



Universitat de Girona

**REDUCCIÓ DE VIBRACIONS RESIDUALS EN  
MOVIMENTS TRANSITORIS. DEFINICIÓ DE  
LLEIS DE MOVIMENT PER MITJÀ DE CORBES  
B-SPLINE**

**Joaquim M. VECIANA FONTANET**

**ISBN: 978-84-691-0468-2**  
**Dipòsit legal: GI-I 626-2007**



**Universitat de Girona**

Escola Politècnica Superior

Departament d'Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial

**Reducció de vibracions residuals en  
moviments transitoris. Definició de lleis de  
moviment per mitjà de corbes B-spline**

Memòria presentada per Joaquim M. Veciana Fontanet,  
per optar al grau de Doctor per la Universitat de Girona

Girona, 2007

Director: Dr. Salvador Cardona Foix



SALVADOR CARDONA FOIX i JOAQUIM DE CIURANA,  
Professors del Departament d'Enginyeria Mecànica de la Universitat Politècnica de Catalunya i del Departament d'Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial de la Universitat de Girona respectivament,

CERTIFIQUEM que la memòria que porta per títol “*Reducció de vibracions residuals en moviments transitoris. Definició de lleis de moviment per mitjà de corbes B-spline*” recull el treball realitzat, sota la nostra direcció i tutoria, per en Joaquim M. Veciana Fontanet, Enginyer Industrial, i que constitueix la seva Tesi per optar al grau de Doctor per la Universitat de Girona.

I per a que en prengueu coneixement i tingui els efectes que correspongui, signem el present certificat.

Girona, Setembre de 2007

Director: Dr. Salvador Cardona Foix  
Departament d'Enginyeria Mecànica,  
UPC

Tutor: Dr. Joaquim de Ciurana  
Departament d'Enginyeria Mecànica i de  
la Construcció Industrial, UdG



*A la meva família*



Amb aquestes paraules vull fer explícit el meu agraïment a totes les persones que m'han ajudat i que han fet possible la realització d'aquest treball. En especial:

al director d'aquesta tesi, Dr. Salvador Cardona, per la confiança dipositada en aquest estudi, pel seu valuós assessorament i suport, i per la seva constant dedicació

als companys del Departament d'Enginyeria Mecànica de la Universitat Politècnica de Catalunya i de l'empresa Hewlett Packard, pel seu recolzament

al personal del Departament d'Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial de la Universitat de Girona, per la gestió acadèmica d'aquesta tesi

a l'Ana i a l'Eric, a la meva família i amics, per estar sempre al meu costat





# Contingut

<b>Resum</b>	<b>xiii</b>
<b>Resumen</b>	<b>xv</b>
<b>Abstract</b>	<b>xvii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introducció</b>	<b>1</b>
1.1 Motivació de l'estudi .....	1
1.2 Objectius .....	3
1.3 Estructura de la tesi doctoral .....	4
<b>2 Estat de l'art dels procediments actuals</b>	<b>7</b>
2.1 Mètodes de definició de lleis de moviment en mecanismes lleva-palpador .....	7
2.1.1 Mètodes tradicionals .....	8
2.1.2 Corbes utilitzades en el Disseny Geomètric Assistit per Ordinador .....	14
2.2 Mètodes de definició de lleis de moviment per minimitzar vibracions residuals .....	16
2.2.1 Generació de senyals de comandament per mitjà de sèries trigonomètriques ..	17
2.2.2 Perfilat de senyals de comandament per convolució amb un tren d'impulsos ..	17
2.2.3 Definició de lleis de moviment per filtratge del senyal de comandament .....	19
2.2.4 Definició de lleis de moviment per inversió de la dinàmica del sistema .....	21
2.3 Control actiu de vibracions .....	22
2.3.1 Control actiu realimentat ( <i>feedback control</i> ) .....	22
2.3.2 Control actiu per avançament o prealimentat ( <i>feedforward control</i> ) .....	23

<b>3</b>	<b>Eines de disseny i caracterització</b>	<b>25</b>
3.1	Eines de disseny de lleis de moviment .....	25
3.1.1	Corbes de Bézier .....	26
3.1.2	Corbes B-spline .....	34
3.2	Eines de caracterització de vibracions .....	44
3.2.1	Classificació de les vibracions .....	44
3.2.2	Anàlisi de senyals. Domini freqüencial .....	45
3.2.3	Resposta dels sistemes lineals .....	50
<b>4</b>	<b>Caracterització del sistema d'estudi</b>	<b>57</b>
4.1	Sistema lineal vibratori .....	58
4.1.1	Modelització .....	58
4.1.2	Exemple d'aplicació .....	59
4.2	Senyal d'entrada. Aspectes funcionals de les lleis de moviment .....	61
4.2.1	Transitoris de moviment. Tipologies i hipòtesis de funcionament .....	61
4.2.2	Senyal representatiu del transitori .....	64
4.2.3	Senyals transitoris simètrics. Propietats .....	65
4.3	Resposta del sistema .....	71
4.3.1	Descomposició modal .....	72
4.3.2	Vibració residual. Caracterització .....	74
<b>5</b>	<b>Definició de lleis de moviment</b>	<b>79</b>
5.1	Relació de la vibració residual amb el contingut freqüencial d'una llei de moviment transitòria .....	79
5.1.1	Sistemes amb esmorteïment nul .....	81
5.1.2	Sistemes amb esmorteïment no nul .....	83
5.2	Definició de lleis de moviment per convolució temporal de polsos .....	83
5.2.1	Mètode genèric .....	83
5.2.2	Robustesa enfront de la variació de paràmetres del sistema .....	85
5.2.3	Validesa del mètode en sistemes vibratoris amb esmorteïment no nul .....	89
5.2.4	Aplicació a sistemes de $n$ graus de llibertat vibratoris .....	93
5.2.5	Extensió del mètode per a l'obtenció d'altres lleis de moviment .....	95
5.2.6	Avantatges i limitacions del mètode .....	98
5.3	Síntesi de lleis de moviment amb corbes B-spline no paramètriques .....	101
5.3.1	Reducció de les vibracions residuals corresponents a un mode propi .....	102
5.3.2	Reducció de les vibracions residuals corresponents a dos modes propis .....	105

---

<b>6</b>	<b>Valoració de la capacitat dels actuadors per al seguiment de lleis de moviment</b>	<b>111</b>
6.1	Servomotors .....	112
6.2	Resposta freqüencial analitzada .....	113
6.2.1	Motors de corrent continu amb imants permanents .....	114
6.2.2	Motors de corrent altern, síncrons, amb imants permanents .....	116
<b>7</b>	<b>Experimentació</b>	<b>121</b>
7.1	Descripció del muntatge experimental .....	121
7.1.1	Conjunt mecànic .....	122
7.1.2	Sistema de control. Captació de dades .....	124
7.2	Modelització i ajust de paràmetres .....	126
7.2.1	Resposta freqüencial del motor .....	126
7.2.2	Resposta freqüencial del muntatge .....	128
7.2.3	Anàlisi modal. Raons d'esmoreïment .....	130
7.3	Assajos i resultats .....	131
7.3.1	Primera sèrie d'assajos .....	131
7.3.2	Segona sèrie d'assajos .....	137
7.3.3	Resultats .....	140
<b>8</b>	<b>Conclusions i extensions</b>	<b>141</b>
8.1	Conclusions .....	141
8.2	Aportacions .....	145
8.3	Extensions .....	146
<b>9</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>147</b>



# Resum

En nombroses aplicacions industrials o domèstiques, els sistemes mecànics poden tenir un comportament vibratori o oscil·latori funcionalment perceptible per causa de les inèrcies i rigideses dels elements que els componen. En el funcionament normal d'aquests sistemes es poden produir excitacions transitòries provocades per l'actuació de forces externes o bé per moviments de masses o inèrcies internes que sovint posen de manifest aquest comportament vibratori. Normalment, les vibracions així generades segueixen presents al acabar el transitori, i poden provocar efectes negatius en la funció que ha de complir el mecanisme. Aquestes vibracions lliures que resten al acabar el transitori s'anomenen vibracions residuals.

Els estudis fets sobre el tema per altres autors es centren principalment en dues formes de resoldre el problema. La primera correspon al conjunt de mètodes que es basen en la definició o modificació prèvia del senyal d'excitació o control. La segona correspon al conjunt de tècniques basades en el control actiu de vibracions.

El mètode que es proposa en aquesta tesi es pot incloure dintre del primer conjunt, ja que té com a objectiu principal la generació o síntesi de senyals transitoris d'excitació o control en sistemes mecànics per minimitzar l'aparició de vibracions residuals. Addicionalment, els senyals generats poden complir dos requeriments funcionals en l'aplicació desitjada, és a dir, dues condicions definides per l'usuari respecte a la funció que ha de fer el mecanisme. Són requeriments funcionals, per exemple, la distància recorreguda en el transitori, el temps de durada d'aquest o la velocitat assolida. Els sistemes objecte d'estudi que es consideren són aquells que es poden modelitzar com a sistemes lineals discrets de  $n$  graus de llibertat vibratoris i que es poden descriure amb equacions de moviment de paràmetres constants.

El desenvolupament del mètode es fonamenta en la relació existent entre el contingut freqüencial d'un senyal transitori d'excitació, i la vibració residual generada, segons sigui l'esmoreïment del sistema. Es demostra que, per a un esmoreïment nul, no es

genera vibració residual si el contingut freqüencial del senyal d'excitació és nul en aquelles freqüències que caracteritzen el sistema, o freqüències dels modes propis. Arran d'aquesta relació, i aprofitant les propietats de la transformada de Fourier, es concreta el mètode en la generació de lleis de moviment per mitjà de la convolució temporal de polsos de durada convenientment ajustada per satisfer la condició descrita. S'observa que les lleis de moviment així obtingudes són efectives fins a raons d'esmoreïment de 0,3, cosa que permet emprar-les amb eficàcia en la majoria de sistemes vibratoris. A més a més, aquestes lleis tenen la característica adicional d'estar formades per concatenació de trams polinòmics algebraics, la qual cosa les fa molt aptes per ser implementades en entorns numèrics, per mitjà de l'esquema B-spline.

Tot i que el mètode es desenvolupa dintre de l'àrea de coneixement de l'Enginyeria Mecànica, aquest i les conclusions que se n'extreuen són aplicables a qualsevol sistema vibratori si té un comportament lineal en el seu rang d'actuació i les equacions que el descriuen són de paràmetres constants.

Es conclou aquest estudi amb una comprovació experimental del mètode. Previ a la descripció dels assajos fets, s'explica com fer una valoració de la capacitat que tenen els motors més utilitzats, entre els anomenats servomotors, per al seguiment de senyals de comandament –lleis de moviment– en base a la resposta freqüencial del motor entre la variable de control i la resposta mecànica. S'analitzen, amb aquesta finalitat, els motors de corrent continu i els motors de corrent altern síncrons, ambdós d'imants permanents. Finalment, s'il·lustra el disseny i construcció d'un muntatge experimental mecànic de tres graus de llibertat rotatoris, dos dels quals tenen comportament vibratori, i el tercer està governat per mitjà d'un senyal de control i d'un actuador. Es comprova la validesa del mètode amb la bondat dels resultats obtinguts de diversos assajos on es busca la reducció de vibracions residuals corresponents a un o als dos modes propis a la vegada.

# Resumen

En numerosas aplicaciones industriales o domésticas, los sistemas mecánicos pueden tener un comportamiento vibratorio u oscilatorio funcionalmente perceptible debido a las inercias y rigideces de los elementos que los componen. En el funcionamiento normal de estos sistemas se pueden producir excitaciones transitorias provocadas por la actuación de fuerzas externas o movimientos de masas o inercias internas que frecuentemente ponen de manifiesto este comportamiento vibratorio. Normalmente, las vibraciones así generadas siguen presentes al acabar el transitorio, y pueden provocar efectos negativos en la función que ha de cumplir el mecanismo. Estas vibraciones libres que permanecen en el sistema al acabar el transitorio se denominan vibraciones residuales.

Los estudios hechos por otros autores sobre esta materia se centran principalmente en dos líneas de investigación. La primera corresponde al conjunto de métodos basados en la definición o modificación previa de la señal de excitación o control. La segunda corresponde al conjunto de técnicas basadas en el control activo de vibraciones.

El método propuesto en esta tesis se puede incluir dentro de la primera línea de investigación ya que tiene como objetivo principal la generación o síntesis de señales transitorias de excitación o control en sistemas mecánicos con el fin de minimizar la aparición de vibraciones residuales. Adicionalmente, las señales generadas pueden cumplir dos requerimientos funcionales en la aplicación deseada, es decir, dos condiciones definidas por el usuario respecto a la función de diseño del mecanismo. Pueden ser requerimientos funcionales, por ejemplo, la distancia recorrida durante el transitorio, la duración de éste o la velocidad alcanzada. Los sistemas objeto de estudio que se consideran son aquellos que se pueden modelizar como sistemas lineales discretos de  $n$  grados de libertad vibratorios y que se pueden describir con ecuaciones de movimiento de parámetros constantes.



El desarrollo del método se basa en la relación existente entre el contenido frecuencial de una señal de excitación transitoria, y la vibración residual generada, según sea el amortiguamiento del sistema. Se demuestra que, con amortiguamiento nulo, no se genera vibración residual si el contenido frecuencial de la señal de excitación es nulo en aquellas frecuencias que caracterizan el sistema, o frecuencias de los modos propios. A partir de esta relación, y aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier, se concreta el método en la generación de leyes de movimiento por medio de la convolución temporal de pulsos de duración convenientemente ajustada para satisfacer la condición descrita. Se observa que las leyes de movimiento así obtenidas son efectivas hasta razones de amortiguamiento de 0,3, lo que permite emplearlas con eficacia en la mayoría de sistemas vibratorios. Además, estas leyes presentan la característica adicional de estar constituidas por tramos concatenados de polinomios algebraicos, lo que las hace muy adecuadas para ser implementadas en entornos numéricos, por medio del esquema B-spline.

Aunque el desarrollo del método se centra en el área de conocimiento de la Ingeniería Mecánica, éste y las conclusiones obtenidas son aplicables a cualquier sistema vibratorio si tiene un comportamiento lineal en su rango de actuación y las ecuaciones que lo describen tienen sus parámetros constantes.

Se ha concluido este estudio con una comprobación experimental del método. Como paso previo a la descripción de los ensayos realizados, se explica como valorar la capacidad que tienen los motores más usuales, entre los denominados servomotores, para el seguimiento de señales de control o consigna –leyes de movimiento– en base a la respuesta frecuencial del motor entre la variable de control y su respuesta mecánica. Se analizan, con esta finalidad, los motores de corriente continua y los motores de corriente alterna síncronos, ambos con imanes permanentes. Finalmente se ilustra el diseño y la construcción de un montaje experimental mecánico de tres grados de libertad rotatorios, dos de los cuales presentan comportamiento vibratorio, y el tercero está gobernado por medio de una señal de control y un motor de corriente continua. Se comprueba la validez del método con la bondad de los resultados obtenidos de diversos ensayos donde se busca la reducción de vibraciones residuales correspondientes a uno o a los dos modos propios simultáneamente.

# Abstract

In many industry or home applications, mechanical systems may have a vibratory or oscillatory behavior, functionally noticeable, due to the inertia and stiffness of the elements that make them up. During normal operation of these systems, transient excitations may occur due to external forces or movement of internal inertias, which normally raise this vibratory reaction. Usually, such generated vibrations remain in the system after transient excitation finishes, and may imply negative effects in the mechanism's intended function. Those free vibrations that remain after the transient are called residual vibrations.

Investigations done by other authors are mainly focused on two ways of solving the issue. The first one includes all the methods based on the definition or shaping of the excitation or command signal. The second one includes all the active-control based techniques.

The proposed method developed in this thesis can be included within the first group since its main objective is the synthesis or generation of excitation or command signals for mechanical systems in order to minimize residual vibration occurrence. In addition, generated signals are able to achieve two functional requirements in the desired application, i.e., two conditions defined by the user related to the designed function of the mechanism. Functional requirements are, for example, the distance moved during the transient, its execution time or the achieved velocity. Analyzed systems are those which can be modeled as discrete linear systems with  $n$  vibratory degrees of freedom, and can be described with constant parameter motion equations.

The method development is based on the relationship between the frequency contents of the transient signal and the residual vibration generated, depending on the system damping. It is demonstrated that there is no residual vibration for a system without damping, when the frequency contents of the input signal is zero at the frequencies of the system natural modes. From this relation, and taking advantage of the Fourier

transform properties, the method is specified to generate motion laws through the pulses' time convolution with their duration adjusted to achieve the described condition. It is remarkable that such generated motion laws are effective up to a 0,3 damping ratio, which make them useful for a huge range of vibratory systems. In addition, these motion laws are made up of algebraic polynomial pieces linked together. This particular characteristic makes them very suitable for implementation with numerical calculus through the B-spline scheme.

Although the new method is developed within the realm of Mechanical Engineering knowledge, the method itself and its conclusions are applicable to any vibratory system if it has linear performance within its operation range and can be described with constant parameter equations.

This study finishes with an experimental check of the method developed. Before doing a description of the tests made, an explanation is given on how to estimate the capability of the more usual motors, within the group called servomotors, to follow a command input or motion law. This estimation is based on the analysis of the motor frequency response to variables between the control input and the mechanical output. The analyzed motors are direct current and synchronous, both with permanent magnet configuration. Finally, the design and assembly of the mechanical test bed, which has three rotatory degrees of freedom, is explained. Two of them have vibratory behavior, and the third is commanded through a control input signal and a direct current motor. The validity of the method is confirmed with the goodness of the results obtained from several tests during which a residual vibration reduction is sought from one, or both simultaneous natural modes.

# Nomenclatura

$a, b$	rang de freqüències
$a, b, c$	nombres sencers
$a_i$	àrea $i$ -èsima
$a_i, b_i$	coeficient $i$ -èsim d'una equació diferencial lineal
$a_{ij}$	coeficient $i$ -èsim del polinomi que defineix el tram $j$ -èsim d'una llei de moviment
$a_k, b_k$	coeficient $k$ -èsim d'una funció de transferència discreta
$a_k, b_k, c_k$	coeficient del terme $k$ -èsim d'una sèrie de Fourier
$a_{\text{màx}}$	acceleració màxima
$a_1, a_2, a_3, b$	coeficients auxiliars
$b_i, c_i$	ordenada de Bézier $i$ -èsima
$b_i$	punt de control $i$ -èsim en una corba de Bézier
$b_{\text{màx}}, b_{\text{mín}}$	ordenades màxima i mínima d'una corba de Bézier
$b(\cdot), c(\cdot)$	funció que descriu una corba de Bézier
$\mathbf{b}(u)$	vector que té per components corbes de Bézier expressades en funció de $u$
$b_j(u)$	funció que descriu el tram $j$ -èsim d'una llei de moviment
$b_i^k(u)$	valor de la iteració $k$ -èsima en l'obtenció del valor de la funció $b(u)$ a partir de $b_i$
$c$	constant d'esmoreïment

---

$c$	error màxim en percentatge de vibració residual
$c_a$	constant d'esmoreïment en forma modal
$c_i$	constant d'esmoreïment $i$ -èsima
$c_i$	coeficient $i$ -èsim d'un polinomi trigonomètric en la base de Fourier
$d_i$	ordenada del punt de control $i$ -èsim en una corba B-spline
$d_i$	punt de control $i$ -èsim en una corba B-spline
$d_0$	radi de base d'una lleva
$d(\theta)$	desplaçament d'un palpador funció de l'angle $\theta$ de la lleva
$d_i^k(u)$	valor de la iteració $k$ -èsima en l'obtenció del valor de la funció $d(u)$ a partir de $d_i$
$e$	valor de contingut freqüencial
$e(t)$	senyal de resposta del sistema en sistemes de control actiu
$f$	freqüència
$f_i$	valor $i$ -èsim que pren la freqüència
$f_i$	freqüència pròpia $i$ -èsima
$f_{\text{mcd}}$	valor de freqüència que correspon al màxim comú denominador d'altres valors
$f_i(t)$	funció integral temporal de la funció $y_i(t)$
$f, f(\cdot)$	vector d'excitació
$h$	distància màxima recorreguda per un palpador
$h(t)$	resposta impulsional d'un sistema
$i_a$	corrent o intensitat del debanat d'excitació en un motor de corrent continu
$i_f$	corrent o intensitat del debanat de camp en un motor de corrent continu
$k$	constant de rigidesa
$k$	constant constructiva en un motor de corrent continu
$k_a$	constant de rigidesa en forma modal
$k_f$	constant de rigidesa dels elements que representen un palpador
$k_i$	constant de rigidesa $i$ -èsima
$k_s$	constant de rigidesa de l'element que garanteix el contacte lleva-palpador
$m$	massa

---

$m, n$	ordre d'una equació diferencial lineal
$m_a, m_b$	massa en forma modal
$m_i$	massa $i$ -èsima
$n$	graus de llibertat d'un sistema
$n$	grau d'un polinomi
$n$	índex
$n_i$	ordre de la corba de Bézier $i$ -èsima
$p$	nombre de pols d'un motor de corrent altern síncron
$p_i$	vector propi $i$ -èssim
$q, x$	vector de coordenades
$r$	radi d'un palpador tipus corró
$r$	multiplicitat d'un node en una corba B-spline
$s$	variable independent de domini no unitari en corbes de Bézier
$s, s'$	variable complexa en la transformada de Laplace
$s_i$	coeficient $i$ -èsim d'un polinomi trigonomètric en la base de Fourier
$s_{i \text{ màx}}$	valor superior del domini de definició $i$ de la variable $s$
$s_0, s_1$	valors inferior i superior del domini de definició de la variable $s$
$t$	temps
$t_i$	valor $i$ -èsim que pren la variable temporal $t$
$t_r$	temps on l'amplitud de la vibració residual és màxima
$t_{ri}$	durada del pols $i$ -èsim amb què s'obté el senyal temporal $y_r(t)$
$t_0, t_f$	valors inicial i final de la variable temporal
$u$	paràmetre del domini unitari $[0,1]$
$u$	vector o seqüència de nodes en una corba B-spline
$u_i$	node $i$ -èsim d'una corba B-spline
$v$	velocitat de translació
$v_f$	velocitat final de translació
$v_f$	tensió o voltatge del debanat de camp en un motor de corrent continu
$v_t$	tensió o voltatge del debanat d'excitació en un motor de corrent continu

$x_i$	coordenada generalitzada $i$ -èsima
$x_p$	amplitud d'un senyal de resposta $x(t)$ harmònic
$x_r$	terme $r$ -èsim d'un senyal discret
$x_0$	valor numèric de referència d'una magnitud
$x(t)$	funció temporal genèrica
$x, x(t)$	senyal de resposta o de sortida d'un sistema
$x_i, x_i(t)$	senyal de resposta o de sortida $i$ -èsima d'un sistema
$x_i(t)$	senyal de resposta o de sortida d'un sistema a un impuls situat a $t = \tau$
$y_p$	amplitud d'un senyal d'excitació $y(t)$ harmònic
$y, y(t)$	senyal d'excitació o d'entrada a un sistema
$y(u)$	funció que descriu una corba B-spline no paramètrica
$y_c(t)$	senyal de comandament en un sistema de control
$y_i, y_i(t)$	senyal d'excitació o d'entrada $i$ -èsima a un sistema
$z$	variable complexa de la transformada en pla $z$
$z_{rel}$	coordenada generalitzada relativa
$z_{i\ rel}$	coordenada generalitzada relativa $i$ -èsima
$z_{rel0}, z_{rel\ m}$	posició relativa inicial i final en un transitori
$\dot{z}_{rel0}, \dot{z}_{rel\ m}$	velocitat relativa inicial i final en un transitori
$\ddot{z}_{rel0}, \ddot{z}_{rel\ m}$	acceleració relativa inicial i final en un transitori
$z_{rel}(t)$	lleï de moviment corresponent a la coordenada relativa $z_{rel}$
$z_{rel\ i}(t)$	lleï de moviment $i$ -èsima corresponent a la coordenada relativa $z_{rel}$
$A$	amplitud d'un senyal
$A_i$	amplitud del senyal $i$ -èsim
$A_{ri}$	amplitud del pols $i$ -èsim amb què s'obté el senyal temporal $y_i(t)$
$B_i^n(u)$	polinomi de Bernstein $i$ -èsim de grau $n$
$C$	coeficient constant
$C$	centre de rotació d'un corró
$C$	matriu d'esmoreïments
$C^r$	grau de continuïtat $r$ -èsim d'una funció

