Apunts de Fonaments de Física I

Jordi Farjas Silva

Departament de Física

Universitat de Girona, 2020. 1a ed. català revisada
Edició electrònica

Nota

Aquest text pretén ser una guia útil per als estudiants del Grau en Enginyeria Industrial. El document s'estructura en setze temes organitzats en cinc blocs. El primer bloc és un repàs de la dinàmica de la partícula puntual, en el segon es fa una introducció als conceptes bàsics de la dinàmica dels sistemes de partícules i del sòlid rígid, en el tercer es descriu el moviment oscil·latori i ondulatori, el quart està dedicat a la descripció dels fluids i en el cinquè s'introdueixen conceptes bàsics de la termodinàmica. Per a cada tema s'estableixen les **competències específiques (objectius)** que s'han d'assolir, es desenvolupen de manera esquemàtica els **continguts** i s'adjunten **exemples resolts** de problemes. Al final de cada tema s'inclou també una col·lecció de qüestions i problemes. Aquest llibre només pretén ser una breu i concisa recopilació dels continguts bàsics de l'assignatura. Al final del llibre trobareu una bibliografia recomanada per poder desenvolupar exhaustivament la matèria.

.

1. Introducció a la física

Objectius

Què és la física?
Què són els sistemes d'unitats?
Classificació dels diferents tipus de magnituds
Sistemes d'unitats SI, CGS i MKS
Anàlisi dimensional

Què és la física?

La física és una ciència natural, és a dir, intenta descriure el nostre entorn, i en particular els fenòmens més fonamentals. En general, el nivell de coneixement disminueix amb la complexitat dels fenòmens estudiats; per aquesta raó, la física assoleix uns nivells de comprensió molt elevats. D'aquesta manera, gràcies al coneixement generat, la física ha propiciat el desenvolupament tecnològic. A més, actualment la física proporciona bases metodològiques per al desenvolupament quantitatiu d'altres ciències.

La descripció dels fenòmens es fa a partir de les *lleis de la física*. En termes generals, una llei relaciona diferents magnituds; per exemple, el temps de caiguda d'un objecte amb l'espai recorregut.

Tipus de magnituds:

Escalars $\longrightarrow$ valor numèric (per exemple, la temperatura)
Vectorials $\longrightarrow$ valor, direcció i sentit (per exemple, la velocitat del vent)
Tensorials $\longrightarrow$ matricials (per exemple, la resposta elàstica dels materials)

Problema: quantificar les magnituds, donar o assignar un valor numèric que permeti comparar les observacions fetes per diferents laboratoris.

Sistemes d'unitats

Cal una referència (estandardització) que unifiqui les magnituds: els *sistemes d'unitats.* En aquest curs treballarem bàsicament amb el *sistema d'unitats internacional* (SI). També treballarem amb el *sistema d'unitats cegesimal* (CGS) i amb el *sistema d'unitats tècnic* (MKS).

Magnituds fonamentals i derivades

La majoria de magnituds físiques es poden expressar en funció d'unes unitats fonamentals. Pel que fa a la mecànica:

	SI	CGS	
Longitud	m (metre)	cm	$[L]$
Temps	s (segon)	s	$[T]$
Massa	kg (quilogram)	g	$[M]$

Per exemple:

$$\left.\begin{aligned} \text{La velocitat: } [V] &= \frac{[L]}{[T]} = \frac{m}{s} \\ \text{La força: } [F] &= \frac{[M][L]^2}{[T]} = N \text{ (newton)} \end{aligned}\right\} \text{Magnituds derivades}$$

A partir de les unitats fonamentals es pot construir el sistema complet d'unitats.

També es podria agafar com a unitat fonamental la força $[F]$ en lloc de la massa $[M]$. Aquesta és l'opció triada en el sistema tècnic MKS.

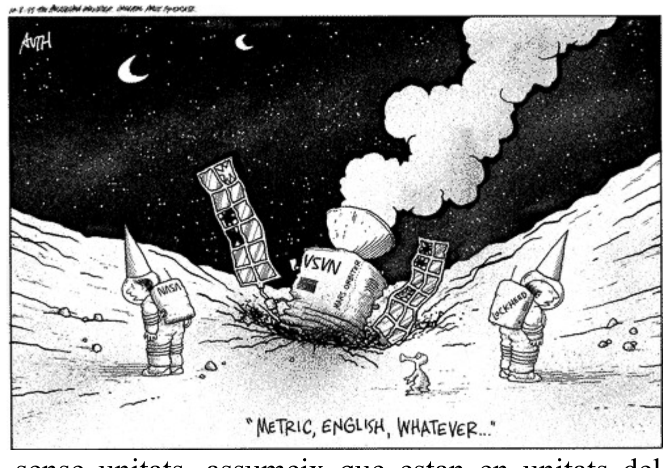
	MKS	
Longitud	m (metre)	$[L]$
Temps	s (segon)	$[T]$
Força	kp (quilopond)	$[F]$

Així: $[M] = \frac{[F][T]}{[L]^2}$

El kp és el pes d'1 kg de massa: $1 \text{ kp} = \text{mg} = 1 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 9{,}81$ N.

Els canvis d'unitats es poden fer mitjançant els *factors de conversió*:

$$180 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1.000 \text{ m}}{1\text{km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \ s} = 50 \text{ m/s}$$



El desembre del 1998 *Mars Climate* es va estavellar per un problema d'unitats.
Lockeed Martin Astronautics va dissenyar i construir la nau espacial. Els càlculs de l'acceleració i altres mesures les fa en el sistema d'unitats anglosaxó (peus i lliures).

La NASA fa el llançament de la nau. Quan el Jet Propulsion Laboratory rep les dades de la nau sense unitats, assumeix que estan en unitats del sistema internacional per fer els càlculs de la trajectòria.

Els errors en el càlcul de la trajectòria fa que la nau s'estavelli contra la superfície de mars, enlloc de quedar orbitant al voltant del planeta.

En total uns 350 milions de dòlars es varen perdre per culpa d'un error d'unitats, en particular, perquè es varen donar unes magnituds sense indicar-ne les unitats.

Molt important: és inacceptable una magnitud sense unitats.
Font habitual d'errors: ús simultani d'unitats de diferents sistemes. Cal que totes les magnituds s'expressin sempre en un únic sistema d'unitats.

Anàlisi dimensional

Les lleis es poden expressar com equacions matemàtiques. Per exemple:

La segona llei de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$ i els seus desenvolupaments.
El moviment rectilini uniformement accelerat (MRUA): $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$.
Totes les relacions entre magnituds han de ser homogènies, per exemple per al MRUA:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$
$$[L] = [L] + \frac{[L]}{[T]}[T] + \frac{[L]}{[T]^2}[T]^2$$

L'anàlisi dimensional té dues utilitats:
1) Ens fa entendre què vol dir i per a què serveix una llei a través de les magnituds que relaciona.
2) Ens permet evitar i detectar errors en expressions, per exemple:

$$F_{cp} = m\frac{v}{R}?\ o\ F_{cp} = m\frac{v^2}{R}?$$

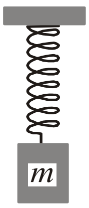
Anàlisi dimensional, força centrípeta:

$[F] = [M]\frac{[L]}{[T]^2}$ $\qquad$ $\cancel{m\frac{v}{R}: [M]\frac{[L]}{[T][L]} = \frac{[M]}{[T]}}$ $\qquad$ $m\frac{v^2}{R}: [M]\frac{[L]^2}{[T]^2[L]} = [M]\frac{[L]}{[T]^2}$

També ens permet elaborar relacions. Per exemple, sabem que en una molla la força elàstica és proporcional a l'allargament, *x*:

$$F = k \cdot x \ \Rightarrow\ k = \frac{F}{x} \ \Rightarrow\ [k] = \frac{[M][L]}{[L][T]^2} = \frac{[M]}{[T]^2}$$

Quant val el període d'oscil·lació d'una massa *m* penjada verticalment d'una molla de constant elàstica *K*?



T? $\qquad$ depèn de *m*, *g* i *K*

$$T \propto m^a \cdot g^b \cdot k^c \Rightarrow [T] = [M]^a \frac{[L]^b}{[T]^{2b}}\frac{[M]^c}{[T]^{2c}} = [M]^{a+c}[L]^b[T]^{-2b-2c}$$

$$\left.\begin{array}{r} a + c = 0 \\ b = 0 \\ -2c - 2b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1/2\,, b = 0\ i\ c = -1/2$$

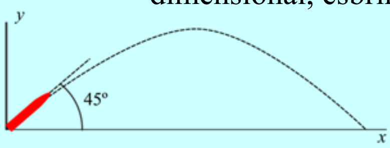
Així doncs, el període no depèn de l'acceleració de la gravetat, *g*:

$$T \propto m^{1/2} \cdot k^{-1/2} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Com veurem al tema 8, la constant de proporcionalitat és 2π:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

<u>Exemple</u>: Un projectil llançat amb una inclinació de 45° recorre una distància total R, anomenada *abast*, que només depèn de la velocitat inicial v i de l'acceleració de la gravetat g (dimensions LT^{-2}). Mitjançant l'anàlisi dimensional, esbrineu com R depèn de la velocitat i de g.



$$R \propto v^a g^b \Rightarrow [L] = \frac{[L]^a}{[T]^a}\frac{[L]^b}{[T]^{2b}} = [L]^{a+b}[T]^{-a-2b}$$

$$\left.\begin{aligned} a+b&=1 \\ -a-2b&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 2 \ i \ b = -1 \Rightarrow R \propto \frac{v^2}{g}$$

Qüestions del tema 1

Anàlisi dimensional

1. Una pilota llançada horitzontalment des d'una altura H a velocitat v recorre una distància horitzontal total R. *a)* Què hem d'esperar, que R augmenti o decreixi en disminuir H? I en augmentar v? *b)* Mitjançant l'anàlisi dimensional, esbrineu una possible dependència de R amb H, v i g.

Sol.: *a)* R augmenta quan H i v creixen; *b)* $R \propto v\sqrt{\frac{H}{g}}$

2. Una massa m està enganxada a una molla de pes negligible i constant elàstica k. Es comprimeix la molla i després es deixa anar sobtadament. La massa es posa a oscil·lar al voltant de la seva posició d'equilibri (suposeu que no hi ha fregament). Trobeu, a partir de l'anàlisi dimensional, la dependència del període T de l'oscil·lació, en funció dels paràmetres del sistema m, k i g.

Sol.: $T \propto \sqrt{\frac{m}{k}}$

3. Un objecte lligat a l'extrem d'una corda es mou descrivint un cercle. La força feta per la corda depèn de la massa de l'objecte, de la seva velocitat i del radi del cercle. Quina combinació d'aquestes variables té les dimensions correctes (MLT^{-2}) d'una força?

Sol.: $F \propto m\frac{v^2}{r}$

4. La tercera llei de Kepler relaciona el període d'un planeta amb el radi r de la seva òrbita, la constant G de la llei de Newton de la gravitació ($F = Gm_1m_2/r^2$) i la massa del Sol, m_s. Quina combinació d'aquests factors té les dimensions correctes del període?

Sol.: $T \propto \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_s}}$

5. Un projectil llançat amb una inclinació de 45° recorre una distància total R, anomenada *abast*, que només depèn de la velocitat inicial v i de l'acceleració de la gravetat g (dimensions LT^{-2}). Mitjançant l'anàlisi dimensional, esbrineu com R depèn de la velocitat i de g.

Sol.: $R \propto \frac{v^2}{g}$

6. Buscant per la xarxa es troba la següent relació per a l'equació de Stefan-Boltzmann, que representa la màxima calor que pot emetre un sòlid per radiació a una temperatura donada: $Q=\sigma \cdot T^3$, on T és la temperatura del sòlid en Kelvin (K), σ és la constant de Stefan-Boltzmann ($\sigma=56{,}7 \cdot 10^{-9}$ $Wm^{-2}K^{-4}$) i Q és la densitat de flux de calor emesa (Wm^{-2}). És correcta aquesta relació?

I. Dinàmica de la partícula puntual

2. Cinemàtica

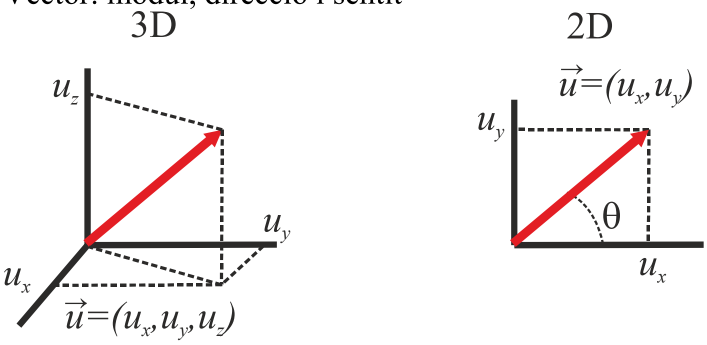
Objectius

Propietats bàsiques dels vectors
Descripció del moviment
Conceptes de velocitat instantània i mitjana
Conceptes d'acceleració mitjana i instantània
Descomposició del moviment
Descripció del tir parabòlic
Descripció del moviment circular

Anàlisi vectorial

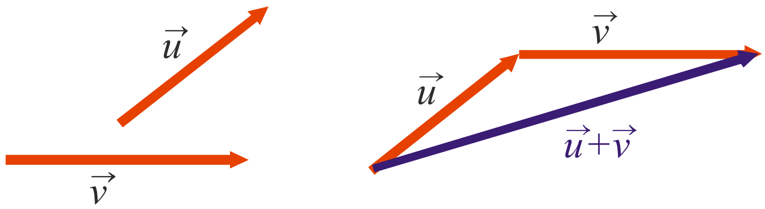
Tant les forces com les acceleracions, velocitats i moments són vectors.

Vector: mòdul, direcció i sentit



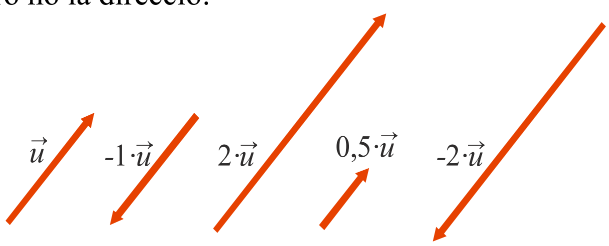
Suma de vectors: $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$

Regla del paral·lelogram:

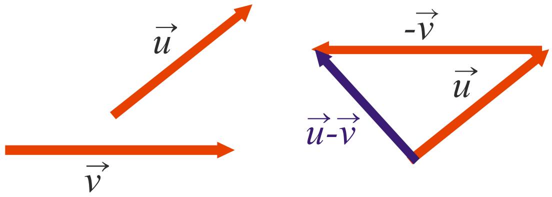


Commutativa: $\vec{u} + v = v + \vec{u}$

Producte d'un escalar per un vector: $a \cdot \vec{u} = (a \cdot u_x, a \cdot u_y, a \cdot u_z)$. Pot canviar el mòdul i el sentit, però no la direcció:



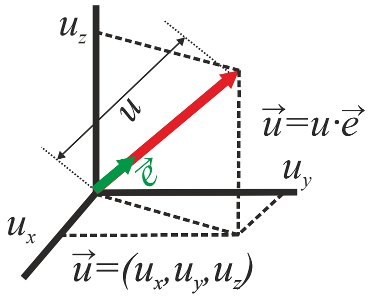
Resta de vectors: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1 \cdot \vec{v}) = \left(u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z\right)$



Mòdul: $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Vector unitari: $\vec{e} = \frac{\vec{u}}{u}, e = 1$

Vector: mòdul → magnitud i vector unitari → direcció i sentit.

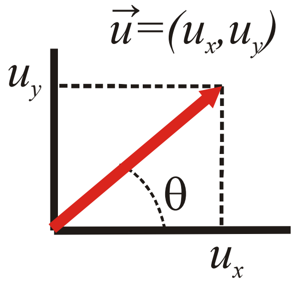


En dues dimensions:

$\vec{u} = \left(u_x, u_y\right)$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

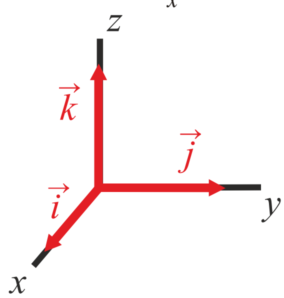
$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{u} = \left(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$



Components vectorials:

$$\vec{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right) = u_x(1,0,0) + u_y(0,1,0) + u_z(0,0,1)$$
$$= u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$$

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ vectors unitaris en la direcció dels eixos x, y i z, respectivament.

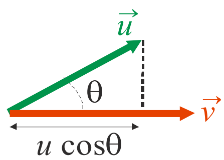


Producte escalar de vectors:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos\theta = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

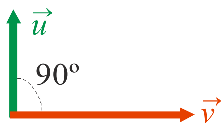
El resultat és la projecció de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

S'anomena *producte escalar* perquè el resultat del producte és un escalar.



Propietats:

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \theta = 90° \text{ o } 270° \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



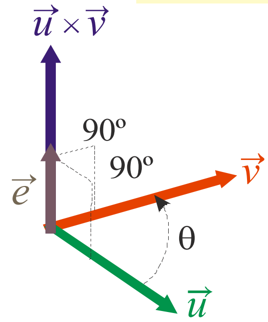
$\vec{u} // \vec{v} \Rightarrow \theta = 0° \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = uv$

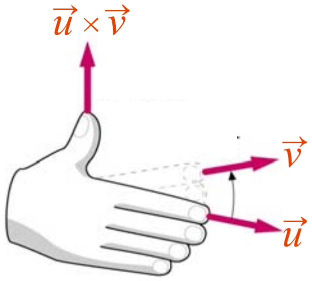
$\vec{u}$ anti// $\vec{v} \Rightarrow \theta = 180° \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -uv$

Commutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Producte vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = u \cdot v \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}, \vec{e} \perp \vec{u} \text{ i } \vec{v}$$

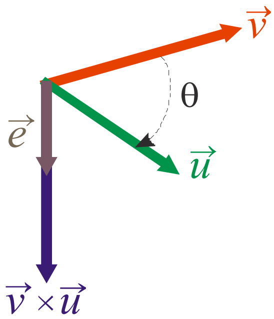




Sentit de $\vec{e}$: regla de la mà dreta + rotació antihorària, – rotació horària

En components:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$



Anticommutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

<u>Exemple 1</u>: Si $\vec{F}_A = 600\vec{\imath} - 800\vec{\jmath}$ N i $\vec{F}_B = 200\vec{\imath} - 200\vec{\jmath}$ N, quina és la magnitud de $\vec{F} = \vec{F}_A - 2\vec{F}_B$?

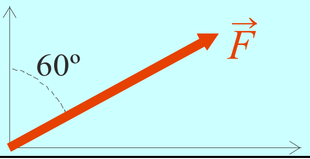
$$\vec{F} = (600, -800) - 2(200, -200) = (200, -400) \text{ N} = (200\vec{\imath} - 400\,\vec{\jmath})\text{N}$$
$$F = \sqrt{200^2 + 400^2} = 447\text{N}$$

<u>Exemple 2</u>: els vectors $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 12\,\vec{k}$ i $\vec{v} = -\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 6\vec{k}$. Determineu el mòdul de $\vec{u}$ i $\vec{v}$, els angles θ_x, θ_y i θ_z que forma el vector $\vec{u}$ amb els eixos de coordenades, i el mòdul del vector $\vec{R} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

$$u = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = 13,$$
$$v = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 6^2} = \sqrt{86} = 9{,}27$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos\theta = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$
$$\cos\theta_x = \frac{\vec{u} \cdot \vec{\imath}}{u} = \frac{u_x}{u} = \frac{3}{13} \Rightarrow \theta_z = 76{,}6°$$
$$\cos\theta_y = \frac{\vec{u} \cdot \vec{\jmath}}{u} = \frac{u_y}{u} = \frac{-4}{13} \Rightarrow \theta_z = 107,9°$$
$$\cos\theta_z = \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{u} = \frac{u_z}{u} = \frac{-12}{13} \Rightarrow \theta_z = 157,4°$$
$$\vec{R} = 2\vec{u} + 3\vec{v} = (6, -8, -24) + (-3{,}21{,}18) = (3{,}13, -6)$$
$$= 3\vec{\imath} + 13\,\vec{\jmath} - 6\vec{k}$$
$$R = \sqrt{3^2 + 13^2 + 6^2} = 14{,}63$$

Exemple 3: El vector força $\vec{F}$ té un mòdul de 800 N i forma un angle de 60º respecte de l'eix *y*. Expresseu $\vec{F}$en funció de les seves dues components.



$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\sin(60°) = 693\text{ N} \\ F_y &= F\cos(60°) = 400\text{ N} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = (693\,\vec{\imath} + 400\vec{\jmath})\text{ N}$$

Exemple 4: Considereu els vectors $\vec{u} = 6\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ i $\vec{v} = -12\,\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$. Calculeu el seu producte vectorial i comenteu què ens indica el resultat.

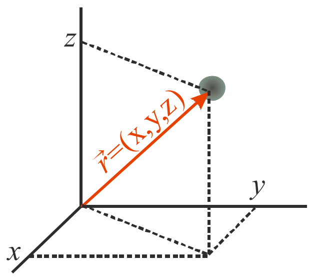
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -3 \\ -12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{\imath} + 24\,\vec{k} + 36\vec{\jmath} - 24\,\vec{k} + 12\vec{\imath} - 36\vec{\jmath}$$
$$= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, llavors els vectors són o paral·lels o antiparal·lels.

De fet, $\vec{v} = -2\vec{u}$, és a dir, són antiparal·lels.

Descripció del moviment

Vector posició i vector desplaçament

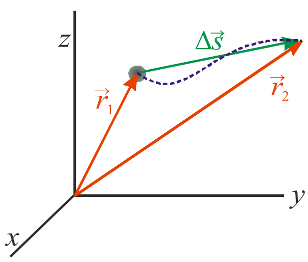


Per establir la posició d'una partícula puntual s'utilitza un vector. Les components del vector indiquen les coordenades segons els eixos.

$$\vec{r} = (x, y, z)\vec{r}$$

On $\vec{r}$ és el vector de posició.

Les unitats en sistema internacional són metres. Totes les components del vector tenen les mateixes unitats.



En un objecte en moviment, la posició depèn del temps, $\vec{r}(t)$. La trajectòria, $\vec{r}(t)$, és la corba descrita per l'objecte durant el seu moviment (corba discontínua de color blau del dibuix).

El desplaçament d'un objecte quan va del punt $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ al punt $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ és igual a:

$$\Delta\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

i correspon al vector indicat en color verd al gràfic. Les unitats del desplaçament en sistema internacional també són metres.

Finalment la distància entre dos punts, *d*, és igual al mòdul del vector desplaçament $\Delta\vec{s}$, és a dir, és igual a la longitud del vector desplaçament $\Delta\vec{s}$:

$$d = |\Delta\vec{s}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Les unitats de la distància també són metres. Noteu que la distància no és una magnitud vectorial sinó que és una magnitud escalar, i el seu valor sempre és positiu.

Exemple 5: Una mosca es desplaça des del punt $\vec{r}_1 = (2,1,3)$ m al punt $\vec{r}_2 = (1,0,2)$ m.
a) Calculeu el desplaçament i la distància recorreguda.
b) Calculeu el desplaçament i la distància recorreguda si ara la mosca torna exactament al punt de sortida.

Solució:

a) $\Delta\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (1-2, 0-1, 2-3)\ \text{m} = (-1,-1,-1)\ \text{m}$

$d = |\Delta\vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}\ \text{m} = \sqrt{3}\ \text{m} \approx 1{,}732\ \text{m}$

b) $\Delta\vec{s} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (2-1, 1-0, 3-2)\ \text{m} = (1,1,1)\ \text{m}$

$d = |\Delta\vec{s}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\ \text{m} = \sqrt{3}\ \text{m} \approx 1{,}732\ \text{m}$

Noteu el canvi de signe en les components quan el desplaçament es fa en el sentit oposat. Una component negativa vol dir que la partícula es mou enrere en aquella direcció; per exemple, si la component *x* és −1 vol dir que la partícula retrocedeix 1 m en la direcció de l'eix *x*. En canvi, la distància entre dos punts és la mateixa amb independència de si el trajecte és d'anada o de tornada.

Equació posició-temps

La trajectòria descrita per un objecte, l'equació posició-temps, es pot descriure amb una equació paramètrica, $\vec{r}(t)$, on la posició és una funció del paràmetre temps.

Exemple 6: El moviment d'un projectil és determinat per la següent equació posició-temps: $\vec{r}(t) = (10t, 20 + 15t - 5t^2, 0)$ m, on t és el temps en segons. Calculeu:
a) la posició quan *t*=0 s
b) la posició quan *t*=2 s
c) la posició quan *t*=4 s
d) quina distància ha recorregut entre els instants *t*=0 s i *t*=4 s

Solució:

a) $\vec{r}(0) = (10 \times 0, 20 + 15 \times 0 - 5 \times 0, 0)\ \text{m} = (0,20,0)\ \text{m}$

b) $\vec{r}(4) = (10 \times 2, 20 + 15 \times 2 - 5 \times 4, 0)\ \text{m} = (20,30,0)\ \text{m}$

c) $\vec{r}(4) = (10 \times 4, 20 + 15 \times 4 - 5 \times 16, 0)\ \text{m} = (40,0,0)\ \text{m}$

d) $\Delta\vec{s} = \vec{r}(4) - \vec{r}(0) = (40-0, 0-20, 0-0)\ \text{m} = (40,-20,0)\ \text{m}$

$d = |\Delta\vec{s}| = \sqrt{40^2 + (-20)^2 + 0^2}\ \text{m} = \sqrt{2000}\ \text{m} \approx 44{,}72\ \text{m}$

Velocitat vectorial mitjana

La velocitat vectorial mitjana, $\vec{v}_m$, és el quocient entre el desplaçament entre dos punts, $\Delta\vec{s}$, i l'interval de temps que triguem a passar del primer punt al segon, Δt:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

La velocitat vectorial mitjana és una magnitud vectorial perquè és el quocient entre una magnitud vectorial i una magnitud escalar.

Les unitats de la velocitat vectorial mitjana en el sistema internacional són metres/segon.

Exemple 7: El moviment d'un projectil és determinat per la següent equació posició-temps: $\vec{r}(t) = (10t, 20 + 15t - 5t^2, 0)$ m, on t és el temps en segons. Calculeu la velocitat vectorial mitjana entre els instants t=0 s i t = 4 s.

Solució:

De l'exemple anterior:

$$\Delta\vec{s} = \vec{r}(4) - \vec{r}(0) = (40 - 0, 0 - 20, 0 - 0)\ \mathrm{m} = (40, -20, 0)\ \mathrm{m}$$

i

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{(40, -20, 0)\ \mathrm{m}}{4 - 0} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = (10, -5{,}0)\mathrm{m/s}$$

Velocitat mitjana

La velocitat mitjana, v_m, és el quocient entre la distància entre dos punts, $d = |\Delta\vec{s}|$, i l'interval de temps que triguem a passar del primer punt al segon, Δt:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{t_2 - t_1}$$

La velocitat mitjana és una magnitud escalar perquè és el quocient entre dues magnituds escalars. Les unitats de la velocitat mitjana en el sistema internacional són metres/segon.

Exemple 8: El moviment d'un projectil és determinat per la següent equació posició-temps: $\vec{r}(t) = (10t, 20 + 15t - 5t^2, 0)$ m, on t és el temps en segons. Calculeu la velocitat mitjana entre els instants t = 0 s i t = 4 s.

Solució:

$$\Delta\vec{s} = \vec{r}(4) - \vec{r}(0) = (40 - 0, 0 - 20, 0 - 0)\ \mathrm{m} = (40, -20, 0)\ \mathrm{m}\ \text{i}$$

$$d = |\Delta\vec{s}| = \sqrt{40^2 + (-20)^2 + 0^2}\ \mathrm{m} = \sqrt{2000}\ \mathrm{m} \approx 44{,}72\ \mathrm{m}$$

$$v_m = \frac{d}{\ } = \frac{44{,}72\ \mathrm{m}}{\ } = 11{,}18\ \mathrm{m/s}$$

Exemple 9: Un cotxe triga una hora a recórrer els 100 km que separen Barcelona de Girona. Quina és la velocitat mitjana d'aquest cotxe?

Solució:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{100\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = 100\ \mathrm{km/h}$$

$$v_m = 100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} \times \frac{1\ \mathrm{h}}{60\ \mathrm{min}} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} = 27{,}8\ \mathrm{m/s}$$

Velocitat instantània

La velocitat instantània –o simplement velocitat– és la velocitat vectorial mitjana en el límit quan l'interval de temps, Δt, tendeix a zero:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

La velocitat instantània ens dona el ritme amb què un objecte canvia de posició en un instant donat. El concepte de derivada és justament el de determinar com canvia o varia un paràmetre en funció d'un altre; en aquest cas, com varia la posició en funció del temps.

Exemple 10: El moviment d'un projectil és determinat per la següent equació posició-temps: $\vec{r}(t) = (10t, 20 + 15t - 5t^2, 0)$ m, on t és el temps en segons. Calculeu:

a) la velocitat instantània quan $t = 0$ s
b) la velocitat instantània quan $t = 2$ s
c) la velocitat instantània quan $t = 4$ s

Solució:

La velocitat instantània és:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}10t, \frac{d}{dt}(20 + 15t - 5t^2), \frac{d}{dt}0\right)$$
$$= (10, 15 - 10t, 0)\ \mathrm{m/s}$$

a) $\vec{v}(0) = (10, 15 - 10 \times 0, 0)\ \mathrm{m/s} = (10, 15, 0)\ \mathrm{m/s}$
b) $\vec{v}(2) = (10, 15 - 10 \times 2, 0)\ \mathrm{m/s} = (10, -5, 0)\ \mathrm{m/s}$
c) $\vec{v}(4) = (10, 15 - 10 \times 4, 0)\ \mathrm{m/s} = (10, -25, 0)\ \mathrm{m/s}$

Exemple 11: Existeixen tres tipus de radars que fa servir Trànsit per determinar la velocitat d'un vehicle. Els de microones i els piezoelèctrics, que determinen la velocitat instantània d'un vehicle a partir de les ones que es reflecteixen en el cotxe (efecte Doppler) i del senyal mesurat per uns sensors situats sota la calçada. El tercer tipus són els de tram, que mesuren el temps que triga un vehicle a desplaçar-se entre dues posicions concretes on es fotografia el vehicle, és a dir, determinen la velocitat mitjana. Suposant que els radars funcionen perfectament, és possible excedir el límit de velocitat en el tram de detecció abraçat pels radars i no ser multat?

Solució:

Amb els radars de microones i piezoelèctrics no és possible, atès que mesuren la velocitat instantània. Per tant, si en un instant qualsevol superem el límit de velocitat el radar detectarà la infracció.

En canvi, amb els radars de tram podem excedir puntualment la velocitat límit. Si disminuïm la velocitat en el tram entre les dues fotografies, podem aconseguir que la velocitat mitjana sigui inferior al límit, i com que aquest radar només mesura la velocitat mitjana, llavors la infracció no queda registrada. La majoria de radars instal·lats a les nostres carreteres són radars de microones.

Acceleració vectorial mitjana

L'acceleració vectorial mitjana, $\vec{a}_m$, és el quocient entre la diferència de velocitat entre dos punts, $\Delta\vec{v}$, i l'interval de temps que triguem a passar del primer punt al segon, Δt:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

L'acceleració vectorial mitjana és una magnitud vectorial perquè és el quocient entre una magnitud vectorial i una magnitud escalar. Les unitats de l'acceleració vectorial mitjana en el sistema internacional són m/s^2.

<u>Exemple 12</u>: El moviment d'un projectil és determinat per la següent equació posició-temps: $\vec{r}(t) = (10t, 20 + 15t - 5t^2, 0)$ m, on t és el temps en segons. Calculeu l'acceleració vectorial mitjana entre els instants t = 0 s i t = 4 s.

Solució:

De l'exemple 10 sabem que la velocitat instantània és:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}10t, \frac{d}{dt}(20 + 15t - 5t^2), \frac{d}{dt}0\right) = (10, 15 - 10t, 0)\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}(0) = (10, 15 - 10 \times 0, 0)\ \mathrm{m/s} = (10, 15, 0)\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}(4) = (10, 15 - 10 \times 4, 0)\ \mathrm{m/s} = (10, -25, 0)\mathrm{m/s}$$

Per tant, l'acceleració vectorial mitjana serà:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(4) - \vec{v}(0)}{4 - 0} = \frac{(10, -25, 0)\ \mathrm{m/s} - (10, 15, 0)\ \mathrm{m/s}}{4s} = \\ = \frac{(0, -40, 0)\ \mathrm{m/s}}{4\ \mathrm{s}} = (0, -10, 0)\ \mathrm{m/s^2}$$

Acceleració mitjana

L'acceleració mitjana, a_m, és el quocient entre el mòdul de la diferència de la velocitat entre dos punts, Δv, i l'interval de temps que triguem a passar del primer punt al segon, Δt:

$$a_m = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{t_2 - t_1}$$

L'acceleració mitjana és una magnitud escalar perquè és el quocient entre dues magnituds escalars. Les unitats de l'acceleració mitjana en el sistema internacional són m/s^2.

<u>Exemple 13</u>: Un cotxe triga 5,7s a augmentar la seva velocitat de 0 a 100 km/h. Quina és l'acceleració mitjana?

Solució:

$$v_2 = 100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} \times \frac{1\ \mathrm{h}}{60\mathrm{min}} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} = 27,8\ \mathrm{m/s}$$

$$a_m = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{t_2 - t_1} = \frac{27,8\ \mathrm{m/s}}{5,7s} = 4,87\ \mathrm{m/s^2}$$

Exemple 14: El moviment d'un projectil és determinat per la següent equació posició-temps: $\vec{r}(t) = (10t{,}20 + 15t - 5t^2, 0)$ m, on t és el temps en segons. Calculeu l'acceleració mitjana entre els instants t = 0 s i t = 4 s.

Solució:

La velocitat instantània és:

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{s}}{dt} = \left(\dfrac{d}{dt}10t, \dfrac{d}{dt}(20 + 15t - 5t^2), \dfrac{d}{dt}0\right) = (10{,}15 - 10t, 0)\ \mathrm{m/s}$

$\vec{v}(0) = (10{,}15 - 10 \times 0{,}0)\mathrm{m/s} = (10{,}15{,}0)\ \mathrm{m/s}$

$\vec{v}(4) = (10{,}15 - 10 \times 4{,}0)\mathrm{m/s} = (10, -25{,}0)\ \mathrm{m/s}$

$\vec{v}(4) - \vec{v}(0) = (10, -25{,}0)\mathrm{m/s} - (10{,}15{,}0)\ \mathrm{m/s} = (0, -40{,}0)\ \mathrm{m/s}$

$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-40)^2 + 0^2} = 40\ \mathrm{m/s}.$

Per tant, l'acceleració mitjana serà:

$$a_m = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{40\ \mathrm{m/s}}{4\ \mathrm{s}} = 10\ \mathrm{m/s^2}$$

Acceleració instantània

L'acceleració instantània –o simplement acceleració– és l'acceleració vectorial mitjana en el límit quan l'interval de temps, Δt, tendeix a zero:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

L'acceleració instantània ens dona el ritme amb què un objecte canvia de velocitat en un instant donat.

Exemple 15: El moviment d'un projectil és determinat per la següent equació posició-temps: $\vec{r}(t) = (10t{,}20 + 15t - 5t^2, 0)$ m, on t és el temps en segons. Calculeu:

a) l'acceleració instantània quan t = 0 s
b) l'acceleració instantània quan t = 2 s
c) l'acceleració instantània quan t = 4 s

Solució:

La velocitat instantània és:

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}10t, \frac{d}{dt}(20 + 15t - 5t^2), \frac{d}{dt}0\right) =$

$= (10{,}15 - 10t, 0)\ \mathrm{m/s}$

Per tant, l'acceleració instantània és:

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}10, \frac{d}{dt}(15 - 10t), \frac{d}{dt}0\right) =$

$= (0, -10, 0)\ \mathrm{m/s^2}$

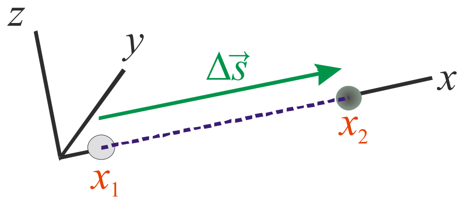
Com podeu comprovar, l'acceleració instantània és constant, és a dir, no depèn del temps:

$$\vec{a}(0) = \vec{a}(2) = \vec{a}(4) = (0, -10, 0)\ \mathrm{m/s^2}$$

En aquest exemple, com que l'acceleració instantània és constant, l'acceleració instantània i l'acceleració vectorial mitjana coincideixen.

Moviment rectilini

En el moviment rectilini la direcció es manté constant durant tot el trajecte. Aquest moviment és unidimensional. Per exemple, si fem coincidir l'eix de les abscisses (eix *x*) amb la direcció en què es desenvolupa el moviment, llavors només cal indicar la component *x* del vector posició per descriure completament el moviment:
$\vec{r}(t) = (x(t), 0{,}0)$ o simplement $x(t)$.



Llavors, el desplaçament d'un objecte quan va del punt $\vec{r}_1 = (x_1, 0{,}0)$ al punt $\vec{r}_2 = (x_2, 0{,}0)$ és igual a:

$$\Delta\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, 0{,}0)$$

o simplement $\Delta s_x = x_2 - x_1$.

Finalment la distància entre dos punts, *d*, és igual al mòdul del vector desplaçament:

$$d = |\Delta\vec{s}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2 + 0^2} = |x_2 - x_1|$$

Observeu la diferència entre la distància $d = |x_2 - x_1|$ i la component *x* del desplaçament, $\Delta s_x = x_2 - x_1$. Les dues magnituds tenen el mateix valor absolut i unitats (metres), ara bé, *la distància és sempre positiva* (noteu les barres verticals, que indiquen valor absolut) mentre que la component del desplaçament pot ser positiva (si avança) o negativa (si retrocedeix). *El signe de la component x* del desplaçament és resultat del seu origen vectorial, i *està associat al sentit del moviment*. Això és important de recordar-ho, atès que com que en el moviment unidimensional només s'utilitza una component, sovint ens oblidem del caràcter vectorial d'aquestes magnituds i això pot portar a interpretacions errònies del signe de la component *x* de la posició, del desplaçament, de la velocitat i de l'acceleració.

Exemple 16: La trajectòria d'un objecte és rectilínia i està descrita per la següent equació posició-temps: $x(t) = 5 + 10t - 5t^2$ m, on *t* és el temps en segons. Calculeu:

a) la posició quan *t* = 0 s
b) la posició quan *t* = 2 s
c) la posició quan *t* = 4 s
d) quin és el desplaçament i la distància recorreguda entre els instants *t* = 0 s i *t*= 4 s

Solució:

a) $x(0) = 5 + 10 \times 0 - 5 \times 0 \text{ m} = 5 \text{ m}$
b) $x(2) = 5 + 10 \times 2 - 5 \times 4 \text{ m} = 5 \text{ m}$
c) $x(4) = 5 + 10 \times 4 - 5 \times 16 \text{ m} = -35 \text{ m}$
d) $\Delta s_x = x(4) - x(0) = (-35 - 5) \text{ m} = -40 \text{ m}$
$d = |\Delta s_x| = |-40| \text{ m} = 40 \text{ m}$

Exemple 17: La trajectòria d'un objecte és rectilínia i està descrita per la següent equació posició-temps: $x(t) = 5 + 10t - 5t^2$ m, on *t* és el temps en segons. Calculeu la velocitat vectorial mitjana i la velocitat mitjana entre els instants *t*=0 s i *t*=4 s.

Solució:

De l'exemple anterior: $\Delta s_x = -40$ m

$$v_{m,x} = \frac{\Delta s_x}{\Delta t} = \frac{-40\text{ m}}{4 - 0s} = -10\text{ m/s}$$

Noteu el signe negatiu de la velocitat vectorial mitjana, que ens indica que l'objecte no avança sinó que retrocedeix. Aquest signe està associat a la seva naturalesa vectorial.

$$d = |\Delta s_x| = 40\text{ m}$$

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{40}{4 - 0\text{ s}} = 10\text{ m/s}$$

En canvi, la velocitat mitjana no és una magnitud vectorial, no té sentit, i està definida com a positiva.

Exemple 18: La trajectòria d'un objecte és rectilínia i està descrita per la següent equació posició-temps: $x(t) = 5 + 10t - 5t^2$ m, on *t* és el temps en segons. Calculeu:

a) la velocitat instantània quan *t* = 0 s
b) la velocitat instantània quan *t* = 2 s
c) la velocitat instantània quan *t* = 4 s

Solució:

La velocitat instantània és:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 10t - 5t^2) = (10 - 10t)\text{ m/s}$$

a) $v_x(0) = 10 - 10 \times 0\text{m/s} = 10\text{m/s}$

b) $v_x(2) = 10 - 10 \times 2\text{m/s} = -10\text{m/s}$

c) $v_x(4) = 10 - 10 \times 4\text{m/s} = -30\text{m/s}$

En canvi, la velocitat mitjana no és una magnitud vectorial, no té sentit, i està definida com a positiva.

Exemple 19: La trajectòria d'un objecte és rectilínia i està descrita per la següent equació posició-temps: $x(t) = 5 + 10t - 5t^2$ m, on *t* és el temps en segons. Calculeu:

a) l'acceleració instantània quan *t* = 0 s
b) l'acceleració instantània quan *t* = 2 s
c) l'acceleració instantània quan *t* = 4 s

Solució:

La velocitat instantània és:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 10t - 5t^2) = (10 - 10t)\text{ m/s}$$

L'acceleració instantània és:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(10 - 10t) = -10\text{ m/s}^2$$

Com podeu comprovar, l'acceleració instantània és constant:

$$a_x(0) = a_x(2) = a_x(4) = -10\text{ m/s}^2$$

En aquest darrer exemple, com que l'acceleració instantània és constant, l'acceleració instantània i l'acceleració vectorial mitjana coincideixen. Noteu també el signe negatiu de l'acceleració, que està associat a la naturalesa vectorial d'aquesta magnitud i que ens indica que l'objecte frena (es redueix la seva velocitat).

Moviment rectilini uniforme (MRU)

És el moviment en què un objecte manté una velocitat constant. És a dir, la velocitat és constant en direcció (trajectòria rectilínia), sentit i mòdul. Les equacions de posició, velocitat i acceleració són:

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$
$$v_x(t) = v_0$$
$$a_x(t) = 0$$

on x_0 i v_0 són respectivament la posició i la velocitat inicials ($x_0 = x(0)$i $v_0 = v_x(0)$). Noteu que, com que el moviment és rectilini, podem situar els eixos de manera que la direcció del moviment coincideix amb l'eix x, i d'aquesta manera el moviment queda completament descrit per les components en l'eix de les abscisses dels vectors posició, velocitat i acceleració. Per altra banda, com que la velocitat és constant i l'acceleració és la mesura del canvi de velocitat, llavors l'acceleració és nul·la.

Exemple 20: Quant de temps trigarà un ciclista a recórrer una distància de 40 km si descriu un moviment rectilini uniforme amb una velocitat de 28,8 km/h?

Solució:

En unitats del sistema internacional, la distància i la velocitat són:

$$d = 40 \text{ km} \times \frac{1000 \text{ m}}{1\text{km}} = 40.000 \text{ m}$$
$$v_0 = 28{,}8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 8 \text{ m/s}$$

Per altra banda, el desplaçament és:

$$\Delta s_x = x(t) - x_0 = x_0 + v_0 t - x_0 = v_0 t$$

I com que el desplaçament i la distància coincideixen en magnitud:

$$d = v_0 t \Rightarrow t = \frac{d}{v_0} = \frac{40.000 \text{ m}}{8\text{m/s}} = 5.000 \text{ s} = 1 \text{ h } 23 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Observeu que si coneixem l'equació de moviment, podem determinar l'expressió de la velocitat i l'acceleració instantànies a partir de les seves derivades, per al MRU: :

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$
$$v_x(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t) = v_0$$
$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} = 0$$

Per altra banda, si apliquem el teorema fonamental del càlcul integral que estableix que la integració és l'operació inversa a la derivada:

$$a_x(t) = 0$$
$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \Rightarrow v_x(t) = \int a_x(t)dt = \int 0dt = 0 + v(0) = v_0$$
$$v_x(t) = \frac{d}{dt} x(t) \Rightarrow x(t) = \int v_x(t)dt = \int v_0 dt = v_0 t + x(0) = v_0 t + x_0$$

Moviment rectilini uniformement accelerat (MRUA)

És el moviment en què un objecte descriu una trajectòria rectilínia amb acceleració constant. Si fem coincidir la direcció del moviment amb l'eix x, llavors les equacions de posició, velocitat i acceleració són:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\mathrm{at}^2$$
$$v_x(t) = v_0 + \mathrm{at}$$
$$a_x(t) = a$$

on x_0 i v_0 són respectivament la posició i la velocitat inicials ($x_0 = x(0)$i $v_0 = v_x(0)$).

Per altra banda, si de la segona equació aïllem el temps que cal per assolir una velocitat v_f: $t_f = (v_f - v_0)/a$ i el substituïm a la primera equació, obtenim:

$$\Delta s_x = x_f - x_0 = v_0 t_f + \frac{1}{2} a t_f^2 = t_f \left(v_0 + \frac{1}{2} a t_f\right) = \frac{v_f - v_0}{a}\frac{v_f + v_0}{2} = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$$

I si de l'equació anterior aïllem la velocitat obtenim:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2a\Delta s_x = 2a(x_f - x_0)$$

Com veurem més endavant, aquesta darrera expressió és especialment útil per determinar la velocitat si coneixem l'acceleració i el desplaçament.

Exemple 21: Llancem una pedra cap amunt amb una velocitat de 8 m/s des d'una alçada de 3 m sobre el nivell del terra.

a) Fins quina alçada màxima arribarà?

b) Amb quina velocitat arriba a terra?

Solució:

Els objectes que es mouen sota l'acció del seu pes pateixen una acceleració vertical i cap avall de g=9,81 m/s^2. En aquest cas, tot el moviment es desenvolupa en la direcció vertical, i com que l'acceleració és constant, es tracta d'un MRUA.
Com que el moviment es desenvolupa en la direcció vertical, farem coincidir l'eix y amb la direcció del moviment. A banda del fet que substituïm l'eix x per l'y, no hi ha cap altra diferència en el tractament del MRUA.

$$y_0 = 3m, v_0 = 8\mathrm{m/s} \mathrm{i}\ a = -9{,}81\ \mathrm{m/s}$$

Equacions de moviment:

$$y(t) = (3 + 8t - 4{,}9t^2)\ \mathrm{m}$$
$$v_y(t) = (8 - 9{,}81t)\ \mathrm{m/s}$$
$$a_y(t) = -9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$$

a) En el punt de màxima alçada la velocitat és nul·la:

$$v_y(t) = (8 - 9{,}81t)\ \mathrm{m/s} = 0 \Rightarrow t = \frac{8}{9{,}81} = 0{,}815\ \mathrm{s}$$

I l'alçada és:

$$y(t) = (3 + 8t - 4{,}9t^2)\ \mathrm{m} = 6{,}26\ \mathrm{m}$$

b) Arriba a terra quan $y = 0$

$$y(t) = (3 + 8t - 4{,}9t^2)\ \mathrm{m} = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 58{,}9}}{-9{,}81} = \begin{cases} -0{,}314\ \mathrm{s} \\ 1{,}94\ \mathrm{s} \end{cases}$$

Com que el temps és positiu, la solució correcta és t =1,94 s. I finalment:

$$v_y(t) = (8 - 9{,}81t)\ \mathrm{m/s} = -11{,}1\ \mathrm{m/s}$$

Exemple 22: La marca de la frenada que deixa un cotxe que circula a 120 km/h quan s'atura sobtadament té una longitud de 20 m. Suposant que descriu un moviment rectilini uniformement accelerat, quina és l'acceleració durant la frenada?

Solució:

La velocitat inicial és: $v_0 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 33,3\text{ m/s}$

La velocitat final és: $v_f = 0\text{ m/s}$

I el desplaçament: $\Delta s_x = 20\text{ m}$

Finalment podem obtenir l'acceleració de la següent relació:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2a\Delta s_x \Rightarrow a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2\Delta s_x} = -27,8\text{m/s}^2$$

El signe negatiu ens indica que la velocitat disminueix (frenada).

Observeu que si coneixem l'equació de moviment, podem determinar l'expressió de la velocitat i l'acceleració instantànies a partir de les seves derivades, per al MRUA:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right) = v_0 + at$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 + at) = a$$

I si apliquem el teorema fonamental del càlcul integral,

$$a_x(t) = a$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \Rightarrow v_x(t) = \int a_x(t)dt = \int a dt = at + v(0) = v_0 + at$$

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow x(t) = \int v_x(t)dt =$$

$$= \int (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + x(0) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Descomposició del moviment: tir parabòlic

Un moviment 3D es pot reduir a tres moviments 1D, i això simplifica molt les coses.

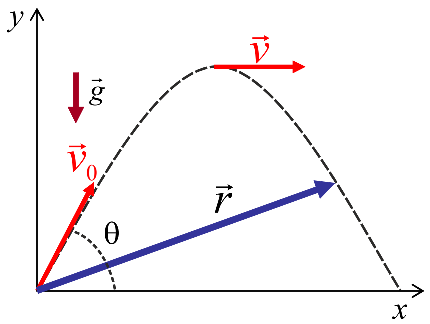
Per exemple un objecte que es mou per l'aire, si ignorem la resistència de l'aire, llavors només existeix l'acceleració deguda a la gravetat en la direcció vertical, de magnitud g = 9,81 m/s^2 i dirigida cap avall.

Així doncs, si l'objecte es llança amb una certa velocitat inicial $\vec{v}_0$, el moviment en la direcció vertical (direcció y) és un MRUA i el moviment en la direcció horitzontal (direcció x) és un MRU:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = v_0\cos\theta t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_y = v_{0y} + a_y t = v_0\sin\theta - gt \end{cases}$$

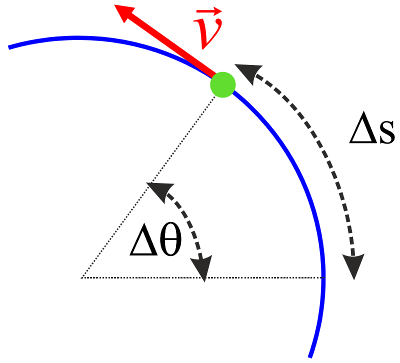
$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



Descripció del moviment circular

La distància recorreguda per una partícula que es desplaça sobre un cercle de radi r és igual a l'arc, que és el producte del radi per l'angle girat, en radians:

$$\Delta s = r\Delta\theta$$



Definició de velocitat angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{\mathrm{dt}}$$

unitats: rad/s

A partir de la velocitat angular podem determinar la velocitat lineal:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = \omega r$$

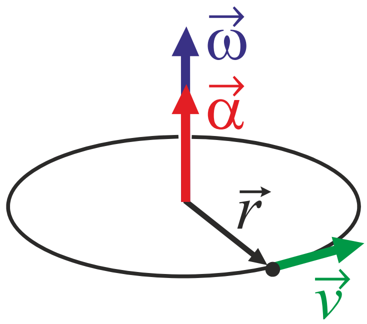
L'acceleració angular es defineix com

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

unitats rad/s^2

Definició de velocitat i acceleració angulars vectorials:

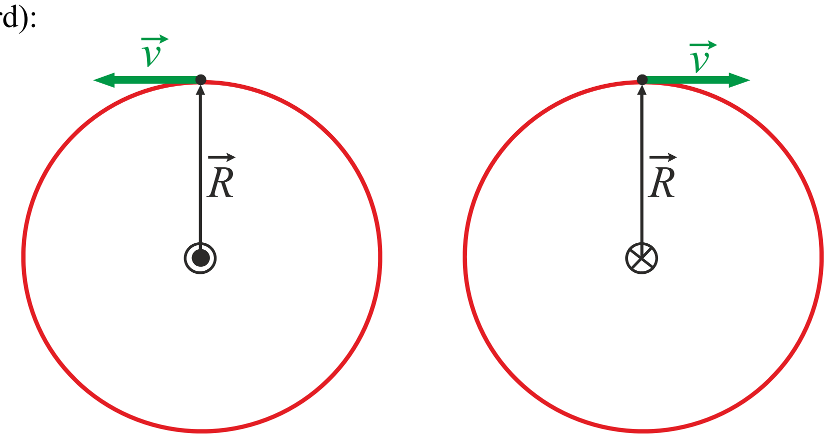
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$



La direcció és la de l'eix de gir; d'aquesta manera el producte vectorial dona com a resultat la velocitat lineal.

Per conveni, el sentit es defineix com a positiu si l'objecte gira en sentit antihorari; així es pot determinar a partir de la regla de la ma dretà: els dits han de seguir el sentit de gir i el polze indica el sentit de la velocitat angular.

Representació 2D en el pla de gir: si el vector velocitat angular surt cap enfora, veiem un punt (com si veiéssim arribar la punta d'una fletxa o un dard). Si el vector velocitat angular entra cap endins, veiem una creu (com si veiéssim allunyar-se la cua d'una fletxa o dard):



- *Moviment circular uniforme (MCU)*:

És un moviment en què la velocitat angular és constant:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \omega = \text{const.} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

Es defineix la freqüència *f* com el nombre de voltes que fa l'objecte en un segon:

$$f = \omega/2\pi \Leftrightarrow \omega = 2\pi f$$

Unitats: cicles/segon o Hz.

El temps que triga a fer una volta és el període *T*:

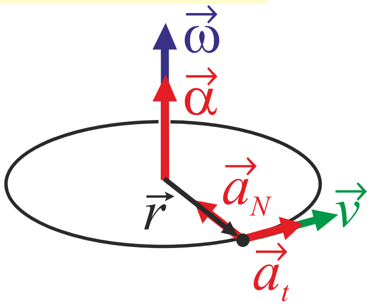
$$T = 1/f \Leftrightarrow \omega = 2\pi/T.$$

- *Moviment circular uniformement accelerat (MCUA)*:

$$\alpha = \text{const.} \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

En general, l'acceleració es pot descompondre en dues components, una de tangencial al moviment, l'acceleració tangencial angular, i una de perpendicular al moviment, l'acceleració centrípeta o normal:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_N$$



L'acceleració tangencial, $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$, és paral·lela a la velocitat i determina el canvi en el mòdul de la velocitat. Si el sentit és el mateix que el de la velocitat, llavors el mòdul de la velocitat augmenta; si té sentit oposat, llavors el mòdul de velocitat disminueix. El mòdul de l'acceleració tangencial és:

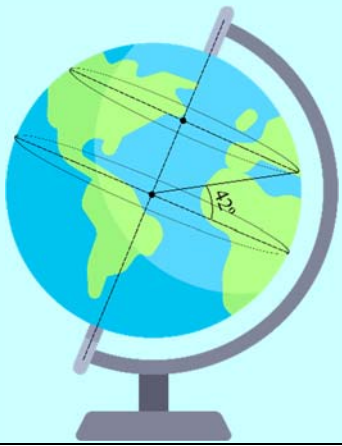
$$a_t = \alpha r = \frac{dv}{dt}$$

L'acceleració normal o radial, $\vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}$, és perpendicular a la velocitat i va dirigida cap al centre de la circumferència. Determina el canvi en la direcció de la velocitat. El mòdul de l'acceleració centrípeta és:

$$a_N = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Per exemple, l'acceleració centrípeta d'un rotor d'una aspiradora és de prop de 400 m/s^2, que és 40 vegades més gran que *g*.

<u>Exemple 23</u>: Sabent que la terra triga 23 hores, 56 minuts i 4 segons en donar una volta sencera al voltant del seu eix. Determina: *a)* la velocitat lineal a l'equador i *b)* a Girona. Dades, el radi de la terra és 6.371 km i Girona es troba a una latitud de 42º Nord.



Solució:

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164\ \text{s}} = 7{,}292 \times 10^{-5}\ \text{rad/s}$$
$$v = \omega R_T = 464\ \text{m/s} = 1670\ \text{km/h}$$

b)

$$R_{Gi} = R_T \cos 42° = 4{,}734 \times 10^6\ \text{m}$$
$$v = \omega R = 345\ \text{m/s} = 1240\ \text{km/h}$$

Exemple 24: Determina a l'equador i a la superfície de la terra les acceleracions normals associades a *(a)* la rotació de la terra sobre el seu eix (espín) i *(b)* al voltant del Sol (orbital). Dades: el període orbital és 365,256 dies i la distància mitja orbital és 149,60 milions de km.

Solució:

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164\ \mathrm{s}} = 7{,}292 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$$
$$a_N = \omega^2 R_T = 0{,}0339\ \mathrm{m^2/s}$$

b)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3{,}156 \times 10^7\ \mathrm{s}} = 1{,}99 \times 10^{-7}\ \mathrm{rad/s}$$
$$a_N = \omega^2 R_{Orb} = 5{,}93 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2/s}$$

Exemple 25: Un ciclista tarda 10 s a recórrer una pista circular de R=20 m de radi. El radi de les rodes de la bicicleta és r=0,5 m. Si es considera que tant el ciclista com les rodes giren a velocitat constant, es demana: *a)* la velocitat lineal i angular del ciclista, *b)* la velocitat lineal i angular de les rodes, *c)* el període i la freqüència de rotació de les rodes i *d)* l'acceleració normal o radial del ciclista.

Solució:

a)

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{t} = \frac{2\pi 20}{10} = 4\pi\ \mathrm{m/s}$$
$$v = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{4\pi}{20}\ \mathrm{rad/s} = \frac{\pi}{5}\ \mathrm{rad/s}$$

b)

$$v_{\text{ciclista}} = v_{\text{rodes}} \rightarrow v_{\text{rodes}} = 4\pi\ \mathrm{m/s}$$
$$v = \omega R \rightarrow \omega_{\text{rodes}} = \frac{v}{r} = \frac{4\pi}{0{,}5}\ \mathrm{rad/s} = 8\pi\ \mathrm{rad/s}$$

c)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{rodes}}} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}\ \mathrm{s}\ ;\ \ f = \frac{1}{T} = 4\ \mathrm{Hz}$$

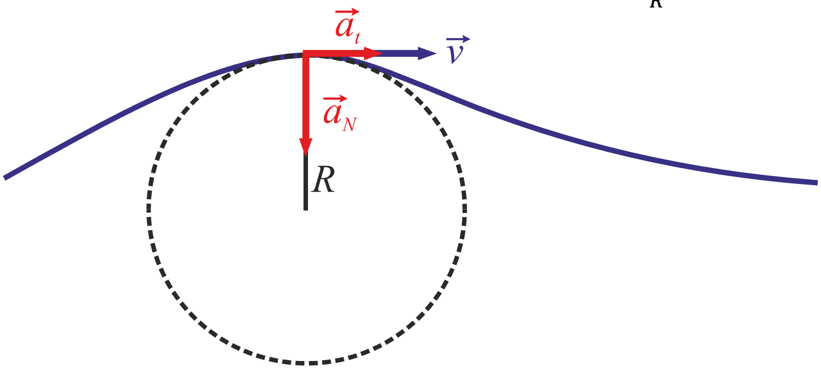
d)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \Rightarrow a_n = \frac{(4\pi)^2}{20}\ \mathrm{m/s^2}$$

Moviment qualsevol

En general, l'acceleració es descompon en dues components:

- Acceleració tangencial associada al canvi del mòdul de la velocitat: $a_t = \frac{dv}{dt}$
- Acceleració normal, associada al canvi de direcció: $a_N = \frac{v^2}{R}$



Si R és constant tenim una trajectòria circular, i si R=∞ tenim una trajectòria rectilínia.

Demostració alternativa de les dues components de l'acceleració:

Desglossem primer el moviment en dues components, normal i tangencial:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_v \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v + v\frac{d\vec{u}_v}{dt},$$

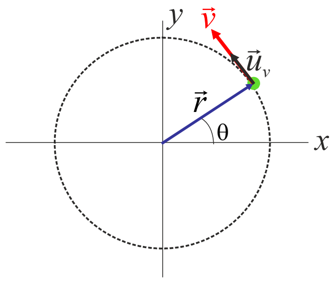
$\vec{u}_v$ és el vector unitari tangencial (en la direcció del vector velocitat, tangent a la circumferència). Els dos termes que surten de l'acceleració corresponen respectivament a la component tangencial ($\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v$), que correspon a la variació en el temps del mòdul de la velocitat, i l'acceleració normal ($\vec{a}_N = v\frac{d\vec{u}_v}{dt}$), que està relacionada amb el canvi de direcció de la velocitat.

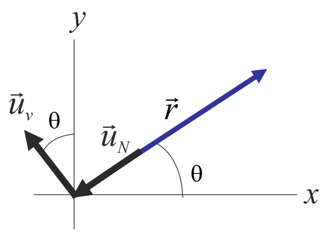
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v + v\frac{d\vec{u}_v}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_N$$

on $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v$.

Per calcular l'acceleració centrípeta, $\vec{a}_N$, expressem el vector $\vec{u}_v$ en coordenades polars r, θ, i posteriorment derivem:

$$\vec{u}_v = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$$





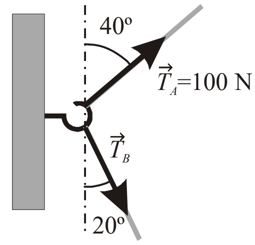
$$\frac{d\vec{u}_v}{dt} = -(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})\frac{d\theta}{dt} = -\omega\vec{u}_r$$

$$v\frac{d\vec{u}_v}{dt} = -\omega v\vec{u}_r = -\omega^2 r\vec{u}_r$$

$$\vec{a}_N = -\omega^2 r\vec{u}_r = \omega^2 r\vec{u}_N = \frac{v^2}{r}\vec{u}_N$$

Qüestions del tema 2

Càlcul vectorial



1. Els cables *A* i *B* de la figura exerceixen forces $\vec{T}_A$i $\vec{T}_B$. Quina ha de ser la tensió al cable *B* per tal que la força total exercida sigui perpendicular a la paret?

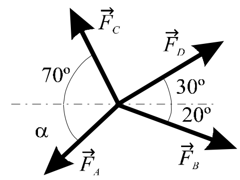
Sol.: T_B = 81,5 N

2. La força $\vec{F}_A$ té una magnitud de 400 N i forma un angle de 136,6º respecte l'eix *x*. Calculeu les components d'aquesta força.

Sol.: $\vec{F}_A = (-291\vec{\imath} + 275\vec{\jmath})$ N

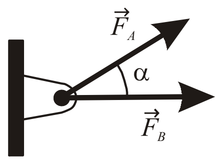
3. La força $\vec{F}_A$ té una magnitud de 200 N i forma un angle de 54,2º respecte, la força $\vec{F}_B$ té una magnitud de 160 N i forma un angle de −72,2º l'eix *x*. Calculeu $\vec{F}_A + 2\vec{F}_B$.

Sol.: $\vec{F}_A + 2\vec{F}_B = (-\,215\vec{\imath} + 142\vec{\jmath})$ N



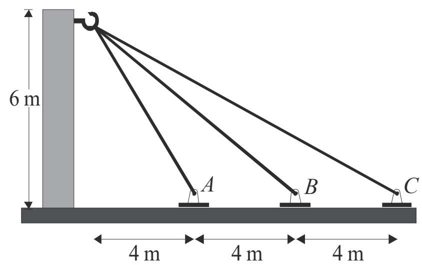
4. Les quatre forces concurrents que es mostren a la figura donen una suma vectorial nul·la. Si $|\vec{F}_B|$ = 800 N, $|\vec{F}_C|$ = 1.000 N i $|\vec{F}_D|$ = 900 N, quin és el valor de $|\vec{F}_A|$ i de l'angle α?

Sol.: $|\vec{F}_A|$ = 1.630 N, α = 43,2º



5. La magnitud de cadascuna de les forces de la figura és de 100 N. Se sap que el suport cedirà quan la magnitud de la força total exercida sobre seu sigui de 150 N. Per a quin interval de l'angle α resistirà.

Sol.: 82,8º <α<180º ó −180º <α<−82,8º.



6. Les tensions als cables són totes iguals. Si la magnitud de la força total exercida sobre la paret és de 200 kN, quina és la tensió dels cables?

Sol.: 68,9 kN

7. Considereu els vectors $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ i $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 3\vec{k}$. *a)* Determineu l'angle que formen els dos vectors. *b)* Calculeu quant hauria de valer la segona component del vector $\vec{v}$ per tal que els dos vectors fossin perpendiculars.

Sol.: *a)* 127,2º; *b)* v_y = 5

8. Considereu els vectors $\vec{u} = 8\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ i $\vec{v} = -2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$. Determineu el mòdul de $\vec{u}$, els angles θ_x, θ_y i θ_z que forma el vector $\vec{u}$ amb els eixos de coordenades, i el mòdul del vector $\vec{R} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Sol .: $|\vec{u}| = 10,8$; $\theta_x = 42,0°$, $\theta_y = 112°$, $\theta_z = 56,1°$; $|\vec{R}| = 28,7$.

9. Considereu els vectors $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ i $\vec{v} = 1\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Calculeu el seu producte vectorial i comenteu què ens indica el resultat.

Sol.: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$; els dos vectors són perpendiculars

10. Una força de 140 N s'aplica sobre una recta que va del punt A (200, 200, –100) mm al punt B (800, 500, –300) mm. La força apunta cap a B. Expresseu la força en components.

Sol.: $\vec{F} = \left(120\,\vec{\imath} + 60\vec{\jmath} - 40\vec{k}\right)$ N

11. Tenim el vector $\vec{F} = \left(3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$ N. Trobeu el mòdul de $\vec{F}$ i les components del vector unitari que té la mateixa direcció.

Sol.: $|\vec{F}| = 5,38$ N; $\vec{u} = 0,557\,\vec{\imath} - 0,743\,\vec{\jmath} - 0,371\,\vec{k}$

12. Els dos vectors $\vec{u} = u_x\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ i $\vec{v} = -2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$ són perpendiculars. Trobeu el valor de la component u_x.

Sol.: $u_x = -12$.

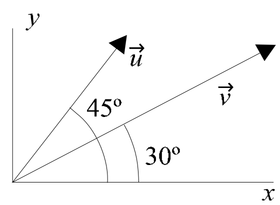
13. Determineu el producte vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$amb $\vec{u} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ i $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$.

Sol.: $5\vec{k}$.

14. Considereu els vectors $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$ i $\vec{v} = -6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$. Calculeu l'angle que formen. Calculeu el producte vectorial fent servir la relació amb components. Calculeu el mòdul del vector producte vectorial i calculeu aquest mòdul fent servir la relació $\vec{u} \times \vec{v} = u \cdot v \cdot \sin\theta$. Comproveu que els dos càlculs donen el mateix resultat.

Sol.: 157,2°; $\vec{u} \times \vec{v} = -4\vec{\imath} + 18\,\vec{\jmath} - 16\,\vec{k}$; $|\vec{u} \times \vec{v}| = 24,4$.

15. Els vectors de la figura tenen mòduls $|\vec{u}| = 10$ i $|\vec{v}| = 20$. Determineu $\vec{u} \times \vec{v}$ i $\vec{v} \times \vec{u}$ usant tant la regla del determinant com la definició del producte vectorial.



Sol.: $\vec{u} \times \vec{v} = -51,8\vec{k}$,$\vec{v} \times \vec{u} = 51,8\vec{k}$.

Equacions del moviment

16. Una pedra és llançada verticalment cap amunt des del teulat d'un edifici amb una velocitat de 20 m/s. L'edifici té una altura de 50 m. Utilitzeu t=0 com l'instant del llançament. Trobeu: *a)* temps necessari per assolir l'altura màxima, *b)* altura màxima, *c)* temps necessari per tal que la pedra retorni a l'altura de llançament, *d)* velocitat de la pedra en aquest instant i *e)* velocitat i posició de la pedra a l'instant t=5 s.

Sol.: *a)* 2,04 s; *b)* 70,4m; *c)* 4,08 s; *d)* –20 m/s; *e)* –29 m/s i 27,4 m.

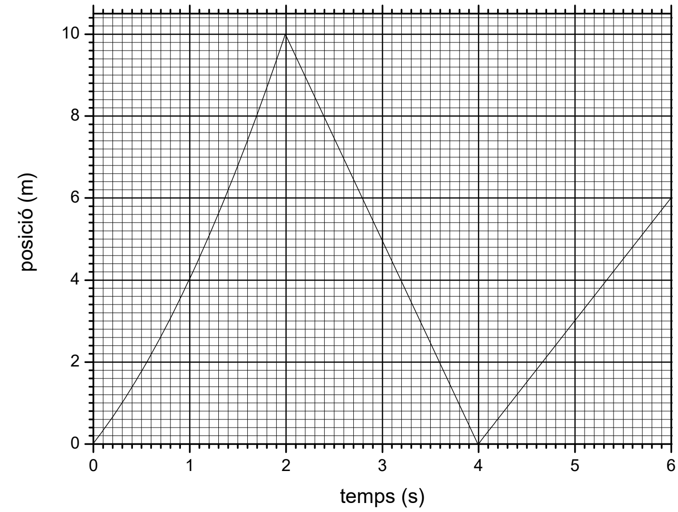
17. L'acceleració de fregament d'una bola dins un fluid té la forma $a = -3v^2$ (en unitats del SI). Si la bola entra en el fluid amb una velocitat de 1,5 m/s, quin serà el temps necessari per tal que la velocitat inicial de la bola es redueixi a la meitat? Nota: integreu l'equació $a = dv/dt$.

Sol.: 0,222 s

18. A partir de la gràfica, en què s'indica la posició d'un objecte en funció del temps, determineu:

a) la velocitat mitjana entre els instants t = 0 i t = 2 s,
b) la velocitat mitjana entre els instants t = 0 i t = 4 s,
c) en quin interval de temps la velocitat és negativa,
d) la velocitat mitjana entre els instants t = 4 i t = 6 s,
e) la velocitat a l'instant t = 5 s.

Sol.: *a)* 5 m/s; *b)* 0 m/s; *c)* entre els segons 2 i 4; *d)* 3 m/s; *e)* 3 m/s



19. Un objecte descriu un moviment rectilini que obeeix la relació $x(t) = t^3 - 2t^2 + 4t + 3$, en unitats del sistema internacional, determina: *(a)* la velocitat mitjana en el interval de temps entre 1 s i 3 s, *(b)* l'acceleració mitjana en el interval de temps entre 1 s i 3 s, i *(c)* l'acceleració als instants de temps 1 s i 3 s.

Sol.: *a)* 9,0 m/s; *b)* 8,0 m/s^2; *c)* 2,0 m/s^2 i 14,0 m/s^2.

20. La velocitat d'una bala a partir de la percussió dins el canó d'un rifle ve donada per $v = -5 \times 10^7 t^2 + 3 \times 10^5 t$ on v és en m/s i t en s. Sabent que en el moment en que la bala surt del canó l'acceleració és zero, determina: *(a)* la posició i l'acceleració de la bala dins el canó en funció del temps, *(b)* el temps que la bala és dins el canó, *(c)* la velocitat amb la que la bala surt del canó, i *(d)* la longitud del canó.

Sol.: a) $a = -1 \times 10^8 t + 3 \times 10^5$ (t en s, a en m/s2), $x = -\frac{5}{3} \times 10^7 t^3 + \frac{3}{2} \times 10^5 t^2$ (t en s, x en m); b) 3 10^{-3} s = 3 ms, c) 450 m/s; d) 0,9 m.

21. L'avantatge dels frens magnètics respecte els de fricció és que requereixen menys manteniment. Aquest frens generen una acceleració de frenada proporcional a la velocitat, $a = -Cv$, on C és una constant, $C = 0{,}9\ s^{-1}$. *(a)* Demostra que la velocitat varia com $v = v_0 e^{-Ct}$ on v_0 és la velocitat inicial. (b) Quin temps triga la velocitat a reduir-se a la meitat?
Sabent que els frens de fricció aconsegueixen una acceleració de frenada constant, *(c)* quin fre és més eficient a altes velocitats, el de fricció o el magnètic?

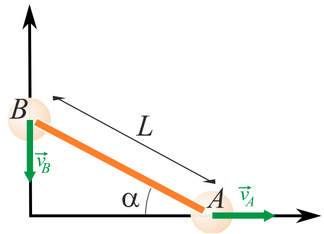
Sol.: *b)* 0,77 s; *c)* el magnètic.

Descomposició del moviment

22. A l'instant $t = 0$ es dispara verticalment una pilota des d'un carro que es mou horitzontalment a una velocitat constant de 1,5 m/s. Si la velocitat amb què surt la pilota del carro és 3,0 m/s:
a) Quina és la velocitat inicial ($t = 0$) de la pilota vista per un observador exterior?
b) Escriviu l'equació de la posició i la velocitat en funció del temps.
Agafeu com a origen de coordenades la posició del carro quan $t = 0$.

Sol.: *a)* $\vec{v}_0 = 1{,}5\vec{\imath} + 3{,}0\vec{\jmath}\ \mathrm{m/s}$; *b)* $x = 1{,}5t$, $y = 3t - 4.9t^2$, $v_x = 1{,}5$ i $v_y = 3{,}0 - 9{,}8t$ (t en s, x i y en m i v_x i v_y en m/s).

23. La bola A de la figura està limitada a lliscar per l'eix x i la bola B per l'eix y. Totes dues estan lligades per una barra de longitud constant $L = 20$ cm. Coneguda la velocitat de la bola A, $\vec{v}_A = (3\,,0)$ m/s, i l'angle α = 30º, determina la component y de la velocitat de la bola B.



Sol.: 5,196 m/s.

24. Donat el vector de posició $\vec{r} = (4t^2 - 3t + 5)\vec{\imath} + 8t^2 j$, en unitats del sistema internacional, determineu: *a)* les components i el mòdul de la velocitat instantània quan el temps és 5 segons; *b)* les components i el mòdul de l'acceleració al mateix instant.

Sol.: *a))* $(37\,\vec{\imath} + 80\,\vec{\jmath})\ \mathrm{m/s}$, 88,14 m/s; *b)* $(8\vec{\imath} + 16\,\vec{\jmath})\mathrm{m/s^2}$, 17,89 m/s^2.

Tir parabòlic

25. Una puça salta 0,1 m en un salt vertical. *a)* Quina és la seva velocitat inicial? *b*) Si ha assolit aquesta velocitat mitjançant l'extensió de les potes una distància de 0,0008 m, quina ha estat la seva acceleració inicial? *c*) La distància d'acceleració de l'home és de 0,5 m. Si un home saltés amb la mateixa acceleració que la puça, a quina altura arribaria?

Sol.: *a)* 1,4 m/s; *b)* 1.225 m/s^2; *c)* 62,5 m

26. Llancem una pilota amb el peu a una velocitat de 25 m/s i un angle de 30°. Quant triga a arribar al punt de màxima altura i quina és aquesta posició en aquest instant?

Sol.: 1,28 s; $(27{,}6\,\vec{\imath} + 7{,}97\vec{\jmath})$ m.

27. Quina és la velocitat a la qual surt una llagosta si l'angle del seu salt és 55° i el seu abast és 0,8 m?

Sol.: 2,9 m/s

28. Un avió de rescat a Alaska deixa caure un paquet de provisions a un grup d'exploradors extraviats. Si l'avió viatja horitzontalment a 40 m/s i a una altura de 100 m sobre el terra, on cau el paquet en relació amb el punt on s'ha deixat anar?

Sol.: 181 m

29. Un estudiant de la UdG viatja sobre la plataforma d'un tren que es desplaça en MRU a una velocitat de 10 m/s. L'estudiant llança una pilota enlaire amb un angle inicial de 60º respecte a l'horitzontal. El seu professor, que es troba aturat a l'estació, observa que la pilota puja verticalment (sense moviment horitzontal). A quina altura trobarà l'estudiant que ha pujat la pilota?

Sol.: 15,3 m

Moviment circular

30. Amb quina velocitat angular gira la Terra sobre el seu eix?

Sol.: $7{,}27 \cdot 10^{-5}$ rad/s

31. Un motor assoleix una velocitat angular de 3000 rpm partint del repòs i després de realitzar 5 voltes complertes. Suposant que es tracta d'un MCUA, determina: *(a)* l'acceleració angular, *(b)* l'acceleració normal en un punt situat a 30 cm de l'eix de rotació, *(c)* l'acceleració tangencial en un punt situat a 30 cm de l'eix de rotació i *(d)* el mòdul de l'acceleració en un punt situat a 30 cm de l'eix de rotació.

Sol.: *a)* 1570 rad/s^2; *b)* 29.600 m/s^2; *c)* 471 m/s^2; *d)* 29.600 m/s^2.

32. Una pedra de massa 200 g es lliga a l'extrem d'una corda d'un metre de llargada i es fa girar en un pla vertical. Calculeu *a)* la velocitat mínima en el punt més alt perquè pugui descriure una trajectòria circular completa. *b)* Si la velocitat al punt més alt és el doble de la velocitat mínima, calculeu la tensió de la corda als punts més alt i més baix de la trajectòria. *c)* Quina trajectòria descriurà la pedra si la corda es trenca al punt més alt?

Sol.: *a)* 3,13 m/s; *b)* 5,89 N, 9,81 N; *c)* parabòlica

33. La informació, en un CD de música, està enregistrada en una pista que segueix una trajectòria espiral que pot arribar a tenir una longitud de 5,4 km. La lectura de la informació continguda es fa a partir de la llum provinent d'un làser que es reflecteix a la superfície del disc. El làser es mou de forma radial des del principi de la pista, que es troba a uns 2,3 cm del centre, fins al final, a uns 5,9 cm del centre. Per tal que la lectura estigui sincronitzada, la velocitat lineal en el punt on incideix el feix làser ha de ser de 1,2 m/s. Determineu la velocitat angular al principi i al final del disc.

Sol.: 52 rad/s i 20 rad/s.

34. A la pel·lícula 2001: una odissea de l'espai es pot observar com el període de gir de la estació espacial és d'uns 60 s. Quin ha de ser el radi de l'estació espacial per tal d'obtenir una gravetat artificial igual a g als anells?

Estació espacial

astronauta corrent a l'anell exterior gràcies a la gravetat artificial.

Sol.: 894 m.

35. Si suposem que la Terra descriu una òrbita circular al voltant del Sol, quin és el període del moviment circular? I la seva velocitat angular?

Sol.: 365 dies, 2,0 10^{-7} rad/s

36. Un tocadiscos gira a una velocitat angular constant de 33,33 rev/min (rpm). Si quan es desconnecta triga 26 segons a aturar-se completament, quina és la seva acceleració angular, suposant que és constant?

Sol.: –0,134 rad/s^2

37. Una centrifugadora de 12 cm de radi que està inicialment en repòs accelera uniformement durant 20 s. En aquest interval de temps la seva acceleració angular és 100 rad/s^2 i després manté la velocitat adquirida. *a)* Amb quina velocitat gira la centrifugadora quan fa 20 s que funciona? *b)* Quantes voltes ha fet la centrifugadora després de funcionar 50 s? *c)* Calcula l'acceleració tangencial i normal que, com a màxim, tenen els objectes a l'interior de la centrifugadora quan aquesta fa un minut que gira.

Sol.: *a)* 2000 rad/s; *b)* 12730; *c)* 12 m/s^2 i $4{,}8\cdot10^5$ m/s^2

3. Dinàmica de la partícula

Objectius

Concepte de força
Descripció de les tres lleis de Newton
Concepte de la quantitat de moviment
Concepte d'impuls i força mitjana
Concepte de forces internes
Forces de fricció
Descripció de la dinàmica de rotació
Concepte de moment de forces
Concepte de moment angular

Forces a la natura

Què és una força? És la causa del moviment.

$$\text{Tipus de força}\begin{cases}\text{de contacte}\\ \text{a distància}\end{cases}$$

Les forces a distància actuen sense que hi hagi contacte entre els cossos. Les forces a distància són d'origen fonamental:

- Gravitatòries:

$F = G\frac{Mm}{r^2}$, a la superfície de la Terra: $F \approx G\frac{M_T}{R_T^2}m = mg, g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

- Elèctriques: associades a la càrrega elèctrica.
- Nuclears fortes: mantenen el nucli atòmic unit contra la repulsió elèctrica.
- Nuclears febles: origen de la radioactivitat i de la desintegració dels nuclis radioactius.

Les forces de contacte són les forces que apareixen quan hi ha contacte entre objectes sòlids. Al nivell microscòpic, estan relacionades amb els enllaços moleculars (forces de fricció) i les repulsions elèctriques (reaccions).

Lleis de Newton

Les tres lleis de Newton donen una descripció completa de la mecànica de partícules[1] en el marc de la física clàssica.

Primera llei de Newton

Tot cos roman en el seu estat de repòs o moviment rectilini uniforme (MRU) si la força resultant aplicada sobre seu és nul·la.

[1] Quan parlem de partícula o objecte puntual s'entén que les dimensions de l'objecte són suficientment petites per poder negligir el moviment de rotació. No obstant això, les lleis de Newton es poden aplicar a qualsevol objecte, petit o gran; en aquest cas l'aproximació de partícula o objecte puntual simplement suposa que negligim la rotació de l'objecte, és a dir, que les lleis de Newton permetran descriure només el moviment de translació.

La força resultant o neta és la suma vectorial de totes les forces aplicades sobre un objecte:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \left(\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z\right)$$

Llavors, si $\vec{F}_R = \vec{0} = (0,0,0) \Leftrightarrow \sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \text{ repòs} \\ \text{o} \\ \vec{v} = \text{constant (MRU)} \end{cases}$

Noteu que en el MRU la velocitat és constant en mòdul, sentit i direcció.

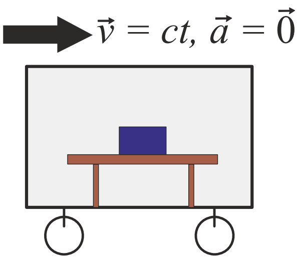
La dificultat d'observar aquesta llei està en les forces de fricció. No obstant això, un dels principals perills dels astronautes quan maniobren a l'espai exterior és que es puguin allunyar irremeiablement de la nau en un MRU a causa de la manca de forces de fricció.

Nova magnitud de caire vectorial, *quantitat de moviment*:
$\vec{p} \equiv m\vec{v}$ unitat: kg·m/s

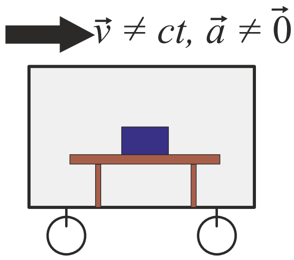
Primera llei de Newton, conservació de la quantitat de moviment:

$$\vec{F}_R = \vec{0} = (0,0,0) \Leftrightarrow \vec{p} = m\vec{v} = \text{constant}$$

El concepte de repòs o MRU depèn del sistema de referència:



Sistema de referència inercial (SRI),
lleis de Newton vàlides.



Sistema de referència no inercial (SRNI),
lleis de Newton no vàlides.
Forces i acceleracions fictícies

Recordeu que els sistemes que descriuen rotacions estan accelerats.

La Terra és un sistema de referència inercial?

Segons l'exemple 24 del tema 2, l'acceleració de la rotació de spin de la Terra a l'equador és 0,034 m/s^2 (rotació al voltant de l'eix de la Terra) i l'acceleració de la rotació orbital de la Terra: 5,9·10^{-3} m/s^2 (rotació al voltant del Sol).

Totes dues són molt més petites que *g*, per tant, en moltes situacions pràctiques la terra es pot aproximar a uns sistema de referència inercial.

Segona llei de Newton

L'acceleració que experimenta un cos sotmès a una força neta és proporcional a la força, i la constant de proporcionalitat és la massa:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R = m\vec{a}$$

$\vec{F}_R$ és la força neta o resultant i és la suma vectorial de totes les forces aplicades sobre la partícula. Conseqüències:

1) $\vec{a}$ i $\vec{F}_R$ són magnituds vectorials.

2) Definició de *massa inercial*: resistència o oposició al canvi, tant a ser accelerat com a ser frenat.
si $m' = 2m \Rightarrow a' = \frac{a}{2}$
Inèrcia: tendència a quedar-se en el mateix estat de moviment.

3) Si $\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{constant}$, és a dir, recuperem la primera llei.

4) Només és vàlida per a SRI.

Unitats de força: N, newton (SI); kp, quilopond (MKS) i dina (CGS).

$$1\text{ N} = 1\text{ kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\frac{1.000\ g}{1\text{ kg}}\cdot\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}} = 100.000\text{ dines} = 10^5\text{ dines}$$

La segona llei ens permet establir com varia la quantitat de moviment. Si derivem l'expressió anterior respecte al temps obtenim:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_R$$

Per tant, podem enunciar la segona llei de Newton com:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$$

és a dir, els canvis en la quantitat de moviment són provocats per la força resultant. Podem entendre la quantitat de moviment com la dificultat per aturar el moviment d'una partícula.
I la primera llei de Newton esdevé:
Si $\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}$ és constant, principi de conservació de la quantitat de moviment.

<u>Exemple 1</u>: Una bala de massa $1{,}8\cdot10^{-3}$ kg té una velocitat de 500 m/s quan xoca amb un bloc fix de fusta, i s'atura després de travessar-ne 6 cm. Suposant constant la desacceleració de la bala, determineu la força exercida per la fusta sobre la bala.

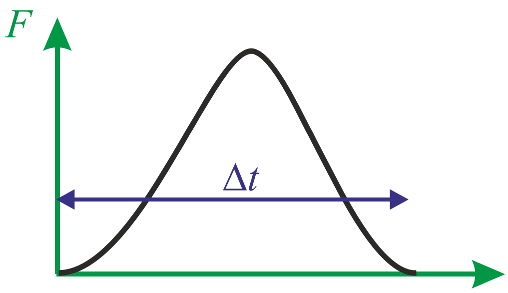
$$v_f^2 - v_0^2 = 2a\Delta s \Rightarrow a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2\Delta s} = \frac{-500^2}{2\cdot 0{,}06}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{m}} = -2{,}08\ 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_x = m\cdot a_x = -1{,}8\cdot 10^{-3}\ \cdot 2{,}08\cdot 10^6\,\text{kg}\frac{m}{s^2} = -3750\ N\ \Rightarrow \vec{F} = -3750\text{ N}\ \vec{\imath}$$

$$F = 3750\text{ N}$$

Impuls

Amb forces variables que actuen durant un interval de temps, per exemple en col·lisions o quan xutem una pilota, és difícil avaluar F, i el que fem és mesurar l'impuls:



$$d\vec{p} = \vec{F}_R dt$$

$$\boxed{\vec{I} \equiv \int \vec{F}_R \mathrm{dt} = \Delta\vec{p}}$$

Unitats: N·s

Això ens permet fer una estimació de la força i de l'acceleració mitjana

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}, \vec{a}_m = \frac{\vec{F}_m}{m}$$

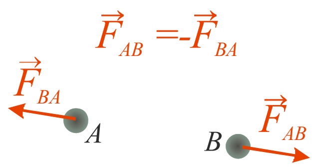
<u>Exemple 2</u>: Quan xutem una pilota, passa d'estar aturada a adquirir una velocitat de 5 m/s. Si l'estona que ha durat el contacte entre el peu i la pilota ha estat 2 ms i la massa de la pilota és de 250 g, calculeu la força i l'acceleració mitjanes a què ha estat sotmesa la pilota durant el xut.

$$I = \int F dt = \Delta p = m v_f = 1{,}25\ \mathrm{kg\ m/s}$$

$$F_m = \frac{I}{\Delta t} = 625\ \mathrm{N}$$

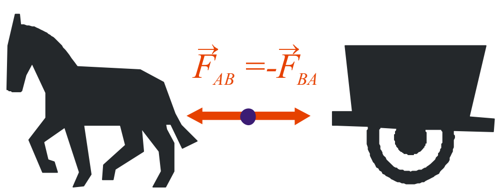
$$a_m = \frac{F_m}{m} = 2500\ \mathrm{m/s^2}$$

Tercera llei de Newton (altrament coneguda com el principi d'acció i reacció)
Si un cos B exerceix una força sobre un cos A, llavors el cos A exerceix una força sobre B igual però de sentit oposat.



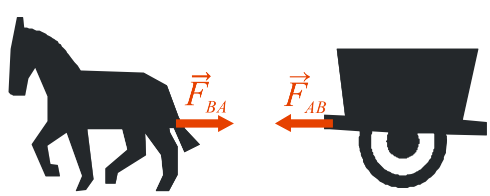
Important: Els punts d'aplicació són diferents i per tant no s'anul·len. Un objecte només rep les forces que s'apliquen a sobre seu. Si el punt d'aplicació fos el mateix el moviment seria impossible:

Si el punt d'aplicació és el mateix,
la força resultant és nul·la



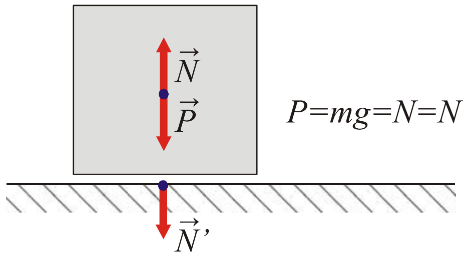
El moviment és impossible!!!!

Punts d'aplicació diferents

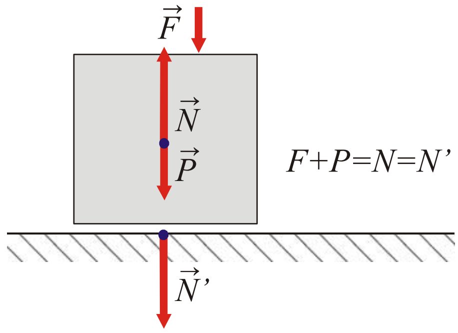


Es mou!!

Reaccions degudes al contacte entre superfícies:



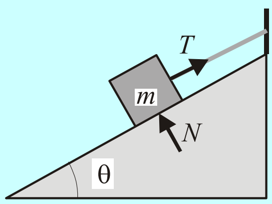
P=mg=N=N'



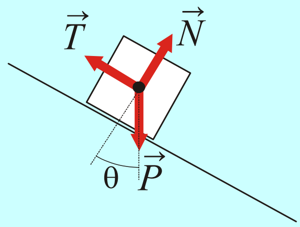
F+P=N=N'

No sempre es compleix que $N = P$.

<u>Exemple 3</u>: Una caixa es manté en una posició determinada sobre un pla inclinat sense fricció gràcies a un cable. *a)* Si θ= 60º i m = 50 kg, calculeu la tensió en el cable i la força normal exercida pel pla inclinat. *b)* Trobeu la tensió com a funció de θ i m, i comproveu el resultat per a θ= 0º i θ= 90º.



a)



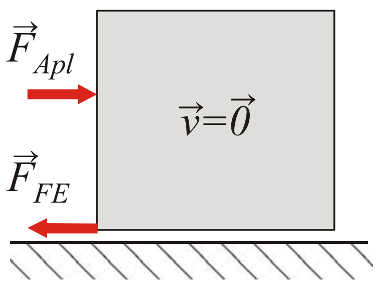
$$T = mgsin\theta = 425\ N$$
$$N = mgcos\theta = 245\ N$$

b) $T = mgsin\theta, si\ \theta = 0° \Rightarrow T = 0\ i\ si\ \theta = 90° \Rightarrow T = mg$

Forces de fricció

Forces de contacte.
S'oposen al moviment.
Són de dos tipus: estàtiques i dinàmiques.

Estàtica: intenta mantenir l'objecte en repòs; el moviment relatiu respecte a la superfície de contacte és nul:

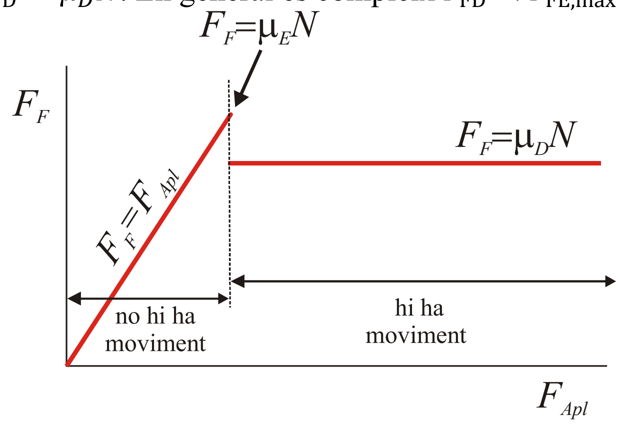


$$\vec{F}_{F,E} = -\vec{F}_{Apl}$$

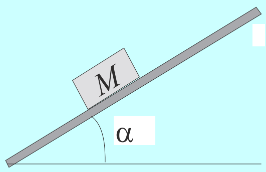
- La magnitud de la força de fricció és igual a la component horitzontal de la força aplicada sobre l'objecte.
- La direcció és paral·lela a la superfície de contacte.
- El sentit és oposat a la força aplicada.
- Valor màxim: $F_{\text{FE,màx}} = \mu_E N$

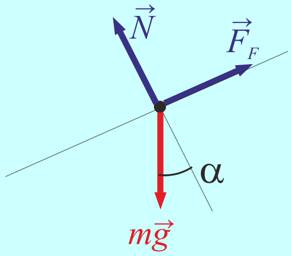
μ_E és el coeficient de fricció estàtic; és un paràmetre adimensional que depèn de les característiques de les dues superfícies en contacte.

Quan $F_{\text{Apl}} > F_{\text{FE}}$, l'objecte es posarà en moviment i començarà a actuar la força de fricció dinàmica: $F_{\text{FD}} = \mu_D N$. En general es compleix $F_{\text{FD}} < F_{\text{FE,màx}} \Leftrightarrow \mu_D < \mu_E$



<u>Exemple 4</u>: El bloc M de la figura té una massa de 0,5 kg, i els coeficients de fricció estàtic i dinàmic del pla inclinat són 0,25 i 0,18 respectivament. *a)* Quins són els valors de l'acceleració i de la força de fricció si α=30º? *b)* Quins són els valors de l'acceleració i de la força de fricció si α=10º?





a)
$$N = mg\cos\alpha = 4{,}25 \text{ N}$$
$$F_{FE,max} = \mu_E N = 1{,}06 \text{ N} < mg\sin\alpha = 2{,}45 \text{ N}$$

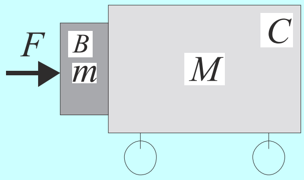
$$F_F = F_{\text{FD}} = \mu_D N = 0{,}765 \text{ N}$$
$$a = \frac{mg\sin\alpha - F_{\text{FD}}}{m} = 3{,}37 \text{ m/s}^2$$

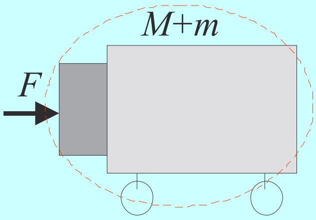
b)
$$N = mg\cos\alpha = 4{,}83 \text{ N}$$
$$F_{\text{FE,max}} = \mu_E N = 1{,}21\ N > mg\sin\alpha = 0{,}852 \text{ N}$$
$$F_F = mg\sin\alpha = 0{,}852 \text{ N}$$
$$a = 0 \text{ m/s}^2$$

Problemes de dos o més cossos: forces internes

Forces internes: forces de contacte entre objectes. Segons la tercera llei de Newton, són iguals i oposades: s'anul·len dos a dos quan considerem el sistema com un tot.

Exemple 5: Determineu l'expressió del valor mínim que pot assolir la força horitzontal F de manera que el bloc B no llisqui cap avall. La massa del carro (bloc C) és M, la massa del bloc B és m i el coeficient de fricció estàtica entre els blocs és μ_E.



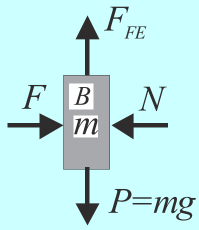


Tot el sistema:

$$F = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F}{M+m}$$

Bloc B (cas límit):

$$F_{\text{FE,màx}} = \mu_E N$$



$$\left.\begin{aligned} F - N &= ma \\ F_{\text{FE,màx}} = \mu_E N &= mg \end{aligned}\right\} F - \frac{mg}{\mu_E} = ma = \frac{mF}{M+m} \Rightarrow$$

$$F\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \frac{mg}{\mu_E} \Rightarrow F\left(\frac{M}{M+m}\right) = \frac{mg}{\mu_E} \Rightarrow$$

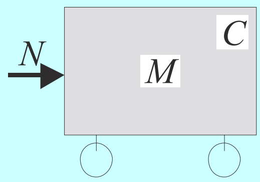
$$F = \frac{mg}{\mu_E}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$F_{FE,\text{màx}} = \mu_E N = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\mu_E}$$

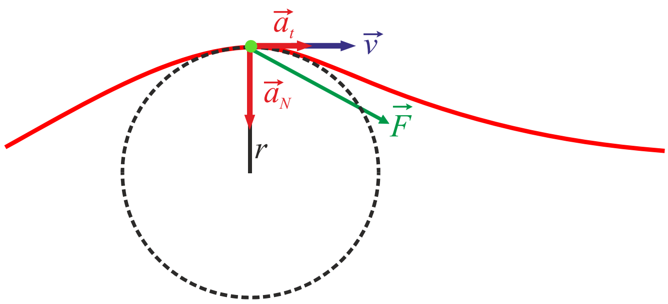
Què passa amb el bloc C?

$$\left.\begin{aligned} N &= Ma = M\frac{F}{M+m} \\ F_{FE,\text{màx}} = \mu_E N = mg \Rightarrow N &= \frac{mg}{\mu_E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F\frac{M}{M+m} = \frac{mg}{\mu_E} \Rightarrow$$

$$F = \frac{mg}{\mu_E}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$



Dinàmica de rotació



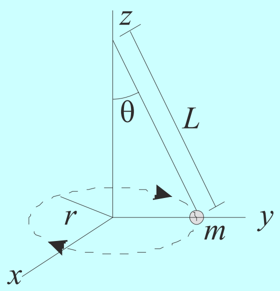
Quan sobre un objecte actua una força paral·lela a la velocitat, la partícula descriu una trajectòria rectilínia. En canvi, si sobre un objecte actua una força que no és paral·lela a la velocitat, llavors la component normal a la trajectòria provocarà un canvi en la direcció, mentre que la component tangencial provocarà un canvi en el mòdul de la velocitat.

