$|\mathcal{M}_{34}|=|A_{34}|.|A|^1=(2).(-3)^1=\boxed{-6}$

TERCER ORDRE. (r=3)

$|\mathcal{M}_{123}|=|A_{123}|.|A|^2=(0).(-3)^2=\boxed{0}$

$|\mathcal{M}_{124}|=|A_{124}|.|A|^2=(-3).(-3)^2=\boxed{-27}$

$|\mathcal{M}_{134}|=|A_{134}|.|A|^2=(0).(-3)^2=\boxed{0}$

$|\mathcal{M}_{234}|=|A_{234}|.|A|^2=(3).(-3)^2=\boxed{27}$

Se'n pot fer la comprovació recordant que en el problema 24 vàrem trobar la matriu adjunta de la matriu donada A. Tenim,

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -9 & -15 \end{pmatrix}$$

Veiem que els menors principals d'aquesta matriu són $|\mathcal{M}_1|=-2$, $|\mathcal{M}_2|=-2$, $|\mathcal{M}_3|=1$ i $|\mathcal{M}_4|=-15$ per als de 1r ordre. Per als de 2n ordre, $|\mathcal{M}_{12}|=(-2).(-2)-1.(-2)=4+2=6$, etc. i, si volem, es poden fer totes les comprovacions.

1.3 APLICACIONS A LES MATRIUS

Rang d'una matriu per determinants

31. Troba per determinants el rang de les matrius A i B donades al final. Quantes files seran linealment independents? I quantes columnes?

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solució. Comencem per la matriu A, agafem un menor de 2n ordre, per exemple $|M_{12,12}|$, i trobem el seu valor,

$$|M_{12,12}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-4=-1$$

Com que $|M_{12,12}|\neq 0$, vol dir que el rang de la matriu és $\rho(A)\geq 2$. A continuació "orlarem" aquest menor, és a dir, hi afegirem una fila i una columna, de manera que el nou menor augmentarà el seu ordre en una unitat.

Tenim dues possibilitats

$$|M_{123,123}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=(12+18+10)-(-9+15+16)=40-40=0$$

Ens ha donat zero, per tant una línia és combinació lineal de les altres, i així no podem pas assegurar que $\rho(A)=3$.

Intentem l'altra possibilitat,

$$|M_{123,124}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=(15+12+2)-(6+3+20)=29-29=0$$

Com que també dóna zero i no hi ha cap més possibilitat, arribem a la conclusió que el rang de la matriu A és $\boxed{\rho(A)=2}$.

Per a la matriu B partirem del menor de 2n ordre:

$$|M_{12,12}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1$$

Com que és diferent de zero, significarà que $\rho(B)\geq 2$.

Orlem-lo afegint la 3a fila i la 3a columna, i calculem-ne el valor

$$|M_{123,123}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=(9+4+8)-(6++8+6)=22-20=2$$

També és diferent de zero, i per tant $\rho(B)\geq 3$. Encara el podem orlar més, afegint-hi la 4a fila i la 4a columna, i així ens resulta el determinant de la matriu donada.

$$|M_{1234,1234}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} g_1=f_1 \\ g_2=f_2-f_1 \\ g_3=f_3-2.f_1 \\ g_4=f_4-3.f_1 \end{matrix} = 0$$

Aquest determinant és igual a zero perquè $g_2=g_4$, i com que era l'únic que es podia formar de 3r ordre, el rang de la matriu no pot ser 4 i, per tant, $\boxed{\rho(B)=3}$.

32. Per mitjà de determinants, estudia el rang de la matriu en funció del paràmetre k. La matriu és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & k & 2 \\ 1 & 2 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}$$

Solució. Si s'ha d'estudiar el rang d'una matriu que conté algun paràmetre, és convenient agafar el determinant del màxim menor, contingut a la matriu, per després igualar-lo a zero, i deduir els valors "conflictius" del paràmetre.

En aquest cas partirem del menor $|M_{1234,1234}|$, que és el determinant de la matriu $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & k & 2 \\ 1 & 2 & k^2 & k^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & k & 2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k^2-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} g_1=f \\ g_2=f_2+f_1 \\ g_3=f_3 \\ g_4=f_4-f_1 \end{matrix}$$

Desenvolupant directament per adjunts de la primera columna i després traient factors comuns 3 i k^2-1 a la primera columna i l'última fila, respectivament,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & k & 2 \\ 0 & k^2-1 & k^2-1 \end{vmatrix} = 3.(k^2-1).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicant la regla de Sarrus,

$$|A| = 3.(k^2-1).[(k+2+0)-(0+2+1)] = 3.(k^2-1).(k-1)$$

O també,

$$|A| = 3.(k+1).(k-1).(k-1) \quad , \quad \boxed{|A| = 3.(k+1).(k-1)^2}$$

Igualant a zero, $|A|=0$, $3.(k+1).(k-1)^2=0$, que ens dóna els dos valors de k, $\boxed{k=1}$ i $\boxed{k=-1}$.

Queda clar que s'haurà d'estudiar el rang de la matriu A, $\rho(A)$, per als tres casos següents:

PRIMER CAS. $\boxed{k=1}$. Substituïm aquest valor a la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcular-ne el rang, començarem trobant el menor

$$|M_{12,12}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(A)\geq 2$$

Orlem aquest menor amb una fila i una columna, i veurem que s'hauran de provar tots els casos possibles perquè tots els menors orlats són nuls.

En efecte, els dos primers són nuls perquè $\mathbf{f}_3=\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$,

$$|M_{123,123}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=0 \qquad |M_{123,124}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\ldots=0$$

Els altres dos també ho són perquè $\mathbf{f}_1=\mathbf{f}_3$,

$$|M_{124,123}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=0 \qquad |M_{124,124}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=0$$

Per tant, $\rho(A)$ no pot ser 3, sinó només 2. En resum,

$$\boxed{\text{Si } k=1 \quad \Rightarrow \quad \rho(A)=2}$$

SEGON CAS. $\boxed{k=-1}$. Substituint aquest valor a la matriu donada,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que en el cas anterior, $|M_{12,12}|=3\neq 0$, tindrem $\rho(A)\geq 2$. Orlem aquest menor amb una fila i una columna

$$|M_{123,123}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-1-3+0)-(0+0+2)=-4-2=-6\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(A)\geq 3$$

Si el tornem a orlar, $|M_{1234,1234}|$ ens quedarà el determinant de la matriu, $|A|$, que pel càlcul dels valors de k és zero per k=-1. A més, la 1a i 3a fila són iguals, la qual cosa vol dir que el rang no pot ser 4 i, per tant,

$$\boxed{\text{Si } k=-1 \quad \Rightarrow \quad \rho(A)=3}$$

TERCER CAS. $\boxed{k\neq 1 \ \wedge \ k\neq -1}$. No cal provar res, perquè sabem que els únics valors que anul.len el determinant $|A|$ són k=1 i k=-1. En conseqüència, si k no és cap valor d'aquests dos, aquest determinant $|A|$ serà diferent de zero, i podrem afirmar que:

$$\boxed{\text{Si } k\neq 1 \ \wedge \ k\neq -1 \quad \Rightarrow \quad \rho(A)=4}.$$

Inversa d'una matriu per adjunts

33. De les dues matrius A i B, troba per adjunts les seves inverses, si és possible. Quin nom rep cadascuna? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució. Per calcular la inversa d'una matriu per adjunts, el primer que s'ha de fer és calcular el determinant de la matriu. Comencem per la matriu A,

$$|A|=\begin{vmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (7+0+0)-(3+0+3)=7-6=1$$

Com que $|A|\neq 0$, ja podem assegurar que existirà la inversa de la matriu A, A^{-1}. Diem que $\boxed{\text{A és una matriu regular}}$.

Trobem aquesta inversa, calculant prèviament tots els adjunts de la matriu A. Ho farem directament, tenint present que l'adjunt és igual al menor complementari, precedit del signe que comporta la seva paritat,

$$|\mathcal{A}_{11}|=+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +(1-0)=1 \qquad |\mathcal{A}_{12}|=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0)=1$$

$$|\mathcal{A}_{13}|=+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +(0+1)=1 \qquad |\mathcal{A}_{21}|=-\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-0)=3$$

$$|\mathcal{A}_{22}|=+\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +(7-3)=4 \qquad |\mathcal{A}_{23}|=-\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-3)=3$$

$$|\mathcal{A}_{31}|=+\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(0+3)=3 \qquad |\mathcal{A}_{32}|=-\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-3)=3$$

$$|\mathcal{A}_{33}|=+\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +(7-3)=4$$

Amb els adjunts trobats podrem escriure la seva matriu adjunta,

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa A^{-1}, és definida per la transposada de l'adjunta, dividida pel determinant de la matriu, i com que $|A|=1$ tindrem, en aquest cas:

$$A^{-1}=\mathcal{A}'/|A|=\mathcal{A}'$$

Així, la inversa serà

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Com a comprovació podem veure que, efectivament, $A\bullet A^{-1}=I$,

$$A\bullet A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-3-3 & 21-12-9 & 21-9-12 \\ -1+1+0 & -3+4+0 & -3+3+0 \\ -1+0+1 & -3+0+3 & -3+0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Per a la matriu B, si calculem el seu determinant, resulta:

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\ldots=0 \text{ ja que } f_3=f_1+f_2$$

Com que $|B|=0$, no existirà la seva inversa. Per aquest motiu direm que $\boxed{\text{B és una matriu singular}}$.

34. Troba la matriu A de 3r ordre que verifiqui el sistema d'equacions $A^2=B$ i $A+A^{-1}=2.C$. La inversa que hauràs de trobar, calcula-la pel mètode dels adjunts. Les matrius B i C són:

$$B=\begin{pmatrix} -33 & -28 & 16 \\ 56 & 49 & -16 \\ 0 & 2 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C=\begin{pmatrix} -24 & -14 & 8 \\ 28 & 17 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució. Abans de substituir les B i C per les seves matrius, mirarem d'aïllar A en el sistema d'equacions donat. Multiplicant la 2a equació a la dreta per A,

$$(A+A^{-1})\bullet A=(2.C)\bullet A \;,\; (A\bullet A)+(A^{-1}\bullet A)=2.(C\bullet A) \;,\; A^2+I=2.(C\bullet A)$$

Però per la 1a equació, $A^2=B$. Substituint,

$$B+I=2.(C\bullet A) \;,\; (B+I)/2=C\bullet A \;,\; C\bullet A=(B+I)/2$$

Multiplicant cada costat a l'esquerra per C^{-1}, i dient $M=(B+I)/2$

$$C^{-1}\bullet(C\bullet A)=C^{-1}\bullet M \;,\; (C^{-1}\bullet C)\bullet A=C^{-1}\bullet M \;,\; I\bullet A=C^{-1}\bullet M$$

Finalment, $\boxed{A=C^{-1}\bullet M}$

Per trobar la inversa de C, C^{-1}, ho farem per adjunts, calculant en primer lloc el determinant, desenvolupant per adjunts de la tercera fila, i després sumarem la primera fila a la segona,

$$|C|=\begin{vmatrix} -24 & -14 & 8 \\ 28 & 17 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1.\begin{vmatrix} -24 & 8 \\ 28 & -8 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -24 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-(0-32)=\boxed{32}$$

Calculem els nou adjunts de la matriu C,

$$|C_{11}|=+\begin{vmatrix} 17 & -8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=\ldots=8 \qquad |C_{12}|=-\begin{vmatrix} 28 & -8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=\ldots=0$$

$$|C_{13}|=+\begin{vmatrix} 28 & 17 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=28 \qquad |C_{21}|=-\begin{vmatrix} -14 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=\ldots=8$$

$$|C_{22}|=+\begin{vmatrix} -24 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=\ldots=0 \qquad |C_{23}|=-\begin{vmatrix} -24 & -14 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\ldots=24$$

$$|C_{31}|=+\begin{vmatrix} -14 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=\ldots=-24 \qquad |C_{32}|=-\begin{vmatrix} -24 & 8 \\ 28 & -8 \end{vmatrix}=\ldots=32$$

$$|C_{33}|=+\begin{vmatrix} -24 & -14 \\ 28 & 17 \end{vmatrix}=\ldots=-16$$

La matriu adjunta C estarà formada per tots aquests adjunts. Escriurem la seva transposada, en la qual traurem factor comú:

$$C=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 28 \\ 8 & 0 & 24 \\ -24 & 32 & -16 \end{pmatrix} \qquad C'=\begin{pmatrix} 8 & 8 & -24 \\ 0 & 0 & 32 \\ 28 & 24 & -16 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Com que la inversa és $C^{-1}=C'/|C|$ i com que $|C|=32$, simplificant el 4 pel 32, tindrem:

$$\boxed{C^{-1}=\frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & -4 \end{pmatrix}}$$

