

## Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. Factores implícitos en la capacidad estimativa métrica

**Josep Callís i Franco**  
**M<sup>a</sup> Lluïsa Fiol Mora**  
**Carlos De Luca**  
**Carles Callís i Franco**

Actualmente nadie pone en duda la importancia de la estimación en el currículo. Sin embargo, lo más frecuente es considerar la estimación centrada solo en el campo numérico y tanto referida a valorar cantidades discretas como en la resolución mental de los cuatro algoritmos elementales. La investigación se centra en la estimación métrica longitudinal con el objetivo prioritario de detectar factores que la potencian o la dificultan y los procedimientos, recursos y estrategias que utilizan los alumnos de educación primaria. El test FIEM que se diseñó, pone a los alumnos ante situaciones de estimaciones métricas tanto de colecciones discretas de objetos como de segmentos rectilíneos o líneas curvas. En todos los casos fueron presentados con variaciones estructurales o bien perceptuales.

**Palabras clave:** matemáticas, estimación métrica longitudinal, pensamiento operativo, traducción unitaria, visualización, interiorización conceptual

### **Longitudinal metrical estimation in primary school. Implicit factors in the estimative metrical capability**

*Nowadays nobody doubts of the importance of estimation in the curriculum. However, estimation is very frequently focused onto the metrical field and referred to the value of discrete quantities as well as to the mental solution of the four basic algorithms. This research focuses on longitudinal metrical estimation in order to tackle factors that can either enhance or inhibit it and also the procedures, resources and strategies used by primary school students. The designed FIEM test puts students to the test in metrical estimation situations both for discrete object sets and for straight segments or curved lines. In all cases they were presented with either structural or perceptual variations.*

El aprendizaje de la medida intensifica, cada vez más, el interés hacia sus particularidades y especificidades didácticas debido a la imprescindible necesidad de su dominio y a la intensa preocupación de los profesionales de la educación ante los problemas que manifiestan una gran multitud de alumnos. Dicho interés se pone de manifiesto, por un lado, a través de su presencia en todos los currículos de todos los países y por otro, debido a que la mayoría de conclusiones de multitud de investigaciones centrada en el dominio de las capacidades matemáticas de la sociedad y de las demandas reales de dominio que esta necesita de sus ciudadanos hace patente la necesidad del dominio de la medida (NCTM, 1980; Informe Cockcroft, 1982; COPIRELEM, 1982; National Science Board, 1983; ICMI, 1986).

En gran medida este interés y necesidad de su dominio se fundamenta en que su adquisición posibilita a la persona:

- Integrarse como ciudadano en el contexto específico en que vive.
- Conectar con las raíces culturales de su cultura específica y su historia.
- Dominar y comprender una gran diversidad de ámbitos matemáticos.
- Saber utilizar y profundizar en el dominio de estrategias mentales.
- Comprender y adecuarse al mundo de la tecnología y del trabajo.

El interés general por el aprendizaje de la medida avanza en paralelo al interés existente por potenciar la capacidad estimativa si bien esta se ha centrado, casi de manera exclusiva, en la estimación numérica como base esencial para el desarrollo de estrategias que potencian el cálculo mental. Esta priorización hacia el campo numérico ha dejado prácticamente desatendida la investigación relacionada con la estimación métrica.

La capacidad de estimación métrica depende de una gran diversidad de factores. Algunos de ellos son fruto de las diferencias individuales fruto de las propias capacidades sensoriales y, en especial de la visual, que a su vez vienen determinada por la incidencia y dominancia de los hemisferios cerebrales y las capacidades de integración perceptual. Otros aspectos determinantes de esta capacidad estimativa cabe buscarlos, también, en el grado de desarrollo del pensamiento lógico el cual permite establecer los procesos de relación y ordenación, imprescindibles para la comparación, igualación y transitividad, estructuras de pensamiento operativo que son las bases fundamentales para posibilitar la adquisición de la medida y la integración del concepto de unidad. Tal vez esta gran amplitud y complejidad de los factores

intervinientes, aquí brevemente resumidos, pueda ser una de las causas que permitan entender porqué la investigación didáctica sobre la estimación métrica haya quedado fuera de las grandes líneas de investigación.

## La investigación y su diseño

El presente trabajo se planteó con el objetivo de aportar conocimiento sobre la estimación métrica longitudinal con el doble objetivo de detectar por un lado las características y estructuras mentales que se aplican y por el otro, los factores que la potencian o dificultan. Para ello se diseñó y aplicó el test FIEM (Factores Inherentes de la Estimación Métrica).

La metodología aplicada se centra en un estudio de casos con doble enfoque de análisis de datos:

- *Análisis cuantitativo* de los valores estimativos para determinar las características genéricas del fenómeno estimativo y su correlación según las variables producto de las diferentes pruebas y del género.
- *Análisis cualitativo* de las respuestas explicativas dadas por cada persona, para profundizar respecto al cómo y qué han realizado o pensado para determinar las estimaciones dadas, es decir, detectar los procedimientos, recursos y estrategias que se ponen en juego en el proceso de la estimación métrica longitudinal.

Considerando que el objetivo era analizar las características que presenta la estimación métrica longitudinal durante la fase de formación obligatoria en primaria y dado que el interés radicaba en poder, aunque fuese a largo plazo, enfocar un proceso didáctico de aprendizaje, la muestra seleccionada fue de alumnos de primaria. Los criterios de selección se aplicaron tanto sobre los alumnos como sobre los centros:

- Muestra: 20 alumnos de quinto de primaria de cuatro poblaciones de Girona (Catalunya) con un nivel académico alto, especialmente en matemáticas y con una buena capacidad expresiva. La selección era a cargo de los centros.
- Centros: poblaciones de entorno urbano-rural con satisfactorios resultados en las evaluaciones externas y con triple línea para permitir una mejor selección del alumnado a la vez que mayor variabilidad de incidencia de maestros.