$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$F_N = ma_N = m\frac{v^2}{r}$$

Si r és constant, llavors la trajectòria és circular.

Exemple 6: Una partícula de massa m està suspesa d'una corda de longitud L i es mou a velocitat constant en el pla horitzontal (pla *xy*) descrivint un cercle de radi *r*. La corda forma un angle θ amb l'eix vertical (eix *z*). Determineu *a)* la tensió de la corda, i *b)* la velocitat de la partícula en funció de m, L i θ.



Solució:

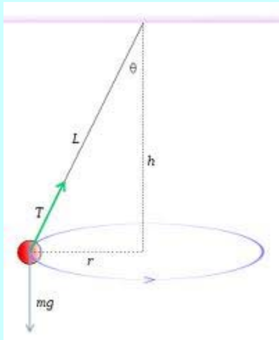
a) Eix radial: $T\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$

Eix *z*: $T\cos\theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$

b)

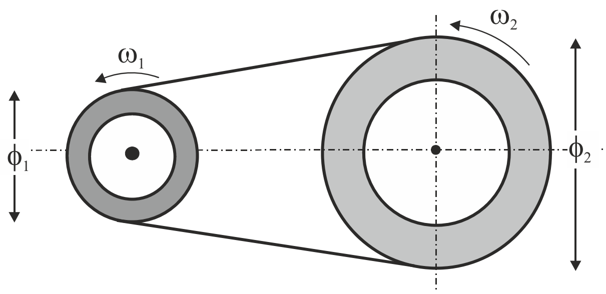
Dividim les dues equacions:

$$\left.\begin{array}{r} tan\theta = \dfrac{v^2}{rg} \rightarrow v = \sqrt{rg\tan\theta} \\ r = L\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}$$



Transmissió del moviment de rotació

Quan unim politges, corrioles, rodaments o rodets a través de cordes, corretges o cadenes, la velocitat lineal al llarg de les cordes, corretges o cadenes és única, és a dir, la velocitat lineal de la corda es transmet d'un rodament a l'altre.

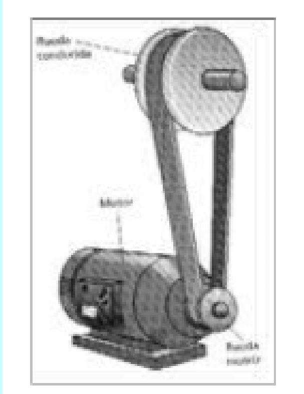


Suposeu que tenim dues politges de radis R_1 i R_2 unides per una corretja. La relació de transmissió és igual a la relació entre els dos radis (o diàmetres, ϕ). Com que la velocitat lineal al llarg de la corretja és única i és la velocitat en el perímetre de les politges, llavors la relació de transmissió és igual a la relació inversa de les velocitats angulars. Així, coneguda la velocitat angular d'una de les corrioles, podem determinar la velocitat de l'altra:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \omega_1 R_1 \\ v_2 = \omega_2 R_2 \end{array}\right\} v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

La funció d'aquests mecanismes de transmissió és transportar una rotació i adaptar la freqüència de rotació. Aquests mecanismes són la base dels canvis de marxa dels cotxes i de les bicicletes.

Exemple 7: Una rentadora funciona amb un motor elèctric que gira a 3500 rpm i que, a través d'un sistema de transmissió de politges, mou el tambor de la rentadora. Si les politges són de 8 cm i 56 cm de radi, calculeu: *a)* la velocitat angular del tambor i *b)* l'acceleració normal del motor.



Solució:

$$\omega_{\text{motor}} = 3500 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\text{min}} \frac{\cancel{1\text{min}}}{60\text{s}} \frac{2\pi\ \cancel{\text{rad}}}{1\text{rev}} =$$

$$= \frac{3500 \cdot 2\pi}{60} = 116{,}67\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{\text{motor}} = \omega_{\text{motor}} r = \left[\frac{3500 \cdot 2\pi}{60}\right] \cdot 0{,}08 \text{ m/s} = 29,3 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{motor}} = v_{\text{tambor}} = 29,3 \text{ m/s}$$

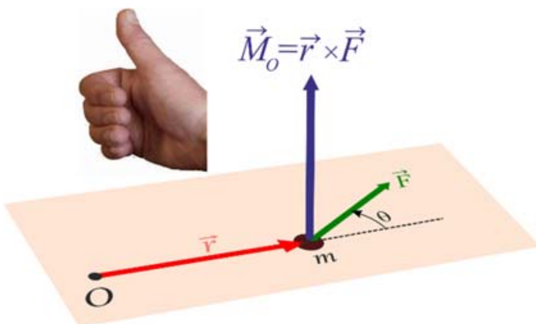
$$a)\ v_{\text{tambor}} = \omega_{\text{tambor}} R \rightarrow \omega_{\text{tambor}} = \frac{v_{\text{tambor}}}{R}$$

$$\omega_{\text{tambor}} = 29,30{,}56 = 16{,}67\pi \text{ rad/s} = 52,4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\text{tambor}} = \frac{\varphi_{\text{motor}}}{\varphi_{\text{tambor}}} \omega_{\text{motor}} = \frac{8}{56} 116{,}67\pi \text{ rad/s} = 52,4 \text{ rad/s}$$

$$b)\ a_n = \omega_{\text{motor}}^2 r = [116{,}67\pi]^2 0{,}08 = 1089\pi^2 \text{ m/s}^2 = 10750 \text{ m/s}^2$$

Moment de força



Moment de força: Especialment adient per estudiar el moviment de rotació. El moment respecte d'un punt *O* es defineix com:

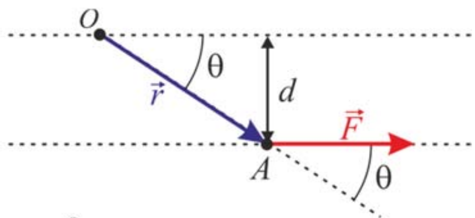
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F},\ |\vec{M}_O| = rF\sin\theta$$

Unitats: N·m

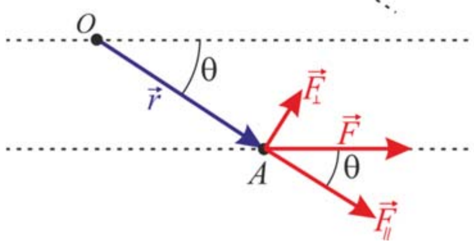
Propietats:

- És proporcional a la distància i a la força.
- Depèn de l'angle entre $\vec{r}$ i $\vec{F}$
- $Si\ \vec{r} \perp \vec{F}, \theta = 90 \text{ o } 270° \Rightarrow \sin\theta = 1 \text{ o } -1$, el mòdul és màxim, $M = rF$
- $Si\ \vec{r} // \vec{F}, \theta = 0 \text{ o } 180° \Rightarrow \sin\theta = 0, M = 0$
- Sentit de la rotació: regla de la mà dreta.

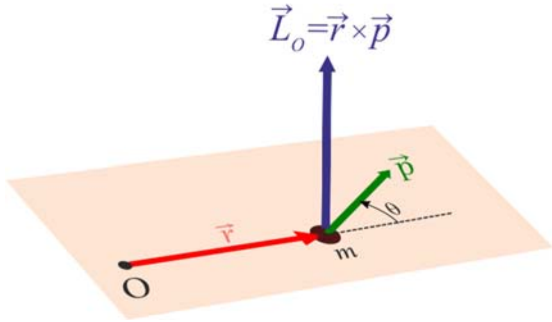
Es pot calcular també a partir del braç de força *d* o a partir de la component perpendicular de la força.



$$M = rFsin\theta = \begin{cases} rsin\theta \cdot F = d \cdot F \\ r \cdot Fsin\theta = r \cdot F_{\perp} \end{cases}$$



Moment angular



<u>*Moment angular*</u>: Quantitat de moviment associada a una rotació.

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Unitats: kg m^2/s

Si derivem respecte al temps tenim,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

i si O és un punt fix, $\vec{v}_O = \vec{0}$, llavors $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, vegeu la demostració més avall,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \vec{M}_{R,O}$$

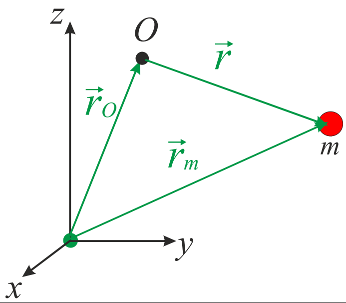
on $\vec{M}_{R,O} = \sum \vec{M}_O$ és el moment total sobre la partícula respecte al punt O. Noteu que $\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$ atès que el producte vectorial de dos vectors paral·lels és zero.

Obtenim una equació que és equivalent a la segona llei de Newton:

$\vec{M}_{R,O} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ (noteu la similitud amb la segona llei de Newton: $\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

Observeu que si $\vec{M}_{R,O} = \vec{0}$, llavors $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$, és a dir, si $\vec{M}_{R,O} = \vec{0}$ el moment angular no varia en el temps, diem que el moment angular respecte al punt O es conserva. Això és equivalent a la primera llei de Newton.

Demostració que quan $\vec{v}_O = \vec{0}$, llavors $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

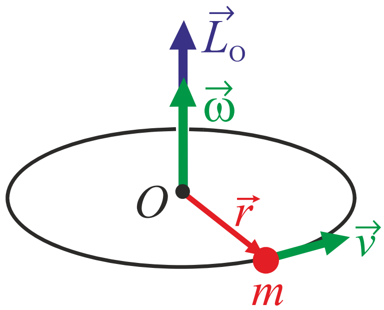


$$\vec{r}_m = \vec{r}_O + \vec{r} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}_m}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Si $\vec{v}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_O = \frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Trajectòria circular: moment angular



Si la partícula descriu una trajectòria circular i calculem el moment angular respecte al centre de la circumferència, tenim

$$\left.\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ \vec{v} &= \vec{r} \times \vec{\omega}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{L}_O = m(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})) = mr^2\vec{\omega} = I_O\vec{\omega}$$

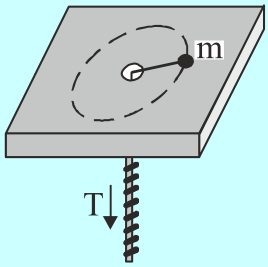
$I_O = mr^2$ és el *moment d'inèrcia* de la partícula i les unitats són kg·m^2.

I_O és una mesura de la inèrcia o oposició que presenta una partícula a ser accelerada angularment a través d'una trajectòria circular de radi r:

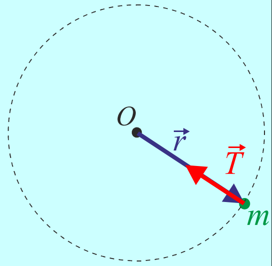
$\vec{M}_{R,O} = \frac{d\vec{L}_O}{\mathrm{dt}} = I_O\frac{d\vec{\omega}}{\mathrm{dt}} = I_O\vec{\alpha}$ o $\vec{M}_{R,O} = \sum \vec{M}_O = I_O\vec{\alpha}$

Noteu la similitud entre aquesta darrera equació i la segona llei de Newton: $\vec{F}_R = m\vec{a}$.

Exemple 8: Un bloc de massa 50 g està lligat a una corda que passa per un forat fet en una superfície horitzontal sense fregament. El bloc gira al voltant del forat descrivint una trajectòria circular de 20 cm de radi i amb una velocitat angular constant ω = 3 rad/s. Estirem amb més força l'altre extrem de la corda, de manera que el radi de la trajectòria es redueix a 10 cm. Calculeu la nova velocitat angular.



Solució:

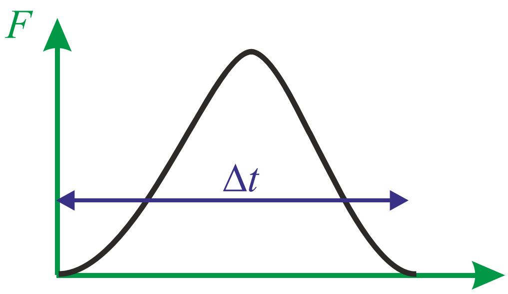


$\vec{M}_{R,O} = \vec{0}$ atès que la suma del pes i la normal s'anul·len i el producte vectorial entre $\vec{r}$ i $\vec{T}$ és zero. Llavors $\vec{L}_O = I_O\vec{\omega}$ és constant:

$$I_{O,i}\omega_i = I_{O,f}\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_{O,i}}{I_{O,f}}\omega_i = \frac{\mathrm{m}r_i^2}{\mathrm{m}r_f^2}\omega_i = \left(\frac{20}{10}\right)^2 \times 3\ \mathrm{rad/s} = 12\ \mathrm{rad/s}$$

Impuls angular

De la mateixa manera que hem definit l'impuls quan tenim forces variables que actuen durant un interval de temps, podem determinar l'impuls angular a partir del canvi de moment angular:



$$d\vec{L}_O = \vec{M}_{R,O}dt$$

$$\vec{J}_O \equiv \int \vec{M}_{R,O}dt = \Delta\vec{L}_O$$

Unitats: kg·m^2/s o N·m·s

Això ens permet fer una estimació del moment mitjà:

$$\vec{M}_{m,O} = \frac{\vec{J}_O}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{L}_O}{\Delta t}$$

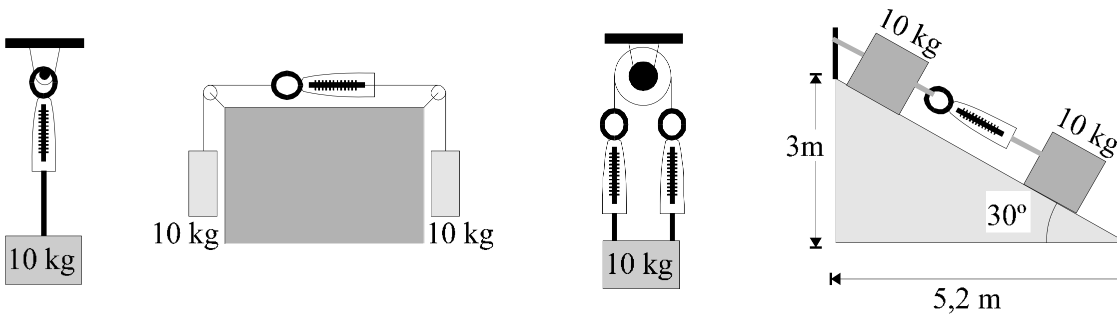
Per altra banda, l'impuls i l'impuls angular estan relacionats:

$$\vec{J}_O = \int \vec{M}_{R,O}dt = \int \vec{r} \times \vec{F}_R dt = \vec{r} \times \int \vec{F}_R dt = \vec{r} \times \vec{I} = \vec{r} \times \Delta\vec{p}$$

Qüestions del tema 3

Lleis de Newton

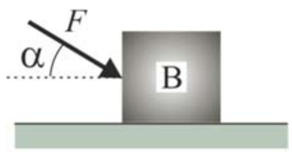
1. En la figura següent els objectes estan subjectats per dinamòmetres calibrats en newtons. Doneu les lectures dels dinamòmetres en cada cas, suposant que les cordes no tenen massa i que el pla inclinat no té fricció.



(a) (b) (c) (d)

Sol.: *a)* 98,1 N; *b)* 98,1 N; *c)* 49,05 N; *d)* 49,05 N

2. Quina força F mínima cal aplicar per moure el bloc B de la figura? Dades: el coeficient de fricció estàtic és 0,2, l'angle α és 30º i la massa del bloc és 100 kg.



Sol.: 256 N.

3. Per arrossegar sobre el terra una caixa a velocitat constant cal aplicar una força horitzontal de 200 N. *(a)* Que pots dir de la força que ha calgut aplicar per poder iniciar el moviment? *(b)* si ara col·loquem una caixa idèntica damunt de la primera, quina força horitzontal caldrà aplicar per mantenir el moviment a velocitat constant? *(c)* ara posem les dues caixes a terra i les unim amb una corda, quina força horitzontal caldrà aplicar per mantenir el moviment a velocitat constant?

Sol.: *a)* >200N; *b)* 400 N; *c)* 400 N

4. Una cotxe de 1600 kg de massa circula a 120 km/h i frena sobtadament. La longitud de la marca de la frenada és de 150 m. Suposant constant la desacceleració del cotxe, determineu la força de fricció entre les rodes i el paviment.

Sol.: 5.926 N

5. Un cos es deixa anar des de dalt d'una rampa de 37º d'inclinació. Calculeu la velocitat que té a l'instant en què ja ha recorregut el primer metre. Considereu negligible la fricció.

Sol.: 3,4 m/s

6. Volem ubicar una càpsula espacial entre la terra i la lluna de manera que la força gravitatòria neta deguda als dos astres sigui nul·la. A quina distància de la Terra s'ha de situar? Dades: massa de la terra $5{,}97\times10^{24}$ kg, massa de la lluna $7{,}35\times10^{22}$ kg, $G = 6{,}6743\times10^{-11}$ m^3/kg s^2 i la distància mitjana Terra-Lluna és 384000 km.

Sol.: $3{,}456\times10^{8}$ m.

Impuls

7. Determineu la força mitjana exercida per un cinturó de seguretat d'un cotxe sobre un passatger (de massa 80 kg) quan el cotxe xoca frontalment amb un mur de formigó a 90 km/h. Suposeu que en el xoc la part davantera del cotxe s'ha deformat de manera que s'ha escurçat aproximadament 1 metre.

$F_m \approx 25.000$ N

8. Una pilota de 50 g xoca amb la raqueta de tennis d'un jugador a una velocitat de 60 m/s, i rebota de manera que surt en la mateixa direcció però sentit oposat amb la mateixa velocitat. Si la pilota ha estat en contacte amb la raqueta 0,3 s, quina és la força mitjana exercida per la raqueta sobre la pilota?

Sol.: 20 N

Forces de fricció

9. Sobre un terra horitzontal es dispara un cos a una velocitat de 6 m/s. Si el coeficient de fricció entre el cos i el terra és de 0,20, calculeu el temps que triga a parar-se.

Sol.: 3 s

10. Sobre un cos de 20 kg s'exerceix, mitjançant una corda, una força de 100 N, la direcció de la qual forma un angle de 37º amb l'horitzontal. Calculeu la força de fricció i l'acceleració amb la qual s'arrossega el cos si el coeficient de fricció és de 0,20.

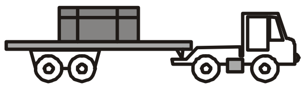
Sol.: 27,2 N; 2,6 m/s^2

11. Un cos de 20 kg està sobre un pla inclinat de 37º, amb un coeficient de fricció de 0,20. Sobre aquest cos exercim una força horitzontal de 300 N i el fem pujar per la rampa. Calculeu el temps que tarda a recórrer 3 m des que comença a pujar.

Sol.: 1,5 s

12. Uns cavallets ("tiovivo") completen una volta cada 12 s. Un nen de 45 kg està assegut a una distància de 3 m del centre de la plataforma. Calcula el coeficient de fricció estàtic mínim per tal que el nen no llisqui enfora.

Sol.: 0,0838.

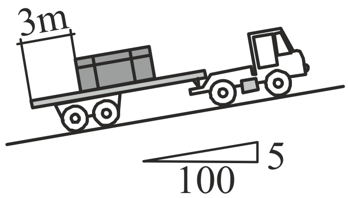


13. El coeficient de fregament estàtic entre la plataforma del camió i la caixa que transporta és de 0,3. Determineu la distància mínima de frenada *s* que pot recórrer el camió sense que la caixa rellisqui cap endavant, si la velocitat del camió abans de començar a frenar és de 72,4 km/h. Suposeu que la desacceleració és constant durant tot el temps que triga a aturar-se.

Sol.: s = 68,7 m

14. Si el coeficient de fregament estàtic entre la plataforma i la càrrega del camió del problema anterior és de 0,3, calculeu la velocitat màxima que pot assolir el camió sense que la càrrega rellisqui cap enrere en un recorregut de 45 m, si inicialment està aturat i puja per un pendent del 10 %.

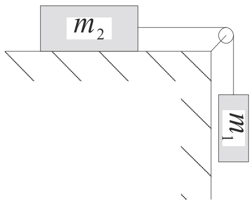
Sol.: 13,13 m/s



15. La càrrega del camió pesa 750 kp. En engegar el camió, amb una acceleració constant, la caixa rellisca cap avall una distància de 3 m en el mateix temps que el camió ha assolit una velocitat de 40 km/h i ha recorregut 15 m al llarg del pendent. Determineu el coeficient de fricció entre la caixa i la plataforma.

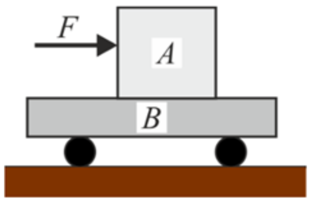
Sol.: μ_D = 0,386

Problemes de dos o més cossos



16. Determineu l'acceleració del conjunt i la tensió de la corda en funció de la massa dels blocs. Podeu negligir els efectes de fricció entre els cossos i la massa de les cordes i de la corriola.

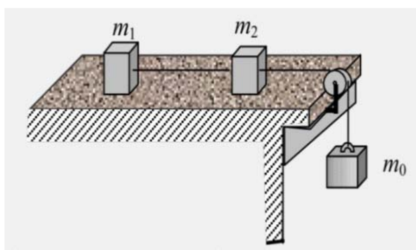
Sol.: $a = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, g$; $T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g$



17. Demostreu que el mòdul de la força màxima que podem aplicar sobre el bloc *B* de la figura sense que aquest llisqui és:

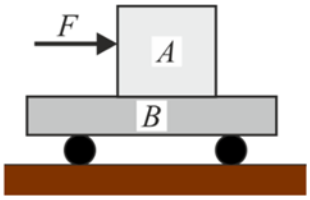
$$F_{\text{màx}} = \mu_E\, m\, g \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

on *m* és la massa del bloc *B* i *M*, la massa del bloc *C*. Podeu negligir la força de fricció entre el bloc *C* i el terra.



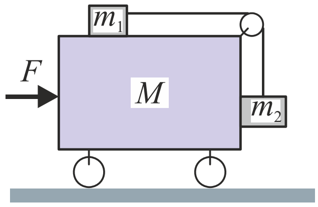
18. Dos blocs de pedra de masses m_1 = 3 kg i m_2 = 5 kg estan lligats per una corda i situats sobre una taula que té un coeficient de fricció μ = 0.3. El bloc de massa m_2 està lligat també a un tercer bloc de massa m_0 = 4 kg que penja de l'extrem de la taula de manera que el seu pes fa lliscar els altres dos blocs. Calcula l'acceleració amb què lliscaran els blocs.

Sol.: 1,308 m/s^2.



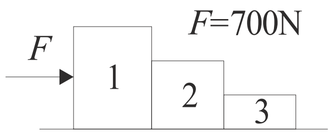
19. Si la Força F és de 12 N, les masses del cossos A i B són 2 kg i 3 kg respectivament, i els coeficients de fricció estàtic i dinàmic són 0,3 i 0,24 respectivament. Determina: *(a)* el mòdul de l'acceleració del cos A, *(b)* el mòdul de l'acceleració del cos B, i *(c)* el mòdul de la força de fricció entre els blocs A i B.
Podeu negligir la força de fricció que actua entre el cos B i el terra.

Sol.: *a)* 3,64 m/s^2; *b)* 1,57 m/s^2; *c)* 4,71 N.



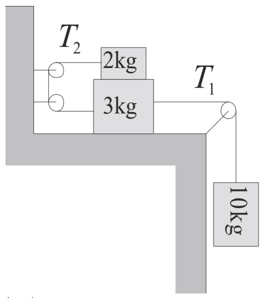
20. Quina força F horitzontal cal aplicar al carretó de la figura per tal que els blocs romanguin quiets respecte del carretó? Suposeu que totes les superfícies són llises (no hi ha fricció) i que no hi ha fricció a les rodes ni a la politja. Dades $M = 20$ kg, $m_1 = 10$ kg i $m_2 = 5$ kg.

Sol.: 172 N.



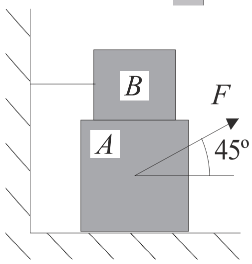
21. Trobeu totes les forces de contacte entre els cossos de la figura i l'acceleració que actua sobre ells. El coeficient de fregament és 0,3 i $m_1 = 3\ m_2$, $m_2 = 1{,}5\ m_3$ i $m_3 = 10$ kg.

Sol.: 250 N, 100 N; $a = 7{,}06$ m/s^2



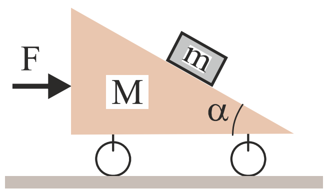
22. Atès el sistema de la figura, on només hi ha fregament entre la massa de 2 kg i la massa de 3 kg, amb un coeficient de fricció dinàmic de 0,3: *a)* dibuixeu el diagrama de sòlid lliure per a cada bloc; *b)* determineu l'acceleració del sistema; *c)* trobeu la tensió de les cordes.

Sol.: *a*) 5,75 m/s^2; *b*) $T_2 = 17{,}4$ N; *c*) $T_1 = 40{,}5$ N



23. El bloc B descansa sobre el bloc A, tal com s'indica a la figura adjunta. El coeficient de fricció entre els dos blocs és d'1/4 i entre el bloc A i el terra és d'1/3. El bloc A té una massa de 30 kg i el B, de 20 kg. Quina força seria necessària per iniciar el moviment?

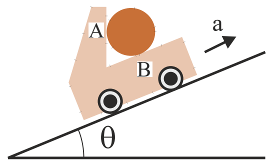
Sol.: $F = 225{,}21$ N



24. S'aplica una força horitzontal F sobre un carretó de massa M. Gràcies a les rodes podem negligir la fricció entre el terra i el carretó. Sobre el pla inclinat del carretó descansa un bloc de massa m que es troba en repòs respecte al carretó. Determina la magnitud de la força de fricció estàtica entre la superfície del carretó i el bloc. Dades $F = 30$ N, $M = 15$ kg, $m = 5$ kg, α=30º, $\mu_D = 0{,}38$ i $\mu_E = 0{,}5$.

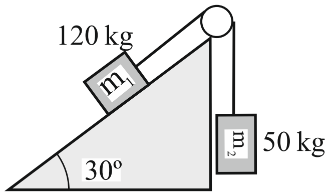
Sol.: 23,11 N.

25. El cilindre de la figura té una massa de 25 kg i recolza sobre un carretó sotmès a una acceleració de 2g en el sentit ascendent de la rampa, que forma un angle de 15º amb l'horitzontal. Calculeu les reaccions a *A* i a *B*.



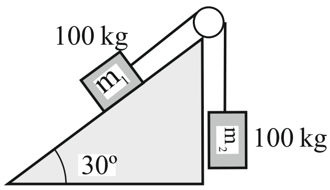
Sol.: N_A= 574 N, N_B = 385 N

26. Dos cossos estan lligats per una corda de massa negligible que passa per una politja sense fricció, i un descansa sobre un pla inclinat. Els coeficients de fricció estàtic i dinàmic són μ_S=0,4 i μ_K=0,35 (vegeu la figura). En quin sentit es mourà el sistema? Quina serà l'acceleració del sistema? Quant valdrà la tensió? Quant valdrà la força de fricció?



Sol.: No es mou, 0 m/s^2, 490 N, 98,6 N

27. Dos cossos estan lligats per una corda de massa negligible que passa per una politja sense fricció, un descansa sobre un pla inclinat. Els coeficients de fricció estàtic i dinàmic són μ_S=0,4 i μ_K=0,35 (vegeu la figura). En quin sentit es mourà el sistema? Quina serà l'acceleració del sistema? Quant valdrà la tensió? Quant valdrà la força de fricció?



Sol.: Cap a la dreta, 0,966 m/s^2, 884 N, 297 N

Dinàmica de rotació

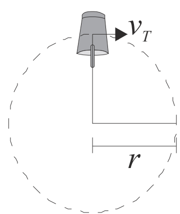
28. Una carretera està peraltada de manera que un cotxe movent-se a 40 km/h pot agafar un revolt de 30 m de radi fins i tot si hi ha una capa de gel equivalent a un coeficient de fricció aproximadament igual a 0. Determineu l'interval de velocitats dins del qual un cotxe pot agafar aquest revolt sense relliscar quan la carretera no està gelada (μ_E = 0,3 entre les rodes i la carretera).

Sol.: $v_{mín}$ = 20,1 km/h, $v_{màx}$ = 56,0 km/h

29. Degut a la força gravitatòria, la lluna orbita al voltant de la terra amb un període de 27,3 dies. Si suposem que la lluna descriu una òrbita circular determineu el radi de la trajectòria. Dades: massa de la terra 5,97×10^{24} kg, G=6,6743×10^{-11} m^3/kg s^2.

Sol.: 383×10^6 m.

30. Fem girar una galleda plena d'aigua descrivint una circumferència vertical de radi *r*. Si la velocitat de la galleda a la part més alta de la trajectòria és v_T, calculeu la força exercida per la galleda sobre l'aigua. Calculeu també el valor mínim de v_T de manera que l'aigua no es vessi. La massa de l'aigua és *m*.

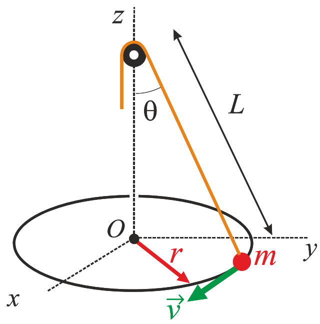


Sol.: $F = m\left(\frac{v_T^2}{r} - g\right)$; $v_{mín} = \sqrt{rg}$.

31. Una pedra de massa 200 g es lliga al extrem d'una corda d'un metre de llargada i es fa girar en un pla vertical. Avalua: *(a)* la velocitat mínima en el punt més alt per a que pugui descriure una trajectòria circular complerta i *(b)* quina trajectòria descriurà la pedra si la corda es trenca al punt més alt?

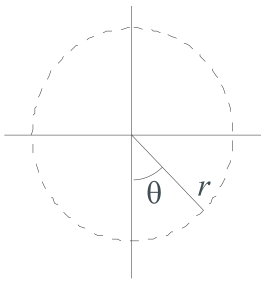
Sol.: a) 3,132 m/s, b) tir parabòlic.

32. Una bola de massa m = 5 kg està penjada del sostre mitjançant una corda de longitud L = 2 m. La bola descriu un moviment circular en el pla horitzontal de tal manera que la corda forma un angle θ = 40º amb la vertical. Aquest sistema es coneix com el pèndol cònic. Calcula: *(a)* el mòdul de la velocitat v de la bola, *(b)* la velocitat angular ω de la bola, i *(c)* La tensió T de la corda.



Sol.: *a)* 3,25 m/s; *b)* 2,53 rad/s; *c)* 64,0 N.

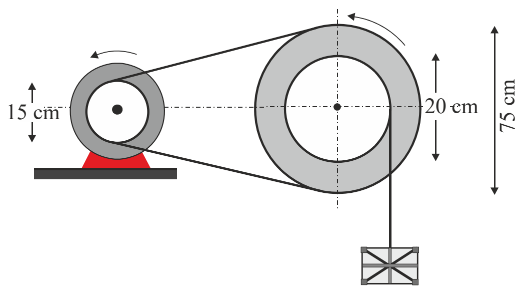
33. Un bloc de massa m està lligat a una corda i es mou en un cercle vertical de radi r. Quan la corda forma un angle θ amb la vertical, el bloc té una velocitat v. Calculeu l'acceleració tangencial, el mòdul de l'acceleració total i la tensió de la corda.



Sol.: $a_T = g\sin\theta; |a| = \sqrt{g^2\sin^2\theta + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}\,; T = m\left(\frac{v^2}{r} + g\cos\theta\right)$

Transmissió del moviment de rotació

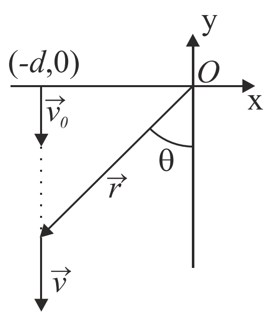
34. La figura representa un muntacàrregues. Un motor elèctric fa girar una roda de 15 cm de diàmetre a 60 rad/s i transmet el moviment a una politja de 75 cm de diàmetre, a l'eix de la qual hi ha un tambor que, en girar, enrotlla la corda i aixeca la càrrega. Calculeu la velocitat a què es mou la càrrega si el cilindre sobre el qual s'enrotlla la corda té un diàmetre de 20 cm.



Sol.: 1,2 m/s

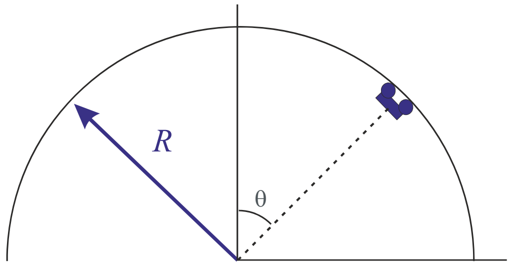
Moment angular

35. Una partícula de massa m té una velocitat $-v_0\vec{j}$ en el punt $(-d,0)$. La partícula s'accelera cap avall a causa del seu pes. *(a)* Determineu l'expressió del moment angular en funció del temps. *(b)* Calculeu el moment de força respecte a l'origen de coordenades que actua sobre la partícula en funció del temps i *(c)* a partir dels resultats dels apartats *a)* i *b)*, comproveu que $\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$



Sol.: *a)* $\vec{L}_O = md(v_0 + gt)\vec{k}$; *b)* $\vec{M}_O = mgd\vec{k}$.

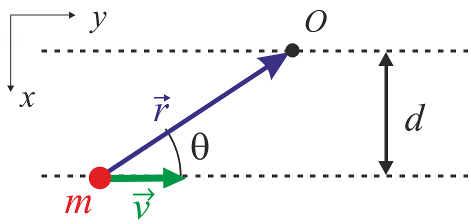
36. Un vagó que circula per una muntanya russa descriu una trajectòria circular de radi R. Si negligim la fricció i les úniques forces que actuen sobre el vagó és la reacció de la via i la gravetat, determineu els valors de l'acceleració angular i tangencial en funció de l'angle θ que forma el vagó respecte la vertical.



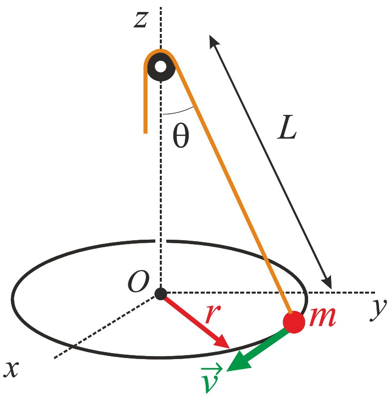
Sol.: .: $\alpha = \frac{g}{R}\sin\theta$; $a_T = g\sin\theta$.

Conservació del moment angular

37. Un bloc es mou amb una velocitat $\vec{v}$ en el pla horitzontal (pla xy) damunt d'una taula d'aire, de manera que podem considerar que al fricció és nul·la. En aquestes condicions la suma de forces és zero i segons la primera llei de Newton el moment lineal es constant. Demostreu que el moment angular respecte un punt qualsevol O és constant i és igual a $\vec{L}_O = mvd\vec{k}$, on d és la distància entre O i la línia que conté $\vec{v}$, és a dir, que si la suma de forces és zero, llavors $\vec{L}_O$ és constant.



38. Una partícula de massa m està sospesa d'una corda i es mou a velocitat constant en el pla horitzontal (pla xy) descrivint un cercla de radi r. La corda forma un angle θ amb l'eix vertical (eix z). La corda passa per una politja de manera que la distància entre la politja i la massa m és L. Tirem de la corda molt lentament cap avall de manera que la longitud entre la politja i la massa m és L'. Durant el temps que tirem de la corda, la component vertical del la velocitat és constant. Demostreu que es compleix la següent relació:



$$L^3\sin^3\theta\tan\theta = L'^3\sin^3\theta'\tan\theta'$$

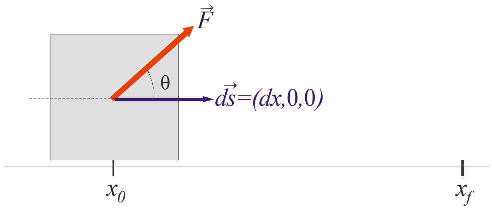
4. Treball i energia d'una partícula puntual

Objectius:

Conceptes de treball i energia d'una partícula puntual
Concepte de potència
Què són les forces conservatives?

Treball i energia

Treball: mesura de l'aportació d'una força, F, al moviment d'una partícula.
Suposem $\vec{F}$ = constant.



$$W = F_x\,(x_f - x_0) = F\cos\theta\,(x_f - x_0) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$$

on

$$\Delta\vec{s} = (\Delta x, 0{,}0) = (x_f - x_0, 0{,}0)$$

Unitats en SI: N·m = J (joule)

Unitats en CGS: dina·cm = erg   1 J = 10^7 ergs

Perquè $W \neq 0$ cal:

- moviment, si no $\Delta\vec{s} = \vec{0}$
- $F \neq 0$
- F no pot ser perpendicular al desplaçament (si $\vec{F} \perp \Delta\vec{s} \Rightarrow W = 0$).

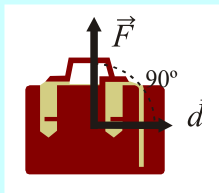
$W > 0$ ajuda al moviment $(-90° < \theta < 90°)$

$W < 0$ s'oposa al moviment $(90° < \theta \leq 270°)$

<u>Exemple 1</u>: Calculeu el treball que fem amb una maleta de 15 kg si: *a)* l'aguantem 5 minuts esperant l'autobús, *b)* correm darrere l'autobús una distància horitzontal de 10 m en 2 segons, a velocitat constant, i *c)* l'aixequem 1 m verticalment, a velocitat constant.

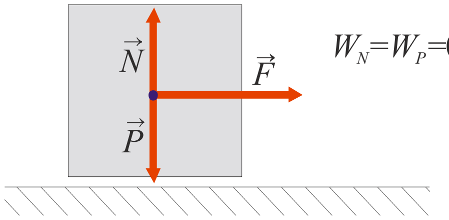
a) 0, no hi ha desplaçament.
b) 0, força i desplaçament són perpendiculars.

$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos 90° = 0$$



c) $v = ct \Rightarrow a = 0 \Rightarrow F = mg$
d) $W = \int \vec{F}d\vec{s} = \int mg\cos 0° ds = mg\Delta s = 15\cdot 9{,}8\,1\cdot 1\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m} = 147\ \mathrm{J}$

Per exemple, la força normal resultat de la reacció d'una superfície no fa treball:



$W_N = W_P = 0$ atès que són ⊥ al moviment.

Quin treball fa la força de fricció estàtica?

Quin és el signe del treball fet per la força de fricció dinàmica?

Què passa si $\vec{F}$ o θ no són constants? Podem aplicar la relació anterior per a un desplaçament curt (infinitesimal):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Llavors la contribució total s'obté sumant les contribucions infinitesimals al llarg de tot el desplaçament (integrant):

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

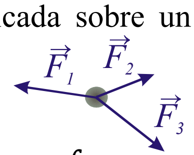
Exemple 2: Una força donada per $\vec{F} = 2x^2\vec{\imath}$ (en unitats del SI) actua sobre una partícula en un desplaçament bidimensional (pla *xy*) de 5 m. Trobeu el treball realitzat per la força sobre la partícula (*m*=1 kg) quan: *a)* es desplaça en línia recta al llarg de l'eix *y* entre els punts (2,2) i (2,7), i *(b)* en línia recta entre (2,2) i (5,6).

a) $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_2^2 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3|_2^2 = 0 \text{ J}$

b) $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_2^5 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3|_2^5 = 78 \text{ J}$

Energia cinètica

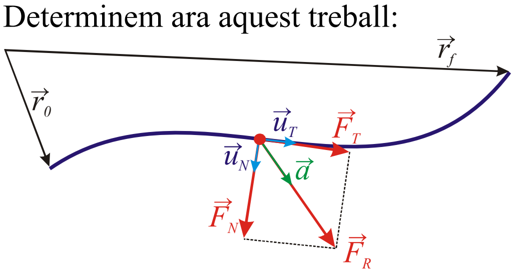
Teorema de les forces vives: el treball realitzat per la força neta aplicada sobre un objecte puntual es converteix en energia cinètica.



Aquest treball l'anomenem *treball total* (W_{Tot}):

$$W_{Tot} = \int \vec{F}_1\, d\vec{s} + \int \vec{F}_2\, d\vec{s} + \int \vec{F}_3\, d\vec{s} + \cdots = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots)\ d\vec{s} = \int \vec{F}_R\, d\vec{s}$$

Determinem ara aquest treball:



$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N + m\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$

$$W_{Tot} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_R d\vec{s} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_T d\vec{s} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_N d\vec{s} =$$

$$= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} m\frac{dv}{dt} ds = \int_{v_0}^{v_f} mvdv = m\int_{v_0}^{v_f} vdv$$

$$W_{Tot} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{C,f} - E_{C,0}$$

on l'energia cinètica es defineix com: $E_C \equiv \frac{1}{2}mv^2$

Per rotacions, es pot demostrar que$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

Potència

La potència és la velocitat a la qual es fa un treball. També es pot interpretar com la velocitat a la qual podem transferir energia cinètica.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{ds}}{dt} = \vec{F}\,\frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unitats en SI i MKS: $\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$ (watt)

Unitats en CGS: $\frac{\mathrm{dina \cdot cm}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s}}$, dina·cm = erg   1 W = 10^7 ergs/s

Cavall (CV) 735 W = 1 CV

Horse power (HP) 746 W = 1 HP

Potència mitjana: $P_m = \frac{W}{\Delta t}$

En el cas de rotacions, és molt útil l'expressió:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times r) = \vec{\omega} \cdot \left(r \times \vec{F}\right) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O$$

Exemple 3: Calculeu la potència mitjana desenvolupada per un Seat Ibiza 1.6i per accelerar de 0 a 100 km/h en 10,8 s si la seva massa és de 1.000 kg.

$$v_f = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1.000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} \cdot \frac{1\ \mathrm{h}}{3.600\ \mathrm{s}} = 28\ \mathrm{m/s}$$

$$W = \Delta E_C = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = \frac{1}{2} 1000\ 28^2\ \mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 392.000\ \mathrm{J}$$

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} = \frac{392.000\ \mathrm{J}}{10{,}8\ s} = 36.300\ \mathrm{W} = 49\ \mathrm{CV}$$

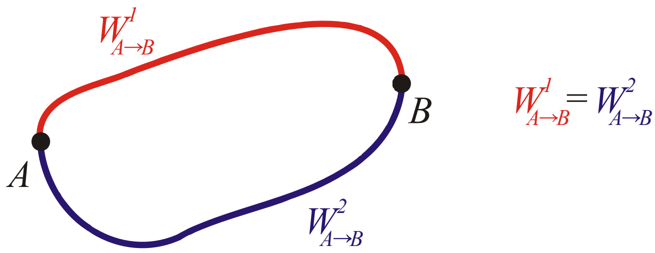
Exemple 4: Calculeu la potència mitjana desenvolupada per un ciclista si pedala a una freqüència de 4 Hz i aplica un parell de forces (moment creat per dues forces iguals i oposades) de 5 Nm.

$$\omega = 4\,\frac{\mathrm{cicles}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{2\pi}{1\ \mathrm{cicles}} = 25,1\ \mathrm{rad/s}$$

$$P = \omega \cdot M_O = 25,1 \cdot 5 = 126\ \mathrm{W}$$

Forces conservatives

Forces conservatives: el treball fet per una força conservativa no depèn del camí.

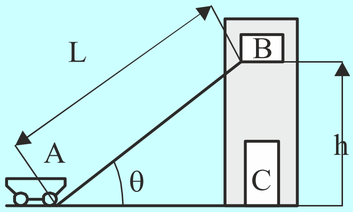


Llavors, per a les forces conservatives el treball només depèn dels punts inicial i final:

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

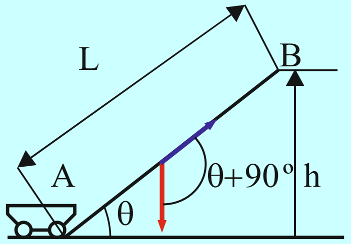
Per determinar el treball fet per una força conservativa no cal calcular $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$; n'hi ha prou amb calcular la diferència d'energia potencial $W = -\Delta U$. Les unitats són les mateixes que les del treball, J.

Exemple 5: Calculeu el treball que fa el camp gravitatori quan movem la vagoneta des del punt *A* fins al punt *B* si: *a)* la portem fins al muntacàrregues situat a *C* i després la pugem fins al punt *B*, *b)* la pugem passant per la rampa.



a) $W = \int F \cdot d\vec{s} + \int F \cdot d\vec{s} = 0 - \int mgdy = -mgh$

b) $W = \int F \cdot d\vec{s} = \int mg\, dl \cos(90° + \theta) =$
$= -mg\sin\theta \int dl = -mgL\sin\theta = -mgh$



L'energia potencial es calcula com:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -W_{\vec{r}_0 \to \vec{r}} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

Si el problema és unidimensional,

$$U(x) - U(x_0) = -W_{x_0 \to x} = -\int_{x_0}^{x_f} F dx$$

Si apliquem el primer teorema fonamental del càlcul:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

En el cas de tres dimensions: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U$

Si només actuen forces conservatives sobre un cos:

$$W_{A \to B} = U_A - U_B = E_{C,B} - E_{C,A} \Rightarrow U_A + E_{C,A} = U_B + E_{C,B}$$

Si definim l'*energia mecànica* com:

$$E_m \equiv U + E_C$$

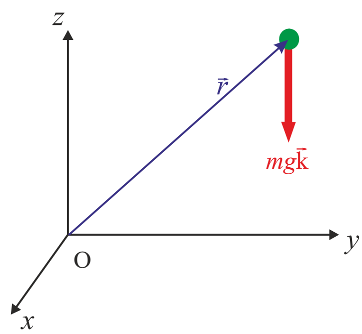
llavors tenim que l'energia mecànica és constant:

$$E_{m,A} = E_{m,B}$$

Aquest resultat es coneix com a teorema de la conservació de l'energia.

És interessant de veure que quan només actuen forces conservatives l'energia mecànica és constant, no hi ha pèrdues d'energia. Per aquesta raó es poden fer servir les forces conservatives per a l'emmagatzemament i transport de l'energia. Exemples de forces conservatives: *gravitatòria* i *elàstica*.

Energia potencial gravitatòria



Si estem a prop de la superfície terrestre, $\vec{F} = -mg\,\vec{k}$. Noteu que la força només té una component, atès que va dirigida en la direcció vertical (perpendicular a la superfície de la Terra).

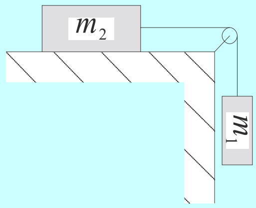
Per simplificar, agafem com a referència que a una certa alçada z_0 l'energia potencial és 0, $U(z_0) = 0$.

$$U(z) - U(z_0) = U(z) = -W_{\vec{r}_0 \to \vec{r}} = -\int F_z dz = -\int -mgdz = mgz$$

Comprovem que:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0\,; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -mg$$

<u>Exemple 6</u>: Ajuntem dos blocs mitjançant una corda lleugera que passa per una politja (vegeu la figura). Inicialment els mantenim aturats, i quan els alliberem es posen en moviment. *a)* Comproveu que la suma del treball fet per la corda sobre ambdós blocs és zero. *b)* Utilitzant el teorema de conservació de l'energia, calculeu el mòdul de la velocitat comuna d'ambdós blocs a l'instant que la massa m_1 ha baixat una altura h. Expresseu el resultat en funció de m_1, m_2, g i h. Negligiu el fregament.

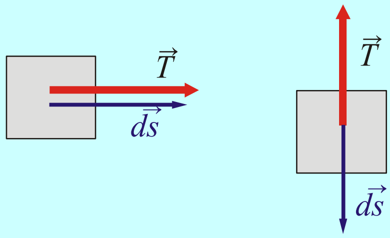


a)

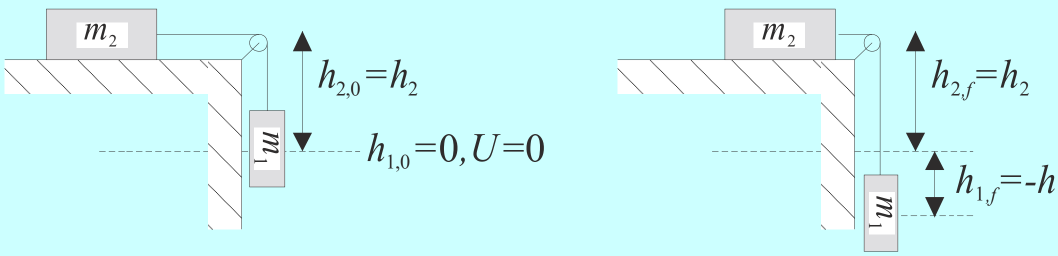
$$W_2 = \int \vec{T} \cdot \overrightarrow{ds} = \int T \cdot ds = T\Delta s$$

$$W_1 = \int \vec{T} \cdot \overrightarrow{ds} = \int -T \cdot ds = -T\Delta s$$

$$W = W_1 + W_2 = -T\Delta s + T\Delta s = 0$$



b)



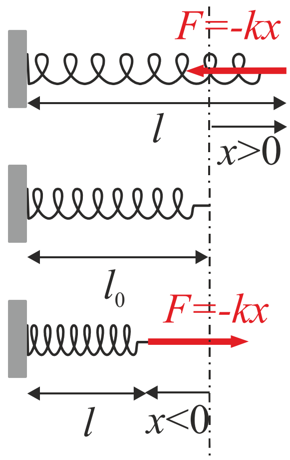
$$E_{m,0} = 0 + m_2gh_2 + 0 \qquad E_{m,f} = -m_1gh + m_2gh_2 + \tfrac{1}{2}m_1v^2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2$$

Conservació de l'energia mecànica:

$$E_{m,0} = E_{m,f} \Rightarrow m_2gh_2 = -m_1gh + m_2gh_2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \Rightarrow m_1gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$v = \sqrt{2gh\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

Energia potencial elàstica



La força elàstica aplicada per una molla és proporcional a l'allargament x, que és igual a la diferència entre la longitud l de la molla i la longitud natural de la molla l_0.

$$x = l - l_0$$

És a dir, quan la longitud de la molla és l_0, la força elàstica exercida per la molla és zero.

La constant de proporcionalitat és la constant elàstica de la molla k:

$$F = -kx$$

Les unitats de k són N/m.

La direcció de la força és paral·lela a l'allargament i el signe negatiu està associat al sentit:

- Quan $x > 0$, la molla està estirada i la força és cap endins.
- Quan $x < 0$, la molla està comprimida i la força és cap enfora.

És a dir, la resposta elàstica de la molla és oposar-se al canvi en l'allargament; és una força recuperadora.

Per al càlcul de l'energia potencial s'agafa com a conveni que aquesta és zero quan la molla està a la seva longitud natural, $U(0) = 0$.

L'energia potencial elàstica és:

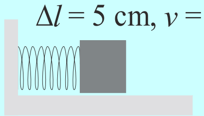
$$U(x) - U(0) = U(x) = -W_{0\to x} = -\int_0^x -kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

Comprovem que

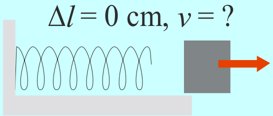
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

Exemple 7: A quina velocitat surt un objecte de 4 kg d'una molla de constant 400 N/m, si inicialment l'objecte estava en repòs en contacte amb la molla, que està comprimida 5 cm? Tot el moviment es desenvolupa en el pla horitzontal. Negligiu el fregament.

Inici
$\Delta l = 5$ cm, $v = 0$



Final
$\Delta l = 0$ cm, $v = ?$



$$E_{m,0} = E_{m,f} \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta l^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta l = 0{,}5 \text{ m/s}$$

Energia mecànica i forces no conservatives

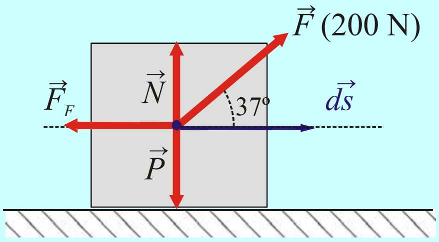
Cas general: forces no conservatives + forces conservatives:

$$W_{A\to B} = W_{A\to B,\mathrm{NC}} + W_{A\to B,\mathrm{Cons}} = W_{A\to B,\mathrm{NC}} + U_A - U_B = E_{C,B} - E_{C,A} \Rightarrow$$
$$U_A + E_{C,A} + W_{A\to B,\mathrm{NC}} = U_B + E_{C,B} \Leftrightarrow$$
$$E_{m,A} + W_{A\to B,\mathrm{NC}} = E_{m,B} \Leftrightarrow$$

$$\Delta E_m = E_{m,B} - E_{m,A} = W_{A\to B,\mathrm{NC}}$$

El treball de la força de fricció és negatiu; per tant, l'energia mecànica disminueix en un sistema en el qual les úniques forces no conservatives són les forces de fricció. <u>Les forces de fricció dissipen l'energia</u>.

<u>Exemple</u>: Sobre un cos de 20 kg situat en un pla horitzontal actua una força de 200 N, que forma un angle de 37º amb l'horitzontal. El coeficient de fricció entre el cos i el pla és 0,2. Calculeu el treball realitzat per la força aplicada i per la gravetat i el desenvolupat per la força de fricció en traslladar l'objecte 5 m pel pla.



$$N + 200\sin(37°) = \mathrm{mg} \Rightarrow N = 76\ \mathrm{N}$$

$$W_F = 200 \cdot 5 \cdot \cos 37°\ \mathrm{N\,m} = 799\ \mathrm{J}$$
$$W_{\mathrm{FF}} = -\mu \cdot N \cdot 5\ \mathrm{m} = -76\ \mathrm{J}$$
$$W_g = m \cdot g \cdot 5 \cdot \cos(90°)\ \mathrm{m} = 0$$

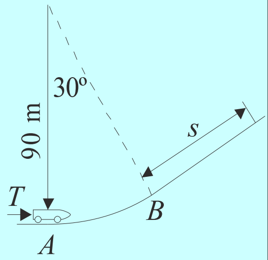
Comprovació:

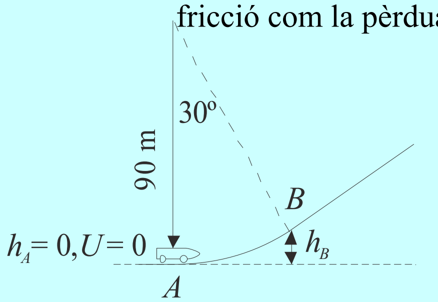
$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m v_f^2 = W_{Tot} = (799 - 76 + 0)\ \mathrm{J} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 723\ \mathrm{J}}{20\ \mathrm{kg}}} = 8{,}5\ \mathrm{m/s}$$

I aplicant la segona llei de Newton, arribem al mateix resultat:

$$F\cos 37 - F_F = ma \Rightarrow a = \frac{153 - 15,2}{20}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 7{,}23\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow v_f = \sqrt{2as} = 8{,}5\frac{m}{s}$$

<u>Exemple</u>: Un petit vehicle experimental que es mou mitjançant un motor de reacció i que té una massa de 100 kg, inicialment aturat al punt *A*, es mou amb un fregament negligible al llarg de la pista vertical, tal com es veu a la figura. Si el motor exerceix una força constant de 1.780 N entre els punts *A* i *B* (es talla l'aixeta de combustible en el punt *B*), calculeu la distància *s* que recorre abans d'aturar-se. Podeu negligir tant els efectes de fricció com la pèrdua de massa deguda al motor de reacció.





Tram d'*A* a *B*

$$E_{m,A} = 0 + 0 = 0$$

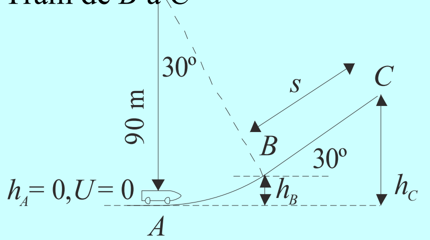
$$h_B = 90 - 90\cos(30°) = 12{,}06\ \text{m}$$

$$E_{m,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = 50\ \text{kg} \cdot v_B^2 + 11.816\ \text{J}$$

$$W_{NC} = \int \vec{F}d\vec{s} = F\Delta s = 1.780\ N \cdot 30\frac{\pi}{180}90\ m = 8{,}39 \cdot 10^4\ \text{J}$$

$$E_{m,A} + W_{A\to B,\text{NC}} = E_{m,B} \Rightarrow 0 + 8{,}39 \cdot 10^4\ \text{J} = 50\ \text{kg} \cdot v_B^2 + 11.816\ \text{J}$$
$$\Rightarrow\ v_B = 37{,}96\ \text{m/s}$$

Tram de *B* a *C*



$$E_{m,B} = E_{m,C}$$
$$E_{m,C} = mgh_C$$
$$E_{m,B} = 8{,}39 \cdot 10^4\ J$$

$$h_C = \frac{E_{m,B}}{mg} = 85{,}6\ \text{m}$$

$$h_C = h_B + s \cdot \sin(30°) \Rightarrow s = \frac{h_C - h_B}{\sin(30°)} = 147\ \text{m}$$

Resum de relacions de la dinàmica de la partícula puntual

Dinàmica de la partícula	Moment de força i moment angular	Moviment de rotació (radi constant)
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times mv$	$\vec{L}_O = I_O\vec{\omega}$
$\sum \vec{F} = \vec{F}_R = m\vec{a}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$	$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M}_{R,O} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$	$\vec{M}_{R,O} = I_O\vec{\alpha}$
$\vec{I} = \int \vec{F}_r dt = \Delta\vec{p}$	$\vec{J}_O = \vec{r}_o \times \vec{I} =$ $\int \vec{M}_{R,O} dt = \Delta L_O$	
$W = \int \vec{F} d\vec{s}$	$W = \int \vec{M}_O d\theta$	
$E_C = \frac{1}{2} mv^2$		$E_C = \frac{1}{2} I_O \omega^2$
$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$	

Qüestions del tema 4

Treball i energia

1. Un cotxe de massa 1200 kg, es mou a una velocitat constant de 36 km/h pujant per un pendent que forma un angle de 5º respecte l'horitzontal. Determineu el treball desenvolupat pel motor durant 5 minuts. Negligiu totes les forces de fricció.

Sol.: $3{,}069 \cdot 10^6$ J.

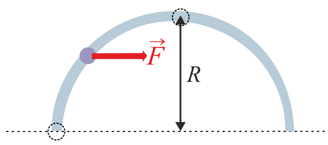
2. Una persona arrossega una caixa al llarg de 10 m sobre una superfície horitzontal. Posteriorment aixeca la caixa una alçada de 50 cm per tal de poder-la carregar dins una furgoneta. Determineu el treball fet per la persona, per la fricció i per la gravetat quan: *a)* es desplaça la caixa horitzontalment, *b)* quan puja la caixa a la furgoneta. Dades: massa de la caixa 50 kg, coeficient de fricció entre la superfície i la caixa 0.2. Atès que les velocitats del moviment són molt petites podeu negligir els canvis d'energia cinètica.

Sol.: *a)* 98,1 J, –98,1 J i 0 J; *b)* 245,25 J, 0 J i –245,25 J.

3. Un cos de massa 20 kg es llança cap amunt per un pla inclinat de pendent 37º a una velocitat de 20 m/s. Calculeu la distància recorreguda fins que s'atura: *a)* si es negligiu la fricció; *b)* considerant que el coeficient de fricció entre el cos i el terra és 0,2.

Sol.: *a)* 34 m; *b)* 26,8 m.

4. Tirem d'una massa amb una força horitzontal i constant F=200 N. L'objecte es mou a traves d'una guia semicircular. Gràcies a l'acció d'aquesta força desplacem l'objecte des de la posició inferior de la semicircumferència fins a la posició més alta, tal i com s'indica a la figura. Determineu el treball desenvolupat per aquesta força durant aquest recorregut. Si no hi ha fricció entre la guia i la massa, quin treball ha exercit la guia sobre la massa? Dada: el radi de la guia és 0,5 m.



Sol.: 100 J; 0J.

5. Un dipòsit té un volum de 10^7 m^3. Si l'aigua del dipòsit cau des d'una altura mitjana de 30 m i si el 80 % de l'energia potencial perduda per l'aigua es transforma en energia elèctrica mitjançant turbines, quanta energia elèctrica es produeix? (Densitat de l'aigua: 1.000 kg/m^3)

Sol.: $2{,}354 \cdot 10^{12}$ J.

6. Un cos de 2 kg experimenta un desplaçament $\Delta\vec{r} = (3{,}3,-2)$ al llarg d'una línia recta (totes les unitats són SI). Durant el desplaçament és afectat per una força constant $\vec{F} = (2,-1{,}1)$. *a)* Determineu el treball realitzat per la força durant el desplaçament. *b)* Determineu la component de la força en la direcció i sentit del desplaçament.

Sol.: *a*) 1 J; *b*) 0,213 N.

7. Una força actua sobre un carro de massa m de tal forma que la velocitat augmenta amb la distància en la forma $v = Cx$, on C és una constant (totes les unitats en el SI). *a)* Determineu la força F en funció de la posició. *b)* Determineu el treball que realitza F entre x=0 i x=1 m.

Sol.: *a)* $F = C^2mx$; *b)* $W = C^2\,m/2$.

Potència

8. L'atleta jamaicà Usain Bolt ha estat capaç de recórrer 100 m en 9,58 s. Determineu la potència mitjana que ha desenvolupat durant aquest cursa. Negligiu la fricció. La massa de l'atleta és 94 kg.

Sol. 2140 W.

9. Un esportista ben entrenat es capaç de pujar per una corda i a velocitat constant 4 m en vertical en 20 segons. Quina és la potència desenvolupada per l'esportista?
La massa de l'esportista és 75 kg.

Sol.: 147 W.

10. La llum solar arriba a una superfície horitzontal a un ritme de 200 W per metre quadrat d'àrea. Aquest valor és el resultat de la mitjana entre dies i nits, estacions de l'any i dies núvols i clars. Suposeu que el 10 % d'aquesta energia solar es pogués convertir en energia elèctrica, quina àrea es necessitaria per substituir una gran central nuclear que produeix 10^9 W?

Sol.: 50 km^2.

11. Els salts d'aigua del riu Niàgara, al Canadà, fan aproximadament 50 m d'altura i 800 m d'amplada. L'aigua es mou a una velocitat de 10 m/s i té una profunditat d'1 m en el moment de caure. *a)* Quin volum d'aigua cau cada segon? *b)* Quina és la pèrdua d'energia potencial d'aquest volum d'aigua en caure? *c)* Si aquesta energia es convertís directament en energia elèctrica, quina potència es produiria? *d)* La capacitat total de producció d'energia elèctrica dels Estats Units és aproximadament $5{\cdot}10^{11}$ W. Quin percentatge d'aquesta energia es podria produir si s'aprofités el 80 % de l'energia dels salts d'aigua del Niàgara?

Sol.: *a)* 8000 m^3; *b)* $3{,}92{\cdot}10^9$ J; *c)* $3{,}92{\cdot}10^9$ W; *d)* 0,63 %.

12. En una erupció volcànica són expulsats 4 km^3 de muntanya amb una densitat de 1.600 kg/m^3 a una altura de 500 m. *a)* Quina energia s'ha alliberat en l'erupció? *b)* L'energia alliberada per les bombes es mesura en megatones de TNT, on una megatona de TNT equival a $4{,}2{\cdot}10^{15}$ J. Expresseu el resultat anterior en megatones de TNT.

Sol.: *a)* $3{,}14{\cdot}10^{16}$ J; *b)* 7,47 megatones de TNT.

13. Quina potència mínima ha de tenir el motor que estira de la càpsula Fènix II, encarregada del rescat dels miners atrapats a la mina San José, a Xile? Dades: profunditat del pou: 622 m; temps que triga la càpsula Fènix II a pujar: 20 minuts; massa de la càpsula: 450 kg; massa d'un miner: uns 80 kg; a cada viatge només puja un miner.

Sol.: 2700 W.

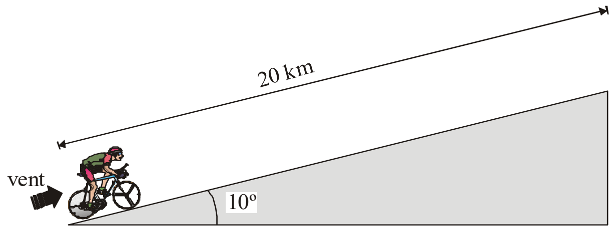
14. El motor d'una bomba d'aigua pot desenvolupar una potència de 1000 W. Si el canvi d'energia cinètica és negligible, quants quilograms d'aigua pot pujar per segon des d'un pou de 20 m de profunditat?

Sol.: 5,10 kg.

15. Un ciclista és capaç de desenvolupar una potència mitjana de 200 W durant períodes relativament llargs de temps.

a) Quant de temps trigarà a recórrer els 20 km del pla inclinat de la figura, a velocitat constant?

b) Si durant el recorregut, i com a resultat d'un corrent d'aire paral·lel al pla, apareix una força de 40 N que ajuda el ciclista durant l'ascens del pla inclinat, quant de temps trigarà a recórrer els 20 km del pla inclinat de la figura, a velocitat constant?

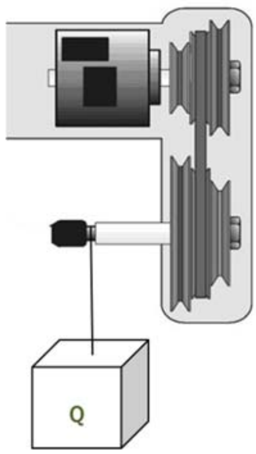


Dades: negligiu les forces de frec; massa del conjunt ciclista i bicicleta = 82 kg.

Sol.: *a)* 3 h 53 min, *b)* 2 h 46 min.

16. Una petita grua, que és moguda per un motor elèctric d'1,84 kW que gira a una freqüència angular de 1350 rpm, acciona un tambor de 74 mm de diàmetre on s'enrotlla el cable. La transmissió es fa mitjançant un con de politges reductores. En la posició intermèdia del con de politges, i tenint en compte que la transmissió presenta un rendiment del 95 %, determineu: *a)* el parell de forces que proporciona el motor, *b)* la potència disponible a la sortida de la transmissió, *c)* la velocitat angular disponible a la sortida de la transmissió, i *d)* la càrrega màxima *Q* que podrà aixecar la grua i la velocitat lineal amb què ho farà.

Els diàmetres de les politges motriu (unida al motor) i conduïda (unida al tambor) són 120mm i 300 mm.

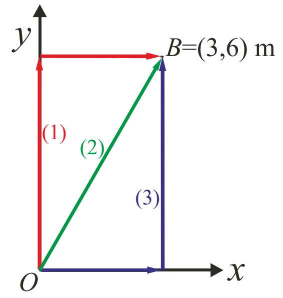


Sol.: *a*) 13,02 Nm; *b*) 1748 W; *c*) 56,55 rad/s; *d*) 835,4 N i 2,1 m/s.

17. L'escala mecànica d'uns grans magatzems s'ha dissenyat de manera que pugui traslladar 100 persones per minut des d'una planta a la superior, que es troba 6 m per sobre. Si el pes mitjà de les persones és de 68 kg i el 30 % de la potència es perd per culpa del fregament, calculeu la potència que cal que subministri el motor.

Sol.: 8672 W.

Forces conservatives



18. Calculeu el treball que fa la força $\vec{F} = (4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$ quan actua sobre un objecte que es desplaça des del l'origen al punt B seguint les trajectòries (1), (2) i (3). Aquest força és conservativa?

Sol. $W_{0\to B,(1)} = W_{0\to B,(2)} = W_{0\to B,(3)} = 30$ J. No es pot afirmar.

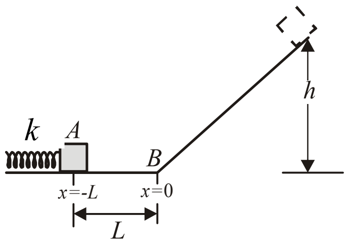
19. Repetiu el problema anterior però per una força $\vec{F} = (4y\vec{\imath} + 3x^2\vec{\jmath})$. Aquest força és conservativa?

Sol. $W_{0\to B,(1)} = 72$ J, $W_{0\to B,(2)} = 90$ J, $W_{0\to B,(3)} = 162$ J. No.

20. Quin treball ha de fer una bomba per pujar 100 kg d'aigua des del fons d'un pou de 300 m fins a la superfície a velocitat constant?

Sol.: 294.000 J.

21. El bloc de massa *m* de la figura es troba inicialment al punt *A* aturat en contacte amb la molla de constant elàstica *k*, que està comprimida una llargada *L* ($x_A = -L$). Quan es deixa anar, el bloc puja per la rampa fins a una altura màxima *h*. Calculeu *L* en funció de l'altura *h*. Determineu la velocitat de la massa quan passa pel punt *B* ($x = 0$) en funció de l'altura *h*. La posició d'equilibri de la molla es troba a $x = 0$.

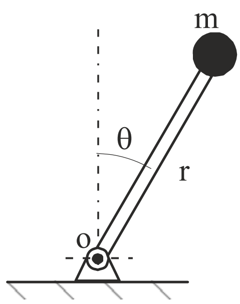


Sol.: $L = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$; $v_B = \sqrt{2gh}$.

22. Dues forces iguals actuen sobre dos cossos de masses diferents (1 kg i 1 g, respectivament) i que inicialment estan aturats. Si el temps que actuen ambdues forces és el mateix, calculeu: *a)* la relació entre les velocitats d'ambdues masses; *b)* la relació entre l'energia cinètica d'ambdues masses.

Sol.: *a)* $v_2/v_1 = 1.000$; *b)* $E_{c2}/E_{c1} = 1.000$.

23. Una esfera de massa *m* està enganxada a una vareta lleugera (de massa negligible) que pot girar al voltant de l'eix *O*. La distància entre l'eix i la massa és *r*. Si l'esfera se situa inicialment amb un angle $\theta = 0$º i es deixa anar amb velocitat inicial nul·la, determineu el valor de l'angle θ per al qual la força feta per l'esfera sobre la vareta passa de compressió a estirament.

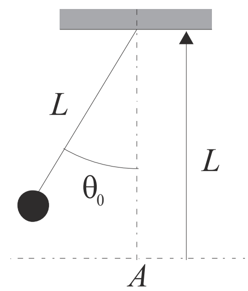


Sol.: $\theta = 48{,}21$º.

24. La força que actua sobre una partícula és $F_x = -ax^2$, sent a una constant. Calculeu la funció d'energia potencial sabent que $U(0) = 0$ J.

Sol.: $U = \frac{a}{3}x^3$.

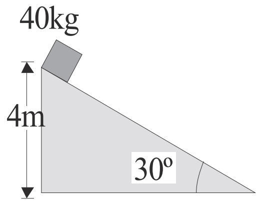
25. El pèndol de la figura està constituït per un fil de longitud L i de massa negligible del qual penja una bola de massa m. Si inicialment està en repòs formant un angle θ_0 amb la vertical, calculeu la seva velocitat quan passa pel punt A i la màxima altura que assolirà al costat dret del punt A.



Sol.: $v_A = \sqrt{2gL\,(1-\cos\theta_0)}$; $h_{màx} = L\,(1-\cos\theta_0)$

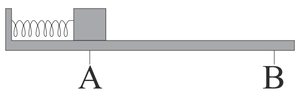
Forces no conservatives

26. Calculeu la velocitat a la qual arriba al final del pla inclinat la massa de 40 kg representada a la figura, si inicialment està aturada a la part més alta del pla (4 m) i el pla forma un angle de 30º amb l'horitzontal. El coeficient de fregament dinàmic entre la superfície del pla i el bloc és de 0,2.



Sol.: v = 7,16 m/s

27. El bloc de massa 2 kg de la figura es troba inicialment al punt A, aturat en contacte amb la molla de constant elàstica 12.000 N/m, que està comprimida 10 cm. Quan es deixa anar el bloc, s'atura en el punt B. Calculeu la distància entre els punts A i B. (Dades: el coeficient de fricció dinàmic entre el bloc i el terra és 0,2.)

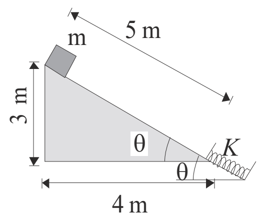


Sol.: 15,2 m

28. Un cos de 20 kg de massa es llança cap amunt per un pla inclinat 37º a una velocitat de 20 m/s. Calcula la distància que recorre fins que s'atura. El coeficient de fricció dinàmic entre el cos i el terra és 0,2.

Sol.: 26,8 m.

29. Es deixa caure un bloc de massa 0,73 kg al llarg d'un pla inclinat de 5 m de longitud i sense fricció. Al final de la rampa hi ha una molla de constant k = 1.200 N/m. *a)* Determineu la compressió de la molla quan la massa es troba a baix i aturada. *b)* Quina magnitud té la velocitat quan la massa entra en contacte amb la molla?

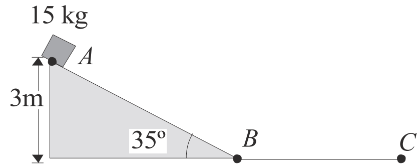


Sol.: 0,19 m; 7,7 m/s.

30. Repetiu el problema anterior, però suposant que hi ha fregament entre el pla inclinat i la massa. Suposeu que el coeficient de fricció dinàmic és μ_D = 0,1.

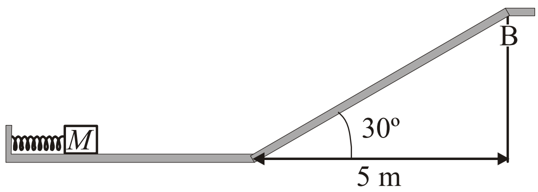
Sol.: 0,18 m; 7,14 m/s.

31. Es deixa anar amb velocitat inicial nul·la una massa de 15 kg des d'un punt *A* situat a 3 m d'alçada. *a)* Si la massa baixa per un pla inclinat de 35º de pendent sense fregament, amb quina velocitat arriba al punt *B*? *b)* Si la massa queda aturada al punt *C*, quina distància separa els punts *B* i *C*? (Dades: el coeficient de fregament entre *B* i *C* és de 0,3.)



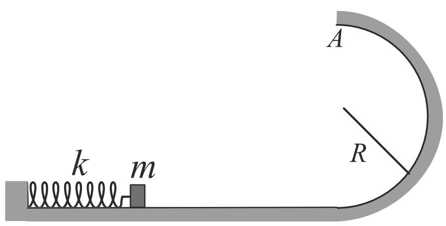
Sol.: *a)* 7,67 m/s; *b)* 10 m.

32. L'objecte *M* de la figura està aturat, té una massa de 0,6 kg i la constant elàstica de la molla és de 900 N/m. En el tram horitzontal el fregament és negligible; per contra, el coeficient de fricció dinàmic del pla inclinat és 0,15. Quina longitud mínima s'ha de comprimir la molla per tal que el bloc arribi fins al punt B?



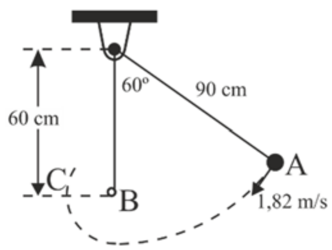
Sol.: 22 cm.

33. Volem que l'objecte de massa m=4 kg assoleixi el punt *A*, a dalt de tot de la semicircumferència de radi R = 0,5 m que forma la pista. Per donar energia cinètica a l'objecte, fem servir una molla de constat elàstica k = 400 N/m. *(a)* quina ha de ser la compressió mínima de la molla per que això passi? i *(b)* quin moviment descriu l'objecte quan abandona la pista en el punt A. Dades: suposeu que no hi ha frec entre l'objecte i la pista.



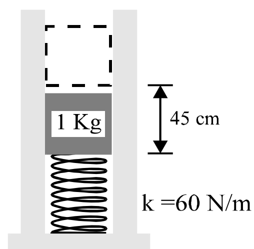
Sol.: *a)* 0,49 m; *b)* tir parabòlic.

34. L'esfera de la figura surt inicialment de la posició *A* amb una velocitat inicial d'1,82 m/s, oscil·lant en el pla vertical. A la posició més baixa el cordill xoca amb una barra fixa *B* i l'esfera continua oscil·lant, segons indica la trajectòria discontínua. Calculeu la velocitat de la bola en el punt *C*.

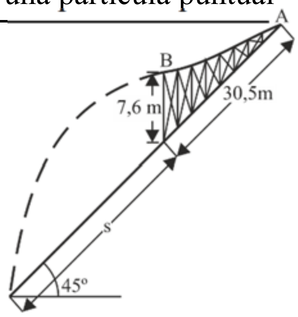


Sol.: 2,5 m/s.

35. Un pes d'1 kg es troba inicialment aturat i comprimint una molla vertical. La molla té una constant de 60 N/m. Si la comprimim 45 cm respecte a la posició d'equilibri inicial, calculeu l'altura màxima que assolirà el pes per damunt de la posició d'equilibri. Quina és la velocitat màxima que assolirà el pes? Suposeu que l'objecte està soldat a la molla.

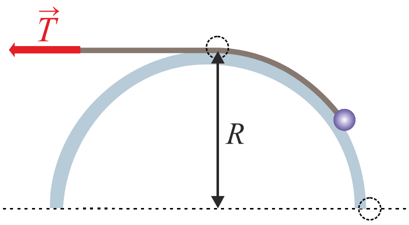


Sol.: h = 45 cm; v = 3,48 m/s.



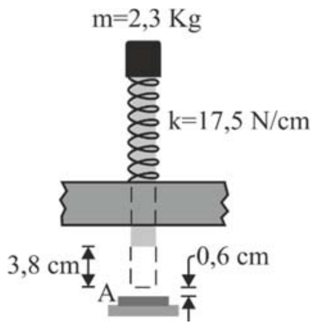
36. Un esquiador, inicialment aturat al punt *A*, llisca fins al punt *B* amb un fregament negligible. En el punt *B* salta i aterra a la muntanya, que té un pendent de 45º. Calculeu la distància màxima *s* que pot assolir l'esquiador si negligiu el fregament amb l'aire. Nota: suposeu que la velocitat és horitzontal quan l'esquiador deixa la plataforma de salt.

Sol.: 88,6 m.



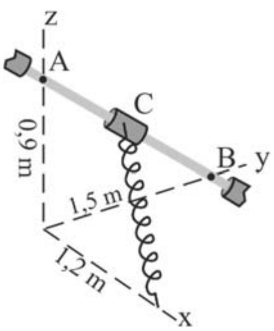
37. Una petita esfera de 0.5 kg de massa es pot desplaçar sense fregament al llarg d'una guia semicircular. Inicialment, la esfera es troba aturada al punt més baix de la guia. Posteriorment i mitjançant una corda tirem de la esfera aplicant una tensió constant de 150 N. a) Calculeu el treball que hem fet amb la tensió de la corda. b) Determineu la velocitat final de l'esfera. Dades: el radi *R* de la guia és de 30 cm.

Sol.: *a*) 70,7 J; *b)* 16,6 m/s.



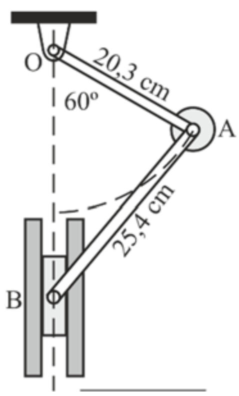
38. El piu del pistó vertical de 2,3 kg ocupa la posició marcada amb ratlles discontínues quan es troba en equilibri sota l'acció de la molla, de constant elàstica k = 17,5 N/cm. Els extrems de la molla estan soldats a la part superior del pistó i a la placa base. Aixequem el pistó 3,8 cm pel damunt de la seva posició d'equilibri, i després el deixem anar amb una velocitat inicial nul·la. Calculeu la velocitat v del pistó quan colpegi el bloc *A*. Podeu negligir els efectes de fregament.

Sol. v = 1,035 m/s.



39. El collar lliscant de 2,5 kg de massa (indicat com a *C* a la figura) està soldat a una molla i es mou des d'*A* fins a *B* al llarg de la barra fixa. El collar C té una velocitat d'1,8 m/s quan es troba en el punt A i una velocitat de 2,4 m/s quan es troba en el punt B. Calculeu el treball fet per la força de fricció del collar amb la barra. La molla té una constant de 30 N/m i una longitud natural de 0,9 m. Trobeu també la força de fregament mitjana F_m entre la barra i el collar en el trajecte de *A* a *B*.

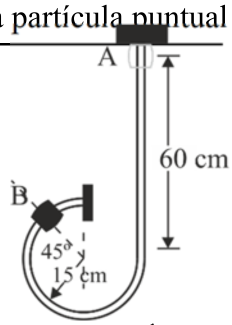
Sol.: $W_{Fm} = -8{,}69$ J; $F_m = 5{,}0$ N.



40. Els dos objectes de la figura, *A* i *B*, tenen la mateixa massa, *m*. Estan connectats mitjançant unes varetes pivotades de massa negligible. Si es deixa anar l'objecte *A* amb velocitat inicial nul·la des de la posició indicada a la figura, calculeu la seva velocitat, v_A, en passar per la línia vertical central. Podeu negligir tots els efectes de fregament.

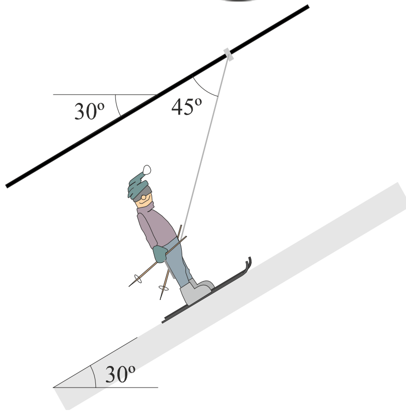
Sol.: v_A = 2,32 m/s.

41. Es deixa anar, des de la posició *A*, un cursor de 200 g de massa. La velocitat inicial és zero, i el cursor llisca cap avall sense frec. Determineu la reacció *N* de la guia quan el cursor passa pel punt *B*.



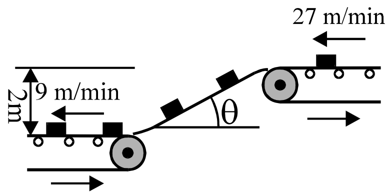
Sol.: 11,53 N.

42. Hem de construir un teleesquí constituït per un cable al qual podran agafar-se, de les corresponents manilles, els esquiadors que han de ser remolcats. El pendent de la pista per on son remolcats és de 30º. L'angle que formen les manilles respecte el cable és de 45º. El cable i els esquiadors han de pujar a una velocitat de 10 km/h. El sistema ha de tenir la capacitat de pujar uns 50 esquiadors de 75 kg de massa. L'eficiència del sistema és del 80% i el coeficient de fricció dinàmic entre els esquís i el terra és de 0,1. Quina potència ha de tenir el motor que tira del cable?



Sol.: 68.000 W.

43. La cinta transportadora superior de la figura descarrega petits blocs metàl·lics a la rampa amb una velocitat de 27 m/min. Si el coeficient de fregament entre els blocs i la rampa és de 0,3, determineu l'angle θ que ha de formar la rampa amb l'horitzontal de manera que es transfereixin els blocs, sense relliscar, a la cinta transportadora inferior, que es mou a una velocitat de 9 m/min.



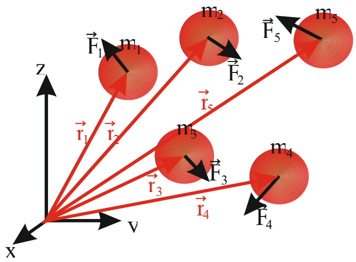
Sol.: $\theta = 16{,}63º$.

II. Dinàmica de sistemes de partícules i del sòlid rígid

5. Sistemes de partícules

Objectius

Concepte de centre masses
Dinàmica del centre de masses d'un sistema de partícules
Conservació de la quantitat de moviment en un sistema aïllat
Descripció del moviment relatiu respecte al centre de masses
Concepte de treball fictici
Descripció dels xocs elàstic i inelàstic



Un sistema de partícules és un conjunt de partícules puntuals considerades com un tot. Un sistema de N partícules queda descrit pel conjunt de posicions $\vec{r}_i$ i masses m_i de les partícules. Anomenarem $\vec{F}_i$ la força resultant aplicada sobre la partícula i.

En aquest tema descobrirem que el moviment del sistema de partícules està governat per les forces externes. A més, les conclusions d'aquest tema també seran vàlides per al tema 6, atès que el sòlid rígid és un cas particular de sistema de partícules.

Centre de masses

El centre de masses d'un sistema de partícules es defineix com:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots m_N\vec{r}_N}{m_T} \Leftrightarrow m_T\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$

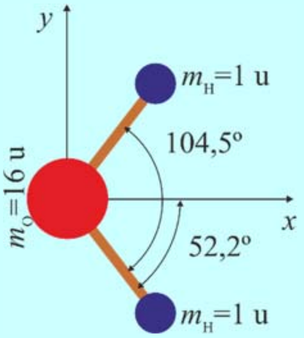
on $m_T = \sum_{i=1}^{N} m_i$ és la massa total del sistema.

En components s'expressen com:

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{m_T}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{m_T}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{m_T}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r}_{\mathrm{CM}} = x_{\mathrm{CM}}\vec{\imath} + y_{\mathrm{CM}}\vec{\jmath} + z_{\mathrm{CM}}\vec{k}$$

El centre de masses és una posició mitjana ponderada per la massa de les partícules.

Exemple 1: Determineu el CM d'una molècula d'aigua (figura), formada per un àtom d'oxigen, amb massa 16 u (u = unitat de massa atòmica) i dos d'hidrogen, cadascun de massa 1 u. La distància entre el centre d'un àtom d'hidrogen i un d'oxigen és de 9,6 nm. Així mateix, l'angle d'obertura de la molècula és de 104,5º.



$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{16 \times 0 + 2(1 \times 9{,}6 \times \cos 52{,}2)}{18} = 0{,}654 \text{ nm}$$
$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{16 \times 0 + 1 \times 9{,}6 \times \sin 52{,}2 - 1 \times 9{,}6 \times \sin 52{,}2}{18} = 0 \text{ nm}$$

Tot seguit veurem que el centre de masses té una sèrie de propietats que el fan molt adient per descriure d'una manera més senzilla la dinàmica d'un sistema de partícules.

Dinàmica del centre de masses

Si derivem respecte al temps,

$$m_T \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_T \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots m_N \vec{v}_N$$

I si tornem a derivar respecte al temps,

$$m_T \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \cdots m_N \vec{a}_N$$

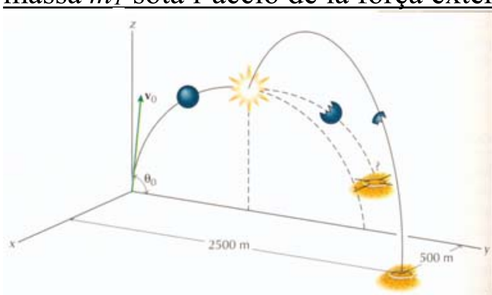
Si notem com a $\vec{F}_i$ la força resultant sobre la partícula i, és a dir, que $\vec{F}_i$ és la suma de forces aplicades sobre la partícula i,

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

Així doncs,

$$m_T \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{\mathrm{int}} + \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}}$$

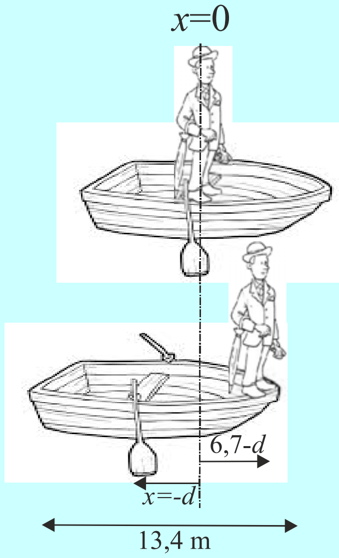
Per la tercera llei de Newton, les forces internes s'anul·len dues a dues; així doncs, el centre de masses d'un sistema de partícules es mou com una partícula puntual de massa m_T sota l'acció de la força externa resultant que actua sobre el sistema.



Tot i que el moviment del saltador de la dreta és complicat, el CM segueix una trajectòria parabòlica com si d'una partícula puntual es tractés.

Això representa una simplificació, atès que el moviment d'una partícula del sistema pot ser molt complicat; en canvi, és fàcil calcular el moviment del centre de masses.

Exemple 2: Un home de 70 kg està dret al centre d'una canoa de 30 kg de massa i 13,4 m de longitud que està aturada. L'home es desplaça cap a la part davantera de la barca, la proa. Quina distància es bellugarà la canoa?



Com que no hi ha forces externes horitzontals, el centre de masses no canvia de posició.

$$_{\mathrm{CM}} = \frac{70 \times (6{,}7 - d) - 30d}{100} = 0\ m$$

$$469\ \mathrm{m} = 100\ d$$
$$d = 4{,}69\ \mathrm{m}$$

La importància d'aquest darrer resultat rau en el fet que el moviment de les partícules individuals pot ser molt complex, a causa de les forces internes, però el moviment del centre de masses és el mateix d'una partícula puntual sotmesa només a les forces externes, que és, per tant, un moviment molt més simple.

Conservació de la quantitat de moviment

Per altra banda, la quantitat de moviment del centre de masses és:

$$\vec{p}_{\mathrm{CM}} = m_T \vec{v}_{\mathrm{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_N$$

És a dir, <u>la quantitat de moviment de tot el sistema de partícules és igual a la quantitat de moviment del centre de masses</u>.

Si derivem l'expressió anterior tenim que

$$\frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

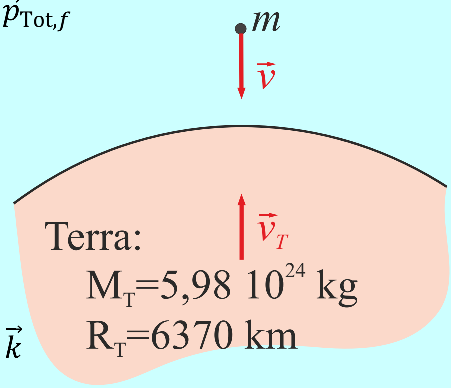
Llavors, si $\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \vec{0}$, la quantitat de moviment del centre de masses –i, per tant, la quantitat de moviment total– roman constant, no varia amb el temps. Aquest resultat és el <u>*teorema de la conservació de la quantitat de moviment*</u>, i es compleix sempre que tinguem un sistema aïllat.[2]

És important tenir present que, encara que les forces internes poden ser molt grans, per exemple en una explosió o un xoc, si el sistema està aïllat, la quantitat de moviment total es manté constant.

[2] Sistema aïllat: conjunt de partícules aïllades dels voltants, és a dir, que l'exterior no exerceix cap força sobre el sistema.

<u>Exemple 3</u>: Es deixa caure una bola d'1 kg de massa des d'un edifici alt. Calculeu la direcció i el sentit de la velocitat que adquireix el planeta Terra com a resultat de la força gravitatòria exercida per la bola al cap d'1 s d'iniciar-se el moviment de caiguda lliure de la bola.

El sistema Terra-bola és un sistema aïllat: $\vec{p}_{\text{Tot},0} = \vec{p}_{\text{Tot},f}$



$$\left.\begin{array}{r}\vec{p}_{\text{Tot},0} = \vec{0}\\ \vec{p}_{\text{Tot},f} = \vec{p}_{M_T} + \vec{p}_m\end{array}\right\} \vec{p}_{M_T} = -\vec{p}_m$$

$$\vec{v} = -gt\vec{k} = -9{,}81 \text{ m/s } \vec{k}$$

$$\vec{p}_m = -9{,}81 \text{ kgm/s } \vec{k}$$

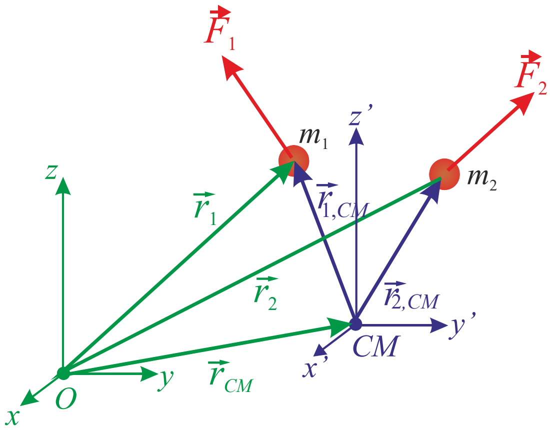
$$\vec{p}_{M_T} = M_T\vec{v}_T = -\vec{p}_m = 9{,}81 \text{ kgm/s } \vec{k}$$

$$\vec{v}_T = \frac{9{,}81 \text{ kgm/s } \vec{k}}{5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}} = 1{,}64 \times 10^{-24} \text{ m/s } \vec{k}$$

Moviment relatiu al centre de masses

En aquest apartat descriurem el moviment del sistema de partícules agafant com a origen de coordenades el centre de masses:

$$\begin{cases}\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_{i,\text{CM}}\\ \vec{v}_i = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{u}_i\\ \vec{a}_i = \vec{a}_{\text{CM}} + \vec{a}_{i,\text{CM}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{r}_{i,\text{CM}} = \vec{r}_i - \vec{r}_{\text{CM}}\\ \vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{\text{CM}}\\ \vec{a}_{i,\text{CM}} = \vec{a}_i - \vec{a}_{\text{CM}}\end{cases}$$



on $\vec{r}_{i,\text{CM}}$ és la posició de la partícula i respecte al centre de masses, on $\vec{u}_i$ és la velocitat de la partícula i respecte al centre de masses i $\vec{a}_{i,\text{CM}}$ és l'acceleració de la partícula i respecte al centre de masses.

Un resultat que farem servir:

$$m_T\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_{i,\text{CM}}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{i,\text{CM}}$$
$$= m_T\vec{r}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{i,\text{CM}}$$

Llavors,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{i,\text{CM}} = \vec{0}$$

Observeu que, com que la quantitat de moviment total del sistema és igual a la quantitat de moviment del centre de masses,

$$\vec{p}_T = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{u}_i = m_T\vec{v}_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{u}_i$$
$$= \vec{p}_T + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{u}_i$$

llavors la quantitat de moviment relativa al centre de masses és nul·la:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

Energia cinètica del sistema de partícules

L'energia cinètica total no coincideix amb l'energia del centre de masses: cal afegir-hi la contribució del moviment relatiu respecte al centre de masses, és a dir, que <u>*l'energia cinètica del sistema de partícules = energia del centre de masses + energia relativa al centre de masses*</u>.

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_T v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2$$

Demostració: $\vec{0}$

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{u}_i)(\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \cancelto{\vec{0}}{\vec{u}_i}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}} \vec{u}_i = \frac{1}{2} m_T v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2 + \vec{v}_{\mathrm{CM}} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_i =$$

$$= \frac{1}{2} m_T v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2$$

Recordeu que hem vist abans que

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

Noteu que el teorema de les forces vives segueix essent vàlid, per a cada partícula:

$$W_i = \int \vec{F}_i \, d\vec{s}_i = \frac{1}{2} m_i v_f^2 - \frac{1}{2} m_i v_0^2$$

on $\vec{F}_i$ és la suma de forces aplicades sobre la partícula *i* i $d\vec{s}_i$ és el desplaçament de la partícula *i*. I, per al sistema de partícules,

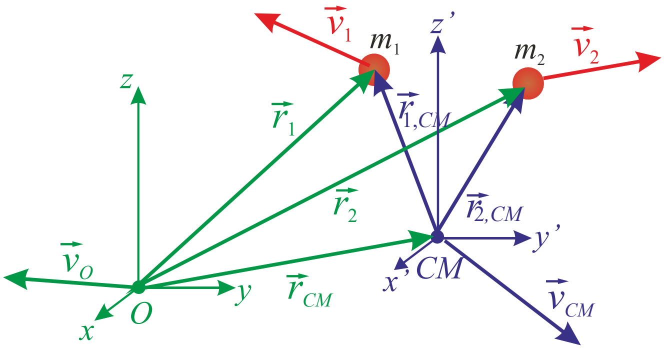
$$W_{\mathrm{Tot}} = \sum_{i=1}^{N} \int \vec{F}_i \, d\vec{s}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{i,f}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{0,f}^2 = E_{C,f} - E_{C,0}$$

Com que l'energia total del sistema no coincideix amb la del centre de masses, del teorema de les forces vives és evident que el treball fet sobre el centre de masses no és igual al treball total, sinó que només ens dona l'energia cinètica del centre de masses. Aquest treball es coneix com a treball fictici,

$$W_{\mathrm{Fictici}} = \sum_{i=1}^{N} \int \vec{F}_i \, d\vec{s}_{\mathrm{CM}} = \int \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right) d\vec{s}_{\mathrm{CM}} = \int \left(\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}}\right) d\vec{s}_{\mathrm{CM}}$$

$$= \frac{1}{2} m_T v_{\mathrm{cm},f}^2 - \frac{1}{2} m_T v_{\mathrm{cm},0}^2$$

Moment angular



El moment angular respecte a un punt O qualsevol és la suma dels moments angulars individuals de cada partícula:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{v}_i$$

També podem expressar el moment d'un punt O respecte al CM:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{i,\mathrm{CM}}) \times (\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{u}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{i,\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{i,\mathrm{CM}} \times \vec{u}_i =$$

$$= m_T \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_i + \vec{0} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{L}_{\mathrm{CM}} = m_T \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{0} + \vec{L}_{\mathrm{CM}} =$$

$$= m_T \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{L}_{\mathrm{CM}}$$

És a dir, el moment angular respecte d'un punt O és la suma de dues contribucions:

$$\vec{L}_O = m_T \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{L}_{\mathrm{CM}}$$

- La primera contribució és el moment angular que resultaria de *concentrar tota la massa del sistema en el centre de masses*, $m_T \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}}$
- La segona contribució correspon al moviment relatiu al centre de masses. És el moment angular respecte del centre de masses, tenint en compte només les velocitats relatives a aquest punt: $\vec{L}_{\mathrm{CM}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{i,\mathrm{CM}} \times \vec{u}_i$

Per altra banda, els canvis del moment angular estan determinats exclusivament per la suma dels moments de les forces externes. Si O és un punt fix, $\vec{v}_O = \vec{0}$:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{\mathrm{ext},O}$$

És important tenir en compte que la darrera relació només és vàlida si la velocitat del punt O és nul·la, $\vec{v}_O = \vec{0}$.