Recordem que per trobar A encara ens falta calcular $M=(B+I)/2$,

$$M=\frac{1}{2}.\left[\begin{pmatrix} -33 & -28 & 16 \\ 56 & 49 & -16 \\ 0 & 2 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -32 & -28 & 16 \\ 56 & 50 & -16 \\ 0 & 2 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -14 & 8 \\ 28 & 25 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Substituint C^{-1} i M en $A=C^{-1}\bullet M$,

$$A=\frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & -4 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -16 & -14 & 8 \\ 28 & 25 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}.\begin{pmatrix} -32+56+0 & -28+50-6 & 16-16-48 \\ 0+0+0 & 0+0+8 & 0+0+64 \\ -112+168+0 & -98+150-4 & 56-48-32 \end{pmatrix}$$

Sumant i després dividint per 8,

$$A=\frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 24 & 16 & -48 \\ 0 & 8 & 64 \\ 56 & 48 & -24 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$$

35. Resol el sistema matricial següent, aïllant primer les matrius indeterminades X i Y. Després, donades les matrius A i B, calcula X i Y, on hauràs de trobar la matriu inversa per adjunts. Tenim el sistema i les matrius següents:

$$\begin{cases} (Y-X)\bullet B+X=O \\ 2.A+B-Y=3.I \end{cases} , \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució. De la segona equació, $2.A+B-Y=3.I$, es pot calcular directament la Y, ja que $\boxed{Y=2.A+B-3.I}$

$$Y=2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Sumant, obtindrem la matriu desconeguda Y,

$$\boxed{Y=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 8 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$$

Per trobar X ens servirem de la primera equació,

$$(Y-X)\bullet B+X=O \ , \ Y\bullet B-X\bullet B+X=O \ , \ Y\bullet B=X\bullet B-X \ , \ Y\bullet B=X\bullet(B-I)$$

Si anomenem $C=B-I$, ens quedarà $Y\bullet B=X\bullet C$, $X\bullet C=Y\bullet B$

Multiplicant a la dreta per C^{-1},

$$(X\bullet C)\bullet C^{-1}=(Y\bullet B)\bullet(C^{-1}) \ , \ X\bullet(C\bullet C^{-1})=Y\bullet B\bullet C^{-1} \ , \ X\bullet I=Y\bullet B\bullet C^{-1}$$

En resum,

$$\boxed{X=Y\bullet B\bullet C^{-1}}$$

La matriu C és

$$C=B-I=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

Trobem el seu determinant per la regla de Sarrus,

$$|C|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=(0+0+0)-(-2+0+0)=\boxed{2}$$

Com que $|C|\neq 0$ existirà la inversa C^{-1}, que trobarem per adjunts, calculats tots directament, i tenint en compte el signe que comporta la seva paritat:

$$|C_{11}|=+\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0 \qquad |C_{12}|=-\begin{vmatrix}0&1\\2&-1\end{vmatrix}=2 \qquad |C_{13}|=+\begin{vmatrix}0&-1\\2&1\end{vmatrix}=2$$

$$|C_{21}|=-\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=1 \qquad |C_{22}|=+\begin{vmatrix}0&1\\2&-1\end{vmatrix}=-2 \qquad |C_{23}|=-\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}=0$$

$$|C_{31}|=+\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix}=1 \qquad |C_{32}|=-\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0 \qquad |C_{33}|=+\begin{vmatrix}0&0\\0&-1\end{vmatrix}=0$$

La matriu adjunta i la seva transposada són, per tant,

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad \mathcal{C}'=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&-2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$$

Com que C^{-1} és igual a la transposada de l'adjunta dividida pel determinant de la matriu, $C^{-1}=\mathcal{C}'/|C|$, i com que $|C|=2$, tindrem:

$$C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&-2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0'5&0'5\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Sabem que $X=Y\bullet B\bullet C^{-1}$ i, per l'associativitat del producte, podem trobar primer $Y\bullet B$ que anomenem N,

$$N=Y\bullet B=\begin{pmatrix}0&4&3\\4&-3&5\\8&1&-5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+6&0+0+3&0+4+0\\4+0+10&0+0+5&4-3+0\\8+0-10&0+0-5&8+1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&4\\14&5&1\\-2&-5&9\end{pmatrix}$$

Finalment, $X=N\bullet C^{-1}$. Substituint i multiplicant,

$$X=\begin{pmatrix}6&3&4\\14&5&1\\-2&-5&9\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0&0'5&0'5\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3+4&3-3+0&3+0+0\\0+5+1&7-5+0&7+0+0\\0-5+9&-1+5+0&-1+0+0\end{pmatrix}$$

Per tant, l'altra matriu desconeguda serà:

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}7&0&3\\6&2&7\\4&4&-1\end{pmatrix}}$$

36. Per a la matriu amb nombres decimals A, posa en primer lloc els elements de la matriu en expressió fraccionària i després calcula'n la inversa A^{-1} per adjunts. Comprova també que $A \bullet A^{-1}=I$.

$$A=\begin{pmatrix} 0'8 & -0'6 & 0'4 & -0'2 \\ -0'6 & 1'2 & -0'8 & 0'4 \\ 0'4 & -0'8 & 1'2 & -0'6 \\ -0'2 & 0'4 & -0'6 & 0'8 \end{pmatrix}$$

Solució. Posem cada terme en forma de nombre fraccionari, simplifiquem i traiem factor comú,

$$A=\begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 4/10 & -2/10 \\ -6/10 & 12/10 & -8/10 & 4/10 \\ 4/10 & -8/10 & 12/10 & -6/10 \\ -2/10 & 4/10 & -6/10 & 8/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Com que hem de trobar la inversa de la matriu A, i per evitar complicacions de càlcul a causa del factor 1/5, anomenarem B la matriu anterior, de manera que $\boxed{A=B/5}$.

Calculem, doncs, B^{-1}, trobant en primer lloc el seu determinant,

$$|B|=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} g_2=f_2+2.f_1$$

Desenvolupant directament per adjunts de la 2a fila, i aplicant la regla de Sarrus,

$$|B|=(-5).\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=(-5).[(-72-12-12)-(-12-27-32)]=\ldots=\boxed{125}$$

Haurem de calcular ara tots els 16 determinants adjunts de 3r ordre! Com que es tracta d'una matriu simètrica, n'hi ha prou de fer-ho amb els 10 menors de la matriu triangular superior:

PRIMERA FILA.

$$|\mathfrak{B}_{11}|=+\begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\ldots=\boxed{50} \qquad |\mathfrak{B}_{12}|=-\begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\ldots=\boxed{25}$$

$$|\mathfrak{B}_{13}|=+\begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\ldots=\boxed{0} \qquad |\mathfrak{B}_{14}|=-\begin{vmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=\ldots=\boxed{0}$$

SEGONA FILA.

$$|\mathfrak{B}_{22}|=+\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\ldots=\boxed{50} \qquad |\mathfrak{B}_{23}|=-\begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\ldots=\boxed{25}$$

$$|\mathfrak{B}_{24}|=+\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=\ldots=\boxed{0}$$

TERCERA FILA.

$$|\mathbb{B}_{33}| = +\begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{50} \qquad |\mathbb{B}_{34}| = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{25}$$

QUARTA FILA.

$$|\mathbb{B}_{44}| = +\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \ldots = \boxed{50}$$

Aprofitant-nos de la simetria, podrem escriure tant la matriu adjunta com la seva transposada, que, lògicament, seran iguals

$$\mathbb{B}=\mathbb{B}'=\begin{pmatrix} 50 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 50 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 50 & 25 \\ 0 & 0 & 25 & 50 \end{pmatrix} = 25.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa de B vindrà donada per $B^{-1}=\mathbb{B}'/|B|$, i com que $|B|=125$, es podrà simplificar, i resultarà:

$$B^{-1}=\frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Però no havíem de trobar B^{-1}, sinó A^{-1}, i com que la relació que lligava A i B és B=5.A, deduïm fàcilment que $A^{-1}=5.B^{-1}$.

Substituint, tindrem:

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Comprovem finalment que $A \bullet A^{-1}=I$. Efectivament,

$$A \bullet A^{-1}=\frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicant,

$$A \bullet A^{-1}=\frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 8-3+0+0 & 4-6+2+0 & 0-3+4-1 & 0+0+2-2 \\ -6+6+0+0 & -3+12-4+0 & 0+6-8+2 & 0+0-4+4 \\ 4-4+0+0 & 2-4+6+0 & 0-4+12-3 & 0+0+6-6 \\ -2+2+0+0 & -1+4-3+0 & 0+2-6+4 & 0+0-3+8 \end{pmatrix}$$

Sumant, traient factor comú i simplificant,

$$A \bullet A^{-1}=\frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}.5.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De manera similar, es podria comprovar que $A^{-1} \bullet A$ també dóna la matriu unitat I, amb la qual cosa es veu que, efectivament, A^{-1} és la matriu inversa de A.

37. Partim de la matriu complexa A que té per termes $a_{11}=4+8.i$, $a_{12}=-3-4.i$, $a_{21}=-1-4.i$, $a_{22}=1+2.i$. Quin és el valor del seu determinant $|A|$? Quina és la matriu adjunta $\mathcal{A}$? Comprova amb aquest exemple que en el camp complex la inversa A^{-1} també ve definida pel quocient entre la transposada de l'adjunta i el determinant de la matriu. Troba aquesta expressió i estudia si realment $A \bullet A^{-1}=I$.

Solució. Apuntem la matriu complexa A i el seu determinant $|A|$, on, com ja sabem, $i=\sqrt{-1}$ és la unitat imaginària.

$$A=\begin{pmatrix} 4+8.i & -3-4.i \\ -1-4.i & 1+2.i \end{pmatrix} \quad \wedge \quad |A|=\begin{vmatrix} 4+8.i & -3-4.i \\ -1-4.i & 1+2.i \end{vmatrix}$$

Calculem directament el determinant per la regla de Sarrus, tenint en compte que $i^2=-1$.

$$\begin{aligned} |A| &= (4+8.i).(1+2.i)-(-1-4.i).(-3-4.i)= \\ &= (4+8.i+8.i+16.i^2) - (3+4.i+12.i+16.i^2)= \\ &= (4+16.i-16)-(3+16.i-16)=(-12+16.i)-(-13+16.i)=\boxed{1} \end{aligned}$$

Com que $|A|\neq 0$ existirà A^{-1}. La trobarem per mitjà dels seus adjunts:

$|\mathcal{A}_{11}| = +(1+2.i)=1+2.i$ $\qquad$ $|\mathcal{A}_{12}| = -(-1-4.i)=1+4.i$

$|\mathcal{A}_{21}| = -(-3-4.i)=3+4.i$ $\qquad$ $|\mathcal{A}_{22}| = +(4+8.i)=4+8.i$

La matriu adjunta és, per tant,

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1+2.i & 1+4.i \\ 3+4.i & 4+8.i \end{pmatrix}$$

Quant a la suposada inversa donada per $A^{-1}=\mathcal{A}'/|A|$, com que $|A|$ és igual a 1, tindrem:

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1+2.i & 3+4.i \\ 1+4.i & 4+8.i \end{pmatrix}}$$

S'haurà de comprovar que en el camp complex aquesta és realment la inversa de la matriu A. Esbrinem-ho,

$$A \bullet A^{-1}=\begin{pmatrix} 4+8.i & -3-4.i \\ -1-4.i & 1+2.i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2.i & 3+4.i \\ 1+4.i & 4+8.i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Aquests termes són,

$x=(4+8.i).(1+2.i)+(-3-4.i).(1+4.i)=(4+8.i+8.i-16)+(-3-12.i-4.i+16)=$
$=(-12+16.i)+(13-16.i)=1+0.i=1$

$y=(4+8.i).(3+4.i)+(-3-4.i).(4+8.i)=(4+8.i).(3+4.i)-(3+4.i).(4+8.i)=0$

$z=(-1-4.i).(1+2.i)+(1+2.i).(1+4.i)=-(1+4.i).(1+2.i)+(1+2.i).(1+4.i)=0$

$t=(-1-4.i).(3+4.i)+(1+2.i).(4+8.i)=(-3-4.i-12.i+16)+(4+8.i+8.i-16)=$
$=(13-16.i)+(-12+16.i)=1$

Per tant, efectivament A^{-1} és la inversa de A, ja que:

$$A \bullet A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Determinants de matrius quadrades especials

38. Una equació de setè grau és definida per $|A|=0$. Calcula'n les solucions i comprova que són independents de b, c, d, e i f:

$$|A|=\begin{vmatrix} x & a & b & c & d & e & f \\ x & x & a & b & c & d & e \\ x & x & x & a & b & c & d \\ x & x & x & x & a & b & c \\ x & x & x & x & x & a & b \\ x & x & x & x & x & x & a \\ x & x & x & x & x & x & x \end{vmatrix}$$

Solució. Malgrat que aparentment el problema sembla llarg de càlcul, en realitat no és així, ja que, si restem a cada fila l'anterior, ens quedarà:

$$|A|=\begin{vmatrix} x & a & b & c & d & e & f \\ 0 & x-a & a-b & b-c & c-d & d-e & e-f \\ 0 & 0 & x-a & a-b & b-c & c-d & d-e \\ 0 & 0 & 0 & x-a & a-b & b-c & c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a & a-b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-a & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

Com que el determinant d'una *matriu triangular* és igual al producte dels termes de la diagonal principal, tindrem:

$$|A|=x.(x-a)^6$$

Evidentment, l'equació $|A|=0$ tindrà com a arrel simple $\boxed{x=0}$ i com a arrel sèxtupla $\boxed{x=a}$. Per tant, les arrels són independents de b, c, d, e i f.

