Universitat de Girona
Escola Politècnica Superior

# Treball final de grau

**Estudi: Grau en Enginyeria Mecànica**

**Títol: Estudi analític de les suspensions de la motocicleta elèctrica de l'UdG Racing Team**

**Document**: Memòria i annexos

**Alumne**: Guillem Roura Ripoll

**Tutor**: Narcís Gascons Clarió
**Departament**: Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial
**Àrea**: Enginyeria mecànica

**Convocatòria:** Setembre/2015

# ÍNDEX

## Memòria i annexos

1. INTRODUCCIÓ ..... 6
1.1 Antecedents ..... 6
1.1.1 Peticionari ..... 6
1.1.2 Necessitat del peticionari ..... 6
1.2 Objecte del projecte ..... 6
1.3 Especificacions i abast ..... 6
1.3.1 Especificacions de la petició ..... 6
1.3.2 Abast de l'estudi ..... 7
2. METODOLOGIA ..... 8
3. DESCRIPCIÓ DE LA MOTOCICLETA ..... 9
3.1 Disseny de la motocicleta ..... 9
3.2 Xassís ..... 10
3.3 Basculant ..... 10
3.4 Motor ..... 11
3.5 Suspensions ..... 11
4. DESCRIPCIÓ DE LA BASE DEL CÀLCUL ..... 13
4.1 Graus de llibertat del model ..... 13
4.2 Motocicleta ..... 14
4.3 Suspensions ..... 14
4.4 Superfície de la carretera ..... 15
4.4.1 Casos estudiats ..... 15
5. DESCRIPCIÓ DEL MODEL FET AMB WORKING MODEL 2D ..... 19
5.1 Motocicleta ..... 20
5.2 Suspensions i rodes ..... 20
5.3 Actuadors ..... 22
5.3.1 Amplituds d'irregularitats de la carretera en simulacions ..... 23

6. RESULTATS ..... 24
6.1 Introducció ..... 24
6.2 Freqüències pròpies del sistema ..... 24
6.2.1 Resultats de l'anàlisi de vibracions ..... 24
6.2.2 Comprovació dels resultats amb Working Model 2D ..... 24
6.3 Desplaçament del centre de masses i rotació del xassís ..... 28
6.3.1 Cas 1 ..... 28
6.3.2 Cas 2 ..... 29
6.3.3 Cas 3 ..... 29
6.3.4 Cas 4 ..... 30
6.3.5 Cas 5 ..... 30
6.4 Desplaçament part davantera i posterior ..... 31
6.4.1 Cas 1 ..... 31
6.4.2 Cas 2 ..... 32
6.4.3 Cas 3 ..... 32
6.4.4 Cas 4 ..... 33
6.4.5 Cas 5 ..... 33
6.5 Explicació dels resultats ..... 34
7. CONCLUSIONS ..... 35
8. RELACIÓ DE DOCUMENTS ..... 37
9. BIBLIOGRAFIA ..... 38
ANNEX A: MODEL SENZILL AMB Working Model ..... 40
A.1 Introducció ..... 40
A.2 Càlcul de les freqüències pròpies pel mètode de Lagrange ..... 40
A.3 Model fet amb Working Model ..... 44
ANNEX B: CÀLCULS ..... 49
B.1 Massa total, centre de gravetat i moment d'inèrcia de la motocicleta ..... 49
B.1.1 Introducció ..... 49
B.1.2 Càlcul de la massa total de la motocicleta ..... 49

B.1.3 Càlcul del centre de gravetat de la motocicleta ..... 49

B.1.4 Càlcul del moment d'inèrcia total de la motocicleta ..... 51

B.2 Cinemàtica ..... 54

B.2.1 Introducció ..... 54

B.2.2 Càlcul cinemàtic ..... 54

B.3 Equacions de govern ..... 58

B.3.1 Introducció ..... 58

B.3.2 Càlcul de les equacions de govern ..... 58

B.4 Anàlisi modal ..... 60

B.4.1 Introducció ..... 60

B.4.2 Càlcul anàlisi modal ..... 60

ANNEX C: CÀLCUL DE LA CONSTANT D'ELASTICITAT DE LA MOLLA DE LA SUSPENSIÓ POSTERIOR ..... 65

C.1 Introducció ..... 65

C.2 Càlcul teòric de la constant d'elasticitat de la molla ..... 65

C.3 Càlcul de la constant d'elasticitat de la molla a partir d'un assaig al laboratori ..... 66

# MEMÒRIA

# 1. INTRODUCCIÓ

## 1.1 Antecedents

### 1.1.1 Peticionari

Associació d'estudiants "UdG Racing Team"

c/Lluís Santaló, 21

Girona, 17003

CIF: G-55197396

### 1.1.2 Necessitat del peticionari

L'UdG Racing Team, una associació constituïda per estudiants de l'Escola Politècnica Superior de la Universitat de Girona, ha decidit presentar-se a la competició internacional de construcció de motocicletes elèctriques "Smart Moto Challenge".

Amb la intenció de conèixer la resposta de les suspensions en diferents condicions de superfície, i per tal d'assegurar-se la correcta posta a punt de la moto, s'ha encarregat un estudi analític del comportament de les suspensions i un model amb un programa de simulació.

## 1.2 Objecte del projecte

L'objecte d'aquest projecte és fer un estudi analític de com responen les suspensions de la motocicleta en carreteres amb diferents irregularitats.

Això vol dir analitzar, com, amb el sistema de suspensions escollit pel peticionari, i amb unes condicions de cada carretera determinades, es desplaça el centre de gravetat de la moto, la part davantera i la part posterior del xassís, i la rotació d'aquest.

## 1.3 Especificacions i abast

### 1.3.1 Especificacions de la petició

El peticionari demana que l'estudi analític compleixi els següents requeriments:

- L'estudi ha de fer servir les dades reals facilitades pel peticionari. (Requisit)
- L'estudi ha d'incloure l'explicació de tots els càlculs. (Requisit)

- L'estudi ha d'incloure totes les gràfiques necessàries per entendre el comportament de les suspensions (Requisit)
- L'estudi ha d'incloure un model realitzat amb un programa de simulació que permeti corroborar resultats. (Requisit)
- Els càlculs no han de tenir en compte l'esmorteïment de les suspensions de la moto. (Requisit)
- El cost total de l'estudi no ha de ser superior a 5.000€ (Desig)

### 1.3.2 Abast de l'estudi

Aquest estudi inclou els càlculs portats a terme i les gràfiques on es representa el desplaçament del centre de masses, el gir del xassís, i desplaçaments de les parts davantera i posterior d'aquest segons diferents condicions de carretera. En els càlculs d'aquest treball no s'ha tingut en compte l'efecte de la constant d'esmorteïment que tenen les suspensions.

També s'inclou a l'estudi un model realitzat amb el programa Working Model 2D.

Tots els detalls i explicacions necessàries per a la correcta comprensió d'aquest treball també estan inclosos.

## 2. METODOLOGIA

Els càlculs d'aquest estudi analític s'han desenvolupat a partir de les dades de la moto aportades pel peticionari. Amb les dades de la moto conegudes, el primer pas ha estat calcular el centre de gravetat i el moment d'inèrcia de la moto.

Tenint el pes total de la moto, la posició del seu centre de gravetat i el seu moment d'inèrcia, s'ha fet una primera aproximació del que seria un model de la moto amb el programa Working Model 2D. L'objectiu d'aquest pas ha estat intentar trobar les freqüències pròpies d'aquest sistema mitjançant Lagrange i veure quins valors resultaven. Una descripció del model i dels resultats es pot trobar a l'*annex A: Model senzill amb Working Model*.

Després s'ha procedit a fer els càlculs de cinemàtica necessaris per trobar les equacions de moviment del sistema. Tot seguit s'ha realitzat l'anàlisi modal de vibracions i s'han arribat a trobar les funcions que descriuen el desplaçament vertical del centre de gravetat del sistema i el gir del xassís respecte l'eix que passa pel centre de gravetat. També s'han trobat les funcions pel desplaçament vertical de les parts davantera i posterior. Per acabar, s'han generat gràfiques descrivint aquestes funcions amb el programa de càlcul Matlab.

Al mateix temps s'ha desenvolupat un model més acurat amb el Working Model, per veure si els resultats calculats s'ajusten a la simulació que fa el programa.

Per a la realització de l'estudi s'han estudiat cinc casos de condicions d'irregularitat de carretera, cada un degudament detallat en aquest treball.

En els càlculs d'aquest treball no s'ha tingut en compte l'esmorteïment que tenen tots els sistemes de suspensió de vehicles, ni tampoc les constants d'elasticitat i esmorteïment que té el pneumàtic al estar en contacte amb el terra.

# 3. DESCRIPCIÓ DE LA MOTOCICLETA

En aquest apartat es farà una breu introducció del disseny de la motocicleta, així com de les parts que s'han tingut en compte per fer els càlculs pertinents d'aquest estudi.

## 3.1 Disseny de la motocicleta

La moto ha estat pensada per a facilitar el transport de material lleuger en zones urbanes, per exemple, per a repartidors de pizza. Per aquest motiu s'ha deixat un espai buit a la part baixa del xassís per poder-hi introduir paquets (figura 1).

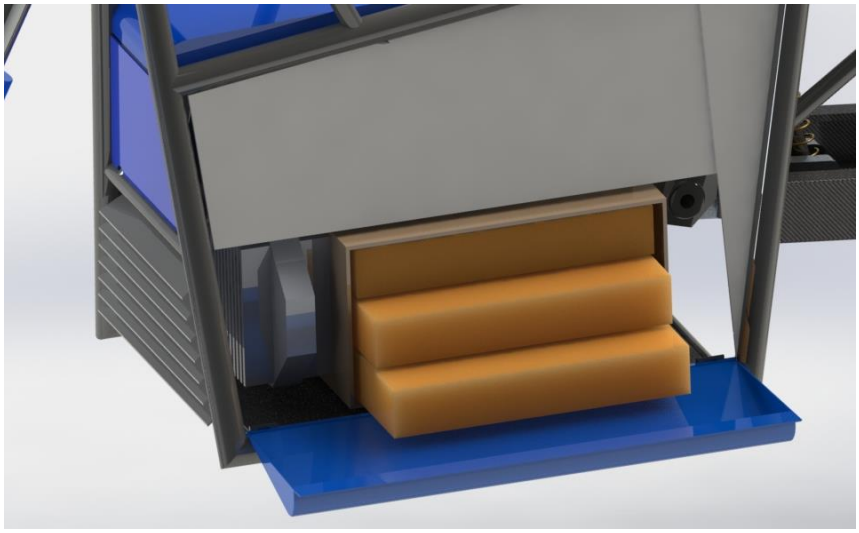


**Figura 1: Espai per a càrrega**

La moto permet transportar a més del pilot, un passatger, i la distància entre eixos és de 1.350 mm. A la figura 2 es pot veure una imatge del seu aspecte general.

**Figura 2: Vista general de la moto**

## 3.2 Xassís

El xassís està format per perfils tubulars de diàmetre 20x1,5 mm i 30x2 mm. El material utilitzat és acer S275. En la figura 3 es mostra una imatge obtinguda en CAD del xassís muntat a la moto de l'UdG Racing Team.

**Figura 3: Vista general del xassís**

El pes total del xassís és de 15 Kg.

## 3.3 Basculant

El basculant està compost per fibra de carboni i alumini. El seu pes total és de 3,5 Kg. A la figura que segueix es pot veure una vista general del seu disseny feta amb un programa CAD.

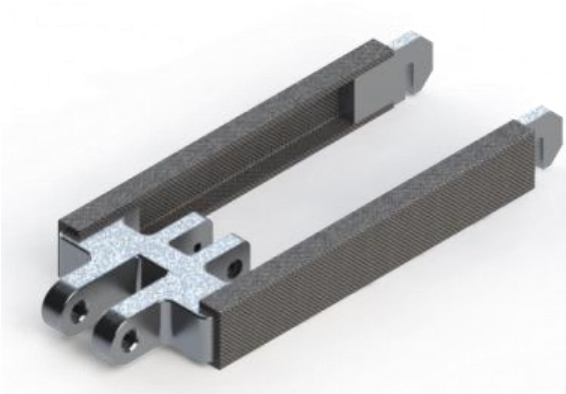


**Figura 4: Basculant d'alumini i fibra de carboni**

## 3.4 Motor

El motor que fa servir la motocicleta és un motor elèctric de 2 CV de potència màxima, que va muntat directament a la roda de darrera. D'aquesta manera, no es necessita sistema de transmissió ja que transmet la potència directament a la roda.

**Figura 5: Vista de la roda de darrera amb motor**

## 3.5 Suspensions

La suspensió davantera muntada a la moto és de tipus telescòpic i està col·locada a un angle de 26,5°. Pel que fa la suspensió posterior, consta d'un amortidor reciclat d'una moto de trial i que està inclinat 15° respecte la vertical. A continuació es mostren dues imatges, una del sistema de suspensió davanter, feta mitjançant un programa CAD i una altra del sistema de suspensió posterior.

**Figura 6: Sistema suspensió davanter**

**Figura 7: Amortidor posterior**

A la taula que segueix es mostren les característiques més representatives de cada sistema de suspensió:

| Suspensió davantera | | Suspensió posterior | |
|---|---|---|---|
| **Diàmetre del tub de la forquilla:** | 37 mm | **Longitud total:** | 285 mm |
| **Longitud de la molla:** | 284 mm | **Longitud de la molla:** | 143,5 mm |
| **Cursa:** | 192 mm | **Cursa:** | 41 mm |
| **Constant rigidesa molla:** | 4,5N/mm | **Constant rigidesa molla:** | 65 N/mm |

**Taula 1: Característiques de les suspensions**

# 4. DESCRIPCIÓ DE LA BASE DEL CÀLCUL

Per tal de respondre els requisits del peticionari i estudiar el comportament de les suspensions, es farà l'anàlisi modal, que inclou entre altres coses el càlcul de les freqüències pròpies del sistema.

Per tal, doncs de començar amb els càlculs, s'ha establert un sistema de dos graus de llibertat basat en les dades de pes i de geometria aportades pel peticionari. La descripció dels elements més importants segueix en els apartats a continuació.

## 4.1 Graus de llibertat del model

El model en dos dimensions que s'ha establert per representar la moto real és de dos graus de llibertat. Per demostrar-ho, cal fer servir la fórmula de Grübler (equació 1):

$$F = 3 \cdot (N - 1) - 2 \cdot P_1 - P_2 \qquad \text{(eq. 1)}$$

On:

$F$ → és el número de graus de llibertat total del sistema.

$N$ →és el número de barres (o objectes) que té el mecanisme (o model, en aquest cas).

$P_1$ → és el número de parells inferiors que té el model (referenciats com a P (parell prismàtic) o R (parell de rotació) en el dibuix).

$P_2$ → és el número de parells superiors que té el model.

A continuació es mostra un esbós del model establert per representar la motocicleta en els càlculs, amb tots els seus objectes i parells inferiors. El sistema no té cap parell superior.

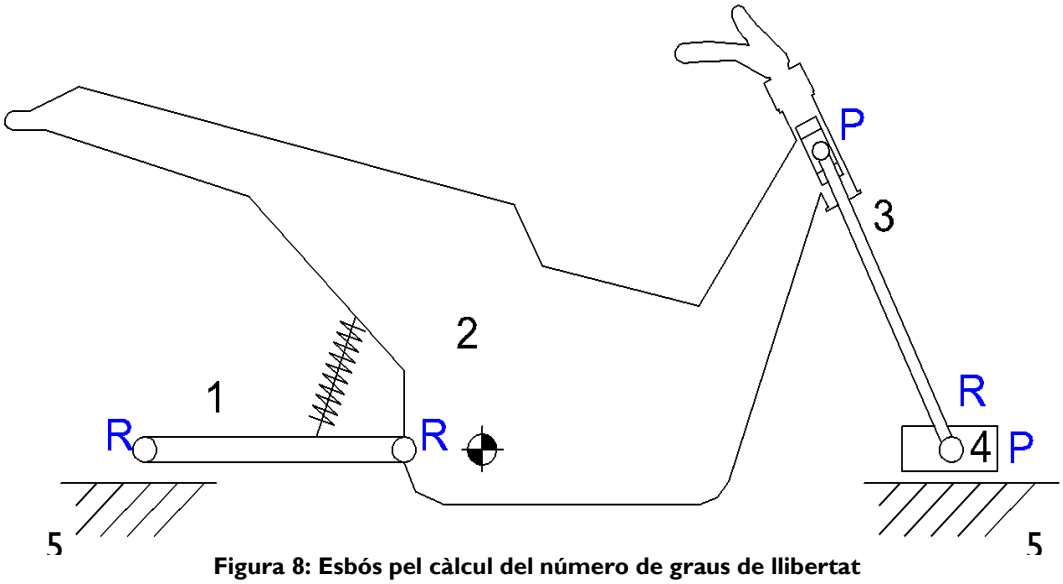



**Figura 8: Esbós pel càlcul del número de graus de llibertat**

Per tant, la fórmula de Grübler per el model proposat queda de la següent manera:

$$F = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 5 - 0 = 2$$

Així doncs el model és **de 2 graus de llibertat**.

## 4.2 Motocicleta

Per modelar la motocicleta, el primer ha estat trobar el seu pes total, el seu centre de gravetat i el seu moment d'inèrcia total. La manera com s'han trobat i tots els càlculs referents a aquest pas es poden consultar a l'*annex B: Càlculs* de la memòria. A la taula que segueix es mostren les dades trobades i que s'han utilitzat per a la realització dels càlculs de l'estudi:

| Pes (kg) | Coordenades centre de gravetat (respecte eix roda de davant) (mm) | Moment d'Inèrcia total centroïdal (kg m²) | Distància entre eixos (mm) |
|---|---|---|---|
| 52 | x=785,91, y=114,32 | 23,1 | 1.350 |

**Taula 2: Dades de la motocicleta utilitzades en la realització dels càlculs**

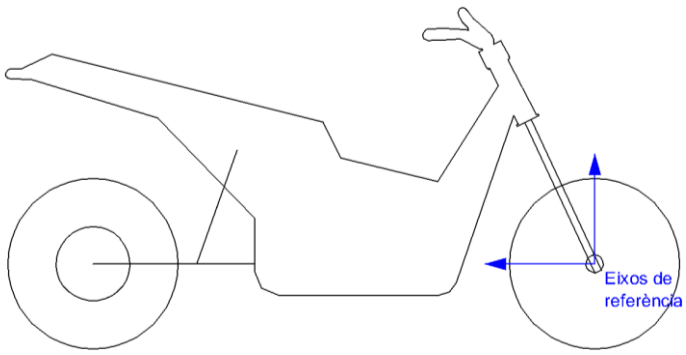



**Figura 9: Eixos de referència sobre els que s'ha calculat el centre de gravetat**

## 4.3 Suspensions

Les suspensions són l'element central d'aquest estudi. La suspensió davantera s'ha modelat seguint els valors donats pel peticionari. Per la suspensió posterior, al no tenir dades del peticionari, ha calgut portar la molla al laboratori per tal de mesurar-ne la seva constant. A l'*annex C: Càlcul de la constant d'elasticitat de la molla de la suspensió posterior* es mostra amb més detall com s'han dut a terme les mesures.

Les dades utilitzades es mostren a la següent taula:

| Molla/Característica | Davant | Darrere |
|---|---|---|
| **Constant K (N/m)** | 4.500 | 65.000 |
| **Longitud inicial (mm)** | 284 | 134,5 |
| **Recorregut (mm)** | 192 | 100 |
| **Angle (º)** *(respecte la vertical)* | 26,5 | 15 |

**Taula 3: Dades de les suspensions**

## 4.4 Superfície de la carretera

En els càlculs s'ha considerat que la superfície de la carretera segueix una forma sinusoïdal on el període és diferents vegades la distància entre eixos de la motocicleta. Havent utilitzat unitats del SI en els càlculs (metres, radians i newtons), i essent la transmissibilitat una proporció, l'amplitud de l'ona sinusoïdal es considera la unitat, 1 metre. A l'apartat següent, es mostren els períodes de la superfície de la carretera detallats per cada cas.