$C_n^i$	coeficient $i$ -èsim d'un polinomi de Bernstein de grau $n$
$\mathbf{D}$	matriu dinàmica
$E_e$	tensió alterna induïda del circuit elèctric equivalent d'un motor de corrent altern síncron
$E(t)$	senyal de comandament a l'actuador en sistemes de control actiu
$E_x(t)$	energia associada al senyal $x(t)$
$F(t)$	força
$\mathbf{F}(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de força $F(t)$
$F_p(t)$	senyal corresponent a la força primària en sistemes de control actiu
$F_s(t)$	senyal corresponent a la força secundària en sistemes de control actiu
$\mathbf{H}(s)$	funció de transferència
$\mathbf{H}(z)$	funció de transferència discreta
$H(\omega)$	mòdul de la funció de resposta freqüencial $\mathbf{H}(\omega)$
$\mathbf{H}(f), \mathbf{H}(\omega)$	funció de resposta freqüencial
$\mathbf{H}_i(\omega)$	funció de resposta freqüencial $i$ -èsima
$I$	interval genèric dels $L$ intervals del domini d'una corba B-spline
$I$	magnitud d'un impuls
$I_a$	corrent d'excitació de la fase $a$ en un motor altern síncron
$I_i$	moment axial d'inèrcia del rotor $i$ -èsim
$I_m$	moment d'inèrcia del rotor del motor
$I_c$	moment d'inèrcia de la càrrega reduïda a l'eix del motor
$\mathbf{I}(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de corrent $i(t)$
$J$	punt de contacte lleva-palpador
$\mathbf{K}$	matriu de rigideses
$K_e$	constant constructiva en un motor de corrent altern síncron
$K_v$	constant de voltatge d'un motor de corrent continu
$L$	nombre de trams polinòmics que formen una corba B-spline
$L_a$	inductància del debanat d'excitació en un motor de corrent continu
$L_d$	inductància de sortida equivalent del conjunt font d'alimentació i amplificador



$L_e$	inductància del circuit elèctric equivalent d'un motor de corrent altern síncron
$L_f$	inductància del debanat de camp en un motor de corrent continu
$M, N$	nombre de termes de les funcions de transferència de filtres digitals
$\mathbf{M}$	matriu de masses
$N$	nombre de termes d'una transformada discreta de Fourier
$N_i^n(u)$	funció base $i$ -èsima en una corba B-spline de grau $n$
$O$	centre de rotació d'una lleva
$P$	percussió d'una força $F(t)$
$\mathbf{P}$	matriu de canvi de base
$P_m$	potència mecànica generada per un motor elèctric
$\mathbf{P}(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de pressió $p(t)$
$P_x(t)$	potència associada al senyal $x(t)$
$R_a$	resistència del debanat d'excitació en un motor de corrent continu
$R_d$	resistència de sortida equivalent del conjunt font d'alimentació i amplificador
$R_f$	resistència del debanat de camp en un motor de corrent continu
$R_s$	resistència del debanat d'excitació en un motor de corrent altern síncron
$S_0$	valor constant d'una llei de desplaçament d'un palpador
$S(\cdot)$	llei de desplaçament d'un palpador funció de $(\cdot)$
$S_j(\theta)$	tram $j$ -èsim d'una llei de desplaçament d'un palpador funció de l'angle de la lleva $\theta$
$T$	període d'una funció periòdica
$T_i$	període de la $i$ -èsima funció periòdica
TF	transformada de Fourier
TL	transformada de Laplace
$\mathbf{U}(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de voltatge $u(t)$
$V_a$	tensió d'excitació de la fase $a$ en un motor altern síncron
$\mathbf{V}(\omega)$	transformada de Fourier d'un senyal de velocitat $v(t)$
$\mathbf{V}_i(f)$	transformada de Fourier d'un senyal de voltatge o tensió d'excitació $v_i(t)$

---

$X_e$	reactància del circuit elèctric equivalent d'un motor de corrent altern síncron
$X_k$	terme $k$ -èsim de la transformada discreta de Fourier d'un senyal discret $x$
$X(f), X(\omega)$	transformada de Fourier de $x(t)$
$X(s)$	transformada de Laplace de $x(t)$
$X_i(f), X_i(\omega)$	transformada de Fourier de $x_i(t)$
$X_i(\cdot)$	transformada de Laplace de $x(t)$ quan $x(t)$ és nul·la per a $t < 0$
$Y(f), Y(\omega)$	transformada de Fourier de $y(t)$
$Y(\omega)$	admitància d'un sistema
$Y_i(f), Y_i(\omega)$	transformada de Fourier de $y_i(t)$
$Z(\omega)$	impedància d'un sistema
$Z_{\text{rel}}(f), Z_{\text{rel}}(\omega)$	transformada de Fourier de $z_{\text{rel}}(t)$
$\alpha$	part real dels límits d'integració genèrics en una transformada de Laplace
$\alpha$	angle d'un fasor
$\alpha, \beta$	coeficients constants
$\beta_e$	angle que forma el camp magnètic del rotor respecte a l'origen d'angles fix a l'estator, definit per la fase $a$ , en un motor de corrent altern síncron
$\beta_{0e}$	angle que forma el camp magnètic del rotor amb el de l'estator (angle de càrrega) en un motor de corrent altern síncron
$\delta(t)$	funció impuls o delta de Dirac
$\varepsilon$	coordenada generalitzada relativa modal
$\varepsilon(t)$	senyal d'excitació o d'entrada a un sistema, en forma modal
$\varepsilon_i, \varepsilon_i(t)$	senyal d'excitació o d'entrada $i$ -èsima a un sistema, en forma modal
$\varepsilon(f), \varepsilon(\omega)$	transformada de Fourier de $\varepsilon(t)$
$\zeta$	raó d'esmoreïment
$\zeta_i$	raó d'esmoreïment $i$ -èsima
$\theta$	angle girat per una lleva
$\theta, \tau$	variable temporal auxiliar
$\lambda_i$	valor propi $i$ -èsim
$\xi$	coordenada generalitzada modal
$\xi$	vector de coordenades modals

$\zeta_i$	abscissa de Greville del punt de control $i$ -èsim d'una corba B-spline
$\zeta_r \text{ màx}$	amplitud de la vibració residual per a un senyal d'excitació $\varepsilon(t)$
$\zeta_r \text{ màx } i$	amplitud de la vibració residual $i$ -èsima per a un senyal d'excitació $\varepsilon(t)$
$\zeta_1 \text{ màx}$	amplitud de la vibració residual per a un senyal d'excitació tipus impuls de magnitud $I$
$\zeta_1 \text{ màx } i$	amplitud de la vibració residual $i$ -èsima per a un senyal d'excitació tipus impuls de magnitud $I$
$\zeta(t)$	senyal de resposta o de sortida d'un sistema, en forma modal
$\zeta_i(t)$	senyal de resposta o de sortida $i$ -èsima d'un sistema, en forma modal
$\zeta(f), \zeta(\omega)$	transformada de Fourier de $\zeta(t)$
$\varphi, \psi$	angle de fase
$\boldsymbol{\varphi}$	vector de coordenades
$\varphi_i$	coordenada generalitzada $i$ -èsima
$\varphi_k$	angle de fase del terme $k$ -èsim d'una sèrie de Fourier
$\varphi_{\text{rel}}$	coordenada generalitzada relativa
$\varphi_i(t)$	senyal de resposta o de sortida d'un sistema corresponent a la coordenada $\varphi_i$
$\varphi_i(f)$	transformada de fourier de $\varphi_i(t)$
$\varphi_{\text{rel}}(t)$	lleis de moviment corresponent a la coordenada relativa $\varphi_{\text{rel}}$
$\varphi_{\text{rel}}(f)$	transformada de fourier de $\varphi_{\text{rel}}(t)$
$\varphi_{\text{rel c}}(t)$	senyal de comandament corresponent a la coordenada relativa $\varphi_{\text{rel}}$
$\varphi_{\text{rel c}}(f)$	transformada de fourier de $\varphi_{\text{rel c}}(t)$
$\varphi(\omega_i)$	argument d'una funció de resposta freqüencial $\mathbf{H}(\omega)$ en $\omega_i$
$\omega$	freqüència angular
$\omega_d$	freqüència angular d'oscil·lació
$\omega_i$	valor $i$ -èsim que pren la freqüència angular
$\omega_m$	velocitat angular del rotor d'un motor
$\omega_s$	pulsació de la tensió d'alimentació de l'estator d'un motor de corrent altern síncron
$\omega_0$	freqüència angular pròpia
$\omega_{s0}$	pulsació de referència de la tensió d'alimentació de l'estator d'un motor de corrent altern síncron

---

$\omega_m(f)$	transformada de Fourier de $\omega_m(t)$
$\omega_s(f)$	transformada de Fourier de $\omega_s(t)$
$\Gamma_c$	parell resistent de la càrrega reduït a l'eix del motor
$\Gamma_m$	parell motor
$\Gamma_r$	parell de les resistències passives reduït a l'eix del motor
$\Delta s_i$	interval de definició de la corba de Bézier $i$ -èsima
$\phi$	flux magnètic
$(\dot{\phantom{x}})$	derivada temporal de $(\phantom{x})$
$(\cdot)'$	derivada de $(\cdot)$ respecte al paràmetre
$\int(\cdot)$	integral de $(\cdot)$ respecte al paràmetre
$(\cdot) _s$	producte de les matrius $(\cdot)$ simplificat
$(\cdot) \otimes (\cdot)$	convolució de dos senyals $(\cdot)$



## CAPÍTOL 1

# Introducció

La present tesi doctoral, que porta per títol *Reducció de vibracions residuals en moviments transitoris. Definició de lleis temporals amb corbes B-spline*, s'emmarca dins de l'àmbit de la mecànica de vibracions i, concretament, en l'estudi de les anomenades vibracions residuals –vibracions lliures observades en sistemes vibratoris després que una excitació transitòria hi actuï– i com reduir-les modificant aquesta excitació transitòria per tal de disminuir-ne els efectes, normalment no desitjats.

En aquest capítol s'exposen, en primer lloc, la motivació tecnològica que ha portat a fer aquesta investigació i el seu àmbit d'aplicació, il·lustrant-t'ho amb alguns exemples coneguts. A continuació es proposen els objectius a assolir, els quals delimiten l'abast de l'estudi realitzat i, finalment, es detalla quina és l'estructura de la tesi doctoral amb una breu descripció del contingut de cada capítol.

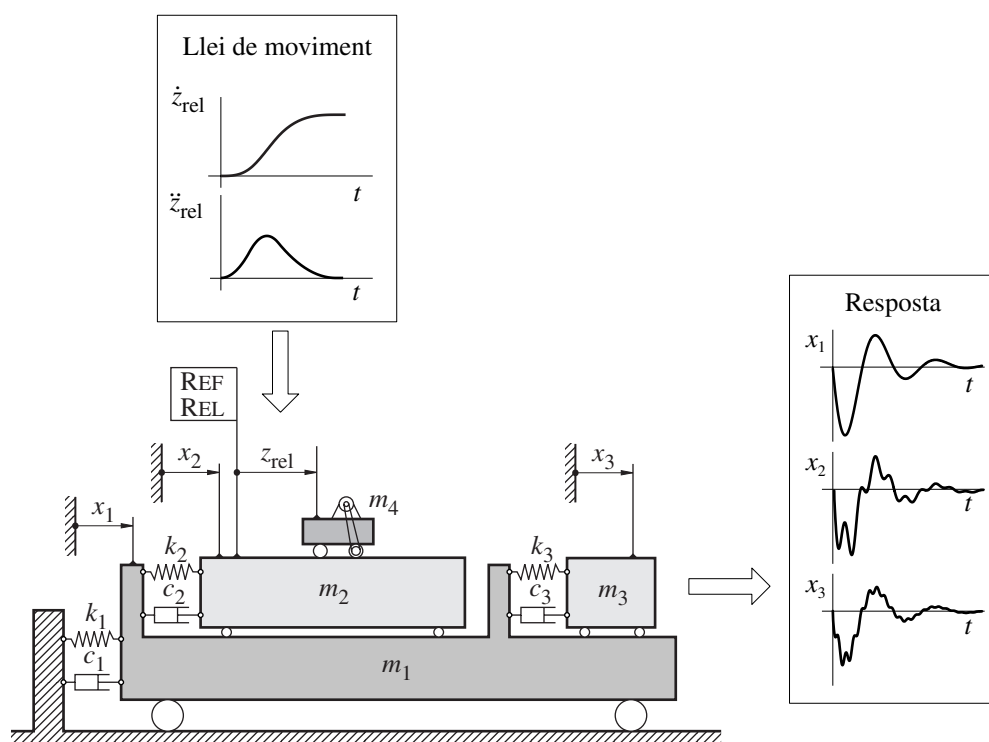
### 1.1 MOTIVACIÓ DE L'ESTUDI

En nombroses aplicacions industrials o domèstiques, els sistemes mecànics poden tenir un comportament vibratori o oscil·latori funcionalment perceptible, normalment perquè els sòlids que els componen o els enllaços que uneixen aquests sòlids tenen rigideses prou baixes. Aquesta manca de rigidesa pot ser desitjada pel dissenyador, com és el cas d'una màquina suportada sobre elements d'aïllament elàstics, o bé no desitjada però no evitable, com és el cas de la rigidesa longitudinal del cable d'un ascensor.

En el funcionament normal d'aquests sistemes mecànics es poden produir excitacions transitòries, provocades per l'actuació de forces externes o bé per moviments de masses o inèrcies internes, que posen de manifest el comportament vibratori del sistema. En la Figura 1.1 es mostra un exemple de generació de vibracions deguda a l'excitació causada pel moviment d'una massa  $m_4$ , al seguir una determinada llei de moviment

$\dot{z}_{rel}(t)$ . Aquesta llei representa un transitori d'engegada d'aquesta massa, amb la consegüent excitació d'alguns o tots els modes propis de vibració que caracteritzen el sistema.

Algunes aplicacions que poden il·lustrar la situació descrita són, per exemple, el moviment de les masses suspeses d'un pont grua, el moviment d'un carro porta eines en una màquina de control numèric, del palpador en una màquina de mesura per coordenades o d'un manipulador robòtic, l'engegada o aturada d'un ascensor o elevador, els moviments angulars del rotor d'un motor muntat sobre aïllaments elàstics, l'aplicació de lleis temporals de força en assajos de subconjunts mecànics o d'estructures, etcètera.



**Figura 1.1** Generació de vibracions deguda a l'excitació causada pel moviment de la massa  $m_4$  al seguir la llei de moviment indicada

En acabar aquests transitoris, en molts casos, les vibracions generades romanen de manera notable en el sistema, i poden provocar efectes negatius respecte a la funció que han de complir aquests mecanismes. S'anomenen *vibracions residuals* les vibracions romanents en el sistema un cop ha finalitzat l'excitació transitoria. Atenent a aquesta situació, la motivació principal d'aquest estudi és la reducció de vibracions residuals en sistemes dinàmics, per tal d'evitar aquests efectes negatius.

Els estudis que altres autors han fet per a la reducció de vibracions residuals es poden classificar, bàsicament, en dos grups. El primer grup, on s'enquadra l'aportació d'aquesta tesi, correspon als mètodes que es basen en la definició o modificació prèvia d'una llei temporal i la utilització d'aquesta com a senyal d'excitació transitoria.

Aquesta llei, a més de disminuir les vibracions descrites, ha de complir els anomenats requeriments funcionals, que són les condicions definides per l'usuari respecte a la funció que ha de fer el mecanisme. En l'exemple de la Figura 1.1 podrien ser requeriments funcionals: l'increment de velocitat relativa  $\Delta\dot{z}_{rel}$ , l'espai relatiu recorregut  $\Delta z_{rel}$ , el temps de durada del transitori, etcètera.

El segon grup correspon a les tècniques aparegudes en les darreres tres dècades i que estan basades en el control actiu de vibracions. En aquest cas no s'actua sobre la definició del senyal d'excitació, sinó que s'afegeixen elements auxiliars que contraresten la resposta del sistema o modifiquen algunes de les seves característiques. En sistemes vibratoris mecànics s'utilitzen, a tal efecte, actuadors auxiliars actius (actuadors electromagnètics, piezoelèctrics, hidràulics) o semiactius (molles i amortidors controlables).

### ***Àmbit d'aplicació***

Aquesta tesi està inclosa dintre dels estudis de l'àrea de coneixement d'Enginyeria Mecànica, i el seu desenvolupament s'ha concretat en la definició de lleis de moviment d'elements mecànics. Cal notar, però, que el mètode proposat i les conclusions que se n'extreuen són aplicables a qualsevol sistema vibratori si aquest té un comportament lineal en el seu rang d'actuació i les equacions que el descriuen tenen els paràmetres constants.

Per exemple, es pot pensar en un circuit elèctric oscil·lant format per impedàncies resistives, inductives i capacitives, on la llei d'excitació temporal transitòria correspon a un voltatge d'entrada, i la resposta correspon al corrent que hi circula; o en un sistema de control realimentat analògic de segon ordre que, a través d'uns guanys proporcional, integral i derivatiu, mou un motor elèctric de corrent continu. En aquest cas, la llei d'excitació temporal transitòria correspon, per exemple, a una llei de velocitat (senyal de comandament) i la resposta del sistema, a la velocitat de rotació del motor.

## **1.2 OBJECTIUS**

En aquest apartat s'explica quin és l'abast de la tesi doctoral, per mitjà de la descripció d'un objectiu principal genèric, i d'uns altres específics que el detallen.

L'objectiu principal d'aquest treball és la definició d'un mètode per generar o sintetitzar senyals transitoris d'excitació o control de sistemes mecànics amb comportament vibratori –modelitzables com a sistemes lineals discrets de diversos graus de llibertat– per minimitzar o reduir la generació de vibracions residuals. Aquest mètode ha de ser vàlid per a una gran majoria de sistemes lineals i els senyals generats han de poder complir dos requeriments funcionals en l'aplicació desitjada. Es concreta el seu desenvolupament en la definició de lleis de moviment de masses o inèrcies que es mouen sobre sistemes mecànics vibratoris, tot i que el seu abast s'estén a l'aplicació en sistemes dinàmics de qualsevol tipus.



Els objectius específics relacionats amb el sistema d'estudi que estableixen les condicions de contorn per al desenvolupament d'aquest treball són:

- Analitzar els aspectes funcionals d'una llei de moviment transitòria.
- Definir les hipòtesis que ha de complir el sistema vibratori a partir de les quals es desenvolupa el mètode proposat.
- Caracteritzar i definir una mètrica de les vibracions residuals en sistemes de  $n$  graus de llibertat vibratoris.

Els objectius específics relacionats amb el nucli teòric del mètode proposat són:

- Relacionar el contingut freqüencial d'un senyal d'excitació transitori amb la vibració residual generada.
- Obtenir un mètode genèric per reduir la generació de vibracions residuals basat en el contingut freqüencial del senyal d'excitació.
- Particularitzar el mètode en la generació de senyals definits a través de la concatenació de polinomis algebraics, que puguin complir dos requeriments funcionals.
- Desenvolupar un procediment per donar robustesa a aquests senyals enfront d'una possible variació de paràmetres del sistema.
- Introduir l'extensió del mètode per ser utilitzat amb senyals diferents als polinomis algebraics concatenats.
- Establir l'abast i limitacions en l'ús del mètode proposat.
- Elaborar un catàleg de corbes vàlides per a sistemes d'un i dos graus de llibertat vibratoris, fent servir eines pròpies del càlcul numèric.

Els objectius específics relacionats amb la comprovació experimental del mètode proposat són:

- Valorar la capacitat que tenen els actuadors més corrents emprats en sistemes de control per al seguiment de lleis de moviment.
- Dissenyar un banc d'assaig i comprovar la bondat del mètode a través de la realització d'assajos específics.

### **1.3 ESTRUCTURA DE LA TESI DOCTORAL**

El contingut de la tesi doctoral s'ha estructurat en nou capítols i dels set centrals se'n fa, en aquest apartat, una breu explicació.

En el capítol 2 s'aprofundeix en l'estat de l'art dels procediments actuals estudiant tres àrees diferents. En la primera es descriuen les eines més usuals a l'hora de definir lleis de moviment, i està basada en el camp que origina la síntesi de lleis de desplaçament en mecanismes lleva-palpador. S'esmenten les principals tècniques i autors en la utilització de mètodes tradicionals, com són els polinomis algebraics i trigonomètrics, i en la utilització de mètodes més moderns, com són les corbes que tenen per base els polinomis de Bernstein i les corbes B-spline.

Les altres dues àrees que es descriuen en el capítol 2 tenen per objectiu comú la reducció de vibracions residuals. Com s'ha dit, d'una banda existeixen els mètodes corresponents a la definició o modificació prèvia de senyals temporals per evitar la generació de vibracions residuals, i d'altra banda, els mètodes corresponents al control actiu de vibracions. La temàtica d'aquesta darrera vessant, tot i perseguir el mateix objectiu, queda força allunyada de l'abast de la tesi i, per tant, se'n fa una referència més breu.

El mètode proposat en aquest treball fa servir, per a la síntesi de lleis de moviment, les corbes B-spline, no paramètriques i no racionals, la qual cosa permet facilitar la seva implementació per mitjà del càlcul numèric. En el capítol 3, i a partir de la descripció de la síntesi de corbes de Bézier –funcions polinòmiques definides sobre la base de polinomis de Bernstein–, s'inclou una explicació detallada de la síntesi de corbes B-spline. El capítol 3 també inclou un resum de les teories bàsiques que s'utilitzen per al desenvolupament metodològic de la tesi a l'hora de caracteritzar les vibracions mecàniques, fent èmfasi en l'anàlisi de senyals en el domini freqüencial i la resposta dels sistemes lineals.

En el capítol 4 s'expliquen quines característiques ha de complir el sistema d'estudi les quals constitueixen les hipòtesis de partida per desenvolupar el mètode proposat. Es diferencien en aquest sistema els tres elements que el componen: el sistema vibratori, el senyal d'excitació o d'entrada i la resposta o senyal de sortida. El primer es caracteritza amb un sistema discret de  $n$  graus de llibertat vibratori i les hipòtesis fetes en la seva modelització, i s'il·lustra amb un exemple d'aplicació industrial. El senyal d'excitació o d'entrada es caracteritza pel significat que, en aquest treball, es dona a transitori de moviment, els tipus de transitoris considerats i els requeriments de funcionament que, normalment, els condicionen. Finalment, es descriu quina és la forma que s'espera en la resposta o senyal de sortida del sistema i s'explica la mètrica utilitzada per caracteritzar la vibració residual.

En el capítol 5 s'explica el mètode desenvolupat per definir i sintetitzar les lleis de moviment, amb l'objectiu de reduir les vibracions residuals. Aquest estudi es basa, en essència, en la síntesi de senyals que presentin un contingut freqüencial nul en les freqüències que no es desitgen excitar. En primer lloc es demostra que el contingut freqüencial nul d'un senyal transitori a una determinada freqüència implica, amb prou validesa, que la vibració residual serà nul·la o prou petita quan l'esmoreïment del sistema sigui nul o petit, respectivament. Després, arran d'aquesta relació, es proposa la definició de lleis de moviment a partir de la convolució temporal de polsos, i la seva extensió a altres tipus de corbes. Gràcies al fet que les corbes obtingudes per convolució temporal de polsos estan formades per funcions polinòmiques algebraïques concatenades, es conclou el capítol amb la definició d'un procediment per sintetitzar-les a través de l'esquema B-spline.

En molts sistemes mecànics, el moviment d'un element s'aconsegueix per mitjà d'un actuator i d'un sistema de control. Això implica que el senyal definit per l'usuari correspon a un senyal de comandament del sistema de control i que pot diferir, amb més o menys grau, de la llei de moviment real que actua sobre el sistema. En el capítol 6 es mostra, de manera simplificada, com fer una primera valoració de la capacitat que tenen alguns actuadors per seguir amb fidelitat un senyal de comandament, a partir de l'anàlisi

de la resposta freqüencial. Dintre dels diversos actuadors que existeixen, es centra l'explicació en els constituïts per motors elèctrics. Concretament, s'expliquen els dos tipus més usats en sistemes de control, anomenats servomotors, que corresponen principalment a motors de corrent continu i a motors de corrent altern trifàsics síncrons, ambdós d'imants permanents.