39. Calcula les arrels de l'equació en forma de determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solució. Sigui $|A|$ el determinant anterior. Reduirem el seu ordre sumant a la primera fila totes les alatres i després traient factor comú,

$$|A|=\begin{vmatrix} 4.x+1 & 4.x+1 & 4.x+1 & 4.x+1 & 4.x+1 \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix} =(4.x+1).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

Restant a cada columna la primera i a continuació desenvolupant per adjunts de la primera fila,

$$|A|=(4.x+1).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}=(4.x+1).1.\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

El determinant anterior és el d'una *matriu escalar* i el seu valor es calcula directament. Ens resultarà que

$$|A|=(4.x+1).(1-x)^4$$

De l'equació $|A|=0$, o bé $(4.x+1).(1-x)^4=0$, es dedueix que té per arrels $\boxed{x=-1/4}$, arrel simple, i $\boxed{x=1}$, arrel quàdrupla.

40. Comprova que les dues matrius A i B següents són ortogonals. Quant valdran els seus determinants? Les matrius són:

$$A=\begin{pmatrix} 2/11 & 6/11 & 9/11 \\ 6/11 & 7/11 & -6/11 \\ -9/11 & 6/11 & -2/11 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/15 & 14/15 \\ -2/3 & 11/15 & 2/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Solució. Si A és una *matriu ortogonal* voldrà dir que la seva inversa coincideix amb la seva transposada, $A^{-1}=A'$. Com sempre, $A \bullet A^{-1}=I$, la manera més senzilla de comprovar que A és ortogonal és veure si es compleix la igualtat $A \bullet A'=I$.

Sigui la matriu A i la seva transposada A', en les quals prèviament haurem tret factor comú 1/11,

$$A=\frac{1}{11}.\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & -6 \\ -9 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A'=\frac{1}{11}.\begin{pmatrix} 2 & 6 & -9 \\ 6 & 7 & -6 \\ 9 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicant,

$$A \bullet A'=\frac{1}{121}.\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & -6 \\ -9 & 6 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 6 & -9 \\ 6 & 7 & -6 \\ 9 & -6 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{121}.\begin{pmatrix} 4+36+81 & 12+42-54 & -18+36-18 \\ 12+42-54 & 36+49+36 & -54+42+12 \\ -18+36-18 & -54+42+12 & 81+36+4 \end{pmatrix}$$

Sumant i traient factor comú,

$$A \bullet A'=\frac{1}{121}.\begin{pmatrix} 121 & 0 & 0 \\ 0 & 121 & 0 \\ 0 & 0 & 121 \end{pmatrix}=\frac{121}{121}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

En conseqüència, $\boxed{\text{A és una matriu ortogonal}}$.

Fem el mateix per a la matriu B, però abans reduïm a comú denominador per facilitar els càlculs:

$$B=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/15 & 14/15 \\ -2/3 & 11/15 & 2/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/15 & 2/15 & 14/15 \\ -10/15 & 11/15 & 2/15 \\ 10/15 & 10/15 & -5/15 \end{pmatrix}$$

Escriurem la matriu B i la seva transposada B', traient factor comú 1/15,

$$B=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -10 & 11 & 2 \\ 10 & 10 & -5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad B'=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 \\ 2 & 11 & 10 \\ 14 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Com abans, efectuem el producte de les dues matrius anteriors,

$$B\bullet B'=\frac{1}{225}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -10 & 11 & 2 \\ 10 & 10 & -5 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 \\ 2 & 11 & 10 \\ 14 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Multiplicant,

$$B\bullet B'=\frac{1}{225}\cdot\begin{pmatrix} 25+4+196 & -50+22+28 & 50+20-70 \\ -50+22+28 & 100+121+4 & -100+110-10 \\ 50+20-70 & -100+110-10 & 100+100+25 \end{pmatrix}$$

Sumant i traient factor comú,

$$B\bullet B'=\frac{1}{225}\cdot\begin{pmatrix} 225 & 0 & 0 \\ 0 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 225 \end{pmatrix}=\frac{225}{225}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Resulta que també $\boxed{\text{B és una matriu ortogonal}}$.

Recordem que el determinant d'una matriu ortogonal haurà de valer +1 o -1, ja que, pel fet que $A\bullet A'=I$, tenim $|A\bullet A'|=|I|$, $|A|.|A'|=1$, $|A|.|A|=1$, $|A|^2=1$, $|A|=\sqrt{1}$, $|A|=\pm 1$.

Comprovem, doncs, que per a les matrius ortogonals A i B, el determinant val algun d'aquests dos possibles valors.

PRIMER DETERMINANT. Traient factor en cada línia, ja que es tracta d'un determinant,

$$|A|=\begin{vmatrix} 2/11 & 6/11 & 9/11 \\ 6/11 & 7/11 & -6/11 \\ -9/11 & 6/11 & -2/11 \end{vmatrix}=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{11}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & -6 \\ -9 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

Si sumem a la 1a columna la 3a, i a continuació sumem a la 3a fila la 1a, podrem desenvolupar per adjunts de la 1a columna,

$$|A|=\frac{1}{11^3}\cdot\begin{vmatrix} 11 & 6 & 9 \\ 0 & 7 & -6 \\ -11 & 6 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{11^3}\cdot\begin{vmatrix} 11 & 6 & 9 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 12 & 7 \end{vmatrix}=\frac{11}{11^3}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 12 & 7 \end{vmatrix}$$

Per tant, per Sarrus,

$$|A|=\frac{1}{11^2}.(49+72)=\frac{1}{121}.121=\boxed{+1}$$

SEGON DETERMINANT. Per a l'altre determinant B farem el mateix. Partirem ja del que està reduït a comú denominador,

$$|B|=\begin{vmatrix} 5/15 & 2/15 & 4/15 \\ -10/15 & 11/15 & 2/15 \\ 10/15 & 10/15 & -5/15 \end{vmatrix}=\frac{1}{15^3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -10 & 11 & 2 \\ 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

Traient factor 5 en la 1a columna, fent les combinacions lineals $g_2=f_2+2.f_1$ i $g_3=f_3-2.f_1$, obtindrem

$$|B| = \frac{1}{15^3}.5.\begin{vmatrix} -1 & 2 & 14 \\ -2 & 11 & 2 \\ 2 & 10 & -5 \end{vmatrix} = \frac{5}{15^3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 6 & -33 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per adjunts de la 1a columna i traient factor comú 15 i també 3, ens quedarà finalment

$$|B| = \frac{5}{15^3}.1.\begin{vmatrix} 15 & 30 \\ 6 & -33 \end{vmatrix} = \frac{5.15.3}{15^3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{15}.(-11-4) = \frac{-15}{15} = \boxed{-1}$$

41. Tenim dues matrius A i B semblants i sabem que una matriu de pas és P. Calcula la seva inversa P^{-1} per mitjà d'adjunts i comprova que, efectivament, A i B són semblants. Quins són els determinants |A| i |B|? Què observes? Es verificarà sempre aquesta relació per a dues matrius semblants? Justifica-ho.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -19 & 58 \\ 1 & 12 & -27 \\ 5 & 15 & -11 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució. Per saber la matriu inversa P^{-1}, primer calculem el seu determinant,

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-5+8+6)-(10+4-6) = 9-8 = \boxed{1}$$

Calculem ara tots els determinants adjunts,

$$|\mathcal{P}_{11}| = +\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \qquad |\mathcal{P}_{12}| = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad |\mathcal{P}_{13}| = +\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathcal{P}_{21}| = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad |\mathcal{P}_{22}| = +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad |\mathcal{P}_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathcal{P}_{31}| = +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad |\mathcal{P}_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad |\mathcal{P}_{33}| = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 1$$

Podem apuntar a continuació la matriu adjunta, i la seva inversa $P^{-1}=\mathcal{P}'/|P|$ que, com que $|P|=1$, serà $P^{-1}=\mathcal{P}'$,

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix} -9 & 4 & 1 \\ -7 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix} -9 & -7 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Recordem que A i B són dues *matrius semblants* si existeix una matriu regular P tal que $P^{-1}\bullet A\bullet P=B$. Comprovarem que és així cercant primer la matriu $M=A\bullet P$, i tot seguit $P^{-1}\bullet M$, que haurà de ser igual a B.

$$M=A\bullet P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-4-3 & 3-10-6 & -2+4-3 \\ 2+0+1 & 6+0+2 & -4+0+1 \\ 1+6+1 & 3+15+2 & -2-6+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -13 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 8 & 20 & -7 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\bullet M=\begin{pmatrix} -9 & -7 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -6 & -13 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 8 & 20 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 54-21-32 & 117-56-80 & 9+21+28 \\ -24+9+16 & -52+24+40 & -4-9-14 \\ -6+3+8 & -13+8+20 & -1-3-7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -19 & 58 \\ 1 & 12 & -27 \\ 5 & 15 & -11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P^{-1}\bullet A\bullet P=B}$$

Queda comprovat, doncs, que A i B són matrius semblants. Notem que no és necessari calcular la inversa per saber si dues matrius són semblants, perquè si multipliquem a l'esquerra per P en la definició obtindrem A•P=P•B. Això es pot comprovar fàcilment, ja que, com que M=A•P, ha de donar P•B=M.

Quant als *determinants de dues matrius semblants* A i B, hauran de ser iguals, ja que

$$A\bullet P=P\bullet B \ , \ |A\bullet P|=|P\bullet B| \ , \ |A|.|P|=|P|.|B| \ , \ \boxed{|A|=|B|}$$

Comprovem-ho en aquest cas calculant aquests determinants,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} =(0+18+2)-(0-3+4)=20-1=19$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -19 & 58 \\ 1 & 12 & -27 \\ 5 & 15 & -11 \end{vmatrix} =(-132+870+2565)-(3480-405+209)= =3303-3284=19$$

42. Calcula el determinant de Vandermonde de 5è ordre següent i comprova el seu valor amb la fórmula de productes corresponent:

$$D_V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix}$$

Solució. Restem a cada fila l'anterior per aconseguir que tots els termes de la primera columna, menys el primer, siguin nuls,

$$D_V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \\ 0 & 4 & 18 & 48 & 100 \\ 0 & 8 & 54 & 192 & 500 \end{vmatrix}$$

Desenvolupem per adjunts en la 1a columna i traiem factor comú en les columnes 2a, 3a i 4a,

$$D_V=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 4 & 18 & 48 & 100 \\ 8 & 54 & 192 & 500 \end{vmatrix} = 2.3.4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

També, per tenir la primera columna plena de zeros, menys el primer terme, restarem a cada fila l'anterior multiplicada per 2. Tot seguit, després de l'operació anterior, desenvoluparem per adjunts de la 1a columna,

$$D_V = 24.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 9 & 32 & 75 \end{vmatrix} = 24.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 9 & 32 & 75 \end{vmatrix}$$

Traiem factor comú en la 2a i 3a columnes i després restem a cada fila l'anterior multiplicada per 3, per així poder desenvolupar per adjunts de la 1a columna,

$$D_V = 24.2.3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = 144.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 144.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$$

Per tant, el valor d'aquest *determinant de Vandermonde* és

$$D_V = 144.(10-8) = 144.2 = \boxed{288}$$

Un determinant de Vandermonde de 5è ordre, $D_V(a,b,c,d,e)$, tindrà les columnes formades per potències consecutives. Per exemple, $\mathbf{c}_1 = (a^0\ a^1\ a^2\ a^3\ a^4)'$.