### 4.4.1 Casos estudiats

Per tal d'estudiar la transmissibilitat, en el model es proposen diversos casos amb diferents relacions entre la distància entre eixos de la moto i la distància entre crestes de la irregularitat.

La distància entre eixos de la moto serà sempre la mateixa, 1.350 mm.

Pel període de la irregularitat de la carretera s'agafen proporcions de diferents vegades la distància entre eixos de la moto. Això implica que existeixi un angle de desfasament entre la roda de davant i la roda de darrere de la moto.

A la taula següent es mostren les proporcions estudiades en el model entre la distància entre eixos de la moto i el període de la irregularitat (distància entre crestes de la irregularitat), i se'ls hi assigna un cas. També es mostra el desfasament en radians.

| Cas | Relació període/eixos rodes (R) | Període irregularitat (mm) | Desfasament φ (radians) |
|---|---|---|---|
| **1** | 0,5 | 675 | 4π→0 |
| **2** | 1 | 1.350 | 2π→0 |
| **3** | 2 | 2.700 | π |
| **4** | 3 | 4.050 | 2π/3 |
| **5** | 20 | 27.000 | π/10 |

**Taula 4: Casos estudiats**

Com podem veure, en el cas 1 i 2 tindrem per tots dos un desfasament de 0 radians, ja que l'inici del període per a 4π i 2π és el mateix.

A les figures que vénen a continuació, es mostra esquemàticament a quina situació correspon cada cas:

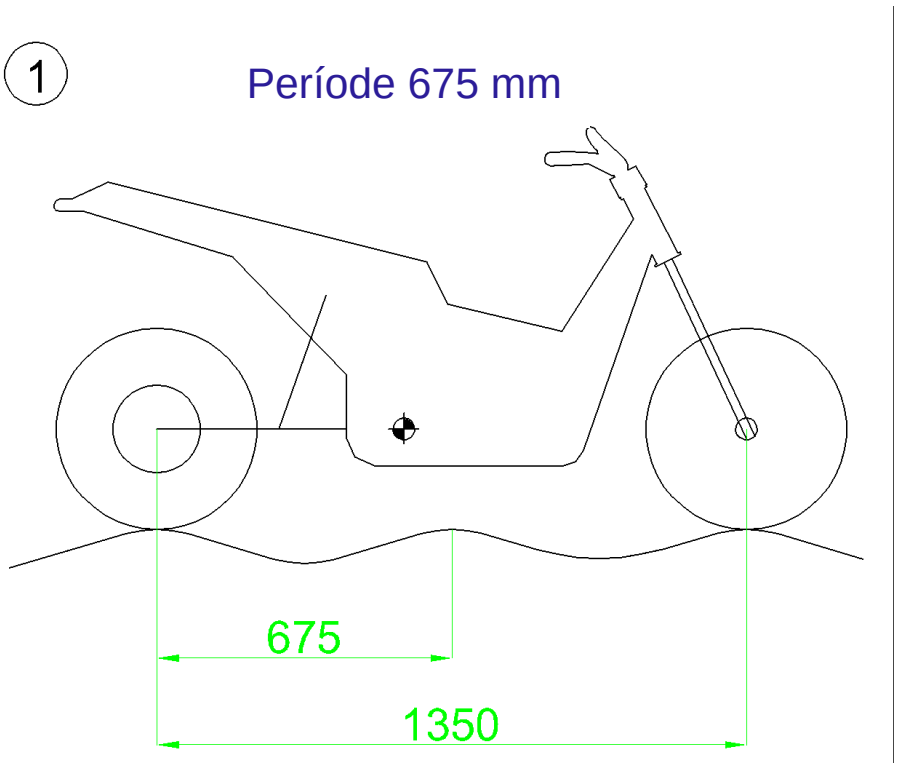



**Figura 10: Situació en el cas 1 (R=0,5)**

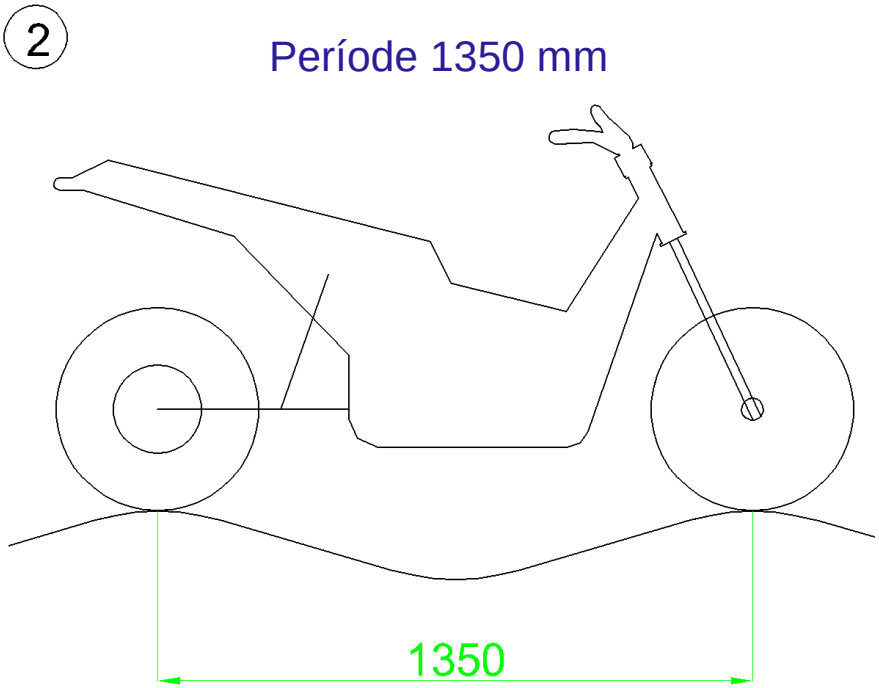



**Figura 11: Situació en el cas 2 (R=1)**

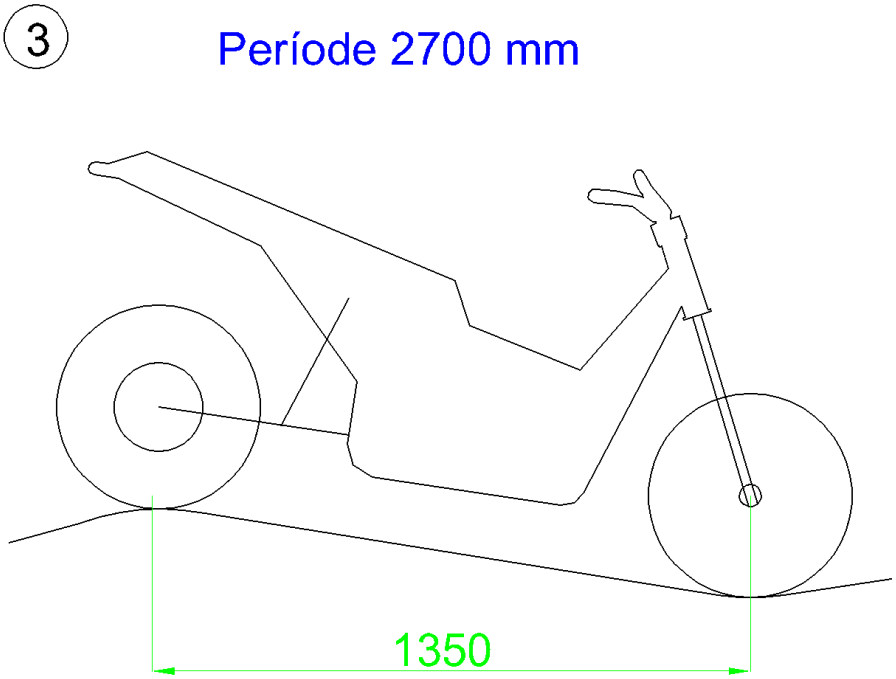



**Figura 12: Situació en el cas 3 (R=2)**

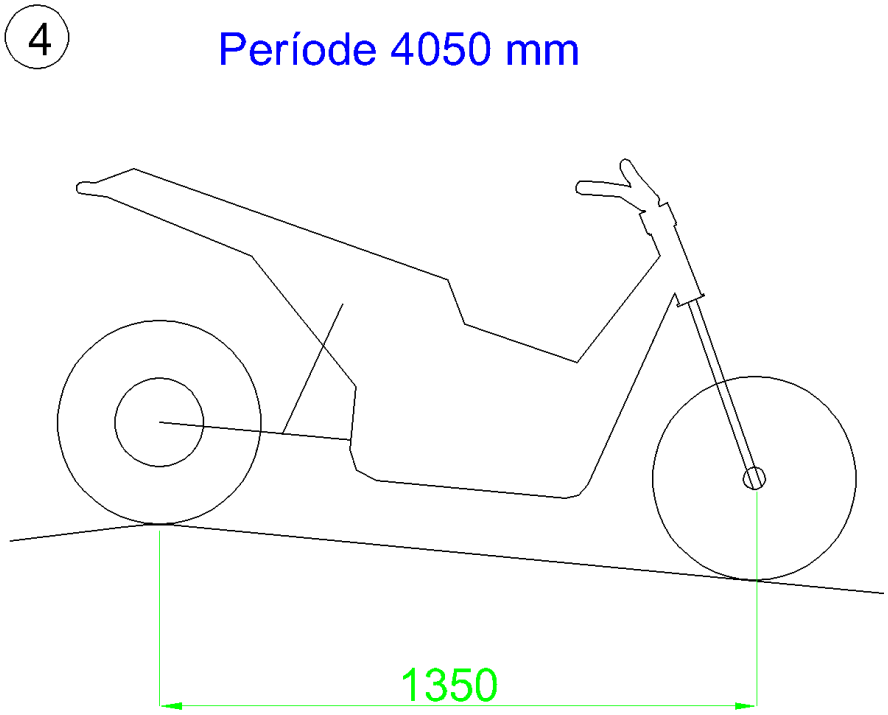



**Figura 13: Situació en el cas 4 (R=3)**

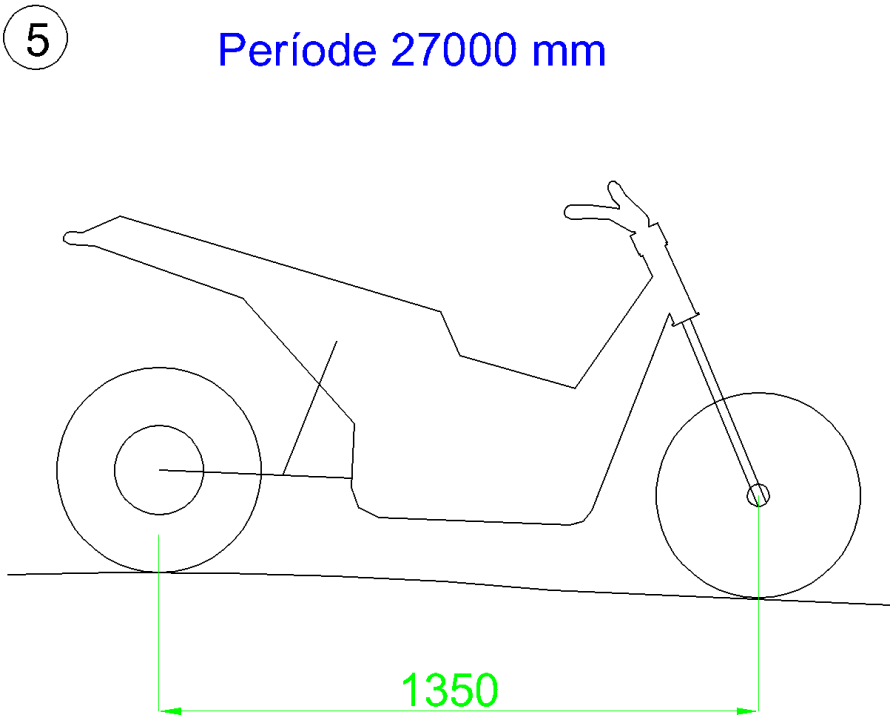



**Figura 14: Situació en el cas 5 (R=20)**

# 5. DESCRIPCIÓ DEL MODEL FET AMB WORKING MODEL 2D

En aquest apartat s'explica com s'ha creat el model amb el programa Working Model 2D. El model fet amb Working Model permet veure com es desplaça el centre de gravetat de la moto i el gir del xassís donades unes condicions d'amplitud i de freqüència d'irregularitat de la carretera. A part d'això, la simulació també permet veure si els resultats obtinguts en els càlculs s'ajusten al model, permetent verificar el resultats. De la mateixa manera que en els càlculs, la superfície de la carretera s'ha suposat una funció sinusoïdal.

És important destacar que en aquest model fet amb Working Model, totes les variables i constants estan en unitats del Sistema Internacional.

A continuació es mostra una imatge general del model on s'hi han assenyalat els elements més importants, que s'explicaran en els apartats a continuació.

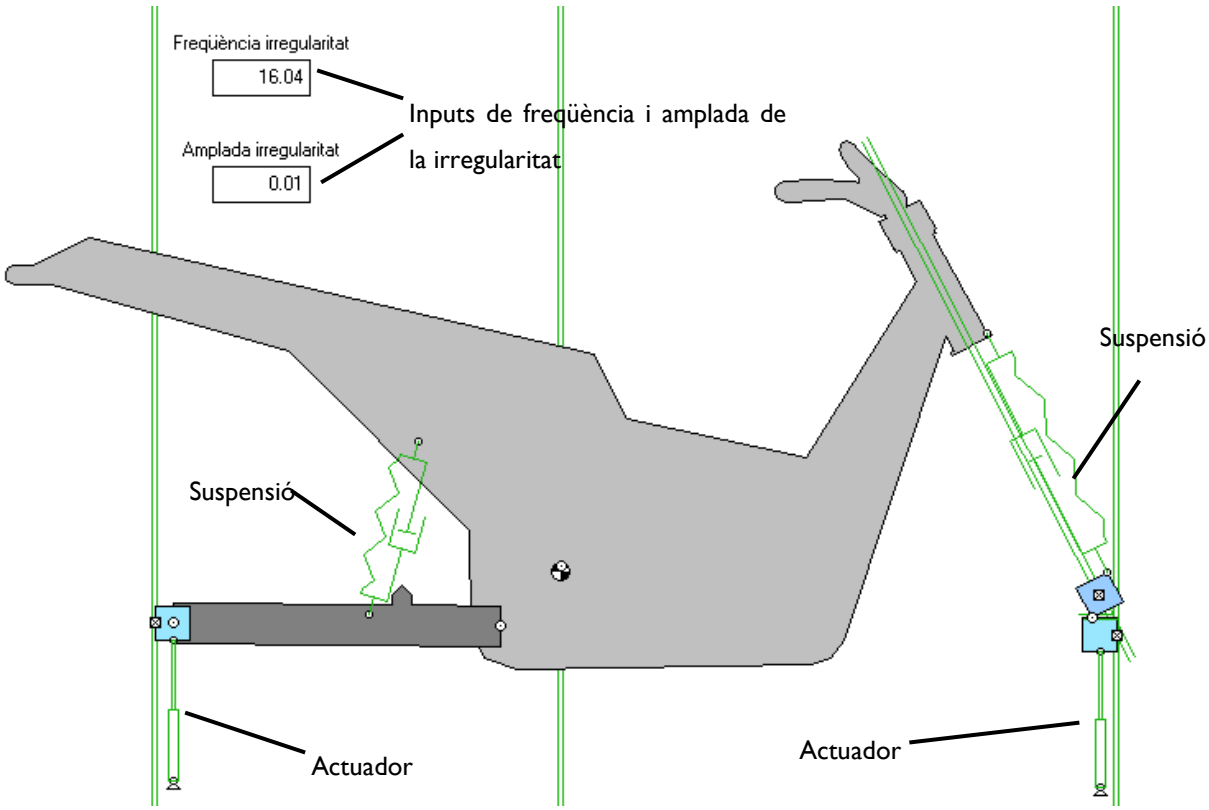



**Figura 15: Vista general del model i elements importants**

## 5.1 Motocicleta

Per crear la motocicleta s'ha dibuixat el xassís d'acord amb el disseny del peticionari, i se li han atribuït les mateixes dades de pes, moment d'inèrcia i posició del centre de masses que apareixen a a l'apartat *motocicleta* del capítol 4.

La forma del basculant també s'ha realitzat a partir del disseny del peticionari, però se li ha negligit el pes, perquè aquest ja està inclòs en el càlculs ja realitzats del pes de la moto, moment d'inèrcia i posició del centre de gravetat.

El centre de gravetat de la motocicleta s'ha situat a la posició trobada en els càlculs. Està restringit per una guia que permet el seu moviment vertical i la seva rotació, impedint que es mogui horitzontalment. Aquesta simplificació és possible perquè en la realitat, el desplaçament horitzontal del centre de gravetat serà molt més petit en comparació amb el desplaçament vertical d'aquest.

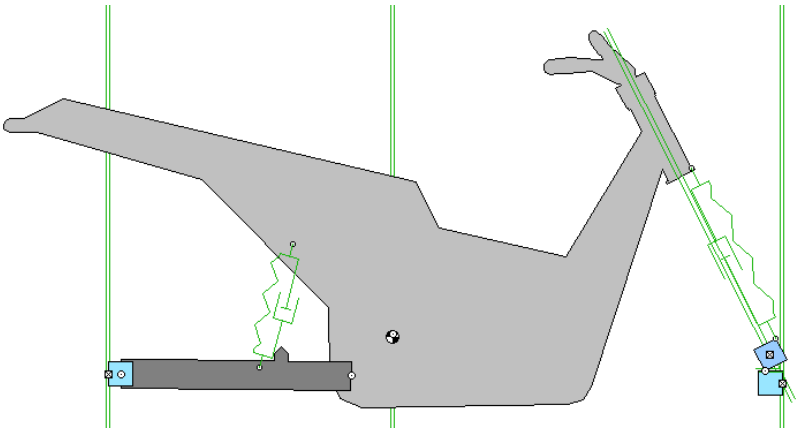


**Figura 16: Model cos motocicleta**

## 5.2 Suspensions i rodes

Les dues suspensions estan representades mitjançant el conjunt "Spring-Damper" que incorpora el programa Working Model. El programa permet entrar-li la longitud inicial de la molla i la seva constant, i també la constant d'esmorteïment. Per simular les suspensions, s'han fet servir les mateixes dades que apareixen a l'apartat *Suspensions* del capítol anterior. Per altra banda, pel que fa el factor d'esmorteïment, s'ha entrat un valor molt petit, de $1 \cdot 10^{-6}$ N·s/m, per tal de que el sistema sigui el més semblant possible a un sistema sense esmorteïment.

La suspensió de davant va unida per un costat al xassís de la moto i per l'altre a l'objecte que simula la roda de davant. Com s'ha comentat en el capítol de descripció de la motocicleta, la suspensió està inclinada 26,5° respecte la vertical. I la longitud de la seva molla és 284 mm.

Per la roda de davant s'ha creat un objecte que està unit al conjunt "Spring-Damper" i restringit al seu centre per una guia inclinada 26,5°, l'angle d'atac de la motocicleta. Aquest objecte també està unit a un altre que representa el terra (objecte-terra) i que només li permet moure's

horitzontalment. D'aquesta manera es permet el moviment de rotació del xassís. Finalment, l'objecte-terra està unit a un actuador que excita el sistema.