Demostració:

del tema 3 sabem, per a una partícula, que si $\vec{v}_O = \vec{0}$

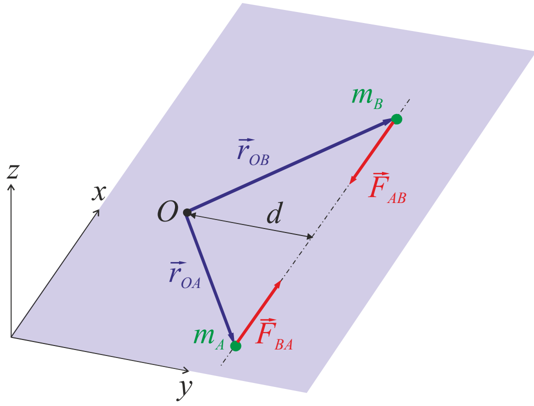
$$\frac{d\vec{L}_{O,i}}{\mathrm{dt}} = \sum \vec{M}_{O,i}$$

Llavors, per a tot el sistema,

$$\frac{d\vec{L}_O}{\mathrm{dt}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_{O,i}}{\mathrm{dt}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\mathrm{ext},O,i} + \sum_{i=1}^{N} \cancelto{\vec{0}}{\vec{M}_{\mathrm{int},O,i}} = \sum \vec{M}_{\mathrm{ext},O}$$

En la demostració anterior hem considerat nul·la la contribució de les forces internes, atès que s'eliminen dues a dues. Per a les forces internes, segons la tercera llei de Newton: $\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}}$,

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O,\mathrm{AB}} + \vec{M}_{O,\mathrm{BA}} &= \vec{r}_{O,B} \times \vec{F}_{\mathrm{AB}} + \vec{r}_{O,A} \times \vec{F}_{\mathrm{BA}} = \\ &= \vec{F}_{\mathrm{AB}} \cdot d \cdot \vec{k} - \vec{F}_{\mathrm{AB}} \cdot d \cdot \vec{k} = \\ &= \vec{F}_{\mathrm{AB}} \cdot d \cdot \vec{k} - \vec{F}_{\mathrm{AB}} \cdot d \cdot \vec{k} = \vec{0}\end{aligned}$$



Moment angular relatiu al centre de masses

Igual que per a la quantitat de moviment, el càlcul del moment angular és relativament senzill per al centre de masses, encara que es mogui amb una velocitat no nul·la. Això és degut a les propietats exclusives del centre de masses:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i,CM} \times m_i\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{r}_{i,CM} \times m_i\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i,CM} \times m_i \frac{d}{dt}\vec{u}_i = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{u}_i \times \overbrace{\cancel{m_i\vec{u}_i}}^{\vec{0}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i,CM} \times m_i\vec{a}_{i,CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i,CM} \times m_i(\vec{a}_i - \vec{a}_{CM}) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i,CM} \times m_i\vec{a}_i - \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i,CM} \times m_i\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i,CM} \times \vec{F}_i - \Bigg(\overbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{i,CM}}}^{\vec{0}}\Bigg) \times \vec{a}_{CM} = \\ &= \vec{r}_{i,CM} \times \Big(\sum \vec{F}_{ext} + \overbrace{\cancel{\sum \vec{F}_{int}}}^{\vec{0}}\Big) = \vec{r}_{i,CM} \times \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{M}_{ext,CM}\end{aligned}$$

És a dir,

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext,CM}}$$

encara que $\vec{v}_{\mathrm{CM}} \neq \vec{0}$, sempre és vàlid per al centre de masses.

Xocs

En els xocs entre objectes es desenvolupen unes forces molt intenses en un temps relativament curt. En aquestes condicions, el conjunt dels objectes es pot considerar com un sistema aïllat durant la col·lisió. Les forces associades al xoc són internes, i a més són molt més intenses que les forces externes (friccions, gravetat...), de manera que durant el xoc el canvi de velocitat dels objectes està determinat bàsicament per les forces internes, i l'efecte de les forces externes és negligible. Per tant, en els problemes de xocs podem considerar que la quantitat de moviment del conjunt d'objectes es manté constant durant el curt interval de temps que dura el xoc.

Pel que fa a l'energia, en els xocs podem distingir:

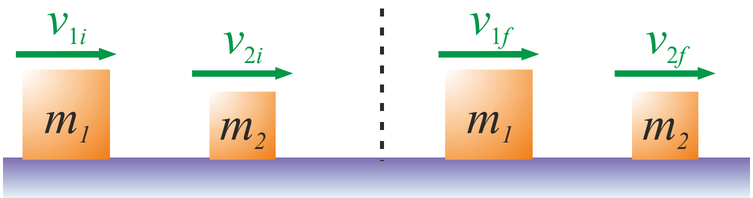
- Xocs elàstics: els objectes es deformen elàsticament, de manera que l'energia es conserva i els objectes recuperen la forma inicial després del xoc.

- Xoc inelàstic: els objectes pateixen deformacions plàstiques, és a dir, queden deformats de forma permanent. Per deformar els objectes cal aplicar un treball; per tant, una part de l'energia del sistema és absorbida. Quan els objectes queden enganxats es produeix la màxima pèrdua d'energia; aquest cas es coneix com el xoc perfectament inelàstic.

No sempre es perd energia. Un cas particular que es tracta com un xoc inelàstic són les explosions, en què l'energia cinètica augmenta a costa de l'energia química alliberada durant l'explosió. Primer analitzarem els xocs en una dimensió i després farem una breu descripció dels xocs en més d'una dimensió.

Xoc unidimensional elàstic

Com que el sistema és unidimensional, els vectors velocitat i quantitat de moviment poden ser descrits per una única component. El seu valor absolut coincideix amb el mòdul, v o p, però a diferència del mòdul té signe positiu o negatiu segons el sentit del moviment.



Inicial: v_{1i} i v_{2i}
Final: v_{1f} i v_{2f}

Conservació de la quantitat de moviment:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Conservació de l'energia cinètica:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Combinant les dues equacions s'obté:

$$-(v_{1,f} - v_{2,f}) = v_{1,i} - v_{2,i}$$

El terme $v_{1,i} - v_{2,i}$s'anomena *velocitat relativa d'acostament* i és la velocitat de l'objecte 1 respecte a l'objecte 2; és la velocitat amb què l'objecte 1 s'acosta a l'objecte 2. Perquè hi hagi xoc, la velocitat relativa d'acostament ha de ser positiva, si no l'objecte 2 s'allunyaria indefinidament de l'objecte 1.
El terme $v_{1,f} - v_{2,f}$s'anomena *velocitat relativa de retrocés*; és la velocitat final de l'objecte 1 respecte a l'objecte 2, és a dir, la velocitat amb què l'objecte 1 s'allunya del 2.

Demostració:

Conservació de la quantitat de moviment:

$$-m_1(v_{1f} - v_{1i}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

Conservació de l'energia cinètica:

$$-m_1(v_{1f}^2 - v_{1i}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m_1(v_{1f} - v_{1i})(v_{1f} + v_{1i}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

Si dividim l'equació de la conservació de l'energia cinètica per l'equació de la quantitat de moviment, obtenim:

$$(v_{1f} + v_{1i}) = (v_{2f} + v_{2i})$$

i, reagrupant termes, surt:

$$v_{2,f} - v_{1,f} = v_{1,i} - v_{2,i}$$

Exemple 4: Demostreu que en un xoc elàstic en una dimensió entre dos objectes de masses m_1 i m_2, amb l'objecte m_1 que es mou inicialment amb velocitat v_{1i} i l'objecte m_2 que està quiet, les velocitats dels objectes després del xoc, v_{1f} i v_{2f}, són:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \text{ i } v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

Quant valen v_{1f} i v_{2f} si *a)* $m_1 >> m_2$, *b)* $m_2 >> m_1$ i *c)* $m_1 = m_2$?

Conservació de la quantitat de moviment: $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$
Conservació de l'energia: $v_{2,f} - v_{1,f} = v_{1,i} - v_{2,i}$
Aïllem de la segona v_{2f}: $v_{2,f} = v_{1,i} + v_{1,f}$
I la substituïm a la primera: $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1i} + v_{1f})$
Aïllem v_{1f}: $m_1 v_{1f} + m_2 v_{1f} = m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i}$
Finalment,

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \text{ QED[3]}$$

I substituïm aquest resulta a $v_{2,f} = v_{1,i} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$ i obtenim:

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \text{ QED}$$

Casos límit:

a) $m_1 >> m_2$

$$v_{1f} \approx \left(\frac{m_1 - 0}{m_1 + 0}\right) v_{1i} = v_{1i}$$ (l'objecte 1, quan xoca amb el 2, no es veu alterat)

$$v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_1 + 0}\right) v_{1i} = 2v_{1i}$$

b) $m_2 >> m_1$

$$v_{1f} \approx \left(\frac{0 - m_2}{0 + m_2}\right) v_{1i} = -v_{1i}$$

$$v_{2f} \approx \left(\frac{2 \cdot 0}{0 + m_2}\right) v_{1i} = 0$$

(per exemple, una pilota que rebota contra una paret; la pilota retorna amb la mateixa velocitat però sentit oposat i la paret no es mou)

c) $m_1 = m_2$

$$v_{1f} = \left(\frac{0}{2m_1}\right) v_{1i} = 0$$

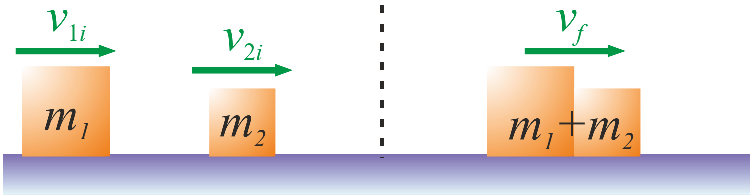
$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{2m_1}\right) v_{1i} = v_{1i}$$

(per exemple, un pèndol de Newton; la bola que impacta queda aturada i l'altra bola surt amb la mateixa velocitat que la bola incident)

---

[3] Abreviació de l'expressió llatina *quod erat demonstrandum*, que vol dir: "tal com es volia demostrar"

Xoc unidimensional perfectament inelàstic



En aquest cas els dos objectes s'uneixen de manera que només tenim una incògnita, que és la velocitat del bloc format pels dos objectes, v_f. Així, el problema es pot resoldre a partir només de la conservació de la quantitat de moviment:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \;\Rightarrow\; v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Exemple 5: Dos objectes de masses m_1 i m_2, amb l'objecte m_1 que es mou inicialment amb velocitat v_{1i} i l'objecte m_2 que està quiet, xoquen en un xoc completament inelàstic. *a*) Quina és la velocitat del centre de masses abans del xoc? *b*) I després del xoc? Quines són les velocitats dels objectes abans (*c*) i després (*d*) del xoc respecte al centre de masses, u_{1i}, u_{2i}, u_{1f} i u_{2f}? *e*) Quina és l'energia cinètica respecte al centre de masses abans del xoc? *f*) I després del xoc?

Solució:

a)

$$v_{\text{CM}} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

b)

$$v_{\text{CM}} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

Com que la quantitat de moviment total es conserva i és igual a la quantitat de moviment del centre de masses, la velocitat del centre de masses no canvia durant el xoc.

c)

$$u_{1i} = v_{1i} - v_{\text{CM}} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$u_{2i} = v_{2i} - v_{\text{CM}} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

d) Com que els objectes després del xoc queden units, es mouen a la mateixa velocitat que el centre de masses, és a dir, la seva velocitat relativa al centre de masses és zero: $u_{1f} = 0$ i $u_{2f} = 0$.

e)

$$E_{C,\text{CM},i} = \frac{1}{2} m u_{1i}^2 + \frac{1}{2} m u_{2i}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}^2$$

f)

$$E_{C,\text{CM},f} = \frac{1}{2} m u_{1f}^2 + \frac{1}{2} m u_{2f}^2 = 0$$

Com hem vist, l'energia cinètica té dues contribucions: l'energia cinètica del centre de masses i la relativa al centre de masses. La primera no varia, atès que, per la conservació de la quantitat de moviment, la velocitat del centre de masses és constant. Per altra banda, en el xoc perfectament inelàstic $u_{1f} = u_{2f} = 0$, atès que els objectes s'uneixen i per tant la seva velocitat relativa al centre de masses és nul·la. Així doncs, en el cas del xoc perfectament inelàstic la contribució de l'energia relativa al centre de masses és zero, el valor més petit possible (l'energia cinètica és zero o positiva). Per tant, *en aquest cas és quan es produeix la màxima pèrdua d'energia cinètica possible*. Noteu que l'energia cinètica final mínima és la del centre de masses, que no varia durant el xoc.

Xoc unidimensional inelàstic

En el cas que els objectes no s'uneixen però hi ha deformació plàstica, el xoc és inelàstic, però l'energia final relativa al centre de masses no és nul·la, no es perd tota l'energia. Per resoldre aquest cas calen dues equacions: d'una banda, la de conservació de la quantitat de moviment

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

I de l'altra, el balanç energètic, amb l'anomenat *coeficient de restitució*, *e*:

$$e = \frac{-(v_{1,f} - v_{2,f})}{v_{1,i} - v_{2,i}}$$

El coeficient de restitució no té unitats i és immediat comprovar que $e = 1$ en el xoc elàstic i $e = 0$ en el xoc perfectament inelàstic. En el xoc inelàstic, $0 < e < 1$. De fet, el coeficient de restitució està directament relacionat amb la pèrdua relativa d'energia cinètica respecte al centre de masses:

$$e = \sqrt{\frac{E_{C,\mathrm{CM},f}}{E_{C,\mathrm{CM},i}}}$$

Demostració:

$$E_{C,\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_1 - \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2 - \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1v_2 - m_1v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 =$$

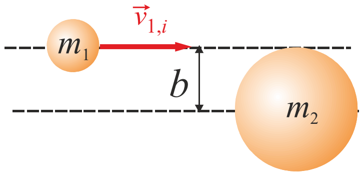
$$= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}(v_2 - v_1)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2}(v_1 - v_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

$$\frac{E_{C,\mathrm{CM},f}}{E_{C,\mathrm{CM},i}} = \frac{(v_{1,f} - v_{2,f})^2}{(v_{1,i} - v_{2,i})^2} = e^2 \qquad \text{QED}$$

Xoc bidimensional

En dues dimensions el problema és força més complex, atès que hem de determinar quatre incògnites, que són les dues components de les dues velocitats finals:
$\vec{v}_{1f} = (v_{1f,x}, v_{1f,y})$ i $\vec{v}_{2f} = (v_{2f,x}, v_{2f,y})$

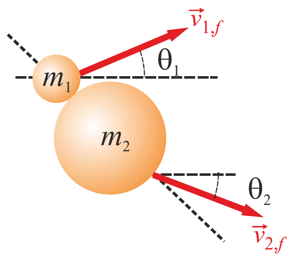


Per una banda, tenim dues equacions com a resultat de la conservació de la quantitat de moviment:

$$m_1 v_{1i,x} + m_2 v_{2i,x} = m_1 v_{1f,x} + m_2 v_{2f,x}$$
$$m_1 v_{1i,y} + m_2 v_{2i,y} = m_1 v_{1f,y} + m_2 v_{2f,y}$$

Encara necessitem dues equacions més; una ens la dona el balanç energètic:

$$e = \frac{-(v_{1,f} - v_{2,f})}{v_{1,i} - v_{2,i}}$$

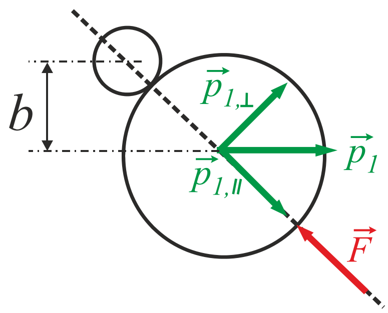


La darrera equació depèn de l'anomenat paràmetre d'impacte, *b* (vegeu la figura), que és la distància entre el centre geomètric dels dos objectes.

La força durant l'impacte està dirigida en la direcció que uneix els dos centres geomètrics quan es produeix el contacte (vegeu la figura). Llavors, en aquesta direcció, la quantitat de moviment de les partícules varia, mentre que la quantitat de moviment en la direcció perpendicular es manté constant:

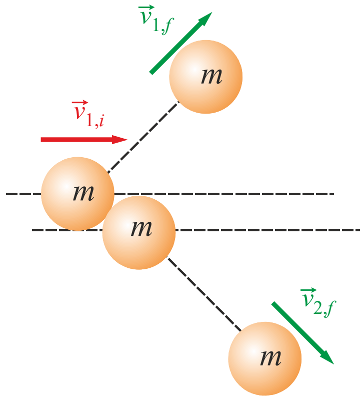
$$p_{1\perp,i} = p_{1\perp,f}$$

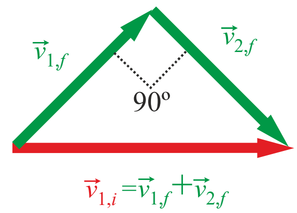
En general, és un problema complex de resoldre, però en alguns casos particulars la solució és relativament fàcil:



- Xoc frontal. En aquest cas *b*=0, i la component perpendicular coincideix amb la direcció vertical, de manera que les components de les velocitats inicials i finals en aquesta direcció són nul·les. Llavors el problema es redueix a un xoc unidimensional: totes les velocitats només tenen component horitzontal.
- Xoc perfectament inelàstic: el nombre d'incògnites es redueix a 2, atès que només cal resoldre la velocitat final del bloc format per la unió dels dos objectes. El problema es resol fent servir només la conservació de la quantitat de moviment.
- Xoc elàstic amb dos objectes d'igual massa i un dels quals té velocitat inicial nul·la. En aquest cas es pot demostrar que les direccions de les velocitats finals formen un angle de 90º.
  Conservació de la quantitat de moviment:
  $$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \Rightarrow \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$
  Conservació de l'energia:
  $$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \;\Rightarrow\; v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$
  De la primera equació, $\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$, la suma de vectors es pot representar com un triangle, i la segona equació $v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$ és el teorema de Pitàgores

per a un triangle rectangle, de manera que la solució és que les dues velocitats finals formen un angle de 90º.





Resum de propietats del centre de masses

1. El centre de masses d'un sistema de partícules es mou com una partícula puntual de massa m_T sota l'acció de la força externa resultant que actua sobre el sistema:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_T \vec{a}_{\text{CM}}$$

2. La quantitat de moviment de tot el sistema de partícules és igual a la quantitat de moviment del centre de masses:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = m_T \vec{v}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N$$

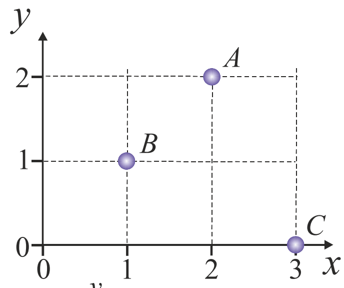
3. L'energia cinètica del sistema de partícules és igual a l'energia del centre de masses més l'energia relativa al centre de masses.

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_T v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2$$

4. Encara que $\vec{v}_{\text{CM}} \neq \vec{0}$, és vàlid per al centre de masses que

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext,CM}$$

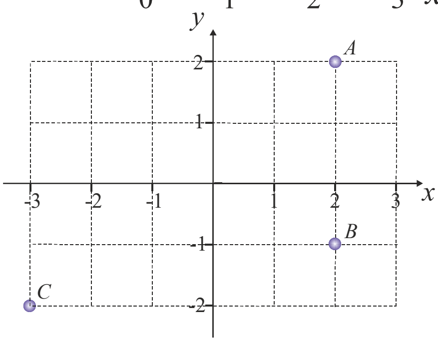
Qüestions del tema 5



Càlcul del centre de masses

1. Tres partícules, A, B i C (figura), tenen masses de 3 kg, 1 kg i 1 kg, respectivament. Trobeu les coordenades del CM.

Sol.: $\vec{r}_{\text{CM}} = (2\vec{\imath} + 1{,}4\vec{\jmath})$ m.

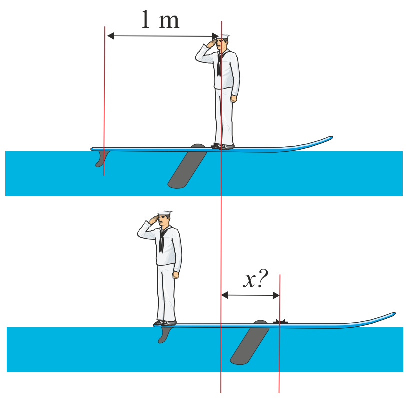


2. A quina posició hem de col·locar una massa de 2 kg per tal que el CM del sistema es trobi a l'origen. Dades: m_A=1 kg, m_B=3 kg, i m_C=2 kg. Les unitats de les posicions són metres

Sol.: $x = -1$ m, $y = 2{,}5$ m.

Conservació de la quantitat de moviment i del moment angular

3. Un mariner de 75 kg esta damunt d'una planxa de windsurf de massa 120 kg i que fa 2 metres de llarg. Inicialment el mariner està situat al centre geomètric de la planxa i la velocitat del sistema és zero. El centre de masses de la planxa també està situat al centre geomètric. El mariner es desplaça a l'extrem de la planxa. Quina distància x s'ha desplaçat el centre de masses de la planxa? Negligeix la fricció entre la planxa i l'aigua i suposa que el mariner aguanta l'equilibri i que la planxa sempre està horitzontal.



Sol.: 0,385 m.

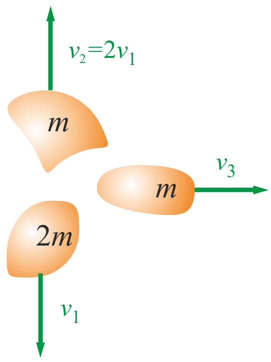
4. Un persona de 70 kg està dret al centre d'una canoa de 30 kg de massa 13,4 m que està aturada. Si es mou cap a un seient que es troba 2 m més a proa, quina distància recorrerà la canoa?

Sol.: 1,4 m.

5. Es deixa caure una bola d'1 kg de massa des d'un edifici alt. Calculeu la direcció i el sentit de la velocitat que adquireix el planeta Terra com a resultat de la força gravitatòria exercida per la bola al cap d'1 s d'iniciar-se el moviment de caiguda lliure de la bola.

Sol.: $1{,}6 \cdot 10^{-24}$ m/s cap amunt.

6. La figura mostra un projectil just després d'esclatar en tres fragments. Quina era la velocitat del projectil just abans d'esclatar? (m_1=2m, m_2=m_3=m, v_2=2v_1 vertical cap amunt i v_3 horitzontal cap a la dreta)



Sol.: $v_3/4$ cap a la dreta.

7. Un canó dispara projectils amb un cert angle. El canó té un abast de 55 m, de manera que tots els projectils cauen aproximadament a una distància de 55 m del punt on són disparats. Un projectil explota en dos fragments idèntics en el punt més alt de la trajectòria. Un dels fragments cau en vertical cap a terra (sense velocitat inicial). On cau l'altre fragment? Negligiu el fregament amb l'aire.

Sol.: 82,5 m

Xocs elàstics i inelàstics

8. Un cotxe que circula a 90 km/h xoca amb un altre cotxe que està aturat. Després del xoc, ambdós cotxes queden enganxats. Si la massa de cada cotxe és de 1.000 kg, calculeu la velocitat dels dos cotxes després del xoc i l'energia cinètica abans i després del xoc.

Sol.: v_F = 45 km/h; $E_{C,0}$ = 312.500 J, $E_{C,F}$ = 156.250 J

9. Dues masses d'1 kg i 2 kg es mouen a velocitat constant de 30 m/s i 10 m/s, respectivament, en el pla horitzontal i en el mateix sentit. Determineu la velocitat de les dues masses després del xoc. Suposeu que el xoc ha estat elàstic.

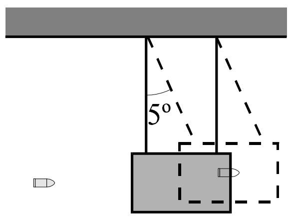
Sol.: v (1 kg) = 3,33 m/s; v (2 kg) = 23,33 m/s

10. Dues masses d'1 kg i 2 kg es mouen a velocitat constant de 20 m/s i 10 m/s, respectivament, en el pla horitzontal i en sentits oposats. Determineu la velocitat de les dues masses després del xoc. Suposeu que el xoc ha estat elàstic.

Sol.: v (1 kg) = –20 m/s; v (2 kg) = 10 m/s

11. Una pilota de 50 g xoca amb la raqueta de tennis d'un jugador a una velocitat de 60 m/s i rebota de manera que surt en la mateixa direcció però sentit oposat amb la mateixa velocitat. *a)* Calculeu l'energia cinètica de la pilota. *b)* Si la pilota ha estat en contacte amb la raqueta 0,3 s, quina és la força mitjana exercida per la raqueta sobre la pilota?

Sol.: 90 J; 20 N



12. Es dispara horitzontalment una bala de 30 g de massa contra una caixa plena de sorra. La massa total de la caixa amb la sorra és de 20 kg. La bala queda incrustada dins de la caixa. Aquesta caixa està penjada del sostre mitjançant uns fils verticals i paral·lels de 180 cm de llarg. A causa del xoc la caixa retrocedeix fins a formar un angle de 5º amb la vertical. Calculeu la velocitat de la bala. Quina quantitat d'energia cinètica es perd durant el xoc?

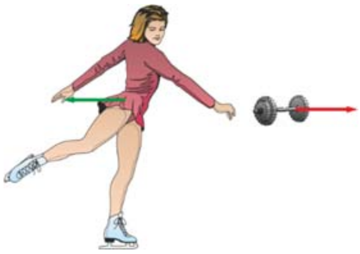
Sol.: 245 m/s, 99,85 %

13. Una pilota d'1 kg cau a terra i rebota. La velocitat de la pilota quan xoca és de 10 m/s cap avall. *a*) Si el xoc és elàstic, quina és la velocitat de la pilota just després del xoc? *b*) Quina és la velocitat de la Terra després del xoc? *c*) Quina és l'energia cinètica inicial de la pilota? *d*) Quin ha estat l'increment d'energia cinètica de la Terra després del xoc? (La massa de la Terra és de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg).

Sol.: *a*) 10 m/s cap amunt; *b*) 3,35·10^{-24} m/s cap avall; *c*) 50 J; *d*) 3,35·10^{-23} J

14. Es deixa anar una pilota de tennis damunt d'una pilota de bàsquet força més pesada des d'una altura d'uns 3 m. La pilota de tennis rebota molt per sobre dels 3 m. Calculeu a quina altura arriba la pilota de tennis suposant que el rebot és el resultat de dos xocs unidimensionals, en què primer la pilota de bàsquet rebota i posteriorment xoca contra la pilota de tennis que està caient, de manera que en el segon xoc les dues pilotes tenen velocitats en sentits oposats. Suposeu que els dos xocs són elàstics i que la massa de la pilota de bàsquet és molt més gran que la de la pilota de tennis.

Sol.: 27 m

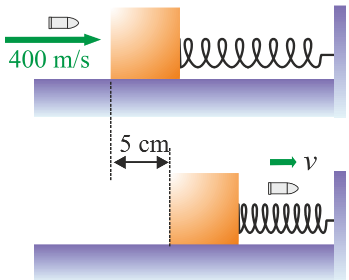


15. Una patinadora de 40 kg s'està entrenant amb dues peses de 5 kg cadascuna sobre uns patins de massa 1,5 kg cadascun. Partint del repòs llença els pesos horitzontalment un després de l'altre. Després de cada llançament la velocitat de cada pes és de 7 m/s relatiu a la patinadora. *(a)* Quina velocitat tindrà després de llençar el primer pes, i *(b)* després de llençar el segon? Considera que els patins es mouen sense fricció.

Sol.: –1,39 m/s.

16. Un bomber de 60 kg llisca a través d'una barra, la força de fricció dinàmica és constant i val 300 N. Al final de la barra, per tal d'esmorteir el cop, hi ha una plataforma horitzontal de 20 kg recolzada sobre el terra mitjançant una molla de constant 2.500 N/m. Si el bomber baixa 5 m abans de tocar la plataforma horitzontal, i suposant que inicialment la seva velocitat és zero, calculeu: *a)* la velocitat del bomber just abans del xoc amb la plataforma; *b)* la distància màxima que es comprimeix la molla.

Sol.: 6,93 m/s; 1,14 m

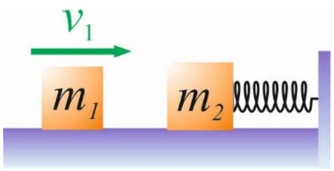


17. Una bala de 5 g es mou amb una velocitat inicial de 400 m/s i travessa un bloc d'1 kg, tal com es veu a la figura adjunta. El bloc, en repòs sobre una taula horitzontal sense fricció, està enganxat a una molla de constant k = 900 N/m. Si el bloc es mou 5 cm cap a la dreta després de l'impacte, trobeu *a)* la velocitat amb què la bala surt del bloc, *b)* la quantitat d'energia cinètica que es perd durant el xoc.

Sol.: *a*) 100 m/s, *b*) 93,5 %

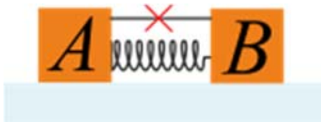
18. Un bloc de 3 kg es mou cap a la dreta a 5 m/s, i un segon bloc de 3 kg es mou cap a l'esquerra a 2 m/s. *a)* Trobeu l'energia cinètica total del sistema. *b)* Determineu la velocitat del CM del sistema. *c)* Trobeu les velocitats dels dos blocs respecte al CM. *d)* Calculeu l'energia cinètica del sistema respecte al CM. *e)* Verifiqueu que l'energia cinètica total és igual a la suma de l'energia cinètica del CM més l'energia cinètica relativa al CM: $E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i^2} = \frac{1}{2} m_T v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2$.

Sol.: *a*) 43,5 J; *b*) 1,5 m/s; *c*) 3,5 m/s i –3,5 m/s; *d*) 36,75 J.



19. Un objecte de massa m_1= 0,5 kg que es mou a una velocitat de 2 m/s xoca amb un objecte de massa m_2=0,8 kg que inicialment està aturat. El xoc és perfectament inelàstic. Si el segon objecte està unit a una molla de constant 100 N/m. Quina és la màxima compressió que pateix la molla?

Sol.: *a*) 0,0877 m.



20. Els blocs *A* i *B* estan untis per una molla i es troben sobre un carril d'aire de manera que el fregament entre els blocs i el carril és negligible. La molla està comprimida gràcies a un fil que uneix els dos blocs. Quan tallem el fil l'energia elàstica de la molla es converteix en energia cinètica dels blocs *A* i *B*. Demostra que es compleix la següent relació:$\frac{E_{CA}}{E_{CB}} = \frac{m_B}{m_A}$
Suposeu que la massa de la molla és negligible.

21. Un protó de massa 1,01 uma (1 unitat de massa atòmica = $1{,}66\cdot10^{-27}$ kg) que es mou a una velocitat de $3{,}60\cdot10^{4}$ m/s pateix un xoc frontal amb un nucli d'heli que està aturat. La massa del nucli d'heli és 4,00 uma. Quines són les velocitats del protó i del nucli d'heli després del xoc?

Sol.: $v_{\text{Protó}} = -2{,}15 \cdot 10^4\ \text{m/s}$ i $v_{\text{Protó}} = 1{,}45 \cdot 10^4\ \text{m/s}$.

22. Des d'un edifici de 60 m d'alçada deixem caure una pilota de massa 200 g amb coeficient de restitució respecte el paviment del carrer de 0,8. Determineu l'altura a la qual ascendeix després de botar tres vegades contra el terra.

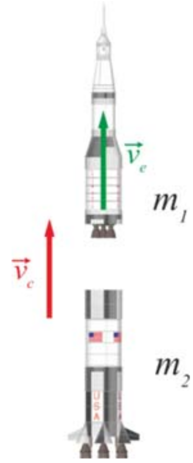
Sol.: 15,7 m.

23. Quan una pilota xoca en una dimensió contra una paret i rebota, el xoc és pràcticament elàstic. La velocitat de la pilota durant el xoc no canvia de mòdul; per tant, la seva energia cinètica no varia. En canvi el sentit de moviment de la pilota és l'oposat, així que la quantitat de moviment de la pilota abans i després del xoc és *mv* i *–mv*, respectivament, on *m* és la massa de la pilota i *v* la velocitat de la pilota (hem triat com a positiu el sentit de moviment inicial de la pilota). Per la conservació de la quantitat de moviment, la quantitat de moviment final de la paret és igual a 2*mv*. Per altra banda, la conservació de l'energia cinètica ens diu que si la paret inicialment està quieta, després del xoc també ho ha d'estar (recordeu que l'energia cinètica de la pilota no canvia). Com és possible que canviï la quantitat de moviment de la paret i no canviï la seva energia cinètica?

24. Quan fa vent, l'aire impacte a una certa velocitat contra les parets i queda aturat. Aquest canvi en la quantitat de moviment de l'aire es tradueix en una força aplicada contra la paret. Bufa un vent de 80 km/h i incideix frontalment contra una paret d'un edifici de 12 m d'ample per 40 m d'alçada. L'aire té una massa de 1,3 kg per metre cúbic. Determineu la força mitjana del vent sobre l'edifici.

Sol.: 308 kN.

25. Un coet que consta de dos mòduls de masses m_1 = 600 kg i m_2 = 900 kg puja amb una velocitat v_c = 24.000 km/h vertical cap amunt. Les dues seccions es separen gracies a una explosió controlada. Després de la explosió la secció m_1 es mou amb una velocitat v_e = 11.000 km/h respecte a al secció m_2, és a dir, la secció m_2 veu que la secció m_1 s'allunya d'ella cap amunt a una velocitat v_e. Si negligim l'efecte de la gravetat i de la fricció en l'interval de temps que dura la separació dels dos mòduls, ¿quina és la velocitat del primer mòdul just després de la separació?



Sol.: 8.500 m/s.

6. Dinàmica del sòlid rígid

Objectius

Conceptes de sòlid rígid i de cos deformable
Conceptes de densitat i de sòlid homogeni
Descripció del moviment del sòlid rígid: translació i rotació
Què és i què vol dir el principi de transmissibilitat?
Concepte de vectors lliscants
Conceptes de moment de força i parell de forces
Concepte de moment d'inèrcia: càlcul i propietats
Dinàmica del sòlid rígid a partir del centre de masses
Concepte d'eix instantani de rotació
Dinàmica del sòlid rígid a partir d'un eix fix o instantani
Descripció de l'energia del sòlid rígid
Xocs amb sòlids rígids

Què és un sòlid rígid?

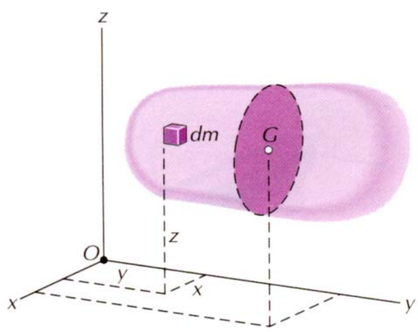
.
Aproximació de sòlid rígid:

- Física: sistema de partícules en el qual la distància entre dues partícules qualssevol es manté constant.
- Enginyeria: objecte que no es deforma.

Què un objecte sigui un sòlid rígid depèn de la intensitat de les forces que actuen sobre ell: un cotxe en moviment es pot considerar com a sòlid rígid, però en el cas de col·lisió es comporta com un objecte deformable.

El sòlid rígid es pot descriure com un sistema format per infinites partícules puntuals de massa infinitesimal *dm*; són els *elements de massa infinitesimals*

Així doncs, *totes les propietats descrites en el tema anterior per als sistemes de partícules segueixen sent vàlides per al sòlid rígid*.



El sòlid rígid, però, té una propietat particular, i és que la posició relativa de tots els elements infinitesimals és invariant, no varia en el temps. Com veurem més endavant, això tindrà unes conseqüències mot importants en la dinàmica del sòlid rígid.

D'altra banda, la massa, dm, i el volum, dV, dels elements de massa infinitesimals estan relacionats per la densitat. La densitat es defineix com la massa per unitat de volum:

$\rho \equiv \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho\, dV$, unitats: $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

En un material homogeni, ρ és constant i no depèn de la posició:

$$m = \int_V dm = \int_V \rho\, dV = \rho \int_V dV = \rho V$$

És a dir: $\rho = \frac{m}{V}$, on m és la massa del sòlid rígid.

Centre de masses

En un sòlid rígid, on està situat el centre de masses?

Recordem el cas d'un sistema de partícules:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots m_N\vec{r}_N}{m_T}$$

En components, s'expressa com:

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{m_T}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{m_T}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{m_T}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r}_{\mathrm{CM}} = x_{\mathrm{CM}}\vec{\imath} + y_{\mathrm{CM}}\vec{\jmath} + z_{\mathrm{CM}}\vec{k}$$

En un sistema continu, les sumes d'elements infinitesimals esdevenen integrals:

$$x_{CM} = \frac{\int_V x\,dm}{\int_V dm} = \frac{\int x\,\rho dV}{m}, y_{CM} = \frac{\int_V y\,dm}{m} \text{ i } z_{CM} = \frac{\int_V z\,dm}{m}$$

En general, els objectes són homogenis, de manera que la densitat és constant

$$x_{CM} = \frac{\int_V x\,dm}{\int_V dm} = \frac{\rho\int_V x\,dV}{\rho V} = \frac{\int_V x\,dV}{V}$$

Així doncs, per a un material homogeni

$$\left.\begin{aligned} x_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{V}\int_V x\,dV \\ y_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{V}\int_V y\,dV \\ z_{\mathrm{CM}} &= \frac{1}{V}\int_V z\,dV \end{aligned}\right\}$$

Mitjana de les posicions:

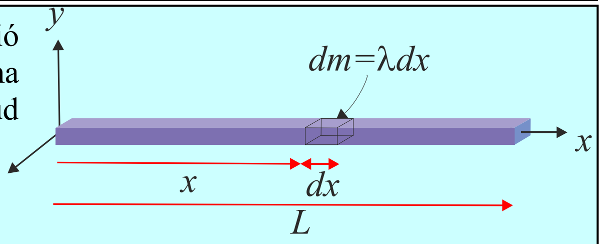
centre geomètric

És a dir, en un sòlid homogeni (densitat constant) el centre de masses coincideix amb el centre geomètric.

Per a superfícies: $\sigma \equiv \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma\,dS$, unitat: $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$ (densitat superficial de massa)
I per a un material homogeni $x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{S}\int_S x\,dS$, $y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{S}\int_S y\,dS$ i $z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{S}\int_S z\,dS$.

Per a objectes longitudinals $\lambda \equiv \frac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \lambda\,dL$, unitat: $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ (densitat lineal de massa)
I per a un material homogeni $x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{L}\int_L x\,dL$, $y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{L}\int_L y\,dL$ i $z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{L}\int_L z\,dL$.

Exemple 1: Determineu per integració el centre de masses d'una barra homogènia de longitud L i massa m.



Solució:

Sòlid homogeni:

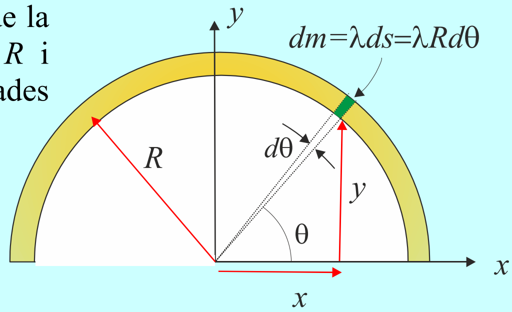
$$\lambda = \frac{m}{L}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int x\lambda dx = \frac{1}{L}\int_0^L x dx = \frac{1}{L}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L}{2}$$

$$y_{CM} = 0, \quad z_{CM} = 0$$

Com ja sabíem, el centre de masses coincideix amb el centre geomètric.

Exemple 2: Donat el semianell homogeni de la figura, de gruix molt petit, radi R i massa m, determineu les coordenades del seu centre de masses.



Solució:

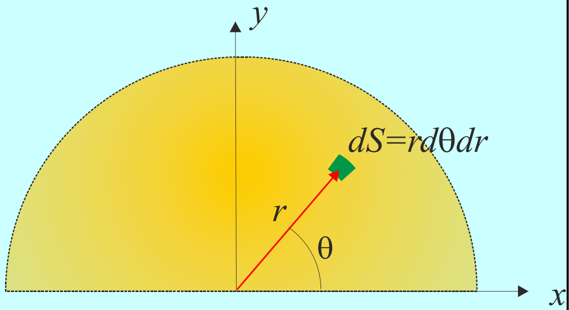
Sòlid homogeni:

$$\lambda = \frac{m}{\pi R}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{\pi R}\int x ds = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\cos\theta\, Rd\theta = \frac{R}{\pi}\sin\theta|_0^{\pi} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{1}{\pi R}\int y ds = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi/2} R\sin\theta\, Rd\theta = -\frac{R}{\pi}\cos\theta|_0^{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$$

Exemple 3: Trobeu el centre de masses d'un semicercle de radi R



Solució: Dos mètodes.

Integració directa:

Sòlid homogeni:

$$x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{1}{\pi R^2/2}\int y dS = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{\pi} r\sin\theta\, r d\theta dr = \frac{-2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 \cos\theta|_0^{\pi} dr =$$

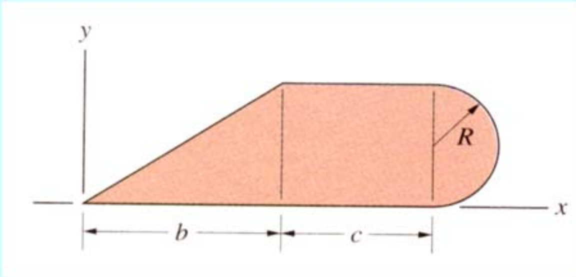
$$= \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{4}{\pi R^2}\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4R}{3\pi}$$

Superposició de semianells d'amplada dr i superfície $dS=\pi r dr$ i $y'_{CM}=2r/\pi$:

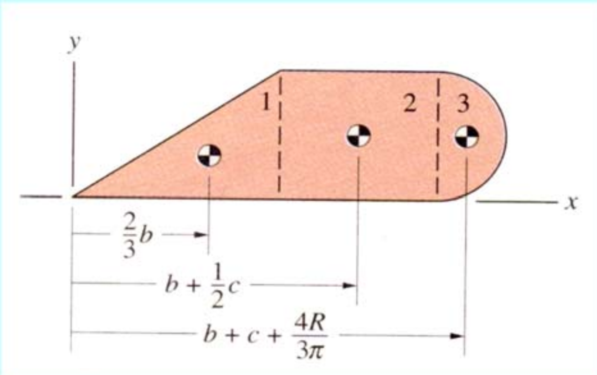
$$y_{CM} = \frac{1}{\pi R^2/2}\int y'_{CM} dS = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \frac{2r}{\pi}\pi r dr = \frac{4}{\pi R^2}\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4R}{3\pi}$$

En general els materials són homogenis; les inhomogeneïtats dels objectes apareixen quan es combinen diferents materials en la fabricació. La solució és analitzar separadament cada peça fabricada amb un mateix material i posteriorment resoldre el problema com si es tractés d'un sistema de partícules. Aquesta aproximació també es pot emprar en el cas de geometries complexes, analitzant separadament cada element senzill.

Exemple 4: Calculeu el centre de masses del sòlid rígid homogeni de la figura.



Coordenada x:

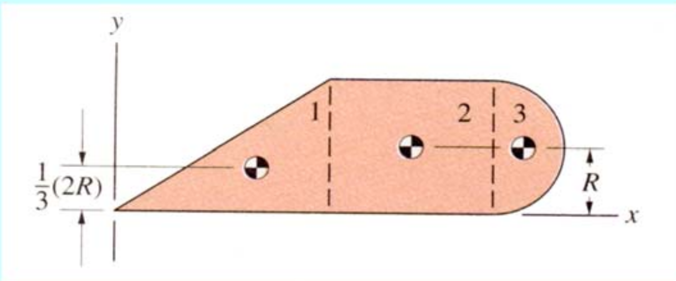


$$x_1 = \frac{2}{3}b, A_1 = \frac{1}{2}b(2R)$$
$$x_2 = b + \frac{1}{2}c, A_2 = c(2R)$$
$$x_3 = b + c + \frac{4R}{3\pi}, A_3 = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\frac{2}{3}b\left(\frac{1}{2}b2R\right) + \left(b + \frac{1}{2}c\right)c2R + \left(b + c + \frac{4R}{3\pi}\right)\frac{1}{2}\pi R^2}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2} =$$
$$= \frac{\frac{4}{3}b^2 + 4\mathrm{bc} + 2c^2 + \pi R\left(b + c + \frac{4R}{3\pi}\right)}{2b + 4c + \pi R}$$

Coordenada y:

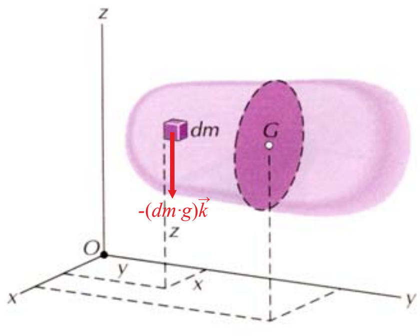
$$y_1 = \frac{1}{3}2R$$
$$y_2 = R$$
$$y_3 = R$$



$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\left(\frac{1}{3}2R\right)\left(\frac{1}{2}b(2R)\right) + \mathrm{Rc}(2R) + R\frac{1}{2}\pi R^2}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2}$$
$$= R\left(1 - \frac{2}{3}\frac{b}{2b + 4c + \pi R}\right)$$

Centre de gravetat

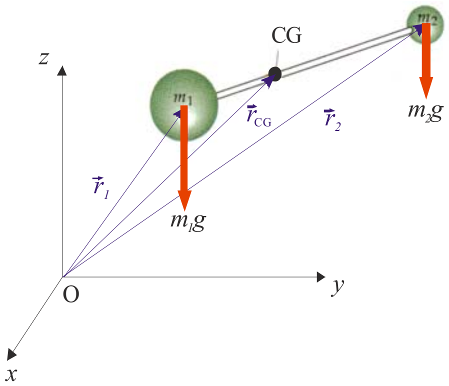
La força de la gravetat en un sòlid rígid no s'aplica en un punt sinó que és una força distribuïda en tot el volum. No obstant, la dinàmica del sòlid rígid es pot resoldre suposant una única força aplicada en un punt anomenat *centre de gravetat*. Perquè aquesta solució sigui equivalent ha d'aplicar la mateixa força i moment que la força de la gravetat distribuïda en tot el sòlid rígid; d'aquesta manera l'efecte sobre la translació i la rotació serà el mateix.



Pel que fa a la força equivalent, ha de ser igual a la suma de la contribució de la gravetat a tots els elements del sòlid rígid:

$$\vec{F}_R = -\int g dm\, \vec{k} = -g\left(\int dm\right)\vec{k} = -mg\, \vec{k}$$

Pel que fa a la rotació, el moment de $\vec{F}_R$ aplicat al centre de gravetat ha de ser igual al moment resultant de la força de gravetat. Primer analitzarem un sistema de partícules:



$$\vec{F}_R = -(m_1 + m_2)g\vec{k}$$

$$\sum \overrightarrow{M_O} = \vec{r}_1 \times -m_1 g\, \vec{k} + \vec{r}_2 \times -m_2 g\, \vec{k} =$$
$$= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \times -g\, \vec{k} =$$
$$= \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) \times -(m_1 + m_2)g\, \vec{k} =$$
$$= \vec{r}_{\text{CG}} \times \vec{F}_R$$

Posició del centre de gravetat:

$$\vec{r}_{\text{CG}} = \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \vec{r}_{\text{CM}} \Rightarrow x_{\text{CG}} = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right), y_{\text{CG}} = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right), \dots$$

Podem comprovar que *el centre de gravetat coincideix amb el centre de masses*. Aquest resultat és lògic, atès que el centre de masses és la mitjana de posicions ponderada a la massa i, com que el pes és proporcional a la massa, també és la mitjana ponderada a la força de la gravetat.

Observeu que si analitzem problemes a escala astronòmica, ja no podem suposar que la força de la gravetat és proporcional a la massa, i per tant el centre de gravetat ja no coincideix amb el centre de masses.

Demostració:

$$\sum \vec{M}_O = \left[\int \vec{r} \times (-g\, dm\, \vec{k})\right] = \left(\int \vec{r} dm\right) \times -g\vec{k} = \frac{1}{m}\left(\int \vec{r} dm\right) \times -mg\, \vec{k} =$$
$$\frac{1}{m}\left(\int \vec{r}\text{dm}\right) \times \vec{F}_R = \vec{r}_{\text{CG}} \times \vec{F}_R$$

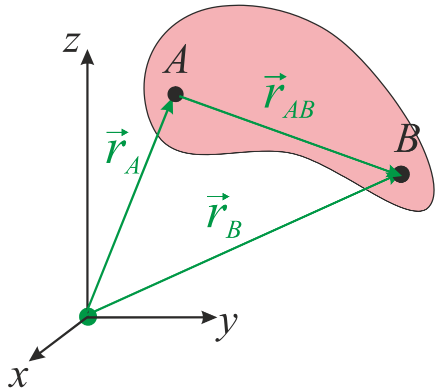
Per tant, $\vec{r}_{CG} = \frac{1}{m}\int \vec{r} dm$

Cinemàtica del sòlid rígid

Com hem vist, en el sòlid rígid les distàncies es mantenen constants; per aquesta raó, *el moviment general d'un sòlid rígid es pot descriure com la superposició de dos moviments: una translació + una rotació.*

Demostració:

Descriurem el moviment de tot el sòlid a partir d'un punt de referència qualsevol, A.



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$$

Derivem respecte al temps:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$$

Ara bé, A i B són dos punts del sòlid rígid; per tant, la distància entre A i B, $|\vec{r}_{AB}|$, és constant, llavors el moviment d'A respecte a B és un moviment circular, una rotació:

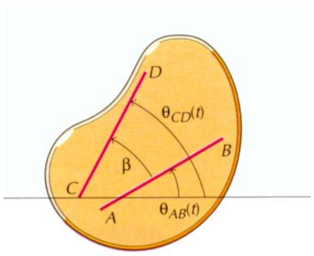
$$\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

Llavors

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

És a dir, *el moviment d'un sòlid rígid es pot descompondre en una translació del punt A i una rotació respecte al punt A*. L'única condició és que el punt *A pertanyi al sòlid rígid*. *El punt A també pot ser el centre de masses*, atès que la posició del centre de masses respecte al sòlid rígid és fix (la distància del centre de masses a qualsevol punt del sòlid rígid és constant). Per exemple, el moviment de la moto i el motorista és molt complex, però es pot descriure com una translació del centre de masses (tir parabòlic) més una rotació al voltant del centre de masses:

Per altra banda, en un sòlid rígid l'orientació relativa entre segments rectes és constant, de manera que la relació d'angles es manté constant. És a dir, l'angle d'un determinat segment depèn de la tria del punt A, però l'angle que es gira, $\Delta\theta$, durant un interval de temps Δt és el mateix per a tots els segments rectes, amb independència de la tria del punt A. Com que la velocitat angular es calcula com a

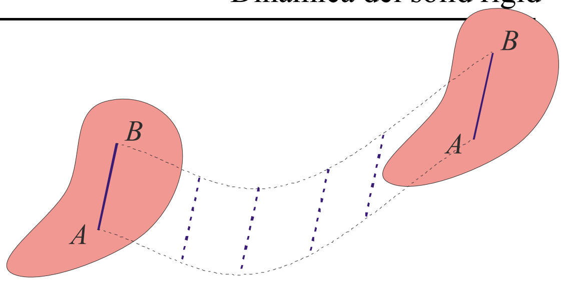


$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

la velocitat angular és la mateixa per a tots els segments i no depèn de la tria del punt A.

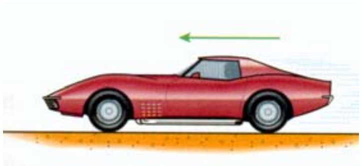
Translació

L'orientació d'un segment rectilini qualsevol dins del sòlid no canvia.



En un sòlid rígid on l'únic moviment existent és el de translació, tots els punts es mouen amb la mateixa velocitat i acceleració.

La translació pot ser rectilínia, és a dir, el sòlid rígid descriu un moviment rectilini, o pot ser curvilínia, és a dir, la trajectòria no és una línia recta.

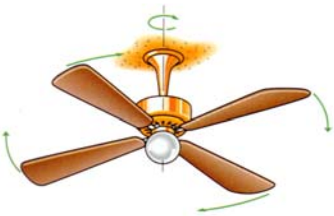

translació rectilínia

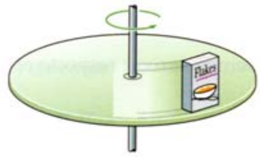

translació curvilínia

<u>La dinàmica d'un sòlid rígid que només descriu una translació és equivalent al moviment d'una partícula puntual. Per aquesta raó en alguns casos descrivim objectes no puntuals com a partícules.</u>

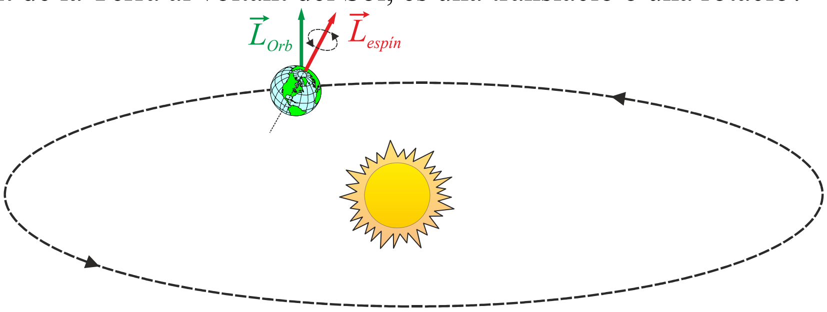
Rotació

L'orientació d'un segment rectilini qualsevol dins del sòlid canvia, no és fixa. En les rotacions respecte a un eix fix tots els punts del sòlid rígid descriuen trajectòries circulars al voltant de l'eix. No cal que l'eix estigui contingut en el sòlid rígid. En un sòlid rígid en rotació, tots els punts es mouen a la mateixa velocitat i acceleració angulars.



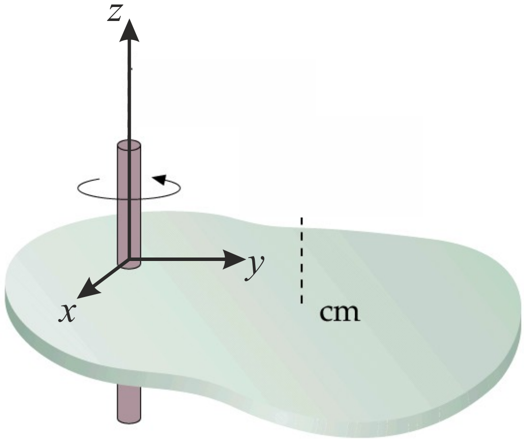


El moviment de la Terra al voltant del Sol, és una translació o una rotació?



Es descriu com una translació, malgrat que es tracta d'un moviment circular (període 365 dies). Aquest moviment circular té associat un moment angular que s'anomena *moment angular orbital*. En canvi, el gir de la Terra al voltant del seu eix (període 1 dia) és una rotació. La rotació d'un objecte al voltant del seu eix té un moment angular que s'anomena intrínsec o d'espín. Per tant, el moviment de la Terra es descriu com la superposició d'una translació, que és un moviment circular al voltant del Sol, i una rotació, que és un gir al voltant del seu eix. <u>*Observeu que la translació pot ser un moviment circular!!!*</u>

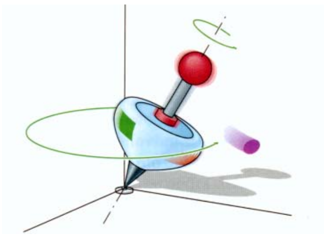
Si la rotació és al voltant d'un eix que no canvia d'orientació, llavors tot el moviment és coplanari i la descripció del problema se simplifica notablement.



En aquest cas, la velocitat angular de la rotació, la corresponent acceleració angular i el moment angular d'espín només tenen una component, que per conveni triarem que sigui l'eix z:

$$\vec{\omega} = \pm\omega\,\vec{k}$$
$$\vec{\alpha} = \pm\alpha\,\vec{k}$$
$$\vec{L}_{\text{espín}} = \pm L_{\text{espín}}\,\vec{k}$$

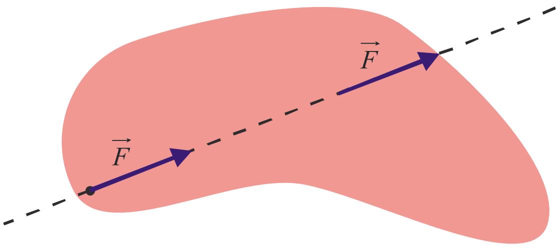
Cal no confondre la component $\pm\omega$ amb el mòdul ω. El mòdul és sempre positiu, mentre que la component pot ser positiva o negativa segons el sentit de gir (vegeu el tema 2, però resumint és + en sentit antihorari i – en sentit horari). Tots els exemples i exercicis que farem seran moviments coplanaris.



La realitat pot ser més complexa, com per exemple amb les anomenades rotacions respecte a un punt, en què l'eix no té una orientació fixa, sinó que descriu un moviment de precessió. És el cas del moviment del planeta Terra o el d'una baldufa.

Principi de transmissibilitat

Les condicions d'equilibri i moviment d'un sòlid rígid no canvien si una força que actua en un punt es desplaça al llarg de la seva línia d'aplicació.

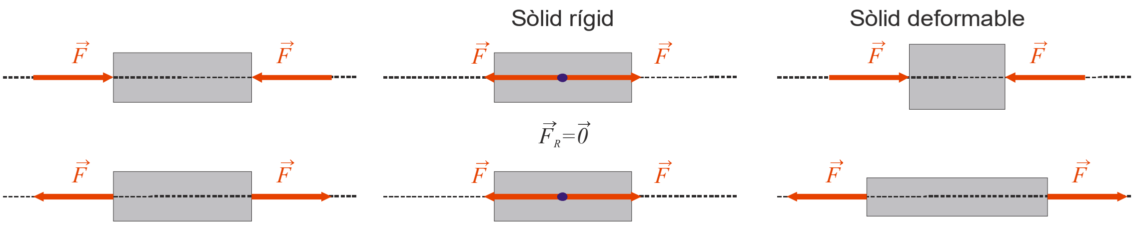


Les forces sobre objectes puntuals són vectors fixos o lligats; la força s'aplica en un punt concret.

Les forces que actuen sobre els sòlids rígids són vectors lliscants; és a dir, es poden desplaçar al llarg de la seva línia d'aplicació dins del sòlid rígid.

Per exemple, és el mateix empènyer un cotxe per darrere que estirar-lo per davant.

Aquest principi no és vàlid per a un cos deformable:



Dinàmica del sòlid rígid. Descripció respecte al centre de masses

Per descriure el moviment d'un sòlid rígid cal trobar les equacions que regeixen els moviments de translació i de rotació. Recordem que un sòlid rígid és un cas particular de sistema de partícules i que en un sistema de partícules el centre de masses es mou com si fos una partícula puntual a la qual s'apliquen totes les forces externes. Per tant, si agafem com a referència el centre de masses, ja tenim resolt el moviment de translació:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$$

És a dir, que *el moviment de translació es redueix a tractar el sòlid rígid com si fos una partícula puntual que té tota la massa localitzada al centre de masses*.

Pel que fa a la rotació, pel tema 5 sabem que:

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext,CM}$$

Així, per resoldre la rotació el que farem serà calcular el moment angular del centre de masses. Pel tema 5 sabem que

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{v}_i$$

En el cas del sòlid rígid, el sumatori es transforma en una integral:

$$\vec{L}_{CM} = \int d\vec{L}_{CM} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

i si descriu una rotació coplanària, el producte $\vec{r} \times \vec{v}$ es pot escriure com

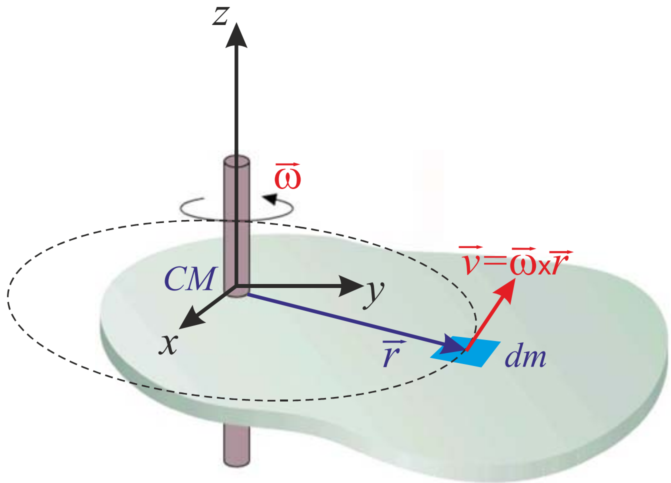
$$\vec{r} \times \vec{v} = rv\,\vec{k} = r^2\omega\vec{k}$$

Si substituïm, obtenim

$$\vec{L}_{CM} = \int d\vec{L}_{CM} = \left(\int \omega r^2\, dm\right)\vec{k}$$

Si tenim en compte que la velocitat angular és la mateixa per a tots els punts, obtenim

$$\vec{L}_{CM} = \left(\omega \int r^2\, dm\right)\vec{k} = I_{CM}\vec{\omega}$$



on I_{CM} és el moment d'inèrcia respecte al centre de masses i es defineix com

$$I_{CM} \equiv \int r^2\, dm \quad \text{(unitats, kg·m}^2\text{)}$$

on r és la distància d'un punt del sòlid rígid a l'eix que passa pel centre de masses.

Així, la dinàmica de rotació està governada per la relació següent:

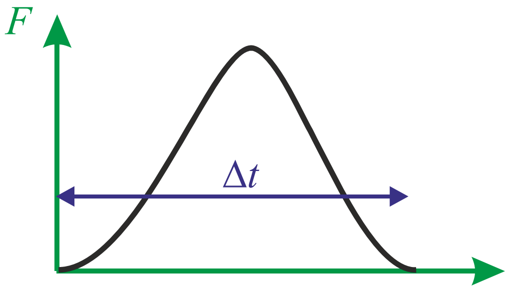
$$\sum \vec{M}_{ext,CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \frac{dI_{CM}\vec{\omega}}{dt} = I_{CM}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

En resum, la suma de forces externes governa el moviment de translació del CM i la suma de moments de força governa el moviment de rotació al voltant del CM:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{CM}$$
$$\sum \vec{M}_{ext,CM} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

Observeu que les dues equacions formalment són idèntiques. A un costat tenim la causa del moviment, la força en el cas de translacions i el moment en el cas de les rotacions, i a l'altre tenim un paràmetre que identifica el canvi en el moviment: l'acceleració i l'acceleració angular, respectivament. En l'equació de forces la massa representa l'oposició o la inèrcia que el sistema oposa a ser accelerat, llavors *el moment d'inèrcia és l'oposició o inèrcia que presenta un sòlid rígid a un canvi en el moviment de rotació*.

A partir dels resultats anteriors es pot deduir immediatament que en el cas de forces variables que actuen durant un interval de temps, podem fer servir l'impuls per determinar el canvi en la quantitat de moviment:



$$d\vec{p}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}\, dt$$
$$\vec{I} = \int \sum \vec{F}_{ext}\, dt = \Delta\vec{p}_{CM}$$

i el canvi de moment angular respecte al centre de masses, a partir de l'impuls angular:

$$d\vec{L}_{CM} = \sum \vec{M}_{ext,CM}\, dt$$
$$\vec{J}_{CM} \equiv \int \sum \vec{M}_{ext,CM}\, dt = \Delta\vec{L}_{CM}$$

Igualment, en el cas de xocs en què estiguin involucrats sòlids rígids podem imposar la conservació del moment si la resultant de les forces externes és nul·la, i la conservació del moment angular si la suma dels moments de les forces externes és nul.

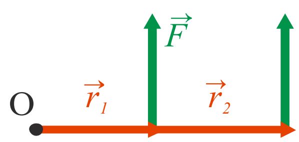
Moment i parell de forces

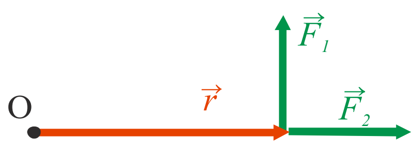
Com hem vist, el moment de força és el responsable del moviment de rotació. En el tema 3 vam definir el moment respecte a un punt *O* com:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Observeu que el moment de força depèn:

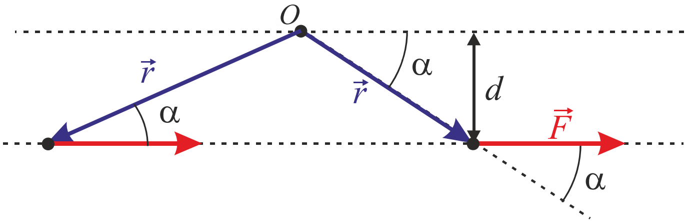
- de la distància: com més lluny més gran
- de la magnitud de la força
- de l'orientació de la força
- màxim si $\vec{r} \perp \vec{F}$
  0 si $\vec{r} // \vec{F}$





Observeu que el moment de força compleix el principi de transmissibilitat; és a dir, que si fem lliscar la força al llarg de la línia d'aplicació el moment no varia, atès que la seva magnitud és

$M = rFsin\alpha = d \cdot F$



i el braç de força, *d*, és la distància de la línia d'aplicació al punt *O* (o la distància a l'eix *O*). Si fem lliscar el vector al llarg de la línia d'aplicació, la distància *r* i l'angle *α* varien, però el braç de força és sempre el mateix i per tant el moment no canvia. Els canvis en *r* queden compensats pels canvis en l'angle *α*.

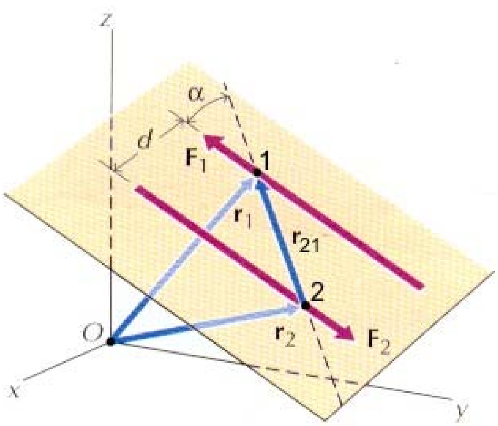
Parell de forces

Un parell de forces són dues forces de magnitud i direcció iguals, però sentits oposats.

$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{0}$ ⇒no provoquen canvis en el moviment de translació.

Les unitats són les del moment de força, N·m.

Els parells de força només alteren el moviment de rotació. En un objecte inicialment aturat només provocaran l'aparició d'un moviment de rotació, no hi haurà moviment de translació.



$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = \\ = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_{2\to1} \times \vec{F}$$

$$M_O = r_{21}F \cdot \sin\alpha = F \cdot d$$

El moment d'un parell de forces és independent del punt de referència triat, *O*.

En dispositius que provoquen rotacions pures, com ara motors, en lloc d'indicar la força que pot transmetre s'indica el parell de força que pot transmetre. De vegades el parell de força també es coneix amb el nom de parell motor.

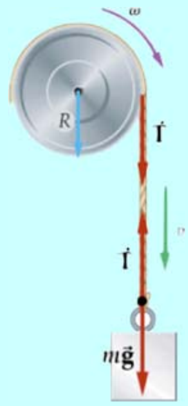
Exemple 5: Un motor és capaç de generar un parell motor de 150 Nm. Si l'eix d'un motor està unit a un volant d'inèrcia que té un moment d'inèrcia de 300 kg·m^2 respecte a l'eix del motor (que passa pel CM del volant), calculeu l'acceleració angular del volant quan apliquem aquest parell motor.

Solució:

$$\sum \vec{M}_{\text{ext,CM}} = I_{\text{CM}}\vec{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\sum M_{\text{ext,CM}}}{I_{\text{CM}}} = \frac{150\ \text{Nm}}{300\ \text{kgm}^2} = 0{,}5\ \text{rad/s}^2$$

<u>Exemple 6</u>: Un bloc de 2,85 kg s'uneix a una politja en forma de disc de radi 0,121 m i massa 0,742 kg. Inicialment el sistema està aturat i el deixem lliure:
(a) quin és la acceleració del bloc?
(b) Quina és l'acceleració angular de la politja?
(c) Quina distància es mou el bloc durant els primers 1,50 s?.

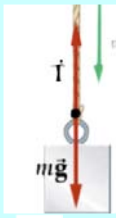


Solució:

$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2} m_P R^2 = 5{,}43 \times 10^{-3}\ \mathrm{kgm^2}$$

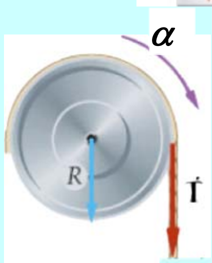
a)

Al bloc:



$$\sum F_y = T - mg = m a_y \Rightarrow T = m a_y + mg$$

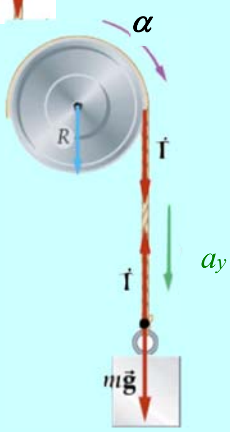
A la politja:



$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} = m_P \vec{a}_{CM} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{0}$$

$$M_{CM} = -TR = I_{CM}\alpha$$

$$T = -\frac{I_{CM}\alpha}{R} = -\frac{1}{2} m_P R\alpha$$



$$\left.\begin{aligned} T &= m a_y + mg \\ T &= -\frac{1}{2} m_P R\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow m a_y + mg = -\frac{1}{2} m_P R\alpha$$

$$a_y = \alpha R \Rightarrow m a_y + mg = -\frac{1}{2} m_P a_y$$

$$\left(m + \frac{m_P}{2}\right) a_y = -mg$$

$$a_y = -\frac{g}{1 + \frac{m_P}{2m}} = -8{,}68\ m/s^2$$

b)

$$\alpha = \frac{a_y}{R} = -71{,}7\ \mathrm{rad/s^2}$$

c)

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 = -9.75\ m$$

Càlcul del moment d'inèrcia

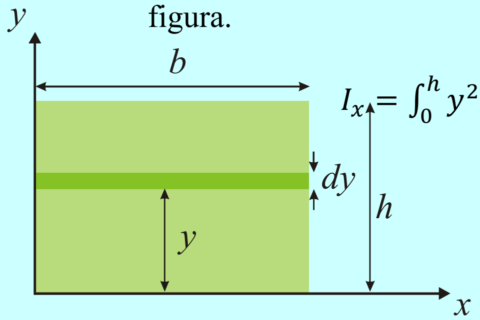
El moment d'inèrcia és la mitjana, ponderada a les masses, de les distàncies al quadrat d'un sòlid respecte d'un eix *O*:

$$I_O \equiv \int r^2\, dm$$

Definició de radi de gir:

$$R_{G,O} \equiv \sqrt{\frac{I_O}{m}}$$ Dimensions [*L*], unitat en SI: m.

Exemple 7: Calculeu el moment d'inèrcia i el radi de gir d'un rectangle homogeni de base *b*, altura *h* i massa *m* respecte dels eixos indicats a la figura.

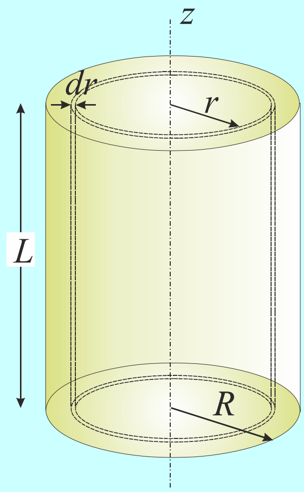


$$I_x = \int_0^h y^2 dm = \int_0^h y^2 \sigma b dy = \frac{\sigma}{3} b y^3|_0^h = \frac{\sigma}{3} b h^3 = \frac{1}{3} m h^2$$

$$R_{G,x} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m h^2}{m}} = \frac{1}{\sqrt{3}} h$$

$$I_y = \frac{1}{3} m b^2, R_{G,y} = \frac{1}{\sqrt{3}} b$$

Exemple 8: Calculeu el moment d'inèrcia d'un cilindre massís i homogeni de radi *R* i massa *m* respecte a l'eix de simetria de revolució.



Solució:

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \rho \int r^2 2\pi r L dr =$$

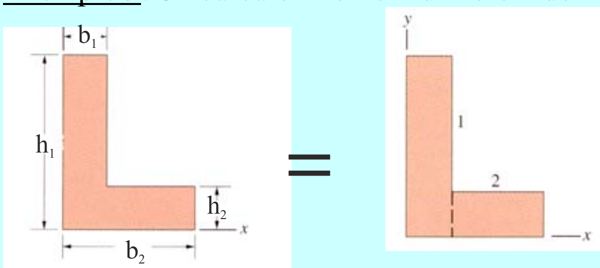
$$= 2\pi L \rho \int r^3 dr = 2\pi L \frac{m}{V} \frac{r^4}{4}|_0^R = \frac{2\pi L m}{\pi R^2 L} \frac{R^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} m R^2$$

Propietats

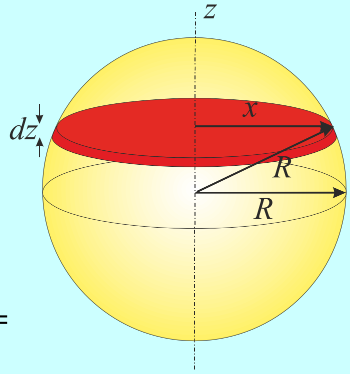
- *Additivitat*: El moment d'inèrcia d'un conjunt d'objectes és la suma dels moments d'inèrcia de cada objecte.

Exemple 9: Calculeu el moment d'inèrcia de l'objecte de la figura respecte a l'eix *x*.



$$I_x = \frac{1}{3} m_1 h_1^2 + \frac{1}{3} m_2 h_2^2 = \frac{1}{3} \sigma b_1 h_1^3 + \frac{1}{3} \sigma (b_2 - b_1) h_2^3 = \frac{1}{3} \sigma (b_1 h_1^3 + (b_2 - b_1) h_2^3)$$

Exemple 10: Calculeu el moment d'inèrcia d'una esfera massissa i homogènia de radi R i massa m respecte l'eix de simetria de revolució.



Solució:

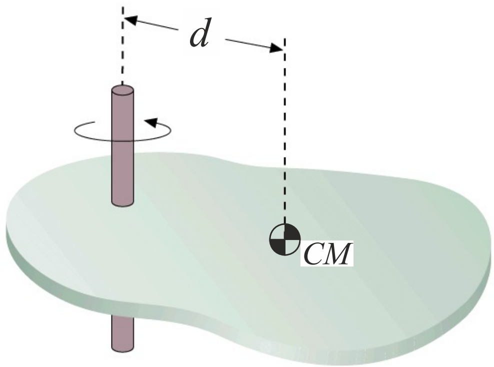
$$I_z = \int dI = \int \frac{1}{2}x^2 dm = \frac{1}{2}\int x^2 \rho \pi x^2 dz =$$
$$= \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} x^4 dz = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 dz =$$
$$= \frac{1}{2}\pi\rho \left(R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{8}{15}\frac{m}{V}\pi R^5 =$$
$$= \frac{8}{15}\frac{3m}{4\pi R^3}\pi R^5 = \frac{2}{5}mR^2$$

- *Teorema de Steiner* o dels eixos paral·lels.

Donats dos eixos paral·lels, un dels quals passa pel centre de masses i que estan separats una distància d, es compleix:

$$I_O = I_{CM} + md^2$$

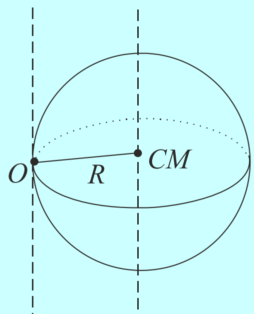
És a dir, un cop conegut el moment d'inèrcia per a un eix que passa pel centre de masses, llavors podem determinar el moment de segon ordre de qualsevol altre eix que sigui paral·lel mitjançant el teorema dels eixos paral·lels.



Donada una certa direcció, quin és l'eix per al qual el moment d'inèrcia és més petit?

Del teorema dels eixos paral·lels, $I_O = I_{CM} + md^2$; com que $md^2 > 0$, llavors el moment d'inèrcia per a qualsevol eix I_O és més gran que l'eix paral·lel que passa pel centre de masses, és a dir, que *fixada una direcció, el moment d'inèrcia és mínim per a l'eix que passa pel centre de masses*. Aquest resultat és evident si es té en compte que el centre de masses és la posició mitjana ponderada a la massa; llavors, la suma de distàncies al quadrat per la massa és mínima, si triem com a origen el centre de masses.

Exemple 11: El moment d'inèrcia d'una esfera de massa m i radi R respecte a un dels seus diàmetres és $\frac{2}{5}mR^2$. Quin és el moment respecte a un eix tangent a la superfície?

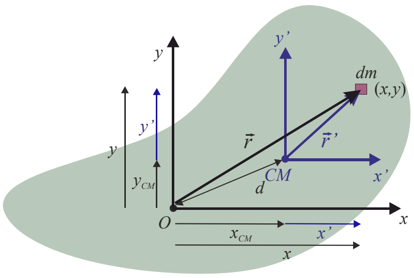


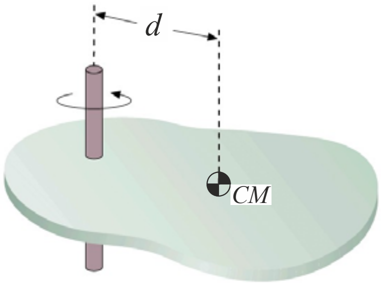
Apliquem el teorema de Steiner:

$$I_O = I_{CM} + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

Demostració:
Triem com a eix z la direcció dels eixos que passen pel punt O i pel CM, notem com a x' i y' la posició d'un respecte al centre de masses. Llavors, la posició respecte a l'eix O és:

$$x = x_{\text{CM}} + x'$$
$$y = y_{\text{CM}} + y'$$





$$I_O = \int (x^2 + y^2)\ dm = \int [(x' + x_{CM})^2 + (x' + x_{CM})^2]\, dm =$$
$$= \int [x'^2 + x_{CM}^2 + 2x'x_{CM} + y'^2 + y_{CM}^2 + 2y'x_{CM}]\, dm =$$
$$= \int (x'^2 + y'^2)\, dm + \int (x_{CM}^2 + y_{CM}^2)\, dm + 2x_{CM} \int x'\, dm + 2y_{CM} \int y'\, dm =$$
$$= I_{CM} + \int d^2\, dm + 0 + 0 = I_{CM} + md^2$$

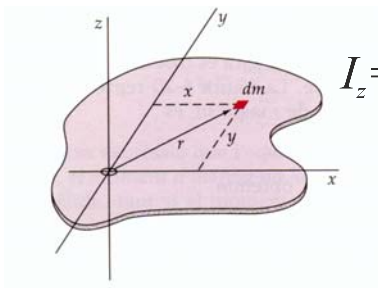
Recordem que $\frac{1}{m}\int x'\, dm$ i $\frac{1}{m}\int y'\, dm$ són per definició les coordenades del centre de masses respecte a un sistema de coordenades amb origen en el centre de coordenades, i per tant tots dos termes són nuls.

- *Teorema dels eixos perpendiculars*

Aquest teorema només és vàlid per a superfícies planes.

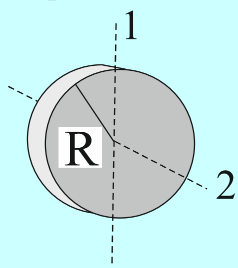
Donats dos eixos continguts en el pla de l'objecte i perpendiculars entre ells, I_x i I_x, el moment d'inèrcia respecte a un eix perpendicular al pla que conté l'objecte, I_z, és igual a

$$I_Z = I_x + I_y$$



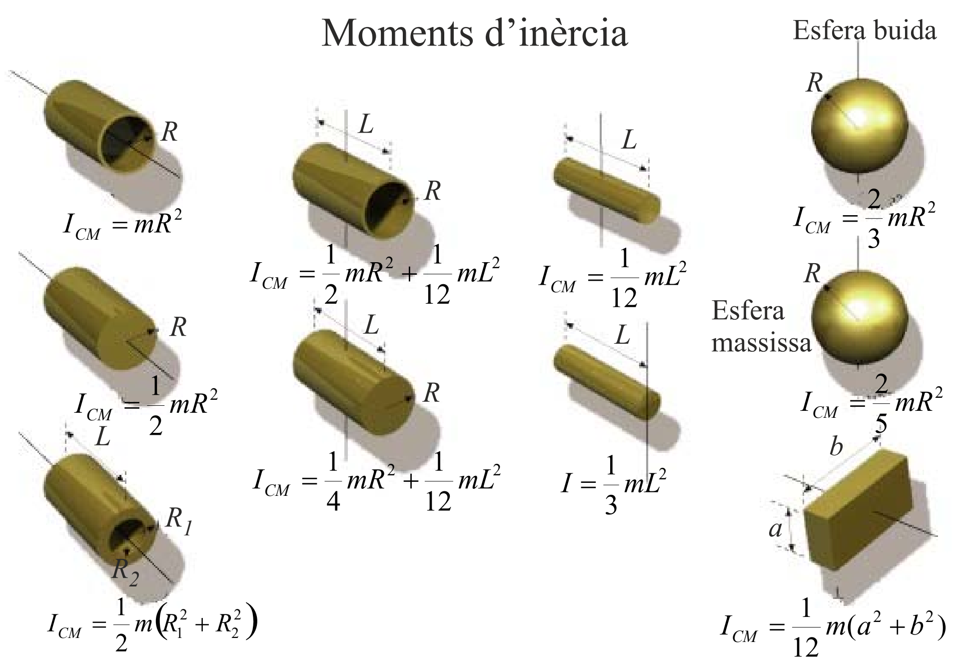
$I_z = I_x + I_y$

Exemple 12: Trobeu el moment d'inèrcia d'un disc de massa m i radi R respecte a l'eix 1, que és coplanari amb el mateix disc i que passa pel centre. Nota: apliqueu el teorema dels eixos perpendiculars sabent que el moment d'inèrcia respecte a l'eix 2 és $I_2 = \frac{1}{2}mR^2$

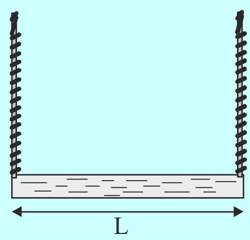


Apliquem el teorema dels eixos perpendiculars:

$$I_2 = I_1 + I_1 = 2I_1 \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{4}mR^2$$

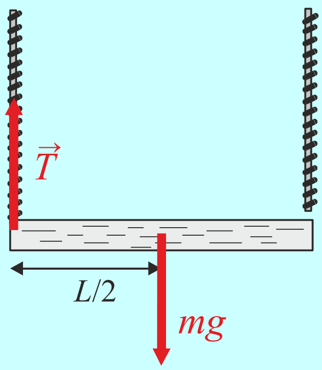


Exemple 13: Un tauló de massa m i longitud L està en posició horitzontal aguantat per dues cordes verticals lligades als extrems. Calculeu, a l'instant que una d'aquestes cordes es trenca, *a)* l'acceleració angular del tauló, *b)* l'acceleració del centre de masses i *c)* la tensió de la corda que no s'ha trencat.



Suma de forces:

$$\sum F = ma_{CM} \Rightarrow T - mg = m \cdot a_{CM}$$



Suma de moments:

$$\sum M_{CM} = I_{CM} \cdot \alpha \Rightarrow -T \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 \cdot \alpha$$

$$T = -\frac{1}{6} \cdot m \cdot L \cdot \alpha$$

Acceleració lineal del centre de masses:

$$a_{CM} = \alpha \cdot \frac{L}{2}$$

I si combinem les tres relacions:

$$\left.\begin{array}{r} T - mg = m \cdot a \Rightarrow T = mg + m\frac{L}{2}\alpha \\ T = -\frac{1}{6} \cdot m \cdot L \cdot \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left(g + \frac{L}{2}\alpha\right) = -\frac{1}{6} L\alpha \Rightarrow g = -\frac{2}{3} L\alpha$$

Llavors,

a) $\alpha = -\frac{3 \cdot g}{2 \cdot L}$

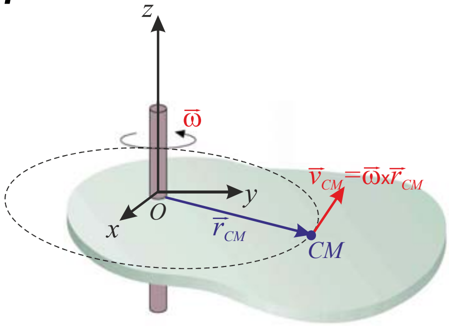
b) $a_{CM} = \alpha \cdot \frac{L}{2} = -\frac{3}{4} g$

c) $T = -\frac{1}{6} \cdot m \cdot L \cdot \alpha = \frac{1}{4} \cdot m \cdot$

Dinàmica del sòlid rígid, descripció respecte a un eix fix

Quan un sòlid rígid està unit a un eix fix, la dinàmica se simplifica notablement, atès que el sòlid rígid descriu una rotació al voltant d'aquest eix. Aleshores la dinàmica es redueix a:

$$\sum \vec{M}_{\text{ext},O} = \frac{d\vec{L}_O}{\text{dt}} = I_O\vec{\alpha}$$



Demostració:

Del tema 5 sabem que

$\vec{L}_O = m_T\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{CM}}$

A més, per al sòlid rígid, tenim que $\vec{L}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\vec{\omega}$; llavors

$\vec{L}_O = m_T\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + I_{\text{CM}}\vec{\omega}$

Com hem vist al tema 5, si $\vec{v}_O = \vec{0}$ es compleix que

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{ext,O}$$

Així, si derivem respecte al temps, tenim

$$\sum \vec{M}_{ext,O} = \frac{d}{dt}(m\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + I_{CM}\vec{\omega}) = m\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times \vec{v}_{CM} + m\vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} + I_{CM}\frac{d\vec{\omega}}{dt} =$$
$$= m\vec{v}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + m\vec{r}_{CM} \times \vec{a}_{CM} + I_{CM}\vec{\alpha} = 0 + m\vec{r}_{CM} \times (\vec{r}_{CM} \times \vec{\alpha}) + I_{CM}\vec{\alpha} =$$
$$= mr_{CM}^2\vec{\alpha} + I_{CM}\vec{\alpha} = (mr_{CM}^2 + I_{CM})\vec{\alpha}$$

Si apliquem el teorema de Steiner

$I_O = mr_{CM}^2 + I_{CM}$

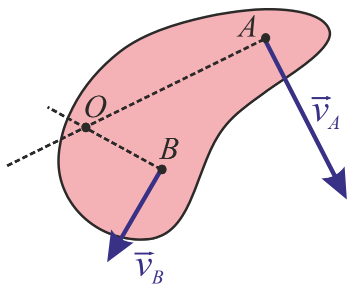
obtenim

$$\sum \vec{M}_{ext,O} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

Eix instantani de rotació

En un sòlid rígid sempre hi ha un punt O que compleix que $\vec{v}_O = \vec{0}$. Aquest punt es coneix com l'eix instantani de rotació. En el cas anterior, aquest punt és precisament l'eix fix. Quan no existeix un eix fix, aquest punt pot variar en el temps; és a dir, no ha de coincidir amb un punt concret del sòlid. És el cas, per exemple, del rodolament, com veurem més endavant.

L'eix fix es pot localitzar a partir de traçar la perpendicular a la velocitat en dos punts qualssevol, A i B, on la velocitat no sigui nul·la. El punt d'intersecció de les perpendiculars correspon al l'eix instantani. El moviment dels punts A i B es pot descriure com una rotació al voltant de l'eix instantani O:



$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{OA}}$

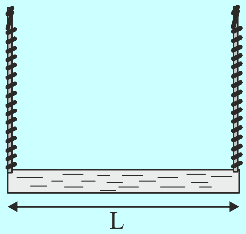
$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{OB}}$

A més, com que $\vec{v}_O = \vec{0}$, també podem aplicar el resultat anterior,

$$\sum \vec{M}_{\text{ext},O} = \frac{d\vec{L}_O}{\text{dt}} = I_O\vec{\alpha}$$

on O és un eix instantani o un eix fix.

Exemple 14: Un tauló de massa m i longitud L està en posició horitzontal aguantat per dues cordes verticals lligades als extrems. Calculeu, a l'instant que una d'aquestes cordes es trenca, *a)* l'acceleració angular del tauló, *b)* l'acceleració del centre de masses i *c)* la tensió de la corda que no s'ha trencat.



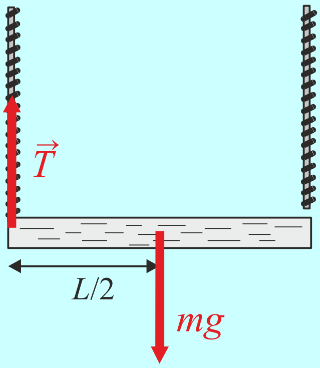
a) Teorema de Steiner:

$$I_O = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Suma de moments:

$$\sum M_O = I_O \cdot \alpha \Rightarrow -\text{mg} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 \cdot \alpha$$

$$\alpha = -\frac{3 \cdot g}{2 \cdot L}$$



b) Acceleració lineal del centre de masses:

$$a_{\text{CM}} = \alpha \cdot \frac{L}{2}$$

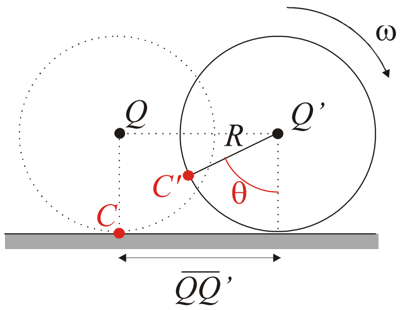
$$a_{\text{CM}} = \alpha \cdot \frac{L}{2} = -\frac{3}{4}g$$

c) Suma de forces:

$$\sum F = ma_{CM} \Rightarrow T - mg = m \cdot a_{CM}$$

$$T = mg + ma_{CM} = mg - \frac{3}{4}mg = \frac{1}{4} \cdot m \cdot g$$

Rodolament



Quan una roda rodola, la distància recorreguda $\overline{QQ'}$ és igual al perímetre de la roda que ha estat en contacte amb el terra, és a dir,

$$\overline{QQ'} = R\theta$$

I si derivem respecte al temps obtenim

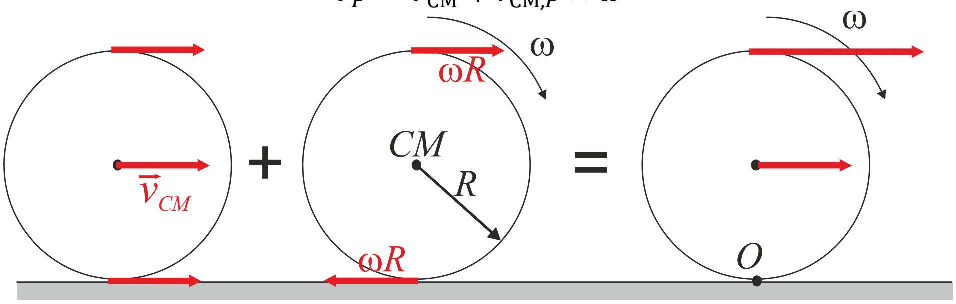
$$v_{\text{CM}} = v_Q = -\omega R$$

El signe "–" està associat al conveni de signes: observeu a la figura que la roda avança, $v_{\text{CM}} > 0$, i en canvi la rotació és en sentit horari, és a dir, $\omega < 0$. Si tornem a derivar, tenim

$$a_{\text{CM}} = -\alpha R$$

El moviment d'un sòlid rígid es pot descompondre com la suma de dos moviments, una translació més una rotació. Per a un punt P qualsevol tenim:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CM},P} \times \vec{\omega}$$



La translació es resol considerant que el sòlid rígid és una partícula puntual situada al centre de masses:

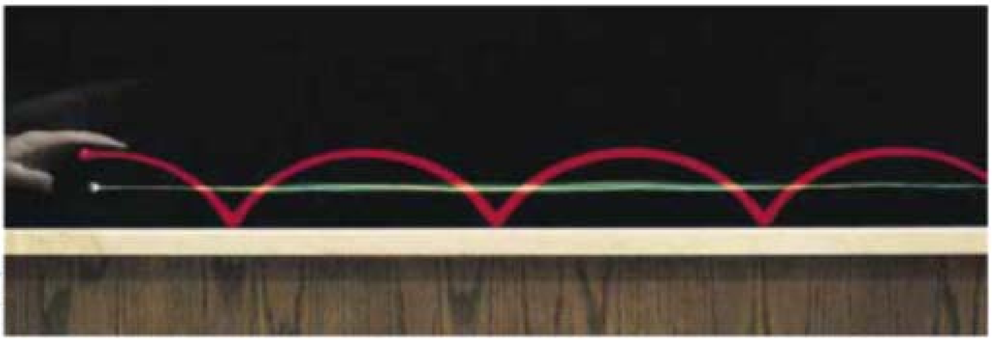
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$$

I la rotació, a partir de la suma de moments respecte al CM:

$$\sum \vec{M}_{\text{ext,CM}} = I_{\text{CM}}\vec{\alpha}$$

Observeu que en el punt O, el punt on la roda està en contacte amb el terra, la velocitat és nul·la, és a dir, O és un eix instantani de rotació (no és un eix fix, atès que l'acceleració en el punt O no és nul·la). Llavors, la dinàmica de rodolament també es pot resoldre a partir del moment de forces respecte a l'eix instantani de rotació:

$$\sum \vec{M}_{\text{ext},O} = I_O\vec{\alpha}$$



En aquesta foto, amb temps d'exposició llarg, veiem la trajectòria de dos punts on s'ha ubicat una font de llum. La llum blanca està en el centre de masses, que descriu una trajectòria rectilínia. Una font de llum vermella està situada en el perímetre de la roda i descriu el moviment combinat de translació i rotació.

En la fotografia del costat veiem que la part superior de la foto és borrosa, això és degut al moviment, com més ràpid es mou una part de l'objecte, més borrós es veu. En canvi, com el punt que està en contacta amb el terra està aturat, la part inferior de la roda és veu més nítida, és a dir, la fotografia ens mostra que quan una roda rodola, la velocitat lineal augmenta a mesura que ens allunyem de l'eix instantani de rotació que es troba justament al punt de contacte de la roda amb el terra.

Perquè un objecte rodoli cal que hi hagi fricció entre la roda o l'objecte que rodola i el terra. En cas contrari la roda llisca, com en el cas d'un cotxe que es mou sobre una placa de gel i derrapa: les rodes, en lloc de rodolar, el que fan és només girar, i el punt de contacte amb el terra ja no té velocitat nul·la, i per tant el cotxe llisca.

Quan un sòlid rodola, *quina força de fricció actua, l'estàtica o la dinàmica*?

L'estàtica, atès que el punt O no es mou, té velocitat nul·la.

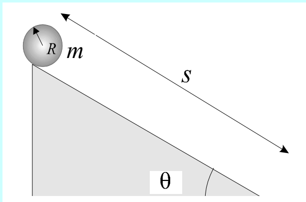
> Quan un sòlid rodola, *quina quantitat d'energia es dissipa a causa de la fricció amb el terra*?

Zero, si el rodolament és perfecte. Com que el punt que està en contacte amb el terra té velocitat nul·la, $\vec{v}_O = \vec{0}$, el producte força per desplaçament és zero:

$$W_{FF} = \int \vec{F}_{FE} \cdot \overrightarrow{ds} = \int \vec{F}_{FE} \cdot \vec{v}_O dt = 0$$

De fet, com hem vist, quan actua la força de fricció estàtica no es dissipa energia. Aquest és el gran interès del moviment de rodolament: permet el desplaçament d'objectes tot minimitzant les pèrdues d'energia per fricció.

Exemple 15: Es deixen anar per un pla inclinat d'altura h un cilindre i una esfera de la mateixa massa m i radi R, tots dos amb velocitat inicial nul·la. Quin dels dos arribarà abans a la base del pla inclinat? Suposeu que des del principi tots dos realitzen un moviment de rodolament.



Teorema de Steiner:

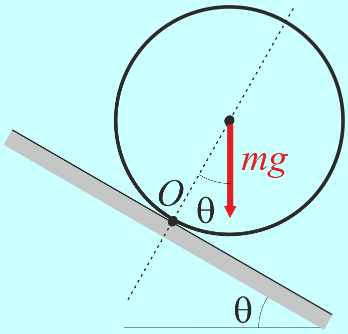
$$I_O = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

Suma de moments per a l'esfera

$$\sum M_O = I_O \cdot \alpha \Rightarrow -mgR\sin\theta = \frac{7}{5}mR^2\alpha$$

$$\alpha_{\text{cilindre}} = -\frac{5 \cdot g}{7 \cdot R}\sin\theta$$

$$a_{\text{CM,cilindre}} = -\alpha R = \frac{5}{7}g\sin\theta$$



Teorema de Steiner:

$$I_O = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Suma de moments per al cilindre

$$\sum M_O = I_O \cdot \alpha \Rightarrow mgR\sin\theta = \frac{3}{2}mR^2\alpha$$

$$\alpha_{\text{cilindre}} = \frac{2 \cdot g}{3 \cdot R}\sin\theta$$

$$a_{\text{CM,cilindre}} = \alpha R = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

Com que $\frac{5}{7} > \frac{2}{3}$, $a_{\text{CM,esfera}} > a_{\text{CM,cilindre}}$, l'esfera arriba abans!