En el capítol 7 s'explica el muntatge experimental i els assajos que s'han dut a terme, que serveixen d'exemple per comprovar el mètode proposat. En primer lloc es descriu en detall el muntatge experimental que s'ha dissenyat i construït. S'inclou una explicació del disseny mecànic i del sistema de control emprat. Després, es descriuen els assajos previs fets amb l'actuador i amb el sistema vibratori, i els ajustos de paràmetres dels models analítics respectius. Finalment es sintetitzen algunes lleis de moviment i es valoren els resultats obtinguts, emprant com a mètrica la vibració residual generada.

En el capítol 8 s'exposen les conclusions principals d'aquesta tesi, estructurades segons els objectius proposats en el present capítol. També s'inclouen les aportacions més rellevants que s'han fet pel seu contingut tecnològic. Finalment, a partir de les limitacions observades en el mètode proposat i de vies alternatives sorgides durant el desenvolupament d'aquest treball es proposen extensions i futures línies d'investigació relacionades amb la generació de senyals per a la reducció de vibracions residuals.

## CAPÍTOL 2

# Estat de l'art dels procediments actuals

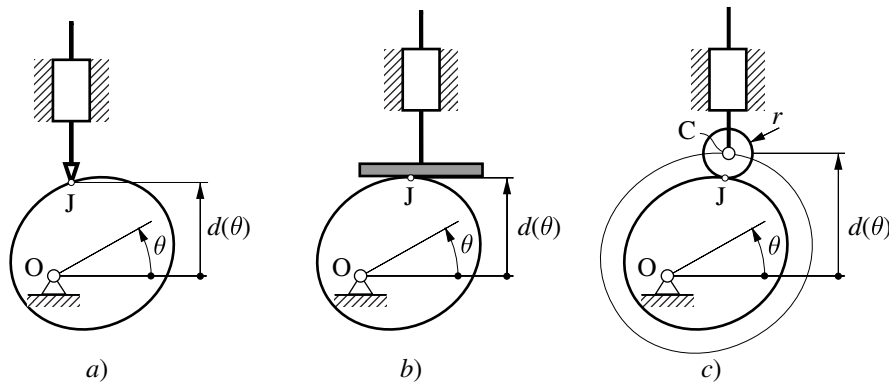
En aquest capítol, es descriuen les diferents tècniques emprades per altres autors en la síntesi de lleis de moviment i en la reducció de vibracions residuals. En primer lloc, s'analitzen les eines més usuals per definir lleis de moviment, prenent com a referència el camp desenvolupat en la síntesi de lleis de desplaçament en mecanismes lleva-palpador, on la seva anàlisi ha estat objecte de nombrosos estudis. D'altra banda, s'analitzen els procediments utilitzats fins ara per estudis que tenen com a objectiu comú la reducció de vibracions residuals en sistemes dinàmics. Dintre d'aquest camp, es distingeixen els mètodes que incideixen directament sobre les lleis de moviment i els mètodes basats en el control actiu de vibracions. D'aquests darrers només se'n fa una breu menció ja que, tot i tenir el mateix objectiu, la seva temàtica queda força allunyada de l'abast d'aquesta tesi.

### 2.1 MÈTODES DE DEFINICIÓ DE LLEIS DE MOVIMENT EN MECANISMES LLEVA-PALPADOR

En aquest apartat es presenten els mètodes que es fan servir en mecanismes lleva-palpador per definir lleis de moviment. Es classifiquen en dos grups segons si les corbes es defineixen directament amb polinomis algebraics i trigonomètrics –mètodes tradicionals– o si es defineixen per mitjà d'algoritmes que provenen del Disseny Geomètric Assistit per Ordinador (*Computer Aided Geometric Design – CAGD*). En aquestes darrer cas, la facilitat de modificar intuïtivament els perfils de les corbes i la seva senzillesa a l'hora de fixar condicions de continuïtat les fa molt versàtils per a qualsevol aplicació.

En un mecanisme lleva palpador, com els de la Figura 2.1, l'equació geomètrica d'enllaç és la relació que hi ha entre el desplaçament del palpador i l'angle girat per la lleva, tal com mostra l'expressió (2.1), on  $d_0$  indica el radi de base de la lleva.

$$d(\theta) = d_0 + S(\theta) \quad (2.1)$$



**Figura 2.1** Mecanismes lleva-palpador a) puntual, b) pla, c) de corró

El pas previ al disseny de mecanismes de lleva-palpador, és la definició de la llei de desplaçament del palpador  $S(\theta)$  en funció de l'angle girat. Segons Reyes (2000) els mètodes actuals emprats per a la definició de aquestes lleis es poden dividir en tradicionals, i apropiats per a corbes emprades en el Disseny Geomètric Assistit per Ordinador.

### 2.1.1 Mètodes tradicionals

#### *Espai de polinomis algebraics*

Els polinomis algebraics expressats en base canònica han tingut una àmplia utilització per aproximar per trams la corba  $S(\theta)$ , ja que són polinomis fàcils de derivar, integrar i avaluar. La base canònica consisteix en monomis que, per a grau  $n$ , són:  $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^n\}$ . L'expressió d'un tram  $j$  en aquesta base queda doncs:

$$S_j(\theta) = a_{0j} + a_{1j}\theta + a_{2j}\theta^2 + \dots + a_{nj}\theta^n \quad (2.2)$$

L'aproximació de  $S(\theta)$  amb trams constituïts per polinomis en base canònica ha estat àmpliament emprada. No obstant això presenta els següents desavantatges:

- Els coeficients  $a_{ij}$  no tenen significat geomètric directe, és a dir, no es pot predir de manera intuïtiva quin efecte tindrà un canvi en  $a_{ij}$  sobre la forma de la corba.
- Les unions entre varis trams de la corba  $S(\theta)$  resulten laborioses ja que implica la inclusió de tantes condicions de continuïtat com el grau de continuïtat  $C^r$  desitjat més una en el sistema d'equacions que es planteja.
- Per a valors de polinomis algebraics de grau  $n$  elevat, la base monomial descrita no és estable numèricament.
- Els polinomis algebraics obtinguts amb gran quantitat de punts de pas, poden presentar formes no desitjades entre punts.

Rothbart (1956) presenta informació detallada sobre la utilització de polinomis en base canònica per aproximar  $S(\theta)$ . Tot i la seva antiguitat, aquest llibre es considera vigent, i és citat per molts autors contemporanis.

Aquest autor classifica les corbes que descriuen gràficament  $S(\theta)$  en corbes bàsiques i corbes avançades. Les corbes bàsiques (lineal, quadràtica i cúbica) no són útils per representar  $S(\theta)$  ja que presenten discontinuïtats en l'acceleració. Dintre de les corbes avançades, s'inclouen aquelles corbes polinomials de les quals s'obté la seva expressió a partir de punts de pas (anomenats condicions de contorn). El grau  $n$  del polinomi depèn llavors del nombre de condicions de contorn.

Aquestes condicions de contorn s'imposen, a cada tram, a partir de les especificacions de disseny, i donen lloc a una equació independent per a cada una d'elles. Es forma un sistema de  $n+1$  equacions lineals amb  $n+1$  incògnites  $a_{0j}, \dots, a_{nj}$ .

Quant a la possibilitat de canviar la forma de la corba, es presenta un mètode d'ajust de l'equació del polinomi a la corba desitjada. Es tracta d'un procés de prova i error on es canvien tant els coeficients  $a_{ij}$  com els exponents de la variable  $\theta$ .

D'altra banda, aquest autor dedica dos capítols a l'estudi del comportament dinàmic dels mecanismes lleva-palpador. Fa servir el Mètode *Polydyne* que es va donar a conèixer els anys 40. Aquest mètode presenta una forma analítica de trobar la solució de les equacions diferencials que simulen el mecanisme. És necessària la condició de velocitat de gir constant de la lleva per poder fer servir el model.

Finalment, aquest autor també presenta tres altres mètodes per estudiar el comportament dinàmic, dels quals el més rellevant consisteix en fer un desenvolupament de Fourier per conèixer el moviment en règim estacionari.

Chen (1982) classifica les corbes en bàsiques, polinomials i especificades per altres polinomis. Les corbes bàsiques són les mateixes que les especificades per Rothbart (1956). Com a corbes polinomials considera polinomis fins a grau  $n=7$ .

Aquest autor planteja, per a mecanismes de detenció simple, que els valors de l'acceleració en la transició entre el tram de pujada i de baixada del desplaçament poden:

- No controlar-se (es fan servir polinomis fins a grau 5).
- Controlar-se assignant un cert valor a les derivades del desplaçament en aquest punt de transició (la complexitat del sistema d'equacions augmenta considerablement).
- Controlar-se afegint punts de pas en la zona de la transició, amb la qual cosa el polinomi proposat s'eleva fins a grau  $n=11$ .

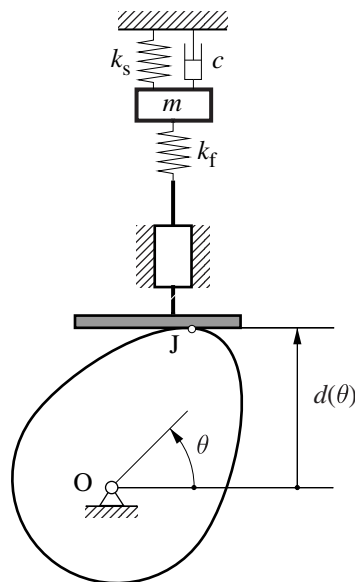
Chen presenta també un apartat sobre manipulació dels exponents del polinomi per modificar la forma de la corba, per un procediment de prova i error, en el qual no es pot preveure l'efecte del canvi.

Com a altres polinomis, inclou els polinomis que denomina ortogonals i osculadors. Segons aquest autor, emprant polinomis ortogonals no és necessari resoldre un sistema d'equacions lineals (en aplicar l'ortogonalitat) però la complexitat a l'hora de generar i escollir els polinomis és considerable. Quant als polinomis osculadors, poden interpolar punts i derivades en els punts i per tant és una forma millor d'aproximar  $S(\theta)$ . Tot i això, el control sobre la geometria de la corba no és trivial, i la formulació d'aquests polinomis és molt complicada.

Finalment, aquest autor tracta de la síntesi de  $S(\theta)$  mitjançant la integració numèrica de la llei d'acceleracions. Es presenta un algorisme de diferències finites i un mètode d'integració finita. El problema és la definició de la llei d'acceleracions, que està basada en proves conegudes o en l'experiència del dissenyador.

Per a l'estudi dinàmic, considera un model d'un grau de llibertat vibratori segons la Figura 2.2, on  $m$  i  $k_f$  representen la massa i la rigidesa dels elements que transmeten el moviment, i  $k_s$  representa la rigidesa de la molla que garanteix el contacte lleva palpador.

Chen sosté que les vibracions que afecten els sistemes són degudes al canvi de signe que té l'acceleració dintre dels trams d'*Elevació* o de *Baixada* i no a la freqüència fonamental de gir de la lleva. Aquest canvi de signe origina càrregues dinàmiques de magnitud important que fan que els elements, que es comporten en el seu conjunt com una molla d'alta rigidesa, puguin perdre contacte instantàniament amb el palpador, i generin cops i vibracions.



**Figura 2.2** Model d'un grau de llibertat vibratori, d'un mecanisme lleva-palpador

Zdenek i Miroslav (1993) consideren que els elements del mecanisme no són rígids, i fan servir un model lineal per simular el comportament dinàmic del mateix. Aquests autors dediquen un capítol a estudiar 46 famílies de corbes de desplaçament, i les classifiquen en:

- Desplaçament simètric del tipus *Detenció – Elevació – Detenció*:

- i) Amb polinomis del tipus

$$S' = S_0(1 - 4u^2)^n \quad (2.3)$$

- ii) Amb valors minimitzats de  $|S''|_{\max}$
- iii) Amb desplaçament parabòlic

- Desplaçament simètric tipus *Detenció – Elevació – Baixada – Detenció*.
- Desplaçament asimètric.

La novetat del que plantegen aquests autors està en la consideració del comportament dinàmic del mecanisme. D'altra banda, en la definició de corbes, no presenten cap aportació significativa.

Norton (2005) presenta les mateixes corbes que Rothbart (1956) i Chen (1982). Per a la unió de trams successius planteja sistemes d'equacions lineals, amb condicions de contorn que provenen del tram anterior, i que la seva solució permet conèixer els diferents coeficients del polinomi.

### ***Espai de polinomis trigonomètrics***

Molts autors plantegen les funcions trigonomètriques en base a l'avantatge, sobre les algebraïques, de mantenir-se contínues després d'infinites derivacions (Rothbart, 1956; Chen, 1982; Shigley, 1998; Norton, 2005). Això ha motivat la utilització de termes trigonomètrics en les funcions que defineixen  $S(\theta)$ . Cal fer, però, dues observacions:

- Si  $S(\theta)$  està formada per diversos trams units, si bé és cert que les derivades successives de la funció trigonomètrica  $S(u)$  dintre de cada tram sí es mantenen contínues, pot no ser cert en les unions dels trams.
- Si  $S(\theta)$  està formada per un sol polinomi algebraic de grau  $n$  i es deriva  $n+1$  vegades, s'obindrà la funció nul·la, que també és contínua i el seu valor es manté igual després d'infinites derivacions.

Els desavantatges que presenten aquestes corbes són:

- No es controla la geometria de la corba d'una manera intuïtiva.
- Les condicions de continuïtat de la corba en les unions de varis trams consecutius resulten de càlcul laboriós.
- Només es té una variable de disseny per poder generar diferents perfils.

Les funcions  $S(u)$ , amb  $u \in [0,1]$ , que s'inclouen en aquest apartat estan en realitat compostes per termes algebraics i trigonomètrics.

Rothbart (1956), per aproximar trams d'un mecanisme de lleva, va considerar les següents corbes trigonomètriques  $S(u)$  (Figura 2.3):



- Harmònica simple:

$$S(u) = \frac{h}{2}[1 - \cos(\pi u)] \quad (2.4)$$

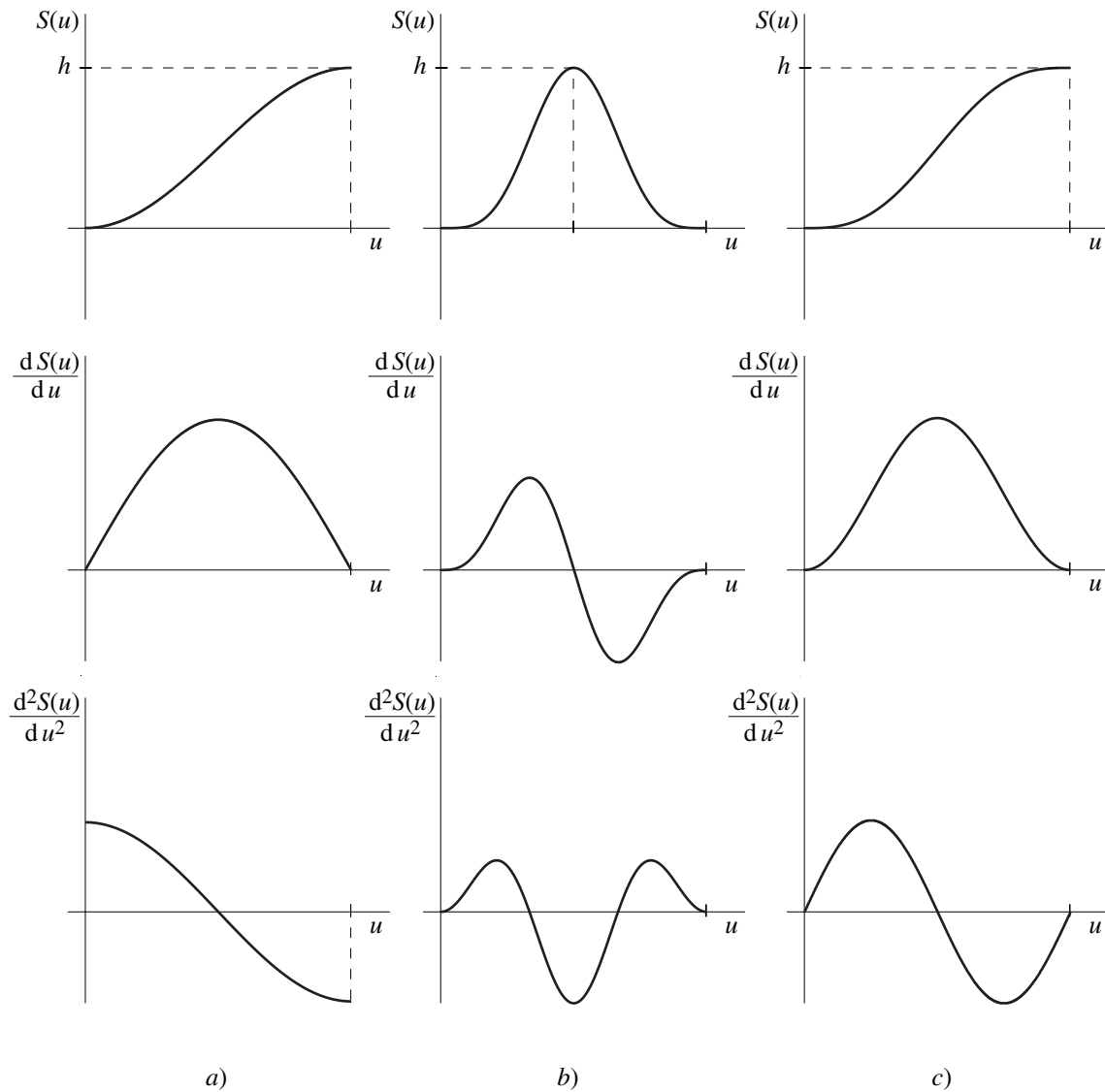
- Doble harmònica:

$$S(u) = \frac{h}{2} \left( [1 - \cos(2\pi u)] - \frac{1}{4}[1 - \cos(4\pi u)] \right) \quad (2.5)$$

- Cicloïdal:

$$S(u) = h \left[ u - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi u) \right] \quad (2.6)$$

on  $h$  és la distància màxima recorreguda pel palpador.



**Figura 2.3** Corbes trigonomètriques: a) harmònica simple, b) doble harmònica, c) cicloïdal

Chen (1982) considera les mateixes corbes bàsiques que Rothbart (1956). Presenta a més unes corbes que s'han sintetitzat de manera que, en un tram d'*Elevació* o de *Baixada*, els pics d'acceleració i el contingut harmònic del perfil siguin baixos. S'obtenen de l'expansió en sèries de Fourier de les corbes polinòmiques conegudes. L'expressió per a un polinomi trigonomètric en la base de Fourier és:

$$S(\theta) = c_0 + \sum_{i=1}^m [s_i \sin(i\theta) + c_i \cos(i\theta)] \quad (2.7)$$

En aquesta base, els coeficients  $s_i$  i  $c_i$  no tenen un significat geomètric directe i, per tant, si canvia el seu valor, no es pot saber a priori quin serà l'efecte en la corba.

Les corbes considerades per aquest autor són:

- Corba harmònica 1-3 de Gutman: s'obté a partir dels dos primers termes de la sèrie de Fourier de llei de desplaçament coneguda com a llei d'acceleració parabòlica. L'expressió per a un tram d'*Elevació* és:

$$S(u) = h \left( u - \frac{15}{32\pi} \sin(2\pi u) - \frac{1}{96\pi} \sin(6\pi u) \right) \quad (2.8)$$

- Corba harmònica 1-3 de Freudensein: s'obté de manera similar, i minimitza l'anomenat factor d'acceleració. L'expressió per a un tram d'*Elevació* és:

$$S(u) = h \left[ u - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{27}{28} \sin(2\pi u) + \frac{1}{84} \sin(6\pi u) \right) \right] \quad (2.9)$$

- Corba harmònica 1-3-5 de Freudensein: l'expressió per a un tram d'*Elevació* és:

$$S(u) = h \left[ u - \frac{1125}{2\pi 1250} \left( \sin(2\pi u) + \frac{1}{54} \sin(6\pi u) + \frac{1}{1250} \sin(10\pi u) \right) \right] \quad (2.10)$$

Aquest autor reconeix que en truncar la sèrie es poden obviar harmònics ressonants, i comenta haver comprovat que aquestes corbes no presenten els avantatges que es preveien des d'un punt de vista dinàmic<sup>1</sup>.

Lakshminarayana i Kumar (1987) proposen que  $S(\theta)$  estigui definida per una sola funció per al cicle complet. Argumenten que això elimina la discontinuïtat en les unions. Per tal que  $S(\theta)$  i qualsevol de les seves derivades sigui contínua fan servir una sèrie trigonomètrica finita.

Si el cicle complet de desplaçament s'aproxima amb una sèrie trigonomètrica finita, es té control sobre els components d'alta freqüència del moviment del palpador. El

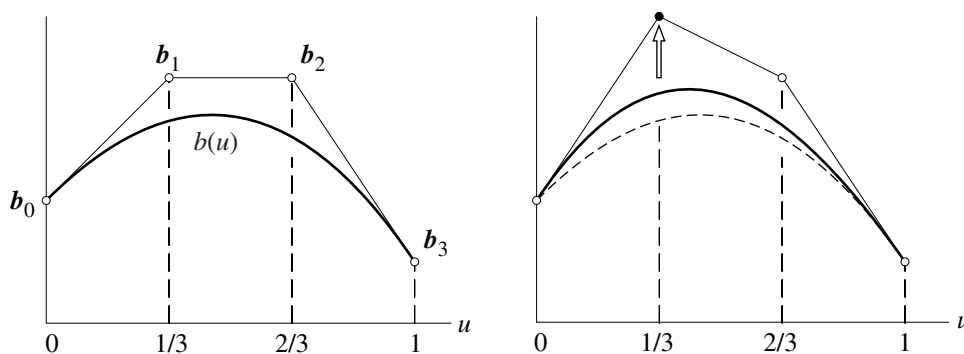
<sup>1</sup> S'ha de fer menció que el contingut freqüencial d'un tram d'una llei de desplaçament no explica el contingut freqüencial de tota la llei de desplaçament. És per això que es considera aquesta afirmació poc precisa.

problema radica en el fet que no es poden obtenir trams rectilinis, donat que la sèrie emprada consta d'un nombre finit de termes. Apareix en aquests trams un petit arrissat. Els autors argumenten que es pot augmentar el nombre de termes fins a fer que l'error que pot provocar aquest arrissat sigui acceptable.

### 2.1.2 Corbes utilitzades en el Disseny Geomètric Assistit per Ordinador

La definició de  $S(\theta)$  per mitjà de corbes definides a partir de les tècniques que es fan servir en el Disseny Geomètric Assistit per Ordinador (CAGD) ha despertat gran interès en la bibliografia més recent. Calen destacar les següents propietats que són d'utilitat directe en aquest camp:

- Disminució de variacions (*variation diminishing*): en CAGD les corbes es defineixen per mitjà de l'anomenat polígon de control (Figura 2.4). Segons aquesta propietat, el nombre d'interseccions de la corba amb una recta és menor o igual que el nombre d'interseccions de la recta amb el polígon de control.
- Interpolació dels punts extrems (*endpoint interpolation*): segons aquesta propietat la corba passa pels punts inicial i final del polígon de control (Figura 2.4). En qualsevol problema de disseny, els punts inicial i final són molt importants i interessa tenir un control directe sobre ells.



**Figura 2.4** Corba de Bézier no paramètrica de grau  $n=3$ ; Influència del polígon de control

### *Espai de funcions polinòmiques amb base de Bernstein i corbes B-spline*

Tsay i Huey (1988) tracten sobre l'ús de corbes B-spline de grau arbitrari per aproximar  $S(\theta)$  en mecanismes lleva-palpador. Una corba B-spline està formada per trams definits cada un d'ells per un polinomi algebraic, i en les unions dels trams queda garantida una certa continuïtat. El grau del polinomi es manté baix, independentment de la quantitat de restriccions a interpolar. Aquests autors plantegen resoldre un sistema d'equacions per conèixer el valor de les ordenades del polígon de control. Això fa que es perdi l'avantatge que dona el polígon de control per controlar intuïtivament la corba.