Si és de 5è ordre, la fórmula per obtenir el seu valor és

$$D_V = (b-a).(c-a).(d-a).(e-a).(c-b).(d-b).(e-b).(d-c).(e-c).(e-d)$$

En el nostre cas, a=1 b=2 c=3 d=4 i e=5. Substituint,

$$D_V = (2-1).(3-1).(4-1).(5-1).(3-2).(4-2).(5-2).(4-3).(5-3).(5-4) =$$
$$= (1.2.3.4).(1.2.3).(1.2).1 = 24.6.2 = \boxed{288}$$

Determinants generalitzats

43. Sigui la matriu $A \in \mathcal{M}_{3\times4}$, que depèn del paràmetre a. Calcula el seu determinant generalitzat en funció d'aquest paràmetre. Quin serà el seu valor aproximat si a=1?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Solució. Per a la matriu rectangular horitzontal A(m×n) on n>m, el determinant [A] generalitzat ve definit per

$$[A] = \sqrt{|A \bullet A'|}$$

(Observem que, si A és una matriu quadrada, llavors $[A] = |A|$)

Trobarem en primer lloc el producte de la matriu A per la seva transposada A',

$$A \bullet A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+4+9 & 0+0+2+6 & -3+0+0+3a \\ 0+0+2+6 & 0+16+1+4 & 0+4+0+2a \\ -3+0+0+3a & 0+4+0+2a & 9+1+0+a^2 \end{pmatrix}$$

Fent les operacions, resulta,

$$A \bullet A' = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 3a-3 \\ 8 & 21 & 2a+4 \\ 3a-3 & 2a+4 & a^2+10 \end{pmatrix}$$

Calculem el seu determinant, on prèviament hem tret factor comú en 3a-3 i 2a+4,

$$|A \bullet A'| = \begin{vmatrix} 14 & 8 & 3(a-1) \\ 8 & 21 & 2(a+2) \\ 3(a-1) & 2(a+2) & a^2+10 \end{vmatrix}$$

Desenvolupant per la regla de Sarrus,

POSITIUS: $14.21.(a^2+10)+8.2(a+2).3(a-1)+8.2(a+2).3(a-1)=$
$=294.(a^2+10)+96.(a+2).(a-1)= 294.(a^2+10)+96.(a^2+a-2)=$
$=294.a^2+2940+96.a^2+96.a-192= 390.a^2+96.a+2748$ (1)

NEGATIUS: $21.3(a-1).3(a-1)+14.2(a+2).2(a+2)+8.8.(a^2+10)=$
$=189.(a^2-2.a+1)+56.(a^2+4.a+4)+64.(a^2+10)=$
$=(189.a^2-378.a+189)+(56.a^2+224.a+224)+(64.a^2+640)=$
$=309.a^2-154.a+1053$ (2)

Restant (1) i (2), ens donarà

$$|A \bullet A'| = 81.a^2+250.a+1695$$

En conseqüència, el determinant generalitzat, en funció del paràmetre a, serà l'arrel quadrada de l'expressió anterior,

$$\boxed{[A]=\sqrt{81.a^2+250.a+1695}}$$

Si a=1, ens quedarà,

$$[A]=\sqrt{81.1^2+250.1+1695}=\sqrt{2026} \approx \boxed{45}$$

44. Comprova que la definició de determinant generalitzat, [A], aplicada a una matriu quadrada A coincideix, en valor absolut, amb el seu determinant |A|. Per trobar els determinants desenvolupa per adjunts de la primera fila. Aplica-ho a la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Primer de tot fem la demostració formalment per mitjà de les definicions i propietats,

$$[A]=\sqrt{|A \bullet A'|}=\sqrt{|A|.|A'|}=\sqrt{|A|.|A|}=\sqrt{|A|^2}=|A|$$

A continuació, per a la matriu donada A, trobarem en primer lloc el determinant generalitzat [A], fent el producte de la matriu per la seva transposada A',

$$A \bullet A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicant,

$$A \bullet A' = \begin{pmatrix} 4+9+1+25 & -8-3-2-15 & 10-3+1+5 & 4+3-3+20 \\ -8-3-2-15 & 16+1+4+9 & -20+1-2-3 & -8-1+6-12 \\ 10-3+1+5 & -20+1-2-3 & 25+1+1+1 & 10-1-3+4 \\ 4+3=3+20 & -8-1+6-12 & 10-1-3+4 & 4+1+9+16 \end{pmatrix}$$

Operant,

$$A \bullet A' = \begin{pmatrix} 39 & -28 & 13 & 24 \\ -28 & 30 & -24 & -15 \\ 13 & -24 & 28 & 10 \\ 24 & -15 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

Observem que la matriu ha resultat ser simètrica, la qual cosa ja esperàvem, ja que es tracta del producte d'una matriu per la seva transposada. Ara trobarem el determinant, $|D|=|A \bullet A'|$, i ho farem per Laplace, desenvolupant per adjunts de la primera fila,

$$|D|=39.|D_{11}|+(-28).|D_{12}|+13.|D_{13}|+24.|D_{14}|$$

En funció dels menors complementaris,

$$|D|=39.|D_{11}|+28.|D_{12}|+13.|D_{13}|-24.|D_{14}| \quad (1)$$

Calculem els menors complementaris,

$$|D_{11}|=\begin{vmatrix} 30 & -24 & -15 \\ -24 & 28 & 10 \\ -15 & 10 & 30 \end{vmatrix}=5820 \qquad |D_{12}|=\begin{vmatrix} -28 & -24 & -15 \\ 13 & 28 & 10 \\ 24 & 10 & 30 \end{vmatrix}=-8990$$

$$|D_{13}|=\begin{vmatrix} -28 & 30 & -15 \\ 13 & -24 & 10 \\ 24 & -15 & 30 \end{vmatrix}=5745 \qquad |D_{14}|=\begin{vmatrix} -28 & 30 & -24 \\ 13 & -24 & 28 \\ 24 & -15 & 10 \end{vmatrix}=2076$$

Substituint en (1),

$$|A \bullet A'|=|D|=39.(5820)+28.(-28990)+13.(5745)-24.(2076)=121$$

El determinant generalitzat val, doncs,

$$[A]=\sqrt{|A \bullet A'|}=\sqrt{121}=\boxed{11}$$

Ara haurem de comprovar que el determinant de la matriu donada A també val 11. Intentarem en principi que tots els termes de la 3a fila, menys l'últim, s'anul·lin. Per això treballarem amb l'última columna i farem $C'_1=C_1-5.C_4$, $C'_2=C_2+C_4$ i $C'_3=C_3+C_4$,

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -23 & 8 & 4 & 5 \\ 11 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18 & 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Desenvolupem per adjunts de la 3a fila, i fem una operació similar a la que hem fet abans: $C'_1=C_1+11.C_3$ i $C'_2=C_2-4.C_3$,

$$|A|=-1.\begin{vmatrix} -23 & 8 & 4 \\ 11 & -4 & -1 \\ -18 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 21 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 59 & -23 & 7 \end{vmatrix} = -(+1).\begin{vmatrix} 21 & -8 \\ 59 & -23 \end{vmatrix}$$

Finalment, $|A| = -(-483+472) = -(-11) = \boxed{11}$.

45. Tenim la matriu genèrica $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, on el nombre de files és més gran que el de columnes. Quin seria el seu determinant generalitzat en el cas que volguéssim definir-lo? La matriu donada A és la de files $\mathbf{f}_1=(a\ b)$, $\mathbf{f}_2=(c\ d)$ i $\mathbf{f}_3=(e\ f)$.

Solució. Calculem en primer lloc el producte matricial de A per la seva transposada,

$$A \bullet A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & a.c+b.d & a.e+b.f \\ a.c+b.d & c^2+d^2 & c.e+d.f \\ a.e+b.f & c.e+d.f & e^2+f^2 \end{pmatrix}$$

El determinant $|A \bullet A'|$, que com veurem dóna zero, no el desenvoluparem ni per Sarrus ni per Laplace, sinó que aplicarem la propietat (1) perquè cada columna és suma de dos sumands,

$$|A \bullet A'| = \begin{vmatrix} a.a+b.b & a.c+b.d & a.e+b.f \\ a.c+b.d & c.c+d.d & c.e+d.f \\ a.e+b.f & c.e+d.f & e.e+f.f \end{vmatrix}$$

Al ser de la forma $D=|\mathbf{c}_1+\mathbf{d}_1\ \ \mathbf{c}_2+\mathbf{d}_2\ \ \mathbf{c}_3+\mathbf{d}_3|$, ens han de quedar en total $2^3=2.2.2=8$ determinants.

El primer determinant és

$$D_1=|\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3| = \begin{vmatrix} a.a & a.c & a.e \\ a.c & c.c & c.e \\ a.e & c.e & e.e \end{vmatrix} = a.c.e.\begin{vmatrix} a & a & a \\ c & c & c \\ e & e & e \end{vmatrix} = 0$$

Veiem que s'ha tret factor comú en cada columna, resultant columnes iguals, per la qual cosa val zero. Una cosa semblant passarà amb els altres determinants:

$D_2=|\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{d}_3|=0$ $\quad D_3=|\mathbf{c}_1\ \mathbf{d}_2\ \mathbf{c}_3|=0$ $\quad D_4=|\mathbf{c}_1\ \mathbf{d}_2\ \mathbf{d}_3|=0$

$D_5=|\mathbf{d}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3|=0$ $\quad D_6=|\mathbf{d}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{d}_3|=0$ $\quad D_7=|\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2\ \mathbf{c}_3|=0$

$D_8=|\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2\ \mathbf{d}_3|=0$

El determinant $|A \bullet A'|$ és la suma de tots els 8 determinants anteriors i serà, per tant, igual a zero.

És a dir, tenim $[A]=\sqrt{|A \bullet A'|}=\sqrt{0}=\boxed{0}$. Podem dir, doncs, que, amb la definició donada, els determinants generalitzats de matrius verticals són sempre nuls. Per eliminar aquesta dificultat el determinant generalitzat de les matrius verticals es podria definir com a $[A]=\sqrt{|A' \bullet A|}$.

Altres aplicacions dels determinants

46. Per resoldre alguns sistemes d'equacions lineals ens podrem servir de la *regla de Cramer*, on, per exemple, donat el sistema

$$\begin{cases} x+3.y-4.z+2.t=-3 \\ 2.x-4.y+6.z-5.t=8 \\ 3.x+8.y-4.z+t=9 \\ 4.x-6.y-7.z+9.t=1 \end{cases}$$

es formaran dos tipus de determinants: el *determinant dels coeficients*, D, i els *determinants de les incògnites*, D_x, D_y, D_z i D_t, que, respectivament, són

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -5 \\ 3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & -6 & -7 & 9 \end{vmatrix} \quad D_x=\begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 & 2 \\ 8 & -4 & 6 & -5 \\ 9 & 8 & -4 & 1 \\ 1 & -6 & -7 & 9 \end{vmatrix} \quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & -5 \\ 3 & 9 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & -5 \\ 3 & 8 & 9 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & 9 \end{vmatrix} \quad D_t=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & -4 & 9 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

Una vegada trobats els valors d'aquests determinants, la solució del sistema és:

$$x=D_x/D \quad y=D_y/D \quad z=D_z/D \quad t=D_t/D$$

Calcula la solució del sistema en aquest cas particular, aplicant la regla de Cramer.

Solució. Trobem en primer lloc el determinant dels coeficients, emprant la regla de Laplace després de fer combinacions lineals amb la primera fila per obtenir els zeros de la primera columna,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -5 \\ 3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & -6 & -7 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -9 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \\ 0 & -18 & 9 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -10 & 14 & -9 \\ -1 & 8 & -5 \\ -18 & 9 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 10 & 14 & 9 \\ 1 & 8 & 5 \\ 18 & 9 & -1 \end{vmatrix}=(-80+81+1260)-(1296+450-14)=-471$$

Calculem a continuació els determinants de les incògnites, utilitzant el mateix procés, però ara fent operacions amb el terme unitat, a_{41},

$$D_x=\begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 & 2 \\ 8 & -4 & 6 & -5 \\ 9 & 8 & -4 & 1 \\ 1 & -6 & -7 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -15 & -25 & 29 \\ 0 & 44 & 62 & -77 \\ 0 & 62 & 59 & -80 \\ 1 & -6 & -7 & 9 \end{vmatrix}=(-1).\begin{vmatrix} -15 & -25 & 29 \\ 44 & 62 & -77 \\ 62 & 59 & -80 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 15 & 25 & -29 \\ 44 & 62 & -77 \\ 18 & -3 & -3 \end{vmatrix}=(-3).\begin{vmatrix} 15 & 25 & -29 \\ 44 & 62 & -77 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-3).\begin{vmatrix} 165 & 25 & -54 \\ 416 & 62 & -139 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=3.\begin{vmatrix} 165 & -54 \\ 416 & -139 \end{vmatrix}=3.(-22935+22464)=3.(-471)=-1413$$

Es poden calcular com a exercici els altres tres determinants. S'obtenen els valors D_y=-942, D_z=-2355 i D_t=-1884.

