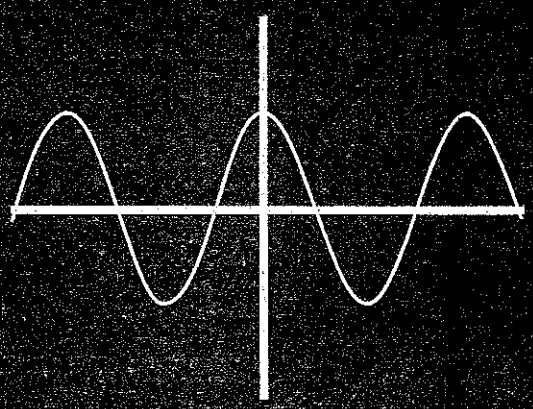
PUBLICACIONS DOCENTS 13



Matemàtiques bàsiques

Francisco Martín
Jordi Vilarrubí

Departament d'Informàtica
i Matemàtica Aplicada

Universitat de Girona

Programa de Millora de la Docència
Vicerectorat de Docència i Estudiants

PUBLICACIONS DOCENTS 13

Matemàtiques bàsiques

Francisco Martín
Jordi Vilarrubí

Departament d'Informàtica
i Matemàtica Aplicada

Universitat de Girona

PROGRAMA DE MILLORA DE LA DOCÈNCIA
Vicerectorat de Docència i Estudiants

Dades CIP recomanades per la Biblioteca de la UdG

51 MAR

Matemàtiques bàsiques / Francisco Martín, Jordi Vilarrubí. –
Girona : Servei de Publicacions de la Universitat de Girona, 2000. –
p. ; cm. – (Publicacions docents (Universitat de Girona) ; 13)
ISBN 84-95138-92-1
I. Vilarrubí, Jordi II. Universitat de Girona. Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada III. Universitat de Girona. Vicerectorat de Docència i Estudiants
I. Programa de Millora de la Docència 2. Matemàtica

51 MAR

Primera edició: febrer 2000
Segona edició: febrer 2000
Edita: Universitat de Girona
Amb la Col·laboració de la Generalitat de Catalunya
© D'aquesta edició: Universitat de Girona
© Francisco Martín, Jordi Vilarrubí

ISBN: 84-95138-92-1
Dipòsit legal: B-46.695-2002

Impressió: Grup Artyplan-Artymprès, S.A.

Universitat de Girona
Servei de Publicacions
Pl. Sant Domènec, 3
17071 Girona
Tel.: 972 41 82 06 Fax: 972 41 80 87
publi@pas.udg.es
www.udg.es/publicacions

Introducció

La Universitat de Girona, en una línia de suport i millora del rendiment acadèmic, ha ofertat assignatures anomenades bàsiques orientades a estudiants amb una base insuficient de coneixements de fonamentació..

Aquest llibre ha estat preparat per ser utilitzat com a material de text de *Matemàtiques bàsiques*, que és una assignatura de lliure elecció de 6 crèdits, dels nous plans d'estudis d'Explotacions Agropecuàries i d'Indústries Agràries i Agroalimentàries de la Universitat de Girona. L'objectiu principal és ajudar als estudiants que, per les seves mancances en matemàtiques no poden seguir el ritme normal de l'assignatura troncal de *Fonaments de matemàtiques* de la seva especialitat. Hem procurat, doncs, dissenyar un material senzill i adequat per a aquest objectiu.

El llibre recull els conceptes bàsics de matemàtiques que l'estudiant hauria de conèixer per iniciar amb unes certes garanties d'èxit els estudis d'àmbit agrícola de les dues titulacions que s'imparteixen a l'Escola Politècnica Superior de la UdG. També inclou gran quantitat d'exercicis, problemes i situacions pràctiques amb l'objectiu que reforci les habilitats matemàtiques de l'estudiant provinent d'educació secundària.

Volem agrair al Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada de la UdG la sev aajuda en la realització d'aquest projecte i, especialment, als professors Carles Barceló i Jordi Poch per la seva implicació al llarg de tot el procés de correcció i millora del text.

Francisco Martín i Jordi Vilarrubí
Girona, gener de 2000

Sumari

1 INTRODUCCIÓ A LA COMBINATÒRIA 9
- 1.1 Introducció 9
- 1.2 Variacions ordinàries 10
- 1.3 Permutacions ordinàries 10
- 1.4 Variacions amb repetició 11
- 1.5 Permutacions amb repetició 12
- 1.6 Combinacions ordinàries 12
- 1.7 Nombres combinatoris 13
- 1.8 Binomi de Newton 15
- 1.9 Exercicis de repàs 17
- 1.10 Solucions 19

2 POTÈNCIES I RADICALS 23
- 2.1 Potències d'exponent natural i enter 23
- 2.2 Radicals 24
  - 2.2.1 Potències d'exponent fraccionari 25
  - 2.2.2 Operacions amb radicals 26
  - 2.2.3 Racionalització de denominadors 30
- 2.3 Exercicis de repàs 31
- 2.4 Solucions 34

3 EQUACIONS I INEQUACIONS 39
- 3.1 Equacions de 2n grau 39
  - 3.1.1 Resolució de l'equació de 2n grau 39
  - 3.1.2 Suma i producte de les arrels 42
- 3.2 Equacions biquadrades 42
- 3.3 Equacions racionals 43
- 3.4 Equacions irracionals 45
- 3.5 Inequacions 47
  - 3.5.1 Inequacions de 1r grau amb una incògnita 47
  - 3.5.2 Inequacions de 1r grau amb dues incògnites 48
  - 3.5.3 Inequacions racionals 50
  - 3.5.4 Inequacions de 2n grau amb una incògnita 51
- 3.6 Sistemes d'equacions 52

3.6.1 Sistemes lineals 53
3.6.2 Sistemes no lineals 58
3.7 Exercicis de repàs 59
3.8 Solucions 64

4 POLINOMIS I FRACCIONS ALGÈBRIQUES 71
4.1 Polinomis. Definició i principals característiques 71
4.2 Operacions amb polinomis 73
4.2.1 Suma de polinomis 73
4.2.2 Resta de polinomis 74
4.2.3 Multiplicació de polinomis 74
4.2.4 Productes notables 76
4.2.5 Divisió de polinomis 76
4.3 Regla de Ruffini 78
4.4 Teorema del Residu 79
4.5 Arrels d'un polinomi. Factorització 80
4.5.1 Arrels d'un polinomi de grau 1 o 2 80
4.5.2 Arrels d'un polinomi de grau més gran que 2 81
4.6 Màxim comú divisor i mínim comú múltiple 83
4.7 Fraccions algèbriques 85
4.7.1 Simplificació de fraccions algèbriques 86
4.7.2 Operacions amb fraccions algèbriques 86
4.8 Exercicis de repàs 89
4.9 Solucions 93

5 FUNCIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES 101
5.1 Funcions exponencials 101
5.1.1 Representació gràfica 101
5.2 Equacions exponencials 104
5.3 Funcions logarítmiques 106
5.3.1 Logaritme d'un nombre 106
5.3.2 La funció logarítmica 108
5.4 Equacions logarítmiques 111
5.5 Exercicis de repàs 113
5.6 Solucions 115

6 TRIGONOMETRIA PLANA 119
6.1 Arcs de circumferència. Angle central 119
6.2 Raons trigonomètriques d'un angle agut 120
6.3 Altres raons trigonomètriques 122
6.4 Relació fonamental 122
6.5 Resolució de triangles rectangles 122
6.6 Circumferència trigonomètrica 125
6.7 Relacions entre les raons d'angles diferents 127
6.7.1 Segon quadrant 127
6.7.2 Tercer quadrant 127

6.7.3 Quart quadrant 128
6.7.4 Angles complementaris 128
6.8 Resolució de triangles qualssevol 129
6.9 Aplicacions de la resolució de triangles 132
6.10 Exercicis 133
6.11 Funcions trigonomètriques 134
6.11.1 La funció sinus 134
6.11.2 La funció cosinus 135
6.11.3 La funció tangent 137
6.12 Funcions circulars inverses 138
6.13 Fórmules d'addició 140
6.13.1 Fórmules d'addició d'angles 140
6.13.2 Raons trigonomètriques de l'angle doble 140
6.13.3 Raons trigonomètriques de l'angle meitat 141
6.14 Transformació de sumes en productes 141
6.15 Identitats i equacions trigonomètriques 142
6.16 Exercicis de repàs 144
6.17 Solucions 145

7 LÍMITS 147
7.1 Límit d'una funció en un punt 147
7.1.1 Límit per la dreta 147
7.1.2 Límit per l'esquerra 148
7.1.3 Límit d'una funció en un punt 149
7.1.4 Límits infinits 149
7.1.5 Propietats dels límits 150
7.1.6 Càlcul del límit d'una funció en un punt 151
7.1.7 Asímptotes verticals 154
7.2 Límits en l'infinit 154
7.2.1 Asímptotes horitzontals 155
7.2.2 Càlcul del límit d'una funció en l'infinit 155
7.2.3 El nombre e. Límits amb el nombre e 160
7.3 Continuïtat 161
7.3.1 Funció contínua 164
7.4 Exercicis de repàs 165
7.5 Solucions 168

8 DERIVADES 171
8.1 Introducció 171
8.1.1 Variació d'una funció en un interval 171
8.1.2 Derivada d'una funció en un punt 172
8.1.3 Interpretació geomètrica 173
8.1.4 Funció derivada 174
8.1.5 Exercicis 175
8.2 Càlcul de derivades 176
8.2.1 Derivades de les operacions elementals 176

8.2.2 Derivades d'algunes funcions elementals 177
8.2.3 Exercicis 179
8.3 Aplicacions de les derivades 181
8.3.1 Creixement i decreixement 181
8.3.2 Màxims i mínims relatius 182
8.3.3 Concavitat. Convexitat. Punts d'inflexió 184
8.3.4 Gràfica d'una funció 187
8.3.5 Problemes d'optimització 191
8.3.6 Exercicis de repàs 193
8.4 Solucions 195

9 PRIMITIVES 199
9.1 Primitives d'una funció 199
9.2 La integral indefinida 200
9.3 Integrals immediates 201
9.4 Integrals quasiimmediates 202
9.5 Les integrals i les operacions amb funcions 207
9.6 Mètodes d'integració 208
9.6.1 Integració per parts 208
9.6.2 Integració per canvi de variable 211
9.6.3 Integració de funcions racionals 212
9.7 Exercicis de repàs 217
9.8 Solucions 220

10 LA CIRCUMFERÈNCIA 225
10.1 Lloc geomètric 225
10.2 Equació de la circumferència 225
10.3 Determinació del centre i del radi 226
10.4 Circumferència que passa per tres punts 228
10.4.1 Posició relativa d'un punt i una circumferència 229
10.5 Posició relativa de rectes i circumferències 229
10.5.1 Intersecció d'una recta i una circumferència 229
10.5.2 Posició relativa de dues circumferències 230
10.6 Rectes i circumferències tangents 232
10.6.1 Circumferència tangent a una recta 232
10.6.2 Recta tangent a una circumferència 233
10.7 Altres còniques 235
10.7.1 L'el·lipse 235
10.7.2 La hipèrbola 235
10.7.3 La paràbola 236
10.8 Exercicis de repàs 237
10.9 Solucions 239

Capítol 1

INTRODUCCIÓ A LA COMBINATÒRIA

1.1 Introducció

Moltes vegades formem conjunts amb un gran nombre d'elements, però pot ser que no ens interessi quins són els elements concrets que formen el conjunt sinó quants són els elements que el formen. La combinatòria precisament el que fa és donar diverses tècniques per comptar els elements que formen un determinat conjunt. Aquestes tècniques seran diferents segons com s'hagin manerat els conjunts. Distingirem diversos casos segons si a l'hora de construir el conjunt importa l'ordre en què agafem els elements, si pot haver-hi elements repetits o no, si agafem tots els elements o només uns quants.

Exemples

1) Si volem manerar nombres de dues xifres amb els nombres de l'1 al 9, no serà el mateix tenir el nombre 21 que el 12, per tant importarà l'ordre en què col·loquem els elements.

2) Donats 4 llibres diferents, de quantes formes els podem ordenar?

   Queda clar que importa l'ordre, però en aquest cas agafem per a cada ordenació tots els elements.

3) Quants grups de 4 alumnes es poden manerar en una classe de 20 alumnes per realitzar un treball de matemàtiques?

   En aquest cas per manerar els grups no importarà l'ordre ja que un cop triats els 4 alumnes tant hi fa l'ordre amb què s'hagin escollit, ja que el resultat serà el mateix.

Estudiem, doncs, aquests diversos casos, cada un dels quals es pot resoldre amb una tècnica diferent.

1.2 Variacions ordinàries

Definició
Donat un conjunt manerat per m elements, anomenem variacions ordinàries o simplement variacions de mida n ($n \leq m$) les col·leccions de n elements diferents que es poden fer amb els m elements del conjunt. Entenem que dues col·leccions són diferents si contenen elements diferents o bé si contenen els mateixos elements però estan en ordre diferent. Cada element del conjunt pot ser utilitzat una sola vegada, és a dir, no pot haver-hi repetició d'elements.

El nombre de variacions dels m elements d'un conjunt de mida n es nota de la manera següent: $V_{m,n}$.
Per calcular-les es pot fer aplicant la fórmula següent:

$$V_{m,n} = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)$$

Exemple

Quants nombres de dues xifres diferents es poden manerar amb les xifres de l'1 al 9 si no es poden repetir les xifres?

És un cas de variacions, ja que per manerar els nombres de dues xifres importa l'ordre amb què els agafem i no es permet repetició de xifres. Per tant tindrem $V_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72$

Exercicis

1) En una cursa d'atletisme de 100 metres llisos corren vuit atletes. Quantes possibilitats diferents hi ha a l'hora de repartir les tres medalles?

2) En Daniel, la Maria, en Jordi i la Montse són quatre candidats a manerar part d'una comissió manerada per una persona que n'ocupi la presidència, una altra la vicepresidència i la tercera la secretaria. Quantes comissions diferents es poden manerar?

1.3 Permutacions ordinàries

Definició
S'anomenen permutacions ordinàries o simplement permutacions dels n elements d'un conjunt totes les diferents ordenacions que es puguin fer amb els elements d'aquest conjunt.
El nombre de permutacions dels n elements d'un conjunt es nota de la manera següent: P_n

Realment les permutacions dels elements d'un conjunt no són res més que un cas particular de variacions en què s'agafen tots els elements del conjunt, és a dir, $n = m$. Per això, per calcular-les ho podem fer de la manera següent:

$$P_n = V_{n,\,n} = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-n+1) = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1 = n!$$

Exemple

Donats 4 llibres diferents, de quantes maneres els podem ordenar?

És un cas de permutacions ja que hem d'agafar els llibres i anar-los canviant d'ordre. Per tant tindrem $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Exercicis

3) De quantes maneres diferents poden seure vuit persones en una filera de vuit cadires?

4) Quantes paraules diferents de quatre lletres poden fer-se amb les lletres de la paraula AMOR? (Nota: no cal que la paraula tingui significat).

1.4 Variacions amb repetició

Definició
S'anomenen variacions amb repetició dels m elements d'un conjunt d'ordre n les col·leccions de n elements diferents o no que es poden fer amb els m elements del conjunt. Entenem que dues col·leccions són diferents si contenen elements diferents o bé, si contenint els mateixos elements, es troben ordenats de manera diferent. Cada element del conjunt pot ser utilitzat més d'una vegada, és a dir, pot haver-hi repetició.

El nombre de variacions amb repetició dels m elements d'un conjunt d'ordre n es nota de la manera següent: $VR_{m,\,n}$
Per calcular-les es pot fer aplicant la fórmula següent:

$$VR_{m,\,n} = m^n$$

Exemple

Quants nombres de quatre xifres es poden manerar amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5 i 6?

En cap moment no es diu que les xifres no puguin ser repetides. Per tant, hem d'acceptar que hi ha repetició. Per tant tindrem $VR_{6,\,4} = 6^4 = 1296$.

Exercicis

5) De quantes maneres podem pintar 5 franges si només tenim 3 colors? (Considereu que dues franges consecutives poden ser del mateix color)

6) Quantes travesses diferents es poden emplenar?

1.5 Permutacions amb repetició

Definició
S'anomenen permutacions amb repetició de n elements entre els quals hi ha a elements iguals entre si, b iguals entre si, ..., h iguals entre si, essent $a + b + \cdots + h = n$, les diverses ordenacions que es poden fer amb aquests elements.

El nombre de permutacions amb repetició es nota de la manera $PR_n^{a,b,\ldots,h}$. Per calcular-les es pot fer aplicant la fórmula següent:

$$PR_n^{a,b,\ldots,h} = \frac{n!}{a!\,b!\ldots h!}$$

on $a + b + \cdots + h = n$

Exemple

Quants grups de banderes diferents poden fer-se amb tres de color vermell, dues de color groc i dues de color blau, considerant-les totes alhora?

En agafar totes les banderes alhora són permutacions, però com que hi ha banderes iguals, són permutacions amb repetició. Tenim, doncs, $PR_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$

Exercicis

7) Considereu un grup de nombres manerat per dos 3, dos 4, tres 5 i un 6. Quantes ordenacions possibles de vuit nombres es poden fer a partir d'aquest grup?

8) Quantes paraules diferents podeu escriure amb les lletres de la paraula MATEMÀTICA? (Recordeu que no cal que tinguin significat en català)

1.6 Combinacions ordinàries

Definició
S'anomenen combinacions ordinàries o simplement combinacions dels m elements d'un conjunt presos de n en n ($n \leq m$) les col·leccions de n elements diferents que es poden fer amb els m elements del conjunt. Entendrem que dues col·leccions són diferents si tenen elements diferents i no si l'ordre és diferent.

En aquest, cas doncs, les col·leccions les creem sense que ens importi l'ordre.

El nombre de combinacions es nota de la manera següent: $C_{m,n}$
Per calcular-les podem aplicar la fórmula següent:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Aquesta fórmula es pot escriure també d'aquesta altra manera:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

ja que $V_{m,n} = m\,(m-1)\ldots(m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Exemple

Quants grups de 4 alumnes podem manerar en una classe de 20 alumnes per realitzar un treball de matemàtiques?

Com que no importa l'ordre amb què s'escullen els 4 alumnes, es tracta de combinacions. Per tant tenim $C_{20,4} = \dfrac{20!}{4!\,16!} = 4845$

Exercicis

9) En una pastisseria es fan dotze tipus diferents de galetes que, per vendre-les, es col·loquen en grups de quatre, de manera que en cada grup de quatre no n'hi ha cap de repetida. Quants grups de quatre galetes poden fer-se?

10) El professorat del departament de matemàtiques disposa d'una col·leccció de trenta exercicis diferents. Quants exàmens diferents pot fer si en cada prova posa cinc exercicis?

1.7 Nombres combinatoris

Definició
Anomenem nombre combinatori d'ordre n una expressió del tipus:

$$\binom{m}{n}$$

amb $n \leq m$, n i m han de ser nombres naturals, n pot ser 0. Aquesta expressió és la mateixa que la que fèiem servir per calcular $C_{m,n}$.
Aquest nombre combinatori es calcula de la manera següent:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Propietats:

1) $\binom{m}{0} = 1$ ja que per conveni $0! = 1$

2) $\binom{m}{1} = m$

3) $\binom{m}{m} = 1$

4) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

5) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$

Exemple

Calculem m en la expressió següent: $\binom{m+1}{m-1} = 1$.

Si desenvolupem el nombre combinatori tenim:

$$\frac{(m+1)!}{(m-1)!\,[m+1-(m-1)]!} = 1$$

Ja que $(m+1)! = (m+1)\,m\,(m-1)!$ es pot escriure l'equació de la manera:

$$\frac{(m+1)\,m\,(m-1)!}{(m-1)!\,(m+1-m+1)!} = 1$$

Fent les operacions del factorial del denominador queda:

$$\frac{(m+1)\,m\,(m-1)!}{(m-1)!\,2!} = 1$$

Dividim numerador i denominador entre $(m-1)!$ i queda:

$$\frac{(m+1)\,m}{2} = 1$$

efectuant tenim l'equació de 2n grau $m^2 + m - 2 = 0$, que té com a solució $m = 1$ i $m = -2$.

Rebutgem el resultat negatiu, ja que els dos termes del nombre combinatori han de ser positius. Per tant, la solució és $m = 1$.

Exemple

Calculem m i n en la expressió següent: $\binom{8}{n-1} = \binom{m+2}{6}$.

Per poder-la resoldre, podem aplicar la quarta propietat dels nombres combinatoris.

Per tant, $8 = m + 2$ i $8 - (n - 1) = 6$.

Resolent aquestes dues equacions surt $m = 6$ i $n = 3$.

Exercicis

11) Trobeu el valor de x i y en les equacions següents:

a) $\binom{18}{2} + \binom{18}{x} = \binom{y}{3}$

b) $\binom{7}{x} - \binom{6}{x} = \binom{6}{4}$

c) $\binom{12}{x-1} + \binom{12}{6} = \binom{13}{x}$

12) Escriviu la següent expressió en manera d'un sol nombre combinatori:

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4} + \binom{8}{5} + \binom{9}{6} + \binom{10}{7}$$

1.8 Binomi de Newton

S'anomena binomi de Newton el desenvolupament de $(a + b)^n$ amb n natural. És a dir $(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \ldots (a + b)$ n vegades.

Per a $n = 1$ tenim $a + b$. Si posem els dos coeficients d'a i b en manera de nombres combinatoris, queda

$$\binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

Per a $n = 2$ tenim $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$. Posant els coeficients en manera de nombres combinatoris, tenim:

$$\binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a\,b + \binom{2}{2} b^2$$

Per a $n = 3$ tenim $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$. Posant també els coeficients en manera de nombre combinatori, queda:

$$\binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2\,b + \binom{3}{2} a\,b^2 + \binom{3}{3} b^3$$

Per tant, en general podem escriure el desenvolupament de la manera següent:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \\ &+ \cdots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}$$

Propietats:

1) El nombre de sumands és $n+1$

2) La suma dels exponents d'a i de b en cada sumand és n.

3) Els coeficients del binomi de Newton són nombres combinatoris de les diferents files de l'anomenat triangle de Pascal-Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Exemple

Per trobar els coeficients del desenvolupament de $(a+b)^5$ podem construir el triangle de Pascal-Tartaglia fins a la sisena fila:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Si calculem aquests coeficients, són 1, 5, 10, 10, 5, 1. Per tant, el desenvolupament quedarà:

$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5$

Exercicis

13) Calculeu el desenvolupament dels binomis següents:

a) $(2\,x^3 + 3\,y\,z)^4$

b) $(\frac{a\,b^3}{3} - \frac{2\,a^2\,b}{5})^5$

c) $(2\sqrt{x} - 3\,y)^3$

14) Calculeu els termes que s'indiquen dels binomis següents:

a) El quart de $(x^2 + y^2)^{12}$

b) L'onzè de $(\sqrt{a} - b^2)^{20}$

c) El tercer de $(\frac{x^2}{2} - \frac{y}{3})^5$

1.9 Exercicis de repàs

1) Amb les xifres del conjunt {1,2,4,6,8,9}, quants nombres de 3 xifres diferents podeu manerar?

2) Amb les xifres del conjunt {1,3,5,7,8}, quants nombres de 3 xifres repetides o no podeu manerar?

3) Disposeu de 6 llums diferents per fer senyals. Cada senyal consta de dos d'aquests llums. Quants senyals diferents podeu fer?

4) Un grup de 15 persones volen manerar un club fent càrrecs rotacionals de president, secretari i tresorer, passant totes les persones per tots els càrrecs. Quantes juntes diferents es poden fer?

5) En una bossa hi ha 4 boles amb els nombres 1, 2, 3 i 4. Es treu una bola, s'observa quin nombre és i, tornant-la, se'n treu una altra. Calculeu el nombre de casos possibles.

6) Amb 15 jugadors, quants equips de 5 es poden fer? (Se suposa que per a cada equip es té en compte l'ordre pel qual s'escullen.)

7) S'escriuen tots els nombres possibles amb 4 xifres diferents del conjunt {1,2,5,7,8}.

a) Quants són més grans que 5000?

b) Quants són més petits que 2000?

8) Calculeu quantes banderes de 4 colors diferents es poden manerar amb els set colors de l'espectre disposant-los només en sentit horitzontal. Quantes es maneraran amb la condició que en totes hi entri el groc?

9) De quantes maneres diferents es poden asseure 4 persones en 4 cadires diferents d'una taula?

10) En una prestatgeria d'una llibreria hi ha 8 llibres. De quantes maneres es poden col·locar?

11) Quantes paraules es poden manerar amb les lletres A, B, E, C, I sense repetir lletres? Quantes comencen per A?

12) Quantes permutacions diferents es poden fer amb les xifres del nombre 1233456? Quantes comencen per 36?

13) Sis llebrers han de perseguir sis llebres. De quantes maneres ho poden fer sabent que el llebrer més petit ha de seguir la llebre més gran?

14) Teniu tres llibres d'un manerat i dos de manerat més petit. De quantes maneres es poden ordenar en una prestatgeria si han d'anar junts els que tenen el mateix manerat?

15) De quantes maneres diferents podeu col·locar 7 llibres de diferent mida de manera que el més gran i el més petit sempre estiguin junts?

16) En una cursa de cavalls s'han de col·locar 3 obstacles de la classe A, 3 de la B i 2 de la C:

    a) Quantes maneres hi ha de col·locar-los?

    b) Quantes d'aquestes tenen els dos obstacles C seguits?

17) Disposeu de 5 llapis iguals de color blanc, 3 iguals de color vermell i 4 iguals de color verd. De quantes maneres diferents els podeu posar l'un al costat de l'altre?

18) Traient 3 cartes d'una baralla espanyola de 48 cartes,

    a) Quants grups de 3 cartes diferents poden sortir?

    b) Quants grups hi ha en què les tres cartes siguin copes?

19) Amb un rellotge, un llibre, una cartera, un bolígraf i un estoig,

    a) Quants regals de tres objectes es poden fer?

    b) Quants contenen el rellotge?

20) En una urna hi ha 4 boles blanques, 6 de negres i 5 de vermelles. Quants grups de 3 boles podeu manerar que continguin dues boles blanques i una de vermella?

21) Quants resultats possibles hi ha a la Loto 6/49 sense comptar el complementari?

22) En un joc de cartes se n'empren 5 de les 48 que té la baralla. Quants jocs diferents se'n podran tenir?

23) Sabent que d'un grup de persones es poden escollir 171 comissions manerades per dues persones, trobeu el nombre de persones d'aquest grup.

24) A un senyor li toquen 13 discs a triar entre un grup de 25. D'aquests 25 n'hi ha 5 que li agraden. Quantes maneres diferents de triar té agafant els 5 preferits?

25) Desenvolupeu les potències següents:

a) $(x^2 - \frac{y}{2})^6$

b) $(2\,x\,y - \frac{x}{2})^4$

c) $(a^2 - \frac{1}{a^2})^6$

d) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^6$

e) $(\sqrt{2} + \sqrt{8}\,x)^8$

26) Trobeu el coeficient de x^5 en el desenvolupament de $(2\,x + \frac{1}{x})^7$

27) Trobeu el terme cinquè del desenvolupament de $(2\,x - \frac{1}{2})^{10}$

28) Trobeu el vuitè terme del desenvolupament de $(x + 3\,y^2)^{11}$

1.10 Solucions

1) 336

2) 24

3) 40320

4) 24

5) 243

6) 14348907

7) 1680

8) 15120

9) 495

10) 142506

11) a) $x = 1$ i $y = 19$
    b) 5
    c) 6

12) $\binom{11}{7}$

13) a) $16\,x^{12} + 96\,x^9\,y\,z + 216\,x^6\,y^2\,z^2 + 216\,x^3\,y^3\,z^3 + 81\,y^4\,z^4$
    b) $\frac{1}{243}\,a^5\,b^{15} - \frac{2}{81}\,a^6\,b^{13} + \frac{8}{135}\,a^7\,b^{11} - \frac{16}{225}\,a^8\,b^9 + \frac{16}{375}\,a^9\,b^7 - \frac{32}{3125}\,a^{10}\,b^5$
    c) $8\sqrt{x^3} - 36\,x\,y + 54\sqrt{x}\,y^2 - 27\,y^3$

14) a) $220\,y^6\,x^{18}$
    b) $184756\,b^{20}\,a^5$
    c) $\frac{5}{36}\,x^6\,y^2$

Exercicis de repàs:

1) 120

2) 125

3) 30

4) 2730

5) 10

6) 360360

7) a) 72
   b) 24

8) 840, 480

9) 24

10) 40320

11) 120, 24

12) 2520

13) 120

14) 12

15) 720

16) a) 560
b) 140

17) 27720

18) a) 17296
b) 220

19) a) 10
b) 6

20) 30

21) 13983816

22) 1712304

23) $n = 19$

24) 125970

25) a) $x^{12} - 3\,x^{10}\,y + \frac{15}{4}\,x^8\,y^2 - \frac{5}{2}\,x^6\,y^3 + \frac{15}{16}\,x^4\,y^4 - \frac{3}{16}\,x^2\,y^5 + \frac{1}{64}\,y^6$

b) $16\,x^4\,y^4 - 16\,x^4\,y^3 + 6\,x^4\,y^2 - x^4\,y + \frac{1}{16}\,x^4$

c) $a^{12} - 6\,a^8 + 15\,a^4 - 20 + 15\,\frac{1}{a^4} - 6\,\frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^{12}}$

d) $x^3 + 6\,\sqrt{x^5}\,\sqrt{y} + 15\,x^2\,y + 20\,\sqrt{x^3}\,\sqrt{y^3} + 15\,x\,y^2 + 6\,\sqrt{x}\,\sqrt{y^5} + y^3$

e) $16 + 256\,x + 1792\,x^2 + 7168\,x^3 + 17920\,x^4 + 28672\,x^5 + 28672\,x^6 + 16384\,x^7 + 4096\,x^8$

26) $448\,x^5$

27) $840\,x^6$

28) $721710\,y^{14}\,x^4$

Capítol 2

POTÈNCIES I RADICALS

2.1 Potències d'exponent natural i enter

Definició
Una potència és una expressió del tipus a^n, on a és un nombre real qualsevol i n és un nombre enter. A a l'anomenem base i a n exponent.
Si $n > 0$ llavors a^n es calcula fent $a \cdot a \cdot a \ldots\ldots \cdot a \cdot a$ n vegades.
Si $n < 0$ llavors $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ on $-n$ és positiu.

Exemples

1) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

2) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

3) $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{4 \cdot 4} = \dfrac{1}{16}$

4) $(-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} = \dfrac{1}{(-5)\,(-5)\,(-5)} = \dfrac{1}{-125}$

Propietats
Les següents propietats es dedueixen immediatament de la definició de potències.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Exemples

1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

2) $\frac{3^5}{3^7} = 3^{-2}$

3) $(4^2)^3 = 4^6$

2.2 Radicals

Definició
Donat un nombre real a i un nombre natural n, es diu que el nombre k és arrel enèsima d'a i s'escriu $\sqrt[n]{a} = k$, si $k^n = a$. El nombre n s'anomena índex del radical, i el nombre a s'anomena radicand.

Exemples

1) $\sqrt{9} = \pm 3$ ja que $3^2 = 9$ i $(-3)^2 = 9$.

2) $\sqrt[3]{125} = 5$ ja que $5^3 = 125$

3) $\sqrt[3]{-27} = -3$ ja que $(-3)^3 = -27$

Propietats

1) Per multiplicar radicals amb el mateix índex, es multipliquen els nombres de dins del radical.
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2) Divisió de radicals amb el mateix índex, es divideixen els nombres de dins del radical.
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3) Potència d'un radical, s'eleva a la potència el radicand.

4) Arrel d'un radical, es multipliquen els índexs.
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exercicis

1) Calculeu sense utilitzar la calculadora:

   a) $\sqrt[3]{1000}$
   b) $\sqrt[4]{1296}$
   c) $\sqrt{\frac{25}{81}}$
   d) $\sqrt[5]{-1}$
   e) $\sqrt[3]{0.001}$

f) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

2) Tot i que a primer cop d'ull no ho sembla, els resultats de les arrels següents són tots racionals. Calculeu-los.

a) $\sqrt{\frac{8}{18}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$

c) $\sqrt{\frac{50}{98}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{81}}$

Definició
Direm que els radicals $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[m]{b}$ són radicals equivalents si representen el mateix nombre real.

Exemple

Comprovem si són equivalents els radicals $\sqrt{4}$ i $\sqrt[4]{16}$.

Calculem $\sqrt{4}$, que dóna +2 i -2, i calculem també $\sqrt[4]{16}$, que també dóna +2 i -2. Per tant, com que els dos radicals donen el mateix, podem dir que són equivalents.

2.2.1 Potències d'exponent fraccionari

Tota potència d'exponent fraccionari representa un radical l'índex del qual és el denominador i el radicand és la base elevada al numerador, $a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = \sqrt[n]{a^m}$

Exemples

1) $5^{\left(\frac{2}{3}\right)} = \sqrt[3]{5^2}$

2) $8^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{8}$

Exercicis

3) Expresseu en forma de potència:

a) $\sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[4]{a^3}$

c) $\sqrt{10}$

d) $\sqrt[5]{(a+2)^2}$

e) $\sqrt[6]{b^5}$

f) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

4) Expresseu en forma d'arrel:

a) $25^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

b) $12^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

c) $a^{\left(\frac{3}{5}\right)}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{3}\right)}$

e) $b^{\left(\frac{2}{7}\right)}$

5) Les potències d'exponent fraccionari verifiquen totes i cadascuna de les propietats de les potències d'exponent enter. Apliqueu aquestes propietats per expressar en funció d'una sola potència:

a) $2^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot 2^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

b) $3^{\left(\frac{2}{3}\right)} : 3^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

c) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^2$

d) $\dfrac{2 \cdot 4^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{8^{\left(\frac{1}{5}\right)}}$

2.2.2 Operacions amb radicals

Reducció a comú índex

Per reduir radicals a índex comú hem de trobar radicals equivalents als inicials amb el mateix índex.
Si els posem com a potències d'exponent fraccionari, com que l'índex és el denominador de l'exponent, el que hem de fer és reduir a comú denominador les fraccions exponent.

Exemple

Reduïm a índex comú els radicals $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt[10]{3^2}$

Si els posem en forma de potència tenim:

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\left(\frac{1}{3}\right)};\ \sqrt{7} = 7^{\left(\frac{1}{2}\right)};\ \sqrt[10]{3^2} = 3^{\left(\frac{2}{10}\right)}.$$

Prenem els exponents $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{10}$ i reduïm-los a comú denominador $\frac{10}{30}$, $\frac{15}{30}$ i $\frac{6}{30}$

Per tant queda $2^{\left(\frac{10}{30}\right)}$; $7^{\left(\frac{15}{30}\right)}$; $3^{\left(\frac{6}{30}\right)}$, que posat en forma d'arrel serà $\sqrt[30]{2^{10}}$; $\sqrt[30]{7^{15}}$; $\sqrt[30]{3^6}$

Exercicis

6) Reduïu a índex comú els radicals següents:

   a) $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[4]{2^3}$; $\sqrt[15]{4^2}$

   b) $\sqrt[3]{4^2}$; $\sqrt[12]{5^5}$; $\sqrt[9]{7^2}$

Simplificació de radicals

Definició
Simplificar radicals vol dir trobar un radical equivalent a l'anterior amb l'índex més petit.

Si posem el radical en forma d'exponent fraccionari, només s'haurà de simplificar la fracció exponent.

Exemples

1) Simplifiquem el radical $\sqrt[3]{2^{12}}$

   Posem-lo en forma de potència fraccionària $2^{\left(\frac{12}{3}\right)}$, simplifiquem la fracció de l'exponent i queda $2^4 = 16$

2) Simplifiquem el radical $\sqrt[9]{3^{24}}$

   Posem-lo en forma de potència fraccionària $3^{\left(\frac{24}{9}\right)}$, simplifiquem la fracció de l'exponent i queda $3^{\left(\frac{8}{3}\right)} = \sqrt[3]{3^8}$

Extracció de termes d'un radical

Si en posar el radical en forma d'exponent fraccionari el numerador és més gran que el denominador i la divisió del numerador entre el denominador no dóna exacta, es descompon la fracció exponent com a suma d'un enter més una fracció amb numerador més petit que el denominador. D'aquesta manera quedarà un factor amb exponent enter, per tant, sense arrel, i un altre factor amb exponent fraccionari, és a dir, un radical.

Exemple

Extraiem tot el que puguem del radical $\sqrt[3]{2^{14}}$

Posem en forma de potència fraccionària $2^{\left(\frac{14}{3}\right)}$

Descomponem la fracció del numerador com a suma de dues i queda $2^{\left(\frac{12}{3}+\frac{2}{3}\right)}$

Simplificant queda $2^{\left(\frac{12}{3}\right)} \cdot 2^{\left(\frac{2}{3}\right)} = 2^4 \cdot 2^{\left(\frac{2}{3}\right)} = 2^4 \cdot \sqrt[3]{2^2}$

Exercicis

7) Traieu tots els factors que pugueu fora de l'arrel:

a) $\sqrt{8^3}$
b) $\sqrt[4]{4^{13}}$
c) $\sqrt[5]{11^{21}}$
d) $\sqrt[3]{(-2)^5}$

Introducció de termes dins d'un radical

Per introduir termes dins d'un radical s'eleva el nombre que es vol introduir a l'índex de l'arrel.

Exemple
Donat el radical $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2\,5}$, introduïm tots els termes dins del radical:

$$2\sqrt{5} = \sqrt{2^2\,5} = \sqrt{20}$$

Exercicis

8) Introduïu els factors dins de l'arrel:

a) $2\sqrt{7}$
b) $3\sqrt[3]{5}$
c) $\frac{1}{5}\sqrt[4]{10}$
d) $2^5\sqrt{6}$

Sumes i restes de radicals

Per sumar i restar radicals només es pot fer en el cas que es tracti exactament de la mateixa arrel.

$$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a+c)\sqrt[n]{b}$$
$$a\sqrt[n]{b} - c\sqrt[n]{b} = (a-c)\sqrt[n]{b}$$

Exemples

1) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(5+2)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

2) $\sqrt[3]{4}-10\sqrt[3]{4}=-9\sqrt[3]{4}$

En el cas que no es tracti de la mateixa arrel, s'ha d'extreure tot el que es pugui de cada una de les arrels i sumar o restar les que quedin exactament iguals.

Exemple

Calculem $\sqrt{50}-\sqrt{18}$.

El primer que farem serà descompondre els radicands en factors i tindrem $50=2\cdot 5^2$ i $18=2\cdot 3^2$.

Per tant tindrem que $\sqrt{50}-\sqrt{18}=\sqrt{5^2\cdot 2}-\sqrt{3^2\cdot 2}$.

Si ara traiem tot el que es pugui fora de l'arrel ens queda $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$.

Com que les dues arrels ara ja són iguals, les podem restar i tindrem $2\sqrt{2}$

Exercicis

9) Feu les operacions següents.

a) $\sqrt{2}+2\sqrt{32}+4\sqrt{18}-3\sqrt{50}$

b) $\sqrt{a}+\sqrt{a^3}-3\sqrt{a^5}+\dfrac{\sqrt{a^9}}{2}+1\ (a>0)$

c) $\sqrt{45}-\sqrt{80}+2\sqrt{180}-3\sqrt{20}$

d) $7\sqrt{a}-5\sqrt{a^2}+3\sqrt{a}+\dfrac{\sqrt{a}}{2}+3a\ (a>0)$

e) $2\sqrt{\dfrac{2}{25}}+\dfrac{\sqrt{72}}{6}-3\sqrt{\dfrac{2}{9}}+\dfrac{\sqrt{\dfrac{18}{16}}}{6}$

Producte i quocient de radicals

Només es poden multiplicar i dividir radicals amb el mateix índex. Per fer-ho es multipliquen o divideixen els valors de dins del radical.

Exemple

$\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{6}$

En el cas que no es tinguin els mateixos índexs, el que s'ha de fer és reduir-los a comú índex, i un cop ja tenen índex comú, es multipliquen o divideixen els valors de dins del radical.

Exemple

Multipliquem els radicals $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

Primer posem aquestes arrels en forma d'exponent fraccionari i tenim:

$$2^{(\frac{1}{3})} \cdot 3^{(\frac{1}{2})}$$

si ara reduïm a comú denominador les fraccions exponents quedarà:

$$2^{(\frac{2}{6})} \cdot 3^{(\frac{3}{6})}$$

Si ho expressem en forma d'arrels serà:

$$\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3}$$

Com que ja tenim el mateix index, només ens queda multiplicar els valors de dins del radical i tindrem:

$$\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$$

Exercicis

10) Feu les operacions següents:

a) $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{3\,x\,y}$

b) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt[6]{6\,a\,b^4}}{\sqrt[3]{a^2\,b}}$

2.2.3 Racionalització de denominadors

Definició

Racionalitzar el denominador d'una fracció és trobar una altra fracció equivalent a la inicial, però de manera que el denominador sigui un nombre racional.

Vegem amb alguns exemples les tècniques més usuals per racionalitzar denominadors.