MacCarthy (1988) proposa fer servir splines de grau  $n=5$ , emprant una base B-spline, per definir trajectòries en general, i estudia el cas particular de  $S(\theta)$  en mecanismes de lleva-palpador. La proposta implica solucionar el sistema d'equacions que es forma al considerar les restriccions de disseny. Això porta el desavantatge d'un desenvolupament matemàtic complex, i el desaprofitament del control geomètric intuïtiu sobre la forma de la corba.

Tsay i Huey (1989) consideren la rigidesa del palpador en sintetitzar la llei de moviment d'un mecanisme de lleva emprant corbes B-spline. Per simular el comportament dinàmic del mecanisme utilitzen un model lineal d'un grau de llibertat. Per a la definició de les corbes B-spline, segueixen el mètode emprat en Tsay i Huey (1988).

Sandgren i West (1989) plantegen optimitzar el perfil de la lleva emprant corbes B-spline, per mitjà de tècniques de programació no lineal. Ressalten la consistència de l'esquema B-spline per fer canvis locals i que les corbes obtingudes segueixen estant dintre del camp de l'optimització desitjada. També proposen treballar amb la corba d'acceleració, i obtenir la  $S(\theta)$  amb dues integracions. Això ho justifiquen donat que petits canvis en la corba  $S(\theta)$  provoquen grans canvis en la corba d'acceleracions, i al contrari. Per tant, és més fàcil modular els perfils en el camp de les acceleracions.

L'ús de corbes de Bézier (polinomis amb base de Bernstein) per al disseny de lleis de moviment de lleves va ser proposat per primer cop per Ting *et al.* (1990) amb corbes de Bézier paramètriques. Posteriorment Srinivansan i Ge (1998) van utilitzar corbes de Bézier no paramètriques. A l'igual que amb les corbes B-spline, la geometria d'aquestes corbes es defineix a través d'un polígon de control, de manera molt intuïtiva.

Tsay i Huey (1993) i Tsay i Lin (1996) fan servir corbes B-spline racionals per millorar la geometria del mecanismes de lleva. La geometria del perfil es tracta per estudiar els avantatges de sintetitzar la llei desplaçament amb aquestes corbes. Segons Reyes (2000) el pas de l'esquema B-spline no paramètric a l'esquema B-spline racional complica injustificadament la solució al problema.

Cardona i Clos (2000) presenten en el seu llibre un capítol dedicat a la síntesi de lleis de moviment per mitjà de corbes de Bézier no paramètriques. Posen de manifest que, tot i estar inclòs en el capítol de lleves, la senzillesa en l'especificació de condicions de continuïtat i la seva definició geomètrica intuïtiva les fan molt útils en el disseny de qualsevol llei temporal de moviment a partir d'especificacions donades.

### ***Espai de polinomis trigonomètrics amb base anàloga a la de Bernstein i corbes B-spline trigonomètriques***

Reyes (2000) exposa que quan es defineix una funció per mitjà d'una sèrie trigonomètrica finita, es té informació explícita sobre el seu contingut harmònic. El dissenyador pot saber la resposta dinàmica d'un element que es mou segons la trajectòria que descriu la corba si es coneix el model dinàmic del sistema. Aquesta ha estat probablement la motivació més important per què alguns investigadors intentin trobar una base, per a polinomis trigonomètrics, que s'adeqüi a les tècniques de *CAGD*.

Srinivasan i Ge (1998) fan servir corbes trigonomètriques amb base anàloga a la de Bernstein per aproximar  $S(\theta)$ . Desenvolupen una modificació del mètode *polydyne* per disminuir les vibracions residuals en mecanismes en què la lleva gira a velocitat constant. Es parla de l'avantatge de conèixer el contingut harmònic de  $S(\theta)$ , en un tram determinat, però no és aplicable a tota la corba, ja que està feta per trams<sup>2</sup>.

Sánchez-Reyes i Reyes (1998) proposen també aproximar  $S(\theta)$  amb polinomis trigonomètrics de base anàloga a la de Bernstein. Tal aproximació es pot fer sempre que els trams de corba estiguin definits en un tram menor que  $\pi$  i que no siguin trams rectes de pendent no nul·la.

Neamtu *et al.* (1998) imposen la condició que el perfil de la lleva sigui una corba tancada tipus NURBS (*Non uniform rational B-spline*). Això implica que  $S(\theta)$  pertanyi a l'espai de splines trigonomètrics. En el seu plantejament, donat que la corba representada és l'envolupant d'un feix de rectes, només es pot aplicar a mecanismes lleva-palpador amb palpador pla (cas *b*) Figura 2.1).

## **2.2 MÈTODES DE DEFINICIÓ DE LLEIS DE MOVIMENT PER MINIMITZAR VIBRACIONS RESIDUALS**

Tal com s'ha explicat en el capítol introductori, l'objectiu principal d'aquest treball és la reducció de vibracions residuals d'un sistema vibratori quan es produeix un moviment transitori d'una inèrcia situada sobre aquest. En aquest apartat s'expliquen els mètodes utilitzats per diversos autors per assolir aquest objectiu, que tenen com a denominador comú la generació o modificació de les formes dels senyals de comandament per obtenir els resultats desitjats.

Els treballs fets en aquest camp es poden classificar en quatre línies d'investigació. La primera, tot i que modesta en els seus resultats, es podria considerar com la precursora en aquest camp. Correspon a la generació de senyals de comandament per mitjà de sèries trigonomètriques. La segona línia descrita, que és la més important per la bondat dels resultats obtinguts, utilitza un mètode on el senyal de comandament es perfila per convolució temporal amb un tren d'impulsos. En tercer lloc, s'explica la tècnica que fa servir el filtrat del senyal de comandament en el rang de freqüències desitjat. Finalment, es fa referència al mètode que correspon a la inversió de la dinàmica del sistema per obtenir el senyal de comandament a partir de la resposta desitjada.

Tot i que molts autors, durant la dècada dels 80 van iniciar les investigacions per resoldre el problema plantejat mitjançant tècniques que es podrien incloure en aquest apartat, s'indiquen a continuació els que han estat més citats en les darreres publicacions sobre la matèria.

---

<sup>2</sup> S'ha de fer menció que el contingut freqüencial d'un tram d'una llei de desplaçament no explica el contingut freqüencial de tota la llei de desplaçament. És per això que es considera aquesta afirmació poc precisa.

### 2.2.1 Generació de senyals de comandament per mitjà de sèries trigonomètriques

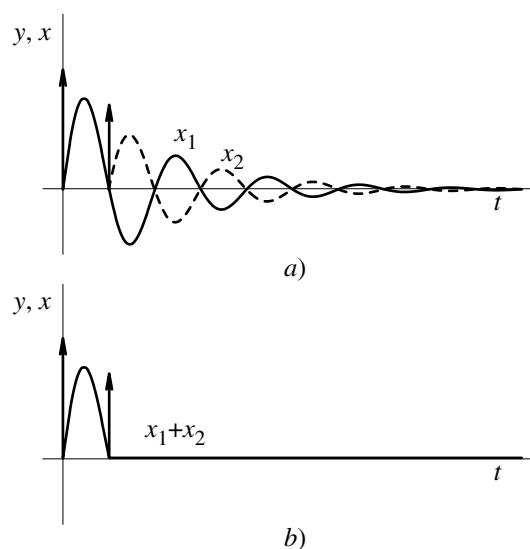
Aspinwall (1980) proposa definir lleis d'acceleració, en moviments punt a punt (el moviment inclou el tram d'acceleració i el tram de parada), mitjançant sèries de sinus. Els coeficients d'aquestes sèries estan escollits per minimitzar, en les bandes de freqüències d'interès, l'excitació de modes propis. Es comparen aquests senyals amb senyals tipus pols i doble versinus (1-cosinus).

Meckl i Seering (1985) investiguen, també en moviments punt a punt, diferents formes d'aproximar els clàssics polsos rectangulars per mitjà de funcions sinus o versinus. En les funcions s'eliminen els termes que tenen contingut freqüencial proper a les resonàncies del sistema. El resultat són senyals de comandament molt semblants a polsos rectangulars, que eviten excitar els modes propis del sistema.

### 2.2.2 Perfilat de senyals de comandament per convolució amb un tren d'impulsos

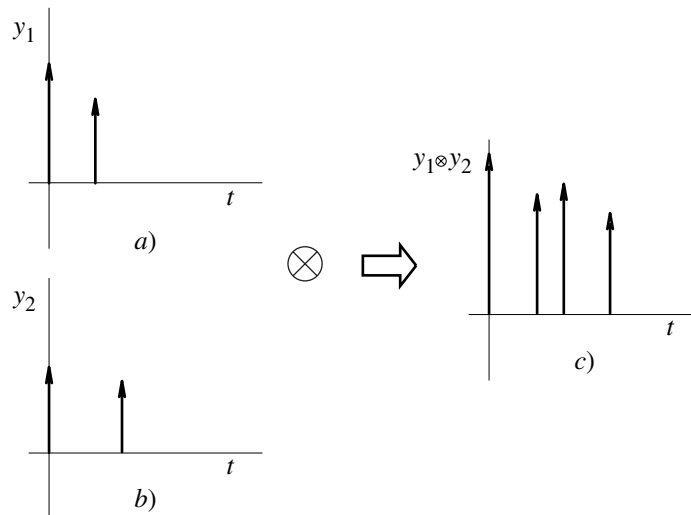
Singer i Seering (1990) fan una proposta que conceptualment consisteix en la cancel·lació de vibracions, en sistemes d'un sol grau de llibertat, mitjançant l'entrada amb un cert decalatge de temps, de dos impulsos.

Tal com s'observa en la Figura 2.5, les oscil·lacions generades pel primer impuls són cancel·lades per les oscil·lacions generades pel segon impuls. El temps mínim entre impulsos és aproximadament un semiperíode del mode propi a cancel·lar. El senyal de comandament que ha de seguir l'actuador del sistema és el resultat del producte de convolució temporal d'un senyal de comandament habitual per l'actuador, per la seqüència d'impulsos definida. Singer *et al* (1990) tenen la patent que cobreix aquesta idea, on també s'inclouen, seguint la mateixa tècnica, el perfilat de senyals de comandament per convolució amb trens de polsos.



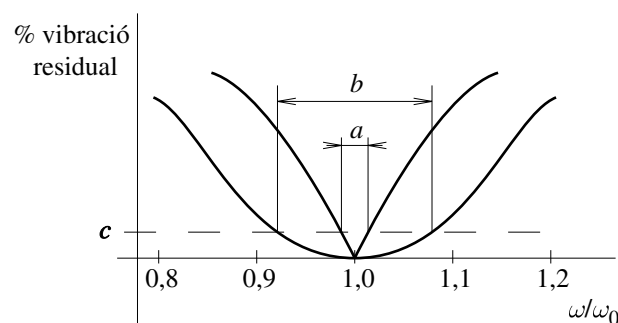
**Figura 2.5** a) Respostes  $x_1$  i  $x_2$  a dos impulsos decalats en el temps; b) Resposta total  $x_1+x_2$

Aquesta proposta es pot estendre a sistemes de varis modes propis de vibració, tal com també s'explica a Hyde i Seering (1991). Per a cada mode propi, es defineix una seqüència d'impulsos que el cancel·la (Figura 2.6). En el domini temporal, el senyal que resulta de la convolució de les seqüències d'impulsos esmentades, cancel·la tots els modes propis referits. A l'igual que en el cas d'un mode propi, el senyal de comandament que ha de seguir l'actuador del sistema és el resultat del producte de convolució temporal d'un senyal de comandament habitual per l'actuador, per aquesta seqüència d'impulsos definida.



**Figura 2.6** Convolució de dues seqüències d'impulsos *a*) i *b*) resultant la seqüència *c*)

Aquests autors presenten també un mètode per aconseguir que la cancel·lació del mode propi desitjat sigui més robusta en front a variacions de paràmetres del sistema vibratori. Consisteix en afegir un tercer impuls, fixant la seva amplitud i el decalatge en temps respecte als dos primers. La Figura 2.7 mostra en l'eix d'ordenades la relació entre l'amplitud màxima de la vibració residual i l'amplitud màxima de la vibració si el sistema tingués només comportament inercial, i tots els impulsos sumats actuessin a l'instant inicial. En l'eix d'abscisses es mostra el rang de freqüències, normalitzat per la freqüència pròpia dels sistema. S'observa que, per a una tolerància fixada de vibració residual de *c*, en afegir aquest nou impuls es passa d'acceptar una rang de freqüències *a* a un rang de freqüències *b*, amb  $b \gg a$ .



**Figura 2.7** Robustesa en la cancel·lació de la vibració residual

Singhose *et al.* (1990 i 1994-a) mostren en el seu treball una aproximació fasorial de la investigació feta per Singer i Seering (1990). A partir dels diagrames de fasors, i per al cas d'una seqüència de tres impulsos, s'estudia la sensibilitat de la vibració residual en funció de la variació de paràmetres o errors del model. Es proposa un mètode per seleccionar els angles dels fasors (que equival a seleccionar la posició temporal dels impulsos) per donar més robustesa al sistema que el sistema proposat per Singer i Seering (1990).

Singh i Heppler (1993) presenten un mètode per eliminar les vibracions residuals en sistemes vibratoris de diversos graus de llibertat, només fent servir una seqüència de dos impulsos (o bé de tres impulsos si es desitja més robustesa en front de variacions de paràmetres del sistema). Consisteix en cancel·lar, igual que s'ha descrit en Singer i Seering (1990), un pseudomode de vibració que tindrà per freqüència el màxim comú denominador de les freqüències dels modes propis a cancel·lar. Es fa la hipòtesi, en aquesta publicació, que les relacions entre modes propis són racionals, és a dir, que la resposta impulsional del sistema és un senyal periòdic (no quasiperiòdic).

Singhose *et al.* (1994-b) introdueixen impulsos negatius en la seqüència de definició descrita en Singer i Seering (1990). Això fa que els temps d'execució de la llei de moviment es pugui reduir significativament.

### 2.2.3 Definició de lleis de moviment per filtratge del senyal de comandament

Proakis i Manolakis (1998) classifiquen els esquemes generals de filtratge digital en dos tipologies: esquemes tipus FIR (*Finite Impulse Response*) i esquemes tipus IIR (*Infinite Impulse Response*). En general, la funció de transferència en el pla  $z$  dels filtres FIR es pot expressar com:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \quad (2.11)$$

Donat que no existeixen pols (no hi ha denominador) es pot dir que els filtres FIR són sempre estables. En la representació d'aquests filtres en diagrames de blocs, es pot observar l'estabilitat del sistema ja que no existeix una realimentació del senyal de sortida. Donat que  $M$  és finit, la seva resposta impulsional és finita en el temps i per tant l'energia associada a aquest senyal és finita.

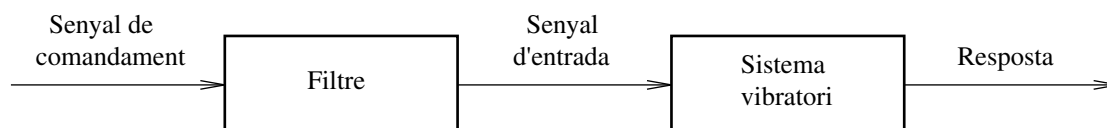
La funció de transferència en el pla  $z$  dels filtres IIR es pot expressar com:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.12)$$

En aquest cas sí que existeixen pols (hi ha polinomi  $z$  en el denominador). Els filtres IIR es representen a través de diagrames de blocs on existeix una realimentació del senyal



de sortida. La seva estabilitat dependrà doncs del valor dels coeficients  $a_k$  del denominador. La seva resposta impulsional és infinita en el temps (per causa de la realimentació del senyal de sortida) i pot ser d'energia finita (senyal estable) o infinita (senyal inestable).



**Figura 2.8** Esquema de blocs del filtratge de senyal de comandament

La tècnica del filtratge del senyal de comandament consisteix en eliminar o reduir el contingut freqüencial del senyal d'entrada al sistema vibratori en les freqüències corresponents als modes propis d'aquest, per mitjà d'un filtre digital disposat segons la Figura 2.8. El filtratge ideal, per no excitar modes propis a partir d'una freqüència determinada (filtres passabaixos) o entre dos rangs de freqüències (filtres passabanda), estaria constituït, en el domini freqüencial, per un rectangle. Aquest filtre ideal no és realitzable ja que no és una funció contínua. Per tal de fer realitzable aquest filtre es fan servir finestres que sí són contínues i derivables.

Singhose *et al.* (1995) fan una comparativa entre diferents mètodes de filtratge (en un sistema d'un grau de llibertat vibratori), tant del tipus FIR com del IIR. A l'igual que Oppenheim i Schafer (1975) expliquen que els filtres FIR donen més flexibilitat en la resposta del filtre, però donat l'ús més extens dels filtres IIR, també els considera. Dintre de les dues topologies mencionades, en el seu estudi es consideren els filtres següents:

- FIR (*Finite Impulse Response*): Passabaixos amb finestra Hamming de durada tres períodes i de durada cinc períodes (períodes de la freqüència pròpia del sistema vibratori); Passabaixos Parks-McClellan-Rabiner (1972); Passabanda amb finestra Hamming de durada cinc períodes; Passabanda Parks-McClellan-Rabiner (1972).
- IIR (*Infinite Impulse Response*): Passabaixos Butterworth, Chevyshev, i el·líptic i passabanda Butterworth, Chevyshev, i el·líptic.

Dels estudis fets, aquests autors arriben a la conclusió que el filtratge amb filtre FIR passabaixos amb finestra Hamming de tres períodes és el que redueix més la vibració quan el sistema està modelitzat de manera exacta, però té l'inconvenient de tenir una durada d'execució llarga, i poca robustesa enfront a variació de paràmetres o errors del model. D'altra banda, el filtre FIR passabanda Parks-McClellan-Rabiner (1972) té una durada menor i sembla més robust enfront a aquestes variacions o errors. L'inconvenient que presenta és la major complexitat de càlcul necessària.

Finalment, Singhose *et al.* (1995) fan una comparativa entre les tècniques de definició de lleis de moviment per filtratge de senyal i les tècniques de definició de lleis de moviment per convolució d'un tren d'impulsos. S'observen dues conclusions principals:

- La durada de les lleis de moviment obtingudes per filtratge de senyal són, en mitjana, de l'ordre de dues vegades la durada de les obtingudes per convolució d'un tren d'impulsos.
- La vibració residual que s'observa en la tècnica del filtratge de senyal i la manca de robustesa en front a variacions de paràmetres o errors de modelització pot arribar a ser d'un ordre de magnitud superior a la vibració residual observada en la tècnica de convolució d'un tren d'impulsos.

Chen i Lee (1998) expliquen un algoritme de disseny de filtre FIR amb aplicació directe a moviments d'acceleració i desacceleració (moviments punt a punt) on s'avalua la bondat del mètode analitzant l'error de contorn en un moviment circular, típicament emprat en màquines de control numèric.

Peláez *et al.* (2003) analitzen els efectes negatius dels jocs en sistemes mecànics flexibles, quan es tracta de minimitzar vibracions residuals amb filtres FIR. Es dissenya un esquema inicial per a un nou filtre FIR que aconsegueix modificar de forma adequada les lleis de moviment i superar els efectes negatius esmentats.

#### 2.2.4 Definició de lleis de moviment per inversió de la dinàmica del sistema

Aquesta tècnica està basada en la generació del senyal d'entrada, partint de les equacions dinàmiques del sistema invertides, i de la trajectòria de sortida desitjada.

El mètode consisteix primerament en modelitzar la dinàmica del sistema en detall. Posteriorment, s'inverteixen les equacions dinàmiques. S'especifica llavors la resposta desitjada, i es calcula, el senyal d'entrada necessari per generar aquella resposta.

Per a sistemes lineals, en el domini freqüencial s'utilitza el quocient entre la resposta desitjada de sortida i la funció de resposta freqüencial del sistema, per obtenir el senyal d'entrada desitjat. Això equival a la deconvolució dels dos senyals, en el domini temporal. Per a sistemes no lineals, la inversió de les equacions dinàmiques és necessària, tal com presenten Asada *et al.* (1987).

En qualsevol cas, Singer i Seering (1990) expliquen els inconvenients importants a l'hora de fer servir aquesta tècnica:

- Selecció de la trajectòria: si la trajectòria escollida és complexa, pot ser que el resultat obtingut no sigui realitzable per un actuador real. Bayo (1988) fa servir una trajectòria molt senzilla per garantir l'èxit del càlcul, però penalitza l'optimització del temps de moviment.
- Cal un model molt detallat del sistema.
- La inversió de funcions de resposta freqüencial  $H(\omega)$ , pot generar un problema de mal condicionament a causa dels zeros o valors propers a zero que poden existir en el denominador. Això sempre passa en els sistemes físics, ja que la resposta impulsional  $h(t)$  és sempre d'energia finita i per tant la resposta freqüencial també ho és. En conseqüència, els valors de la resposta freqüencial  $H(\omega)$  tendiran a zero quan  $\omega$  tendeixi a infinit.

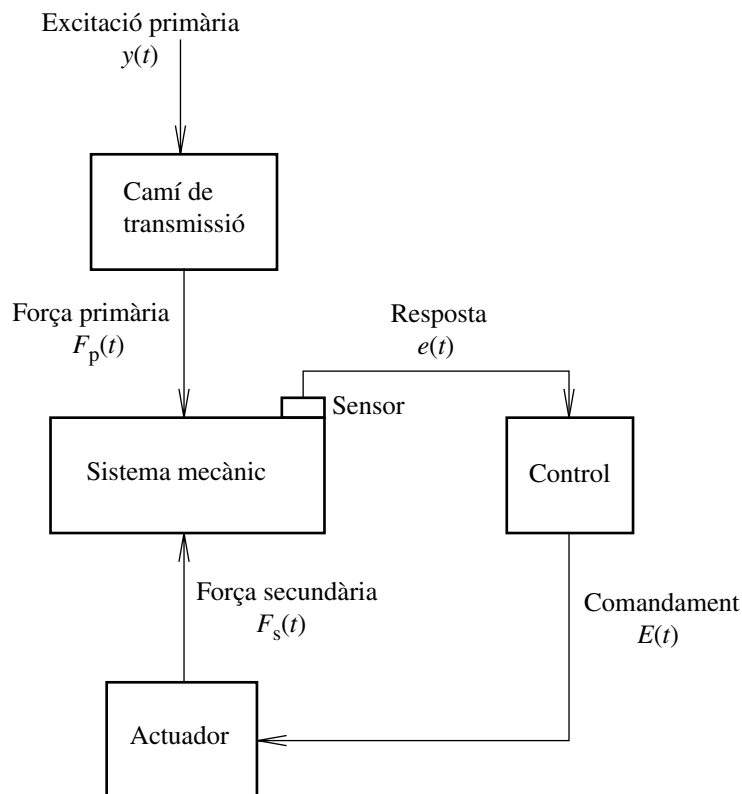
## 2.3 CONTROL ACTIU DE VIBRACIONS

En les darreres tres dècades s'ha estudiat d'una manera notable el control actiu de vibracions. La gran majoria d'investigacions s'han fet en l'estudi de grans elements flexibles, a relatives baixes freqüències. Recentment, a causa de les normatives mediambientals sobre soroll, s'han fet grans avenços en el control de vibracions en el rang de freqüències audibles. Això també ha estat possible gràcies al desenvolupament de processadors digitals de senyal més ràpids i al desenvolupament de transductors de senyal més precisos.

Fuller *et al.* (1997) són uns dels autors més citats i presenten un llibre dedicat al control actiu de vibracions. Subdivideixen el control actiu en dues categories:

- Control actiu realimentat (*feedback control*)
- Control actiu per avançament o prealimentat (*feedforward control*).

### 2.3.1 Control actiu realimentat (*feedback control*)



**Figura 2.9** Elements bàsics d'un control actiu amb realimentació (*feedback control*)

Fuller *et al.* (1997) descriuen quins són els elements bàsics d'un control actiu clàssic, mostrats en la Figura 2.9. Fan referència a dues categories d'actuadors: actius i semiactius. Els primers són aquells que poden introduir energia mecànica en el sistema

per mitjà de moviments que cancel·len les vibracions residuals (actuadors electromagnètics, piezoelèctrics, hidràulics, etcètera). Els segons només poden variar la seva capacitat de emmagatzemar i dissipar energia del sistema (molles i amortidors controlables).