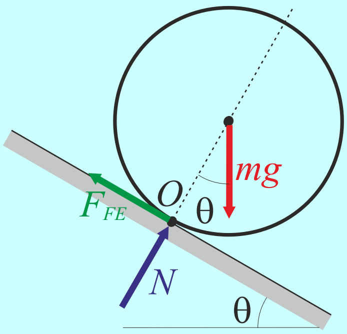
I quant val la força de fricció per a l'esfera?

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$$

$$mg\cos\theta = N$$

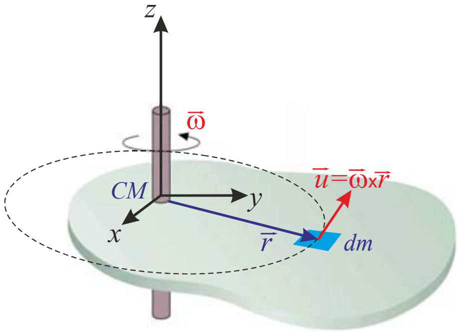
$$mg\sin\theta - F_{FE} = ma_{CM} = \frac{5}{7}mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow F_{FE} = \frac{2}{7}mg\sin\theta$$



Un últim detall és el principi de funcionament del sistema de frens ABS. L'objectiu del sistema és intentar que la roda sempre rodoli i no llisqui. Si la roda llisca, la frenada es basa en la fricció dinàmica, atès que $\vec{v}_O \neq 0$. En canvi, si la roda rodola actua la força de fricció estàtica. Com hem vist al tema 2, la força de fricció estàtica màxima és superior a la dinàmica, i per tant podem obtenir una força de frenada superior si fem servir la fricció estàtica, és a dir, si la roda rodola.

Energia cinètica d'un sòlid rígid



Com hem vist al tema 5, l'energia cinètica total d'un sistema de partícules no coincideix amb l'energia del centre de masses, sinó que cal afegir-hi la contribució del moviment relatiu respecte al centre de masses,

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_T v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i u_i^2$$

A més, en el cas del sòlid rígid, el moviment relatiu respecte al centre de masses és una rotació

$$u = \omega r$$

on r és la distància del centre de masses a un element de massa dm. Llavors:

$$E_C = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\int \omega^2 r^2\, dm = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2\, dm = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Un cas particular és la rotació respecte a un eix fix o instantani, en què tots els punts descriuen una trajectòria circular respecte a O,

$$v = \omega r_O$$

on r_O és la distància de l'eix fix O a un element de massa dm. Llavors:

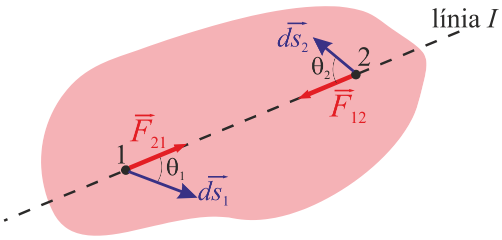
$$E_C = \frac{1}{2}\int v^2\, dm = \frac{1}{2}\int \omega^2 r_O^2\, dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r_O^2\, dm = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

Treball en el sòlid rígid

Respecte als sistemes de partícules, el càlcul del treball total fet sobre un sòlid rígid se simplifica significativament, atès que només cal tenir en compte el treball fet per les forces externes.

$$W_{\mathrm{Tot}} = \sum_{i=1}^{N}\int \vec{F}_i\, d\vec{s}_i = \sum_{i=1}^{N_{ext}}\int \vec{F}_{\mathrm{ext,i}}\, d\vec{s}_i$$

La raó per la qual la contribució del treball de les forces internes és nul és perquè s'anul·len dues a dues: d'una banda, segons la tercera llei de Newton, les forces d'acció i reacció són iguals en magnitud i direcció però tenen sentits oposats, i per altra banda els desplaçaments sobre la línia d'aplicació són els mateixos, atès que dos punts en un sòlid rígid sempre es mantenen a la mateixa distància i posició relativa:



$$dW_1 = \vec{F}_{21} d\vec{s}_1 = F_{21} ds_1 \cos\theta_1 = -F_{12} ds_1 \cos\theta_1$$

$$dW_2 = \vec{F}_{12} d\vec{s}_2 = F_{12} ds_2 \cos\theta_2$$

Com que la distància entre 1 i 2 no varia, els desplaçaments al llarg de la línia *I* són iguals:

$$ds_1 cos\theta_1 = ds_2 cos\theta_2$$

Llavors:

$$dW_1 + dW_2 = -F_{12} ds_1 \cos\theta_1 + F_{12} ds_2 \cos\theta_2 = -F_{12} ds_1 \cos\theta_1 + F_{12} ds_1 \cos\theta_1 = 0$$

Observeu que en un sistema de partícules la relació anterior no sempre és certa; penseu, per exemple, en un objecte que explota: l'energia cinètica augmenta a causa de la velocitat dels fragments després de l'explosió, malgrat que les forces involucrades en l'explosió són internes. Noteu que en aquest cas la distància entre dos punts no es manté constant i, per tant, la demostració anterior no s'aplica.

A més, noteu que el teorema de les forces vives segueix essent vàlid:

$$W_{\text{Tot}} = \sum_{i=1}^{N_{ext}} \int \vec{F}_{\text{ext,i}}\, d\vec{s}_i = E_{C,f} - E_{C,0}$$

Rotació respecte a un eix fix o instantani

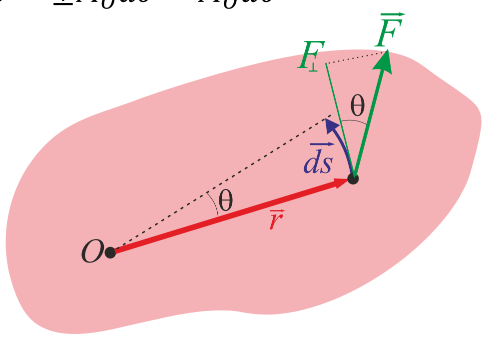
En una rotació respecte a un eix fix o instantani *O*, el treball també es pot calcular a partir del moment de les forces externes:

$$dW = \vec{F} d\vec{s} = F ds cos\theta = \pm F r d\theta = \pm M_O d\theta = \vec{M}_O d\vec{\theta}$$

El signe depèn de si el moment té el mateix sentit que la rotació (+) o s'hi oposa (–).

Llavors,

$$W_{\text{Tot}} = \sum \int \vec{M}_{\text{ext},O} d\vec{\theta} = \int \sum \vec{M}_{\text{ext},O}\, d\vec{\theta}$$



I pel que fa a la potència,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\sum \vec{M}_{ext,O} d\vec{\theta}}{dt} = \vec{M}_{Tot,O} \cdot \vec{\omega}$$

<u>Exemple 16</u>: Si un tocadiscos passa de 0 a 33,33 rpm en una volta, calculeu el parell de forces exercit pel motor sobre el disc. Dades: el diàmetre del disc és de 30 cm i el pes, 25 N.

Solució:

$$I_O = I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2}\frac{25}{9{,}81} 0,15^2 = 0{,}0287 \text{ kgm}^2$$

$$\omega_i = 0$$

$$\omega_f = 33{,}33 \text{ rpm} \frac{1 \text{ min}}{60\, s}\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 3{,}49 \text{ rad/s}$$

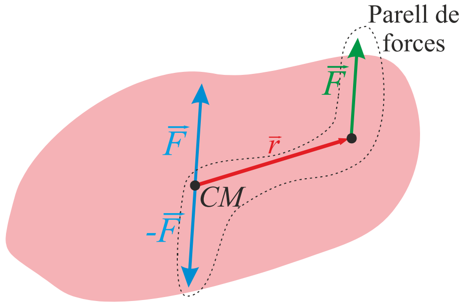
$$W_{\text{Tot}} = E_{C,f} - E_{C,i} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_i^2 = \frac{1}{2} 0{,}0287 \cdot 3,49^2 = 0{,}175 \text{ J}$$

Per altra banda:

$$W_{\text{Tot}} = \int M_{\text{ext}} d\theta = M_{\text{ext}} \cdot 2\pi = 0{,}175 \text{ J}$$

$$M_{\text{ext}} = \frac{0{,}175 \text{ J}}{2\pi} = 0{,}0278 \text{ Nm}$$

Moviment general en el pla

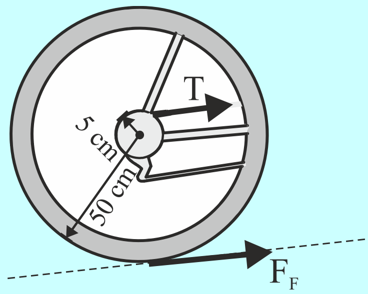


Per al moviment en general, podem substituir cada força externa per la mateixa força aplicada al centre de masses més un parell de forces (això s'aconsegueix sumant i restant la mateixa força al centre de masses). Així doncs, si sumem totes les contribucions tenim com a resultat:

- Una força resultant aplicada al centre de masses que és la responsable de la translació
  $$\vec{F}_{\text{Tot}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$$
  i que aportarà un treball
  $$W_{\text{translació}} = \int \vec{F}_{\text{Tot}}\, d\vec{s}_{\text{CM}}$$

- Un parell de forces resultant, que com hem vist generarà una rotació pura
  $$\vec{M}_{\text{Tot,CM}} = \sum \vec{M}_{\text{ext,CM}} = I_{\text{CM}}\vec{\alpha}$$
  i que aportarà un treball
  $$W_{\text{Rotació}} = \int \vec{M}_{\text{Tot,CM}} d\vec{\theta}$$

Si sumem les dues contribucions, tenim:
$$W = \int \vec{F}_{\text{Tot}}\, d\vec{s}_{\text{CM}} + \int M_{\text{Tot,CM}} d\theta$$
I pel que fa a la potència:
$$P = \vec{F}_{\text{Tot}} \cdot \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{M}_{\text{Tot,CM}} \cdot \vec{\omega}$$

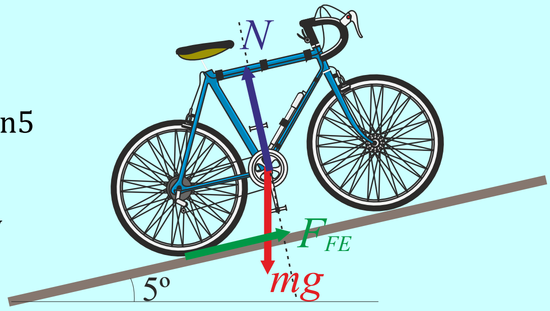


Exemple 17: Un ciclista de massa 70 kg utilitza una bicicleta de massa 8 kg (1,5 kg la roda posterior, 1 kg la roda davantera i 5,5 kg la resta) per pujar un pendent de 5º. El radi de gir de les dues rodes és igual a 40 cm.

a) Si puja el pendent amb una acceleració de 0,5 m/s^2, quin és el valor de la força de frec estàtica?

b) Si tenim en compte que pràcticament tota la força de frec s'aplica a la roda posterior, que el seu radi és de 50 cm i que el radi del pinyó és de 5 cm, quina és la tensió de la cadena?

c) Un cop ha assolit el cim, el ciclista baixa 55 m de desnivell sense pedalejar partint d'una velocitat inicial nul·la. Quina és la velocitat lineal del sistema quan el ciclista arriba al final de la baixada?

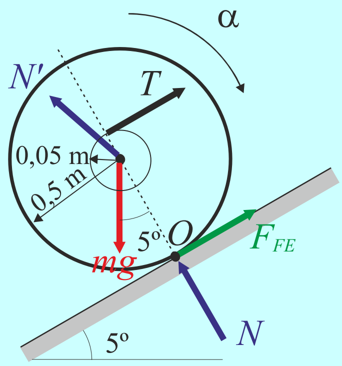


a)

$$\left.\begin{aligned} N &= P\cos 5 \\ F_F - P\sin 5 &= \text{ma} + \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_F = \text{ma} + P\sin 5$$

$$\left.\begin{aligned} m &= 70 + 8 = 78 \text{ kg} \\ P &= mg = 765{,}2 \text{ N} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_F = 105{,}7\ N$$

b)



$$a_{\text{CM}} = -\alpha \cdot R \Rightarrow \alpha = -\frac{a_{\text{CM}}}{R} = -\frac{0{,}5\ \text{m/s}^2}{0{,}5\ m} =$$
$$= -1\ \text{rad/s}^2$$

$$\sum M_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\alpha$$
$$\begin{cases} I_{\text{CM}} = m_{\text{roda}} \cdot R_g^2 = 1{,}5 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}24\ \text{kgm}^2 \\ \sum M_{CM} = F_F \cdot 0{,}5 - T \cdot 0{,}05 = 52{,}8\ \text{Nm} - T \cdot 0{,}05 \end{cases}$$
$$52{,}8\ \text{Nm} - T \cdot 0{,}05 = -0{,}24\ \text{kgm}^2 \cdot 1\ \text{rad/s}^2$$
$$\Rightarrow T = 1062\ N$$

c)

$$E_{m,0} = E_{m,f};\ E_{m,0} = mgh = 42.085\ \text{J}$$

Rodolament: $v_{\text{CM}} = -\omega\, r$

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}I'_{CM}\omega^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{CM}}{R^2} + \frac{I'_{CM}}{R^2}\right)v_{CM}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(78 + \frac{1{,}5 \cdot 0{,}4^2}{0{,}5^2} + \frac{1{,}0 \cdot 0{,}4^2}{0{,}5^2}\right)v_{CM}^2 = \frac{1}{2}(78 + 0{,}96 + 0{,}64)v_{CM}^2 = 39{,}8 \cdot v_{CM}^2$$

$$E_{m,0} = E_{m,f};\ 42.085\ \text{J} = 39{,}8 \cdot v_{\text{CM}}^2 \Rightarrow v_{\text{CM}} = 32{,}52\ \text{m/s}$$

Conservació del moment lineal i angular

Si la suma de forces externes és nul·la, el moment lineal d'un sòlid rígid es conserva:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \text{ct}$$

De la mateixa manera, si la suma de moments respecte al centre de masses és nul·la, el moment angular respecte al centre de masses es conserva:

$$\sum \vec{M}_{\text{ext,CM}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{\text{CM}} = \text{ct}$$

O si la suma de moments respecte a un eix fix és nul·la, llavors el moment angular respecte a aquest eix es conserva.

Exemple 18: Els púlsars són estrelles de neutrons que giren a gran velocitat i emeten grans quantitats de raigs X de forma polsada, són com fars de raigs X. Les estrelles de neutrons es formen al final del cicle d'estrelles de massa superior a la del nostre Sol. Aquestes estrelles pateixen una gran explosió anomenada supernova. En aquestes explosions, la major part de la massa es comprimeix en el que es coneix com a col·lapse gravitatori. Aquestes estrelles estan formades per neutrons i són els objectes més densos que es coneixen: el radi és típicament de l'ordre de 10 a 20 km i la seva massa és del mateix ordre que la massa del Sol. L'any 1054 astrònoms xinesos van observar la supernova que va donar lloc a la formació del púlsar de la nebulosa de Cranc. Sabem que el període de rotació d'aquest púlsar és de $33 \cdot 10^{-3}$ s, la seva massa és 1,4 $m_\odot$ i el seu radi és $R = 1{,}44 \cdot 10^{-5}\ R_\odot$.

Determineu: *a)* la freqüència angular de rotació, *b)* la velocitat lineal al perímetre del púlsar i *c)* el període de rotació abans de la supernova, suposant que la pèrdua de massa durant la supernova és negligible i que el radi inicial de l'estrella és R=1,2 $R_{\odot}$

Dades del Sol: $m_{\odot}$= 2·10^{30} kg, $R_{\odot}$= 6,96·10^{5} km i $T_{\odot}$= 24,5 dies

Solució:

a) $\omega_f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{33\times10^{-3}\ s} = 190\ \mathrm{rad/s}$

b) $v = \omega \cdot R = 190\ \mathrm{rad/s} \cdot 1{,}44 \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}96 \cdot 10^{8} = 1{,}90 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s} = 1.900\ \mathrm{km/s}$

c)

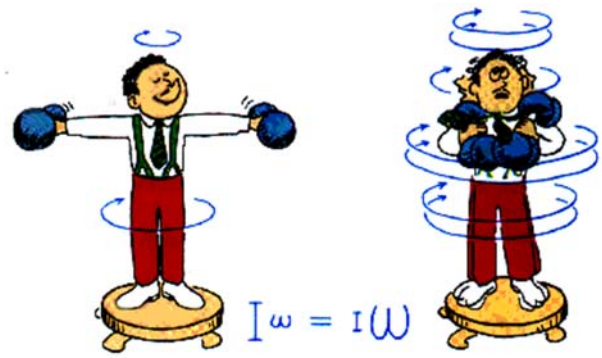
$$\frac{I_O}{I_f} = \frac{2/5\mathrm{mR}_0^2}{2/5\mathrm{mR}_f^2} = \frac{R_0^2}{R_f^2} = \left(\frac{1{,}2\cdot R_{\odot}}{1{,}44\cdot10^{-5}\cdot R_{\odot}}\right)^2 = 6{,}94 \cdot 10^{9}$$

Conservació del moment angular:

$$I_0\omega_0 = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_0 = \frac{I_f}{I_0}\omega_f = \frac{190}{6{,}94\cdot10^{9}} = 2{,}736 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{rad/s}$$

$$T_0 = \frac{2v}{\omega_0} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{2{,}736\cdot10^{-8}\ \mathrm{rad/s}} = 2{,}30 \cdot 10^{8}\ s = 3{,}12 \cdot 10^{8}\ s = 2.660\ \mathrm{dies}$$

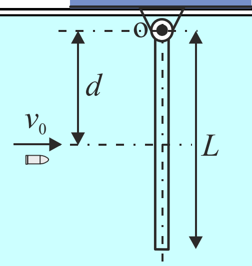
Un altre exemple de conservació del moment angular són les piruetes creuades sobre un peu dels patinadors artístics, que consisteixen a iniciar un moviment de rotació d'espín amb els braços i una cama estesos (moment d'inèrcia gran) i posteriorment recollir braços i cama (moment d'inèrcia petit). Atesa la conservació del moment angular (les pèrdues per fricció són petites), l'efecte que s'aconsegueix és un augment considerable del moment angular:



Xocs

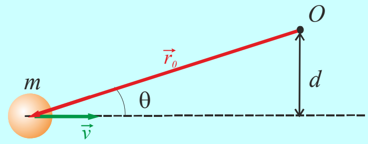
En aquest apartat analitzarem xocs entre sòlids rígids i entre sòlids rígids i partícules puntuals. Cal distingir dos casos, <u>els sòlids units a un eix fix</u> i els <u>sòlids lliures</u>.

Si els sòlids estan units a un eix fix, durant el xoc la reacció associada a l'eix fix pot ser molt intensa. De fet, l'eix fix evita que el sòlid iniciï un moviment de translació. A causa de la contribució de la reacció a l'eix, les forces externes no són nul·les, i no podem aplicar ni la conservació del moment lineal ni la del moment angular. Ara bé, podem aplicar la conservació del moment angular respecte a l'eix fix.



Exemple 19: Es dispara una bala amb velocitat v_0 contra una barra homogènia de longitud L i massa m_{barra} que està travessada en un extrem per un eix (tal com es veu a la figura). A quina distància d a partir de l'eix haurà de xocar la bala horitzontalment si volem que el moment lineal es conservi?

$$\sum \vec{M}_{\text{ext},O} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{ct}$$



Moment angular inicial de la bala (partícula puntual)

$$\vec{L}_{O,i}^{\text{bala}} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m v \Rightarrow L_{0,i}^{\text{bala}} = mvd$$

Moment inicial de la barra

$$L_{O,i}^{\text{barra}} = I_O^i \omega_i = I_O \cdot 0 = 0$$

Moment angular inicial total: $L_{O,i} = L_{0,i}^{\text{bala}} + L_{O,i}^{\text{barra}} = mvd$

Moment d'inèrcia després del xoc (la bala queda encastada):

$$I_O^f = \frac{1}{3} m_{barra} L^2 + md^2$$

Moment angular final: $L_{O,f} = I_O^f \omega_f = \left(\frac{1}{3} m_{\text{barra}} L^2 + md^2\right) \omega_f$

Conservació del moment angular:

$$mvd = \left(\frac{1}{3} m_{barra} L^2 + md^2\right) \omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{mvd}{\frac{1}{3} m_{barra} L^2 + md^2}$$

Per tant, conegudes la velocitat de la bala i la distància d, podem determinar la velocitat angular final del sistema bala+barra.

Per determinar el valor particular de d per al qual es conserva el moment lineal, calculem

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= mv \\ p_f &= mv_f + m_{barra} v_{CM} \end{aligned}\right\} \Rightarrow mv = \left(md + \frac{1}{2} m_{barra} L\right) \omega_f$$

Finalment, si substituïm el valor de ω_f obtingut de la conservació del moment angular, obtenim:

$$mv = \left(md + m_{barra} \frac{L}{2}\right) \frac{mvd}{\frac{1}{3} m_{barra} L^2 + md^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} m_{barra} L^2 + md^2 = md^2 + m_{barra} d \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} L = \frac{1}{2} d$$

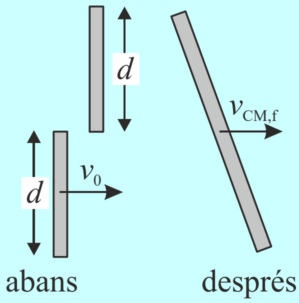
I finalment:

$$d = \frac{2}{3} L$$

Noteu, de l'exemple anterior, que si $d \neq 2/3\, L$ llavors el moment lineal ja no es conserva. Quant val la reacció de l'eix quan $d = 2/3\, L$?

En els sòlids lliures, generalment podem suposar que durant el xocs les forces externes són negligibles i podem imposar la conservació dels moments lineal i angular de tot el sistema.

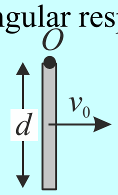
Exemple 20: Una barra de massa m i longitud d inicialment descriu un moviment de translació de velocitat v_0. Posteriorment xoca amb una barra idèntica que està aturada. Després del xoc les dues masses queden enganxades, tal com es veu a la figura. Quin és el moviment del conjunt format per les dues barres després del xoc? Quina és l'energia cinètica després del xoc?



Conservació de la quantitat de moviment

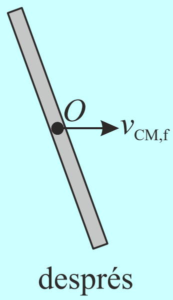
$mv_0 = 2mv_{CM,f} \Rightarrow v_{CM,f} = \frac{v_0}{2}$; la translació ja està resolta.

La conservació del moment angular s'ha d'aplicar al CM de tot el conjunt, és a dir, al punt per on queden unides les dues barres. Per calcular el **moment angular inicial**, només tenim la contribució de la barra que es mou. Com que el CM del sistema no correspon al de la barra, hem d'emprar l'expressió de càlcul del moment angular respecte a un punt O:



$$\vec{L}_O = m_T\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM} \Rightarrow L_{O,i} = mv_0\frac{d}{2} + \frac{1}{12}md^2\omega_i = mv_0\frac{d}{2}$$

En canvi, per calcular el **moment angular final**, com que les dues barres queden unides, el CM i el punt O coincideixen:



$$L_{O,f} = L_{CM,f} = \frac{1}{12}2m(2d)^2\omega_f = \frac{2}{3}md^2\omega_f$$

I si imposem la conservació del moment angular, obtenim

$mv_0\frac{d}{2} = \frac{2}{3}md^2\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{3}{4}\frac{v_0}{d}$; la rotació ja està resolta.

Finalment, l'energia cinètica després del xoc és:

$$E_{C,f} = \frac{1}{2}(2m)v_{CM,f}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}2m(2d)^2\omega_f^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 + \frac{3}{16}mv_0^2 = \frac{7}{16}mv_0^2$$

Resum de relacions

A la taula següent es resumeixen les principals relacions pel que fa a la dinàmica de la partícula puntual i del sòlid rígid. Observeu que les dues primeres columnes són idèntiques; això és per recordar que un sòlid rígid sobre el qual el moment de forces externes és nul i la velocitat de rotació és nul·la descriu un moviment de translació pur i la seva dinàmica és equivalent a la d'una partícula puntual localitzada al centre de masses i de massa igual a la massa total del sòlid rígid.

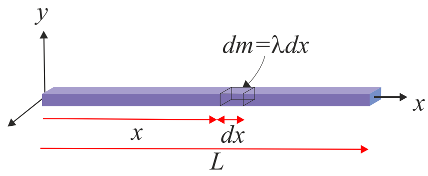
Partícula puntual	***Sòlid rígid, només translació,*** $\sum \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{ext,CM}} = \vec{\mathbf{0}}$	***Rotació eix fix o instantani***	***Cas general sòlid rígid***
$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}$	$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$	$\sum \vec{M}_{\text{ext},O} = I_O\vec{\alpha}$	$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$ $\sum \vec{M}_{\text{ext,CM}} = I_{\text{CM}}\vec{\alpha}$
$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$ $\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}$	$\vec{p} = m\vec{v}_{\text{CM}}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$	$\vec{L}_O = I_O\vec{\omega}$, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{ext,O}$	$\vec{p} = m\vec{v}_{\text{CM}}$, $\frac{d\vec{p}}{\text{dt}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ $\vec{L}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\vec{\omega}$, $\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext,CM}$
$\boldsymbol{W} = \int \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{s}}$	$W = \int \sum \vec{F}_{\text{ext}}\, d\vec{s}_{CM}$	$W = \int \sum \vec{M}_{\text{ext},O} \cdot d\vec{\theta}$ (mov. coplanari)	$W = \int \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{s}_{\text{CM}} +$ $+ \int \sum M_{\text{ext,CM}} \cdot d\theta$
$\boldsymbol{E_C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}$ $\boldsymbol{P} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$	$E_C = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$ $P = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}$	$E_C = \frac{1}{2}I_O\omega^2$ $P = \sum \vec{M}_{\text{ext},O} \cdot \vec{\omega}$	$E_C = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ $P = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{CM}} +$ $+ \sum \vec{M}_{\text{ext,CM}} \cdot \vec{\omega}$
$\vec{\boldsymbol{I}} = \int \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{p}}$ $\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{O}} = \int \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{R,O}}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}}$	$\vec{I} = \int \sum \vec{F}_{ext}\, dt = \Delta\vec{p}_{CM}$	$\vec{J}_O = \vec{r}_O \times \vec{I} = \int \sum \vec{M}_{ext,O}\, dt = \Delta\vec{L}_O$	$\vec{I} = \int \sum \vec{F}_{ext}\, dt = \Delta\vec{p}_{CM}$ $\vec{J}_{CM} = \int \sum \vec{M}_{ext,CM}\, dt = \Delta\vec{L}_{CM}$

Qüestions del tema 6

Càlcul del centre de masses

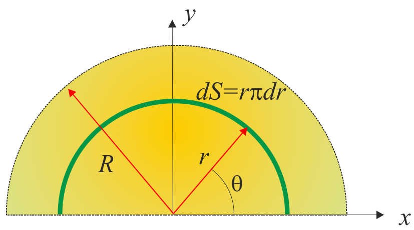
1. Un bat de beisbol de longitud L té una densitat lineal donada per $\lambda = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)$, on $x = 0$ correspon a l'extrem prim del bat. *a*) Trobeu la massa del bat. *b*) Trobeu la posició del CM.

Sol.: *a)* $2\,L/15$; *b*) $x_{\mathrm{CM}} = 9\,L/16$.



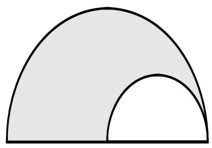
2. La densitat d'una barra de longitud L i massa m varia de forma lineal segons la distància de l'extrem: $\lambda = a \cdot x$. *a)* Expresseu el coeficient a en funció de L i m. *b)* Trobeu la posició del CM.

Sol.: *a)* $a = 2\,m/L^2$; *b*) $x_{\mathrm{CM}} = 2\,L/3$.



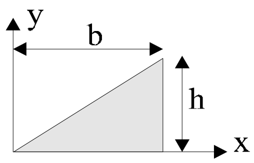
3. La densitat d'un semicercle ve donada per $\sigma = ar$. *a)* Expresseu el coeficient a en funció de R i m. *b)* Trobeu la posició del CM.

Sol.: a) $a = 3\,m/\pi R^3$; b) $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = 3\,R/2\,\pi\,\vec{\jmath}$ (origen de coordenades al centre del cercle).



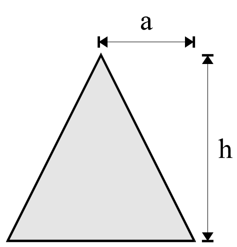
4. Trobeu el centre de masses de l'objecte de la figura (semicercle al qual li manca una part).

Sol.: $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = -R/6\,\vec{\imath} + 14\,R/9\,\pi\,\vec{\jmath}$ (origen de coordenades al centre del cercle).



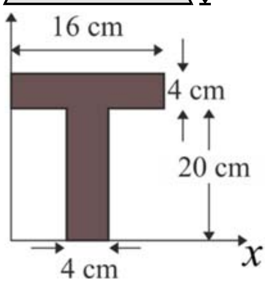
5. Trobeu el centre de masses d'un triangle rectangle d'altura h i base b.

Sol.: $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = 2\,b/3\;\vec{\imath} + h/3\;\vec{\jmath}$ (origen de coordenades al centre del cercle de la base).



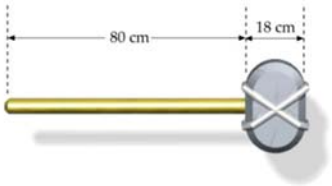
6. Trobeu el centre de masses d'un triangle isòsceles d'altura h i base $2a$.

Sol.: $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = h/3\;\vec{\jmath}$ (origen de coordenades al centre de la base).



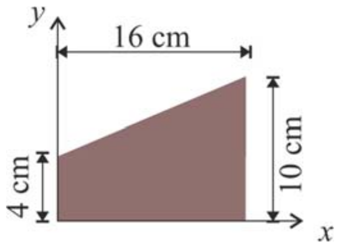
7. Trobeu el centre de masses de la figura.

Sol.: $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = (8\vec{\imath} + 15{,}3\,\vec{\jmath})$ cm



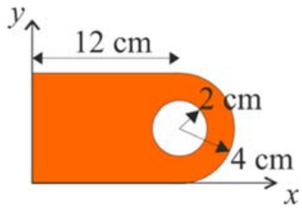
8. La destral de pedra amb mànec de fusta de la figura està formada per una pedra simètrica de 8 kg lligada a l'extrem d'un pal homogeni de 2,5 kg. ¿A quina distància de l'extrem esquerra del mànec es troba el centre de masses?

Sol.: 0,773 m.



9. Troba el centre de masses de l'objecte de la figura respecte els eixos indicats. Dada: l'objecte està fet d'un material homogeni de manera que la densitat és constant, no depèn de la posició.

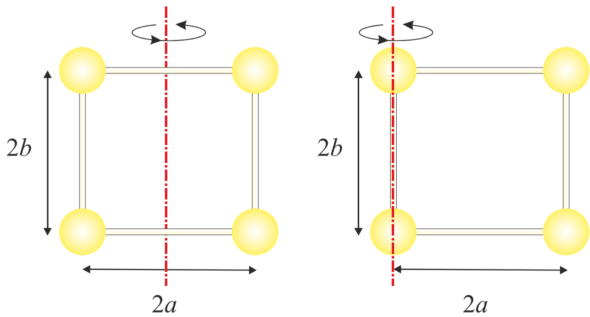
Sol.: (0,0914, 0,03714) m.



10. Troba el centre de masses de l'objecte de la figura respecte els eixos indicats. Dada: l'objecte està fet d'un material homogeni de manera que la densitat és constant, no depèn de la posició.

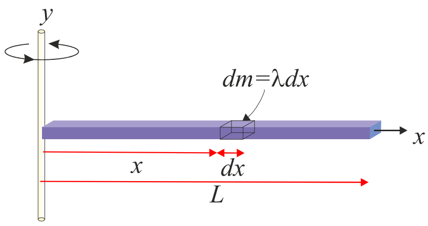
Sol.: (0,07087, 0,04) m.

Càlcul del moment d'inèrcia



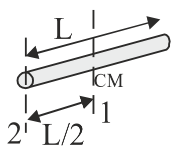
11. Determineu el moment d'inèrcia del sistema format per quatre masses idèntiques m: *a)* respecte a l'eix 1 de la figura esquerra i *b)* respecte a l'eix 2 de la figura dreta.

Sol.: *a)* $I_{eix1} = 4ma^2$; *b)* $I_{eix2} = 8ma^2$.



12. Determineu el moment d'inèrcia d'una barra homogènia molt prima de massa m i longitud L respecte a un eix que passa pel seu extrem (figura). Feu aquest càlcul utilitzant la definició de moment d'inèrcia i emprant els elements de massa dm indicats a la figura.

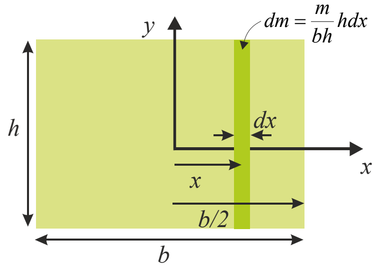
Sol.: $I_{eix} = \frac{1}{3}mL^2$.



13. Trobeu el moment d'inèrcia d'una barra prima de massa m, longitud L i homogènia respecte a l'eix 2 dibuixat a la figura. Nota: utilitzeu el teorema dels eixos paral·lels sabent que el moment d'inèrcia respecte a l'eix 1 que passa pel CM és: $I_1 = \frac{1}{12} m L^2$.

Sol.: $I_2 = \frac{1}{3} m L^2$.

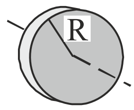
14. Determineu els moments d'inèrcia respecte als eixos x i y del rectangle de la figura. Noteu que l'origen dels eixos coincideix amb el centre geomètric de la figura. Calculeu el moment d'inèrcia respecte a un eix, z, perpendicular als eixos x i y i que passa pel centre del rectangle. Nota: per calcular I_y cal integrar els elements de massa indicats a la figura. I_z el podeu calcular emprant el teorema dels eixos perpendiculars.



$$dm = \frac{m}{bh} h dx$$

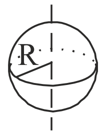
Sol.: $I_y = \frac{1}{12} mb^2$, $I_x = \frac{1}{12} mh^2$, i $I_z = \frac{1}{12} m(b^2 + h^2)$.

15. Calculeu el moment d'inèrcia d'un disc de radi R i massa m respecte al seu eix de simetria de revolució.



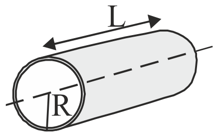
Sol.: $I = \frac{1}{2} mR^2$.

16. Calculeu el moment d'inèrcia d'una esfera de radi R i massa m respecte a un dels seus diàmetres.



Sol.: $I = \frac{2}{5} mR^2$.

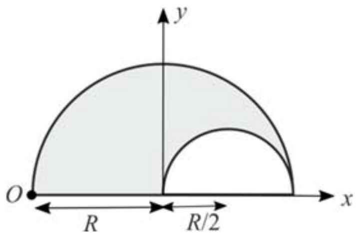
17. Trobeu el moment d'inèrcia d'un tub foradat de radi R i massa m respecte al seu eix de simetria de revolució.



Sol.: $I = mR^2$.

18. Calcula el moment d'inèrcia d'una escorça esfèrica gruixuda de massa 2 kg amb radi interior (cavitat) 20 cm i radi exterior 30 cm respecte a un eix tangent a la superfície exterior de l'esfera.
19.
Sol.: 0,2688 kgm^2.

20. Determina el radi de gir de l'objecte pla de la figura respecte un eix que passa pel punt O (situat a un vèrtex) i es perpendicular al pla de la figura (eix z). Dades: el radi R és de 20 cm i la densitat superficial de massa σ és 25 kg/m^2.

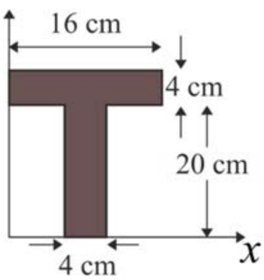


Sol.: 0,220 m.

21. Una roda de vagó de 1 m diàmetre està formada per una llanta molt prima de massa 8 kg i sis radis, cada un dels quals té una massa de 1,2 kg. Determina el moment d'inèrcia i el radi de gir respecte l'eix de la roda.

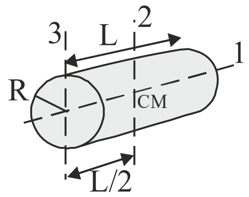
Sol.: 2,6 kg m^2; 0,413 m

22. Determina el radi de gir de l'objecte pla de la figura respecte l'eix x. Dada: la densitat superficial de massa σ és 10 kg/m^2.



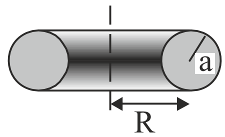
Sol.: 0,1702 m.

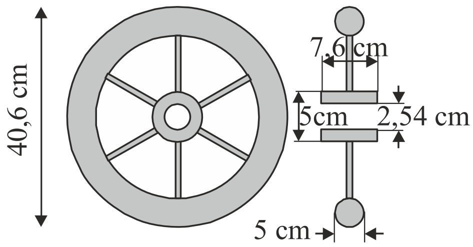
23. Calculeu el moment d'inèrcia d'un cilindre massís i homogeni de longitud L i radi R respecte als tres eixos dibuixats a la figura.



Sol.: $I_1 = \frac{1}{2}mR^2$; $I_2 = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$; $I_3 = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}mL^2$.

24. El volum i el moment d'inèrcia d'un torus (donut) de radi interior a i radi exterior R respecta al eix amb simetria de revolució que passa pel centre del forat són $V = 2\pi^2 a^2 R$ i $I = m\left(R^2 + \frac{3}{4}a^2\right)$. Calculeu el moment d'inèrcia i el radi de gir del volant d'acer de la figura que està format per un anell exterior en forma de torus de secció 5 cm (diàmetre) i que està soldat mitjançant 6 radis cilíndrics de secció 2,6 cm^2 a un eix central. Aquest eix central consisteix en un cilindre foradat de 7,6 cm de longitud, diàmetre exterior de 5 cm i diàmetre interior de 2,54 cm. Nota la densitat de l'acer és 7,82 g/cm^3.





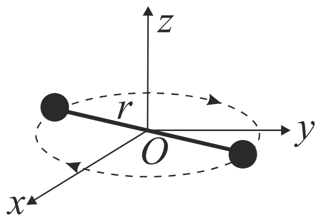
Sol.: I = 0,598 kg·m^2; R_g=26,1 cm

25. Tenim una escorça cilíndrica gruixuda de massa m amb radi interior (cavitat) R_1 i radi exterior R_2. Calculeu el seu moment d'inèrcia respecte a l'eix de revolució.

Sol.: $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$

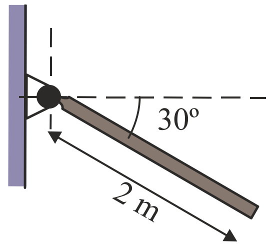
Dinàmica del sòlid rígid

26. Les dues partícules de la figura tenen una massa de 2 kg i estan connectades mitjançant una barra lleugera i rígida de 4 m de longitud (r = 2 m). El sistema gira en el pla xy al voltant de l'eix z amb una velocitat angular de 8 rad/s. Calculeu: *a)* El moment d'inèrcia del sistema. *b)* L'energia cinètica del sistema. Mitjançant un mecanisme intern, s'aconsegueix doblar la barra, que passa de 4 a 8 m sense alterar l'eix de rotació. *c)* Quin és ara el moment d'inèrcia del sistema? *d)* quina és la nova velocitat angular del sistema? *e)* Quina és la nova energia del sistema? *f)* Si no hi ha fricció, quin treball ha fet aquest mecanisme intern?



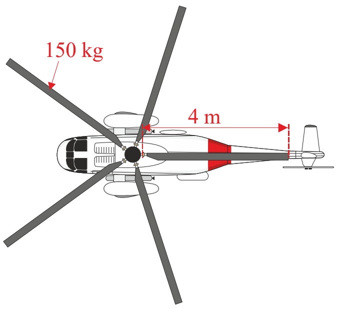
Sol.: *a*) 16 kg·m^2; *b*) 512 J; *c*) 64 kg·m^2; *d*) 2 rad/s; *e*) 128 J; *f*) –384 J.

27. Una vareta uniforme de 5 kg de massa i 2 m de longitud pot pivotar lliurement al voltant d'una articulació unida a una paret. La vareta està inicialment aturada i en posició horitzontal i després es deixa anar. Quan la vareta forma un angle de 30º respecte l'horitzontal, determineu: *a)* l'acceleració angular de la vareta, i *b)* l'acceleració lineal a l'extrem lliure de la vareta.



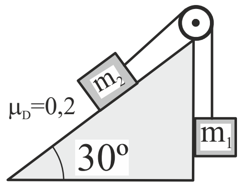
Sol.: *a*) 6,372 rad/s^2; *b*) 12,74 m/s^2.

28. Podem considerar el rotor d'un helicòpter com un sistema format per un eix cilíndric de massa negligible unit a cinc ales llargues i primes. Cadascuna de les cinc ales del rotor té una longitud de 4 m i una massa de 150 kg. *a)* Calculeu el moment d'inèrcia del rotor al voltant de l'eix de rotació. *b)* Quin parell de forces cal aplicar perquè el rotor passi d'estar aturat a una velocitat de 6,0 rev/s en 8,0 s?



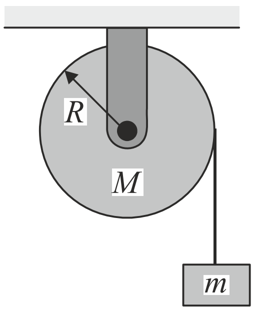
Sol.: *a*) 4.000 kgm^2; *b*) 18.850 Nm.

29. Determineu el sentit del moviment del sistema de la figura, l'acceleració i la tensió de la corda que uneix els blocs de massa $m_1 = 8$ kg i $m_2 = 10$ kg, si la politja és un anell d'1 kg de massa i 10 cm de radi. Els coeficients de fricció estàtic i dinàmic entre el bloc i el pla son 0,25 i 0,2 respectivament.



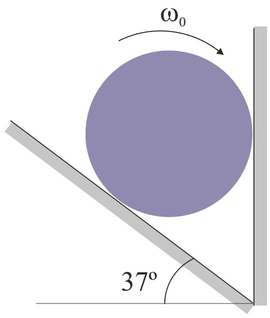
Sol.: es mou cap a la dreta, 0,65 m/s^2; 73,2 N; 72,5 N.

30. Un bloc de massa m està lligat a una corda lleugera (massa negligible) que està enrotllada a una corriola de massa M i radi R. La corriola és aproximadament un disc homogeni, de manera que el seu centre de masses coincideix amb el centre geomètric, i el seu moment d'inèrcia respecte al centre de massa és $1/2MR^2$. Es deixa anar la massa petita m de manera que baixa fent girar la corriola. Determineu *a)* l'acceleració de la massa m i *b)* la tensió de la corda. Negligiu la fricció al pivot.



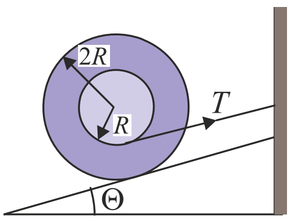
Sol.: *a*) $a = \frac{g}{1+M2m}$; *b*) $T = g\frac{M \cdot m}{M+2m}$.

31. El cilindre de la figura, de massa 10 kg i radi 20 cm, entra en contacte amb la paret i el terra inclinat de la figura amb velocitat angular $\omega_0 = 10\pi$ rad/s. Si el coeficient de fricció dinàmic amb el terra i la paret inclinada és el mateix i amb valor μ=0,25, calculeu el nombre de voltes que fa fins a aturar-se.

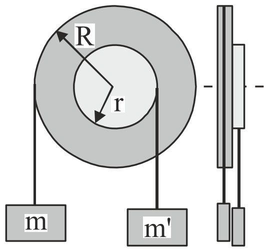


Sol.: 1,5 voltes

32. La corriola de la figura es compon de dos discos concèntrics. Un disc és homogeni, amb radi $2R$ i massa m. L'altre disc és de radi R i molt més lleuger que el primer, de manera que podem suposar que la seva massa és nul·la. Enrotllem un fil al voltant del disc de radi R, i l'altre extrem del fil s'enganxa a la paret. La corriola està situada al damunt d'un pla inclinat que forma un angle Θ amb l'horitzontal. Calculeu: *a)* el valor mínim del coeficient de fricció estàtic del pla amb la corriola de manera que aquesta no es mogui, *b)* l'acceleració del centre de masses del cilindre si el coeficient de fricció dinàmic és igual a la meitat del valor calculat a l'apartat *a)*.



Sol.: *a*) $\mu = \text{tg}\Theta$; *b*) $a_{CM} = g\ \sin\Theta/6$.



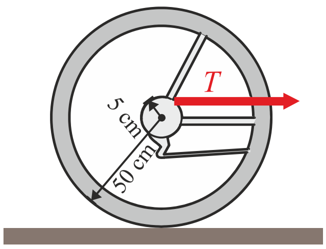
33. Dues corrioles de radis R = 8 cm i r = 6 cm respectivament, estan acoblades sòlidament de manera que formen un únic bloc que pot girar al voltant del seu eix central horitzontal. De la regata de la corriola gran penja una massa m = 0,6 kg i de la petita penja una massa m' = 0,5 kg de manera que el pes d'ambdues masses tendeixen a fer girar el sistema en sentits oposats. En deixar el sistema lliure, aquest es posa en moviment. Determina: *(a)* el sentit de moviment del sistema? *(b)* l'acceleració angular de les corrioles i les acceleracions de les masses, i *(c)* la tensió a cada corda. Pel càlcul del moment d'inèrcia suposeu que es tracta d'un únic disc de radi 8 cm i massa 0,8 kg.

Sol.: a) gira en sentit antihorari; *b*) 21,5 rad/s^2; *c*) T = 4,85 N, T' = 5,54 N.

Rodolament

34. El coeficient de fregament estàtic entre els pneumàtics d'un cotxe i el paviment és de 0,8. Calculeu el parell de forces mínim que s'ha d'aplicar per accelerar les rodes de tal manera que aquestes llisquin sense rodolar sobre l'asfalt (per deixar els pneumàtics "marcats a l'asfalt"). El diàmetre de les rodes és 60 cm i la massa del cotxe 1200 kg. Suposeu que el pes del cotxe es reparteix per igual a cada roda.

Sol.: 706 Nm.

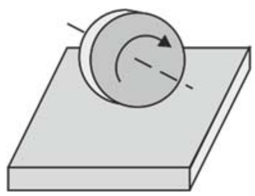


35. Quan un ciclista pedala aplica una tensió a la cadena de 200 N. El radi del plat pel qual passa la cadena és 5 cm, el radi de la roda és 50 cm, el radi de gir de la roda és 40 cm i la massa total de la roda és 1,5 kg. La massa de tot el sistema (bicicleta i ciclista) és 80 kg. Determineu: *a)* l'acceleració angular de la roda, *b)* l'acceleració lineal del ciclista i *c)* el valor de la força de fricció estàtica. Suposeu que pràcticament tota la força de frec s'aplica a la roda posterior. Considereu com positiu el sentit en que avança el ciclista, és a dir, considereu positiva l'acceleració lineal del ciclista.

Sol.: *a*) 0,247 m/s^2; *b*) −0,494 rad/s^2 i *c*) 19,8 N.

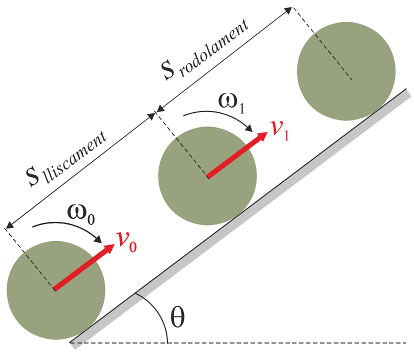
36. Quan juguem a bitlles, en llençar la bola al llarg del passadís aquesta triga un cert temps a assolir un moviment de rodolament sense lliscament. Calculeu, a l'instant que la bola assoleix el moviment de rodolament, *a)* la velocitat del centre de masses de la bola i *b)* la distància recorreguda. Suposeu que la velocitat amb què és llançada és v_0 i que el coeficient de fricció dinàmic del parquet del passadís és μ.

Sol.: *a*) $v_{CM} = \frac{5}{7} v_0$; *b*) $\Delta s = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}$.



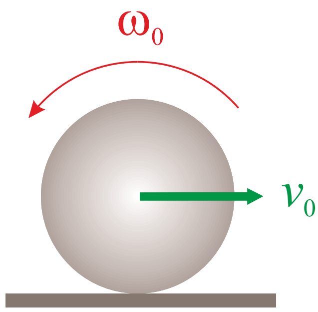
37. Un disc homogeni i sòlid de radi R i es fa girar amb una velocitat angular ω_0 respecte a l'eix que passa pel centre i perpendicular a la superfície. Després es situa sobre una superfície horitzontal rugosa, tal com s'indica a la figura. Si els coeficients de fricció dinàmic i estàtic són iguals ($\mu_D = \mu_E = \mu$), calculeu el temps que triga i l'espai que recorre abans de descriure un moviment de rodolament.

Sol.: $t = \frac{R\,\omega_0}{3\,\mu\,g}$; $\Delta s = \frac{R^2 \omega_0^2}{18\,\mu\,g}$.



38. Deixem un cilindre de massa 1 kg i radi 1 m sobre un pla inclinat amb angle $\theta =$ 10º. El coeficient de fregament dinàmic és $\mu_D = 0{,}2$ i el de fregament estàtic és $\mu_E = 0{,}25$. Les condicions inicials a $t = 0$ s són: velocitat angular inicial $\omega_0 = -10\pi\ \mathrm{rad/s}$ (amb el sentit indicat a la figura) i velocitat inicial de translació del CM $v_0 = 0\ \mathrm{m/s}$. Aquest cos, després d'un cert temps (i un espai recorregut $s_{\text{lliscament}}$), assolirà un moviment de rodolament amb ω_1 i v_1, i després continuarà en condicions de rodolament fins a una altura màxima (i un espai recorregut $s_{\text{rodolament}}$). *(a)* Dibuixeu les forces que actuen sobre el cos durant l'etapa de lliscament i calculeu l'acceleració del centre de masses, a_{CM}, i l'acceleració angular durant l'etapa de lliscament. *(b)* Determineu el temps t_1 que es triga a arribar a la condició de rodolament, així com l'espai recorregut, $s_{\text{lliscament}}$. Determineu també ω_1 i v_1. *(c)* Calculeu l'energia mecànica quan arriba al rodolament, suposant que l'energia potencial gravitatòria a la base del pla inclinat és zero. Quin treball ha realitzat la força de fregament durant aquesta etapa? *(d)* Calculeu l'espai que recorre el cilindre en condicions de rodolament fins a aturar-se.

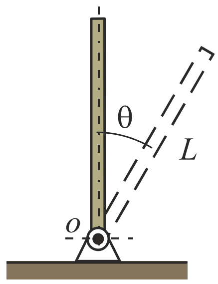
Sol.: *a*) $\alpha = 3{,}86\ \mathrm{rad/s^2}$, $a_{\text{CM}} = 0{,}2287\ \mathrm{m/s^2}$; *b*) 7,68 s, 6,74 m, −1,76 rad/s, 1,76 m/s; *c*) 13,8 J, −232,9 J; *d*) 1,36 m.



39. Una esfera de radi 50 cm es deixa anar amb una velocitat del centre de masses inicial de v_0 = 5 m/s cap endavant i una velocitat angular inicial de ω_0 = 60 rad/s en sentit antihorari (vegeu figura adjunta). El coeficient de fricció dinàmic de l'esfera amb el terra és μ_D = 0,25. Nota: recordeu que fins que el sistema no roda sense lliscar la relació de rodolament ($v_{CM} = -R\omega$) no es compleix. *(a)* Calculeu el temps que triga la velocitat del centre de masses a fer-se nul·la i calculeu la distància recorreguda durant aquest temps. *(b)* Quina és la velocitat angular de l'esfera quan la velocitat del centre de masses és nul·la? *(c)* Quant de temps triga l'esfera a descriure un moviment de rodolament?

Sol.: *a*) 5,097 m; *b*) 35 rad/s; *c*) 4,077 s.

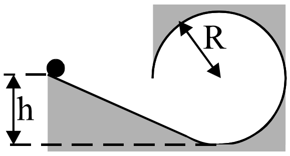
Treball i energia del sòlid rígid



40. Una barra uniforme de longitud L i massa m pot girar al voltant d'un pivot situat en un dels extrems. Es deixa anar la barra des de la seva posició vertical amb una velocitat inicial nul·la. Calculeu, quan la barra forma un angle θ amb la vertical, *a)* la seva velocitat angular, *b)* la seva acceleració angular, *c)* les components tangencial i normal de l'acceleració del centre de masses i *d)* les components tangencial i normal de la força de reacció al pivot.

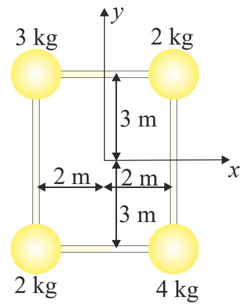
Sol.: *a)* $\sqrt{\frac{3g(1\text{-}\cos\theta)}{L}}$;*b)* $-\frac{3g\ \sin\theta}{2\,L}$; *c)* $\frac{3g\ \sin\theta}{4}$, $\frac{3g\ (1\text{-}\cos\theta)}{2}$; *d)* $\frac{mg\ \sin\theta}{4}$ i $\frac{mg(5\cos\theta-3)}{2}$.

41. Una esfera de radi r baixa per una rampa rodant sense relliscar. Si inicialment l'esfera es troba a una alçada h amb velocitat nul·la, *a)* a partir de quina alçada mínima h l'hem de deixar anar de manera que pugui descriure una trajectòria circular complerta de radi R = 4 m, tal com s'indica a la figura? *b)* Amb quina velocitat arribarà a la base de la rampa? Considereu que el radi de l'esfera és negligible en comparació amb el radi de la trajectòria circular.



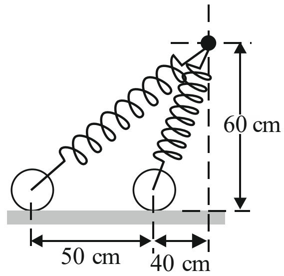
Sol.: *a)* h = 10,8 m; *b)* v_B = 12,3 m/s.

42. Les quatre partícules de la figura estan connectades mitjançant barretes lleugeres i rígides. Si el sistema gira en el pla xy al voltant de l'eix z amb una velocitat angular de 8 rad/s, calculeu: *a)* el moment d'inèrcia del sistema, *b)* l'energia cinètica del sistema.



Sol.: *a)* I = 143 kg·m^2; *b)* E_C = 4.576 J.

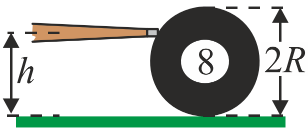
43. Un cilindre massís de 15 cm de radi rodola sobre un pla horitzontal. El cilindre té una massa de 90 kg i està en repòs en la posició indicada en la figura. La constant elàstica de la molla és 450 N/m i la seva longitud natural és 60 cm. Quina serà la velocitat angular del cilindre quan el seu centre s'hagi mogut 50 cm cap a la dreta?



Sol.: 4,94 rad/s.

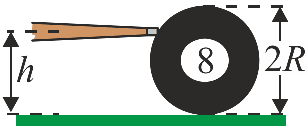
Impuls

44. Calculeu l'alçada a què hem de colpejar una bola de billar de radi R perquè des del principi rodoli sense relliscar. Expresseu el resultat en funció del radi de la bola de billar.



Sol.: h = 7/5R.

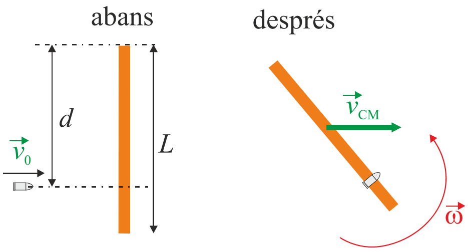
45. Es colpeja a una alçada h = 7 cm una bola de billar de radi R = 8 cm i massa 700 g amb un taco. L'impuls associat a l'impacte és 12 Ns. Quin temps triga la bola de billar en descriure un moviment de rodolament?
El coeficient de fricció dinàmic de la bola de billar amb el tapet és 0,3.



Sol.: 2,18 s.

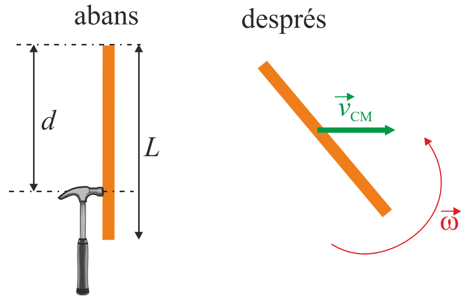
Xocs

46. Una bala de massa 100 gr i amb una velocitat inicial de v_0 = 100 m/s xoca i queda enganxada a una barra de 10 kg de massa i longitud L = 40 cm. La bala impacta a una distància d = 30 cm d'un extrem. La barra inicialment està aturada i descansa sobre una taula d'aire, de manera que el fregament entre la taula i la barra és negligible. Calculeu la velocitat del centre de masses i la velocitat angular del sistema barra i bala després del xoc.



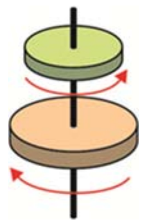
Sol.: 9,09 m/s i 7,44 rad/s.

47. Una barra d'1 kg de massa i longitud L = 40 cm descansa aturada sobre una taula d'aire, de manera que el fregament entre la taula i la barra és negligible. Donem un cop a una distància d = 15 cm de l'extrem. La velocitat del centre de masses després del impacte és 10 m/s. Calculeu la velocitat angular de la barra després de l'impacte. Indiqueu amb el signe si gira amb sentit antihorari o horari.



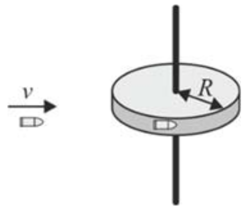
Sol.: −37,5 rad/s.

48. Un disc uniforme de 9 kg de massa i 45 cm de radi gira a 400 rpm al voltant d'un eix vertical, tal com s'indica a la figura. Concèntric a aquest disc se situa un segon disc de 4,5 kg de massa i 10 cm de radi que gira en sentit oposat amb una velocitat de 200 rpm. Si deixem caure el segon disc sobre el primer, calculeu la velocitat angular del conjunt de les dues masses.



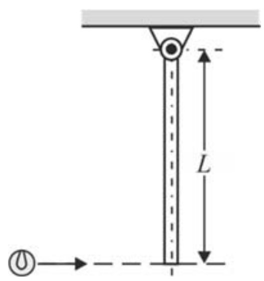
Sol.: −385 rpm.

49. Una bala de massa 100 g i amb una velocitat inicial de 100 m/s xoca i queda enganxada a la vora d'un volant d'1 kg de massa i 10 cm de radi. Calculeu la velocitat angular del sistema volant i bala després del xoc. Suposeu negligible el moment de les forces de fricció.



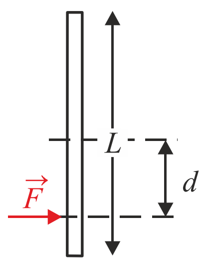
Sol.: ω = 166,67 rad/s.

50. Un bat de beisbol (per simplificar, suposeu que és homogeni i cilíndric, és a dir, de secció constant) té una llargada de 80 cm i una massa d'1,2 kg. Per l'extrem superior està suspès de les mans del batedor. A l'extrem inferior hi incideix, en direcció perpendicular, una bola que té una quantitat de moviment de 0,48 kg·m/s. Com a conseqüència del xoc la bola queda encastada al bat. Trobeu: *a)* el moment angular total del sistema abans del xoc i *b)* la velocitat angular del bat immediatament després del xoc. Considereu negligible la massa de la bola comparada a la del bat.



Sol.: *a*) 0,384 kg·m^2/s; *b*) 1,5 rad/s.

51. Sobre una superfície llisa (sense fregament) descansa una barra homogènia de longitud L i massa m. Colpegem perpendicularment la barra a una distància d del centre de masses. L'impuls del cop és $I = \int F dt = F_m \Delta t$, on F_m és la força mitjana durant el cop. Determineu *(a)* la velocitat del centre de masses després del cop en funció de l'impuls I, la distància d i la massa de la barra m i *(b)* la velocitat de rotació respecte al centre de masses després del cop en funció de l'impuls I, la distància d i la massa i longitud de la barra, m i L. Suposeu que el temps que colpegem és molt petit. El moment d'inèrcia de la barra respecte al centre de masses és $mL^2/12$.



Sol.: *a*) $v_{CM}=I/m$; *b*) $\omega = \frac{12Id}{mL^2}$.

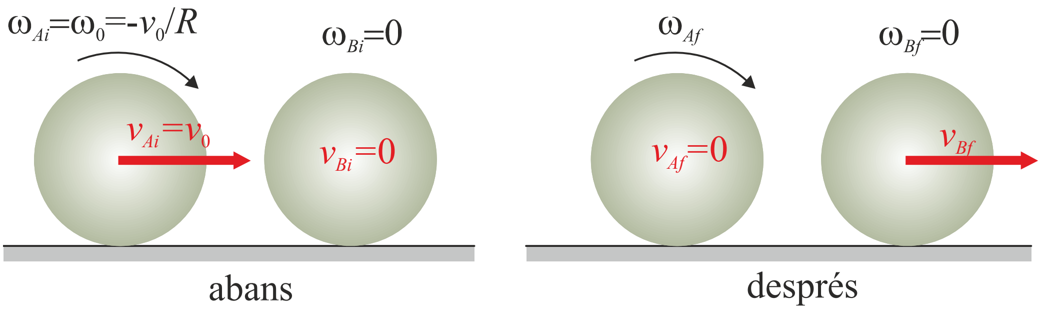
52. Tenim dues esferes, *A* i *B*, de massa *m* i radi *R* sobre un pla. L'esfera *A* rodola sense lliscament amb una velocitat del seu CM v_0. L'esfera *B* està aturada. Les esferes xoquen, de manera que just després del xoc la velocitat del CM d'*A* és zero i la velocitat angular de *B* és zero.

   a) Calculeu just després del xoc la velocitat de translació del CM i la velocitat angular de rotació de les dues esferes, això és $v_{\text{Af}} = 0$, ω_{Af}, v_{Bf} i $\omega_{\text{Bf}} = 0$ (on l'índex *f* es refereix a l'instant just després del xoc).

   b) Calculeu la variació de l'energia del sistema durant el xoc.

   c) Després del xoc cap de les esferes rodola (el coeficient de fricció dinàmic esfera-superfície és μ_D). Calculeu el temps que triguen a rodolar les esferes *A* i *B*, t_A i t_B, així com les velocitats del centre de masses quan rodolen, això és v_A i v_B.

   d) Calculeu la distància entre els CM de les esferes quan es posen a rodolar.



Sol.: *a*) $v_{\text{Af}} = 0$ m/s, $\omega_{\text{Af}} = \omega_0$, $v_{\text{Bf}} = v_0$,$\omega_{\text{Bf}} = 0$ rad/s; *b*) 0 J; *c*) $t_A = t_B = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_D g}$; *d*) $\frac{10}{49}\frac{v_0^2}{\mu_D g}$.

7. Estàtica

Objectius

Representació del diagrama de cos lliure
Quina és la condició d'equilibri del sòlid rígid?
Descripció de diferents punts de suport
Càlcul de l'equilibri en estructures senzilles

Condició d'equilibri de la partícula puntual

Equilibri mecànic: absència de moviment, situació estàtica.

Condició d'equilibri: primera llei de Newton → condició sobre el moviment de translació

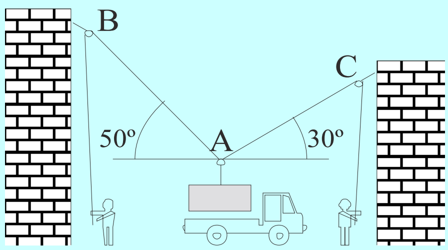
$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{0}$$

Plantejament:

- Esquema real: diagrama espacial
- Diagrama de cos lliure:
  - Identificar l'objecte a aïllar
  - Dibuixar les forces que hi actuen tot indicant-ne les direccions

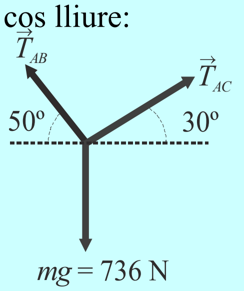
Exemple 1: Es vol carregar una caixa de fusta de 75 kg sobre un camió, tal com s'indica a la figura, i per a això se suspèn de dos cables que passen per dues corrioles clavades als edificis. Calculeu la tensió de cadascuna de les cordes.

Esquema real:



$$mg = 75\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s} = 736\ \mathrm{N}$$

Diagrama de cos lliure:



$$\left.\begin{aligned} T_{\mathrm{AB}}\cos 50° &= T_{\mathrm{AC}}\cos 30° \\ T_{\mathrm{AB}}\sin 50° + T_{\mathrm{AC}}\sin 30° &= mg \end{aligned}\right\} T_{\mathrm{AC}} = T_{\mathrm{AB}}\frac{\cos 50°}{\cos 30°}$$

$$T_{\mathrm{AB}}\sin 50° + T_{\mathrm{AB}}\cos 50° \mathrm{tg} 30° = 736\ \mathrm{N}$$

$$T_{\mathrm{AB}} = \frac{736N}{\sin 50° + \cos 50° \mathrm{tg} 30°} = 647\ \mathrm{N}$$

$$T_{\mathrm{AC}} = T_{\mathrm{AB}}\frac{\cos 50°}{\cos 30°} = 480\ \mathrm{N}$$

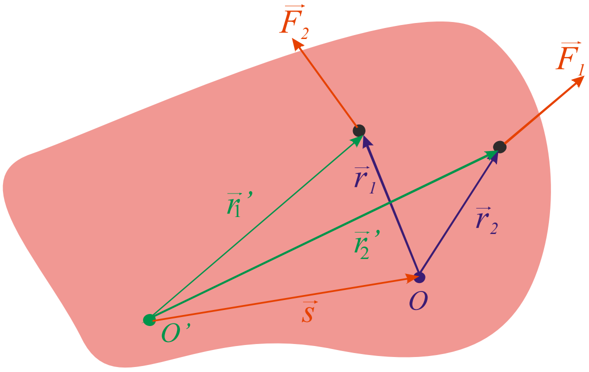
Condició d'equilibri del sòlid rígid

Perquè un objecte inicialment en repòs es mantingui en repòs és necessari que:

- $\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$no s'iniciarà el moviment de translació.
- $\vec{M}_{R,0} = \sum \vec{M}_0 = \vec{0} \quad \forall O \Rightarrow$ no s'iniciarà el moviment de rotació.

Si $\vec{M}_{R,0} = \vec{0}$ i $\vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{R,0'} = \vec{0}$ per a qualsevol punt O'.

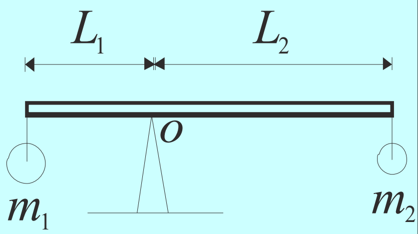
És a dir, si la força resultant és zero i per a un punt qualsevol el moment resultant és zero, llavors el sòlid rígid està en equilibri.



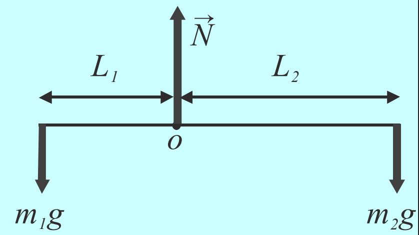
Demostració:

$$\sum \overrightarrow{M_O}' = \vec{r}_1{}' \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2{}' \times \vec{F}_2 + \dots$$
$$= (\vec{s} + \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{s} + \vec{r}_2) \times \vec{F}_2 + \dots$$
$$= (\vec{s} \times \vec{F}_1 + \vec{s} \times \vec{F}_2 + \dots) +$$
$$(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F} + \dots)$$
$$= \vec{s} \times \sum \vec{F} + \sum \overrightarrow{M_O} = \vec{0} + \vec{0}$$

<u>Exemple 2</u>: Una barra rígida de pes negligible està en equilibri estàtic sota l'acció de tres forces paral·leles: els dos pesos de les masses als extrems i la reacció del pivot. Les dades són: l_1, l_2 i m_1. Trobeu la massa m_2 i la reacció del punt de suport.

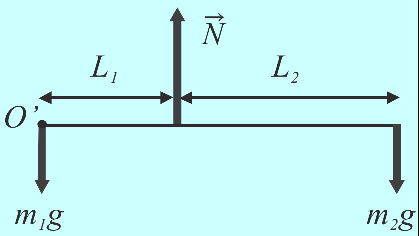


$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_R &= \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow N = m_1 g + m_2 g \\ \vec{M}_{R,0} &= \sum \vec{M}_0 = \vec{0} \Rightarrow L_1 m_1 g = L_2 m_2 g \end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow m_2 = m_1 \frac{L_1}{L_2}$$



i

$$N = m_1 g + m_2 g = N = \left(m_1 + m_1 \frac{L_1}{L_2}\right) g$$
$$= m_1 g \left(\frac{L_2 + L_1}{L_2}\right)$$

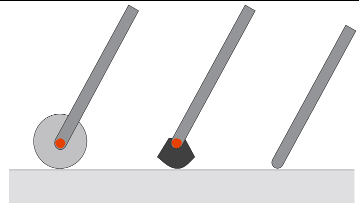
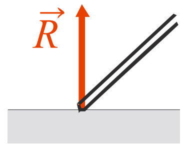
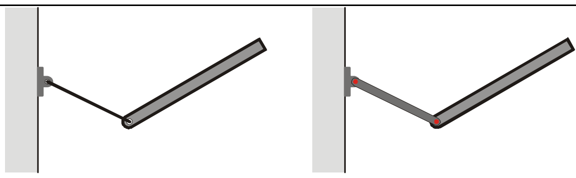
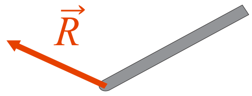
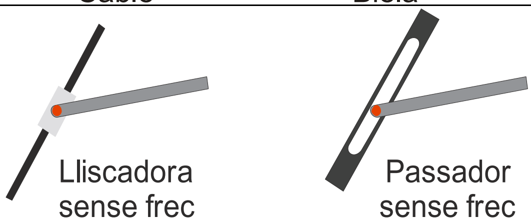
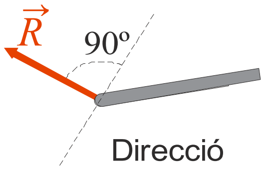
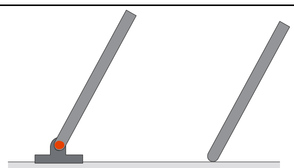
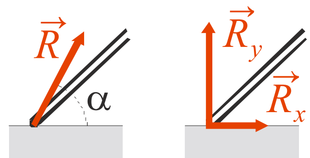
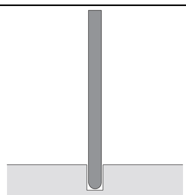
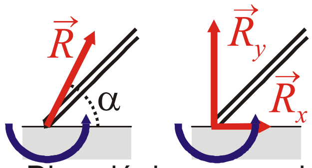


Provem un altre punt de referència:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_R &= \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow N = m_1 g + m_2 g \\ \vec{M}_{R,0'} &= \sum \vec{M}_{0'} = \vec{0} \Rightarrow L_1 N = (L_1 + L_2) m_2 g \end{aligned}\right\}$$
$$L_1 (m_1 g + m_2 g) = (L_1 + L_2) m_2 g \Rightarrow L_1 m_1$$
$$= L_2 m_2 \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{L_1}{L_2}$$

Punts de suport

Les reaccions dels diferents punts de suport són:

Suport	Reacció	Nombre d'incògnites
 Rodet, Balancí, Superfície llisa	 $\vec{R}$ Direcció coneguda	1
 Cable, Biela	 $\vec{R}$ Direcció coneguda	1
 Lliscadora sense frec, Passador sense frec	 $\vec{R}$ 90º Direcció coneguda	1
 Articulació, Superfície rugosa	 $\vec{R}$ α $\vec{R}_y$ $\vec{R}_x$ Direcció desconeguda	2
 Encastament	 $\vec{R}$ α $\vec{R}_y$ $\vec{R}_x$ Direcció desconeguda + parell de forces	3

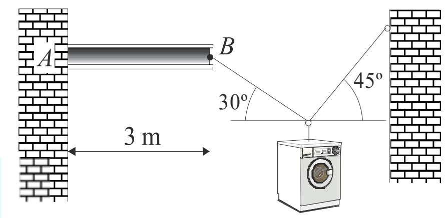
Les reaccions estan associades a les limitacions que imposen els contactes i unions al moviment dels objectes.

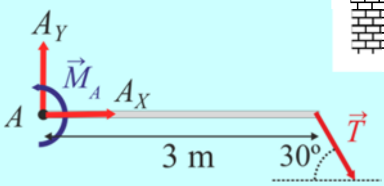
Diagrama del sòlid lliure

Per resoldre un problema d'estàtica cal representar el diagrama del sòlid rígid:

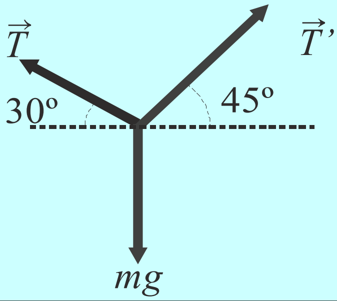
- Esquema del sòlid rígid.
- Forces: punts d'aplicació i direccions (cal fer una atenció especial a les reaccions).
- Sòlid rígid: dimensions, distàncies i orientacions.

Exemple 3: Considereu el sistema representat en el dibuix. La biga cedirà si la magnitud del moment respecte de A supera els 600 Nm. Quina és la massa màxima que pot tenir la rentadora suspesa dels cables?





$$\sum M_A:\ M_A = 600\ \text{Nm} = T_{\text{màx}}\sin 30°\ \text{m}$$
$$T_{\text{màx}} = 400\ \text{N}$$

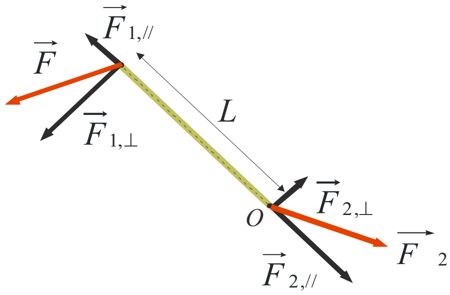


$$\left.\begin{array}{r} T\cos 30° = T'\cos 45° \\ T\sin 30° + T'\sin 45° = mg \end{array}\right\} \Rightarrow T' = T\frac{\cos 30°}{\cos 45°} = 490\ N$$

$$mg = T\sin 30° + T'\sin 45° = 546\ \text{N}$$
$$m = 56\ \text{kg}$$

Introducció al càlcul d'estructures

Estructura: conjunt de barres de pes negligible unides les unes amb les altres (el pes de les barres és negligible quan es compara amb la càrrega que suporten). Els punts d'unió s'anomenen *nusos*.



A les barres:

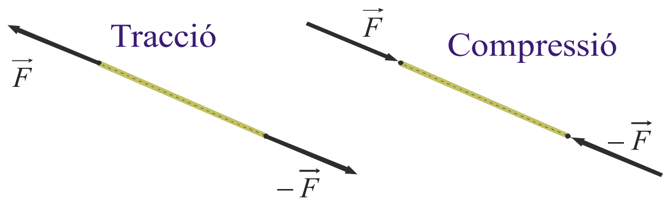
$$\sum M_O = F_{1,\perp} \cdot L = 0 \Rightarrow F_{1,\perp} = 0$$

A les barres les forces estan dirigides segons la direcció de la barra (això és conseqüència de negligir el pes de la barra):

$$\vec{F}_{1,\perp} = 0 + \vec{F}_{2,\perp} = 0 = 0 \Rightarrow \vec{F}_{2,\perp} = 0$$

A més, la suma de forces ha de ser zero: $\vec{F}_{1,//} + \vec{F}_{2,//} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{F}_{2,//} = -\vec{F}_{1,//}$

Per tant, hi ha dues possibilitats pel que fa a les forces aplicades sobre les barres:



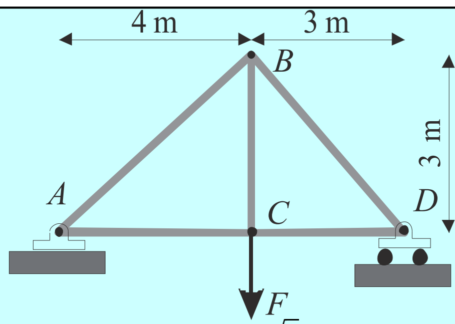
Resolució pel mètode dels nusos:

- Càlcul de les <u>forces externes</u> a partir de considerar l'estructura com un únic objecte. Les forces internes s'anul·len pel principi d'acció i reacció. En equilibri, la suma de forces externes és zero, i la suma dels moments externs respecte de qualsevol punt P també és zero.

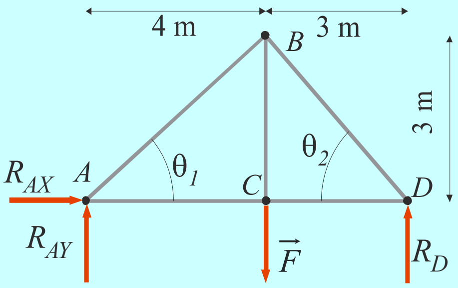
- Resolució de l'equació de forces per a cadascun dels <u>nusos</u> per tal d'obtenir les tensions a les barres de l'estructura. Cadascuna de les parts de l'estructura també ha d'estar en equilibri. Aquí convé tenir clar que un nus és una petita part de l'estructura.

Per la tercera llei de Newton, si una força estira un nus, el nus aplica una força de sentit oposat que estira la barra i tendeix a allargar-la (tracció).
Igualment, si una força comprimeix un nus, el nus aplica una força de sentit oposat que comprimeix la barra (compressió).

<u>Exemple 4</u>: Determineu les forces axials a les barres de l'estructura de la figura. El valor de la força F és de 600 N.



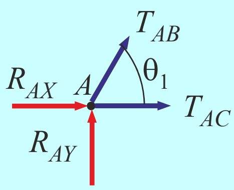
$$\cos\theta_2 = \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\theta_1 = \frac{4}{5}$$
$$\sin\theta_1 = \frac{3}{5}$$



Forces externes:

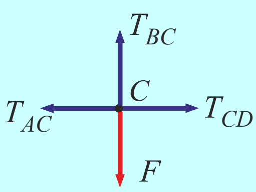
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0 \ \Rightarrow \ 4 \cdot F = 7 \cdot R_D \ \Rightarrow \ R_D = 343 \text{ N}$$
$$\sum \vec{F} = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} R_{\text{AY}} + R_D = F = 600 \text{ N} \\ R_{\text{AX}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{\text{AY}} = 257 \text{ N} \\ R_{\text{AX}} = 0 \end{cases}$$

Nusos (suposem que totes les tensions són traccions):



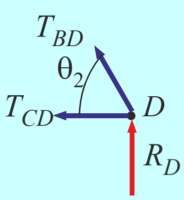
$$\begin{cases} R_{\text{AX}} + T_{\text{AC}} + T_{\text{AB}}\cos\theta_1 = 0 \\ R_{\text{AY}} + T_{\text{AB}}\sin\theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{\text{AB}} = -428,6 \text{ N} \\ T_{\text{AC}} = 342,8 \text{ N} \end{cases}$$

Compressió
Tracció



$$\begin{cases} T_{\text{CD}} = T_{\text{AC}} = 342,8 \text{ N} \\ T_{\text{BC}} = F = 600 \text{ N} \end{cases}$$

Tracció i tracció

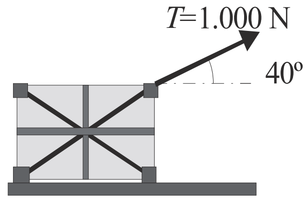


$$\begin{cases} T_{\text{BD}}\cos\theta_2 + T_{\text{CD}} = 0 \\ R_D + T_{\text{BD}}\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_{\text{BD}} = -484,8 \text{ N Compressió}$$

Qüestions del tema 7

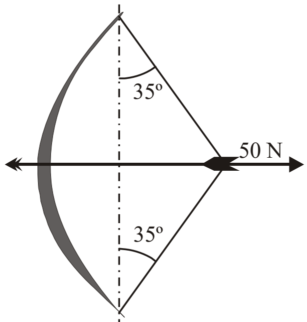
Equilibri de la partícula

1. La caixa de la figura té 300 kg de massa i el cable, una tensió d'1 kN. Determineu la força normal i la de fricció sobre la caixa, si aquesta es manté en repòs.



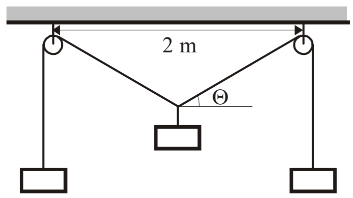
Sol.: $N = 2.300$ N, $F_f = 766$ N.

2. Es requereix una força horitzontal de 50 N per tensar l'arc fins a la posició indicada a la figura. Quina serà la tensió de les dues cordes de l'arc?



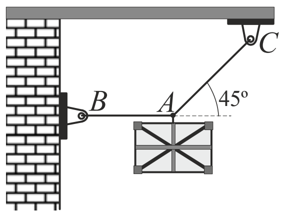
Sol.: $T = 43{,}6$ N.

3. Les tres masses de la figura són iguals. Si el sistema resta en equilibri estàtic, quin és l'angle Θ? Si cada corda té una longitud de 4 metres, quant baixen les masses laterals respecte a la central?



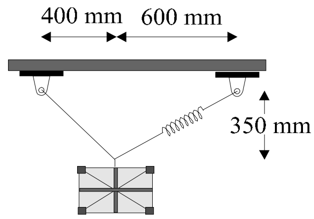
Sol.: $\Theta = 30º$; 2,27 m.

4. La massa de la caixa de la figura és 100 kg. Determineu les tensions de les dues cordes.



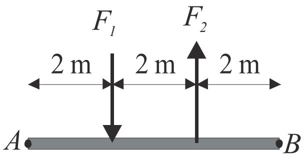
Sol.: $T_{AB} = 981$ N; $T_{AC} = 1387$ N.

5. La longitud natural de la molla (en estat de repòs) és de 660 mm i la seva constant k és de 1.000 N/m. Quina és la massa del cos en suspensió? (Recordeu que en una molla $F = -k(l - l_0)$, on l_0 és la longitud natural de la molla.)



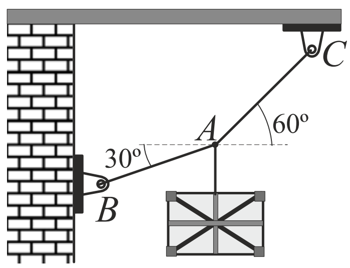
Sol.: 4,45 kg.

6. Suposeu una barra horitzontal d'extrems A i B separats 6 m. Si $F_1 = 50$ N i $F_2 = 100$ N, determineu la suma de moments respecte a A i respecte a B.



Sol.: $\sum M_A = 300$ Nm; $\sum M_B = 0$ Nm.

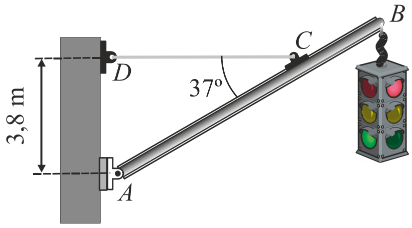
7. La massa de la caixa de la figura és 50 kg. Determineu les tensions de les dues cordes.



Sol.: $T_{AB} = 490$ N; $T_{AC} = 850$ N.

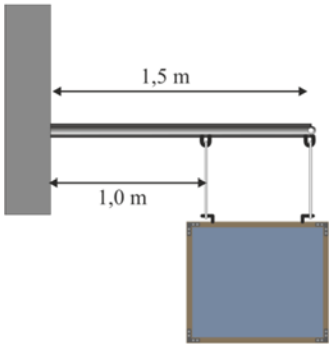
Equilibri del sòlid rígid

8. Un semàfor penja del muntatge de la figura. La barra uniforme *AB* d'alumini té 7,5 m de longitud i una massa de 8 kg. La massa del semàfor és de 12 kg. El punt *A* és un pivot. Determineu la tensió en el cable *CD* horitzontal i les components vertical i horitzontal que el pivot *A* exerceix sobre la barra d'alumini.



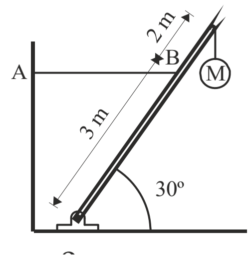
Sol.: $T_{CD} = 247$ N, $R_{Ax} = 247$ N i $R_{Ay} = 196$ N.

9. La biga de la figura està encastada a la paret i aguanta un rètol de massa 80 kg. La massa de la biga és de 50 kg. Com el centre de gravetat del rètol coincideix amb el seu centre geomètric i les cordes estan col·locades a la mateixa distància, llavors la tensió dels dos cables que uneixen el rètol a la biga és la mateixa (problema 21). Quina es la magnitud del parell de forces que fa l'encastament?



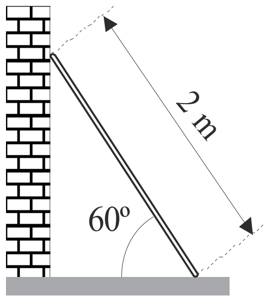
Sol.: 1350 Nm.

10. La palanca de la figura té una massa negligible i està clavada a terra mitjançant una articulació. *a)* Quin valor haurà de tenir *M* per tal que la corda *AB* estigui sotmesa a una tensió de 9.800 N? *b)* Quin serà el mòdul i la direcció de la força neta feta sobre la barra al punt *O*?



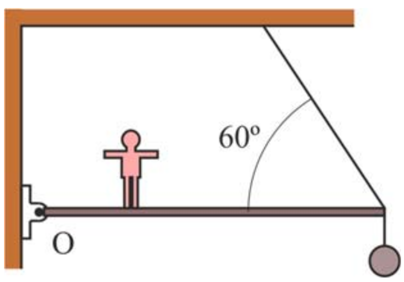
Sol.: *a)* $M = 346{,}4$ kg; *b)* $\left|\vec{F}\right| = 10.371$ N; $\alpha = 19{,}11^{\circ}$.

11. Una escala de 2 m de llargada i 30 kg de massa recolza en una paret formant un angle de 60º respecte a l'horitzontal. El coeficient de fricció estàtic entre el terra i l'escala és de 0,4. La fricció entre l'escala i la paret és negligible. *a)* Quant val la força de fricció estàtica? *b)* Fins a quina alçada màxima pot pujar una persona de 75 kg de massa abans que l'escala rellisqui?

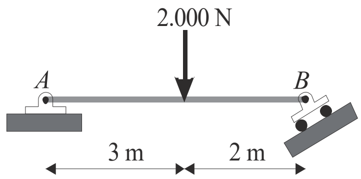


Sol.: *a*) 84,9 N; *b*) 1,33 m.

12. Un nen famolenc que pesa 712 N camina sobre una biga intentant agafar una piruleta que penja de l'extrem. La biga és uniforme, pesa 223 N, té 6 m de longitud i està subjecta a la paret a través d'una articulació, i la piruleta pesa 89 N. Dibuixeu el diagrama de cos lliure de la biga. Trobeu la tensió de la corda i les components de la força de reacció al punt *O* quan el nen es troba a 0,9 m de distància de la paret. Si la corda pot resistir una tensió màxima de 890 N, quina és la distància màxima que podrà recórrer el nen abans que es trenqui la corda?

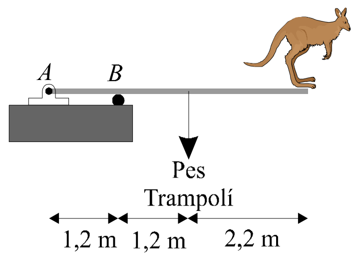


Sol.: $T = 355$ N; $R_x = 177$ N i $R_y = 717$ N; 4,8 m.



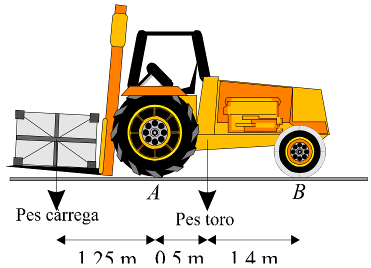
13. La biga de la figura té un suport de passador a *A* i un rodet a *B*. El pla on es repenja el suport *B* té una inclinació de 30º. Quin valor tenen les reaccions als suports?

Sol.: A_x = 0,69 kN, A_y = 0,80 kN i *B* = 1,38 kN.



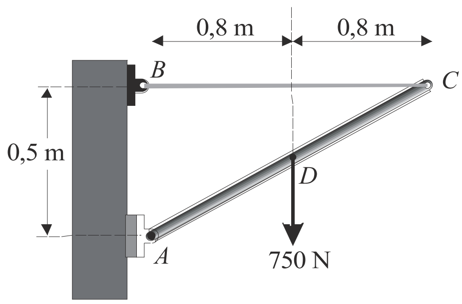
14. La massa del cangur capbussador és de 80 kg i la del trampolí és de 45 kg. Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure del trampolí i determineu les reaccions a *A* i *B*.

Sol.: A_x = 0 N, A_y = –2,66 kN i *B* = 3,89 kN.



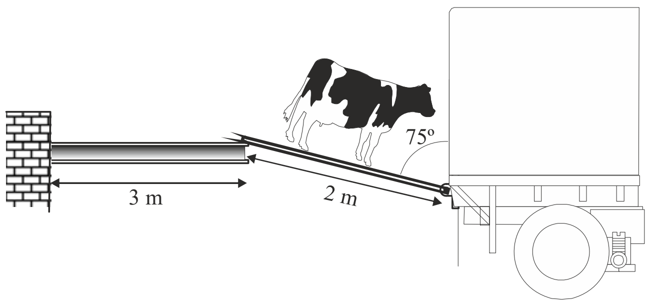
15. El carretó elevador de la figura està en repòs. El pes de la càrrega és de 2 kN i el pes del vehicle és de 8 kN. Quin valor tenen les reaccions als punts *A* i *B*?

Sol.: *A* = 9,21 kN i *B* = 0,789 kN.



16. Una biga de massa negligible aguanta una càrrega de 750 N, tal com està indicat a la figura. La biga està unida per una articulació a la paret (punt *A*). A l'extrem *C* de la biga s'ha lligat una corda de massa negligible. Finalment, l'altre extrem de la corda (punt *B*) està lligat a la paret. *a)* Determineu les reaccions als punts *A*, *B* i la tensió de la corda. *b)* Si la corda pot resistir com a màxim una tensió de 2000 N, quina és la càrrega màxima que podem col·locar al punt *D*?

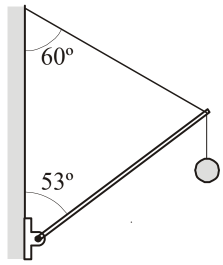
Sol.: *a*) $R_{A,x}$ = 1200 N, $R_{A,y}$ = 750 N i $R_B = T$ = 1200 N; *b*) 1250 N.



17. En una explotació agropecuària s'ha realitzat el muntatge de la figura per tal de poder transportar les vaques a un camió. El sistema consisteix en un llistó de fusta de 30 kg de massa i 2 m de llarg que esta unit al camió mitjançant una articulació. L'altre extrem es recolza sobre una biga de massa 50 kg, longitud 3 m i que està encastada a la paret. *a)* Si el pes màxim d'una vaca és d'aproximadament 700 kg, determineu en aquestes condicions límits el mòdul i direcció de les reaccions a l'articulació. *b)* Determineu el moment de la reacció al punt d'unió entre la biga i la paret. Suposeu que el pes de la vaca està aplicat al centre del llistó.

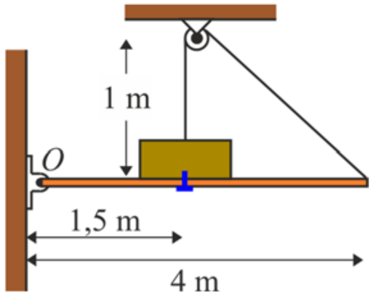
Sol.: *a)* 3924 N, 76,8º; *b)* 10758 Nm.

18. Una biga uniforme de longitud 4 m i massa 10 kg suporta una massa de 20 kg, tal com es veu a la figura. *a)* Feu el diagrama de cos lliure de la biga. *b)* Trobeu la tensió de la corda i les components de la força de reacció del pivot.



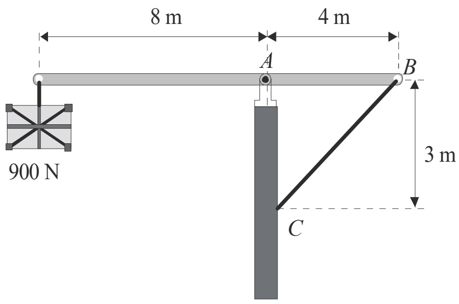
Sol.: *a)* $T = 213$ N; *b)* $R_x = 184$ N, $R_y = 188$ N.

19. Una massa de 50 kg descansa sobre una biga de 150 kg, la qual està fixada a la paret mitjançant una articulació, tal com es veu a la figura. Suposant que el sistema estigui en equilibri, feu el diagrama de cos lliure del pes i de la biga. Justifiqueu per què és necessària la presència del cargol que uneix el bloc amb la barra. Trobeu la tensió de la corda i les components de la força de reacció del pivot.



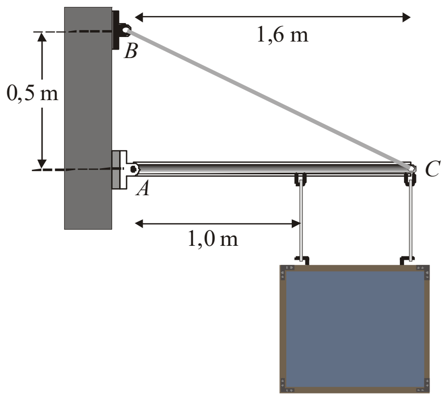
Sol.: $T = 125{,}6$ kp; $R_x = 116{,}6$ kp; $R_y = 27{,}7$ kp.

20. La barra horitzontal de la figura té una longitud de 12 m i un pes de 600 N. El centre de gravetat coincideix amb el centre geomètric de la barra. La barra està unida a un pilar en el punt A a través d'una articulació que permet que la barra giri lliurement. D'un extrem de la barra penja un objecte de pes 900 N. A l'altre extrem, punt B, la barra està unida a una corda. L'altre extrem de la corda està unida al pilar. Determineu la tensió de la corda unida a l'extrem B i la reacció a l'articulació (punt A).



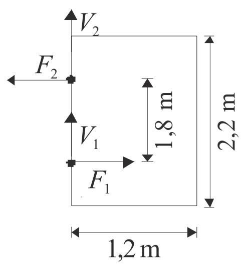
Sol.: $R_{A,x} = 2800$ N, $R_{A,y} = 3600$ N i $T = 3500$ N.

21. La biga de la figura aguanta un rètol de pes 250 N, i està unida per una articulació a la paret (punt A). A l'extrem C de la biga s'ha lligat una corda de massa negligible, i l'altre extrem de la corda està lligat a la paret, amb el ganxo B. El pes de la biga és de 150 N. *a)* Demostreu que si el centre de gravetat del rètol coincideix amb el seu centre geomètric, llavors la tensió dels dos cables que uneixen el rètol a la biga és la mateixa. Quin és el valor d'aquesta tensió? *b)* Quina és la força que fa l'articulació del punt A? Nota: les cordes que subjecten el rètol estan col·locades a la mateixa distància del centre del rètol, tal com s'indica a la figura.



Sol.: *a)* $T_1 = T_2 = 125$ N, *b)* $R_{A,x} = 890$ N i $R_{A,y} = 122$ N.

22. Una porta de 60 kg està agafada per dues xarneres, tal com es veu a la figura. Calculeu la força que actua sobre cadascuna suposant que $V_1 = V_2$.



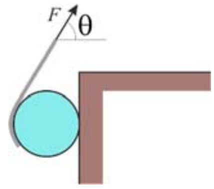
Sol.: 36 kp

23. Una caixa que conté un frigorífic té una massa total de 300 kg i té forma de paral·lelepípede rectangular de 2 m d'alt per 0,8 m x 0,8 m de base. El coeficient de fricció entre la caixa i el terra val 0,30. Si volem arrossegar-la sobre el terra mitjançant l'aplicació d'una força horitzontal, quina ha de ser la magnitud de la força? A quina altura màxima sobre el terra podem aplicar-la sense perill de bolcar?

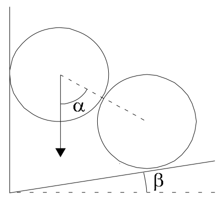
Sol.: 882 N; 1,33 m.

24. La caixa del problema anterior es troba sobre la plataforma d'un camió. Quan el camió frena bruscament, quin risc serà més gran, el de lliscament o el de bolcada de la caixa?

Sol.: Bolcada si $\mu > 0,4$; lliscament si $\mu < 0,4$.