Exemples

Racionalitzem els denominadors de les fraccions següents:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

Si multipliquem numerador i denominador per $\sqrt{3}$ queda:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

2) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$

Multipliquem numerador i denominador pel conjugat del denominador $3+\sqrt{2}$ i queda:

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$$

3) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

Multiplicant numerador i denominador per $\sqrt[3]{5^2}$ ens queda:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{52}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

Exercicis

11) Racionalitzeu les expressions següents:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3}{5\cdot\sqrt[3]{2}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{8}}$

d) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{4}{3-\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}$

2.3 Exercicis de repàs

1) Escriviu en forma de potència els radicals:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{m}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$

e) $\sqrt[5]{a \cdot b}$

2) Expresseu com una sola potència:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[7]{a^2}$

d) $\left(\sqrt[4]{b^3}\right)^2$

3) Escriviu en forma de radical les potències següents:

a) $4^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

b) $(-2)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

c) $\pi^{\left(\frac{1}{5}\right)}$

d) $a^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

4) Expresseu com una sola arrel:

a) $10^{\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot 10^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

b) $7^{\left(\frac{3}{4}\right)} : 7^{0.5}$

c) $\left(2^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right)^{\left(\frac{3}{5}\right)}$

d) $2^{\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot 3^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

5) Feu les operacions següents:

a) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$

b) $\sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225}$

c) $\sqrt{10\,x^4} - 3\sqrt{160\,x^4} + 5\sqrt{90\,x^4}$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b}$

f) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b} \cdot \sqrt[5]{a^3 \cdot b^2} \cdot \sqrt{a \cdot b}$

g) $\dfrac{5\sqrt{a^3\,b^4}\,\sqrt[6]{a^2\,b^3\,c^3}}{\sqrt[3]{a}}$

h) $\sqrt{\sqrt[3]{b^2}}$

i) $\sqrt[3]{8\,a^3\,\sqrt[5]{b^6\,c^3}}$

j) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{10}\,b^2}}$

k) $\sqrt[n]{a^m\,\sqrt[n]{b^{2\,m}}}$

6) Racionalitzeu les expressions següents:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$

g) $\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

7) Feu les operacions i expresseu el resultat en forma de radicals:

a) $\left(\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\sqrt{5}$

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14}$

c) $\left(1+\sqrt{7}\right)\cdot\left(1-4\sqrt{7}\right)$

d) $\left(2\sqrt{3}\right)^4$

e) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)^2$

f) $\left(2\sqrt{32}-\dfrac{\sqrt{72}}{2}\right):\sqrt{8}$

g) $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^2$

h) $\left(\sqrt{18}+3\sqrt{8}-2\sqrt{20}\right):5\sqrt{2}$

i) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)$

8) Calculeu i simplifiqueu les expressions següents:

a) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

c) $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2\sqrt{6}}$

e) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}}$

f) $\dfrac{a+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}$

g) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

2.4 Solucions

1) a) 10
   b) 6
   c) $\dfrac{5}{9}$
   d) -1
   e) 0.1
   f) $\dfrac{1}{5}$

2) a) $\dfrac{2}{3}$
   b) $\dfrac{1}{2}$
   c) $\dfrac{5}{7}$
   d) $\dfrac{1}{3}$

3) a) $7^{(\frac{1}{3})}$
   b) $a^{(\frac{3}{4})}$
   c) $10^{(\frac{1}{2})}$
   d) $(a+2)^{(\frac{2}{5})}$
   e) $b^{(\frac{5}{6})}$
   f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{(\frac{1}{2})}$

4) a) $\sqrt[3]{25}$
   b) $\sqrt[4]{12}$
   c) $\sqrt[5]{a^3}$
   d) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}^2}$

e) $\sqrt[7]{b^2}$

5) a) $2^{\left(\frac{5}{6}\right)}$

b) $3^{\left(\frac{5}{12}\right)}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)}$

d) $2^{\left(\frac{16}{15}\right)}$

6) a) $\sqrt[60]{3^{12}}$; $\sqrt[60]{2^{45}}$; $\sqrt[60]{4^8}$

b) $\sqrt[36]{4^{24}}$; $\sqrt[36]{5^{15}}$; $\sqrt[36]{7^8}$

7) a) $8\sqrt{8}$

b) $4^3\sqrt[4]{4}$

c) $11^4\sqrt[5]{11}$

d) $(-2)\sqrt[3]{(-2)^2}$

8) a) $\sqrt{28}$

b) $\sqrt[3]{135}$

c) $\sqrt[4]{\frac{2}{125}}$

d) $\sqrt{2544}$

9) a) $6\sqrt{2}$

b) $\left(1+a-3a^2+\frac{a^4}{2}\right)\sqrt{a}+1$

c) $5\sqrt{5}$

d) $\frac{21\sqrt{a}}{2}-2a$

e) $\frac{21}{40}\sqrt{2}$

10) a) $\sqrt[4]{3x^2y}$

b) $\sqrt[30]{2^6\,5^{10}\,4^5}$

c) 2

d) $\sqrt[6]{\frac{6b^2}{a^3}}$

11) a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{10}$

c) $\dfrac{5\sqrt[4]{8^3}}{8}$

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\dfrac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{5}$

f) $\dfrac{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}{3}$

g) $\dfrac{6\left(\sqrt{7}+2\right)}{5}$

Exercicis de repàs:

1) a) $3^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

b) $4^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

c) $m^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

e) $(a\,b)^{\left(\frac{1}{5}\right)}$

2) a) $2^{\left(\frac{5}{6}\right)}$

b) $5^{\left(\frac{1}{12}\right)}$

c) $a^{\left(\frac{2}{7}\right)}$

d) $b^{\left(\frac{3}{2}\right)}$

3) a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt[3]{-2}$

c) $\sqrt[5]{\pi}$

d) $\sqrt[3]{a}$

4) a) $\sqrt[6]{10}$

b) $\sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[5]{2^2}$

d) $\sqrt[3]{6}$

5) a) 0

b) 9

c) $4\,x^2\sqrt{10}$

d) $\sqrt[6]{a^7}$

e) $\sqrt[4]{b}$

f) $\sqrt[30]{a^{53}\,b^{37}}$

g) $\sqrt[6]{5^6\,a^9\,b^{15}\,c^3}$

h) $\sqrt[3]{b}$

i) $\sqrt[15]{8^5\,a^{15}\,b^6\,c^3}$

j) $\sqrt[6]{a^5\,b}$

k) $\sqrt[n^2]{a^{(m\,n)}\,b^{(2\,m)}}$

6) a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{-2}$

c) $2\sqrt[3]{2^2}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$

e) $-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

f) $\sqrt[5]{x^3}$

g) $\dfrac{a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$

7) a) $5-3\sqrt{15}$

b) 28

c) $-27-3\sqrt{7}$

d) 144

e) $15+2\sqrt{56}$

f) $\dfrac{5}{2}$

g) $13-4\sqrt{10}$

h) $\dfrac{9-2\sqrt{10}}{5}$

i) $16-\sqrt{6}$

8) a) $\dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}{3}$

b) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)$

c) $-2-\sqrt{10}$

d) $\dfrac{x-12-\sqrt{6\,x}}{x-24}$

e) $\dfrac{(\sqrt{x}+2)^2}{4-x}$

f) $\dfrac{(a+\sqrt{a})^2}{a^2-a}$

g) $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$

Capítol 3

EQUACIONS I INEQUACIONS

3.1 Equacions de 2n grau

Definició
Una equació de 2n grau és una expressió de la forma $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ amb $a \neq 0$.

Les equacions de segon grau poden tenir 0, 1 o 2 solucions.

3.1.1 Resolució de l'equació de 2n grau

Per resoldre-les es pot fer de diverses formes, depenent dels coeficients del polinomi. Estudiem aquests casos.

Cas $b = 0$

L'equació queda de la forma $a\,x^2 + c = 0$
Per resoldre-la n'hi ha prou d'aïllar la x i ens queda $x^2 = -\frac{c}{a}$. Si $-\frac{c}{a}$ és negatiu, l'equació no té solució. En cas contrari té dues solucions, que són $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ i $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Exemples

1) Resolem l'equació $2\,x^2 - 8 = 0$

Passem el 8 a l'altra banda i queda:

$$2\,x^2 = 8$$

Si dividim per 2 tenim:

$$x^2 = 4$$

Per tant, $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$ són les dues solucions.

2) Resolem l'equació $3\,x^2 + 27 = 0$

Passem el 27 a l'altra banda i queda:

$$3\,x^2 = -27$$

Si dividim per 3 tenim:

$$x^2 = -\frac{27}{3}$$

Com que $x = \frac{-27}{3}$ és negatiu l'equació no té solució.

Cas $c = 0$

L'equació queda de la forma $a\,x^2 + b\,x = 0$
Traiem factor comú x i queda:

$$x\,(a\,x + b) = 0$$

Per tant, queden dues solucions $x = 0$ i $a\,x + b = 0$, d'on surt $x = -\frac{b}{a}$.
En aquest cas l'equació sempre té dues solucions i una és $x = 0$.

Exemple

Resolem l'equació $2\,x^2 + 5\,x = 0$

Traiem factor comú la x i queda:

$$x\,(2\,x + 5) = 0$$

Igualant a zero cada un dels factors, surt $x_1 = 0$ i $2\,x + 5 = 0$, d'on $x_2 = -\frac{5}{2}$, que són les dues solucions de l'equació.

Cas $b \neq 0$ i $c \neq 0$

L'equació té com a expressió la seva forma general $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Manipulant aquesta equació es poden arribar a escriure les solucions de la forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \text{i} x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

L'expressió de dins del radical, $b^2 - 4\,a\,c$, s'anomena discriminant. Segons el signe del discriminant, tenim els casos següents:

1) Si $b^2 - 4\,a\,c > 0$, llavors hi ha dues solucions diferents.

2) Si $b^2 - 4\,a\,c = 0$, llavors hi ha dues solucions iguals, és a dir, una solució doble.

3) Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$, l'equació no té solució.

Exemple

Resolem l'equació $2\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4\,(-2)\cdot 2}}{2\cdot 2} = -3 + \frac{\sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3^2 - 4\,(-2)\cdot 2}}{2\cdot 2} = -3 - \frac{\sqrt{25}}{4} = -2$$

Exercicis

1) Resoleu les equacions següents:

a) $x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 18 = 0$
b) $2\,x^2 - 7\,x + 3 = 0$
c) $x^2 - 6\,x + 9 = 0$
d) $x^2 - x + 1 = 0$
e) $3\,x^2 = 0$
f) $9\,x^2 - 25 = 0$
g) $x^2 - 2\,x = 0$
h) $(2\,x + 1)\,(x + 5) = 2$
i) $(x - \sqrt{3})^2 - 1 + x = x$
j) $1 + (x - 2)^2 = 1$
k) $(x + 1)^2 = 2$

2) Calculeu el valor del discriminant de les equacions següents i indiqueu el nombre de solucions de cadascuna.

a) $2\,x^2 - 3\,x + 1 = 0$
b) $3\,x^2 - x + 1 = 0$
c) $3\,x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0$
d) $x^2 + x - 1 = 0$

3.1.2 Suma i producte de les arrels

Donada l'equació de 2n grau $a\,x^2 + b\,x + x$ es verifica que:

1) La suma de les arrels d'una equació de 2n grau compleix que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

2) El producte de les arrels d'una equació de 2n grau compleix que $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

on x_1 i x_2 són les solucions i a, b i c són els coeficients de l'equació de 2n grau $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.
Si $a = 1$ podem escriure l'equació de la forma següent: $x^2 - s\,x + p = 0$, on $s = x_1 + x_2$ i $p = x_1 \cdot x_2$.

Exemple

Escrivim una equació de 2n grau que té com a solucions els nombres $\dfrac{1}{2}$ i $\dfrac{2}{3}$.

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$
$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Llavors l'equació queda:

$$x^2 - \frac{7\,x}{6} + \frac{1}{3} = 0$$

o bé, multiplicant-la per 6,

$$6\,x^2 - 7\,x + 2 = 0$$

3.2 Equacions biquadrades

Definició
S'anomenen equacions biquadrades les equacions del tipus $a\,x^{2\,n} + b\,x^n + c = 0$. Per resoldre-les s'intenta transformar-les en una equació de 2n grau fent el canvi de variable $t = x^n$. Així l'equació quedarà $a\,t^2 + b\,t + c = 0$, que ja és una equació de 2n grau.
Per tant, podem resoldre l'equació en t i un cop trobada tindrem $x = \sqrt[n]{t}$

Exemple

Resolem l'equació $3\,x^4 + x^2 - 4 = 0$

Si fem $x^2 = t$ llavors queda:

$$3\,t^2 + t - 4 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són $t_1 = 1$ i $t_2 = -\frac{4}{3}$.

Amb aquests dos valors trobem la x.

Si $t = 1$ llavors $x^2 = 1$, per tant $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$.

Si $t = -\frac{4}{3}$ llavors $x^2 = -\frac{4}{3}$, cosa que no pot ser.

Les úniques solucions seran $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$.

Exercici

3) Resoleu les equacions següents:

a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$
b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
c) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$
d) $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$
e) $-2x^4 + 12x^2 - 16 = 0$
f) $-x^4 - 4x^2 - 45 = 0$
g) $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$

3.3 Equacions racionals

Definició
Són equacions racionals aquelles equacions en les quals apareixen fraccions algèbriques.

Per resoldre-les es duen a terme les operacions pertinents fins a reduir-les a equacions de les que ja hem vist anteriorment. Després es resolen aquestes equacions i, finalment, cal comprovar si les solucions d'aquestes equacions ho són de les racionals.
Vegem el procés amb uns exemples.

Exemples

1) Resolem l'equació $\frac{2x}{x-2} - \frac{x+2}{2} = 1$

Primer de tot restarem les dues fraccions algèbriques. Per tant, l'equació quedarà:

$$\frac{4x - (x-2)(x+2)}{2(x-2)} = 1$$

Si arreglem el numerador tenim:

$$\frac{4x - (x^2 - 4)}{2(x-2)} = 1$$

Multiplicant els dos termes de l'equació per $2\,(x-2)$ tenim:

$$4\,x - x^2 + 4 = 2\,(x-2)$$

Fent les operacions i posant tots els termes al mateix costat de la igualtat queda:

$$x^2 - 2\,x - 8 = 0$$

que és ja una equació de 2n grau. Si la resolem obtenim $x_1 = 4$ i $x_2 = -2$.

Ara hem de comprovar en l'equació inicial que realment són solució:

Si fem $x = 4$ tenim $\dfrac{2\cdot 4}{4-2} - \dfrac{4+2}{2} = 1$, igualtat que és certa.

Si fem $x = -2$ tenim $\dfrac{2\,(-2)}{-2-2} - \dfrac{-2+2}{2} = 1$, que també és certa.

Per tant les dues solucions de l'equació de 2n grau ho són de la racional.

2) Resolem l'equació $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{19\,x}{12}$

Si reduïm a comú denominador els dos termes de l'equació queda:

$$\frac{12\,(x^2+1)\,(x^2-1) + 12\,x^2}{12\,x\,(x^2-1)} = \frac{19\,x^2\,(x^2-1)}{12\,x\,(x^2-1)}$$

Multiplicant els dos costats de la igualtat per $12\,x\,(x^2-1)$ tenim:

$$12\,(x^2+1)\,(x^2-1) + 12\,x^2 = 19\,x^2\,(x^2-1)$$

Fent ara les operacions als dos costats i posant tots els termes al mateix costat, queda $7\,x^4 - 31\,x^2 + 12 = 0$, que és una equació biquadrada.

Si la resolem surten 4 solucions, que són:

$x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$ i $x_4 = -\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Comprovem si aquestes quatre solucions ho són de l'equació racional

Si fem $x = 2$ tenim $\dfrac{2^2+1}{2} + \dfrac{2}{2^2-1} = \dfrac{19\cdot 2}{12}$, igualtat que és certa

Si fem $x = -2$ tenim $\dfrac{(-2)^2+1}{-2} + \dfrac{-2}{(-2)^2-1} = \dfrac{19\,(-2)}{12}$, igualtat que també és certa.

Si fem $x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$ tenim $\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{7}}^2 + 1}{\sqrt{\dfrac{3}{7}}} + \dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{7}}}{\sqrt{\dfrac{3}{7}}^2 - 1} = \dfrac{19\sqrt{\dfrac{3}{7}}}{12}$, igualtat que no és certa

Si fem $x = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ tenim $\dfrac{(-\sqrt{\frac{3}{7}})^2+1}{-\sqrt{\frac{3}{7}}} + \dfrac{-\sqrt{\frac{3}{7}}}{(-\sqrt{\frac{3}{7}})^2-1} = \dfrac{19\,(-\sqrt{\frac{3}{7}})}{12}$, igualtat que tampoc no és certa.

Per tant, les solucions de l'equació racional són $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$.

Exercici

4) Resoleu les equacions següents:

a) $\dfrac{1}{x} = x$

b) $\dfrac{3\,x+2}{x-1} = x+6$

c) $\dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{1}{x-3}$

d) $\dfrac{5}{(x-2)^2} - \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{4}{5}$

e) $\dfrac{8}{x^2-3\,x} - \dfrac{7}{9-x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{4}$

f) $\dfrac{x^2-x-2}{x^3-4\,x^2+x+6} = \dfrac{15}{x^2+x}$

3.4 Equacions irracionals

Definició
S'anomenen equacions irracionals les equacions en les quals la incògnita apareix en el radicand d'una arrel.

Per resoldre aquest tipus d'equacions cal seguir els passos següents:

1) El terme que conté l'arrel es deixa aïllat en un dels membres. Si n'hi ha dues, se'n situarà una a cada membre.

2) S'eleven al quadrat els dos membres de l'equació per fer desaparèixer l'arrel.

   En el cas que hi hagi dues arrels, caldrà repetir aquests dos passos.

3) Es resol l'equació que queda.

4) Es comproven les solucions obtingudes en l'equació inicial.

Vegem aquest procediment amb uns exemples.

Exemples

1) Resolem l'equació $x - 2\sqrt{x} = 15$

Aïllem l'arrel en un dels dos costats i tenim:

$$x - 15 = 2\sqrt{x}$$

Elevem al quadrat a cada costat $(x - 15)^2 = (2\sqrt{x})^2$, i queda:

$$x^2 - 30x + 225 = 4x$$

Si ajuntem termes tenim $x^2 - 34x + 225 = 0$, que és una equació de segon grau. Resolent-la obtenim $x_1 = 25$ i $x_2 = 9$ com a solucions.

Comprovem aquestes solucions en l'equació irracional inicial.

Si fem $x = 25$ queda $25 - 2\sqrt{25} = 15$, igualtat que és certa.

Si fem $x = 9$ queda $9 - 2\sqrt{9} = 15$, igualtat que no és certa.

Per tant, l'única solució de l'equació és $x = 25$.

2) Resolem l'equació $\sqrt{2x + 10} - \sqrt{2x + 3} = 1$

Deixem una arrel a cada costat de la igualtat i tenim:

$$\sqrt{2x + 10} = \sqrt{2x + 3} + 1$$

Elevem al quadrat a cada costat $\sqrt{2x + 10}^2 = (\sqrt{2x + 3} + 1)^2$, i queda $2x + 10 = 2x + 3 + 2\sqrt{2x + 3} + 1$.

Si fem les operacions que queden tenim $3 = \sqrt{2x + 3}$, expressió que encara té una arrel; per tant, tornem a repetir el procés.

Elevem al quadrat a cada costat $3^2 = \sqrt{2x + 3}^2$. Fent les operacions queda $9 = 2x + 3$, per tant, $x = 3$.

Comprovem a l'equació inicial si és o no solució.

Si fem $x = 3$ tenim $\sqrt{2 \cdot 3 + 10} - \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 1$, igualtat que és certa, per tant, $x = 3$ és solució.

Exercici

5) Resoleu les equacions següents:

a) $1 - 5x = \sqrt{2x + 1}$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = x$

c) $\sqrt{\dfrac{2(x + 4)}{x - 3}} = x - 2$

d) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 4} = 5$

e) $\sqrt{1 - x} + \sqrt{2x + 2} = 0$

f) $\sqrt{6 + \sqrt{4x - 3}} = 3$

3.5 Inequacions

Definició
S'anomenen inequacions les desigualtats entre expressions algèbriques.

Exemple
Les expressions següents són inequacions:

1) $4x + 5 < 7$

2) $7 \leq \dfrac{1}{2x+2}$

3) $\dfrac{5}{2x^2} \leq \dfrac{10}{x-1}$

3.5.1 Inequacions de 1r grau amb una incògnita

Aquest tipus d'inequacions es resolen aplicant els mateixos processos que en les equacions de 1r grau amb una incògnita, tenint en compte dues diferències fonamentals:

1) Una inequació sempre té infinites solucions.

2) En multiplicar els dos membres d'una inequació per un nombre negatiu la desigualtat canvia de sentit.

Exemples

1) Resolem $4x + 5 < 7$

   Passem el 5 a l'altra banda i queda:

$$4x < 2$$

   Dividint per 4 tenim:

$$x < \frac{1}{2}$$

   És a dir, el conjunt de valors de x de l'interval $(-\infty, \frac{1}{2})$

2) Resolem $5x < 4x - 7$

   Passem el $4x$ de costat i queda:

$$x < -7$$

   És a dir, el conjunt de valors de x de l'interval $(-\infty, -7)$

3) Resolem $\frac{15x-9}{2}+\frac{2x}{10}<8x-7$

Reduint a comú denominador els dos membres de la inequació queda:

$$\frac{5(15x-9)+2x}{10}<\frac{10(8x-1)}{10}$$

Si multipliquem cada costat per 10 tenim:

$$5(15x-9)+2x<10(8x-1)$$

Fent les operacions tenim:

$$75x-45+2x<80x-10$$

Ajuntant termes semblants i aïllant la x queda:

$$\frac{-35}{3}<x$$

És a dir, el conjunt de valors de x de l'interval $(\frac{-35}{3},\infty)$

Exercici

6) Resoleu les inequacions de primer grau següents:

a) $3-5x<8$

b) $2(x-2)+3x<5x+6$

c) $\frac{2x-3}{8}-\frac{5x-1}{2}<-\frac{3x}{4}$

d) $\frac{2-3x}{5}+\frac{4x-1}{2}<\frac{x+1}{10}$

e) $5(x-2)-\frac{1}{3}<3(x-1)+2x$

f) $\frac{x-1}{2}-1\leq 3x+7-5(2x-3)$

g) $\frac{x-3}{2}<\frac{3(x-1)}{2}-x$

h) $\frac{4x-1}{2}\leq 2x+\frac{9}{2}$

3.5.2 Inequacions de 1r grau amb dues incògnites

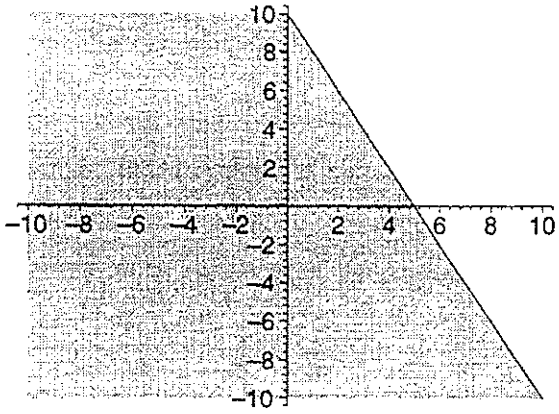
Per resoldre les inequacions de 1r grau amb dues incògnites ho farem de forma gràfica, és a dir, farem la representació gràfica d'una de les incògnites en funció de l'altra.
Vegem-ho amb un exemple.

Exemple

Resolem la inequació $2x + y < 10$.

Aïllem la y en funció de la x i queda $y < 10 - 2x$.

Considerem ara l'equació $y = 10 - 2x$ i fem-ne la representació gràfica.



Aquesta recta divideix el pla en dues parts, dos semiplans. Cada un d'aquests semiplans compleix una de les següents inequacions: $y < 10 - 2x$ o $y > 10 - 2x$. Es tracta de saber quina regió correspon a cada inequació.

Per fer-ho prenem un punt qualsevol d'una de les dues regions i el substituïm a la nostra inequació.

P(0, 0) $0 < 10 - 2 \cdot 0$, ja que la relació és certa, la regió on hi ha el punt P(0, 0), la zona ombrejada del gràfic, és la regió solució.

Exercicis

7) Resoleu i indiqueu si els parells següents pertanyen al conjunt solució de la inequació $3(x - 1) \leq 2y - 3$.

   a) $x = 0, y = 0$
   b) $x = 3, y = 1$
   c) $x = -1, y = 4$

8) Resoleu gràficament les inequacions següents:

   a) $y > 3$
   b) $x \geq -2$
   c) $x + 2y < 5$
   d) $3x - y \geq -1$

e) $5x - y \leq 2x - \frac{1}{3}$

f) $3(y - x) < 3y - 5$

9) Donada la inequació $3x - 2y < 6 - y$:

a) Quins punts de l'eix d'ordenades són solució de la inequació?

b) Quins punts de l'eix d'abscisses són solució de la inequació?

3.5.3 Inequacions racionals

Les inequacions racionals amb una sola incògnita són desigualtats entre fraccions algèbriques, és a dir, la incògnita és a l'hora al numerador i al denominador d'una fracció algèbrica.
Vegem la manera de resoldre-les a través d'un exemple:

Exemple

Resolem $\frac{2x-1}{x} < 0$

Trobem primer les arrels del numerador i denominador, és a dir, $2x-1=0$ i $x=0$, amb la qual cosa obtenim dos valors de x que són $x=0$ i $x=\frac{1}{2}$.

Aquests dos valors parteixen els nombres reals en tres intervals $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2}, \infty)$.

La solució que busquem és en algun d'aquests intervals. Per comprovar-ho, n'hi ha prou d'agafar un valor de cada un dels intervals i comprovar si compleix la inequació.

Comprovem-ho a l'interval $(-\infty, 0)$. Per això agafem $x=-1$; si substituïm queda:

$$\frac{2(-1)-1}{-1} = 3$$

que no és negatiu, per tant no és vàlid.

En l'interval $(0, \frac{1}{2})$, prenem $x = \frac{1}{4}$; substituint tenim:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4}} = -2$$

que és negatiu; per tant, compleix la inequació.

I finalment, en l'interval $(\frac{1}{2}, \infty)$, prenem $x=1$. Substituint tenim:

$$\frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1$$

Tampoc no compleix ja que és positiu.

Per tant, la solució seran els valors de x de l'interval $(0, \frac{1}{2})$.

Exercici

10) Resoleu les inequacions racionals següents:

a) $\dfrac{x-3}{x+1} > 0$

b) $\dfrac{2x-1}{x} \leq 0$

c) $\dfrac{x^2-3x-4}{x} > 0$

d) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4} > 0$

3.5.4 Inequacions de 2n grau amb una incògnita

Les inequacions de 2n grau són inequacions que tenen la forma $a\,x^2+b\,x+c > 0$; $a\,x^2+b\,x+c < 0$; $a\,x^2+b\,x+c \geq 0$; $a\,x^2+b\,x+c \leq 0$.
Vegem mitjançant un exemple el mètode per poder resoldre aquestes inequacions.

Exemple

Resolem la inequació $x^2-5\,x+6 \geq 0$

Agafem l'equació de 2n grau associada $x^2-5\,x+6 = 0$ i trobem les seves solucions, que són $x=2$ i $x=3$.

Amb aquests dos valors construïm els tres intervals amb què queden dividits els nombres reals i estudiem quin o quins d'aquests intervals són la solució.

Els intervals seran $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, \infty)$. Per comprovar quin o quins són la solució n'hi ha prou d'agafar un valor de cada interval i comprovar-lo en la inequació.

En l'interval $(-\infty, 2)$

$$0^2-5\cdot 0+6=6$$

que és positiu. Per tant, és solució de la inequació.

En l'interval $(2, 3)$, prenem $x=2.5$. Substituint queda:

$$2.5^2-5\cdot 2.5+6=-0.25$$

que és negatiu. Per tant, no és solució.

I en l'interval $(3, \infty)$, prenem $x = 4$. Substituint queda:

$$4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$$

positiu. Per tant, també és solució.

Com que la inequació ens diu que és vàlida la igualtat i les arrels de l'equació són 2 i 3, llavors la solució seran els valors de x que pertanyen als intervals següents $(-\infty, 2] \bigcup [3, \infty)$.

Exercici

11) Resoleu les inequacions de segon grau següents:

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$
b) $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$
c) $x^2 + 2x > 0$
d) $x^2 + 1 \leq 0$
e) $(x-3)^2 \leq 4$
f) $3(x^2 - 1) - 5(x - 2) < 0$
g) $-3(x-1) \leq x^2 - 7$
h) $x^2 + \frac{1}{4} < x - 2$
i) $3x < 2(5 - x^2)$
j) $\frac{3x^2}{2} < \frac{2x-1}{5}$

3.6 Sistemes d'equacions

Definició
Un sistema d'equacions és un conjunt d'equacions que es verifiquen simultàniament per als mateixos valors de les incògnites. Aquests valors s'anomenen solucions del sistema.

Hi ha sistemes que no tenen solució (incompatibles) i d'altres que sí (compatibles).
Distingirem dos tipus de sistemes a l'hora de resoldre'ls:

1) Sistemes lineals: cada terme té com a màxim grau 1.

2) Sistemes no lineals: hi ha algun terme amb grau superior a 1.

Exemples

1) El sistema $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ és un sistema lineal.

2) El sistema $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 2 \\ xy = 8 \end{array}\right\}$ és un sistema no lineal.

3.6.1 Sistemes lineals

Començarem estudiant els sistemes de dues equacions amb dues incògnites. Aquests sistemes es poden resoldre aplicant els mètodes de reducció, substitució i igualació.

Mètode de substitució

El procés consisteix a aïllar una de les incògnites de qualsevol de les dues equacions i substituir-la a l'altra, així aconseguirem una equació de primer grau amb una sola incògnita.

Exemple

Resolem el sistema $\left.\begin{array}{r} 5\,x - y = 3 \\ 2\,x + 3\,y = 8 \end{array}\right\}$

Agafem una de les dues equacions, per exemple la primera i aïllem una de les incògnites, per exemple la y, ens queda $y = 5\,x - 3$. Substituint a la segona equació tenim $2\,x + 3\,(5\,x - 3) = 8$. Fent operacions surt $x = 1$.

Si substituïm ara la x de la segona equació per aquest valor obtenim $y = 2$.

Per tant, la solució del sistema és $x = 1$ i $y = 2$.

Mètode d'igualació

Es tracta d'aïllar una incògnita, la mateixa, de les dues equacions, i posteriorment s'igualen les dues expressions. Això farà que ens quedi una equació de 1r grau amb una incògnita.

Exemple

Resolem el sistema $\left.\begin{array}{r} 5\,x - y = 3 \\ 2\,x + 3\,y = 8 \end{array}\right\}$

De la segona equació aïllem la y i tenim $y = \dfrac{8 - 2\,x}{3}$.

De la primera també aïllem la y i ens queda $y = 5\,x - 3$. Si ara igualem les dues expressions ens queda:

$$5\,x - 3 = \frac{8 - 2\,x}{3}$$

Si fem operacions trobem que $x = 1$. Posteriorment, substituint la x a una de les dues equacions, trobem que $y = 2$.

Per tant, la solució del sistema és $x = 1$ i $y = 2$.

Mètode de reducció

Definició
Direm que dos sistemes són equivalents si tenen les mateixes solucions.

Exemple

Els sistemes $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ i $\left.\begin{array}{r} 10x - 2y = 6 \\ 6x + 9y = 24 \end{array}\right\}$ són equivalents, ja que $x = 1$ i $y = 2$ són solució dels dos sistemes.

Aquest mètode consisteix a transformar el nostre sistema en un altre que sigui equivalent, de manera que en sumar o restar les equacions del nou sistema s'elimini una de les incògnites.
Vegem-ho amb un exemple

Exemple

Resolem el sistema $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$

Si multipliquem la primera equació per 3 obtenim el següent sistema equivalent:

$$\left.\begin{array}{r} 15x - 3y = 9 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$$

Si ara sumem les dues equacions ens queda:

$$17x = 17$$

Per tant, $x = 1$. Substituint ara el valor de x en una de les dues equacions trobem $y = 2$.

Per tant, la solució del sistema és $x = 1$ i $y = 2$.

Exercicis

12) Resoleu pels tres mètodes (reducció, substitució i igualació) cadascun dels següents sistemes d'equacions.

a) $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{3}x - 2y = \frac{3}{4} \\ 5x + y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ -3x + y = -6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - 3 + 2y = 1 \\ 2x - 7y - 21 = 2 \end{array}\right\}$

Estudiem ara un mètode que ens permeti resoldre sistemes de qualsevol mida.

Mètode de Gauss

El mètode de Gauss consisteix a obtenir un sistema equivalent a l'original (que tinguin la mateixa solució), però de manera que en cada una de les equacions hi hagi una incògnita menys que a les anteriors.

Per obtenir un sistema equivalent a l'original es poden fer les operacions següents:

1) Multiplicar qualsevol equació per un nombre diferent de zero.

2) Substituir una equació per ella mateixa més una combinació lineal de les altres, és a dir, afegir a una equació les altres multiplicades per una constant.

Vegem el mètode amb un exemple.

Exemple

Resolem el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=8 \\ 3x+y-z=5 \end{array}\right\}$

Si restem a la segona equació el doble de la primera, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -3y+4z=6 \\ 3x+y-z=5 \end{array}\right\}$$

Restant a la tercera, la primera multiplicada per 3 queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -3y+4z=6 \\ -2y+2z=2 \end{array}\right\}$$

Si dividim per dos la tercera equació i canviem d'ordre la segona i la tercera tenim:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+z=1 \\ -3y+4z=6 \end{array}\right\}$$

Restem a la tercera la segona multiplicada per 3 i obtenim:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+z=1 \\ z=3 \end{array}\right\}$$

Com que a la tercera equació només hi ha una incògnita podem trobar ja el valor de z, que serà $z=3$.

Substituint aquest valor a la segona equació ens queda:

$$-y + 3 = 1$$

Per tant, aïllant y tenim $y = 2$.

Finalment, substituint a la primera equació la y i la z pels seus valors tenim:

$$x + 2 - 3 = 1$$

Per tant, $x = 2$.

Aquest mètode es pot aplicar a qualsevol sistema sigui de la mida que sigui.

Vegem com el mateix mètode es pot aplicar en notació matricial.

Definició
Direm matriu del sistema, a la matriu formada pels coeficients de les incògnites.

Exemple

Donat el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{array}\right\}$

La matriu del sistema serà $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Definició
Anomenarem matriu ampliada la matriu obtinguda afegint a la matriu del sistema una columna, la dels termes independents.

Exemple

Donat el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{array}\right\}$

La matriu ampliada associada a aquest sistema és $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

El mètode de Gauss consistia a aconseguir un sistema equivalent, de manera que cada equació tingués una incògnita menys. Això en el llenguatge matricial serà fer que cada fila (equació) tingui un coeficient dels que representen les incògnites menys, és a dir que es transformi en zero. Per fer-ho farem servir les mateixes regles que hem vist en l'exemple anterior.
Agafem l'exemple que hem resolt anteriorment i resolem-lo en forma matricial.

Exemple

Resolem el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=8 \\ 3x+y-z=5 \end{array}\right\}$

Escrivim la matriu ampliada associada a aquest sistema, que serà

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Agafem la segona fila de la matriu ampliada i li restem la primera multiplicada per 2. Això fa que ens quedi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ara a la tercera fila li restem la primera multiplicada per 3 obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dividim la tercera fila per 2 i tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Intercanviem la segona i la tercera files. Això ho podem fer ja que recordem que les files representen equacions. Ens queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A la tercera fila li restem la segona multiplicada per 3 i ens dóna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Recordem que a cada fila l'últim valor correspon al terme independent de l'equació. Per tant, a l'última fila (equació) només hi ha una incògnita. Si la tornem a escriure en forma d'equació tenim $z = 3$.

Si ara posem la segona fila també en forma d'equació i substituïm la z per 3 ens queda $-y+3 = 1$, per tant $y = 2$. Si repetim el mateix a la primera fila substituint ara la y per 2 i la z per 3, ens queda $x + 2 - 3 = 1$. Per tant, $x = 2$.

Exercici

13) En el cas de ser compatibles, aplicant el mètode de Gauss, determineu les solucions dels sistemes d'equacions següents:

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y=-10 \\ 3x+8y=12 \\ -5x-19y=-35 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=2 \\ x-3y=6 \\ x+11y=-14 \\ 4x-5y=14 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+2y+5z=-5 \\ 3x+2y+z=-2 \\ 4x+2y-3z=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=0 \\ 2x+2y+5z=0 \\ -7x-4y+2z=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+z=0 \\ 5x-y+5z=0 \end{array}\right\}$

3.6.2 Sistemes no lineals

Un sistema que tingui alguna equació no lineal (algun dels seus termes de grau més gran que 1) s'anomena sistema no lineal.
Per resoldre els sistemes no lineals s'utilitza bàsicament el mètode de substitució. Vegem-ho amb alguns exemples:

Exemples

1) Resolem el sistema $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ x^2+y^2=45 \end{array}\right\}$

A una de les dues equacions aïllem una de les dues variables. En aquest cas aïllem, per exemple, la variable y i ens queda $y=x-3$.

Substituïm ara a la segona equació la y pel que ens ha sortit i ens queda:

$$x^2+(x-3)^2=45$$

que és una equació de segon grau.

Resolem aquesta equació i ens queda $x_1=6$ i $x_2=-3$.

Substituïm aquests valors a la primera equació per trobar la y i queda:

Per $x=6$ tenim $y=3$.

Per $x=-3$ tenim $y=-6$.

2) Resolem el sistema $\left.\begin{array}{c} 2x-3y=2 \\ xy=8 \end{array}\right\}$

Agafem igual que en l'exemple una de les dues equacions i aïllem una de les dues incògnites, per exemple la y, i ens queda $y=\dfrac{2x-2}{3}$.

Substituïm a l'altra equació i queda:

$$\frac{x(2x-2)}{3}=8$$

que és una equació de segon grau.

Resolent aquesta equació tenim $x_1=4$ i $x_2=-3$. Sustituint aquests valors a la primera equació obtenim:

Per $x=4$ tenim $y=2$

Per $x=-3$ tenim $y=-\dfrac{8}{3}$.

Exercici

14) Resoleu aquests sistemes d'equacions no lineals:

a) $\left.\begin{array}{c} x-2y=2 \\ x^2-y^2=7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{c} y-x=x-1 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{c} 3xy-x+12=0 \\ 3x+y=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{c} y=\sqrt{3}x \\ x^2+(y-2)^2=1 \end{array}\right\}$

3.7 Exercicis de repàs

1) Indiqueu, sense calcular-les, el nombre de solucions de les equacions següents:

a) $2x^2-3x+1=0$

b) $\dfrac{x^2}{3}-2x+5=0$

c) $3x^2+2\sqrt{3}x+1=0$

d) $3\sqrt{5}x^2-2x=0$

2) Resoleu:

a) $6x^2-x-2=0$

b) $x^2-7x+6=0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $(x-2)^2 + x = 4 - 2(1-x)^2$

e) $(x-1)^2 - 5(x-2) = x + 13$

3) Determineu el valor de m perquè les dues solucions de l'equació $x^2 + mx + 63 = 0$ difereixin en dues unitats.

4) Calculeu el valor de k perquè una de les dues solucions de l'equació $kx^2 + 6x - 12 = 0$ sigui el doble de l'altra.

5) Resoleu:

a) $9x^4 - 12x^2 + 3 = 0$

b) $\dfrac{x^2+2}{3} - \dfrac{x^4-8}{2} + 2 = 0$

c) $(x^2-4)^2 - 5(x^2-4) + 4 = 0$

6) Trobeu les solucions de:

a) $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{2}{x-3} + 3$

b) $\dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{1}{x^2-1} = 1$

c) $\dfrac{2x-3}{x^2-4} + \dfrac{3x+1}{x+2} = \dfrac{13}{5(x-2)}$

d) $\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{x^2+x+4}{3x-8}$

7) Resoleu les equacions irracionals:

a) $3 - \sqrt{x-1} = x$

b) $\sqrt{1+\sqrt{x+1}} = 2$

c) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$

d) $\sqrt{(x+3)(x+4)} = 1 - x$

e) $\sqrt{3(x^2-1)} = x^2 - 1$

8) Resoleu les següents inequacions de primer grau amb una incògnita:

a) $5x - 3 + 1 - 4x \leq 4x - 1$

b) $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{29}{6} \leq \dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-3}{2}$

c) $7(2x-1) - 3x \leq 2(x+1) - 9$

d) $3(x-7) + 2x \leq 5(x-1)$

e) $4(3x-1) - 5x < 7(x-1) + 3$

f) $\dfrac{2x+1}{4} - \dfrac{5-x}{2} < 3x - \dfrac{x+2}{3}$

9) Representeu les solucions de les inequacions següents:

a) $\dfrac{2x-y}{4} < \dfrac{3-2x+y}{5}$

b) $\dfrac{x-6y}{3} < 2y-5$

c) $\dfrac{x-3y}{2} - \dfrac{5y-1}{3} < 0$

d) $\dfrac{2x}{3} - 5 + y - 2 < 3 + 3y - 1$

10) Resoleu:

a) $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 0$

b) $\dfrac{2x+x-3+x^2}{x-1} < 3(x-1)$

c) $\dfrac{(x^2+1)(x^2-9x+8)}{x^2+2} \leq 0$

d) $\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10} \leq 0$

11) Resoleu les inequacions de segon grau següents:

a) $(x-2)(x+1) \geq 18$

b) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

c) $x^2 + x + 1 < 0$

d) $(x-2)(x+7) + 17 < \dfrac{x-3}{4}$

12) Resoleu els següents sistemes d'equacions lineals:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 4x+y=10 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+4y=2 \\ y-x=8 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x+6y=-42 \\ 2x+3y=6 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+2y=15 \\ 3x+6y=19 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=5 \\ 5x-3y+z=3 \\ 2x-y+z=3 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 7x+2y-z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{c} 3x-4y+2z=-3 \\ 4x+2y-4z=4 \\ 2x-3y+z=-3 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{c} 3x+y-2z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+2y-3z=1 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{c} x-2y-z+3+t=1 \\ -3x+6y+2z-6t=4 \\ 3x-6y-z+3t=-11 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{c} 2x+4y+5z=1 \\ x+3y+3z=-1 \\ 4x+5y+4z=2 \\ 3x+3y+2z=2 \\ 2x+5y-z=-7 \end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{c} x+y-z+t=4 \\ x-y-z+2t=5 \\ 2x-3y+z+3t=3 \\ 3x+2y-2z-5t=2 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{c} x+y+z+t-u=1 \\ -x-y-z-t+2u=2 \\ x+y+z+2t=0 \end{array}\right\}$

13) Trobeu, si és possible, els valors del paràmetre perquè els sistemes següents tinguin solució. En els casos en què sigui possible, trobeu també la solució dels sistemes.

a) $\left.\begin{array}{c} x+ay=1 \\ ax+y=a^2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{c} x-3y=1 \\ 2x+y=3 \\ 3x+2y=c \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{c} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{c} -x-kz=k \\ x-y-3z=5 \\ 2x-ky=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{c} 2y-z=b \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=b \end{array}\right\}$

14) Resoleu aquests sistemes d'equacions no lineals:

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3y = 3 \\ 2x - 3y = -12 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 2xy + y^2 = 16 \\ x + y = 6 \end{array}\right\}$

15) Calculeu el valor que ha de tenir m perquè aquest sistema no lineal tingui solució única.

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx - 2 \end{array}\right\}$

16) El polinomi $P(x) = ax^2 + bx + c$ compleix que: $P(1) = 0$; $P(-2) = 12$; $P(3) = 2$. Calculeu a, b i c.

17) Una família decideix fer una donació de 112500 ptes. Els pares hi aporten conjuntament una determinada quantitat i entre els tres fills lliuren la quarta part del que donen els pares. Quant ha aportat cada fill si cadascun aporta el mateix?

18) Un pare reparteix entre els seus fills 3000 ptes, de manera que el més gran rep 500 ptes més que el mitjà, el qual rep 200 ptes més que el petit. Quant rep cada fill?

19) Busqueu quatre nombres enters consecutius que sumin 366.

20) Busqueu dos nombres sabent que sumen 7 i els seus inversos $\frac{7}{12}$.

21) Calculeu les dimensions del costat d'un rectangle sabent que el seu perímetre és de 20 cm i la diagonal de $\sqrt{58}$ cm.

22) Si augmenteu en 2 dm cada aresta d'un recipient cúbic, la seva capacitat augmenta en 98 litres. Esbrineu la capacitat inicial del dipòsit.

23) Busqueu un nombre de dues xifres sabent que la suma de totes dues és 8 i que, en dividir-lo pel que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 4 de quocient i 3 de residu.

24) La xifra de les desenes d'un nombre de tres xifres és igual a la suma de les altres dues, i la suma de les tres xifres és 10. Si invertim l'ordre de les xifres, en resulta un nombre més gran que el donat en 99 unitats. Calculeu el nombre inicial.