## Test FIEM (Factores Implícitos en la Estimación Métrica)

### Objetivos

La investigación pretendía, globalmente, unos objetivos generales que se obtenían a partir de distintos objetivos específicos que desarrollaba cada uno de los ítems. Se resumen en:

- Comparar y contrastar la eficacia de la estimación cuantitativa en contextos discretos (ítem 1) versus la estimación métrica longitudinal (ítems 2, 3, 4, 5).
- Analizar y contrastar la eficacia y precisión obtenida con el uso de unidades objetales versus la precisión conseguida con las unidades del sistema métrico decimal (ítems 3, 5).
- Contrastar el nivel de precisión estimativa métrica longitudinal en contextos constituidos por unidades discretas (ítem 2) versus la precisión en longitudes continuas (ítem 3).
- Detectar si las variables posición en el espacio (ítems 1, 2, 3 y 5), forma (ítem 5) son factores que inciden y modifican la capacidad y precisión estimativa métrica longitudinal.
- Determinar la incidencia de las diferentes tipologías unitarias objetales y antropométricas que se utilizan y el grado de incidencia que tienen en la precisión estimativa (ítem 2, 3, 4, 5).
- Detectar el nivel de interiorización del metro, su eficacia y precisión (ítem 2).
- Detectar y constatar las estructuras mentales que se aplican y entran en juego en el acto estimativo (ítems 1, 2, 3, 4 y 5).

### Los ítems

La investigación se efectuó a partir de cinco ítems en los que cada uno planteaba a la vez, cuatro o cinco pruebas estimativas paralelas. El primer ítem, cuyo objetivo se centraba en la estimación cuantitativa, pide estimar la cantidad de elementos que integran un conjunto de objetos; los restantes cuatro ítems son de estimación métrica longitudinal y en ellos debe de estimarse la longitud total de cada uno de los objetos que se presentan. En cada ítem, se efectuaban distintas pruebas presentando distintos objetos o formas pero siempre formulando la misma pregunta:

*Ítem 1: ¿Cuántos objetos hay?*

- Presentación de 37 clavos de 2 cm alineados uno detrás de otro.
- Montón o mazo de 32 naipes sin que estén separados individualmente.
- Grupo de 36 lápices de colores, distribuidos irregularmente sobre una mesa.
- Visualización del volumen global de 16 naranjas dentro de una bolsa opaca (al mismo tiempo se mostraba una naranja del mismo tamaño que las de la bolsa).

Cada situación estimativa se presentó durante veinte segundos para evitar el conteo uno a uno. Los clavos se presentaron pegados sobre un listón, mayor que la longitud total de los clavos (120 cm). Los lápices se mostraron como un solo

paquete. Los naipes se separaron, delante suyo, del total del juego completo. La bolsa de plástico era una cualquiera de uso comercial.

*Ítem 2: ¿Cuánto miden en total de largo?*

- Alineación de 13 naranjas de 8 cm de diámetro.
- Alineación de 6 lápices de colores de 17 cm / uno.
- Alineación de 8 libros de 12,5 cm / uno.

En ninguna prueba se indica la unidad en qué deben darse los resultados. La alineación es, siempre, aproximadamente, de un metro y se construye directamente delante de los sujetos sobre una superficie lisa y uniforme (2,5 x 0,8 m) para evitar la presencia de referencias de unidades objetales. Cada alineación presentada durante un minuto.

*Ítem 3: ¿Cuántos/cuántas ..... mide ? ¿Y en m, dm o cm?*

- Valorar la longitud de una cuerda de 120 cm en posición horizontal con naranjas y SM.
- Valorar la longitud de una cuerda de 120 cm en posición vertical con lápices y SM.
- Valorar de la longitud de una cuerda de 120 cm en posición inclinada con libros y SM.

Las cuerdas se presentan durante un minuto, son de igual longitud pero distintas en grosor y color.

*Ítem 4: ¿Cuál de entre las distintas formas que tienes delante es el que tiene mayor longitud o cual la menor o cuáles crees que pueden ser iguales si es que hay algunas que sean iguales?*

Estimar la longitud de cuatro formas distintas de la misma medida (120 cm) y material (alambre): una espiral, una circunferencia, una línea sinoidal, una línea poligonal, un segmento rectilíneo y un segmento presentado en tres trozos. Se muestran conjuntamente y se mantienen presentes durante toda la prueba. No se especifica qué unidades deben utilizar.

*Ítem 5: ¿Qué distancia hay en línea recta, desde el extremo superior del primer palo al segundo?*

Valorar la distancia entre los extremos superiores de dos listones verticales de diferente altura (200 cm el primero y 120 cm el segundo) separados en su base por 183,5 cm para que la distancia entre los extremos superiores de los dos palos sea de 2 m. No se especifica qué unidades deben utilizar. Se deja presente durante toda la prueba.

## **Aplicación**

Las pruebas se aplicaron colectivamente en el aula y sin límite de tiempo para resolver o explicar cada una de las pruebas o sea que no se pasaba a la siguiente mientras hubiera alguien que no hubiera anotado su estimación anterior, aunque sí había control de tiempo en el momento de presentar la prueba o test. Cada alumno anotaba, por escrito, las respuestas en una ficha preparada para cada una de las pruebas que integraba dos espacios diferenciados: uno para anotar los valores métricos de la estimación efectuada y otro donde debía explicar el qué y el cómo lo habían hecho para dar la medida estimada.

Se procuró que potenciaran procedimientos de resolución métrica y no de contaje, de manera que las distintas pruebas integradas en cada ítem se planteaban de forma similar aunque se variaban utilizando objetos distintos o bien modificando la forma de presentación. Los sujetos no se podían mover de donde estaban.

## **Análisis de los valores cuantitativos**

La valoración se efectuó a partir de la media de los errores estimativos cometidos o diferencia entre el valor estimado y el valor real. El análisis se plantea en una doble direccionalidad:

- Las interdependencias o relaciones entre contextos conceptuales distintos. Como más significativas cabe destacar las relaciones siguientes: (a.1) estimación numérica versus estimación métrica; (a.2) longitudes versus distancias y (a.3) unidades objetales versus unidades sistémicas.
- El desarrollo de factores específicos donde destacan: (b.1) interiorización del metro; (b.2) dificultad de traducción unitaria; (b.3) forma y estimación y, (b.4) estimación y género.