En conseqüència, la solució del sistema és

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-1413}{-471}=\boxed{3} \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-942}{-471}=\boxed{2}$$

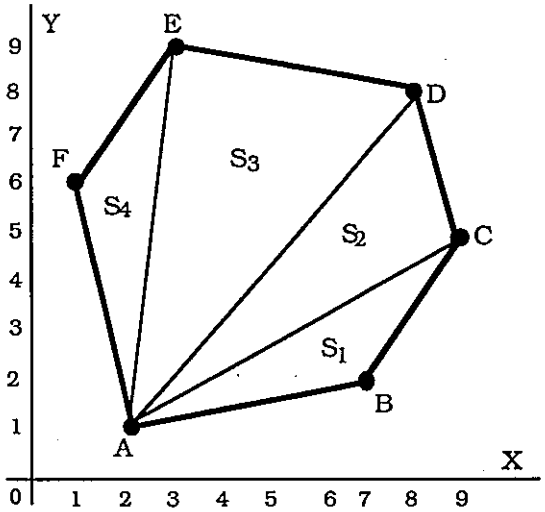
$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-2355}{-471}=\boxed{5} \qquad t=\frac{D_t}{D}=\frac{-1884}{-471}=\boxed{4}.$$

47. Donats tres punts del pla $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ i $P_3(x_3, y_3)$, l'àrea del triangle $P_1P_2P_3$ pot ser expressada per

$$S_t=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Suposem ara l'hexàgon de vèrtexs A(2, 1), B(7, 2), C(9, 5), D(8, 8), E(3, 9) i F(1, 6). Dibuixa'l en el pla i descompon-lo en quatre triangles. Calcula'n l'àrea i dedueix després l'àrea de l'hexàgon.

Solució. Fem en primer lloc el gràfic, descomponent l'hexàgon en els quatre triangles ABC, ACD, ADE i AEF:



Trobem l'àrea d'aquests quatre triangles, fent servir la fórmula donada en l'enunciat:

$$S_1=S_{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}.[(4+35+9)-(18+10+7)]=\frac{13}{2}=6'5$$

$$S_2=S_{ACD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}.[(10+72+8)-(40+16+9)]=\frac{25}{2}=12'5$$

$$S_3= S_{ADE}= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.[(16+72+3)-(24+18+8)]= \frac{41}{2} = 20'5$$

$$S_4= S_{AEF}= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.[(18+18+1)-(9+12+3)]= \frac{13}{2} = 6'5$$

L'àrea de l'hexàgon serà la suma de les quatre àrees anteriors:

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4= 6'5+12'5+20'5+6'5= \boxed{46}$$

48. Siguin p_1, p_2 i p_3 tres plans de l'espai d'equacions generals $A_1.x+B_1.y+C_1.z+D_1=0$, $A_2.x+B_2.y+C_2.z+D_2=0$ i $A_3.x+B_3.y+C_3.z+D_3=0$. Per estudiar la seva posició relativa trobarem els rangs de la matrius dels coeficients i de la matriu ampliada

$$M_c=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M_a=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

En l'estudi que farem en un proper volum resulta que:

Si $\rho(M_c)=\rho(M_a)=3$, els tres plans es tallen en un punt.

Si $\rho(M_c)=2$ i $\rho(Ma)=3$, es tallen dos a dos.

Si $\rho(Mc)=\rho(Ma)=2$, es tallen en una recta.

Si $\rho(Mc)=1$ i $\rho(Mc)=2$, són paral·lels.

Si $\rho(Mc)=\rho(Ma)=1$, són coincidents.

Trobant el rang per determinants, digues quina posició relativa tenen els tres plans següents:

p_1: $2.x-3.y+4.z-5=0$, p_2: $3.x+5.y-2.z+9=0$ i p_3: $-4.x+6.y-8.z+7=0$.

Solució. Apuntem la matriu dels coeficients i la matriu ampliada dels tres plans donats i que representen un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites,

$$M_c=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -4 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad M_a=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & -2 & 9 \\ -4 & 6 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Trobem en primer lloc el rang de la matriu dels coeficients. Com que $a_{11}=2\neq 0$, ja podem assegurar que $\rho(M_c)\geq 1$. Orlem aquest terme amb la fila i la columna següents i trobem el determinant,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =10+9=19 \neq 0$$

Com que ha quedat no nul, tindrem $\rho(M_c)\geq 2$. Tornem-lo a orlar amb la fila i columna que queden i trobem el determinant,

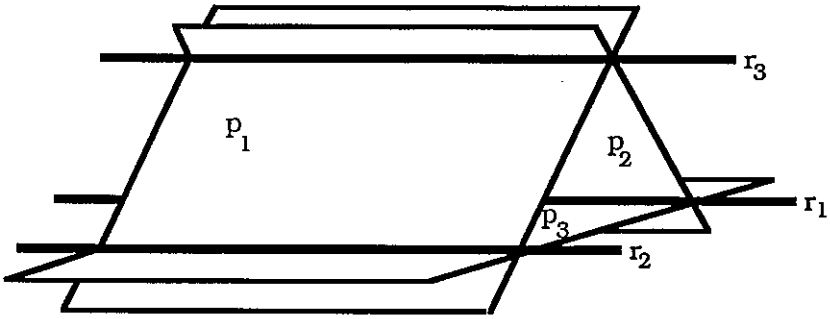
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -4 & 6 & -8 \end{vmatrix} =(-80+72-24)-(-80-24+72)=-32+32=0$$

Aquest determinant ha resultat ser nul, la qual cosa és lògica ja que la primera i tercera files són proporcionals. Això significa que $\rho(M_c)\neq 3$ i, per tant, tindrem $\rho(M_c)=2$.

Quant a la matriu ampliada, com que conté la matriu dels coeficients, resulta que $\rho(M_a)\geq 2$. Orlem el menor de 2n ordre de la plana anterior amb la 3a fila i 4a columna i trobem el determinant,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & 9 \\ -4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (70-90+108)-(100+108-63)=88-145=-57 \neq 0$$

Per tant, com que no és nul, el rang de la matriu ampliada és $\rho(M_a)=3$. Es tracta, doncs, de tres plans que es tallen dos a dos:



En el 8è volum de la col·lecció, dedicat a la Geometria analítica, veurem que es tallen dos a dos en les rectes com les que es mostren en aquesta figura.

49. S'anomenen *valors propis* d'una matriu A les solucions λ de l'equació en forma de determinant, $|A-\lambda.I|=0$.

Donada la matriu A de files $\mathbf{f}_1=(2\ 2\ 1)$, $\mathbf{f}_2=(1\ 3\ 1)$ i $\mathbf{f}_3=(1\ 2\ 2)$, dedueix els seus valors propis.

Solució. Per resoldre aquest exercici de càlcul de valors propis, que, com veurem, tenen un paper molt important en problemes d'economia i que estudiarem en el 7è volum dedicat als endomorfismes, trobarem primer la matriu $A-\lambda.I$, on I és la matriu unitat,

$$A-\lambda.I=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculem ara el determinant d'aquesta matriu,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = [(2-\lambda).(3-\lambda).(2-\lambda)+2+2]-[1.(3-\lambda)+2.(2-\lambda)+2.(2-\lambda)]$$

Desenvolupant i simplificant, tindrem:

$$|A-\lambda.I|=(2-\lambda)^2.(3-\lambda)+4 - [(3-\lambda)+4(2-\lambda)]= (4-4\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)+4-(11-5\lambda)=$$
$$=12-4\lambda-12\lambda+4\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3+4-11+5\lambda= -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5$$

Com que els valors propis s'obtenen resolent l'equació $|A-\lambda.I|=0$. En el nostre cas,

$$-\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=0, \quad \text{o bé} \quad \boxed{\lambda^3-7.\lambda^2+11.\lambda-5=0}$$

En aquesta equació de tercer grau emprarem la regla de Ruffini, i provarem l'arrel $\lambda=1$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 11 & -5 \\ 1 & & 1 & -6 & 5 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

Una arrel és, doncs, $\lambda=1$. Calculem les altres resolent l'equació de segon grau resultant, $\lambda^2-6.\lambda+5=0$,

$$\lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}$$

Amb el signe més, $\lambda=(6+4)/2=5$ i amb el menys, $\lambda=(6-4)/2=1$. En resum les solucions de $|A-\lambda.I|=0$, o valors propis, són

$$\boxed{\lambda=1 \text{ valor propi doble}} \quad \text{i} \quad \boxed{\lambda=5 \text{ valor propi simple}}.$$

50. En l'estudi de l'anàlisi dinàmica d'un problema econòmic s'ha provat que la variable y depèn de la variable x i del temps t, segons la relació de recurrència

$$y_t = y_{t-1} + x^2.(y_{t-1} - y_{t-2})$$

Com a cas particular, en els quatre primers anys s'han obtingut les expressions en forma de determinant

$$y_1= 1+x^2 \qquad y_2=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$y_3=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \qquad y_4=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Comprova, calculant els tres determinants anteriors, la relació de recurrència. Expressa també la variable y_t en forma polinòmica.

Solució. Calculem directament, per la regla de Sarrus, els determinants de segon i tercer ordre,

$$y_2= (1+x^2)^2-x^2 = 1+2.x^2+x^4-x^2 = \boxed{1+x^2+x^4}$$

$$y_3= [(1+x^2)^3+0+0]-[0+x^2.(1+x^2)+x^2.(1+x^2)] = (1+x^2)^3-2.x^2.(1+x^2)=$$
$$= 1+3.x^2+3.x^4+x^6-2.x^2-2.x^4 = \boxed{1+x^2+x^4+x^6}$$

Quant al determinant de quart ordre, el desenvoluparem per la regla de Laplace, utilitzant els adjunts de la primera fila,

$$y_4 = (1+x^2).\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x.\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Veiem que el primer determinant és precisament y_3 i que el segon determinant, després de desenvolupar per Laplace, serà el y_2. En conseqüència,

$$y_4=(1+x^2).y_3-x.(x.y_2)= y_3 +x^2.y_3 -x^2.y_3 = y_3 +x^2.(y_3-y_2)$$

Hem obtingut ja la relació de recurrència per t=4. Calculem y_4 en forma polinòmica, substituint y_3 i y_2 per les seves expressions,

$$y_4= (1+x^2+x^4+x^6)+x^2.(1+x^2+x^4+x^6-1-x^2-x^4)=$$

$$=(1+x^2+x^4+x^6)+x^2.(x^6) = \boxed{1+x^2+x^4+x^6+x^8}$$

Ara, si observem y_2, y_3 i y_4, podem deduir l'expressió de la variable y_t en forma polinòmica. Tindrem:

$$\boxed{y_t=1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2t}}$$

També es podria expressar a partir d'un sumatori, com segueix:

$$\boxed{y_t= \sum_{i=0}^{t} x^{2.i}}$$

f) PROBLEMES PROPOSATS

1.1. INTRODUCCIÓ ALS DETERMINANTS

Definició de determinant

51. En el conjunt de les matrius quadrades de segon ordre definim l'aplicació següent f: $\mathcal{M}_2 \to R$ per $f(A)=a_{12}.a_{21}-a_{11}.a_{22}$, és a dir, la diferència de productes entre els elements de la diagonal secundària i els de la principal. Serà un *determinant* aquesta aplicació? Comprova-ho fent servir els axiomes de definició. Quin axioma ens fallaria?

Sol. No ho és. Falla l'últim: $f(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)=-1$.

52. Tenint en compte el desenvolupament d'un determinant genèric de tercer ordre per la regla de Sarrus, comprova per a la primera columna que es verifiquen els dos axiomes de linealitat:

(1) $\det(\mathbf{c}_1+\mathbf{d}_1\ \ \mathbf{c}_2\ \ \mathbf{c}_3) = \det(\mathbf{c}_1\ \ \mathbf{c}_2\ \ \mathbf{c}_3) + \det(\mathbf{d}_1\ \ \mathbf{c}_2\ \ \mathbf{c}_3)$

(2) $\det(\alpha.\mathbf{c}_1\ \ \mathbf{c}_2\ \ \mathbf{c}_3) = \alpha.\det(\mathbf{c}_1\ \ \mathbf{c}_2\ \ \mathbf{c}_3)$

Sol : (1) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$ (2) $\begin{vmatrix} \alpha.a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha.a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha.a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$

Determinants de segon ordre

53. Sigui la matriu genèrica de 2n ordre A que té per vectors files $\mathbf{f}_1=(a\ \ b)$ i $\mathbf{f}_2=(c\ \ d)$. Calcula els determinants $M=|A^2|$, $N=|A\bullet A'|$ i també $P=|A|^2$. Quina relació hi ha entre ells?

Sol. $M=|A\bullet A|=\ldots=(a.d-b.c)^2$. Iguals, M=N=P.