25) Un galerista d'art compra 70 litografies de tres pintors per 1105000 ptes. Les del pintor A les ha pagat a 15000 ptes cadascuna, les del pintor B a 20000 ptes cadascuna i les del pintor C a 12000 ptes cadacuna. Esbrineu el nombre de litografies de cada pintor si n'ha comprat tantes del pintor A com dels pintors B i C junts.

26) Esbrineu per quins valors del radi l'àrea d'un cercle és superior a 17 cm^2.

27) Una empresa tèxtil ha fabricat 1500 camises amb un cost de producció de 300 ptes per unitat. Si venent totes les camises obté un benefici de més de 600000 ptes, a quin preu ven cada unitat?

28) La base d'un rectangle mesura 2 cm més que la seva altura, i la seva àrea no supera els 35 cm^2. Quina pot ser l'altura del rectangle?

29) Un professor informa els seus 35 alumnes que el triple del nombre d'aprovats en la seva assignatura és inferior al doble del nombre de suspesos. Quin ha estat el nombre màxim d'aprovats?

30) La base d'un rectangle mesura 5 cm més que la seva altura. Si sabeu que la superfície és superior a 14 cm^2, calculeu els possibles valors que pot tenir l'altura.

3.8 Solucions

1) a) $x = 3\sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{2}$
   b) $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$
   c) $x = 3$, $x = 3$
   d) No té solució
   e) $x = 0$, $x = 0$
   f) $x = \frac{5}{3}$, $x = \frac{-5}{3}$
   g) $x = 0$, $x = 2$
   h) $x = -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{97}$, $x = -\frac{11}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{97}$
   i) $x = 1 + \sqrt{3}$, $x = -1 + \sqrt{3}$
   j) $x = 2$, $x = 2$
   k) $x = -1 + \sqrt{2}$, $x = -1 - \sqrt{2}$

2) a) 2
   b) 0
   c) 1
   d) 2

3) a) $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$
   b) $x = 1$, $x = -1$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$
   c) $x = -3$, $x = 3$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$
   d) $x = 1$, $x = -1$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$
   e) $x = 2$, $x = -2$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$

f) No té solució

g) $x = \sqrt[3]{3}$, $x = \sqrt[3]{2}$

4) a) $x = 1$, $x = -1$

b) $x = -4$, $x = 2$

c) $x = -5 + 2\sqrt{13}$, $x = -5 - 2\sqrt{13}$

d) $x = -3$, $x = \dfrac{13}{4}$

e) $x = 4$, $x = -\dfrac{24}{13} + \dfrac{1}{13}\sqrt{381}$, $x = -\dfrac{24}{13} - \dfrac{1}{13}\sqrt{381}$

f) $x = 5$, $x = 9$

5) a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = 5$

d) $x = 5$

e) No té solució.

f) $x = 3$

6) a) $x > -1$

b) $(-\infty, \infty)$

c) $x > \dfrac{1}{12}$

d) $x < \dfrac{2}{13}$

e) $(-\infty, \infty)$

f) $x \leq \dfrac{47}{15}$

g) $(-\infty, \infty)$

h) $(-\infty, \infty)$

7) a) Sí.

b) No.

c) Sí.

9) a) $(-6, \infty)$

b) $(-\infty, 2)$

10) a) $x < -1$, $x > 3$

b) $x > 0$, $x \leq \dfrac{1}{2}$

c) $x > -1$, $x < 0$, $x > 4$

d) $x < -2$, $x > -1$, $x < 2$, $x > 3$

11) a) $x \neq 3$

b) $x \geq -2$, $x \leq \frac{1}{3}$

c) $x < -2$, $x > 0$

d) No té solució.

e) $x \leq 5$, $x \geq 1$

f) No té solució.

g) $x \leq -5$, $x \geq 2$

h) No té solució.

i) $x < -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{89}$, $x \geq -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{89}$

j) No té solució.

12) a) $x = \frac{9}{124}$, $y = \frac{-45}{124}$

b) $y = 0$, $x = 2$

c) $y = \frac{-61}{25}$, $x = \frac{74}{25}$

13) a) No té solució.

b) $y = \frac{-10}{7}$, $x = \frac{12}{7}$

c) $x = x$, $z = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$, $y = -\frac{13}{8}x - \frac{5}{8}$

d) $x = x$, $z = \frac{1}{4}x$, $y = -\frac{13}{8}x$

e) $y = 0$, $x = -z$, $z = z$

14) a) $y = -3$, $x = -4$ o $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{8}{3}$

b) $x = \frac{-1}{5}$, $y = \frac{-7}{5}$ o $x = 1$, $y = 1$

c) $x = \frac{-4}{9}$, $y = \frac{28}{3}$ o $y = -1$, $x = 3$

d) $y = \frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ o $y = \frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Exercicis de repàs:

1) a) 2

b) Cap.

c) 1

d) 2

2) a) $x = \frac{-1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$

b) $x = 1$, $x = 6$

c) $x = 3$, $x = 3$

d) $x = \frac{1}{3}$, $x = 2$

e) $x = 4 + 3\sqrt{2}$, $x = 4 - 3\sqrt{2}$

3) $x_1 = -7$, $m = 16$, $x_2 = -9$ o $x_1 = 9$, $m = -16$, $x_2 = 7$

4) $x_1 = 3$, $k = \frac{-2}{3}$, $x_2 = 6$

5) a) $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

b) $x = 2$, $x = -2$

c) $x = 2\sqrt{2}$, $x = -2\sqrt{2}$, $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$

6) a) $x = 0$, $x = 5$

b) $x = \frac{2}{3}$

c) $x = \frac{-17}{15}$, $x = 3$

d) $x = \frac{-5}{2}$, $x = 4$

7) a) $x = 2$

b) $x = 8$

c) $x = 9$

d) $x = \frac{-11}{9}$

e) $x = 1$, $x = 2$, $x = -2$, $x = -1$

8) a) $x \geq \frac{-1}{3}$

b) $x \geq 4$

c) $x \leq 0$

d) Qualsevol nombre real.

e) No té solució.

f) $x > \frac{-19}{20}$

10) a) $x < -1$, $x \geq 3$

b) $x < \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{33}, \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$

c) $x \geq 1, x \leq 8$

d) $x < 2, x \geq -5$

11) a) $x \leq -4, x \geq 5$

b) $x = \frac{1}{3}$

c) No té solució.

d) $x < -1, x > \frac{-15}{4}$

12) a) $y = \frac{2}{3}, x = \frac{7}{3}$

b) $x = -5, y = 3$

c) $x = 54, y = -34$

d) No té solució

e) $x = \frac{16}{15}, y = \frac{8}{5}, z = \frac{37}{15}$

f) $x = 0, y = 0, z = 0$

g) $z = 1, x = 1, y = 2$

h) $z = 1, x = 1, y = 1$

i) $z = \frac{-5}{2}, t = \frac{3}{2}, x = 2y - 6, y = y$

j) $x = 2, y = -2, z = 1$

k) $x = 1, z = -2, t = 1, y = 0$

l) $y = y, t = -4, u = 3, z = z, x = -y - z + 8$

13) a) Si $a = 1$ tenim $y = y, x = -y + 1$
Si $a = -1$ no té solució.
Si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ tenim $y = -\frac{a}{a+1}, x = \frac{a^2 + a + 1}{a+1}$

b) Si $c = \frac{32}{7}$ tenim $y = \frac{1}{7}, x = \frac{10}{7}$
Si $c \neq \frac{32}{7}$ no té solució.

c) Si $m = 1$ tenim $y = y, z = z, x = -y - z + 1$
Si $m = -2$ no té solució.
Si $m \neq 1$ i $m \neq -2$ tenim $x = \frac{1}{m+2}, z = \frac{1}{m+2}, y = \frac{1}{m+2}$

d) Si $k = 0$ tenim $x = 0, z = z, y = -5 - 3z$
Si $k = -1$ no té solució.
Si $k \neq 0$ i $k \neq -1$ tenim $z = -\frac{3+k}{1+k}, y = 4\frac{1}{1+k}, x = 2\frac{k}{1+k}$

e) Si $b = 6$ tenim $y = 4$, $z = 2$, $x = 5$
Si $b \neq 6$ no té solució.

14) a) $y = 2$, $x = -3$ o $x = 5$, $y = \dfrac{22}{3}$
b) $y = 1$, $x = 5$ o $x = 1$, $y = 5$

15) $m = \sqrt{3}$, $m = -\sqrt{3}$

16) $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$

17) 7500 ptes.

18) Petit 700 ptes. Mitjà 900 ptes. Gran 1400 ptes.

19) 90, 91, 92 i 93.

20) $y = 3$, $x = 4$ o $x = 3$, $y = 4$

21) $x = 7$, $y = 3$ o $y = 7$, $x = 3$

22) 14 litres.

23) 71

24) 253

25) $a = 35$, $b = 20$, $c = 15$

26) $r > \sqrt{\dfrac{17}{\pi}}$

27) $x > 700$

28) $h < 5$

29) $x < 14$

30) $h > 2$

Capítol 4

POLINOMIS I FRACCIONS ALGÈBRIQUES

4.1 Polinomis. Definició i principals característiques

Definició
Un polinomi és una expressió de la forma: $a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$ on $a_n \neq 0$, amb els nombres a_n, $a_{n-1}, \ldots,$ a_1, a_0 són nombres reals (constants) que s'anomenen coeficients, la variable x l'anomenem indeterminada i els exponents de la indeterminada han de ser nombres naturals.
Per anomenar un polinomi sol fer servir la notació següent: $\mathrm{P}(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$.

Exemples

1) Les expressions $\mathrm{P}(x) = 6\,x^3 - 2\,x^2 + 7$, $\mathrm{Q}(x) = -2\,x^5 + 5\,x - 3$, $\mathrm{R}(x) = 15\,x^3 - 4\,x$ són polinomis.

   Els coeficients de $\mathrm{P}(x)$ són 6, -2, 7; els de $\mathrm{Q}(x)$ són -2, 5, -3 i els de $\mathrm{R}(x)$ 15, -4.

2) Les expressions $\dfrac{1}{x+2}$; $\sqrt{x+1}$; $2\,x^{-3}$ no són polinomis.

Definició
Els termes d'un polinomi són cadascun dels sumands de què consta el polinomi. Aquests termes també s'anomenen monomis.

Exemple

Donat el polinomi $P(x) = 2x^2 + 3x - 4$, els seus termes són $2x^2$; $3x$ i -4.

Definicions
El grau d'un terme o monomi és l'exponent de la indeterminada.
El grau d'un polinomi és el més gran de tots els graus dels seus termes.
El terme de grau 0 s'anomena terme independent.

Exemple

El grau de cada un dels termes del polinomi $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 2$ són:

del terme $2x^3$, 3

del terme $3x^2$, 2

del terme $-4x$, 1

i del terme -2, 0.

El grau del polinomi és 3, ja que és el més gran dels graus de cadascun dels termes.

Definició
El valor numèric d'un polinomi $P(x)$ per a $x = a$ és el valor que pren el polinomi en substituir la indeterminada x pel nombre a. Aquest valor l'anomenem $P(a)$.

Exemple

Donat el polinomi $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x - 1$

El valor numèric de $P(x)$ per $x = 2$ és $P(2) = 2 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 1 = 21$

Exercicis

1) Indiqueu el grau i els coeficients de cadascun dels polinomis següents:

   a) $A(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

   b) $B(x) = -x^4 + \sqrt{2}x^2 - \dfrac{x}{3}$

   c) $C(x) = 3x^2 - \dfrac{5x}{4} + \dfrac{8}{5}$

   d) $D(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

2) Escriviu els polinomis següents:

   a) De tercer grau i dos termes.

   b) De quart grau i cinc termes.

c) De segon grau i un terme.

d) Pots escriure un polinomi de tercer grau i cinc termes?

3) Indiqueu quina de les expressions algèbriques següents no són polinomis. Expliqueu per què.

a) $\dfrac{5}{x^2}+1$

b) $\dfrac{x^2+1}{5}$

c) $x^3+x^{-2}+x+1$

d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^4}}{9}}$

e) $\dfrac{x^2+x+2}{x}$

f) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$

4) Calculeu el valor numèric del polinomi següent: $\mathrm{A}(x)=-x^3-x^2+x-1$ per a $x=-1$

5) Determineu els coeficients a, b i c perquè els polinomis següents siguin idèntics: $\mathrm{B}(x)=x^4+x^2+1$ i $\mathrm{C}(x)=x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+1$

4.2 Operacions amb polinomis

4.2.1 Suma de polinomis

Per sumar dos polinomis n'hi ha prou de sumar els coeficients dels termes del mateix grau de tots dos polinomis.

Exemple

Siguin els polinomis $\mathrm{P}(x)=2\,x^5-3\,x^2+2\,x-1$ i $\mathrm{Q}(x)=x^4+7\,x^2+5\,x+2$. Calculem $\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)$.

Posem els dos polinomis en columna de manera que coincideixin en la mateixa columna els termes del mateix grau.

$$\begin{array}{ccccc}
2\,x^5 & & -3\,x2 & +2\,x & -1 \\
 & x^4 & +7\,x^2 & +5\,x & +2 \\
\hline
2\,x^5 & +4x^4 & +4\,x^2 & +7\,x & +1
\end{array}$$

Per tant, el polinomi suma serà: $\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)=2\,x^5+x^4+4\,x^2+7\,x+1$

Propietats:

1) Associativa: $[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$

2) Commutativa: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

3) Element neutre: el polinomi nul (0) $P(x) + 0 = P(x)$

4) Element oposat: $P(x)$ té un oposat que és $-P(x)$ ja que $P(x)+[-P(x)] = 0$

4.2.2 Resta de polinomis

Per restar dos polinomis n'hi ha prou de restar els coeficients dels termes del mateix grau de tots dos polinomis.

Exemple

Siguin els polinomis $P(x) = 2\,x^5 - 3\,x^2 + 2\,x - 1$ i $Q(x) = x^4 + 7\,x^2 + 5\,x + 2$. Calculem $P(x) - Q(x)$

Canviem de signe tot el polinomi $Q(x)$. A continuació, posem els dos polinomis en columna de manera que coincideixen en la mateixa columna els termes del mateix grau, i un cop escrit així actuem igual que en la suma.

Si canviem de signe el polinomi $Q(x)$, queda $Q(x) = -x^4 - 7\,x^2 - 5\,x - 2$. Posem-los ara en columna i tenim

$$\begin{array}{ccccc} 2\,x^5 & & -3\,x2 & +2\,x & -1 \\ & -x^4 & -7\,x^2 & -5\,x & -2 \\ \hline 2\,x^5 & -x^4 & -10\,x^2 & -3\,x & -3 \end{array}$$

Per tant, el polinomi resta serà: $P(x) - Q(x) = 2\,x^5 - x^4 - 10\,x^2 - 3\,x - 3$

4.2.3 Multiplicació de polinomis

Multiplicació de dos monomis

Per multiplicar dos monomis es multipliquen els coeficients i sumem els exponents de la indeterminada de cadascun dels monomis.

Exemple

Multipliquem els monomis $2\,x^3$ per $-3\,x^2$.

El coeficient d'aquest producte serà -6 i l'exponent de la indeterminada serà 5. Per tant, el resultat queda $-6\,x^5$.

Multiplicació d'un monomi per un polinomi

Per multiplicar un monomi per un polinomi $P(x)$ es multiplica el monomi per cada un dels termes de $P(x)$.

Exemple

Multipliquem el monomi $-3\,x^4$ pel polinomi $P(x) = 3\,x^3 - 2\,x^2 + 5\,x - 4$.

$$\begin{array}{cccc} 3\,x^3 & -2\,x^2 & +5\,\mathrm{x} & -4 \\ & & & -3\,x^4 \\ \hline -9\,x^7 & +6x^6 & -15\,x^5 & +12\,x^4 \end{array}$$

Per tant, el polinomi resultant serà $-9\,x^7 + 6\,x^6 - 15\,x^5 + 12\,x^4$.

Multiplicació d'un polinomi per un altre polinomi

Per multiplicar el polinomi $P(x)$ pel polinomi $Q(x)$ es multiplica cada terme de $Q(x)$ pel polinomi $P(x)$ i sumem els polinomis resultants.

Exemple

Siguin els polinomis $P(x) = 3\,x^4 - 2\,x$ i $Q(x) = 2\,x^3 - 2\,x^2 + 3$. Calculem $P(x)\,Q(x)$.

Posem els dos polinomis en columna i fem l'operació

$$\begin{array}{ccccccc} & & 3\,x^4 & & & -2\,x & \\ & & & 2\,x^3 & -2\,x^2 & & +3 \\ \hline & & +9\,x^4 & & & -6\,x & \\ & -6\,x^6 & & +4\,x^3 & & & \\ 6\,x^7 & & -4\,x^4 & & & & \\ \hline 6\,x^7 & -6\,x^6 & +8\,x^4 & -4\,x^3 & & -6\,x & \end{array}$$

Per tant, el polinomi resultant serà $6\,x^7 - 6\,x^6 + 8\,x^4 - 4\,x^3 - 6\,x$.

Propietats

1) Associativa: $[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$

2) Commutativa: $P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$

3) Element neutre: el polinomi unitat (1) $P(x) \cdot 1 = P(x)$

4.2.4 Productes notables

Quadrat de la suma d'un binomi: $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
Quadrat de la diferència d'un binomi: $(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$
Multiplicació de la suma per la diferència d'un binomi: $(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$

Exemples

1) Calculem $(2\,x+1)^2$
   $(2\,x+1)^2 = (2\,x)^2 + 2\,2\,x\,1 + 1^2 = 4\,x^2 + 4\,x + 1$

2) Calculem $(2-\sqrt{2}\,x)^2$
   $(2-\sqrt{2}\,x)^2 = 2^2 - 2\,2\,\sqrt{2}\,x + (\sqrt{2}\,x)^2 = 4 - 4\sqrt{2}\,x + 2\,x^2$

3) Calculem $(3\,x+1)\,(3\,x-1)$
   $(3\,x+1)\,(3\,x-1) = (3\,x)^2 - 1^2 = 9\,x^2 - 1$

4.2.5 Divisió de polinomis

Divisió de dos monomis

Per dividir dos monomis es divideix el coeficient del primer monomi entre el coeficient del segon, i es resta l'exponent de la indeterminada del primer monomi menys el del segon. Perquè el resultat sigui un altre monomi fa falta que el grau del primer monomi sigui més gran o igual que el del segon.

Exemple

Dividim el monomi $12\,x^5$ entre $4\,x^3$.

El coeficient del resultat serà 3 i l'exponent serà 2. Per tant el monomi resultant serà $3\,x^2$.

Divisió de dos polinomis

Dividir un polinomi $\mathrm{D}(x)$ (polinomi dividend) entre un altre polinomi $\mathrm{d}(x)$ (polinomi divisor), consisteix a trobar uns altres polinomis $\mathrm{q}(x)$ (polinomi quocient) i $\mathrm{r}(x)$ (polinomi residu) de manera que es verifiqui $\mathrm{D}(x) = \mathrm{d}(x)\,\mathrm{q}(x) + \mathrm{r}(x)$.
Una altra manera d'escriure la relació és:

$$\frac{\mathrm{D}(x)}{\mathrm{d}(x)} = \frac{\mathrm{d}(x)\,\mathrm{q}(x) + \mathrm{r}(x)}{\mathrm{d}(x)}$$

Si separem amb dos fraccions i simplifiquem queda:

$$\frac{\mathrm{D}(x)}{\mathrm{d}(x)} = \mathrm{q}(x) + \frac{\mathrm{r}(x)}{\mathrm{d}(x)}$$

El grau de $\mathrm{q}(x)$ sempre és igual al grau de $\mathrm{D}(x)$ menys el grau de $\mathrm{d}(x)$.

El grau de $r(x)$ és més petit que el grau de $d(x)$.
Si $r(x) = 0$ llavors es diu que $d(x)$ és divisor de $D(x)$ o que $D(x)$ és divisible per $d(x)$.
Per veure com es fa la divisió ho farem mitjançant un exemple.

Exemple

Siguin els polinomis $D(x) = 2x^5 - 5x^3 + 6x - 4$ i $d(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Calculem $D(x) : d(x)$.

Agafem el terme de grau més gran de $D(x)$, $2x^5$ i dividim-lo entre el terme de grau més gran de $d(x)$, x^3. El resultat, $2x^2$, és el primer terme del polinomi $q(x)$. Multipliquem ara $2x^2$ per $d(x)$ i obtenim $2x^5 - 6x^4 + 5x^2$. Restem ara $D(x)$ menys $2x^5 - 6x^4 + 5x^2$ i obtenim el polinomi $r_1(x) = 6x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 6x - 4$.

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr}
+2x^5 & & -5x^3 & & +6x & -4 & x^3 & -3x^2 & +5 \\
-2x^5 & +6x^4 & & -10x^2 & & & 2x^2 & & \\
\hline
 & +6x^4 & -5x^3 & -5x^2 & +6x & -4 & & &
\end{array}$$

Com que el grau de $r_1(x)$ és més gran que el grau de $d(x)$ hem de continuar la divisió repetint exactament els mateixos passos fins que el grau del polinomi residu sigui més petit que el del polinomi divisor.

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr}
+2x^5 & & -5x^3 & & +6x & -4 & x^3 & -3x^2 & +5 \\
-2x^5 & +6x^4 & & -10x^2 & & & 2x^2 & +6x & +13 \\
\hline
 & +6x^4 & -5x^3 & -5x^2 & +6x & -4 & & & \\
 & -6x^4 & +18x^3 & & -5x & & & & \\
\hline
 & & +13x^3 & -5x^2 & +x & -4 & & & \\
 & & -13x^3 & +39x^2 & & -65 & & & \\
\hline
 & & & 34x^2 & +x & -69 & & &
\end{array}$$

Per tant, el quocient $q(x) = 2x^2 + 6x + 13$ i la residu $r(x) = 34x^2 + x - 69$

Exercicis

6) Donats els polinomis $A(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4}$, $B(x) = -x^3 + \frac{7x}{2} + 3$ i $C(x) = 2x^2 - 4x$, calculeu:

   a) $A(x) + B(x)$
   b) $A(x) - B(x)$
   c) $C(x) + B(x) + A(x)$
   d) $B(x) - [A(x) - C(x)]$
   e) $-x^2 \cdot [B(x) - C(x)]$

f) $3\,A(x) - 5\,B(x) + \dfrac{C(x)}{2}$

g) $B(x) \cdot C(x)$

h) $[C(x)]^3$

Contesteu raonadament les preguntes següents:

a) Per què el grau del polinomi $A(x) + B(x)$ no és 3?

b) Quin és el grau del polinomi $-x^2\,[B(x) - C(x)]$?

c) Per què el grau del polinomi $[C(x)]^3$ és 6?

7) Calculeu el quocient i el residu de dividir el polinomi $P(x) = x^5 - 5\,x^4 + 3\,x^3 - 3\,x + 6$ entre el polinomi $Q(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 5$.

8) Efectueu la divisió $(3\,x^4 - x^3 + 1) : (x^2 + 1)$. Comproveu que es verifica la igualtat fonamental.

9) En una divisió el divisor és el polinomi $x^3 - 2\,x^2 + 3$, el quocient és $x^2 + 2\,x + 1$ i el residu és $-8\,x - 2$. De quin grau és el dividend? Podeu calcular-lo? Feu-ho.

10) Trobeu els valors d'a i b de manera que en dividir $(3\,x^4 - 12\,x^2 + a\,x + b) : (x^3 - 2\,x^2 + 3)$ el residu sigui $\dfrac{1}{2}$.

11) En una divisió exacta el dividend és $x^5 - 1$ i el quocient és $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Calculeu-ne el divisor.

4.3 Regla de Ruffini

El procés de la divisió de polinomis és en general molt feixuc, però si el divisor és un polinomi de la forma $x + a$ o $x - a$ on a és un nombre real qualsevol, llavors el procés es pot simplificar molt. El mètode que ens permet fer la divisió en aquest cas es coneix amb el nom de regla de Ruffini.
El següent exemple il·lustra aquest mètode:

Exemple

Sigui $D(x) = x^3 + 4\,x^2 - 3$ i $d(x) = x + 2$. Calculem utilitzant la regla de Ruffini la divisió de $D(x)$ entre $d(x)$.

Ordenem els termes del polinomi $D(x)$ pel seu grau de major a menor grau. Un cop fet això, agafem només els coeficients d'aquest polinomi completant amb zeros els possibles termes que hi faltin, en el nostre cas 1, 4, 0 i -3. S'agafa el terme independent del dividend canviat de signe -2.

El primer coeficient del resultat serà el mateix que el primer coeficient de $D(x)$, que en aquest cas és 1. A continuació es multiplica aquest primer

coeficient, 1, per -2 i el resultat se suma amb el segon coeficient de $D(x)$, 4, obtenim 2, que és el segon coeficient del resultat. Repetim aquest procés fins al final i tindrem

$$\begin{array}{c|cccc} & +1 & +4 & 0 & -3 \\ -2 & \downarrow & -2 & -4 & +8 \\ \hline & +1 & +2 & -4 & +5 \end{array}$$

L'últim d'aquests coeficients és el residu de la divisió i els altres són els coeficients del polinomi quocient. Només faltaria ara veure quins són aquests polinomis.

Ja hem vist que el grau del polinomi quocient és la diferència entre el grau del dividend menys el grau del divisor, en el nostre cas $3 - 1 = 2$. Per tant, el polinomi quocient tindrà grau 2 i serà $q(x) = x^2 + 2x - 4$. També hem vist que el grau del polinomi residu ha de ser més petit que el grau del divisor. En el nostre cas el divisor té grau 1, per tant, el residu tindrà grau 0, és a dir, serà un nombre, $r(x) = 5$.

Exercicis

12) Feu les divisions següents. Apliqueu la regla de Ruffini quan sigui possible.

a) $(6x^3 - 3x^4 + 2x + 1) : (-3x^3 + 2x + 4)$

b) $x^6 : (x^4 + x^2 - 2)$

c) $(2x^3 - x^2 + 3x) : (x - 1)$

d) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

13) Calculeu el valor de k perquè la divisió següent $(2x^3 - x^2 + k) : (x + 2)$ sigui exacta.

4.4 Teorema del Residu

El residu de la divisió d'un polinomi $P(x)$ qualsevol per $x - a$ coincideix amb el valor numèric del polinomi $P(x)$ per $x = a$, $P(a)$.

Exemple

Sigui $P(x) = x^4 - 2x^2 + 10$ i $Q(x) = x - 1$.

Fem la divisió aplicant el mètode de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc} & +1 & 0 & -2 & 0 & +10 \\ +1 & & +1 & +1 & -1 & -1 \\ \hline & +1 & +1 & -1 & -1 & +9 \end{array}$$

Per tant, $q(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ és el polinomi quocient i $r(x) = 9$ com a residu.

Si calculem $P(1)$ tindrem $P(1) = 1 - 2 + 10 = 9$, que és precisament $r(x)$ el residu de la divisió anterior.

Exercicis

14) Trieu el mètode que considereu més convenient per trobar el valor numèric dels polinomis següents pel valor que s'indica:

a) $-\dfrac{3\,x^4}{2} - 5\,x^3 + 4\,x - 2$ per $x = 12$

b) $-x^6 + x^4 - \sqrt{2}\,x^3 - x^2$ per $x = \sqrt{2}$

c) $\dfrac{2\,x^3}{5} + \dfrac{1\,x^2}{5} + \dfrac{3\,x}{5} + 1$ per $x = -5$

15) Calculeu el residu de la divisió $(2\,x^3 - 3) : (x - 2)$. Feu-ho pels dos procediments. Expliqueu quin és el més ràpid.

16) Determineu el valor de k perquè la divisió següent $(x^3 - 3\,x^2 + 5\,x + k) : (x + 3)$ sigui exacta.

17) Trobeu el residu de la divisió $(x^9 + 1) : (x + 1)$. Podeu fer-ho sense fer la divisió.

4.5 Arrels d'un polinomi. Factorització

Definició
Donat un polinomi $P(x)$, es diu que x_1, un nombre real qualsevol, és una arrel de $P(x)$ si el valor numèric de $P(x)$ per $x = x_1$ és 0, és a dir, $P(x_1) = 0$.

Estudiarem dos grans casos:

4.5.1 Arrels d'un polinomi de grau 1 o 2

Les podem trobar fàcilment resolent l'equació $P(x) = 0$

Exemples

1) Trobem l'arrel de $P(x) = 2\,x + 3$

Si fem $2\,x + 3 = 0$ i resolem l'equació queda $x = -\dfrac{2}{3}$, que és l'arrel del polinomi.

2) Trobem l'arrel de $P(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

Si fem $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$, resolem l'equació i obtenim com a solució $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = -1$, que són les arrels del polinomi.

4.5.2 Arrels d'un polinomi de grau més gran que 2

El procés de trobar les arrels racionals d'un polinomi qualsevol

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

es pot descompondre en dos passes:

1) Seleccionar els nombres que poden ser arrels racionals. Es verifica que si $\frac{r}{s}$ és arrel de $P(x)$, llavors r és divisor d'a_0 i s és divisor d'a_n. Per trobar aquest $\frac{r}{s}$ s'agafen tots els divisors d'a_0 i es divideix cada un d'aquests divisors entre tots els divisors d'a_n. Això ens dóna les possibles arrels del polinomi.

2) Comprovar quina o quines són efectivament arrels. Per fer-ho aplicarem el teorema del residu.

Exemples

1) Trobem les arrels de $P(x) = x^4 + 3\,x^3 + x^2 - 3\,x - 2$

Primer busquem els divisors del terme independent: 1, -1, $2-2$. Com que el coeficient de x^4 és 1, les possibles arrels racionals són enteres i poden ser 1, -1, $2-2$

Aplicant el teorema del residu surt que $P(1) = 0$, per tant $x = 1$ és arrel, i el polinomi quocient que queda és $x^3 + 4\,x^2 + 5\,x + 2$. Per trobar les arrels que falten s'hauria de continuar aplicant el teorema del residu per a aquest polinomi.

Si l'apliquem surt que $P(-1) = 0$. Per tant, $x = -1$ és una altra arrel, i el polinomi quocient és ara $x^2 + 3\,x + 2$, que com ja és un polinomi de grau 2, es pot aplicar el cas anterior, i resolent l'equació de 2n grau surt que té dues arrels més, que són $x = -1$ i $x = -2$.

Per tant, les quatre arrels d'aquest polinomi són $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ (doble) i $x_3 = -2$

2) Trobem les arrels de $3\,x^3 - 8\,x^2 + x + 2$

Els divisors del terme independent són: 1, -1, 2, -2. Divisors del terme de grau màxim: 1, -1, 3, -3.

Per tant, les possibles arrels racionals del polinomi són: 1, -1, 2, -2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$.

Aplicant el teorema del residu surt que té una arrel racional $x = \frac{2}{3}$. El polinomi quocient que resulta és $3\,x^2 - 6\,x - 3$. Com que és de grau dos es pot resoldre l'equació de 2n grau i surten dues solucions $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Llavors les tres arrels del polinomi són $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ i $x_3 = \frac{2}{3}$

Definició
Factoritzar un polinomi $\mathrm{P}(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$, és escriure'l de la forma següent:

$$\mathrm{P}(x) = a_n\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})\,(x - x_n)$$

On $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ són les arrels del polinomi.

Exemple

Factoritzem el polinomi $\mathrm{P}(x) = x^4 + 3\,x^3 + x^2 - 3\,x - 2$.

Primer hem de trobar les arrels aplicant els mètodes que ja hem vist anteriorment. En l'exemple anterior hem trobat que les arrels són $x_1 = -1$ (doble), $x_2 = -2$ i $x_3 = 1$. Per tant, la descomposició queda $\mathrm{P}(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+2) = (x-1)\cdot(x+1)^2\cdot(x+2)$.

Exercicis

18) Comproveu que $\mathrm{P}(x) = x^3 - 3\,x^2 - 6\,x + 8$ és divisible per $x+2$. Expresseu el polinomi $\mathrm{P}(x)$ com a producte de dos polinomis.

19) Calculeu k perquè el polinomi $x^4 + k$ sigui divisible per $x + 1$. Pot ser $k = 1$? Raoneu la vostra resposta.

20) Un polinomi $\mathrm{P}(x)$ té només els divisors 3, $x^2 - 1$ i $\frac{x}{3} + \frac{2}{9}$. Trobeu $\mathrm{P}(x)$.

21) Trobeu k perquè el polinomi $x^3 - 3\,x^2 + k$ sigui múltiple de $x + 1$.

22) Digueu si són certes o falses les afirmacions següents:

    a) $x^4 - 1$ és divisible per $x + 1$
    b) $x^5 - 1$ és múltiple de $x - 1$
    c) $x + 2$ és un divisor de $x^3 + 8$
    d) $x - 3$ és un divisor de $x^2 + 9$
    e) $x^2 - 4$ és múltiple de $x + 2$
    f) $x^7 + 1$ és múltiple de $x + 1$

g) $x+3$ és divisor de x^3-27

23) Determineu, si és possible, les arrels enteres d'aquests polinomis: $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ $B(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ $C(x) = 2x^3 + 2$ $D(x) = x^3 + 7x^2 + 6x$ $E(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ $F(x) = x^4 + x^2 - 2$

24) És 3 una arrel del polinomi $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$? Per què?

25) Sigui $A(x) = (x^2 - 9) \cdot (2x - 1)$ la descomposició d'un polinomi. Quines són les arrels de $A(x)$?

26) Si $P(x) = (x^2 - 4) \cdot (3x + 1)$, doneu les arrels de $P(x)$.

27) Expliqueu per què el polinomi $B(x) = (x^2 + 4) \cdot (x - 1)$ només té una arrel real.

28) Factoritzeu el polinomi $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$. Trobeu una arrel entera entre els divisors del terme independent. Doneu totes les seves arrels.

29) Factoritzeu els polinomis següents:

a) $x^4 - 1$

b) $x^5 + x^4 - x - 1$

c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2$

d) $9x^2 + 30x + 25$

e) $\dfrac{x^2}{9} - 9$

f) $x^4 - 3x^2 - x - 2$

30) Trobeu les arrels d'aquests polinomis per mitjà de la factorització:

a) $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

b) $2x^4 + 6x^3 - 8x$

c) $3x^2 + 3x + \dfrac{3}{4}$

d) $x^3 + 3x^2 - 4x$

e) $x^4 + x^3 - 2x^2$

4.6 Màxim comú divisor i mínim comú múltiple

Definicions

El màxim comú divisor de dos polinomis (mcd) és el polinomi de grau més gran que divideix simultàniament els dos polinomis donats.

S'obté multiplicant els factors comuns dels dos polinomis elevats a l'exponent més petit.

El mínim comú múltiple de dos polinomis (mcm) és el polinomi de grau més petit que és divisible pels dos polinomis donats.
S'obté de multiplicar els factors comuns i no comuns dels dos polinomis elevats a l'exponent més gran.

Exemple

Calculem el mcd i mcm dels polinomis $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ i $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

El primer pas consistirà a trobar la descomposició en factors dels dos polinomis, per fer-ho primer trobarem les arrels de cadascun.

Les arrels del polinomi $P(x)$ són $x_1 = 2$ (doble) i $x_2 = -1$ i les arrels de $Q(x)$ $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ i $x_3 = -3$.

Per tant, la descomposició en factors queda:

$P(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)$

$Q(x) = (x-2)(x+1) \cdot (x+3)$

Llavors el $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = (x-2) \cdot (x+1)$, que si ho multipliquem queda $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = x^2 - x - 2$ i el $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = (x-2)^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$, que efectuat queda $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$.

Propietat

El màxim comú divisor i el mínim comú múltiple de dos polinomis $P(x)$ i $Q(x)$ compleixen que $P(x) \cdot Q(x) = \text{mcd}(P(x), Q(x)) \cdot \text{mcm}(P(x), Q(x))$

Exercicis

31) Calculeu el mcd i el mcm dels polinomis:

a) $P(x) = x^2 - 9$ i $R(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = x^2 - 1$ i $R(x) = 3x^2 - 6x + 3$

c) $A(x) = 3x^4 - 3$ i $B(x) = 3x^2 - 3$

d) $A(x) = x^2 - 2x - 3$, $B(x) = x^3 + 2x^2 + x$ i $C(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

32) Trobeu el mcd i el mcm de $S(x) = (x-2)^2$ i $T(x) = x^2 - 4$.

33) Dos polinomis $A(x)$ i $B(x)$ tenen com a mcd 1. Quin és el seu mcm?

4.7 Fraccions algèbriques

Definició

Una fracció algèbrica és una expressió del tipus $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ amb $Q(x) \neq 0$, on $P(x)$ i $Q(x)$ són dos polinomis.

Exemple

Les expressions $\dfrac{3x+1}{2x-2}; \dfrac{x}{x^3-6x+3}; \dfrac{10}{x^2}$ són fraccions algèbriques.

Definició

Direm que dues fraccions algèbriques $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ i $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ són equivalents si es compleix que:

$$P_1(x) \cdot Q_2(x) = P_2(x) \cdot Q_1(x)$$

Exemple

Vegem si les fraccions algèbriques $\dfrac{x^2+x-6}{x^3-5x^2+6x}$ i $\dfrac{x+3}{x^2-3x}$ són equivalents.

$(x^2+x-6) \cdot (x^2-3x) = x^4-2x^3-9x^2+18x$

$(x^3-5x^2+6x) \cdot (x+3) = x^4-2x^3-9x^2+18x$

Per tant, com que aquests productes són iguals, podem dir que les dues fraccions algèbriques són equivalents.

Exercicis

34) Determineu si els parells de fraccions següents són equivalents:

a) $\dfrac{x^2-25}{x^2+7x+10}$ i $\dfrac{x-5}{x+2}$

b) $\dfrac{1}{x+1}$ i $\dfrac{x-1}{x^2+2}$

35) Considereu la fracció $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Indiqueu quines de les fraccions següents són equivalents a la donada:

a) $\dfrac{4\,P(x)}{4\,Q(x)}$

b) $\dfrac{10\,P(x)}{5\,Q(x)}$

c) $\dfrac{3+\mathrm{P}(x)}{3+\mathrm{Q}(x)}$

d) $\dfrac{[\mathrm{P}(x)]^2}{[\mathrm{Q}(x)]^2}$

4.7.1 Simplificació de fraccions algèbriques

Simplificar la fraccio algèbrica $\dfrac{\mathrm{P}_1(x)}{\mathrm{Q}_1(x)}$ vol dir trobar una altra fracció algèbrica $\dfrac{\mathrm{P}_2(x)}{\mathrm{Q}_2(x)}$ equivalent a la primera, de manera que el mcd($\mathrm{P}_2(x)$,$\mathrm{Q}_2(x)$) = 1

Exemple

Simplifiquem la fracció $\dfrac{x^2+x-6}{x^3-5\,x^2+6\,x}$

Si descomponem amb factors els dos polinomis ens queda:

$x^2+x-6=(x-2)\cdot(x+3)$

$x^3-5\,x^2+6\,x=x\,(x-2)\cdot(x-3)$

Per tant, la fracció algèbrica la podem escriure de la forma següent:

$$\frac{x^2+x-6}{x^3-5\,x^2+6\,x}=\frac{(x-2)\,(x+3)}{x\,(x-2)\,(x-3)}$$

Si ara dividim numerador i denominador per $x-2$ queda

$$\frac{x+3}{x\,(x-3)}=\frac{x+3}{x^2-3\,x}$$

Exercici

36) Simplifiqueu les fraccions algèbriques següents:

a) $\dfrac{2\,x^3-20\,x^2+50\,x}{x^4-4\,x^3-5\,x^2}$

b) $\dfrac{x^3-4\,x^2+x+6}{x^4-4\,x^3-x^2+16\,x-12}$

c) $\dfrac{x^4-2\,x^3+2\,x^2-2\,x+1}{x^4-x^3-x+1}$

4.7.2 Operacions amb fraccions algèbriques

Les operacions amb fraccions algèbriques es realitzen de la mateixa manera que les operacions amb fraccions numèriques. Vegem-ho amb uns quants exemples.

Suma i resta de fraccions algèbriques

Per sumar o restar fraccions algèbriques hem de tenir aquestes fraccions amb el mateix denominador. En el cas que no el tinguin s'han de trobar fraccions equivalents a les inicials que tinguin el mateix denominador.

Exemples

1) Fem $\dfrac{2\,x+1}{x^2-2}+\dfrac{3\,x}{x^2-2}$

   Com que ja tenen denominador comú, només hem de sumar els polinomis del numerador. Per tant, queda:

$$\frac{2\,x+1+3\,x}{x^2-2}=\frac{5\,x+1}{x^2-2}$$

2) Fem $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{6\,x}{x^2-1}$

   Busquem primer dues fraccions equivalents a les donades amb denominador comú. Queda:

$$\frac{4\,(x-1)}{x^2-1}+\frac{6\,x}{x^2-1}$$

   Sumant els polinomis del numerador obtenim:

$$\frac{10\,x-4}{x^2-1}$$

Producte de fraccions algèbriques

La fracció resultant de multiplicar dues fraccions algèbriques és una fracció que té com a numerador el producte dels numeradors i com a denominador el producte dels denominadors.

Exemple

Calculem $\dfrac{2\,x^3-3\,x^2-3\,x+2}{2\,x}\cdot\dfrac{x^2-4}{2\,x^2-5\,x+2}$.

Per fer-ho multipliquem numerador per numerador i denominador per denominador i ens queda:

$$\frac{(2\,x^3-3\,x^2-3\,x+2)\,(x^2-4)}{2\,x\,(2\,x^2-5\,x+2)}$$

Abans de fer cap producte seria bo descompondre en factors tots els quatre polinomis per veure si es pot simplificar alguna cosa.

La descomposició quedarà:

$$2\,x^3-3\,x^2-3\,x+2=2(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{1}{2})$$

$x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$

$2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\cdot(x-\frac{1}{2})$

Per tant quedarà:

$$\frac{(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)(x^2-4)}{2x(2x^2-5x+2)} = \frac{2(x+1)(x-2)(x-\frac{1}{2})(x-2)(x+2)}{2x\cdot 2(x-2)(x-\frac{1}{2})}$$

Si simplifiquem ens queda:

$$\frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{2x} = \frac{x^3+x^2-4x-4}{2x}$$

Quocient de fraccions algèbriques

La fracció algèbrica resultant de dividir dues fraccions algèbriques és una fracció que té com a numerador el producte del numerador de la primera pel denominador de la segona i com a denominador el producte del denominador de la primera pel numerador de la segona.

Exemple

Fem $\dfrac{2x+1}{x-1} : \dfrac{x-2}{x^2-1}$.

Fent el producte en creu tal com hem explicat queda:

$$\frac{(2x+1)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Un cop escrit així es treballa igual que el producte, és a dir, primer simplificant el que es pugui i després fent el producte. Per tant, ens queda:

$$\frac{(2x+1)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x^2+3x+1}{x-2}$$

Exercicis

37) Calculeu:

a) $\dfrac{2x-1}{x+2} + \dfrac{1}{x^2-2} - \dfrac{2-x}{x-1}$

b) $\dfrac{1-x^2}{x^2-x} \cdot \dfrac{3x}{x-1}$

38) Donades les fraccions: $A(x) = \dfrac{1}{x+5}$; $B(x) = \dfrac{x^2-25}{x+3}$ i $C(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+5}$, calculeu:

a) $[A(x)\cdot B(x)]\cdot C(x)$

b) $[A(x) + C(x)] \cdot B(x)$

c) $3A(x) : C(x)$

39) Quina fracció cal sumar a $\dfrac{2x-1}{x+4}$ per obtenir la fracció 0?