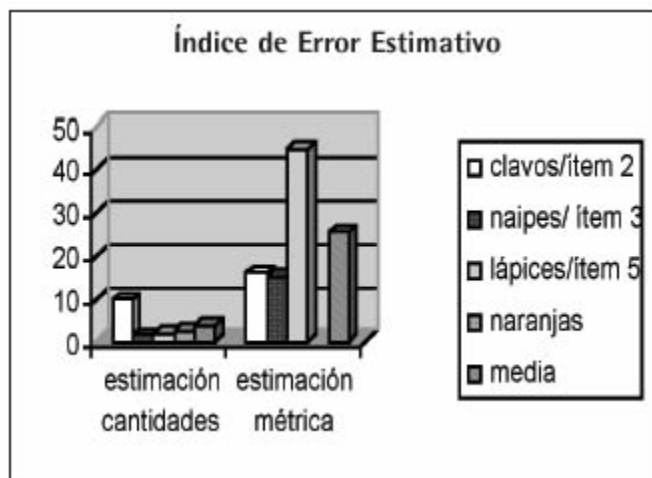
## **Relaciones entre contextos conceptuales**

### **Estimación numérica versus estimación métrica**

"La capacidad de estimación métrica está menos desarrollada y es menos precisa que la numérica."

El contraste del índice de error estimativo entre el ítem 1: estimación de cantidades discretas (error medio de 3,9 objetos)

y el error medio (25,47 cm) del conjunto de las pruebas de estimación métrica longitudinal (ítem 2: 16,3 cm; ítem 3: 15,1 cm y ítem 5: 45 cm). La correlación entre dicha variables resulta significativa con una confianza del 90% y evidencia un relativo mejor desarrollo de la estimación numérica o de cantidades por encima de la métrica.



### Longitud versus distancia

"Las estimaciones longitudinales son más precisas ante una globalidad de unidades discretas visualmente presentes y en la estimación de longitudes de objetos materiales que estén presentes."

Entre los resultados del ítem 2 (error medio: 16,3 cm) en donde las unidades discretizables (alineación de naranjas, lápices y libros) eran visualmente presentes y el ítem 3 (error medio 15,1 cm) donde era necesario visualizarlas mentalmente (cuerdas de 120 cm que debían medirse con naranjas, lápices y libros y también en SM), no existe una diferencia correlacional significativa, si bien en ambos casos el objeto a medir está, siempre, presente físicamente. En el ítem 5 en el que es necesario medir la distancia entre dos puntos situados en el espacio y por lo tanto no existe la presencia física del objeto material, se obtienen, al contrario, unos resultados con índice de error muy superior (45 cm) y correlacionalmente significativos respecto a cuando la medida se centra en longitudes de objetos.

Probablemente ello es debido a que en los ítems 2 y 3 es posible efectuar la sobreposición unitaria con continuidad, es decir, que se pueden tomar referentes de inicio y finalización para cada unidad utilizada, mientras que en la estimación de distancia (ítem 5) poder aplicar referentes resulta mucho más complejo y difícil.

### Unidades objetales versus unidades sistémicas

"La precisión estimativa efectuada con unidades objetales es más efectiva que con unidades del sistema métrico."

Cuando la estimación debía de efectuarse con dos tipos de unidades (ítems 3 y 5), la estimación efectuada con unidades objetales es más precisa que la realizada con unidades del SM. En el ítem 3 (tres cuerdas de 120 cm una de ellas en posición horizontal, otra vertical y otra inclinada) en donde la estimación debe de realizarse con naranjas medianas, lápices y libros, la precisión obtenida con dichas unidades objetales presenta un error medio de 7,76 cm (0,4 con naranjas, 0,5 cm con diccionarios y 22,8 cm con lápices) frente a los 15,1 cm que se produce con las unidades del sistema métrico. El elevado error producido con los lápices, valor que hace incrementar el global al 7,76, probablemente, es debido a que cada sujeto lo valora a partir del propio lápiz y debido a que son menores por el uso, necesitan aumentar la cantidad de lápices con el consiguiente incremento de estimación numérica respecto al que correspondería si los lápices fueran nuevos; y posiblemente influye además, el hecho de que la estimación con lápices corresponde a la cuerda presentada en posición vertical.

## Estimación con unidades objetales y con SM (Ítem 3)

UNIDAD OBJETAL			UNIDAD SIM			
Error medio	Error diferencial	Estim media	Longitud a estimar (120 cm) con	Estim media	Error diferencial	Error medio
7,76	0,4	120,4	Naranjas	141,7	21,7	
	22,8	142,8	Lápices	98,7	21,3	15,1
	0,5	121,5	Libros (grosor diccionarios)	117,8	2,2	

Si nos centramos en la estimación de la distancia del ítem 5 (2 m) en el que no se especifica ningún tipo de unidad a usar, aparece el uso de una gran variedad de recursos. Algunos, probablemente, debidos a la influencia de las pruebas anteriores (naranjas, lápices, libros), otros por haberse usado en el aula para el conteo numérico (habas) o por ser unidades presentes (ventana de la clase, fluorescente de la clase) y otros por el conocimiento o dominio que se tenía de ellos (camión de juguete (89,11cm), persona mediana (150 cm), moto de trial (190 cm)). La estimación media del conjunto de las unidades objetales es de 182,5 cm con una desviación media de 13,5 cm respecto a la media real, mientras que la de la estimación realizada con unidades del SM es de 133,8 cm con una desviación de 66,2 cm, error, por lo tanto, muy superior al obtenido con las unidades objetales y que correlacionalmente resulta significativo con un 60% de fiabilidad.

En todas las pruebas en las que se indicó únicamente que debía darse la medida sin precisar ninguna concreción unitaria, las estimaciones fueron efectuadas, mayoritariamente, con unidades del SM; así en el ítem 2, por ejemplo, el 100% utiliza unidades del SM y en ningún caso aparecen unidades objetales y, en el ítem 5 cuando se usan unidades objetales casi siempre se acompañan también con el valor dado en el sistema métrico; hecho que evidencia que la medida tiene una connotación sociológica muy fuerte como capacidad de dominio y utilización del sistema métrico frente a cualquier otro recurso metrológico.

### Desarrollo de factores específicos

#### Interiorización del metro

"La interiorización del metro no está suficientemente integrada y aunque obtiene mayor precisión que cualquier otra unidad su capacidad de precisión parece que depende del conocimiento y significatividad de las unidades objetales con las que se interrelaciona."