54. Calcula $D=4.D_1+7.D_2$ on D_1 i D_2 són els dos determinants complexos següents. Digues també si el resultat és real, imaginari o complex:

$$D_1=\begin{vmatrix} 4+5.i & 2+3.i \\ 3+2.i & 5+4.i \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D_2=\begin{vmatrix} 4+3.i & 2+5.i \\ 5+4.i & 3+2.i \end{vmatrix}$$

Sol. $D_1=28.i$ imaginari, $D_2=16-16.i$ complex, D=112 real.

Determinants de tercer ordre

55. Sigui l'aplicació determinant f: on $A \in \mathcal{M}_n \rightarrow R$ és definida per $f(A)=|A|$. És injectiva aquesta aplicació, és a dir, de $f(A)=f(B)$ podem deduir que $A=B$? Comprova-ho per les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol. No, $|A|=|B|=31 \quad A \neq B$.

56. Troba els dos valors de la x que compleixen l'equació de segon grau en forma de determinant:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & x \\ -1 & -9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Comprova-ho després substituint en el determinant, primer per x_1 i després per x_2.

Sol. $x^2-2.x-3=0$, $x_1=3$, $x_2=-1$.

57. Estudiant un problema econòmic, que depèn de les tres variables x, y i z, veiem que en tres casos particulars es pot posar en forma d'equació en les quals intervé un determinant:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix}=5 \quad , \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-2 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Calcula el valor de les tres variables, x, y i z, que intervenen en aquest problema econòmic.

Sol. $x=2$, $y=-3$, $z=4$.

Propietats dels determinants

58. Aplicant les propietats dels determinants, demostra, sense desenvolupar-lo, que és nul el determinant de tercer ordre D següent. Comprova-ho després aplicant la regla de Sarrus. El determinant és:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & b+a \end{vmatrix}$$

Sol. $C'_2=C_2+C_3$ Factor comú, dues columnes iguals.

59. Justifica la igualtat dels dos determinants D_1 i D_2, aplicant les propietats dels determinants que consideris adients:

$$D_1=\begin{vmatrix} a^2 & a & b.c \\ b^2 & b & c.a \\ c^2 & c & a.b \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad D_2=\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Sol. Multiplicar per a.b.c ($a.f_1$, $b.f_2$, $c.f_3$) i dividir per a.b.c.

60. Troba les tres arrels de l'equació en forma de determinant, D(x)=0, emprant les propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}=0$$

Sol. $g_2=f_2-f_1$, $g_3=f_3-f_2$, F. comú

$d_2=c_2-c_1$, $d_3=c_3-c_2$

$x^3+4.x^2+5.x+2=0 \Rightarrow x= -1, -1, \text{ i } -2.$

61. Calcula el determinant de 3r ordre |A| deixant el resultat en forma de potència:

$$|A|=\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Sol. $g_1=f_1+f_2+f_3$, $c_2'=c_2-c_1$ ...

$|A|=(a+b+c)^3$

1.2. DETERMINANTS D'ORDRE SUPERIOR

Mètode del pivot

62. Es tracta de trobar el valor $R=\sqrt{|A|}$ on el determinant, |A|, que s'ha de calcular per la regla del pivot, ens ve donat per les files f_1=(1 2 3 4), f_2=(-2 1 4 -3), f_3=(-3 -4 1 2) i f_4=(-4 3 -2 1).

Sol. $p_1=1$, $p_2=5$, $p_3=30$, $p_4=4500$, $|A|=900$, R=30.

63. Troba el valor del determinant $|D_1|$ pel mètode del pivot, i també el determinant $|D_2|$, format pels quadrats dels termes de l'anterior. Es pot dir que $|D_2|=|D_1|^2$? El determinant inicial és:

$$|D_1|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sol : $p_1=-1$, $p_2=-2$, $p_3=-2$, $p_4=-12$,

$p_5=80$, $D=p_5/(p_1^3.p_2^2.p_3^1)$

$|D_1|=10$, $|D_2|=-672$, $|D_2|\neq|D_1|^2$

64. Calcula el valor del determinant de 5è ordre següent, emprant el mètode del pivot:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 9 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 9 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 8 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Sol. $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=3$, $p_4=42$ i $p_5=660$

$|A|=p_5/(p_1^3.p_2^2.p_3^1)$ $|A|=55$.

Menor complementari i adjunt d'un element

65. Troba els determinants menors complementaris dels elements de la diagonal secundària. Què observes? Passa el mateix amb els adjunts? Comprova també que les solucions de l'equació $|A|=0$ són $x_1=-5$, $x_2=9$, $x_3=-3$ i $x_4=-1$, expressant per cada solució la combinació lineal de la 4a fila en funció de les altres tres. La matriu que has de treballar és

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & x \\ -2 & 3 & x & 4 \\ 4 & x & 3 & -2 \\ x & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol. $|A_{14}|=|A_{23}|=|A_{32}|=|A_{41}|=-x^3+29.x+48$

$|\mathcal{A}_{14}|=\ldots=|\mathcal{A}_{41}|=x^3-29.x-48$, x_1: $f_4=-f_1-f_2-f_3$

x_2: $f_4=f_1-f_2+f_3$, x_3: $f_4=f_1+f_2-f_3$, x_4: $f_4=-f_1+f_2+f_3$

Regla de Laplace i obtenció d'elements nuls

66. Transforma la primera columna del determinant D en una que tingui tots els seus termes nuls menys el primer. Fes dues vegades més aquesta operació fins a aconseguir un determinant de 2n ordre i troba després el seu valor.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

Sol. $g_2=f_2-f_1$, $g_3=f_3-f_2$, etc... $D=1$.

67. Amb el determinant de la matriu A, aplica les propietats de transformació i reducció, calculant-ne el valor. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{pmatrix}$$

Sol. $g_1=f_1-3.f_2$, $g_3=f_3-5.f_2$, etc... $|A|=-1$.

68. Resol l'equació de 4t grau donada per D(x)=0, fent en primer lloc les operacions adients entre les files o columnes per reduir-lo d'ordre:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Sol. $g_1=f_1+f_2+f_3+f_4$ F. comú

$d_2=c_2-c_1$, $d_3=c_3-c_1$, $d_4=c_4-c_1$, ...

$(x+6).x.(x-4).(x-2)=0 \Rightarrow x= -6, 0, 4$ i 2.

69. Calcula les 4 arrels de l'equació D(x)=0, fent en primer lloc operacions entre les files o columnes fins a reduir el determinant a un de segon ordre, per trobar-ne el valor:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 & 1 \\ 2 & x & -3 & 1 \\ 2 & -3 & x & 1 \\ 2 & -3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

Sol. $g_1=f_1-f_2$, $g_2=f_1-f_2$, ... F. comú

$d_2=c_2+c_1$, Adjunts, $e_2=d_2+d_1$, ...

$x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=2$ i $x_4=-1$.

70. Sigui el determinant |M| de 5è ordre. Calcula separadament la suma de cadascuna de les files, columnes i diagonals. Què observes? Aplica les propietats dels determinants per reduir-lo a un de 3r ordre i després calcula'n el valor. El determinant és:

$$|M| = \begin{vmatrix} 17 & 24 & 01 & 08 & 15 \\ 23 & 05 & 07 & 14 & 16 \\ 04 & 06 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 03 \\ 11 & 18 & 25 & 02 & 09 \end{vmatrix}$$

Sol. Q. màgic S=65. $c_1'=c_1+...+c_5$

$f_2'=f_2-f_1$, $f_3'=f_3-f_2$,...Tornar-hi

$f_2''=f_2'-f_1'$, $f_3''=f_3'-f_2'$,... $|M|=5.070.000$.

71. Aplicant la regla de Laplace, després d'obtenir elements nuls a la primera fila, calcula el valor del determinant de 5è ordre de la matriu donada per:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -5 & 0 & -3 \\ 9 & -2 & 8 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 8 & -5 \\ 12 & -1 & 8 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol. F. comú 2 en f_1 i 3 en c_1

$c_2'=c_2+c_1$, $c_3'=c_3-2.c_1$, ...

adjunts, ídem , $|A|=600$

72. Desenvolupa el determinant següent de 4t ordre i deixa el resultat simplificat com a producte de factors, tot fent servir la regla de Laplace després d'obtenir elements nuls en aquest determinant que ve donat per:

$$D=\begin{vmatrix} p & p.q & p.q^2 & p.q^3 \\ p.q^3 & p & p.q & p.q^2 \\ p.q^2 & p.q^3 & p & p.q \\ p.q & p.q^2 & p.q^3 & p \end{vmatrix}$$

Sol. F. comú p a cada fila

$c_1'=\Sigma c_1$, f. comú

$f_2'=f_2-f_1$ ... $D=p^4.(1-q^4)^3$.

Matriu adjunta i determinant adjunt

73. Troba la matriu adjunta $\mathcal{A}$ de la matriu A i calcula els dos determinants $|\mathcal{A}|$ i $|A|$. Comprova també que es verifica la relació $|\mathcal{A}|=|A|^2$. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol. } \mathcal{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -15 & 2 & 5 \\ -17 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \ |A|=-8, \ |\mathcal{A}|=64.$$

74 Partim de la matriu complexa A de 3r ordre donada al final de l'enunciat. Troba'n el determinant $|A|$, els menors complementaris de cada element $|A_{ij}|$ i els seus adjunts respectius $|\mathcal{A}_{ij}|$. Escriu després la matriu adjunta $\mathcal{A}$ i calcula el determinant adjunt $|\mathcal{A}|$. Estudia si es compleix, en aquest cas de matriu complexa, la propietat $|\mathcal{A}|=|A|^{n-1}$. La matriu és:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & i & 1+i \\ i & 0 & i \\ -1+i & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol. } \mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 2 & 1+i \\ -1 & 1-i & 1 \end{pmatrix} \quad |A|=-2.i\,,\ |\mathcal{A}|=-4 \Rightarrow |\mathcal{A}|=|A|^2.$$

Menors i menors complementaris

75. Sigui el conjunt C={1,2,3,...,49}. Col·loquem aquests números en una matriu $A\in\mathcal{M}_7$ de files f_1=(4 5 6 43 39 38 40), f_2=(49 15 16 33 30 31 01), f_3=(48 37 22 27 26 13 2), f_4=(47 36 29 25 21 14 3), f_5=(8 18 24 23 28 32 42), f_6=(9 19 34 17 20 35 41) i f_7=(10 45 44 7 11 12 46).

Comprova que és un quadrat màgic, és a dir, que la suma dels elements de cada fila, columna i diagonal és constant. Escriu el menor $|M_{17,17}|$ i el menor complementari $|A_{17,17}|$. Serà $|A_{17,17}|$ un quadrat màgic? Fes el mateix amb $|M_{1267,1267}|$ i $|A_{1267,1267}|$.

$$\textit{Sol. } |M_{17,17}|=\begin{vmatrix} 4 & 40 \\ 10 & 46 \end{vmatrix}, \quad |A_{17,17}|=\begin{vmatrix} 15 & 16 & 33 & 30 & 31 \\ 37 & 22 & 27 & 26 & 13 \\ 36 & 29 & 25 & 21 & 14 \\ 18 & 24 & 23 & 28 & 32 \\ 19 & 34 & 17 & 20 & 35 \end{vmatrix}$$

$$|M_{1267,1267}|=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 38 & 40 \\ 49 & 15 & 31 & 1 \\ 9 & 19 & 35 & 41 \\ 10 & 45 & 12 & 46 \end{vmatrix}, \quad |A_{1267,1267}|=\begin{vmatrix} 22 & 27 & 26 \\ 29 & 25 & 21 \\ 24 & 23 & 28 \end{vmatrix}$$

Es veu que les matrius A, $A_{17,17}$ i $A_{1267,1267}$ són quadrats màgics de sumes 175, 125 i 75, respectivament.

Adjunts, generalització de la regla de Laplace

76. Donat el determinant D de 4t ordre, troba el seu valor partint dels menors de 2n ordre de les dues primeres files i desenvolupant el determinant per la regla de Laplace generalitzada:

$$D=\begin{vmatrix} 15 & 8 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & -9 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 5 & 10 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol. $D=|M_{12,12}|.|\mathcal{A}_{12,12}|+|M_{12,13}|.|\mathcal{A}_{12,13}|+|M_{12,14}|.|\mathcal{A}_{12,14}|+$
$|M_{12,23}|.|\mathcal{A}_{12,23}|+|M_{12,24}|.|\mathcal{A}_{12,24}|+|M_{12,34}|.|\mathcal{A}_{12,34}|.$
$D=(-61)(-44)-(72)(-50)+(-141)(20)+(14)(-17)-(-63)(42)+$
$+(42)(40)$, $D=7552$.

Menors principals, teorema de Jacobi

77. Els 25 termes de la matriu A donada tenen la forma de quadrat màgic de suma 65. Agafa ara les 25 primeres xifres del nombre π=3'141.592.653.589.793.238.462.643.... i substituix-les ordenadament a la matriu A, és a dir, el 3 de π a la casella ocupada per 01, el primer 1 a l'ocupada per 02, etc., fins que l'últim 3 de π sigui a la casella 25.