40) Per quina fracció cal multiplicar $\dfrac{3x}{x+3}$ per obtenir el polinomi de grau 0 i de coeficient 1, és a dir, $U(x) = 1$?

41) Calculeu:

a) $\dfrac{3}{x^2-1} + \dfrac{5x}{x+1} - \dfrac{2x}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{3x} : \dfrac{x^2-4x+4}{x+2}$

c) $2 - \dfrac{3x}{x+1}$

d) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1} - 5$

42) Quina és la condició perquè una fracció algèbrica sigui equivalent a un polinomi?

43) Comproveu que aquest producte dóna 1.

$\dfrac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \dfrac{x+1}{x+2} \cdot \dfrac{x-1}{x-2}$

4.8 Exercicis de repàs

1) D'entre les següents expressions algèbriques, identifiqueu les que són polinomis i les que no ho són:

a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$

b) $3x + 5\sqrt{x+2}$

c) $x^2 + 1$

d) $2x^3 - 6x + 2$

e) $\sqrt{3}x^4 + 5x^3 - 2$

f) $7x^4$

2) Indiqueu el grau dels polinomis següents:

a) $A(x) = -5x^3 + 2x^2 - x$

b) $B(x) = 3x^4$

c) $C(x) = 4x^2 - 6x$

d) $D(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$

e) $E(x) = 9$

f) $F(x) = 8\,x - 5\,x^4$

3) Trobeu el valor numèric dels polinomis següents pels valors que s'assenyalen:

a) $P(x) = x^4 + 2\,x^2 - 2\,x + 3$ per $x = 1$

b) $Q(x) = 6\,x^3 - 9\,x^5$ per $x = -1$

c) $R(x) = -5\,x^3 - 2\,x$ per $x = \dfrac{1}{2}$

4) Considereu els polinomis $A(x) = x^2 - 2\,x - 3$ i $B(x) = (x+1)\,(x-3)$. Calculeu el valor numèric per a $x = 1$ i $x = -2$. Poden ser iguals aquests polinomis? Raoneu la resposta.

5) Escriviu dos polinomis de tercer grau la suma dels quals sigui de segon grau.

6) Trobeu el polinomi que, sumat amb el polinomi $P(x) = x^4 - 3\,x^2 + 5\,x$, doni el polinomi $R(x) = x^3 - 1$.

7) Calculeu a, b i c perquè es verifiqui la igualtat $(x^3 - 2\,x + a)\,(b\,x + c) = 3\,x^4 + 2\,x^3 - 6\,x^2 - x + 2$.

8) La potència de polinomis es defineix com a productes repetits de la base tantes vegades com indica l'exponent. $(3\,x^2 - 2)^5$ és un polinomi. De quin grau és? Quin és el coeficient que correspon al terme de grau més gran? Quin és el terme independent?

9) Si $A(x) = 3\,x^2 - \dfrac{x}{2} + 2$, $B(x) = 2\,x + 3$ i $C(x) = x^3 - 3$, calculeu:

a) $B(x) \cdot (3\,A(x) - C(x))$

b) $3\,B(x) \cdot (A(x) - 2\,C(x))$

c) $C(x) - 2\,B(x) - \dfrac{3\,A(x)}{2}$

d) $(C(x) - 3\,A(x))\,B(x)$

10) Donats els polinomis $P(x) = x^5 - 5\,x^4 + 3\,x^3 - 2\,x + 6$, $Q(x) = 2\,x + 1$ i $R(x) = 3\,x^2$, calculeu:

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$

b) $Q(x) \cdot R(x)$

c) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

11) Efectueu pel mètode de Ruffini les divisions següents:

a) $(x^5 + x^4 - 5\,x^3 - 5\,x^2 + 4\,x + 10) : (x - 2)$

b) $(x^6 - 1) : (x + 1)$

c) $(3\,x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 - x + 5) : (x - 3)$

12) Assenyaleu, sense fer l'operació, si les divisions següents són exactes o no:

a) $(x^5 + 2\,x^4 - 13\,x^3 + x^2 - 20\,x + 5) : (x - 3)$

b) $(x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 4) : (x - 2)$

c) $(11\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x^2 - 1) : (x + 1)$

13) Trobeu les arrels enteres o racionals dels polinomis:

a) $\mathrm{P}(x) = x^4 + x^3 - 2\,x^2 - x + 1$

b) $\mathrm{Q}(x) = x^4 - x^3 + 2\,x^2 + x + 1$

c) $\mathrm{R}(x) = x^3 + 6\,x^2 + 4\,x - 5$

d) $\mathrm{S}(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 6\,x - 4$

e) $\mathrm{T}(x) = x^3 + 5\,x^2$

14) Descomponeu factorialment els polinomis següents i indiqueu les seves arrels:

a) $\mathrm{A}(x) = x^2 + 6\,x + 9$

b) $\mathrm{B}(x) = x^3 - 9\,x$

c) $\mathrm{C}(x) = x^3 + 4\,x^2 + 4\,x$

d) $\mathrm{D}(x) = x^5 + 2\,x^4 + x^3$

e) $\mathrm{E}(x) = x^5 - x$

15) Donat el polinomi $\mathrm{P}(x) = x^5 - 4\,x^4 + 4\,x^3 + 2\,x^2 - 5\,x + 2$, es pregunta:

a) Quants factors pot tenir la seva descomposició?

b) Sense fer operacions, indiqueu quines són les seves possibles arrels.

c) Comproveu quins dels nombres anteriors són arrels del polinomi $\mathrm{P}(x)$ sense necessitat de fer la divisió.

16) Hi ha algun polinomi que, multiplicat per $x - 4$, doni el polinomi $2\,x^2 - 5\,x - 12$?

17) Donat el polinomi $\mathrm{A}(x) = 2\,x^3 - x^2 - 4\,x - 1$, trobeu, si existeix, un altre polinomi $\mathrm{Q}(x)$ tal que $\mathrm{A}(x) : \mathrm{Q}(x)$ tingui de quocient $2\,x + 3$ i de residu -4.

18) Trobeu el dividend d'una divisió en què el quocient és $3\,x^2 - 2\,x + 1$, el divisor és $2\,x^2 + x$ i el residu $x + 1$.

19) Calculeu m perquè $(x^4 + x^3 - 2\,x^2 - x - 7\,m) : (x^2 + x - 1)$ sigui una divisió exacta.

20) Calculeu c perquè la divisió $[2\,(c+1)\,x^3-3\,x^2-5\,(1-2\,c)\,x+c-2]:(x-3)$ tingui 2 de residu. Podeu fer-ho de dues maneres? Expliqueu-ho.

21) Esbrineu si el polinomi $6\,x^2-6\,x-12$ és divisible per $2\,x-4$. Podeu dir-ho sense fer la divisió?

22) Calculeu el valor numèric del polinomi $\mathrm{P}(x)=\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{3\,x^2}{4}-\dfrac{7\,x}{2}-8$ per $x=-2$. Feu-ho pel procediment més curt.

23) Classifiqueu els nombres 1, -1, 2, -2, 4, -4 entre els que són i els que no són arrels del polinomi $\mathrm{A}(x)=x^3-3\,x^2-6\,x+8$.

24) Quines són les arrels enteres del polinomi x^8-1? Raoneu la vostra resposta. Té alguna arrel entera el polinomi x^8+1? Per què?

25) Factoritzeu els polinomis següents:

$\mathrm{A}(x)=3\,x^3-75\,x$

$\mathrm{B}(x)=3\,x^3+18\,x^2+27\,x$

$\mathrm{C}(x)=2\,x^4-12\,x^3+18\,x^2$

$\mathrm{D}(x)=\dfrac{x^2}{4}-3\,x+9$

26) Escriviu dos polinomis de graus diferents que tinguin en comú les arrels 1 i 7.

27) Determineu el mcd i el mcm dels polinomis $\mathrm{A}(x)=2\,x^5+6\,x^4-8\,x^2$; $\mathrm{B}(x)=x^3-x$ i $\mathrm{C}(x)=x^4-x^3-x^2+x$.

28) La fracció $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ és equivalent a x o a $x+1$? Per què?

29) Calculeu

a) $\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{3\,x-7}{x^2+4\,x-5}+\dfrac{2\,x-6}{x^2-4\,x+3}$

c) $\dfrac{7\,x-7}{2\,x^2+x-6}-\dfrac{6\,x+15}{2\,x^2+9\,x+10}$

d) $\dfrac{7}{x}+\dfrac{x+3}{x^2}$

e) $\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{7\,x}{x-3}$

f) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+3}{x+5}$

30) Donades les fraccions $\mathrm{A}(x)=\dfrac{x-2}{x^2+6\,x+9}$ i $\mathrm{B}(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$, calculeu:

a) $A(x) \cdot B(x)$

b) $A(x) : B(x)$

c) $B(x) : A(x)$

31) Calculeu:

a) $\dfrac{4}{x} : \dfrac{3x+5}{x^2}$

b) $\dfrac{x-1}{2} : \dfrac{3x-3}{2x^3}$

c) $\left[\dfrac{x+2}{x} : \dfrac{x-2}{3x}\right] \cdot [1-(6-x)]$

d) $\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+2}\right)$

e) $\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x}\right) : \left(\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{5}{x+3}\right)$

f) $\dfrac{3}{x-2} : 2x^3$

4.9 Solucions

1) a) grau 3. Coeficients: 1, 3, -2

b) grau 2. Coeficients: -1, $\sqrt{2}$, $-\dfrac{1}{3}$

c) grau 4. Coeficients: 1,-1,1,-1,1

3) a, c, e i f.

4) -2

5) $a = 0$, $b = 1$ i $c = 0$

6) a) $-3x^2 + \dfrac{17}{2}x + \dfrac{9}{4}$

b) $2x^3 - 3x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{15}{4}$

c) $-x^2 + \dfrac{9}{2}x + \dfrac{9}{4}$

d) $-2x^3 - \dfrac{11}{2}x + \dfrac{15}{4} + 5x^2$

e) $x^5 - \dfrac{15}{2}x^3 - 3x^2 + 2x^4$

f) $8x^3 - 8x^2 - \dfrac{9}{2}x - \dfrac{69}{4}$

g) $-2x^5 + 4x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 12x$

h) $8x^6 - 48x^5 + 96x^4 - 64x^3$

7) Quocient: $\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{19}{8}x + \frac{13}{16}$ Resta: $\frac{31}{16} + \frac{181}{16}x$

8) Quocient: $3x^2 - x - 3$ Resta: $4 + x$

9) $x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$

10) $a = 9$, $b = \frac{37}{2}$

11) $x - 1$

12) a) Quocient: $x - 2$ Resta: $9 + 2x - 2x^2$
b) Quocient: $x^2 - 1$ Resta: $3x^2 - 2$
c) Quocient: $2x^2 + x + 4$ Resta: 4
d) Quocient: $x^3 - x^2 + x - 1$ Resta: 0

13) $k = 20$

14) a) -39698
b) -10
c) -47

15) 13

16) $k = 69$

17) 0

18) $\mathrm{P}(x) = (x^2 - 5x + 4) \cdot (x + 2)$

19) $k = -1$

20) $x^3 + \frac{2x^2}{3} - x - \frac{2}{3}$

21) $k = 4$

22) a) Certa.
b) Certa.
c) Certa.
d) Falsa.
e) Certa.
f) Certa.
g) Falsa.

23) a) $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$

b) $x = -2$

c) $x = -1$

d) $x = 0$, $x = -6$, $x = -1$

e) $x = -2$

f) $x = 1$, $x = -1$

24) Sí.

25) $x = 3$, $x = -3$, $x = \dfrac{1}{2}$

26) $x = 2$, $x = -2$, $x = \dfrac{-1}{3}$

28) $(x+3)\cdot(x-2)^2$, $x = -3$, $x = 2$ doble.

29) a) $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

b) $(x-1)\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)^2$

c) $x^2\cdot(x+2)^2$

d) $(3\,x+5)^2$

e) $\dfrac{1}{9}\,(x-9)\cdot(x+9)$

f) $(x-2)\cdot(x^3+2\,x^2+x+1)$

30) a) $x = -5$, $x = 3$, $x = -1$

b) $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$, $x = -2$

c) $x = \dfrac{-1}{2}$, $x = \dfrac{-1}{2}$

d) $x = 0$, $x = -4$, $x = 1$

e) $x = 0$, $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$

31) a) $\mathrm{mcd}(\mathrm{P}(x),\,\mathrm{R}(x)) = x-3$ i $\mathrm{mcm}(\mathrm{P}(x),\,\mathrm{R}(x)) = (x-3)^2\cdot(x+3)$

b) $\mathrm{mcd}(\mathrm{P}(x),\,\mathrm{R}(x)) = x-1$ i $\mathrm{mcm}(\mathrm{P}(x),\,\mathrm{R}(x)) = 3\,(x-1)^2\cdot(x+1)$

c) $\mathrm{mcd}(\mathrm{A}(x),\,\mathrm{B}(x)) = 3\,(x-1)\cdot(x+1)$ i $\mathrm{mcm}(\mathrm{A}(x),\,\mathrm{B}(x)) = 3\,(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

d) $\mathrm{mcd}(\mathrm{A}(x),\,\mathrm{B}(x),\,\mathrm{C}(x)) = 1$ i $\mathrm{mcm}(\mathrm{A}(x),\,\mathrm{B}(x),\,\mathrm{C}(x)) = x\cdot(x+1)^2\cdot(x-2)\cdot(x-3)^2$

32) $\mathrm{mcd}(\mathrm{S}(x),\,\mathrm{T}(x)) = x-2$ i $\mathrm{mcm}(\mathrm{S}(x),\,\mathrm{T}(x)) = (x-2)^2\cdot(x+2)$

33) $\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)$

34) a) Sí.

b) No.

35) a) Sí.
b) No.
c) No.
d) No.

36) a) $2\,\dfrac{x-5}{x\,(x+1)}$
b) $\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$
c) $\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

37) a) $\dfrac{3\,x^4-3\,x^3-8\,x^2+7\,x+4}{(x+2)\cdot(x^2-2)\cdot(x-1)}$
b) $-3\,\dfrac{x+1}{x-1}$

38) a) $\dfrac{(x-5)\,(x+1)}{x+5}$
b) $\dfrac{(x-5)\,(4+x^2+4\,x)}{x+3}$
c) $3\,\dfrac{1}{x^2+4\,x+3}$

39) $-\dfrac{2\,x-1}{x+4}$

40) $\dfrac{x+3}{3\,x}$

41) a) $\dfrac{3\,x^2-7\,x+3}{(x-1)\cdot(x+1)}$
b) $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{(x+2)^2}{(x-2)\,x}$
c) $-\dfrac{x-2}{x+1}$
d) $-2\,\dfrac{2\,x^2+1}{x^2+1}$

Exercicis de repàs:

1) a) Sí.
b) No.
c) Sí.
d) Sí.

e) Sí.

f) Sí.

2) a) 3

b) 4

c) 2

d) 3

e) 0

f) 4

3) a) 4

b) 3

c) $\frac{-13}{8}$

4) -4, 5, -4, 5. Sí.

6) $-x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 1$

7) $a = 1$, $b = 3$ i $c = 2$

8) 10, 243, -32.

9) a) $17x^3 + 24x^2 + \frac{15}{2}x + 21$

b) $16x^3 + 24x^2 + \frac{15}{2}x + 24$

c) $x^3 - 12 - \frac{13}{4}x - \frac{9}{2}x^2$

d) $2x^4 - 15x^3 - \frac{27}{2}x - 27 - 24x^2$

10) a) $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

b) $6x^3 + 3x^2$

c) Quocient: $\frac{1}{2}x^4 - \frac{11}{4}x^3 + \frac{23}{8}x^2 - \frac{23}{16}x - \frac{9}{32}$, Resta: $\frac{201}{32}$

11) a) Quocient: $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$, Resta: 6

b) Quocient: $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, Resta: 0

c) Quocient: $3x^3 + 7x^2 + 27x + 80$, Resta: 245

12) a) No.

b) Sí.

c) No.

13) a) $x = 1$, $x = -1$

b) No hi ha solucions enteres ni racionals.

c) $x = -5$

d) $x = \frac{-2}{3}$, $x = 1$

e) $x = 0$, $x = 0$, $x = -5$

14) a) $(x+3)^2$

b) $x \cdot (x-3) \cdot (x+3)$

c) $x \cdot (x+2)^2$

d) $x^3 \cdot (x+1)^2$

e) $x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)$

15) a) 5

b) 1,-1,2,-2

c) 1,-1,2

16) Si. $2x+3$

17) $x^2 - 2x + 1$

18) $6x^4 - x^3 + 2x + 1$

19) $m = \frac{-1}{7}$

20) $c = \frac{-8}{85}$

21) Si.

22) -2

23) El 1,-2 i 4 són arrels.

24) 1 i -1.No

25) $\mathrm{A}(x) = 3x(x-5)(x+5)$, $\mathrm{B}(x) = 3x(x+3)^2$, $\mathrm{C}(x) = 2x^2(x-3)^2$ i $\mathrm{D}(x) = \frac{1}{4}(x-6)^2$

27) $\mathrm{mcd}(\mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x), \mathrm{C}(x)) = x \cdot (x-1)$ i $\mathrm{mcm}(\mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x), \mathrm{C}(x)) = 2x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x+2)^2$

28) És equivalent a $x+1$

29) a) $-3\,\frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $\frac{5x+3}{(-1+x)(x+5)}$

c) $\dfrac{1}{2\,x-3}$

d) $\dfrac{8\,x+3}{x^2}$

e) $-\dfrac{9\,x+15+7\,x^2}{(x+2)\,(x-3)}$

f) $2\,\dfrac{x^2+4\,x-1}{(x+1)\,(x+5)}$

30) a) $\dfrac{1}{(x+2)\,(x+3)}$

b) $\dfrac{(x-2)\,(x^2-4)}{(x^2+6\,x+9)\,(x+3)}$

c) $\dfrac{(x+3)\,(x^2+6\,x+9)}{(x^2-4)\,(x-2)}$

31) a) $4\,\dfrac{x}{3\,x+5}$

b) $\dfrac{1}{3}\,x^3$

c) $3\,\dfrac{(x+2)\,(-5+x)}{x-2}$

d) $-\dfrac{x+2}{(x+1)\,(3\,x+2)}$

e) $-\dfrac{(x+2)^2\,(x+3)}{(x+1)\,x\,(8\,x+19)}$

f) $\dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{(x-2)\,x^3}$

Capítol 5

FUNCIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES

5.1 Funcions exponencials

Definició
S'anomena funció exponencial de base a la funció real de variable real $f(x) = a^{g(x)}$, on a és un nombre real positiu amb $a \neq 1$ i $g(x)$ és una funció polinòmica.

Exemples

Les funcions $f(x) = 2^x$, $g(x) = 10^x$ i $h(x) = 5^{x+1}$ són funcions exponencials.

Les funcions $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{x^2}{5}$ i $h(x) = \sqrt{x}$ no ho són.

5.1.1 Representació gràfica

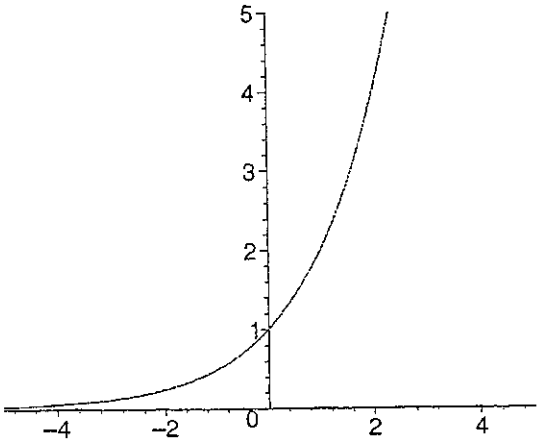
Cas 1: $a > 1$

Vegem un exemple, a partir del qual analitzarem les seves principals característiques.

Exemple

Estudiem les característiques i representem gràficament la funció $f(x) = 2^x$.

Si donem uns quants valors a la x per trobar el seu gràfic tenim:



Característiques

1) Domini: tots els reals $(-\infty, \infty)$

2) Recorregut: els reals positius $(0, \infty)$

3) No està fitada superiorment, però en canvi sí que ho està inferiorment per la recta $y = 0$

4) Continuïtat: la funció és contínua.

5) Intersecció amb l'eix d'ordenades: per $x = 0$ tenim $f(0) = 2^0 = 1$. Per tant, el punt de tall és (0,1).

6) Intersecció amb l'eix d'abscisses: l'obtindríem resolent l'equació $2^x = 0$. Com que no existeix cap nombre real que la verifiqui, no talla l'eix d'abscisses.

7) La funció és estrictament creixent i còncava en tots els seus punts.

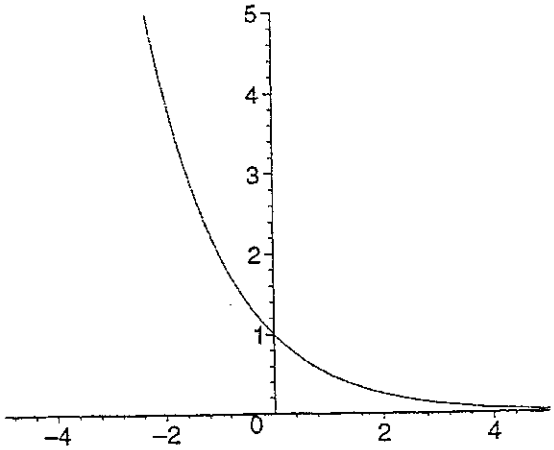
Cas 2: $0 < a < 1$

Vegem un exemple, a partir del qual analitzarem les seves principals característiques.

Exemple

Estudiem i representem gràficament la funció $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Si donem uns quants valors a la x per trobar el seu gràfic tenim:



Característiques

1) Domini: tots els reals $(-\infty, \infty)$

2) Recorregut: els reals positius $(0, \infty)$

3) No està fitada superiorment, però en canvi sí que ho està inferiorment per la recta $y = 0$.

4) Continuïtat: la funció és contínua.

5) Intersecció amb l'eix d'ordenades: per $x = 0$ tenim $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$. Per tant, el punt de tall és (0,1).

6) Intersecció amb l'eix d'abscisses: l'obtindríem resolent l'equació $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. Com que no existeix cap nombre real que la verifiqui, no talla l'eix d'abscisses.

7) La funció és estrictament decreixent i còncava en tots els seus punts.

Exercicis

1) Representeu gràficament les funcions exponencials $f(x) = e^x$ i $g(x) = e^{-x}$.

2) A partir de la gràfica de la funció $y = 2^x$, mitjançant translacions, dibuixeu la gràfica de les funcions $y = 2^{x-1}$, $y = 2^x + 1$ i $y = 2^{x+1} - 1$.

3) La gràfica de la funció $f(x) = a^x$ passa pel punt (-1,0.2). Determineu el valor d'a.

5.2 Equacions exponencials

Una equació exponencial és una equació en la qual la incògnita apareix en l'exponent d'una potència.

Exemple

$$4^x = 2$$
$$\sqrt{3}^x = 81$$
$$3^{x+1} = 7$$

són equacions exponencials.

No existeix un camí únic per resoldre una equació exponencial. Veurem amb uns quantes exemples diverses tècniques que ens poden ser útils a l'hora de resoldre-les.

Exemples
Resolem les equacions exponencials següents:

1) $4^x = 2$

   Si posem el 4 com 2^2 ens queda:

$$(2^2)^x = 2$$

   Per tant,

$$2^{2x} = 2$$

   Això vol dir que perquè la igualtat sigui certa s'ha de complir que

$$2x = 1$$

   Llavors tenim:

$$x = \frac{1}{2}$$

   com a solució de l'equació.

2) $(\sqrt{3})^x = 81$

   Si posem 81 en forma de potència de base 3 tenim:

$$81 = 3^4$$

   A més a més, podem posar $(\sqrt{3})^x$ en forma de potència, és a dir, $3^{(\frac{x}{2})}$. Per tant ens queda:

$$3^{(\frac{x}{2})} = 3^4$$

Igual que en el exemple anterior, tenim les mateixes bases. Per tant, perquè la igualtat sigui certa s'ha de complir que

$$\frac{x}{2} = 4$$

és a dir, $x = 8$.

3) $5^x + 5^{1-x} = 6$

Podem posar 5^{1-x} com a quocient de dues potències de base 5, $\frac{5}{5^x}$. Per tant, tenim:

$$5^x + \frac{5}{5^x} = 6$$

Si multipliquem els dos costats de l'equació per 5^x ens queda

$$(5^x)^2 + 5 = 6 \cdot 5^x$$

Si fem $5^x = t$ ens queda

$$t^2 + 5 = 6\,t$$

Que és una equació de 2n grau. Passant tots els termes al mateix costat tenim:

$$t^2 - 6\,t + 5 = 0$$

Si la resolem queda $t = 1$ i $t = 5$.

Desfent el canvi tenim:

per $t = 1$ queda $5^x = 1$, és a dir, $x = 0$

per $t = 5$ queda $5^x = 5$, és a dir, $x = 1$

Per tant, $x = 0$ i $x = 1$ són les dues solucions de la nostra equació.

Exercici

4) Resoleu les equacions exponencials següents:

a) $2^x\, 2^{x-1}\, 2^{x+1} = 64$

b) $7^{3\,x-2} = \sqrt{7^{x-1}}$

c) $11^{x^2-3\,x+2} = 1$

d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-x+3} = 32^{3\,x-2}$

e) $9^x - 4\,3^x + 3 = 0$

f) $5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^x = \frac{151}{25}$

g) $a^{x^2-2\,x+4} = \frac{a^{11}}{a^8}$

5.3 Funcions logarítmiques

5.3.1 Logaritme d'un nombre

Definició
Diem logaritme en base b, $b > 0$ i $b \neq 1$ d'un nombre positiu a i el representem $\log_b(a)$ com el nombre x tal que $b^x = a$.

Conseqüències

1) $\log_b(b) = 1$

2) $\log_b(1) = 0$

3) Únicament existeixen els logaritmes dels nombres positius.

4) El logaritme i l'exponencial són operacions inverses.

Exemples

1) $\log_2 8 = 3$ ja que $2^3 = 8$

2) $\log_3 9 = 2$ ja que $3^2 = 9$

3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ ja que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

4) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ ja que $\sqrt{3}^4 = 9$

Propietats
Les propietats següents es dedueixen de les propietats de les potències:

1) $\log_b(M \cdot N) = \log_b(M) + \log_b(N)$

2) $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b(M) - \log_b(N)$

3) $\log_b(M^N) = N \log_b(M)$

4) Fórmula del canvi de base: $\log_b(M) = \dfrac{\log_a(M)}{\log_a(b)}$

Hi ha dos casos que per la seva importància reben una notació especial:

1) Quan la base del logaritme és 10, es parla de logaritmes decimals i es nota $\log(x)$.

2) Quan la base és el nombre e, es parla de logaritme neperià i es nota $\ln(x)$.

Exemples

Utilitzant les propietats dels logaritmes, calculem els valors dels logaritmes següents:

1) $\log_2(64 \cdot 4 \cdot 16)$ Aplicant la primera propietat dels logaritmes tenim:

$$\log_2(64 \cdot 4 \cdot 16) = \log_2(64) + \log_2(4) + \log_2(16)$$

Si ara descomponem en factors els nombres de dins dels logaritmes tenim:

$$\log_2(2^6) + \log_2(2^2) + \log_2(2^4)$$

Aplicant la tercera propietat dels logaritmes queda:

$$6\log_2(2) + 2\log_2(2) + 4\log_2(2)$$

I com que $\log_2(2)01$, ens queda:

$$6 + 2 + 4 = 12$$

2) $\log_3\left(\frac{19683}{81}\right)$ Aplicant la segona propietat dels logaritmes tenim:

$$\log_3(19683) - \log_3(81)$$

Si ara descomponem en factors els nombres de dins dels logaritmes tenim:

$$\log_3(3^9) - \log_3(3^4)$$

Aplicant la tercera propietat dels logaritmes ens queda:

$$9\log_3(3) - 4\log_3(3)$$

I com que $\log_3(3) = 1$, ens queda:

$$9 - 4 = 5$$

3) Sabent que $\log(7) = 0.845098$ i que $\log(2) = 0.301030$, calculeu $\log_2(7)$.
Si fem servir la fórmula del canvi de base tenim:

$$\log_2(7) = \frac{\log(7)}{\log(2)} = \frac{0.845098}{0.301030} = 2.807355$$

Exercici

5) Trobeu, sense fer servir la calculadora, els logaritmes següents:

a) $\log_7(49)$

b) $\log_3(729)$

c) $\log_9\left(\frac{1}{9}\right)$

d) $\log_{234}(1)$

e) $\log_{\frac{1}{3}}(27)$

f) $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{165}\right)$

g) $\log_{225}(15)$

5.3.2 La funció logarítmica

Definició

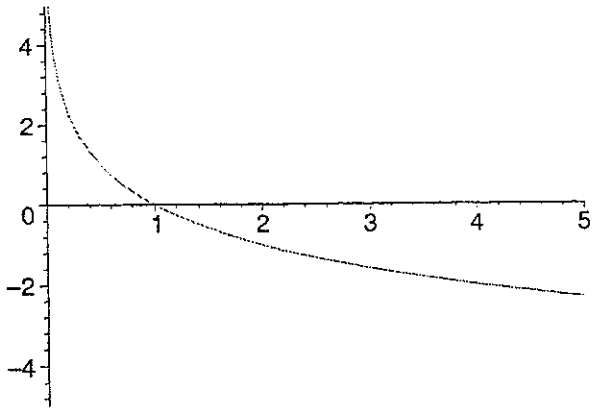
Anomenarem funció logarítmica de base b, amb $b > 0$ i $b \neq 1$, la funció real de variable real que a cada nombre positiu li fa correspondre el seu logaritme en base b: $\mathrm{f}(x) = \log_b(x)$

Representació gràfica

Vegem alguns exemples de com serà la gràfica de les funcions exponencials.

Exemple

Estudiem i representem gràficament la funció $\mathrm{f}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$



Característiques

1) Domini: tots els reals positius, $(0, +\infty)$

2) Recorregut: tots els reals, $(-\infty, +\infty)$

3) No està fitada.

4) La gràfica no presenta salts ni interrupcions en cap dels seus punts. És una funció contínua en tot el seu domini.

5) No hi ha intersecció amb l'eix de les ordenades ja que $x = 0$ no és del domini.

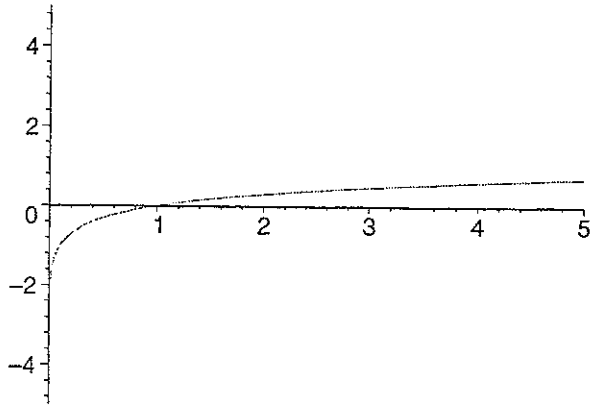
6) Per trobar la intersecció amb l'eix de les abscisses hem de fer $\log_{\frac{1}{2}}(x) = 0$, per tant $x = 1$. El punt de tall és (1,0)

7) La funció és estrictament decreixent i còncava en tot el seu domini.

8) La funció passa pel punt $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Exemple

Estudiem i representem gràficament la funció $f(x) = \log(x)$



Característiques

1) Domini: tots els reals positius, $(0, +\infty)$

2) Recorregut: tots els reals, $(-\infty, +\infty)$

3) No està fitada.

4) La gràfica no presenta salts ni interrupcions en cap dels seus punts. És una funció contínua en tot el seu domini.

5) No hi ha intersecció amb l'eix de les ordenades, ja que $x = 0$ no és del domini.

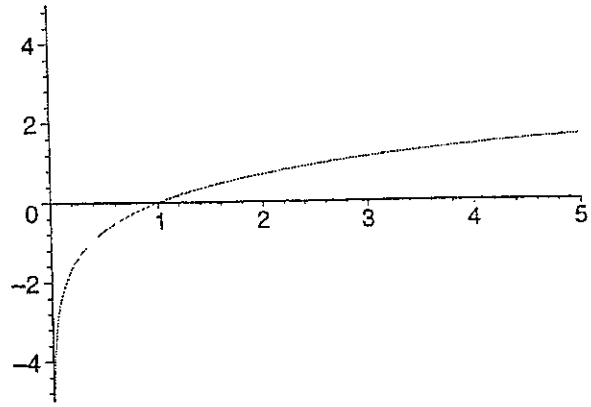
6) Per trobar la intersecció amb l'eix de les abscisses hem de fer $\log(x) = 0$. Per tant $x = 1$. El punt de tall és (1,0)

7) La funció és creixent i convexa en tot el seu domini.

8) La funció passa pel punt $(10, 1)$.

Exemple

Estudiem i representem gràficament la funció $f(x) = \ln(x)$



Característiques

1) Domini: tots els reals positius, $(0, +\infty)$

2) Recorregut: tots els reals, $(-\infty, +\infty)$

3) No està fitada.

4) La gràfica no presenta salts ni interrupcions en cap dels seus punts. És una funció contínua en tot el seu domini.

5) No hi ha intersecció amb l'eix de les ordenades, ja que $x = 0$ no és del domini.

6) Per trobar la intersecció amb l'eix de les abscisses hem de fer $\ln(x) = 0$, per tant $x = 1$. El punt de tall és (1,0)

7) La funció és creixent i convexa en tot el seu domini.

8) La funció passa pel punt $(e, 1)$

Exercici

6) Representeu gràficament les funcions següents:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x)$

b) $g(x) = \log_3(x)$

5.4 Equacions logarítmiques

Una equació logarítmica és aquella equació en què la incògnita apareix dintre de l'expressió de la qual cal calcular el logaritme.

Exemples

Les equacions següents són equacions logarítmiques:

$$\log_2(x) = 4$$

$$\log(x) = 2\log(3)$$

Per resoldre-les cal realitzar algunes transformacions a l'equació, aplicant les propietats dels logaritmes, per arribar a un d'aquests casos:

1) Obtenir una igualtat entre logaritmes del mateix tipus. Així es podran igualar les dues expressions de dins dels logaritmes i trobar el valor de la incògnita: $\log_b(x) = \log_b(a)$ llavors $x = a$

2) Obtenir una expressió del tipus $\log_b(x) = k$, amb la qual cosa, aplicant la definició de logaritme, es pot obtenir $x = b^k$.

Exemples

1) Resolem l'equació $\log(x) = 2\log(4)$

   Si hi apliquem la propietat del logaritme d'una potència, tenim:

$$2\log(4) = \log(4^2)$$

   Per tant,

$$\log(x) = \log(4^2)$$

   Llavors $x = 16$.

2) Resolem l'equació $\log(x+3) = \log(6) - \log 2\,(x+1)$.

   Introduint el 2 dins del parèntesi, queda:

$$\log(x+3) = \log(6) - \log(2\,x+2)$$

   Com que hi ha una resta de logaritmes, la convertim en el logaritme d'una divisió aplicant la segona propietat dels logaritmes. Ens queda:

$$\log(x+3) = \log(\frac{6}{2\,x+2})$$

   Ara ja podem igualar les dues expressions, i tenim:

$$x + 3 = \frac{6}{2\,x+2}$$

Si multipliquem els dos costats de la igualtat per $2x+2$ ens queda:

$$2x^2+8x=0$$

que és una equació de segon grau que té per solucions $x=0$ i $x=-4$.

Finalment hem de comprovar si aquestes dues solucions ho són realment de la nostra equació.

$x=-4$ no és solució, ja que ens quedarien logaritmes de nombres negatius, però la funció logarítmica té com a domini només els reals positius. Per tant, l'única solució és $x=0$.

Exercicis

7) Resoleu les equacions logarítmiques següents:

a) $\log_2(x^2)-\log_2\left(x-\frac{3}{4}\right)=2$

b) $2\,[1-\log(2x+3)]=4\log\sqrt{5x-3}$

c) $\dfrac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2$

8) Resoleu les equacions següents:

a) $2\log(x)-4\log 2=3\log(x)$

b) $2\log(x)-\log(x-16)=2$

c) $3\log_2(x)-2\log_2\left(\frac{x}{3}\right)=2+\log_2(3)+1$

d) $3\ln(x)+\ln(32)=\dfrac{\ln(x)}{2}$

e) $\ln(2)+\ln(11-x^2)=2\ln(5-x)$

f) $\dfrac{10^{\log(x)}}{1+10^{2\log(x)}}=\dfrac{3}{6}$

g) $2\log(x)=3+\log\left(\frac{x}{10}\right)$

h) $7^{3x+2}=343$

i) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

j) $\sqrt{\sqrt{7}+6\sqrt{7}}=49^{\left(\frac{x}{2}\right)}$

k) $7^x+7^{x+1}+7^{x+2}=2793$

l) $5^{x-1}=2+\dfrac{3}{5^{x-2}}$

5.5 Exercicis de repàs

1) Representeu en els mateixos eixos les funcions següents:

a) $f(x) = 4^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $h(x) = \log_4 x$ i $r(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

b) $f(x) = 5^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $h(x) = \log_5 x$ i $r(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

2) Resoleu les equacions exponencials següents:

a) $5^{1-x^2} = \frac{1}{125}$

b) $4^x - 2^x = 2$

c) $4^x - 5\,2^x + 4 = 0$

d) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

e) $2^{3\,x} - \frac{3}{2^{3\,x+2}} + 1 = 0$

f) $2^{2\,x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

3) Escriviu en forma de logaritmes les expressions equivalents a les formes següents:

a) $y = 8^x$

b) $x\,y = 2^4$

c) $x + y = 5$

d) $(1 + x)^3 = 2$

4) Resoleu les equacions logarítmiques següents:

a) $\log(x - 2) + \log(x + 2) = \log 5$

b) $\log x^2 + 3\log 2 = 2 + \log 2$

c) $\log(5\,x + 4) - \frac{\log(x + 4)}{2} = \log 2$

d) $\log(2\,x + 4) + \log(3\,x + 1) = 2\log(8 - x) + \log 4$

e) $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} - 3 = 0$

5) Resoleu les equacions següents:

a) $5^{x+1} = 125$

b) $\left(4^{x-3}\right)^x = 2^{4\,x}$

c) $7^{x-1} - 2 = \frac{5}{7^{x-2}}$

d) $\log_x 169 = 2$

e) $2\log x - \log(x-16) = 2$

f) $3^{x-1} = 3^{x+2}$

6) Utilitzeu les propietats dels logaritmes per escriure les expressions següents com a sumes, restes o multiplicacions:

a) $\log(x^4\, y^5)$

b) $\log\left(\dfrac{x\, y^7}{z^8}\right)$

c) $\log\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

d) $\log\left(\dfrac{x-y^3}{m\, n^5}\right)$

7) Determineu el punt on la gràfica de les funcions indicades talla l'eix d'abscisses:

a) $\mathrm{f}(x) = \log(x+3)$

b) $\mathrm{g}(x) = \ln(2\,x-5)$

c) $\mathrm{h}(x) = \log_3\sqrt{3\,x}$

d) $\mathrm{p}(x) = \log_5\left(\dfrac{5}{x}\right)$

8) Trobeu l'expressió de x:

a) $\ln x = 3\ln a + 2\ln b - \dfrac{\ln c}{2}$

b) $\log x = \dfrac{3\log a - 2\log b}{5} - 7\,(\log c + 4\log d)$

c) $\log_4 x = 3\log_4 a + 2\log_4 b - \dfrac{\log_4 c + \log_4 d}{3}$

d) $\ln x = \dfrac{3\ln a + \ln b - \ln c - 5\ln d}{2}$

9) Resoleu els sistemes d'equacions:

a) $\left.\begin{array}{c}\ln x + \ln y = 3\\ 2\ln x - 2\ln y = -1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{c}\ln x - \ln y = 1\\ 3\,x + 5\,y = 35\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{c}\ln x + 3\ln y = 5\\ \ln\dfrac{x^2}{y} = 3\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{c}x^2 - y^2 = 11\\ \ln x - \ln y = 1\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{c}\ln(x\,y)=3\\ 2\ln y-3\ln x=1\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{c}\log_x(y-18)=2\\ \log_y(x+3)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$

5.6 Solucions

3) $a=5$

4) a) $x=2$
   b) $x=\dfrac{3}{5}$
   c) $x=2,\ x=2$
   d) $x=\dfrac{-2}{11}$
   e) $x=0$
   f) $x=0$
   g) $x=1,\ x=1$

5) a) 2
   b) 6
   c) -1
   d) 0
   e) -3
   f) 3
   g) $\dfrac{1}{2}$
   h) $x=1,\ x=3$
   i) $x=1$
   j) $x=\dfrac{1}{3}$

8) a) $x=\dfrac{1}{16}$
   b) $x=20,\ x=80$
   c) $x=\dfrac{8}{3}$
   d) $x=\dfrac{1}{4}$
   e) $x=\dfrac{1}{3},\ x=3$
   f) $x=1$

g) $x = 100$

h) $x = \frac{1}{3}$

i) $x = \frac{31}{16}$

j) $x = \frac{3}{4}$

k) $x = 2$

l) $x = 2$

Exercicis de repàs:

2) a) $x = 2$, $x = -2$

b) $x = 1$

c) $x = 0$, $x = 2$

d) $x = 3$

e) $x = \frac{-1}{3}$

f) $x = 1$, $x = 2$

3) a) $x = \log_8 y$

b) $\log_2(x\,y) = 4$

c) $\log(x + y) = \log 5$

d) $\log_{(1+x)} 2 = 3$

4) a) $x = 3$

b) $x = 5$, $x = -5$

c) $x = 12$

d) $x = 3$

e) $x = 3$, $x = 2$

5) a) $x = 2$

b) $x = 0$, $x = 5$

c) $x = 2$

d) $x = 13$

e) $x = 20$, $x = 80$

f) No té solució

6) a) $4\log x + 5\log y$

b) $\log x + 7\log y - 8\log z$

c) $\log x - \log(x - 1)$

d) $\log(x - y^3) - (\log m + 5\log n)$

7) a) $x = -2$

b) $x = 3$

c) $x = \dfrac{1}{3}$

d) $x = 5$

8) a) $x = \dfrac{a^3\, b^2}{\sqrt{c}}$

b) $x = \dfrac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}\, c^7\, d^{28}}$

c) $x = \dfrac{a^3\, b^2}{\sqrt[3]{c}\,\sqrt[3]{d}}$

d) $x = \dfrac{\sqrt{a^3}\,\sqrt{b}}{\sqrt{c}\,\sqrt{d^5}}$

9) a) $x = 10\,\sqrt[4]{10},\ y = 10\,\sqrt[4]{10^3}$

b) $x = 10,\ y = 1$

c) $x = 100,\ y = 10$

d) $x = \dfrac{10}{3},\ y = \dfrac{1}{3}$

e) $x = 10,\ y = 100$

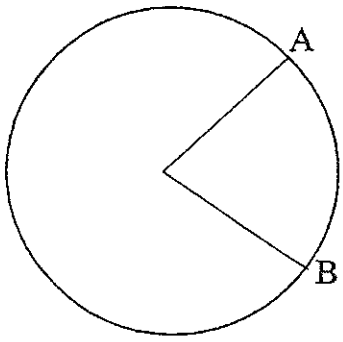
f) $x = \dfrac{3}{2},\ y = \dfrac{81}{4}$

Capítol 6

TRIGONOMETRIA PLANA

6.1 Arcs de circumferència. Angle central

Donada una circumferència qualsevol i dos punts A i B de la mateixa circumferència, la divideixen en dues parts anomenades *arcs*.