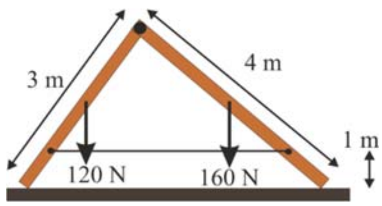


25. El cilindre de la figura es manté en equilibri mitjançant una corda que transmet una força F i per la fricció estàtica. Calculeu el valor mínim de μ_e per mantenir l'equilibri quan F forma un angle θ amb l'horitzontal.
Sol.: $\mu_e = \frac{1}{\cos\theta}$.



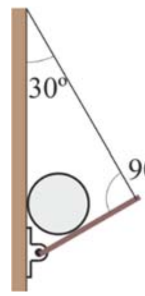
26. Obteniu l'angle α amb què s'han de posar dos cilindres iguals de pes i de radi per tal que mantinguin l'equilibri sobre el díedre de la figura. Considereu que totes les superfícies són llises.

Sol.: tg α = 2 tg β.



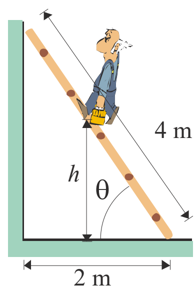
27. Dues barres estan unides entre elles per una aresta mitjançant frontisses i formen un angle recte gràcies al cable horitzontal que les uneix, situat a una altura d'1 m sobre el terra. El conjunt està en repòs. Determineu: *a)* la força normal que fa el terra sobre cada barra, *b)* la tensió del cable i *c)* la força que cada barra fa sobre l'altra en el vèrtex.

Sol.: *a)* $N_1 = 150$ N, $N_2 = 130$ N; *b)* $T = 115$ N; *c)* $F = 120$ N.



28. Tenim una barra de longitud l = 40 cm i pes 6 kp que per un dels extrems està fixada a la paret mitjançant una articulació i per l'altre extrem està lligada a una corda fixada a la paret i formant un angle de 30º. La tensió màxima que pot aguantar la corda és de 15 kp. Trobeu el pes màxim que pot tenir una esfera de radi 8 cm col·locada sobre la barra sense trencar el fil.

Sol.: $P_{màx} = 31$ kp.



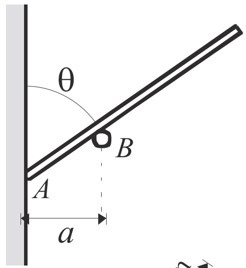
29. Una escala de 4 m de longitud i massa M (el centre de masses està situat en el punt mitjà) està recolzada en una paret vertical sense fricció. El contacte amb el terra té un coeficient de fricció estàtic de 0,4. La distància entre el peu de l'escala i la paret és de 2 m. Calculeu la màxima altura h a què pot pujar una persona amb la mateixa massa que l'escala sense que aquesta llisqui.

Sol.: 3,07 m.

30. La porta d'un garatge pesa 60 kp i està muntada sobre un carril aeri, com s'indica a la figura. Les rodes estan rovellades, de manera que no roden, sinó que llisquen a la guia, i el coeficient de fricció cinètic és 0,4. La distància entre les rodes és de 2 m i cada una dista 50 cm de les vores verticals de la porta. S'empeny la porta mitjançant una força horitzontal F constant, de manera que es mou a velocitat constant. *a)* Si la línia d'acció d'aquesta força dista 1 m de la guia, quina és la força per a cada una de les rodes sobre el carril? *b)* Trobeu la distància màxima a la qual es pot aplicar la força horitzontal F sense que cap roda se separi del carril.

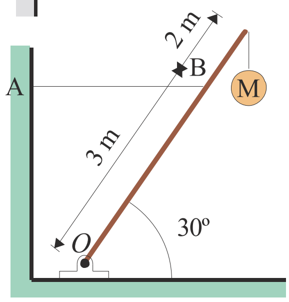
Sol .: *a)* $F = 24$ kp; $N_1 = 18$ kp, $F_{F1} = 7{,}2$ kp; $N_2 = 42$ kp, $F_{F2} = 16{,}8$ kp; *b)* 2,5 m

31. Una vareta homogènia de longitud $2l$ i pes P es troba entre una paret llisa i una clavilla llisa. Calculeu l'angle θ entre la paret i la vareta corresponent a l'equilibri i les reaccions a A i a B.



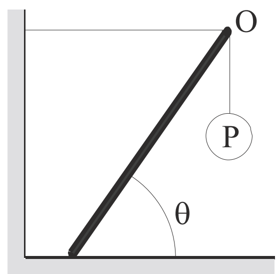
Sol.: $\sin\theta = \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$; $R_B = \frac{P}{\sin\theta}$; $R_A = P\cot\theta$.

32. La palanca de la figura té una massa negligible i està clavada a terra mitjançant una articulació. *a)* Quin valor ha de tenir M per tal que la corda AB estigui sotmesa a una tensió de 9800 N? *b)* Quin serà el mòdul i la direcció de la força neta feta sobre la barra en el punt O?



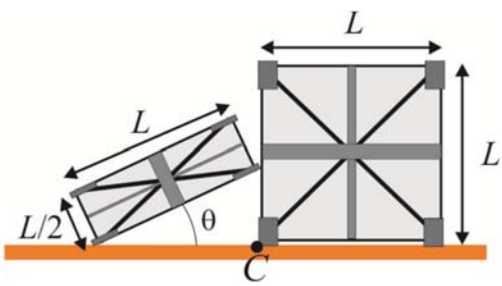
Sol.: *a)* $M = 346{,}4$ kg; *b)* $|\vec{F}| = 10371$ N; $\alpha = 19{,}11°$

33. Una biga uniforme de massa m forma un angle θ amb l'horitzontal, de manera que l'extrem superior està suportat per una corda horitzontal lligada a la paret i l'extrem inferior descansa sobre un terra rugós. Si el coeficient de fricció estàtic entre la biga i el terra és μ_e, determineu l'expressió per al pes màxim $P_{màx}$ que es pot penjar de la part superior abans que la biga rellisqui.



Sol.: $P_{\text{màx}} = \frac{mg}{2}\left(\frac{1-2\mu_e\tan\theta}{\mu_e\tan\theta-1}\right)$.

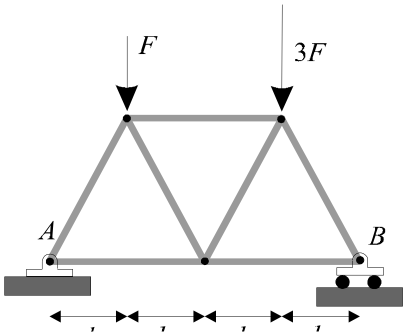
34. Una caixa de secció rectangular i pes 193 kg ha bolcat i es recolza sobre una altre caixa de secció quadrada i pes 348 kg. El coeficient de fricció entre la caixa rectangular i el terra és 0,7 i el coeficient de fricció entre la caixa quadrada i el terra és 0,6. A quina distància del punt C es troba la força de reacció entre el terra i la caixa quadrada? Dades: $L = 1{,}3$ m i $\theta = 41°$.



Sol.: 0,8038 m.

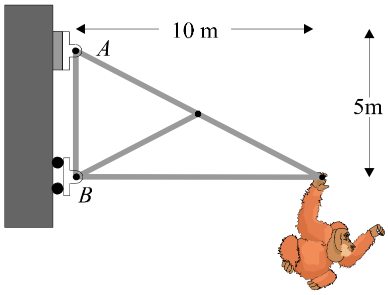
Estructures

35. L'estructura de la figura té un suport de passador a A i un rodet a B. Determineu les reaccions als suports.



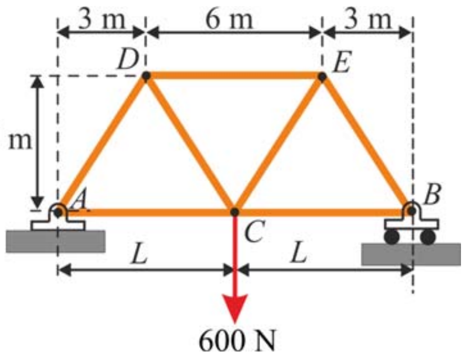
Sol.: $A_x = 0$, $A_y = 3/2F$ i $B = 5/2F$

36. El pes del mico penjat és de 1000 N. Si negligim el pes dels elements de l'estructura, determineu les reaccions als suports A i B. Nota: el suport a A és un passador i a B, un rodet.



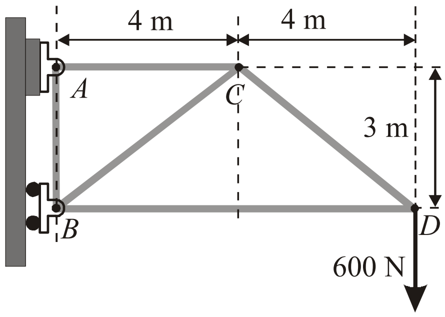
Sol.: $A_x = -2000$ N, $A_y = 1000$ N i $B = 2000$ N

37. Si negligim el pes dels elements de l'estructura, determineu: *a)* les reaccions als suports A i B (el suport a A és una articulació i a B, un rodet) i *b)* la tensió de les barres AC, AD i CD, i indiqueu si les barres estan sotmeses a tensions de tracció o compressió.



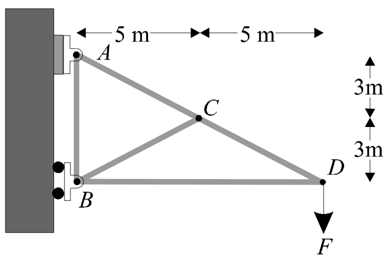
Sol.: *a)* $A_x = 0$ N, $A_y = 300$ N i $B = 300$ N; *b)* $T_{AC} = 225$ N (t), $T_{AD} = 375$ N (c), $T_{CD} = 375$ N (t)

38. Si negligim el pes dels elements de l'estructura, determineu: *a)* les reaccions als suports A i B (el suport a A és una articulació i a B, un rodet) i *b)* la tensió de les barres AC, BD, i CD, i indiqueu si les barres estan sotmeses a tensions de tracció o compressió.



Sol.: *a)* $A_x = 1600$ N, $A_y = 600$ N i $B = 1600$ N; *b)* $T_{AB} = 600$ N (t), $T_{AC} = 1600$ N (t), $T_{BC} = 1000$ N (c), $T_{BD} = 800$ N (c) i $T_{CD} = 1000$ N (t)

39. Si les barres de l'estructura dibuixada poden aguantar amb seguretat 10000 N de tracció i 20000 N de compressió, determineu la càrrega màxima que podem aplicar al punt D.



Sol.: $F_{màx} = 5140$ N

III. Oscil·ladors i ones mecàniques

8. Oscil·lacions mecàniques

Objectius

Conceptes de període, freqüència i freqüència angular
Concepte de força restauradora
Descripció del moviment harmònic simple
Descripció del moviment del pèndol simple
Descripció del moviment del pèndol físic
Descripció de les oscil·lacions amortides
Descripció de les oscil·lacions forçades
Concepte de ressonància

Moviment harmònic simple

Estem envoltats d'oscil·ladors. Sovint, quan es pertorba un sistema, aquest es posa a oscil·lar al voltant de la seva posició d'equilibri. L'oscil·lació consisteix en un moviment periòdic, és a dir, un moviment que es repeteix en el temps. Definim el període, *T*, com el temps que triga el sistema a fer una oscil·lació completa. La freqüència, *f*, és el nombre d'oscil·lacions que el sistema fa per segon; les unitats en SI són Hz (hertzs):

$f = \frac{1}{T}$

Per exemple, si la freqüència de la CPU del vostre ordinador és 2,2 GHz, això vol dir que el temps que la CPU triga en fer una operació és:

$$T = \frac{1}{f} = 4{,}54 \times 10^{-10}\ \mathrm{s} = 0{,}454\ \mathrm{ns}$$

Finalment, es defineix la freqüència angular o pulsació, ω, com a:

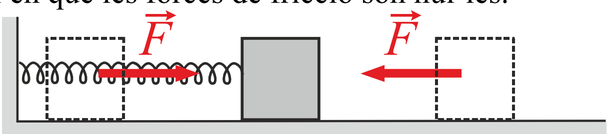
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$,

i les seves unitats en SI són rad/s.

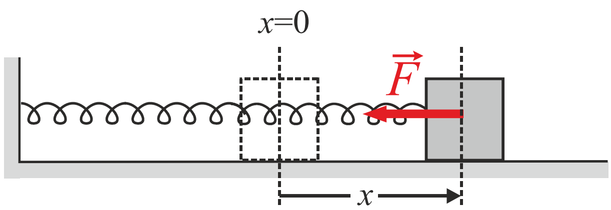
Aquestes oscil·lacions són provocades per la presència d'una força restauradora que intenta portar el sistema a l'equilibri. Un exemple de força restauradora és la força elàstica d'una molla.

Oscil·lacions harmòniques simples

Possiblement l'oscil·lador mecànic més senzill sigui una molla unida a un objecte en un pla horitzontal en què les forces de fricció són nul·les.



La posició d'equilibri la defineix la longitud natural de la molla. En aquesta posició la força elàstica és zero, la suma de forces és nul·la i, per tant, el sistema està en equilibri estacionari si la velocitat de l'objecte és nul·la.



Quan la longitud de la molla no coincideix amb la seva longitud natural, la molla aplica una força que empeny l'objecte cap a la posició d'equilibri. Si definim com a x el desplaçament de l'objecte respecte a la posició d'equilibri, llavors podem expressar la força recuperadora com a:

$$F = -kx$$

on k és la constant elàstica de la molla, i les unitats de k són N/m (vegeu el tema 4). Noteu el signe negatiu, que indica que la força s'oposa al desplaçament. Aquest signe és representatiu del caràcter restaurador de la força elàstica.

Per resoldre el moviment, és a dir per determinar la posició en funció del temps, $x(t)$, aplicarem la segona llei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Definim la pulsació natural o pròpia de l'oscil·lador, ω_n, com a:

$$\omega_n \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Llavors,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_n^2\, x(t) = 0$$

L'equació anterior és una equació diferencial. Aquesta equació descriu el moviment harmònic simple (MHS), i es pot escriure d'una forma més compacta:

$$x''(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

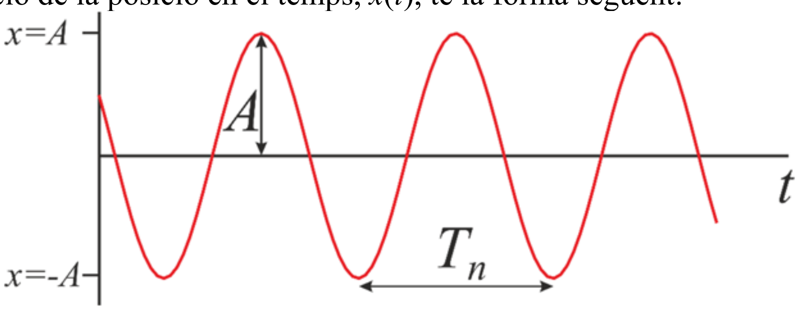
La notació utilitzada és: $x'(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$ i $x''(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

La solució general de l'equació diferencial anterior és:

$$x(t) = A\sin(\omega_n t + \phi)$$

on A és l'amplitud ($A > 0$) i correspon al valor màxim que pot assolir x, ω_n és la freqüència angular de l'oscil·lador, ($\omega_n t+\phi$) és la fase (en radians) i ϕ és la fase inicial (en radians). ω_n és la freqüència de l'oscil·lador lliure, és a dir, és la freqüència de l'oscil·lador quan la única força que apareix a l'equació diferencial és la restauradora. Més endavant veurem la freqüència de l'oscil·lador es desvia de ω_n en presència de forces de fregament o forces externes que varien el temps.

L'evolució de la posició en el temps, $x(t)$, té la forma següent:



El període $T_n = 2\pi/\omega_n$ ($\omega_n \equiv \sqrt{k/m}$) és un paràmetre característic del sistema oscil·lant; en canvi, l'amplitud i la fase inicial depenen de les condicions inicials, x_0 i v_0. Concretament:

$$x_0 = x(t=0) = A\sin(\phi)$$

Pel que fa a v_0:

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega_n cos(\omega_n t + \phi)$$

Llavors,

$$v_0 = v(t=0) = A\omega_n \cos(\phi)$$

Coneguts x_0 i v_0, de les equacions anteriors podem determinar A i ϕ:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 = A\sin(\phi) \\ v_0 = A\omega_n\cos(\phi) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_n^2} + x_0^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{v_0}\right) \end{array}\right\}$$

Exemples de condicions inicials:

$$\begin{cases} x_0 > 0, v_0 = 0, & \Leftrightarrow A = x_0\ ;\ \phi = \pi/2 \\ x_0 = 0,\ v_0 > 0, & \Leftrightarrow A = v_0/\ \omega_n;\ \phi = 0 \\ x_0 < 0, v_0 = 0, & \Leftrightarrow A = -x_0\ ;\ \phi = -\pi/2 \\ x_0 = 0,\ v_0 < 0, & \Leftrightarrow A = -v_0/\ \omega_n;\ \phi = \pi \end{cases}$$

Podem comprovar que $x(t) = A\sin(\omega_n t + \phi)$ és solució de l'equació diferencial si tornem a derivar:

$$a(t) = x''(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega_n^2 sin(\omega_n t + \phi) = -\omega_n^2 x \ \Rightarrow\ x''(t) + \omega_n^2\, x(t) = 0$$

<u>Exemple 1</u>: Una massa de 2 kg fixada a l'extrem d'una molla horitzontal de constant elàstica k = 196 N/m amb l'equilibri a x = 0 es troba inicialment a x_0 = 3 cm, amb una velocitat v_0 = –25 cm/s. Esbrineu la freqüència angular, el període, l'amplitud i la fase inicial del moviment. Escriviu l'equació del moviment.

Solució:

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = 9{,}90 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \Rightarrow T_n = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}635 \text{ s}$$

$$A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_n^2} + x_0^2} = 3{,}92 \text{ cm}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega_n\, x_0}{v_0}\right) = \begin{cases} -0{,}871 \text{ rad} \Rightarrow x_0 = \cancel{A\sin(\phi) = -3 \text{ cm}} \\ -0{,}871 + \pi \text{ rad} \Rightarrow x_0 = A\sin(\phi) = 3 \text{ cm} \end{cases}$$

$x(t) = A\sin(\omega_n t + \phi) = 3{,}9\sin(9{,}90\ t + 2{,}27)$ (t en s, x en cm).

Exemple 2: La posició d'una partícula està determinada per l'equació $x(t) = 2{,}5 \cdot \cos(\pi \cdot t)$, amb x i t mesurats en metres i segons, respectivament. Determineu:

a) La velocitat i l'acceleració màximes de la partícula.

b) La velocitat i l'acceleració quan $x = 1{,}5$ m.

Solució:

$x(t) = 2{,}5 \cdot \cos(\pi \cdot t) = 2{,}5 \cdot \sin(\pi \cdot t + \pi/2)$

a)

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \\ x(t) = A \cdot \sin(\omega_n t + \phi) \end{array}\right\} \Rightarrow A = 2{,}5 \text{ m}, \omega_n = \pi \text{ rad/s i } \phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$v(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t + \phi) \Rightarrow v_{max} = A\omega_n = 2{,}5 \cdot \pi = 7{,}854 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -A \cdot \omega_n^2 \cdot \sin(\omega_n t + \phi) \Rightarrow a_{\max} = A\omega_n^2 = 2{,}5 \cdot \pi^2 = 24{,}67 \text{ m/s}^2$$

b)

$$x = 1{,}5 \text{ m} \Rightarrow 1{,}5 = 2{,}5 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{1{,}5}{2{,}5}\right) - 0{,}5 = \cancel{-0{,}295 \text{ s}} \\ \frac{1}{\pi}\left[\pi - \arcsin\left(\frac{1{,}5}{2{,}5}\right)\right] - 0{,}5 = 0{,}295 \text{ s} \end{cases}$$

$$v = A \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n t + \phi) = 2{,}5 \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot 0{,}3) \Rightarrow v = -6{,}28 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega_n^2 \cdot x = -\pi^2 \cdot 1{,}5 \Rightarrow a = -14{,}80 \text{ m/s}^2$$

Alternativament, podem obtenir l'equació diferencial del moviment oscil·latori harmònic simple a partir d'imposar la conservació de l'energia, atès que no existeixen forces de fricció:

$$E_m = U + E_C = \frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}mx'(t)^2 = constant$$

Si derivem respecte al temps, obtenim la mateixa equació diferencial,

$$\frac{1}{2}2kx(t)\,x' + \frac{1}{2}2mx'(t)x''(t) = 0 \Rightarrow kx(t) + mx''(t) = 0 \Rightarrow x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Per altra banda, l'energia total del sistema és:

$$E_m = U + E_C = \frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}k(A\sin(\omega_n t + \phi))^2 + \frac{1}{2}m(A\omega_n \cos(\omega t + \phi))^2 =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_n t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2\omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_n t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_n t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2$$

Com que no hi ha forces dissipatives, l'energia mecànica és constant i l'oscil·lador no s'atura mai: es diu que és un oscil·lador lliure.

Què passa si col·loquem la molla verticalment? A banda de la força elàstica, tenim el pes; això canvia la freqüència del sistema?

En aquest cas la posició d'equilibri no coincideix amb la longitud natural de la molla. Definim:

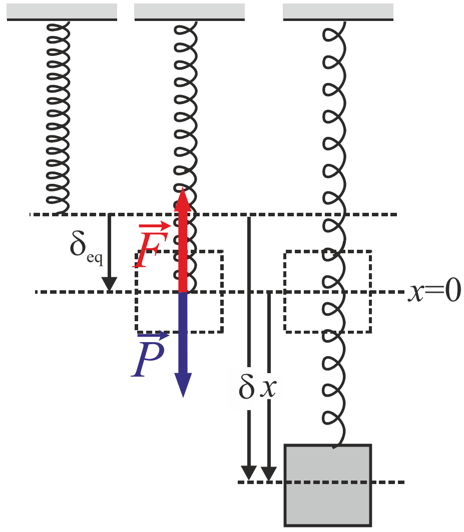
$\delta(t)$: estirament de la molla $\Rightarrow F = -k\delta(t)$

δ_{eq}: estirament de la molla a la posició d'equilibri

$x(t)$: desplaçament respecte a la posició d'equilibri: $x(t) = \delta(t) - \delta_{eq}$

Per obtenir l'equació de moviment, primer cal determinar la posició d'equilibri; és un problema d'estàtica (vegeu tema 7):

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow mg = k\delta_{eq} \Rightarrow \delta_{eq} = \frac{mg}{k}$$



Seguidament, apliquem la segona llei de Newton quan la molla està estirada una longitud δ:

$$mg - k\delta(t) = ma$$

Llavors, expressem l'equació en funció del desplaçament respecte a la posició d'equilibri, $x(t)$:

$$x(t) = \delta(t) - \delta_{\text{eq}} \Rightarrow \delta(t) = x(t) + \delta_{\text{eq}}$$

$$mg - k(x(t) + \delta_{eq}) = mx''(t)$$

$$mg - kx(t) - k\delta_{eq} = mx''(t)$$

Substituïm la condició d'equilibri, $mg = k\delta_{eq}$:

$$mg - kx(t) - mg = mx''(t)$$

I finalment reagrupem:

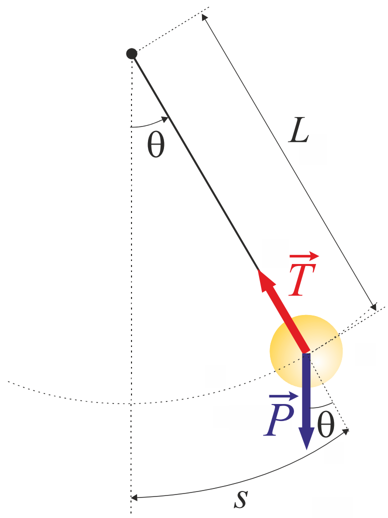
$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Obtenim el mateix resultat que quan la molla estava col·locada horitzontalment:

$$x''(t) + \omega_n^2 x(t) = 0.$$

Pèndol simple

Un pèndol també és un oscil·lador que en el límit d'oscil·lacions petites descriu un moviment harmònic simple:



$$T - mg\cos\theta(t) = ma_N$$

$$-mg\sin\theta(t) = ma_T = ms''(\text{t}) = mL\theta''(t)$$

I si reagrupem els termes:

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin\theta(t) = 0$$

En el límit d'oscil·lacions petites, i si θ està en radians,

$$\sin\theta \approx \theta$$

Llavors l'equació de moviment esdevé l'equació diferencial del moviment harmònic simple,

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$$

I a freqüència natural del pèndol és:

$$\omega_n = \sqrt{g/L}$$

Observeu que antigament es feia servir els rellotges de pèndol per mesurar el temps, el calibratge es feia ajustant la longitud del pèndol.

Noteu que la freqüència d'oscil·lació no depèn de la massa del pèndol, de fet, a partir de la mesura del període d'un pèndol es pot determinar amb precisió la intensitat del camp gravitatori, g.

L'equació de moviment ens permet calcular la posició del pèndol,

$$\theta(t) = A\sin(\omega_n t + \phi) = \theta_{\max}\sin(\omega_n t + \phi)$$

on l'angle màxim, $\theta_{\max}$, és l'amplitud.

Igual que en el cas anterior, l'amplitud i la fase inicial depenen de les condicions inicials de posició, θ_0 i velocitat angular, θ'_0:[4]

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \theta_{\max}\sin(\phi) \\ \theta'_0 &= \theta_{\max}\omega_n\cos(\phi) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} A = \theta_{\max} &= \sqrt{\frac{\theta_0'^2}{\omega_n^2} + \theta_0^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{\omega_n\theta_0}{\theta'_0}\right) \end{aligned}\right.$$

Noteu la relació entre la velocitat lineal del pèndol i la velocitat angular: $v_0 = L\theta'_0$.

Què vol dir oscil·lacions petites?
Si $\theta_{max} < 5° = \pi/36$ rad, l'error relatiu de l'aproximació $\sin\theta \approx \theta$ és un 0,1 %.
Si $\theta_{max} < 10° = \pi/18$ rad, l'error relatiu de l'aproximació $\sin\theta \approx \theta$ és un 0,5 %.
És a dir, si l'amplitud no supera els 10º, a la pràctica l'aproximació d'angles petits és prou acurada.

Què passa si les oscil·lacions són de gran amplitud? El sistema no descriu un MHS, però el moviment segueix essent periòdic, i el període és igual a:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_{\max}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{1}{2}\theta_{\max}\right) + \cdots\right\}$$

També es pot determinar l'equació diferencial del MHS a partir d'imposar la conservació de l'energia mecànica:

$$E_m = U + E_C = mgh(t) + \frac{1}{2}mv(t)^2 = mgL(1 - \cos\theta(t)) + \frac{1}{2}m(L\theta'(t))^2 = const$$

En el límit d'oscil·lacions petites, i si θ està en radians,

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Llavors:

$$E_m = mgL\frac{\theta(t)^2}{2} + \frac{1}{2}mL^2\theta'(t)^2 = \frac{1}{2}mgL\theta_{max}^2 = constant$$

Si derivem respecte al temps:

$$mgL\theta(t)\theta'(t) + \frac{1}{2}mL^2 2\theta'(t)\theta''(t) = 0$$

$$g\theta(t) + L\theta''(t) = 0$$

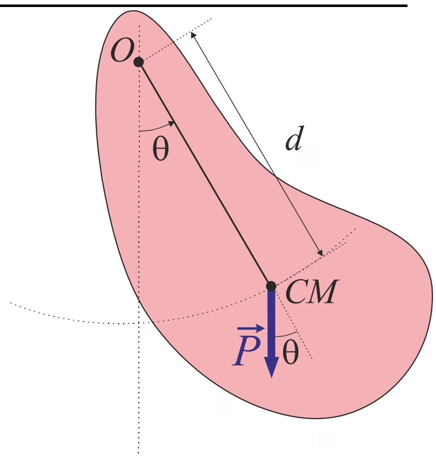
I finalment, reagrupant, obtenim la mateixa equació diferencial:

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$$

---

[4] En aquest tema no utilitzarem el símbol ω per referir-nos a les velocitats angulars atès que es pot confondre amb les freqüències angulars. Per referir-nos a les velocitats angulars farem servir la notació θ'.

Pèndol físic



És un sòlid rígid que, a través d'un pivot, *O*, sense frec es fa oscil·lar. Si apliquem l'equació de moviment d'un sòlid rígid respecte a un eix fix:

$$\left.\begin{array}{l}\sum M_O = I_O\alpha = I_O\theta''(t) \\ \sum M_O = -\,mgd\sin\theta(t)\end{array}\right. \Rightarrow -mgd\sin\theta(t) = I_O\theta''(t)$$

Llavors,

$$\theta''(t) + \frac{mgd}{I_O}\sin\theta(t) = 0$$

Dins l'aproximació d'oscil·lacions petites, $\sin\theta \approx \theta$:

$$\theta''(t) + \frac{mgd}{I_O}\theta(t) = 0$$

Llavors la freqüència angular i el període de l'oscil·lació són:

$$\omega_n^2 = \frac{mgd}{I_O} \Rightarrow T_n = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$$

Observeu que si el *CM* i el pivot *O* coincideixen, *d* = 0 i el sistema no oscil·la. Per exemple, Quan, a causa d'impactes en una roda, el *CM* es desplaça respecte a l'eix, $d \neq 0$ i el sistema pot oscil·lar; en aquests casos, quan el cotxe es mou, vibra: són oscil·lacions de la roda. L'equilibratge de les rodes consisteix a col·locar pesos a la llanta, de manera que tornem a situar el *CM* de masses sobre l'eix *O*, i les vibracions desapareixen.

Els pèndols físics també es poden fer servir per determinar el moment d'inèrcia d'un sòlid rígid.

Creieu que el període d'oscil·lació depèn de la massa total del pèndol físic?

Exemple 3: Tenim un pèndol consistent en un disc de 2 kg de massa i 0,8 m de diàmetre que està suspès per un extrem d'un pivot sense fricció. Determineu: la freqüència *f*, la freqüència angular natural ω_n i el període *T* característics de l'oscil·lació. Suposeu oscil·lacions d'amplitud petita. $I_{CM} = 1/2mR^2$

Solució:

Steiner: $I_O = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mg}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgR}{3/2mR^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}} = 4{,}04\ \text{rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1{,}555\ \text{s}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = 0{,}643\ \text{Hz}$$

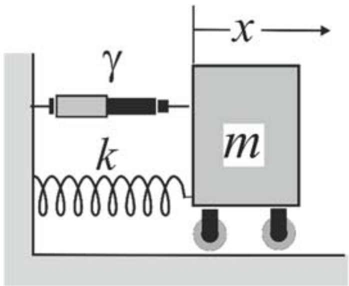
Oscil·lacions amortides

Analitzarem un objecte unit a una molla sobre el qual també actua una força de fricció viscosa (vegeu el tema 12) que és proporcional a la velocitat de l'objecte:

$F_F = -\gamma x'(t)$,

On γ és el coeficient d'amortiment (unitats kg/s).

El signe negatiu és característic de la naturalesa dissipativa de la força; és a dir, tendeix a disminuir la velocitat de l'objecte. A diferència dels casos anteriors, el sistema ja no és conservatiu, l'oscil·lador acaba per aturar-se. Utilitzem el símbol d'un amortidor per indicar la presència de la força de fricció viscosa.



L'equació de moviment s'obté de la segona llei de Newton:

$$mx''(t) = -\gamma x'(t) - kx(t)$$

$$x''(t) + \frac{\gamma}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Finalment, obtenim l'equació diferencial d'un oscil·lador amortit:

$$x''(t) + 2Kx'(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

on $K = \gamma/2m$, té unitats de s^{-1} i és l'invers de la constant de temps $\tau = 1/K$. Com veurem més endavant, τ és la constant de temps característica de disminució de l'amplitud i de l'energia. La solució general d'aquesta equació és:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

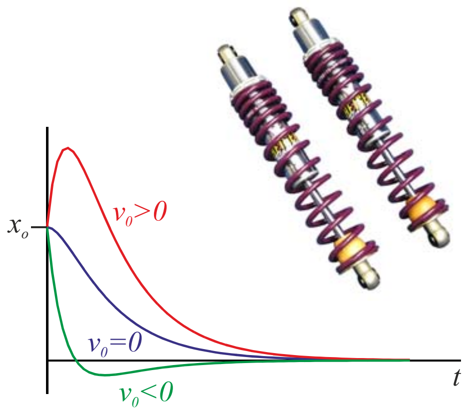
on $\lambda_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 - \omega_n^2}$ només depenen dels paràmetres físics de l'oscil·lador. Per altra banda, C_1 i C_2 depenen de les condicions inicials:

$x_0 = C_1 + C_2$ i $v_0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$.

Existeixen tres tipus de moviments en funció de la *raó d'amortiment adimensional*, que es defineix com:

$$\zeta \equiv \frac{K}{\omega_n} = \frac{1}{2\pi}\frac{T_n}{\tau}$$

a) **Sobreamortiment**, $\zeta > 1$ ($K > \omega_n$):



En aquest cas λ_1 i λ_2 són reals, diferents i negatius. La força de fricció fa que l'energia del sistema disminueixi monòtonament, de manera que el sistema acaba aturant-se.

Com $K > \omega_n \Rightarrow T_n > 2\pi\tau$. És a dir, el temps que trigaria en fer una oscil·lació l'oscil·lador lliure és més gran que el temps característic de disminució de l'amplitud, per tant, el sistema no oscil·la. Per aquesta raó el moviment s'anomena sobreamortit.

Aquest és el moviment que es busca quan es vol eliminar una oscil·lació; per exemple, els amortidors de la suspensió dels cotxes. Com s'aconsegueix?, augmentant la dissipació, fent que $K > \omega_n$.

b) **Amortiment crític**, $\zeta = 1$ ($K = \omega_n$):

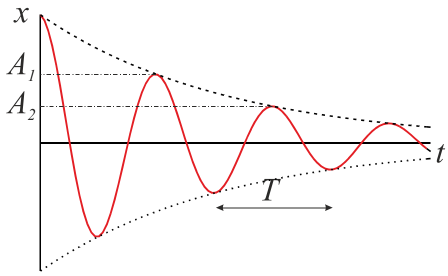
$x(t) = C_1 e^{-Kt} + C_2 t e^{-Kt}$, on $x_0 = C_1$ i $v_0 = C_2 - KC_1$

Correspon a la transició entre el sobreamortiment i les oscil·lacions amortides.

c) **Oscil·lacions amortides o esmorteïdes,** $\zeta < 1$ $(K < \omega_n)$:

En aquest cas λ_1 i λ_2 són complexes conjugades i la solució es pot expressar com:

$$x(t) = A_0 e^{-Kt} \sin(\omega t + \phi) = A(t) \sin(\omega t + \phi)$$



on $A(t) = A_0 e^{-Kt} = A_0 e^{-t/\tau}$ és l'amplitud de les oscil·lacions, que depèn del temps i decreix exponencialment. Observeu que τ és la constant de temps característica de disminució de l'amplitud. Quan $t = 3\tau$ s'ha perdut un 95 % de l'amplitud inicial; a efectes pràctics, podem considerar que l'oscil·lador ja s'ha aturat; per tant, τ és la referència per saber quant de temps triga l'oscil·lador a aturar-se

La freqüència angular s'expressa com:

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 - K^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Quan l'amortiment és feble (ζ << 1 i $\omega \approx \omega_n$), el moviment s'apropa a un oscil·lador lliure, el sistema fa moltes oscil·lacions abans d'aturar-se i la disminució de l'amplitud durant un període és molt petita.

Les condicions inicials determinen l'amplitud i la fase inicials:

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + K x_0}{\omega}\right)^2} \text{ i } \operatorname{tg}\phi = \frac{x_0 \omega}{v_0 + K x_0}$$

Es defineix el *decreixement logarítmic* δ (adimensional) com la raó amb la qual disminueix l'amplitud en un període:

$$\delta \equiv ln \frac{A_1}{A_2}$$

com que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 \exp(-Kt)}{A_0 \exp(-K(t+T))} = \frac{\exp(-Kt)}{\exp(-Kt)(-KT)} = e^{KT}$, llavors:

$$\delta = ln \frac{A_1}{A_2} = KT = K \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Per tant, conegut δ podem determinar ζ:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

El decreixement logarítmic és relativament fàcil de mesurar i permet determinar la raó d'amortiment.

El decreixement logarítmic també ens permet identificar si l'amortiment és feble. Típicament, podem considerar que l'amortiment és feble si la disminució de l'amplitud en un període es inferior a un 1%, és a dir, si $A_1/A_2 < 100/99$ o equivalentment, si $\delta < 0{,}06$ ó $\zeta < 0{,}01$. Com es d'esperar, en aquestes condicions es compleix que $\omega \approx \omega_n$, concretament:

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 0{,}99995\omega_n$$

A més, quan l'amortiment és feble $\delta \ll 2\pi$, llavors:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \approx \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2}} = \frac{\delta}{2\pi}$$

Consideracions energètiques:

Com que hi ha forces dissipatives, l'energia mecànica no és constant, sinó que disminueix amb el temps:

$$E(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2Kt} = E_0 e^{-2t/\tau},$$

on $E_0 = E(t = 0) = \frac{1}{2}kA_0^2$ és l'energia inicial.

La relació anterior mostra que l'energia disminueix exponencialment i τ és la *constant de temps* característica de la dissipació de l'energia. Quan $t = 3\tau$ s'ha perdut un 99,75 % de l'energia inicial!. Així doncs, comprovem de nou que τ és la referència per saber quant de temps triga l'oscil·lador a aturar-se.

Es defineix el *factor de qualitat Q* com la raó entre l'energia i l'energia perduda a cada cicle.

$Q \equiv 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}$ (és un paràmetre adimensional i positiu)

Desenvolupem l'energia en funció del temps com una sèrie de Taylor:

$$E(t + T) = E(t) + \frac{dE}{dt}T + \cdots$$

Si les oscil·lacions són feblement amortides, l'expansió de Taylor fins al primer ordre ens dona una determinació acurada de la pèrdua d'energia en un cicle:

$$\Delta E = E(t + T) - E(t) \approx \frac{dE}{dt}T = \left(\frac{d}{dt}E_0 e^{-2t/\tau}\right)T = -2\frac{T}{\tau}E_0 e^{-2t/\tau} = -2\frac{T}{\tau}E$$

llavors,

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} = \pi \frac{\tau}{T} = \frac{\pi}{\delta} \approx \frac{1}{2\zeta} \Rightarrow \zeta \approx \frac{1}{2Q}$$

Si Q és gran, es perd poca energia en un període, les oscil·lacions són feblement amortides i el sistema oscil·la moltes vegades abans d'aturar-se. Abans hem vist que el sistema es feblement amortit si $\delta < 0{,}06$, és a dir, si $Q > 50$.

Exemple 4: Un saltador de salt de pont de 65 kg de massa salta des d'un pont. Al cap de 20 s la seva energia mecànica es redueix a la meitat. Finalment queda completament aturat a 45 m per sota del nivell del pont. La longitud natural de la corda elàstica és 28 m. Calculeu la raó d'amortiment i la freqüència angular.

Solució:

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow \frac{E_0 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{E_0} = 0{,}5 \Rightarrow -2\frac{t}{\tau} = \ln 0{,}5 \Rightarrow \tau = -\frac{40}{\ln 0{,}5} = 57{,}71 \text{ s}$$

$$\tau = \frac{1}{K} \Rightarrow K = \frac{1}{\tau} = 1{,}733 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$mg = k\delta_{eq} \Rightarrow k = \frac{mg}{\delta_{eq}} = \frac{65 \cdot 9{,}81}{45 - 28} = 37{,}51 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}7596 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{K}{\omega_n} = 2{,}281 \cdot 10^{-2}$$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n \cdot 0{,}9997 = 0{,}7594 \text{ rad/s} \approx \omega_n$$

Exemple 5: Un objecte de 500 g de massa està unit a una molla de constant elàstica k = 350 N/m. La disminució d'energia a cada període és d'un 2% i l'amplitud inicial és 12 cm. Determineu: *a)* el factor de qualitat, *b)* l'energia total inicial, *c)* el decreixement logarítmic, *d)* la raó d'amortiment i *e)* el període.

Solució:

a) $Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} = 2\pi \frac{1}{0{,}02} = 314$

b) $E(t=0) = \frac{1}{2} k A_0^2 = 2{,}52\ \mathrm{J}$

c) $Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} = \frac{\pi}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{Q} = 0{,}01$

d) $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = 0{,}00159$

Alternativament, dins l'aproximació d'oscil·lacions feblement amortides,

$$\zeta \approx \frac{1}{2Q} = 0{,}00159$$

e) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 26{,}46\ \mathrm{rad/s}$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n \cdot 0{,}9999987 = 26{,}46\ \mathrm{rad/s} \approx \omega_n$$

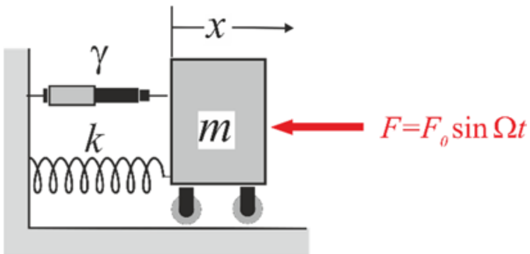
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}2375\ \mathrm{s}$$

Oscil·lacions forçades i ressonància

Es tracta d'un oscil·lador amortit sobre el qual actua una força externa periòdica:

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

on Ω és la pulsació de la força externa.



Exemples d'oscil·ladors forçats són les suspensions dels cotxes, els sintonitzadors de radio, etc.

Podem obtenir l'equació diferencial que descriu el moviment a partir de la segona llei de Newton:

$$m x''(t) = -\gamma x'(t) - k x(t) + F_0 \sin \Omega t$$

$$x''(t) + \frac{\gamma}{m} x'(t) + \frac{k}{m} x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

I, reagrupant, obtenim l'equació diferencial

$$x''(t) + 2K x'(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \sin \Omega t$$

La solució conté la contribució de dos termes:

$$x(t) = x_T(t) + x_P(t)$$

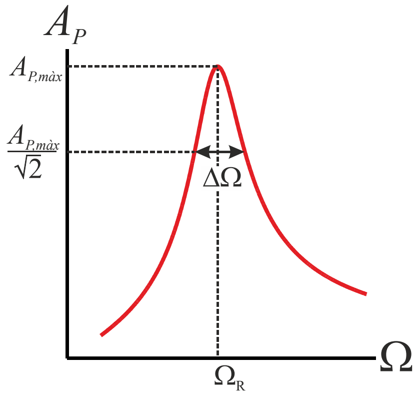
- $x_T(t)$ és un terme transitori i correspon a la solució de les oscil·lacions amortides (apartat anterior). Aquest terme depèn de les condicions inicials.

- $x_P(t)$ és un terme permanent i és igual a:

$$x_P(t) = A_P \sin(\Omega t + \phi_P)$$

on $A_P = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\omega_n \zeta \Omega)^2}}$ i $\mathrm{tg}\phi_P = \frac{2\,\omega_n \zeta\, \Omega}{\Omega^2 - \omega_n^2}$

és a dir, que si esperem prou temps (que acabi el règim transitori) el sistema acaba oscil·lant a la freqüència de la força externa. També és interessant veure que *el règim permanent no depèn de les condicions inicials*.

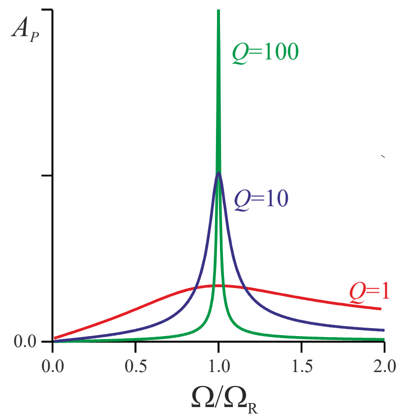


Podem comprovar que l'amplitud de les oscil·lacions depèn de la freqüència de la força externa. Concretament, hi ha un valor particular de Ω per al qual l'amplitud és màxima, és la freqüència de ressonància:

$$\Omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Per a oscil·lacions feblement amortides, ζ<<1 i, per tant, $\Omega_R \approx \omega_n$.

En general, quan la força externa oscil·la a una freqüència propera a la freqüència natural de l'oscil·lador, llavors l'amplitud de les oscil·lacions és gran. En canvi, quan la freqüència Ω és molt diferent de la freqüència natural de l'oscil·lador, l'amplitud és feble. Aquest fenomen es coneix com a ressonància.



Es defineix com a factor de qualitat d'una ressonància

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega}$$

on $\Delta\Omega$ és l'amplada del pic quan l'amplitud es redueix en un factor $\sqrt{2}$.

Si Q és gran → pic estret i alt, ressonància molt aguda. Pot ser catastròfica.
Si Q és petit → pic ample i baix.

Es pot demostra que per oscil·lacions feblement amortides, $\Delta\Omega \approx 2/\tau$, i per tant:

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega} \approx \pi \frac{\tau}{T_R} = \frac{\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}{2K} = \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{2\zeta}$$

Com es pot aconseguir un Q petit? Fent τ petit, és a dir, fent K gran, augmentant la fricció.

De vegades les ressonàncies són fenòmens buscats, és el cas dels sintonitzadors de ràdio i televisió que utilitzen circuits ressonants de Q gran. En aquest circuits es pot modificar la freqüència de ressonància per tal de poder seleccionar una emissió concreta.

Per altre banda, les ressonàncies poden ser fenòmens paràsits, per exemple quan les rodes del cotxe estan desequilibrades es produeixen ressonàncies molt molestes quan el cotxe circular a una velocitat concreta. En d'altres casos poden ser l'origen d'avaries i fins hi tot d'accidents. Per tal de prevenir possibles problemes amb les ressonàncies es dissenyen els oscil·ladors mecànics amb valors de Q petita.

Per exemple, el 1970 un dels eixos dels generadors d'una central elèctrica tèrmica als Estats Units (Mohave) es va trencar per culpa d'una ressonància[5]:

Exemple 6: Un objecte de 2 kg de massa està unit a una molla de constant elàstica k = 1800 N/m. La disminució de l'amplitud a cada període és d'un 1%. El sistema s'acobla a una modulació externa. L'amplitud de la força periòdica aplicada és F_0=20 N. Determineu: *a)* el decreixement logarítmic, *b)* el factor de qualitat, *c)* la raó d'amortiment, *d)* la freqüència de ressonància, *e)* l'amplitud de les oscil·lacions a la ressonància i *f)* l'amplitud quan la freqüència externa és 19 rad/s.

Solució:

a) $A_2 = 0{,}99 A_1 \Rightarrow \delta = \ln\frac{A_1}{A_2} = 0{,}01005$

b) $Q = \frac{\pi}{\delta} = 313$

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{\frac{1}{2}kA_1^2 - \frac{1}{2}kA_2^2}{\frac{1}{2}kA_1^2} = 1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} = 1 - 0{,}99^2 = 0{,}0199$$

$$Q = 2\pi\frac{E}{|\Delta E|} = 316$$

c) $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}} = 0{,}00160$

Alternativament, dins l'aproximació d'oscil·lacions feblement amortides,

$\zeta \approx \frac{1}{2Q} = 0{,}00160$

d) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 30\ \mathrm{rad/s}$

$$\Omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = \omega_n \cdot 0{,}999997 = 29{,}9999\ \mathrm{rad/s} \approx \omega_n$$

e) $A_{P,R} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\Omega^2\right)^2+(2\omega_n\zeta\Omega)^2}} = 3{,}473\ \mathrm{m}$

$$A_{P,R} = \frac{f_0}{2\omega_n\zeta\Omega_R} = 3{,}473\ \mathrm{m}$$

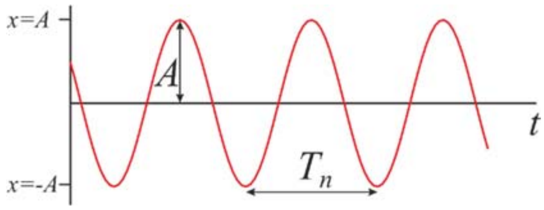
f) $A_P = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\Omega^2\right)^2+(2\omega_n\zeta\Omega)^2}} = 0{,}0186\ \mathrm{m}$

[5] Baker DH, Boukarim GE, d'Aquila R, Piwko RJ, *Subsynchronous Resonance Studies and Mitigation Methods for Series Capacitor Applications*, IEEE PES 2005.

Resum de relacions

Oscil·lacions lliures

Equació diferencial: $x''(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$, amb les condicions inicials: $x_0 = x(t = 0)$ i $v_0 = v(t = 0)$.



Solució: $x(t) = A\sin(\omega_n t + \phi)$

on $A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_n^2} + x_0^2}$ i $\phi = \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{v_0}\right)$

Energia mecànica constant: $E_m = \frac{1}{2}kA^2$.

Oscil·lacions amortides

Equació diferencial:

$$x''(t) + 2Kx'(t) + \omega_n^2 x(t) = 0.$$

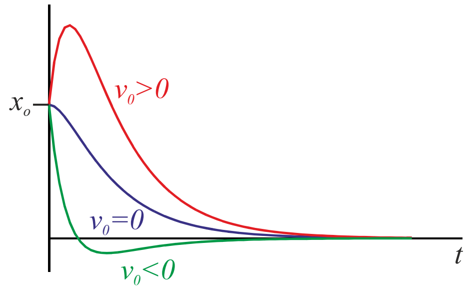
Solució general:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

on $\lambda_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 - \omega_n^2}$.

Raó d'amortiment (adimensional) $\zeta \equiv \frac{K}{\omega_n} = \frac{1}{2\pi}\frac{T_n}{\tau}$

on $\tau = 1/K$ τ és una *constant de temps* i és el temps característic de la desaparició de les oscil·lacions.

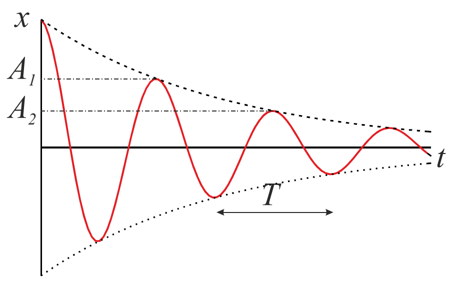


Solucions en funció de ζ

- $\zeta > 1$ $(K > \omega_n)$ sobreamortit.
- $\zeta = 1$ $(K = \omega_n)$ amortiment crític.
- $\zeta < 1$ $(K < \omega_n)$

$$x(t) = A_0 e^{-Kt}\sin(\omega t + \phi) = A(t)\sin(\omega t + \phi)$$

on $A(t) = A_0 e^{-Kt} = A_0 e^{-t/\tau}$, $\omega = \sqrt{\omega_n^2 - K^2} = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, $A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + Kx_0}{\omega}\right)^2}$ i $\mathrm{tg}\phi = \frac{x_0\omega}{v_0 + Kx_0}$.



Decreixement logarítmic δ (adimensional):

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Leftrightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Energia: $E(t) = \frac{1}{2}ke^{-2Kt} = E_0 e^{-2t/\tau}$,

on $E_0 = E(t = 0) = \frac{1}{2}kA_0^2$.

Es defineix el *factor de qualitat* Q com a $Q = 2\pi\frac{E}{|\Delta E|}$ (adimensional).

Si les oscil·lacions són feblement amortides,

$$Q \approx \pi\frac{\tau}{T} = \frac{\pi}{\delta} \approx \frac{1}{2\zeta} \Rightarrow \zeta \approx \frac{1}{2Q}$$

Oscil·lacions forçades, $F = F_0 \sin \Omega t$

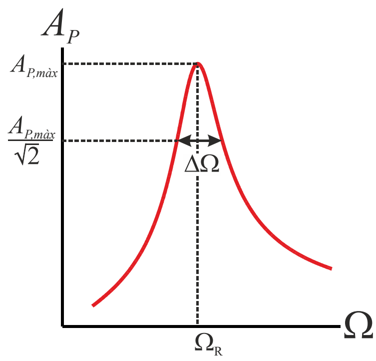
Equació diferencial: $x''(t) + 2Kx'(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \sin \Omega t$
Solució: $x(t) = x_T(t) + x_P(t)$
on $x_T(t)$ és un terme transitori i correspon a la solució de les oscil·lacions amortides (apartat anterior), i $x_P(t)$ és un terme permanent i és igual a: $x_P(t) = A_P \sin(\Omega t + \phi_P)$, amb

$A_P = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\omega_n \zeta \Omega)^2}}$ i $\mathrm{tg}\phi_P = \frac{2\,\omega_n \zeta\,\Omega}{\Omega^2 - \omega_n^2}$

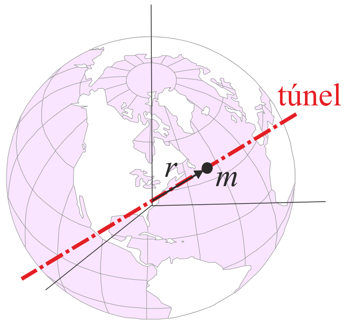
Freqüència de ressonància (amplitud màxima):

$\Omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega} \approx \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$



Qüestions del tema 8



1. Perforem un túnel que travessa la Terra passant pel seu centre. Les parets del túnel no tenen fregament. La força gravitatòria que actua dins un objecte massiu com la Terra sobre una partícula de massa m és (vegeu la figura), per $r < R_T$: $F = G\frac{mM_T}{R_T^3}r$, on r és la distància al centre de la Terra, $R_T = 6370$ km és el radi de la Terra i M_T és la massa de la Terra. Dades: recordeu que l'acceleració de la gravetat a la superfície terrestre és $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, i es defineix com a $g = GM_T/R_T^2$. Introduïm una partícula de massa m al túnel ($r_0 = R_T$) amb una velocitat inicial nul·la ($v_0 = 0$). *a*) Escriviu l'equació diferencial que descriu el moviment de la partícula. Quin tipus de moviment descriu? Si descriu un MHS, *b*) trobeu el període T i *c*) escriviu l'equació de moviment.

Sol.: *a*) $r''(t) + G\frac{M_T}{R_T^3}r(t) = 0$; *b*) $T = 2\pi\sqrt{R_T/g}$= 5063 s = 1,4 hores; *c*) $r(t) = R_T\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R_T}}\ t + \frac{\pi}{2}\right)$

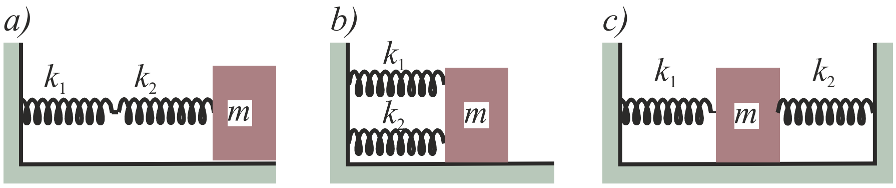
2. Si una partícula descriu un MHS amb una amplitud de 0,15 m, quin és el desplaçament total recorregut en un període?

Sol.: 0,60 m

3. Una massa m unida a una molla oscil·la amb una freqüència de 0,83 Hz. Quan a la massa m s'afegeix una massa addicional de 780 g, la freqüència és 0,60 Hz. Quin és el valor de m?

Sol.: 0,85 kg

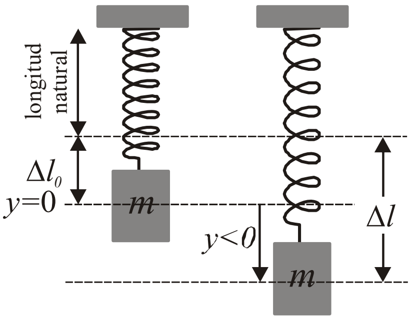
4. Determineu les freqüències d'oscil·lació corresponents a cadascun dels sistemes de la figura.



Sol.: *a*) $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}}$; *b*) $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{m}(k_1 + k_2)}$; *c*) $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{m}(k_1 + k_2)}$.

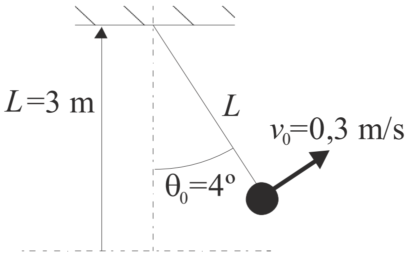
5. Les molles de la suspensió d'un cotxe de 1700 kg es comprimeixen 5,0 mm quan un conductor de 66 kg s'asseu al seient del conductor. Quan el cotxe ensopega amb un clot, quina serà la freqüència de les oscil·lacions? Ignoreu l'amortiment, suposeu que les quatre molles són idèntiques i que es comporten com molles ideals. Suposeu també que el pes es reparteix per igual a les quatre rodes i que l'amplitud d'oscil·lació és la mateixa per les quatre molles.

Sol.: 1,362 Hz.



6. A partir de la conservació de l'energia mecànica (negligim la fricció), demostreu que quan pengem un objecte de massa m a l'extrem d'una molla de constant elàstica k i el desplacem en vertical des de la posició d'equilibri, descriu un moviment harmònic simple. Suposeu que la massa de la molla és molt més petita que m. Quin és el període d'aquest moviment? Nota: observeu que en la posició d'equilibri la molla pateix un estirament inicial Δl_0 degut al pes de l'objecte, mg. Per simplificar l'anàlisi, trieu com a variable per descriure la posició la coordenada y, de manera que $y = 0$ en la posició d'equilibri, i per tant l'allargament de la molla s'expressarà com a $\Delta l(t) = \Delta l_0 - y(t)$. El signe negatiu obeeix al fet que quan $y(t)$ és negatiu la molla s'estira (vegeu la figura).

Sol.: $T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

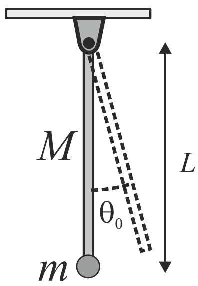


7. Donat un pèndol de 3 m longitud i massa 2 kg, deixem anar la massa des d'un angle inicial de 4º i amb una velocitat cap amunt de 0,3 m/s. Determineu: *a)* el període de l'oscil·lació, *b)* l'amplitud màxima de les oscil·lacions $\theta_{màx}$, *c)* per a aquesta amplitud màxima, quin és l'error relatiu que cometem en l'aproximació d'angles petits per al càlcul del sinus i del cosinus. *d)* Quina és l'elevació màxima del pèndol per sobre de la posició d'equilibri? Quin és el desplaçament màxim en horitzontal respecte a la posició d'equilibri? *e)* Calculeu la fase ϕ i *f)* escriviu l'equació de l'angle en funció del temps.

Sol.: *a*) 3,47 s; *b*) 0,0891 rad; *c*) 0,13 % i $2{,}6\cdot10^{-4}$ %; *d*) 11,9 mm i 0,267 m; *e*) 0,901 rad; *f*) $\theta(t) = 0{,}0891 \cdot \sin(1{,}81 \cdot t - 0{,}901)$ tots els angles en radians i els temps en segons.

8. Tenim un pèndol consistent en un anell de 2 kg de massa i 0,8 m de diàmetre que està suspès per un extrem d'un pivot sense fricció. Determineu: *a*) la freqüència, f_n, *b*) la freqüència angular, ω_n, i *c*) el període, T_n, característics de l'oscil·lació. Suposeu oscil·lacions d'amplitud petita. $I_{CM} = mR^2$

Sol.: *a*) $f_n = 0{,}557$ Hz; *b*) $\omega_n = 3{,}5$ rad/s; *c*) $T_n = 1{,}795$ s

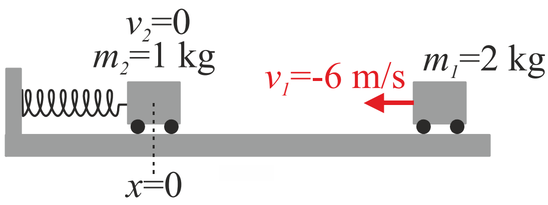


9. A l'extrem d'una barra de massa M i longitud L penja una plomada de massa m. La barra es desplaça de la posició d'equilibri un angle petit θ_0 (θ < 10º). *a)* Determineu el període de les oscil·lacions. *b)* Quin és el període quan $M >> m$ i *c)* quan $m >> M$?

Sol.: *a*) $T_n = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}\frac{M+3m}{M+2m}}$; *b*) $T_n = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$; *c*) $T_n = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

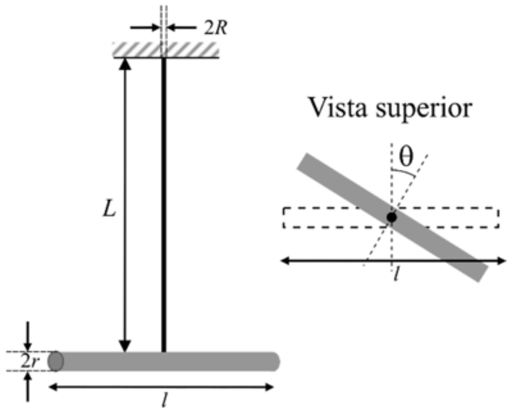
10. La posició d'una partícula de massa 0,8 kg està determinada per l'equació $x(t) = 0{,}45\sin(12t + \pi/2)$, amb x i t mesurats en metres i segons, respectivament. Determineu: *a)* l'amplitud, *b)* la freqüència, *c)* l'energia total, i *d)* l'energia cinètica i l'energia potencial quan x = 0,24 m

Sol.: *a*) 0,45 m; *b)* f_n = 1,91 Hz; *c*) 11,66 J; *d)* U=3,318 J i E_c=8,346 J.



11. Un objecte de massa m_1 = 2 kg i velocitat inicial 6 m/s xoca amb un objecte de massa m_2 = 1 kg que està en repòs. L'objecte m_2 està enganxat a una molla de constant elàstica 300 N/m, i abans de l'impacte la molla està relaxada. El xoc és perfectament inelàstic. Escriviu l'equació de moviment dels dos objectes. Negligiu el fregament amb el terra i l'arrossegament amb l'aire.

Sol.: $x = 0{,}4\sin(10t + \pi) = -0{,}4\sin(10t)$, tots els angles en radians, les posicions en metres i els temps en segons.



12. Un pèndol de torsió està format per un filferro de longitud L i radi R del qual penja un cilindre de massa m, longitud l i radi r. El sistema oscil·la amb una rotació del cilindre respecte l'eix que passa pel filferro, de manera que la rotació provoca una torsió del filferro. Quan la torsió forma un angle θ respecte la posició d'equilibri, apareix un parell de forces recuperador proporcional a la rotació:

$$M = k\theta$$

on la constant recuperadora k depèn de la longitud del filferro, del seu radi i del mòdul de cisallament o torsió G[6]:

$$k = \frac{\pi R^4 G}{2L}$$

a) Demostreu que la freqüència natural d'un pèndol de torsió és:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{GR^4}{I\,L}}$$

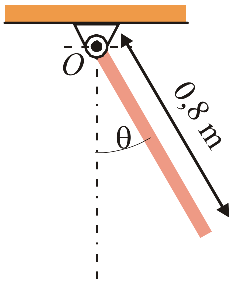
on I és el moment d'inèrcia del cilindre respecte l'eix de rotació.
b) Determina la freqüència i el període d'oscil·lació per un pèndol fet amb un filferro de longitud L = 1,2 m i radi R = 0,6 mm del que penja un cilindre de massa m = 120 g, longitud l = 20 cm i radi r = 0,5 cm. Dada, el moment d'inèrcia d'un cilindre homogeni respecte l'eix que passa pel centre de masses en la direcció normal al eix de revolució és:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}mr^2$$

Sol.: *b*) ω_n = 5,963 rad/s; *c*) T_n = 1,054 s.

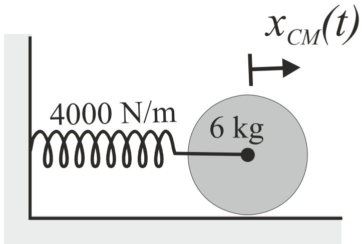
[6] El mòdul de cisallament, G, és un paràmetre físic del material que caracteritza la resposta elàstica del material quan es sotmet a esforços de cisalla o de torsió, concretament és igual al quocient entre l'esforç de cisalla i la deformació unitària. Les unitats de l'esforç de cisallament són Pa en SI.

13. Tenim un pèndol consistent en una barra homogènia de 2 kg de massa i 0,8 m de longitud que està suspesa per un extrem d'un passador (sense fricció). *a)* Determineu: la freqüència, f_n, la freqüència angular, ω_n, i el període, T_n, característics de l'oscil·lació. Suposeu oscil·lacions d'amplitud petita. *b)* Quins valors s'obtindrien si tota la massa de la barra es trobés a l'extrem inferior?



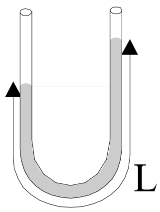
Sol.: *a)* f_n = 0,683 Hz, ω_n = 4,289 rad/s i T_n = 1,465 s; *b)* f_n = 0,557 Hz, ω_n = 3,502 rad/s i T_n = 1,794 s

14. En el sistema de la figura, el cilindre ($I_{CM} = 1/2mR^2$) roda sense lliscar, la seva massa és de 6 kg i la constant recuperadora de la molla és k = 4000 N/m. Determineu la freqüència d'oscil·lació del sistema per a petits desplaçaments respecte a la posició d'equilibri.



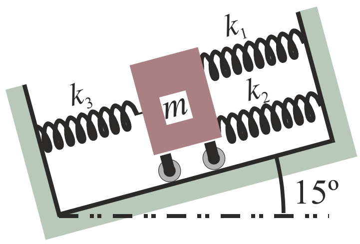
Sol.: f = 3,355 Hz

15. Calculeu el període de les oscil·lacions lliures de la columna de líquid de longitud L continguda en un tub amb forma de "U" col·locat verticalment i de secció uniforme. (Nota: El pes que exerceix una columna de líquid d'alçada h i secció A és igual a $P = \rho g h A$, on ρ és la densitat del líquid.)



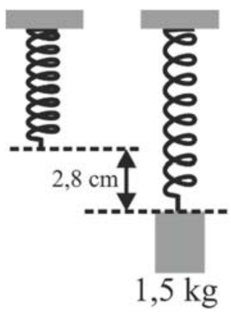
Sol.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$.

16. Una carreta que pesa 50 N està unida a tres ressorts i rodola sobre un pla inclinat (vegeu la figura). Les constants dels ressorts són: k_1 = 83 N/m, k_2 = 83 N/m i k_3 = 250 N/m. Si la carreta es desplaça de la seva posició d'equilibri tot pujant pel pla inclinat una distància de 75 mm, i després es deixa lliure amb una velocitat inicial de 375 mm/s cap a la part superior del pla a t = 0, determineu: *a)* El període, la freqüència i la freqüència angular de l'oscil·lació resultant. *b)* L'amplitud de l'oscil·lació resultant. *c)* La posició de la carreta en funció del temps.



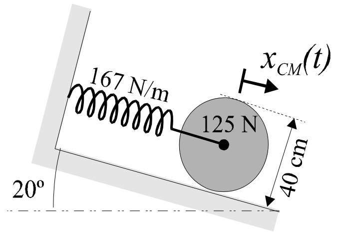
Sol.: *a)* T_n = 0,695 s, f_n = 1,438 Hz, ω_n = 9,034 rad/s; *b)* A = 87,5 mm; *c)* $x(t) = 85{,}7\sin(9{,}034\,t - 1{,}065)$ posicions en mm i temps en segons.

17. Quan pengem d'una molla un cos de massa 1,5 kg, s'estira 2,8 cm respecte a la seva longitud natural. Si posem el sistema a oscil·lar amb una amplitud de 2,2 cm, determineu: *a)* L'energia total del sistema. *b)* L'energia potencial gravitatòria quan l'objecte es troba en el punt més baix. *c)* L'energia potencial de la molla quan l'objecte es troba en el punt més baix. *d)* L'energia mecànica quan l'objecte es troba en el punt més baix. Demostreu que és igual a l'energia total del sistema. *e)* Quina és la màxima energia cinètica del cos? En els apartats *b*) i *c*) establiu que l'energia potencial gravitatòria i elàstica és zero quan el cos està en la seva posició d'equilibri.



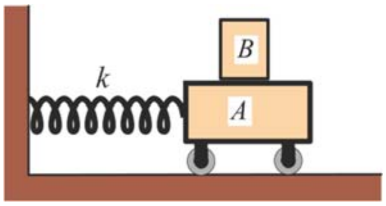
Sol *a*) 0,127 J; *b*) –0,324 J; *c*) 0,451 J; *d*) 0,127 J; *e*) 0,127 J

18. Una molla de constant 167 N/m està lligada a l'eix d'un cilindre uniforme de pes 125 N i 40 cm de diàmetre, tal com s'indica a la figura. Si el cilindre roda sense relliscar, *a)* Determineu la freqüència i el període. *b)* Si deixem anar el sistema des del repòs i amb la molla a la seva longitud natural, calculeu l'energia total del sistema i l'expressió de la posició en funció del temps $x_{CM}(t)$.



Sol.: *a*) f_n = 0,47 Hz, T_n = 2,12 s; *b*) E = 5,47 J, $x_{CM}(t) = 0{,}256\sin(2{,}976\,t - \pi/2)$ posicions en m i temps en segons.

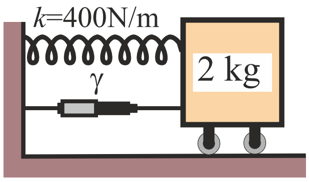
19. Un bloc *A* descriu un moviment harmònic simple de freqüència f = 1,50 Hz. Un bloc *B* de massa 2,5 kg reposa sobre el primer sense lliscar (vegeu la figura). El coeficient de fricció estàtica entre tots dos és μ_E = 0,6. Quina amplitud màxima pot tenir el moviment per tal que el bloc B no llisqui?



0,06626 m

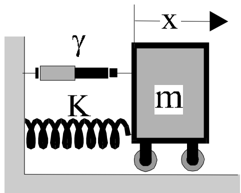
Oscil·lacions amortides

20. Un cos de massa 2 kg està enganxat a una molla de constant k = 400 N/m, i oscil·la amb una amplitud inicial de 3 cm. Calculeu: *a*) El període de les oscil·lacions. *b*) L'energia total inicial. Si l'energia disminueix en un 1 % en cada període, trobeu *c*) el factor de qualitat Q i *d*) la constant d'amortiment γ.



Sol. *a*) 0,444 s; *b*) 0,18 J; *c*) Q = 628; *d*) γ = 0,045 kg/s

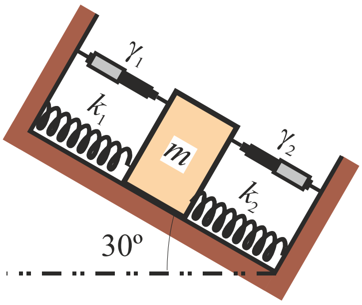
21. Una carreta de 100 N de pes rodola per una superfície horitzontal plana (vegeu la figura). S'empeny la carreta vers la dreta 375 mm i es deixa lliure amb una velocitat de 4,5 m/s vers l'esquerra a t = 0. Si la constant del ressort és k = 667 N/m i γ és el coeficient d'amortiment corresponent a l'amortiment crític, determineu: *a*) el valor del coeficient d'amortiment γ, i *b*) la carreta superarà la posició d'equilibri abans de quedar en repòs?



Sol.: *a*) γ=164,9 Ns/m; *b*) sí.

22. Un bloc de 5 kg unit a una molla oscil·la a una freqüència de 20 Hz. Al cap de 6 s d'iniciar el moviment, l'energia s'ha reduït a un 30% del seu valor inicial. Determineu: *a)* el decreixement logarítmic, *b)* la raó d'amortiment, *c)* la constant elàstica de la molla i *d)* el valor del coeficient d'amortiment γ.

Sol.: *a*) $5{,}017\cdot10^{-3}$; *b)* $7{,}9841\cdot10^{-4}$; *c)* $7{,}90\cdot10^{4}$ N/m; *d)* γ=1,003 Ns/m.



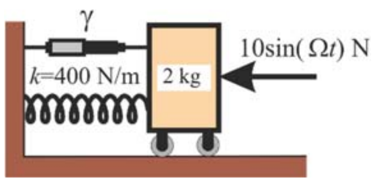
23. Un bloc de 5 kg llisca per un pla inclinat sense fricció (vegeu la figura). Les constants dels ressorts són: $k_1 = k_2 = 2$ kN/m, i els coeficients d'amortiment viscós són: $\gamma_1 = \gamma_2 = 25$ Ns/m. Si partint de la posició d'equilibri desplacem el bloc 50 mm cap amunt del pla i després el deixem lliure amb una velocitat inicial d'1,25 m/s cap avall del pla quan t = 0, determineu: *a)* el període, la freqüència i la freqüència angular de les oscil·lacions amortides corresponents, *b)* la posició del bloc en funció del temps, *c)* l'instant t_1 en el qual l'amplitud s'ha reduït a l'1 % del seu valor inicial.

Sol.: *a*) T_n = 0,226 s, f_n = 4,43 Hz, ω_n = 27,8 rad/s; *b*) $x_{CM}(t) = 61{,}56\, e^{-5t} \sin(27{,}8\, t - 0{,}948)$; *c*) t_1 = 0,921 s

24. Un bloc penja d'una molla quan comença a oscil·lar amb una amplitud inicial de 120 mm. Després de 2,4 min l'amplitud ha disminuït fins a 60 mm. Determineu: *a)* el temps que triga a assolir una amplitud de 30 mm, *b)* la constant de temps de l'amortiment ($\tau = 1/K$).

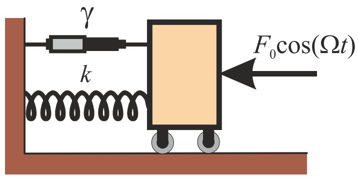
Sol.: *a*) 4,8 min; *b*) 208 s

Oscil·lacions forçades



25. Un objecte de massa 2 kg està soldat a una molla de constant k = 400 N/m. La constant d'amortiment és γ = 2 kg/s. Sobre aquest objecte s'aplica una força sinusoïdal d'un valor màxim de 10 N i amb una freqüència angular (pulsació) Ω = 10 rad/s. *a*) Trobeu l'amplitud de les oscil·lacions. *b*) Per a quina freqüència angular de la força sinusoïdal es produirà ressonància? *c*) Calculeu l'amplitud quan el sistema es troba en ressonància. *d*) Calculeu l'amplada $\Delta\Omega$ del pic de ressonància.

Sol.: *a*) 4,97 cm; *b*) 14,12 rad/s; *c*) 35,4 cm; *d*) 1,0 rad/s



26. Un objecte de massa 1 kg està soldat a una molla de constant k = 6000 N/m. Sobre aquest objecte s'aplica una força sinusoïdal d'un valor màxim de 80 N. Es vol limitar l'amplitud de les oscil·lacions a 50 cm. Quina ha de ser la constant d'amortiment del amortidor?
Aproximeu la freqüència de ressonància a la del oscil·lador lliure.

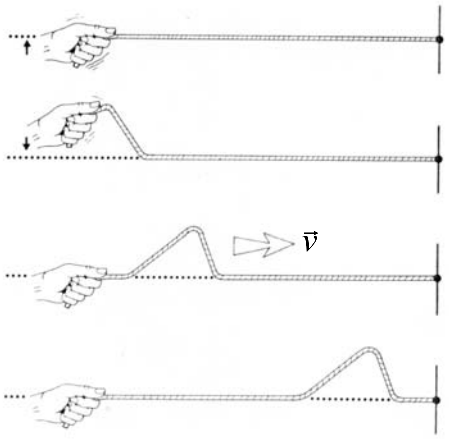
Sol.: 2,065 kg/s.

9. Ones mecàniques

Objectius

Descripció del moviment ondulatori
Descripció de les ones harmòniques
Descripció dels fenòmens de superposició i interferència
Conceptes d'ones estacionàries i ressonància

Moviment ondulatori

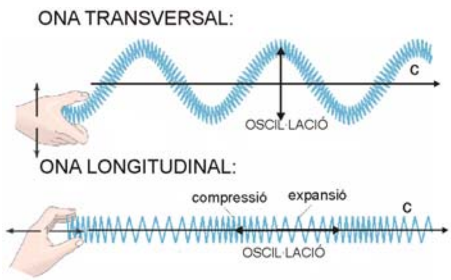


Què és una ona?

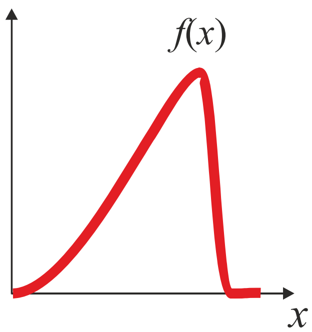
És una pertorbació que viatja en el temps a una velocitat v. Aquesta pertorbació transporta energia i quantitat de moviment. Per exemple, podem generar una ona sacsejant un extrem d'una corda.

Hi ha molts fenòmens ondulatoris: les vibracions en una corda, les ones sonores, les ones de compressió en líquids i sòlids, les ones a la superfície d'un líquid o les ones electromagnètiques.

A banda de l'interès que tenen pel fet que permeten la propagació de l'energia, les ones també es poden fer servir per transmetre informació.



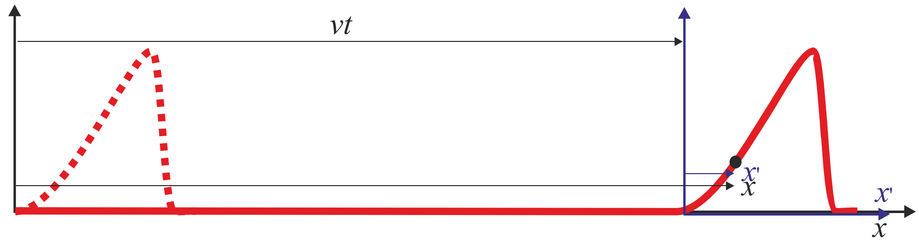
Hi ha dos tipus d'ones: les longitudinals i les transversals. En una ona transversal la pertorbació es desplaça en la direcció perpendicular a la de propagació de l'ona, mentre que per a una ona longitudinal la pertorbació es mou en la mateixa direcció de propagació. Les ones generades a les cordes dels instruments musicals són ones transversals, mentre que les ones sonores que es propaguen a través de l'aire són ones longitudinals.



Suposem que la pertorbació inicial és un pols, la forma del qual es pot descriure mitjançant la funció $f(x)$.

Així doncs, si notem l'ona com la funció $\psi(x,t)$, inicialment, a l'instant $t = 0$, tenim:

$$\psi(x, t = 0) = f(x)$$



Al cap d'un cert temps t, la pertorbació ha recorregut una distància vt. Si ens col·loquem en un sistema de referència que viatja solidàriament amb el pols a velocitat v, llavors la forma del pols, vista des d'aquest sistema, no canvia:

$$\psi(x',t) = f(x')$$

A la figura podem veure que el canvi de les coordenades del sistema fix al sistema que viatja amb velocitat v és

$$x = x' + vt \;\Rightarrow\; x' = x - vt$$

Si fem el canvi de variables obtenim l'expressió d'una ona que es propaga cap endavant:

$$\psi(x,t) = f(x - vt)$$

Observeu el signe negatiu per a les ones que es propaguen cap endavant. Si l'ona es propaga cap enrere, llavors:

$$\psi(x,t) = f(x + vt) \qquad \text{(ona que es propaga cap enrere)}$$

Velocitat de les ones

La velocitat d'una ona no depèn de la pertorbació o de la font que la genera sinó que depèn de les propietats del medi per on es propaga. Per exemple, la velocitat de propagació de les ones de pressió en un gas, la velocitat del so, està determinada per la relació següent:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$$

on R=8,314 J/K·mol és la constant dels gasos ideals, M és la massa molecular, κ és el quocient entre les calors específiques a pressió i volum constant ($\kappa = c_p/c_v$) i T és la temperatura absoluta en kelvins (vegeu el tema 13). Per a l'aire, M és la mitjana entre el N_2 i l'O_2, i és 29 g/mol, i κ = 1,4. Així doncs, a una temperatura de 25 ºC (298 K) la velocitat del so és de 346 m/s.

En sòlids, la velocitat de propagació del so és $v = \sqrt{Y/\rho}$, on Y és el mòdul de Young del material i ρ és la densitat.

Velocitat de propagació del so en sòlids

Material	**Velocitat m/s**
Alumini	6420
Granet	6000
Acer	5960
Vidre pyrex	5640
Coure	5010
Polímer	2680

Per altra banda, la velocitat de propagació d'una ona transversal en una corda és:

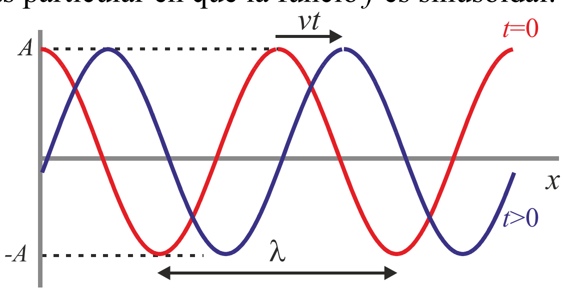
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

on F és la tensió de la corda i μ és la massa per unitat de longitud de la corda[7].

Ones harmòniques

Les ones harmòniques corresponen al cas particular en què la funció f és sinusoïdal:

$$\psi(x,t) = A\sin k(x \mp \mathrm{vt})$$



k és el nombre d'ona. Les unitats de k són m^{-1}. Per altra banda, el sinus varia entre ± 1, de manera que A és el valor màxim, és l'amplitud d'ona.

Les ones harmòniques són periòdiques en l'espai i en el temps. Si fixem el temps en un instant t, llavors l'ona es repeteix amb un període espacial λ que s'anomena longitud d'ona.

La longitud d'ona està determinada per:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Podem comprovar que, per a un instant de temps donat t, el valor de la funció en un punt x qualsevol és igual al valor de la funció en el punt $x+\lambda$; és a dir, que es repeteix en l'espai amb una periodicitat λ:

$$\psi(x+\lambda,t) = A\sin k(x+\lambda-vt) = A\sin(kx+k\lambda-kvt) = A\sin(kx+2\pi-kvt) =$$
$$= A\sin(kx-kvt) = \psi(x,t)$$

El període temporal –o simplement el període–, T, és el temps que triga a repetir-se l'ona, és a dir, és el temps que triga a passar per davant de l'observador una oscil·lació completa de la funció sinusoïdal:

$$\psi(x,t+T) = A\sin(kx-kvt-kvT) = A\sin(kx-kvt-2\pi) = A\sin(kx-kvt)$$
$$= \psi(x,t)$$

llavors,

$$kvT = 2\pi \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}$$

De la darrera relació podem comprovar que $\lambda = vT$, és a dir, que el període és el temps que triga l'ona a recórrer una distància igual a la longitud d'ona, tal com era d'esperar. La freqüència d'una ona f es defineix com l'invers del període i les unitats són Hz:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

I la freqüència angular o pulsació s'expressa com a

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

[7] En aquest tema farem servir la notació F per les tensions, enlloc de T per evitar confusions entre les tensions i els períodes.

A partir de les relacions anteriors, podem expressar una ona harmònica de diferents maneres:

$$\psi(x,t) = Asink(x - vt)$$
$$\psi(x,t) = Asin2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$
$$\psi(x,t) = Asin(kx - \omega t)$$
$$\psi(x,t) = Asin2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

L'angle que fa d'argument del sinus es coneix com la fase:

$$\varphi = kx - \omega t$$

Fins ara hem suposat que quan $t = 0$, $\varphi = 0$, però això pot no ser cert; en general la fase s'expressa com a:

$$\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$$

on φ_0 és la fase inicial, és a dir, la fase quan $t = 0$.

Exemple 1: Un vaixell està amarrat en un lloc fix, i les onades fan que es mogui cap amunt i cap avall. Si la separació entre les crestes de les onades és de 20 metres i la velocitat de propagació de les onades és de 5 m/s, quant de temps es triga el vaixell en anar des de dalt d'una cresta fins al fons de les valls?

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{20}{5} = 4\ s$$

Per anar d'una cresta a una vall triga $T/2$=2 s

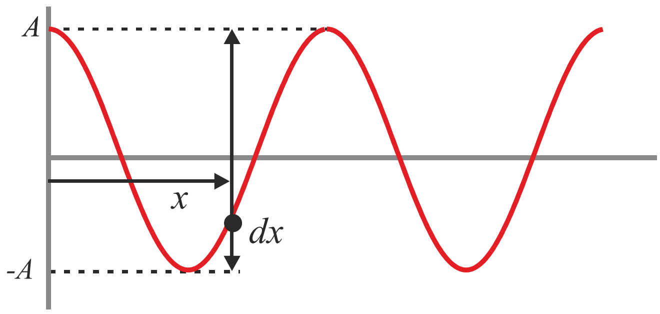
Exemple 2: Alerta tsunami! El 26 de desembre del 2004 va tenir lloc un gran terratrèmol davant de les costes de Sumatra i va provocar un tsunami. Com a conseqüència del tsunami varen morir 267.898 persones. Els satèl·lits d'observació varen mesurar una distància de 800 km entre crestes i un període entre crestes d'una hora. Quina era la velocitat de propagació d'aquestes ones? perquè el tsunami va causar tanta devastació?

$$\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{800.000}{3600} = 220\ \mathrm{m/s} = 800\ \mathrm{km/h}$$

Es propaga molt despresa, no dona temps a evacuar les zones del litoral

Energia i potència d'una ona harmònica transversal

Les ones transporten energia. Per aconseguir crear una ona cal aportar energia, i aquesta energia es pot recuperar a l'altre extrem de l'ona. Això és, per exemple, el que passa quan fem un cop amb un fuet: amb el braç generem un pols que es transmet al llarg del fuet fins arribar a l'extrem del fuet, on s'allibera l'energia.



Localment, una ona harmònica és un oscil·lador (MHS), de manera que l'energia en un punt de l'ona és proporcional a l'amplitud. Si fem la mitjana en el temps, la densitat d'energia localment es pot expressar com a (tema 8):

$$dE = \frac{1}{2}dkA^2$$

on dk és la constant elàstica d'un tram de longitud dx de la corda. Per altra banda, del MHS sabem que la freqüència angular d'oscil·lació està relacionada amb la constant elàstica i la massa de l'oscil·lador (tema 8):

$$\omega^2 = \frac{dk}{dm} \Rightarrow dk = \omega^2 dm = \omega^2 \mu dx$$

on μ és la massa per unitat de longitud de la corda. Si substituïm a la relació anterior, obtenim

$$dE = \frac{1}{2}\omega^2 \mu dx A^2$$

Llavors, podem expressar l'energia per unitat de longitud o densitat d'energia com a

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2$$

Per altra banda, la potència transportada és:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2 A^2$$

Exemple 3: Una ona harmònica transversal sobre una corda amb densitat de massa 0,05 kg/m i tensió de 80 N té una amplitud de 5 cm. Cada secció de la corda es mou amb un moviment harmònic simple de freqüència 10 Hz. Trobeu la potència mitjana propagada per la corda.

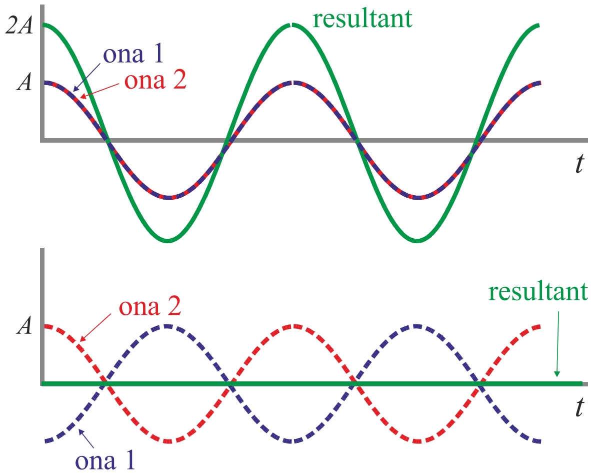
La velocitat de propagació és: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{80}{0,05}} = 40\ \mathrm{m/s}$

I la potència mitjana: $P = \frac{1}{2}v\mu\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}40 \cdot 0,05 \cdot (20\pi)^2 0,05^2 = 9,87\ \mathrm{W}$

Superposició i interferència

Quan dues ones es combinen, l'ona resultant és la suma algebraica de les ones individuals. Això vol dir que si en un punt les amplituds de les dues ones tenen el mateix signe, l'amplitud total és més gran que la de les ones individuals; això és una interferència constructiva. En canvi, si les amplituds individuals tenen signes oposats, llavors l'amplitud total és menor que la de les ones individuals; això és interferència destructiva.

Per exemple, en el cas de dues ones harmòniques d'igual amplitud, freqüència i longitud d'ona, la interferència serà constructiva o destructiva depenent de la fase inicial.



Un cas límit és quan la fase inicial és la mateixa: la interferència és constructiva i l'ona que surt té una amplitud igual al doble de les ones inicials.

$$\psi(x,t) = Asink(x - vt) + Asink(x - vt) = 2Asink(x - vt)$$

En canvi, quan la diferència de fase és igual a π, la interferència és totalment destructiva:

$$\psi(x,t) = Asink(x - vt) + Asink(x - vt + \pi) = A[sink(x - vt) - sink(x - vt)] = 0$$

Exemple 4: Els altaveus *A* i *B* emeten ones sonores de longitud d'ona λ = 1 m. Aquestes ones interfereixen constructivament en el punt allunyat on es troba un ase (per exemple 200 m). Què passa amb la intensitat si l'altaveu *A* es mou cap enrere 2,5 m?

a) la intensitat augmenta
b) la intensitat es manté igual
c) la intensitat tendeix a zero
d) és impossible de saber

Si λ = 1 m, llavors un canvi de 2,5 m correspon a 2,5 λ, el que posa les dues ones fora de fase i per tant la interferència destructiva. Llavors, la intensitat del so tendeix a zero.

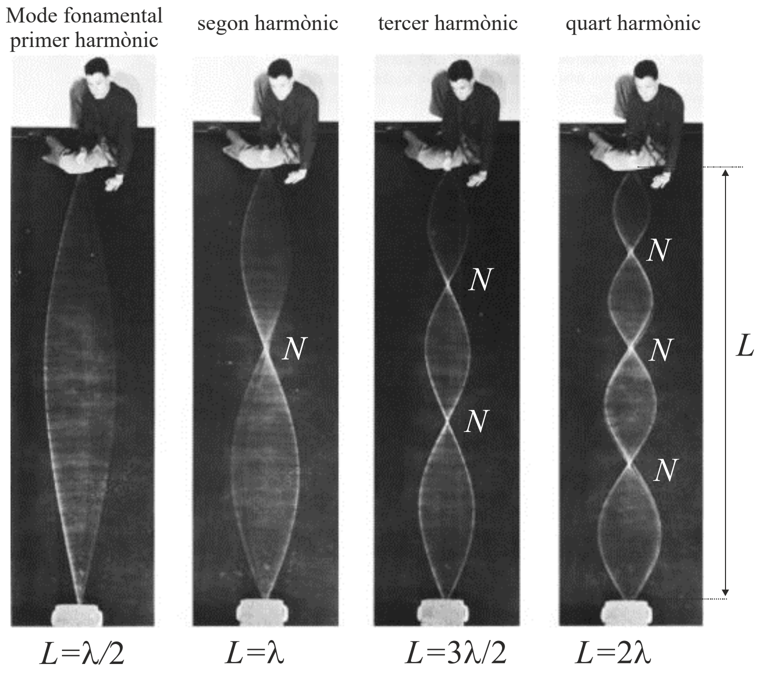
Ones estacionàries. Ressonància

Quan una ona està confinada en els seus extrems apareix el fenomen de les ones estacionàries; suposem, per exemple, una corda fixada pels extrems. Aquest és el cas de les cordes d'un instrument musical o de les ones sonores en un tub –per als instruments de vent–, o de les ones electromagnètiques en un làser. Quan l'ona està confinada, es produeixen reflexions als extrems, i això provoca la interferència de les ones incidents i reflectides, segons el principi de superposició.

A causa de les interferències destructives i constructives hi ha un procés de selecció. Existeixen unes ones, les *ones estacionàries*, que són afavorides per les interferències constructives. De manera que quan introduïm tot un espectre d'ones de diferents freqüències en l'espai confinat (cavitat ressonant), totes les ones s'extingeixen ràpidament excepte les que tenen una freqüència que es correspon amb les freqüències ressonants de la cavitat. Això passa per exemple quan polsem una corda de la guitarra.

Quan la polsem introduïm tot un espectre d'ones de diferents freqüències, però només aquelles que coincideixen amb les freqüències de ressonància sobreviuen.

Les freqüències de ressonància estan determinades per les dimensions de la cavitat. La freqüència de ressonància més baixa es coneix amb el nom de mode fonamental o primer harmònic, f_1. Per exemple, en el cas d'una corda fixada pels dos extrems (vegeu la figura) la longitud d'ona del mode fonamental és igual al doble de la longitud de la cavitat. La següent freqüència és el segon harmònic, f_2, i la seva longitud d'ona és la meitat, és a dir $f_2 = 2\ f_1$ (recordeu que la freqüència és inversament proporcional a la longitud d'ona, $f = v/\lambda$, llavors si la longitud d'ona és la meitat, la freqüència és el doble). En el segon harmònic observem l'aparició d'un node, que hem indicat a la figura amb la lletra *N*. Els nodes són punts estacionaris, es mantenen aturats tot el temps.



En el cas d'una corda fixada pels dos extrems, podem comprovar que

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, n = 1, 2, 3\ \dots \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n}$$

on λ_n és la longitud de l'harmònic *n*. A més, l'ona estacionària de l'harmònic n té $n - 1$ nodes (si les condicions de frontera són periòdiques, $L = n\lambda_n, n = 1, 2, 3$ ..., i l'ona estacionària de l'harmònic *n* té 2*n* nodes).

Pel que fa a les freqüències, $f = v/\lambda$; llavors,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{\lambda_1} = nf_1,$$

és a dir, la freqüència de l'harmònic *n* és *n* vegades la freqüència del mode fonamental.

Observeu que com més gran és *L* més baixa és la freqüència; per això les notes d'un violí són més agudes i les d'un violoncel més greus. Amb la longitud de les cordes o dels tubs es pot modificar la freqüència de ressonància d'un instrument musical.

Exemple 5: Trobeu la freqüència corresponent als primers quatre harmònics del patró d'ones estacionàries d'una corda de longitud 30 m, una densitat de massa de 9×10^{-3} kg/m, fixada pels dos extrems i amb tensió de 20 N.

La velocitat de propagació és: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{20}{9\times10^{-3}}} = 47{,}14\ \mathrm{m/s}$

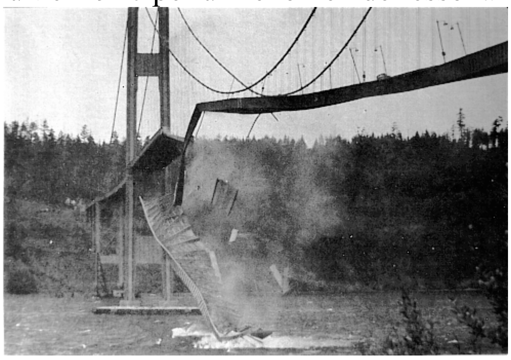
Primer harmònic: $f_1 = \frac{v}{2L} = 0{,}786$ Hz

Segon harmònic: $f_2 = 2f_1 = 1{,}57$ Hz

Tercer harmònic: $f_3 = 3f_1 = 2{,}36$ Hz

Quart harmònic: $f_4 = 4f_1 = 3{,}14$ Hz

De vegades les ressonàncies tenen efectes catastròfics. El pont Tacoma Narrows, per exemple, va ser destruït el 1940 per un fenomen de ressonància amb el vent.



Música i ones[8]

Les ones sonores que es propaguen en un gas són ones longitudinals i consisteixen en una modulació feble de la pressió. L'oïda humana pot percebre oscil·lacions d'una amplitud de 10^{-5} Pa (la pressió atmosfèrica és de 101.325 Pa, és a dir, és una amplitud igual a la pressió atmosfèrica dividit per 10^{10}) i amplituds de l'ordre de 10 Pa són perjudicials per l'oïda. El rang de freqüències audibles per una persona jove i sana és de 20 a 20.000 Hz, però amb l'edat es perd la capacitat de sentir sons d'elevada freqüència.

L'oïda humana és capaç de distingir sons de diferents freqüències, això és així perquè els sensors interns de l'oïda són un conjunt d'oscil·ladors de diferents freqüències pròpies. Determinem la freqüència de un so a través de la ressonància de l'ona sonora amb el sensor intern que té una freqüència pròpia igual o molt propera a la de l'ona.

Quan les persones parlem, la freqüència fonamental de les ones sonores que emetem és pràcticament constant, aquesta freqüència és de l'ordre de 140 Hz i depèn de l'edat, el sexe i la mida de les cordes vocals.

La nota *la* que es fa servir per afinar les orquestres correspon a una freqüència fonamental de 440 Hz. La freqüència fonamental d'una ona sonora es coneix amb el nom de *to*. Malgrat que quan parlem les vocals a i e tenen el mateix to, o el *la* tocat per un violí té el mateix to que el *la* tocat per un piano, nosaltres som capaços de distingir entre les dues vocals i la mateixa nota emesa per instruments diferents. El que les diferencia és el *timbre*. El timbre es caracteritza per les amplituds dels diferents

[8]Entrecanales Carvajal C, Hernando A. *La música, la física y la matemàtica abren un viejo mundo a la jovent neurociència*. Revista Española de Física 31 (2017) 2-6.

harmònics superiors.

En una melodia no dissonant la raó entre les freqüències fonaments de dues notes consecutives es manté constant. Un acord (conjunt de notes emeses simultàniament) és agradable si la relació entre les freqüències de les diferents notes es senzilla. S'entén per raó senzilla aquella que es pot expressar com la fracció de dos números naturals petits. Al contrari, si la relació és complexa l'acord és dissonant.