Quina és la nova matriu P? Quina és la suma de cada fila i de cada columna? Troba també tots els menors principals de 2n ordre que es poden formar a la matriu P.

$$A=\begin{pmatrix} 17 & 24 & 01 & 08 & 15 \\ 23 & 05 & 07 & 14 & 16 \\ 04 & 06 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 03 \\ 11 & 18 & 25 & 02 & 09 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol.}\ P=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 9 & 9 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Sigma f_1=\Sigma c_4=24$, $\Sigma f_2=\Sigma c_5=23$, $\Sigma f_3=\Sigma c_3=25$, $\Sigma f_4=\Sigma c_2=29$, $\Sigma f_5=\Sigma c_1=17$

$|M_{12}|=-14$, $|M_{13}|=15$, $|M_{14}|=-6$, $|M_{15}|=-35$, $|M_{23}|=27$,

$|M_{24}|=-26$, $|M_{25}|=0$, $|M_{34}|=22$, $|M_{35}|=39$, $|M_{45}|=26$.

78. Sigui la matriu quadrada $A\in\mathcal{M}_4$ formada pels quadrats de nombres naturals. Calcula els determinants menors principals $|M_1|_1$, $|M_{12}|_2$, $|M_{123}|_3$ i $|M_{1234}|_4$. Quin és el rang d'aquesta matriu?

$$A=\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix} \qquad \textit{Sol.}\ |M_1|_1=1\ ,\ |M_{12}|_2=-7\ ,\ |M_{123}|_3=-8$$

$$|M_{1234}|_4=|A|=0 \ \Rightarrow\ \rho(A)=3.$$

79. Per a la matriu A de files $f_1=(2\ 9\ 8)$, $f_2=(3\ 7\ 6)$ i $f_3=(1\ 5\ 4)$, quin és el seu determinant $|A|$? Calcula els adjunts $|\mathcal{A}_{11}|$, $|\mathcal{A}_{12}|$, $|\mathcal{A}_{21}|$ i $|\mathcal{A}_{22}|$. Quant valdrà el determinant de segon ordre $|\mathcal{M}_{12}|_2$ format per aquests adjunts? Troba després el menor $|M_{12}|_2$ a la matriu donada i també el seu menor complementari $|A_{12}|_1$. Comprova que es verifica el teorema de Jacobi.

Sol. $|A|=6$, $|\mathcal{M}_{12}|_2=\begin{vmatrix}-2 & -6\\ 4 & 0\end{vmatrix}$, $|M_{12}|_2=\begin{vmatrix}2 & 9\\ 3 & 7\end{vmatrix}$, $|A_{12}|_1=|M_3|_1=a_{33}=4$.

T. Jacobi $|\mathcal{M}_{12}|_2=|A_{12}|_1.|A|^{2-1}$, $24=4.6^1$.

1.3 APLICACIONS A LES MATRIUS

Rang d'una matriu per determinants

80. Calcula per determinants el rang de la matriu A donada per:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 10 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Sol. $|M_{12}|=10\neq 0$, $|M_{123}|=11\neq 0$, $|M_{1234}|=31\neq 0 \Rightarrow \rho(A)=4$.

81. Per a les dues matrius següents M i N, calcula el seu rang per determinants. En l'última matriu, sabries expressar les últimes files en combinació lineal de les primeres?

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4 & 6\\ -1 & -3 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -1 & 6\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad N=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14\\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19\end{pmatrix}$$

Sol. $\rho(M)=4$, $\rho(N)=2$, $f_3=2.f_2-f_1$, $f_4=7.f_2-6.f_1$, $f_5=12.f_2-11.f_1$

Inversa d'una matriu per adjunts

82. Pel mètode dels adjunts, troba la inversa A^{-1} de la matriu A. Comprova també que $A\bullet A^{-1}=I$, on I és la matriu unitat:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad \textit{Sol.}\ |A|=-1\ ,\ |\mathcal{A}_{11}|=-1\ \ldots\ A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

83. Donada la matriu A, troba el seu determinant $|A|$, els menors complementaris $|A_{ij}|$, els adjunts $|\mathcal{A}_{ij}|$, la matriu adjunta $\mathcal{A}$ i la matriu inversa A^{-1}. La matriu A té per files $f_1=(3\ 2\ 0\ 2)$, $f_2=(2\ 1\ 0\ 1)$, $f_3=(1\ 3\ -1\ 5)$ i $f_4=(0\ 1\ -1\ 1)$.

Sol. $|A|=-2$, $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & -7 & -4 & 3 \\ 4 & 10 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 7/2 & -5 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

84. Troba dues matrius quadrades de 2n ordre A i B que verifiquin simultàniament les equacions $P \bullet A=Q$ i $A+P \bullet B=O$. Troba la inversa de P pel mètode dels adjunts. Les matrius donades P i Q són:

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $Q=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ *Sol.* $A=P^{-1} \bullet Q=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=-P^{-1} \bullet A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$

85. Donades les matrius A, B i C se sap que les matrius desconegudes X i Y verifiquen el sistema següent de dues equacions amb dues incògnites. Troba les matrius X i Y.

$\begin{cases} X+Y=B^{-1}-C \\ Y^{-1} \bullet (A+X)=2.I \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{cases} Y=(A+B^{-1}-C)/3 \\ X=2.Y-A \end{cases}$, $X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -8 & -12 & 4 \\ 8 & -2 & -4 \\ -12 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $Y=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 8 & 4 & -4 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

86. Donada la matriu A, troba'n la matriu inversa A^{-1}, aplicant el mètode de la matriu adjunta. Comprova-ho després fent la multiplicació d'aquesta inversa amb la seva matriu original:

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \\ -22 & -91 & -74 & 95 \\ 38 & 156 & 127 & -163 \end{pmatrix}$ *Sol.* $|A|=1$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

Determinants de matrius quadrades especials

87. Calcula el determinant de 4t ordre D(a,b,c,d), que depèn dels paràmetres a, b, c i d, deixant el resultat com un producte de 4 factors. Particularitza-ho després per a=1, b=2, c=3 i d=4.

$$D(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Sol. $g_2=f_2-f_1$, $g_3=f_3-f_2$, ...
Det. mat. triang. $D=a.(b-a).(c-b).(d-c)$
$D(1,2,3,4)=1$.

88. Resol l'equació en forma de determinant, $|A|=0$, apuntant el conjunt de solucions S. El determinant de 6è ordre, que s'haurà de reduir fent operacions entre les línies, ens ve donat per

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5-x \end{vmatrix}$$

Sol. $f_2'=f_2-f_1$, $f_3'=f_3-f_2$, ... Det. mat. triang.

$-x(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)=0 \Rightarrow S=\{0,1,2,3,4\}$.

89. Es pot provar que, en general, el determinant format per nombres combinatoris següent, $|C|$, sempre dóna el mateix valor, independentment de m i n. Dedueix aquest valor per al cas particular dels paràmetres m=5 i n=3. Recorda la definició de nombre combinatori, $C_{m,n}=m!/[n!.(m-n)!]$.

$$|C|=\begin{vmatrix} C_{m,0} & C_{m+1,0} & \cdots & C_{m+n,0} \\ C_{m,1} & C_{m+1,1} & \cdots & C_{m+n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,n} & C_{m+1,n} & \cdots & C_{m+n,n} \end{vmatrix}$$

Sol. $|C|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 15 & 21 & 28 \\ 10 & 20 & 35 & 56 \end{vmatrix}$ $\quad C_2'=C_2-C_1,\ C_3'=C_3-C_2,\ldots$

$\Rightarrow |C|=1$, $C_{m,n}=\binom{m}{n}$

90. Per a la matriu A donada al final de l'enunciat, troba'n el determinant $|A|$ i les matrius inversa A^{-1}, transposada A' i oposada -A Comprova que A és una matriu ortogonal. És una matriu simètrica o antisimètrica?

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. $|A|=1$, $A^{-1}=A'$ Antisimètrica: $A'=-A$.

91. Partint del determinant de Vandermonde D_V, i fent operacions amb les seves files, troba'n el valor, expressant-lo com a producte de factors:

$$D_V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Sol. $g_2=f_2-a.f_1$, $g_3=f_3-a.f_2$ ... f. comú

$D_V=(b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).(d-c)$.

Determinants generalitzats

92. Calcula el determinant generalitzat [A], on A és la matriu de files $f_1=(1\ -2\ -6)$ i $f_2=(3\ -1\ -4)$.

Sol. $[A]=\sqrt{|A\bullet A'|}$, $A\bullet A'=\begin{pmatrix} 41 & 29 \\ 29 & 26 \end{pmatrix}$, $[A]=15$.

93. Calcula els determinants generalitzats [A] i [B] de les matrius donades A i B. Observa la similitud entre les dues matrius. Troba la solució general [X] en funció dels paràmetres a, b, c i d. Comprova-ho després per [A] i [B]. Tenim:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 \\ -7 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } X=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

Sol. $[A]=30$, $[B]=84$, $[X]=a^2+b^2+c^2+d^2$.

94. Sigui la matriu genèrica $A\in\mathcal{M}_{2\times3}$. Prova que el determinant generalitzat pot venir donat per $[A]^2=|B|^2+|C|^2+|D|^2$. Tenim:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} \text{ i } D=\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Sol. $[A]=(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)-(ad+be+cf)^2$, simplif.

95. Comprova que necessàriament ha de ser nul el determinant generalitzat [A] de la matriu A d'ordre 4x2. Resol el determinant per adjunts de la primera columna. La matriu A és:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol. $A\bullet A'=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ -5 & 29 & -7 & -12 \\ 3 & -7 & 25 & 2 \\ 2 & -12 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $g_2=f_2+5.f_1$ ...

$|A\bullet A'|=0$.

Altres aplicacions dels determinants

96. Per als vectors de l'espai $\mathbf{v}_1=a_1.\mathbf{i}+b_1.\mathbf{j}+c_1.\mathbf{k}$ i $\mathbf{v}_2=a_2.\mathbf{i}+b_2.\mathbf{j}+c_2.\mathbf{k}$, on $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ són tres vectors unitaris en les direccions dels eixos X, Y i Z, respectivament, es defineix el producte vectorial $\mathbf{w}=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$ com aquell vector, perpendicular als dos anteriors, definit per

$$\mathbf{w}=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Siguin ara els vectors $\mathbf{v}_1=3.\mathbf{i}+4.\mathbf{j}+5.\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{i}+2.\mathbf{j}+4.\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{i}+4.\mathbf{j}+2.\mathbf{k}$ i $\mathbf{v}_4=2.\mathbf{i}+5.\mathbf{j}+3.\mathbf{k}$. Troba els productes vectorials $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4$ i després $\mathbf{w}=\mathbf{w}_1\wedge\mathbf{w}_2$

Sol. $\mathbf{w}_1=6.\mathbf{i}-7.\mathbf{j}+2.\mathbf{k}$, $\mathbf{w}_2=2.\mathbf{i}+\mathbf{j}-3.\mathbf{k}$, $\mathbf{w}=19.\mathbf{i}+22.\mathbf{j}+20.\mathbf{k}$.

97. El volum d'un tetraedre, o piràmide de base triangular, de vèrtexs $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ i $P_4(x_4, y_4, z_4)$, és expressat pel determinant

$$V_T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcula el volum del tetraedre de vèrtexs $P_1(3, 5, 6)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(1, 4, 2)$ i $P_3(3, 2, 8)$.

Sol. Restar a cada fila l'anterior, $V_T=4$.

98. L'equació general del pla que passa pels tres punts de l'espai, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ i $P_3(x_3, y_3, z_3)$, es pot expressar com l'equació en forma de determinant,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Calcula l'equació general del pla que passa pels punts $P_1(1, 2, 5)$, $P_2(2, 0, 3)$ i $P_3(-3, 7, 9)$, desenvolupant el determinant per la regla de Laplace, emprant els adjunts de la primera fila.

Estudia també si aquest pla conté el punt $P_4(4, 1, 7)$. I el nou punt $P_5(5, -3, 1)$? Comprova-ho després substituint les coordenades en el lloc de x, y i z en el determinant i observant si s'anul·la o no.

Sol. Pla: $2.x+4.y-3.z+5=0$, P_4 no , P_5 sí.

99. En l'espai, l'àrea d'un triangle que té de vèrtexs $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ i $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ve donada per

$$S_t=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2}$$

Amb els punts $P_1(1, 2, -4)$, $P_2(4, 6, 8)$, $P_3(8, 9, 6)$ i $P_4(-8, 3, 12)$, calcula l'àrea total S de la figura formada pels triangles $P_1P_2P_3$ i $P_1P_2P_4$. Fes un esquema.

Sol. $S_{123}=35$, $S_{124}=84'5$, $S=119'5$.