Definició
Un *angle central* és l'angle entre els dos radis que delimiten un arc de circumferència.
Per a la mesura d'angles s'utilitzen dues unitats:

- Graus sexagesimals
  Si dividim una circumferència en 360 parts iguals, l'angle central que correspon a cadascuna d'aquestes parts rep el nom de *grau sexagesimal*. Els submúltiples del grau són el *minut* i el *segon*, de manera que 60 minuts equivalen a un grau i 60 segons equivalen a un minut.

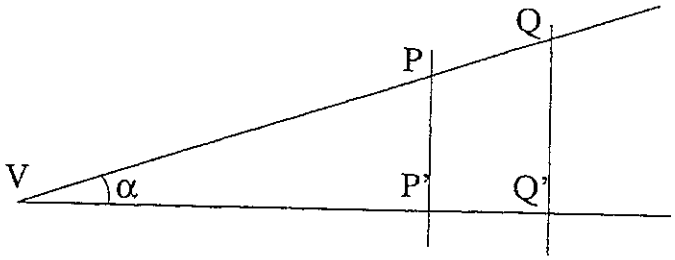
- Radian

Un angle central que comprèn un arc de longitud igual a la del radi de la circumferècia rep el nom de *radian*. Una circumferència mesura 2π radians.

Tenim que 360^0 equivalen a 2π radians, o més usualment, π radians són 180^0. Un radian equival a $\dfrac{180^0}{\pi} = 57.2958^0$.

6.2 Raons trigonomètriques d'un angle agut

A partir del triangle rectangle $PP'V$ de la figura, es defineixen les següents *raons trigonomètriques*:

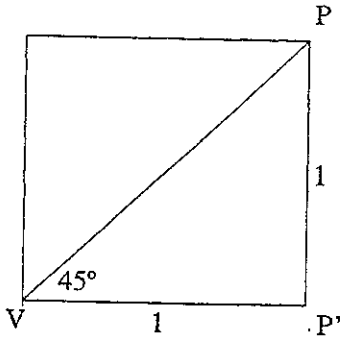


- *sinus* o *sin* de l'angle α: $\sin\alpha = \dfrac{catet\ oposat}{hipotenusa} = \dfrac{PP'}{VP}$.
- *cosinus* o *cos* de l'angle α: $\cos\alpha = \dfrac{catet\ contigu}{hipotenusa} = \dfrac{VP'}{VP}$.
- *tangent* o *tan* de l'angle α: $\tan\alpha = \dfrac{catet\ oposat}{catet\ contigu} = \dfrac{PP'}{VP'}$.

El valor d'aquestes raons no depèn del punt P, ja que si escollim un altre punt Q, el triangle $QQ'V$ és semblant al $PP'V$ i per tant les raons definides són les mateixes.

Exemples

1) Calculem les raons de l'angle de 45^0.



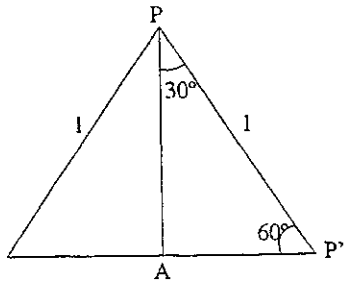
Observant la figura, tenim un triangle rectangle isòsceles de catets iguals a 1, on la hipotenusa val:

$$VP = \sqrt{PP'^2 + VP'^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Per tant:

- $\sin 45^0 = \dfrac{PP'}{VP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos 45^0 = \dfrac{VP'}{VP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\tan 45^0 = \dfrac{PP'}{VP'} = \dfrac{1}{1} = 1.$

2) Raons dels angles de 30^0 i 60^0.



Observant la figura, l'altura del triangle equilàter de costat 1 val:

$$PA = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

I per a l'angle de 60^0 tenim:

- $\sin 60^0 = \dfrac{PA}{PP'} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos 60^0 = \dfrac{AP'}{PP'} = \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}.$
- $\tan 60^0 = \dfrac{PA}{AP'} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$

D'una manera semblant tindríem:

- $\sin 30^0 = \dfrac{1}{2}.$
- $\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\tan 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

6.3 Altres raons trigonomètriques

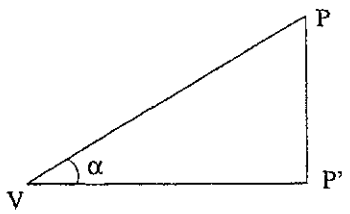
Aquestes raons es donen a títol informatiu i no en farem ús al llarg d'aquest curs.

- Cosecant: $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, sempre que $\sin\alpha \neq 0$.
- Secant: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, sempre que $\cos\alpha \neq 0$.
- Cotangent: $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, sempre que $\sin\alpha \neq 0$.

6.4 Relació fonamental

Donat un angle agut α qualsevol, es verifica que:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$



En efecte, si tenim en compte les definicions del sinus i cosinus i el teorema de Pitàgoras, tindrem:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{PP'^2}{VP^2} + \frac{VP'^2}{VP^2} = \frac{PP'^2 + VP'^2}{VP^2} = \frac{VP^2}{VP^2} = 1.$$

6.5 Resolució de triangles rectangles

Resoldre un triangle rectangle consisteix a calcular tots els seus elements (els tres angles i els tres costats), quan solament se'n coneixen alguns.

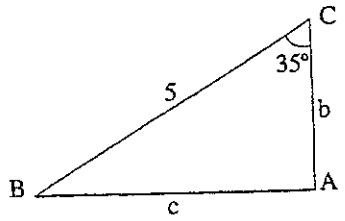
Casos de resolució:

- Es coneixen la hipotenusa i un angle agut.
- Es coneixen un catet i un angle agut.
- Es coneixen la hipotenusa i un catet.
- Es coneixen els dos catets.

Tots aquests casos són molt senzills i els practicarem amb alguns exemples.

Exemples

1) En un triangle rectangle ABC la hipotenusa $a = 5\,m$ i l'angle agut $C = 35^0$. Determinem la resta d'elements.



L'altre angle agut val $B = 90^0 - 35^0 = 55^0$.

El catet b el podem calcular tenint en compte la definició de $\cos C = \dfrac{b}{a}$, i per tant:

$$b = a\,\cos C = 5\,\cos 35^0 = 4.096\,m.$$

Per calcular el catet c sabem que $\sin C = c/a$, i per tant:

$$c = a\,\sin C = 5 \cdot \sin 35^0 \cong 5 \cdot 0.57358 \cong 2.868\,m.$$

2) El triangle rectangle ABC és tal que els seus catets valen $b = 7\,m$ i $c = 11\,m$. Calculem la resta d'elements.

Pel teorema de Pitàgores podem calcular la hipotenusa a:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 7^2 + 11^2 = 170 \rightarrow a = \sqrt{170} \cong 13.038.$$

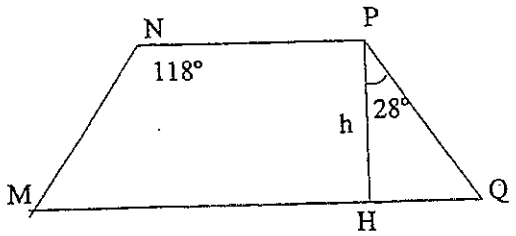
Els angles els podem calcular aplicant les definicions adequades:

$$b = c\,\tan B \rightarrow \tan B = b/c = 7/11 \rightarrow B \cong 32^0 28' 16''$$

NOTA: en aquest exemple hem calculat una raó trigonomètrica inversa. Donat el valor de la raó, hem de calcular l'angle a què correspon. Això ho podem fer en la calculadora mitjançant les funcions INV+funció trigonomètrica o bé funció trigonomètrica $^{-1}$.

Finalment $C = 90^0 - C \cong 57^0 31' 44''$

3) Calculem l'àrea d'un trapezi isòsceles si un dels angles interiors val 118^0 i les seves bases fan $30\,cm$ i $14\,cm$.



Si anomenem les bases del trapezi b i b' i la seva altura h, sabem que l'àrea del trapezi val $A = \frac{b+b'}{2}h$. Cal, doncs, calcular l'altura.

L'altura PH forma part del triangle rectangle PHQ i:

$$HQ = \frac{MQ - NP}{2} = \frac{b-b'}{2} = \frac{30-14}{2} = 8\,cm.$$

Com que l'angle interior val 118^0, és fàcil veure que l'angle $HPQ = 28^0$ i per tant:

$$\tan \widehat{HPQ} = \frac{HQ}{PH} \rightarrow \tan 28^0 = \frac{8}{h} \rightarrow h \cong 15.04581\,cm.$$

L'àrea del trapezi serà:

$$A \cong \frac{30+14}{2} 15.04581 \cong 331.008\,cm^2.$$

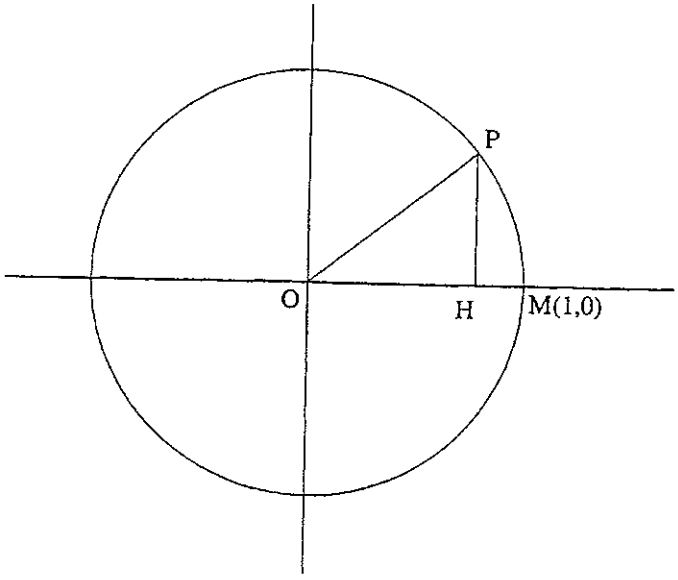
Exercicis

1) Calculeu el volum d'un con, si el radi de la base val $5\,cm$ i l'angle en el vèrtex de dues generatrius oposades val 72^0.

2) Dues circumferències amb centres separats $50\,cm$ tenen per radis $10\,cm$ i $20\,cm$. Si es traça la tangent exterior a ambdues circumferències, calculeu la longitud del segment que uneix els punts de contacte.

3) Es vol determinar l'altura d'un arbre situat en un lloc inaccessible. Mitjançant un teodolit, es veu el punt més alt de l'arbre sota un angle de $22^0 47'$. S'avança el teodolit 10 m i el punt més alt de l'arbre es veu sota un angle de $31^0 19'$. Calculeu l'altura de l'arbre tenint en compte que el teodolit es troba a una altura de 1.50 m de terra.

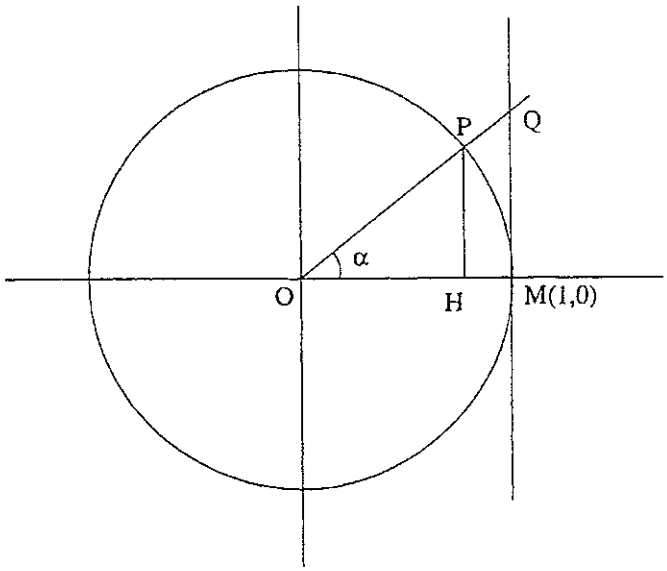
6.6 Circumferència trigonomètrica



Quan vam definir les raons trigonomètriques vam veure que eren les mateixes si els triangles rectangles eren semblants. Per tant, i per simplificar, considerarem triangles rectangles d'hipotenusa 1.
Per generalitzar la definició de les raons trigonomètriques a qualsevol angle, es considera la circumferència de radi 1 i centrada a l'origen de coordenades, la qual s'anomena *circumferència trigonomètrica.*
El punt $M(1,0)$ es considera com l'origen dels arcs i prendrem com a sentit positiu el contrari al moviment de les agulles del rellotge.
Donat un angle central corresponent a l'arc MP, si H és la projecció de P sobre l'eix d'abscisses, tenim:

- $\sin\alpha = \dfrac{PH}{OP} = PH$, que és l'ordenada del punt P.
- $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OP} = OH$, que és l'abscissa del punt P.

Observem que el sinus i el cosinus coincideixen amb l'ordenada i l'abscissa de l'extrem P de l'arc MP.
Això permet estendre les definicions de sinus i cosinus donades per a angles aguts a qualselvol angle. Hem de tenir en compte el quadrant on es trobi situat el punt P per saber el signe de les raons trigonomètriques de l'angle.
Així mateix, és molt fàcil comprovar que la relació fonamental es continua verificant per a qualsevol angle.
Per a la tangent de l'angle α, si en la figura tracem la recta tangent a la circumferència pel punt $M(1,0)$ i prolonguem el radi que passa per l'extrem de l'arc fins que talli la tangent en el punt Q, per semblança dels triangles OPH i OQM, tindrem:



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{PH}{OH} = \frac{QM}{OM} = QM.$$

Els signes de les raons segons el quadrant on es trobi l'angle són a la taula següent:

Raó	1 Quadrant	2 Quadrant	3 Quadrant	4 Quadrant
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\tan\alpha$	+	-	+	-

Exemple

El sinus d'un angle α comprès entre 90^0 i 180^0 és $4/5$. Calculem la resta de raons trigonomètriques.

Com que l'angle és del segon quadrant:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-(\sin\alpha)^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}.$$

Exercicis

4) Dibuixeu un angle de 135^0. Quin és el signe de les tres raons trigonomètriques d'aquest angle?

5) Si $\tan\alpha = \frac{-3}{2}$, en quins quadrants pot estar situat l'angle α? Justifiqueu-ho.

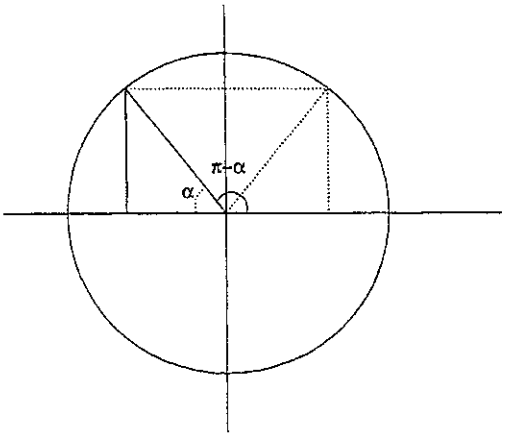
6) Raoneu per què la tangent d'un angle pot ser un nombre més gran que 1.

7) Expliqueu quin és el signe de cadascuna de les tres raons trigonomètriques dels angles 45^0, 230^0, 315^0, 720^0 *i* 1000^0.

6.7 Relacions entre les raons d'angles diferents

6.7.1 Segon quadrant

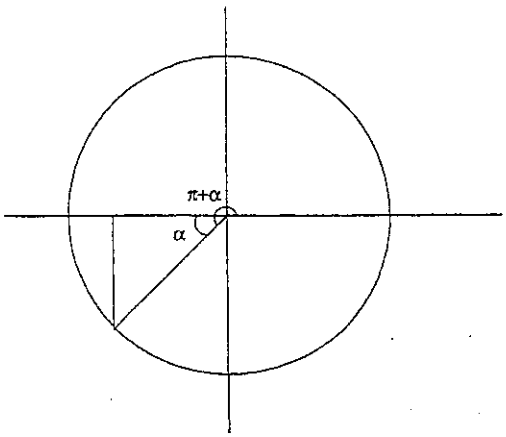
Un angle del segon quadrant es pot representar sempre per $180^0 - \alpha$, on α és un angle del primer quadrant, i observant la figura es veu que:



$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha$$

6.7.2 Tercer quadrant

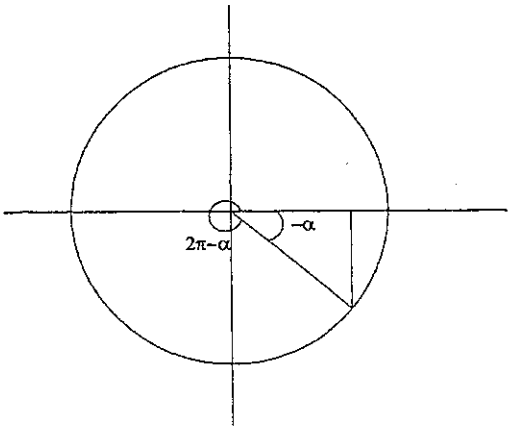
D'una manera anàloga, per un angle del tercer quadrant tindrem:



$$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^0 + \alpha) = \tan\alpha$$

6.7.3 Quart quadrant

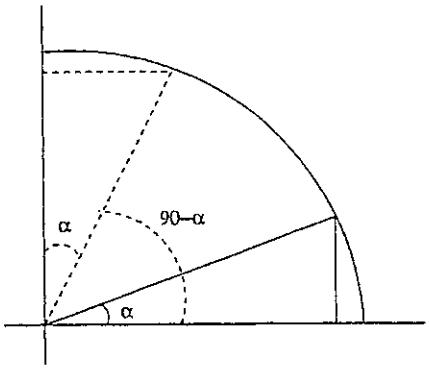
I per un angle del quart quadrant:



$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(360^0 - \alpha) = -\tan\alpha$$

6.7.4 Angles complementaris

Si dos angles són complementaris, es dedueix de la figura que:



$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$$

Exercicis

8) Relacioneu les raons trigonomètriques de l'angle de 210^0 amb les d'un angle del primer quadrant.

9) Considereu un angle de 850^0. Reduïu-lo a un de més petit de 360^0 i relacioneu les seves raons trigonomètriques amb les d'un angle del primer quadrant.

10) Un angle β tal que $0^0 < \beta < 360^0$ verifica:

$$\sin\beta = -\sin 30^0 \,;\cos\beta = -\cos 30^0$$

a) A quin quadrant pertany l'angle β?

b) Quina és l'amplitud de l'angle β?

11) Un angle α del segon quadrant és tal que $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Calculeu $\sin\alpha$ i $\tan\alpha$. Quant mesura α? Utilitzeu la calculadora per comprovar els resultats obtinguts.

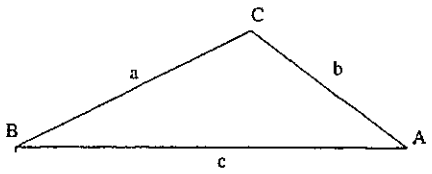
12) Utilitzeu les relacions entre les raons trigonomètriques per determinar els angles tals que el seu sinus valgui $-\frac{1}{2}$.

13) Si $90^0 < \alpha < 180^0$ i $\sin\alpha = 0.8$, calculeu $\sin(180^0-\alpha)$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cos(180^0-\alpha)$ i α.

6.8 Resolució de triangles qualssevol

Teorema del cosinus

El quadrat d'un costat d'un triangle és igual a la suma dels quadrats dels altres dos costats, menys el doble producte d'aquests pel cosinus de l'angle que formen.



És a dir:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Teorema del sinus

Els costats d'un triangle són proporcionals als sinus dels angles respectivament oposats:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aquests teoremes ens permeten resoldre triangles. *Resoldre* un triangle, com hem dit abans, significa trobar els seus elements: els tres costats i els tres angles.

Els diferents casos que es poden donar són:

- Es coneixen els tres costats.
- Es coneixen dos costats i l'angle comprès.
- Es coneixen dos costats i l'angle oposat a un d'ells.
- Es coneixen un costat i dos angles.

Exemples

1) En un triangle, $a = 10\,cm$, $b = 12\,cm$ i $c = 15\,cm$, hem de trobar els tres angles.

   Aquí es coneixen els tres costats, i d'acord amb el teorema del cosinus, tenim:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \;\rightarrow\; \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

   Substituïm els valors:

$$\cos A = \frac{12^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 10} = \frac{269}{360} \cong 0.747$$

$$\cos A \cong 0.747 \rightarrow A \cong 41.65^0$$

   Aplicant de nou les fórmules per als altres angles, obtindríem: $B \cong 52.89^0$ i $C = 180 - A - B = 85.46^0$.

2) En un triangle $a = 40\,m$, $b = 25\,m$ i $C = 60^0$, calculem la resta d'elements.

   Aplicant el teorema del cosinus:

$$c^2 = 40^2 + 25^2 - 2 \cdot 40 \cdot 25 \cos 60^0 = 1225 \rightarrow c = 25\,m.$$

   Ara que ja es coneixen els tres costats, ens trobem igual que en el cas anterior. És fàcil comprovar que $A \cong 81.49^0$ i $B \cong 38.51^0$.

3) En un triangle $A = 75^0$, $B = 60^0$ i $a = 10\,cm$. Resolguem el triangle.

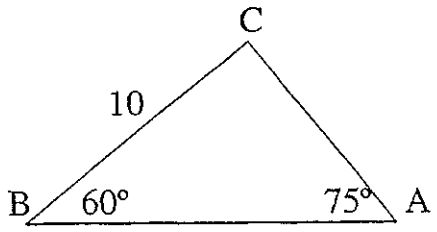
   En primer lloc, $C = 180^0 - 75^0 - 60^0 = 45^0$, i ara:

$$\frac{10}{\sin 75^0} = \frac{b}{\sin 60^0} = \frac{c}{\sin 45^0}$$

i és fàcil calcular les dades que falten:

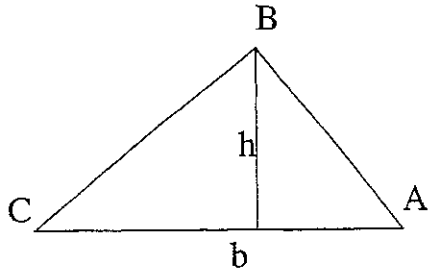
$$b = \frac{10 \sin 60^0}{\sin 75^0} \cong 8.96\, cm$$

i de manera anàloga $c \cong 7.32\, cm$.



4) Àrea d'un triangle.

Sabem que l'area S d'un triangle és definida per la fórmula $S = \frac{1}{2}bh$, on h és l'altura corresponent al costat b. Si observem la figura, tenim $h = a \sin C$, i per tant:



$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ba \sin C$$

De la mateixa manera es podría comprovar que:

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

Podem dir, per tant, que l'àrea d'un triangle és la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que aquests formen.

Exercicis

14) Resoleu un trangle en què $a = 4\, cm$, $c = 8\, cm$ i $B = 75^0$.

15) En un triangle els costats fan $a = 24\, m$, $b = 30\, m$ i $c = 45\, m$. Està determinat el triangle? Si és així, calculeu els tres angles.

16) Construïu un triangle en què $B = 56^0$, $C = 80^0$ i $b = 12\,cm$. Resoleu el triangle trobant les mesures dels elements que falten.

17) Utilitzeu el teorema del sinus per resoldre un triangle en què $a = 5\,cm$, $b = 8\,cm$ i $A = 35.5^0$. Pots fer-ho utilitzant el teorema del cosinus?

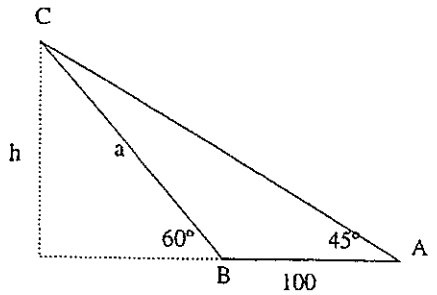
18) En un triangle rectangle un angle agut fa 35^0 i un catet $6\,cm$. Podeu utilitzar el teorema del sinus per resoldre aquest triangle? Feu-ho.

19) Resoleu un triangle en què $a = 24\,cm$, $b = 15\,cm$ i $A = 125^0$. Calculeu la seva àrea.

6.9 Aplicacions de la resolució de triangles

Els teoremes del sinus i del cosinus ens permeten resoldre nombrosos problemes. Vegem-ne alguns exemples d'aplicació.

- Volem saber l'altura d'un edifici. Des d'un punt situat a terra veiem la teulada sota un angle de 45^0. Ens hi apropem $100\,m$ i ara la veiem sota un angle de 60^0. Tenim prou dades per calcular l'altura del edifici?



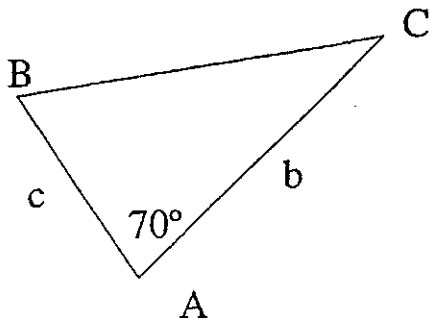
Si considerem el triangle ABC de la figura, podem conèixer els tres angles i el costat $c = 100\,m$. Si podem calcular el costat a, tindrem la hipotenusa del triangle rectangle en el qual h és l'altura que busquem. Podem aplicar el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin 45^0} = \frac{100}{\sin 15^0}$$

i podem obtenir fàcilment $a \cong 273.205\,m$.

Finalment, en el triangle rectangle: $h/a = \sin 60^0 \rightarrow h \cong 273.205 \sin 60^0 \cong 236.6\,m$.

- Dues barques motores surten d'un mateix punt d'un port amb direccions que formen un angle de 70^0, amb velocitats constants de $50\,km/h$ i $40\,km/h$, respectivament. Calculem la distància que les separarà després de 10 minuts.



El triangle ABC de la figura representa la situació. Caldrà calcular els costats b i c, que són les distàncies recorregudes pels motoristes:

$$b = \frac{50 \cdot 10}{60} = \frac{25}{3} km \qquad c = \frac{40 \cdot 10}{60} = \frac{20}{3} km$$

Tenim dos costats i l'angle que formen. Podem aplicar el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \rightarrow a^2 = (\frac{25}{3})^2 + (\frac{20}{3})^2 - 2 \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{20}{3} \cos 70^0$$

$$a^2 \cong 77.886 \rightarrow a \cong 8.711\, km$$

6.10 Exercicis

20) El terrat d'un gratacel el veiem sota un angle de 60^0. Amb quin angle el veuríem des d'una distància doble a l'anterior?

21) Una sequoia de Califòrnia es veu sota un angle de 36^0, i si ens hi acostem $35\, m$, es veu sota un angle de 44^0. Calculeu l'alçària de l'arbre.

22) Calculeu la superfície d'un polígon regular de 15 costats si cada costat fa $2\, cm$.

23) Es vol calcular la distància entre dos punts inaccessibles A i B. Es prenen dos punts accessibles C i D, separats entre ells per $40\, m$. Es mesuren els angles $ACD = 90^0$ i $BCD = 43^0 29'$ amb l'ajut d'un teodolit situat al punt C. I situat al punt D, es mesuren els angles $ADC = 40^0 33'$ i $BDC = 110^0 2'$. Amb aquestes dades determineu la distància entre els punts A i B.

24) A un ebenista li han encarregat un tauler triangular amb dos costats de longituds $1\, m$ i $1.75\, m$ i d'angle oposat al primer 30^0. Podrà fer el tauler? Raoneu la resposta.

25) El radar d'un vaixell detecta un objecte en direcció est a $8\, km$ de distància i un altre en direcció nord-oest a $6\, km$. Quina és la distància entre els dos objectes?

26) Per assegurar un pal a terra se'l subjecta amb dos cables a dos punts separats per $20\,m$. Els cables formen amb el terra angles de 75^0 i 60^0. Trobeu l'alçada del pal.

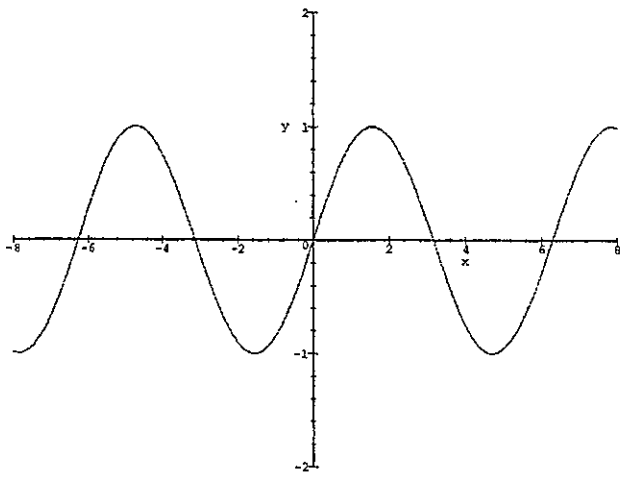
27) Dos observadors, distants entre si $5\,km$, observen alhora un avió sota angles de 80^0 i 65^0, respectivament. Suposant que els observadors i l'avió es troben en un mateix pla, calculeu l'altura a què es troba l'avió en aquest moment.

28) Una parcel·la de $6\,ha$ té forma de trapezi rectangle. Una de les bases és de $500\,m$ i l'angle adjacent de 60^0. Per posar-hi una tanca cal conèixer el perímetre. Calculeu les longituds que falten.

6.11 Funcions trigonomètriques

6.11.1 La funció sinus

Ja hem vist que, donat un angle, podem conèixer el seu sinus. Això fa pensar que es pot establir una funció de variable real que a un angle, expressat en radians, li faci correspondre el seu sinus. Aquesta funció és la funció *sinus:* $f(x) = \sin x$.



Les propietats més importants de la funció $f(x) = \sin x$ són:

- El seu domini és R.

- Sabem que un mateix punt de la circumferència correspon a un angle x i tots els angles que es poden expressar com a $x + 2k\pi$, essent k un nombre enter.

  Així, $\sin x = \sin(x + 2\pi k)$. Direm que la funció sinus és *periòdica* de període 2π.

  N'hi ha prou, doncs, de representar els valors de $\sin x$ pels angles $0 \leq x \leq 2\pi$ i després repetir la gràfica d'una manera periòdica.

- El recorregut de la funció *sinus* és l'interval tancat $[-1, 1]$

- Com que $\sin 0 = 0$, passa per l'origen de coordenades. A més, a causa de la periodicitat, talla l'eix OX als punts de la forma $x = k\pi$, essent k enter.

- La seva gràfica és simètrica respecte de l'origen de coordenades. Això fa que $\sin(-x) = -\sin x$.

- Així mateix, la funció *sinus* pren el valor màxim 1 quan $x = 2k\pi + \pi/2$ amb k enter amb $\sin(x) = 1$. I pren el mínim -1 quan $x = 2k\pi + 3\pi/2$ amb $\sin(x) = -1$.

A la funció *sinus* podem aplicar translacions verticals i horitzontals del tipus $f(x) = \sin x + h$ i $f(x) = \sin(x + h)$, que també són periòdiques amb període 2π.

Exercicis

29) Tenint en compte la gràfica de la funció sinus, representeu les funcions següents:

    a) $y = \sin x - 2$

    b) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

    c) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

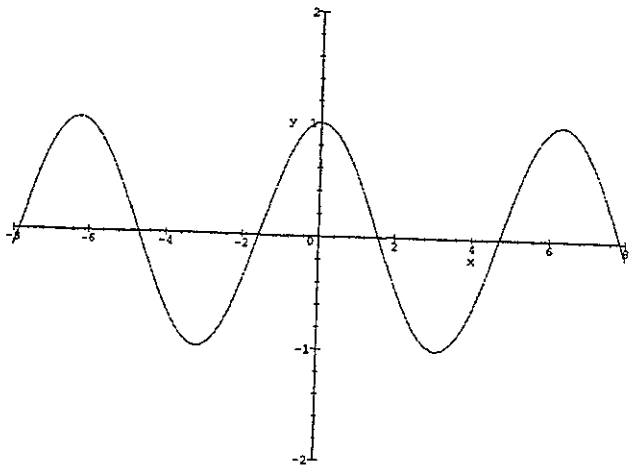
30) Representeu gràficament la funció $y = 2\sin x$

    a) Quin és el seu recorregut?

    b) I el seu període?

6.11.2 La funció cosinus

La funció que a cada angle, expressat en radians, li fa correspondre el seu cosinus és la funció *cosinus*: $f(x) = \cos x$.



Les propietats més importants són:

- El domini d'aquesta funció és R.
- Sabem que un mateix punt de la circumferència correspon a un angle x i tots els que es poden expressar com a $x + 2k\pi$, essent k un nombre enter. Així, $\cos x = \cos(x + 2\pi k)$. Direm que la funció cosinus és *periòdica* de període 2π.

  N'hi ha prou de representar els valors de $\cos x$ per als angles $0 \leq x \leq 2\pi$. Després cal repetir la gràfica d'una manera periòdica.
- És una funció real de variable real i el seu recorregut és l'interval $[-1, 1]$.
- Com que $\cos 0 = 1$, talla l'eix d'ordenades a $(0, 1)$. A més, a causa de la periodicitat, talla l'eix OX als punts de la forma $x = \pi/2 + k\pi$, essent k enter.
- La seva gràfica és simètrica respecte de l'eix d'ordenades. Això fa que $\cos(-x) = \cos x$.
- Així mateix, la funció *cosinus* pren el valor màxim 1 quan $x = 2k\pi$ amb k enter. I pren el valor mínim -1 quan $x = \pi + 2k\pi$.

Exercicis

31) Representeu gràficament les funcions:

a) $y = \cos x + 1$

b) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

c) $y = \cos x - 2$

d) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

32) Feu la gràfica i dòneu el període de cadascuna de les funcions següents:

a) $f(x) = \cos 2x$

b) $f(x) = -\cos x$

33) Determineu el recorregut de les funcions:

a) $f(x) = 2\cos x$

b) $f(x) = -2\cos x$

c) $f(x) = 3\cos x$

d) $f(x) = \cos 4x$

6.11.3 La funció tangent

La funció *tangent* és aquella que a cada angle, expressat en radians, li fa correspondre la seva tangent $f(x) = \tan x$. Per establir-ne els valors cal recordar que:

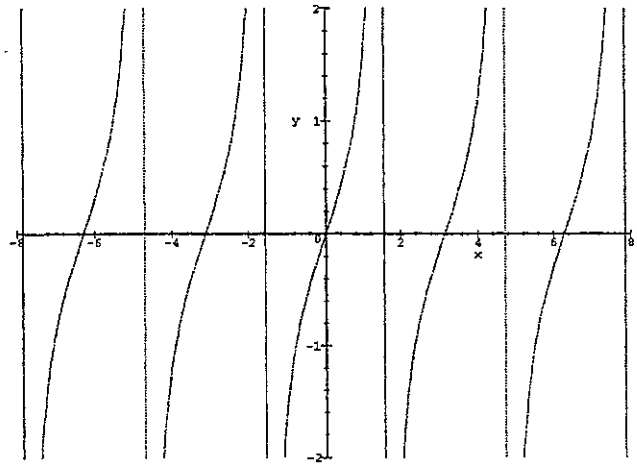
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Les propietats més importants són:

- La funció tangent no està definida en els punts en què el denominador és 0, és a dir, $\cos x = 0$. Això passa quan x és un múltiple imparell de $\frac{\pi}{2}$. El seu domini és:

$$R - \left\{ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \; k \quad enter \right\}.$$

- El seu recorregut és $(-\infty, +\infty)$ i la seva gràfica és:



- La seva gràfica passa per l'origen de coordenades, ja que $\tan 0 = 0$.
- La seva gràfica és simètrica respecte de l'origen de coordenades. Això fa que $\tan(-x) = -\tan(x)$.
- Talla l'eix d'abscisses als punts $x = k\pi$, essent k enter.
- Té asímptotes verticales als punts on la funció tangent no està definida.

Exercicis

34) Entre aquests angles n'hi ha algun que no és del domini de la funció tangent. Digueu quins són: $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{32\pi}{5}$, 324^0, 32π, $\frac{15\pi}{2}$, 900^0, 990^0.

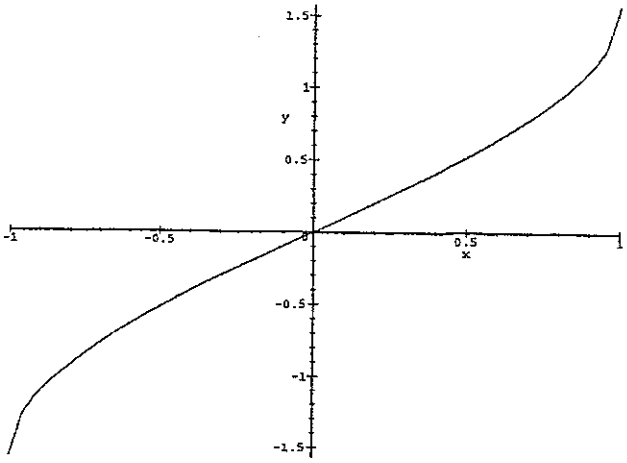
35) Ajudeu-vos de la calculadora per construir una taula de valors per representar, d'una manera acurada, $y = \tan x$ en l'interval $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

6.12 Funcions circulars inverses

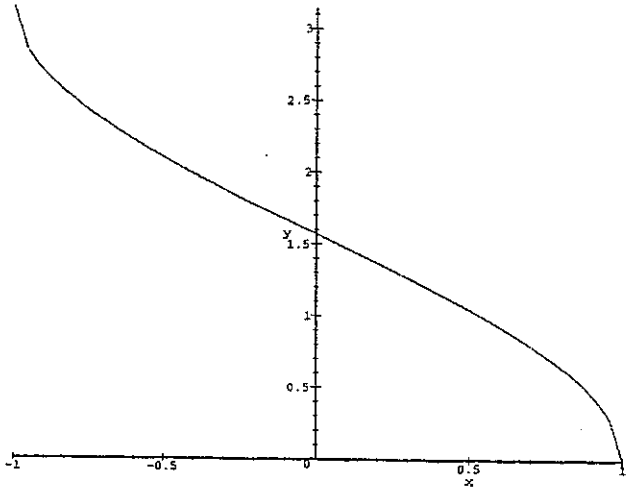
- La funció inversa de $f(x) = \sin x$ és $f(x) = \arcsin x$, és a dir, *arcsin* expressa l'angle, expressat en radians, tal que el seu sinus és igual a x.

  Si, per exemple, volem calcular $\arcsin 0$, veiem que hi ha tres angles entre 0 i 2π que tenen per imatge 0: 0, π i 2π. Si *arcsin* ha de ser una funció, només pot tenir una sola imatge per a cada valor de x; si no fos així, no seria una funció. És per aixó que convé que les imatges de la funció *arcsin* estiguin dins l'interval $[-\pi/2, \pi/2]$.

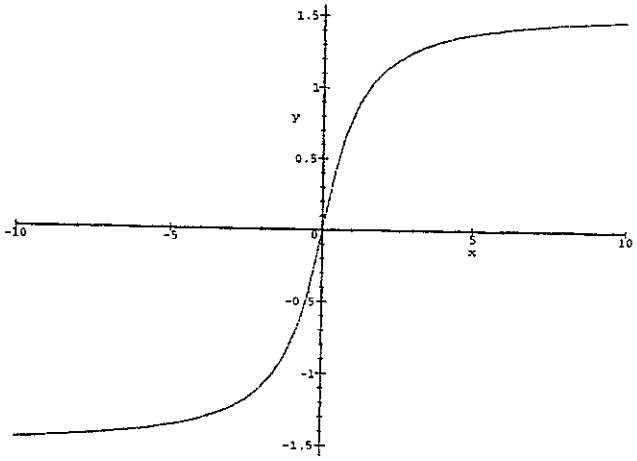
D'aquesta manera, el domini de la funció *arcsin* és $[-1, +1]$ i el seu recorregut $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. És una funció contínua en tot el seu domini.



- La funció inversa de $f(x) = \cos x$ és $f(x) = \arccos x$. Amb les mateixes consideracions d'$\arcsin x$, tindrem que el seu domini és $[-1, +1]$ i el seu recorregut és $[0, \pi]$ i és contínua en tot el seu domini.



- La funció inversa de $f(x) = \tan x$ és $f(x) = \arctan x$. El seu domini és $(-\infty, +\infty)$ i el seu recorregut és $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



6.13 Fórmules d'addició

6.13.1 Fórmules d'addició d'angles

1) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

3) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

4) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

5) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

6) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

6.13.2 Raons trigonomètriques de l'angle doble

Si en les expressions anteriors fem $\beta = \alpha$, tindrem:

1) $\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$

2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}$

6.13.3 Raons trigonomètriques de l'angle meitat

Si en les fórmules anteriors substituïm α per $A/2$ i resolem, tindrem:

1) $\cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$

2) $\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$

3) $\tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ El signe + o − dependrà del quadrant en què estigui situat l'angle $A/2$.

6.14 Transformació de sumes en productes

1) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

2) $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

3) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

4) $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

Exemples

1) Expressem $(1-\cos\alpha)$ com a producte de raons trigonomètriques.
Podem posar:

$$1-\cos\alpha = \cos 0 - \cos\alpha = -2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{-\alpha}{2} =$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

2) Expressem $(\sin 5x\cos 3x)$ en forma de suma de sinus.

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$\dfrac{1}{2}(\sin A + \sin B) = \sin 5x\cos 3x$ i comparant tindrem:

$$5x = \frac{A+B}{2}$$

$$3x = \frac{A-B}{2}$$

Per tant, $A = 8x$ i $B = 2x$ i ens quedaria:

$$\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$$

Exercicis

36) Transformeu en producte:

a) $1 - \sin\alpha$

b) $1 + \cos\alpha$

c) $1 + \sin\alpha$

37) Expresseu en forma de producte de sinus i cosinus les expressions següents:

a) $\sin 105^0 + \sin 15^0$

b) $\sin 105^0 - \sin 15^0$

6.15 Identitats i equacions trigonomètriques

- Anomemen identitats trigonomètriques aquelles en què les expressions a cada costat de la igualtat són diferents, pero es verifiquen per a qualsevol angle. Per comprovar-ho, caldrà desenvolupar els dos membres de la igualtat fins a arribar a una mateixa expressió en els dos membres.

- Una equació trigonomètrica és una igualtat que es verifica per a alguns angles. Resoldre una equació trigonomètrica és trobar el valor o valors pels quals es verifica la igualtat.

Exemples

1) Comprovem que $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ per a qualselvol angle α

$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

2) Resolem l'equació $\cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow \cos x \sin x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(\sin x - 1) = 0.$$

Això ens dóna: $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k enter) o bé $\sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k enter).

