

El 1736, Leonhard Euler va ser pioner en l'estudi de la teoria de grafs, i des de llavors múltiples autors com Kirchoff, Seymour, etc. continuaren amb l'estudi de la teoria i topologia de grafs. La teoria de xarxes, part de la teoria de grafs, també ha estat estudiada a bastament. D'altra banda, la dinàmica de xarxes fou popularitzada per Dan Gillespie el 1977, en el qual proposà un algorisme que permet la simulació discreta i estocàstica d'un sistema de partícules, el qual és la base del present treball ja que serveix per dur a terme les simulacions de processos sobre les xarxes complexes. El camp de l'anàlisi de la dinàmica de xarxes, de fet, és un camp emergent en l'actualitat; comprèn tant l'anàlisi estadística com la utilització de simulacions per solucionar problemes de la mateixa dinàmica.

Les xarxes complexes (xarxes de característiques complexes, sovint xarxes reals) també són objecte d'estudi de l'actualitat, sobretot a causa de l'aparició de les xarxes socials. S'han convertit en un paradigma per l'estudi de processos dinàmics en sistemes formats per molts components que interactuen entre si de manera molt homogènia.

L'objectiu del present treball de final de carrera és triple:

1. Estudiar i entendre els conceptes bàsics i la topologia de les xarxes complexes, així com diferents tipus de dinàmiques de processos sobre elles.
2. Programar un simulador estocàstic en llenguatge C++ capaç de generar trajectòries mitjançant l'algorisme de Gillespie tant pel model epidèmic com pel model de dinàmica d'enllaços amb reconexió.
3. Utilitzar el simulador tant per estudiar casos que ja han estat tractats en la literatura com casos nous que no han estat tractats i que poden ser assimilables a xarxes reals com, per exemple, xarxes socials.

Les quantitats bàsiques de mesura de les xarxes complexes són la longitud mitjana de camí, el coeficient de clusterització i la distribució de graus. Aquesta darrera és especialment important al llarg del treball. Altres mesures són la robustesa i l'assortativitat, que són representatives de la topologia de la xarxa. Justament, la topologia de les xarxes té un paper importantíssim en l'estudi de la seva dinàmica. Segons el tipus de connexió, uns nodes poden arribar a tenir molta més importància que altres. En el present treball s'estudien cinc tipus de xarxes: la xarxa reticular (en forma de retícula), la xarxa completa (tots els nodes són veïns de tots els altres), la xarxa invariant d'escala (en la qual la seva distribució de graus segueix una llei potencial), la xarxa regular (en la qual tots els nodes tenen el mateix grau) i la xarxa d'Erdős-Rényi (en la qual una aresta existeix o no segons una probabilitat  $p$ ).

Abans de passar a la programació del simulador ha calgut comprendre diferents tipus de dinàmiques de xarxes complexes, començant pel model epidèmic (que prediu l'expansió o eradicació d'una malaltia segons uns certs paràmetres d'infecció i recuperació) i acabant amb el model de dinàmica d'enllaços, que defineix unes certes regles d'actuació per determinar l'evolució de la xarxa i que, a més, contempla la reconexió dels nodes, convertint així la xarxa en xarxa adaptativa (que canvia la seva estructura en el temps). També s'ha estudiat l'algorisme de Gillespie, el qual permet una simulació discreta i estocàstica d'un sistema format per un cert nombre de partícules de tipus diferents; aquest algorisme és la base del present treball, ja que és el que permet dur a terme les simulacions desitjades.

La programació del simulador en llenguatge C++ ha estat necessària com a prèvia per poder dur a terme les diferents simulacions objectiu del present treball. Aquest llenguatge d'alt nivell té totes les prestacions necessàries per implementar les diferents funcions que calen per l'algorisme de Gillespie i la resta de passos necessaris per simular tant el model epidèmic com la dinàmica d'una xarxa adaptativa. En primer lloc, s'ha programat el simulador del model epidèmic, en el qual l'usuari té la potestat d'entrar els valors que desitgi per les variables que descriuran la propagació de l'epidèmia. Un cop assolit l'objectiu i contrastat el seu bon funcionament, s'ha modificat el programa per poder simular xarxes adaptatives, és a dir, xarxes que permeten que els nodes es reconnectin seguint una sèrie de regles preestablertes.

Amb el simulador en marxa, s'han dut a terme tres simulacions diferents:

1. Simulació i estudi del model epidèmic: s'ha comprovat que el resultat de la simulació estocàstica del model epidèmic amb uns paràmetres determinats s'ajustava a l'evolució predita per les equacions diferencials del model, en alguns casos (xarxa regular, xarxa d'Erdős-Rényi) millor que d'altres (xarxa invariant d'escala).
2. Simulació i estudi de la dinàmica d'enllaços sense reconexió: s'ha comprovat que la probabilitat d'èxit dels elements de la xarxa en funció del nombre inicial d'elements d'un cert tipus predita per la literatura existent sobre la dinàmica de les xarxes complexes s'ajustava als resultats obtinguts amb el simulador programat en el present treball. Això s'ha vist fent una regressió lineal i també duent a terme el corresponent contrast estadístic. Els resultats teòrics i pràctics s'han ajustat de la manera esperada.
3. Simulació i estudi de la dinàmica d'enllaços amb reconexió: en aquest cas, com que no existeix literatura publicada sobre el tema, els anàlisis de resultats han estat més qualitius que no pas quantitius. S'han simulat processos sobre dues topologies de xarxa diferents, la xarxa regular i la xarxa invariant d'escala, i s'ha observat que quan s'introdueix a l'atzar

una nova opinió en una població, les diferències en la topologia de les xarxes té un paper més important en l'evolució de l'opinió quan la fracció de nodes d'opinió A inicial és petita. En canvi, quan la fracció inicial augmenta, la importància de la topologia de les xarxes disminueix. Per demostrar que aquest factor és realment determinant per l'evolució de l'opinió en la població, s'ha proposat que la nova opinió s'introdueix selectivament en els nodes de més grau de la xarxa invariant d'escala, i s'ha vist que quan s'introdueix una nova opinió en un àmbit on no existia anteriorment (és a dir, quan una petita fracció de nodes adopta aquesta nova opinió), les opinions d'aquells nodes (persones) que tenen més influència (connexions) són d'una gran importància a l'hora de determinar la seva evolució. Això és especialment rellevant en les xarxes reals heterogènies (assimilables a una xarxa invariant d'escala) com, per exemple, una xarxa social, en la qual alguns nodes (persones) tenen moltes connexions i, per tant, molta influència sobre les opinions dels seus veïns.

El fet de disposar del simulador estocàstic deixa oberta la possibilitat de seguir explorant en el futur: per exemple, es podrien explorar altres topologies de xarxa com ara xarxes socials o es podria predir l'evolució d'una o múltiples opinions durant, per exemple, un període electoral.