En las tres pruebas del ítem 2 en las que se trata de estimar una alineación de unidades discretizables (naranjas, lápices y libros) de una longitud aproximada de un metro, casi la cuarta parte de los sujetos la valoran como de un metro y si se acepta un margen de error de más o menos 5 cm, se pasa al 45%, y al 50% cuando se acepta un error de 10 cm y al 75% si el margen aceptado es de 20 cm. La visión interiorizada del metro está integrada, de manera mayoritaria, entre una longitud de 80 a 120 cm.

Cabe destacar que en este ítem 2 es donde se obtiene los mayores niveles de precisión, evidenciándose con ello la importancia del metro en la estructuración y interiorización de las representaciones mentales de las unidades de medida.

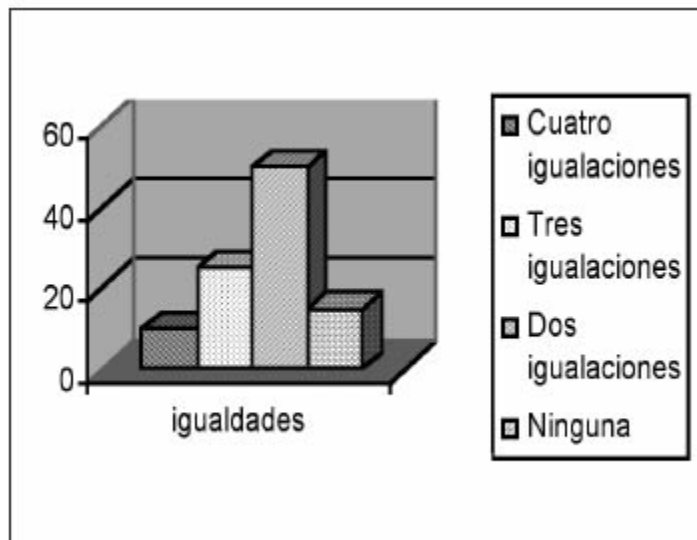
#### Dificultad de traducción y significatividad unitaria

"Existe muy poca coherencia entre la medida dada con unidades objetales y la dada en el SM."

La interiorización y dominio de las medidas de los objetos del entorno están muy poco asimiladas como se evidencia, por ejemplo, en el ítem 3 donde al estimar la medida de una cuerda de 120 cm, tanto con objetos (naranjas, lápices y libros) como en unidades del SM, Silvia da, respectivamente, como medidas: 18 naranjas y 15 cm; 15 lápices y 13 cm; y 21 libros y 20 cm; valores que demuestran que no posee el concepto de centímetro ni de la medida de los objetos o la relación existente entre ambos aspectos ya que como se puede apreciar utiliza una cierta identificación de objeto-centímetro de manera que un centímetro es un equivalente léxico que toma una significación equivalente a un objeto, aunque siempre curiosamente con una ligera reducción. También en el mismo ítem se constata esta misma desconexión por las valoraciones contradictorias que también efectúa Ester, la cual hace equivaler 2 m con 10 naranjas; o Eva que iguala la estimación de 13 naranjas con 8 metros por lo que una naranja mide más de sesenta centímetros; o iguala 28 lápices con 82 centímetros, lo que significaría que un lápiz no llegaría a 3 cm. También en el ítem 5 aparecen este mismo tipo de dificultades de traducción unitaria donde de nuevo Eva estima la distancia entre los dos puntos como equivalente a la altura de una persona mediana de metro y medio y posteriormente iguala dicha distancia como de 3 m; o cuando Álex valora la distancia como equivalente a una moto de trial y después lo valora como de un 1 m; o Raúl que considera la

distancia como de 50 naranjas, por lo que las naranjas serían de cuatro centímetros.

La poca interrelación lógica del valor significativo de la medida es indicativa y demuestra la concepción existente de que la medida corresponde al hecho de dar un valor numérico a la magnitud de una realidad. El acto de la numeralización o aritmetización ha tomado tanta fuerza y importancia que satisface por ella misma, sin necesidad de integrarlo en la realidad que se mide ni, mínimamente, interrelacionarlo con la propia unidad utilizada.



### Forma y estimación

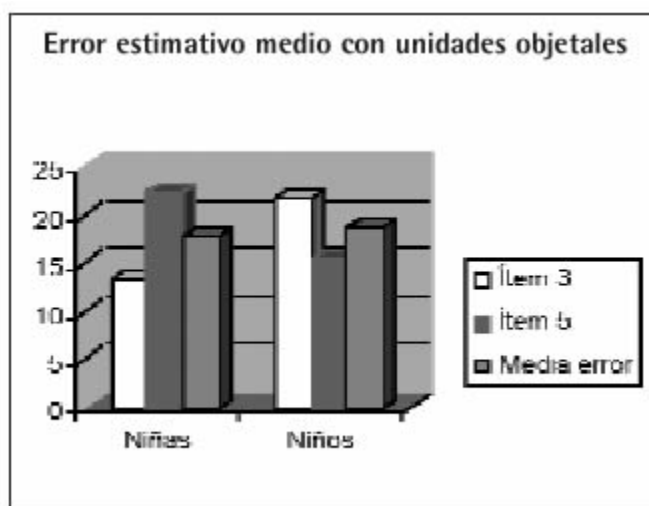
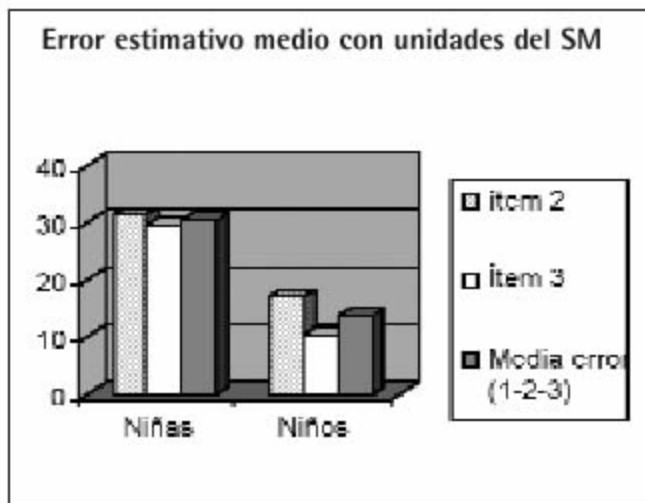
"La forma es un factor generador de la dificultad estimativa y las formas curvilíneas y los contextos aditivos múltiples, dificultan y reducen la percepción longitudinal de los objetos."