En un sistema d'un grau de llibertat vibratori s'analitza, a partir de les equacions de moviment (expressades de forma clàssica i també com a equacions d'estat):

- L'estabilitat del sistema realimentat emprant la transformada de Laplace.
- Com es modifica la resposta del sistema emprant el controlador i l'actuador.
- Quins són els efectes dels retards en la realimentació.

A continuació, s'analitza un sistema de dos graus de llibertat per mitjà d'equacions d'estat i finalment s'explica quins són els conceptes de Control Òptim i Control Modal.

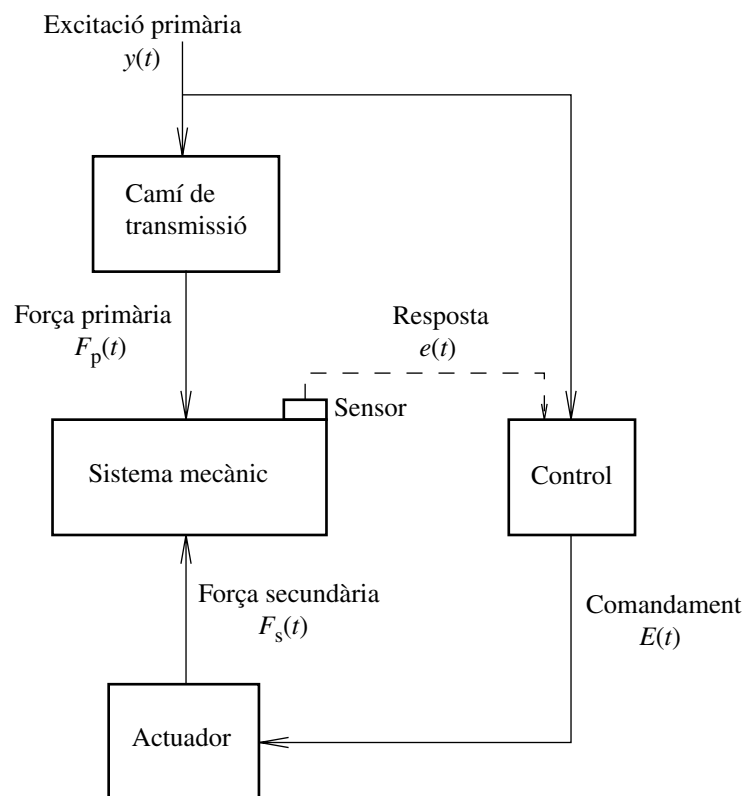
Dintre d'aplicacions més concretes d'aquesta tècnica de control actiu, es poden citar altres autors com Plumb *et al.* (1987) que investiguen la utilització de làmines polimèriques piezoresistives per generar esmorteïment addicional en una estructura. Així mateix, Crawley i de Luis (1986) examinen la utilització d'una seqüència d'actuadors piezoelèctrics en una estructura tipus biga.

Cannon i Schmitz (1984) i Hollars i Cannon (1986) mostren la realimentació a través de la captació de posició d'un braç robòtic flexible. Kotnik *et al.* (1988) estudien la realimentació d'un braç robòtic flexible mitjançant la captació de l'acceleració. Book i Cetinkunt (1985) i Alberts *et al.* (1985) mostren la utilització de galgues extensomètriques com a captadors per a la realimentació.

### 2.3.2 Control actiu per avançament o prealimentat (*feedforward control*)

En aquest punt es fa una breu ressenya del control actiu amb prealimentació ja que molts dels autors citats en el subapartat 2.2.2 i en el 2.2.3 consideren els mètodes de definició "a priori" de la llei de moviment (senyal de comandament) com un control actiu prealimentat. Aquí, però, es considera el control actiu prealimentat com el que té físicament una captació de la pertorbació que li arriba al sistema, un processament d'aquest senyal a través d'un controlador, i un actuador addicional que tracta de minimitzar les vibracions residuals. En la Figura 2.10 es mostren els seus elements bàsics.

Fuller *et al.* (1997) expliquen que el control prealimentat es caracteritza perquè el controlador pot saber a priori quin tipus de pertorbació li ha d'arribar. Distingeixen típicament dos casos: el primer seria que es pot tenir informació futura de la pertorbació ja que aquesta és un senyal perfectament determinista. En aquest cas, normalment es capta un senyal de la font de pertorbació inicial, per mantenir el sincronisme amb la generació del senyal de cancel·lació. El segon cas es posaria de manifest quan la pertorbació es propaga a través d'una estructura mecànica, i es pot conèixer la pertorbació en el punt on es vol controlar, perquè a priori aquesta pertorbació s'ha captat en un punt anterior.



**Figura 2.10** Elements bàsics d'un control actiu amb prealimentació (*feedforward control*)

Altres autors com Burdisso *et al.* (1992) presenten aquest mètode, juntament amb tècniques de control adaptatiu, en l'estudi i compensació d'excitacions sísmiques aplicades a estructures d'edificis. Baz *et al.* (1990) utilitzen aquesta tècnica per al control de vibracions en bigues flexibles per mitjà d'actuadors fets amb material amb memòria de forma.

## CAPÍTOL 3

# Eines de disseny i caracterització

En aquest capítol es detallen les principals eines i mètodes que s'utilitzen en el desenvolupament de la tesi. Cal distingir dos apartats: el primer correspon als mètodes que es proposen per dissenyar lleis de moviment, basats en la utilització de corbes de Bézier i corbes B-spline; el segon correspon a les eines bàsiques que s'utilitzen per caracteritzar les vibracions mecàniques, basades en l'anàlisi de senyals en el domini freqüencial, per mitjà de la transformada de Fourier, i en la resposta dels sistemes lineals.

Cal esmentar que, per a la realització d'aquest treball, els càlculs numèrics s'han fet en un entorn digital fent servir principalment el programa *Matlab*<sup>®</sup> i, complementàriament, el programa *Mathematica*<sup>®</sup>.

### 3.1 EINES DE DISSENY DE LLEIS DE MOVIMENT

Tal com s'ha enunciat en el capítol 2, un dels objectius plantejats en aquest treball és la reducció de vibracions residuals després d'un transitori d'una inèrcia que es mou sobre un sistema vibratori. El mètode que es proposa per complir aquest objectiu fa necessari la utilització de polinomis algebraics en els diversos trams que componen la llei de moviment. Cada un d'aquests trams  $j$  es pot expressar de forma paramètrica com:

$$b_j(u) = a_{0j} + a_{1j}u + a_{2j}u^2 + \dots + a_{nj}u^n \quad (3.1)$$

Per a la obtenció d'aquestes funcions es podria pensar, en principi, en la utilització d'una base canònica de monomis que, per a grau  $n$ , serien  $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$ . Tot i això, s'ha explicat en el capítol 2 que la utilització de la base canònica presenta els següents desavantatges:

- Els coeficients dels polinomis  $a_{ij}$  no tenen significat geomètric directe, és a dir, no es pot predir de manera intuïtiva quin efecte tindrà un canvi d'aquests sobre la forma de la corba.
- Les unions entre varis trams de la corba resulten laborioses en el seu càlcul en haver d'incloure, en les equacions del sistema, les condicions que fixen el grau de continuïtat  $C^r$  de la unió.
- Per a valors de polinomis algebraics de grau  $n$  elevat, la base monomial canònica no és estable numèricament.
- Els polinomis algebraics obtinguts amb gran quantitat de punts de pas poden presentar formes no desitjades entre punts.

Per facilitar la síntesi de lleis de moviment representades per trams consecutius de polinomis algebraics, s'utilitzen les corbes de Bézier i les corbes B-spline. Les corbes B-spline –utilitzades majoritàriament en aquest treball– resolen tots els desavantatges plantejats. Les corbes de Bézier, tot i no resoldre'ls en la seva totalitat, poden ser utilitzades còmodament en molts casos i faciliten la comprensió de l'esquema B-spline, ja que es poden presentar com un cas particular d'aquest.

D'altra banda, tant les corbes de Bézier com les corbes B-spline presenten l'avantatge de poder ser obtingudes a través d'algoritmes molt aptes per al càlcul numèric, algoritmes de *de Casteljau* i de *de Boor* respectivament.

### 3.1.1 Corbes de Bézier

Les corbes de Bézier –funcions polinòmiques definides sobre la base de polinomis de Bernstein– reben el seu nom per P.E. Bézier i es van començar a emprar en el disseny de carrosseries, per Renault, a principis dels anys 60. Paral·lelament P. de Casteljau (de Citroën) va desenvolupar la mateixa teoria amb el mateix fi. Els treballs d'aquest darrer no es van arribar a publicar i per això les corbes en base de Bernstein porten el nom de Bézier.

En aquest subapartat s'han seguit com a referència bibliogràfica els textos de Farin (1997), Cardona i Clos (2000) i Reyes (2000).

#### ***Funcions base. Polinomis de Bernstein***

Sobre un domini unitari, els polinomis de Bernstein de grau  $n$  constitueixen una base de l'espai vectorial de polinomis de grau  $n$  i tenen la següent expressió:

$$B_i^n(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad \text{on} \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (3.2)$$

En la Figura 3.1 es mostren els polinomis de Bernstein de graus 1, 2, i 3 així com també els monomis fins a grau 3.

Les principals propietats dels polinomis de Bernstein es poden resumir en:

- Satisfan la fórmula recursiva:

$$B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u) \quad i = 0, \dots, n \quad (3.3)$$

$$B_0^0 = 1; \quad B_{-1}^n(u) = 0$$

- Són una partició de la unitat:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1 \quad (3.4)$$

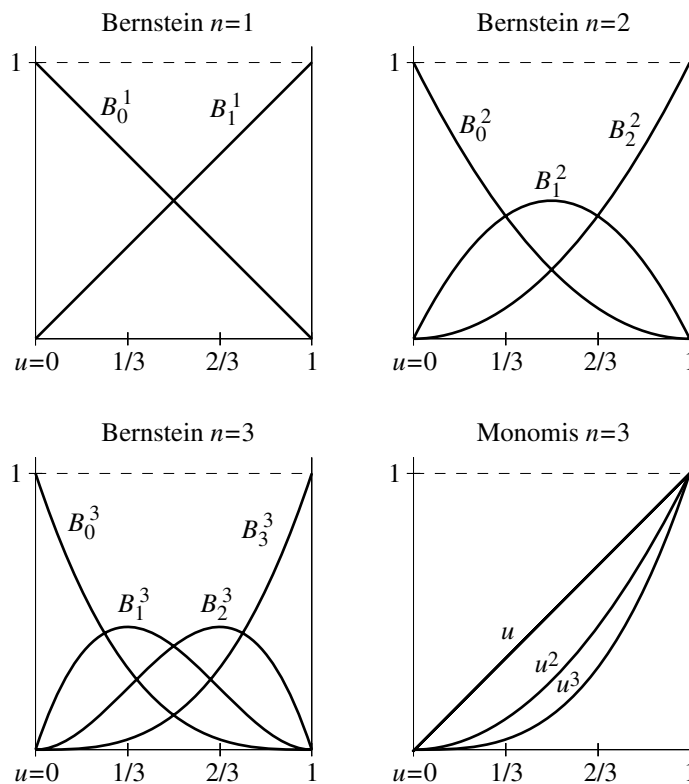
- Són positius:

$$B_i^n(u) \geq 0, \quad u \in [0,1] \quad (3.5)$$

- Tenen comportament simètric respecte als dos extrems de l'interval de definició

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u) \quad (3.6)$$

- A cada extrem només hi ha un polinomi de valor no nul.
- Presenten un màxim per a l'abscissa  $i/n$ .
- Constitueixen una base numèricament estable.



**Figura 3.1** Polinomis de Bernstein de graus  $n=1, 2$  i  $3$  i monomis fins a grau  $3$



### Corbes de Bézier no paramètriques i no racionals

Les corbes de Bézier  $b(u)$  poden ser paramètriques o no paramètriques, amb  $u \in [0,1]$ . En el primer cas,  $u$  és el paràmetre  $i$ , per exemple, poden representar corbes en 3D essent  $\mathbf{b}(u)$  un vector de tres components. Si no són paramètriques, el paràmetre  $u$  representa la variable de l'eix d'abscisses del gràfic de la corba  $b(u)$ .

Les corbes de Bézier també es poden classificar en no racionals –l'expressió que les defineix és un polinomi algebraic– o racionals –si l'expressió que les defineix és el quocient entre dos polinomis algebraics.

Per a l'aplicació considerada, es presenten únicament les corbes de Bézier no paramètriques i no racionals, ja que les corbes racionals no aporten cap avantatge significatiu respecte a les no racionals i, en canvi, augmenten considerablement la seva complexitat de càlcul. A partir d'aquí, com que totes les corbes de Bézier esmentades en l'apartat seran no paramètriques i no racionals, en general s'obvien el termes.

Una corba de Bézier  $b(u)$  s'obté en la base de polinomis de Bernstein com:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad u \in [0,1] \quad (3.7)$$

on els  $n+1$  coeficients  $b_i$  s'anomenen *ordenades de Bézier*. El gràfic de la funció  $b(u)$  s'anomena *corba de Bézier no paramètrica*. Per a cada ordenada  $b_i$  es defineix un punt  $\mathbf{b}_i$  de coordenades  $(i/n, b_i)$  anomenat *punt de control* i el conjunt de punts de control formen l'anomenat *polígon de control*.

A l'expressió (3.7) el polinomi  $B_i^n(u)$  es pot interpretar com la influència de  $b_i$  sobre la corba  $b(u)$ . Aquesta influència és màxima a  $u=i/n$ , ja que  $B_i^n(u)$  hi presenta un màxim. Això fa que la representació gràfica de la corba  $b(u)$  tendeixi a ser propera al polígon de control (Figura 3.2), i si es desplaça verticalment un punt de control –es modifica la ordenada  $b_i$  corresponent– la corba presenta la modificació més acusada a l'entorn d'aquest punt.

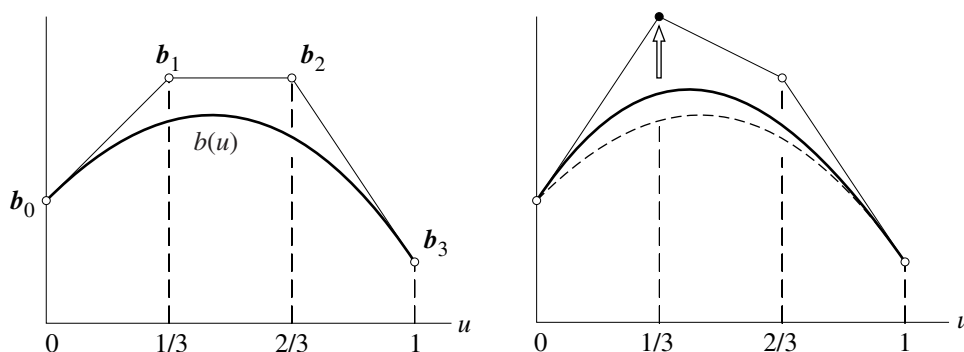


Figura 3.2 Corba de Bézier no paramètrica de grau  $n=3$ . Influència del punt  $b_1$

Aquesta propietat i les següents donen un significat geomètric a les ordenades de Bézier que facilita el disseny i la modificació interactiva d'una corba de Bézier:

- La corba passa pels punts extrems  $b_0$ ,  $b_n$  i és tangent al polígon de control en aquests punts.
- La corba es troba tancada dins el domini convex dels punts de control (Figura 3.3). El polígon de control permet establir una caixa contenidora dins la qual es pot assegurar que es troba la corba.
- Precisió lineal. Si tots els punts de control estan sobre una recta, la corba de Bézier és precisament aquesta recta.
- Disminució de variacions. Segons aquesta propietat, el nombre d'interseccions de la corba amb una recta és menor o igual que el nombre d'interseccions de la recta amb el polígon de control.
- Invariància en front de transformacions afins. Això permet girar, traslladar o escalar la corba aplicant transformacions només al polígon de control.

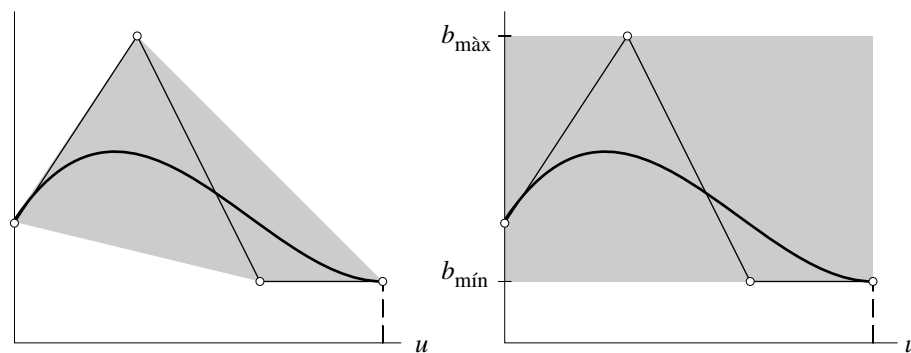


Figura 3.3 Domini convex i caixa contenidora d'una corba de grau  $n = 3$

A més, resulta interessant observar els casos particulars següents (Figura 3.4):

- $n = 1$ : segment rectilini d'extrems  $b_0$ ,  $b_1$ .
- $n = 2$ : segment parabòlic d'extrems  $b_0$  i  $b_2$  amb tangents en aquests punts que es tallen a  $b_1$ .

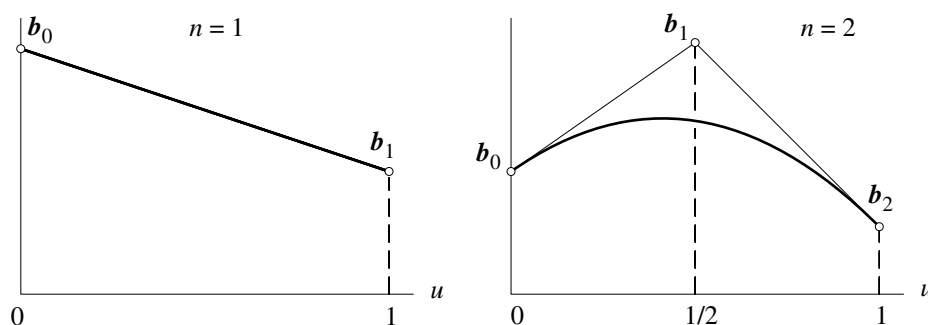


Figura 3.4 Corbes de Bézier no paramètriques de graus  $n = 1, 2$

### **Algoritme de de Casteljau**

Per trobar el valor d'un punt qualsevol de la corba de Bézier  $b(u)$  es pot fer servir, alternativament a l'expressió (3.7), l'algoritme de *de Casteljau*.

A partir dels punts de control  $b_i$  de coordenades  $(i/n, b_i)$ , el punt sobre la corba es calcula a partir de l'expressió recursiva següent:

$$b_i^k(u) = (1-u)b_i^{k-1}(u) + u b_{i+1}^{k-1}(u) \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-k \end{array} \quad (3.8)$$

Per a la iteració  $k=0$ , s'assigna el valor de la ordenada  $b_i$ , és a dir,  $b_i^0 = b_i$ . El valor de la corba de Bézier en l'abscissa  $u$  és, finalment,  $b(u) = b_0^n(u)$ .

Aquest algoritme presenta l'avantatge principal respecte als polinomis de Bernstein, de ser molt apte per a l'obtenció de corbes de Bézier per mitjà del càlcul numèric.

### **Derivació i integració d'una corba de Bézier no paramètrica**

La derivada  $b'(u)$  respecte a l'argument  $u$  d'un polinomi  $b(u)$  de grau  $n$  és un polinomi de grau  $n-1$

$$b'(u) = \frac{d b(u)}{d u} \quad (3.9)$$

A la base de Bernstein, es pot comprovar que els coeficients  $b'_i$  de la derivada s'obtenen com

$$b'_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.10)$$

i la corba  $b'(u)$  s'expressa com

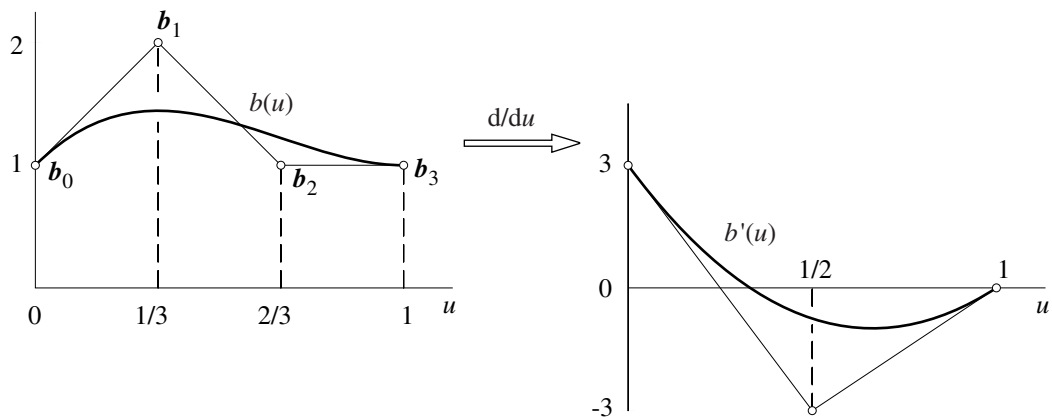
$$b'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} b'_i B_i^{n-1}(u) \quad u \in [0,1] \quad (3.11)$$

En la Figura 3.5 es presenta com exemple la derivada d'una corba cúbica ( $n = 3$ ), que és una corba parabòlica. Aquesta última s'ha representat amb una escala reduïda 3 vegades per a l'eix d'ordenades.

De l'expressió (3.10) es dedueix que, en el procés d'integració,

$${}'b_{i+1} = {}'b_i + \frac{b_i}{n+1} \quad (3.12)$$

essent  $b_i$  les ordenades de Bézier de la funció de partida,  $n$  l'ordre d'aquesta i  $'b_i$  les ordenades de la funció integrada. Per fixar els valors de  $'b_i$  cal imposar una condició a la funció integrada; el més usual és el valor inicial, que en aquest cas és igual a  $'b_0$ .



**Figura 3.5** Derivada d'una corba de Bézier no paramètrica de grau  $n = 3$

La utilització de les corbes de Bézier per tal de definir una funció  $b(s)$  de la variable independent  $s$  entre  $s_0$  i  $s_1$ ,  $s \in [s_0, s_1]$ , i el fet que les corbes de Bézier  $b(u)$  es defineixen en un domini unitari  $u \in [0, 1]$ , fa que usualment s'utilitzi el canvi de variable lineal

$$u = \frac{s - s_0}{s_1 - s_0} \tag{3.13}$$

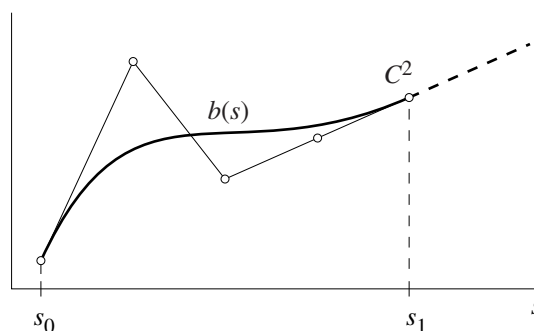
Amb aquest canvi de variables, la relació entre la derivada  $b'(u(s))$  respecte a  $u(s)$  i la derivada  $b'(s)$  respecte a  $s$  és

$$b'(s) = b'(u(s)) u'(s) = \frac{b'(u(s))}{s_1 - s_0} \tag{3.14}$$

**Condicions de continuïtat**

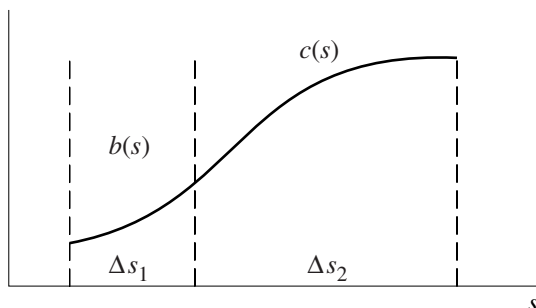
L'expressió (3.10) posa de manifest que les derivades  $r$ -èsimes en els extrems  $u = 0$ ,  $u = 1$  només depenen dels  $r+1$  punts de control més propers, és a dir, a  $u = 0$  només depèn dels coeficients  $b_0 \dots b_r$ , i a  $u = 1$  dels coeficients  $b_{n-r} \dots b_n$ .