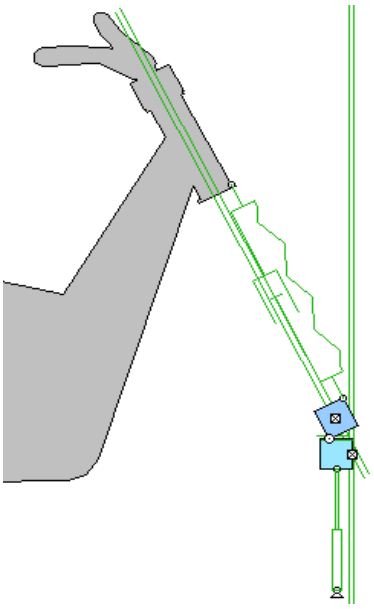


**Figura 17: Detall part del davant del model**

La roda del darrere està simulada mitjançant un objecte que està unit per una banda al basculant, a la posició on tindríem l'eix de la roda, i per altra banda al terra directament, que en aquest cas està representat per un actuador, que és l'encarregat d'excitar el sistema. El moviment de l'objecte-roda està restringit horitzontalment de manera que només es permet el moviment vertical d'aquest.

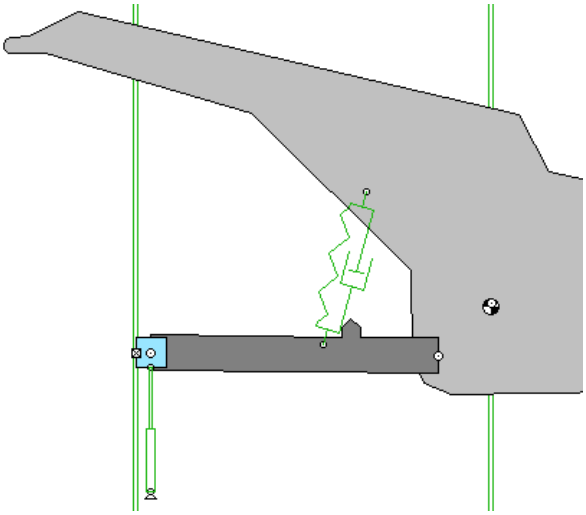


**Figura 18: Detall part del darrere del model**

## 5.3 Actuadors

Per simular les irregularitats de la carretera s'han utilitzat actuadors ("Actuator", en el programa). En el programa Working Model, aquests actuadors permeten ser configurats segons una funció que regeixi el seu moviment. La funció que s'ha fet servir per regir el moviment dels actuadors ha estat de tipus sinusoïdal. A continuació es presenten les equacions que s'han utilitzat per regir l'amortidor del davant (equació 2) i el del darrere (equació 3):

$$y = 0{,}2 + A \cdot \sin(\omega \cdot time) \qquad \text{(eq. 2)}$$

$$y = 0{,}2 + A \cdot \sin(\omega \cdot time + \varphi) \qquad \text{(eq. 3)}$$

On:

$y$ → és es desplaçament de l'extrem del vàstag del pistó.

$A$→ és l'amplitud de la irregularitat del terra. Paràmetre modificable en la simulació a través d'un "Input".

$\omega$ → és la freqüència a la que es succeeixen les irregularitats o la freqüència d'excitació de la moto amb el terra. Paràmetre modificable en la simulació a través d'un "Input".

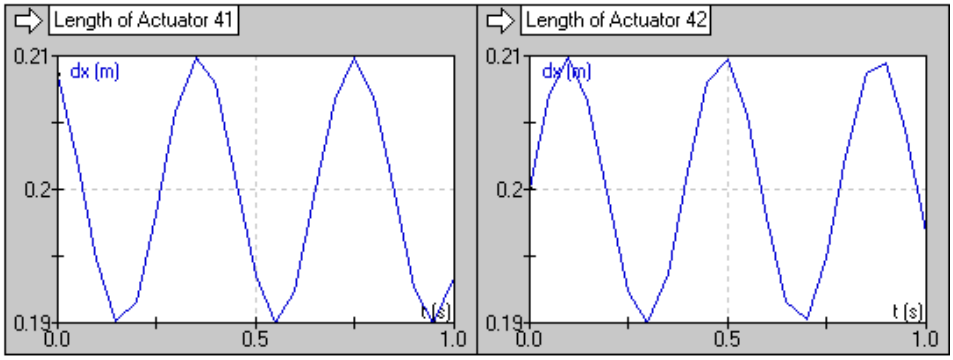
$time$ → és el temps. El programa compta endavant a partir de 0.

$\varphi$ → és el desfasament de la roda de darrere respecte amb la de davant.

A les gràfiques a continuació es mostren com oscil·len les longituds dels actuadors. Es pot veure també com hi ha un desfasament entre l'actuador de darrere i el de davant, que equivaldria al cas 4 dels introduïts al subapartat 4.4.1.

**Gràfica 1: Moviment de l'actuador de darrere (41)**

**Gràfica 1: Moviment de l'actuador de davant (42)**



### 5.3.1 Amplituds d'irregularitats de la carretera en simulacions

Quan es vol veure si el model entra en ressonància excitant-lo amb les freqüències pròpies del sistema calculades mitjançant l'anàlisi modal, l'amplitud de la irregularitat ens és igual, ja que la resposta d'un sistema en ressonància és l'amplitud que es va amplificant al llarg del temps.

Si en algun moment, la funció de govern de l'actuador tingués un valor negatiu, el programa donaria un error. Això és així, perquè, en el programa s'ha establert primer una longitud fixa de l'actuador (0,2 metres), i llavors s'hi ha superposat a sobre una ona sinusoïdal, de la qual se'n pot modificar l'amplitud i la freqüència del període per simular diferents carreteres. Si en algun moment l'amplitud de l'ona sinusoïdal fos superior a la longitud fixa establerta, quan l'amplitud fos negativa, aquesta provocaria un valor negatiu de longitud de l'extrem de l'actuador, i el programa donaria error.

Per aquest motiu s'ha seleccionat una amplitud de 0,01 metres, 1 centímetre, que no crea cap problema a la fórmula de govern dels actuadors.

Per tal de poder modificar els paràmetres d'amplitud i freqüència de la irregularitat, s'han col·locat dos "Inputs". L'input permet, entre altres coses, modificar el valor d'una variable en una fórmula.

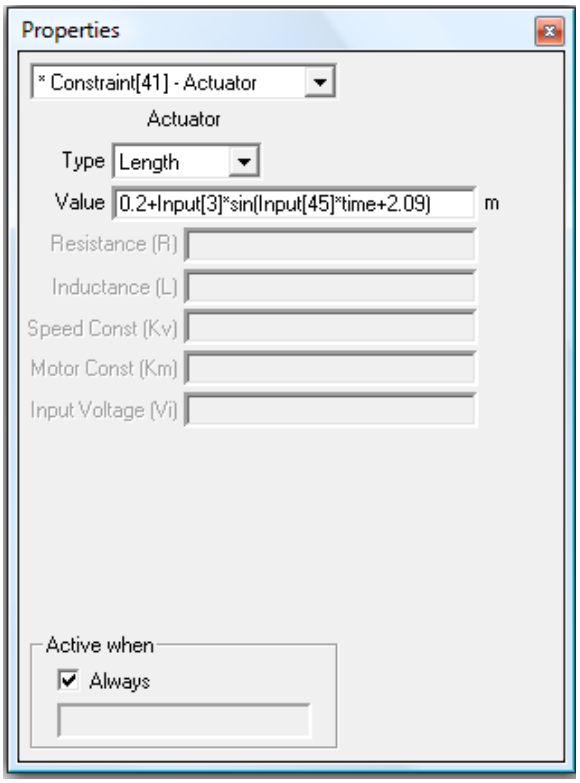



**Figura 19: Pantalla on s'entra la funció de control d'un actuador**

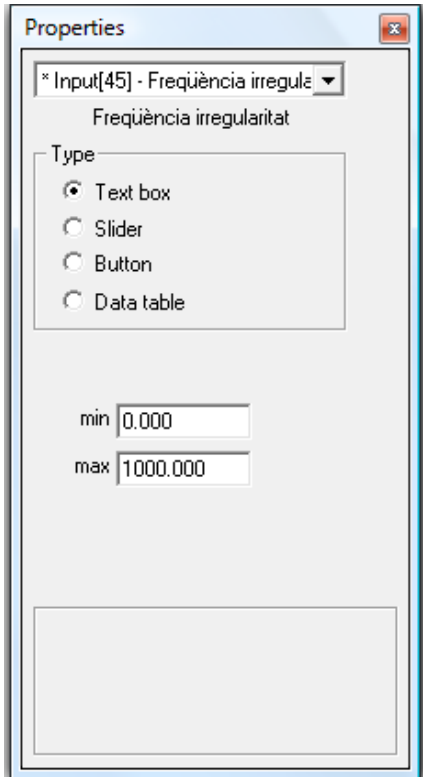



**Figura 20: Pantalla configuració d'un input**

# 6. RESULTATS

## 6.1 Introducció

En aquest apartat es presenten els resultats obtinguts pel que fa a les freqüències pròpies del sistema mitjançant els càlculs de l'anàlisi de vibracions i provant-les al model fet amb Working Model 2D.

La freqüència pròpia és la freqüència a la que un sistema tendeix a oscil·lar repetidament quan aquest no té aplicada cap tipus d'excitació forçada ni tampoc té esmorteïment.

També es presenten les gràfiques que representen els desplaçaments del centre de gravetat, el gir del xassís respecte l'eix que passa pel centre de gravetat, i el desplaçament de les parts davantera i posterior de la motocicleta. Les gràfiques han estat obtingudes a partir de l'anàlisi modal.

## 6.2 Freqüències pròpies del sistema

### 6.2.1 Resultats de l'anàlisi de vibracions

Els resultats trobats a partir dels càlculs indiquen que les freqüències naturals del sistema són de **16,04** i **18 rad/s**. Les dues freqüències són molt pròximes, i si les representéssim en un espectre de freqüències quedarien sobreposades.

A l'*annex B:Càlculs* es mostra en detall el procediment que s'ha seguit per calcular els resultats d'aquest apartat.

### 6.2.2 Comprovació dels resultats amb Working Model 2D

Amb el model creat amb Working Model podem comprovar si el model reacciona d'acord amb els resultats dels càlculs de l'anàlisi de vibracions. Es tracta d'excitar el sistema amb les freqüències pròpies calculades en l'anàlisi de vibracions.

Per fer-ho, cal configurar el model. Com s'ha vist en el capítol anterior, es pot modificar la freqüència de la irregularitat a la fórmula de govern de l'actuador a través de l'"input" a la pantalla general. Com s'ha calculat vibració lliure, a la fórmula de govern de l'actuador posterior hi podem posar un valor de 0 pel desfasament. Com també s'ha comentat, l'amplitud de la irregularitat ens és igual en aquest cas, ja que la resposta d'un sistema en ressonància és l'amplitud d'excitació que es va amplificant al llarg del temps.

Per fer aquesta comprovació s'ha escollit una amplitud de 0,01 metres, és a dir, un centímetre. Les carreteres en mal estat solen tenir amplituds més grans, però com s'ha dit, quan es provoca que el sistema entri en ressonància, l'amplitud no hi juga un paper important. A continuació es mostra una captura de pantalla on es pot veure la configuració dels inputs.

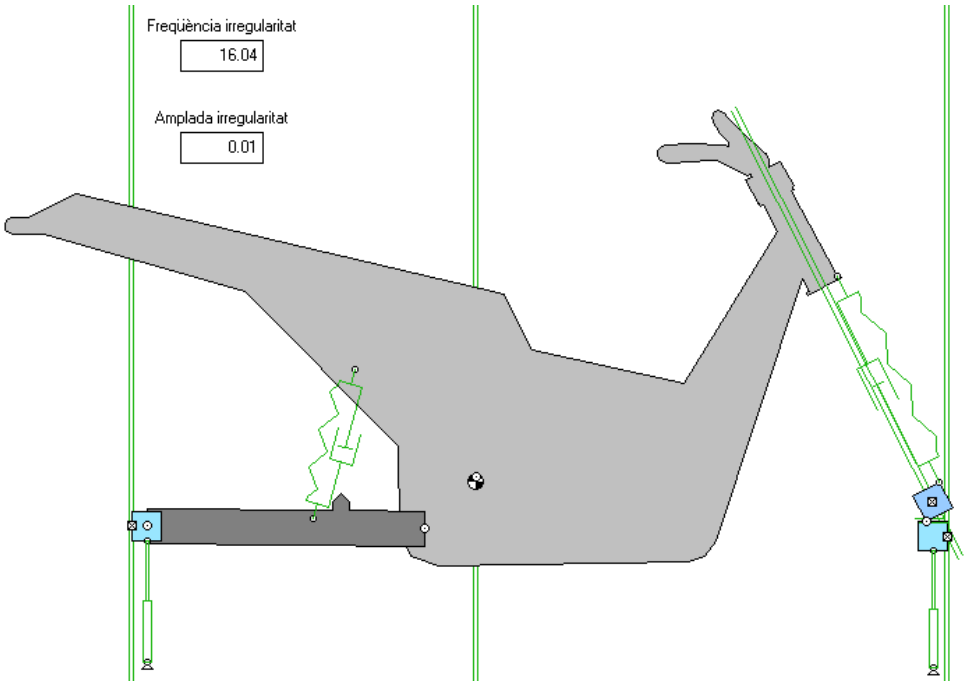
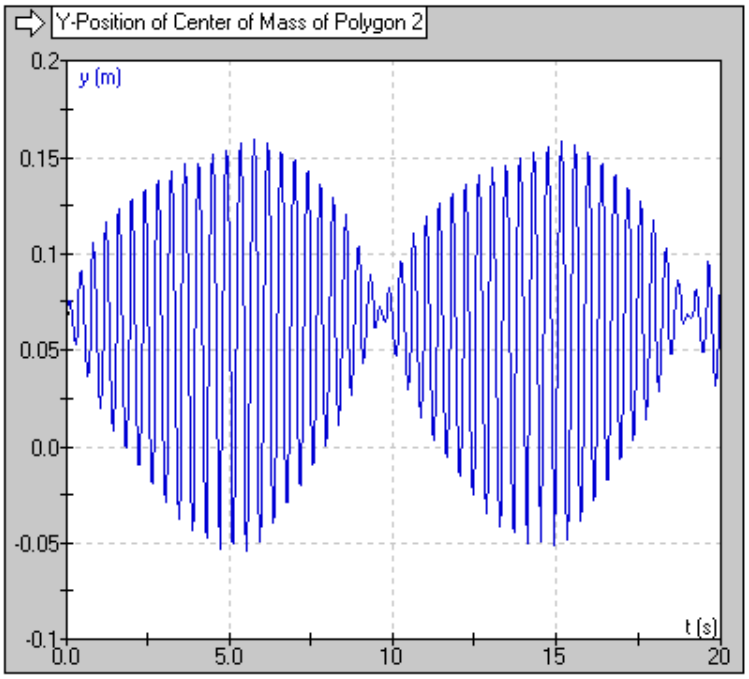


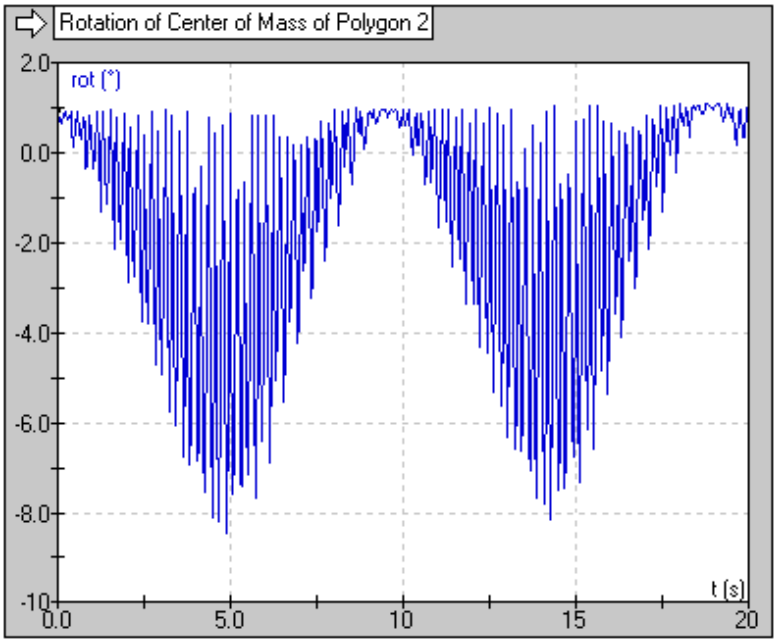

**Figura 21: Configuració del model**

Provant el model d'aquesta manera s'obtenen les següents gràfiques de desplaçament del centre de gravetat i de rotació del xassís:

**Gràfica 2: Desplaçament del centre de gravetat (16,04 rad/s)**



**Gràfica 3: Rotació del xassís (16,04 rad/s)**



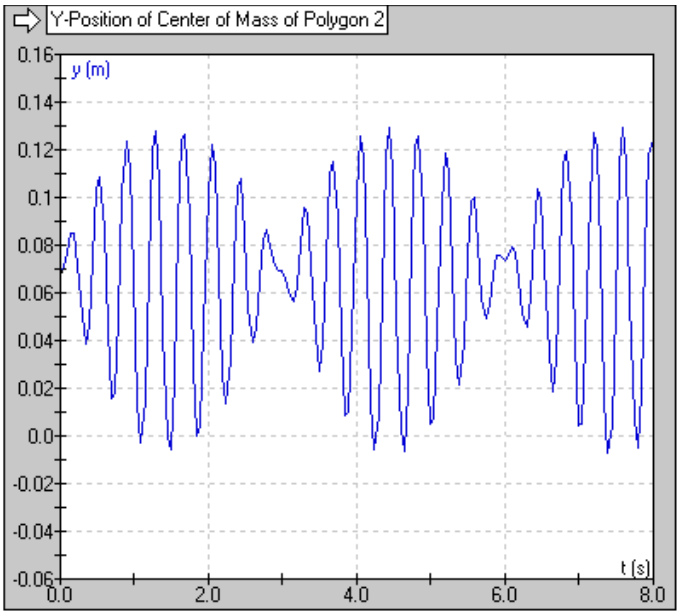

Observant les gràfiques 2 i 3 es veu com, si excitem el model amb la primera freqüència pròpia del sistema calculada,16,04 rad/s, aquest no entra ben bé en ressonància però si que fa pulsacions. La pulsació és la resposta d'un sistema quan aquest està a punt d'entrar en ressonància. Per tant es pot afirmar que la resposta del model a partir dels càlculs, s'ajusta als resultats obtinguts tot i que no és exacta.

En aquest cas la posició del centre de gravetat del model, està situat a una altura de 0,075 metres. Observant la gràfica 2 es pot veure com, amb una amplitud d'excitació de 0,01 metres o 1 centímetre, en el moment en que l'amplitud de la pulsació és màxima, aquesta val al voltant de 0,15 metres o 15 centímetres. Pel que fa el pic negatiu de la pulsació, es troba al voltant de -0,05 metres o -5 centímetres.

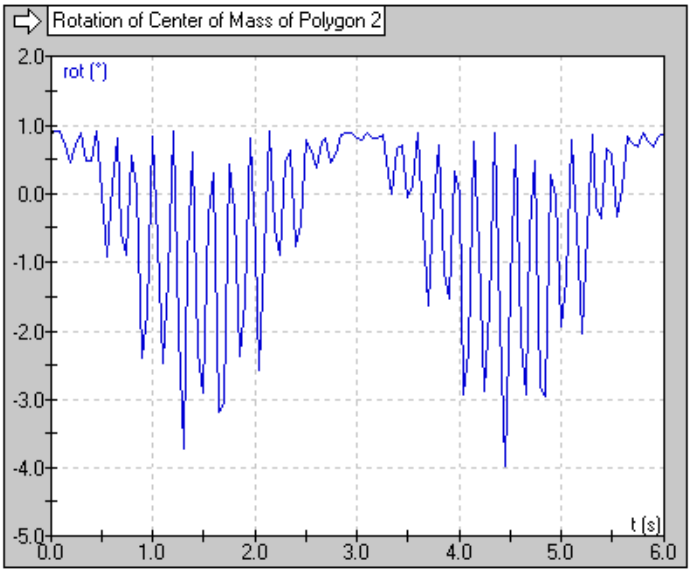
És a dir, que si l'excitació (amplitud de la irregularitat de la carretera) equival a 1 centímetre, el centre de gravetat del sistema es desplaça 7,5 centímetres cap amunt i 12,5 cap avall, que són valors molt distants de l'amplitud de la irregularitat inicial.