Estimar que las cuatro formas del ítem 4 tenían la misma medida (120 cm) fue identificado, únicamente, por un 10% de la muestra y solo una cuarta parte lo hacen con tres de ellas. Las formas más visualizadas como integrantes de alguna situación de igualdad son la línea poligonal y el segmento rectilíneo y, al contrario, la integración-composición de tres segmentos como uno solo y la espiral son las dos formas menos integradas en situaciones de igualdad y en ningún caso existe ninguna igualdad entre ellas dos. Un 65% de la muestra o bien no detectan la igualdad entre las formas o iguala como máximo dos de ellas y, dentro de ellos, un 20% ve el segmento rectilíneo como el de mayor longitud y solo un 5% considera que es la espiral y al contrario, es el segmento cortado a trozos el considerado como el más corto (25%) mientras que la espiral es considerada también la menor por un 5%.

### Estimación y género

"No existe una diferenciación significativa entre géneros en la estimación de cantidades discretas; si bien en las estimaciones métricas longitudinales existe un cierto dominio favorable a los niños cuando se aplican unidades del SM y también en los contextos de distancias mientras que, al contrario, las niñas presentan un relativo y ligero dominio en el uso de unidades objetales."

Al utilizar unidades del sistema métrico, la media del error métrico estimativo (ítems 2 y 3) es más del doble en las niñas (30,45) que en los niños (13,75), manifestándose esta superioridad con una correlación del 60% de fiabilidad cuando los objetos materiales están presentes (ítem 3, 4) y también cuando son las propias unidades discretizables las que están presentes (ítem 2). Esta situación se repite también, aunque con una diferenciación correlacionalmente (40%) no significativa (niñas, 22,5 cm: niños 15,6 cm) en la estimación (ítem 5) de distancias entre puntos del espacio.



Cuando la estimación se efectúa con unidades objetales (ítems 3 y 5), resulta, como en la estimación cuantitativa (ítem 1) que la diferenciación global entre géneros es inexistente (18 niñas; 18,7 niños) si bien ellas en el ítem 3 presentan un error estimativo inferior (13,5 cm) al de los chicos (21,8 cm) pareciendo tener una cierta superioridad en el control y práctica de las unidades o objetos del entorno.

### Análisis cualitativo de las respuestas y justificaciones

El estudio cualitativo de las respuestas dadas a la pregunta "¿Qué has hecho y cómo lo has hecho para dar el resultado de la medida que indicas?" con el objetivo de profundizar en las estructuras mentales que entran en juego al efectuar las estimaciones y con ello, detectar los procedimientos, recursos y estrategias que intervienen y utilizan, centramos buena parte del análisis a partir de las respuestas del ítem 4 por la gran variedad de sus respuestas en contraposición con las dadas en los restantes ítems, mucho menos explícitas.

Las explicaciones dadas permiten detectar las tipologías de explicitación del razonamiento justificativo, en tres grandes bloques: descriptivo, comparativo y operativo, aunque no son excluyentes uno de otro sino que a menudo coexisten conjuntamente:

- *Descriptivo*: las sensaciones visuales son determinantes en el razonamiento y justificación de su acción. No se detallan las estrategias que aplican.
  - "Observarlas con mucha atención." (Sílvia)
  - "La que es recta parece la más larga porqué está estirada, la de forma de muelle porqué está redonda, la forma irregular porqué tiene muchas formas y las que quedan son muy pequeñas." (Eva)
- *Comparativo*: la ordenación y la igualación son el fundamento del razonamiento. En ellas no se detallan ni procedimientos ni estrategias resolutorias.
  - "He pensado cuales eran iguales." (Anna)
  - "He pensado que el B era igual que el C." (Marc)
  - "Ha sido difícil, pero lo he comparado entre ellas." (Pere)

- "He visto que el muelle era redondo y con 4 vueltas y la recta me ha parecido que eran iguales." (Joan)
- *Operativo*: los procedimientos y estrategias aplicadas se explican a través de la acción efectuada, la cual en la mayoría de las veces también va acompañada de procesos comparativos.
  - "Me he imaginado que las estiraba y he medido la recta y era igual. También he mirado la B y la he estirado y daba igual." (María)
  - "He mirado como son todos y más o menos como serían todos estirados." (Cati)
  - "Pienso que los estiro todos y veo cómo son." (Sara)
  - "He pensado que si desplegásemos el B, sería como el C." (Pilar)
  - "He estado imaginando que las estiraba o las enganchaba y las situaba alineadas." (Ester)
  - "Si se unen los tres trozos será igual que la línea recta." (Mar)
  - "He mirado y si las estiro pienso que serán iguales." (Pau)
  - "He pensado como si estirara la B y me parece que el B y C son iguales." (Rafael)
  - "En mi imaginación he hecho como si las alargara, pegara, etc. Después lo he comprobado y me ha parecido que todas son iguales." (Àlex)
  - "He pensado colocando recta la línea "quebrada" irregular y después situarla al lado de la línea recta." (Santi)
  - "Lo he mirado y he pensado que si los estiremos uno a uno, cómo serían." (Jordi)
  - "Imaginando como sería enganchada y las he comparado y la recta me ha salido igual." (Xavier)

Por otra parte el análisis interpretativo de las respuestas o razonamientos dados permite detectar, entre otros detalles:

- La importancia del proceso de visualización o de la necesidad de la existencia de un amplio potencial de imágenes y representaciones mentales para mejorar la capacidad estimativa a la vez que su interrelación con las estructuras mentales que se aplican en el razonamiento justificativo.
- La capacitación estimativa es específica y diferente para cada contexto métrico (longitudes rectilíneas, curvilíneas, grandes distancias, ...).
- Alguno de los factores que ayudan el aprendizaje de la capacitación estimativa y de los procesos mentales (procedimientos, recursos y estrategias) que intervienen en el acto estimativo o bien que lo dificultan.
- El tipo de razonamiento no es un factor dependiente de la variable género como lo demuestra el hecho de que los razonamientos operativos son efectuados en un 50% tanto por los chicos como por las chicas.