100. Analitzant un fenomen econòmic, s'ha observat que la variable periòdica y_t depèn de la variable x, on en els primers tres anys la relació de dependència es definida pels determinants

$$y_1=-1 \qquad y_2=\begin{vmatrix} -1 & x \\ x & -1 \end{vmatrix} \qquad y_3=\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

Expressa en forma polinòmica els dos determinants anteriors. Apunta també el determinant de la variable y_4 i desenvolupa'l per la regla de Laplace, fent, prèviament, operacions entre les files i les columnes.

Comprova que tots aquests determinants verifiquen la fórmula general

$$y_t=(-1)^{t-1}.[(t-1).x-1].(x+1)^{t-1}$$

Sol. $y_2=1-x^2$, $y_3=-1+3.x^2+2.x^3$, $g_2=f_2-f_1$, $g_3=f_3-f_1$, $g_4=f_4-f_1$
$d_1=c_1+c_2+c_3+c_4$, $y_4=1-6.x^2-8.x^3-3.x^4$.

APÈNDIX

A) Prova d'autoavaluació

B) Bibliografia escollida

C) Glossari de conceptes

PROVA D'AUTOAVALUACIÓ

PROBLEMES PARAMETRITZATS

Presentem a continuació una sèrie de dotze problemes que, com és lògic, no abasten la totalitat de l'àmplia gamma d'exercicis que es podrien proposar. Tots aquests problemes de determinants depenen d'un *paràmetre* "a", que pot valer 1, 2, 3 o 4. Per a cadascun d'aquests valors s'obté una resposta diferent entre les vuit possibles donades.

En els següents *problemes parametritzats*, substitueix en primer lloc el paràmetre a pel valor que vulguis entre 1, 2, 3 o 4, resol el problema, escull l'opció correcta i després fes una creu al quadre de respostes:

Determinants de tercer i quart ordre

1. Calcula el valor de P=|M|/864, on M és el determinant de la matriu $M=A^2 \bullet B^3$. Les matrius A i B són:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A) 30 B) 27 C) 8 D) 16
E) 18 F) 13 G) 5 H) 0

2. Resol l'equació següent en determinants, on m=a.(1-a)+20,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & m \\ 9 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & a+1 \\ 2.x & a-3 & a+2 \\ -x & a+6 & a-1 \end{vmatrix}$$

T'han de donar dos valors de x que són:

A) 4 i 5 B) 1 i 2 C) 3 i 6 D) 3 i 4
E) 5 i 6 F) 1 i 8 G) 7 i 8 H) 2 i 7

3. Calcula el valor $R=\sqrt{D}$, on D és el determinant de 4t ordre de files $\mathbf{f}_1$=(a-2 a-3 a+1 a+2), $\mathbf{f}_2$=(-a+3 a-2 a+2 -a-1), $\mathbf{f}_3$=(-a-1 -a-2 a-2 a-3) i $\mathbf{f}_4$=(-a-2 a+1 -a+3 a-2). Troba el determinant desenvolupant per adjunts de la primera columna, després de l'obtenció de zeros. El valor de R és:

A) R=18 B) R=26 C) R=0 D) R=36
E) R=66 F) R=42 G) R=46 H) R=6

4. Calcula el valor particular de la funció de vendes $V=+\sqrt{D+a^2-101}$ per al cas en què D és el determinant de columnes $c_1=(1\ \ -1\ \ 5\ \ 2)'$, $c_2=(1\ \ -2\ \ a\ \ 4)'$, $c_3=(3\ \ 2\ \ 1\ \ 8)'$ i $c_4=(-1\ \ 1\ \ -1\ \ 0)'$. Troba el determinant pel mètode del pivot. Obtindràs:

A) V=2 B) V=3 C) V=7 D) V=1
E) V=6 F) V=8 G) V=4 H) V=5

Equacions amb determinants

5. Sigui $\lambda=1/(6-a)$. Determina el valor de x que és solució de la següent equació en forma de determinant $|D|=0$, on D és el determinant de files $\mathbf{f}_1=(1\ \ x\ \ x\ \ x)$, $\mathbf{f}_2=(\lambda\ \ 1\ \ \lambda.x\ \ \lambda.x)$, $\mathbf{f}_3=(\lambda\ \ \lambda\ \ 1\ \ \lambda.x)$ i $\mathbf{f}_4=(\lambda\ \ \lambda\ \ \lambda\ \ 1)$. Obtindràs el valor:

A) x=3 B) x=1 C) x=6 D) x=7
E) x=4 F) x=5 G) x=2 H) x=8

6. Determina la mitjana m de totes les solucions de x en la següent equació en forma de determinant, $|D|=0$, on $|D|$ és el determinant que té per files $\mathbf{f}_1=(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$, $\mathbf{f}_2=(1\ \ a-x\ \ 1\ \ 1)$, $\mathbf{f}_3=(1\ \ 1\ \ a+1-x\ \ 1)$ i $\mathbf{f}_4=(1\ \ 1\ \ 1\ \ a+2-x)$.

A) m=1 B) m=5 C) m=4 D) m=2
E) m=3 F) m=7 G) m=8 H) m=6

7. Les files d'una matriu A(4x4) són $f_1=(x\ \ -2\ \ -1\ \ a)$, $f_2=(-1\ \ x\ \ a\ \ -2)$, $f_3=(-2\ \ a\ \ x\ \ -1)$ i $f_4=(a\ \ -1\ \ -2\ \ x)$. Si calcules les 4 solucions de l'equació obtinguda anul·lant el seu determinant, veuràs que hi ha dues arrels reals i dues d'imaginàries conjugades, que són:

A) -5, 1, 2±i B) -6, 0, 3±i C) 0, 1, 1±4.i D) 0, 3, 1±2.i
E) 0, 2, 1±3.i F) -4, 2, 1±i G) -7, -1, 4±i H) 0, 4, 1±i

Rang i matriu inversa per determinants

8. Donada la matriu de quart ordre que té per files $f_1=(1\ \ 2\ \ 3\ \ -4)$, $f_2=(a\ \ a+1\ \ 3\ \ -4)$, $f_3=(2.a\ \ 2.a+2\ \ 6\ \ -2.a)$ i $f_4=(a+1\ \ a+3\ \ 6\ \ -8)$, troba el seu rang r aplicant determinants de menors orlats. El nou paràmetre p=r/a valdrà:

A) p=1 B) p=4 C) p=0'5 D) p=3
E) p=2'5 F) p=1'5 G) p=3'5 H) p=2

9. Estudia per quin valor de λ la matriu A de files $f_1=(1\ \ 0\ \ -1\ \ 2)$, $f_2=(0\ \ 3\text{-}a\ \ 3\ \ -2)$, $f_3=(4\ \ 1\ \ 2\ \ 1)$ i $f_4=(-3\ \ -1\ \ 0\ \ \lambda)$, no existeix la seva inversa A^{-1}.

A) $\lambda=-4$ B) $\lambda=-8$ C) $\lambda=-7$ D) $\lambda=-6$
E) $\lambda=-5$ F) $\lambda=-3$ G) $\lambda=-1$ H) $\lambda=-2$

10. La suma de tots els elements de la diagonal principal d'una matriu quadrada s'anomena *traça*. Sigui la matriu $L=(I-A)^{-1}$, on A és la matriu de files $\mathbf{f}_1=(0\ \ -a\ \ -6)$, $\mathbf{f}_2=(-2\ \ 0\ \ -7)$ i $\mathbf{f}_3=(-1\ \ 2\ \ 2)$ i I és la matriu unitat. Quina és la traça T de la matriu L?

A) T=5/8 B) T=-5/8 C) T=-1/19 D) T=3
E) T=-1/10 F) T=1/10 G) T=5 H) T=1/19

11. Donades les matrius quadrades de tercer ordre

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5\text{-}a \end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula el valor del determinant $|A \bullet B^{-1}|$. Obtindràs

A) 41/3 B) 5/2 C) 11/4 D) 7/2
E) 8 F) 9/4 G) 2/3 H) 11/3

Determinant generalitzat

12. Calcula el determinant generalitzat, [A], de la matriu rectangular

$$A=\begin{pmatrix} 2.a+1 & 5\text{-}a & a+4 \\ 9\text{-}2.a & 3.a\text{-}1 & 12/a \end{pmatrix}$$

El valor aproximat amb dues xifres decimals serà:

A) 7'25 B) 43'92 C) 69'66 D) 131'11
E) 87'38 F) 26'73 G) 15'62 H) 157'52

QUADRE DE RESPOSTES:

1 A B C D ○ E F G H	2 A B C D ○ E F G H	3 A B C D ○ E F G H	4 A B C D ○ E F G H
5 A B C D ○ E F G H	Després de resoldre tots els problemes, fes una creu a les respostes que consideris correctes. Si creus que la resposta no figura entre les vuit donades, posa la creu al cercle central.		6 A B C D ○ E F G H
7 A B C D ○ E F G H			8 A B C D ○ E F G H
9 A B C D ○ E F G H	10 A B C D ○ E F G H	11 A B C D ○ E F G H	12 A B C D ○ E F G H

Puntuació:

Respostes encertades: ☐ Punts positius (×4): ☐

equivocades: ☐ negatius (×(-1)): ☐

Puntuació total: ☐

Respostes correctes en funció del paràmetre:

(a=1, 2, 3 i 4, respectivament)

P_1: E-B-D-H	P_2: A-C-H-F	P_3: A-B-F-E	P_4: G-B-A-D
P_5: F-E-A-G	P_6: A-D-E-C	P_7: F-A-B-G	P_8: D-F-A-C
P_9: F-A-G-H	P_{10}: B-D-F-C	P_{11}: G-H-E-A	P_{12}: B-G-C-D

Qualificació:

Per obtenir la nota N farem servir la "Part entera", on prendrem l'enter inferior a la puntuació donada. Així. E(5'3)=5. Quant a la qualificació, ens basarem en el barem següent:

Susp. ($N<5$) Apr. ($5 \leq N<7$) Not. ($7 \leq N<9$) Exc. ($N \geq 9$)

Nota ($N=E[(P+3)/5]$): [ ] Qualificació: [ ]

Si la puntuació no ha estat prou alta, es pot tornar a resoldre la prova, repassant abans els conceptes i exemples, però ara emprant un valor diferent per al paràmetre "a", que ha de ser 1, 2, 3 o 4.

BIBLIOGRAFIA ESCOLLIDA

BOADAS, J., VILLALBI, R. *Álgebra moderna a través de los problemas. Tomo (I): Estructuras Algebraicas.* Ed. Teide. Barcelona. 1974.

BURGOS, A. *Iniciación a la Matemática Moderna.* Ed. Selecciones Científicas. Madrid. 1974.

CASANOVA, J. *Exámenes de Álgebra Lineal.* Ed. Universidad y Cultura. Madrid. 1987.

DÍAZ HERNANDO, J.A. *Álgebra, Geometría y Cálculo. Tomos (I) y (II).* Ed. Tebar Flores. Madrid.

ESPADA BROS, E. *Problemas resueltos de Álgebra. Tomos (I) y (II).* Ed. EDUNSA. Barcelona. 1988.

GARCÍA SESTAFE, J.V. *Ciencias Económicas y Empresariales. Curso de Matemáticas en forma de problemas.* Ed. C. E .R. Areces. Madrid. 1989.

GUTIERREZ, A., GARCÍA CASTRO, F. *Álgebra Lineal. Tomos (I) y (II).* Ed. Pirámide. Madrid. 1981.

LIPSCHUTZ, S. *Teoría de Conjuntos y Temas Afines.* Ed. McGraw-Hill. México. 1973.

LUZÁRRAGA, A. *Problemas resueltos de Álgebra Lineal.* Ed. El Autor. Barcelona. 1970.

PRIETO, E. y G. *Matemática para Economistas: Álgebra Lineal.* Ed. ICE. Madrid. 1977.

RODRIGUEZ, A. *Matemática para Economistas. Tomo I.* Ed. Romargraf. Barcelona. 1978.

SPIEGEL, MURRAY R. *Álgebra Superior.* Ed. McGraw-Hill. Mèxico. 1969.

TEBAR FLORES, E. *Problemas de Álgebra Lineal. Tomo (I)* Ed. Tebar Flores. Albacete. 1977.

THOMAS ARA, L., RIOS GARCIA, M.E. *Álgebra Lineal.* Ed. El Autor. Madrid. 1974.

YAMANE, T. *Matemáticas para Economistas.* Ariel Economia. Barcelona. 1983.

GLOSSARI DE CONCEPTES

Exposem a continuació un recull dels termes matemàtics emprats, seguits de la plana en què es poden trobar. Els números en negreta indiquen que el concepte és a la part de "Formulació matemàtica". En cas contrari, és a la part de "Conceptes i exemples":

ÍNDEX