Per aquesta raó, la música s'organitza en octaves, de manera que quan passem a una octava superior, el to de les notes és multiplica per 2, per exemple el *do* (primera nota) de la primera octava té una freqüència fonamental de 16,35 Hz, el *do* de la segona octava 32,70 Hz i així successivament fins al *do* de la novena octava 4186.01 Hz. Per altre banda existeix un mínim interval entre freqüències que l'oïda pot distingir, concretament dins una octava som capaços de distingir 12 freqüències, per això cada octava es divideix en 12 notes: *do*, *do#* (do sostingut), *re*, *re#*, *mi*, *mi#*, *fa*, *sol*, *sol#*, *la*, *la#* i *si*. La relació, α, entre dues notes consecutives és constant i per altre banda la freqüència augmenta en un factor 2 al llarg d'una octava,

$$\alpha^{12} = 2 \Rightarrow \alpha = 1{,}05946.$$

Així el *do* de la cinquena octava té una freqüència fonamental de 261,63 Hz, el *do#* de 277,18 Hz i el *la* que és la desena nota de 440 Hz ($256 \times \alpha^9$). El factor α és defineix com el *semitò*.

Qüestions del tema 9

1. Quant de temps triga una ona a avançar una distància igual a la seva longitud d'ona? Quin espai recorre una ona harmònica durant un període temporal complet?

2. Quina és la longitud d'ona associada a l'emissió de ràdio de Catalunya Música a la comarca de l'Alt Empordà (freqüència de 90,8 MHz, banda de FM)?

Sol.: 3,304 m

3. Quina és la freqüència d'una microona de 3 cm de longitud d'ona?

Sol.: 10 GHz

4. La funció d'ona d'una ona harmònica que es mou per una corda és $y(x,t) = 0{,}03\sin(2{,}2x - 3{,}5t)$ (x, y en metres i t en segons), on x és la posició al llarg de la corda i y el desplaçament normal a la corda respecte a la posició d'equilibri. *a)* Quin és el sentit de propagació de l'ona i quina és la seva velocitat de propagació? *b)* Trobeu la longitud d'ona, la freqüència i el període de l'ona. *c)* Quin és el desplaçament màxim de qualsevol segment de corda? *d)* Quina és la velocitat màxima de qualsevol segment de corda?

Sol.: *a*) 1,59 m/s en sentit positiu de les *x*; *b*) 2,86 m, 0,557 Hz, 1,80 s; *c*) 0,03 m; *d*) 0,105 m/s

5. Es té una corda de 200 g de massa i 1,5 m de longitud. Si les ones transversals es desplacen a 30 m/s. Quina és la tensió de la corda.

Sol.: 120 N

6. Una corda de 2 m de llarg té una massa de 0,1 kg . La tensió és de 60 N. Una font de potència en un dels extrems vibra amb una amplitud d'1 cm. L'ona s'extreu per l'altre extrem de la corda sense reflexió. Quina és la freqüència de la font de potència si la potència mitjana propagada és de 100 W?

Sol.: 171 Hz

7. ¿Quina potència cal subministrar a una corda de densitat lineal de massa $4 \cdot 10^{-2}$ kg/m sotmesa a una tensió de 60 N per mantenir una ona harmònica de 260 Hz de freqüència i amplitud 6 cm?

Sol.: 7442 W

8. Trobeu la freqüència corresponent al quart harmònic del patró d'ones estacionaries per una corda de longitud 20 m, una densitat de massa de $4 \cdot 10^{-3}$ kg/m, fixada als extrems i amb tensió de 2 N.

Sol.: 2,236 Hz

9. La corda *la* d'un violoncel vibra, en el primer mode normal, a una freqüència de 220 Hz. El segment de vibració fa 70 cm de llarg i té una massa d'1,20 g. *a)* Trobeu la tensió de la corda. *b)* Determineu la freqüència de vibració quan la corda vibra en tres segments.

Sol.: *a*) 163 N; *b*) 660 Hz

10. Les vibracions d'una ona estacionària s'estableixen en una copa de vidre amb quatre nodes espaiats al voltant de la circumferència de 20 cm de la seva vora. Les ones transversals al voltant del vidre tenen una velocitat de 900 m/s. Amb quina freqüència ha de cantar un cantant d'òpera per tal de trencar la copa per efecte d'una vibració ressonant?

Sol.: 9000 Hz

11. Es crea una ona estacionària en una corda de 40 cm de longitud que està fixada pels dos extrems. Quan al corda s'excita a una freqüència de 420 Hz s'observen 5 nodes. Quina és la longitud d'ona.

Sol.: 0,133 m

12. Una corda vibra segons l'equació descrita per $y = 20\sin(50x)\cos(400t)$ en el sistema CGS. Calculeu: *a)* les equacions de les ones harmòniques que per interferència han produït tal patró d'ona estacionària, *b)* la distància entre dos nodes consecutius.

Sol.: *a*) $y_1 = 10\sin(50x - 400t)$, $y_2 = 10\sin(50x + 400t)$; *b*) $\pi/50$cm.

13. La corda del *do* de un piano té una freqüència fonamental de 262 Hz i la nota *la* té una freqüència fonamental de 440 Hz. Les dues cordes tenen la mateixa densitat lineal i la longitud de la corda de la nota *la* és un 65% de la longitud de la nota *do*. La tensió de la corda *do* és de 2500 N. Quina és la tensió de la corda *la*?

Sol.: 2980 N

14. Una corda d'un piano s'afina a una freqüència de 440 Hz. S'augmenta la tensió de la corda en un 4%. Quina és la nova freqüència fonamental de la corda?

Sol.: 449 Hz

IV. Fluids

10. Estàtica de fluids

Objectius

Què és un fluid?
Concepte de densitat
Què és la pressió?
Com varia la pressió amb la profunditat?
Descriure el principi de Pascal
Descriure el principi d'Arquimedes
Què és i quant val la pressió atmosfèrica?
Què és la pressió manomètrica? Principi de funcionament del manòmetre

Què és un fluid?

Estats de la matèria: sòlid, líquid, gas i plasma

- Sòlid:[1] quan sobre un sòlid actua una força, aquest tendeix a conservar la forma i el volum.
- Líquid: canvia de forma però no de volum.[2]
- Gas: no conserva ni la forma ni el volum.

Fluids

Líquids i gasos no tenen forma, s'adapten al recipient. Del moviment de líquids o gasos quan s'adapten al recipient se'n diu fluir. Els fluids no suporten un esforç de cisalla, no tenen resposta elàstica davant d'un esforç de cisalla.

Definició de fluid: que té la capacitat de fluir.

Alguns sòlids també poden fluir:

- el gel a les glaceres
- el plom de les canonades
- el tungstè de les bombetes

Ho fan materials que estan a la frontera entre sòlids i líquids, les gelatines.

Una definició més acurada:

- Líquids: poc compressibles, als efectes pràctics incompressibles, volum constant (fluid ideal)
- Gasos: compressibles

Estàtica de fluids: fluids en repòs (tema 10)
Dinàmica de fluids: fluids en moviment (temes 11 i 12)

[1] De fet, els sòlids tenen una certa capacitat de canviar de forma.
[2] Això és una idealització del concepte de líquid. El volum dels líquids en presència de forces pot canviar; no obstant això, aquests canvis són molt petits quan es comparen amb el volum total d'un líquid o amb els canvis de volum que s'observen en gasos.

Densitat

Tal com hem vist al tema 2, la densitat és una variable macroscòpica que permet emprar el càlcul diferencial.

Què pesa més: 1 kg de palla o 1 kg de plom? Igual pes, però volum diferent.
Què pesa més: 1 m^3 de palla o 1 m^3 de plom?
En llenguatge col·loquial, quan diem que un material és més pesant que un altre, de fet no parlem del pes, sinó de la densitat.

La densitat és la massa per unitat de volum:
$\rho \equiv \frac{dm}{dV}$, unitat: $\frac{\text{kg}}{m^3}$
En un material homogeni ρ és constant:
$\rho = \frac{m}{V}$
Densitat relativa: $\bar{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$, és un paràmetre adimensional.

$$\rho_{H_2O} = 1\frac{\text{kg}}{\text{l}} = 1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Pes específic: és el pes per unitat de volum.
$\bar{p} \equiv \frac{mg}{V} = \rho g$, unitat: $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

El volum pot variar per culpa de la temperatura o la pressió, és a dir, $\rho(T,p)$. L'aire de l'atmosfera no és homogeni, és més dens prop de la superfície i a mesura que ascendim es torna menys dens, més lleuger (cal pujar uns 5 km perquè la densitat es redueixi a la meitat). També depèn de la temperatura: canvis de temperatura a l'atmosfera provoquen canvis de densitat.

En general:

$$dm = \rho\, dV \Rightarrow m = \int dm = \int \rho\, dV \underset{\text{si és homogeni}}{=} \rho \int dV = \rho V$$

Per mesurar la densitat de líquids es fa servir el picnòmetre que és un recipient, com el de la figura, que gràcies al tub prim del tap es pot omplir de manera que sempre conté el mateix volum total de líquid. A partir de mesurar amb precisió la massa del picnòmetre buit, la massa del picnòmetre omplerta amb un líquid de calibratge (de densitat coneguda) i la massa del picnòmetre omplerta amb un líquid de densitat desconeguda, podem determinar la densitat d'aquest últim.

<u>Exemple 1</u>: La massa d'un picnòmetre és de 22,71 g. Un cop omplert d'aigua destil·lada té una massa de 153,38 g. Quan el picnòmetre s'omple de llet la seva massa és de 157,67 g. Quina és la densitat de la llet?

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_{llet}\cdot V}{\rho_{H_2O}\cdot V} = \frac{m_{llet}}{m_{H_2O}} = \frac{157{,}67\text{ g} - 22{,}71\text{ g}}{153{,}38\text{ g} - 22{,}71\text{ g}} = 1{,}0328$$

$$\rho_{llet} = \bar{\rho}\cdot\rho_{H_2O} = 1{,}0328\cdot 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1{,}0328\cdot 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1{,}0328\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Pressió

Estàtica de fluids → fluid en repòs → no sotmès a esforç de cisalla

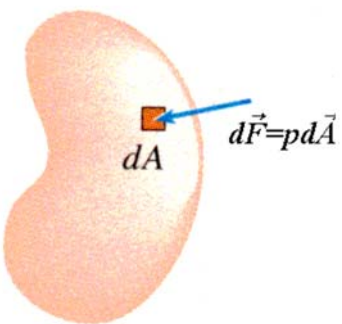
Submergim un sòlid dins d'un fluid:

Un sòlid submergit en un fluid pateix en tots els punts que estan en contacte amb el fluid una força que és perpendicular a la superfície de l'objecte.

Per la tercera llei de Newton, el sòlid respon aplicant una força de la mateixa magnitud i direcció, i sentit oposat.

Si la força no fos perpendicular a la superfície → esforç de cisalla → fluid en moviment. És a dir, la força ha de ser perpendicular perquè el fluid estigui estàtic.

Pressió: força normal exercida pel fluid per unitat d'àrea:



$p = \frac{dF}{dA}$

D'aquesta manera podem calcular la força resultant com:

$\vec{F} = \int p\, d\vec{A}$

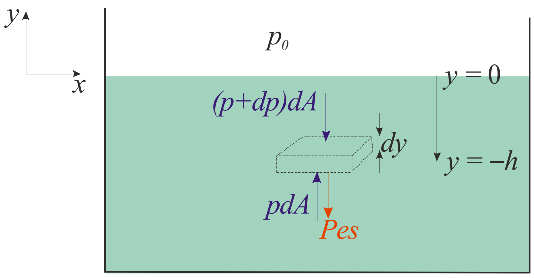
Unitat SI: Pa (pascal), 1 Pa = 1 N/m^2

Altres unitats:
1 bar = 10^3 mil·libars = 100 kPa
1 atm = 760 mmHg = 760 Torr = 101.325 Pa

1 atm: és la pressió deguda a l'atmosfera al nivell del mar.

<u>La pressió no depèn de la direcció ni de l'orientació de la superfície, atès que sempre és perpendicular a la superfície → només pot dependre de la posició.</u>

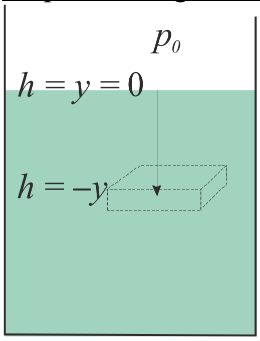
Equació fonamental de l'estàtica de fluids



Fluid en repòs

Perquè l'element de volum del fluid no es mogui, la suma de forces ha de ser nul·la, és a dir, la força neta feta per la pressió ha de compensar el pes de l'element de volum:

$$(p + dp)dA + dPes = pdA$$
A més:
$$dPes = gdm = \rho gdV$$
Llavors:
$$(p + dp)dA + \rho gdV = pdA \Rightarrow dpdA + \rho gdV = 0 \Rightarrow dp = -\rho g\frac{dV}{dA} = -\rho gdy$$
Equació fonamental de l'estàtica de fluids:
$$dp = -\rho gdy$$
La pressió augmenta proporcionalment a la profunditat.



Quan l'altura disminueix, la profunditat augmenta:
$$dh = -dy \Rightarrow dp = \rho gdh$$

Calculem la pressió en funció de la profunditat, *h*:

$$\left.\begin{aligned} \int dp &= p(h) - p_0 \\ \int dp = \int \rho gdh = \rho g \int dh &= \rho g(h - 0) = \rho gh \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{p = p_0 + \rho gh}$$

si és incompressible

$$\rho gh = \frac{\rho ghA}{A} = \frac{mg}{A}$$
El terme ρgh és el pes per unitat d'àrea. Per exemple, la pressió atmosfèrica a la superfície de la Terra és igual al pes per unitat d'àrea de la columna d'aire que s'estén des de la superfície de la Terra fins al final de l'atmosfera.

Exemple 2: El volum d'una bombolla d'aire esdevé 10,7 vegades més gran quan puja des del fons d'un llac a la superfície. Si la pressió atmosfèrica a la superfície del llac és igual a 101.325 Pa, calculeu la profunditat del llac.

$$p_{\text{dalt}} = p_0 = 101.325 \text{ Pa}$$
$$p_{fons} = p_0 + \rho gh$$
Gas ideal: $p_{fons}V_{fons} = p_{dalt}V_{dalt} \Rightarrow \frac{p_{fons}}{p_{dalt}} = \frac{V_{dalt}}{V_{fons}} = 10{,}7$

$$p_{fons} = 10{,}7 \cdot p_{dalt} \Rightarrow p_{fons} = p_0 + \rho gh = 10{,}7 \cdot p_0 \Rightarrow \rho gh = 9{,}7 \cdot p_0$$
$$h = 9{,}7 \cdot \frac{p_0}{\rho g} = 9{,}7 \cdot \frac{101.325 \text{ N/m}^2}{1.000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}8 \text{ 1m/s}^3} = 100{,}2 \text{ m}$$

Exemple 3: Quina força neta actua sobre una planxa de 0,45 m^2 de superfície de la paret d'un submarí, quan el centre de gravetat d'aquest està 31 m per sota de la superfície del mar? Considereu que la pressió atmosfèrica és igual a 103 kPa i la densitat de l'aigua de mar és igual a 1,03 g/cm^3.

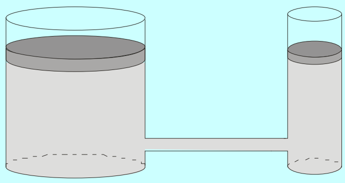
$$p = p_0 + \rho g h = 103.000\, Pa + 1.030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}8\ 1\ \text{m/s}^2 31\ \text{m} = 416.000\ Pa$$
$$F = \Delta p \cdot A = (416.000 - 103.000) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0{,}45\ \text{m}^2 = 141.000\ \text{N} = 1{,}41\ 10^5\ \text{N}$$

Principi de Pascal

$p = p_0 + \rho g h$ ⇒Si l'altura varia poc → la pressió és aproximadament constant.

Principi de Pascal:
La pressió aplicada a un líquid confinat es transmet sense reducció a tots els punts del líquid i a les parets del dipòsit que el conté.

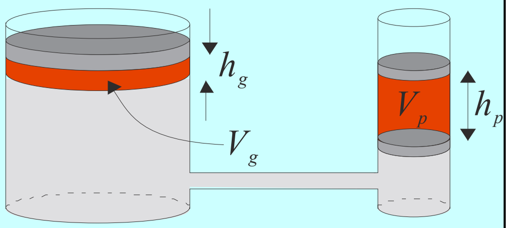
Exemple 4: Els radis dels èmbols gran i petit d'un elevador hidràulic són 16 cm i 4 cm, respectivament. *a)* Quina força cal exercir sobre l'èmbol petit per aixecar un cotxe col·locat sobre l'èmbol gran i que pesa 10 kN? *b)* Si l'èmbol petit baixa 12 cm, quant puja l'èmbol gran? *c)* Calculeu el treball que ha calgut fer per abaixar 12 cm l'èmbol petit. *d)* Calculeu el treball realitzat per l'èmbol gran sobre el cotxe.



a) $p_{\text{èmbol gran}} = \frac{10.000\ N}{\pi(0{,}16\ m)^2} = 124.339\ \text{Pa} = p_{\text{èmbol petit}}$

$$p_{\text{èmbol petit}} = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p_{\text{èmbol petit}} \cdot A = 124.339\ \text{Pa}\pi(0{,}04\ \text{m})^2 = 625\ \text{N}$$
$$\frac{10.000\ \text{N}}{625\ \text{N}} = 16, \frac{\pi(0{,}16\ \text{m})^2}{\pi(0{,}04\ \text{m})^2} = 4^2 = 16$$

b) $V_p = V_g \Rightarrow$
$$h_p \pi(0{,}04\ \text{m})^2 = \pi(0{,}16\ \text{m})^2 h_g$$
$$h_g = h_p \frac{\pi(0{,}04\ \text{m})^2}{\pi(0{,}16\ \text{m})^2} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$



c) $W = F \cdot \Delta s \cdot \cos 0$

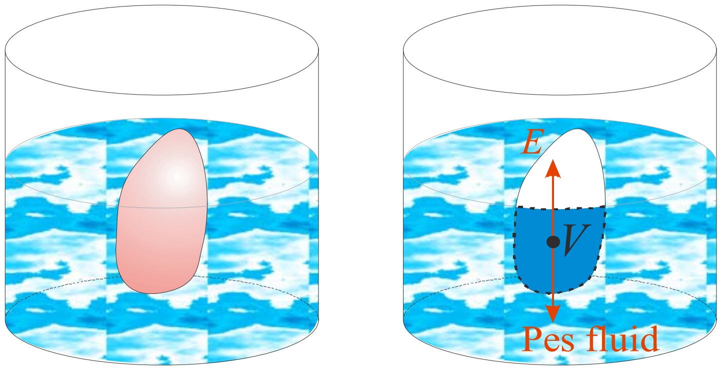
$$W_{\text{petit}} = 625\ \text{N} \cdot 0{,}12\ \text{m} = 75\ \text{J}$$
$$W_{\text{gran}} = 10.000\ \text{N} \cdot 7{,}5\ 10^{-3}\ \text{m} = 75\ \text{J}$$

Principi d'Arquímedes

La força que experimenta un cos submergit totalment o parcialment en un fluid s'anomena *força ascensional* o *empenyiment* $\vec{E}$, i és igual al pes del fluid desallotjat.

$$E = \rho g V$$

on ρ és la densitat del fluid i V és el volum de fluid desplaçat.



Demostració: Si traiem el sòlid i omplim amb el mateix fluid el volum V ocupat per la fracció de sòlid submergit, $\vec{E}$ és la mateixa atès que el fluid que envolta aquest volum V és el mateix. Per tant, E ha de ser igual al pes del fluid: $\rho g V$.

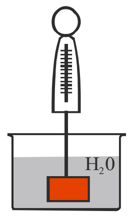
En el cas que la densitat del fluid sigui constant, el punt d'aplicació correspon al centre geomètric del volum.

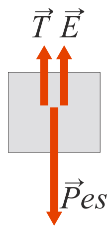
Història (s. III aC): Arquímedes volia determinar la densitat d'un material de forma irregular, en concret volia determinar si la corona del rei Hieró II estava feta d'or massís:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{\rho \cdot g \cdot V}{\rho_{H_2O} g \cdot V} = \frac{\text{Pes en aire}}{\text{Pes del líquid desplaçat}} = \frac{\text{Pes en aire}}{E}$$

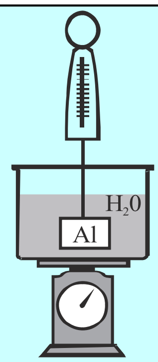
I l'empenyiment es pot calcular com la diferència del pes en aire i en aigua:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{\text{Pes}}{\text{Pes-}T} = \frac{\text{Pes en aire}}{\text{Pes en aire-Pes en aigua}}$$

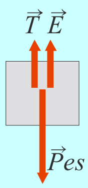




Exemple 5: Un recipient d'1 kg de massa conté 2 kg d'aigua destil·lada i reposa sobre una balança (vegeu la figura adjunta). Un bloc de 2 kg d'alumini (densitat específica: 2,70) està submergit dins l'aigua i penja d'un dinamòmetre. Determineu les lectures de la balança i del dinamòmetre.

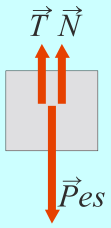


a) Dinamòmetre:



$$T + E = \text{Pes}$$
$$T + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot V = \rho_{\text{Al}} g \cdot V$$
$$T = (\rho_{\text{Al}} - \rho_{H_2O}) \cdot g \cdot V = (\bar{\rho}_{\text{Al}} - 1)\rho_{H_2O} g \cdot V$$

$$T = (2{,}7 - 1)1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7{,}41 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 12{,}34\ \text{N}$$
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{\bar{\rho} \cdot \rho_{H_2O}} = 7{,}41 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$$



b) Balança:

$$\text{Balança} = \frac{N}{g} = \frac{m_T g - T}{g} = m_T - \frac{T}{g} = 5\ \text{kg} - \frac{12{,}34\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 3{,}74\ \text{kg}$$

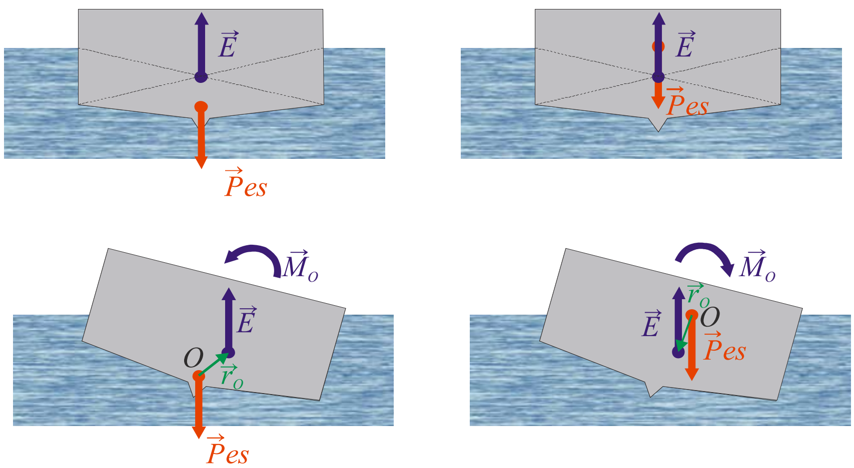
Flotació

$$\frac{\text{Pes}}{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot V}{\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \bar{\rho}$$

Noteu que en aigua si $\bar{\rho} > 1 \Rightarrow \text{Pes} > E$, és a dir, el sòlid s'enfonsa.
En canvi, si $\bar{\rho} < 1$, el sòlid flota, de manera que el pes del líquid desplaçat pel volum submergit és igual al pes del sòlid: $\text{Pes} = E \Rightarrow \rho \cdot g \cdot V = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot V_{\text{Submergit}} \Rightarrow V_{\text{Submergit}} = \bar{\rho} V$.

Per assolir l'equilibri també cal que la suma de moments sigui zero. Cal tenir present que el punt d'aplicació de la força exercida pel fluid és el centre geomètric del volum submergit i que el punt d'aplicació del pes és el centre de gravetat:

Equilibri estable — Equilibri inestable



És a dir, perquè el vaixell no bolqui cal que el centre de gravetat estigui situat al més avall possible.

Pressió atmosfèrica: experiència de Torricelli

La pressió atmosfèrica és la pressió deguda a l'aire que ens envolta. En concret és el pes per unitat d'àrea de la columna d'aire que tenim a sobre nostre.

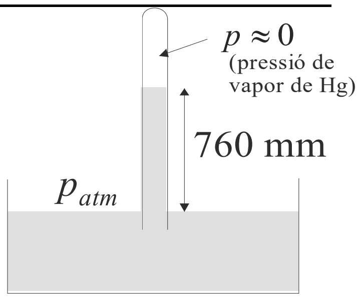
El 1643 Evangelista Torricelli va idear un mètode per mesurar la pressió atmosfèrica i va construir el primer *baròmetre* de mercuri.

Baròmetre: aparell per mesurar la pressió.

Torricelli va utilitzar un recipient de vidre llarg tancat per un dels extrems:

$$p_{atm} = 0 + \rho_{Hg} g h$$

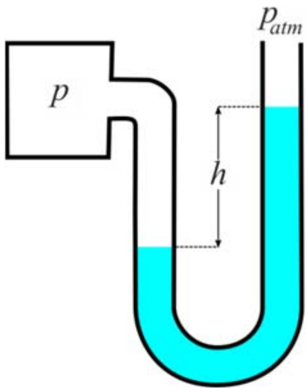
ρ_{Hg}=13,595 kg/m^3 i h = 760 mm



Valor de la pressió atmosfèrica:

$$p_{\text{atm}} = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mm de Hg} = 760 \text{ Torr}$$
$$= 13.595 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}76 \text{ m}$$
$$= 101.325 \text{ Pa}$$

Manòmetre



Manòmetre: aparell que mesura la pressió manomètrica.

La pressió manomètrica és la diferència de pressió respecte de la pressió atmosfèrica:

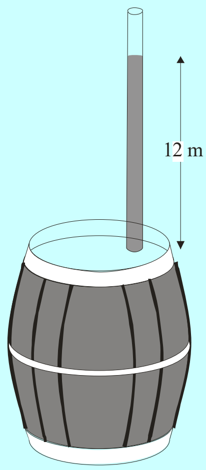
$$\bar{p} = p - p_{\text{atm}}$$

I la pressió total és

$$p = p_{atm} + \rho g h$$

Llavors: $\bar{p} = p - p_{atm} = \rho g h$

<u>Exemple 6</u>: Cap al 1646, Pascal va dur a terme l'experiment següent: va connectar un tub molt llarg, de secció transversal 3·10^{-5} m^2, a un barril de vi que tenia una tapa d'àrea 0,12 m^2. Primer es va emplenar el barril amb aigua i a continuació es va afegir aigua dins del tub fins que el barril va esclatar. El trencament del barril es va esdevenir quan l'altura de la columna d'aigua va assolir els 12 m. En aquestes condicions: *a)* quin és el pes de l'aigua continguda dins el tub? *b)* quina és la pressió manomètrica que exerceix l'aigua al damunt de la tapa del barril? *c)* quina és la força neta exercida sobre la tapa?



a) Pes $= \rho g V = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 12 \cdot 3\ 10^{-4} \text{m}^3 = 3{,}53 \text{ N}$

b) $\bar{p} = p - p_{\text{atm}} = p_{\text{atm}} + \rho g h - p_{\text{atm}} = 117.700 \text{ Pa} = 117{,}7 \text{ kPa}$

c) $F = \Delta p \cdot A = \bar{p} \cdot A = 117.700 \text{ Pa} \cdot 0{,}12 \text{ m}^2 = 14.126 \text{ N} = 14{,}1 \text{ kN}$

La pressió absoluta sempre és positiva, $p \geq 0$ (el fluid sempre exerceix una força contra la superfície del sòlid).

En canvi, $\bar{p} \leq 0$ *o* $\bar{p} \geq 0$. Per exemple, si fem el buit a l'interior d'un recipient, $\bar{p} \leq 0$ (la pressió a l'interior és inferior a l'atmosfèrica); en canvi, en un pneumàtic inflat, $\bar{p} \geq 0$ (la pressió a l'interior és superior a l'atmosfèrica).

Qüestions del tema 10

Densitat i pressió

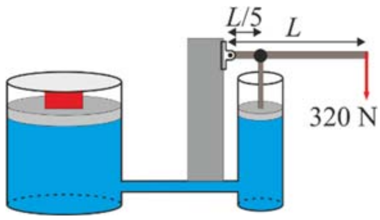
1. La densitat humana és d'aproximadament 0,930 g/cm^3. Quin és el volum d'una persona de 75 kg de massa?

Sol.: $8{,}06 \cdot 10^{-2}\ m^3$

2. Una ampolla té una massa de 25,05 g. Quan l'ampolla està plena d'aigua la seva massa és 100,23 g. Quan l'ampolla s'omple amb un altre líquid, la massa és 98,45 g. Quina és la densitat relativa d'aquest líquid?

Sol.: 0,9763

3. Una premsa hidràulica per compactar mostres en pols té un cilindre gran de 10,0 cm de diàmetre, i un cilindre petit de 2,0 cm de diàmetre. Una palanca unida al petit cilindre permet premsar les mostres col·locades en el cilindre gran. Quina és la força aplicada sobre la mostra, si a l'extrem de la palanca apliquen 320 N?



Sol.: 40.000 N

4. L'àrea del pistó del pedal de frens és de 6,5 cm^2, l'àrea del pistó de la sabata del tambor de la roda és de 19,4 cm^2. Quina força apliquem a les rodes quan pressionem el pedal de frens amb una força de 100 N?

Sol.: 300 N

5. Al 1654 Otto von Guericke va realitzar la següent experiència. Va ajuntar dues semiesferes de coure formant una esfera buida (no hi ha cap element que mantingui les dues semiesferes unides). Després, amb una bomba de buit va extreure l'aire de l'interior de l'esfera. A cada semiesfera s'hi va lligar un tir de cavalls. Els dos tirs de cavalls (en total 16 cavalls) no varen aconseguir separar les dues semiesferes.
a) quina força manté unides les dues semiesferes?
b) quina força cal fer per separar les dues semiesferes si el seu radi és de 50 cm?

Sol.: 159.160 N

6. La pressió manomètrica en cadascun dels quatre pneumàtics d'un cotxe és de 240 kPa. Si cada pneumàtic té una petjada (àrea de contacte amb el terra) de 190 cm^2, quina és la massa del cotxe?

Sol.: 1.860 kg

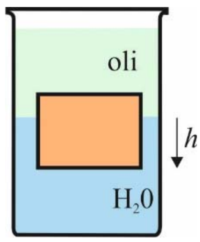
7. A 8.000 m d'altura la pressió atmosfèrica és 30 kPa. Si la pressió a l'interior d'un avió es manté constant a 101 kPa, quina és la força total sobre el fusellatge de l'avió? Dades: superfície del fusellatge de l'avió, 230 m^2.

Sol.: $1{,}633 \cdot 10^7$ N

Principi d'Arquímedes

8. Un rai quadrat de 3 m de costat i 11 cm de gruix està construït amb una fusta de densitat específica 0,6. Quantes persones de 70 kg poden estar-se dempeus sobre el rai sense mullar-se els peus? Suposeu l'aigua en calma.

Sol.: 5 persones

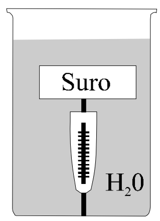


9. Un recipient està omplert fins a mitja alçada amb aigua i la resta del dipòsit s'omple amb oli, ρ_{oli}=930 kg/m^3. S'introdueix un bloc de fusta de 0,48 kg de massa, base 10×10 cm^2 i altura 5 cm. A quina profunditat h es troba la base del bloc respecte el nivell d'aigua?

Sol.: 2,14 cm

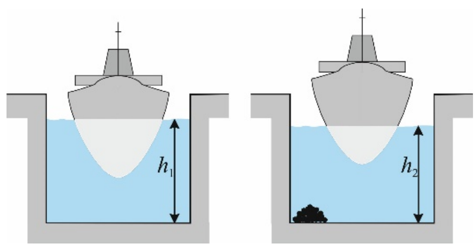
10. Un objecte té una força ascensional nul·la quan la seva densitat s'iguala a la del líquid on està submergit; en conseqüència, ni sura ni s'enfonsa. Si la densitat mitjana del cos humà és de 0,96 kg/l, quina massa de plom s'hauria d'afegir a un nedador de 85 kg que es capbussa en aigua dolça perquè la seva força ascensional fos nul·la? Densitat del plom: 11,3 g/cm^3.

Sol.: 3,88 kg



11. Un tros de suro pesa 0,285 N a l'aire. Quan està submergit dins l'aigua, la lectura amb un dinamòmetre (vegeu la figura) és de 0,885 N. Calculeu la densitat del suro.

Sol.: 244 kg/m^3



12. Un vaixell de càrrega que transporta un mineral està flotant a l'interior d'una resclosa. Les portes de la resclosa estan tancades, de manera que no hi pot entrar o sortir aigua. Un accident quan s'està descarregant el mineral provoca que tot el mineral caigui al fons de la resclosa. Quin és el canvi de nivell de l'aigua, h_1-h_2, a la resclosa? La densitat del mineral és $7{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3, hi ha $4 \cdot 10^6$ kg de mineral, i l'àrea de la resclosa és de $5 \cdot 10^3$ m^2.

Sol.: 0,699 m.

13. Repetiu el problema anterior però suposant que el carregament no és de mineral sinó d'una fusta de densitat inferior a la de l'aigua.

Sol.: 0 m

14. Es disposa de dos objectes idèntics en forma i volum, però un es d'or i l'altre és de plom pintat amb pintura d'or. Per tal de distingir-los es pesen en aire i submergits en aigua. *a)* Quin dels dos objectes és d'or? *b)* Quina és la densitat del plom? Dades: densitat de l'aigua 1000 kg/m^3, densitat de l'or 19300 kg/m^3.

	Pes en aire	Pes en aigua
Objecte 1	1,352 N	1,282 N
Objecte 2	0,792 N	0,722 N

Sol.: a) és d'or; b) 11,3·10^3 kg/m^3

15. Es pesa a l'aire un objecte de vidre i s'obté que té una massa de 0,84 kg. Posteriorment es torna a pesar submergint-lo completament en aigua i trementina, i s'obtenen els valors de 0,45 kg i 0,56 kg, respectivament. Si la densitat de l'aigua és 1.000 kg/m^3, quines són les densitats de la trementina i del vidre?

Sol.: 718 kg/m^3 i 2.154 kg/m^3

16. Es pesa a l'aire un bloc de niló i s'obté que té una massa de 0,4 kg. Posteriorment es torna a pesar submergint-lo completament en aigua i s'obté el valor de 52,2 g. Si la densitat de l'aigua és 1.000 kg/m^3, quina és la densitat del niló?

Sol.: 1150 kg/m^3.

17. La massa d'un picnòmetre és de 40,36 g. Un cop omplert d'aigua destil·lada (densitat 1.000 kg/m^3) té una massa de 301,23 g. Quan el picnòmetre s'omple d'oli d'oliva la seva massa és de 262,17 g. Quina és la densitat de l'oli d'oliva?

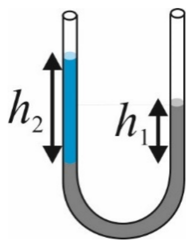
Sol.: 850 kg/m^3

18. Si sabem que quan un iceberg sura en l'aigua el 92 % del seu volum està submergit, quina és la mesura del pes d'un bloc de gel de 2 kg de massa submergit totalment en metanol? Dades: densitat de l'aigua líquida, 1000 kg/m^3, i densitat del metanol, 789 kg/m^3.

Sol.: 2,791 N

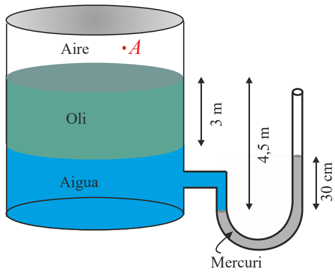
Equació fonamental de l'estàtica de fluids

19. Disposem d'un tub en forma de U, de secció uniforme i que conté mercuri. En una de les branques hi aboquem alcohol, fins a aconseguir que el mercuri de l'altra branca pugi 1,8 cm. Quina és l'altura h de la columna d'alcohol? Densitat del mercuri: 13,6 g/cm^3, i densitat de l'alcohol: 0,79 g/cm^3.



Sol.: h = 31,0 cm.

20. Un dipòsit tancat hermèticament conté aire, oli i aigua com s'indica a la figura. A la part inferior del dipòsit s'hi connecta un manòmetre de mercuri, *a)* calculeu la pressió al punt *A*, *b)* calculeu la pressió manomètrica al fons del dipòsit. Dades: densitat de l'oli 0,80 g/cm^3 i densitat del mercuri 13,6 g/cm^3.



Sol.: *a)* 103 kPa; *b)* 40 kPa

21. *a)* Quina força exerceix l'aigua sobre el fons d'una piscina de 30 m per 10 m de superfície si està omplerta d'aigua fins una altura de 1,8 m. *b)* Quina és la pressió al fons de la piscina? *d)* Quina és la pressió contra el costat de la piscina a prop del fons?

Sol.: *a)* 5,30·10^6 N; *b)* 119 kPa; *c)* 119 kPa

22. Quina és l'altura mínima a la qual hem de col·locar una bossa de sèrum fisiològic per tal que el sèrum entri dins el flux sanguini? Dades: la pressió del sèrum a la bossa és la pressió atmosfèrica, la pressió manomètrica a la vena és de 2,2 kPa i la densitat del sèrum és de 1,005 g/cm^3.

Sol.: 22 cm

23. Un submarí utilitza l'aire a pressió i l'aigua per sortir a la superfície o per enfonsar-se. Si la massa del submarí és de 80 tones i el seu volum 200 m^3, quin volum mínim d'aigua haurà de fer entrar el submarí per enfonsar-se? Nota: la densitat de l'aigua de mar és 1025 kg/m^3. Podeu negligir el pes de l'aire (la densitat de l'aire és aproximadament 1000 vegades més petita que la de l'aigua).

Sol.: 122 m^3

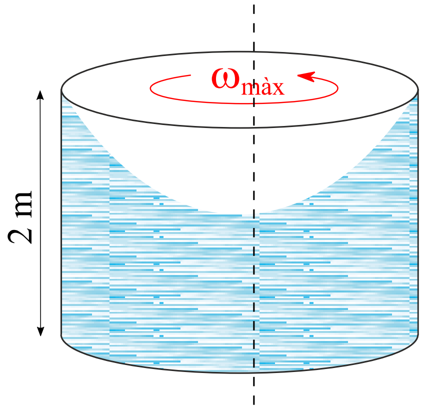
24. Una capsula emprada en recerca submarina és esfèrica (diàmetre exterior 5,20 m). La massa total de la capsula incloent-hi el personal i l'equipament és 74.400 kg. La capsula està ancorada al fons del mar mitjançant un cable d'acer. Quina és la tensió del cable? Densitat de l'aigua de mar: 1025 kg/m^3.

Sol.: 10 kN.

25. Es pretén reflotar un vaixell que està completament enfonsat sobre un fons rugós a 16 m de profunditat utilitzant el mètode d'injecció d'aire comprimit. Per als càlculs, aproximarem el vaixell a un paral·lelepípede de 10×7×40 m. Aquest reposa sobre la cara de 7×40 m i té una massa de 863 tones. La injecció d'aire es fa mitjançant una mànega flexible situada a la part superior del vaixell. El compressor, situat a la superfície del mar, aspira un volum de 10 m^3 d'aire per minut a pressió atmosfèrica i el comprimeix a la pressió adient per ser injectat a l'interior del vaixell. El compressor deixa de funcionar quan el vaixell se separa del fons. *a)* Quant temps ha estat en marxa el compressor? *b)* A quina profunditat per sota del nivell del mar es trobarà la cara inferior del vaixell quan suri? Pressió atmosfèrica: 1,033 kp/cm^2, densitat relativa de l'aigua de mar: 1,026.

Sol.: *a)* t = 2 h 39 min 5 s; *b)* 7,322 m

26. Donat un recipient cilíndric de 0,5 m de radi en posició vertical i que té aigua fins a una altura de 1,5 m. Si l'altura total del dipòsit és de 2 m, determineu la velocitat angular màxima, ω_{max}, a la que podem fer girar el recipient respecte el seu eix de simetria de manera que l'aigua no vessi.



Sol.: 8,86 rad/s.

11. Dinàmica de fluids ideals

Objectius

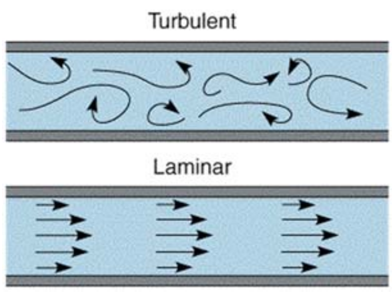
Concepte de fluid ideal
Conceptes de cabal i cabal màssic
Conceptes de flux estacionari, uniforme i no uniforme
Quin és el significat de l'equació de continuïtat?
Descriure l'equació de Bernoulli
A quina velocitat surt el líquid d'un dipòsit gran per un petit orifici?
Descriure l'efecte Venturi
Descriure el venturímetre i la sonda de Prandtl
Com funciona un polvoritzador?
Descriure el vol dels avions i dels ocells

El moviment d'un fluid pot ser extremament complex, de manera que pot ser molt difícil o impossible obtenir expressions i resultats analítics (relacions matemàtiques). Sovint cal recórrer a simulacions numèriques per elements finits per tal d'obtenir prediccions acurades. Per aquesta raó, ens limitarem a casos senzills però que ens permetran descriure un gran ventall d'aplicacions. D'altra banda, també són el punt de partida per abordar casos més complexos.

Equació de continuïtat, flux estacionari

En aquest tema suposarem que el fluid flueix sense dissipar energia, sense frec. Aquests fluids s'anomenen *no viscosos* o *ideals*. També suposarem que el fluid és *incompressible*, és a dir, que el volum, i per tant la densitat, es mantenen constants encara que apliquem tensions al fluid. Aquesta és una bona aproximació per a la majoria de líquids. A més, com veurem més endavant, els resultats que obtindrem també es podran aplicar als gasos.

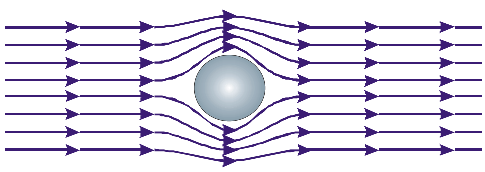
Flux estacionari



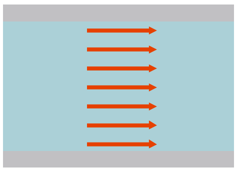
El moviment d'un fluid pot ser molt complex; per exemple, tenim el flux turbulent, en què es poden produir canvis sobtats de la velocitat del fluid.

Si la velocitat del fluid en un punt es manté constant, o dit d'una altra manera, si la velocitat només depèn de la posició, el *flux* és *estacionari* o *permanent*.

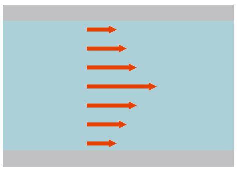
Podem representar el moviment del fluid (flux) a través de les línies de corrent: línies tangents a la velocitat del fluid. En cada punt, la velocitat del fluid és tangent a la línia de corrent que passa per aquest punt.



El flux estacionari pot ser uniforme o no uniforme:



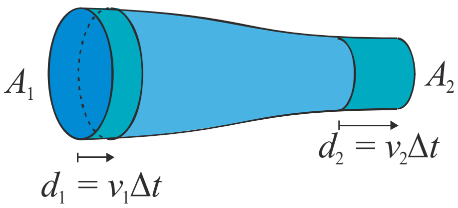
Perfil de velocitats uniforme: La velocitat és la mateixa a tota la secció. Aquesta situació es dona quan no hi ha viscositat.



Perfil de velocitats no uniforme: La velocitat canvia al llarg de la secció. Està associat a la presència de frec.

Cal tenir present que, fins i tot en el cas de flux estacionari i uniforme, la velocitat pot canviar d'un punt a l'altre.

Equació de continuïtat



Suposem un fluid incompressible i flux uniforme: $\Delta V_1 = \Delta V_2$ (el volum que surt és igual al volum que entra)

Equació de continuïtat:

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Si definim el cabal com el volum de fluid que passa per una secció *A* per unitat de temps:

$Q \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A v \Delta t}{\Delta t} = Av$, unitat: $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$

És a dir, el cabal és la velocitat a la qual passa el volum de líquid.

Si expressem l'equació de continuïtat en funció del cabal obtenim:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Leftrightarrow Q_1 = Q_2$$

És a dir, *si el fluid és incompressible llavors el cabal es manté constant.*

Si el fluid és compressible, pot ser que els volums d'entrada i sortida siguin diferents a causa del canvi de volum del fluid. Aquest és en principi el cas d'un gas. Per exemple, per l'efecte de la compressió pot ser que el volum d'entrada sigui superior al de sortida. Ara bé, quan s'assoleix el règim estacionari, el gas ja no es comprimeix/dilata més. Per tant, si el flux és estacionari, l'equació de continuïtat és vàlida amb independència que tinguem un líquid o un gas (que el fluid sigui incompressible o compressible).

Quan el flux és no uniforme, la velocitat a la secció *A* no és constant. En aquest cas, el cabal s'expressa com:

$Q \equiv A\bar{v}, \bar{v} \equiv \frac{1}{A}\int_A v dA$, $\bar{v}$ és la velocitat mitjana a la secció *A*

i l'equació de continuïtat continua sent vàlida.

Si multipliquem el cabal per la densitat ρ tenim la transferència de massa, és a dir, el cabal màssic, Q_m:

$$Q_m = \rho Q = \frac{dm}{dt}$$

És a dir, el cabal màssic és la massa que passa per unitat de volum o la velocitat a la qual circula la massa del fluid.

Si multipliquem els dos costats de l'equació de continuïtat per ρ tenim:

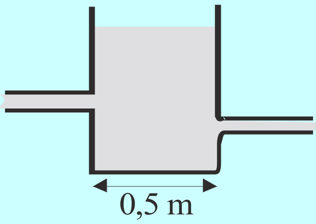
$$\rho Q_1 = \rho Q_2 \Leftrightarrow Q_{m,1} = Q_{m,2}$$

És a dir, que tota la massa que entra per A_1 surt per A_2. L'equació de continuïtat simplement indica que el líquid no desapareix.

D'altra banda, a partir del cabal podem calcular la quantitat de fluid que passa per un tub en un interval de temps Δt:

$$m = \rho \cdot Q \cdot \Delta t$$

<u>Exemple 1</u>: Al dipòsit de la figura l'aigua entra a una velocitat de 0,5 m/s a través d'una canonada de 0,1 m^2 de secció i desaigua a través d'una canonada amb un cabal constant de 0,2 m^3/s. El dipòsit és cilíndric i el diàmetre de la base és de 0,5 m. Determineu la velocitat a la qual varia el nivell del dipòsit.



cabal que entra = cabal que surt

$$0{,}1\ \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}5\ \mathrm{m/s} = Q + 0{,}2\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} \Rightarrow Q = -0{,}15\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

El cabal Q és negatiu, és a dir, el nivell baixa:

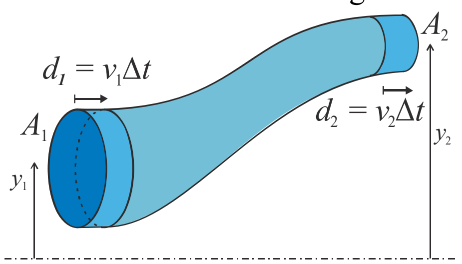
$$Q = A\,v \Rightarrow v = \frac{Q}{A} = \frac{-0{,}15\ m^3/\mathrm{s}}{\pi(0{,}25\ m)^2} = -0{,}764\ \mathrm{m/s}$$

Equació de Bernoulli: efecte Venturi

Suposem:
- Fluid incompressible → cabal constant
- Fluid ideal → conservació de l'energia
- Flux estacionari → velocitat independent del temps

(als gasos equival a un comportament incompressible)

Calculem la variació d'energia en un interval de temps Δt:

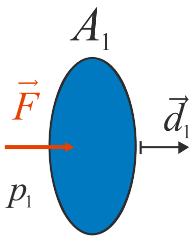


$$W = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta U_g$$
$$= E_{c,2} - E_{c,1} + U_{g,2} - U_{g,1}$$

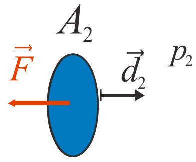
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\rho Q\Delta t v_2^2 - \frac{1}{2}\rho Q\Delta t v_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\rho Q\Delta t(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta U_g = m_2 g y_2 - m_1 g y_1 = \rho Q\Delta t g y_2 - \rho Q\Delta t g y_2 = \rho Q\Delta t g(y_2 - y_1)$$
$$\Delta U_g = m_2 g y_2 - m_1 g y_1 = \rho Q\Delta t g(y_2 - y_1)$$

El treball de les forces externes es manifesta a partir de la pressió que exerceix l'exterior sobre el fluid:



$$W_1 = \int \vec{F} d\vec{s}_1 = \int p_1 A_1 cos0 \, d\vec{s}_1 = p_1 A_1 d_1$$
$$= p_1 A_1 v_1 \Delta t = Q\Delta t p_1$$



$$W_2 = \int \vec{F} d\vec{s}_2 = \int p_2 A_2 \cos\pi \, d\vec{s}_2 = -p_2 A_2 d_2 = -Q\Delta t p_2$$
$$W_{\text{Tot}} = W_1 + W_2 = Q\Delta t(p_1 - p_2)$$

Finalment, el balanç total és:

$$W = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta U_g = E_{c,2} - E_{c,1} + U_{g,2} - U_{g,1}$$
$$Q\Delta t(p_1 - p_2) = Q\Delta t(\rho g y_2 - \rho g y_1) + Q\Delta t\left(\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2\right)$$

Balanç energètic:

$$Q\Delta t\left(p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2\right) = Q\Delta t\left(p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2\right)$$

L'equació de Bernoulli s'obté de dividir el balanç energètic pel terme $Q\Delta t$:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

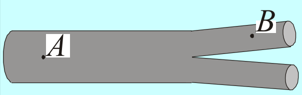
O el que és equivalent:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}$$

Les unitats dels termes de l'equació de Bernoulli són $\frac{W}{Q\Delta t} = \frac{\text{Pot}}{Q}$, és a dir, els termes de Bernoulli corresponen a una potència per unitat de cabal. Per tant, l'equació de Bernoulli és el balanç de la potència per unitat de cabal.

Les unitats són: $\frac{\text{N·m}}{\text{m}^3/\text{s·s}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ =Pa, és a dir, unitats de pressió.

<u>Exemple 2</u>:



Al punt *A* de la figura la pressió manomètrica és de 75 kPa, i la velocitat de l'aigua que flueix per la canonada cilíndrica, de 50 mm de diàmetre, és d'1,7 m/s. La canonada es desdobla en dues de 25 mm de diàmetre, tot mantenint l'altura.

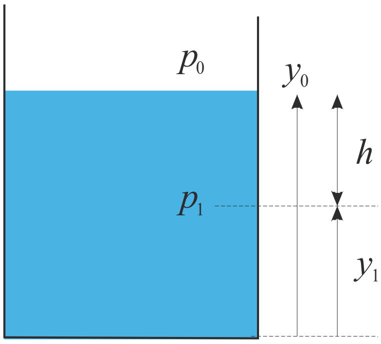
a) Quins són els cabals als punts *A* i *B*? *b)* Quina és la pressió manomètrica al punt *B*? Suposeu un flux ideal.

a) $Q_A = A_A v_A = \pi(25 \cdot 10^{-3}\ m^2)^2 \cdot 1{,}7\ \text{m/s} = 3{,}34 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$

$$Q_A = 2Q_B \Rightarrow Q_B = \tfrac{1}{2}Q_A = 1{,}67 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$
$$v_B = \frac{Q_B}{A_B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-3}\ m^3/s}{\pi(12{,}5 \cdot 10^{-3}\ m)^2} = 3{,}4\ \text{m/s}$$

$$b)\ p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$
$$p_A - p_{Atm} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B - p_{Atm} + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$
$$\bar{p}_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \bar{p}_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow \bar{p}_B = \bar{p}_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$
$$\bar{p}_B = 75.000\ \text{Pa} + \frac{1}{2}1.000\frac{\text{kg}}{m^3}(1{,}7^2 - 3{,}4^2)\frac{m^2}{s^2} = (75.000 - 4.335)\ \text{Pa} = 70.665\ \text{Pa}$$

Equació fonamental de l'estàtica de fluids



L'equació fonamental de l'estàtica de fluids es pot deduir de l'equació de Bernoulli:

$h = y_0 - y_1$
$v_0 = v_1 = 0$ (estàtica de fluids)

Bernoulli:

$$p_0 + \rho g y_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$
$$p_0 + \rho g y_0 = p_1 + \rho g y_1 \Rightarrow p_1 = p_0 + \rho g(y_0 - y_1) \Rightarrow$$

obtenim la equació fonamental de l'estàtica de fluids: $p_1 = p_0 + \rho g h$

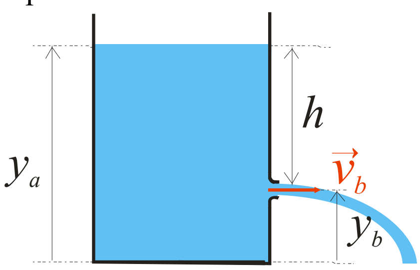
A partir d'aquest resultat s'han introduït els conceptes de pressió estàtica i dinàmica:

$$\underbrace{p + \rho g y}_{\text{Pressió estàtica}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho v^2}_{\text{Pressió dinàmica}}$$

Tots dos termes tenen unitats de pressió, però l'única pressió real de l'equació de Bernoulli és p, els termes *pressió estàtica* i *dinàmica* no són pressions reals, simplement és una qüestió de nomenclatura.

Teorema de Torricelli

A partir de l'equació de Bernoulli podem determinar la velocitat a què surt un fluid d'un dipòsit.



$h = y_a - y_b$
$p_a = p_b = p_{\text{atm}}$

Si apliquem continuïtat:

$$A_a v_a = A_b v_b \Rightarrow v_a = v_b \frac{A_b}{A_a}$$

Com que $A_a >> A_b \Rightarrow v_a << v_b \Rightarrow v_a \approx 0$ comparat amb v_b.

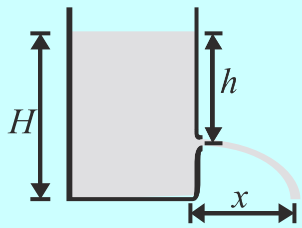
Bernoulli:

$$p_a + \rho g y_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b + \rho g y_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

$$\rho g y_a + 0 = \rho g y_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_b^2 = \rho g(y_a - y_b) \Rightarrow v_b^2 = 2gh$$

Teorema de Torricelli: $v_b = \sqrt{2gh}$ (velocitat de caiguda lliure)

Exemple 3: Al dipòsit de la figura: *a)* Trobeu la distància *x* a la qual l'aigua arriba a terra en funció de *h* i *H*. *b)* Demostreu que si col·loquem l'orifici de sortida a dues alçàries equidistants del punt *H*/2, la distància *x* és la mateixa. *c)* Demostreu que *x* és màxim quan *h* = *H*/2. Quin és el valor d'aquesta distància *x* màxima?



a) Teorema de Torricelli: $v_b = \sqrt{2gh}$

$$\left.\begin{aligned} y &= (H-h) - \frac{1}{2}gt^2 \\ x &= \left(\sqrt{2gh}\right)t \end{aligned}\right\} y = 0 \Rightarrow (H-h) - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$x = \left(\sqrt{2gh}\right)\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$$

b)

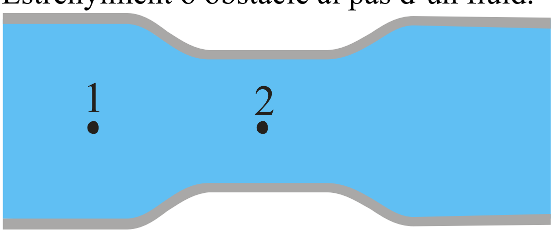
$$\left.\begin{aligned} h_1 &= d + H/2 \\ h_2 &= d - H/2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{(d+H/2)(H-d-H/2)} = 2\sqrt{(H/2+d)(H/2-d)} \\ x_2 &= 2\sqrt{(H/2-d)(H-H/2+d)} = 2\sqrt{(H/2-d)(H/2+d)} \end{aligned}$$

c) $\frac{dx}{dh} = \frac{d(2\sqrt{h(H-h)})}{dh} = \frac{1}{\sqrt{h(H-h)}}(-h+H-h) = \frac{H-2h}{\sqrt{h(H-h)}}$

Condició de màxim: $\frac{dx}{dh} = 0 \Rightarrow H - 2h = 0 \Rightarrow h = \frac{H}{2}$

Efecte Venturi

Estrenyiment o obstacle al pas d'un fluid.



$y_1 - y_2$

Continuïtat:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2\frac{A_2}{A_1}$$

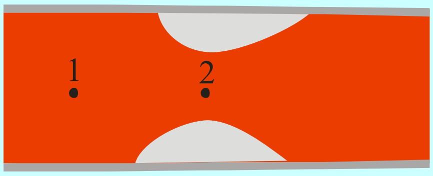
Com que $A_1 >> A_2 \Rightarrow v_1 << v_2$

Apliquem Bernoulli entre els punts (1) i (2):

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Finalment, com que $v_1 << v_2 \Rightarrow p_1 >> p_2$, és a dir, hi ha una baixada de pressió al punt on es produeix un estrenyiment.

<u>Exemple 4</u>: Una artèria o una vena es poden obstruir parcialment quan alguns materials redueixen el seu radi en un petit tram de la seva longitud. *a)* Varia la velocitat del flux sanguini a la regió obstruïda? *b)* Varia la pressió a la regió obstruïda? *c)* Quin efecte pot tenir el canvi de pressió si tenim en compte que venes i artèries són tubs flexibles?

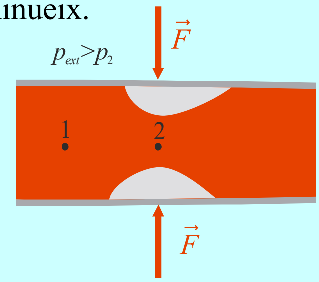


a) Continuïtat: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$

Com que $A_1 >> A_2 \Rightarrow v_2 >> v_1$,
la velocitat augmenta.

b) $p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$
Com que $v_1 << v_2 \Rightarrow p_1 >> p_2$, la pressió disminueix.

c) Si la pressió a l'estrenyiment és inferior a la pressió exterior, el resultat és una força neta que tendeix a estrangular el vas sanguini.

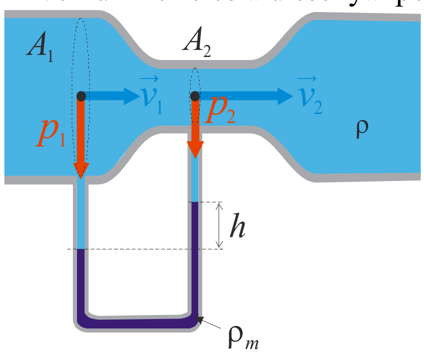


Sondes

Aparells de mesura de la velocitat d'un fluid.

Venturímetre

El venturímetre està dissenyat per mesurar la velocitat dels líquids.



Estàtica de fluids (mesura de la pressió):

$$p_1 + \rho g h = p_2 + \rho_m g h$$
$$p_1 = p_2 + gh(\rho_m - \rho)$$

Continuïtat:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Apliquem Bernoulli entre els punts (1) i (2):

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$p_2 + gh(\rho_m - \rho) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow gh(\rho_m - \rho) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$
$$gh\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^2 - v_1^2\right] \Rightarrow gh\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] v_1^2$$
$$v_1 = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) \Big/ \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}$$

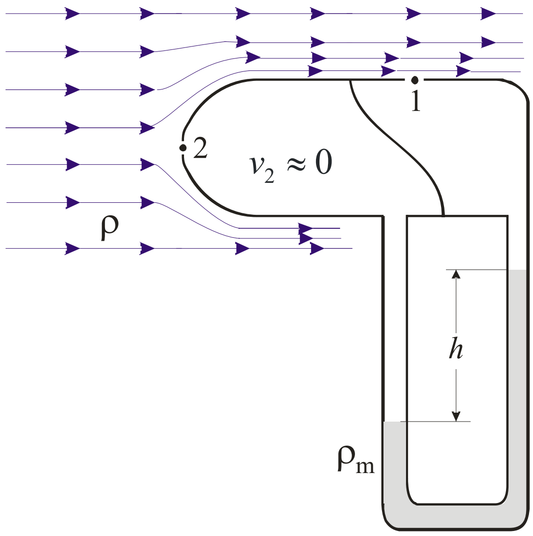
$$v_1 = \mathrm{ct} \cdot \sqrt{h},\ \mathrm{ct} = \sqrt{2g\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right) \Big/ \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}$$

És a dir, la velocitat del fluid és proporcional a l'altura de la columna del líquid manomètric. Per tant, mesurant l'altura h podem determinar la velocitat.

La constant depèn de les característiques geomètriques de la sonda. En general, no es calcula aquesta constant, sinó que es fa un calibratge: es fan passar per la sonda cabals coneguts, de manera que podem conèixer v_1 i h. A partir dels valors de v_1 i h determinem la constant *ct*. En general, el calibratge es fa a la mateixa fàbrica que construeix la sonda.

Sonda de Prandtl

La sonda de Prandtl està dissenyada per mesurar la velocitat dels gasos.



El punt 2 és un punt d'estancament: $v_2 \approx 0$
$y_2 \approx y_1$

Estàtica de fluids: $p_2 = p_1 + \rho_m g h$

Apliquem Bernoulli entre els punts (1) i (2):

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$

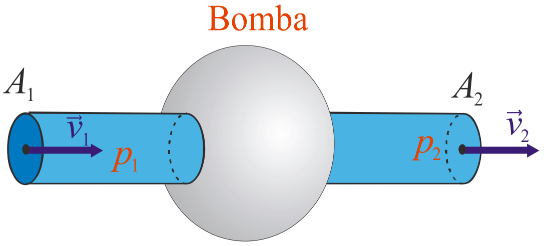
Pressió estàtica: p_1, pressió dinàmica: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 - p_1$

$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2$ i $p_2 = p_1 + \rho_m \mathrm{gh} \Rightarrow \rho_m \mathrm{gh} = \frac{1}{2}\rho v_1^2$

I finalment, $v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_m g h}{\rho}}$.

Per tant, a partir de mesurar la pressió manomètrica al tub $\rho_m g h$ i coneguda la densitat del gas, podem determinar la velocitat del mateix. Aquest tipus de sondes s'utilitza molt en aeronàutica.

Bombes



Continuïtat:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \ i \ A_1 = A_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_2 = v_1$$

No hi ha canvi en l'energia cinètica.

$$y_1 = y_2$$

No hi ha canvi en l'energia potencial.

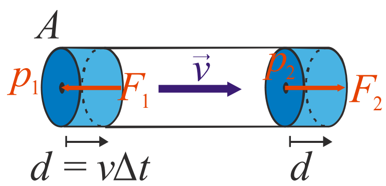
El treball que desenvolupa la bomba es tradueix en un augment de la pressió:

$$\Delta p = p_2 - p_1 > 0$$

Segons la tercera llei de Newton, la força que fa la bomba és de magnitud igual i sentit oposat a la que fa el líquid. En un interval Δt:

$$W_1 = \int \vec{F}_1 d\vec{s} = \int p_1 A \sin\pi \, d\vec{s} = -p_1 A d = -p_1 A v \Delta t$$

$$W_2 = \int \vec{F}_2 d\vec{s} = \int p_2 A \cos 0 \, d\vec{s} = p_2 \mathrm{A} \mathrm{d} = p_2 \mathrm{A} \mathrm{v} \Delta t$$



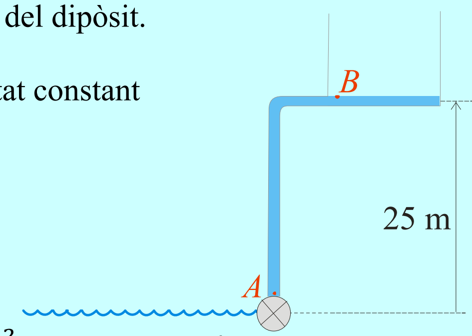
$$W_{Tot} = W_1 + W_2 = A v \Delta t (p_2 - p_1) = Q \Delta t \Delta p$$

I si calculem la potència:

$$\mathrm{Pot} = \frac{W}{\Delta t} = Q \Delta p \Rightarrow \Delta p = \frac{\mathrm{Pot}}{Q}$$

És a dir, que la diferència de pressió creada per la bomba és el quocient entre la potència desenvolupada i el cabal que fem passar.

<u>Exemple 5</u>: Volem omplir un dipòsit de 3.000 l de capacitat bombant aigua des d'un riu que està 25 m per sota del nivell del dipòsit. Situem una bomba al nivell del riu, i volem omplir el dipòsit en 3 h utilitzant una canonada de 5 cm de diàmetre. *a)* Quina pressió manomètrica ha de subministrar la bomba? *b)* Quina potència subministra aquesta bomba? *c)* Demostreu que no és possible omplir el dipòsit, amb aquesta bomba ni amb cap altra, si se situa al costat del dipòsit.



a) Continuïtat: secció constant → velocitat constant

b)

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{3 \text{ m}^3}{10.800 \ s} = 2{,}78 \cdot 10^{-4} \ \text{m}^3/\text{s}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{2{,}78 \cdot 10^{-4} \ \text{m}^3/\text{s}}{\pi (2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} = 0{,}14 \text{ m/s}$$

$$p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow p_A = p_{atm} + \rho g y_B$$

$$p_A - p_{atm} = \rho g y_B = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 25 \text{ m} = 245.000 \text{ Pa}$$

b) $\mathrm{Pot} = Q \Delta p = 2{,}78 \cdot 10^{-4} m^3/\text{s} \cdot 245.000 \text{ Pa} = 68 \text{ W}$

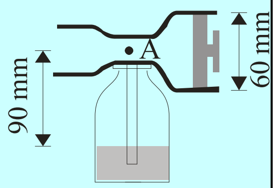
c) $p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow p_{atm} = p_B + \rho g y_B$

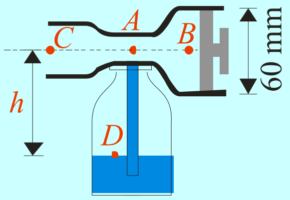
$p_B = p_{atm} - \rho g y_B = 101.300 \text{ Pa} - 245.000 \text{ Pa} = -143.700 \text{ Pa} < 0.$

No!!!!no són estables les pressions negatives.

Aplicacions: polvorització, vol dels avions i dels ocells

Exemple 6: El polvoritzador de la figura té un èmbol de 60 mm de diàmetre. El nivell d'insecticida està 90 mm per sota del tub d'entrada *A*, amb un diàmetre de 2 mm. Calculeu la velocitat mínima que cal obtenir tot prement l'èmbol perquè l'aire que surti per l'altre extrem contingui insecticida. Suposeu que l'insecticida té la densitat de l'aigua i que el flux d'aire és incompressible i no turbulent.





Estàtica de fluids:

$$\left.\begin{array}{r} p_D = p_{atm} \\ p_D = p_A + \rho_{aigua} g h \end{array}\right\} p_A = p_{atm} - \rho_{aigua} g h$$

Continuïtat:

$$A_A v_A = A_B v_B = A_C v_C \Rightarrow v_B = v_A \frac{A_A}{A_B} \text{ i } v_C = v_A \frac{A_A}{A_C}$$

$$A_B, A_C >> A_A \Rightarrow v_B, v_C << v_A$$

Bernoulli:

$p_C = p_{\text{atm}}, v_B \approx 0, v_C \approx 0 \text{ i } y_A = y_B = y_C$

$p_A + \rho g y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g y_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B = p_{atm} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p_B = p_{atm} \\ p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_{atm} \end{array}\right. \text{ i } p_A = p_{atm} - \rho_{aigua} g h$$

$$p_{atm} - \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_{atm} - \rho_{aigua} g h \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2\rho_{aigua} g h}{\rho}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2\rho_{aigua} g h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}09 \text{ m}}{1{,}293 \text{ kg/m}^3}} = 36{,}9 \text{ m/s}$$

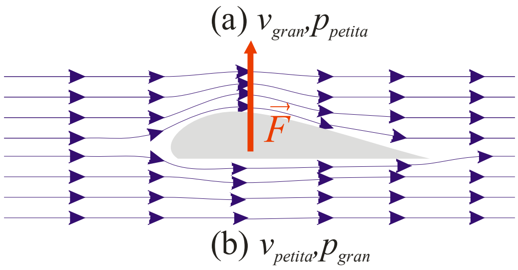
$$A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow v_B = v_A \frac{A_A}{A_B} = 36{,}9 \text{ m/s} \frac{\pi(1 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{\pi(0{,}03 \text{ m})^2} = 0{,}041 \text{ m/s}$$

Vol dels avions i dels ocells

L'estudi precís és molt complex, el que farem és una descripció qualitativa a partir de Bernoulli.

Prenem com a sistema de referència l'avió, d'aquesta manera l'aire és el que es mou i el seu moviment és pertorbat per la presència de l'avió, és a dir, la velocitat de l'aire depèn de la posició.

L'ala d'un avió es dissenya de manera que el pas de l'aire és més estret per sobre que per sota:



$v_a >> v_b$

Per tant, per l'efecte Venturi: $p_a << p_b$

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

$$p_b - p_a = \frac{1}{2}\rho(v_a^2 - v_b^2)$$

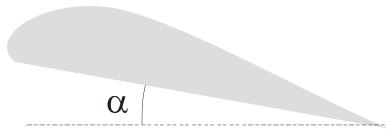
Com que apareix una diferència de pressions, llavors apareix una força, la força ascensional, que va dirigida de les pressions altes a les baixes i és igual a:

$$F = (p_b - p_a)A_{Ales} = \frac{1}{2}\rho(v_a^2 - v_b^2)A_{Ales}$$

En general, $F = \frac{1}{2}\rho\, C\, v^2 A_{\text{Ales}}$, on C és el coeficient de sustentació i v, la velocitat de l'avió.

Si la velocitat és gran, no cal que les ales siguin gaire grans. Aquest és el cas dels petits avions de reacció militars.

El coeficient de sustentació depèn de l'angle d'atac α, en general $C\uparrow$ quan $\alpha\uparrow$.



D'altra banda, els alerons dels cotxes es munten al revés perquè la força empenyi el cotxe contra el sòl i així millori l'adherència.

En el cas dels ocells, podem dir que:

$A_{\text{ales}} \propto l^2$

$\text{Pes} \propto l^3$

on l seria la longitud mitjana de l'ocell. Com que la força ascensional ha d'igualar el pes, com a mínim:

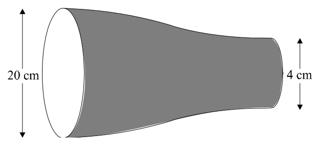
$$F = \text{Pes} \Rightarrow \frac{1}{2}Cv^2 A_{ales} = Pes \Rightarrow v^2 l^2 \propto l^3 \Rightarrow v \propto \sqrt{l}$$

Per tant, com més gran és l'ocell, més gran ha de ser la velocitat per sustentar-lo. Per aquesta raó, com més gran és l'ocell més necessita córrer per agafar el vol, i per tant més difícil li és volar.

Qüestions del tema 11

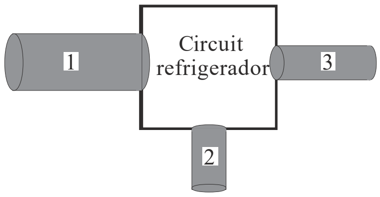
Equació de continuïtat

1. L'aigua entra a una velocitat de 3 m/s per una canonada de secció circular. Al llarg de la canonada la secció es redueix progressivament, de manera que el diàmetre a la secció d'entrada és de 20 cm i a la secció de sortida és igual a 4 cm. Quina és la velocitat de l'aigua a la sortida de la canonada?



Sol.: 75 m/s

2. Un motor es refrigera a través de la circulació d'aigua al circuit refrigerador. L'aigua entra per la canonada 1 amb un cabal de 50 l/s i s'evacua per les canonades 2 i 3 amb uns cabals de 20 l/s i 25 l/s. Determineu les pèrdues que es donen per fuites al circuit refrigerador.



Sol.: 5 l/s

3. Es vol omplir un dipòsit de 2 m^2 de secció i 3 m d'alçada fent servir una mànega que transporta un cabal màssic d'aigua de 120 kg/min. Determineu la velocitat de pujada del nivell del dipòsit. Quin temps es trigarà per omplir-li completament?

Sol.: 10^{-3} m/s, 50 min.

4. Un vaixell de 2.500 kg de massa navega pel mar i xoca contra una roca. Com a resultat de la col·lisió, s'obre una via d'aigua per la qual entra un cabal de 0,1 l/s. Si el volum del buc del vaixell és de 4 m^3, quant trigarà a enfonsar-se completament? Dades: densitat de l'aigua de mar, 1.029 kg/m^3.

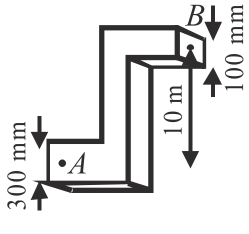
Sol.: 4h 21 min

Equació de Bernoulli

5. Quina velocitat ha de tenir el vent per aconseguir fer saltar les teules del sostre d'una casa. Per simplificar el problema suposeu que el sostre és horitzontal i que l'aire es comporta com un fluid ideal. Dades: la massa d'una teula és de 3,5 kg i la seva superfície és 1000 cm^2. Densitat de l'aire 1,293 kg/m^3.

Sol.: 83 km/h

6. La figura mostra una part d'una conducció d'aire de secció quadrada. Quina és la pressió manomètrica de l'aire en el punt *B* quan la pressió diferencial a *A* és de 320 Pa i el cabal és 2,2 m^3/s? Suposeu un flux ideal. La densitat de l'aire és 1,293 kg/m^3.

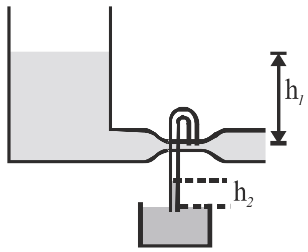


Sol.: –30.711 Pa.

7. Un líquid de densitat 0,9 g/cm^3 flueix per una canonada de 6 cm de diàmetre a una velocitat de 1,5 m/s. En una zona on al canonada s'estreny fins a un diàmetre de 2,5 cm, la pressió manomètrica és 0,10 kp/cm^2. Quina és la pressió manomètrica a la resta de la canonada?
Sol.: 14.630 Pa.

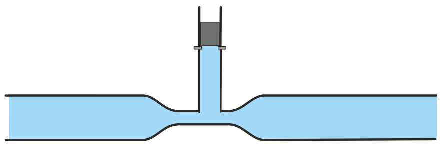
8. En una artèria s'ha format una placa arterioscleròtica que redueix la secció transversal a 1/5 part del valor normal. *a)* Quina és la velocitat del flux sanguini en aquest punt? *b)* Quina és la disminució de pressió en aquest punt? *c)* Quina és la disminució percentual de la pressió en aquest punt? Dades: la velocitat de la sang en una artèria sana és de prop de 0,12 m/s, la pressió és de 16.050 Pa i la densitat de la sang és 1,056·10^3 kg/m^3.
Sol.: *a)* 0,6 m/s; *b)* 182 Pa; *c)* 1,14 %

9. Un dipòsit de gran capacitat té una canonada de sortida al fons (vegeu la figura). Al llarg de la canonada hi ha un estrangulament de diàmetre un terç del de la resta de la canonada. En aquest estrangulament hi ha un tub que porta a un segon dipòsit que conté el mateix fluid que el primer. Quan el fluid estigui fluint vers l'exterior, quina altura h_2 assolirà el fluid al tub? Expresseu el resultat en funció de h_1. Suposeu un flux ideal.



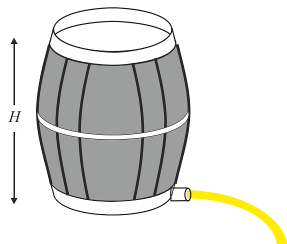
Sol.: $h_2 = 80\ h_1$

10. Es dissenya un sistema de seguretat que s'activa quan el cabal que circula per una canonada excedeix un valor màxim. El dispositiu consisteix en un pas estret on la secció és 5 vegades més petita que a la resta de la canonada. En aquest estreniment es troba un pistó subjectat per uns perns que eviten que el pistó es desplaci cap avall. Quan sobre el pistó actua una força de 4,5 N els perns cedeixen, el pistó baixa i s'activa el sistema de seguretat. Si el gas que circula és aire, densitat 1,293 kg/m^3, determineu el cabal màxim que pot circular per la canonada. Suposeu que l'aire es comporta com un gas ideal i negligiu el pes del pistó. Dades: la secció del pistó és de 25 cm^2 i la de secció de la part ampla de la canonada és de 50 cm^2. Els dos extrems de la canonada estan a pressió atmosfèrica.



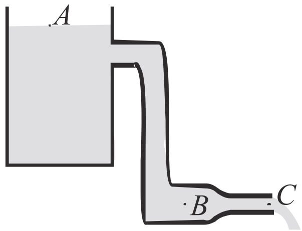
Sol.: 0,054 m^3/s

11. Un gran barril d'alçada H i àrea transversal A_1, està ple de cervesa. La part superior està oberta a la pressió atmosfèrica. A la banda inferior hi ha una aixeta d'àrea transversal A_2, molt més petita que A_1. *a)* Demostreu que quan l'altura de la cervesa dins el barril és h, la velocitat amb que aquesta surt és aproximadament $\sqrt{2gh}$. *b)* Demostreu que en l'aproximació $A_2 \ll A_1$, el ritme de variació de l'alçada h de la cervesa ve donat per: $\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}$. *c)* Calculeu h en funció del temps si $h=H$ per a $t=0$. *d)* Calculeu el temps total necessari per a buidar el barril si H=2 m i $A_2=10^{-4}\ A_1$.



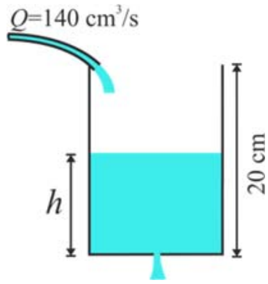
Sol.: *c)* $h = \left(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{g}{2}\frac{A_2}{A_1}}t\right)^2$, *d)* 1h 46 min 26 s.

12. Del dipòsit representat a la figura surt aigua contínuament. L'altura del punt *A* és de 10 m; la dels punts *B* i *C* és d'1 m. La secció transversal en el punt *B* és de 0,04 m^2, i en el punt *C* és de 0,02 m^2. L'àrea del dipòsit és molt gran comparada amb les seccions del tub. Calculeu: *a)* el cabal d'aigua que surt i *b)* la pressió manomètrica en el punt *B*.



Sol.: *a)* 0,266 m^3/s; *b)* 66,1 kPa

13. Tenim un dipòsit cilíndric, obert per la part superior, de 20 cm d'altura i 10 cm de diàmetre. El dipòsit té un forat circular al centre del fons de secció 1 cm^2. Al dipòsit, que inicialment està buit, s'hi aboca aigua mitjançant una mànega col·locada a la part superior i que subministra un cabal continu de 140 cm^3/s. Quina altura assolirà el nivell d'aigua al dipòsit molt de temps després de posar-hi la mànega?

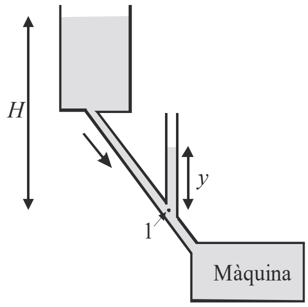


Sol.: 10 cm

14. Volem construir un magatzem al polígon industrial de Vilamalla. Calculeu la força que patirà una paret orientada cap al nord de 2 m d'alçària i 4 m d'amplada un dia de tramuntana forta. Dades: la tramuntana a Vilamalla pot assolir velocitats de fins a 100 km/h en direcció nord-sud, i la densitat de l'aire és d'1,293 kg/m^3.

Sol.: 4.000 N

15. En una indústria convé saber la velocitat del fluid al punt *1* de la figura. Trobeu-la en funció de *g* i les alçàries *y* i *H* (la secció del dipòsit és molt superior a la dels tubs).

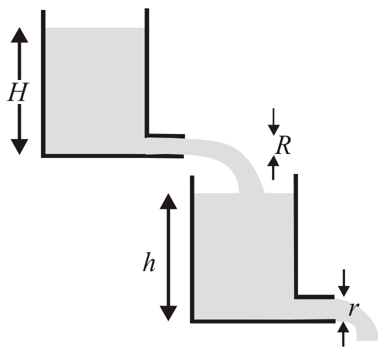


Sol.: $v_1 = \sqrt{2g(H-y)}$

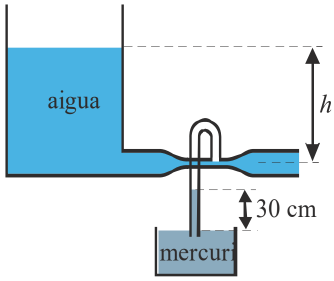
16. Al terrat d'un edifici, a 10 m d'altura, hi ha un gran dipòsit d'aigua ple fins a un nivell d'1 m per sobre la seva base. L'aigua arriba a una aixeta situada al segon pis, a 4 m del sòl, després de baixar fins al nivell del sòl, lloc on el tub té una secció de 5 cm^2. La secció de l'aixeta és de 2 cm^2. *a)* Quina és la velocitat de sortida de l'aigua per l'aixeta? *b)* Quin és el cabal de sortida? *c)* Quina pressió marca un manòmetre situat al nivell del sòl?

Sol.: *a)* 11,7 m/s; *b)* 2,34 l/s; *c)* 96,8 kPa

17. El dipòsit superior conté aigua fins al nivell constant *H*, i desaigua en un segon dipòsit a través d'un forat de radi *R*. El segon dipòsit desaigua per un forat de radi *r* (vegeu la figura). Quin és el nivell d'equilibri *h* al dipòsit inferior?

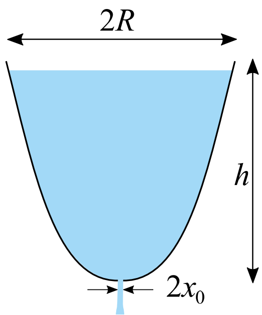


Sol.: $h = H\left(\frac{R}{r}\right)^4$



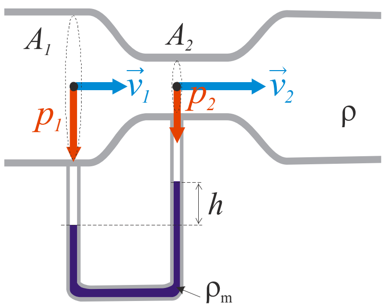
18. Un dipòsit de gran capacitat conté aigua (densitat 1.000 kg/m^3) i té una canonada de sortida al fons (vegeu la figura). La canonada té una secció constant de 100 cm^2 excepte en un estrangulament on la secció és de 20 cm^2. En aquest estrangulament hi ha un tub que porta a un segon dipòsit que conté mercuri (densitat 13.600 kg/m^3). Si l'alçada del mercuri en aquest tub és de 30 cm, *a)* quina és la velocitat de l'aigua a la sortida de la canonada?; *b)* quina és l'alçada del nivell del dipòsit (*h* a la figura)? Suposeu que l'aigua es comporta com un fluid ideal.

Sol.: *a)* 1,826 m/s; *b)* 17 cm



19. Un dipòsit, que té simetria de revolució i desaigua a través d'un orifici situat al fons, es dissenya de manera que la velocitat de descens del nivell del dipòsit sigui constant. ¿Quin ha de ser el radi R de la part superior del dipòsit si es vol que, partint del dipòsit completament ple, trigui 10 s en buidar-se completament? Dades, la velocitat de descens del nivell del dipòsit ha de ser 2 m/s i el radi del forat x_0=1 mm.

Sol.: 9,95m



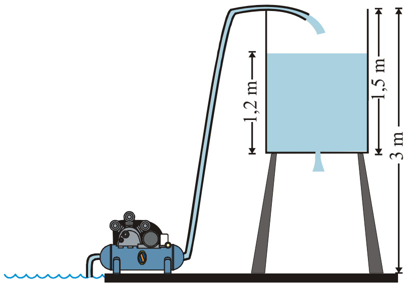
20. Es fa servir un venturímetre per mesurar la velocitat de l'aire, v_1, dins d'una canonada. Per mesurar la diferència de pressió entre la canonada i el pas estret es fa servir un manòmetre d'alcohol. La relació entre la secció de la canonada i el pas estret és $A_1/A_2 = 4$.
a) Quina és la diferència d'alçada entre les dues columnes d'alcohol, h, quan la velocitat de l'aire és $v_1 = 10$ m/s?
b) Si, a causa de l'acumulació de brutícia, es tapona parcialment el pas estret, de manera que $A_1/A_2 = 5$, quin és l'error en la mesura de la velocitat quan la velocitat de l'aire és v_1=10 m/s?
Dades: densitat de l'aire, ρ=1,3 kg/m^3, i densitat de l'alcohol, ρ_m=790 kg/m^3.

Sol.: *a)* 12,6 cm; *b)* 26,5 %.

Bombes

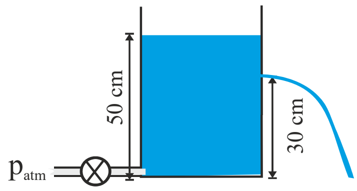
21. Una font dissenyada per produir una columna vertical d'aigua de 12 m d'altura té un bec d'1 cm de diàmetre arran de terra. La bomba d'aigua està a 3 m sota terra. El conducte fins al bec té 2 cm de diàmetre. *a)* Quina és la pressió que ha de subministrar la bomba? *b)* Quina hauria de ser la potència de la bomba per fer funcionar 25 fonts simultàniament? Negligiu la viscositat de l'aigua.

Sol.: *a)* 2,38 atm; *b)* 4,19 kW



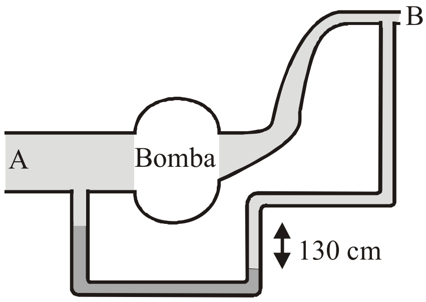
22. Tenim un dipòsit cilíndric, obert per la part superior, d'1,5 m d'altura. El dipòsit té un forat circular al centre del fons de secció 100 cm^2. Al dipòsit, que inicialment està buit, s'hi aboca aigua (densitat 1.000 kg/m^3) per la part superior mitjançant una mànega de secció constant que extreu aigua de la superfície d'un embassament mitjançant una bomba. La manega aboca l'aigua 3 m per sobre del nivell de l'embassament. Molt de temps després de posar-hi la mànega l'altura del nivell d'aigua al dipòsit no varia i és d'1,2 m. Quina potència desenvolupa la bomba? Suposeu que l'aigua es comporta com un fluid ideal.

Sol.: 1430 W



23. Un dipòsit té un forat de 10 mm^2 de secció a una alçada de 30 cm. Connectada al fons del dipòsit hi ha una canonada de secció 1 cm^2 per la qual entra aigua sota l'acció d'una bomba. Molt de temps després de connectar la bomba el nivell de líquid a l'interior del dipòsit es troba a 50 cm d'alçada. *a)* Determineu el cabal d'aigua que surt pel forat. *b)* Quina potència subministra la bomba?

Sol.: *a)* $1{,}98 \cdot 10^{-5}$ m^3/s; *b)* 0,0968 W

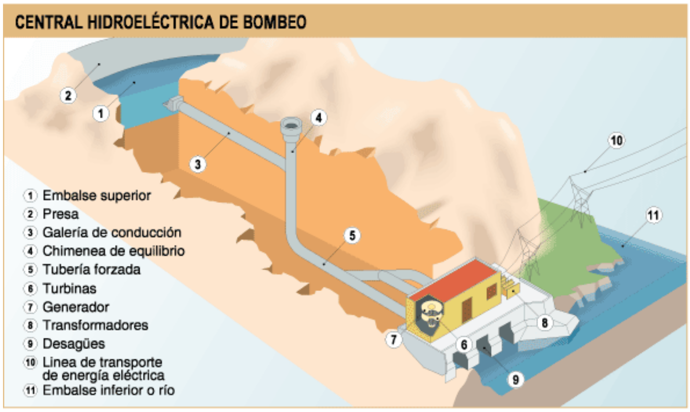


24. La bomba de la figura subministra contínuament un cabal d'aigua entre els punts *A* i *B* de 100 l/s (l'aigua entra pel punt *A* i surt pel punt *B*). Les canonades de la figura tenen secció circular. El diàmetre de la secció al punt *A* és de 8" i al punt *B*, de 6". Per tal de calcular la potència subministrada per la bomba, es connecta un manòmetre de mercuri entre els punts *A* i *B*. L'altura de la columna de mercuri és de 130 cm. Determineu la potència subministrada per la bomba. Dada: 1" = 2,54 cm.

Sol.: 23,23 CV

25. Un dels problemes de la gestió de la xarxa elèctrica és emmagatzemar energia quan hi ha sobreproducció i recuperar-la quan hi ha un augment sobtat de la demanda. Una solució consisteix a bombar aigua des d'un embassament inferior cap a un embassament superior quan tenim sobreproducció i desaiguar fent passar l'aigua per unes turbines quan tenim un augment de la demanda.
a) Si es produeix un pic de producció que dona un excés de 10^6 W durant una hora, en total, quanta aigua es traspassarà cap a l'embassament superior durant aquesta hora?
b) Si desaigüem, quina és la velocitat amb què arriba l'aigua a les turbines, si aquestes es troben a l'altura de l'embassament inferior i estan a pressió atmosfèrica?
Dades: densitat de l'aigua, 1000 kg/m^3; diferència d'altura entre els dos embassaments, 100 m; per connectar els dos embassaments es fa servir una canonada de secció constant de 4 m^2. Negligiu les pèrdues degudes a la fricció i a la viscositat i suposeu que les bombes aprofiten tota la potència elèctrica sense pèrdues.

Central hidroelèctrica de bombeig:
(1) embassament superior
(6) turbines
(11) embassament inferior



12. Dinàmica de fluids viscosos

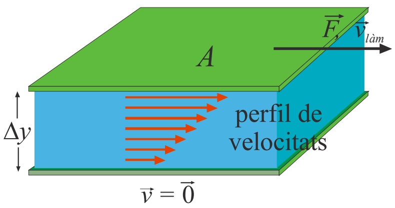
Objectius

Què són la viscositat i la viscositat cinemàtica?
Descriure el flux laminar i turbulent. Què és el nombre de Reynolds?
Descriure el flux a través d'una canonada; concepte de resistència al flux
Llei de Poiseuille
Potència dissipada pel flux a través d'una canonada
Descriure el moviment de sòlids a l'interior d'un fluid. Llei de Stokes
Descriure els processos de centrifugació i sedimentació per a la separació de molècules

---

Viscositat

Els fluids reals experimenten forces de fricció internes. Aquestes forces són responsables de les pèrdues d'energia. Quan aquestes pèrdues són significatives, l'equació de Bernoulli falla. D'altra banda, aquestes forces només apareixen quan el fluid es mou.



Si situem un líquid entre dues làmines paral·leles i apliquem un esforç de cisalla (transversal) sobre una làmina, de manera que aquesta es posa en moviment, i mantenim aturada l'altra làmina, s'observa l'aparició d'un perfil de velocitats lineal:

$\frac{dv}{dy} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$, on $\Delta v = v_{\text{lam}} - 0$ i $v_{làm}$ és la velocitat de la làmina que es mou.

D'altra banda, s'observa que la força que cal aplicar per mantenir la làmina en moviment a velocitat constant F és proporcional a l'àrea A de la làmina i al gradient de velocitats $\Delta v/\Delta y$:

$F \propto A \ i \ \Delta v/\Delta y$

El coeficient de proporcionalitat ens dona una mesura de la dificultat de mantenir la làmina en moviment, o el que és equivalent, una mesura de la resistència que oposa el fluid al moviment. Aquest coeficient és la viscositat, η:

$$F \equiv \eta\, A \frac{dv}{dy} = \eta\, A \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

Unitats: $\eta = \frac{F}{A}\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{[M][L]/[T]^2}{[L]^2}\frac{[L]}{[L]/[T]} = \frac{[M]}{[L][T]}$

En SI: $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ o $\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ o Pa·s

S'utilitzen molt les unitats del sistema CGS:

$$\left.\begin{array}{r} 1 \text{ poise} = 1\,\frac{\text{dina}\cdot\text{s}}{\text{cm}^2} \\ \text{i el cp, centipoise: } 100 \text{ cp} = 1 \text{ poise} \end{array}\right\} 1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ poise}$$

Alguns valors:

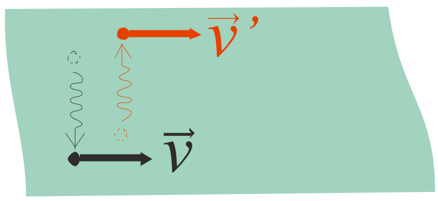
Fluid	Temperatura ºC	Viscositat Pa·s
Oli lubrificant	16	$113 \cdot 10^{-3}$
	38	$34 \cdot 10^{-3}$
	100	$4{,}9 \cdot 10^{-3}$
Acetona	25	$0{,}316 \cdot 10^{-3}$
Etanol	20	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$
Èter	20	$0{,}233 \cdot 10^{-3}$
Glicerina	20	$1.490 \cdot 10^{-3}$
Mercuri	20	$1{,}55 \cdot 10^{-3}$
Metà	20	$0{,}0109 \cdot 10^{-3}$
Vapor d'aigua	100	$0{,}0125 \cdot 10^{-3}$
Sang	20	$3{,}015 \cdot 10^{-3}$
	37	$2{,}084 \cdot 10^{-3}$

La η dels gasos << η dels líquids.

La η dels gasos ↑ quan T↑; en canvi, la η dels líquids ↓ quan T↑.

Diferent origen de la viscositat en gasos i líquids:

- η dels líquids. Forces de cohesió entre molècules. Enllaç químic. S'afebleix quan T↑.
- η dels gasos. Intercanvi de molècules entre diferents capes del fluid, és a dir, és el resultat de l'activitat molecular i augmenta quan T↑.



Sovint s'utilitza la viscositat cinemàtica:

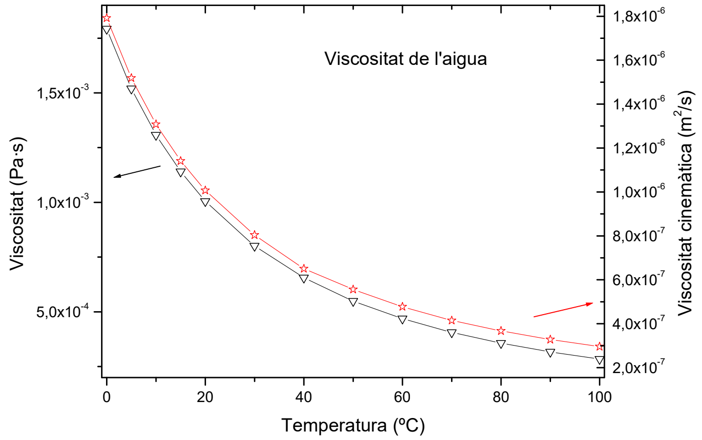
$\nu \equiv \frac{\eta}{\rho}$, unitats: $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Cal tenir en compte que tant la viscositat cinemàtica com la viscositat només apareixen quan el fluid està en moviment, i que ambdues representen el mateix fenomen.

La densitat ρ depèn de la temperatura T. A més a més, en els gasos ρ també depèn de la pressió p, llavors la relació entre η i ν no és lineal, sinó que depèn de T (i en els gasos, de p).