### Estimación, razonamiento justificativo y visualización

"La mayoría de resoluciones estimativas se fundamentan en un proceso comparativo ligado a las representaciones mentales, el cual necesita, a su vez, de la existencia de imágenes mentales potentes y consolidadas."

Los verbos utilizados para explicar la acción efectuada son un buen indicador del proceso generador de la estrategia estimativa. Las respuestas, dadas por ejemplo en el ítem 4, ponen en evidencia tres grandes grupos de tipologías de visualización o acción realizada mentalmente a la vez que actúan como tres estadios evolutivos de la concienciación del propio proceso estimativo:

- *Perceptual*. La acción se define a través de acciones básicamente sensoriales. Los verbos ver, mirar y observar son las formas y expresiones más utilizadas.
- *Mental*. Se actúa realizando procesos de representaciones mentales aunque no se concretan las acciones específicas realizadas. Resultan verbos característicos: *pensar, imaginar, hacer ver como si...*
- *Operativa*. La acción se fundamenta en la descripción específica y concreta de las acciones efectuadas: *mido, comparo, estiro*, etc.

La mayoría (65%) efectúa procesos de representación mental pero si además tenemos en cuenta que también los verbos operativos expresan por sí mismos aspectos de representación mental; esto nos da un total de un 85% y, evidentemente, ello significa la necesidad de la manipulación operativa de imágenes.

Aunque los verbos perceptuales desde una perspectiva psicofisiológica también representan acciones mentales, el significado utilizado aquí por parte de la mayoría de chicos y chicas tiene, sobre todo, una connotación de base puramente sensorial visual, ya que se refieren a la visualización material de objetos concretos tal como ellos mismos precisan: "ver quiere decir... eso ... que lo veo con los ojos", dice Joan; "observar quiero decir que lo veo...", comenta Sílvia.



				Totales	
	Acción	f	%	f	%
Perceptual	Ver	1	5		
	Mirar	6	30		
	Observar	1	5		
Mental	Pensar	8	40		
	Imaginar / Hacer ver	5	25		
Operativa	Comparar	3	15		
	Medir	1	5		

El elevado porcentaje (40%) de razonamiento perceptual demuestra la gran importancia del factor sensorial como determinante del desarrollo de la estimación, deduciéndose de ello, por lo tanto, de la necesidad de poseer unas potentes representaciones mentales a las que poder acudir para posibilitar la estimación y, a la vez, parece demostrar que la posesión de imágenes, proporciona los recursos capaces de crear los procedimientos y las estrategias estimativas. El uso de imágenes para la estimación métrica es una situación comparativa mucho más compleja que la pura comparación directa ejecutada sobre objetos, si bien cabe destacar que dicho acto comparativo, inherente a la medida, continua presente y sigue siendo un factor imprescindible para la estimación.

### Estimación métrica curvilínea y rectilínea multidireccional

"Las situaciones estimativas de alineación rectilínea multidireccional (líneas poligonales, segmento fragmentado, etc.) o de tipo curvilíneo (onduladas, circunferencias, espirales), necesita de procedimientos y estrategias diferenciadas de la de las situaciones rectilíneas y en donde la rectificación, parece ser, el procedimiento más generalizado y efectivo."

Expresiones como "es necesario observarlas con mucha atención...", "ha sido difícil..." efectuadas y valorada por parte del alumnado como razonamientos a la estimación métrica curvilínea son claros indicadores de la existencia de una dificultad superior a la existente en la estimación rectilínea; valoraciones que también se manifiestan ante la estimación de varios segmentos rectilíneos integrados como parte de un único segmento. Resulta evidente, por lo tanto, que el dominio de cada una de ellas sigue un proceso distinto y diferenciable y que su adquisición y aprendizaje deberá seguir procesos y propuestas didácticas distintas.

Ante esta dificultad, es bastante sorprendente, no obstante, que exista una gran proporción de sujetos que detallan el uso de procedimientos rectificativos (60%) como estrategia resolutoria de la estimación curvilínea, procedimiento que por sí mismo y debido a la necesidad del dominio de la movilidad de imágenes, comporta una dificultad añadida a la de la propia estimación, de manera que dicho dominio es esencial para el desarrollo de la estimación métrica curvilínea.

### Procedimientos, recursos y estrategias en la estimación métrica longitudinal

"Las estrategias y procedimientos que se aplican en la estimación métrica son, al justificar la acción realizada, más importantes que los recursos que en ningún caso son citados."

En ninguna de las respuestas dadas por los alumnos indican con qué miden o sea no concretan ninguna unidad. Sí manifiestan, no obstante, cómo lo hacen mentalmente para llegar a la estimación de la medida o las transformaciones que

realizan mentalmente y las acciones concretas que físicamente imaginan poder materializar. Parecería ser que la dificultad resolutoria hace centrar la atención en las estrategias y los procedimientos a aplicar para conseguir solucionar la problemática y hace perder importancia a la unidad métrica.

Si la valoración se realiza desde una perspectiva más amplia que integre la globalidad de los ítems y no tanto como análisis de las respuestas específicas de cada prueba, se detectan otros parámetros que ayudan a complementar las conclusiones anteriores abriendo nuevos interrogantes de reflexión. Entre los más destacables -en esta investigación- deben citarse:

- *Las unidades objetales son más utilizadas y útiles que las unidades antropométricas.* Cuando explican cómo lo hacen para medir o bien cuando en las pruebas se les pide el uso específico de alguna unidad alternativa, los recursos utilizados son, casi siempre, objetos concretos y en muy pocas ocasiones unidades antropométricas.
- *Las unidades antropométricas son utilizadas muy poco y están muy poco interiorizadas.* Aunque las unidades antropométricas son poco utilizadas y de forma espontánea únicamente la usan en tres ocasiones y en un único ítem, el 5: en una ocasión se utilizan los dedos: "[...] con los libros he tomado tres dedos míos y he ido midiendo", dice Ester y en los otros dos la propia altura personal: "[...] Me imagino que estoy de pie y el cordel y yo le pongo la medida]", comenta Jordi; "[...] He pensado donde me llegaría el cordel y después cuantas unidades pueden haber"; "[...] He pensado que yo mido 1,50 m. y más o menos de una punta a la otra hay esta distancia", dice Rafa.
- *Los procedimientos y estrategias utilizadas dependen de un proceso de maduración y evolución de la capacidad métrica y de la representación mental de la unidad.* Los razonamientos expuestos en todos los ítems, permiten clasificar los procedimientos y estrategias que se aplican, en dos grandes bloques:
  - *Aplicación de procesos de medida objetiva.*
  - *Uso de la impresión subjetiva.*
- La base resolutoria se encuentra, casi siempre, en la experiencia vital, manifestada en algunos casos a través de aprendizajes o situaciones donde la experiencia perceptual global o de integración perceptual es el factor fundamental ("cuando voy a comprar..."; "yo mido...", "he visto que el fluorescente cabría bien..."); y en otras, esta experiencia es básicamente fruto de estrategias operatorias adquiridas, de tal forma que siempre se efectúa alguna acción con los objetos o las imágenes "fui añadiendo", "coloco uno detrás de otro", "mido uno y cuento cuantos hay", "lo estiro...".

En ambas situaciones la medida se realiza como una acción objetiva y no dependiente del propio sujeto y en estos dos enfoques, aparecen procedimientos objetivos de medición que demuestran tener una conceptualización de la medida entendida como comparación respecto a un valor unitario, no obstante, la estructura estimativa que utilizan es muy diferente.

- *Integración perceptual:*

Aquellas justificaciones que se fundamentan, básicamente, a partir de una percepción deductiva y en donde la experiencia sensorial y los procesos deductivos tienen una influencia esencial en la estimación.

- "Cuando voy a comprar las naranjas las cuento y más o menos hay las mismas... En un juego de cartas hay 48 naipes y has añadido más, has colocado la mitad." (Mari)
- "He pensado que yo medía 1,50 m. y más o menos de una punta a la otra hay esta distancia." (Rafa)
- "Con una moto de trial. Haciendo trial lo imagino." (Àlex)
- "Lo he mirado de cerca y he pensado que hacía 1 metro y después he visto el fluorescente y he visto que cabría bien." (Santi)
- "Los miro, pienso cuanto hace una mesa, que ya sé cuanto hace, y si es menos resto, sino sumo..." (Xavi)
- *Estrategias operativas:*

Los razonamientos aplicados se estructuran como una operatividad mental diversa.

- "He mirado más o menos cuantos había y cuanto media uno y después he pensado entre todos." (Cati)
- "He mirado cuantos hay en un trozo, luego lo he multiplicado por cuantos trozos hacía, más o menos, todo lo otro." (Sara)
- "He mirado cuanto hace más o menos un libro y he mirado con la distancia cuántos podría colocar ahí." (Sara)
- "He mirado cada cosa que me habían colocado y he dado la medida que a mí me parecía que median las cosas que iban mostrando." (Anna)
- "Con naranjas, libros, etc. lo he hecho mirando lo qué ocupa una naranja y imaginándome la cuerda con las naranjas encima y contándolas. Con el sistema métrico decimal, como que yo sé más o menos cuanto hace un metro, pues miraba el metro y si era más alto como que también sé como mide un centímetro, los iba añadiendo." (Pilar)
- "Lo he hecho imaginando que las estiraba o enganchaba y las colocaba alineadas y luego me lo miraba." (Pilar)
- "Para saber el número de clavos miré cuanto hacía el listón y tomé casi la mitad." (Ester)
- "Los he contado, después me he fijado cuanto media cada unidad y después lo he multiplicado." (Rafa)
- "Me imagino que cada naranja, hace por ejemplo 8 cm luego voy sumando, y así voy haciéndolo." (Jordi)
- "He hecho ver que tenía una regla y he contado las reglas que necesitaría." (Ester)
- En otros casos la resolución es fruto de una impresión subjetiva, genérica y inespecífica, donde el propio sujeto resulta ser el elemento transcendental de esta valoración. Son justificaciones subjetivas que se fundamentan en un proceso de una cierta intuición inespecífica, global y en la que no se definen o dejan entrecruzarse, en ningún

momento, el proceso de comparación ni la aplicación del valor unitario como determinantes de su estrategia estimativa.

- "He supuesto que mediría "algo grande" como por ejemplo 42, 30, etc." (Sílvia)
  - "He mirado 7 y he pensado que puede medir así." (Mar)
  - "Mirando si hace o no hace a "ojo de cubero" y midiéndolo con la vista." (Raúl)
  - "Pensando más o menos cuando debe medir y poner el resultado." (Pau)
  - "Haciendo una estimación y teniendo mucha suerte." (Santi)
  - "He mirado y después he puesto el resultado porque se me pasó por la cabeza." (Mar)
  - "Como me ha parecido porque es muy difícil medir cosas a simple vista." (Santi)
  - "Me lo he pensado y he estado mirando. He pensado mucho, mucho y al final lo he hecho." (Xavi)
- La rectificación aparece en una doble significación, por un lado como desplegamiento y por el otro como linealización aditiva. Las situaciones curvilíneas y líneas poligonales son manipuladas intentando "alargarlas", "desplegarlas", "estirarlas", "ponerlas rectas"; es decir, un proceso de rectificación por desplegamiento; mientras que en las situaciones de segmentos disjuntos necesitan de "engancharlas", "pegarlas" o "unirlas" para convertirlas en una de sola, o sea se utiliza un procedimiento de linealización aditiva.