En resum, les solucions són: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k enter).

3) Resolem l'equació $\sin x + \cos x = 1$.

De la igualtat fonamental tenim $\sin x = \sqrt{1 - cos^2 x}$, i per tant:

$$\sqrt{1 - cos^2 x} + \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - cos^2 x} = 1 - \cos x$$

Si elevem al quadrat els dos membres de la igualtat:

$$1 - \cos \alpha^2 = 1 - 2\cos x + \cos x^2$$

S'obté una equació de segon grau que en resoldre-la ens dóna $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$ i $x = 0$ com a solucions dins l'interval $[0, 2\pi]$.

Hem de comprovar les solucions, ja que en elevar al quadrat es poden introduir solucions fictícies. És fàcil comprovar que $x = \frac{3\pi}{2}$ no és solució, ja que no satisfà l'equació inicial. Per tant, les solucions són $x = \pi/2 + 2k\pi$ i $x = 2k\pi$ amb k enter.

Exercicis

38) Verifiqueu la identitat:

$$\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$$

39) Verifiqueu la identitat:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

40) Resoleu les equacions trigonomètriques següents:

a) $\sin x + \frac{\pi}{2} = 1$

b) $2\cos x + 1 = 0$

c) $2\sin^2 x - \sin x = 1$

d) $2(\cos x)^2 = \cos 2x$

6.16 Exercicis de repàs

1) Un angle agut α és tal que $\tan\alpha = 3$. Representeu aquest angle en la circumferència unitat i calculeu $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ sense fer servir la calculadora.

2) Si $90^0 < \alpha < 180^0$ i $\cos\alpha = -0.8$, calculeu $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cos(-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$ i $\tan(-\alpha)$.

3) Determineu quin és el valor de k en la següent funció $f(x) = \cos(kx)$, si se sap que el període d'aquesta funció és $\frac{\pi}{2}$.

4) Escriviu les expressions que donen les raons trigonomètriques de l'angle de 15^0 a partir de les raons trigonomètriques de l'angle de 30^0.

5) Esbrineu si la igualtat $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ és una equació o una identitat.

6) Comproveu les identitats següents:

   a) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{1/\tan\alpha + 1/\tan\beta}{(1/\tan\alpha)(1/\tan\beta) - 1}$

   b) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha} + \dfrac{1}{1-\sin\alpha} = 2(1/\cos\alpha)^2$

7) Resoleu les equacions trigonomètriques següents:

   a) $\sin x + (\cos x)^2 = \dfrac{5}{4}$

   b) $\cos x = 1 - \sin x$

   c) $2(\sin x)^2 - \tan x = 0$

   d) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   e) $\dfrac{1/\tan x + \tan x}{1/\tan x - \tan x} = 2$

8) Si $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, demostreu que:

$$(\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) = 1 + \sin 2\alpha$$

9) Demostreu la igualtat: $\sin 40^0 + \sin 20^0 = \cos 10^0$

10) Una torre de comunicacions es troba situada sobre una muntanya. Situats en una plataforma, es veu l'extrem de l'antena sota un angle de 60^0. Si ens hi acostem $13\,m$, es veu sota un angle de 68^0 i des d'aquest mateix punt, es veu la base de la torre sota un angle de 57^0. Calculeu l'alçària de la torre.

11) Les diagonals d'un paralel·logram fan $20\,cm$ i $12\,cm$, respectivament, i es tallen formant un angle de 62^0. Calculeu la longitud dels costats del paralel·logram.

6.17 Solucions

1) 188.17

2) 52.91

3) 13.48

10) a) 3r
    b) 210

11) 3/5;-3/4

12) 210; 330

13) 0.8; 0.6; 4/3;-0.6

14) b=7.96; A=29.04

15) A=29.54; C=112.41

16) a=10.05; c=14.25

17) B=68.29; c=8.36; No

18) Sí

19) 73.81

20) 40.89

21) 102.68

22) 70.58

23) 78.15

24) Sí

25) 12.96

26) 23.66

27) 6.31

28) base menor=425.11; altura=129.72; costat=149.78

36) a) $2\cos(\frac{90+\alpha}{2})\sin(\frac{90-\alpha}{2})$
    b) $2\cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{-\alpha}{2})$
    c) $2\sin(\frac{90+\alpha}{2})\cos(\frac{90-\alpha}{2})$

37) a) $2\sin 60^0 \cos 45^0$
b) $2\cos 60^0 \sin 45^0$

43) a) 34.81
b) 120
c) $\pi/2$; $\pi/3$
d) Ni hi ha solució

Exercicis de repàs

2) 0.6; -3/4; -0.8; -0.6; 3/4

3) 4

7) a) $\pi/3$
b) 0; $\pi/3$
c) 0; $\pi/4$; π
d) $\pi/12$
e) $-\pi/6$; $\pi/6$

10) 28.34

11) 15.46; 9.43

Capítol 7

LÍMITS

7.1 Límit d'una funció en un punt

El concepte de límit és un dels més complexos de matemàtiques i, al mateix temps, dels més potents. Farem una aproximació intuïtiva i pràctica al concepte i a la manera de calcular límits.

7.1.1 Límit per la dreta

Considerem la funció $f(x) = x^2$. Mirarem què passa amb els valors que agafa la funció quan ens anem aproximant a $x = 2$, però amb valors més grans que 2, és a dir, per la dreta de 2. Si fem una taula de valors:

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001	...	$\to +2$
x^2	9	6.25	4.41	4.0401	4.004001	...	$\to +4$

Veiem que, a mesura que ens anem aproximant a 2 per la dreta, la funció es va aproximant a 4. Direm que *el límit* de la funció $f(x) = x^2$ quan x tendeix a 2 per la dreta és 4 i escriurem:

$$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4.$$

En general, donada una funció qualsevol $f(x)$, si aquesta s'aproxima tant com vulguem a un nombre l, quan la variable x s'aproxima a un nombre a per la dreta, direm que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

Considerem un altre exemple:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 2 \\ 2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si repetim el mateix procés anterior i ens apropem a 2 per la dreta, tindrem:

x	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001	...	$\to +2$
$f(x)$	5	4.2	4.02	4.002	4.0002	...	$\to +4$

I veiem que:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x = 4.$$

Observem que el valor de la funció en el punt $x = 2$ és $f(2) = -2$, que és diferent del valor del límit per la dreta que hem trobat.

7.1.2 Límit per l'esquerra

Si considerem novament la funció $f(x) = x^2$ i veiem què passa a la funció quan ens apropem a 2 per l'esquerra, tindrem una taula similar al cas anterior:

x	1.95	1.99	1.999	1.999	1.9999	...	$\to +2$
x^2	3.8025	3.9601	3.996001	3.99960001	3.999960000011	...	$\to +4$

Com abans, tenim:

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4.$$

En general, si donada una funció $f(x)$ aquesta s'aproxima tant com vulguem a un nombre l, quan la variable x s'aproxima a un nombre a per l'esquerra, direm que:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

Si considerem novament la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 2 \\ 2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Quant valdrà $\lim_{x\to 2^-} f(x)$?
Si tornem a fer una taula de valors:

x	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999	...	$\to +2$
$f(x)$	-1.5	-1.9	-1.99	-1.999	-1.9999	...	$\to -2$

Tenim:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -2.$$

En aquest cas, el límit coincideix amb el valor de la funció en el punt $x = 2$.

7.1.3 Límit d'una funció en un punt

Definició:
Sigui una funció $f(x)$. Direm que el límit de $f(x)$ quan x tendeix cap a a és el nombre l, i escriurem:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Si existeixen els dos límits laterals quan x tendeix a a i són iguals a l.

Definició:
Si una funció té límit en un punt, es diu que és convergent en aquest punt.

Exemple

En els exemples anteriors, la funció $f(x) = x^2$ és convergent en el punt $x = 2$, mentre que la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 2 \\ 2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

no ho és, ja que els límits laterals són diferents en el punt $x = 2$.

7.1.4 Límits infinits

Començarem amb un exemple. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$; volem calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.$$

Si fem una taula de valors:

x	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001	...	$\to +0$
$1/x$	2	10	100	1000	10000	...	$\to +\infty$

Com més ens acostem a 0, la funció creix més i més. Diem, doncs, que la funció no té límit quan $x \to 0$.
Això vol dir que, en acostar-nos suficientment cap a zero per la seva dreta, la funció creix tant com vulguem i ho expressem com a:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Si ara ens apropem a zero per l'esquerra:

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	$\to -0$
$1/x$	-2	-10	-100	-1000	-10000	...	$\to -\infty$

Aquí tindrem:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Podem donar, doncs, la definició següent:
Definició:
Direm que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty(-\infty)$ quan, en acostar-nos suficientment cap al valor $x = a$, la funció pren valors tan grans (petits) com vulguem.
Aleshores podem dir que si $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$ i $\lim_{x\to a} g(x) = 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$$

A vegades, es posa com a valor del límit ∞ i solament s'esbrina el signe si és necessari.
Exemples

1)
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{5}{0} = \infty.$$

Si volem esbrinar el signe, prenent límits per l'esquerra i la dreta, és fàcil veure que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty.$$

2)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

Comproveu que en aquest límit els límits laterals són tots dos $+\infty$.

7.1.5 Propietats dels límits

A continuació enumerem algunes propietats dels límits, les quals es poden demostrar fàcilment:

1) El límit d'una funció constant és la constant mateix.

$$\lim_{x\to a} k = k.$$

2) Si $f(x) = x$, llavors:

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

3) El límit d'una suma o diferència de dues funcions en un punt $x = a$ és la suma o diferència dels límits de les funcions en el punt $x = a$:

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

4) El límit d'un producte de dues funcions en un punt $x = a$ és el producte dels límits de les funcions en el punt $x = a$:

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x).$$

I com a cas particular:

$$\lim_{x \to a} (k\, f(x)) = k \lim_{x \to a} f(x).$$

5) El límit d'una divisió de dues funcions en el punt $x = a$ és el quocient dels límits de les funcions en el punt $x = a$ sempre que el límit del denominador no sigui zero:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

6) El límit de l'arrel d'una funció en un punt és l'arrel del límit de la funció en el mateix punt:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

7) Límit d'una potència:

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

7.1.6 Càlcul del límit d'una funció en un punt

Per les propietats vistes fins ara, en molts casos, l'obtenció del límit és molt fàcil: n'hi ha prou de substituir la variable x pel punt a. Vegem-ne alguns casos concrets.

- Funcions polinòmiques

  Si $f(x)$ és una funció polinòmica es verifica que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 2x + 4) = 3\ 2^2 - 2\ 2 + 4 = 12.$
2) $\lim\limits_{x \to 0} (8x^2 - 3x + 4) = 4.$
3) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 2x^2) = 0.$

- Funcions racionals

  Es verifica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

  sempre que $g(a)\neq 0$.

  Exemples

  1) $\lim_{x\to 1}\frac{2x+4}{3x-2}=\frac{2\ 1+4}{3\ 1-2}=6.$

  2) $\lim_{x\to -1}\frac{3x+3}{x+4}=0.$

  Hem de resoldre el cas quan $g(a)=0$. Es poden donar dues possibilitats:

  - Que $f(a)=0$. Tindrem un límit *indeterminat* de la forma $0/0$. Això vol dir que d'entrada no sabem el seu valor i que l'hem d'estudiar més a fons.
  - Que $f(a)=l\neq 0$. Tindrem un límit de la forma $l/0$ que ja hem vist.

- Límits de funcions racionals de la forma $0/0$

  Si $f(a)=g(a)=0$, es produeix una indeterminació de la forma $0/0$, la qual és fàcil de resoldre ja que a és un arrel de $f(x)$ i de $g(x)$ i que podem, per tant, simplificar i tornar a prendre límits.

  Exemples

  1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=\frac{0}{4}=0.$$

  2)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-8x+5}{x^2+6x-7}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-8x+5}{x^2+6x-7}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3x-5)(x-1)}{(x+7)(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}x^2+3x-5x+7=-\frac{1}{8}.$$

3)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-8x^2+21x-18} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-8x^2+21x-18} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-2x-3)(x-3)}{(x^2-5x+6)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-2} = 4.$$

- Límits irracionals de la forma 0/0

  Per resoldre límits de la forma 0/0 de funcions en les quals apareguin arrels quadrades es multiplica el numerador i el denominador per l'expressió conjugada on apareguin aquestes arrels.

  Exemple

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.$$

Exercicis

Calculeu els límits següents:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$.

2) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3-1}{2x}$.

3) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1}\right)$.

4) $\lim_{x\to 3} \frac{2x-\sqrt{x^2+27}}{x-3}$.

5) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$.

6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$.

7.1.7 Asímptotes verticals

A un exemple anterior teníem la funció $f(x) = 1/x$, i havíem vist que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Observant la gràfica d'aquesta funció, veiem que la funció s'acosta cap a l'eix vertical a mesura que x s'apropa a zero. Direm que la recta $x = 0$ (l'eix vertical) és una asímptota vertical de la funció $f(x) = 1/x$.
En general, les asímptotes verticals són les rectes d'equació $x = a$, on a és un valor per al qual $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Exemples

1) La funció:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

és tal que el seu denominador s'anul·la per a $x = 1$ i per tant, la recta d'equació $x = 1$ és una asímptota vertical.

2) Trobem les asímptotes verticals de la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$.

El denominador s'anul·la per a $x = +3$ i $x = -3$, i per tant, les rectes $x = 3$ i $x = -3$ són asímptotes verticals.

7.2 Límits en l'infinit

Aquí estudiarem què passa amb una funció quan els valors de la variable independent es fan molt grans o molt petits.
Considerem de nou la funció $f(x) = 1/x$ i fem una taula de valors per a x grans i positius:

x	1	10	100	1000	10000	...	$\to +\infty$
$1/x$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	...	$\to 0$

Veiem que quan x va augmentant, $f(x)$ es va acostant cada vegada més cap a zero, i que la gràfica de la funció $f(x)$ es va acostant cap a la recta d'equació $y = 0$.
Aquest fet es representa com a:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

De manera anàloga, quan $x \to -\infty$, tindrem:

x	-1	-10	-100	-1000	-10000	...	$\to -\infty$
$1/x$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	$\to -0^-$

Veiem que la funció s'acosta a zero a mesura que x es fa més petit.
En general, si per a valors cada vegada més grans de x, una funció es va acostant cap a un cert valor $l \in R$, escriurem:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

I, anàlogament, si per a valors cada vegada més petits de x, la funció es va acostant cap a $l \in R$, escriurem:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Resumint, un límit en l'infinit és simplement el valor cap al qual tendeix la funció per a valors molt grans o molt petits de la variable independent.

7.2.1 Asímptotes horitzontals

Definició:
La recta $y = a$, $a \in R$ és una asímptota horitzontal de la gràfica d'una funció $f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

o bé si:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a.$$

Exemple

La funció $f(x) = \dfrac{1-x}{2x-5}$ té la recta $x = -1/2$ com a asímptota horitzontal, ja que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1-x}{2x-5} = -1/2.$$

7.2.2 Càlcul del límit d'una funció en l'infinit

1) El límit d'una funció constant és la mateixa constant:

$$\lim_{x \to \infty} k = k.$$

2) Si tenim una funció polinòmica:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Es verifica que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n.$$

Aleshores, si $a_n > 0$, i $x \to +\infty$, el límit és $+\infty$ i si $a_n < 0$, el límit és $-\infty$.

Si $x \to -\infty$, tindrem en compte la paritat de l'exponent n de $a_n x^n$.

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+5x-6) = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^2+4x+7) = -\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2+4x-2) = +\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3+4x+7) = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3+7) = +\infty$.

3) Límits de funcions racionals:

Siguin dues funcions polinòmiques:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Aleshores, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ val:

- 0, si $n < m$
- $\dfrac{a_n}{b_m}$, si $n = m$
- ∞, si $n > m$

En el tercer cas, caldrà estudiar el signe de ∞ d'una manera semblant com hem fet amb les funcions polinòmiques.

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{5x^2-4} = 0$, ja que $n = 1$ i $m = 2$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-2}{2x^2} = \dfrac{3}{2}$, ja que $n = m = 2$.

$3x^2+2$ $-\infty$, ja que $n = 2$ i $m = 1$.

éssim concretar el signe,

$$\frac{3x^2+2}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x} = +\infty.$$

l'exemple, calculeu el mateix límit quan $x \to$

4) Límit d'una suma.

Aquí es poden presentar diferents casos:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = l_1 + l_2.$$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = l_1 + \infty = \infty.$$

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = +\infty + \infty = +\infty.$$

d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty.$$

e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$
Aquí tenim un nou cas d'indeterminació. Si les funcions són polinòmiques o racionals, cal operar abans de prendre límits i la indeterminació desapareixerà en la majoria dels casos.

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(3x^2+4x-3)+(-2x^2+3x-1)\right] = \infty - \infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[(3x^2+4x-3)+(-2x^2+3x-1)\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x^2+7x-4) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$

Si es treballa amb funcions irracionals, la indeterminació es resol multiplicant i dividint pel conjugat del terme on apareix la indeterminació.

Exemple

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-x) = \infty - \infty$$
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-x)((\sqrt{x+3}+x)}{\sqrt{x+3}+x} =$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x^2}{\sqrt{x+3}+x} = -\infty.$$

5) Límit d'un producte.

Com abans, podem considerar diferents casos:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2.$$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1 \cdot \infty = \infty.$$

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

Per obtenir el signe de ∞ s'apliquen les regles habituals del producte.

d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
Normalment aquesta indeterminació desapareix quan fem la multiplicació abans de prendre límits. Es pot convertir en una indeterminació dels tipus $0/0$ o ∞/∞.

6) Límit d'un quocient.

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2$ amb $l_2 \neq 0$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2$ amb $l_2 \neq 0$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{l_2} = \infty.$$

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{\infty} = 0.$$

d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$
llavors:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{0} = \infty.$$

e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

Aquesta indeterminació ja l'hem vist per al cas que les funcions siguin racionals.

Per al cas que les funcions siguin irracionals, es procedirà aplicant la propietat següent, anàloga a l'emprada per a les funcions polinòmiques:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{a_n x^n} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} a_n x^n}.$$

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1.$$

7) Límit d'una potència.

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2 > 0$

llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 0.$$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2 < 0$

llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = +\infty$$

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

Es una indeterminació 0^0, que no resoldrem per ara.

d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2 > 0$

llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = +\infty.$$

e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2 < 0$

llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 0.$$

f) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

Resulta una indeterminació ∞^0, que no resoldrem per ara.

g) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1 \neq 0$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = l_2 \neq 0$
llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2}.$$

h) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l > 1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$
llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = +\infty.$$

i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l > 1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$
llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 0.$$

j) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l\ ,\ 0 < l < 1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$
llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 0.$$

k) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l\ ,\ 0 < l < 1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$
llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = +\infty.$$

l) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
llavors:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}.$$

És una indeterminació que resoldrem a l'apartat següent.

7.2.3 El nombre e. Límits amb el nombre e

Considerem la funció:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Es verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Si fem una taula de valors tindrem:

x	1	10	100	1000	10^6	10^{15}	10^{18}
$(1+1/x)^x$	2	2.593742	2.704813	2.716923	2.7182804	2.7182818	2.7182818

Veiem que la funció es va aproximant a un valor molt concret. Aquest valor rep el nom de *nombre e*.
Per tant escriurem:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Es demostra que les indeterminacions de la forma 1^∞ es poden resoldre de la manera següent:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x)[f(x)-1]}$$

On $\lim_{x\to\infty} = 1$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Exemples

1) Calculem:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x-1}$$

Com que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-2}\right) = 1 \text{ i } \lim_{x\to\infty} (3x-1) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x-1} = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x-1} = e^{\lim_{x\to\infty} (3x-1)(\frac{2x+3}{2x-2}-1)} =$$

$$e^{\lim_{x\to\infty} (3x-1)(\frac{5}{2x-2})} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{15x-5}{2x-2}} = e^{\frac{15}{2}} = \sqrt{e^{15}}$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{2x^2-1}{x-2}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x-2}\left(1+\frac{7}{x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2-1)7}{(x-2)x}} = e^{14}$$

7.3 Continuïtat

Definició

Sigui una funció $f(x)$. Direm que aquesta funció és contínua en $x = a$ si es verifiquen les condicions següents:

1) f està definida en a i el seu valor és $f(a)$.

2) Existeix $\lim_{x\to a} f(x)$.

3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple

La funció $f(x) = x^2$ és contínua en el punt $x = 3$ ja que:

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9 = f(3) = 3^2.$$

Quan una funció no és contínua en un punt, es diu que és discontínua en el punt. Les discontinuïtats poden ser de tres tipus:

- **evitable**, quan existeix el límit de la funció en el punt $x = a$, i és finit, però o no coincideix amb $f(a)$ o f no està definida en $x = a$.
- **de salt**, quan existeixen els dos límits laterals en $x = a$ i són finits, però són diferents.
- **asimptòtica**, quan almenys un dels límits laterals és infinit.

Exemples

1) Estudiem la continuïtat de la funció $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ en el punt $x = 1$.

   Com que f no està definida en $x = 1$, ja sabem que la funció no és contínua en $x = 1$. Mirem si té límits laterals:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

   Per tant, en el punt $x = 1$ la funció té una discontinuïtat evitable, és a dir, si definim $f(1) = 1/2$, la funció passa a ser contínua en $x = 1$. La nova definició seria:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2) Considerem la mateixa funció en $x = -1$.
   És molt fàcil comprovar que:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty.$$

   i

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.$$

   A més, f no està definida en $x = -1$.
   Es dóna una discontinuïtat asimptòtica.

3) Considerem la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}, & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+x}, & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{3x+1}{x+2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

f està definida en tot R menys a $x = -1$ $\quad (Dom(f) = R - \{-1\})$

Caldrà estudiar la continuïtat en els punts -1, -2 i 0 ja que, en general, en una funció definida a trossos, els punts on cal estudiar la continuïtat són els punts que ens determinen el domini (on la funció no està definida) i els punts on canvia l'expressió de la funció.

- En $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{x+1} = 4.$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{2x^2}{x^2+x} = 4.$$

$f(-2) = 4$

En el punt $x = -2$ la funció és contínua.

- En el punt $x = -1$ la funció presenta discontinuïtat asimptòtica, ja que:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

- En $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x+1}{x+2} = 1/2.$$

$f(0) = 2.$

Al punt $x = 0$ hi ha una discontinuïtat de salt.

Exercicis

7) Donades les funcions:

$$f(x) = \frac{2x^2+2x}{x-x^3}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-5x}{x+1}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{x-1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat de cada una en els punts -1, 0 i 1.

8) Estudieu la continuïtat de la funció següent:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4}$$

9) Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{p+1}{x-4}, & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Trobeu el valor de p perquè la funció sigui contínua en $x = 1$.

b) Hi ha algun altre punt on la funció ès discontínua? Justifiqueu la resposta.

10) Estudieu la continuïtat de la funció següent:

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x+3}{2x}, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

7.3.1 Funció contínua

De manera intuïtiva, el concepte de funció contínua és molt senzill: quan tota la seva gràfica es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper. Això vol dir que ha de ser contínua en cada punt del seu domini.

Definició

Direm que una funció és contínua en un interval I quan és contínua en tots els punts d'aquest interval.

Exemples

1) Les funcions polinòmiques són exemples de funcions contínues en tot R.

2) Les funcions exponencial i logarítmica són exemples de funcions contínues en el seu domini de definició.

3) Les funcions sinus i cosinus són contínues en tot R.

4) La funció $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ és contínua en tot R excepte en el punt $x = 1$.

7.4 Exercicis de repàs

1) Calculeu els límits a l'infinit de les funcions polinòmiques següents:

   a) $f(x) = 4x^4 + x^3 - 12x^2 + x - 3$
   b) $f(x) = -2x^2 - 6x^2 + 8$

2) Trobeu els límits en els punts indicats:

   a) $f(x) = \dfrac{7x-3}{2x^3 - x}$ en $-\infty$
   b) $g(x) = \dfrac{12x^2 + 2x - 5}{6x^2 - 8x}$ en $+\infty$
   c) $h(x) = \dfrac{x^4 - 2}{7x^3 + 20x - 1}$ en ∞

3) Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + x - 2}$:

   a) Calculeu el límit de $f(x)$ en $x = -1$ i en $x = 1$
   b) Calculeu el límit de $(1/f)$ en $x = 0$, $x = 1$ i $x = 3$

4) Calculeu els límits següents:

   a) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2+6}{x^2-4} - \dfrac{x+4}{x^2+2x} \right)$
   b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - \sqrt{4x-3}}{x^2 - 3x}$
   c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3x+1}{2x-2} \cdot \dfrac{x^2-x}{2x+3} \right)$

5) Sabem que $\lim\limits_{x \to a} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, calculeu:

$$\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3x-3}}$$

6) Raoneu per què la funció $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x}$ no té límit quan $x \to 0$.

7) Calculeu el límit de:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + x}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3x-9}{x^2-9}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

quan x tendeix als punts $-\infty$, $+\infty$, ∞, -1^-, -1^+, -1, 0^-, 0^+, 0, 3^-, 3^+ i 3.

8) Estudieu si les funcions $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ i $h(x) = \sqrt{x}$ són contínues en $x = 0$.

9) Classifiqueu les discontinuïtats de cada funció en el punt que s'indica:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ en $x = 3$.

b) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = -1$ i en $x = 1$.

10) Calculeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

11) Calculeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

12) Calculeu les asímptotes de les funcions:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^3 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{9x^3 + 1}{x^3 - x}$

13) Trobeu el domini i estudieu la continuïtat de les funcions irracionals: $f(x) = -\sqrt{x-1}$ i $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

14) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \dfrac{3x - 9}{2x^2 - 18}$.

15) Descriviu el domini i les discontinuïtats de les funcions:

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{-x}$

b) $g(x) = \dfrac{3x - 15}{x^2 - 5x}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{-x^2}$

d) $p(x) = |x^2 - 9|$

16) Trobeu el domini i estudieu la continuïtat de:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } -1 \leq x \end{cases}$$

17) Trobeu el valor de k perquè la funció:

$$g(x) = \begin{cases} x + k, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 - kx + 6, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sigui contínua en $x = 0$

18) Sigui la funció:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{kx}{x+3}, & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{3x-h}{x-2}, & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{x+1}{2x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Trobeu els valors de k i h que fan contínua la funció en els punts $x = -2$ i $x = 1$.

b) Hi ha algun punt on la funció és discontínua? Justifiqueu-ho.

7.5 Solucions

1) 2

2) $\frac{3}{2}$

3) $-\frac{1}{2}$

4) ∞

5) 2

6) $\frac{\sqrt{a}}{2a}$

7) Evitable, evitable, asimptòtica; asimptòtica, contínua, asimptòtica

8) Discontínua evitable en $x = -1$ i asimptòtica en $x = 1$.

9) a) -4
   b) $x = 4$

10) Contínua en tot R.

Exercicis de repàs

1) a) $+\infty$
   b) $-\infty$

2) a) 0
   b) 2
   c) $-\infty$, $+\infty$

3) a) Contínua, discontinuïtat evitable.
   b) Discontínua, discontinuïtat evitable, discontínua.

4) a) $-\infty$
   b) $\frac{1}{9}$
   c) $\frac{2}{5}$

5) $e^{\frac{1}{3}}$

18) $0, 0, 0, -\infty, +\infty$, no existeix, $1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

19) Sí, no, sí.

20) a) Asimptòtica.
   b) Evitable, contínua.

21) $x = \pm 2$

22) $x = \pm 2,\ y = 1$

23) a) $x = 0,\ x = \pm 1,\ y = 0$
   b) $x = 0,\ x = \pm 1,\ y = 9$

24) $x = 3$ evitable, $x = -3$ asimptòtica.

25) a) $R - 0$, discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.
   b) $R - 0,5$, discontinuïtat evitable en $x = 5$, asimptòtica en $x = 0$.
   c) $R - 0$, discontinuïtat evitable en $x = 0$.
   d) R, contínua en tot R.

26) $R - -2, -1$, discontinuïtat asimptòtica en $x = -2$, evitable en $x = 1$, de salt en $x = -1$.

27) 6

28) a) $k = \dfrac{1}{4},\ h = 4$
   b) $x = -3$

Capítol 8

DERIVADES

8.1 Introducció

8.1.1 Variació d'una funció en un interval

Definició
Donada una funció $y = f(x)$ definida en l'interval $[x_1, x_2]$, es defineix la variació mitjana de la funció en l'interval com a:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad .$$

Com que el denominador és sempre positiu, el signe de la variació depèn del numerador.

Aquest quocient rep el nom de quocient incremental i s'expressa amb la notació $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ i ens indica quan varia la funció segons la variació de la variable independent.

Exemple

Sigui la funció $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. La seva variació mitjana en l'interval $[0, 2]$ ès:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8}{2} = 4 \quad .$$

En l'interval $[2, 4]$ aquesta variació val:

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = 0 \quad .$$

Això vol dir que en l'interval $[0, 2]$, la variació mitjana de la funció és quatre vegades la variació de la variable independent, i en l'interval $[2, 4]$

no hi ha variació mitjana, malgrat que la funció no és constant en aquest interval.

Exercicis

1) Comproveu que la variació mitjana de la funció $f(x) = 2x + 5$ és sempre la mateixa, independentment de l'interval considerat.

2) Calculeu la variació mitjana de $f(x) = -x^2 + 4x$ en l'interval $[2.9, 3.1]$.

3) Calculeu la variació mitjana de $f(x) = 15$ en un interval qualselvol $[x_1, x_2]$.

8.1.2 Derivada d'una funció en un punt

Definició

Donada la funció $y = f(x)$, anomenem derivada de la funció en el punt d'abscissa $x = x_0$ el valor que resulta de calcular el límit següent:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Si fem $x - x_0 = h$, resulta $x = x_0 + h$ i podem expressar:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad .$$

Com veiem, la derivada és el límit de la variació de la funció en l'interval $[x_0 - h, x_0]$ si $h < 0$ o $[x_0, x_0 + h]$ si $h > 0$.

La derivada és una mesura de la rapidesa amb què canvia la funció al voltant de $x = x_0$. En altres paraules, la podríem definir com la variació *instantània* de la funció al punt x_0.

Exemple

Calculem la derivada de la funció $f(x) = x^2$ al punt x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0 \quad .$$

Exercicis

4) Apliqueu la definició de derivada per calcular $f'(8)$, essent $f(x) = \sqrt{x}$.

5) Apliqueu la definició de derivada per calcular $f'(2)$, essent $f(x) = \frac{1}{x}$. Què passa a $x = 0$?

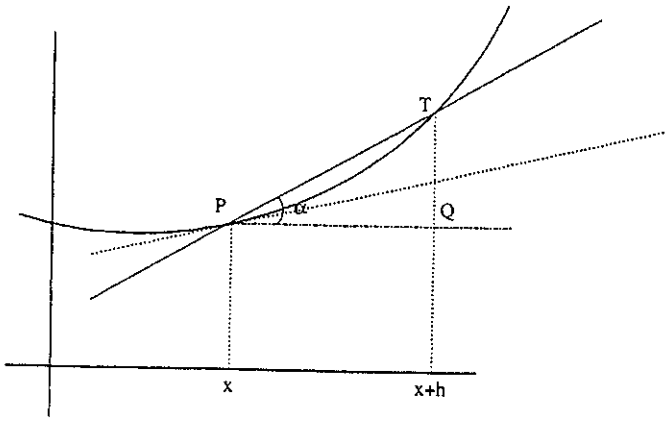
6) Apliqueu la definició de derivada per calcular $f'(x_0)$, essent $f(x) = x^3$.

8.1.3 Interpretació geomètrica

Donada la funció $y = f(x)$, derivable a x_0, considerem un petit increment h de la variable independent. El quocient:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

és la tangent de l'angle α del triangle PQT de la figura següent:



A mesura que l'increment h es fa més petit, la recta secant de la figura tendeix a la recta tangent de la gràfica en el punt indicat i, per tant, la tangent de l'angle α tendirà cap al pendent d'aquesta recta tangent.

Exemples

1) Trobem la derivada de $f(x) = x^2$ en el punt d'abscissa 3. I calculem l'equació de la recta tangent en aquest punt.

   Tenim que $f(3) = 9$ i la derivada serà:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} =$$

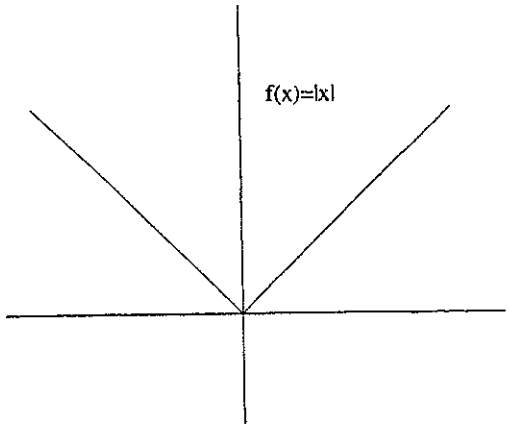
$$\lim_{h\to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (h + 6) = 6 \quad .$$

   Per tant, el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2$ en el punt $(3, 9)$ val $f'(3) = 6$ i l'equació d'aquesta recta tangent és $y - 9 = 6(x - 3)$, o, en la seva forma explícita, $y = 6x - 9$.

2) Una funció pot estar definida en un punt i tenir límit en aquest punt i en canvi no tenir derivada.

   Si considerem la funció $f(x) = |x|$, observem que, per definició de valor absolut, si $x > 0$, llavors $|x| = x$; i si $x < 0$, llavors $|x| = -x$.



Per tant, hem de trobar les que s'anomenen *derivades laterals* en la forma següent:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Per tant, si calculem aquest límit acostant-nos a 0 per la seva dreta, aquest val 1.

De manera semblant:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Si ens acostem a 0 per la seva esquerra, el límit és igual a -1. Són, per tant, diferents, i per tant direm que la funció $f(x) = |x|$ no té derivada al punt $x = 0$, tot i que sí que té derivades laterals en aquest punt.

8.1.4 Funció derivada

Si una funció $f(x)$ és derivable en tots els punts x del seu domini, és possible definir una nova funció que associï cada punt x del seu domini amb el valor $f'(x)$ de la derivada de la funció en aquest punt. Obtenim d'aquesta manera una nova funció que rep el nom de funció derivada i que simbolitzem emb f':

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exemple

La funció derivada de $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$ és $f'(x) = 4x - 5$, ja que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 5(x+h) + 6) - (2x^2 - 5x + 6)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 5(x+h) + 6) - (2x^2 - 5x + 6)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4xh + 4h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 4h^2 - 5h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (4x + 4h - 5) = 4x - 5\,.$$

8.1.5 Exercicis

7) Donada la paràbola d'equació $y = x^2 + 1$, calculeu el pendent de la recta tangent a la seva gràfica en el punt $x_0 = 2$.

8) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la corba $y = x^2 + 1$ en el punt $x_0 = 2$.

9) Calculeu les derivades següents en els punts indicats utilitzant la definició de derivada:

   a) $f(x) = x + 2$, en $x_0 = -1$.
   b) $f(x) = x^2 - 2$, en $x_0 = 1$.
   c) $f(x) = 3 - x^2$, en $x_0 = 1$.

10) Un mòbil es mou sobre una recta. La seva distància a un punt O de la recta en funció del temps és definida per la funció $s(t) = t^2 + t + 1$. Es demana:

   a) Velocitat mitjana en l'interval $[0, 3]$.
   b) Velocitat mitjana en l'interval $[3, 6]$.
   c) És la mateixa en ambdós casos?

11) Un mòbil es mou sobre una recta. La funció que dóna la seva velocitat en funció del temps és $v(t) = 5t - 1$. Demostreu que la seva acceleració és constant.

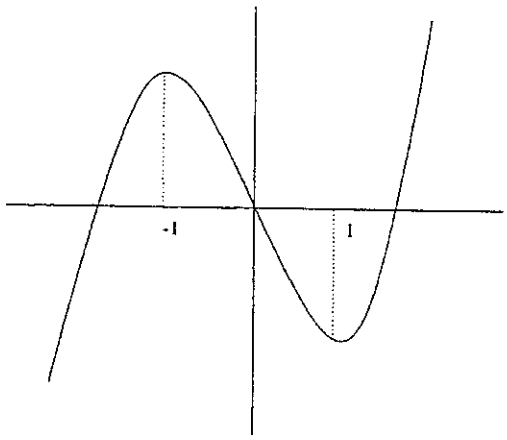
12) En quin punt de la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la recta tangent es paralel·la a l'eix d'abscisses?

13) En quin punt de la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la recta tangent és paralel·la a la bisectriu del primer i tercer quadrants?

14) Usant només la definició de derivada, demostreu que les funcions $y = f(x)$ i $y = f(x) + c$, essent c una constant qualsevol, tenen la mateixa derivada.

15) Estudieu si la funció $f(x) = |x-2|$ és contínua i derivable en el punt $x = 2$. Representeu gràficament la funció.

16) Indiqueu raonadament el signe de la derivada de la funció f representada en la figura, en cadascun dels intervals següents: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.



8.2 Càlcul de derivades

8.2.1 Derivades de les operacions elementals

Si apliquem la definició de derivada a les operacions elementals entre funcions, obtenim els resultats següents:

1) Derivada de la suma de dues funcions $f(x) = p(x) + q(x)$:

$$f'(x) = p'(x) + q'(x).$$

2) Derivada d'una constant per una funció $f(x) = kg(x)$:

$$f'(x) = kg'(x).$$

3) Derivada del producte de dues funcions $f(x) = p(x)q(x)$:

$$f'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x).$$

4) Derivada del quocient de dues funcions $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$:

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}.$$

5) Derivada de la inversa d'una funció $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$:

$$f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

6) Derivada de la composició de dues funcions (regla de la cadena) $f(x) = p(q(x))$:

$$f'(x) = p'(q(x))q'(x).$$

8.2.2 Derivades d'algunes funcions elementals

Així mateix, si apliquem la definició de derivada a les següents funcions elementals, obtindrem els resultats indicats.

1) $f(x) = k$, $f'(x) = 0$

2) $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

3) $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$

4) $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

5) $f(x) = \log_a x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln \text{a}}$

6) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

7) $f(x) = a^x$, $f'(x) = a^x \cdot \ln\,(\text{a})$

8) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

9) $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$

10) $f(x) = \tan x$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

11) $f(x) = \arcsin x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $f(x) = \arccos x$, $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $f(x) = \arctan x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

14) $f(x) = u(x)^{v(x)}$. Per fer aquesta derivada, prenent en primer lloc logaritmes:

$\ln(f(x)) = v(x)\ln u(x)$, i derivem:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

I ara podem aïllar $f'(x)$:

$$f'(x) = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Exemples

1) $f(x) = x^3 + x^2$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$

2) $f(x) = 7x^3$, $f'(x) = 21x^2$

3) $f(x) = \sin x^3$, $f'(x) = 3x^2 \cos x^3$

4) $f(x) = \sin^4 x4$, $f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x$

5) $f(x) = (ax+b)^8$, $f'(x) = 8(ax+b)^7 a$

6) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, $\quad f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-a)^2}$

7) $f(x) = \ln(x^2-1)$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

8) $f(x) = \ln(\ln x)$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$

9) $f(x) = \log_3(x^2+x+1)$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \cdot \dfrac{1}{\ln 3}$

10) $f(x) = e^{x^2+1}$, $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$

11) $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$, $f'(x) = \dfrac{-a^{\frac{1}{x}}}{x^2} \ln a$

12) $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, $f'(x) = \dfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$

13) $f(x) = (x^2+1)^x$, $\ln f(x) = x \ln(x^2+1)$,
$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x^2+1) + x \dfrac{2x}{x^2+1}$
$f'(x) = (x^2+1)^x \left[\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} \right]$

14) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

15) $f(x) = \ln(\arccos(x-1))$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\arccos(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}$

8.2.3 Exercicis

17) Calculeu la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 7x + \frac{7}{8}$
b) $f(x) = (x+1)^4$
c) $f(x) = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
d) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

18) La recta normal a una corba en un punt és la perpendicular a la recta tangent en aquest punt i la seva equació és $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Calculeu l'equació de les rectes normals a les corbes següents en els punts indicats:

a) $f(x) = x^2 + 1$ al punt $(2, 5)$
b) $f(x) = x^4 - 1$ al punt d'abscissa $x_0 = 2$
c) $f(x) = x^2 - 4$ en els punts d'ordenada $y_0 = 0$

19) Calculeu les derivades de les funcions racionals següents:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
b) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+4}$
c) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$
d) $f(x) = \dfrac{2x}{7x^2-3}$
e) $f(x) = (x+1)^{-4}$

20) Calculeu les derivades de funcions logarítmiques següents:

a) $f(x) = \ln(ax^2 + bx + x)$
b) $f(x) = x^2 \ln(2 - x)$
c) $f(x) = x\ln x - x$
d) $f(x) = \ln(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$

21) En quin punt de la gràfica de la funció $f(x) = x\ln x - x$ el pendent de la recta tangent val 1?

22) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = \ln x$ paralel·la a la recta $3x - y = 2$.

23) Calculeu les derivades de les funcions exponencials següents:

a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

b) $f(x) = e^{3-x^2}$

c) $f(x) = 2^x$

d) $f(x) = e^{(a^x)}$

24) Per a quins valors de x s'anul·la la derivada de $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 7)$?

25) Calculeu les derivades de funcions potencials següents:

a) $f(x) = (x - \sqrt{1 - x^2})^2$

b) $f(x) = (x^2 + x - 1)^{\frac{3}{5}}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

26) Calculeu les derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = x^{\ln x + 1}$

b) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

c) $f(x) = (3x + 1)^{2x+3}$

27) Calculeu les derivades de les funcions trigonomètriques següents:

a) $f(x) = \sin 2x$

b) $f(x) = \tan x^2 + x + 1$

c) $f(x) = \ln(\cos 2x)$

d) $f(x) = \arcsin(2x)$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

f) $f(x) = \ln\sqrt{\sin 2x}$

g) $f(x) = x^{\cos x}$

28) Calculeu les derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = \tan(\ln x)$

b) $f(x) = x^{\tan x}$

c) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

d) $f(x) = \sin(\arcsin x)$

e) $f(x) = \arccos(\arccos x)$

29) $f(x) = e^{\sin x}$.

30) $f(x) = 2^{\ln x}$.

31) $f(x) = x^3 e^{2x}$.

32) $f(x) = \sin(e^x + x)$.

33) $f(x) = x^x$.

34) Donada la funció $f(x) = xe^x$, calculeu $f'(x)$ i l'equació de la recta tangent a la gràfica en el punt on s'anul·la la derivada.

35) Una mostra de material radioactiu conté 1 bilió d'àtoms. A causa de la desintegració, el nombre N d'àtoms disminueix amb el temps. La funció que ens dóna el nombre d'àtoms en funció de t és $N(t) = N_0 e^{-2t}$, on N_0 és el nombre inicial d'àtoms i t és el temps en anys.

    Calculeu:

    a) Nombre d'àtoms després de 5 i 10 anys.
    b) Quan és més ràpida la desintegració, al cap de 5 o 10 anys?

36) Comproveu que la derivada de la funció $f(x) = x^2 5^x$ s'anul·la en el punt $x = \dfrac{-2}{ln5}$.