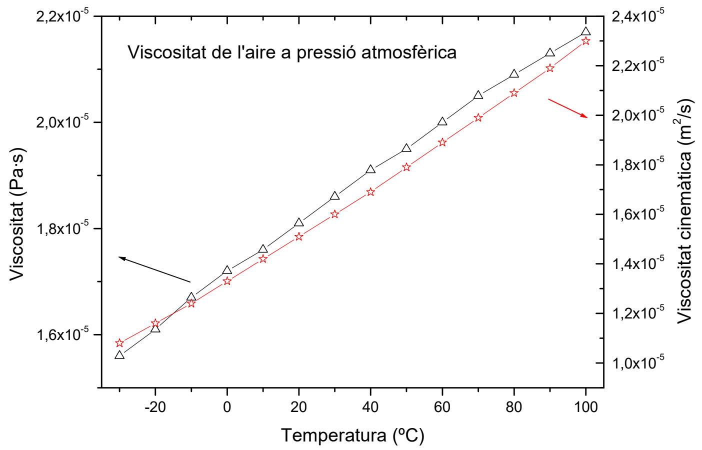
Viscositat i viscositat cinemàtica de l'aigua:

Temperatura ºC	Viscositat ($N \cdot s/m^2$)	Viscositat cinemàtica (m^2/s)
0	$1{,}792\ 10^{-3}$	$1{,}792\ 10^{-6}$
5	$1{,}519\ 10^{-3}$	$1{,}519\ 10^{-6}$
10	$1{,}308\ 10^{-3}$	$1{,}308\ 10^{-6}$
15	$1{,}140\ 10^{-3}$	$1{,}141\ 10^{-6}$
20	$1{,}005\ 10^{-3}$	$1{,}007\ 10^{-6}$
30	$0{,}801\ 10^{-3}$	$0{,}804\ 10^{-6}$
40	$0{,}656\ 10^{-3}$	$0{,}651\ 10^{-6}$
50	$0{,}549\ 10^{-3}$	$0{,}556\ 10^{-6}$
60	$0{,}469\ 10^{-3}$	$0{,}477\ 10^{-6}$
70	$0{,}406\ 10^{-3}$	$0{,}415\ 10^{-6}$
80	$0{,}357\ 10^{-3}$	$0{,}367\ 10^{-6}$
90	$0{,}317\ 10^{-3}$	$0{,}328\ 10^{-6}$
100	$0{,}284\ 10^{-3}$	$0{,}296\ 10^{-6}$

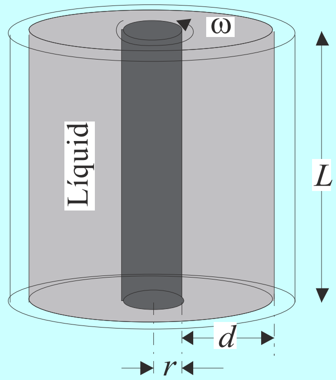


Viscositat i viscositat cinemàtica de l'aire a pressió atmosfèrica:

Temperatura ºC	Viscositat ($N \cdot s/m^2$)	Viscositat cinemàtica (m^2/s)
–30	$1{,}56\ 10^{-5}$	$1{,}08\ 10^{-5}$
–20	$1{,}61\ 10^{-5}$	$1{,}16\ 10^{-5}$
–10	$1{,}67\ 10^{-5}$	$1{,}24\ 10^{-5}$
0	$1{,}72\ 10^{-5}$	$1{,}33\ 10^{-5}$
10	$1{,}76\ 10^{-5}$	$1{,}42\ 10^{-5}$
20	$1{,}81\ 10^{-5}$	$1{,}51\ 10^{-5}$
30	$1{,}86\ 10^{-5}$	$1{,}60\ 10^{-5}$
40	$1{,}91\ 10^{-5}$	$1{,}69\ 10^{-5}$
50	$1{,}95\ 10^{-5}$	$1{,}79\ 10^{-5}$
60	$2{,}00\ 10^{-5}$	$1{,}89\ 10^{-5}$
70	$2{,}05\ 10^{-5}$	$1{,}99\ 10^{-5}$
80	$2{,}09\ 10^{-5}$	$2{,}09\ 10^{-5}$
90	$2{,}13\ 10^{-5}$	$2{,}19\ 10^{-5}$
100	$2{,}17\ 10^{-5}$	$2{,}30\ 10^{-5}$
200	$2{,}57\ 10^{-5}$	$3{,}45\ 10^{-5}$
300	$2{,}93\ 10^{-5}$	$4{,}75\ 10^{-5}$



<u>Exemple 1</u>: Per mesurar la viscositat s'utilitza un aparell que consisteix en un cilindre buit al centre del qual es col·loca un cilindre massís de radi r i longitud L, tal com s'indica a la figura adjunta. El cilindre exterior està fix, mentre que el cilindre interior pot girar sota l'acció d'un parell de forces. *a)* Demostreu que el parell de forces M que cal aplicar perquè el cilindre giri a una velocitat angular ω és:



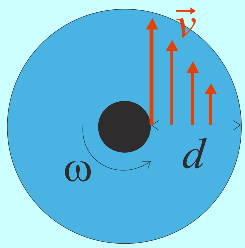
$$M = \frac{2\pi r^3 L}{d}\eta\omega$$

b) La viscositat s'obté mesurant el parell de forces i la velocitat angular. Les dimensions del viscosímetre són L = 50 cm, d = 1 cm, r = 0,5 cm. Si a l'interior col·loquem un oli que està a 20 ºC, la velocitat angular és de 3,5 rad/s i el parell de forces aplicat és igual a $1{,}36\cdot10^{-4}$ Nm, quina és la viscositat d'aquest oli a 20 ºC?

$$a)\ F \equiv \eta\, A\frac{dv}{dy} = \eta\, A\frac{\Delta v}{\Delta y} = \eta 2\pi r L\frac{\omega r - 0}{d}$$

$$M = rF \Rightarrow F = \frac{M}{r}$$

$$\eta 2\pi r^2 L\frac{\omega}{d} = \frac{M}{r} \Rightarrow M = \frac{2\pi r^3 L}{d}\eta\omega$$



b)

$$\eta = M\frac{d}{2\pi r^3 L\omega} = 1{,}36\times10^{-4}\mathrm{Nm}\frac{0{,}01\ \mathrm{m}}{2\pi(0{,}005\ \mathrm{m})^3 0{,}5\ \mathrm{m}\ 3{,}5\ \mathrm{rad/s}} = 0{,}989\frac{\mathrm{N\ s}}{\mathrm{m}^2} = 0{,}989\ \mathrm{Pa{\cdot}s}$$

Flux laminar i turbulent: nombre de Reynolds

Per a velocitats petites, el flux es troba en règim laminar; si la velocitat augmenta apareixen remolins, el flux és turbulent i la dissipació d'energia augmenta considerablement.

Quatre factors determinen l'aparició del règim turbulent. Aquests factors es poden agrupar en un únic paràmetre anomenat *nombre de Reynolds*. Per a una canonada, el nombre de Reynolds és:

$$N_R = \frac{\rho\,\bar{v}D}{\eta} = \frac{\bar{v}D}{\nu}$$

on D és el diàmetre del tub i $\bar{v}$ és la velocitat mitjana a la secció.

Unitats: $\frac{\frac{[M]}{[L]^3}\cdot\frac{[L]}{[T]}[L]}{\frac{[M]}{[L][T]}}\ \frac{\frac{[M]}{[L][T]}}{\frac{[M]}{[L][T]}} = 1$, és un paràmetre adimensional.

Per a un tub rugós s'ha trobat experimentalment:
$0 < N_R < 2.000$, règim laminar
$2.000 < N_R < 3.000$, règim intermitent, se succeeixen règims laminars i turbulents; també es coneix amb el nom de *règim inestable*
$3.000 < N_R$, règim turbulent

Valor crític en un tub rugós: $N_R = 2.000$

Exemple 2: Demostreu que en un tub de radi r pel qual flueix un cabal Q d'un fluid de densitat ρ i viscositat η el nombre de Reynolds es pot expressar de la manera següent: $N_R = \frac{2Q\rho}{\pi r\eta}$

$$\left.\begin{array}{l} Q = \pi r^2\bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \frac{Q}{\pi r^2} \\ N_R = \frac{\rho\,\bar{v}D}{\eta} = \frac{\rho\,\bar{v}2r}{\eta} \end{array}\right\} \Rightarrow N_R = \frac{\rho 2r}{\eta}\frac{Q}{\pi r^2} = \frac{2Q\rho}{\pi\, r\,\eta}$$

Exemple 3: Quan el flux és turbulent es produeix més dissipació d'energia en forma de soroll i calor. *a)* Quin és el màxim cabal d'aigua que pot circular per una canonada d'1 cm de radi mantenint un flux laminar? Suposeu que la temperatura de l'aigua és de 20 ºC. *b)* Si tenim en compte que la viscositat de l'aigua disminueix considerablement en augmentar la temperatura, quan és més fàcil que les canonades de la conducció d'aigua facin soroll, a l'estiu o a l'hivern? Dades: a 20 ºC la viscositat de l'aigua és d'1,005 cp i la densitat, de 998,2 kg/m^3.

a)

$$N_{R,\text{màx}} = 2.000 = \frac{2Q\rho}{\pi r\eta} \Rightarrow$$

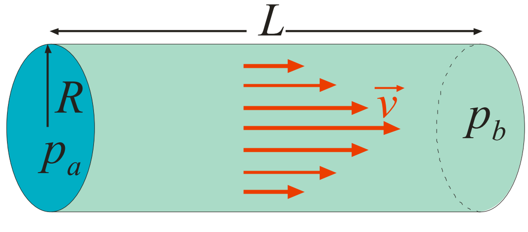
$$\Rightarrow Q_{\text{màx}} = 2.000\frac{\pi r\eta}{2\rho} = 2.000\frac{\pi\cdot 0{,}01\text{m}\cdot 1{,}005\cdot 10^{-3}\text{Pa·s}}{2\cdot 998{,}2\ \text{kg/m}^3} = 3{,}163\cdot 10^{-5}\text{m}^3/\text{s}$$

b)

$N_R = \frac{2Q\rho}{\pi r\eta}$, si $\eta \downarrow \Rightarrow N_R \uparrow$, per tant, és més fàcil que el règim sigui turbulent quan η és més petit, és a dir, a l'estiu ($T\uparrow$).

Flux en una canonada: llei de Poiseuille

Tant si el flux és laminar com turbulent l'equació de continuïtat és vàlida:
$Q = A\bar{v} =$ constant
Per a una canonada de longitud L i radi R per la qual circula un cabal $Q = A\bar{v}$, es pot demostrar (vegeu al final del capítol) que si el flux és laminar llavors hi ha una caiguda de pressió a causa de les forces de fricció viscoses:



$$\Delta p = p_a - p_b = \frac{8\eta L}{R^2}\bar{v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}Q$$

La relació anterior és l'equació de Poiseuille.

La pèrdua d'energia a causa de la fricció es tradueix en una caiguda de pressió, és a dir, la canonada oposa una resistència al pas del fluid, R_f:

$$\Delta p = R_f Q, R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

La relació anterior es pot escriure com:

$Q = \frac{\Delta p}{R_f}$ (noteu la similitud amb la llei d'Ohm $I = \frac{\Delta V}{R}$)

És a dir, que per mantenir un fluid en moviment cal l'aportació d'energia des de l'exterior (realització d'un treball extern):

Δp, causa que provoca el moviment (treball exterior)
Q, mesura del moviment del fluid
R_f, oposició al moviment del fluid

Aquest treball exterior el pot subministrar una bomba o el camp gravitatori (desnivell). Per exemple, als rius, el moviment del fluid el provoca el treball que fa el camp gravitatori. La disminució d'energia potencial gravitatòria deguda al descens del fluid es tradueix en energia cinètica (moviment del fluid) i energia dissipada en forma de calor i so (fricció viscosa).

Podem observar que: $R_f \begin{cases} \uparrow \text{ quan } L \uparrow \\ \downarrow \text{ quan } R \uparrow \text{ (molt ràpidament, elevat a 4)} \end{cases}$

Als tubs capil·lars, amb R petit, la resistència al flux, R_f, és molt gran.

Què passa quan el flux és turbulent?

La relació $Q = \frac{\Delta p}{R_f}$ continua sent vàlida; ara bé, la relació de Poiseuille ja no ho és vàlida i per tant no podem fer servir Poiseuille per calcular la resistència al flux, R_f. R_f es determina experimentalment o numèricament. També es compleix que $R_f\uparrow$ quan $L\uparrow$ o $R\downarrow$.

Exemple 4: *a)* Quina és la resistència al pas de l'aigua d'un capil·lar de vidre de 20 cm de longitud i 0,06 cm de radi? *b)* Quin és el cabal que passa a través del capil·lar quan la diferència de pressió entre els seus extrems és de 15 cm de H_2O? *c)* Quina és la diferència de pressió quan el flux és de 0,5 cm^3/s? Dades: la viscositat de l'aigua a 20 ºC és d'1,005 cp i suposeu que el flux és laminar.

$$a)\ R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8(1{,}005\cdot 10^{-3}\ \text{Pa}\cdot\text{s})\cdot(20\cdot 10^{-2}\ \text{m})}{\pi(0{,}06\cdot 10^{-2}\ \text{m})^4} = 3{,}949 \cdot 10^9\ \frac{\text{Pa}\cdot\text{s}}{\text{m}^3}$$

$$b)\ \Delta p = \rho g h = 1.000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,0{,}15\ \text{m} = 1.470\ \text{Pa}$$

$$Q = \frac{\Delta p}{R_f} = \frac{1.470\ \text{Pa}}{3{,}949 \cdot 10^9\ \text{Pa}\cdot\text{s/m}^3} = 3{,}72 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^3/\text{s} = 0{,}372\ \text{cm}^3/\text{s}$$

$$c)\ \Delta p = R_f Q = 3{,}949 \cdot 10^9\ \text{Pa}\cdot\text{s/m}^3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s} = 1.975\ \text{Pa}$$

Potència dissipada?

$\text{Pot} = Q \cdot \Delta p = Q^2 \cdot R_f = \frac{\Delta p^2}{R_f}$ (noteu la similitud amb la potència dissipada per l'efecte Joule en resistències elèctriques).

<u>Exemple 5</u>: Per regar un camp, un pagès necessita fer passar un cabal de 100 l/s per una canonada de 10 m de llargada i 5 cm de diàmetre. Per aconseguir-ho ha de connectar una bomba a la sèquia. Quina potència haurà de subministrar aquesta bomba? Dada: a 20 ºC la viscositat de l'aigua és d'1,005 cp i suposeu que el flux és laminar.

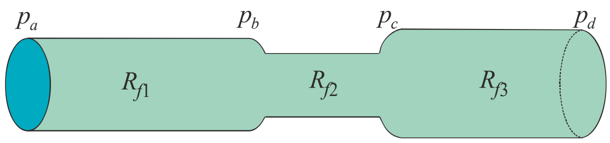
$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8(1{,}005\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s})\cdot(10\ \mathrm{m})}{\pi(2{,}5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^4} = 65.516\ \frac{Pa\cdot s}{m^3}$$

$$Q = 100\frac{\mathrm{dm}^3}{s}\cdot\left(\frac{1\ m}{10\ \mathrm{dm}}\right)^3 = 100\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s} = 0{,}1\ \mathrm{m^3/s}$$

$$\Delta p = R_f Q = 65.516\ \frac{\mathrm{Pa\cdot s}}{\mathrm{m^3}}\cdot 0{,}1\ \mathrm{m^3/s} = 6.552\ \mathrm{Pa}$$

$$\mathrm{Pot} = Q^2\cdot R_f = (0{,}1\ \mathrm{m^3/s})^2 65.516\ \frac{\mathrm{Pa\cdot s}}{\mathrm{m^3}} = 655\ \frac{\mathrm{Pa\cdot m^3}}{\mathrm{s}} = 655\ \frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{s}} = 655\ \mathrm{W}$$

Combinació en sèrie de canonades de diferent secció (resistències en sèrie):



La caiguda de pressió és la suma de les pèrdues a cada canonada:

$$\Delta p = p_d - p_a = p_d - p_c + p_c - p_b + p_b - p_a = \Delta p_3 + \Delta p_2 + \Delta p_1$$

D'altra banda, en una canonada: $\Delta p = R_f Q$. Llavors:

$$\Delta p = R_{f3}Q_3 + R_{f2}Q_2 + R_{f1}Q_1$$

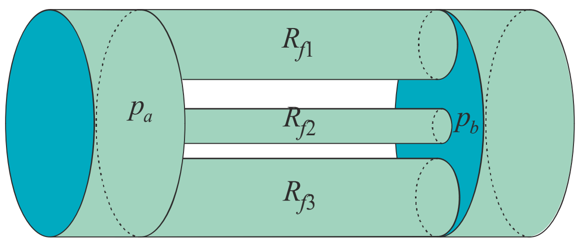
I el cabal és constant: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$, llavors:

$$\Delta p = R_{f3}Q + R_{f2}Q + R_{f1}Q = (R_{f3} + R_{f2} + R_{f1})\ Q = R_{f,\mathrm{eq}}\ Q$$

És a dir, la combinació de canonades és equivalent a una única canonada de resistència:

$$R_{f,eq} = R_{f1} + R_{f2} + R_{f3}$$

Combinació en paral·lel de canonades de diferent secció (resistències en paral·lel):



El cabal es distribueix per les diferents canonades:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

D'altra banda, en una canonada: $Q = \frac{\Delta p}{R_f}$

Llavors:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{\Delta p_1}{R_{f1}} + \frac{\Delta p_2}{R_{f2}} + \frac{\Delta p_3}{R_{f3}}$$

La caiguda de pressió és la mateixa a totes les canonades:

$$\Delta p = p_b - p_a = \Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3$$

Llavors:

$$Q = \frac{\Delta p}{R_{f1}} + \frac{\Delta p}{R_{f2}} + \frac{\Delta p}{R_{f3}} = \Delta p\left(\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}\right)$$

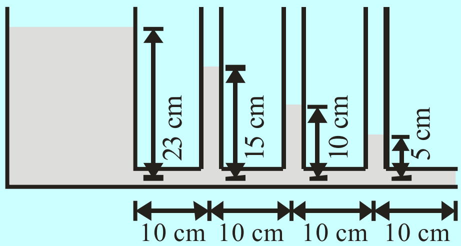
I la resistència total del sistema és:

$$R_{f,eq} = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{\Delta p}{\Delta p\left(\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}} \Rightarrow \frac{1}{R_{f,eq}} = \frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}$$

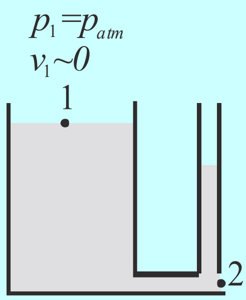
És a dir, la combinació de canonades és equivalent a una única canonada de resistència:

$$\frac{1}{R_{f,eq}} = \frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \frac{1}{R_{f3}}$$

Exemple 6: A partir de les dades de la figura i sabent la densitat del líquid (1 g/cm^3) i que la secció circular és de 10 cm^2, calculeu: *a)* la velocitat mitjana del fluid a la canonada, *b)* la viscositat del fluid en cp.



a) Quan el fluid avança 10 cm, la pressió disminueix (viscositat) i la columna de líquid baixa 5 cm.



$$\Delta p_{vis} = \rho g \cdot 0{,}05 \text{ m}$$

Estàtica de fluids:

$$p_2 = p_{\text{atm}} + \rho g \cdot 0{,}15 \text{ m}$$

Dinàmica de fluids:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \Delta p_{vis} = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_{\text{atm}} + \rho g \cdot 0{,}23\text{m} + 0 - \rho g \cdot 0{,}05\text{m} = p_{\text{atm}} + \rho g \cdot 0{,}15\text{m} + 0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\rho g \cdot 0{,}03\text{m} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0{,}03\text{m}} = 0{,}767 \text{ m/s} = 76{,}7 \text{ cm/s}$$

b)

$$\Delta p_{\text{vis}} = \rho g \cdot 0{,}05 \text{ m} = 1.000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}9{,}8\frac{\text{m}^2}{\text{s}}0{,}05 \text{ m} = 490 \text{ Pa}$$

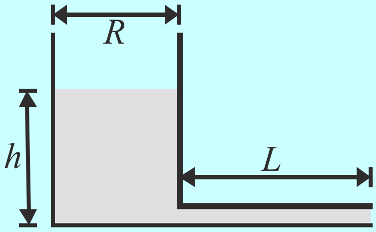
$$\Delta p_{\text{vis}} = R_f Q \Rightarrow R_f = \frac{\Delta p_{\text{vis}}}{Q} = \frac{490 \text{ Pa}}{10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 639.000 \frac{\text{Pa}}{\text{m}^2}$$

$$10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \pi R^2 \Rightarrow R\sqrt{10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\pi} = 0{,}0168 \text{ m}$$

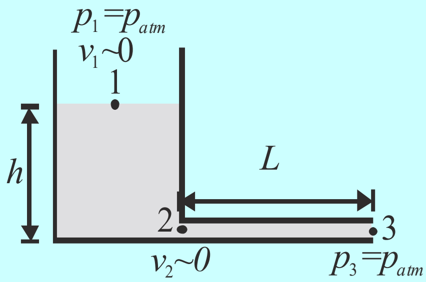
$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \Rightarrow \eta = \frac{R_f \pi R^4}{8L} = \frac{639.000 \text{ Pa/m}^2\, \pi\, (0{,}0178 \text{ m})^4}{8 \cdot 0{,}1 \text{ m}} = 0{,}254 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$= 254 \text{ cp}$$

<u>Exemple 7</u>: L'aigua del dipòsit de la figura es va escapant per un capil·lar horitzontal de radi *r* i longitud *L*. *a)* Demostreu la relació següent entre l'altura del nivell de líquid al dipòsit, *h*, i el cabal de sortida $Q = \frac{\rho g \pi r^4}{8\eta L} h$. (Suposeu que la velocitat del fluid dins del capil·lar és molt petita.) *b)* Calculeu el temps que triga a baixar el nivell d'aigua de 10 cm a 5 cm. Dades: la viscositat de l'aigua és 1,00 mPa·s, *R* = 2,5 cm, *L* = 20 cm i *r* = 0,25 mm.



a)



$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_{atm} + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

$$\Rightarrow p_2 = p_{atm} + \rho g h$$

$$\Delta p_{vis} = p_2 - p_3 = p_{atm} + \rho g h - p_{atm}$$

$$= \rho g h$$

$$\Delta p_{\text{vis}} = R_f Q = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q \Rightarrow Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta p_{\text{vis}}$$

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \rho g h = \frac{\rho g \pi r^4}{8\eta L} h$$

b)

$$\left. \begin{array}{r} Q = \pi R^2 v_1 = -\pi R^2 \dfrac{dh}{dt} \\ Q = \dfrac{\rho g \pi r^4}{8\eta L} h \end{array} \right\} \Rightarrow -\pi R^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\rho g \pi r^4}{8\eta L} h \Rightarrow \frac{dh}{h} = -\frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dh}{h} = \frac{-\rho g r^4}{8\eta L R^2} t ln h_f - ln h_0 = \frac{-\rho g r^4}{8\eta L R^2} t \Rightarrow ln \frac{h_f}{h_0}$$

$$= \frac{-\rho g r^4}{8\eta L R^2} t \Rightarrow ln \frac{h_0}{h_f} = \frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2} t \Rightarrow t = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4} ln \frac{h_0}{h_f}$$

$$t = \frac{8\eta \mathrm{L R}^2}{\rho \mathrm{g r}^4} \ln \frac{h_0}{h_f} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \mathrm{Pa \cdot s} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot (2{,}5\ 10^{-2}\ \mathrm{m})^2}{1.000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \cdot (0{,}5\ 10^{-3}\ \mathrm{m})^4} \ln \frac{10\ 10^{-2}\ \mathrm{m}}{5\ 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$

$$= 18.108\ \mathrm{s}$$

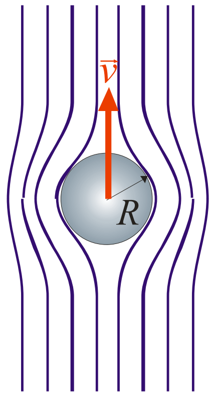
$$t = 18.108\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{h}\ 1\ \mathrm{min}\ 46\ \mathrm{s}$$

Moviment de sòlids en fluids a baixa i alta velocitat: llei de Stokes

Forces d'arrossegament viscoses: fricció d'un sòlid quan es mou dins d'un fluid. Per exemple, la fricció del cotxe augmenta amb la velocitat a causa de la viscositat de l'aire.

Les forces d'arrossegament viscoses s'oposen al moviment d'un objecte sòlid al si d'un fluid.

- A velocitat baixa, $F_F \propto v \; i \; \eta$
- A velocitat alta, turbulència, $F_F \propto v^2$



La frontera entre els dos règims la marca el nombre de Reynolds. Per a una esfera que es mou dins d'un fluid, el nombre de Reynolds és:

$$N_R = \frac{\rho \, vR}{\eta}$$

on η és la viscositat del fluid, ρ la densitat del fluid, v la velocitat de l'esfera i R el radi de l'esfera.

Si $N_R < 1$, règim laminar o *fricció viscosa*, v petita o R petit
$N_R > 1$, règim turbulent, v gran o R gran.

Fricció viscosa

És el resultat del fregament entre la capa de fluid unida al sòlid i amb velocitat v (la mateixa que el sòlid) i les capes de fluid properes.

Llei de Stokes per a una esfera:

$$F_F = 6\pi \mathrm{R} v \eta$$

En general:

$F_F = \phi \mathrm{R} v \eta$, ϕ coeficient aerodinàmic, paràmetre adimensional de caràcter geomètric associat a la forma del sòlid

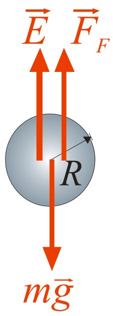
Velocitat límit:

Quan $v\uparrow$ llavors $F_F\uparrow \Rightarrow a = 0$

$$6\pi R v_L \eta + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g$$

$$6 v_L \eta = \frac{4}{3} R^2 g(\rho_s - \rho)$$

$$v_L = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta} g(\rho_s - \rho)$$



S'arriba a un punt en el qual F_F compensa la força que accelera el sòlid; llavors, la suma de forces = 0, a = 0, i el sòlid es mou a velocitat constant (F_F és constant). Aquesta velocitat és la *velocitat límit* o *velocitat màxima en caiguda lliure.*

on v_L és la velocitat límit, η és la viscositat del fluid, ρ és la densitat del fluid i ρ_s és la densitat del sòlid.

Cal recordar que aquest resultat només és vàlid en règim laminar, és a dir, quan $N_R < 1$.

Exemple 8: Una esfera d'acer de 0,1 cm de radi es deixa caure en un tub ple de glicerina. *a)* Suposant que la força d'arrossegament segueix la llei de Stokes, quines seran les velocitats límit de l'esfera si la glicerina està a 20 ºC, 40 ºC, 60 ºC i 80 ºC? *b)* Calculeu el nombre de Reynolds per als quatre casos anteriors. *c)* És correcte suposar que la força d'arrossegament segueix la llei de Stokes? Dades: el coeficient de viscositat de la glicerina és 1,30 Pa·s a 20 ºC, 0,34 Pa·s a 40 ºC, 0,10 Pa·s a 60 ºC i 0,036 Pa·s a 80 ºC, la densitat de l'acer és 7,8 g/cm^3 i la densitat de la glicerina és 1,26 g/cm^3.

a) Per a esferes: $v_L = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}g(\rho_s - \rho)$

$$v_L(20°\text{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m})^2}{1{,}3\ \text{Pa·s}} 9{,}81\ \text{m/s}^2(7.800 - 1.260)\text{kg/m}^3 = 0{,}11\ \text{m/s}$$

$$v_L(40°\text{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m})^2}{0{,}34\ \text{Pa·s}} 9{,}81\ \text{m/s}^2(7.800 - 1.260)\ \text{kg/m}^3 = 0{,}419\ \text{m/s}$$

$$v_L(60°\text{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m})^2}{0{,}10\ \text{Pa·s}} 9{,}81\ \text{m/s}^2(7.800 - 1.260)\ \text{kg/m}^3 = 1{,}424\ \text{m/s}$$

$$v_L(80°\text{C}) = \frac{2}{9}\frac{(0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m})^2}{0{,}036\ \text{Pa·s}} 9{,}81\ \text{m/s}^2(7.800 - 1.260)\ \text{kg/m}^3 = 3{,}956\ \text{m/s}$$

b) Per a esferes: $N_R = \frac{\rho\ \text{vR}}{\eta}$

$$N_R(20°\text{C}) = \frac{\rho\ \text{vR}}{\eta} = \frac{1.260\ \text{kg/m}^3\cdot 0{,}11\ \text{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m}}{1{,}3\ \text{Pa·s}} = 0{,}106 < 1$$

$$N_R(40°\text{C}) = \frac{\rho\ \text{vR}}{\eta} = \frac{1.260\ \text{kg/m}^3\cdot 0{,}0419\ \text{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m}}{0{,}34\ \text{Pa·s}} = 1{,}55 > 1$$

$$N_R(60°\text{C}) = \frac{\rho\ \text{vR}}{\eta} = \frac{1.260\ \text{kg/m}^3\cdot 0{,}1424\ \text{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m}}{0{,}10\ \text{Pa·s}} = 17{,}945 > 1$$

$$N_R(80°\text{C}) = \frac{\rho\ \text{vR}}{\eta} = \frac{1.260\ \text{kg/m}^3\cdot 0{,}3956\ \text{m/s}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{m}}{0{,}036\ \text{Pa·s}} = 138{,}5 > 1$$

c) A 20 ºC $N_R < 1$, és correcte aplicar Stokes,
a 40 ºC, 60 ºC i 80 ºC $N_R > 1$, no és correcte aplicar Stokes.

Forces d'arrossegament a alta velocitat

Quan $N_R > 1$, el règim no és laminar i no podem aplicar Stokes.
En aquest cas, la força de fricció viscosa és proporcional a la velocitat al quadrat del sòlid i no depèn de la viscositat:

$$F_F = C_A A \frac{\rho v^2}{2}$$

on A és la secció transversal (per a una esfera, πR^2) i C_A és el coeficient d'arrossegament.

C_A depèn del N_R i es mesura experimentalment o es calcula numèricament. De tota manera, la dependència de C_A a N_R és molt suau, de manera que <u>el podem considerar constant</u> en un rang de valors relativament ample de N_R.

Valors aproximats C_A	
Disc circular	1,2
Esfera	0,4

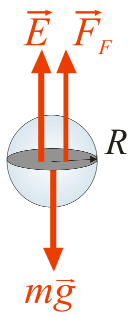
Avió	0,06

Velocitat límit:
Igual com en el cas del règim laminar, quan un objecte sòlid és accelerat per una força, en augmentar la velocitat, també augmenta la força de fricció viscosa (quan $v\uparrow$ llavors $F_F\uparrow$), de manera que s'arriba a un punt en el qual F_F compensa la força que accelera el sòlid; llavors, la suma de forces = 0, $a = 0$, i el sòlid es mou a velocitat constant.

$$C_A A \frac{\rho v_L^2}{2} + V\rho g = V\rho_s g$$

$$C_A A \frac{v_L^2}{2} = \mathrm{Vg}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)$$

$$v_L = \sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}}$$



Exemple 9: *a)* Esbrineu quan la velocitat límit en la caiguda lliure d'un home serà més petita: si estén els braços i les cames o si cau en posició encongida. Suposeu que un home de 80 kg de massa i densitat 0,96 kg/l salta des d'un avió. La densitat de l'aire a 20 ºC és d'1,204 kg/m^3. *b)* Quina és la velocitat límit si cau amb cames i braços estesos? Suposeu que el coeficient d'arrossegament és 1, i que la secció transversal és 0,56 m^2. *c)* Quina és la velocitat límit si cau en posició encongida? Suposeu que la secció transversal és 0,30 m^2.

El moviment d'objectes macroscòpics a l'aire sempre es dona en règim turbulent.

a) $v_L = \sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}}$,

si $A\uparrow \Rightarrow v\downarrow$, com que A estès > A encongit ⇒ v estès < v encongit

b)

$$v_L = \sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}} = \sqrt{2\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s}}{1}\left(\frac{960\ \mathrm{kg/m^3} - 1{,}204\ \mathrm{kg/m^3}}{1{,}204\ \mathrm{kg/m^3}}\right)\frac{0{,}0833\ \mathrm{m^3}}{0{,}56\ \mathrm{m^2}}} = \\ = 48{,}19\ \mathrm{m/s}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{80\ \mathrm{kg}}{960\ \mathrm{kg/m^3}} = 0{,}0833\ \mathrm{m^3}$$

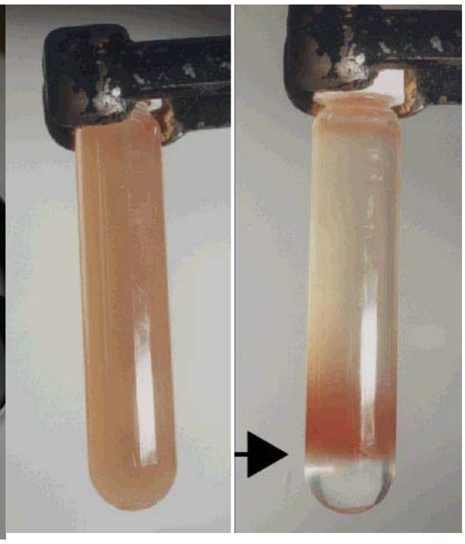
c)

$$v_L = \sqrt{2\frac{g}{C_A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)\frac{V}{A}} = \sqrt{2\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s}}{1}\left(\frac{960\ \mathrm{kg/m^3} - 1{,}204\ \mathrm{kg/m^3}}{1{,}204\ \mathrm{kg/m^3}}\right)\frac{0{,}0833\ \mathrm{m^3}}{0{,}30\ \mathrm{m^2}}} = \\ = 65{,}84\ \mathrm{m/s}$$

Aplicacions: centrifugació i sedimentació

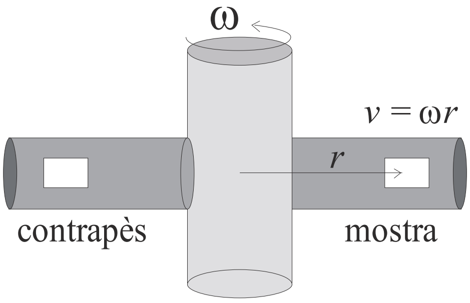
En biotecnologia, s'aprofiten les grans acceleracions obtingudes en girar de pressa per separar molècules de diferents grandàries als laboratoris. Per exemple, per separar els diferents components de la sang, per separar la caseïna de la llet, etc. També permeten determinar la massa de molècules i microorganismes i d'aquesta manera identificar molècules i microorganismes.

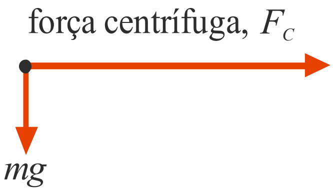
Centrifugadora



Abans i després de centrifugar

La velocitat d'una molècula depèn de la força d'arrossegament viscosa i de la seva massa.





$$F_C = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = ma_{CF}$$

Les centrifugadores es dissenyen de manera que $a_{CF} >> g$ (típicament a_{CF} pot ser de prop de 500.000 g), de manera que podem negligir la força de gravetat. Així, la mostra es comporta com si estigués en un planeta on el seu pes fos:

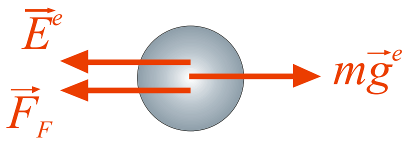
$$Pes^e = ma_{CF} = mg^e$$

Aquest pes es coneix amb el nom de *pes efectiu* i l'acceleració gravitatòria efectiva és:

$$g^e = a_{CF} = r\omega^2$$

Les molècules en suspensió que són més denses que el fluid es mouran cap a l'extrem empeses pel Pes^e, i finalment sedimentaran a l'extrem del tub.

$$Pes^e = mg^e$$
$$E^e = \rho V g^e$$
$$F_F = \phi R v \eta$$
$$V = \frac{m}{\rho_m}$$



on ϕ és el coeficient aerodinàmic (adimensional), v és la velocitat de la molècula, η és la viscositat del fluid, ρ és la densitat del fluid i ρ_m és la densitat de la molècula.

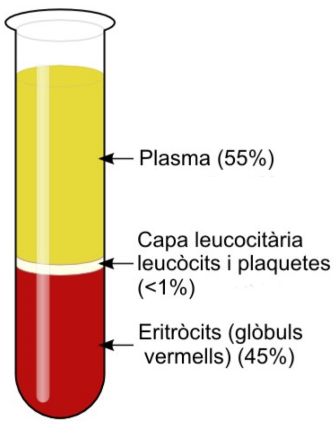
La velocitat límit, v_L, és donada per:

$$\phi R v_L \eta + \rho V g^e = mg^e \Rightarrow \phi R v_L \eta = mg^e - \rho V g^e = mg^e\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$
$$v_L = \frac{mg^e}{\phi R \eta}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

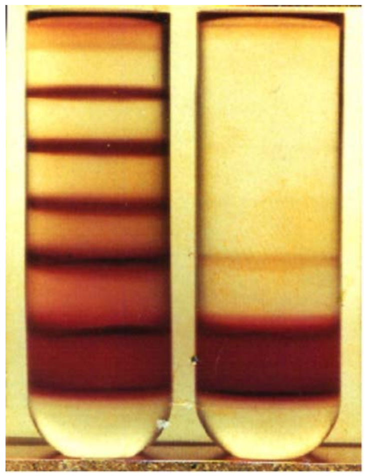
El terme ϕR s'anomena *factor geomètric* i té unitats de longitud.

Aplicacions:

- Si coneixem la massa de la molècula, la viscositat, la densitat del líquid i de la molècula, ϕ i g^e, podem determinar el temps que triga a sedimentar la mostra. Generalment, es determina experimentalment la constant $\frac{m}{\phi R \eta}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$; llavors, a partir de la velocitat de gir, ω, podem controlar g^e ($g^e = r\omega^2$), i finalment calcular el temps necessari per sedimentar.
- La velocitat v_L es pot mesurar òpticament i $\phi R \eta$ també es pot determinar, de manera que podem mesurar les masses moleculars.
- Si tenim una mostra amb diferents molècules (o microorganismes), les podem separar, atès que per a un temps donat es mouran a diferents velocitats i, per tant, la distància que recorreran serà diferent. D'altra banda, atès el temps i l'espai recorregut, podem determinar v_L, i d'aquesta manera identificar les diferents molècules.



Separació dels components de la sang per centrifugació



Esquerra, sang infectada per la malària; dreta, sang normal

Exemple 10: El virus del mosaic del tabac té una densitat de 1.370 kg/m^3 i el factor geomètric en aigua és 1,16 10^{-6} m a 37 ºC. Si l'acceleració centrífuga és igual a 2,0·10^5 g i el valor experimental de la velocitat de sedimentació a 37 ºC és 3,7·10^{-5} m/s, quina és la massa molecular d'aquest virus?

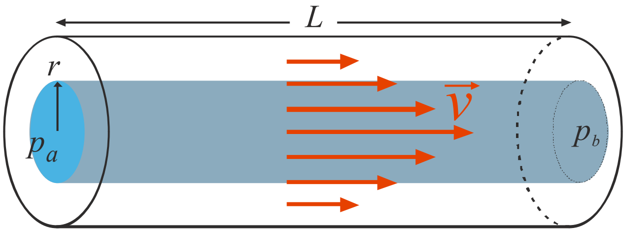
$$v_L = \frac{\mathrm{m}g^e}{\varphi R\eta}\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right) \Rightarrow$$

$$m = \frac{\varphi R\eta v_L}{g^e}\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right)^{-1} = \frac{3{,}7\ 10^5\ \mathrm{m/s}\cdot 1{,}16\ 10^{-6}\ \mathrm{m}\cdot 1{,}005\ 10^{-3}\ Pa\cdot s}{2\ 10^5\cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}\left(1-\frac{1.000\ \mathrm{kg/m^3}}{1.370\ \mathrm{kg/m^3}}\right) =$$

$$= 8{,}15\ 10^{-20}\ \mathrm{kg}\frac{1\ \mathrm{uma}}{1{,}66\ 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 4{,}91\ 10^6\ \mathrm{uma}$$

Demostració de la llei de Poiseuille

Suposem que el flux al llarg de la canonada de radi R i longitud L és laminar. Dividim el flux en cilindres de radi r. La velocitat del fluid depèn de la distància r. Al centre ($r = 0$) la velocitat és màxima, mentre que a la capa de fluid en contacte amb les parets ($r = R$) el fluid està aturat ($v = 0$).



Per demostrar la llei de Poiseuille farem la suma de forces sobre el cilindre de radi r. Aquesta suma ha de ser nul·la per tal que la velocitat sigui constant (independent del temps). Tenim dues forces, la que fa la diferència de pressió $\Delta p = p_a - p_b$, que empeny el fluid cap endavant, i la força de fricció viscosa amb el fluid que envolta el cilindre $F_v(r)$, que s'oposa al moviment del fluid:

$$\Delta p A_T = F_v(r)$$

on $A_T = \pi r^2$

I de la definició de viscositat, les forces de fricció són:

$$F(r) = -\eta\ A_L\frac{dv}{dr} = -\eta\ 2\pi rL\frac{dv}{dr}$$

El signe negatiu sorgeix del fet que el gradient $\frac{dv}{dr}$ és negatiu (la velocitat disminueix quan r augmenta) i estem calculant el mòdul de les forces, que ha de ser positiu.

Llavors, si la velocitat de la capa és constant, la suma de forces és nul·la:

$$\Delta p\pi r^2 = -\eta\ 2\pi rL\frac{dv}{dr} \Rightarrow dv = -\frac{\Delta pr}{2\eta L}dr$$

Si integrem l'equació anterior tenim:

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{2\eta L}\int r\,dr = -\frac{\Delta p}{4\eta L}r^2 + C$$

A més, sabem que $v(R) = 0$:

$$v(R) = 0 \Rightarrow C = \frac{\Delta p}{4\eta L}r^2$$

El perfil de velocitats és:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Per tal d'expressar aquesta relació en funció del cabal Q o de la velocitat mitjana $\bar{v} \equiv \frac{Q}{\pi R^2}$, cal integrar el perfil de velocitats:

$$\bar{v} \equiv \frac{1}{\pi R^2}\int v(r) 2\pi r dr = \frac{2}{R^2}\int v(r) r dr = \frac{2}{R^2}\int \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2) r dr =$$

$$= \frac{\Delta p}{2\eta L R^2}\left[R^2 \int r dr - \int r^3 dr\right] = \frac{\Delta p}{2\eta L R^2}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\Delta p R^2}{8\eta L}$$

I finalment, si a l'expressió anterior aïllem la diferència de pressions, tenim:

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{R^2}\bar{v} \text{ QED}$$

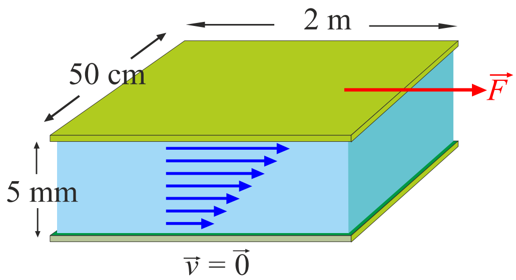
Qüestions del tema 12

Viscositat

1. La relació entre la viscositat i la viscositat cinemàtica en funció de la temperatura és lineal? Justifiqueu la resposta.

Sol.: no, atès que la densitat d'un fluid també depèn de la temperatura.

2. Una capa de 5 mm de gruix d'un fluid separa dues làmines planoparal·leles. La làmina inferior es manté aturada mentre que s'aplica una força F per tal de mantenir la placa superior en moviment a una velocitat de 0,1 m/s. Determineu el cabal que circula entre les dues làmines i la força F que cal aplicar. Dades la viscositat del fluid és 0,8 Pa·s i les dimensions de les làmines són de 50 cm × 200 cm.



Sol.: 16 N, 0,05 m^3/s.

Flux laminar i turbulent

3. S'ha comprovat experimentalment que el flux d'un fluid de densitat ρ i viscositat η a través d'una canonada de radi r és laminar si el nombre de Reynolds és més petit que 2.000 i és inestable (intermitent o turbulent) quan és superior a 2.000. Recordeu que el nombre de Reynolds es defineix com: $N_R = \frac{2\rho\bar{v}r}{\eta}$, on $\bar{v}$ és la velocitat mitjana del fluid dins la canonada. *a)* Calculeu el nombre de Reynolds per al flux de la sang a través de l'aorta i d'un capil·lar. *b)* Com és el flux de la sang en sistema circulatori, laminar o turbulent? Dades: a 37 ºC la densitat de la sang és 1,0595 g/cm^3 i la viscositat és 2,084 cp, el radi típic d'un capil·lar és 2 μm i la velocitat del flux sanguini és 0,33 mm/s i a l'aorta el radi és d'1,3 cm i la velocitat mitjana del flux sanguini és 0,2 m/s.

Sol.: *a)* 2.643 i $6{,}71\cdot10^{-4}$; *b)* inestable a l'aorta i laminar al capil·lar

Flux viscós

4. Un oleoducte d'1 km de llarg i una secció d'1 m de diàmetre ha de superar un desnivell de 20 m. Per l'oleoducte circula un cabal de petroli de 10 l/s. *a)* Calculeu la potència de la bomba que hauríem de situar al principi de l'oleoducte per superar el desnivell. Suposeu que es tracta d'un fluid ideal. *b)* Es possible calcular la resistència al flux de la canonada? En cas afirmatiu doneu el valor de la resistència al flux de la canonada. *c)* Quina potència es perd per culpa de la fricció? A partir d'aquest resultat justifiqueu si es correcte l'aproximació de fluid ideal feta a l'apartat *a)*. Si en lloc de transportar petroli, l'oleoducte transportés gasolina. *d)* És possible calcular la resistència al flux de la canonada? En cas afirmatiu doneu el valor de la resistència al flux de la canonada. *e)* En quin cas és més gran la resistència al flux? Dades: Densitat de la gasolina 680 kg/m^3, densitat del petroli 860 kg/m^3, viscositat de la gasolina 3,2 10^{-4} Pa·s i viscositat del petroli=8,4 10^{-3} Pa·s.

Sol.: *a)* 1687 W; *b)* Sí, 342 Pa·s/m^3; *c)* 0,0342 W; *d)* No; *e)* per la gasolina.

5. L'oli d'un motor passa per un tub de 0,90 mm de radi i una longitud de 55 mm, sent $4{,}0 \cdot 10^{3}$ Pa la diferència de pressió entre els extrems del tub. Quin és el cabal que circula per aquest tub? Dada: la viscositat de l'oli 0,20 Pa·s.

Sol.: $9{,}36\ 10^{-8}\ m^3/s$.

6. Quina és la potència dissipada en un tub que transporta un fluid amb un cabal de $0{,}15\ m^3/s$ si la resistència al flux és de $4 \cdot 10^{4}\ Pa \cdot s/m^3$?

Sol.: 900 W

7. Es fa passar per un tub un cabal de $0{,}01\ m^3/s$ d'un fluid determinat. La potència dissipada és 1,5 W per cada metre de longitud. Quina és la resistència al flux en un metre de tub?

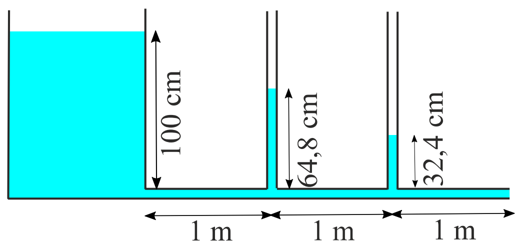
Sol.: $15.000\ Pa \cdot s/m^3$

8. Per un tub de 0,02 m de radi flueix aigua que està a una temperatura de 20 ºC. A cada metre de longitud es produeix una caiguda de pressió de 100 Pa i una disminució de potència de 0,8 W. *a)* Quin és el cabal que circula pel tub? *b)* Quina és la velocitat mitjana de l'aigua? *c)* És laminar el flux?

Sol.: *a)* $8 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$; *b)* 6,37 m/s; *c)* no

9. Una canonada prima per la qual circula $4{,}0\ cm^3/s$ d'aigua (ρ=1000 kg/m^3, η=1,005 10^{-3} Pa·s) està formada per dos tubs rectes units en sèrie de 2,5 i 1,5 mm de radi, i de 3 i 2 m de llarg, respectivament. Determineu: *a)* la resistència al flux de la canonada *b)* la caiguda de pressió al llarg de la canonada i *c)* si mantenim el cabal fins a quin radi podem reduir la segon tram a fi de mantenir un flux laminar.

Sol.: *a)* $1{,}207 \cdot 10^{9}\ \frac{\mathrm{Pa \cdot s}}{\mathrm{m}^3}$; *b)* 4830 Pa; *c)* 1,27 mm.



10. El dipòsit de la figura conté un líquid de densitat 1050 kg/m^3 i desaigua a l'atmosfera per un tub horitzontal recte de 3 m de longitud i 2 mm de radi. Separats a 1 m de distància s'han ubicat uns tubs verticals oberts a l'atmosfera. El nivell de líquid en el dipòsit i en els tubs verticals està situat a 100, 64,8 i 32,4 cm per sobre del tub, respectivament. Suposant que el flux és laminar, calculeu: *a)* el cabal que surt del dipòsit, *b)* La viscositat del líquid i *c)* el màxim nivell del líquid en el dipòsit perquè el flux sigui laminar. Suposeu que el nivell del dipòsit és manté constant.

Sol.: *a)* $9{,}31\ 10^{-6}\ m^3/s$; *b)* $2{,}25\ 10^{-3}$ Pa·s; *c)* 1,464 m.

11. La caiguda de pressió al llarg d'una canonada de coure és de 103 Pa i el cabal de líquid al llarg d'aquesta canonada és $0{,}01\ m^3/s$. *a)* Quina és la resistència al flux? *b)* Quina potència cal subministrar per mantenir el flux? *c)* Aquest càlcul és vàlid tant per a un flux laminar com per a un flux turbulent?

Sol.: *a)* $10{,}3\ kPa \cdot s/m^3$; *b)* 103 W; *c)* sí

Moviment de sòlids en fluids

12. Calculeu la velocitat límit de caiguda d'una gota d'aigua a l'aire segons la mida de la gota i suposant règim laminar (llei de Stokes) i règim turbulent. Feu el càlcul per gotes de 0.1, 1, 10, 100 μm i 1 i 10 mm. Representeu els valors de les velocitats respecte del radi en una gràfica d'escales logarítmiques. Observeu que les dues línies es tallen en un punt, que correspon aproximadament al punt en que el règim del flux passa de ser laminar a ser turbulent. Calculeu el radi on això succeeix, és a dir, el radi en que les dues aproximacions donen la mateixa velocitat límit. Per aquest radi, determineu el nombre de Reynolds. Dades: considereu C_A=1,2; densitat de l'aigua=1g/cm^3; viscositat de l'aire= $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s. Negligiu l'efecte de l'empenyiment sobre les gotes.

Sol.: 10,475 μm, 10

13. Un glòbul vermell esfèric de $5 \cdot 10^{-6}$ m de radi i densitat $1{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3 està en aigua a 37 ºC. Quina serà la seva velocitat límit en caiguda? Dades: densitat de l'aigua a 37 ºC, 992 kg/m^3; viscositat de l'aigua a 37 ºC, 0,695 cp. Suposeu que es compleix la llei de Stokes.

Sol.: $2{,}41 \cdot 10^{-5}$ m/s

14. *a)* Quin és el radi màxim d'una partícula de pols de densitat $3 \cdot 10^3$ kg/m^3 perquè la llei de Stokes sigui vàlida en el càlcul de la velocitat límit de caiguda d'aquesta partícula en aire a 20 ºC? *b)* Repetiu l'apartat anterior però suposant que la partícula es mou en aigua a 20 ºC? Dades: la densitat i la viscositat de l'aire a 20 ºC són 1,204 kg/m^3 i $1{,}81 \cdot 10^{-5}$ Pa·s, respectivament; la densitat i la viscositat de l'aigua a 20 ºC són 998 kg/m^3 i $1{,}005 \cdot 10^{-3}$ Pa·s.

Sol.: *a)* $3{,}47 \cdot 10^{-5}$ m; *b)* $6{,}14 \cdot 10^{-5}$ m

15. Considerem que tenim dos objectes del mateix material (acer, densitat 7 g/cm^3), un de forma esfèrica i el segon en forma d'una làmina quadrada d'1 cm de gruix. Les dues peces contenen 1 kg de material. *a)* Determineu el radi de l'esfera i el costat del quadrat, de les dues peces. Deixem caure els dos objectes des d'una alçada de 20 m. La làmina la fem caure amb la cara quadrada en posició horitzontal. Com que el règim és turbulent, suposeu que el coeficient d'arrossegament és igual a 1. La densitat de l'aire és 1,3 kg/m^3. *b)* Quina és la velocitat límit de caiguda de cadascun dels dos objectes? *c)* Quin dels dos arribarà primer a terra?

Sol.: *a)* 0,0324 m i 0,119 m; *b)* 67,6 m/s, 32,5 m/s; *c)* la bola

16. En un dia de tempesta, la pedra, que té una forma aproximadament circular, pot assolir fàcilment dimensions de prop d'1 cm de radi. *a)* Quina velocitat límit assoleix la pedra si suposem que la força de fricció deguda a l'aire és determinada per la llei de Stokes? *b)* Quina velocitat límit assoleix la pedra si suposem que el moviment de l'aire al voltant de la pedra és turbulent? *c)* Calculeu el nombre de Reynolds per al primer cas i indiqueu quin dels dos resultats és més realista. Dades: densitat del gel, 0,917 g/cm^3, densitat de l'aire a 20 ºC, 1,204 kg/m^3; viscositat de l'aire a 20 ºC, $1{,}81 \cdot 10^{-5}$ Pa·s, i suposeu que el coeficient d'arrossegament és igual a 1.

Sol.: *a)* 11.000 m/s; *b)* 14,1 m/s; *c)* $7{,}33 \cdot 10^6$, el segon resultat és molt més realista.

17. Els músculs encarregats d'impulsar un peix dins l'aigua generen una potència de 0,4 kW, el 60 % de la qual s'aprofita per a la natació. Si el peix pot arribar a moure's fins a una velocitat de 5 m/s i l'àrea màxima de la seva secció transversal en la direcció del moviment és de 100 cm^2, quin és el valor del coeficient d'arrossegament?

Sol.: 0,384

18. Una pilota de beisbol té una massa de 0,149 kg i un radi de 0,037 m. Una pilota de tennis de taula té una massa de $3 \cdot 10^{-3}$ kg i un radi de 0,018 m. Es llancen ambdues a l'aire a una velocitat horitzontal de 15 m/s. *a)* Quina és inicialment la raó entre les forces d'arrossegament que actuen sobre cadascuna de les pilotes? *b)* Quina és inicialment l'acceleració deguda a la força d'arrossegament que actua sobre cadascuna de les pilotes? Nota: suposeu que $C_A = 1{,}0$.

Sol.: *a)* 4,22; *b)* 3,91 m/s^2; 45,9 m/s^2

Centrifugació i sedimentació

19. La molècula d'una proteïna té una massa de 10^5 uma (1 uma = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg) i una densitat d'$1{,}35 \cdot 10^3$ kg/m^3. Dins d'una centrifugadora se sotmet a una acceleració de $2 \cdot 10^5$ *g*. *a)* Si es troba en aigua, quin és el seu pes efectiu? *b)* Quina és la força d'empenta?

Sol.: *a)* $3{,}25 \cdot 10^{-16}$ N; *b)* $2{,}41 \cdot 10^{-16}$ N

20. Un virus té una massa molecular d'$1{,}06 \cdot 10^7$ uma i una densitat d'$1{,}35 \cdot 10^3$ kg/m^3. El factor geomètric en aigua val $3{,}58 \cdot 10^{-7}$ m a 20 ºC. Quant temps cal perquè sedimenti 10^{-2} m si l'acceleració centrífuga és igual a 10^5 *g*?

Sol.: 805 s

V. Termodinàmica

13. Termometria i calorimetria

Objectius

- Què és la temperatura?
- Concepte d'equilibri tèrmic
- Descripció de diferents escales de temperatura
- Descripció de l'escala absoluta de temperatures
- Descripció del gas ideal
- Concepte de gram/mol
- Descripció de la mescla de gasos
- Descripció de la dilatació tèrmica
- Concepte de calor i de capacitat calorífica
- Descripció dels canvis de fase
- Interpretació dels diagrames de fase de substàncies pures

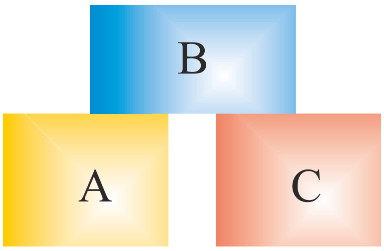
Termometria. Principi zero de la termodinàmica

Què és la temperatura? És una mesura de l'energia cinètica mitjana de les partícules (molècules o àtoms) que formen la matèria en un punt donat.

Com podem mesurar la temperatura?

Per entendre com mesurar la temperatura, primer cal descriure què és l'equilibri tèrmic i el principi zero de la termodinàmica.

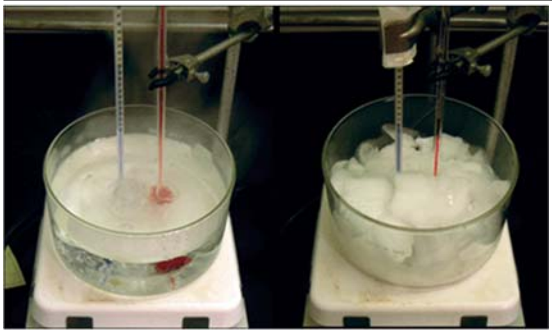
Equilibri tèrmic Un objecte està en equilibri tèrmic quan la temperatura és constant en tot l'objecte i no varia en el temps. L'objecte està a una temperatura constant T_{eq}.

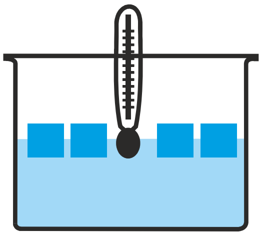


Principi zero de la termodinàmica. Si un cos A està en equilibri tèrmic amb un cos B, i aquest cos B està en equilibri tèrmic amb un cos C, llavors el cos A està en equilibri tèrmic amb el cos C.

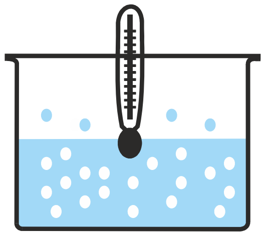
Aquest principi és el fonament de funcionament dels termòmetres. En aquest cas, el cos B seria qui faria el paper de termòmetre i el cos A seria la referència o patró.

Els termòmetres es basen en el que anomenem una *propietat termomètrica*, és a dir, una propietat que depèn de la temperatura i a partir de la qual ens serà possible determinar la temperatura mitjançant un calibratge. Per exemple, el termòmetre de mercuri: el volum ocupat pel mercuri és proporcional a la temperatura (això correspon al fenomen de la dilatació, que descriurem més endavant).





T=0ºC
Aigua amb gel



T=100ºC
Aigua en ebullició

Calibratge: generalment es treballa amb dos punts de calibratge. Un punt de calibratge és un sistema que està en equilibri tèrmic. Per exemple, el punt de gel, on coexisteixen aigua i gel en equilibri (T = 0 ºC) i el punt d'ebullició de l'aigua (T = 100 ºC), tots dos a pressió atmosfèrica.

El principi zero ens assegura que si ara col·loquem el termòmetre en contacte amb qualsevol altre objecte i la columna de mercuri se situa a la marca de 0 ºC, llavors aquest objecte es troba a la mateixa temperatura que l'aigua en equilibri amb el gel, és a dir, a 0 ºC.

Altres propietats termomètriques:

a) Longitud d'una columna: termòmetre de mercuri o alcohol.
b) Resistència elèctrica. Termistors.
c) Diferència de potencial entre dos conductors diferents soldats en un extrem. Termoparells.
d) Color.
e) Pressió d'un gas a volum constant.

Calibratge d'una propietat termoelèctrica lineal:

Sigui la propietat $p(T)$ proporcional a la temperatura,
$T = k \cdot p + b$ i tenim p(100 ºC) i p(0 ºC).

$$\left.\begin{array}{r} 100°\mathrm{C} = k \cdot p(100°\mathrm{C}) + b \\ 0°\mathrm{C} = k \cdot p(0°\mathrm{C}) + b \\ T = k \cdot p + b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 100°\mathrm{C} - 0°\mathrm{C} = k[p(100°\mathrm{C}) - p(0°\mathrm{C})] \\ T - 0°\mathrm{C} = k[p(T) - p(0°\mathrm{C})] \end{array}\right\}$$

$$\frac{T - 0°\mathrm{C}}{100°\mathrm{C} - 0°\mathrm{C}} = \frac{p(T) - p(0°\mathrm{C})}{p(100°\mathrm{C}) - p(0°\mathrm{C})} \Rightarrow T = \frac{p(T) - p(0°\mathrm{C})}{p(100°\mathrm{C}) - p(0°\mathrm{C})} 100°\mathrm{C}$$

En general, si tenim T_1, T_2, p_1 i p_2, llavors,

$$T = \frac{p(T) - p_2}{p_1 - p_2}(T_1 - T_2) + T_2$$

Escales de temperatura

Depenent de les referències emprades en els calibratges s'obtenen escales diferents. Les més emprades:

– Grau centígrad, ºC
– Grau Fahrenheit (molt emprada als EUA), ºF
– Kelvin, K, és la unitat del SI. L'analitzarem més endavant.

La temperatura en graus Fahrenheit en els dos punts de calibratge de l'escala centígrada són:

Punt de gel, 0 ºC → 32 ºF
Punt d'ebullició, 100 ºC → 212 ºF

Conversió de ºC a ºF i viceversa:

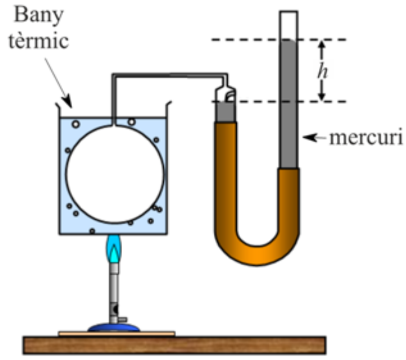
$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32ºF) \Leftrightarrow T_F = \frac{9}{5}T_C + 32ºF$$

Termòmetre de gas. Escala absoluta de la temperatura

Les propietats termomètriques tenen dos problemes:

a) Les escales són limitades, no abasten tot el rang de temperatures.
b) No són perfectament lineals.

Per aquesta raó, termòmetres ben calibrats poden donar lectures diferents.

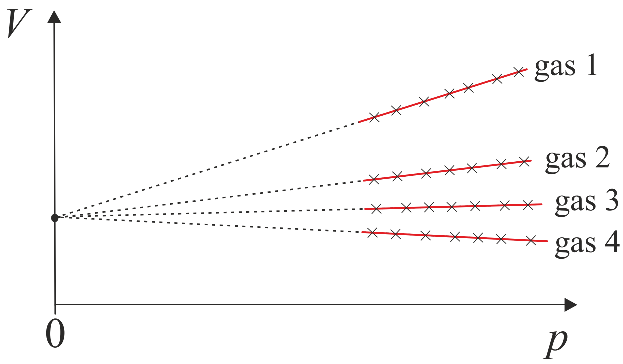


Llavors, quina escala és la bona?

El termòmetre que es fa servir com a referència per crear l'escala absoluta de temperatures és el termòmetre de gas. La propietat termomètrica és que en un gas ideal el producte de la pressió pel volum és proporcional a la temperatura.

$pV \propto T$

El gas ideal no existeix, i la relació anterior depèn del gas, però si mantenim V constant i reduïm la pressió p (enrarim el gas, cada vegada hi ha menys molècules dins del recipient), llavors observem que quan $p \to 0$, tots els gasos convergeixen al mateix valor. Aquest límit, el del gas enrarit, correspon al gas ideal. L'escala universal s'estableix a partir del valor límit; d'aquesta manera la mesura de la temperatura no depèn del gas. A més, en el límit de gas ideal, el producte pV és perfectament lineal, i això ens permet establir una escala universal de temperatura.

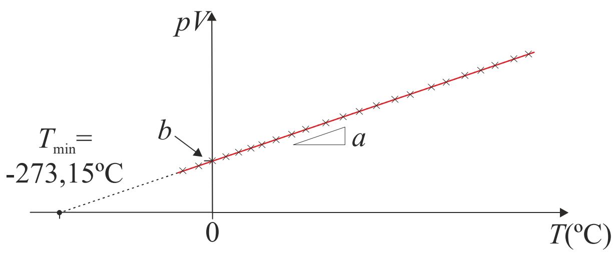


Escala absoluta

El producte pV depèn linealment de la temperatura,

$pV = aT + b$

On a és el pendent i b la coordenada a l'origen.



En el límit $pV \to 0$, la temperatura és $T_{min} = -273{,}15$ ºC. No poden existir temperatures inferiors. Això ens permet establir una escala absoluta de la temperatura, en què la unitat és el kelvin:

$$T_K = T_c + 273{,}15$$

La escala Kelvin és la mateixa escala que la centígrada; l'única diferència és que hem fet coincidir l'origen amb el valor mínim de la temperatura, així:

- $T_{min} = 0$ K i en l'escala absoluta T en K > 0. No existeixen temperatures negatives en l'escala absoluta.
- Els increments de temperatura són iguals en K i en ºC, és a dir, un augment de 10 ºC també és un augment de 10 K, la diferència entre les dues escales està en els valors absoluts, els increments són iguals.

Per altra banda, si utilitzem l'escala absoluta, la relació pV per a un gas ideal se simplifica:

$$pV = aT$$

Noteu que es fa servir grau centígrad ºC o Fahrenheit ºF, però la unitat en sistema internacional és el kelvin, K, no feu servir mai ~~ºK~~.

El canvi d'escala de temperatures no es pot fer amb un simple factor de conversió; això vol dir que les relacions que deduirem tot seguit només són vàlides si fem servir les unitats Kelvin per a la temperatura.

Gas ideal

Hem vist que si fem servir l'escala de temperatures Kelvin, llavors en el límit del gas ideal es compleix que

$$pV = aT$$

El pendent a, per al gas ideal, només depèn de la quantitat de gas i no de la naturalesa del gas.

$$a = \text{nR on } \begin{cases} n, \text{ nombre de mols} \\ R, \text{ constant dels gasos ideals} \end{cases}$$

R es pot determinar experimentalment i és igual a:

$$R = \underbrace{8{,}314 \frac{J}{K\ \text{mol}}}_{\text{SI}} = 0{,}08207 \frac{\text{atm } l}{K\ \text{mol}}$$

Així doncs, l'equació que descriu un gas ideal és:

$$pV = nRT$$

Que és un mol?

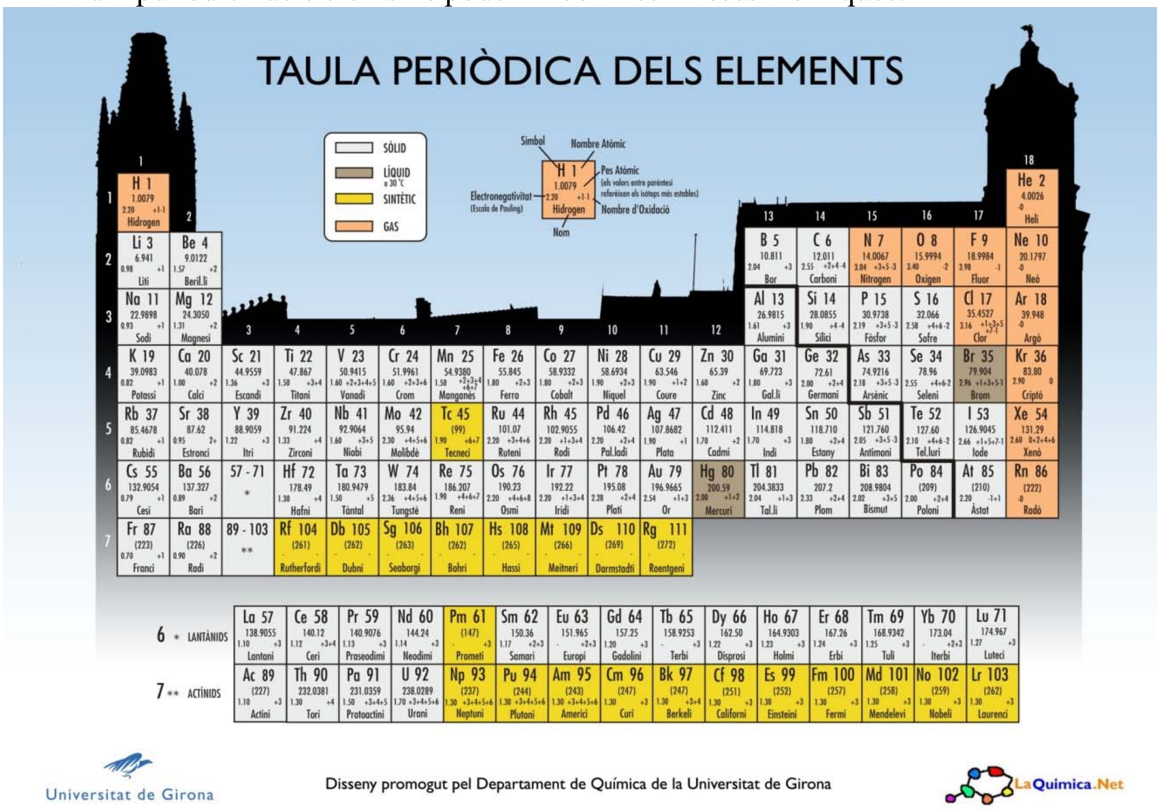
La massa dels àtoms i molècules es mesuren en UMA (unitats de massa atòmica). Una UMA és aproximadament la massa d'un protó (que al seu torn és aproximadament la massa d'un neutró):

$$m_{\text{protó}} \approx m_{\text{neutró}}\, m \approx 1 \text{ uma} = 1{,}660 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Com la massa dels àtoms està pràcticament concentrada en el seu nucli, llavors la massa atòmica és aproximadament el numero de protons+ numero de neutrons en unitats UMA. Per exemple,

Massa atòmica del C: 12 UMA
Massa atòmica del H 1 UMA
Massa atòmica del O: 16 UMA
Massa atòmica del CO_2: 44 UMA
Massa atòmica de H_2O: 18 UMA

A la taula periòdica dels elements podem trobar les masses atòmiques:



Un mol és simplement la quantitat de substància (numero de partícules) de manera que la massa en grams és igual a la massa molecular, així:

1 mol de CO_2 té una massa de 44 g
1 mol de H_2O té una massa de 18 g

Quants protons (neutrons) calen per aconseguir una massa d'1 g?
Solució: nombre d'Avogadro, , N_A:

$$N_A \cdot m_{\text{protó}} = 1\text{ g} \Rightarrow N_A = \frac{1\text{ g}}{m_{\text{protó}}} = 6{,}023 \cdot 10^{23}$$

Així 1 mol són N_A àtoms o molècules, és a dir, 1 mol d'àtoms són $6{,}023\times10^{23}$ àtoms

Mescla de gasos

$$\text{Aire sec:}\quad \left.\begin{array}{r} 78\%\ N_2 \\ 21\%\ O_2 \\ 1\%\ H_2, He, \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}78\text{ mols de N}_2 \\ 0{,}21\text{ mols d'O}_2 \\ 0{,}01\text{ mols d'altres gasos} \end{array}$$

La llei de Dalton estableix que en una barreja de gasos ideals que no reaccionen entre ells, cada gas es comporta de forma independent, de manera que podem aplicar per cada gas la llei dels gasos ideals

$$\begin{aligned} p(\mathrm{N_2}) \cdot V &= n(\mathrm{N_2})RT \\ p(\mathrm{O_2}) \cdot V &= n(\mathrm{O_2})RT \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; &+ \\ (p(\mathrm{N_2}) + p(\mathrm{O_2}) + \cdots)V &= (n(\mathrm{N_2}) + n(\mathrm{O_2}) + \cdots)RT \\ pV &= nRT \end{aligned}$$

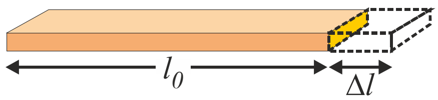
Els terme $p(\mathrm{N_2})$ és la pressió parcial de nitrogen i és la contribució del $\mathrm{N_2}$ a la pressió total:

$$p = p(\mathrm{N_2}) + p(\mathrm{O_2}) + \cdots$$

Observeu que la pressió parcial de $\mathrm{N_2}$ és proporcional a la quantitat de $\mathrm{N_2}$.

Dilatació tèrmica

Quan la temperatura d'una substància varia, el seu volum canvia. Un increment de temperatura, ΔT, produeix un increment de longitud, Δl, i que és proporcional a la longitud inicial l_0 i a ΔT:



$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T \text{ ó } \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T$$

α és el coeficient de dilatació lineal i té unitats de $\mathrm{K^{-1}}$ o $\mathrm{ºC^{-1}}$.

Donat α en unitats de $\mathrm{K^{-1}}$, quins canvis s'han de fer la conversió a uniats de $\mathrm{ºC^{-1}}$?

α depèn del material i també de la temperatura, encara que la dependència en la temperatura és molt suau de manera que per intervals de temperatura moderats es pot considerar constant.

Per alguns materials a 20ºC:

Substància	α(20ºC), $\mathrm{K^{-1}}$
alumini	$2{,}5\times10^{-5}$
acer	$1{,}1\times10^{-5}$
platí	$8{,}9\times10^{-6}$
diamant	$1{,}2\times10^{-6}$
Invar	$1{,}0\times10^{-6}$
Vidre pyrex	$3{,}2\times10^{-6}$
Vidre normal	9×10^{-6}
Grafit	$7{,}9\times10^{-6}$
Coure	17×10^{-6}

El canvi de volum es pot determinar a partir del coeficient de dilatació volumètric, β:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T$$

Les unitats de β són $\mathrm{K^{-1}}$ o $\mathrm{ºC^{-1}}$.

Si el material és isòtrop, llavors $\beta = 3\alpha$.

Demostració

$$V = l^3$$

$$\frac{dV}{dl} = 3l^2 \;\Rightarrow\; dV = 3l^2 dl \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{3l^2}{l^3} dl = 3\frac{dl}{l}$$

Llavors, per a increments petits,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3l^2}{l^3}\,\mathrm{dl} = 3\frac{\Delta l}{l}$$

Per altra banda,

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T$$

I finalment:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha\Delta T \;\Rightarrow\; \beta = 3\alpha$$

Calor i capacitat calorífica

Per canviar la temperatura d'un material cal transferir-li energia, per exemple apropant-lo a un objecte que està a una temperatura més alta.

La *calor*, Q, es defineix com la mesura de la transferència d'energia deguda a una diferència de temperatura entre dos objectes.

Les unitats són les mateixes que les de l'energia, joules.

La *capacitat calorífica*, C, d'un objecte és la relació entre l'energia transferida a aquest objecte i l'augment de temperatura causat per aquesta transferència d'energia:

$$Q = C\Delta T \;\Rightarrow\; C = \frac{Q}{\Delta T}$$

Les unitats són joules/kelvins.

La capacitat calorífica d'un objecte depèn de la temperatura, de la seva massa (quantitat de substància) i del material.

Definim la *calor específica*, c, d'una substància com a:

$c \equiv C/m$,   les unitats són joules/(kelvins·kg).

La calor específica té la virtut de dependre només de la temperatura i del material. En dividir per la massa, la dependència de la quantitat de material desapareix.

Calors específiques de diverses substàncies a 20 ºC

Substància	**kJ/kg·K**
Aigua líquida	4,184
Vapor d'aigua (100 ºC)	2,01
Alcohol etílic	2,4
Alumini	0,900
Bismut	0,123
Coure	0,386
Gel (–10 ºC)	2,05
Mercuri	0,140
Or	0,126
Plata	0,223
Tungstè	0,134
Zinc	0,387
Plom	0,128

Si comparem l'aigua i l'or, tenim:

$$\left.\begin{aligned} c_{H_2O} &= 4{,}18 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \\ c_{\mathrm{or}} &= 0{,}126 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \end{aligned}\right\}$$

cal transferir més energia a l'aigua per aconseguir el mateix augment de temperatura en aigua i en or. De fet, l'aigua és una substància que es caracteritza per una calor específica relativament gran.

Nova unitat, la caloria: quantitat de calor que cal subministrar a 1 g d'aigua a 20 ºC per augmentar la seva temperatura 1 ºC:

$$1\ \mathrm{cal} = 4{,}184 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \times 10^{-3}\ \mathrm{kg} \times 1\ \mathrm{K} = 4{,}184\ \mathrm{J}$$

A més, es defineix la *capacitat molar* com la raó entre la capacitat calorífica i el nombre de mols:

$c_m \equiv C/n$,   les unitats són joules/(kelvins·mols).

La capacitat molar també depèn només de la temperatura i del material. La relació entre la capacitat molar i la calor específica la dona la massa molar, M, de la substància:

$$c_m \equiv \frac{C}{n} = \frac{mc}{n} = Mc$$

Per exemple, per a l'aigua

$$c = 4{,}184 \times 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \times \frac{1\ \mathrm{kg}}{1000\ \mathrm{g}} \times \frac{18\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{mol}} = 75{,}2 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$$

Els gasos són un cas especial, ja que la capacitat molar depèn de si el procés es fa a volum o a pressió constant. A pressió constant cal subministrar més energia, atès que la calor no només serveix per escalfar el gas, sinó que també s'utilitza per augmentar el volum (com veurem en el tema 15, una part de la calor s'inverteix a realitzar un treball d'expansió).

Es pot demostrar que, per als gasos ideals monoatòmics (He, Ar, Ne), la capacitat calorífica és:

$C_V = \frac{3}{2} nR$ (capacitat a volum constant)

$C_p = \frac{5}{2} nR$ (capacitat a pressió constant)

i per als gasos ideals diatòmics (O_2, N_2, H_2), la capacitat calorífica és:

$C_V = \frac{5}{2} nR$

$C_p = \frac{7}{2} nR$

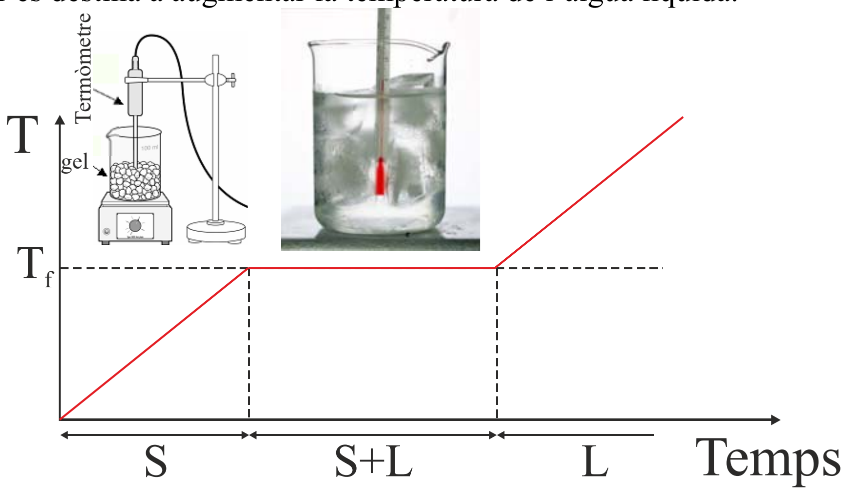
Canvis d’estat: calor latent

A banda de l’augment de la temperatura, la transferència d’energia també pot provocar un canvi d’estat de la matèria:

$$\text{Canvis d'estat} \begin{cases} \text{fusió: sòlid} \rightarrow \text{líquid (solidificació: líquid} \rightarrow \text{sòlid)} \\ \text{sublimació: sòlid} \rightarrow \text{gas (condensació: gas} \rightarrow \text{sòlid)} \\ \text{evaporació: líquid} \rightarrow \text{gas (condensació: gas} \rightarrow \text{líquid)} \end{cases}$$

Per a una substància pura, el canvi de fase a una pressió donada es produeix a temperatura constant.

Per exemple, el gel, quan l’escalfem, augmenta de temperatura fins a 0 ºC, a 0 ºC la temperatura roman constant i la calor subministrada es destina a fondre el gel. Quan s’ha fos tot el gel, i només quan s’ha fos tot, la temperatura torna a augmentar, ja que tota la calor es destina a augmentar la temperatura de l’aigua líquida.



A 100 ºC comença el procés d’ebullició. De nou la temperatura es manté constant durant tot el procés d’ebullició, en què l’aigua líquida s’evapora.

$$\left.\begin{array}{rl} \text{punt de fusió de l'aigua:} & 0°\text{C a 1 atm} \\ \text{punt d'ebullició de l'aigua:} & 100°\text{C a 1 atm} \end{array}\right\} \text{depenen de la pressió}$$

La *calor latent de fusió*, L_f, és la quantitat de calor necessària per fondre 1 kg de substància (o la calor que cal extreure per solidificar 1 kg de substància):

$$Q = mL_f$$

Les unitats són J/kg.

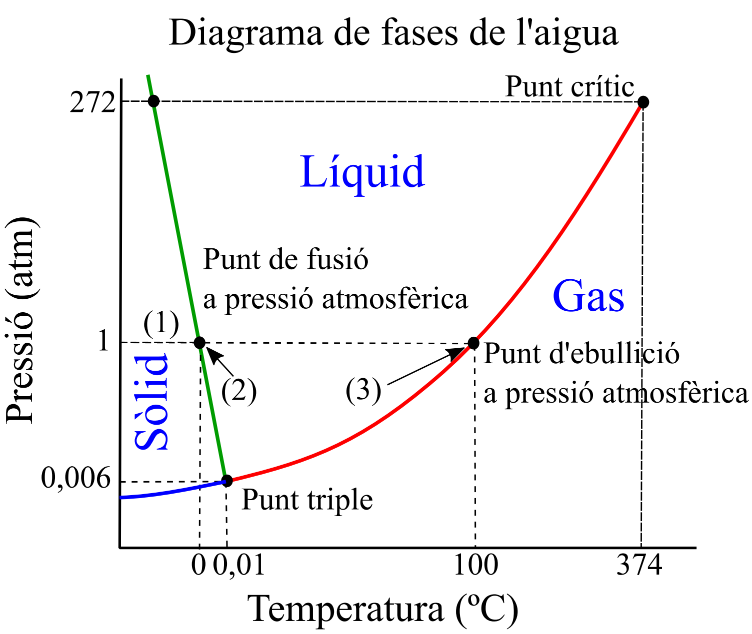
La *calor latent d’evaporació*, L_v, és la quantitat de calor necessària per evaporar 1 kg de substància (o la calor que cal extreure per condensar 1 kg de substància):

$$Q = \text{m}\text{L}_v$$

Les unitats són J/kg.

Substància	**PF, K**	**L_f, kJ/kg**	**PE, K**	**PE, K**
Aigua	273,15	333,5	373,15	2257
Alcohol etílic	159	109	351	879
Sofre	388	38,5	717,75	287
Brom	266	67,4	332	369
Coure	1356	205	2839	4726
Heli	-	-	4,2	21
Mercuri	234	11,3	630	296
Nitrogen	63	25,7	77,35	199
Or	1336	62,8	3081	1701
Oxigen	54,4	13,8	90,2	213
Plata	1234	105	2436	2323
Plom	600	24,7	2023	858
Zinc	692	102	1184	1768

Diagrama de fases d'una substància pura



(1) només sòlid
(2) T constant fins a fondre's
(2)→(3) líquid
(3) T constant fins a convertir tota la substància en vapor

<u>Línia verda</u>: Punt de fusió, limita la zona on el material està en fase sòlida de la zona on el material està en fase líquida. Mostra la dependència del punt de fusió respecte a la pressió.

<u>Línia blava</u>: Punt de sublimació, limita la zona on el material està en fase sòlida de la zona on el material està en fase vapor.

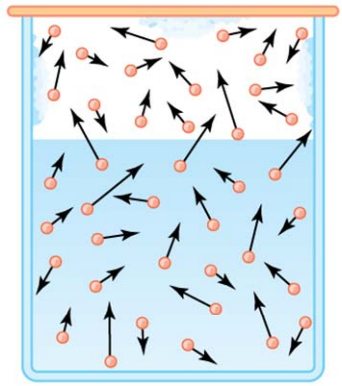
<u>Línia vermella</u>: Punt d'ebullició, limita la zona on el material està en fase líquida de la zona on el material està en fase vapor.

O: És el punt triple; per a aquesta temperatura i pressió coexisteixen les tres fases: sòlid, líquid i gas.

Per al CO_2, el punt triple està a $T = 216,55$ K, p=5,1 atm. Llavors, a pressió atmosfèrica, el CO_2 sòlid se sublima, passa directament de sòlid a gas; per això es coneix com a gel sec.

Pressió de vapor

Deixem un recipient tancat i aïllat de l'exterior (*V* fixat i constant) amb una substància a l'interior.



Hi ha molècules que s'evaporen i n'hi ha que es condensen.

La *pressió de vapor* és la pressió d'equilibri entre el gas i el líquid, de manera que hi ha tantes molècules que s'evaporen com molècules que es condensen.

La pressió de vapor depèn de la temperatura, i aquesta dependència ens la dona la línia *O*-*C*.

Quan es produeix l'ebullició?

Si la pressió exterior és més petita que la pressió de vapor, no s'assoleix l'equilibri, hi ha un dèficit de gas respecte del líquid i com a resultat hi ha més molècules que s'evaporen. Així doncs, la quantitat de líquid disminueix progressivament fins que s'acaba transformant tot en gas. Observeu que la pressió de vapor de l'aigua és una atmosfera a 100 ºC.

Un dels problemes de viure en llocs molt alts és fer un bon te, per què?

On creus que trigarà més a fer-se un ou dur, a Girona o a l'Everest? Per què?

A l'interior del líquid es formen bombolles de vapor; la pressió a l'interior és la pressió de vapor. Si la temperatura correspon a l'ebullició, aquesta pressió és igual o lleugerament superior a l'exterior, de manera que desplacen el líquid que les envolta fins a assolir la superfície.

Punt crític: no hi ha distinció entre líquid i gas, les seves densitats són iguals. Per sobre del punt crític podem passar del líquid al sòlid evitant l'ebullició.

Qüestions del tema 13

Equilibri tèrmic i termòmetres

1. En un viatge pels Estats Units agafeu un refredat i compreu un termòmetre en una farmàcia per comprovar si teniu febre o no. Malauradament el termòmetre està en l'escala Fahrenheit i la temperatura mesurada del vostre cos és de 98,6ºF. Teniu febre?

Sol.: No.

2. La pressió d'un termòmetre de gas a volum constant és de 0,400 atm en el punt de congelació de l'aigua i de 0,546 atm en el punt d'ebullició. *a)* Quan la pressió és de 0,100 atm, quina serà la temperatura? *b)* Quina és la pressió en el punt d'ebullició del sofre (444,6 ºC)?

Sol.: *a*) −205 °C; *b*) 1,05 atm.

3. Un termòmetre de resistència de platí té una resistència de 10,00 Ω a 0 ºC i una resistència de 13,95 Ω a 100 ºC. Suposeu que la relació entre la resistència i la temperatura és lineal. Quina temperatura correspon a una resistència de 10,79 Ω?

Sol.: 20 ºC.

4. Un termistor és un dispositiu amb una resistència que varia considerablement amb la temperatura, de la forma següent: $R = R_0 e^{B/T}$, on R és la resistència, T la temperatura, i B i R_0 són constants característiques del termistor. *a)* Si R = 7360 Ω a la temperatura de congelació de l'aigua i 153 Ω a la temperatura d'ebullició, esbrineu R_0 i B. *b)* Quant val la resistència del termistor a 98,6ºF? *c)* Quin és el ritme de variació de la resistència amb la temperatura (dR/dT) en el punt de congelació i en el punt d'ebullició de l'aigua? *d)* Per a quina d'aquestes temperatures és més sensible el termistor?

Sol.: *a*) $B = 3{,}94\cdot10^3$ K, $R_0 = 3{,}91\cdot10^{-3}$ Ω; *b*) 1312 Ω; *c*) –390 Ω/K; –4,34 Ω/K; *d*) punt de congelació.

Gas ideal

5. *a)* Si un mol ocupa un volum de 10 l a la pressió d'1 atm, quina és la seva temperatura absoluta? *b)* Per tal que el volum pugui variar, el recipient que conté aquest gas té un pistó. El gas s'escalfa a pressió constant i s'expandeix fins a un volum de 20 l. Quina és la temperatura del gas? *c)* El volum es fixa a 20 l, i el gas s'escalfa a volum constant fins a una temperatura de 350 K. Quina és la pressió del gas?

Sol.: *a*) 122 K; *b*) 244 K; *c*) 1,44 atm.

6. Una caixa cúbica metàl·lica de 20 cm de costat conté aire a pressió a 1 atm i a una temperatura de 300 K. La tanquem hermèticament, de forma que el volum sigui constant, i l'escalfem fins a 400 K. Trobeu la força neta feta per l'aire sobre cada paret de la caixa en l'estat final.

Sol.: 1351 N.

7. Un pneumàtic d'un cotxe està a una pressió manomètrica de 200 kPa quan està a una temperatura de 20 ºC. Quan el cotxe es mou a suficient velocitat, la temperatura del pneumàtic augmenta fins a 50 ºC. *a)* Suposant que el volum del pneumàtic no varia i que l'aire es comporta com un gas ideal, calculeu la nova pressió manomètrica. *b)* Feu el mateix suposant que, en escalfar-se, el volum del pneumàtic augmenta un 10 %, en lloc de ser constant.

Sol.: *a*) 231 kPa; *b*) 201 kPa.

8. Un recipient posseeix un pistó ajustat i conté 1 mol de gas. La pressió i la temperatura inicials són 2 atm i 300 K. S'expansiona el gas a temperatura constant fins que la pressió és d'1 atm. Després es comprimeix i s'escalfa simultàniament el gas fins que recupera el seu volum inicial, però amb una pressió de 2,5 atm. Quina és la temperatura final del gas?

Sol.: 375 K.

9. Una ampolla d'aire comprimit pot subministrar aire durant 90 minuts a un capbussador quan és a la superfície de l'aigua. Quant de temps durarà la mateixa ampolla quan el capbussador estigui a 20 m per sota la superfície de l'aigua? Nota: el volum d'aire inhalat no varia amb la profunditat.

Sol.: 31 minuts.

10. Quina és la força que cal fer per obrir la porta d'una nevera quan la temperatura de l'aire de l'interior passa de 20 ºC a 6 ºC? La porta de la nevera té unes dimensions de 0,5 m^2 i suposeu que la porta tanca hermèticament.

Sol.: 2,4 Kn.

11. Una bombona d'acer de 400 cm^3 de volum s'ha dissenyat per resistir una pressió interior de 10^7 N/m^2. Quants grams d'heli pot contenir sense que arribi a esclatar a 300 K?

Sol.: 6,48 g.

Mescla de gasos

12. Un recipient conté 12 g de metà (CH_4) i 55 g de diòxid de carboni (CO_2) sota una pressió total de 2 atm i a una temperatura de 27 ºC. Quines són les pressions parcials dels dos gasos i quin és el volum del recipient?

Sol.: $p_{CH4} = 0{,}75$ atm, $p_{CO2} = 1{,}25$ atm, $V = 24{,}6$ l.

13. L'aire dels pulmons (aire alveolar) té una composició diferent de la de l'aire atmosfèric. Per exemple, la pressió parcial del diòxid de carboni en l'aire alveolar és de 40 mm Hg. Quin és el percentatge de mols de CO_2 en l'aire alveolar?

Sol.: 5,26 %.

Dilatació

14. Un pont d'acer té una longitud de 100 m. Si té una estructura única i contínua, quant variarà la seva longitud des dels dies més freds d'hivern (−30 ºC) fins als més calorosos d'estiu (40 ºC)?

Sol.: 7,7 cm.

15. Una via de tren d'acer d'1 km de longitud quan la temperatura és de 20 ºC està fortament subjectada per ambdós extrems. Si la temperatura augmenta, la via comença a corbar-se cap amunt. Quan la temperatura és de 25 ºC, quina alçada tindrà la corba, suposant que la forma que adopta és triangular?

Sol.: 5,24 m.

16. Un tub d'acer té un diàmetre exterior de 3 cm a la temperatura de 20 ºC, i un tub de llautó a la mateixa temperatura té un diàmetre intern de 2,997 cm. A quina temperatura s'han d'escalfar els extrems d'ambdós tubs si el d'acer s'ha d'encastar dintre del de llautó?

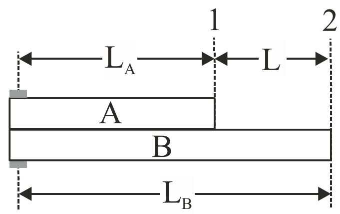
Sol.: 418 K.

17. Un dipòsit d'acer de 20 m^3 de capacitat està ple d'alcohol a 15 ºC. Si el dipòsit i l'alcohol s'escalfen fins a 47 ºC, *a)* es vessarà part de l'alcohol? *b)* Si ho fa, quina quantitat es vessa? Dades: $\beta_{acer} = 33\cdot10^{-6}$ K^{-1}; $\beta_{alcohol} = 1,1\cdot10^{-3}$ K^{-1}.

Sol.: *a*) sí; *b*) 0,683 m^3.

18. Un cotxe té un dipòsit de benzina d'acer i de 60 l de capacitat totalment ple quan la temperatura és de 10 ºC. El coeficient de dilatació de volum de la benzina és $\beta = 0,9\cdot10^{-3}$ K^{-1}. Considerant la dilatació de l'acer, quanta benzina es vessarà si es deixa el cotxe al sol i la temperatura s'eleva fins a 25 ºC?

Sol.: 0,78 l.



19. Es vol construir un dispositiu en què dos punts (1 i 2) es trobin a una distància constant entre ells independentment de les variacions de temperatura. Això es pot fer amb dues varetes amb diferents coeficients de dilatació unides per un extrem com s'indica a la figura. *a)* Demostreu que la distància L no variarà amb la temperatura si L_A i L_B s'escullen de manera que $\frac{L_A}{L_B} = \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$. *b)* Si el material de B és acer, el de A és llautó i L_A = 250 cm a 0 ºC, quin és el valor de L?

Sol.: *b*) 182 cm.

Calor

20. La calor específica d'un metall es determina mesurant la variació de temperatura que té lloc quan una porció escalfada d'aquest material se situa en un recinte aïllat construït del mateix metall i que conté aigua. La porció del metall té una massa de 100 g i es troba inicialment a una temperatura de 100 ºC. El recipient té una massa de 200 g i conté 500 g d'aigua a una temperatura inicial de 20,0 ºC. La temperatura final del sistema és de 21,4 ºC. Quina és la calor específica del metall?

Sol.: 0,386 kJ/kg·K.

Canvis d'estat

21. Quina quantitat de calor es desprèn quan 100 g de vapor d'aigua a 150 ºC es refreden i es congelen produint 100 g de gel a 0 ºC?

Sol.: 310,9 kJ.

22. Quina quantitat de calor s'absorbeix quan 80 g d'aigua líquida a 50 ºC s'escalfen produint 80 g d'aigua vapor a 100 ºC?

Sol.: 197,3 kJ.

23. Un contenidor ben aïllat conté 150 g de gel a 0 ºC. *a)* Si s'introdueixen 20 g de vapor d'aigua a 100 ºC, quina serà la temperatura final del sistema en l'equilibri? *b)* Hi quedarà gel sense fondre?

Sol.: *a*) 4,90 ºC; *b*) no quedarà gel.

24. Un tros de coure de 100 g s'escalfa en un forn fins a una temperatura *T*. Després s'introdueix en un calorímetre, també de coure, de 150 g de massa i que conté 200 g d'aigua. La temperatura inicial del calorímetre i de l'aigua és de 16 ºC i la temperatura de tot el sistema un cop assolit l'equilibri és de 38 ºC. Quan es pesen el calorímetre i el seu contingut, es troba que s'han evaporat 1,2 g d'aigua. Quina era la temperatura *T* inicial del tros de coure?

Sol.: 616,5 ºC.

25. El cos humà gasta aproximadament 2500 kcal d'energia cada dia. Si tota aquesta energia es perdés evaporant aigua per la pell, quina quantitat d'aigua s'evaporaria diàriament?

Sol.: 4,63 kg.

14. Transferència de calor

Objectius

Descripció dels tres mecanismes de transferència de calor
Fonament de l'efecte hivernacle

Conducció

Quan dos objectes que estan a diferent temperatura, T_A i T_B, es posen en contacte, es produeix una transferència d'energia del cos més calent al més fred. El flux de calor tendeix a equilibrar la temperatura.

Notem el flux de calor com a I:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Le unitats de I són joule/segon = watt

El flux de calor depèn de la posició i es pot determinar a partir de la llei de Fourier:

$$I(x) = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

- k és la conductivitat tèrmica; depèn del tipus de material i de la temperatura, i les unitats són $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m{\cdot}K}}$
- A és la secció a través de la qual es produeix el flux de calor; unitats: m^2
- $\frac{\partial T}{\partial x}$ és el gradient de temperatura, la variació de la temperatura en funció de la posició; unitats: $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$

El signe negatiu indica que la calor flueix de la font calenta a la freda.

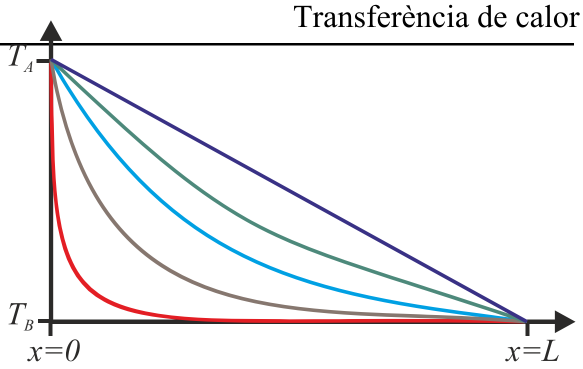
Material	Conductivitat a 27 ºC $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m{\cdot}K}}$	
Aire	0,026	Mals conductors
H_2O	0,609	
Roure	0,15	
Plata	429	Bons conductors
Or	318	

Règim estacionari

La temperatura depèn de la posició i del temps.

El flux que surt de la font calenta no arriba tot a la font freda; una part de la calor es queda pel camí i es gasta a escalfar el material que posa en contacte les dues fonts. A més, el flux de calor varia en el temps.

No obstant això, al cap d'un cert temps el perfil de temperatures ja no varia en el temps, i el flux de calor arriba íntegrament a la font freda. Aquest règim es coneix amb el nom de *règim estacionari*, atès que ni les temperatures ni el flux varien en el temps.



En aquestes condicions
$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_B - T_A}{L}$ i $I = -kA\frac{\Delta T}{L} = \frac{T_A - T_B}{R}$
I finalment,

$$I = \frac{\Delta T}{R} \Leftrightarrow \Delta T = IR$$

on $R = \frac{L}{kA}$ és la resistència tèrmica (unitats: K/W).

Observeu que la relació entre la diferència de temperatures i el flux de calor és formalment idèntica a la llei d'Ohm per al corrent elèctric. Podem entendre la relació com que les diferències de temperatura, ΔT, són la causa que provoca un flux de calor, i que la resistència tèrmica és l'oposició que presenta el medi al flux de calor.

Resistència tèrmica

La resistència tèrmica representa l'oposició d'un material al pas de calor; podem comprovar que:

$$R \uparrow \begin{cases} L \uparrow \\ k \downarrow \\ a \downarrow \end{cases}$$

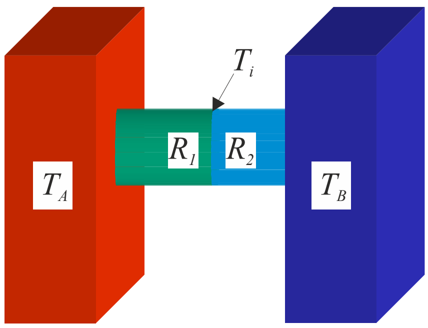
En el cas de parets, si es vol millorar l'aïllament tèrmic, és a dir, disminuir les pèrdues de calor, cal augmentar l'amplada de l'aïllament i emprar materials de baixa conductivitat. L'aire, en particular, és molt mal conductor, per això s'utilitzen escumes i materials porosos, que contenen aire atrapat, i cambres d'aire per augmentar la resistència tèrmica.

Associació de resistències:

- *Resistències en sèrie*
  El flux que passa per R_1 també passa per R_2:

$$I = \frac{T_A - T_i}{R_1} = \frac{T_i - T_B}{R_2}$$

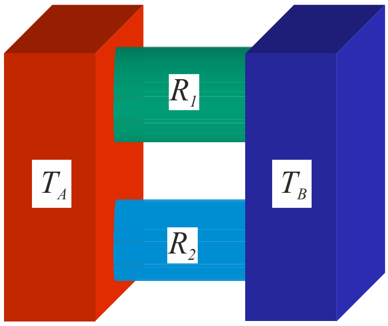
$$R_{\text{eq}} = \frac{\Delta T}{I} = \frac{T_A - T_i}{I} + \frac{T_i - T_B}{I} = R_1 + R_2$$



- *Resistències en paral·lel*
  El flux total és la suma del flux que passa per R_1 més el que passa per R_2:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{I}{\Delta T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



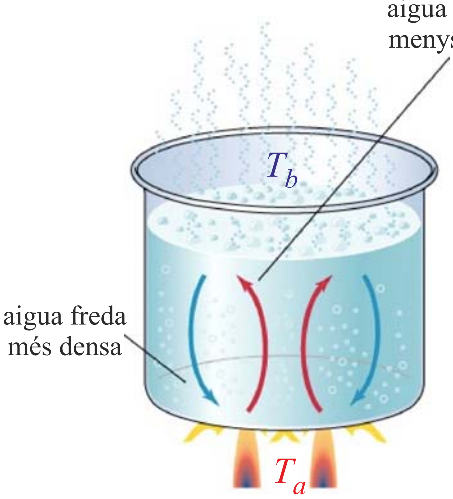
Com veureu a Física II, s'obtenen les mateixes relacions per a l'associació de resistències elèctriques.

Convecció: llei de Newton

La major part del transport de calor en líquids i gasos es fa pel mecanisme de la convecció. No funciona en sòlids.

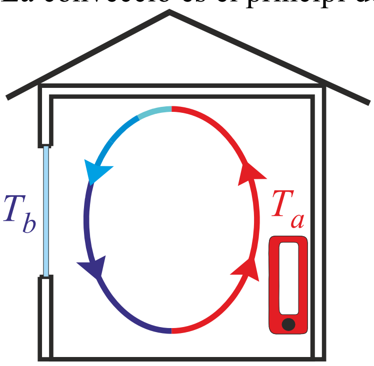
El moviment del fluid mateix transporta calor.

Per exemple, si escalfem un recipient d'aigua per sota, l'aigua que es troba a prop de la font de calor s'escalfa, es dilata, es torna menys densa i es mou cap a dalt. A mesura que puja s'allunya de la font calenta, es refreda i es torna més densa, de manera que es mou cap avall.



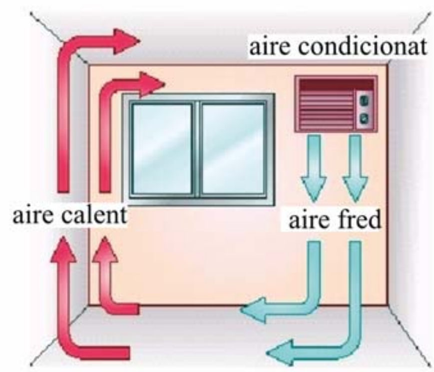
Observeu que si escalfem per dalt no hi haurà convecció.

La convecció és el principi de funcionament del mal anomenat "radiador":



L'habitació s'escalfa per convecció, i la font calenta és el radiador. Observeu que cal situar el radiador en una posició baixa per facilitar la circulació d'aire.

En canvi, si volem fer servir aire condicionat per refredar l'habitació, el més adient és situar-lo cap a la part superior.



La descripció de la convecció és complexa, atès que depèn de l'orientació, la posició i les dimensions, i implica el moviment d'un fluid. De tota manera, es pot descriure de forma aproximada amb la llei de Newton:

$$I = qA\Delta T$$

On q és el factor de transmissió de la calor per convecció: $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$

Exemple 1: Determineu les pèrdues de calor d'una canonada de coure plena d'aigua calenta. Longitud de la canonada, 2 m; gruix, 0,004 m; superfície de la canonada, 0,12 m^2; temperatura de l'aigua, 80 ºC, i temperatura de l'habitació, 15 ºC.

Si només tenim en compte la conducció de calor a través del coure:

$$R = \frac{L}{k \cdot A} = \frac{0{,}004\ \mathrm{m}}{400\ \mathrm{W/(m\ K)} \cdot 0{,}12\ \mathrm{m^2}} = 8{,}33\ 10^{-5}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$I = \frac{\Delta T}{R} = \frac{(80 - 15)}{8{,}33\ 10^{-5}} \frac{\mathrm{K \cdot W}}{\mathrm{K}} = 780.000\ \mathrm{W} = 780\ \mathrm{kW}$$

El resultat anterior ens dona unes pèrdues enormes en un tram de 2 m, 780 kW. Si el càlcul fos correcte, seria impossible dutxar-se amb aigua calenta: les pèrdues des de l'escalfador fins a la dutxa ho farien impossible. Quin error hem comès?

Per mantenir aquest flux, cal que la calor que arriba a la superfície de la canonada sigui dissipada cap a l'habitació, i això s'ha de fer per conducció i convecció a través de l'aire. De fet, la conductivitat tèrmica de l'aire és tan petita que el transport a través de l'aire es fa bàsicament per convecció. Llavors tenim dos mecanismes en sèrie: conducció a través del coure i convecció a través de l'aire. Anem a resoldre el problema correctament.

Exemple 2: Determineu les pèrdues de calor d'una canonada de coure plena d'aigua calenta. Longitud de la canonada, 2 m; gruix, 0,004 m; superfície de la canonada, 0,12 m^2; temperatura de l'aigua, 80 ºC; temperatura de l'habitació, 15 ºC. El factor de transmissió de calor a través de l'aire és de 9,5 Wm^{-2}K^{-1}

La temperatura a la superfície exterior de la canonada és T_i. Conducció:

$$R = \frac{L}{k \cdot A} = \frac{0{,}004\ \mathrm{m}}{400\ \mathrm{W/(m\ K)} \cdot 0{,}12\ \mathrm{m^2}} = 8{,}33\ 10^{-5}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$I = \frac{\Delta T}{R} = \frac{(80 - T_i)}{8{,}33\ 10^{-5}}$$

Convecció:

$$I = qA\Delta T = 9{,}5 \cdot 0{,}12 \cdot (T_i - 15)$$

Com que els dos mecanismes estan en sèrie:

$$I = \frac{(80 - T_i)}{8{,}33\ 10^{-5}} = 1{,}14 \cdot (T_i - 15) \Rightarrow 80 - T_i = 9{,}50\ 10^{-5} \cdot (T_i - 15) \Rightarrow T_i = 79{,}994\ ℃$$

$$I = qA\Delta T = 9{,}5 \cdot 0{,}12 \cdot (79{,}994 - 15) = 74{,}1\ W$$

De l'exemple anterior, observeu que la resistència tèrmica de la canonada és molt més petita que la resistència tèrmica deguda a la convecció:

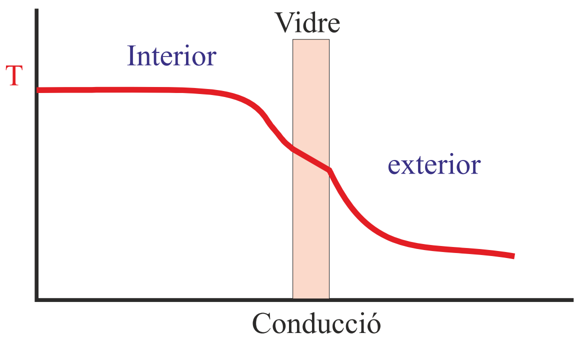
$$R = \frac{1}{qA} = 0{,}877\ \frac{K}{W}$$

Com que totes dues estan en sèrie, podem negligir la resistència tèrmica de la canonada; llavors la caiguda de temperatura a la canonada és zero ($\Delta T = IR$), és a dir, que la superfície exterior de la canonada està pràcticament a la mateixa temperatura que l'aigua i el flux de calor està limitat per la convecció: o sigui, *quan tenim diferents mecanismes en sèrie, el flux de calor està controlat pel mecanisme més lent*.

Com hem dit abans, l'aire es fa servir com a aïllant per la seva baixa conductivitat. Ara bé, també hem comentat que, per al transport de calor, la convecció en l'aire és molt més eficient que la conducció. Així doncs, l'aire no és un aïllant tan bo. Per aconseguir que l'aire actuï com un bon aïllant cal impedir la convecció. La convecció implica el moviment de l'aire i aquest moviment només és possible si l'amplada de la cavitat on hi ha l'aire tancat és superior a 2 cm. Per exemple, en el cas de la llana, l'aire està atrapat en petits porus, no hi ha convecció i és un aïllant efectiu. En les finestres, si la separació entre vidres és inferior a 2 cm, la convecció no és possible i per tant l'aire actua també com un bon aïllant.

Temperatura efectiva o de sensació

Convecció forçada: si hi ha un corrent d'aire, per exemple vent, el transport de calor es veu reforçat. Per això es fan servir ventiladors per refredar més efectivament alguns electrodomèstics o màquines.



Pel mateix motiu el vent augmenta les pèrdues de calor per convecció en una casa.

La convecció forçada es descriu amb la llei de Newton, però substituint la temperatura exterior per una temperatura anomenada temperatura efectiva o de sensació, T_{ef}:

$$I = qA\Delta T = qA(T_i - T_{ef})$$

Com que el flux de calor és més gran en el cas de convecció forçada, la temperatura efectiva és inferior a la temperatura exterior. A més, aquesta temperatura depèn de la velocitat del vent: com més gran és la velocitat, més gran és el flux i, per tant, més baixa és la temperatura efectiva.

Velocitat del vent (km/h)	T (ºC)			
0	-10	-20	-30	real
10	-15	-25	-35	efectiva
20	-20	-35	-45	
30	-25	-40	-50	

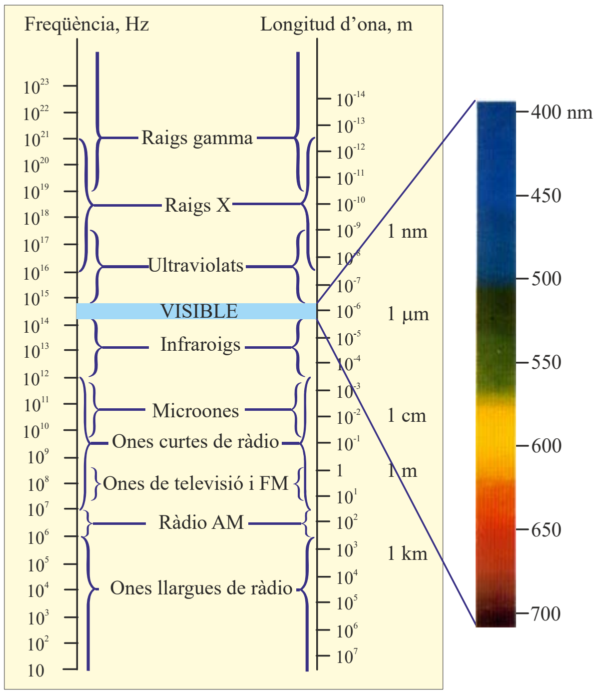
La *sensació de fred* no depèn de la temperatura sinó del *flux de calor*. Quan patim una pèrdua de calor gran, tenim una sensació de fred intensa, i fins i tot podem patir una hipotèrmia. De fet, el que és important per regular la temperatura corporal és el flux de calor, atès que el cos ha de compensar les pèrdues de calor.

Com hem vist, el flux de calor depèn de la temperatura exterior, però sobretot depèn de la resistència tèrmica. Si la temperatura exterior és baixa però anem ben abrigats, la resistència tèrmica és alta, el flux de calor petit i la sensació de fred disminueix considerablement.

Quan fa vent, la sensació de fred és més elevada quan hi estem exposats que quan estem arrecerats, malgrat que en ambdós casos la temperatura de l'aire sigui la mateixa. La raó és que el vent provoca la convecció forçada, que augmenta el flux de calor i, per tant, la sensació de fred.

Què és la radiació?

Espectre electromagnètic



Els mecanismes de conducció i convecció requereixen la presència d'un medi material pel qual es transporta la calor. En la radiació el transport de l'energia es fa a través d'ones electromagnètiques i, per tant, no cal cap medi material. La velocitat de propagació de les ones electromagnètiques en el buit (i, a efectes pràctics, en l'aire) és la velocitat de la llum:

$$c = 2{,}99792 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Les ones electromagnètiques no es limiten a la llum visible, sinó que n'hi ha una gran diversitat: raigs gamma i raigs X, llum ultraviolada i infraroja (IR), microones, ones de ràdio i de televisió. La classificació es fa segons la longitud d'ona (o segons la freqüència) i estan convenientment classificades en l'espectre electromagnètic. De fet, podem comprovar que la llum visible abasta una regió molt petita de l'espectre electromagnètic.

Un cos calent emet llum, i aquesta emissió de llum és la responsable d'un flux de calor cap a l'exterior. Per exemple, el nostra planeta s'escalfa gràcies a la radiació provinent del Sol (la calor del Sol no pot venir ni per conducció ni per convecció, perquè entre el Sol i el nostre planeta només hi ha el buit).

Banda	**Longitud d'ona**
Ràdio, TV	1m – 100,000 km
Microones	1 mm – 1 m
IR llunyà	50 μm –1 mm
IR mitjà	3–50 μm
IR proper	700 nm –3 μm
Visible	380-700 nm
Ultraviolat	10-380 nm
Raigs X	0,01-10 nm
Raigs γ	<0,01 nm

L'emissió de llum està limitada a un rang de freqüències que, de fet, depèn de la temperatura. La llei de Wien permet calcular la longitud d'ona per a la qual el flux de calor és màxim:

$$\lambda_{\max} = \frac{B}{T}, B = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m \cdot K$$

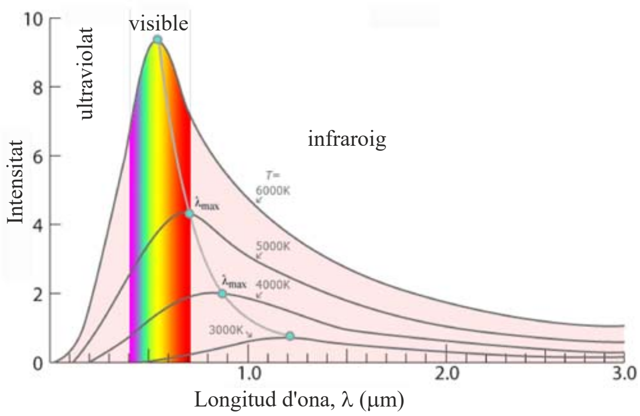
Per altra banda, la quantitat d'energia emesa també depèn de la temperatura: com més alta és la temperatura, més energia s'emet per radiació. Aquesta dependència no és lineal, sinó que, segons la llei de Stefan, augmenta amb la quarta potència,

$$I = e\sigma AT^4$$

on e és l'emissivitat, que és un paràmetre adimensional que varia entre 0 i 1 i depèn de la superfície i de la freqüència; per exemple, en l'espectre visible i per al color negre, $e \approx 1$, mentre que per al color blanc $e \approx 0$, i σ és la constant de Stefan–Boltzmann:

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2K}$$

Observeu que si doblem la temperatura, l'energia emesa total és 16 vegades més gran. A la figura, l'energia total és l'àrea sota la corba; de 3000 a 6000 K, l'àrea augmenta en un factor 16.



Per exemple, la nostra *temperatura corporal* és de 37 ºC = 310 K:

$$\lambda_{\max} = \frac{B}{T} = 9{,}35 \times 10^{-6}\ m = 9{,}35\ \mu m$$

Aquesta longitud d'ona es troba a la banda de l'infraroig mitjà; per aquesta raó es fan servir càmeres d'infraroig per observar els moviments de persones i éssers vius. En canvi, la nostra emissió de llum en l'espectre visible és nul·la.

Quan el *ferro* assoleix els 800 ºC (1073 K) està *roent*, és a dir, comença a emetre una llum de color vermellós. Per a aquesta temperatura,

$$\lambda_{\max} = \frac{B}{T} = 2{,}7 \times 10^{-6}\ m = 2{,}7\ \mu m$$

Aquesta longitud d'ona està situada molt a l'extrem de l'infraroig proper més allunyat de l'espectre visible. Així doncs, la major part de l'energia s'emet en l'infraroig, però una petita fracció d'aquesta llum s'emet en l'espectre visible, i la major part d'aquesta fracció es dona a la zona que fa frontera amb l'infraroig, la de les longituds d'ona grans, que és la zona que correspon als colors vermellosos.

A les bombetes i làmpades d'incandescència de tungstè, el filament arriba a uns 3000 ºC (3273 K). Per a aquesta temperatura,

$$\lambda_{\max} = \frac{B}{T} = 8{,}85 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} = 88{,}5\ \mu\mathrm{m} = 885\ \mathrm{nm}$$

Aquesta longitud d'ona es troba a l'infraroig proper, prop de l'espectre visible. La major part de l'energia s'emet en l'infraroig, però una fracció significativa s'emet en l'espectre visible, i com que hi ha una emissió important en tot aquest rang, la llum és blanca. No obstant això, el fet que la major part de l'emissió estigui en l'infraroig explica el baix rendiment de les bombetes (menys del 5 % de l'energia consumida es transforma en llum dins de l'espectre visible).

La temperatura del Sol a la superfície és de 6000 K. Per a aquesta temperatura,

$$\lambda_{\max} = \frac{B}{T} = 4{,}83 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} = 48{,}3\ \mu\mathrm{m} = 483\ \mathrm{nm}$$

Aquesta longitud d'ona es troba al bell mig de l'espectre visible; és a dir, que la major part de l'energia que prové del Sol es troba dins d'aquest rang. No és d'estranyar, doncs, que els éssers vius s'hagin adaptat per veure-hi en aquesta zona de l'espectre. Una fracció de l'energia que ve del Sol també se situa a les dues bandes que limiten amb el visible, l'infraroig i l'ultraviolat. L'ultraviolat és perillós per a la vida a la Terra; afortunadament l'ozó de l'atmosfera absorbeix la major part de la radiació ultraviolada.

Tant per conducció com per convecció, només existeix un flux net de calor entre dos objectes, quan estan a diferent temperatura. Observeu que el flux de calor per conducció i convecció és proporcional a ΔT; llavors si els dos cossos estan a la mateixa temperatura, $\Delta T = 0$, i el flux és 0. Què passa en el cas de la radiació?

De la mateixa manera que un cos calent emet energia, també absorbeix energia,

$I_{emesa} = e\sigma A T^4$, energia emesa, on T és la temperatura de l'objecte

$I_{abs} = e\sigma A T_{ext}^4$, energia absorbida, on T_{ext} és la temperatura exterior

Llavors, el flux total per radiació és:

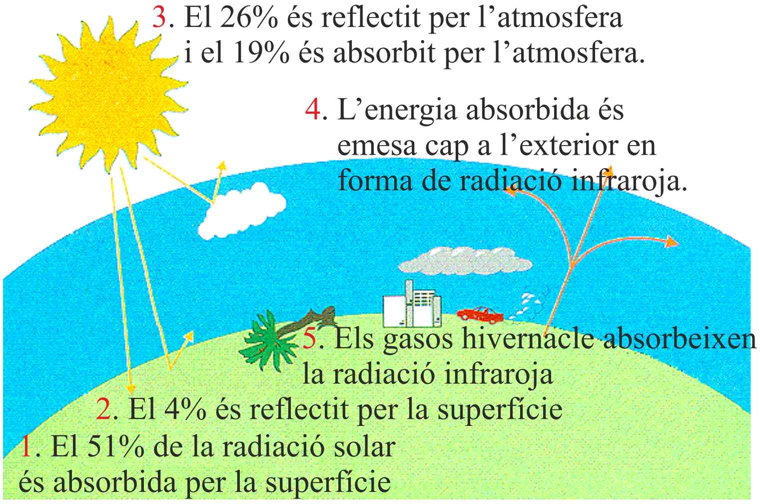
$$I_{\text{net}} = I_{\text{abs}} - I_{\text{emesa}} = e\sigma A(T_{ext}^4 - T^4)$$

Observeu que si $T_{ext} = T$, llavors $I_{net} = 0$. Així doncs, si no hi ha diferència de temperatura tampoc hi ha un flux net de calor per radiació, tal com era d'esperar.

L'efecte hivernacle

L'efecte hivernacle és el principal responsable de l'escalfament global de la Terra i del canvi climàtic.

La temperatura de la Terra està controlada pel balanç entre l'energia que absorbeix per radiació provinent del Sol i l'energia que emet ella mateixa (recordeu que entre la Terra i el Sol hi ha el buit i, per tant, no hi ha cap altre possible mecanisme de transferència de calor).



Concretament, de l'energia que prové del Sol, un 26 % és reflectida per l'atmosfera (sobretot els núvols, un 20 %) i un 4 % és reflectit per la superfície terrestre (sobretot els casquets polars). De la resta, un 19 % és absorbit per la mateixa atmosfera i un 51 % per la superfície (continents i oceans).

Així doncs, del 100 % de l'energia emesa pel Sol, el 70 % és absorbit pel planeta. Perquè la Terra no s'escalfi, aquesta energia ha de ser enviada de nou cap a l'exterior. I de fet, com la Terra està a uns 300 K, emet aquest 70 % d'energia, de manera que no s'escalfa. Aquesta emissió és, la major part, dins el rang de l'infraroig.

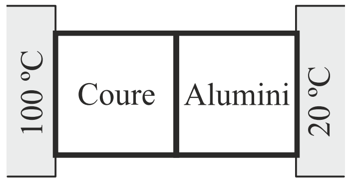
L'efecte hivernacle el provoquen els gasos com ara el CO_2, el NO, el metà i els CFC. Aquest gasos són transparents a l'espectre visible, de manera que deixen passar la major part de l'energia que ve del Sol, però absorbeixen energia en el rang dels infrarojos, de manera que absorbeixen l'energia que emet la Terra cap a l'exterior, i això provoca que una part d'aquesta energia sigui de nou absorbida a l'atmosfera i, per tant, contribueixen a l'augment de la temperatura del planeta.

Qüestions del tema 14

1. Una barra de coure de 2 m de llarg té una secció transversal circular d'1 cm de radi. Un extrem es manté a 100 ºC i l'altre, a 0 ºC. La superfície lateral de la barra s'aïlla de forma que les pèrdues de calor a través seu siguin negligibles. Calculeu, quan s'assoleix el règim estacionari, *a)* la resistència tèrmica de la barra, *b)* el flux de calor, *c)* el gradient de temperatura i *d)* la temperatura de la barra a 25 cm de l'extrem calent.

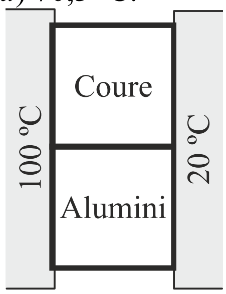
Sol.: *a*) 15,9 K/W; *b*) 6,30 W; *c*) 50 K/m; *d*) 87,5 ºC.

2. Unim dos cubs metàl·lics de 3 cm de costat, un de coure i l'altre d'alumini, tal com mostra la figura. Sabent que la conductivitat tèrmica del coure és de 401 W/mK i que la de l'alumini és de 237 W/mK, calculeu: *a)* la resistència tèrmica de cada cub, *b)* la resistència total, *c)* el flux d'energia i *d)* la temperatura en la interfície dels dos cubs.



Sol.: *a*) R_{Cu} = 0,0831 K/W, R_{Al} = 0,141 K/W; *b*) 0,224 K/W; *c*) 358 W; *d*) 70,3 ºC.

3. Els mateixos cubs del problema anterior es disposen de la forma indicada a la figura. Trobeu: *a)* el corrent tèrmic transportat al llarg de cada cub, *b)* el corrent tèrmic total i *c)* la resistència tèrmica equivalent.



Sol.: *a*) I_{Cu} = 962 W, I_{Al} = 569 W; *b*) 1531 W; *c*) 0,0522 K/W.

4. L'àrea de la superfície exterior d'una casa (sostre i parets) és de 280 m^2, dels quals 30 m^2 corresponen a les finestres. El vidre de les finestres (k = 0,80 W/mK) és de 0,5 cm de gruix i el sostre i les parets estan recoberts d'un material aïllant (k = 0,040 W/mK), de 8 cm de gruix. Quan la temperatura a l'exterior és de –10 ºC, l'interior de les finestres està a 3 ºC i l'interior de les parets i el sostre a 15 ºC. *a)* Quin és el flux de calor a través de les parets i el sostre? *b)* Quin és el flux de calor a través de les finestres?

Sol.: *a*) 3,125 kW; *b*) 62,4 kW.

5. La paret d'una casa té 24 cm de gruix i la seva conductivitat tèrmica és de 0,6 W/Km. La temperatura a l'interior és de 18 ºC i a l'exterior, de 4 ºC. Quina quantitat de calor es perd per conducció cada hora a través d'un metre quadrat de paret? Per quina raó la pèrdua és tan gran? És correcta aquesta estimació de pèrdues?

Sol.: 126 kJ/m^2 per hora.

6. *a)* Quina és la resistència tèrmica d'una làmina de vidre d'1 m^2 i 0,5 cm de gruix? *b)* Quin flux de calor travessa aquesta làmina si la diferència de temperatura entre les dues cares del vidre és de 10 ºC? (Nota: la conductivitat del vidre és 0,8 W/mK)

Sol.: *a*) $6{,}25\cdot10^{-3}$ m^2 K/W; *b*) 1,6 kW.

Transport de calor per convecció

7. Quanta energia perd una persona nua per segon a causa de la convecció, si la superfície de la persona és d'1,4 m^2 i la temperatura de l'aire és de 0 ºC? Suposeu que el factor de transmissió de calor és 7,1 Wm^{-2}K^{-1} i que la temperatura de la pell és de 30 ºC.

Sol.: 300 J per segon.

8. El vidre d'una finestra està a 10 ºC i la seva àrea és d'1,3 m^2. Si la temperatura de l'aire exterior és 0 ºC, quin és el flux de calor degut a la convecció? Suposeu que el factor de transmissió de calor és 4 Wm^{-2}K^{-1}.

Sol.: 52 W.

9. Calculeu la raó entre les pèrdues degudes per convecció a través d'una finestra quan a l'exterior bufa un vent de 20 km/h i les pèrdues quan no hi ha vent a l'exterior. Suposeu que la temperatura a l'interior és de 10 ºC i que a l'exterior, lluny de la finestra, és de –10 ºC. A –10 ºC la temperatura efectiva quan bufa un vent de 20 km/h és de –20 ºC.

Sol.: 1,5.

10. Una casa té una superfície de 50 m^2 de finestra. Els vidres tenen un gruix de 0,5 cm i una conductivitat de 0,8 Wm^{-1}K^{-1}. La temperatura a l'interior de la casa és de 25 ºC i a l'exterior de −5ºC. La constant de transmissió de calor per convecció a l'interior és q_{int} = 9,5 Wm^{-2}K^{-1} i a l'exterior q_{ext} = 8,2 Wm^{-2}K^{-1}. *a)* Determineu el flux de calor a través de les finestres, les temperatures a les cares interior i exterior del vidre. *b)* Si el preu del kWh és 0,12 €, determineu el cost diari de la calefacció. *c)* Si a l'exterior bufa un vent de 30 km/h (temperatura efectiva −20 ºC), determineu el flux de calor a través de les finestres i les temperatures a les cares interior i exterior del vidre.

Sol.: *a)* 6425 W, 11,47 ºC i 10,67 ºC; *b)* 18,5 €; *c)* 9637 W, 4,71 ºC i 3,5 ºC.

11. A la casa del problema anterior es substitueixen les finestres de vidre senzill per unes de vidre doble formades per dues làmines de vidre de 0,5 cm de gruix separades una distància d'1 cm. *a)* Determineu el flux de calor a través de les finestres, les temperatures a les cares interior i exterior de la finestra. *b)* Si el preu del kWh és 0,12 €, determineu el cost diari de la calefacció. La conductivitat de l'aire és 0,024 Wm^{-1}K^{-1}. Suposeu que no bufa vent.

Sol.: *a)* 2285 W, 20,19 ºC i 0,574 ºC; *b)* 6,6 €.

Radiació

12. Un radiador amb una superfície exterior d'1,5 m^2 està pintat amb pintura d'alumini (emissivitat = 0,55). *a)* Quin és el flux de calor emès a causa de la radiació quan la temperatura del radiador és de 50 ºC? *b)* Quin és el flux de calor absorbit si les parets de l'habitació estan a 22 ºC? *c)* Quin és el flux net de calor procedent del radiador?

Sol.: *a*) 509 W; *b*) 354 W; *c*) 155 W.

13. Un radiador elèctric d'1 kW té unes resistències que s'escalfen fins a 900 °C. Suposant que el 100 % de l'energia que es transmet a l'exterior es deu a la radiació, i que les resistències es comporten com cossos negres radiants (emissivitat = 1), determineu l'àrea efectiva de la superfície radiant (suposeu que la temperatura de l'habitació és de 20 ºC).

Sol.: 93,42 cm^2.

14. El filament d'una làmpada d'incandescència funciona a 2500 K. El seu diàmetre és de 0,1 mm i està format per un metall d'emissivitat igual a 0,35. Quina longitud cal que tingui el filament perquè la làmpada arribi a emetre un flux de calor de 40 W?

Sol.: 0,164 m.

15. A partir de les mesures de radiació solar rebuda a la Terra, pot calcular-se que la superfície del Sol radia energia a un ritme de 6250 W/cm^2. Suposant que el Sol radia com un cos negre, determineu la temperatura a la superfície del Sol.

Sol.: 5760 K.

15. Primer principi de la termodinàmica

Objectius

Conceptes bàsics de la termodinàmica
Descripció del treball realitzat per un gas ideal
Concepte de l'energia interna d'un sistema
Descripció de la primera llei de la termodinàmica
Descripció de l'experiment de Joule
Descripció de les transformacions isotermes i adiabàtiques

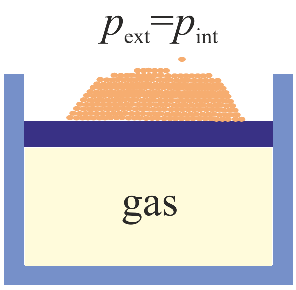
Què és la termodinàmica? Conceptes previs

La *termodinàmica* és la disciplina que s'ocupa de l'estudi de les transformacions i dels intercanvis d'energia. La termodinàmica és necessària per descriure el funcionament de les màquines i dels éssers vius.

Notació i conceptes previs:
Sistema: una part de l'univers sotmesa a estudi.
Ambient o entorn: tota la resta de l'univers que no pertany al sistema.
Estat del sistema: situació en què es troba el sistema.
Variables d'estat o termodinàmiques: paràmetres que determinen l'estat del sistema, és a dir, que l'estat del sistema es pot identificar a partir de les variables d'estat. Variables: p, V, n, U, T...
Equació d'estat: relació entre les variables d'estat, per exemple l'equació dels gasos ideals:

$$pV = nRT$$

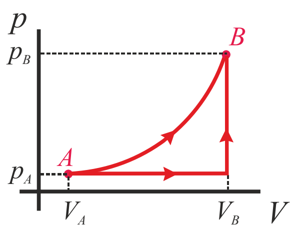
Quan un sistema canvia d'estat, diem que es transforma o que pateix una transformació o procés.



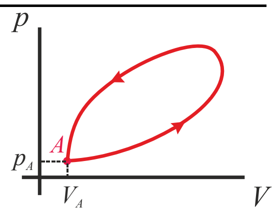
Tipus de transformacions:
Reversibles: successió d'estats d'equilibri; també es coneixen com a quasiestàtiques. Són transformacions lentes. Per exemple, l'expansió d'un gas tancat en un recipient, si a la tapa hi posem sorra i anem traient gra a gra la sorra i esperem fins que s'assoleix l'equilibri cada vegada que traiem un gra. Durant tot el procés la pressió a l'interior del recipient és igual a la pressió exterior.

Irreversibles: canvis ràpids que no són una continuïtat d'estats d'equilibri. Per exemple, l'expansió sobtada d'un gas; durant el procés no existeixen estats d'equilibri.

Els processos reversibles es poden representar en un *diagrama p−V*. En un diagrama $p-V$, cada punt representa un estat d'equilibri. En cada punt representem la pressió en funció del volum. En la figura representem dues transformacions que parteixen d'un estat inicial A i acaben a l'estat final B.



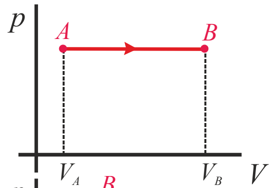
Podem comprovar que per anar de l'estat A al B, es poden seguir diferents transformacions. No obstant això, sigui quina sigui la transformació, el canvi d'estat no depèn del camí triat, només depèn dels punts inicial i final. L'estat el defineixen els valors de les variables d'estat, cada punt correspon a un estat ben definit, amb unes variables d'estat concretes, i com que l'estat final i inicial són el mateix, el canvi d'estat és independent del camí.

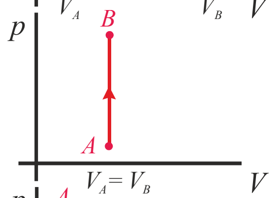


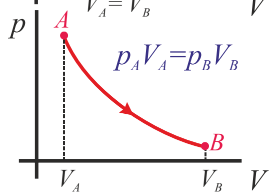
Un *cicle* és una transformació en què l'estat final coincideix amb l'estat inicial, és a dir, que després d'un cicle no hi ha canvis en les variables d'estat.

Tipus de transformacions o processos reversibles:

- *Isòbar*: procés a pressió constant, p=ct.
- *Isocor o isomètric*: procés a volum constant, V=ct.
- *Isoterm*: procés a temperatura constant, T=ct.
  Per a un gas ideal,
  $$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} = ct\frac{1}{V}$$
- *Adiabàtic*: no hi ha transferència de calor, el sistema està aïllat tèrmicament. L'analitzarem més endavant.

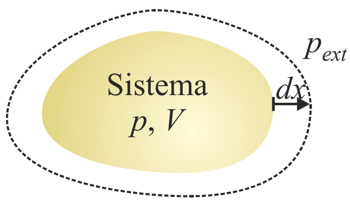






Treball realitzat per un gas ideal

El treball que fa un gas ideal quan s'expandeix és:

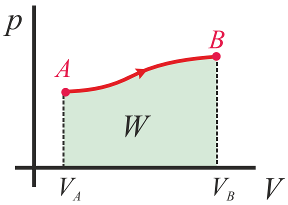


Expansió: $\begin{matrix} V \rightarrow V + dV \\ p \geq p_{ext} \end{matrix}$

$$dW = Fdx = p_{ext}Adx = p_{ext}dV \Rightarrow W = \int_A^B p_{ext}dV$$

Si el procés és reversible, $p_{ext} = p \Rightarrow dW = pdV$

Finalment: $W = \int_A^B pdV$



Per als processos reversibles, el treball realitzat durant una transformació és l'àrea sota la corba en el diagrama $p-V$.

Conveni de signes:

Si el treball és una expansió, $W > 0$, treball fet pel sistema
Si el treball és una compressió, $W < 0$, treball fet sobre el sistema
Si aportem calor al sistema, $Q > 0$
Si extraiem calor del sistema, $Q < 0$

Aquest conveni és molt comú en manuals de física i enginyeria, però no és universal, en alguns textos pot ser diferent.

Càlcul del treball per a diferents processos:

- <u>Isoterm,</u> $T = \text{ct}$

  $pV = nRT \Rightarrow pV = ct$

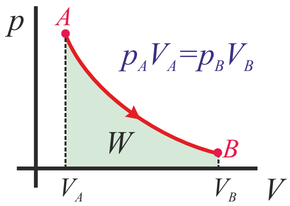
  $p = \dfrac{nRT}{V}$

  $W = \int_A^B pdV = \int_A^B \dfrac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \dfrac{dV}{V}$

  $W_{A\to B} = nRT\ln\dfrac{V_B}{V_A} = p_A V_A \ln\dfrac{V_B}{V_A} = p_B V_B \ln\dfrac{V_B}{V_A}$

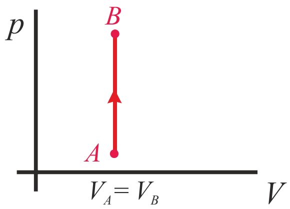
  Si és una expansió, $V_B > V_A \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} > 1 \Rightarrow \ln\frac{V_B}{V_A} > 0 \Rightarrow W > 0$

  Si és una compressió, $V_B < V_A \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} < 1 \Rightarrow \ln\frac{V_B}{V_A} < 0 \Rightarrow W < 0$



- <u>Isomètric</u>, $V = ct \Rightarrow dV = 0$

  $$W = \int_A^B pdV = 0$$



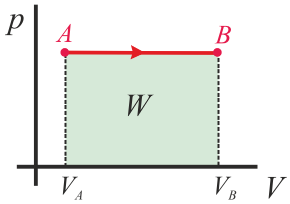
- <u>Isòbar</u>, $p = \text{ct}$

  $$W = \int_A^B pdV = p\int_A^B dV = p(V_B - V_A)$$

  $$W_{A\to B} = p_A(V_B - V_A) = p_B(V_B - V_A)$$

  Si és una expansió, $V_B > V_A \Rightarrow W > 0$.

  Si és una compressió, $V_B < V_A \Rightarrow W < 0$.



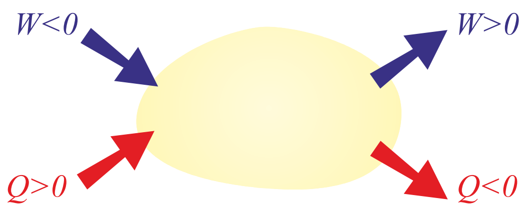
El treball no és una variable d'estat atès que depèn del camí triat.

Energia interna. Primer principi de la termodinàmica

Definim l'energia interna, *U*, com l'energia acumulada en el sistema. El terme *U* inclou tant l'energia potencial com la cinètica de les partícules que formen el sistema. Les unitats són les d'energia, joules.

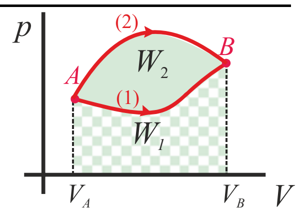
Quan transferim calor o fem un treball variem l'energia interna del sistema. El balanç, tenint en compte el conveni de signes, és:

$$\Delta U = Q - W$$



$Q > 0$ representa una aportació de calor, i per tant un augment de la temperatura; en canvi $W > 0$ representa extreure un treball del sistema i, per tant, una disminució de l'energia interna.

Primer principi: *L'energia interna és una variable d'estat*. És a dir, que no depèn del camí triat. Per tant, l'energia es conserva, ni es crea ni es destrueix, només es transforma. El primer principi també és conegut com el principi de conservació de l'energia.



La ΔU per anar d'A a B és la mateixa tant si es tria el camí 1 com el camí 2; ara bé, l'àrea sota les dues corbes és diferent,

$$W_1 \neq W_2 \Rightarrow Q_1 \neq Q_2$$

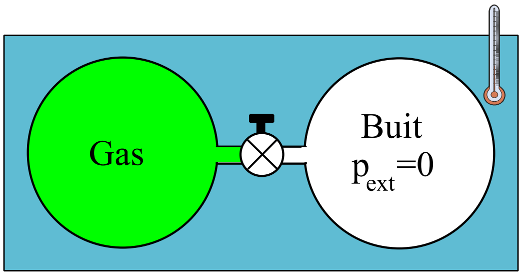
Exemple 1: Quina és la variació d'energia interna quan 1 g d'aigua es vaporitza?

$$Q = mL_V = 10^{-3} \times 2{,}257 \times 10^6 = 2.257\text{ J}$$
$$W = p\Delta V = p(V_{gas} - \cancel{V_{líquid}}) = pV_{gas} = nRT = 1\text{ g}\frac{1\text{ mol}}{18\text{ g}}8{,}314\frac{\text{J}}{\text{mol}}373\text{ K} = 168\text{ J}$$

(el volum del líquid és molt més petit que el del gas)

$$\Delta U = Q - W = (2.257 - 168)\,J = 2.090\,J$$

Experiència de Joule



L'experiència de Joule consisteix en l'expansió lliure i adiabàtica d'un gas ideal.

Com que el sistema està aïllat, $Q = 0$
Com que és un procés irreversible i $p_{ext} = 0 \Rightarrow W = \int p_{ext} dV = 0$

Llavors $\Delta U = Q - W = 0$

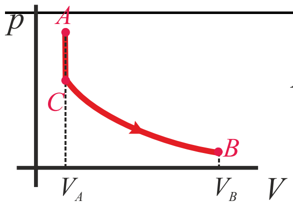
Experimentalment s'observa que p i V varien, però que la temperatura es manté constant, $\Delta T = 0$. Així doncs U només pot dependre de la temperatura, atès que si depengués de p o V, com que no són constants, ΔU no podria ser zero.

Càlcul de Q per a un gas ideal

- Isomètric, $V = $ ct
  $Q = \int C_V\, dT = C_V \Delta T$, en un gas ideal C_V i C_p no depenen de la temperatura.
- Isòbar
  $$Q = \int C_p\, dT = C_p \Delta T$$
- Isoterm
  $$\Delta U = Q - W = 0 \Rightarrow Q = W = nRT\ln\frac{V_B}{V_A}$$

Determinació de ΔU per a un gas ideal

Per anar d'un estat A qualsevol a un estat final B triem la següent transformació reversible (recordeu que l'energia interna és una variable d'estat i, per tant, el canvi d'energia interna no depèn del camí triat).



$A \to C$ isomètric $V_A = V_C$
$C \to B$ isotèrmic $T_C = T_B$

Primer cal fer una transformació a volum constant fins a assolir una temperatura igual a la de l'estat final: $T_C = T_B$

Posteriorment fem una transformació isoterma fins a l'estat final.

$$\Delta U = \Delta U_{A\to C} + \Delta U_{C\to B} = \Delta U_{A\to C} + 0 = Q_{A\to C} - W_{C\to B} = C_V \Delta T$$

Llavors,

$$\Delta U = C_V \Delta T \text{ o } dU = C_V dT$$

Relació de Mayer (només vàlida per als gasos ideals)

Donat un procés a pressió constant,

$$\left.\begin{aligned} dU &= C_V dT \\ dU = dQ - dW &= C_p dT - p dV \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_p dT = C_V dT + p dV$$

Per altra banda,

$$pV = nRT \Rightarrow p dV = nR dT$$

Combinant les dues relacions, tenim:

$$C_p dT = C_V dT + nR dT \Rightarrow C_p = C_V + nR$$

Recordeu, del tema 13, que per als gasos ideals monoatòmics

$$C_V = \frac{3}{2} nR \text{ i } C_p = \frac{5}{2} nR$$

i per als gasos ideals diatòmics

$$C_V = \frac{5}{2} nR \text{ i } C_p = \frac{7}{2} nR$$

Transformacions adiabàtiques en gasos ideals

Es donen quan el sistema està aïllat tèrmicament, de manera que no són possibles els intercanvis de calor amb l'entorn, $Q = 0$. Llavors:

$$\Delta U = Q - W = -W$$

i

$$dU = -dW = -p dV$$

Per altra banda, hem vist pels gasos ideals que $dU = C_V dT$. Combinant les dues expressions, tenim:

$$dU = -p dV = C_V dT \Rightarrow C_V dT + p dV = 0$$

Dels gasos ideals, en sabem que

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Si combinem les dues últimes relacions, tenim:

$$\left.\begin{aligned} C_V dT + p dV &= 0 \\ p &= \frac{nRT}{V} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_V dT + nRT \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0$$

Si integrem la darrera relació, tenim:

$$C_V lnT + nRlnV = ct$$

Definim el coeficient adiabàtic, γ com a

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + \mathrm{nR}}{C_V} = 1 + \frac{\mathrm{nR}}{C_V}$$

podem comprovar que, com que $nR/C_V > 0$, $\gamma > 1$.

Llavors,

$$lnT + (\gamma - 1)lnV = ct \Rightarrow lnT + lnV^{\gamma-1} = ct \Rightarrow lnTV^{\gamma-1} = ct$$

I finalment,

$$TV^{\gamma-1} = ct \text{ o } T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

Per altra banda, per als gasos ideals

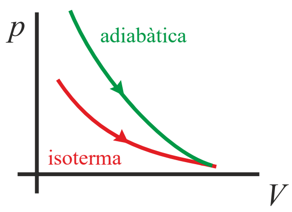
$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR}$$

$$\Rightarrow \frac{pV}{nR} V^{\gamma-1} = ct \Rightarrow pV^{\gamma} = ct \text{ o } p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma}$$

Representació dels processos adiabàtics

$$pV^{\gamma} = ct \Rightarrow p = \frac{ct}{V^{\gamma}}$$

Observeu la similitud entre les adiabàtiques i les isotermes: $pV = ct \Rightarrow p = \frac{ct}{V}$; per tant, la forma de les corbes és similar. Ara bé, com que $\gamma > 1$, el pendent de les adiabàtiques és més gran.



Càlcul del treball en un procés adiabàtic

Dos mètodes.

- Mètode 1:

$$W_{A\to B} = -\Delta U = -C_V \Delta T = -C_V(T_B - T_A)$$

- Mètode 2

$$W_{A\to B} = \int_A^B pdV = \int_A^B \frac{ct}{V^{\gamma}} dV = ct \int_A^B \frac{dV}{V^{\gamma}} = ct \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_A^B = ct \left[\frac{V_B^{-\gamma+1} - V_A^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right] =$$

$$= \frac{p_B V_B^{\gamma} V_B^{-\gamma+1} - p_A V_A^{\gamma} V_A^{-\gamma+1}}{1-\gamma} = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{1-\gamma} = \frac{p_A V_A - p_B V_B}{\gamma - 1}$$

Miscel·lània

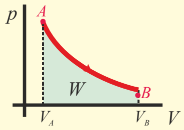
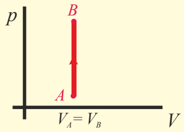
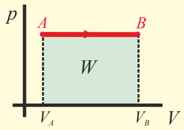
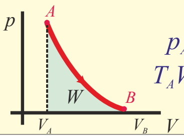
Per als gasos monoatòmics:

$$C_V = \frac{3}{2} nR \text{ i } C_p = \frac{5}{2} nR \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3} \approx 1{,}667$$

i per als gasos ideals diatòmics:

$$C_V = \frac{5}{2} nR \text{ i } C_p = \frac{7}{2} nR \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Resum de relacions

	Relació	$W_{A\to B}$	$Q_{A\to B}$	$\Delta U_{A\to B}$
Procés isoterm: T=ct 	$T_A=T_B=ct$ $p_AV_A=p_BV_B$	$nRT\ln\dfrac{V_B}{V_A}=p_AV_A\ln\dfrac{V_B}{V_A}$	$nRT\ln\dfrac{V_B}{V_A}=p_AV_A\ln\dfrac{V_B}{V_A}$	0
Procés isomètric: V=ct 	$V_A=V_B=ct$	0	$C_V(T_B-T_A)$	$C_V(T_B-T_A)$
Procés isòbar: p=ct 	$p_A=p_B=ct$	$p_A(V_B-V_A)=p_B(V_B-V_A)$	$C_p(T_B-T_A)$	$C_V(T_B-T_A)$
Procés adiabàtic: Q=0 	$p_AV_A^{\gamma}=p_BV_B^{\gamma}$=ct $T_AV_A^{\gamma-1}=T_BV_B^{\gamma-1}$=ct	$-C_V(T_B-T_A)=\dfrac{p_BV_B-p_AV_A}{1-\gamma}$	0	$C_V(T_B-T_A)$

$$\gamma=\frac{C_p}{C_V} \qquad C_p=nR+C_V$$

$$C_V=\frac{3}{2}nR \quad \text{monoatòmic}$$

$$C_V=\frac{5}{2}nR \quad \text{diatòmic}$$

Qüestions del tema 15

1. A les cascades del Niàgara l'aigua cau 50 m. *(a)* Si la pèrdua d'energia potencial incrementa l'energia interna de l'aigua, calculeu l'increment de la temperatura. *(b)* Feu el mateix per a les cascades de Yosemite, on l'aigua cau 740 m (aquests increments de temperatura no s'observen perquè l'aigua s'evapora en caure).

Sol.: *a*) 0,117 K; *b*) 1,74 K.

2. Durant una transformació, un sistema absorbeix 1500 J de calor i realitza 900 J de treball. Quina és la variació d'energia interna del sistema?

Sol.: 600 J.

Treball fet per un gas ideal

3. L'estat inicial d'un mol de gas ideal és p_1 = 3 atm, V_1 = 1 l i U_1 = 456 J. El seu estat final és p_2 = 2 atm, V_2 = 3 l i U_2 = 912 J. Per a cadascun dels quatre processos quasiestàtics que es descriuen a continuació, i que porten de l'estat inicial a l'estat final, representeu el diagrama $p-V$ i calculeu el treball realitzat pel gas i la calor absorbida.

   a) Es deixa expandir el gas fins a un volum de 3 l a pressió constant. Seguidament es refreda a volum constant fins a una pressió de 2 atm.
   b) El gas es refreda a volum constant fins a una pressió de 2 atm. Després es deixa expandir a pressió constant fins a un volum de 3 l.
   c) El gas s'expandeix isotèrmicament fins a un volum de 3 l i una pressió d'1 atm. S'escalfa llavors a volum constant fins a una pressió de 2 atm.
   d) El gas s'expandeix i rep calor, de manera que segueix una recta en el diagrama $p-V$ des de l'estat inicial fins al final.

Sol.: *a*) 6 atm·l, 10,5 atm·l; *b*) 4 atm·l, 8,50 atm·l; *c*) 3,30 atm·l, 7,8 atm·l; *d*) 5 atm·l, 9,5 atm·l.

4. Un mol de gas ideal diatòmic s'escalfa quasiestàticament (és a dir, de forma reversible), a volum constant, des de 300 K fins a 600 K. *(a)* Determineu l'increment d'energia interna, la calor absorbida i el treball realitzat. *(b)* Feu el mateix si el gas s'escalfa a pressió constant entre 300 K i 600 K.

Sol.: *a*) ΔU = 6,24 kJ, W = 0 J, Q = 6,24 kJ; *b*) ΔU = 6,24 kJ, W = 2,49 kJ, Q = 8,73 kJ.

Transformacions quasiestàtiques d'un gas ideal

5. Un mol de gas ideal monoatòmic (γ = 5/3) s'expandeix adiabàticament i quasiestàticament des d'una pressió de 10 atm i temperatura de 0 ºC fins a un estat de pressió de 2 atm. Determineu: *(a)* els volums inicial i final, *(b)* la temperatura final, *(c)* el treball realitzat pel gas.

Sol.: *a)* V_0 = 2,24 l, V_f = 5,88 l; *b*) 143 K; *c*) 1,62 kJ.

6. Un gas ideal a la temperatura de 20 ºC es comprimeix adiabàticament i quasiestàticament fins a la meitat del seu volum original. Calculeu-ne la temperatura final si: *(a)* $C_V = \frac{3}{2}nR$ (monoatòmic), *(b)* $C_V = \frac{53}{2}nR$ (diatòmic).

Sol.: *a*) 465 K; *b*) 387 K.

7. Un mol i mig d'heli s'expandeix adiabàticament i quasiestàticament des d'una pressió inicial de 5 atm i una temperatura inicial de 500 K fins a una pressió final d'1 atm. Calculeu: *(a)* la temperatura final, *(b)* el volum final, *(c)* el treball fet pel gas i *(d)* la variació de l'energia interna del gas.

Sol.: *a*) 263 K; *b*) 32,33 l; *c*) 4,44 kJ; *d*) –4,44 kJ.

8. Cinc mols d'un gas ideal diatòmic, inicialment a 1 atm i a 25 ºC, es comprimeixen reversiblement i isotèrmicament fins a un volum igual a la desena part del seu volum inicial i després es deixen expandir adiabàticament i reversiblement fins que el gas arriba a la pressió inicial d'1 atm. Calculeu la calor bescanviada, el treball realitzat i la variació de l'energia interna del gas.

Sol. $\Delta U_{12} = 0$, $Q_{12} = W_{12} = -28{,}5$ kJ; $\Delta U_{23} = -14{,}9$ kJ, $Q_{23} = 0$, $W_{23} = 14{,}9$ kJ.

9. Un gas ideal, amb un volum inicial V_1 i una pressió P_1, s'expandeix adiabàticament i quasiestàticament fins a un volum V_2 i una pressió P_2. Calculeu el treball realitzat pel gas i comproveu que el resultat és el següent: $W_{adiab} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$
Demostreu que el pendent de la corba adiabàtica que passa per un punt en un diagrama $p-V$ és γ vegades el pendent de la corba isoterma que passa pel mateix punt.

16. Segon principi de la termodinàmica

Objectius

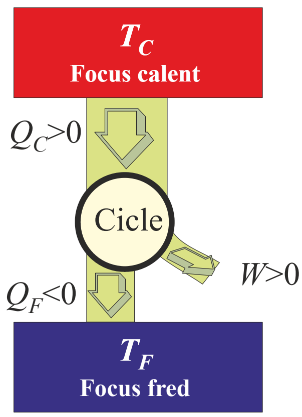
Concepte d'energia útil
Descripció de les màquines tèrmiques: rendiment
Descripció dels refrigeradors: eficàcia
Descripció del cicle de Carnot
Descripció del segon principi de la termodinàmica
Concepte de l'escala absoluta de temperatura
Concepte d'entropia
Descripció dels canvis de fase
Interpretació dels diagrames de fase de substàncies pures

En aquest tema analitzarem el concepte d'energia útil, és a dir, l'energia que es pot transformar en treball, i per tant analitzarem les màquines tèrmiques i introduirem el concepte de rendiment.

Màquines tèrmiques

La funció d'una màquina tèrmica és obtenir treball (motor), escalfar (bombes de calor) o refredar (refrigerador o aires condicionats). Per aconseguir-ho el que es fa és sotmetre un sistema a una transformació cíclica. El sistema està format per una substància de treball (generalment un gas).

Un motor és un dispositiu que converteix energia en treball; en el cas dels motors tèrmics, l'energia subministrada és en forma de calor. Per exemple, els motors de combustió l'obtenen cremant una substància combustible. Altres motors tèrmics són les centrals tèrmiques i nuclears i les màquines de vapor. En les centrals, aquest treball posteriorment es transforma en energia elèctrica.



En el cicle de la figura,

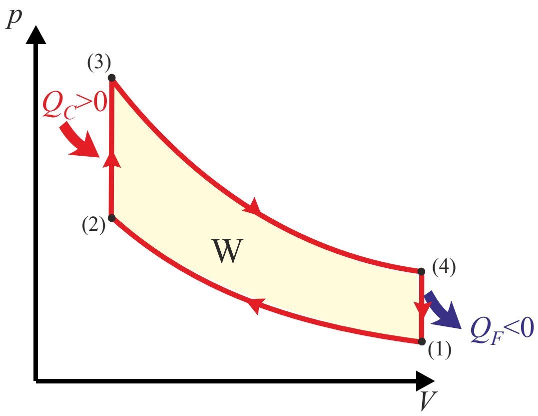
$$\left.\begin{aligned} \Delta U &= Q_C + Q_F - W \\ \Delta U &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow W = Q_C + Q_F$$

Definim el rendiment com la relació entre el treball obtingut i la calor aportada al motor:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C}$$

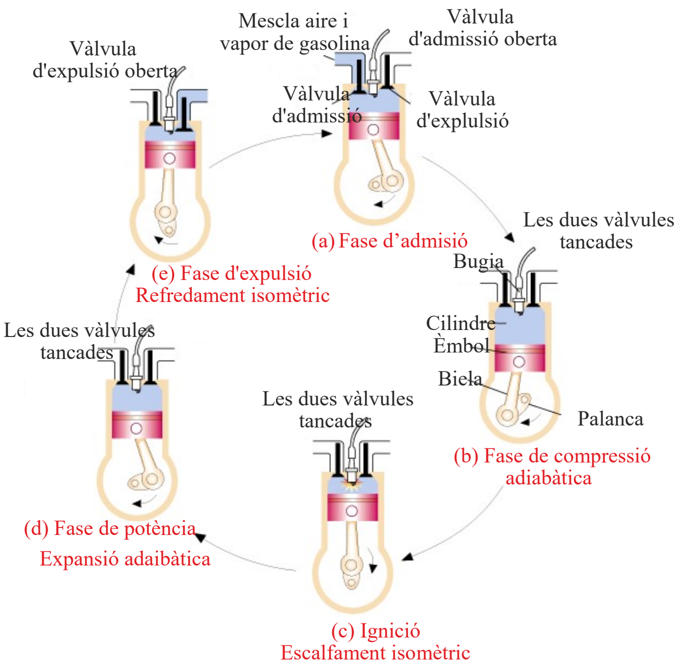
Alguns rendiments: motor de gasolina, entre el 15 % i el 25 %; les centrals nuclears, al voltant del 40 %.

Un exemple de cicle és el cicle d'Otto, que és el model idealitzat del motor de gasolina, en què la substància de treball és una barreja d'aire i vapor de gasolina. El cicle està format per dos processos isomètrics i dos processos adiabàtics:



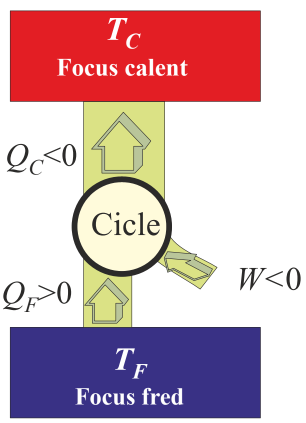
1→2 compressió adiabàtica
(fase de compressió)
2→3 escalfament a volum constant
(ignició, explosió de la gasolina)
3→4 compressió adiabàtica
(fase de potència)
4→1 refredament a volum constant
(expulsió de gasos i admissió de gasos)

Esquema del cicle d'Otto:



En el diagrama $p-V$ l'àrea dins el cicle és el treball que dona el motor a cada cicle.

Si el cicle és reversible, es pot seguir el cicle invertint el sentit de gir i, per tant, el signe del treball, és a dir, perquè el cicle funcioni a la inversa cal subministrar un treball des de l'exterior. També canvia el signe de Q_F i Q_C, o sigui, el que fem és extreure calor de la font freda i aportar calor al focus calent.



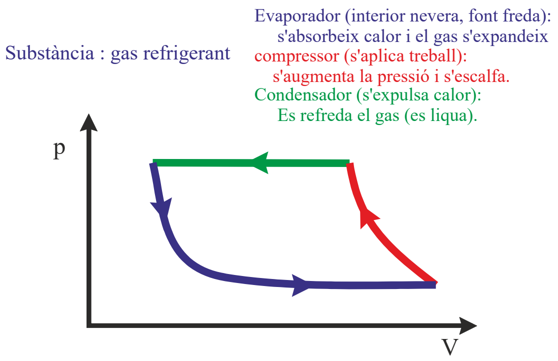
Aquest és el principi de funcionament de la bomba de calor i del refrigerador. De fet, ambdós són la mateixa màquina però l'aplicació és diferent; en la bomba de calor s'extreu calor de l'exterior per escalfar un espai interior, mentre que en un refrigerador s'extreu calor d'un espai interior per refredar-lo. L'eficiència d'un refrigerador es defineix com a:

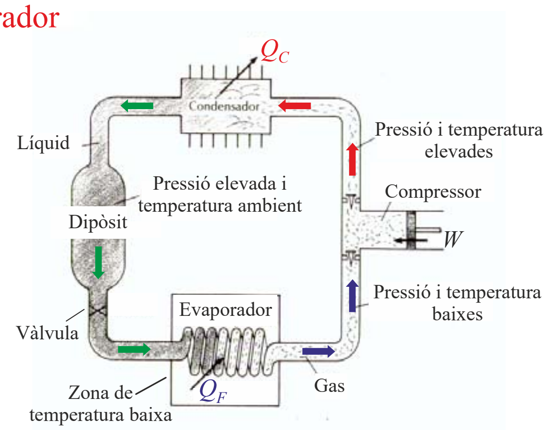
$$\varepsilon_{\text{ref}} \equiv \frac{Q_F}{|W|} = \frac{Q_F}{|Q_C| - Q_F} > 1$$

I l'eficiència d'una bomba de calor es defineix com a:

$$\varepsilon_{\text{bomb}} \equiv \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_C| - Q_F} > 1$$

Refrigerador





Alguns aparells d'aire condicionat (refrigeradors) també poden funcionar com a bombes de calor; quan es canvia el mode de funcionament el que es fa és intercanviar la font calenta amb la freda.

Un valor típic d'eficiència per a un refrigerador és 5 o 6. En les bombes de calor, quan la temperatura exterior és d'uns −4 ºC, l'eficiència és típicament 4, és a dir, que la calor transferida a l'espai interior és 4 vegades superior al consum energètic, o sigui, que energèticament les bombes de calor són molt més eficients que els elements calefactors. Quan la temperatura exterior cau, l'eficiència disminueix, fins al punt que per sota dels −15 ºC aquests aparells deixen de funcionar correctament.

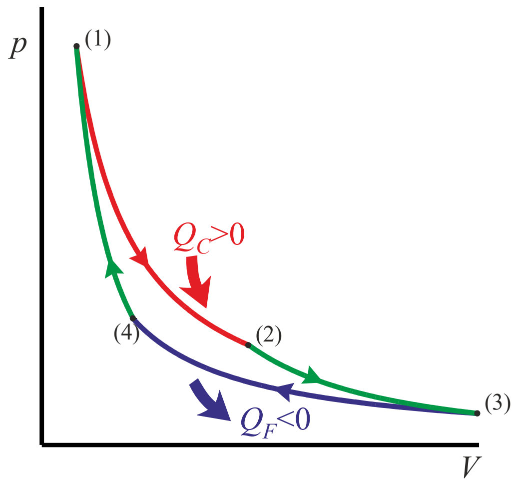
El cicle de Carnot

El principal interès és que sigui un cicle reversible; per aquesta raó cal:

- Successió d'estats d'equilibri.
- Transferències de calor isotermes (quan es transfereix calor entre cossos a temperatura diferent el procés és irreversible).
- Fricció nul·la. Les pèrdues de calor degudes a la fricció són processos irreversibles.

El cicle de Carnot és de gran interès teòric, atès que permet establir les limitacions dels cicles reals, com veurem tot seguit.

El cicle de Carnot es compon de dues transformacions adiabàtiques i dues transformacions isotermes:



1→ isoterma, $T_1 = T_2 = T_C$: $\Delta U = 0$ i

$$Q_C = W_{1\to 2} = nRT_C ln\frac{V_2}{V_1}$$

2→3 adiabàtica, $Q = 0$ i $\Delta U = -W_{2\to 3}$

3→4 isoterma, $T_3 = T_4 = T_F$: $\Delta U = 0$ i

$$Q_F = W_{3\to 4} = nRT_F \ln\frac{V_4}{V_3}$$

4→1 adiabàtica, $Q = 0$ i $\Delta U = -W_{1\to 4}$

Llavors el rendiment és:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{nRT_F \ln \frac{V_4}{V_3}}{nRT_C \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_F \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_C \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

I, finalment com $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$,

$$\eta = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Comprovem que $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$:

Per als processos adiabàtics:

$$\left.\begin{array}{l} T_C V_2^{\gamma-1} = T_F V_3^{\gamma-1} \\ T_C V_1^{\gamma-1} = T_F V_4^{\gamma-1} \end{array}\right\} \div \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

També podem comprovar que en el cicle de Carnot es compleix que

$$\eta = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \Rightarrow \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

Aquest resultat ens serà útil més endavant.

Finalment, si invertim el cicle es pot comprovar que

$$\varepsilon_{\text{ref}} = \frac{T_F}{T_C - T_F} \text{ i } \varepsilon_{\text{bomb}} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Segon principi de la termodinàmica

Aquest principi estableix

- La direcció dels processos (per exemple, que la calor flueix espontàniament dels cossos calents als freds).
- L'energia útil, és a dir, el treball màxim que podem obtenir d'un cicle o, el que és equivalent, el rendiment màxim d'un cicle.

Veurem tres enunciats equivalents però que posen l'èmfasi en diferents aspectes del segon principi.

Enunciat de Carnot

Cap màquina tèrmica que treballi entre dos fonts tèrmiques (T_C i T_F) pot tenir un rendiment superior al d'una màquina reversible que treballi entre les mateixes fonts.

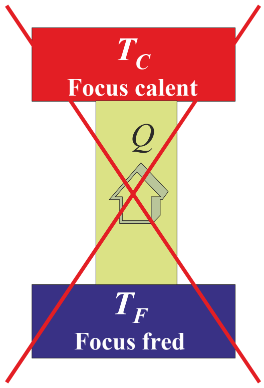
$$\eta_{\text{màx}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Exemples:

- En el motor de gasolina, $T_C = 3300$ K (explosió) i $T_F = 1400$ K (temperatura del gas que surt després de la combustió). $\eta_{\text{màx}} = 58\%$, però el rendiment real està entre el 15 % i el 20 %.
- En les centrals nuclears, $T_C = 800$ K i $T_F = 373$ K. $\eta_{\text{màx}} = 53\%$, però el rendiment real està al voltant del 40 %.

Enunciat de Clausius

No és possible cap procés que tingui com a únic resultat l'extracció de calor d'una font tèrmica (T_F) i l'absorció d'igual quantitat de calor d'una altra font tèrmica (T_C) a temperatura superior.



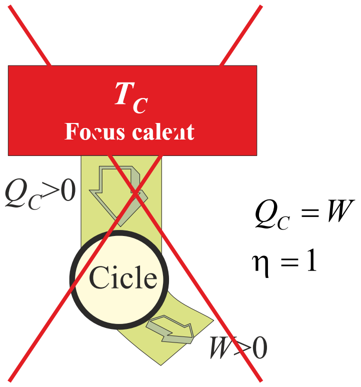
Aquest enunciat fa l'èmfasi en la direcció dels processos: la calor va dels cossos calents als freds i no al revés.

Observeu que també descriu el que seria un frigorífic impossible:

$$\varepsilon_{\text{ref}} = \frac{Q_F}{0} = \infty$$

L'eficiència ha de ser finita!

Enunciat de Kelvin-Planck



No és possible cap procés cíclic que tingui com a únic resultat l'extracció de calor d'una font tèrmica (T_C) i la producció d'igual quantitat de treball.

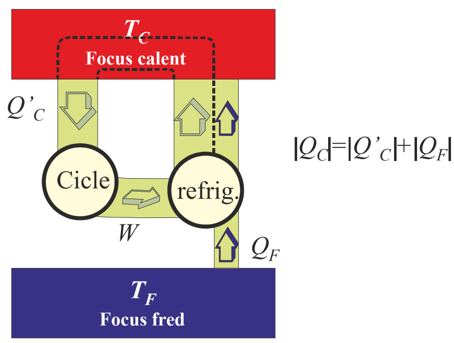
Així doncs, no és possible convertir tota l'energia tèrmica en treball; el rendiment ha de ser més petit que 1:

$$\eta < 1$$

Si fos possible extreure energia només d'una font de calor, podríem connectar aquesta màquina al mar i tindríem una font que produiria energia sense consumir cap tipus de combustible: extrauríem directament la calor del mar per convertir-la en energia!!!!

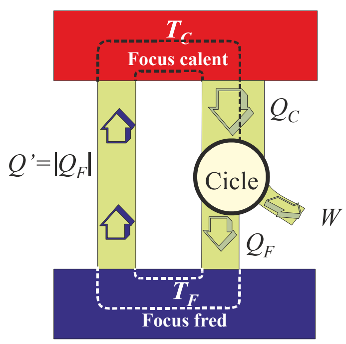
Enunciats equivalents:

No Kelvin $\Longrightarrow$ No Clausius



Amb una màquina que viola el principi de Kelvin obtenim un procés que viola l'enunciat de Clausius.

No Clausius $\Longrightarrow$ No Kelvin



Si l'enunciat de Clausius és fals, podem construir una màquina que viola l'enunciat de Kelvin-Planck.

Si l'enunciat de Carnot és fals, llavors podem construir una màquina que viola l'enunciat de Clausius; només cal emprar una màquina que compleixi que

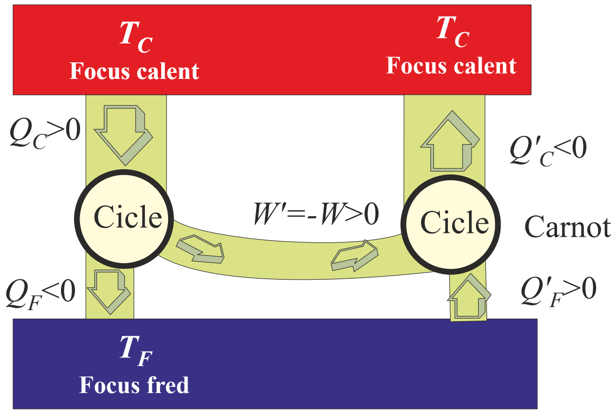
$$\eta > 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Agafem un cicle de Carnot i l'invertim; ho podem fer perquè el cicle de Carnot és reversible. El treball de la màquina l'emprem per invertir el cicle de Carnot (les primes identifiquen el cicle de Carnot):

$$W' = -W$$

Com que el rendiment del cicle de Carnot és inferior al de la màquina reversible,

$$\eta = \frac{W}{Q_C} > \frac{W'}{|Q'_C|} = \eta_{\text{carnot}}$$



la calor que la màquina de Carnot envia cap a la font calenta serà inferior a la calor que traiem de la font calenta per fer funcionar la màquina,

$$|Q'_C| > Q_C$$

és a dir, tenim un procés que, com a resultat net, obté l'extracció de calor de la font freda cap a la font calenta, i violem l'enunciat de Clausius.

Escala absoluta de la temperatura

En el tema 13 definíem l'escala absoluta de la temperatura a partir de les propietats del gas ideal. Per altra banda, pel cicle de Carnot sabem que

$$\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

Aquest resultat l'hem obtingut a partir del rendiment d'un cicle reversible; per tant, és vàlid per a qualsevol cicle reversible, amb independència de la substància de treball. Així doncs, aquesta relació té una naturalesa universal.

Llavors, si connectem una màquina reversible entre una referència T_F coneguda i una font a una temperatura T_C que volem mesurar, tenim:

$$T_C = T_F \frac{Q_C}{|Q_F|}$$

Si mesurem Q_C i Q_F, i com que coneixem T_F, podem determinar T_C.

Podem prendre com a referència el punt triple de l'aigua, T_F = 273,16 K. Observeu que si T_F = 0 K, llavors

$$\eta = 1 - \frac{0}{T_C} = 1$$

És a dir, tindríem una màquina que viola el principi de Kelvin-Planck. Per tant, les temperatures han de ser positives,

$T > 0$ K.

Entropia

Com hem vist, en un cicle reversible es compleix que

$$\oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

llavors, què passa amb un cicle irreversible?

En un procés irreversible estem fora de l'equilibri i, per tant,

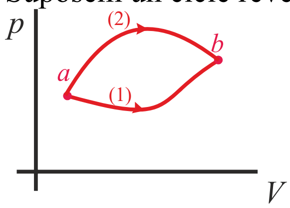
$$p_{\text{Sistema}} > p_{\text{externa}}$$

llavors

$$W_{\text{irr}} > W_{\text{rev}}$$
$$\Delta U = Q_{\text{rev}} - W_{\text{rev}} = Q_{\text{irr}} - W_{\text{irr}} \Rightarrow Q_{\text{rev}} > Q_{\text{irr}} \Rightarrow$$
$$\oint \frac{dQ_{irr}}{T} < 0$$

Aquesta relació es coneix com la desigualtat de Clausius.

Suposem un cicle reversible que passa pels estats *a* i *b*:



$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{a,1}^{b} \frac{dQ}{T} + \int_{b,2}^{a} \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow \int_{a,1}^{b} \frac{dQ}{T} - \int_{a,2}^{b} \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow$$
$$\int_{a,1}^{b} \frac{dQ}{T} = \int_{a,2}^{b} \frac{dQ}{T}$$

És a dir, que $\int_a^b \frac{dQ}{T}$ no depèn del camí. Això ens permet definir una nova variable, l'entropia, *S*, que és una variable d'estat:

$$\Delta S_{a\to b} = \int_a^b \frac{dQ}{T}\bigg|_{rev}$$

Les uniats de la entropia són J/K.

Si analitzem un procés reversible, el càlcul és directe; si analitzem un procés irreversible, cal imaginar-nos un procés reversible que vagi de *a* a *b*. Per a un gas ideal $(T_1,V_1) \rightarrow (T_2,V_2)$

$$dQ = dU + dW = dU + pdV = C_V dT + nRT\frac{dV}{V} \Rightarrow$$
$$\frac{dQ}{T} = C_V\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \Rightarrow \int_1^2 \frac{dQ}{T} = C_V \ln T|_1^2 + nR\ln V|_1^2$$

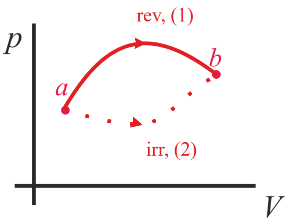
llavors,

$$\Delta S_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Per a un procés:

- Isòbar: $\Delta S_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{nC_p dT}{T} = nC_p \ln\frac{T_2}{T_1}$
- Isomètric: $\Delta S_{1\to 2} = C_V \ln\frac{T_2}{T_1}$
- Isoterm: $\Delta S_{1\to 2} = nR\ln\frac{V_2}{V_1}$
- Adiabàtic i reversible: $\Delta S_{1\to 2} = 0$

Què passa amb els processos irreversibles?



Desigualtat de Clausius

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

$$\oint \frac{dQ}{T} = \underbrace{\int_{a,1}^{b} \frac{dQ}{T}}_{rev} + \underbrace{\int_{b,2}^{a} \frac{dQ}{T}}_{irrev} < 0 \Rightarrow S_a - S_b + \int_{b,2}^{a} \frac{dQ_{irr}}{T} < 0$$

Suposem que el sistema és l'univers o que està aïllat, és a dir, que no intercanvia calor amb l'exterior. Llavors,

$$\int_{b,2}^{a} \frac{dQ_{irr}}{T} = 0$$

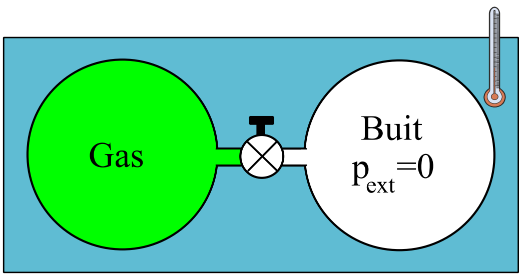
i

$$S_a - S_b < 0 \Rightarrow S_b > S_a$$

Per tant, per a un sistema aïllat, en un procés irreversible l'entropia augmenta. O també, en tot procés irreversible, l'entropia de l'univers augmenta.

Posem com a exemple, l'experiència de Joule, amb un sistema aïllat en què el gas s'expandia sobtadament de forma irreversible. En aquest procés la temperatura no varia; llavors:

$$\Delta S_{1\to 2} = nR\ln\frac{V_2}{V_1} \; i \; V_2 > V_1 \Rightarrow \Delta S > 0$$



Sentit físic de l'entropia

Direccionalitat dels processos

En un procés reversible, per exemple una pilota que xoca elàsticament amb el terra, el temps no té un sentit clar; si ho enregistrem en vídeo i el fem passar endavant i endarrere no observem res inversemblant.

En canvi, en un procés irreversible, com ara encendre un llumí, hi ha una direccionalitat clara: si fem anar el temps enrere identifiquem que la seqüència no és real.

Energia útil

L'energia útil té menys entropia que la calor que es desaprofita:

$$\frac{Q_C}{T_C} \text{ i } \frac{Q_F}{T_F}$$

Com que $T_C > T_F$, llavors Q_F/T_F té més entropia. L'augment d'entropia està associat a la pèrdua d'energia útil: com més augmenta l'entropia més energia útil es perd.

Exemple 1: Quina és la variació total d'entropia quan flueixen 400 J d'una font a una temperatura de 400 K a una font a una temperatura de 200 K?

$$\Delta S_{\text{font calenta}} = \frac{Q}{T} = -\frac{400}{400} = -1\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$$
$$\Delta S_{\text{font freda}} = \frac{Q}{T} = \frac{400}{200} = 2\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

(el volum del líquid és molt més petit que el del gas)

$$\Delta S_{\text{Univers}} = \Delta S_{\text{font calenta}} + \Delta S_{\text{font freda}} = 1\,\frac{\text{J}}{\text{K}} > 0$$

En l'exemple anterior, observeu que l'entropia de la font calenta disminueix; això és possible perquè no és un sistema aïllat. En canvi, la variació total d'entropia, és a dir, la variació d'entropia de l'univers, és positiva.

Observeu també que si el flux hagués anat de la font freda a la calenta, l'entropia hauria disminuït. Per tant, de nou comprovem que l'augment de l'entropia de l'univers en els processos irreversibles està vinculat a la direccionalitat dels processos; en aquest cas, l'augment d'entropia equival al fet que la calor flueix des de la font calenta a la freda.

Qüestions del tema 16

Màquines tèrmiques i frigorífiques

1. Dos mols d'un gas ideal monoatòmic tenen una pressió inicial p_1 = 2 atm i un volum inicial V_1 = 2 l. Sotmetem el gas al següent cicle quasiestàtic: s'expandeix isotèrmicament fins que té un volum V_2 = 4 l. Després s'escalfa a volum constant fins que té una pressió p_3 = 2 atm. A continuació es refreda a pressió constant fins que torna a l'estat inicial. *(a)* Representeu aquest cicle en un diagrama $p-V$. *(b)* Calculeu les temperatures T_1, T_2 i T_3. *(c)* Calculeu la calor subministrada al gas i el treball realitzat pel gas en cada part del cicle.

Sol.: *b*) $T_1 = T_2$ = 24,4 K, T_3 = 48,8 K; *c*) ΔU_{12} = 0 J, $Q_{12} = W_{12}$ = 281 J; W_{23} = 0 J, $\Delta U_{23} = Q_{23}$ = 608 J; ΔU_{31} = –608 J, Q_{31} = –1013 J, W_{31} = –405 J.

2. Una màquina frigorífica consumeix 150 J de treball per extreure 500 J de calor del compartiment fred. *(a)* Quina és la seva eficiència? *(b)* Quanta calor transmet a l'exterior?

Sol.: *a*) 3,33; *b*) 650 J.

3. Una màquina de Carnot treballa entre dos focus tèrmics que es troben a 300 K i 200 K. *(a)* Quin és el seu rendiment? *(b)* Si absorbeix 100 J del focus calent a cada cicle, quin treball realitza? *(c)* Quina quantitat de calor cedeix a cada cicle? *(d)* Quin és el coeficient d'eficiència de la màquina quan treballa com a refrigerador entre els mateixos focus?

Sol.: *a*) 1/3; *b*) 33,3 J; *c*) –66,7 J; *d*) 2.

4. Quin és el coeficient d'eficiència d'una màquina frigorífica de Carnot que treballa amb dos focus tèrmics que es troben a –15 i 20 ºC?

Sol.: 7,4.

5. A cada cicle una màquina extreu 150 J d'un focus a 100 ºC i dona 125 J a un focus a 20 ºC. *(a)* Quin és el rendiment d'aquesta màquina? *(b)* Quina és la relació entre el seu rendiment i el rendiment màxim que podria tenir?

Sol. *a*) 0,167; *b*) 78 %.

6. La relació entre el rendiment d'un motor i el seu rendiment màxim és del 85 %. A cada cicle extreu 200 kJ de calor d'un focus calent a 500 K i dona calor a un focus fred a 200 K. *(a)* Quin és el rendiment d'aquest motor? *(b)* Quant de treball realitza a cada cicle? *(c)* Quina quantitat de calor s'elimina a cada cicle?

Sol.: *a*) 0,51; *b*) 102 kJ; *c*) −98 kJ.

7. La caldera d'un reactor nuclear escalfa aigua a 285 ºC i l'aigua de refrigeració està a 40 ºC. El rendiment real de la central és del 34 %. *(a)* Quin és el límit teòric de rendiment de la central? *(b)* Quina és la raó entre la potència perduda i la que és perdria si el rendiment fos màxim?

Sol.: *a*) 44 %; *b*) 1,18.

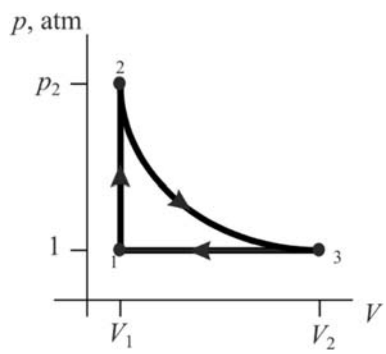
8. Una màquina té una substància formada per 1 mol d'un gas ideal monoatòmic. El cicle comença amb una pressió i un volum inicials de p_1 = 1 atm i V_1 = 24,6 l. El gas s'escalfa a volum constant fins a p_2 = 2 atm i després s'expandeix a pressió constant fins arribar a tenir V_3 = 49,2 l. En aquestes dues etapes la calor és absorbida. Seguidament el gas es refreda a volum constant fins que la seva pressió torna a ser d'1 atm. Finalment, es comprimeix a pressió constant fins arribar de nou a l'estat inicial. En aquestes dues últimes etapes la calor se cedeix. Totes les etapes són reversibles i quasiestàtiques. *(a)* Dibuixeu un diagrama $p-V$ del cicle. *(b)* Calculeu el treball, la calor i la variació de l'energia interna de cada etapa del cicle. *(c)* Trobeu el rendiment del cicle.

Sol.: *b*) W_{12} = 0 atm·l, $Q_{12} = \Delta U_{12}$ = 36,9 atm·l; W_{23} = 49,2 atm·l, Q_{23} = 123 atm·l, ΔU_{23} = 73,8 atm·l; W_{34} = 0 atm·l, $Q_{34} = \Delta U_{34}$ = −73,8 atm·l; W_{41} = −24,6 atm·l, Q_{41} = −61,5 atm·l, ΔU_{41} = −36,9 atm·l; *c*) 15,4 %.

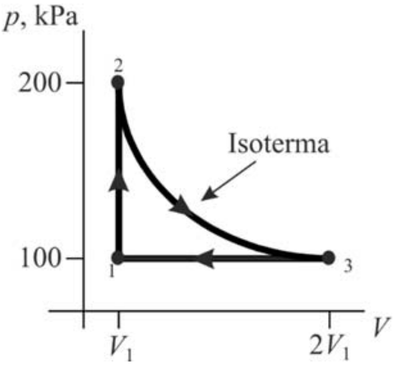
9. Una màquina que utilitza 1 mol d'un gas ideal de C_v = 21 J/K, inicialment a V_1 = 24,6 l i T_1 = 400 K, treballa en un cicle consistent en 4 etapes: 1) expansió isotèrmica a 400 K fins a un volum final el doble de l'inicial; 2) refredament fins a 300 K a volum constant; 3) compressió isotèrmica fins al volum inicial, i 4) escalfament a volum constant fins a la temperatura inicial de 400 K. *(a)* Dibuixeu el cicle en un diagrama $p-V$, *(b)* trobeu el treball fet pel gas, la calor absorbida i la variació d'energia interna en cada etapa del cicle i *(c)* determineu el rendiment de la màquina.

Sol.: *b*) $W_{12} = Q_{12}$ = 2305 J, ΔU_{12} = 0 J
W_{23} = 0 J, $Q_{23} = \Delta U_{23}$ = −2100 J
$W_{34} = Q_{34}$ = −1728 J, ΔU_{34} = 0 J
W_{41} = 0 J, $Q_{41} = \Delta U_{41}$ = 2100 J
c) 13,1 %.

10. En el cicle de la figura, un mol de gas ideal (γ = 1,4) està inicialment a 1 atm i 0 ºC. El gas s'escalfa a volum constant fins a una temperatura T_2 = 150 ºC i tot seguit s'expandeix adiabàticament i reversiblement fins que la seva pressió torna a ser d'1 atm. Després es comprimeix a pressió constant fins a l'estat inicial. Calculeu: *(a)* la temperatura T_3 a què arriba després de l'expansió adiabàtica, *(b)* la calor absorbida o cedida a cada procés, *(c)* el rendiment del cicle, *(d)* el rendiment d'un cicle de Carnot que operés entre les mateixes temperatures extremes del cicle.



Sol.: *a*) 373 K; *b*) Q_{12} = 3117 J, Q_{23} = 0 J, Q_{31} = −2917 J; *c*) 6,4 %; *d*) 35,5 %.



11. Un mol d'un gas ideal monoatòmic amb un volum inicial V_1 = 25 l segueix el cicle indicat a la figura. Tots els processos són quasiestàtics. Calculeu: *(a)* la temperatura a cada estat del cicle, *(b)* la calor absorbida o cedida a cada etapa, *(c)* el rendiment del cicle.

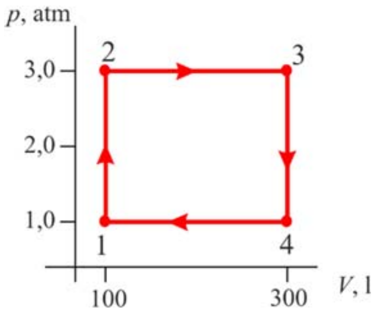
Sol.: *a*) T_1 = 301 K, T_2 = T_3 = 601 K; *b*) Q_{12} = 3,75 kJ, Q_{23} = 3,47 kJ, Q_{31} = −6,25 kJ; *c*) 0,134.

12. Un mol de gas ideal, inicialment a 100 ºC, descriu el següent cicle reversible: expansió isotèrmica fins a un volum doble de l'inicial, expansió adiabàtica fins a un volum triple de l'inicial, compressió isotèrmica i compressió adiabàtica fins a l'estat inicial. La calor molar del gas a volum constant és igual a 5/2 *R*. Calculeu la calor i el treball intercanviats. Calculeu també la variació de l'energia interna.

Sol.: ΔU_{12} = 0, Q_{12} = W_{12} = 2,15 kJ; ΔU_{23} = −1,16 kJ, W_{23} = 1,16 kJ, Q_{23} = 0
ΔU_{34} = 0, Q_{34} = W_{34} = −1,8 kJ; ΔU_{41} = 1,16 kJ, W_{41} = –1,16 kJ, Q_{41} = 0.

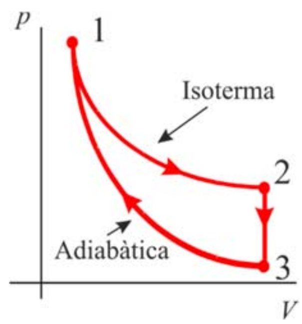
13. En un cilindre d'un motor tèrmic tenim un litre d'un gas diatòmic a una pressió, p_1 = 5 atm i temperatura T_1 = 300 K. S'expandeix adiabàticament fins a una pressió p_2 = 1 atm. Després, es comprimeix a pressió constant fins que el seu volum és el mateix que a l'inici. Finalment, per completar el cicle, s'escalfa a volum constant fins assolir l'estat inicial. *a)* Determineu la pressió, el volum i la temperatura al final de les tres transformacions i representeu el diagrama *p*−*V*. *b)* Calculeu el treball i la calor bescanviats en cada transformació. *c)* Calculeu el rendiment del cicle i el d'un cicle de Carnot que treballi en el mateix interval de temperatures.

Sol.: *a*) p_2 = 1 atm, V_2 = 3,16 l, T_2 = 189 K; p_3 = 1 atm, V_3 = 1,0 l, T_3 = 60 K; *b*) W_{12} = 4,608 atm·l, Q_{12} = 0 atm·l; W_{23} = −2,16 atm·l, Q_{23} = −7,55 atm·l; W_{31} = 0 atm·l, Q_{31} = 10 atm·l; *c*) 24,5 % i 80 %.



14. Un gas ideal (γ = 1,4) segueix el cicle de la figura. La temperatura inicial, T_1, és de 200 K. Calculeu: *a)* les temperatures de la resta d'estats del cicle, i *b)* el rendiment del cicle.

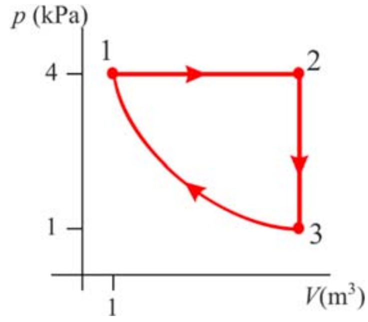
Sol.: *a*) T_2 = T_4 = 600 K, T_3 = 1800 K; *b*) 0,154



15. Una màquina fa que 1 mol d'un gas ideal monoatòmic segueixi el cicle de la figura, amb $p_1 = 5 \cdot 10^6$ Pa, $p_3 = 1 \cdot 10^6$ Pa i $T_1 = 550$ K. Trobeu: *(a)* Els volums als estats 1, 2 i 3, i la temperatura a l'estat 3. *(b)* El treball, la variació d'energia interna i la calor absorbida/cedida en cada etapa. *(c)* Quin és el rendiment del cicle?

Sol.: *a*) V_1 = 0,914 l, V_2 = V_3 = 2,402 l; *b*) W_{12} = Q_{12} = 4,42 kJ, ΔU_{12} = 0 J; W_{23} = 0 J, Q_{23} = ΔU_{23} = −3,26 kJ; W_{31} = −3,26 kJ, Q_{31} = 0 J, ΔU_{34} = 3,26 kJ; *c*) 26 %.

16. Un mol d'un gas ideal monoatòmic segueix el cicle de la figura. El procés 3→1 és isotèrmic. *(a)* Trobeu el volum al punt 3. *(b)* Calculeu el treball, la variació d'energia interna i la calor absorbida/cedida en cada etapa. *(c)* Determineu el rendiment del cicle.



Sol.: *a*) $V_3 = 4\ \text{m}^3$; *b*) $W_{12} = 12{,}0$ kJ, $\Delta U_{12} = 18$ kJ, $Q_{12} = 30{,}0$ kJ; $W_{23} = 0$ J, $Q_{23} = \Delta U_{23} = -18{,}0$ kJ; $Q_{31} = W_{31} = -5{,}54$ kJ; *c*) 21,5 %.

17. Dos mols d'un gas ideal diatòmic s'utilitzen en una màquina tèrmica que segueix el cicle següent: partint d'un estat inicial a pressió 5 atm i volum 10 l, pateix una evolució isobàrica fins a duplicar el volum inicial; a continuació, una isoterma el porta a un volum de 30 l; aleshores, seguint una isocora, es disminueix la pressió fins a un quart estat tal que una adiabàtica pot tornar el gas al seu estat inicial. *(a)* Determineu la pressió, el volum i la temperatura al final de les transformacions i representeu el diagrama $p-V$. *(b)* Calculeu el rendiment del cicle i el d'un cicle de Carnot que treballi en el mateix interval de temperatures.

Sol.: *a*) $p_1 = 5$ atm, $V_1 = 10$ l, $T_1 = 304$ K; $p_2 = 5$ atm, $V_2 = 20$ l, $T_2 = 609$ K; $p_3 = 3{,}33$ atm, $V_3 = 30$ l, $T_3 = 609$ K; $p_4 = 1{,}074$ atm, $V_4 = 30$ l, $T_4 = 196$ K; *b*) 21,4 %, 67,8 %.

18. Cent mols d'un gas ideal diatòmic segueixen el cicle següent: partint d'un estat inicial a pressió $p_1 = 3$ atm i temperatura $T_1 = 500$ K, s'expandeixen isotèrmicament fins a assolir una pressió, $p_2 = 1$ atm; després es comprimeix a pressió constant fins a un tercer estat, des del qual es pot fer una compressió adiabàtica que torna el gas al seu estat inicial. *(a)* Determineu la pressió, el volum i la temperatura al final de les transformacions i representeu el diagrama $p-V$. *(b)* Calculeu el rendiment del cicle i d'un cicle de Carnot que treballi en el mateix interval de temperatures.

Sol.: *a*) $p_1 = 3$ atm, $V_1 = 1367$ l, $T_1 = 500$ K; $p_2 = 1$ atm, $V_2 = 4103$ l, $T_2 = 500$ K; $p_3 = 1$ atm, $V_3 = 2998$ l, $T_3 = 365$ K; *b*) 14,2 %, 26,9 %.

19. Una màquina té com a fluid de treball una certa quantitat d'un gas monoatòmic. Inicialment, a una pressió de 0,6 atm la seva temperatura és de –10 ºC i el gas ocupa un volum de 0,5 litres. Una transformació isoterma el porta a un volum de 0,3 litres. Després s'augmenta la pressió mantenint el volum constant, i finalment una transformació adiabàtica el torna a l'estat inicial. *(a)* Determineu la pressió, el volum i la temperatura al final de les transformacions i representeu el diagrama $p-V$. *(b)* Calculeu el treball, la variació d'energia interna i la calor absorbida/cedida a cada etapa. *(c)* Calculeu el rendiment del cicle i el d'un cicle de Carnot que treballi en el mateix interval de temperatures.

Sol.: *a*) $p_2 = 1$ atm, $V_2 = 0{,}3$ l, $T_2 = 263$ K; $p_3 = 1{,}406$ atm, $V_3 = 0{,}3$ l, $T_3 = 368$ K; *b*) $Q_{12} = W_{12} = -0{,}153$ atm·l, $\Delta U_{12} = 0$ atm·l; $W_{23} = 0$ atm·l, $\Delta U_{23} = Q_{23} = 0{,}182$ atm·l; $W_{31} = 0{,}182$ atm·l, $Q_{31} = 0$ atm·l, $\Delta U_{31} = -0{,}182$ atm·l; *c*) 16,1 % i 28,9 %.

20. Una certa quantitat d'un gas ideal diatòmic segueix el cicle descrit a continuació. De l'estat inicial, amb un volum de 10 l i una pressió de 2 atm, passa mitjançant una isoterma a un estat en que la temperatura és de 400 K i el volum de 30 l. Després, pateix una transformació a volum constant fins que la pressió és de 0,5 atm. A continuació, una altra isoterma el torna al volum inicial, i finalment, una quarta transformació, a volum constant, el retorna a l'estat inicial. Representa el cicle en un diagrama termodinàmic, calcula el rendiment del cicle i compara'l amb el del cicle de Carnot entre les mateixes temperatures.

Sol.: 16% i 25%.

Entropia

21. S'introdueix un bloc d'1 kg de coure a 100 ºC a l'interior d'un calorímetre de capacitat calorífica negligible que conté 4 l d'aigua a 0 ºC. Calculeu la variació d'entropia de *(a)* el bloc de coure, *(b)* l'aigua i *(c)* l'univers. (Dades: C_{cu} = 0,386 kJ/kg·K, C_{aigua} = 4,18 kJ/kg·K)

Sol.: *a*) –117 J/K; *b*) 137 J/K; *c*) 20,3 J/K.

22. Dos mols d'un gas ideal a la temperatura de 400 K s'expandeixen quasiestàticament i isotèrmicament des d'un volum inicial de 40 litres fins a un volum final de 80 litres. *a)* Quina és la variació d'entropia del gas? *b)* Quina és la variació d'entropia de l'univers amb aquest procés?

Sol.: *a*) 11,5 J/K; *b*) 0 J/K

23. Dos mols d'un gas ideal a la temperatura de 400 K ocupen un volum inicial de 40 litres. Experimenten una expansió adiabàtica lliure fins a un volum final de 80 litres. *(a)* Quina és la variació d'entropia del gas? *(b)* Quina és la variació d'entropia de l'univers amb aquest procés?

Sol.: *a*) 11,5 J/K; *b*) 11,5 J/K.

24. Un sistema absorbeix 200 J de calor d'un focus a 300 K i cedeix 100 J reversiblement a un focus a 200 K. En aquest procés el sistema realitza un treball de 50 J. *(a)* Quina és la variació de l'energia interna del sistema? *(b)* Quina és la variació d'entropia del sistema? *(c)* Quina és la variació d'entropia de l'univers? *(d)* Si el sistema evolucionés irreversiblement, com serien les respostes d'*a*), *b*) i *c*)?

Sol.: *a*) 50 J; *b*) 0,167 J/K; *c*) 0 J/K; *d*) 50 J, 0,167 J/K i > 0.

17. Bibliografia

- Tipler, P. *Física per a la ciència i la tecnologia*. Vol. 1. 6a edició. Barcelona: Reverté, 2010. ISBN: 9788429144321.
- Badosa i Franch, Jordi (2009). *Apunts de física per a Fonaments de física 1*. Girona: Documenta Universitaria: Universitat de Girona. ISBN 9788492707164.
- Hecht, Eugene (2000). *Física: álgebra y trigonometría*, vol 1. México: International Thomson. ISBN: 9687529881.
- Serway, Raymond A. (cop. 2005). *Física para ciencias e ingenierías*, vol 1. (6ª ed.). México: International Thomson. ISBN: 9789706868220.
- Alonso, Marcelo (cop. 2000). *Física*. México: Addison Wesley Longman.
- Sears, Francis Weston (2004-2005). *Física universitaria*. México: Pearson Educación.
- Serway, Raymond A. (2005). *Física para ciencias e ingenierías*. (6a ed.) México: International Thomson.
- Giancoli, Douglas C. (cop. 2002). *Física para universitarios*, vol 1. (3a ed.) México: Pearson Education, ISBN 9684444842.
- Ohanian, Hans C. (cop. 2009). *Física para ingeniería y ciencias*, vol 1, México: McGraw-Hill/Interamericana, ISBN 9789701067444 (v. 1).

18. Índex alfabètic

H

I

K

L

Ll

L

M

N

O

P

Q

R