Si ara es configura el model entrant la segona freqüència pròpia del sistema (18 rad/s) s'obtenen les següents respostes:

**Gràfica 4: Desplaçament del centre de gravetat (18 rad/s)**




**Gràfica 5: Rotació del xassís (18 rad/s)**




Es pot veure com el sistema també respon amb pulsacions. Malgrat tot, per aquesta freqüència les amplituds no són tan grans com en el cas de la primera freqüència pròpia del sistema. Tot i això, la resposta de pulsació indica que el sistema es troba a punt d'entrar en ressonància, pel que es pot tornar a dir que la resposta no és exacta a la calculada, però sí que s'hi aproxima en gran mesura.

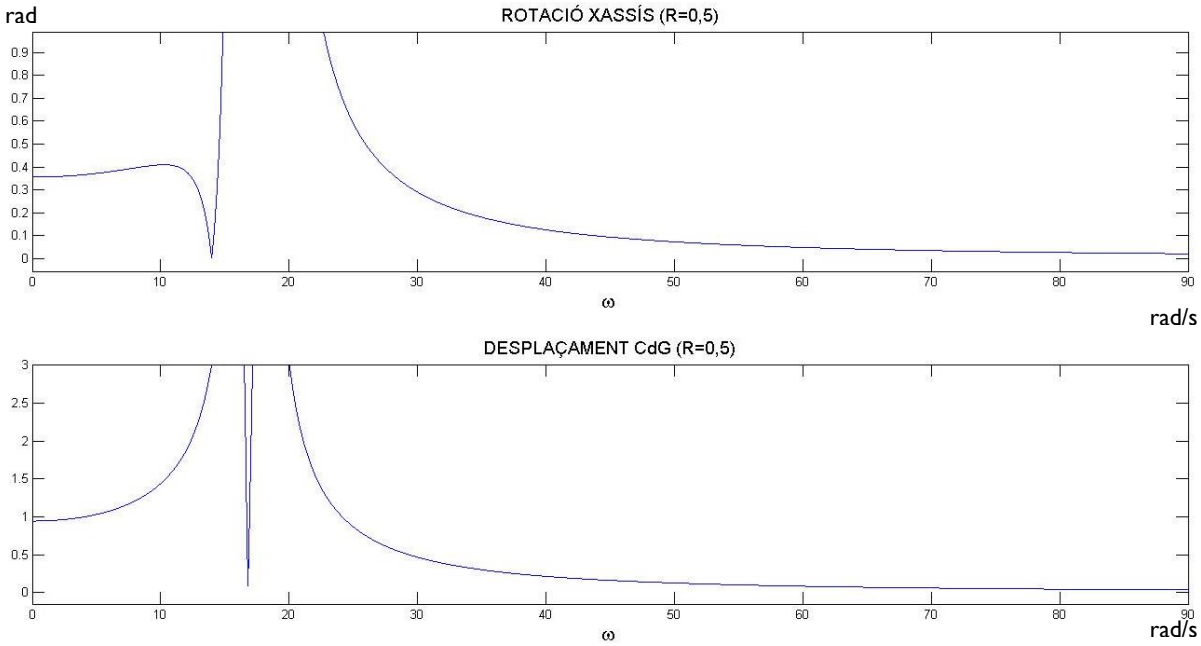
## 6.3 Desplaçament del centre de masses i rotació del xassís

Com ja s'ha comentat en el capítol 4, la moto estudiada s'ha assimilat a un sistema de dos graus de llibertat on els únics moviments que no estan restringits són el desplaçament del centre de masses i el gir del xassís. Aquests han estat les coordenades generalitzades estudiades.

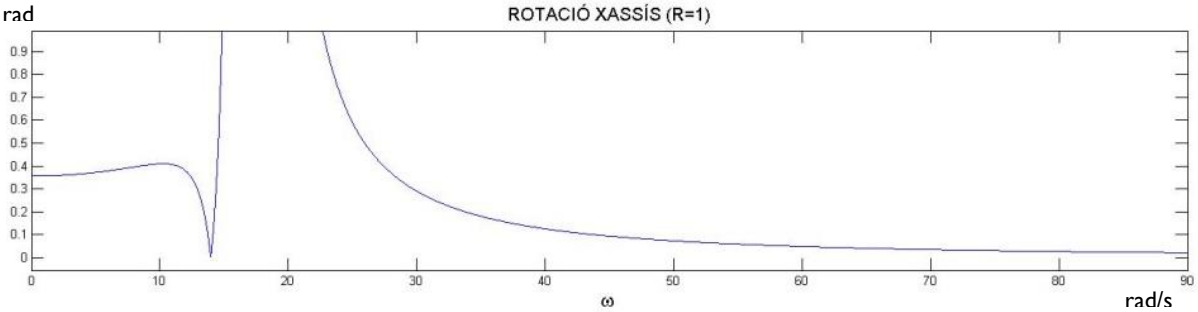
Per una banda, les gràfiques mostren en el seu eix d'abscisses les freqüències d'excitació mentre que en el seu eix d'ordenades, la proporció entre l'amplitud de la irregularitat de la carretera i el desplaçament del centre de gravetat de la motocicleta (transmissibilitat). Per l'altra banda, quan són gràfiques de rotació del xassís, a l'eix d'ordenades i s'hi representa el gir en radians. La freqüència d'excitació té unitats de radians per segon en tots els casos.

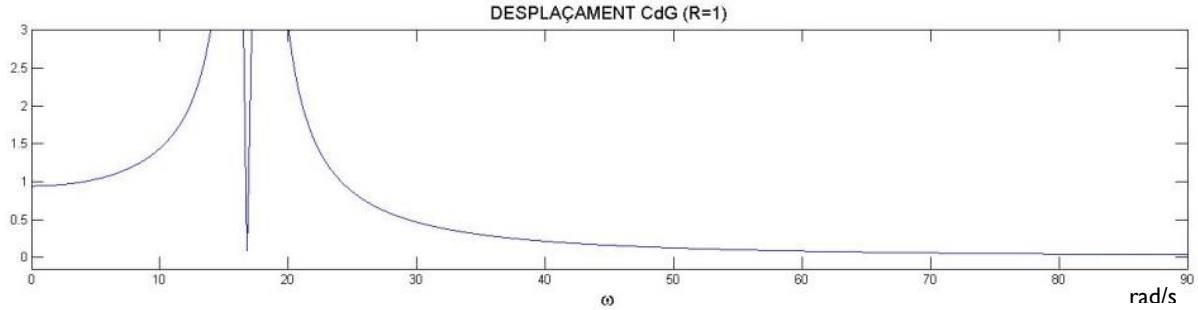
Les equacions que regeixen la rotació del xassís i el desplaçament del centre de masses estan degudament descrites i demostrades a l'*annex B: Càlculs*.

### 6.3.1 Cas 1

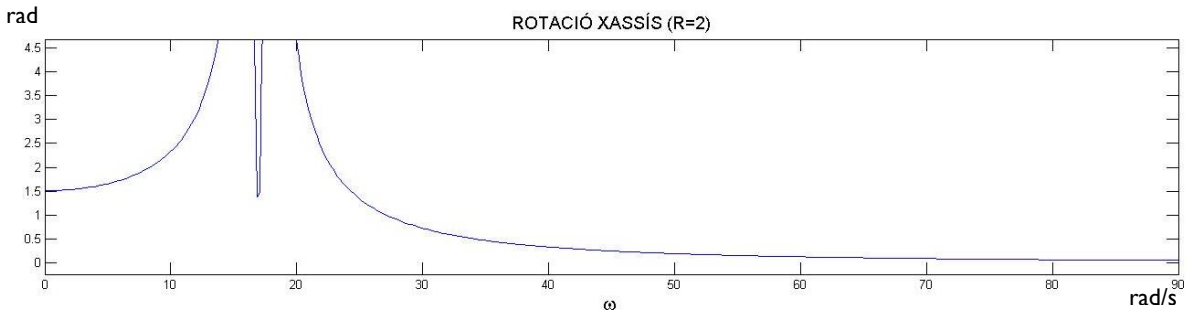


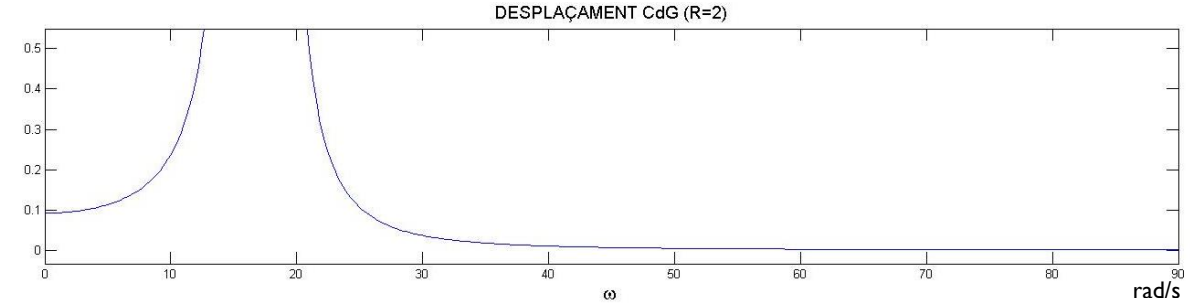
### 6.3.2 Cas 2



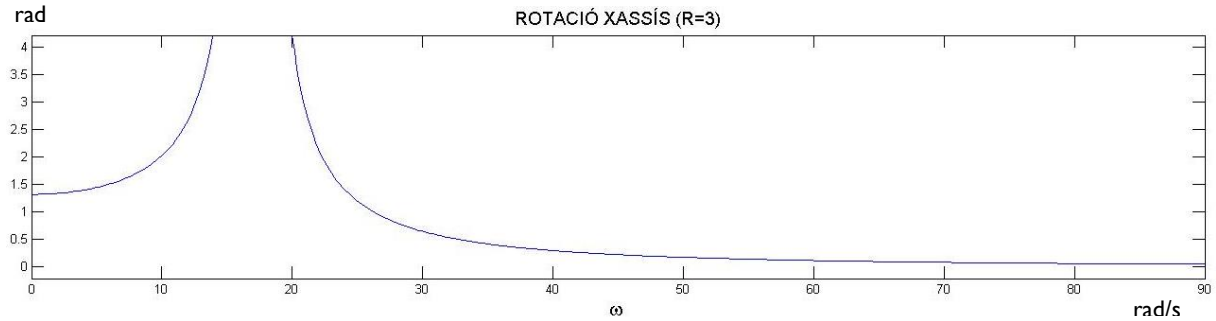



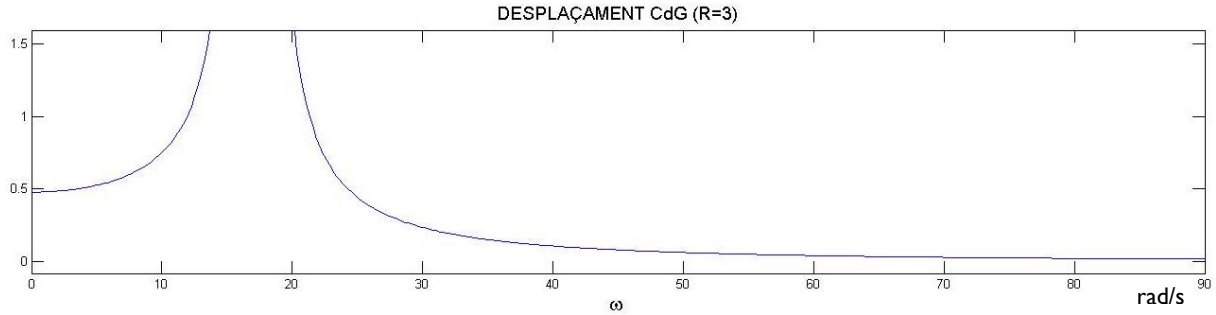

### 6.3.3 Cas 3



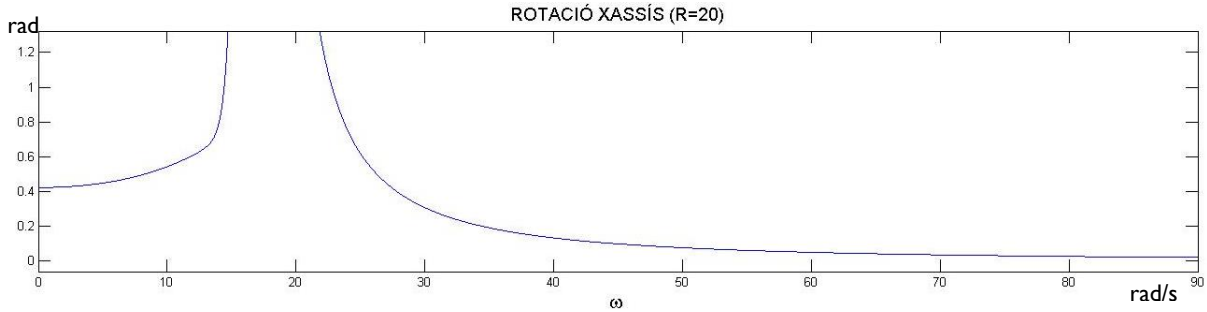



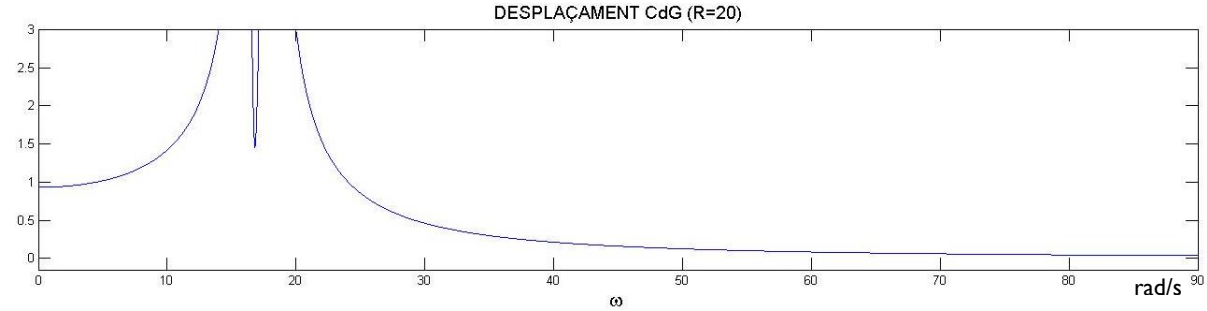
### 6.3.4 Cas 4




### 6.3.5 Cas 5



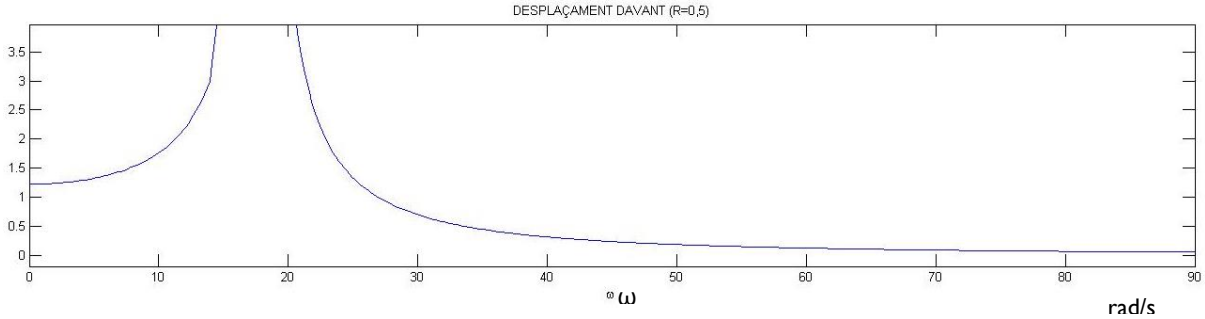
## 6.4 Desplaçament part davantera i posterior

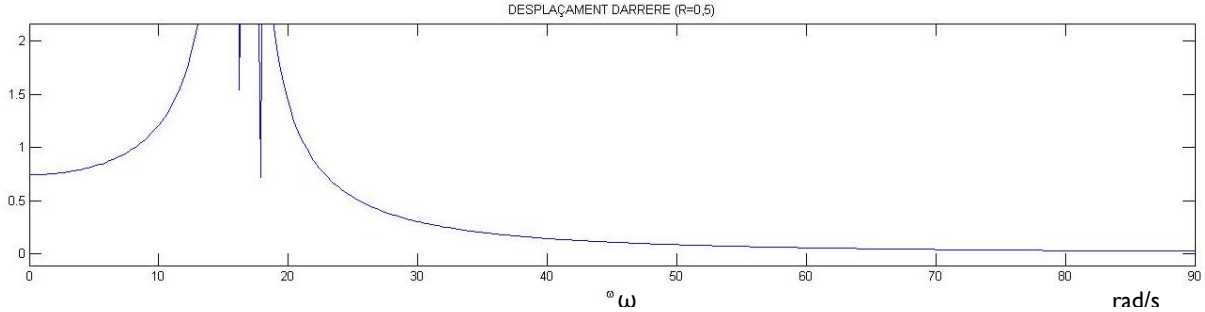
Per completar aquest capítol s'han fet gràfiques del desplaçament de la part davantera i posterior per cada cas en funció de la freqüència d'excitació provocada per les irregularitats de la carretera.

Les gràfiques mostren en el seu eix d'abscisses les freqüències d'excitació en radians/s mentre que en el seu eix d'ordenades, la proporció entre l'amplitud de la irregularitat de la carretera i el desplaçament de la part del davant i la part del darrere de la moto.

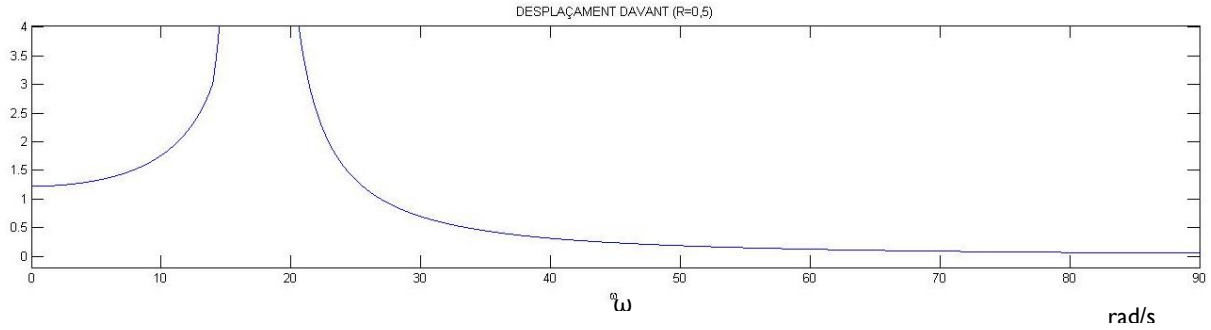
A l'*annex B:Càlculs* es mostren les funcions que permeten dibuixar aquestes gràfiques.