8.3 Aplicacions de les derivades

8.3.1 Creixement i decreixement

Definicions

Diem que una funció és creixent en un interval $[a, b]$ si per a valors x, y de l'interval tals que $x < y$ es compleix que $f(x) \leq f(y)$.
Direm que una funció és decreixent en un interval $[a, b]$ si per a valors x, y de l'interval tals que $x < y$ es compleix que $f(x) \geq f(y)$.

Tenint en compte la definició de derivada, si una funció és creixent en un interval i és derivable en l'interval, llavors $f'(x) \geq 0$. Recíprocament, si $f'(x) > 0$ en un interval, la funció és creixent en aquest interval.
Anàlogament, si una funció és decreixent en un interval i és derivable en l'interval, llavors $f'(x) \leq 0$. Recíprocament, si $f'(x) < 0$ en un interval, la funció és decreixent en aquest interval.
Observem que una funció pot ser creixent (o decreixent) en un interval i, tot i això, la seva derivada pot ser igual a 0 en algun punt de l'interval.

Exemples

1) $f(x) = x$ és creixent en tota la recta real, ja que $f'(x) = 1 > 0$.

2) Busquem els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^2 + 1$.

   $f'(x) = 2x$. Per tant, si $x > 0$, llavors $f'(x) > 0$. En conseqüència, la funció és creixent en $(0, \infty)$. De manera anàloga, tindríem que la funció és decreixent en $(-\infty, 0)$.

3) Estudiem els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

La derivada val: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$. Per tant:

1) Si $x < -1$, $f'(x) < 0$ i f decreix en $(-\infty, -1)$.
2) Si $-1 < x < 0$, $f'(x) > 0$ i f creix en $(-1, 0)$.
3) Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ i f decreix en $(0, 1)$.
4) Si $1 < x < \infty$, $f'(x) > 0$ i f creix en $(1, \infty)$.

8.3.2 Màxims i mínims relatius

Definicions

Una funció $f(x)$ té un màxim relatiu al punt x_0 si en un entorn de x_0 es verifica que $f(x) < f(x_0)$, per a tot punt x d'aquest entorn.

Una funció $f(x)$ té un mínim relatiu al punt x_0 si en un entorn de x_0 es verifica $f(x) > f(x_0)$, per a tot punt x d'aquest entorn.

De la definició anterior podem deduir que, si tenim un màxim relatiu en el punt x_0, hi haurà un entorn de x_0 tal que a l'esquerra d'aquest punt la funció serà creixent i a la dreta la funció serà decreixent. Si la funció és derivable en x_0, aquesta derivada serà zero.

D'una manera anàloga, si una funció $f(x)$ té un mínim relatiu en el punt x_0, hi haurà un entorn de x_0 tal que la funció passarà de decreixent a l'esquerra de x_0 a creixent a la dreta d'aquest punt, i si la funció és derivable en aquest punt, la seva derivada ha de ser nul·la.

Els punts màxims i mínims relatius s'anomenen *punts crítics*.

Definició

Definim *màxim absolut* d'una funció $f(x)$ en un interval I com el punt $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \geq f(x), \forall\, x \in I$. D'una manera similar es defineix *mínim absolut* d'una funció en un interval, com el punt $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \leq f(x), \forall\, x \in I$.

Els candidats per ser màxims i mínims absoluts d'una funció en un interval I seran:

- Els punts crítics de $f(x)$ continguts a I.
- Els extrems de l'interval I.
- Els punts de I en els quals la funció $f(x)$ no és derivable.

Exemples

1) Busquem els màxims i mínims relatius de $f(x) = -x^4 + 2x^2$.

- Primer calculem la derivada: $f'(x) = -4x^3 + 4x$.

- Calculem els punts en què s'anul·la la derivada: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(1 - x^2) = 0$. Les solucions són: $x = 0, x = -1, x = 1$.
- Per decidir si són màxims o mínims relatius, mirem el signe de f' al voltant de cada un dels punts.
  - $x = -1$. A l'esquerra del punt $x = -1$, $f' > 0$, i per tant f és creixent. A la dreta del punt $x = -1$, $f' < 0$ i per tant f és decreixent. Per tant, a $x = -1$, hi ha un màxim relatiu.
  - $x = 0$. Raonant d'una manera anàloga, és fàcil comprovar que hi ha un mínim a $x = 0$.
  - $x = 1$. Hi ha un altre màxim relatiu a $x = +1$.

2) Busquem els màxims i mínims relatius de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Domini de la funció: $R - \{-1, 1\}$.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x^4 - 3x^2 = 0, \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$$

Si estudiem el signe de f als voltants dels punts anteriors, trobem que en el punt $x = -\sqrt{3}$ hi ha un màxim relatiu.

A $x = \sqrt{3}$ hi ha un mínim relatiu, mentre que al punt $x = 0$ trobem que el signe de f' és el mateix tant a l'esquerra com a la dreta del punt, en aquest cas negatiu. Aquest punt rep el nom de *punt d'inflexió* i més endavant l'estudiarem amb més detall.

3) Busquem els màxims i mínims absoluts de $f(x) = x^2$ en l'interval $[2, 3]$.

Tenim $f'(x) = 2x$. L'únic punt on s'anul·la la derivada és $x = 0$, que no pertany en l'interval. Com que no hi ha punts no derivables, hem de buscar els màxims i mínims absoluts als extrems de l'interval.

Com que $f'(x) > 0$ en l'interval, la funció és creixent i per tant, el mínim absolut serà a $x = 2$, amb $f(2) = 4$; i el màxim absolut serà a $x = 3$, amb $f(3) = 9$.

Exercicis

37) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de les funcions:

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2 + 1}$

38) Calculeu els màxims i mínims de:

a) $f(x) = 3x^4 - 6x^2$

b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

d) $f(x) = x^4 + 2x^3$

39) Calculeu els màxims i mínims absoluts de $f(x) = |x|$ als intervals següents:

a) $[-1, 2]$

b) $[-5, -1]$

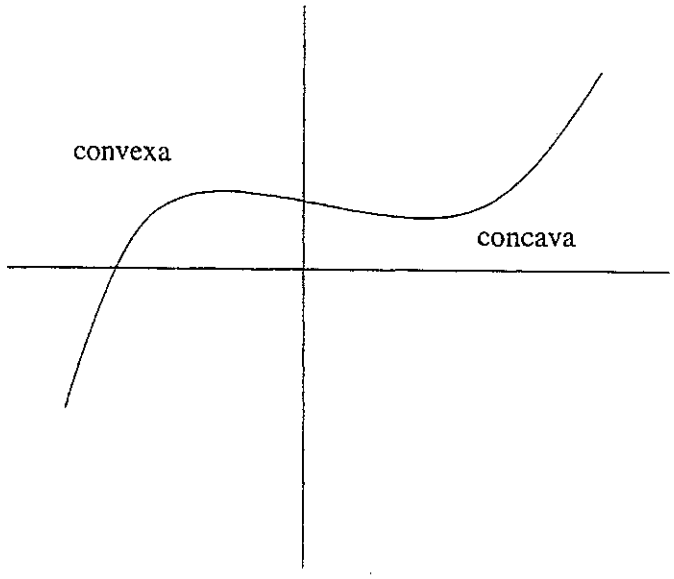
c) $[2, 8]$

8.3.3 Concavitat. Convexitat. Punts d'inflexió

Definicions

Direm que una funció és *còncava* en un interval si les rectes tangents a la gràfica d'aquesta funció en cada punt d'aquest interval passen per sota de la gràfica al voltant del punt de tangència.

Direm que una funció és *convexa* en un interval si les rectes tangents a la gràfica d'aquesta funció en cada punt d'aquest interval passen per sobre de la gràfica al voltant del punt de tangència.



Definició

Un *punt d'inflexió* és un punt on la funció passa de còncava a convexa o de convexa a còncava.

Per tant, si la funció passa de convexa a còncava, això vol dir que la recta tangent passa d'estar per sobre a estar per sota de la gràfica, la qual cosa ens diu que que en els punts d'inflexió la recta tangent travessa la gràfica.

Si la funció és dues vegades derivable, el pendent de la recta tangent va disminuint ($f'' < 0$) a mesura que la funció convexa s'aproxima al punt d'inflexió i a partir d'aquest punt, el pendent de la recta tangent va creixent ($f'' > 0$). Per aquest motiu, cercarem els punts d'inflexió entre aquells on la segona derivada s'anul·li i després caldrà comprovar si té signes diferents a una banda i l'altra del punt.

Exemples

1) Busquem els punts d'inflexió i els intervals de creixement i decreixement de la funció: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 0, \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Ara estudiem el signe de f'' al voltant de $x = \frac{2}{3}$:

$$f''(0) = -4 < 0$$

i per tant f és convexa a $x = 0$. De la mateixa manera,

$$f''(1) = 2 > 0$$

i per tant f és còncava a $x = 1$.

Deduïm que al punt $x = \frac{2}{3}$ hi ha un punt d'inflexió.

Per tant, la funció és convexa en $(-\infty, \frac{2}{3})$ i còncava en $(\frac{2}{3}, +\infty)$.

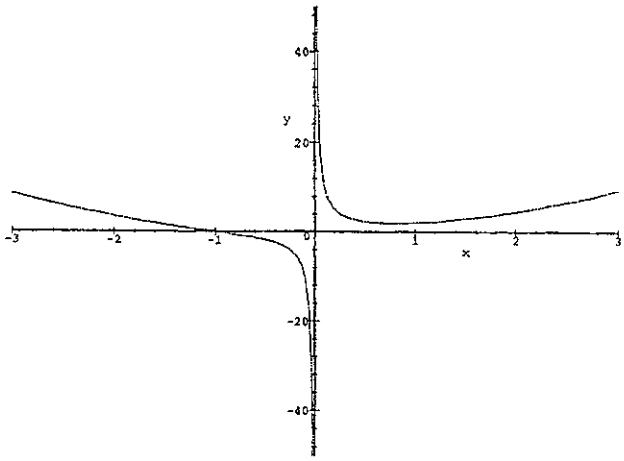
2) Busquem els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de la funció: $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

$Dom(f) = R - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$$

És fàcil veure que al punt $x = -1$ hi ha un punt d'inflexió, ja que la funció passa de còncava a convexa.



Així mateix, veiem que a l'esquerra de $x = 0$, la funció és convexa, i a la dreta còncava. Malgrat això, el punt $x = 0$ no és punt d'inflexió, ja que $x = 0$ és una discontinuïtat de la funció $f(x)$.

Per tant, en $(-\infty, -1)$ la funció és còncava, en $(-1, 0)$ és convexa i en $(0, +\infty)$ és còncava.

Exercicis

40) Determineu els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de les funcions següents:

a) $f(x) = x^3(x-4)$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

Resum

1) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f'$ creix en $x_0 \Rightarrow f$ és còncava en x_0.

2) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f'$ decreix en $x_0 \Rightarrow f$ és convexa en x_0.

3) $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ presenta un mínim relatiu en el punt x_0.

4) $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ presenta un màxim relatiu en el punt x_0.

8.3.4 Gràfica d'una funció

Per representar gràficament una funció caldrà la informació següent:

- Domini i discontinuïtats de la funció

  Aquí mirarem el tipus de funció de què es tracta. Per exemple, si és una funció polinòmica, el seu domini serà R i serà contínua a tots els punts. Si tenim una funció racional caldrà tenir en compte els valors de x que anul·len el denominador.

- Asímptotes

  Recordem que una recta $y = a$ es diu que és una asímptota horitzontal de la gràfica d'una funció $f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

  o bé si:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

  De manera similar, les asímptotes verticals d'una funció $f(x)$ són les rectes d'equació $x = a$, on a són els valors per als quals $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

- Punts de tall amb el eixos de coordenades

  Els punts de tall amb l'eix d'abscisses els trobarem resolent l'equació $f(x) = 0$. El punt de tall amb l'eix de coordenades l'obtindrem calculant $f(0)$, en el supòsit que la funció estigui definida per a $x = 0$.

- Màxims i mínims. Creixement i decreixement. Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.

  Aquests punts els obtindrem seguint les regles que acabem de tractar en les últimes seccions.

Exemples

1) Representem gràficament la funció: $f(x) = x^2 - x^4$

   - $Dom(f) = R$
   - No té asímptotes, ja que és una funció polinòmica.
   - Punts de tall amb els eixos:
     - Eix d'abscisses:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = -1, x = 0, x = 1$$

     Els punts de tall són $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$

- Eix d'ordenades:

$$f(0) = 0$$

El punt de tall és, doncs, el $(0,0)$

- Màxims i mínims. Punts d'inflexió. Concavitat i convexitat.
  - Màxims i mínims.

$$f'(x) = 2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(1-2x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cal estudiar ara el creixement de la funció al voltant d'aquests tres punts:

* Al voltant del punt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(-1) > 0$ i $f'(-\frac{1}{2}) < 0$. La funció creix a l'esquerra de $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i decreix a la seva dreta. Per tant, en el punt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la funció presenta un màxim.
* Al voltant del punt $x = 0$, $f'(-\frac{1}{2}) > 0$ i $f'(\frac{1}{2}) > 0$. La funció decreix a l'esquerra de $x = 0$ i creix a la seva dreta. Per tant, en el punt $x = 0$ la funció presenta un mínim.
* Al voltant del punt $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(\frac{1}{2}) > 0$ i $f'(1) < 0$. La funció creix a l'esquerra de $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i decreix a la seva esquerra. Per tant, en el punt $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ la funció presenta un màxim.

  - Punts d'inflexió

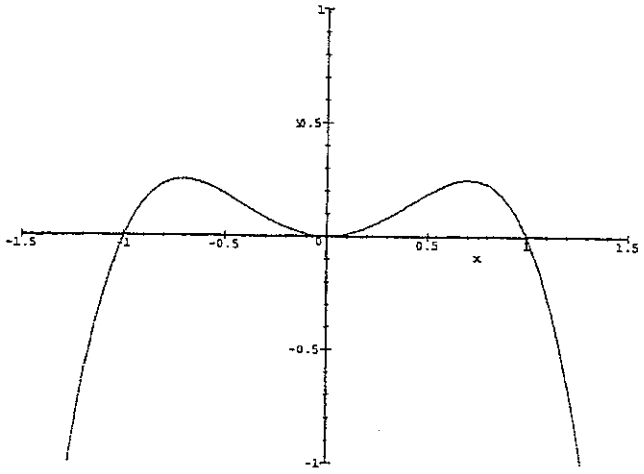
Busquem els punts on s'anul·la la segona derivada:

$$f''(x) = 2 - 12x^2 = 0, \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ara estudiarem el signe de f'' al voltant d'aquests punts:

* A l'esquerra de $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$: $f''(-1) = -10 < 0 \quad \Rightarrow f$ és convexa en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.
* Entre $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$: $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow f$ és còncava en $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$
* A la dreta de $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$: $f''(1) = -10 < 0 \Rightarrow f$ és convexa en $(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty)$.

Per tant en els punts $x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ hi ha dos punts d'inflexió.



2) Representem gràficament: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

- La funció no està definida en $x = 0$, on hi ha una discontinuïtat asimptòtica vertical.
- Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0\,,\ \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0.$$

  Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.
- Punts de tall amb els eixos de coordenades:
  - Punts de tall amb l'eix d'abscisses:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

    Hi ha un punt de tall: $(-1, 0)$.
  - Punts de tall amb l'eix d'ordenades:

    Com que la funció no està definida en $x = 0$, no hi ha punt de tall amb l'eix d'ordenades.
- Punts crítics
  - Màxims i mínims:

$$f'(x) = \frac{-x-2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$$

    Comprovem el creixement de la funció al voltant d'aquest punt:

Per $x = -3$ és $f'(-3) < 0$ i per $x = -1$, és $f'(-1) > 0$. Per tant, la funció decreix a l'esquerra de $x = -2$ i creix a la seva dreta. Al punt $x = -2$ la funció presenta un mínim.

– Punts d'inflexió:

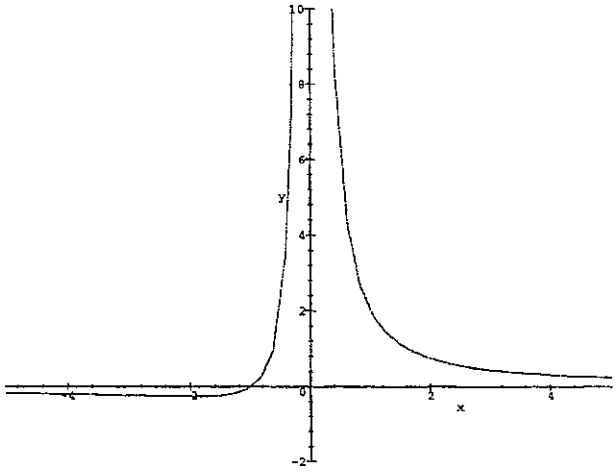
$$f''(x) = \frac{2x+6}{x^4} = 0 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Cal observar el signe de f'' al voltant de $x = -3$.

Com que $f''(-4) < 0$, la funció és convexa en $(-\infty, -3)$.

Com que $f''(-1) > 0$, la funció és còncava en $(-3, 0)$.

Per tant, la funció passa de convexa a còncava en $x = -3$ i en aquest punt hi ha un punt d'inflexió.



Exercicis

Estudieu i representeu gràficament les funcions següents:

41) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

42) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

43) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{8x^2+1}$

44) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

8.3.5 Problemes d'optimització

En un problema d'optimització es busca el valor que optimitza (fa màxima o mínima) una determinada funció, que correspon a la matematització d'una situació pràctica. La dificultat més gran és precisament el plantejament d'aquesta funció.

Com que estem tractant casos pràctics, caldrà considerar que les variables no podran prendre qualsevol valor, sinó aquells lligats al context de la situació plantejada.

El problema ens donarà una funció de la qual haurem de buscar el màxim o mínim absoluts en un interval. Analitzarem la situació amb un exemple.

Exemple

1) Calculem les dimensions del rectangle d'àrea màxima entre els rectangles de perímetre 40 m.

   Sigui x la llargada i y l'amplada del rectangle. Segons l'enunciat del problema tenim que:

   - Perímetre: $40 = 2x + 2y$
   - Àrea: $A = x \cdot y$

   Veiem que les dues variables x i y estan relacionades pel perímetre, i per tant:

   $$y = 20 - x.$$

   Si substituïm en la funció que volem optimitzar, l'àrea, tindrem:

   $$A = x(20 - x) = 20x - x^2.$$

   És fàcil comprovar que tant x com y varien en l'interval $[0, 20]$.

   Busquem els màxims relatius anul·lant la derivada:

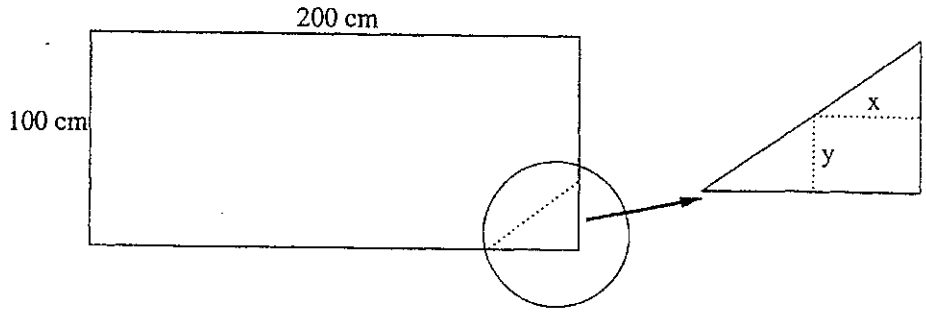
   $$A' = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10,\ y = 20 - x = 10.$$

   Es pot comprovar que es tracta d'un màxim pel signe de la derivada.

   Per tant, els rectangles d'àrea màxima són els quadrats.

2) D'un mirall rectangular de $2\,m$ de llargada i $1\,m$ d'altura, se n'ha trencat, en un dels vèrtexs, un triangle rectangle que té $30\,cm$ de llargada i $20\,cm$ d'altura.

   Ens preguntem com s'haurà de tallar un altre mirall de costats paral·lels a l'inicial de manera que l'àrea d'aquest nou mirall sigui màxima.



Considerarem com a variables la llargada $200 - x$ i l'alçada $100 - y$ del mirall que hem de tallar.

Observant la figura, veiem que les variables x i y han de prendre valors concrets: $x \in [0, 30]$, $\quad y \in [0, 20]$.

L'àrea del nou mirall és:

$$A = (200 - x)(100 - y).$$

Les variables x i y no poden variar independentment l'una de l'altra: si es coneix x, el valor de y queda determinat, i a l'inrevés. Es diu que les variables x i y estan *lligades*. Es fàcil trobar el lligament entre ambdues variables, ja que per semblança de triangles tenim:

$$\frac{x}{30} = \frac{20 - y}{20}.$$

Això ens permet trobar la variable y en funció de la variable x:

$$y = 20 - \frac{2}{3}x.$$

Ho substituïm en l'expresió de l'àrea i ens queda:

$$A = (200 - x)[100 - (20 - \frac{2}{3}x)] = (200 - x)(80 + \frac{2}{3}x) =$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{160}{3}x + 16000.$$

D'aquesta manera tenim l'àrea del mirall expressada en funció només de la variable x, que sabem que pot prendre valors dins de l'interval $[0, 30]$.

Aquesta darrera funció és la que s'ha d'optimitzar, és a dir, hem de buscar el seu màxim absolut dins de l'interval [0.30]. Busquem, en primer lloc, els màxims relatius anul·lant la derivada:

$$A'(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{160}{3} = 0 \Rightarrow x = 40.$$

Resulta que $40 \notin [0, 30]$. Per aquest motiu ens caldrà buscar el màxim absolut de la funció $A(x)$ en l'interval $[0, 30]$, i concretament als extrems.

- Per a $x = 0$, resulta $y = 20$ i l'àrea $A = 16000$.
- Per a $x = 30$, resulta $y = 0$ i l'àrea $A = 17000$

Per tant, la resposta al problema és $x = 30$ i $y = 0$, que és quan el nou mirall té l'àrea màxima.

Exercicis

45) Trobeu l'altura d'un cilindre circular de volum màxim que es pot inscriure en un con circular recte d'un metre d'altura.

46) Tenim un filferro d'1 m de llargada. De quina manera s'haurà de tallar en dues parts per construir una circumferència i un quadrat de manera que la suma de l'àrea del cercle que determina la circumferència i l'àrea del quadrat sigui mínima.

8.3.6 Exercicis de repàs

1) Calculeu el valor de k perquè:

   a) La funció $f(x) = xe^{-kx}$ tingui un màxim o un mínim relatiu en el punt $x = 1$.

   b) La funció $f(x) = \frac{2x^2}{(kx+1)^2}$ tingui límit finit quan $x \to \infty$.

   c) La funció $f(x) = \ln(kx^2 + 1)$ sigui creixent en $x = 1$

2) Determineu els coeficients a i b de la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, sabent que canvia de còncava a convexa en el punt $x = 1$ i que la tangent a la gràfica de la funció en aquest punt és horitzontal.

3) Considerant la funció $f(x) = -x^3 + 3x^2$, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en el punt d'inflexió.

4) Dibuixeu les gràfiques de les funcions següents:

   a) $f(x) = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

   c) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$

   d) $f(x) = x^3 - 3x$

   e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 2}$

   f) $f(x) = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

i) $f(x) = \dfrac{xe^x}{x + 4}$

j) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x}$

5) Trobeu dos nombres positius que sumant 30 tinguin mínima la suma dels seus quadrats.

6) Es vol construir un recipient cilíndric, amb tapa, de volum $100\,m^3$. Quines han de ser les seves dimensions perquè s'utilitzi la mínima quantitat de material?

7) Una persona transporta horitzontalment una biga per un carrer en forma de L, de manera que una de les parts del carrer té $4\,m$ d'amplada i l'altra $3\,m$. Quina serà la longitud màxima de la biga per poder passar-hi?

8) Hem de construir un parterre en forma de sector circular amb perímetre de $20\,m$. Calculeu el radi del sector per obtenir-lo d'àrea màxima.

9) Considereu un dipòsit constituït per una semiesfera de radi r a la qual s'ha afegit un cilindre circular del mateix radi r i d'altura h. Calculeu r i h de manera que l'àrea total de les parets i de la tapa sigui de $5\,m^2$ i tingui volum màxim.

10) Trobeu els punts de la gràfica de la funció $y^2 = 4x$ tals que la distància al punt $(4, 0)$ sigui mínima.

11) La resistència de flexió d'una biga de secció rectangular és directament proporcional a l'àrea de la base i directament proporcional, també, al quadrat de l'altura d'aquesta secció. Calculeu les dimensions que ha de tenir la secció rectangular d'una biga fabricada a partir del tronc cilíndric d'un arbre que fa un metre de diàmetre perquè tingui una resistència de flexió màxima.

8.4 Solucions

2) -2.2

3) 0

7) 4

8) $y = 4x - 3$

10) a) 3
    b) 10
    c) No

12) $(3, -1)$

13) $(\frac{7}{2}, \frac{-3}{4})$

17) a) $5x^4 - x^2 - 7$
    b) $4(x+1)^3$
    c) $6x^5$
    d) $6x^5$

18) a) $y = -\frac{x}{4} + \frac{11}{2}$
    b) $y - 15 = \frac{x}{32} + \frac{1}{16}$
    c) $y = -\frac{1}{4}(x-2)$, $y = \frac{1}{4}(x+2)$

19) a) $-\frac{1}{(x+1)^2}$
    b) $\frac{2x}{(x^2+4)^2}$
    c) $-\frac{x+6}{x^3}$
    d) $-\frac{2(7x^2+3)}{(7x^2-3)^2}$
    e) $-\frac{4}{(x+1)^5}$

20) a) $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+x}$
    b) $2x\ln(2-x) - \frac{x^2}{2-x}$
    c) ln x

d) $-\dfrac{1}{1-x^2}$

21) (e,0)

22) $(\frac{1}{3}, \ln(\frac{1}{3}$

23) a) $\dfrac{(e^{2x}-1)e^{-x}}{2}$

b) $-2xe^{3-x^2}$

c) $2^x \ln 2$

d) $a^x e^{a^x} \ln a$

24) -2

25) a) $\dfrac{2(x^2+x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\dfrac{2(1+2x)}{5(x^2+x-1)^{\frac{2}{5}}}$

c) $-\dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

26) a) $x^{\ln x+1}(\dfrac{\ln x}{\ln x+1}+\dfrac{\ln x+1}{x})$

b) $(1+\dfrac{1}{x})^x(\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}})$

c) $(3x+1)^{2x+3}(2\ln(3x+1)+\dfrac{3(2x+3)}{3x+1})$

27) a) $2\cos(2x)$

b) $1+\dfrac{2x}{\cos^2(x^2)}$

c) $-\dfrac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

e) $-\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}}$

f) $\tan(2x)$

g) $x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x)$

28) a) $\frac{1}{x\cos^2(\ln x)}$

b) $x^{\tan x}(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x})$

c) $\ln x^{\ln x}(\frac{\ln \ln x}{x} + \frac{1}{x})$

d) $\frac{\cos(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arccos^2 x}}$

29) $\cos x e^{\sin x}$

30) $2^{\ln x}\frac{\ln 2}{x}$

31) $3x^2e^{2x} + 2x^3e^{2x}$

32) $\cos(e^x + x)(e^x + 1)$

33) $x^x(\ln x + 1)$

34) $e^x(x+1)$; $y = -\frac{1}{e}$

35) a) $45.399.929,76$; $2.061,15$

b) als 5 anys

37) a) Decreixent en tot R. Ass. vertical en $x = 1$

b) Decreixent en $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ i $(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty)$. Creixent en $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$

38) a) $x = -1$, mínim ; $x = 0$, màxim;$x = 1$, mínim

b) $x = -1$, mínim ; $x = 1$, màxim

c) $x = 0$ màxim

d) $x = -\frac{3}{2}$, mínim ; $x = 0$, punt d'inflexió

39) a) $x = 2$, màxim; $x = 0$, mínim

b) $x = -5$, màxim; $x = 0$, mínim

c) $x = 8$, màxim; $x = 2$, mínim

40) a) $x = 0$, punt d'inflexió; $(-\infty, 0)$ còncava; $(0, +\infty)$ convexa

b) $x = \frac{2}{3}$ punt d'inflexió; $(-\infty, \frac{2}{3})$ convexa; $(\frac{2}{3}, +\infty)$ còncava

45) $\frac{1}{3}$

46) Costat del quadrat=0.56

Exercicis de repàs

1) a) 1
   b) $k \neq 0$
   c) $k > 0$ o $x < -1$

2) $a = -3$ i $b = 3$

3) $y = 3x - 3$

4) $15,15$

5) $r = 2.51$, $h = 5.05$

6) $h = 5.05\,m$, $r = 2.51\,m$

7) $9.86\,m$

8) $r = h = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$

9) $(2, \pm 2\sqrt{2})$

10) $(2, \pm\sqrt{8})$

11) $\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{3}{3}}$

Capítol 9

PRIMITIVES

9.1 Primitives d'una funció

Definició
La funció $F(x)$ és una primitiva de la funció $f(x)$ si es verifica que $F'(x) = f(x)$. Si $F(x)$ és primitiva de $f(x)$, també ho són totes les funcions de la forma $F(x) + C$, on C és una constant, ja que $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.

Exemple

La funció $f(x) = 2x$ té per primitives totes les funcions de la forma $F(x) = x^2 + C$, i per tant:

$$x^2,\ x^2 + 2,\ x^2 - 5,\ x^2 + \sqrt{3},\ \ldots$$

són totes primitives de $f(x) = 2x$.

Per tant, dues primitives d'una mateixa funció es diferencien en una constant. Per determinar una primitiva en particular, hem de conèixer alguna condició addicional.

Exemple

Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = e^x$ tal que la seva gràfica talli l'eix de coordenades en el punt $(0, 7)$.

Les primitives de $f(x) = e^x$ són de la forma $F(x) = e^x + C$.

Per la condició exposada, s'ha de complir que $F(0) = 7$. Si substituïm:

$$F(0) = e^0 + C \Rightarrow 7 = 1 + C \Rightarrow C = 6.$$

La funció demanada és $F(x) = e^x + 6$.

Exercicis

1) Escriviu l'expressió general de les primitives de les funcions següents:

   a) $f(x) = 3x^2$.
   b) $g(x) = \sin x$.
   c) $h(x) = -5$.
   d) $i(x) = 1/x$.

2) Determineu la funció primitiva de $f(x) = \cos x$ si se sap que la seva gràfica passa pel punt $(\pi/2, 4)$.

3) Se sap que la funció
$$F(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$
és una primitiva d'una funció $f(x)$. Calculeu aquesta funció.

9.2 La integral indefinida

Definició
El conjunt de totes les primitives d'una funció $f(x)$ s'anomena *integral indefinida* de $f(x)$ i es representa com a:
$$\int f(x)\, dx.$$
Si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, podem escriure:
$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$
El símbol dx ens indica quina és la variable independent.
El procés de trobar la integral indefinida d'una funció s'anomena *integració*. De la definició es dedueix que la integració és l'operació inversa de la derivació.
Exemples

1)
$$\int cosx\, dx = \sin x + C$$

2)
$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

3)
$$\int 4x^3\, dx = x^4 + C.$$

4)

$$\int 1/x\,dx = \ln x + C.$$

Exercicis

4) Calculeu les derivades de les funcions següents i escriviu-ne després les corresponents integrals indefinides:

a) $f(x) = \tan x$

b) $g(x) = 2^{3x+5}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

d) $i(x) = \ln^2 x$

9.3 Integrals immediates

Definició

Una integral es diu *immediata* si es pot determinar a partir de coneixements elementals de derivació.

A continuació tenim una llista d'algunes integrals immediates:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in R\ n \neq -1 \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + C = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

Exemples

Calculem les integrals següents:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2x^2} + C$$

2) $\int \sqrt{x}\,dx$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} + C$$

4) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

$$\int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$$

Exercicis

5) Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

b) $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{3^x}{4^x}\,dx$

9.4 Integrals quasiimmediates

Hi ha altres integrals que són una generalització de les de l'apartat anterior tenint en compte la regla de la cadena de derivació:

1)

$$\int [u(x)]^n u'(x)\,dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in R, \quad n \neq -1.$$

Exemples:

1) $\int (x^3+2)^4 3x^2\,dx$

$$u(x) = x^3 + 2 \Rightarrow \int (x^3+2)^4 3x^2\,dx = \frac{(x^3+2)^5}{5} + C.$$

2) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

$$u(x) = \sin x \Rightarrow \int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

$$u(x) = \ln x \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

2)

$$\int \frac{1}{u(x)} u'(x) \, dx = \ln |u(x)| + C.$$

Exemples:

1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx.$

$$u(x) = x^2 + 2 \Rightarrow \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \ln |^2 + 1| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

2) $\int \cot x \, dx$

$$u(x) = \sin x \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} \, dx.$

$$u(x) = \ln x \Rightarrow \int \frac{1/x}{\ln x} \, dx = \ln |\ln x| + C.$$

3)

$$\int \sin[u(x)] u'(x) \, dx = -\cos[u(x)] + C.$$

Exemples:

1) $\int 2x \sin(x^2+1) \, dx.$

$$u(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \int 2x \sin(x^2+1) \, dx = -\cos(x^2+1) + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \, dx.$

$$u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \, dx = -\cos \sqrt{x} + C.$$

3) $\int e^x \sin(e^x+5)\,dx$.

$$u(x) = e^x + 5 \Rightarrow \int e^x \sin(e^x+5)\,dx = -\cos(e^x+5) + C.$$

4) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx.$

$$u(x) = \cos x \Rightarrow \in \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos x) + C.$$

4)

$$\int \cos[u(x)]u'(x)\,dx = \sin[u(x)] + C.$$

Exemples:

1) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$

$$u(x) = \ln x \Rightarrow \int \cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx = \sin(\ln x) + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{3}{5}\cos\frac{3x+1}{5}\,dx.$

$$u(x) = \frac{3x+1}{5} \Rightarrow \int \frac{3}{5}\cos\frac{3x+1}{5}\,dx = \sin\frac{3x+1}{5} + C.$$

5)

$$\int \frac{1}{\cos^2[u(x)]}u'(x)\,dx = \int (1+\tan^2[u(x)])u'(x)\,dx = \tan[u(x)] + C.$$

Exemples:

1) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\cos^2(1+x^2)}\,dx.$

$$u(x) = 1 + x^2 \Rightarrow \int \frac{3x^2}{\cos^2(1+x^2)}\,dx = \tan(1+x^2) + C.$$

2) $\int 2[1+\tan^2(2x+3)]\,dx.$

$$u(x) = 2x + 3 \Rightarrow \int 2[1+\tan^2(2x+3)]\,dx = \tan(2x+3) + C.$$

6)

$$\int e^{u(x)}u'(x)\,dx = e^{u(x)} + C.$$

Exemples:

1) $\displaystyle\int e^{\tan x}(1+\tan^2 x)\,dx.$

$$u(x)=\tan x \Rightarrow \int e^{\tan x}(1+\tan^2 x)\,dx = e^{\tan x}+C.$$

2) $\displaystyle\int \cos x e^{\sin x}\,dx.$

$$u(x)=\sin x \Rightarrow \int \cos x e^{\sin x}\,dx = e^{\sin x}+C.$$

7)

$$\int a^{u(x)}u'(x)\,dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}+C.$$

Exemples:

1) $\displaystyle\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx.$

$$u(x)=\arctan x \Rightarrow \int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \frac{2^{\arctan x}}{\ln 2}+C.$$

2) $\displaystyle\int 3\,10^{3x+2}\,dx.$

$$u(x)=3x+2 \Rightarrow \int 3\,10^{3x+2}\,dx = \frac{10^{3x+2}}{\ln 10}+C.$$

8)

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}\,dx = \arcsin[u(x)]+C.$$

$$\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}\,dx = \arccos[u(x)]+C.$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}\,dx = \arctan[u(x)]+C.$$

Exemples:

1) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

$$u(x)=x^2 \Rightarrow \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx = \arcsin(x^2)+C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$

$$u(x) = e^x \Rightarrow \int \frac{-e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx = \arccos(e^x) + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx.$

$$u(x) = x^3 \Rightarrow \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = \arctan(x^3) + C.$$

Exercicis

6) Calculeu:

a) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}dx.$

b) $\int -\sin x \cos^2 x dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)^2}dx.$

7) Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = \sin x \cos x$ la gràfica de la qual passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

8) Calculeu:

a) $\int 4x^3 \sin(x^4-3)dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx.$

9) Calculeu

a) $\int (3x^2-1)\cos(x^3-x)dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+9}\,dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,dx.$

10) Determineu les asímptotes de la funció $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$, sabent que $F(-2) = 2$.

9.5 Les integrals i les operacions amb funcions

És molt fàcil comprovar que:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Exemples

1)
$$\int (x^2 + e^x)\,dx = \int e^x dx + \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C.$$

2)
$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-3/2}dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

3)
$$\int \frac{6x^2+9}{5x}\,dx = \frac{6}{5}\int x dx + \frac{9}{5}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{5}\ln|x| + C.$$

4)
$$\int \cos x^3 x^2 dx = \frac{1}{3}\int \cos x^3 3x^2 dx = \frac{1}{3}\sin x^3 + C.$$

5)
$$\int \frac{7}{3x+10}\,dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x+10}\,dx = \frac{7}{3}\ln|3x+10| + C.$$

6)
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x(1-x^2)^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-1/2}\,dx =$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Exercicis

11) Calculeu:

a) $\int (2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{5}{(2x-1)^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int (2x-3)(2x+3)\, dx$

12) Se sap que la gràfica d'una funció passa pel punt $P(1,4)$ i que el pendent de la recta tangent en qualsevol punt d'aquesta gràfica s'expressa mitjançant $m(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Determineu l'expressió algebraica d'aquesta funció.

13) Calculeu $\int \tan^2 x\, dx$ (sug.: sumeu i resteu 1).

14) Calculeu:

a) $\int 5\cos(3x-2)\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{x+1}}{e^x - 5}\, dx$

c) $\int \sqrt{7x-6}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx$

e) $\int 2x^2\sqrt{1-x^3}\, dx$

9.6 Mètodes d'integració

9.6.1 Integració per parts

Aquest mètode es basa en l'aplicació de la regla de derivació del producte:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Si integrem:

$$\int [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

Si podem calcular una de les integrals del segon membre, ja podem conèixer l'altre:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

o bé

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

Observació
A vegades és molt útil usar la notació següent:

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du$$

Si integrem:

$$\int d(u\,v) = uv = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemples

1) $\int x \cos x \, dx$

$$u(x) = x;\ v'(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = 1;\ v(x) = \sin x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \sin x \, dx =$$

$$x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C.$$

Si considerem l'altra possibilitat ($u'(x) = x;\ v(x) = \cos x$), es pot comprovar que la resolució és més complexa.

2) $\int \arctan x dx$

$$u(x) = \arctan x;\ v'(x) = 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x^2};\ v(x) = x$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

3) $\int x^2 e^x \, dx$

$$u(x) = x^2;\ v'(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = 2x\ v(x) = e^x$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

La integral $\int x e^x \, dx$ no és immediata. Cal tornar a aplicar la integració per parts:

$$r(x) = x;\ s'(x) = e^x \Rightarrow r'(x) = 1\ s(x) = e^x$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x.$$

Per tant:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

4) $\int e^x \cos x \, dx$

$$u(x) = e^x \; v'(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = e^x \; v(x) = \sin x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Tornem a aplicar el mètode a la integral $\int e^x \sin x \, dx$.

$$h(x) = e^x \; i'(x) = \sin x \Rightarrow h'(x) = e^x \; i(x) = -\cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) \, dx =$$

$$-e^x \sin x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Fixem-nos que ha tornat a sortir la integral inicial. Si substituïm:

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x) + C \Rightarrow$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Exercicis

15) Calculeu:

a) $\int x \sin x \, dx$.

b) $\int x \ln x \, dx$.

c) $\int 2^x x \, dx$.

d) $\int (3x + 2) \cos x \, dx$.

16) Calculeu les integrals següents (cal aplicar dues vegades la integració per parts):

a) $\int x^2 e^{5x} \, dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{2^x} \, dx$.

c) $\int (1 - x^2) 2^{3x} \, dx$.

17) Resoleu l'equació $F'(x) = 0$ si $F(x) = \int e^x x(2 + x) \, dx$.

9.6.2 Integració per canvi de variable

Quan la integral no és immediata i la integració per parts no la resol, es pot recórrer al canvi de variable. L'objectiu del canvi de variable és transformar la integral original en una altra més fàcil d'integrar.

Exemple:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Si fem:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \rightarrow dx = 2tdt.$$

Si substituim:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2+t}\,dt = \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$2\int \frac{1}{t+1}\,dt = 2\ln|t+1| + C.$$

Desfent el canvi:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = 2\ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

Si el canvi és adient, la integral resultant serà més fàcil que la inicial. Finalment, hem de desfer el canvi.

Exemples

1) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^{2x}}\,dx.$

Fem el canvi $e^x = t$

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^{2x}}\,dx = \int \frac{t-1}{t^2}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t-1}{t^3}\,dt =$$

$$\int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right)dt = \int (t^{-2} - t^{-3})\,dt = \frac{-1}{t} + \frac{1}{2t^2} + C =$$

$$\frac{-1}{e^x} + \frac{1}{2e^{2x}} + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx.$

Fem el canvi $\sqrt{x-1}=t$

$$\sqrt{x-1}=t \Rightarrow x-1=t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}=2t \Rightarrow dx=2tdt$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx=\int \frac{2t}{(t^2+1)t}\,dt=2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x-1}+C.$$

Exercicis

18) Calculeu:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{16-x^2}\,dx$ amb $x=4t$.

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$, amb $\sqrt{x-1}=t$.

19) Aplicant el canvi de variable $\sin x=t$, calculeu:

$$\int \cos^3 x\,dx$$

(Si teniu en compte que $\cos^3=\cos^2 x\cos x=(1-\sin^2 x)\cos x$, la integral es pot calcular sense canvi de variable).

20) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Utilitzeu el canvi $x=\sin t$ *o* $x=\cos t$.

9.6.3 Integració de funcions racionals

Es tracta de calcular integrals del tipus:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis.
Per calcular integrals no immediates de funcions racionals cal descompondre aquestes funcions en suma d'altres de més senzilles. Per aconseguir-ho, cal fer la factorització del polinomi denominador.

- El grau del numerador és més petit que el grau del denominador.

1) El denominador només té arrels simples.