La imposició de condicions de continuïtat  $r$ -èsima  $C^r$  en la unió entre dues corbes resulta, doncs, molt més senzilla en la base de Bernstein que en la base de monomis, ja que només es veuen involucrats  $r+1$  coeficients de cada corba.



**Figura 3.6** Unió  $C^2$  d'una recta amb una corba de Bézier

En el cas particular d'unió d'una corba de Bézier amb un tram recte, per aconseguir continuïtat  $C^r$  respecte al paràmetre  $s$ , n'hi ha prou que els  $r+1$  punts de control més propers a la unió es trobin sobre la prolongació del tram recte (Figura 3.6).



**Figura 3.7** Unió de dos trams de corbes de Bézier

En el cas més general, es planteja determinar la corba de Bézier que s'uneix amb continuïtat  $C^r$  amb una altra corba coneguda (Figura 3.7). Si la corba coneguda és de Bézier  $b(s)$ , d'ordre  $n_1$  i interval de definició  $\Delta s_1$ — les derivades respecte a  $s$  en el punt d'unió es poden trobar de manera recurrent utilitzant l'expressió (3.10) i tenint en compte que les corbes de Bézier passen pels punts de control extrems. Per exemple, si la unió es fa amb l'últim punt de la corba coneguda:

$$\begin{aligned}
 b_{n_1} & & b(s_{1\text{màx}}) &= b_{n_1} \\
 b'_{n_1-1} &= (b_{n_1} - b_{n_1-1})n_1 & b'(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} &= b'(u) \Big|_{u=1} \frac{1}{\Delta s_1} = b'_{n_1-1} \frac{1}{\Delta s_1} \\
 b''_{n_1-2} &= (b'_{n_1-1} - b'_{n_1-2})(n_1 - 1) & b''(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} &= b''_{n_1-2} \frac{1}{(\Delta s_1)^2} \\
 \vdots & & \vdots &
 \end{aligned}$$

Conegudes aquestes derivades, les ordenades de Bézier  $c_i$  de la corba de Bézier  $c(s)$ , ordre  $n_2$  i interval de definició  $\Delta s_2$ — que empalma amb continuïtat  $C^r$  amb la primera, es poden trobar a partir de l'expressió (3.12) i tenint en compte que les corbes de Bézier passen pels punts extrems

$$\begin{aligned}
 c_0 &= b_{n_1}, \quad c_1 = c_0 + \frac{c'_0}{n_2}, \quad c_2 = c_1 + \frac{c'_1}{n_2}, \quad \dots \\
 c'_0 &= c'(u) \Big|_{u=0} = c'(s) \Big|_{s_{2\text{mín}}} \Delta s_2 = b'(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} \Delta s_2 = b'_{n_1-1} \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}; \quad c'_1 = c'_0 + \frac{c''_0}{n_2 - 1}, \quad \dots \\
 c''_0 &= b''(s) \Big|_{s_{1\text{màx}}} (\Delta s_2)^2 = b''_{n_1-2} \left( \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \right)^2, \quad \dots \\
 \vdots &
 \end{aligned}$$

Com a casos particulars en unir dues corbes de Bézier:

- Si es vol continuïtat  $C^1$  només cal que els dos últims punts de control del primer tram estiguin alineats amb els dos primers del segon tram –les corbes de Bézier en els extrems són tangents al polígon de control.
- Si les dues corbes de Bézier són del mateix ordre i estan definides en el mateix interval ( $n=n_1=n_2$  i  $\Delta s_1=\Delta s_2$ ) i tenen continuïtat  $C^r$ , les ordenades de Bézier respectives guarden la relació:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & & \\ 8 & -12 & 6 & -1 & 0 & \dots & \\ 16 & -32 & 24 & -8 & 1 & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ b_{n-3} \\ b_{n-4} \\ \vdots \\ b_{n-r} \end{pmatrix}$$

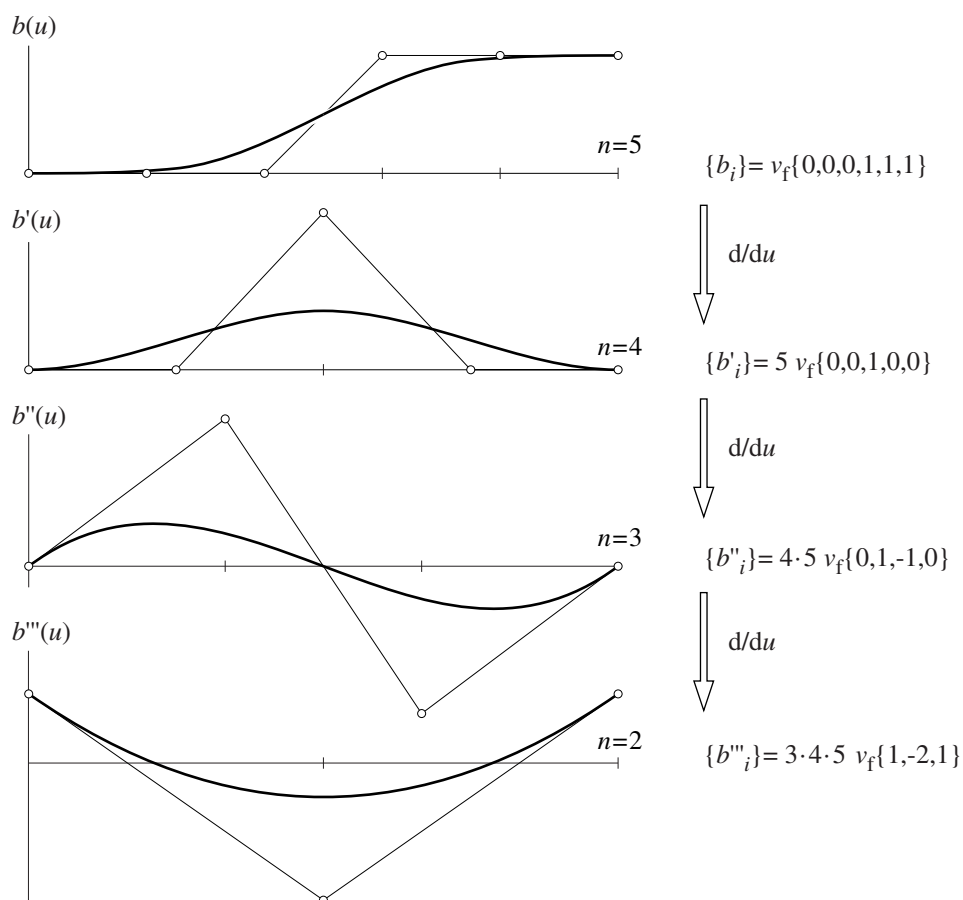
**Avantatges i limitacions de les corbes de Bézier no paramètriques**

La definició d’una llei de moviment per mitjà de corbes de Bézier no paramètriques i no racionals té l’avantatge que la seva geometria es pot controlar de manera molt intuïtiva a través del polígon de control. Tot i això, es presenten a continuació unes certes limitacions que justifiquen en alguns casos la necessitat d’emprar corbes amb més flexibilitat de disseny, com les B-spline:

- La continuïtat  $C^r$  en la unió entre dos trams consecutius no queda automàticament garantida.
- El grau de la corba depèn del nombre de punts del polígon de control. Si la corba té una forma molt complexa, el seu grau ha de ser elevat, i això pot provocar inestabilitat en el càlcul numèric.
- Falta de control local de la corba: el desplaçament d’un punt de control afecta tota la corba.
- La posició de les abscisses dels punts de control és equidistant i no es pot modificar.

**Exemple de disseny de llei de velocitats**

En l’exemple de la Figura 3.8 es mostra la definició de la llei de velocitats  $b(u)$  d’engedada d’un carro portaeines d’una màquina de control numèric, que ha de passar de velocitat nul·la a velocitat constant  $v_f$  i per a la qual es desitja que la continuïtat en l’acceleració sigui  $C^1$ . Es mostren també les successives derivades d’aquesta llei. Les escales de les diferents gràfiques s’han adequat per a la seva correcta visualització.



**Figura 3.8** Llei de velocitat d’engageda d’un carro portaeines i derivades successives

Per garantir la continuïtat de  $C^1$  en l’acceleració, és necessària una continuïtat  $C^2$  en velocitat, és a dir, el polígon de control ha de tenir 3 punts sobre les rectes de velocitat nul·la i velocitat constant  $v_f$ . Per tant, el grau mínim del polinomi que defineix la llei de velocitat és  $n=5$ .

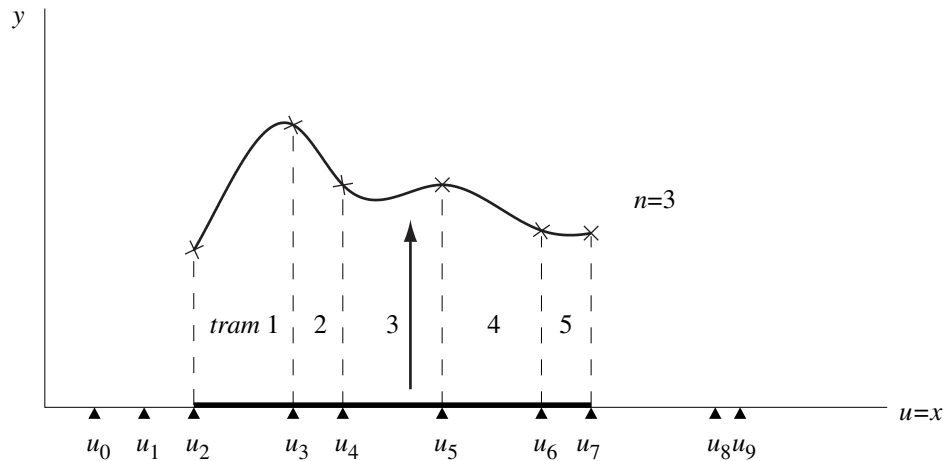
### 3.1.2 Corbes B-spline

El terme *spline* prové de certs llistons flexibles, de fusta o metall, que utilitzaven els dissenyadors de vaixells o avions, per definir la forma del casc o fuselatge. Per obtenir la forma desitjada s’unien alguns d’aquests llistons i se’ls obligava a seguir una corba mitjançant pesos o estakes. El llistó restava lliure entre aquestes restriccions.

Una corba *spline* és aquella corba contínua que està formada per diversos trams polinòmics. Usualment les corbes *spline* estan representades analíticament en forma de funcions polinòmiques anomenades *B-spline* i, llavors, les corbes s’anomenen *corbes B-spline*.

En aquest subapartat s’exposen els mètodes per definir corbes B-spline no paramètriques i no racionals extrets principalment dels textos de Farin (1997) i Reyes (2000).

Una corba B-spline de grau  $n$  és la unió de  $L$  trams polinòmics de grau  $n$ , on cada un és la imatge d'un interval  $[u_i, u_{i+1}]$  del domini  $[u_{n-1}, \dots, u_{L+n-1}]$  i on  $u$  és el paràmetre de la corba. Els nombres reals  $u_i$  s'anomenen *nodes*. Els nodes formen una seqüència creixent  $\mathbf{u} = \{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\}$  anomenada *vector* o *seqüència de nodes*.



**Figura 3.9** Domini de definició i trams d'una corba B-spline de grau  $n=3$

En la Figura 3.9 es mostra l'exemple d'una corba B-spline on el paràmetre  $u$  coincideix amb la coordenada de l'eix d'abscisses  $x$  (corba no paramètrica), de grau  $n=3$  i nodes  $\mathbf{u} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13\frac{1}{2}, 14\}$ . En aquest cas, la corba queda definida en el domini  $[u_2, \dots, u_7]$  i els trams que conformen la corba són  $L=5$ .

### **Corbes B-spline no paramètriques i no racionals**

A l'igual que en les corbes de Bézier, les corbes B-spline poden ser paramètriques o no paramètriques i racionals o no racionals. Per al desenvolupament teòric de la tesi es fan servir les corbes B-spline no paramètriques i no racionals ja que, dintre de la família de corbes B-spline, cobreixen perfectament tots els requeriments de flexibilitat i facilitat de disseny i, d'altra banda, són les que requereixen menor complexitat de càlcul. A l'igual que per a les corbes de Bézier, totes les corbes esmentades en el subapartat seran no paramètriques i no racionals i, per tant, en general s'obvia el terme.

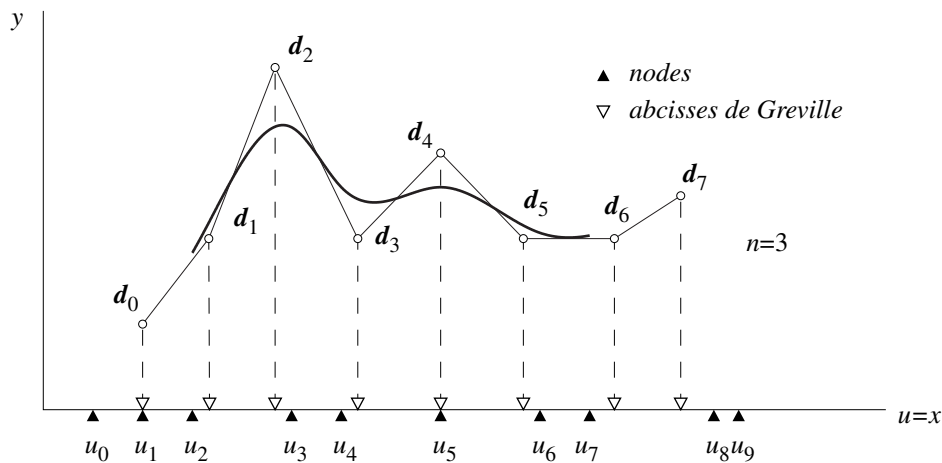
Una corba B-spline no paramètrica està associada a un *polígon de control* que té  $L+n$  punts  $\mathbf{d}_i$  anomenats *punts de control*. Les coordenades  $(\xi_i, d_i)$  dels punts de control tenen ordenades  $d_i$  de lliure elecció i abscisses anomenades *abscisses de Greville*  $\xi_i$  determinades per la seqüència de nodes:

$$\xi_i = \frac{1}{n}(u_i + \dots + u_{i+n-1}) \quad i = 0, \dots, L+n-1 \quad (3.15)$$

En la Figura 3.10 es mostren les abscisses de Greville, i el polígon de control per al cas de la corba de l'exemple anterior. Les abscisses de Greville, que determinen la posició



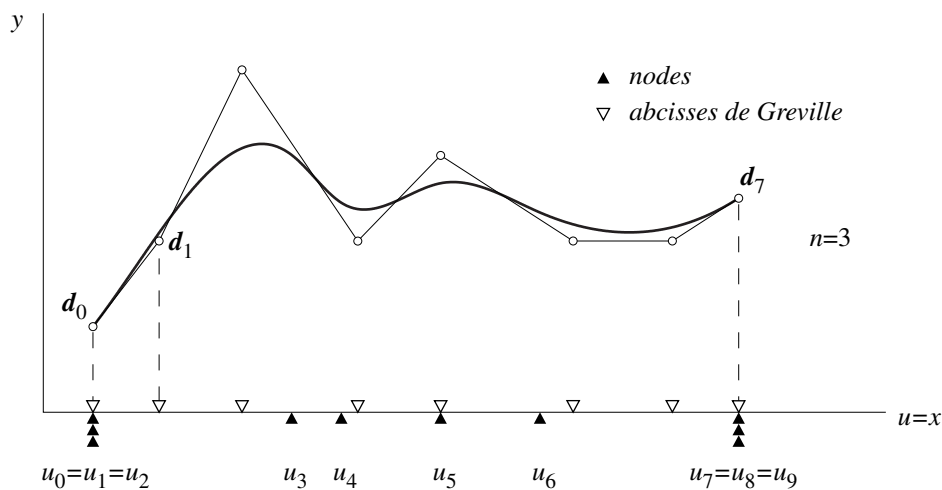
dels punts de control sobre l'eix  $x$ , han estat calculades a partir del vector de nodes  $u$ , essent les ordenades  $d_i$  de lliure elecció.



**Figura 3.10** Abscisses de Greville i polígon de control d'una corba B-spline de grau  $n=3$

En la definició de lleis de moviment, acostuma a ser interessant que la corba que es dissenya es vulgui fer passar pels punts de control inicial i final, o d'altres punts intermedis del polígon de control. En l'esquema B-spline es controla aquesta propietat introduint nodes de valor repetit en el vector de nodes. Si un node es repeteix  $r$  vegades es diu que té *multiplicitat*  $r$ . Els *nodes simples* són aquells que la seva multiplicitat  $r$  és la unitat. Si un node té multiplicitat  $r=n$ , llavors la corba passa pel node.

En la Figura 3.11 es mostra el control dels punts de pas extrems per al cas de la corba de l'exemple anterior. S'han fet coincidir els tres primers nodes i els tres darrers per obtenir multiplicitats  $r=n=3$  i així fer passar la corba pels extrems del polígon de control.



**Figura 3.11** Control dels punts de pas extrems en una Corba B-spline de grau  $n=3$

Quan algun dels nodes intermedis ( $u_n, \dots, u_{n+L-2}$ ) pren multiplicitat  $r$  diferent de la unitat, genera  $r-1$  trams de longitud nul·la. Per tant, el nombre de trams polinòmics no nuls que formen la corba serà el valor de  $L$  disminuït en una unitat per cada increment de multiplicitat d'aquests nodes.

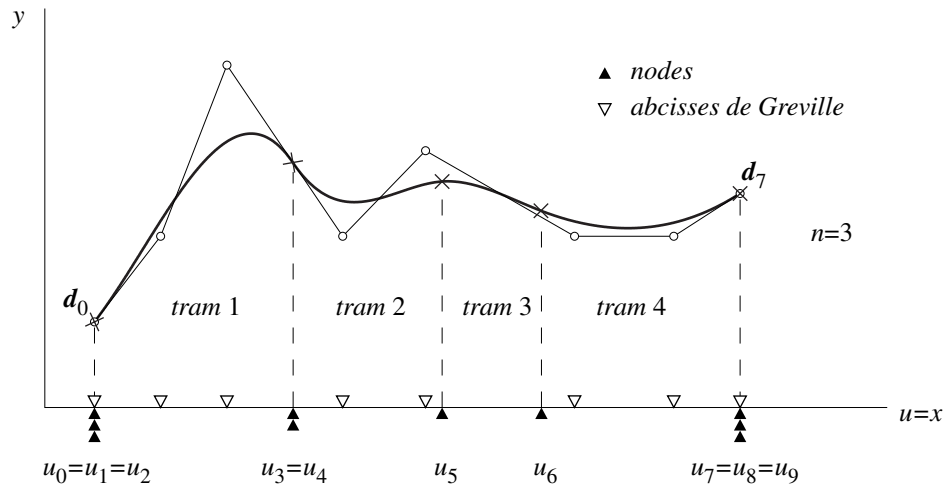


Figura 3.12 Increment de multiplicitat dels nodes intermedis i trams resultants

En la Figura 3.12 es mostra la corba de l'exemple anterior on s'han fet coincidir els nodes  $u_3$  i  $u_4$ . En aquest cas  $L=5$  (mateix nombre total de nodes) però ara la corba està formada per 4 trams polinòmics no nuls, ja que existeix un node intermedi amb multiplicitat 2.

### Funcions Base B-spline

Una corba B-spline no paramètrica es pot expressar segons:

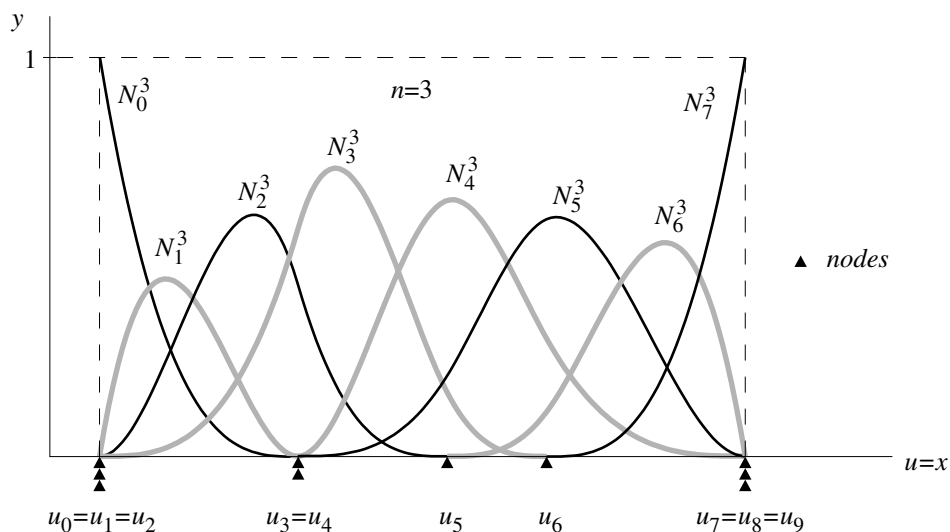
$$y(u) = \sum_{i=0}^{L+n-1} d_i N_i^n(u) \quad (3.16)$$

on  $d_i$  són les ordenades dels punts de control i  $N_i^n(u)$  són les funcions base. En la Figura 3.13 es mostren les funcions base per a la corba B-spline del darrer exemple. Aquestes funcions base es defineixen de forma recursiva com

$$N_i^n(u) = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u) \quad i = 0, \dots, L+n-1 \quad (3.17)$$

amb

$$\begin{cases} N_i^0(u) = 1 & u_{i-1} \leq u < u_i & i = 0, \dots, L+2n-2 \\ N_i^0(u) = 0 & u < u_{i-1}, \quad u \geq u_i \\ N_{L+2n-1}^0(u) = 0 \\ \begin{cases} u_{-1} = u_0 \\ u_{L+2n-1} = u_{L+2n-2} \end{cases} \end{cases}$$



**Figura 3.13** Funcions base B-spline de grau  $n=3$  per al vector de nodes indicat

Segons Carnicer i Peña (1994), les funcions base de l'expressió (3.17) constitueixen una base de l'espai de les funcions polinòmiques definides a trossos –corbes B-spline– de grau  $n$  sobre el vector de nodes  $\mathbf{u}$ .

Les principals propietats d'aquestes funcions base són:

- Cada funció  $N_i^n(u)$  està definida segons:

$$\begin{aligned} N_i^n(u) &> 0 && u_{i-1} \leq u < u_{i+n} \\ N_i^n(u) &= 0 && u < u_{i-1}, \quad u \geq u_{i+n} \end{aligned} \quad (3.18)$$

- Són una partició de la unitat:

$$\sum_{i=0}^{L+n-1} N_i^n(u) = 1 \quad (3.19)$$

- Són positives en el seu interval de definició.
- Constitueixen una base numèricament estable.

Les corbes B-spline gaudeixen de les següents propietats comunes amb les corbes de Bézier:

- La corba passa pels punts extrems de control i és tangent al polígon de control en ells quan la multiplicitat dels nodes extrems  $r$  coincideix amb el grau del polinomi  $n$ .
- La corba es troba tancada dins el domini convex dels punts de control.
- Precisió lineal.
- Disminució de variacions.
- Invariància en front de transformacions afins.

### ***Algoritme de de Boor***

Per trobar el valor d'un punt qualsevol sobre la corba B-spline  $y(u)$  es pot fer servir, alternativament a l'expressió (3.16), l'algoritme de *de Boor*. La corba s'avalua per a un valor del paràmetre  $u$  que està en l'interval  $I$  dintre dels  $L$  intervals del domini de la corba,  $u \in [u_I, u_{I+1}) \subset [u_{n-1}, u_{L+n-1}]$ . El procés es resol en diverses iteracions  $k = 1, \dots, n-r$  on, si  $u$  coincideix amb un node intern,  $r$  indica la multiplicitat del node, i si  $u$  no coincideix amb un node intern,  $r$  val zero.

Partint dels punts de control  $d_i$  de coordenades  $(\xi_i, d_i)$ , el punt sobre la corba es calcula a partir de l'expressió recursiva següent:

$$d_i^k(u) = \frac{u_{i+n-k} - u}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} d_{i-1}^{k-1}(u) + \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} d_i^{k-1}(u) \quad k = 1, \dots, n-r \quad (3.20)$$

$$i = I - n + k + 1, \dots, I - r + 1$$

Per a la iteració  $k=0$  s'assigna el valor de la ordenada  $d_i$ , és a dir,  $d_i^0 = d_i$ . El valor de la corba B-spline en l'abscissa  $u$  és

$$y(u) = d_{I-r+1}^{n-r}(u) \quad (3.21)$$

Aquest algoritme, a l'igual que l'algoritme de *de Casteljau* per a les corbes de Bézier, presenta l'avantatge principal respecte a les funcions base B-spline de ser molt apte per a l'obtenció de corbes B-spline per mitjà del càlcul numèric.

### ***Derivació i integració d'una corba B-spline no paramètrica***

La derivada d'una corba B-spline no paramètrica és una altra corba B-spline no paramètrica. La derivació d'una corba B-spline es pot obtenir a partir del vector de nodes  $\mathbf{u} = \{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\}$ , del grau  $n$ , i de les ordenades dels punts de control  $d_i$  de la corba de partida. L'obtenció del vector de nodes  $\mathbf{u}'$ , i de les coordenades dels punts de control  $(\xi'_i, d'_i)$  de la corba derivada es fa segons les següents expressions,

$$\mathbf{u}' = \{u'_0, u'_1, \dots, u'_{L+2n-4}\} \quad (3.22)$$

on

$$u'_i = u_{i+1} \quad i = 0, \dots, L + 2n - 4 \quad (3.23)$$

$$\xi'_i = \frac{1}{n-1}(u_{i+1} + \dots + u_{i+n-1}) \quad i = 0, \dots, L + n - 2 \quad (3.24)$$

$$d'_i = n \frac{d_{i+1} - d_i}{u_{n+i} - u_i} \quad i = 0, \dots, L + n - 2 \quad (3.25)$$

Cal notar que el polígon de control de la corba derivada té un punt menys que el de la corba de partida i que el vector de nodes té dos punts menys que els de la corba de partida.

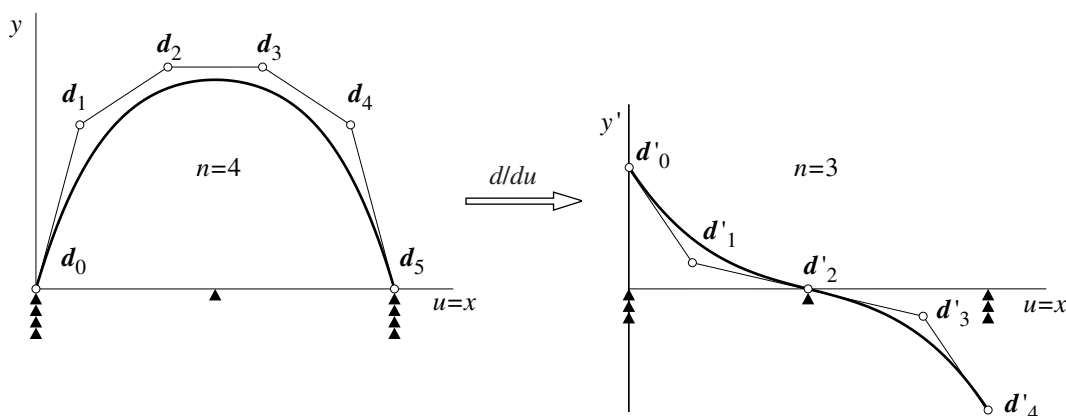


Figura 3.14 Derivada d'una corba B-spline no paramètrica de grau  $n=4$

En la Figura 3.14 es mostra gràficament el procés de derivació. El grau del polinomi que defineix la corba disminueix en una unitat i el primer i darrer nodes queden eliminats. La corba de l'exemple, amb grau  $n=4$  i vector de nodes  $\mathbf{u} = \{0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1\}$  passa a tenir grau 3 i vector de nodes  $\mathbf{u} = \{0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1\}$ .

En les corbes que passen pels punts de control extrems, és a dir, en les que els nodes extrems tenen multiplicitat  $r=n$ , es dedueix el procés d'integració a partir de les expressions (3.24) i (3.25). Si de la corba de partida es coneix el vector de nodes  $\mathbf{u} = \{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\}$ , el grau  $n$  i les ordenades dels punts de control  $d_i$ , el vector de nodes de la corba integrada  $\mathbf{u}$  i les coordenades del polígon de control  $(\xi'_i, d'_i)$  són

$$\mathbf{u} = \{u_0, u_1, \dots, u_{L+2n}\} \quad (3.26)$$

on

$$\begin{aligned} u'_i &= u_{i-1} \quad i = 1, \dots, L + 2n - 1 \\ u'_0 &= u_0 \\ u'_{L+2n} &= u_{L+2n-2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\xi_i = \frac{1}{n+1} (u_i + \dots + u_{i+n}) \quad i = 0, \dots, L+n \quad (3.28)$$

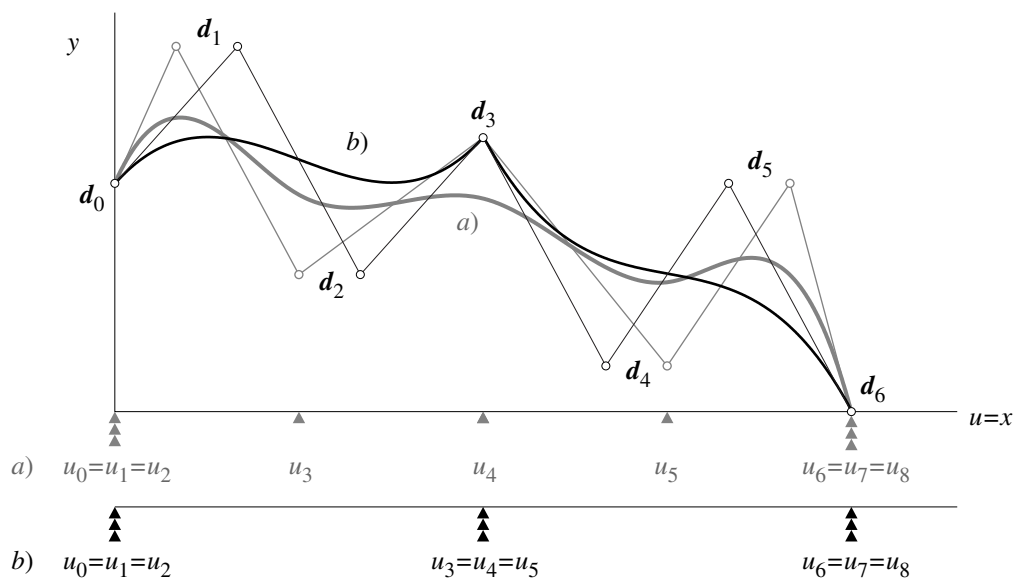
$$d_{i+1} = d_i + \frac{d_i}{n+1} (u_{n+i+1} - u_i) \quad i = 0, \dots, L+n-1 \quad (3.29)$$

Per fixar els valors de  $d_i$  cal imposar una condició a la funció integrada; el més usual és el valor inicial, que en aquest cas és igual a  $d_0$ .

**Condicions de continuïtat**

En les corbes B-spline, la continuïtat mínima en la unió entre trams ve donada per les multiplicitats dels nodes dintre del vector de nodes. En nodes de multiplicitat  $r$ , la corba té una continuïtat al menys de  $C^{n-r}$ . De l'expressió (3.15) es dedueix que si un node  $u_i$  té multiplicitat  $r=n$  llavors  $\xi_i = u_i = \dots = u_{i+n-1}$ , per tant, com s'ha explicat per al control de pas dels nodes extrems, l'abscissa del punt de control coincideix amb el node. En aquest cas, la corba passa pel punt de control i com a mínim és  $C^0$ .

En la Figura 3.15 s'observa l'exemple de dues corbes B-spline de grau  $n=3$ , on el vector de nodes pren diferents valors de multiplicitat en el node central: a)  $\mathbf{u}=\{0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1\}$  i b)  $\mathbf{u}=\{0,0,0,1/2,1/2,1/2,1,1,1\}$ .



**Figura 3.15** Control de continuïtat en corbes B-spline de grau  $n=3$

A l'igual que succeeix en les corbes de Bézier, per aconseguir continuïtat  $C^r$  respecte al paràmetre  $u$  en el cas particular d'unió d'una corba B-spline amb un tram recte, n'hi ha prou que els  $r+1$  punts de control més propers a la unió es trobin sobre la prolongació del tram recte.

### Avantatges de les corbes B-spline en front de les corbes de Bézier

Per enumerar els avantatges de les corbes B-spline en front de les corbes de Bézier, cal fer notar que una corba de Bézier és un cas particular de corba B-spline. Una corba de Bézier es pot expressar com una corba B-spline d'un únic tram ( $L=1$ ). El vector de nodes ha de tenir  $n$  nodes iguals al principi i al final, i cap node intern. Amb aquest vector de nodes, les abscisses de Greville estan equiespaiades, i els punts de control de la corba de Bézier coincideixen amb els punts de control de la corba B-spline.

Aquest fet denota que l'esquema B-spline és més ampli que l'esquema Bézier. Les corbes B-spline resolen també la majoria de limitacions de les corbes de Bézier:

- La continuïtat  $C^r$  en la unió entre dos trams consecutius queda automàticament garantida.
- Es poden augmentar el nombre de punts de control de la corba sense augmentar-ne el grau.
- Es té control local sobre la corba. Cada punt de control  $d_i$  està relacionat amb una funció base  $N_i^n(u)$  i per tant el canvi de posició d'un punt de control afecta només els trams en els quals aquesta funció base és no nul·la  $u_{i-1} \leq u < u_{i+n}$  (Figura 3.16).
- Es pot canviar la posició de les abscisses dels punts de control.

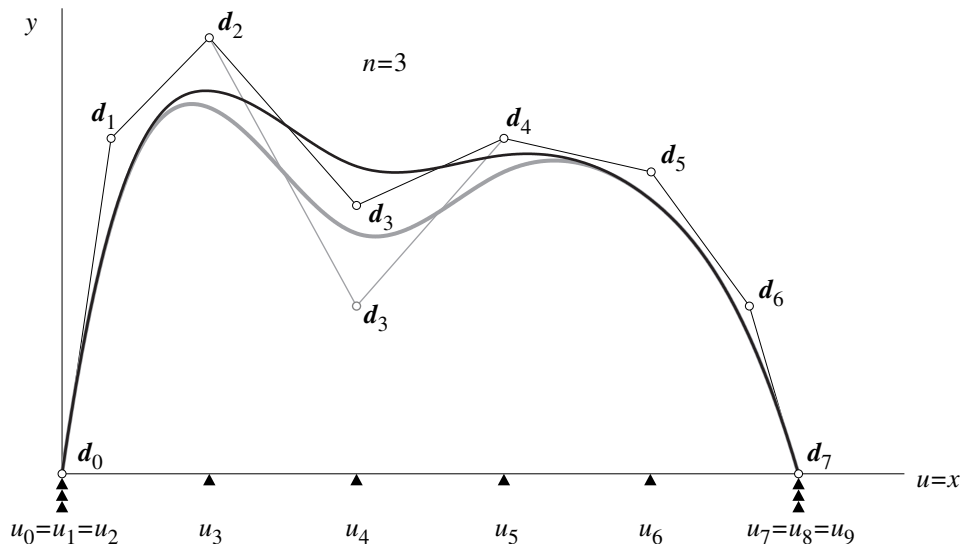
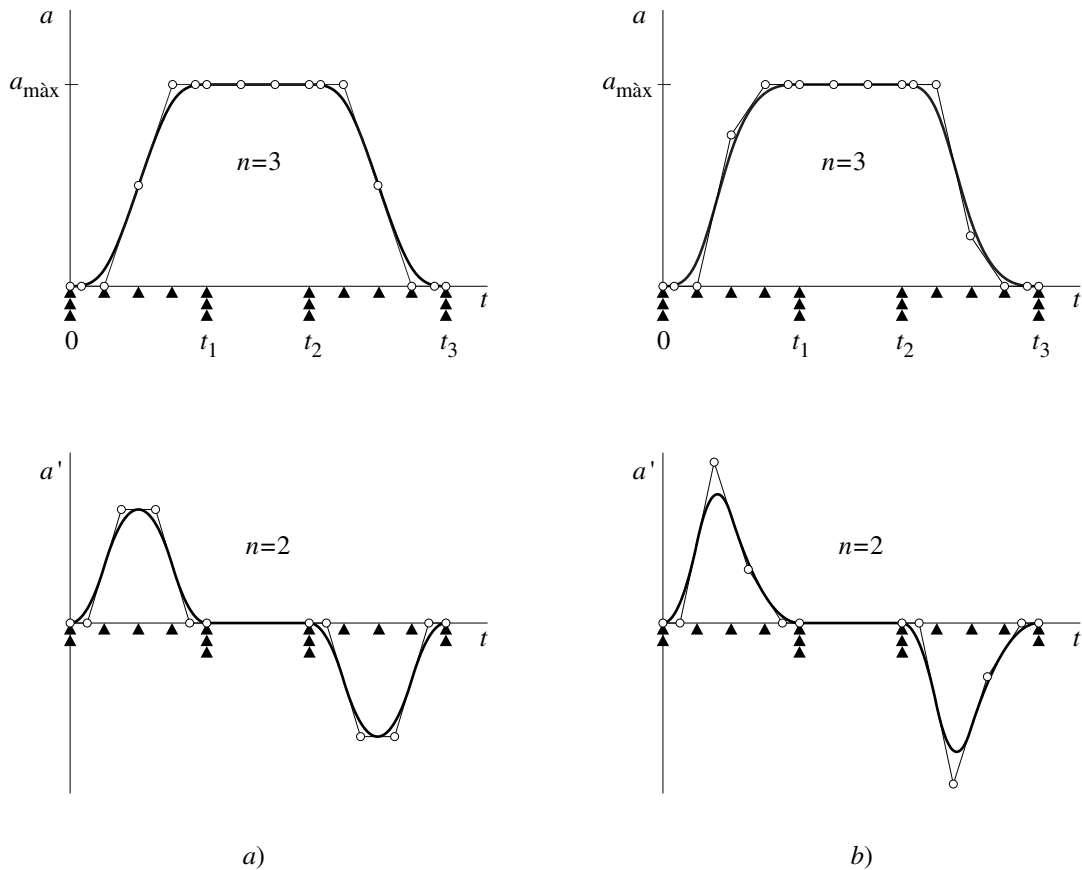


Figura 3.16 Control local d'una corba B-spline no paramètrica de grau  $n=3$ .

### Exemple de disseny de llei d'acceleracions

Es mostra, en el següent exemple, la definició de la llei d'acceleracions del moviment d'engegada d'un braç manipulador. Es vol que l'acceleració màxima sigui  $a_{\text{màx}}$  constant entre  $t_1$  i  $t_2$  i que el transitori s'acabi a  $t_3$ . També es requereix que la continuïtat en les unions dels diferents trams que componen aquesta llei sigui com a mínim  $C^2$ .

Finalment es desitja controlar localment la forma de la corba d'acceleració en els trams de pujada i de baixada.



**Figura 3.17** Lleis d'acceleració de grau  $n=3$  i les seves derivades, amb punts de control en els trams de pujada i baixada

Una possible metodologia de disseny de la llei d'acceleració, per complir les especificacions enunciades seria la següent:

- Grau dels polinomis: en general amb grau  $n=3$  serà suficient.
- Punts de pas segons l'especificació: punt a l'inici ( $t=0$ ) i al final ( $t=t_3$ ), i també el punt d'acceleració  $a_{\text{màx}}$  a  $t_1$  i a  $t_2$ . Es necessitarà un node de multiplicitat  $r=3$  per a cada punt de pas. El vector de nodes quedarà provisionalment com  $\mathbf{u}=\{0,0,0, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_3, t_3, t_3\}$ .
- Càlcul del paràmetre  $L$  provisional: se sap que el subíndex del darrer node és  $L+2n-2$  i en aquest cas el darrer node és el  $u_{11}$ . Per tant  $L=7$ .
- Nombre mínim de punts de control: per poder complir la condició de continuïtat  $C^2$ , en cada unió caldrà alinear 3 punts amb els trams d'acceleració constant, nul·la o no nul·la, ja que la multiplicitat dels nodes en les zones d'unió fa que la continuïtat mínima garantida sigui  $C^0$ . Això fa que el polígon de control necessiti 3 punts en 2 unions, més 1 punt de control local del tram, per al tram de pujada (total 7 punts inclosos els d'unió) i el mateix per al tram de baixada.



- Polígon de control provisional: només té  $L+n=10$  punts dels quals 4 corresponen a les unions (estan sobre els nodes de multiplicitat  $r=3$ ), 2 al tram de pujada, 2 al tram d'acceleració constant i 2 més al tram de baixada.
- Recàlcul del vector de nodes: segons el que s'ha explicat, per als trams de pujada i baixada es necessiten 7 punts (inclosos els d'unió) i ara només n'hi ha 4. Per tant, s'afegiran 3 nodes de multiplicitat  $r=1$  (es garanteix  $C^2$ ) en el tram de pujada i altres 3 en el tram de baixada. El nou vector de nodes, que es proposa, queda finalment com

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, 0, \frac{t_1}{4}, \frac{2t_1}{4}, \frac{3t_1}{4}, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_2 + \frac{t_3 - t_2}{4}, t_2 + \frac{2(t_3 - t_2)}{4}, t_2 + \frac{3(t_3 - t_2)}{4}, t_3, t_3, t_3 \right\}$$

En la Figura 3.17 s'observa aquest exemple de llei d'acceleració i la seva derivada. Es mostra en el cas *a*) amb simetria de la forma de l'acceleració, i en el cas *b*) modificant els trams de pujada i baixada de la llei d'acceleració gràcies al punt de control afegit.

## 3.2 EINES DE CARACTERITZACIÓ DE VIBRACIONS

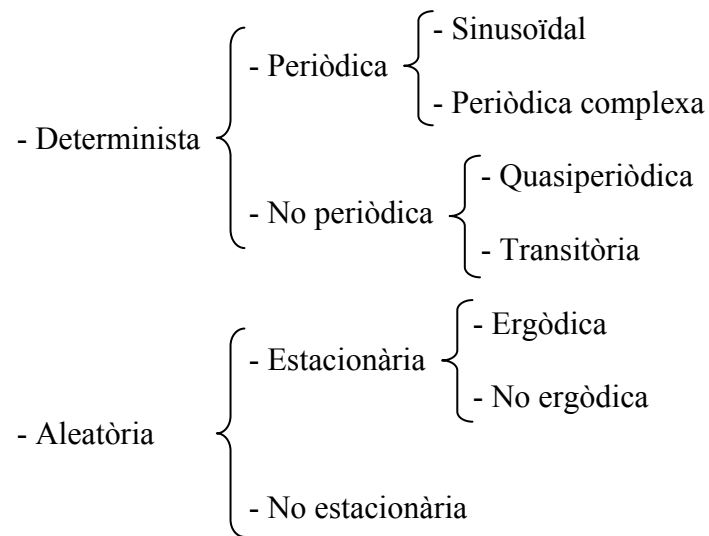
Les eines de caracterització i anàlisi de vibracions estan englobades en l'àrea de coneixement de *Teoria de Senyal i Sistemes Lineals*. S'ha cregut necessari introduir en aquest apartat una classificació general de les vibracions, les eines bàsiques per tractar i analitzar els senyals entesos com vibracions mecàniques, i els autors i llibres emprats que recolzen la seva validesa.

### 3.2.1 Classificació de les vibracions

En l'àmbit de les vibracions mecàniques, les funcions que descriuen usualment l'evolució temporal de magnituds físiques –desplaçament, força, ... – sovint s'anomenen senyals. Rao (1995) i Agulló i Cardona (1992) donen classificacions generals de les vibracions i els senyals que segueix bàsicament la proposada a la norma ISO 4866-1990(E):

- Una vibració segons la font d'energia que la genera pot ser:
  - Lliure
  - Forçada
  - Autoexcitada
  - Paramètrica
- El comportament del sistema pot ser:
  - Lineal
  - No lineal
  - Lineal amb paràmetres periòdics (paramètrica)

- Segons la llei que el descriu, el senyal pot ser:



### 3.2.2 Anàlisi de senyals. Domini freqüencial

Per estudiar el comportament d'un sistema lineal amb coeficients constants cal resoldre el sistema d'equacions diferencials ordinàries lineals que descriu el seu comportament. Per facilitar la resolució d'aquests sistemes s'han posat a punt dues transformacions de funcions: la *transformada de Laplace* –TL– i la *transformada de Fourier* –TF–, cadascuna amb una transformació directa i inversa que permet restituir al funció inicial. Aquestes transformades permeten l'algebrització d'expressions integro-diferencials.

Els senyals que descriuen l'evolució temporal de magnituds físiques sovint són experimentals. Els senyals experimentals rarament es poden expressar mitjançant funcions analítiques; aquest fet, junt amb la facilitat d'implementació numèrica i d'interpretació de la transformada de Fourier, fan que la transformada de Laplace quedi més lligada a l'estudi analític dels sistemes i les seves propietats –càlcul operacional– i la transformada de Fourier s'associï a l'anàlisi de senyals i l'estudi experimental de sistemes –anàlisi freqüencial o espectral.

Per desenvolupar aquest subapartat, s'han fet servir com a textos de referència Ras (1979) i Cardona i Jordi (2003).

#### *Transformada de Laplace i transformada de Fourier*

La transformada de Laplace transforma una funció  $x(t)$  del temps, funció en el domini temporal, en una funció complexa  $X(s)$  de variable complexa  $s$ , i la seva inversa fa el pas contrari. La parella de transformades, directa i inversa, es defineixen com:

$$X(s) = TL[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \tag{3.30}$$

$$x(t) = \text{TL}^{-1}[\mathbf{X}(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \mathbf{X}(s) e^{st} ds \quad (3.31)$$

Per tal que existeixin, calen unes condicions que les funcions descriptives de l'evolució de les magnituds físiques, en principi, compleixen:

- Si tenen discontinuïtats, han de ser finites i en nombre finit.
- Ha d'existir algun valor  $\alpha$  tal que  $\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty$ .

La transformada inversa requereix una integral, en el pla complex, al llarg d'una línia paral·lela a l'eix imaginari que talla a l'eix real a  $\text{Re}[s]=\alpha$  i que s'estén de  $-\infty$  a  $+\infty$ . En molts casos, però, es pot emprar la transformada de Laplace sense haver de recórrer a l'ús d'aquesta integral de línia ja que, si es compleix el lema de Jordan, es pot substituir aquesta integral de línia per una integral en un contorn tancat que es pot avaluar mitjançant la teoria de residus. De tota manera, aquest procés ofereix dificultats i, en qualsevol cas, redueix o fins i tot anul·la els avantatges operacionals associats a la transformada de Laplace si no es disposa d'una taula de funcions associades  $x(t) \leftrightarrow \mathbf{X}(s) = \text{TL}[x(t)]$  i es fa ús de les seves propietats.

La transformada de Fourier transforma una funció  $x(t)$  del temps, funció en el domini temporal, en una funció complexa  $\mathbf{X}(f)$  de la freqüència, funció en el domini freqüencial, i la seva inversa fa el pas contrari. La transformada de Fourier dona lloc a l'anàlisi espectral o freqüencial de senyals. De fet, es pot considerar una extensió de les *Sèries de Fourier* per a funcions periòdiques,  $x(t) = x(t+T)$  essent  $T \neq 0$  el període. Per a aquestes funcions el desenvolupament en Sèrie de Fourier val:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) \right) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t + \varphi_k\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t + \varphi_k\right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

amb

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) dt \quad (3.33)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) dt \quad (3.34)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (3.35)$$

$$\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \quad (3.36)$$

Per a un senyal  $x(t)$  la transformada de Fourier i la seva inversa es defineixen com:

$$X(f) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.37)$$

$$x(t) = \text{TF}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.38)$$

La transformada de Fourier rep també el nom d'*Integral de Fourier* i es pot obtenir a partir de la sèrie de Fourier fent tendir el període  $T$  a  $\infty$ , no amitjanant –dividint per  $T$ – per a l'obtenció dels coeficients  $a_k$  i  $b_k$  i utilitzant la notació complexa per representar conjuntament el sinus i el cosinus.