## Síntesis de conclusiones

Entre otros factores a tener en cuenta respecto a la estructura constitutiva de la estimación métrica longitudinal, deducida de los análisis cuantitativos y cualitativos, permite destacar las siguientes conclusiones:

- La formación académica no potencia la adquisición de capacidades de estimación métrica.
- La estimación métrica presenta un proceso de adquisición y grado de dominio distinto que la estimación numérica y de cantidades.
- El género no es una variable determinante del nivel y capacidad estimativa métrica ni tampoco de la estructura del razonamiento justificativo.
- La forma y la posición espacial influyen en el grado de precisión de la estimación.
- La estimación de distancias genera más dificultad estimativa que la estimación de longitudes dimensionales de un objeto y necesita de procedimientos recursos y estrategias distintas a la de la longitud de objetos materiales.
- El uso de unidades objetales da más precisión estimativa que la efectuada con unidades del sistema métrico.
- La capacidad estimativa se adquiere fundamentalmente por la práctica y la incidencia de la formación académica resulta ser poco significativa para dicha adquisición.
- Las estrategias operativas más utilizadas son las aditivas y las proporcionales y en especial el uso conjunto de las dos.
- La capacidad estimativa necesita del dominio de la transitividad.
- La explicitación del razonamiento justificativo se efectúa, normalmente, de forma global y sintéticamente sin que exista una clara concienciación de los procedimientos, recursos y estrategias aplicadas ni de las estrategias utilizadas.
- Los razonamientos justificativos de tipo perceptual, comparativo y operativo y el uso que se hace de ellos suelen ser excelentes indicadores del proceso evolutivo del dominio de la estimación y del grado de concienciación que se tiene de ella.
- La rectificación necesita de un evolucionado desarrollo de la capacidad de manipular imágenes mentales y de la existencia de un gran potencial de representaciones mentales.
- El aprendizaje de la estimación métrica rectilínea se produce de forma diferente que la curvilínea, necesitándose, consecuentemente, de una ingeniería didáctica específica.

## Prospectiva futura

La habilidad estimativa suele manifestarse a través de variantes y grados de dominio muy diversos, constatándose en la vida diaria, como se desprende de los resultados anteriores, que a menudo la estimación métrica es de menor calidad y precisión que la estimación numérica de cantidades discretas y también que la del cálculo. Del mismo modo se constata que existen muchas personas que presentando un nivel aceptable de estimación métrica en el plano bidimensional, no la poseen a nivel tridimensional o que este dominio métrico unidimensional o bi o tridimensional se modifica según las situaciones o contextos en las que deba aplicarse la estimación, o sea, que ciertas personas que presentan una gran precisión en la estimación rectilínea sobre objetos materiales (paredes, listones, etc.), presentan mucha dificultad al hacerlo entre distancias de puntos o ante longitudes curvilíneas.

La realidad conjuntamente con los resultados y conclusiones obtenidas del presente trabajo nos abren multitud de nuevos interrogantes respecto a las características y el aprendizaje de la estimación métrica como proceso particular de la capacidad estimativa. En base a ello, seguimos investigando la estimación métrica longitudinal si bien, actualmente, centrada en el análisis del contraste entre contextos rectilíneos y curvilíneos y, en las diferenciaciones existentes entre las estimaciones métricas rectilíneas del mesomundo y macromundo. Al mismo tiempo, entre otros interrogantes abiertos nos interesa, también, la interdependencia que pudiera existir entre la estimación métrica longitudinal respecto a la estimación métrica bidimensional y la tridimensional. En todos los casos prestando una especial atención en el grado diferencial de aprendizaje existente entre el alumnado de primaria y las personas adultas que ya han formalizado y finalizado su proceso de formación académica.

## Bibliografía

CALLÍS, J. (1997): "Aprenentatge de la Mesura: la vivenciació com a procediment" en *Les Matemàtiques a Primària en Perspectiva Escolar*, n. 211, pp. 37-47.

CALLÍS, J. (1998): "Dominio y estrategias en la aplicación de medidas longitudinales que tienen y aplican los educadores populares de la comunidad de Segundo Montes (El Salvador) en OLIVERAS, M.L. y otros: *Etnomatemáticas y Educación Matemática. Construyendo un futuro equitativo*. 1er Congreso Mundial Etnomatemático. Sevilla.

CALLÍS, J.; FIOL, M.LI. (2003): "Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal" en CASTRO, E. y otros (eds.): *Investigación en Educación Matemática*. Actas VII Simposio de la SEIEM, Universidad de Granada, Granada.

CALLÍS, J.; FIOL, M.LI (2005): "La xia de Gala. El mundo de las espirales" en *UNO*, n. 40, pp. 11-26.

CAMPBELL, N. (1974): "La medición" en NEWMAN, J.R.: *La forma del pensamiento matemático*. Barcelona. Grijalbo SA.

CARPENTER, T.P.; OSBORNE, A.R. (1976): "Needed Research on Teaching and Learning Measure" en LESCH, R.A. (ed.): *Number and Measurement*. Ohio. RIC/SMEAC Center, Ohio State University. Papers for a Research Workshop.

CHAMORRO, M.C.; BELMONTE, J.M. (1988): *El problema de la medida*. Madrid. Síntesis.

CHAMORRO, M.C. (1995): *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis Doctoral. UNED. Madrid.

CHAMORRO, M. C. (1996): "El currículum de medida en educación primaria y ESO y las capacidades de los escolares" *UNO*, n. 10, pp. 43-62.

DICKSON, L.; BROWN, M.; GIBSON, O. (1984): "Children Learning Mathematics" en *A Teacher's Guide to Recent Research*. Oxford. Holt, Rinehart and Winston.

FIOL, M.L. (1992): *Marco de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de 12 a 14 años: visualización y computación*. Tesis Doctoral. UAB. Barcelona.

FIOL, M.L. (2004): "La forma de las cosas: del sueño a la imaginación" en BLANCO, F. (dir., ed.): *Metodología y aplicación de las Matemáticas en la ESO*. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Superior de Formación de Profesorado, Secretaría General Técnica.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel. Dordrecht.

HIEBERT, J. (1981): "Cognitive development and linear measurement" en *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 197-211.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. (1960): *The Child's Conception of Geometry*. Londres. Routledge and Keagan Paul.

PIAGET, J. (1973): *La geometrie spontanée de l'enfant*. París. P.U.F.

REYS, B. (1984): "Mental Computation Estimation: Past, Present and Future" en *The Elementary School Journal*, Vol. 5.

SEGOVIA, I. y otros (1989): *Estimación en cálculo y medida*. Madrid. Síntesis.

SEGOVIA, I.; RICO, L. (1996): "La estimación en medida" en *UNO*, n. 10, pp. 29-42.

## Dirección de contacto

Josep Callís i Franco  
Universitat de Girona.

Línea de trabajo: didáctica de las matemáticas.

M<sup>a</sup> Lluïsa Fiol Mora  
Universidad Autónoma de Barcelona

Carlos De Luca  
Universidad de Jujuy. Argentina

Carles Callís i Franco  
CEIP Migdia