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

La fracció $P(x)/Q(x)$ es pot descompondre en la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2} + \dots + \frac{r}{x - x_n}$$

on $a, b, \dots r$ són nombres reals. Llavors:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{a}{x - x_1}\,dx + \int \frac{b}{x - x_2}\,dx + \dots + \int \frac{r}{x - x_n}\,dx =$$

$$a \ln|x - x_1| + b \ln|x - x_2| + \dots + r \ln|x - x_n| + C.$$

Exemple

$$\int \frac{x+3}{x^2-4}\,dx = \int \frac{x+3}{(x-2)(x+2)}\,dx$$

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) + b(x-2)}{(x-2)(x+2)}.$$

Igualant:

$$x + 3 = a(x+2) + b(x-2) \to x + 3 = (a+b)x + 2a - 2b$$

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 3 = 2a - 2b \end{cases}$$

La solució és $a = \dfrac{5}{4}$ i $b = \dfrac{-1}{4}$.

$$\int \frac{x+3}{x^2-4}\,dx = \int \frac{5/4}{x+2}\,dx + \int \frac{-1/4}{x-2}\,dx = \frac{5}{4}\ln|x+2| - \frac{1}{4}\ln|x-2| + C.$$

2) El denominador té alguna arrel múltiple:

$$Q(x) = (x - x_1)^p (x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Llavors, podem fer la descomposició única:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{a_p}{(x - x_1)^p} + \frac{b}{x - x_2} + \dots + \frac{r}{x - x_n}.$$

I actuar com en el cas anterior

Exemple

$$\int \frac{2x-1}{(x-3)^2(x+1)}\,dx$$

$$\frac{2x-1}{(x-3)^2(x+1)} = \frac{a_1}{x-3} + \frac{a_2}{(x-3)^2} + \frac{b}{x+1}$$

$$\frac{2x-1}{(x-3)^2(x+1)} = \frac{a_2(x+1)+a_1(x-3)(x+1)+b(x-3)^2}{(x-3)^2(x+1)}.$$

Resolent:

$$a_1 = \frac{3}{16}\ a_2 = \frac{5}{4}\ b = -\frac{3}{16}.$$

Per tant:

$$\int \frac{2x-1}{(x-3)^2(x+1)}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$\frac{-5}{4(x-3)} + \frac{3}{16}\ln|x-3| - \frac{3}{16}\ln|x+1| + C =$$

$$\frac{-5}{4(x-3)} + \ln\sqrt[16]{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3} + C.$$

3) El denominador té algun factor que no es pot descompondre.
Si la integral del factor que no es pot descompondre és del tipus:

$$\int \frac{k}{ax^2+bx+c}\,dx$$

i $b^2-4ac<0$
Llavors:

$$\int \frac{k}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{k}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$$

Les integrals d'aquest tipus sempre donen una funció *arctan* i per trobar-la cal posar el denominador en la forma $(x-p)^2+q$ i recordar que:

$$\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}\,dx = \arctan[u(x)] + C.$$

Exemple

$$\int \frac{6}{x^2+4x+13}\,dx = 6\int \frac{dx}{x^2+4x+4+9} = 6\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

$$6\int \frac{1/9}{\frac{(x+2)^2}{9}+1}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx =$$

$$2\int \frac{1/3}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx = 2\arctan\frac{x+2}{3}+C.$$

En el cas que la integral sigui del tipus:

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+x}\,dx$$

i $b^2-4ac<0$ tenim dos casos:

- Multiplicant o dividint per un nombre real, podem aconseguir que $px+q$ sigui la funció derivada de ax^2+bx+x:

  Exemple

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+C.$$

- Si no podem fer el cas anterior, sempre es pot descompondre la integral en suma de dues que sabem calcular: *arc tangent* i *logaritme neperià*:

  Exemple

$$\int \frac{4x+6}{x^2+2x+5}\,dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx = 2\int \frac{2x+2+1}{x^2+2x+5}\,dx =$$

$$2\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+2x+5}\right) =$$

$$2\ln(x^2+2x+5)+2\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$2\ln(x^2+2x+5)+2\int \frac{1/4}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$2\ln(x^2+2x+5)+\int \frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$2\ln(x^2+2x+5)+\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

- El grau del numerador és més gran que el grau del denominador.

  En aquest cas es fa la divisió entera de $P(x)$ i $Q(x)$ i podem escriure:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

On $C(x)$ és el quocient i $R(x)$ és el residu. Per tant:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

I estarem en algun dels casos anteriors.

Exemple

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 5}{x^2 - 5x + 6}\,dx.$$

Si fem la divisió tenim:

$$x^4 - 4x^2 + 2x + 5 = x + 1 + \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Llavors:

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 5}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x-1}{(x-3)(x-2)}\,dx.$$

I és molt fàcil comprovar que:

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 5}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-3| - \ln|x-2| + C.$$

Exercicis

21) Calculeu:

a) $\displaystyle\int \frac{10}{x^2 - 4x + 4}\,dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3}{x(x-1)(x+2)}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{1 - 2x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx.$

22) Calculeu $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$ fent el canvi $x = t^6$.

23) Calculeu:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-5}\,dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4}{x^2 - 2x}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}\,dx.$

9.7 Exercicis de repàs

1) Quina és la primitiva de la funció $f(x) = 2x + 5$ que verifica la condició $F(1) = 9$? I la que verifica $F^{-1} = -3$?

2) Trobeu l'expressió de la funció $F(x)$ la gràfica de la qual passa pel punt $(1, 1)$ sabent que el pendent de la recta tangent en qualsevol punt és donat per la funció $m(x) = 3x^2 + 6x - 4$.

3) Determineu les asímptotes de la funció $F(x) = \displaystyle\int \frac{5}{(x-4)^2}\,dx$ sabent que $F(x)$ talla l'eix de coordenades en el punt $(0, 3)$.

4) Calculeu:

a) $\int (-3 * 3^x + 4\cos x)\,dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{x}\,dx$.

c) $\displaystyle\int \frac{1 + 2x + 3x^2}{4x^2}\,dx$.

d) $\displaystyle\int (4 + \tan^2 x)\,dx$.

e) $\displaystyle\int \frac{2 - 4x}{7x}\,dx$.

f) $\int \cos 5x\,dx$.

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x \tan x}$.

h) $\displaystyle\int \frac{2^{x+2}}{2^x - 13}\,dx$.

i) $\int x^3 \sin(x^4 - \pi)\,dx$.

j) $\displaystyle\int 5^{\tan x}(1 + \tan^2 x)\,dx$.

k) $\displaystyle\int \frac{5\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

l) $\displaystyle\int \frac{(1 + \ln x)^2}{4x}\,dx$.

m) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

5) Calculeu per parts les integrals següents:

a) $\int x^2 \sin 3x\,dx$.

b) $\int \cos(\ln x)\,dx$.

c) $\int e^{4x}\cos 4x\,dx$.

d) $\int (x-1)5^x\,dx$.

e) $\int \ln^2 x\,dx$.

6) Comproveu la igualtat següent:

$$\int (x^2-2x-1)e^x\,dx = (x^2-4x+3)e^x + C.$$

7) Calculeu:

a) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{3}{9+x^2}\,dx$.

8) Calculeu les integrals següents:

a) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2-10x+25}\,dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+2x^2-4x-8}\,dx$.

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x)(x+7)}$.

d) $\displaystyle\int \frac{5-3x}{3x-1}\,dx$.

9) Trobeu una primitiva de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4}$.

10) Un mòbil recorre una trajectòria rectilínia amb una acceleració constant de $2m/s^2$. Se sap que en el moment de començar a comptar el temps $v(0) = 3m/s$ i $s(0) = -5m$.

Trobeu les expressions de $s(t)$ i $v(t)$.

11) Un mòbil recorre una trajectòria rectilínia de manera que la seva velocitat varia amb el temps d'acord amb l'expressió $v(t) = 2t+6$ en unitats del SI. Es tracta de trobar l'expressió que ens dóna la posició d'aquest mòbil en funció del temps, sabent que en l'instant inicial es troba a 6 m de l'origen de posicions.

12) Un mòbil es desplaça sobre l'eix X de manera que la seva acceleració és donada per l'equació $a = 2t + 1\,m/s^2$. Si per $t = 0$ es verifica $v(0) = -2\,m/s$ i $x(0) = 10\,m$, trobeu les expressions de la velocitat $v(t)$ i de la posició $x = x(t)$ d'aquest mòbil.

13) Calculeu $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

14) Calculeu $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

15) Calculeu les integrals:

a) $\int (\tan^5 x + \tan^7 x)\, dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$.

d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\, dx$.

e) $\int \cos x \sqrt[5]{7+\sin x}\, dx$.

16) Trobeu l'expressió de $F(x)$ que verifica $F'(x) = 2x - 6$ i la seva gràfica presenta un mínim en el punt d'ordenada -1.

17) Aplicant el mètode d'integració per parts, calculeu $\int \cos^2 x\, dx$.

18) Calculeu:

a) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$.

b) $\int \sqrt{1-3x}\, dx$.

c) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^4-x^3-22x^2+16x+96}\, dx$.

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$.

e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{4x}\, dx$.

f) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$.

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{10+6x+x^2}$.

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+4}\, dx$.

i) $\int \sin^4 x\, dx$.

j) $\int \tan 2x\, dx$.

k) $\int x \ln x\, dx$.

l) $\int x^2 \sin 3x\, dx$.

m) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2}\, dx$.

9.8 Solucions

1) a) $x^3 + C$
   b) $-\cos x + C$
   c) $-5x + C$
   d) $\ln x + C$

2) $\sin x + 3$

3) $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

4) a) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$
   b) $3 \cdot \ln 2 \cdot 2^{3x+5}$
   c) $-\dfrac{8x}{(x^2-4)}$
   d) $\dfrac{2\ln x}{x}$

5) a) $-\dfrac{1}{3x^3}$
   b) $\dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}$
   c) $-\dfrac{3}{2(x^2)^{\frac{1}{3}}}$
   d) $\dfrac{(\frac{3}{4})^x}{\ln\frac{3}{4}}$

6) a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$
   b) $\dfrac{\cos^3 x}{3} + C$
   c) $\dfrac{\arctan^2 x}{2} + C$
   d) $-\dfrac{1}{x-3} + C$

7) $\dfrac{\sin^2 x}{2} + 7$

8) a) $-\cos(x^4 - 3) + C$
   b) $e^{\tan x} + C$

c) $\ln(\tan x) + C$

d) $\arctan x^2 + C$

9) a) $\sin(x^3 - x) + C$

b) $2\sqrt{1 + x^2} + C$

c) $\ln(e^x + 9) + C$

d) $\ln(\arcsin x) + C$

10) $y = 3$; $4x = -3$

11) a) $\dfrac{2x^3}{3} - x^3 + \dfrac{5x^2}{2} - x + C$

b) $-\dfrac{5}{2(2x-1)} + C$

c) $\dfrac{4x^3}{3} - 9x + C$

12) $\dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 5x - \dfrac{1}{6}$

13) $\tan x - x + C$

14) a) $\dfrac{5}{3}\sin(3x - 2) + C$

b) $\ln(e^x - 5)e + C$

c) $\dfrac{2}{21}(7x - 6)^{\frac{3}{2}}$

d) $\dfrac{5}{3}\arcsin(3x) + C$

e) $-\dfrac{4}{9}(1 - x^3)^{\frac{3}{2}}$

15) a) $\sin x - x\cos x + C$

b) $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$

c) $-\dfrac{2^x}{(\ln^2 2)} + \dfrac{x2^x}{\ln 2} + C$

d) $3\cos x + 3x\sin x + 2\sin x + C$

16) a) $\dfrac{x^2e^{5x}}{5} - \dfrac{2xe^{5x}}{25} + \dfrac{2e^{5x}}{125} + C$

b) $(-\dfrac{2}{\ln^3 2} - \dfrac{x^2}{\ln 2} - \dfrac{2x}{\ln^2 2})2^x + C$

c) $\dfrac{2^{3x}}{3ln2} - \dfrac{2 \cdot 2^{3x}}{27ln^3 2} + \dfrac{2^{3x+1}}{9ln^2 2} - \dfrac{x^2 2^{3x}}{2ln2} + C$

17) $x = 0$, $x = -2$

18) a) $\dfrac{ln(x+4)}{8} - \dfrac{ln(x-4)}{8} + C$

b) $2\sqrt{x-1} + \dfrac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C$

19) $\dfrac{\cos^2 x \sin x}{3} + \dfrac{2\sin x}{3} + C$

20) $\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \dfrac{\arcsin x}{2} + C$

21) a) $-\dfrac{10}{x-2} + C$

b) $\dfrac{3}{2}\ln x - \dfrac{2}{3}\ln(x-1) + \dfrac{1}{6}\ln(x+2) + C$

c) $-\dfrac{1}{2}\ln(x-1) + 3\ln(x-2) - \dfrac{5}{2}\ln(x-3) + C$

22) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$

23) a) $\dfrac{1}{2}x^2 + 55x + 24\ln(x-5) + C$

b) $\dfrac{x^2}{2} + 2x + 2\ln x + 2\ln(x-2) + C$

c) $x + 3\ln(x-3) - 3\ln(x+3) + C$

Exercicis de repàs

1) $x^2 + 5x + 3$

2) $x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

3) $y = \dfrac{7}{4}$, $x = 4$

4) a) $-\dfrac{3 \cdot 3^x}{\ln 3} + 4\sin x + C$

b) $\dfrac{x^2}{2} - 6\sqrt{x} + \ln x + C$

c) $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{\ln x}{2} - \dfrac{1}{4x} + C$

d) $4x + \tan x - x + C$

e) $-\dfrac{4x}{7} + \dfrac{2\ln x}{7} + C$

f) $\dfrac{\sin(5x)}{5} + C$

g) $\ln(\tan x) + C$

h) $\dfrac{4\ln(2^x - 13)}{\ln 12} + C$

i) $-\dfrac{\cos(x^4 - \pi)}{4} + C$

j) $\dfrac{5^{\tan x}}{\ln 5} + C$

k) $10 \cdot \sin(\sqrt{x}) + C$

l) $\dfrac{\ln x}{4} + \dfrac{\ln^2 x}{4} + \dfrac{\ln^3 x}{12} + C$

m) $\cos(\dfrac{1}{x}) + C$

5) a) $-\dfrac{x^2\cos(3x)}{3} + \dfrac{2\cos(3x)}{27} + \dfrac{2x\sin(3x)}{9} + C$

b) $\dfrac{x\sin(\ln x)}{2} + \dfrac{x\cos(\ln x)}{2} + C$

c) $\dfrac{e^{4x}}{4} + \dfrac{\sin(4x)}{4} + C$

d) $\dfrac{x5^x}{\ln 5} - \dfrac{5^x}{\ln 5} - \dfrac{5^x}{\ln^2 5} + C$

e) $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

7) a) $\dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + 2\arcsin\dfrac{x}{2} + C$

b) $\arctan\dfrac{x}{3} + C$

8) a) $-\dfrac{17}{x - 5} + 4\ln(x - 5) + C$

b) $\dfrac{\ln(x - 2)}{16} - \dfrac{3}{4(x + 2)} - \dfrac{\ln(x + 12)}{16} + C$

c) $-\dfrac{\ln x}{7} + \dfrac{\ln(x - 1)}{8} + \dfrac{\ln(x + 7)}{56} + C$

d) $-x + \dfrac{4\ln(3x - 1)}{3} + C$

9) $\ln(x^2 + 4) + \dfrac{\arctan(\frac{x}{2})}{2} + C$

10) $s(t) = t^2 + 3t - 5$; $v(t) = 2t + 3$

11) $s(t) = t^2 + 6t + 6$

12) $v(t) = t^2 + t - 2$; $x(t) = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} - 2t + 10$

13) $\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{3} - \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{3} + C$

14) $-\dfrac{2}{1+\tan(\frac{x}{2}}) + C$

15) a) $\dfrac{\tan^6 x}{6} + C$

b) $\dfrac{2\sin(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})} + C$

c) $\dfrac{\ln(x-1)}{12} + \dfrac{\ln(x+3)}{4} - \dfrac{\ln(x+12)}{3} + C$

d) $\dfrac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$

e) $\dfrac{5(7+\sin x)^{\frac{6}{5}}}{6} + C$

16) $x^2 - 6x + 8$

17) $\dfrac{\cos x \cdot \sin x}{2} + \dfrac{x}{2} + c$

18) a) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{2} + \arctan x + C$

b) $-\dfrac{2\sqrt[3]{1-3x}}{9} + C$

c) $-\dfrac{2\ln(x-3)}{7} + \dfrac{13\ln(x-4)}{48} + \dfrac{11}{1112}\ln(x+4) - \dfrac{\ln(x+2)}{12} + C$

d) $2\sqrt{7}\arctan(\dfrac{\sqrt{7}(2x+3)}{7}) + C$

e) $\dfrac{\arctan^2 x}{2} + C$

f) $\arctan(x+3) + C$

g) $\ln(e^x + 4) + C$

h) $-\dfrac{\sin^3 x \cos x}{4} - \dfrac{3\cos x \sin x}{8} + \dfrac{3x}{8} + C$

i) $\dfrac{\ln(2+2(\tan^2(2x))}{4} + C$

j) $\dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + C$

k) $-\dfrac{x^2\cos(3x)}{3} + \dfrac{2\cos(3x)}{27} + \dfrac{2x\sin(3x)}{9} + C$

l) $x\tan x + \ln(\cos x) + C$

Capítol 10

LA CIRCUMFERÈNCIA

10.1 Lloc geomètric

Definició

Anomenen lloc geomètric del pla, al conjunt de punts del pla que verifiquen una determinada propietat.

Exemple

Una recta és el lloc geomètric dels punts $\{P(x,y)\}$, en què les seves coordenades verifiquen una equació del tipus $y = ax + b$.

10.2 Equació de la circumferència

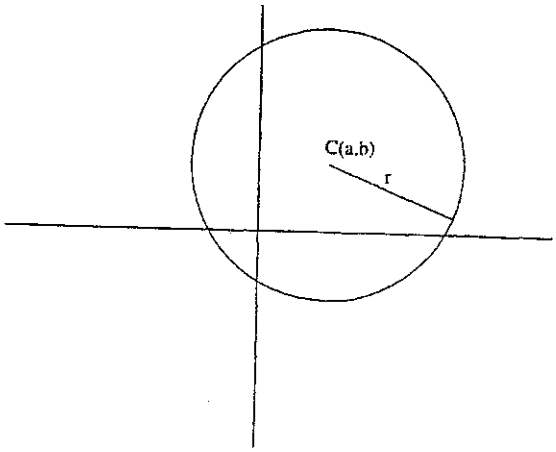
Definició

La circumferència és el lloc geomètric dels punts $P(x,y)$ del pla què equidisten d'un punt fix $C(a,b)$, anomenat centre.

Podem deduir l'equació de la circumferència a partir de la seva definició. Si $P(x,y)$ és un punt de la circumferència, llavors la seva distància al centre $C(a,b)$ és:

$$d(C,P) = r$$

Aquesta distància r s'anomena radi de la circumferència.



La distància entre els dos punts és:

$$d(C,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Aquesta última relació és l'equació de la circumferència de centre $C(a,b)$ i radi r.

Exemple

L'equació de la circumferència de centre $C(2,-1)$ i radi 3 és:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Es fàcil comprovar si un punt és de la circumferència substituint les seves coordenades en l'equació i comprovant si la verifica.

Exercicis

1) Escriviu l'equació de la circumferència de centre $(2,0)$ i radi 2. Dibuixeu-la.

2) Una circumferència té per equació $x^2 + y^2 = 16$. Calculeu el seu centre i el seu radi.

3) Trobeu l'equació de la circumferència de centre $(-3,1)$ i radi 4. Comproveu si el punt $(3,4)$ és de la circumferència.

4) Determineu l'equació de la circumferència que té per diàmetre el segment determinat pels punts $A(-1,4)$ i $B(3,0)$.

10.3 Determinació del centre i del radi

Si transformem l'equació de la circumferència de centre $C(a,b)$ i radi r, tenim que:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Per tant, si una equació d'aquest tipus ha de ser la d'una circumferència s'ha de complir que:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

i per tant:

- $m = -2a$
- $n = -2b$
- $p = a^2 + b^2 - r^2$

on (a, b) és el centre i r és el radi de la circumferència.

Exemples

1) Comprovem si l'equació $x^2+y^2-6x+4y+9 = 0$ és la d'una circumferència.

$$-6 = -2a \to a = 3$$
$$4 = -2b \to b = -2.$$

El centre és el punt $(3, -2)$

$$9 = 3^2 + (-2)^2 - r^2 \to r^2 = 4 \to r = 2.$$

Per tant, l'equació anterior és una circumferència de centre $C(3, -2)$ i radi 2 que podem expressar com a:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

2) Comprovem si l'equació $2x^2 + 2y^2 + 6x - 7y + 12 = 0$ és la d'una circumferència.

$$x^2 + y^2 + 3x - \frac{7}{2}y + 6 = 0$$
$$3 = -2a \to a = \frac{3}{2}$$
$$\frac{-7}{2} = -2b \to b = \frac{7}{4}$$
$$6 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - r^2 = 0 \to r^2 = -\frac{11}{16}.$$

Per tant l'equació proposada no és d'una circumferència.

Exercicis

5) Calculeu el centre i el radi de les circumferències següents:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0.$

b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0.$

c) $3x^2 + 3y^2 - 5x + 9y + \frac{27}{4} = 0$.

6) Alguna de les equacions següents no és d'una circumferència. Comproveu-ho i raoneu la resposta:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 3xy - 5 = 0$.

b) $3x^2 + 2y^2 - 5x + 9y + 2 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 3 = 0$.

d) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 20 = 0$.

e) $x^2 + y^2 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{3}y + 2 = 0$.

10.4 Circumferència que passa per tres punts

Donats tres punts P, Q i R no alineats, hi ha una única circumferència que els conté.

Exemple

1) Siguin els punts $P(0,-1), Q(1,1), R(3,0)$. Els tres punts no estan alineats, i com que han de verificar l'equació $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, tindrem:

$$P(0,-1) \Rightarrow 1 - n + p = 0$$

$$Q(1,1) \Rightarrow 2 + n + m + p = 0$$

$$R(3,0) \Rightarrow 9 + 3m + p = 0$$

Tenim un sistema de tres equacions amb tres incògnites i resolent-lo:

$$p = 0 \; n = 1 \; m = -3.$$

Si substituïm tenim l'equació de la circumferència demanada: $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$.

Exercicis

7) Una circumferència passa pels punts $A(2,-1)$, $B(2,4)$ i $C(0,-2)$. Determineu el centre i el radi i escriviu-ne l'equació.

8) Escriviu l'equació de la circumferència en la forma $x^2+y^2+mx+ny+p = 0$ sabent que passa pels punts $(0,3), (-3,0), (1,1)$.

10.4.1 Posició relativa d'un punt i una circumferència

Un punt respecte d'una circumferència pot ser de la circumferència, interior o exterior a ella, depenent si verifica l'equació de la circumferència o la seva distància al centre es més petita o més gran que el radi de la circumferència.

Exemple

El punt (4,-1) no és de la circumferència $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$, ja que no verifica la seva equació.

El centre de la circumferència és (3,-4) i el seu radi 5. La distància del punt (4,-1) al centre resulta $\sqrt{10} > 5$ i per tant el punt és interior a la circumferència.

10.5 Posició relativa de rectes i circumferències

10.5.1 Intersecció d'una recta i una circumferència

Per calcular els punts comuns d'una circumferència $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ i una recta $y = mx + p$, cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C & = 0 \\ y - mx - p & = 0 \end{cases}$$

que és un sistema no lineal que es pot reduir a una equació de segon grau i que podrà tenir dues, una o cap solució.
Això ens donarà la posició relativa d'una recta en relació amb una circumferència: secant, tangent i exterior:

- Si hi ha dues solucions: la recta és secant a la circumferència.
- Si hi ha una solució: la recta és tangent.
- Si no hi ha cap solució: la recta és exterior a la circumferència.

Exemple

Calculeu la intersecció de la circumferència $C : x^2 + y^2 - 10x + 4y - 29 = 0$ amb:

1) $r : x - y + 3 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 4y - 29 & = 0 \\ x - y + 3 & = 0 \end{cases}$$

$$y = x + 3 \Rightarrow x^2 + (x+3)^2 - 10x + 4(x+3) - 29 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0$$

$$x = 2\ y = 5 \quad x = -2; y = 1$$

La recta és secant.

2) $s : \frac{6}{5}x - y + 6 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 4y - 29 & = 0 \\ \frac{6}{5}x - y + 6 & = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{6}{5}x + 6 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{6}{5} + 6\right)^2 - 10x + \left(\frac{6}{5}x + 6\right) - 29 = 0$$

$$61x^2 + 230x + 775 = 0$$

Aquesta equació no té solucions reals. La recta és exterior a la circumferència.

3) $u : 3x - 7y + 29 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 4y - 29 & = 0 \\ 3x - 7y + 29 & = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{7y - 29}{3} \Rightarrow \left(\frac{7y - 29}{3}\right)^2 + y^2 - 10\left(\frac{7y - 29}{3}\right) + 4y - 29 = 0$$

$$58y^2 - 580y + 1450 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 25 = 0 \Rightarrow y = 5 \; ; \; x = 2$$

La recta és tangent a la circumferència.

10.5.2 Posició relativa de dues circumferències

La posició relativa de dues circumferències l'obtindrem resolent el sistema format per les seves equacions:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C & = 0 \\ x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' & = 0 \end{cases}$$

Aquest sistema pot tenir dues, una, cap o infinites solucions, que ens donaran les posicions relatives de les circumferències: secants, tangents, exteriors o coincidents.

Exemples

1) Estudieu la posició relativa de les circumferències:

1) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \quad i \quad x^2 + y^2 - 8x - 8y + 6 = 0$

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y & = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 6 & = 0 \end{cases}$$

Si restem la segona equació de la primera tenim: $6x + 6y - 6 = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0$, i això és l'expressió analítica d'una recta. Ara cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y & = 0 \\ x + y - 1 & = 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - x \Rightarrow x^1 + (1-x)^2 - 2x - 2(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hi ha dues solucions; per tant les circumferències són secants en els punts:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad i \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2) $x^2 + y^2 - 6y = 0$ i $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. Si restem ambdues equacions tenim: $2y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$
En substituir en una de les equacions anteriors:

$$x^2 + \frac{9}{4} + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{45}{4}$$

Això ens diu que no tenen punts en comú. Cal qüestionar-se ara si les dues circumferències són exteriors o interiors. Per saber-ho, cal comparar la distància entre els centres amb la diferència entre els radis.

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

té centre (0,3) i radi 3.

$$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$$

té centre (0,2) i radi 1.
La distància entre els centres és 1, que és menor que la diferència dels radis i les circumferències són interiors. En cas contrari, serien exteriors.

3) $x^2 + y^2 - 6y = 0$ i $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$.
Si restem les dues equacions resulta:

$$10x + 30 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 3$$

El punt (-3, 3) és comú a les dues circumferències, i per tant, són tangents. Cal ara saber si són exteriors o interiors.
El centre de la primera és (0,3) i el seu radi és 3. De la segona, respectivament, (-5,3) i 2. Com que la distància entre els centres és igual a la suma dels radis, són exteriors.
Si la distància fos la diferència dels radis, les circumferències serien tangents interiors.

10.6 Rectes i circumferències tangents

10.6.1 Circumferència tangent a una recta

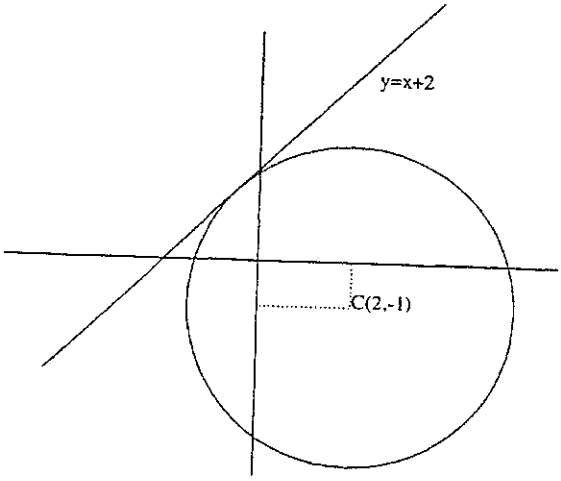
La recta tangent a una circumferència és perpendicular al radi en el punt de contacte. Per això, la distància del centre de la circumferència a la recta és igual al radi. Per tant, donats el centre i la recta tangent, la circumferència que es pot construir és única.

Exemple

Sigui el punt $C(2,-1)$ el centre d'una circumferència tangent a la recta $s: y = x + 2$.

Si posem l'equació de la recta en forma implícita $-x + y - 2 = 0$, tenim:

$$r = d(C,s) \Rightarrow r = \frac{|-2-1-2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$



Podem, doncs, escriure l'equació de la circumferència de radi $\frac{5}{\sqrt{2}}$ i centre $(2,-1)$:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{2}.$$

Exercicis

9) Dibuixeu la circumferència de centre, l'origen de coordenades i tangent a la recta $y = -2$. Escriviu-ne l'equació.

10) La recta que passa pels punts $A(-1,3)$ i $B(3,0)$ és tangent a una circumferència de centre $C(3,4)$. Trobeu l'equació d'aquesta circumferència.

11) Una circumferència de centre $C(1/2, 9/4)$ és tangent a la bisectriu del primer i tercer quadrants. Escriviu l'equació de la circumferència.

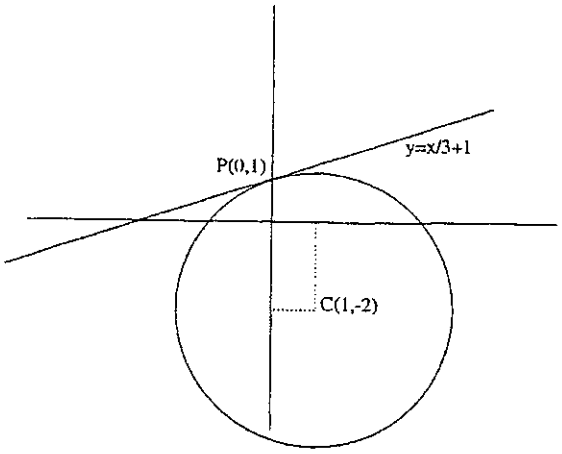
10.6.2 Recta tangent a una circumferència

Per un punt de la circumferència

Una recta és tangent en un punt P d'una circumferència si és perpendicular al radi en el punt de tangència P.

Exemple

Sigui la circumferència $(x-1)^2+(y+2)^2=10$ i el punt $P(0,1)$. Busquem l'equació de la recta tangent a la circumferència pel punt P.



La circumferència té centre $C(1,-2)$ i radi $\sqrt{10}$. La recta que passa per (0,1) i (1,-2) és $y=-3x+1$. El pendent de la tangent serà $\frac{1}{3}$.

Com que també passa per (0,1), l'equació de la tangent és $y=\frac{1}{3}+1$.

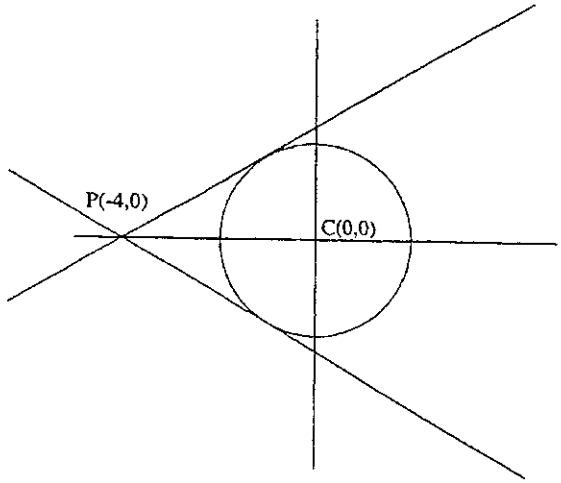
Des d'un punt exterior

Aqui hi haurà dues solucions, i malgrat que no coneixem els punts de tangència, sabem que la intersecció d'una recta tangent amb la circumferència serà un sol punt.

Exemple

Sigui la circumferència $x^2+y^2=4$ i el punt $P(-4,0)$, exterior. Trobeu les equacions de les tangents des d'aquest punt.

La circumferència té centre $C(0,0)$ i radi $r=2$.



És fàcil comprovar que la recta que passa per P té per equació $y = 4m + mx$

El sistema format per les equacions de la recta i la circumferència ha de tenir solució única:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 4 \\ y - mx - 4m & = 0 \end{cases}$$

Substituint y, ens queda: $x^2 + (m(x+4))^2 = 4$. Com que la solució ha de ser única, el discriminant ha de ser zero:

$$64m^2 - 4(1+m^2)(16m^2 - 4) = 0 \rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Les rectes són $y = \sqrt{\frac{1}{3}}(x+4)$ i $y = -\sqrt{\frac{1}{3}}(x+4)$.

Exercicis

12) Escriviu l'equació de la recta tangent a la circumferència C en el punt P que pertany a aquesta circumferència en els casos següents:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ i $P(0,1)$.

b) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 13 = 0$ i $P(1,2)$.

c) $x^2 + y^2 - 9 = 0$ i $P(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

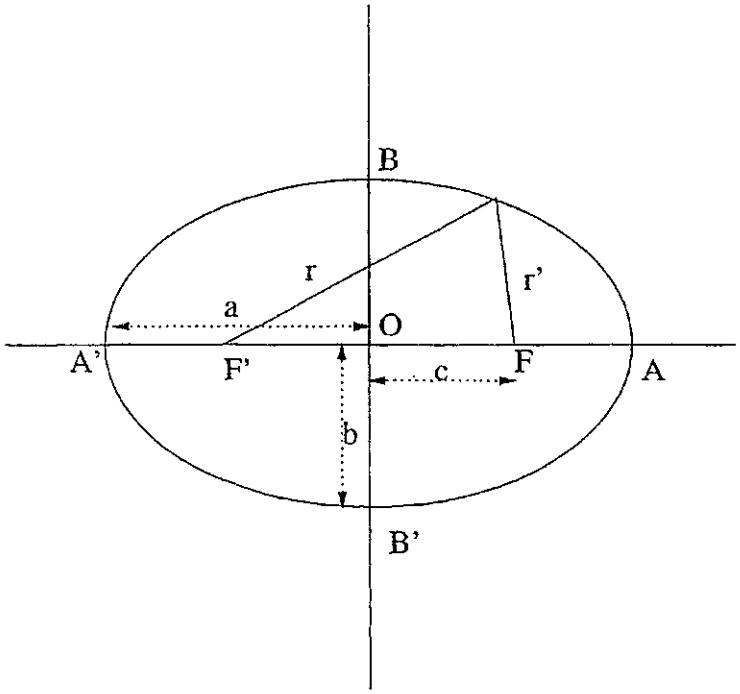
13) Trobeu k perquè la recta $x + y + k = 0$ sigui tangent a la circumferència $x^2 + y^2 = 2$.

14) Considereu el feix de rectes que passen pel punt $P(0,2)$. Trobeu les dues rectes del feix que són tangents a la circumferència de centre $C(-1,-1)$ i radi $\sqrt{2}$.

10.7 Altres còniques

10.7.1 L'el·lipse

Definició
L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla en què la suma de les distàncies a dos punts fixos, anomenats focus, és constant.



Si designem per r i r' aquestes distàncies, la suma es representa per $2a$.
El segment AA', que passa pels focus F i F', s'anomena eix principal o major i es representa per $2a$.
El segment BB', mediatriu del segment FF', s'anomena eix secundari o menor i es representa per $2b$.
La distància FF' s'anomena distància focal i es representa per $2c$. Es compeix que $c < a$.
La raó $\frac{c}{a}$ es diu excentricitat i es representa per e i val entre 0 i 1. En cas que sigui 0, representa una circumferència i si és 1, un segment rectilini.
Els punts A, A', B, B' s'anonemen vèrtexs de l'el·lipse.
Es demostra que l'equació de l'el·lipse és de la forma:

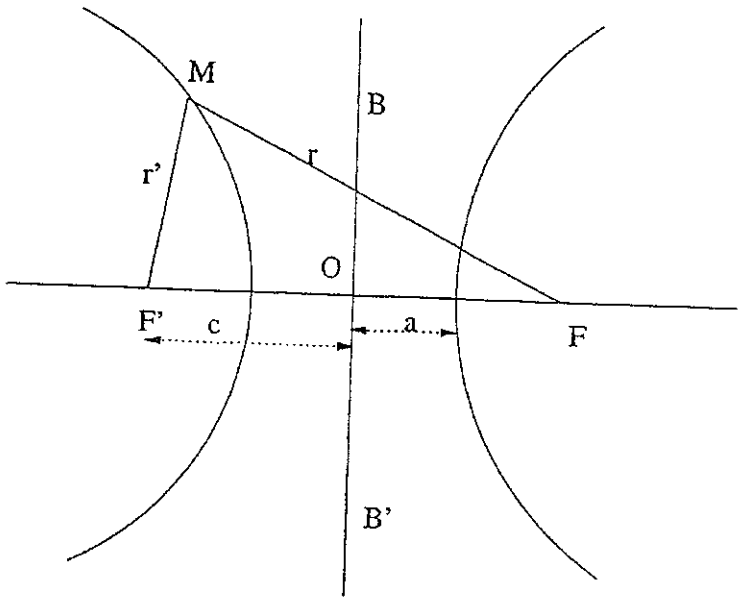
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la qual s'anomena equació reduïda o canònica de l'el·lipse.

10.7.2 La hipèrbola

Definició

És el lloc geomètric dels punts del pla tal que la diferència de les seves distàncies a dos punts fixos, anomenats focus, és constant.



Aquesta diferència es representa per $2a$.
La distància entre els focus F i F' s'anomena distància focal i val $2c$.
Es verifica que $c > a$ i la raó c/a és l'excentricitat de la hipèrbola.
Els punts A i A' són els vèrtexs de la hipèrbola.
El punt b és tal que $c^2 = a^2 + b^2$.
Si $a = b$, la hipèrbola és equilàtera.
L'equació reduïda de la hipèrbola és:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

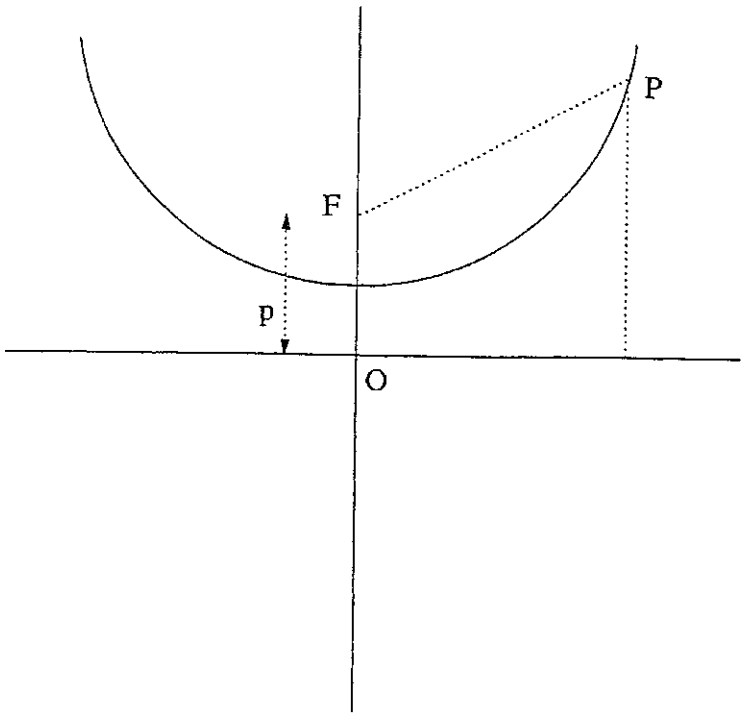
En general, si el producte de les dues coordenades de diferents punts és constant i igual a k, aquests punts formen una hipèrbola d'equació $y = \dfrac{k}{x}$. És l'equació de la hipèrbola referida a les seves asímptotes.

10.7.3 La paràbola

Definició

La paràbola és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt i d'una recta fixos.

El punt s'anomena focus i la recta, directriu.



Si el vèrtex de la paràbola és l'origen de coordenades, la seva equació reduïda és $y^2 = 2px$.
p és la distància entre el focus i la directriu.

10.8 Exercicis de repàs

1) Esbrineu si els punts $P(1,2)$, $Q(2,1)$ i $R(0,0)$ es troben en una mateixa circumferència. Si es així, determineu el centre, el radi i l'equació.

2) a) Escriviu l'equació de la circumferència de centre $(3,2)$ i tangent a l'eix d'abcisses.

   b) Escriviu l'equació de la circumferència de centre $(-1,2)$ i tangent a l'eix d'ordenades.

3) Una circumferència és tangent a la recta $y = x + 1$ en el punt d'abscissa 3. Se sap que la circumferència també passa per $(3,-1)$. Trobeu l'equació d'aquesta circumferència.

4) Dibuixeu la circumferència que té com a equació $x^2+y^2+6x-6y+9=0$. Considereu el punt $P(3,1)$. Trobeu la posició d'aquest punt respecte de la circumferència. Trobeu el punt més proper i el més llunyà a P que estiguin sobre la circumferència.

5) Trobeu la posició relativa de la recta $2x - 3y + 4 = 0$ i la circumferència de centre $(4,3)$ i radi 5.

6) Des d'un punt exterior a una circumferència es poden traçar dues rectes tangents a la mateixa circumferència. Considereu el punt $P(-2,0)$ i la

circumferència $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. Traceu les rectes tangents i determineu-ne les equacions.

7) Considereu les circumferències $C : x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$ i C' de centre $(3, 7)$ i que passa pel punt $(-2, 7)$. Trobeu la posició relativa de les dues circumferències.

8) Determineu k perquè la recta $3x + y + k = 0$ sigui tangent a la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Hi ha més d'una solució? Raoneu la resposta.

9) Donats els punts $(0, 2)$ i $(0, -2)$, escriviu l'equació general de totes les circumferències que passin per aquests punts.

10) Donades les circumferències $x^2 + y^2 = 9$ i $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 15 = 0$, calculeu l'equació de la secant comuna a les dues.

11) Calculeu l'equació de la circumferència que passa per $P(3, -2)$ i és tangent a la recta $x - y + 3 = 0$ en el punt $Q(1, 4)$.

10.9 Solucions

1) $(x-2)^2+y^2=4$

2) $C(0,0)$, $r=4)$

3) $((x+3)^2+(y-1)^2=16$

4) $(x-1)^2+(y-2)^2=8$

5) a) $C(4,3)$, $r=\sqrt{5}$
   b) $C(0,-3)$, $r=4$
   c) $(\frac{5}{6},-\frac{3}{2}), r=\frac{5}{6}$

6) a) No.
   b) No.
   c) Sí.
   d) No.
   e) No

7) $C(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{2}$

8) $x^2+y^2+\frac{7x}{3}-\frac{7y}{3}-2=0$

9) $x^2+y^2=4$

10) $(x-3)^2+(y-4)^2=(\frac{16}{5})^2$

11) $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{9}{4})^2=(\frac{7\sqrt{2}}{8})^2$

12) a) $y=-x+1$
    b) $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$
    c) $y=x-2\sqrt{3}$

13) $k=\pm 2$

14) $y=x+2,\ y=-7x+2$

Exercicis de repàs

1) $(x-\frac{5}{6})^2+(y-\frac{5}{6})^2=\frac{50}{36}$

2) a) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$
   b) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

3) $(x-\frac{11}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{50}{4}$

4) $(-\frac{30+9\sqrt{10}}{10},\frac{90-9\sqrt{10}}{30})$; $(\frac{-30-9\sqrt{10}}{10},\frac{90+9\sqrt{10}}{30})$

5) Secants.

6) $y=0$, $y=\frac{20x+40}{21}$

7) Secants.

8) $k=-9\pm 3\sqrt{10}$

9) $x^2+y^2+mx-4=0$

10) $y=3-x$

11) $x^2+y^2-7x-3y+2=0$

Notes: