

## Treball final de grau

**Estudi:** Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

**Títol:** Dinàmica dels asteroides troians

**Document:** Resum

**Alumne:** Felix Lauwaert Luyten

**Tutor:** Esther Barrabes Vera

**Departament:** Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística

**Àrea:** Matemàtica aplicada

**Convocatòria (mes/any):** 09/2015



## Resum

### Antecedents i objecte del treball

Recentment s'ha publicat un article científic titulat *Jumping mechanisms of Trojan asteroids in the planar restricted three- and four-body problems*, realitzat per Oshima K. i Yanao T. del *Department of Applied Mechanics and Aerospace Engineering*, de la *Wasada University*, Tokio [1].

Aquest treball pren l'article anterior, que estudia els asteroides presents al sistema Sol-Júpiter, com a referència metodològica. L'objectiu al que es pretén arribar és comprovar els mecanismes que permeten l'existència d'asteroides troians que salten d'un camp a un altre que s'estudien en l'esmentat article i estendre'n l'estudi a altres casos (Sol-Terra i Sol-Neptú).

L'autor d'aquest treball ha triat aquest tema per permetre-li obtenir una base de coneixement de sistemes dinàmics i tècniques de programació per realitzar un màster de matemàtiques minimitzant les carències pròpies d'haver realitzat un grau en enginyeria.

Els asteroides troians són asteroides que comparteixen òrbita amb un planeta del sistema solar. No orbiten al seu voltant com fan les llunes, sinó que ho fan al voltant d'uns punts d'equilibri anomenats punts de Lagrange triangulars, que es troben en dues posicions per davant i per darrere del planeta en qüestió, i són una característica del model restringit de tres cossos (R3BP), que és el model matemàtic en el que es basa el treball (veure figura 1).

Els asteroides troians segueixen trajectòries capgròs (tadpole en anglès). Aquests es troben repartits en dues zones diferents dins el sistema Sol-planeta i s'anomenen camp grec i camp troià. Per altra banda existeixen trajectòries de ferradura (horseshoe en anglès) que es mouen d'un camp a l'altre de manera cíclica. A la figura 1 es poden observar diversos punts en que els asteroides segueixen òrbites de tipus tadpole.

Per altra banda, existeixen alguns asteroides que semblen seguir una trajectòria tipus tadpole però en un moment determinat canvien la seva òrbita i salten d'una zona de tadpoles fins a l'altra. Aquests asteroides tan particulars s'anomenen *Jumping Trojans* i són l'objecte d'aquest treball, que pretén entendre què provoca el canvi de camp en el cas Sol-Júpiter i investigar les probabilitats de trobar casos similars als sistemes Sol-Terra i Sol-Neptú de manera ràpida.

Tots els càlculs necessaris durant la elaboració d'aquest treball estan realitzats mitjançant el software MATLAB.

### Model matemàtic: el problema restringit de tres cossos

L'any 1772, el matemàtic Joseph-Louis de Lagrange va definir 5 punts d'equilibri dins el R3BP anomenats punts de Lagrange i enumerats de 1 a 5. Aquests punts representen unes localitzacions a l'espai on la força gravitacional combinada de  $m_1$  i  $m_2$  és igual a zero.

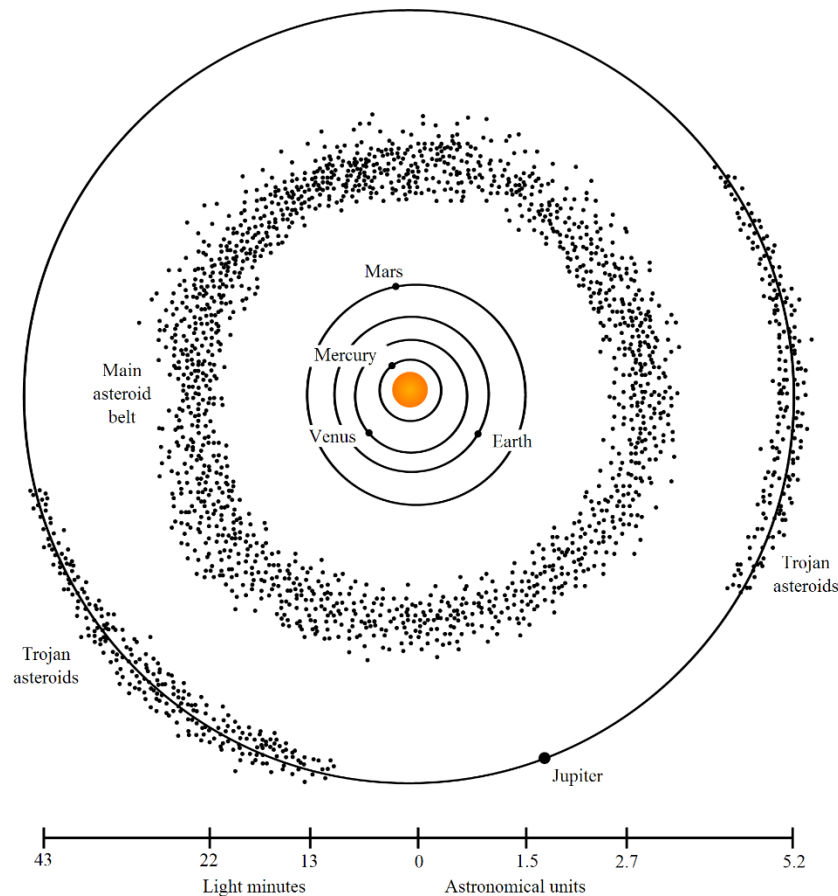


Figura 1: Representació d'asteroides troians de tipus tadpole. Els asteroides amb trajectòries tipus horseshoe envolten tots dos grups d'asteroides amb òrbites tadpole i passen pel costat oposat a Júpiter del Sol, creant així una forma de ferraadura. FONT: [1]

A la figura 1, els punts anomenats  $L_4$  i  $L_5$  (els més rellevants per aquest treball) es troben a  $60^\circ$  endavant i endarrere de Júpiter, situats sobre la seva òrbita. Els asteroides troians que hi ha representats orbiten al seu voltant. També cal concretar el punt  $L_3$ , que es troba al costat oposat de Júpiter respecte el Sol, a sobre la òrbita del primer.

Com que el R3BP és un model conservatiu, es defineix una variable de l'energia que serà constant al llarg de totes les solucions que s'obtinguin a partir d'un determinat punt inicial. Segons les característiques de la òrbita que es vulgui simular, aquesta energia pot prendre diferents valors. O sigui, que depenent del valor d'energia que tingui un cos, aquest realitzarà una trajectòria determinada o una altra. Per tant, per trobar òrbites horseshoe i tadpole cal especificar la energia dins uns rangs concrets que siguin propicis.

Una variable clau per entendre els resultats d'aquest treball és el paràmetre de masses, que mesura la proporció entre les masses dels dos cossos que governen el R3BP i es troba definit dins les equacions que componen el model. Així:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

On  $m_1$  representa la massa del Sol i  $m_2$ , la massa del planeta del qual es busquen *jumping Trojans* (en la figura 1,  $m_2$  és Júpiter, mentre que els altres planetes representats no tenen influència gravitacional dins el model R3BP).

## Resultats

En el problema restringit de tres cossos o R3BP, les proximitats dels punts estables de Lagrange  $L_4$  i  $L_5$  s'hi troben caracteritzades per dos tipus d'òrbites ben diferenciades.

Per una banda, les òrbites tadpole orbiten al voltant d'un sol punt estable ( $L_4$  o  $L_5$ ) i es troben molt a prop d'aquest.

Per altra banda, les òrbites horseshoe engloben els punts  $L_3$ ,  $L_4$  i  $L_5$ , passant a una distància major dels punts estables. Tots dos tipus d'òrbites existeixen dins un rang molt estret d'energia, pel que un asteroide amb una energia fora d'aquest rang seguirà altres tipus de trajectòries.

Existeixen, a més, un tipus d'asteroide capaç de realitzar òrbites tadpole al voltant d'un punt estable i adoptar, en un moment donat, òrbites de tipus horseshoe per acabar adoptant altra vegada una òrbita tadpole al voltant de l'altre punt estable (són anomenats *jumping trojans*) i un tipus d'asteroide capaç de passar de tenir una òrbita tadpole (horseshoe) i adoptar una òrbita horseshoe (tadpole) de manera permanent.

Les òrbites tadpole i horseshoe estan separades per una sèrie d'òrbites associades a òrbites periòdiques al voltant de  $L_3$ , anomenades varietats invariants. La detecció de les àrees on es poden donar un o altre tipus d'òrbites es realitza analitzant aquestes varietats, tal com s'ha vist a la figura 19, al capítol 4.

Les òrbites tadpole es donen al voltant dels dos punts estables sense arribar a creuar les varietats invariants. Les òrbites horseshoe, per altra banda, no creuen mai els plecs de les varietats invariants. Per últim, els *jumping trojans* s'originen quan un asteroide creua un lòbul creat entre un plec d'una varietat inestable (o estable) amb una varietat estable (o inestable).

La mida d'aquests lòbuls i, en conseqüència, la quantitat de *jumping trojans* és directament proporcional al paràmetre de masses del sistema i l'energia que s'estudia en varia poc els resultats. En aquest sentit, s'ha trobat que el valor del paràmetre de masses que permeti observar en una primera aproximació *jumping trojans* ha de ser superior al del sistema Sol-Neptú, ja que per aquest no se n'han trobat.

Tot i ser molt representatiu, el R3BP no és una representació exacta del sistema Solar, pel que la validesa dels resultats queda subjecta a l'aptitud del model pel sistema que es vulgui estudiar.