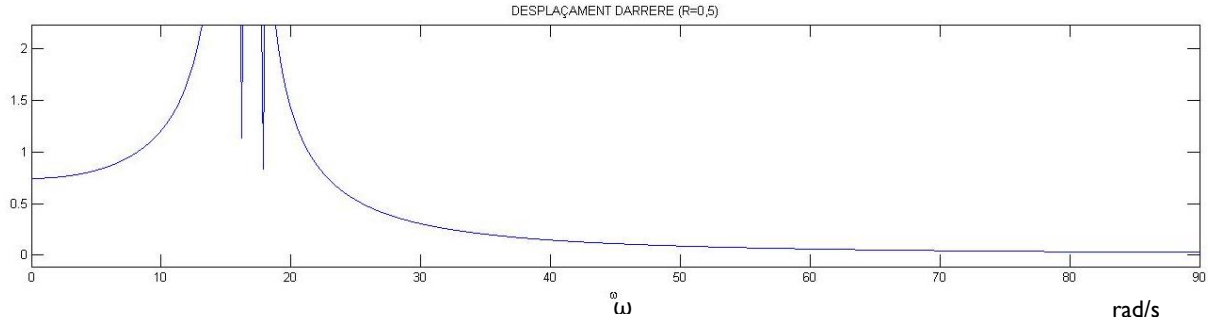
### 6.4.1 Cas 1



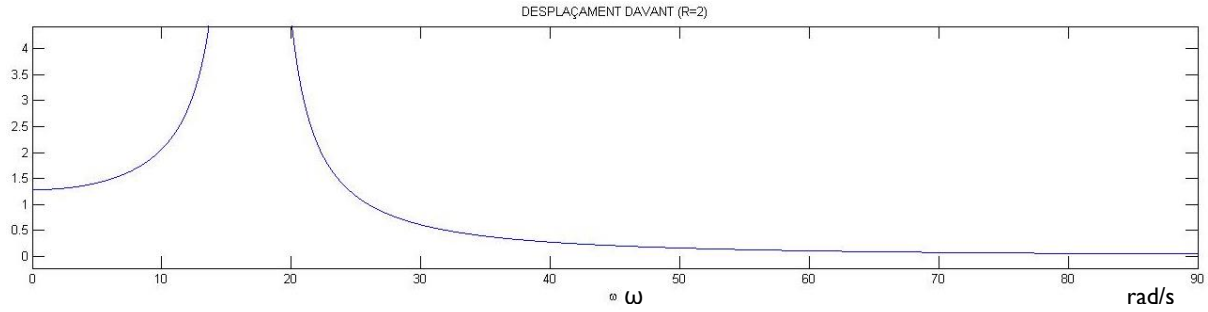



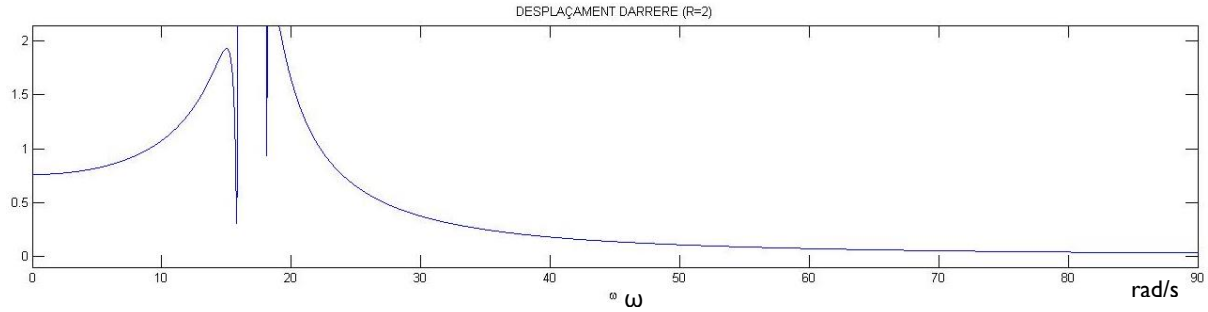
### 6.4.2 Cas 2



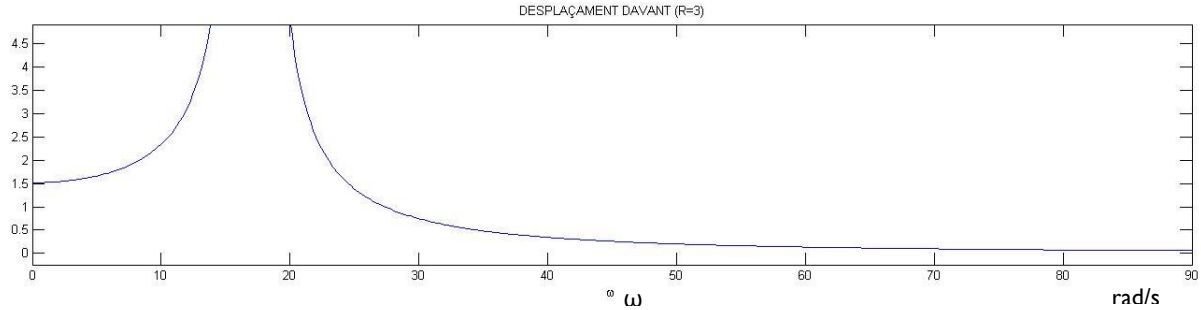



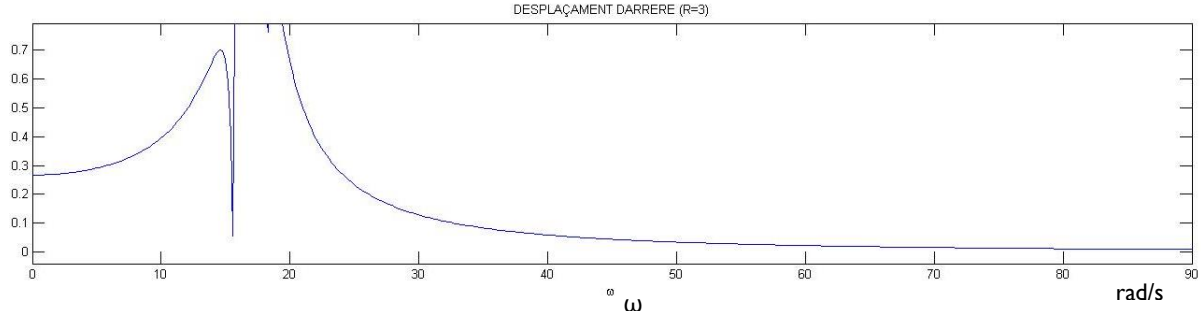

### 6.4.3 Cas 3



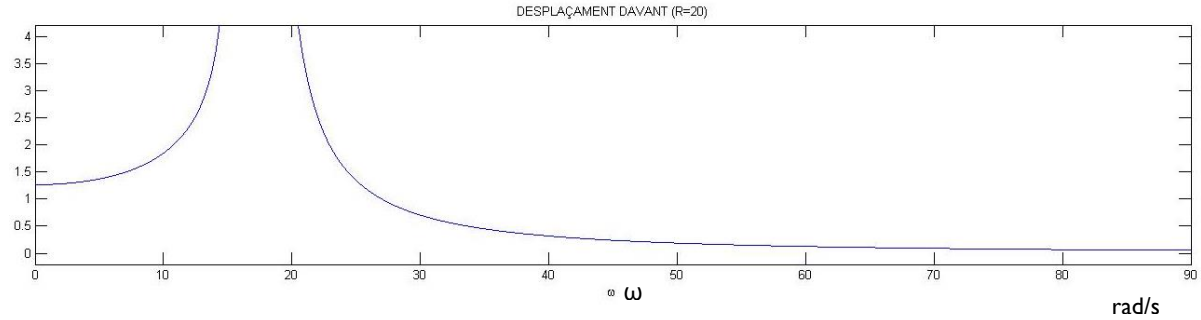



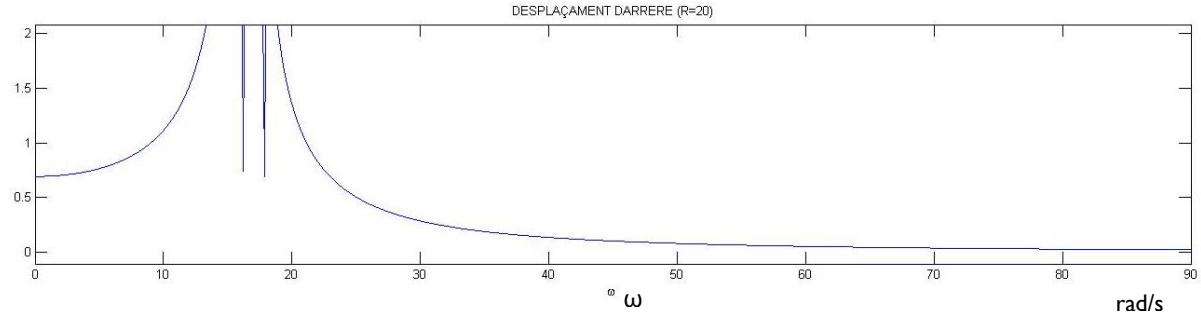
### 6.4.4 Cas 4




### 6.4.5 Cas 5



## 6.5 Explicació dels resultats

A cada gràfica, quan les freqüències d'excitació són iguals a les freqüències pròpies del sistema, les gràfiques tendeixen a infinit, aquest fet representa que el sistema entra en ressonància. Matemàticament, com es pot veure a les fórmules de l'annex de càlcul, quan la freqüència d'excitació és igual a la pròpia, a la funció hi queda un denominador igual a 0 que causa que el resultat de la funció sigui infinit.

Quan s'estudien les gràfiques estàticament, és a dir, quan la freqüència d'excitació és 0, en el cas del desplaçament del centre de masses, es pot observar, que, el factor de transmissibilitat no és 1 exactament, sinó 0,98 0,99. Això indica que quan la moto està en repòs, el seu centre de masses pateix un desplaçament molt petit cap avall atribuïble a l'enfonsament que pateixen les suspensions al aguantar el pes lliure de la moto.

Pels casos 1 i 2, veiem que degut a que tenim el mateix desfasament, les gràfiques ens surten gairebé identiques. Pel cas 5 (quan el període de la irregularitat equival a 20 vegades la distància entre eixos), es poden treure les mateixes conclusions que en els casos anteriors, ja que pel cas 5 el desfassament equival a π/10, un valor que és molt proper a zero, el valor de desfasament pels casos 1 i 2.

Pel que fa el desplaçament de la part davantera i posterior, primer cal fixar-se en la gràfica de rotació del xassís. Per exemple, pel cas 1, tenim una rotació de 0,35 radians en el cas estàtic. Si s'agafa el sinus d'aquest valor, multiplicat per la distància entre la part del davant i el centre de gravetat, el resultat més l'amplitud de la irregularitat de la carretera (1 metre), ha de coincidir amb el que diu la gràfica del desplaçament de la part de davant. Per la part posterior, la multiplicació del sinus de l'angle de rotació i la distància entre la part posterior i el centre de gravetat de la moto, s'ha de restar a l'amplitud de la irregularitat de la carretera. La figura a continuació ajuda a entendre millor aquest concepte:

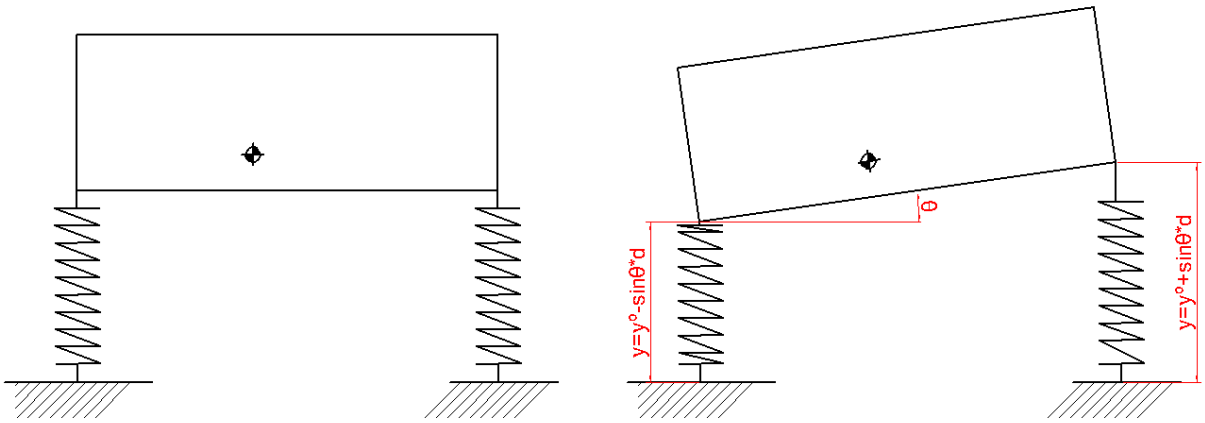



**Figura 22: Esquema gir del xassís**

# 7. CONCLUSIONS

Com s'ha pogut veure, quan s'apliquen les freqüències pròpies del sistema al model fet amb Working Model, la resposta que s'obté és una pulsació, cosa que no hauria de ser així, ja que, com ja s'ha comentat, quan a un sistema se l'excita amb la seva freqüència pròpia, aquest entra en ressonància. Malgrat això, les pulsacions indiquen que el sistema es troba apunt d'entrar en ressonància, i per tant es pot concloure que el model és bastant fiable.

Els càlculs realitzats s'han fet seguint un mètode lineal, considerant els desplaçaments horitzontals molt petits. En canvi, la manera com el Working Model realitza els càlculs, suposadament, no ho fa linealment, pot fer que per aquest motiu existeixen aquestes variacions entre els resultats i les simulacions realitzades pel programa. A part, en el programa, les suspensions també tenen un petit valor d'esmorteïment, que fa que les freqüències pròpies del model no coincideixin amb les calculades, sinó que estiguin desplaçades.

Pel que fa a les gràfiques de transmissibilitat i a la freqüència pròpia, podem afirmar que, amb les suspensions que utilitza la motocicleta, aquesta podrà entrar en ressonància si s'agafa una certa velocitat per un cas determinat. Això és demostra de la següent manera:

La velocitat a la que es desplaça la moto és el període de la irregularitat de la carretera per la freqüència, en Hertz, a la que es repeteix aquesta irregularitat (equació 4):

$$v = R \cdot 1{,}35 \cdot f =$$

$$v = R \cdot 1{,}35 \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \qquad \text{(eq. 4)}$$

On:

$R$ → és la relació entre el període i la distància entre eixos de la motocicleta per cada cas (casos descrits en el capítol 4).

*1,35* → és la distància entre eixos de la motocicleta.

$f$ → és la freqüència en Hertz.

$\omega$ →és la freqüència en radians/s.

Així doncs, per trobar la velocitat necessària per entrar en ressonància en el cas on necessitaríem una velocitat més petita, el cas 1, la fórmula quedaria de la següent manera:

$$v = 0{,}5 \cdot 1{,}35 \cdot \frac{16{,}04}{2 \cdot \pi}$$

$$v = 1{,}72\ \frac{m}{s} = 6{,}2 \frac{km}{h}$$

Com podem veure dóna una velocitat baixa, a l'abast de la motocicleta.

Les altre velocitats que necessitaria la motocicleta per entrar en ressonància a la resta de casos es mostren a la següent taula:

| Cas | Velocitat (m/s) | Velocitat (km/h) |
|---|---|---|
| **2** | 3,44 | 12,4 |
| **3** | 6,89 | 24,8 |
| **4** | 10,34 | 37,22 |
| **5** | 68,92 | 248,11 |

**Taula 5: Velocitats necessàries per entrar en ressonància per cada cas**

La motor de la motocicleta pot donar una velocitat màxima de 45 km/h, pel que podrà agafar les velocitats dels quatre primers casos. Així que podem confirmar que, si les suspensions de la motocicleta no tinguessin factor d'esmorteïment tal i com s'ha suposat en aquest estudi, la moto entraria en ressonància. Malgrat tot, en alguns casos, al tractar-se d'una velocitat baixa, la moto hi circularia durant poc temps.

En unes condicions com les del cas 5, que es poden considerar com una carretera asfaltada en bon estat, la moto mai entraria en ressonància ja que no pot arribar a una velocitat tan elevada.

## 8. RELACIÓ DE DOCUMENTS

Els documents que formen aquest projecte són els següents:

- Document 1. Memòria i annexos
    - Memòria
    - Annex A: Model senzill amb Working Model
    - Annex B: Càlculs
    - Annex C: Càlcul de la constant d'elasticitat de la molla de la suspensió posterior
- Document 2. Pressupost
- Document 3. Resum

## 9. BIBLIOGRAFIA

En la realització del treball s'ha consultat la següent bibliografia:

- FOALE, T. Motorcycle Handling and chassis design: the art and science. Tony Foale Designs. 2006
- SNECK, H.J. Machine Dynamics. Prentice hall. 1991
- CROCCOLO, D. Motorbike suspensions: modern design and optimisation. Springer. 2013

# ANNEX A: MODEL SENZILL AMB WORKING MODEL

# ANNEX A: MODEL SENZILL AMB WORKING MODEL

## A.1 Introducció

Abans de començar a fer els càlculs, es va fer un model simplificat per obtenir una primera aproximació pels valors de la freqüència pròpia del sistema. Es van calcular les freqüències pròpies del sistema amb el mètode de Lagrange i es va crear un model senzill amb Working Model.

## A.2 Càlcul de les freqüències pròpies pel mètode de Lagrange

S'ha simplificat el sistema de manera que la massa de la moto queda repartida en el rectangle de longitud igual a la distància entre eixos de les rodes, i d'alçada 1 metre. Les suspensions s'han simplificat de manera que són dues molles de longitud 1 metre cadascuna. A continuació, es mostra l'esquema del model:

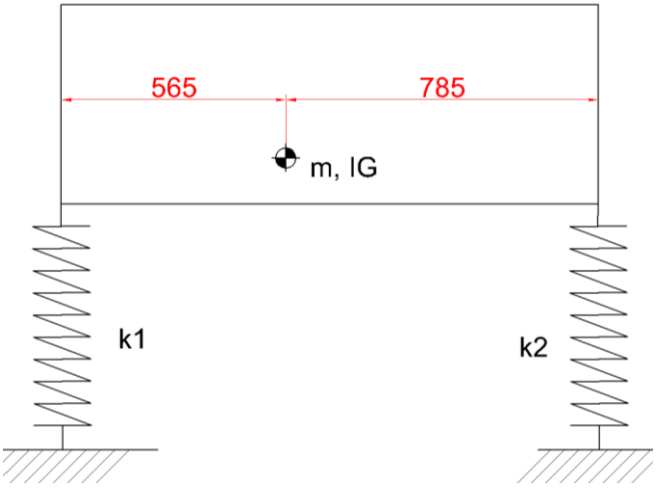



**Figura 23: Dibuix amb mides**

El valor de la constant de rigidesa de la molla davantera, al tenir un extrem a l'eix de la roda, s'ha deixat amb el mateix valor real que té, 4.500 N/m. Per la constant de la molla de la suspensió posterior s'ha multiplicat el valor real (65.000 N/m) per la proporció al quadrat de la distància entre l'articulació de la suspensió i l'articulació amb el xassís (145 mm) i la distància entre l'articulació amb el xassís i l'eix de la roda (476 mm) (Figura 24):

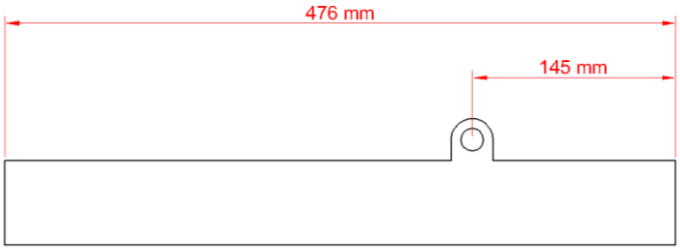



**Figura 24: Vista esquemàtica del basculant**

$$65.000\frac{N}{m}\cdot\left(\frac{0{,}145\ m}{0{,}476\ m}\right)^2 \approx 6.000\ N/m$$

La justificació d'aquesta fórmula és que la molla en la posició real és comprimirà més o menys un terç (0,145 m/ 0,476m ) del que es comprimiria si estigués a l'extrem del basculant. Per tant la seva energia potencial també variaria amb aquesta proporció.

El resultat dóna una constant de rigidesa de prop de 6.000 N/m. Aquest pas s'ha fet perquè l'amortidor posterior en el cas real no està col·locat sobre la roda, tal i com es pretén fer en aquest model.

A més, de la motocicleta es coneixen les següents dades (Taula 6):

| **Dades de la motocicleta** | |
|---|---|
| Massa total, *m* (kg) | **52** |
| Moment d'inèrcia total, $I_G$ (kg·m²) | **23,1** |
| Constant de rigidesa de la molla de davant, $k_2$ (N/m) | **4.500** |
| Constant de rigidesa de la molla de darrera, $k_1$ (N/m) | **6.000** |
| Distància entre eixos (m) | **1,35** |
| Distància del centre de masses a la roda de davant, $l_2$ (m) | **0,785** |
| Distància del centre de masses a la roda de darrere, $l_1$ (m) | **0,565** |

**Taula 6: Dades del sistema simplificat**

Pel càlcul de les freqüències pròpies mitjançant el mètode de Lagrange, les coordenades generalitzades que s'escolliran seran el gir de rotació del xassís $\theta$ i el desplaçament vertical del centre de masses *y*.

L'energia cinètica del sistema és (equació 5):

$$T = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\cdot I_G\cdot \dot{\theta}^2 \qquad \text{(eq. 5)}$$

I la potencial (equació 6):

$$V = \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot (y - l_1\cdot \sin\theta)^2 + \frac{1}{2}\cdot k_2\cdot (y + l_2\cdot \sin\theta)^2 \qquad \text{(eq. 6)}$$

Aleshores el Lagrangià és:

$$L = T - V \qquad \text{(eq. 7)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\cdot I_G\cdot \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot (y - l_1\cdot \sin\theta)^2 - \frac{1}{2}\cdot k_2\cdot (y + l_2\cdot \sin\theta)^2$$

Aplicant les equacions de Lagrange on, al tractar-se de vibració lliure, no hi tenim cap força generalitzada (equacions 8 i 9):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \text{(eq. 8)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{(eq. 9)}$$

S'obtenen les equacions de moviment següents:

$$m \cdot \ddot{y} + k_1 \cdot (y - l_1 \cdot \sin\theta) + k_2 \cdot (y + l_2 \cdot \sin\theta) = 0$$

$$I_G \cdot \ddot{\theta} + k_1 \cdot (-y \cdot l_1 \cdot \cos\theta + l_1^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta) + k_2 \cdot (y \cdot l_2 \cdot \cos\theta + l_1^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta) = 0$$

Com es tracta de desplaçaments molt petits, les equacions es poden linealitzar, quedant de la següent manerav (equacions10 i 11):

$$m \cdot \ddot{y} + k_1 \cdot (y - l_1 \cdot \theta) + k_2 \cdot (y + l_2 \cdot \theta) = 0$$

$$\boldsymbol{m \cdot \ddot{y} + y \cdot (k_1 + k_2) + \theta \cdot (k_2 \cdot l_2 - k_1 \cdot l_1) = 0} \qquad \text{(eq. 10)}$$

I:

$$I_G \cdot \ddot{\theta} + k_1 \cdot (-y \cdot l_1 + l_1^2 \cdot \theta) + k_2 \cdot (y \cdot l_2 + l_1^2 \theta) = 0$$

$$\boldsymbol{I_G \cdot \ddot{\theta} + y \cdot (k_2 \cdot l_2 - k_1 \cdot l_1) + \theta \cdot \left(k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2\right) = 0} \qquad \text{(eq. 11)}$$

Les equacions anteriors estan acoblades i tenen dos graus de llibertat. Procedim a compactar les equacions utilitzant els següent coeficients:

$$a = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

$$b = \frac{k_2 \cdot l_2 - k_1 \cdot l_1}{m}$$

$$c = \frac{k_1 \cdot l_1^2 - k_2 \cdot l_2^2}{I_G}$$

$$d = \frac{b \cdot m}{I_G}$$

De manera que les equacions queden com:

$$\ddot{y} + a \cdot y + b \cdot \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + c \cdot \theta + d \cdot y = 0$$

Per trobar les freqüències naturals només són necessàries les equacions homogènies, que donen l'equació característica:

$$\omega^4 + (a + c) \cdot \omega^2 + a \cdot c - b \cdot d = 0$$

Les solucions de l'equació són:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a + c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + b \cdot d}$$

Com només és considera el cas en que no hi ha acoblament, imposarem la condició que *b*=*d*=0. Les freqüències naturals desacoblades són:

$$\omega_{n1} = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{6.000 \cdot 0{,}785^2 - 4.500 \cdot 0{,}565^2}{23{,}1}} = 9{,}8\, rad/s$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{6.000 + 4.500}{52}} = 14{,}2\, rad/s$$

Com es pot veure, les freqüències naturals són **9,8** i **14,2** radians per segon.

## A.3 Model fet amb Working Model

Per fer el model senzill amb Working Model, s'ha creat un rectangle i se li ha donat una longitud de 1,35 metres, la longitud entre els eixos de les rodes, i una alçada d'1 metre, l'alçada del manillar. S'han col·locat dos ressorts ("Spring" en nomenclatura Working Model) a cada extrem amb els mateixos valors que s'han fet els càlculs a l'apartat anterior (Figura 25).

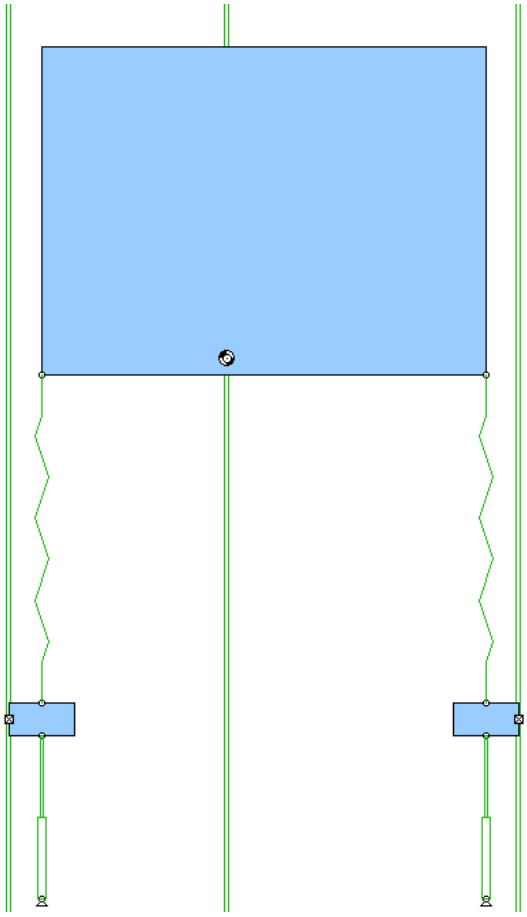


**Figura 25: Vista del model amb working model**

Per provocar l'excitació del sistema, s'han col·locat dos actuadors que estan governats per una funció sinusoïdal. Aquesta funció sinusoïdal té la següent forma:

$$y = 0{,}2 + A \cdot \sin(\omega \cdot time) \qquad \text{(eq. 12)}$$

On:

$y$ → És es desplaçament de l'extrem del vàsteg del pistó.

$A$→ És l'amplitud de la irregularitat del terra.

$\omega$ → És la freqüència a la que es succeeixen les irregularitats o la freqüència d'excitació de la moto amb el terra.

$time$ → És el temps. El programa compta endavant a partir de 0.

Els paràmetres *A* i *ω,* l'amplitud de la irregularitat i la freqüència d'excitació, es poden modificar a través d'una aplicació ("Input", en nomenclatura del sistema).

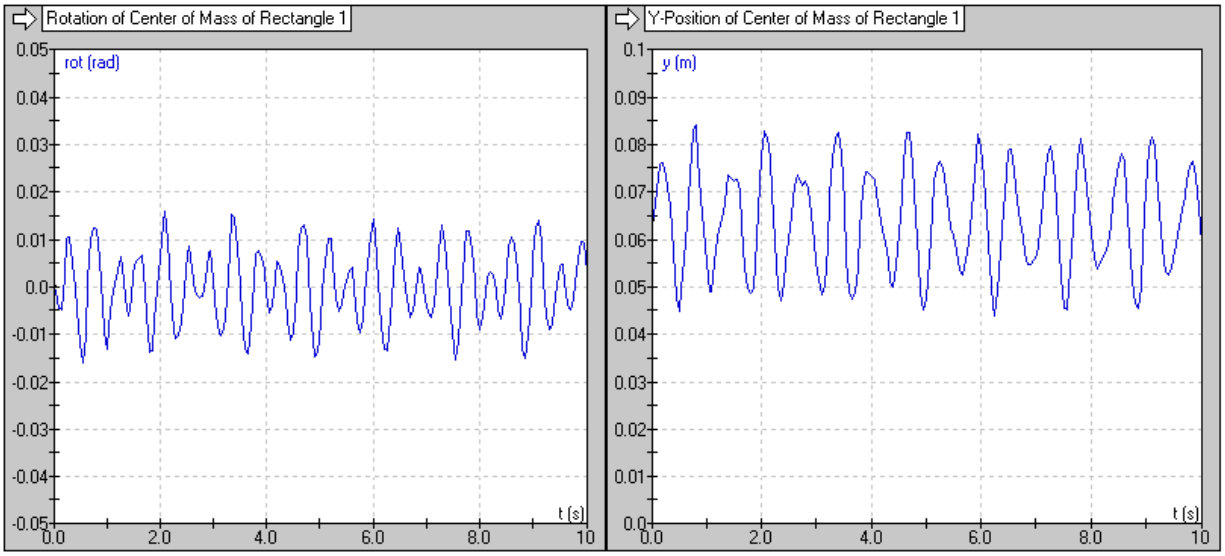
El que s'ha fet amb els actuadors ha estat atribuir una longitud fixa de 0,2 m a cadascun d'ells, i sobre aquesta longitud fixa, superposar-hi una ona sinusoïdal per simular la superfície de la carretera. L'amplitud de l'ona sinusoïdal (o de la irregularitat de la carretera) no podrà ser tan gran com per, quan l'amplitud sigui negativa, provocar una longitud negativa de l'actuador, ja que en aquest cas el programa donaria un error.

Per aquest motiu, per fer les simulacions, s'utilitzarà una amplitud d'irregularitat de carretera de 0,01 metres.

Entrant doncs aquests paràmetres, s'obté la següent resposta:

Per la primera freqüència pròpia, 9,8 rad/s, el programa no retorna una gràfica pròpia de que un sistema estigui entrant en ressonància (gràfica 6 i 7):

**Gràfica 6: Rotació del centre de masses del model per una excitació de 9,8 rad/s**
**Gràfica 7: Desplaçament vertical del centre masses del model per una excitació de 9,8 rad/s**

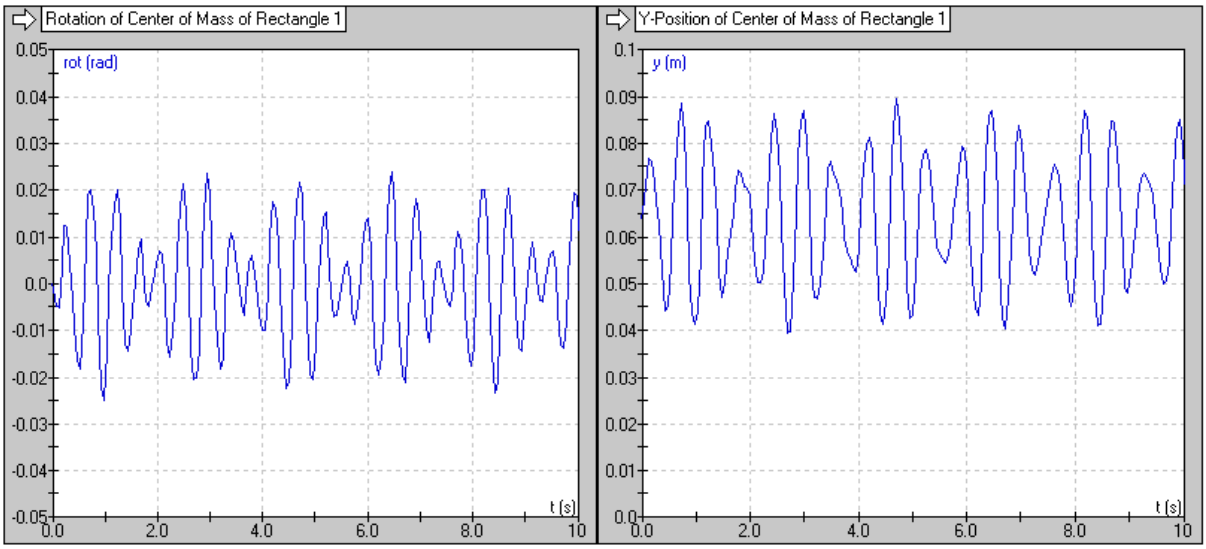



Com es pot veure, els desplaçaments són molt petits i no es van eixamplant amb el temps, i amb l'angle passa el mateix.

Si ara es prova amb una freqüència propera a 9,8 rad/s, 11 rad/s per exemple s'obté la següent resposta:

**Gràfica 8: Rotació del centre de gravetat per una excitació de 11 rad/s**

**Gràfica 9: Desplaçament del centre de gravetat per una excitació de 11 rad/s**

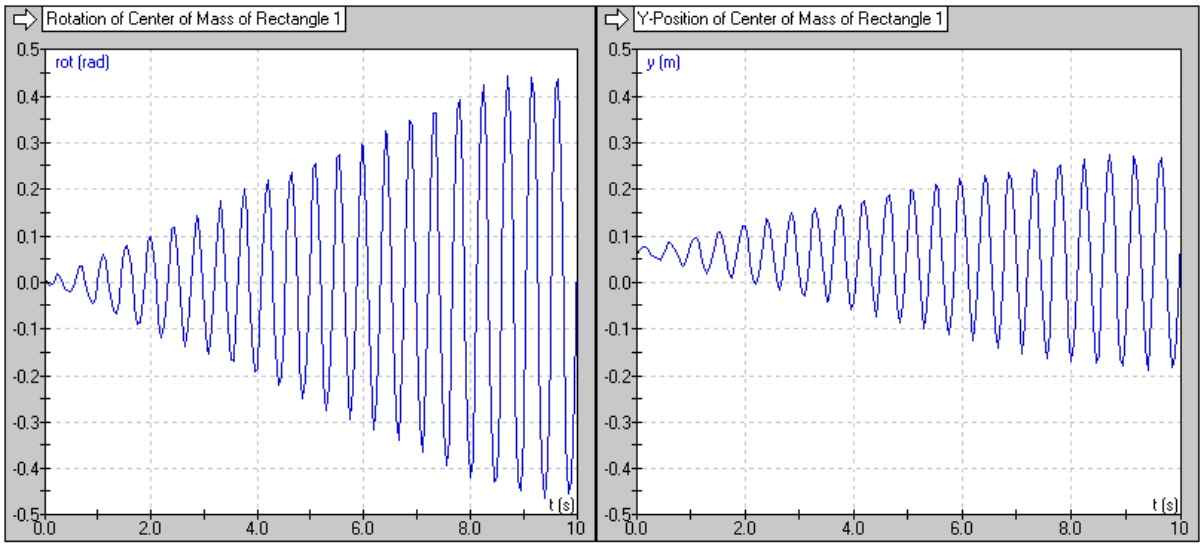



Veiem que la resposta s'assembla a una pulsació, però que en cap cas el sistema entra en ressonància. No obstant la resposta de pulsació indica que la freqüència d'excitació s'està aproximant a la freqüència de ressonància.

A continuació es prova amb la segona freqüència pròpia del sistema, 14,2 rad/s:

**Gràfica 10: Rotació del centre de gravetat amb una excitació de 14,2 rad/s**

**Gràfica 11: Desplaçament vertical del centre de gravetat a una freqüència d'excitació de 14,2 rad/s**




Es pot comprovar com en aquest cas el sistema sí que entra en ressonància, el gir respecte el centre de gravetat, i per extensió, del xassís de la motocicleta s'anirien amplificant en el temps. El

desplaçament vertical del centre de gravetat també s'amplifica. Entrant una amplitud (irregularitat de la carretera) de 0,01 metres, passats 10 segons, el centre de gravetat arriba a valors de gairebé 0,3 metres. Tenint en compte que en el programa el centre de gravetat està situat aproximadament a 0,05 metres, l'amplificació es del voltant de 30 vegades.

Com a conclusió es pot extreure que el model senzill és vàlid i s'aproxima molt als càlculs. Els valors trobats representen un bon punt de partida per elaborar càlculs i un model més complexes.

# ANNEX B: CÀLCULS

# ANNEX B: CÀLCULS

## B.1 Massa total, centre de gravetat i moment d'inèrcia de la motocicleta

### B.1.1 Introducció

L'objectiu d'aquest apartat és calcular la massa total de la motocicleta, la posició del seu centre de gravetat i determinar el seu moment d'inèrcia total. La massa, la posició del centre de masses i el valor del moment d'inèrcia total, són les dades que necessitarem per fer el càlcul de l'anàlisi modal i també per modelar la motocicleta amb Working Model 2D.

Per realitzar els càlculs s'ha suposat que la moto està en el pla, és a dir, s'ha tractat com un sistema en dues dimensions.

### B.1.2 Càlcul de la massa total de la motocicleta

En el moment de fer aquest apartat de càlcul, es van agafar les masses més significatives dels elements de la motocicleta. D'aquesta manera s'ha trobat una massa aproximada no gaire allunyada de la real. A la taula a continuació, es mostren quins són aquests elements i quina massa tenen:

| Element | massa (kg) |
|---|---|
| Bateria | 12,5 |
| Motor | 8,5 |
| Xassís | 15 |
| Roda davant | 6,5 |
| Roda darrera | 4,5 |
| Basculant Compòsit | 3,5 |
| Pizzes o paquets | 1,5 |
| **Massa total** | **52** |

**Taula 7: Pes total i de cada element**

La massa total de la motocicleta és **52 kg**.

### B.1.3 Càlcul del centre de gravetat de la motocicleta

Tenint els valors de les masses de cada element, el següent pas és trobar el centre de gravetat de la motocicleta. Per començar, es defineix el centre de referència des d'on s'agafaran les coordenades de cada element. En aquest cas, s'ha triat el centre de la roda davantera. A la figura a continuació es pot veure un esquema de la moto amb el seu centre de referència:

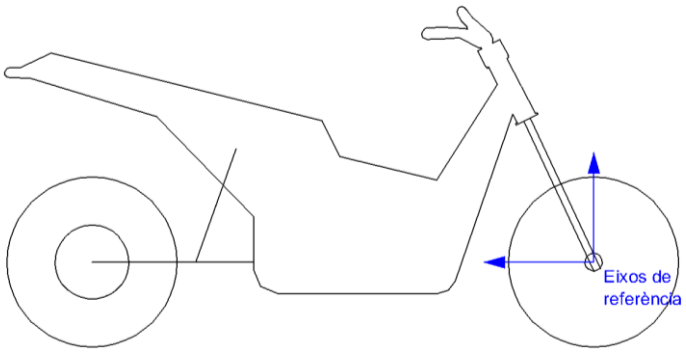



**Figura 26: Eixos de referència**

Per trobar les coordenades del centre de gravetat de la motocicleta en conjunt, en servirem de les dues següents equacions, la primera per trobar la coordenada X i la segona per trobar la coordenada Y (equacions 13 i 14):

$$X_{CdG} = \frac{x_1+m_1+\cdots+x_n+m_n}{m_{total}} \quad \text{(eq. 13)}$$

$$Y_{CdG} = \frac{y_1+m_1+\cdots+y_n+m_n}{m_{total}} \quad \text{(eq. 14)}$$

On:

$X_{CdG}$ → és la coordenada X del centre de gravetat de la motocicleta.

$Y_{CdG}$ → és la coordenada Y del centre de gravetat de la motocicleta.

$x_n$ → és la distància horitzontal del centre de referència al centre de gravetat d'un element *n*.

$y_n$ → és la distància vertical del centre de referència al centre de gravetat d'un element *n*.

$m_n$ → és la massa d'un element *n*.

$m_{total}$ → és la massa total de la motocicleta.

A continuació es mostrà una taula amb els elements més significatius, el seu pes i les coordenades del seu centre de gravetat:

| **Element *n*** | **$m_n$ (kg)** | **$x_n$ (mm)** | **$y_n$ (mm)** |
|---|---|---|---|
| Bateria | 12,5 | 672,24 | 193 |
| Motor | 8,5 | 1.350 | 0 |
| Xassís | 15 | 636 | 133 |
| Roda davant | 6,5 | 0 | 0 |
| Roda darrera | 4,5 | 1.350 | 0 |
| Basculant Compòsit | 3,5 | 1.227,3 | 415,3 |
| Pizzes o paquets | 1,5 | 719,5 | 55,8 |

**Taula 8: Dades de cada element de la motocicleta**

Les coordenades de cada element s'han suposat que estan situades de la següent manera:

- Per la bateria, el motor, les rodes de davant i darrere, i les pizzes o paquets, al tenir tots una forma geomètrica senzilla (rectangular, circular), s'ha suposat que el centre de gravetat de cada un d'ells està al seu centre geomètric.
- Per el xassís i el basculant de compòsit, s'ha obtingut el seu centre de gravetat a través d'un programa CAD.

Els resultats obtinguts es mostren a la següent taula:

| Massa total (kg) | $X_{CdG}$ (m) | $Y_{CdG}$ (m) |
|---|---|---|
| 52 | 0,785 | 0,114 |

**Taula 9: Resultat del càlcul del centre de gravetat**

A la figura a continuació es mostra la posició del centre de gravetat:

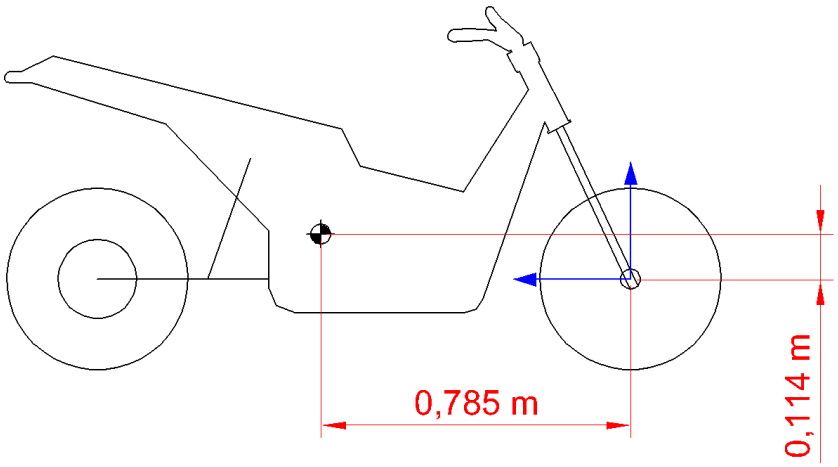



**Figura 27: Posició del centre de gravetat de la motocicleta**

Les dades de la posició del centre de gravetat del xassís i del basculant de compòsit s'han trobat amb l'ajuda de la funció *Propiedades físicas* del programa Solidworks 2013.

Les dades de distància entre el centre de gravetat de cada element i el centre de referència s'han calculat amb el programa Autocad.

### B.1.4 Càlcul del moment d'inèrcia total de la motocicleta

Per calcular el moment d'inèrcia total del sistema, cal calcular el moment d'inèrcia de cada element respecte l'eix que passa pel centre de gravetat de la motocicleta. La suma dels moments d'inèrcia de

cada element respecte l'eix que passa pel centre de gravetat de la moto, ens donarà el moment d'inèrcia total.

Per calcular el moment d'inèrcia d'un element s'ha fet servir el teorema d'Steiner. La seva fórmula es presenta a continuació (equació 15):

$$I_{n,CdG} = I_n + m_n \cdot d^2 \qquad \text{(eq. 15)}$$

On:

$I_{n,CdG}$ → és el moment d'inèrcia d'un element respecte l'eix que passa pel centre de gravetat de la motocicleta [kg·m²].

$I_n$ → és el moment d'inèrcia d'un element respecte l'eix que passa pel seu centre de gravetat [kg·m²].

$m_n$ → és la massa de l'element [kg].

$d$ → és la distància entre l'eix que passa pel centre de gravetat d'un element al l'eix que passa pel centre de gravetat de la motocicleta [m].

A la taula a continuació es mostren les dades de moment d'inèrcia, massa, distància entre eixos, els resultats dels moments d'inèrcia de cada element respecte el centre de gravetat de la motocicleta, així com el resultat del moment d'inèrcia total:

| **Element** | **Moment d'inèrcia (kg·m²)** | **Massa (kg)** | **D (m)** | **I steiner (kg·m²)** |
|---|---|---|---|---|
| Bateria | 0,20 | 12,5 | 0,138 | 0,443 |
| Motor | 0,06 | 8,5 | 0,575 | 2,874 |
| Xassís | 12,75 | 15 | 0,146 | 13,070 |
| Roda davant | 0,06 | 6,5 | 0,794 | 4,159 |
| Roda darrera | 0,064 | 4,5 | 0,575 | 1,554 |
| Basculant compòsit | 0,019 | 3,5 | 0,534 | 1,017 |
| Paquets | 0,017 | 1,5 | 0,088 | 0,028 |
| | | | **Moment d'inèrcia total:** | **23,10** |

**Taula 10: Dades pel càlcul del moment d'inèrcia total**

Com es pot veure el moment d'inèrcia total de la motocicleta al seu centre de masses és de **23,1 kg·m²**

Les dades del moment d'inèrcia de cada element s'han obtingut amb el programa Solidworks 2013, primer assignant el material corresponent a cada element, i després, utilitzant la funció *Propiedades físicas* del programa.

Per trobar les dades de distància entre eixos, coneixent les coordenades del centre de gravetat de cada element (trobat a l'apartat anterior) i les coordenades del centre de gravetat de la motocicleta (calculat a l'apartat anterior), s'han restat els vectors i s'ha calculat el mòdul de cada un.

## B.2 Cinemàtica

### B.2.1 Introducció

Per començar el càlcul cinemàtic primer s'han de definir les variables del sistema. Hi haurà variables independents, les que són dades que podem conèixer i manipular, com ara l'amplitud de la irregularitat de la carretera, que serà el desplaçament vertical de la roda, que, repetint-se al llarg del temps, serà la manera d'excitar el sistema. Les dues variables independents seran els desplaçaments verticals de cada roda.

Les variables dependents, són les que varien quan hi ha un canvi en les variables independents del sistema. En aquest cas, les variables dependents del sistema seran el desplaçament del centre de gravetat (y) i la rotació del xassís (θ).

A partir d'aquí, el següent pas és fer el càlcul cinemàtic, per després trobar les equacions de govern.

### B.2.2 Càlcul cinemàtic

Per fer l'anàlisi cinemàtic s'ha treballat sobre la geometria creada en el model de Working Model. S'ha determinat els punts que cal estudiar i s'han apuntat les seves coordenades. Els punts estudiats contenen les variables que ajudaran a entendre la resposta dinàmica del sistema. A la figura que segueix, es mostren els punts estudiats amb les seves coordenades:

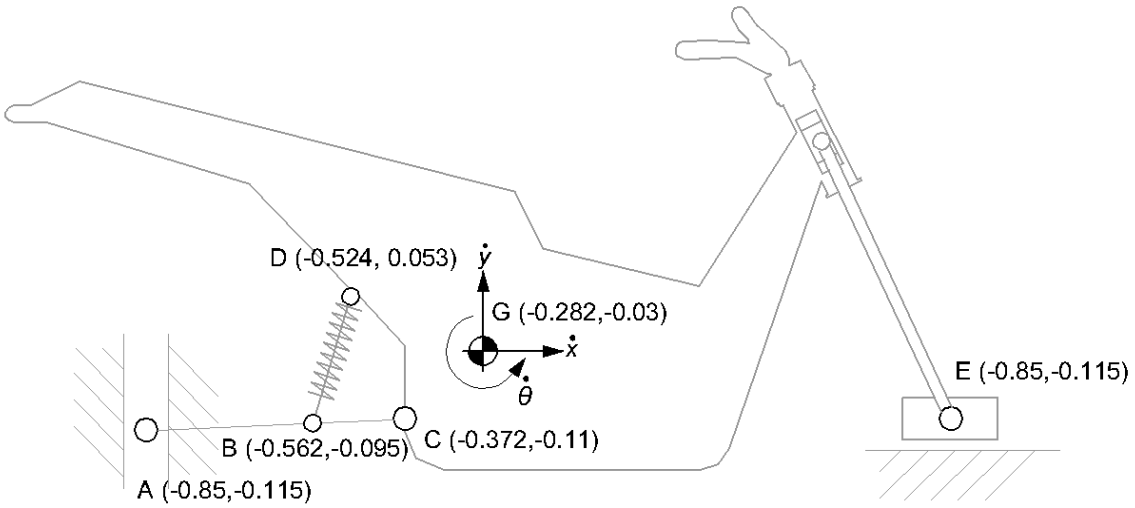



**Figura 28: Coordenades punts d'estudi**

Així doncs, per conèixer la resposta dinàmica del sistema cal trobar la velocitat relativa dels punts BD i E, i la velocitat horitzontal del centre de gravetat (punt G). Totes seran funció del desplaçament vertical i l'angle de rotació del centre de gravetat.

El primer ha estat trobar la velocitat horitzontal del centre de gravetat. Buscant la velocitat de C pels punts A i G es pot trobar (equació 16):

$$\vec{v}_c = \vec{v}_A + \omega_1 \times \overrightarrow{CA} \qquad \text{(eq. 16)}$$

$$\vec{v}_C = (\dot{x}, \dot{y}) + \dot{\theta} \times \overrightarrow{CG}$$

On:

$\vec{v}_A$ → És la velocitat absoluta del punt A. Es tracta d'una dada coneguda, ja que seria la velocitat a la que puja o baixa la roda en una carretera amb una irregularitat determinada, o la velocitat de l'actuador en el Working Model. Només hi ha component vertical [m/s].

$\omega_1$ → És la velocitat de rotació del basculant, queda en funció de $\vec{v}_A$, $\dot{y}$ i $\dot{\theta}$ [rad/s].

$\overrightarrow{CA}$ → És el vector entre el punt C i el punt A [m].

$\dot{x}$ → És la velocitat horitzontal del centre de gravetat, en funció de $\vec{v}_A$, $\dot{y}$ i $\dot{\theta}$ [m/s].

$\dot{y}$ → És la velocitat vertical del centre de gravetat [m/s].

$\dot{\theta}$ → És la velocitat de rotació del centre de gravetat [m/s].

$\overrightarrow{CG}$ → És el vector entre el punt C i el centre de gravetat [m].

D'aquí s'obté que:

$$\boldsymbol{\dot{x} = -0,01 \cdot \dot{y} - 0,08 \cdot \dot{\theta} - 0,01 \cdot \vec{v}_A}$$

$$\omega_1 = 2,09 \cdot \dot{y} - 0,18 \cdot \dot{\theta} - 2,09 \cdot \vec{v}_A$$

Havent resolt aquest pas, es pot trobar la velocitat relativa BD. Com l'amortidor posterior està inclinat 75° respecte el terra, la velocitat relativa BD és defineix com (equació 17):

$$\vec{v}_{BD,REL} = (\vec{v}_B - \vec{v}_D) \cdot (\cos 75, \sin 75) \qquad \text{(eq. 17)}$$

On:

$\vec{v}_B$ → És la velocitat absoluta del punt B [m/s].

$\vec{v}_D$ → És la velocitat absoluta del punt D [m/s].

El valor de la velocitat del punt B es pot trobar mitjançant la fórmula:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_1 \times \overrightarrow{BA}$$

On:

$\vec{v}_A$ → És la velocitat del punt A.

$\omega_1$ → És la velocitat de rotació del basculant, en funció de $\vec{v}_A$, $\dot{y}$ i $\dot{\theta}$ [rad/s].

$\overrightarrow{BA}$ → És el vector entre els punts B i A [m].

La velocitat de D serà:

$$\vec{v}_D = (\dot{x}, \dot{y}) + \dot{\theta} \times \overrightarrow{DG}$$

On:

$\dot{x}$ → És la velocitat horitzontal del centre de gravetat, funció de $\vec{v}_A$, $\dot{y}$ i $\dot{\theta}$ [m/s].

$\dot{y}$ → És la velocitat vertical del centre de gravetat [m/s].

$\dot{\theta}$ → És la velocitat de rotació del centre de gravetat [m/s].

$\overrightarrow{DG}$ → És el vector entre el punt D i el centre de gravetat [m].

Així doncs, la velocitat relativa BD és:

$$\vec{v}_{BD,REL} = -0{,}38 \cdot \vec{v}_A + 0{,}38 \cdot \dot{y} - 0{,}22 \cdot \dot{\theta}$$

Com es tracta de desplaçaments molt petits, es pot linealitzar, quedant el resultat:

$$\boldsymbol{\vec{v}_{BD,REL} = -0,38 \cdot d_A + 0,38 \cdot y - 0,22 \cdot \theta}$$

On:

$d_A$ → És el desplaçament vertical del punt A (conegut) [m].

$y$ → És el desplaçament vertical del centre de gravetat [m].

$\theta$ → És el gir del centre de gravetat [rad].

Així doncs havent trobat la velocitat relativa de BD, es tenen les dades suficients de la part del darrere de la motocicleta. A continuació es mostra com trobar la velocitat relativa del punt E.

La velocitat de E serà (equació 18):

$$\vec{v}_{E,ABS} = \vec{v}_{E,ARR} + \vec{v}_{E,REL} \qquad \text{(eq. 18)}$$

El punt E tindrà una component vertical de velocitat absoluta, $\vec{v}_{E,Y}$, que serà coneguda, ja que representa l'excitació que força el sistema. A part d'això, el punt E tindrà velocitat d'arrossegament i relativa. Així doncs:

$$\vec{v}_{E,ARR} = (\dot{x}, \dot{y}) + \dot{\theta} \times \overrightarrow{EG}$$

On:

$\dot{x}$ → És la velocitat horitzontal del centre de gravetat, funció de $\dot{y}$ i $\dot{\theta}$ [m/s].

$\dot{y}$ → És la velocitat vertical del centre de gravetat [m/s].

$\dot{\theta}$ → És la velocitat de rotació del centre de gravetat [m/s].

$\overrightarrow{EG}$ → És el vector entre el punt E i el centre de gravetat [m].

La velocitat relativa del punt E estant inclinada respecte la vertical 26,5° és:

$$\vec{v}_{E,REL} = v_{E,REL} \cdot (\sin 26{,}5\,, -\cos 26{,}5)$$

Si es fa la descomposició de l'equació X en components horitzontals i verticals, queden dues equacions de les que se'n pot extreure el valor de $v_{E,REL}$. D'aquesta manera, el resultat de la velocitat relativa del punt E és:

$$\vec{v}_{E,REL} = 1{,}11 \cdot \dot{y} + 0{,}87 \cdot \dot{\theta} - 1{,}11 \cdot \vec{v}_{E,Y}$$

I linealitzant un altre cop:

$$\boldsymbol{\vec{v}_{E,REL} = 1{,}11 \cdot y + 0{,}87 \cdot \theta - 1{,}11 \cdot d_E}$$

On:

$d_E$ → És el desplaçament vertical del punt A (conegut) [m].

$y$ → És el desplaçament vertical del centre de gravetat [m].

$\theta$ → És el gir del centre de gravetat [rad].

## B.3 Equacions de govern

### B.3.1 Introducció

El càlcul realitzat a l'apartat anterior permet calcular les equacions de govern del sistema. En aquest apartat, per tal de trobar-les, s'ha fet servir el mètode de les equacions de Lagrange.

Per trobar les equacions de govern a través de les equacions de Lagrange, es parteix del Lagrangià. El Lagrangià és un operador que expressa l'energia cinètica menys l'energia potencial d'un sistema en funció de la seva posició i velocitat.

En les equacions de Lagrange es diferencia l'equació del Lagrangià respecte les coordenades generalitzades del sistema, que s'assenyalaran més endavant.

Les equacions de govern són bàsiques per a realitzar l'anàlisi modal, a partir d'elles es pot començar a escriure les matrius per l'anàlisi modal.

Aquest mateix mètode, amb les mateixes equacions, ha sigut emprat a l'*annex A: Model senzill amb Working Model.*

### B.3.2 Càlcul de les equacions de govern

Si s'excita el sistema per la base, aquest tindrà energia cinètica (*T*):

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left( \left(0{,}01 \cdot v_A - 0{,}01 \cdot \dot{y} - 0{,}08 \cdot \dot{\theta}\right)^2 + \dot{y}^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \dot{\theta}^2$$

On:

$m$ → És la massa total de la motocicleta, 52 kg.

$I_G$ → És la inèrcia total de la motocicleta, 23,1 kg·m².

i energia potencial (*V*):

$$V = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot x_{BD}^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot x_E^2$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (-0{,}38 \cdot d_A + 0{,}38 \cdot y - 0{,}22 \cdot \theta)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (1{,}11 \cdot y + 0{,}87 \cdot \theta - 1{,}11 \cdot d_E)^2$$

On:

$k_1$ → Constant d'elasticitat de la molla de l'amortidor posterior, 65.000 N/m.

$k_2$ → Constant d'elasticitat de la molla de la suspensió davantera. 4.500 N/m.

Ara es calcula el Lagrangià i es diferencia per trobar les equacions de Lagrange, una per cada coordenada generalitzada. Aquestes seran les variables dependents *y* i *θ*:

$$L = T - V$$

On:

*L* → És l'equació del Lagrangià.

*T* i *V* → Són les equacions de l'energia cinètica i potencial elàstica.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = f_t$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = q_t$$

On:

$f_t$ → És la força d'excitació de la que depèn la variable dependent *y*.

$q_t$ → És la força d'excitació de la que depèn la variable dependent *θ*.

Les equacions de govern per a les coordenades generalitzades *θ* i *y*, respectivament, són les següents:

$$\mathbf{23,49 \cdot \ddot{\theta} - 41,6 \cdot 10^{-3} \cdot \dot{v}_A + 0,0416 \cdot \ddot{y} + 6.609,5 \cdot \theta - 1.127,5 \cdot y = -5.483,4 \cdot d_A + 4.355,8 \cdot d_E}$$

$$\mathbf{0,041 \cdot \ddot{\theta} - 5,2 \cdot 10^{-3} \cdot \dot{v}_A + 52 \cdot \ddot{y} - 1.127,5 \cdot \theta + 14.956,4 \cdot y = 9.386 \cdot d_A + 5.570,4 \cdot d_E}$$

## B.4 Anàlisi modal

### B.4.1 Introducció

L'anàlisi modal ens permetrà conèixer les freqüències pròpies del sistema, així com també escriure les coordenades generalitzades del sistema en funció de les variables independents. Això últim permet dibuixar les corbes de desplaçament i rotació del centre de gravetat.

Per poder arribar fins al final caldrà utilitzar el mètode de la superposició modal, es separaran les coordenades generalitzades per després tornar-les a ajuntar a través de la matriu modal.

### B.4.2 Càlcul anàlisi modal

Tenint en compte que les equacions de govern tenen la següent forma:

$$m_{11} \cdot \ddot{\theta} + m_{12} \cdot \ddot{y} - k_{11} \cdot \theta + k_{12} \cdot y = a_{11} \cdot d_A + a_{12} \cdot d_E - b_{11} \cdot \dot{v}_A$$

$$m_{21} \cdot \ddot{\theta} + m_{22} \cdot \ddot{y} - k_{21} \cdot \theta + k_{22} \cdot y = a_{21} \cdot d_A + a_{22} \cdot d_E - b_{21} \cdot \dot{v}_A$$

Les matrius de l'anàlisi modal s'escriuen de la següent manera:

$$[M] \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + [K] \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = [F_a] \cdot \begin{pmatrix} d_A \\ d_E \end{pmatrix} + [F_b] \cdot \dot{v}_A$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_A \\ d_E \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} \cdot \dot{v}_A$$

Així, pel sistema estudiat:

$$\begin{bmatrix} 22{,}49 & 0{,}0416 \\ 0{,}0416 & 52 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 6.609{,}5 & -1.127{,}5 \\ -1127{,}5 & 14.956{,}4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -5.483{,}4 & 4.355{,}8 \\ 9.386 & 5.570{,}4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_A \\ d_E \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0416 \\ 0{,}0052 \end{bmatrix} \cdot \dot{v}_A$$

Calculant els valors propis de les matrius de masses i de rigidesa quan la matriu de forces és igual a 0, es poden obtenir les freqüències pròpies i la matriu modal del sistema. Aquest pas, s'ha fet en Matlab, utilitzant la funció *"eig"*. La matriu de valors propis *w* és:

$$w = \begin{pmatrix} 324{,}26 & 0 \\ 0 & 257{,}32 \end{pmatrix}$$

Fent l'arrel quadrada dels valors propis s'obtenen les freqüències pròpies:

$$\omega_1 = \sqrt{324{,}26} = 18 \ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{257{,}32} = 16{,}04 \ \frac{rad}{s}$$

La matriu modal $\phi$ del sistema conté els valors propis, i serà necessària per efectuar el canvi de variable:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0{,}598 & -0{,}722 \end{pmatrix}$$

La matriu modal es fa servir per fer un canvi de variables en què la configuració del sistema estarà representada per les anomenades coordenades principals {η }. Aquest canvi de variables s'aplica a les equacions del moviment que queden transformades de la següent manera (equació 19):

$$[M'] \cdot (\ddot{\eta}) + [K'] \cdot (\eta) = (F'_t) \qquad \text{(eq. 19)}$$

On:

$$[M'] = [\phi]^T \cdot [M] \cdot [\phi] = \begin{bmatrix} 41{,}08 & 0 \\ 0 & 49{,}69 \end{bmatrix}$$

$$[K'] = [\phi]^T \cdot [K] \cdot [\phi] = \begin{bmatrix} 13.322 & 0 \\ 0 & 12.785 \end{bmatrix}$$

A la matriu de forces, com hi apareix el component $\dot{v}_A$, cal fer el següent pas:

$$[F_A] = [a_{11} \quad a_{12}\,] \cdot d_A - \omega^2 \cdot \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{vmatrix} \cdot \dot{v}_A = \begin{bmatrix} -5.483{,}4 - \omega^2 \cdot 0{,}0416 \\ 9.386 - \omega^2 \cdot 0{,}0052 \end{bmatrix}$$

$$[F_E] = [a_{21} \quad a_{22}\,] \cdot d_E = \begin{bmatrix} 4.355{,}8 \\ 5.570{,}4 \end{bmatrix}$$

$$(F_t) = [F_A \quad F_E] = \begin{pmatrix} -5.483{,}4 - \omega^2 \cdot 0{,}0416 & 4.355{,}8 \\ 9.386 - \omega^2 \cdot 0{,}0052 & 5.570{,}4 \end{pmatrix}$$

Llavors, per fer el canvi de variables de la matriu de forces:

$$(F_t{}') = [\phi]^T \cdot (F_t) = \begin{pmatrix} -11.103{,}7 - \omega^2 \cdot 0{,}0385 & 1.020{,}24 \\ -1.297 + \omega^2 \cdot 0{,}0453 & -8.379{,}85 \end{pmatrix}$$

Aplicant doncs aquest canvi de variables, les equacions queden desacoblades:

$$\begin{bmatrix} 41{,}08 & 0 \\ 0 & 49{,}69 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 13.322 & 0 \\ 0 & 12.785 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.103{,}7 - \omega^2 \cdot 0{,}0385 & 1.020{,}24 \\ -1.297 + \omega^2 \cdot 0{,}0453 & -8.379{,}85 \end{pmatrix}$$

Les noves coordenades η estan desacoblades, de tal manera que es pot resoldre les equacions per separat. La solució per a una de les variables η consta de dues parts: una per a la l'excitació de la roda de davant, E, i una altra, A, per a la l'excitació de la roda de darrere. Per superposició, la solució total serà la suma d'aquestes dues solucions (equacions 20 i 21). De manera que:

$$\eta_1 = \eta_1^E + \eta_1^A \qquad \text{(eq. 20)}$$

$$\eta_2 = \eta_2^E + \eta_2^A \qquad \text{(eq. 21)}$$

Cada terme η es resol per separat amb la següent equació (equació 22):

$$\eta_i^X = \frac{-f'_{ii}}{k'_i} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\omega^2}{\omega_{i,n}^2 - 1}\right|} \qquad \text{(eq. 22)}$$

On:

$\eta_i^X$ → És la variable pel canvi de coordenades, on X indica si és per la posició de davant o de darrere, A o E, i *i*, la posició en el vector, 1 o 2.

$f_{ii}$ → És el valor de la posició *ii* de la matriu de forces.

$k'_i$→ És el valor de la posició *i* de la matriu de rigidesa.

$\omega$ → És la freqüència d'excitació.

$\omega_{i,n}$→ És una de les dues freqüències pròpies del sistema.

Com la roda posterior tindrà un desfasament respecte la roda davantera d'acord amb el període de la irregularitat de la carretera, cal considerar-hi un angle de desfasament $\varphi$.

$$\begin{bmatrix}\theta \\ y\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}\eta_1^E \cdot \sin\omega t + \eta_1^A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ \eta_2^E \cdot \sin\omega t + \eta_2^A \cdot \sin(\omega t + \varphi)\end{Bmatrix}$$

Amb el qual les variables $\theta$ i $y$ depenen de senyals que evolucionen segons $\sin\omega t$ i també de $\sin(\omega t + \varphi)$. Per poder representar aquestes variables, procedim a calcular-ne el mòdul segons les formules $\theta$ i $y$:

$$\boldsymbol{\theta} = \sqrt{\left(\boldsymbol{\phi_{11}} \cdot \boldsymbol{\eta_1^E} + \boldsymbol{\phi_{12}} \cdot \boldsymbol{\eta_2^E} + \cos\boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\boldsymbol{\phi_{11}} \cdot \boldsymbol{\eta_1^A} + \boldsymbol{\phi_{12}} \cdot \boldsymbol{\eta_2^A}\right)\right)^2 + \left(\left(\boldsymbol{\phi_{11}} \cdot \boldsymbol{\eta_1^A} + \boldsymbol{\phi_{12}} \cdot \boldsymbol{\eta_2^A}\right) \cdot \sin\boldsymbol{\varphi}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{y} = \sqrt{\left(\boldsymbol{\phi_{21}} \cdot \boldsymbol{\eta_1^E} + \boldsymbol{\phi_{22}} \cdot \boldsymbol{\eta_2^E} + \cos\boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\boldsymbol{\phi_{21}} \cdot \boldsymbol{\eta_1^A} + \boldsymbol{\phi_{22}} \cdot \boldsymbol{\eta_2^A}\right)\right)^2 + \left(\left(\boldsymbol{\phi_{21}} \cdot \boldsymbol{\eta_1^A} + \boldsymbol{\phi_{22}} \cdot \boldsymbol{\eta_2^A}\right) \cdot \sin\boldsymbol{\varphi}\right)^2}$$

Les equacions que representen el desplaçament vertical de les parts davantera i posterior es poden trobar a partir d'aquestes últimes equacions. Ja que aquestes regeixen el desplaçament vertical del centre de gravetat i el gir de rotació del xassís, si suposem que la motocicleta es balanceja de la següent manera per l'eix que passa pel seu centre de gravetat (Figura 29):

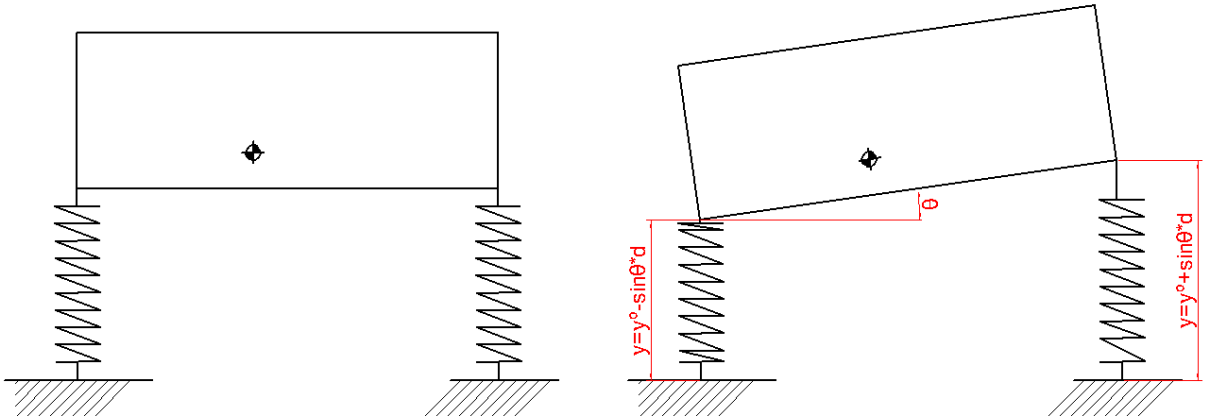



**Figura 29: Balanceig motocicleta**

Podem trobar el desplaçament de la part davantera i posterior de la següent manera:

$$\boldsymbol{y_{davant} = y_{CdG} + \theta \cdot d_f}$$

$$\boldsymbol{y_{darrere} = y_{CdG} - \theta \cdot d_r}$$

On:

$d_f$ → És la distància entre la roda de davant i el centre de masses [m].

$d_r$ → És la distància entre la roda de darrera i el centre de masses [m].

# ANNEX C: CÀLCUL DE LA CONSTANT D'ELASTICITAT DE LA MOLLA DE LA SUSPENSIÓ POSTERIOR

# ANNEX C: CÀLCUL DE LA CONSTANT D'ELASTICITAT DE LA MOLLA DE LA SUSPENSIÓ POSTERIOR

## C.1 Introducció

L'UdG Racing Team va rebre com a donació d'un patrocinador dos amortidors per a la suspensió posterior. Els amortidors porten una molla helicoïdal, i venen sense cap tipus de fitxa tècnica ni descripció. Per tal de trobar les seves constants d'elasticitat, primer es van calcular teòricament, i posteriorment, experimentalment mitjançant un assaig en un laboratori.

**Figura 30: Molles dels amortidors donats.**

## C.2 Càlcul teòric de la constant d'elasticitat de la molla

Per trobar la constant d'elasticitat de cada molla s'utilitzarà la següent fórmula (equació 23):

$$K = \frac{d^4 \cdot G}{8 \cdot D^3 \cdot N_a} \qquad \text{(eq. 23)}$$

On:

*d* → És el diàmetre del fil de l'amortidor [mm]

*G* → És el mòdul de torsió del material, en aquest cas, acer, 75GPa. En els càlculs s'utilitzaran unitats de $N/mm^2$, per tant el valor utilitzat és $75 \cdot 10^3$ $N/mm^2$.

*D* → És la mitjana dels diàmetres màxim i mínim de la molla [mm].

$N_a$ → És el nombre d'espires actives, les que es deformen totalment quan la molla es comprimeix.

Per tal de completar la fórmula, s'han desmuntat les molles dels amortidors i s'han pres les següents dades:

| Paràmetre/Molla | Negra | Groga |
|---|---|---|
| **d (mm)** | 8,6 | 8,8 |
| **$D_{màx}$ (mm)** | 65,2 | 65,7 |
| **$D_{mín}$ (mm)** | 58,4 | 61,6 |
| **$N_a$** | 4 | 4 |

**Taula 11: Dades de les molles**

Així doncs, solucionant l'equació, s'obtenen els següents resultats (taula 12):

| *K molla negra (N/mm)* | *K molla groga (N/mm)* |
|---|---|
| 54,3 | 54,5 |

**Taula 12: Resultats per les constants de cada molla**

## C.3 Càlcul de la constant d'elasticitat de la molla a partir d'un assaig al laboratori

Es va decidir fer un assaig al laboratori per trobar el valor real de la constant d'elasticitat de cada molla. L'assaig es va portar a terme al laboratori del grup de recerca AMADE al Parc Científic de la UdG, on es va poder fer ús d'una premsa hidràulica.

L'assaig es va basar en el principi de la llei de Hooke (equació 24):

$$F = K \cdot x \rightarrow K = {}^{F}/_{x} \qquad \text{(eq. 24)}$$

On:

*K* → és la constant de la molla, en aquest cas en N/mm.

*F* → La força aplicada [N].

*x* → La distància que ha avançat l'èmbol de la premsa [mm].

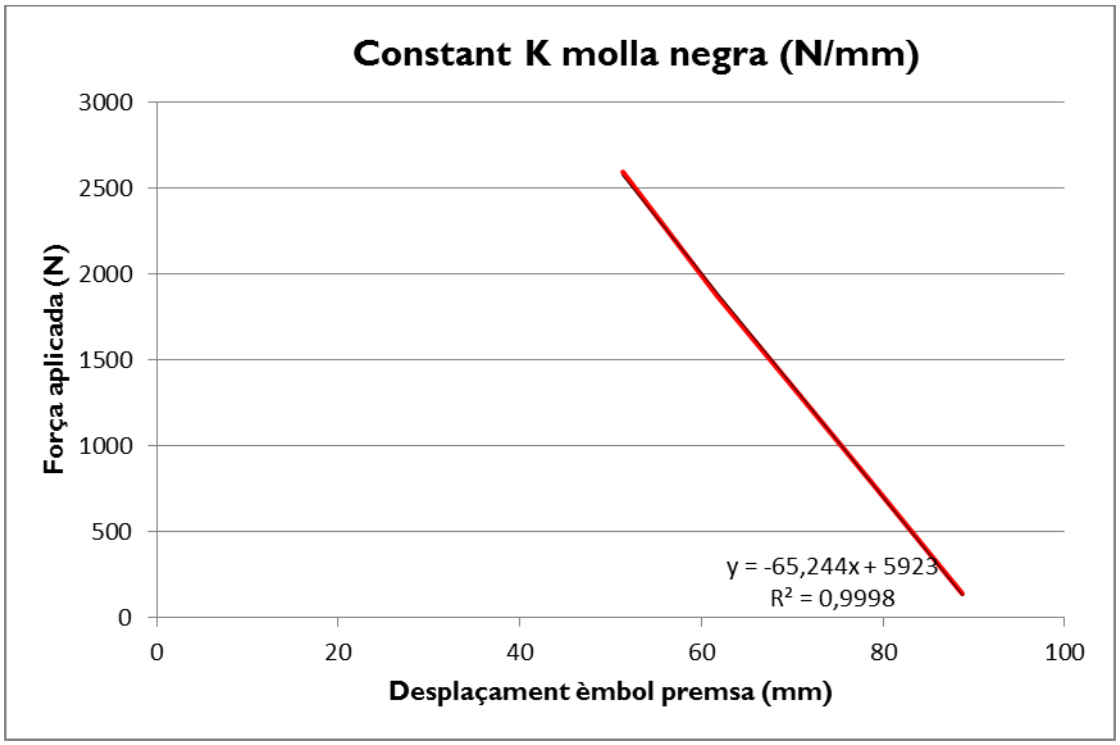
Es van extreure les següents dades dels assajos (taula 13):

| Molla negra | | Molla groga | |
|---|---|---|---|
| **Força (N)** | **x (mm)** | **Força (N)** | **x (mm)** |
| 140 | 88,79 | 70 | 90,85 |
| 790 | 76,68 | 542 | 83,27 |
| 1.382 | 69,42 | 1.195 | 72,75 |
| 1.870 | 61,85 | 1.799 | 63,07 |
| 2.593 | 51,32 | 2.364 | 54,65 |

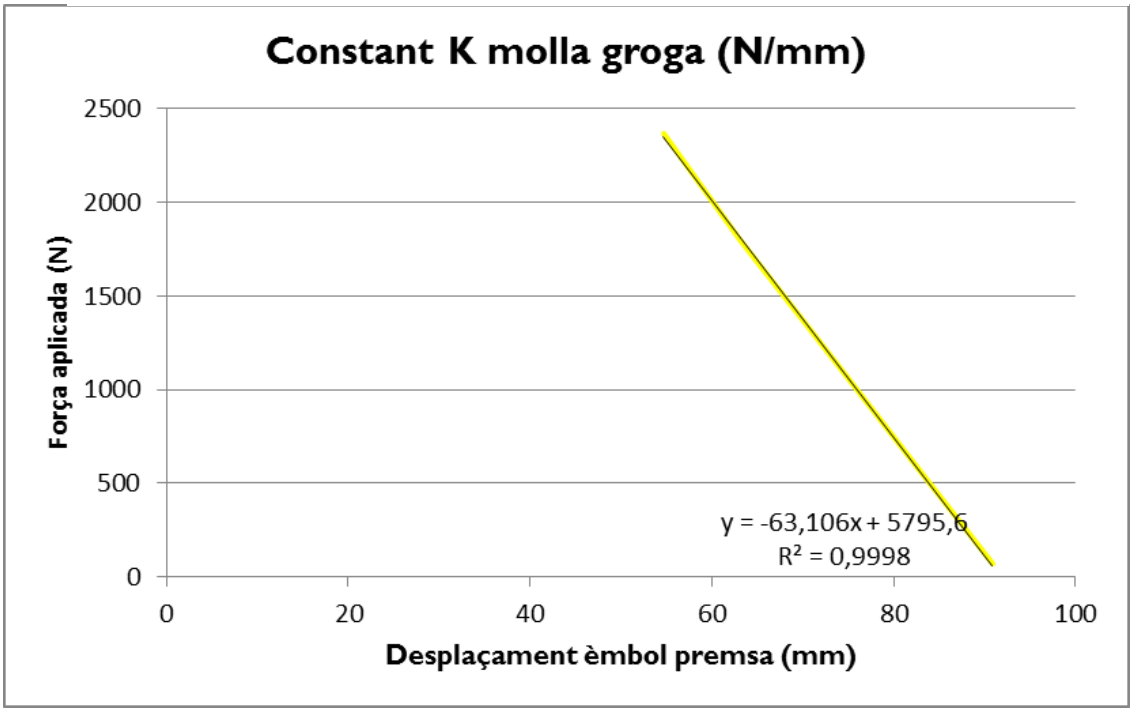
**Taula 13: Dades obtingudes a l'assaig**

Amb les dades obtingudes a l'assaig s'han pogut dibuixar les gràfiques de la constant d'elasticitat de cada molla (gràfiques 12 i 13). S'ha fet la recta de regressió per tal d'obtenir el valor de constant d'elasticitat que millor s'ajusta a les dades obtingudes i per tant, el valor que s'està buscant.

**Gràfica 12: Constant d'elasticitat molla negra**



**Gràfica 13: Constant d'elasticitat molla groga**




De les rectes de regressió es s'obté que els valors de la constant d'elasticitat per a cada molla són (taula 14):

| *K molla negra (N/mm)* | *K molla groga (N/mm)* |
|---|---|
| 65,2 | 63,1 |

**Taula 14: Resultats assaig**

Es pot comprovar que hi ha un percentatge d'error del 15% entre els valors obtinguts teòricament i en els assajos. En tot cas els valors que es consideraran com a bons són els de l'assaig experimental al laboratori.

El valor que s'ha escollit per a la realització dels càlculs ha estat el de la molla negra. El valor s'ha arrodonit a 65 N/mm per facilitar els càlculs.