Existeixen diverses versions en la definició de la transformada de Fourier que condueixen a expressions diferents de la presentada:

- Si la variable d'integració de la transformada inversa és  $\omega$  en lloc de  $f$  aleshores apareix el factor  $1/(2\pi)$  que pot quedar dividint la transformada inversa, la transformada directa o repartit entre ambdues en forma de  $1/\sqrt{2\pi}$ .
- La unitat imaginària pot representar-se com  $i$  o com  $j$ . Es pren  $j$  lligant amb el criteri dels fasors que giren en sentit antihorari ( $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ ).
- El signe de l'exponent en la transformada directa pot ser negatiu, com en la definició presa, o positiu. Aquest canvi de signe té com a conseqüència un canvi de signe de la part imaginària de la transformada.
- Aquestes variacions només afecten en el cas de quedar-se com a resultat de l'estudi la transformada directa de Fourier o una conseqüència d'aquesta, com per exemple la resposta freqüencial. Si es fan servir amb coherència ambdues transformades, per passar del domini temporal al freqüencial i tornar al temporal, no hi ha diferència de resultats.

Per tal que existeixin, també cal que els senyals compleixin unes determinades condicions:

- Si tenen discontinuïtats, han de ser finites i en nombre finit.
- S'ha de complir que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$  o  $\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 dt < \infty$ .

La potència d'un senyal s'associa al seu quadrat,  $P_x(t) = (x(t))^2$ , i la seva energia a la integral d'aquesta:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \quad (3.39)$$

Això fa que, en principi, la integral de Fourier només seria aplicable a funcions que descriuen transitoris d'energia finita.

Emprant, però, la funció *Impuls* o *Delta de Dirac*,  $\delta(t)$ , la transformada de Fourier és aplicable a funcions periòdiques i quasiperiòdiques (superposició de funcions periòdiques de períodes que no són múltiples enters d'un mateix període fonamental, és

a dir, superposició de funcions periòdiques no harmòniques entre elles. Així per exemple, la funció  $x(t) = (\cos 10t + \cos 20t) + (\cos 10\pi t + \cos 20\pi t)$  és quasiperiòdica, superposició de dues funcions de períodes respectius  $T_1 = \pi/5$  s i  $T_2 = 1/5$  s). Cal recordar que la funció delta de Dirac  $\delta(t)$  es defineix com:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{i} \quad \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \quad (3.40)$$

Aquesta funció, que és la derivada generalitzada de la funció graó unitari, no és una verdadera funció en el sentit matemàtic usual ja que no està definida per a cada valor de  $t$ . S'utilitza freqüentment per representar distribucions.

En l'àmbit de les vibracions algunes transformades de Fourier interessants són:

$$\text{TF}[\cos(2\pi f_1 t)] = \pi [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] \quad (3.41)$$

$$\text{TF}[\sin(2\pi f_1 t)] = \pi [-\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] j \quad (3.42)$$

$$\text{TF}[\cos(2\pi f_1 t + \varphi)] = \pi [e^{j\varphi} \delta(f - f_1) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_1)] \quad (3.43)$$

$$\text{TF}[\delta(t)] = 1 \quad (3.44)$$

### ***Transformada discreta de Fourier***

La *transformada discreta de Fourier* té entitat pròpia en l'estudi de senyals discretitzats en el temps, mostrejats a intervals regulars de temps i descrits mitjançant una sèrie de  $N$  valors i es pot considerar una aproximació numèrica de la transformada (contínua) de Fourier. Es defineix com:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r e^{-j2\pi(k-1)(r-1)/N} \quad k = 1, \dots, N \quad (3.45)$$

$$x_r = \sum_{k=1}^N X_k e^{j2\pi(k-1)(r-1)/N} \quad r = 1, \dots, N \quad (3.46)$$

L'any 1965 J.W. Cooley i J.W. Tukey van publicar l'algorisme de la *transformada ràpida de Fourier* – *FFT (Fast Fourier Transform)* – per al càlcul numèric de la transformada discreta de Fourier. Aquest algorisme redueix el nombre d'operacions respecte al càlcul directe de les expressions anteriors. Així, si  $N$  és una potència entera de 2 el nombre d'operacions passa de ser proporcional a  $N^2$  a ser proporcional a  $N \log_2(N)$ . Per exemple, si  $N=2^{10}$  la relació en el nombre d'operacions és  $N / \log_2(N) = 102,4$ .

Aquest algorisme ha suposat una revolució en l'estudi, sobretot experimental, de les vibracions, que és en gran part equivalent a l'estudi dels sistemes lineals, i en l'anàlisi

de senyals. És encara l'algorisme més utilitzat en el processat digital de senyals –DSP. Gràcies a aquest algorisme (i a l'augment de les potències de càlcul), s'ha avançat i assolit un alt nivell en tècniques com el manteniment preventiu-predictiu de màquines i instal·lacions, on es preveu quan una màquina pot fallar i així poder programar el seu manteniment o la seva reparació, de manera que el perill i la incidència econòmica siguin mínims.

### **Relació entre les Transformades de Laplace i de Fourier**

De manera formal es passa de la transformada de Laplace a la de Fourier amb la substitució  $s \leftrightarrow j\omega$ , però de fet hi ha diferències profundes en la seva utilització acurada: límits de les integrals i condicions d'existència.

- Quan la transformació directa de Fourier és possible i  $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$ , aquesta coincideix amb la de Laplace simplement substituint  $s$  per  $j\omega$ .
- Si  $x(t)$  s'anul·la per a valors de  $t \leq t_0$  (amb  $t_0$  positiu o negatiu) i es compleix la condició de convergència de la transformada directa de Fourier aleshores:

$$X(\omega) = e^{-j\omega t_0} \text{TF}[x(t - t_0)] \quad (3.47)$$

- Si  $x(t)$  no s'anul·la per a tots els valors de  $t < t_0$ , amb  $t_0$  negatiu, però es compleix la condició de convergència de la transformada directa de Fourier es pot procedir de la següent forma:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.48)$$

Fent primer el canvi  $t = -\tau$  en el segon sumand i, a continuació, els canvis  $j\omega = s$  i  $-j\omega = s'$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} x(-\tau)e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} x(-\tau)e^{-s'\tau} d\tau = X_t(s = j\omega) + X_{-\tau}(s' = -j\omega) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Així doncs,  $X(\omega)$  es pot determinar com suma de la transformada de Laplace, amb  $s$  substituïda per  $j\omega$ , de  $x(t)$  suposada nul·la per a  $t < 0$  i de la transformada de Laplace, amb  $s'$  substituïda per  $-j\omega$ , de  $x(-\tau)$  suposada nul·la per a  $\tau < 0$ .

### **Propietats i aplicació de les Transformades**

En ambdues transformades, les dues propietats bàsiques per a la seva utilització en la resolució de sistemes lineals d'equacions diferencials ordinàries (EDO) amb coeficients constants són:

- Derivació:

$$\text{TF}[x(t)] = \mathbf{X}(\omega) \rightarrow \text{TF}[\dot{x}(t)] = j\omega \mathbf{X}(\omega) \quad (3.50)$$

$$\text{TL}[x(t)] = \mathbf{X}(s) \rightarrow \text{TL}[\dot{x}(t)] = s \mathbf{X}(s) - x(0) \quad (3.51)$$

- Linealitat:

$$\text{TF}[x(t) + y(t)] = \text{TF}[x(t)] + \text{TF}[y(t)] \quad (3.52)$$

$$\text{TF}[a x(t)] = a \text{TF}[x(t)] \quad (3.53)$$

$$\text{TL}[x(t) + y(t)] = \text{TL}[x(t)] + \text{TL}[y(t)] \quad (3.54)$$

$$\text{TL}[a x(t)] = a \text{TL}[x(t)] \quad (3.55)$$

### 3.2.3 Resposta dels sistemes lineals

Per desenvolupar aquest subapartat, s'han fet servir com a textos de referència Newland (1993) i Cardona i Jordi (2003).

#### *Funció de resposta freqüencial*

Un sistema amb una sortida, o resposta,  $x(t)$  que respon a una entrada, o excitació,  $y(t)$  es diu que és lineal amb coeficients constants si ambdues funcions estan relacionades per una equació diferencial lineal amb coeficients constants de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (3.56)$$

Cal indicar que si els coeficients fossin funció de  $t$  el sistema també seria lineal, i es compliria el principi de la superposició, però aleshores el comportament del sistema i el seu estudi serien diferents, i més complicats.

Se suposa que el sistema descrit per l'equació anterior és passiu, per al qual si no hi ha entrada, després d'un temps suficientment llarg, la sortida serà negligible; en definitiva que, l'esmoreïment és positiu i els transitoris s'esvaeixen.

Admetent l'existència de les transformades de Fourier de  $x(t)$  i de  $y(t)$ , es pot aplicar aquesta transformació als dos membres de l'equació diferencial i, fent ús de les propietats de derivació i de linealitat vistes, s'obté:

$$\left( a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 \right) \mathbf{Y}(\omega) = \left( b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0 \right) \mathbf{X}(\omega) \quad (3.57)$$

Al quocient entre la transformada de Fourier de la resposta o sortida  $X(\omega)$  i la transformada de Fourier de l'entrada o excitació  $Y(\omega)$  se l'anomena funció de resposta freqüencial  $H(\omega)$ :

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0}{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0} \quad (3.58)$$

De manera semblant, si s'utilitza la transformada de Laplace suposant condicions inicials nul·les s'obté la funció de transferència  $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0} \quad (3.59)$$

La funció de resposta freqüencial no és única; es pot generalitzar per a qualsevol sistema lineal i per a qualsevol parella entrada-sortida.

Dues funcions de resposta freqüencial molt utilitzades en mecànica, acústica i electricitat són la impedància  $Z(\omega)$  i la seva inversa, l'admitància  $Y(\omega)$ . La impedància relaciona

- Mecànica: Força/velocitat  $Z(\omega) = F(\omega) / V(\omega)$
- Acústica: Pressió/velocitat  $Z(\omega) = P(\omega) / V(\omega)$
- Electricitat: Tensió/corrent  $Z(\omega) = U(\omega) / I(\omega)$

### **Representació gràfica de la funció de resposta freqüencial**

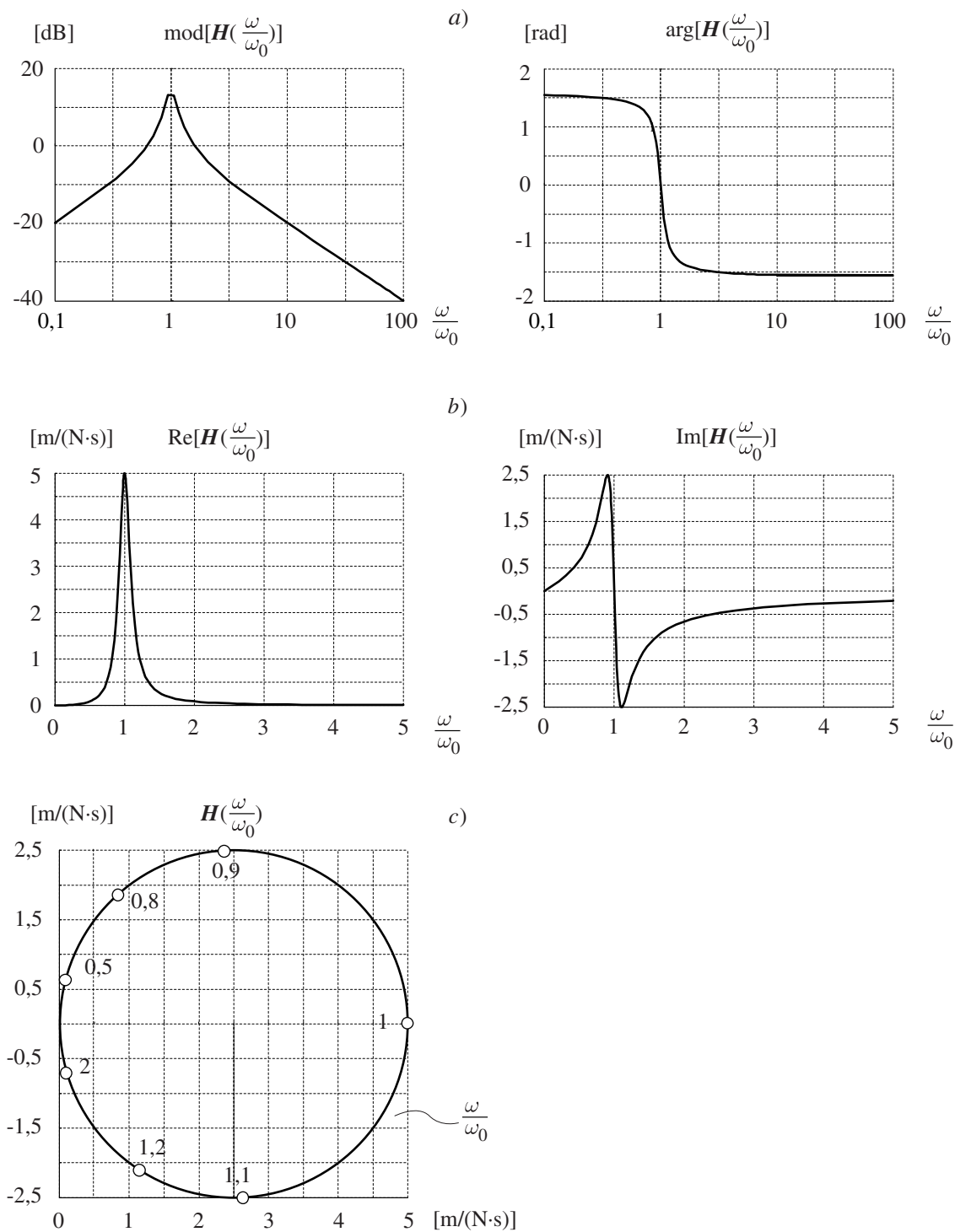
La funció de resposta freqüencial com a valor complex que depèn de la freqüència es pot representar com (Figura 3.18):

- Diagrama de Bode (a): gràfics independents del mòdul i de l'argument de  $H(\omega)$  en funció de la freqüència.
- Diagrama d'Argand (b): gràfics independents de la part real i de la part imaginària de  $H(\omega)$  en funció de la freqüència.
- Diagrama de Nyquist (c): corba definida per  $H(\omega)$  en el pla complex amb la freqüència com a paràmetre.

En les representacions de Bode i d'Argand, les escales poden ser lineals o logarítmiques. Les escales logarítmiques de freqüències es poden expressar en logaritme decimal o en logaritme binari, de base 2. En el primer cas, s'introdueix el concepte de dècada, multiplicar per deu la freqüència, i en el segon cas, usual en acústica, s'introdueix el concepte d'octava. Una freqüència és l'octava d'una altra si és doble d'aquesta.

L'escala logarítmica de l'amplitud sovint s'expressa en dB. El valor numèric d'una magnitud  $x$  expressat en dB referits a  $x_0$  (valor de referència) és  $20 \log_{10}(x/x_0)$ .





**Figura 3.18** Resposta freqüencial: Diagrames a) de Bode, b) d'Argand, i c) de Nyquist

### *Resposta a una entrada sinusoidal*

L'estudi de la resposta  $x(t)$  d'un sistema lineal a una excitació sinusoidal  $y(t) = y_p \cos(2\pi f_1 t) = y_p \cos(\omega_1 t)$  es pot fer a partir de la seva funció de resposta freqüencial. En aquest cas serà útil escriure-la de manera que quedin explícits el seu

mòdul i el seu argument  $\mathbf{H}(\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ . Cal també tenir en compte que, com es pot deduir de la seva definició,  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{H}^*(-\omega)$  i per tant  $H(\omega) = H(-\omega)$  i  $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ . Així, recordant la transformada de Fourier de la funció cosinus:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathbf{H}(\omega) \cdot Y(\omega) = y_p \pi [\mathbf{H}(\omega_1) \delta(\omega - \omega_1) + \mathbf{H}(-\omega_1) \delta(\omega + \omega_1)] = \\ &= y_p H(\omega_1) \pi [e^{j\varphi(\omega_1)} \delta(\omega - \omega_1) + e^{-j\varphi(\omega_1)} \delta(\omega + \omega_1)] \end{aligned} \quad (3.60)$$

d'on

$$x(t) = H(\omega_1) y_p \cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) \quad (3.61)$$

Així doncs, si l'excitació és sinusoidal, l'amplitud de la resposta és el producte de l'amplitud de l'excitació pel mòdul de la resposta freqüencial per a la freqüència de l'excitació,  $x_p = H(\omega_1) y_p$ . La resposta està desfasada respecte a l'entrada un angle igual a l'argument de la resposta freqüencial per a la freqüència de l'excitació.

### **Resposta impulsional**

Per a un sistema lineal passiu de coeficients constants amb una entrada  $y(t)$  i una sortida  $x(t)$ , es defineix la seva resposta impulsional  $h(t)$  com el quocient entre la resposta a un impuls, a partir de condicions inicials nul·les, i la magnitud d'aquest. Una excitació impulsional es representa mitjançant la funció delta de Dirac de valor igual a la integral de l'excitació, que dura un temps  $\tau$  que tendeix a 0:

$$y(t) = I \delta(t) \quad (3.62)$$

amb

$$I = \int_{\tau} y(t) dt \quad (3.63)$$

Si l'entrada és una força, un impuls es pot entendre com una força molt gran aplicada durant un temps  $\tau$  molt petit de manera que la integral

$$P = \int_{\tau \rightarrow 0} F(t) dt \quad (3.64)$$

és finita.  $P$  s'anomena percussió de  $F(t)$  i es diu que en aplicar una percussió a un sistema aquest sofreix una batzegada, fenomen instantani en el qual es produeix una modificació de la velocitat però no de la posició. L'increment de velocitat causat per la percussió es determina a partir del teorema de la quantitat de moviment

$$\Delta(mv) = \int F(t) dt = P \quad (3.65)$$

d'on  $\Delta v = P/m$ .

Just després de la batzegada, el sistema passa a oscil·lar lliurement. Així doncs, la resposta a un impuls de força correspon al moviment lliure a partir de les condicions inicials de desplaçament nul i de velocitat l'adquirida durant la

batzegada,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = P/m$ . Amb aquestes condicions inicials el moviment lliure és:

$$x(t) = \frac{P}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t) \quad (3.66)$$

amb

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (3.67)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.68)$$

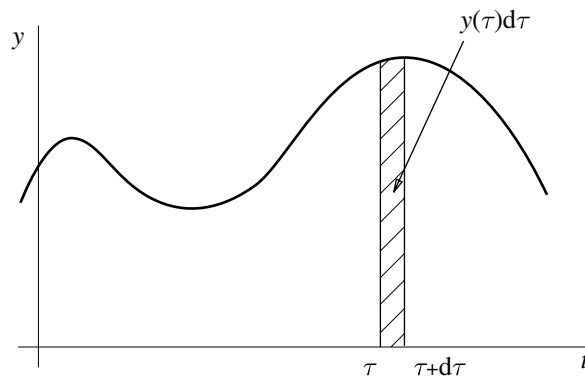
$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.69)$$

i per tant la resposta impulsional en aquest cas és:

$$h(t) = \frac{x(t)}{P} = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t) \quad (3.70)$$

En els sistemes passius, la resposta, a partir del repòs en la configuració d'equilibri –condicions inicials nul·les–, no comença fins que s'inicia l'excitació i per tant  $h(t) = 0$  per a  $t < 0$ .

### ***Resposta temporal a una excitació arbitrària. Integral de convolució***



**Figura 3.19** Impuls de valor  $y(\tau)d\tau$ , del senyal  $y(t)$

Una funció  $y(t)$  es pot considerar com un tren, o una successió, d'impulsos de valor  $y(\tau)d\tau$  situats a  $t = \tau$ ; de manera intuïtiva es pot veure en la Figura 3.19, a més:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.71)$$

Si l'excitació d'un sistema lineal passiu  $y(t)$  es considera formada per una successió d'impulsos, la seva resposta temporal és la superposició de les respostes a cadascun dels impulsos de l'excitació. Per a un impuls situat a  $t = \tau$ , la resposta és  $x_\tau(t) = h(t - \tau)y(\tau)d\tau$ , per a  $t > \tau$ , i  $x_\tau(t) = 0$ , per a  $t < \tau$ , en tractar-se d'un sistema passiu. La resposta total en l'instant  $t$  és la superposició de les respostes als impulsos  $y(\tau)d\tau$  existents des que s'inicia l'excitació a partir del repòs –es pren des de  $-\infty$  per garantir que es recull tota l'excitació– fins a  $t$ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)y(\tau)d\tau \quad (3.72)$$

Aquesta expressió s'anomena *Integral de convolució* o alternativament *Integral de Duhamel* o *Integral de Green*.

Si l'excitació comença a  $t = 0$ ,  $y(t) = 0$  per a  $t < 0$ , la integral de convolució s'escriu:

$$x(t) = \int_0^t h(t - \tau)y(\tau)d\tau \quad (3.73)$$

Una altra versió de la integral de convolució s'obté tenint en compte que  $h(t - \tau) = 0$  per a  $\tau > t$  i per tant el límit superior de la integral es pot fer  $\infty$ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)y(\tau)d\tau \quad (3.74)$$

Altres versions s'obtenen simplement fent el canvi de variable d'integració  $\theta = t - \tau$ .

Aquesta integral de convolució és la mateixa que apareix en el producte de convolució o integral de convolució associat a les transformades de Fourier i de Laplace. Per a la transformada de Fourier, i de manera semblant per a la transformada de Laplace, admetent l'existència de les transformades de les funcions temporals implicades, es verifica:

$$\text{TF}[x(t) \cdot y(t)] = X(\omega) * Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega - \varphi)Y(\varphi)d\varphi \quad (3.75)$$

$$\text{TF}^{-1}[H(\omega) \cdot Y(\omega)] = h(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)y(\tau)d\tau \quad (3.76)$$

Aquesta última expressió coincideix amb les trobades anteriorment però no està condicionada que la funció d'excitació sigui d'energia finita i, per tant, és aplicable sigui quina sigui l'excitació.

### ***Relació entre la resposta freqüencial i la resposta impulsional***

Si s'excita un sistema de resposta impulsional  $h(t)$  amb un impuls  $y(t) = I\delta(t)$  la seva resposta temporal és  $x(t) = I h(t)$ . Per altra banda, la transformada de Fourier de

l'excitació és  $Y(\omega) = I$  i la transformada de la resposta és  $X(\omega) = I \text{TF}[h(t)]$ , de manera que la resposta freqüencial és:

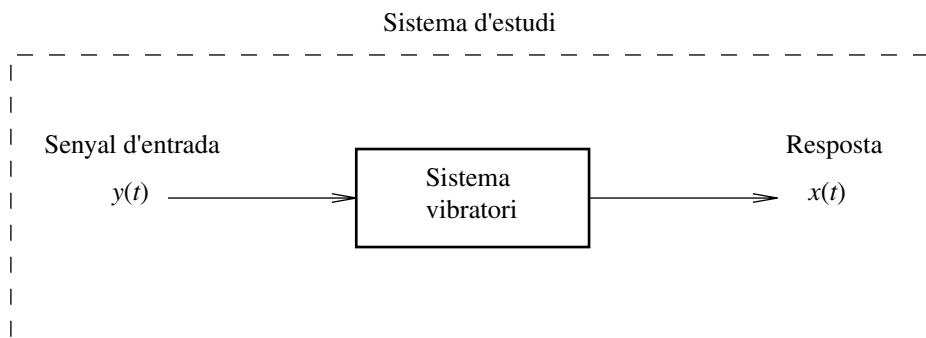
$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{I \text{TF}[h(t)]}{I} = \text{TF}[h(t)] \quad (3.77)$$

Així doncs, la transformada de Fourier de la resposta impulsional és la resposta freqüencial. Cal notar que, per als sistemes passius, la resposta impulsional és sempre un transitori d'energia finita i, per tant, es compleix la condició d'existència de la seva transformada de Fourier.

## CAPÍTOL 4

# Caracterització del sistema d'estudi

La caracterització del sistema d'estudi, que s'exposa en aquest capítol, es fa diferenciant els tres elements que el componen: el sistema vibratori, el senyal d'entrada i la resposta del sistema a aquest senyal, segons l'esquema de la Figura 4.1.



**Figura 4.1** Parts considerades en el sistema d'estudi

El sistema vibratori es caracteritza per mitjà de la descripció d'un sistema genèric i les hipòtesis fetes en la seva modelització. Per il·lustrar aquest model s'exposa un exemple d'aplicació industrial. El senyal d'entrada es caracteritza per: i) el significat que, en aquest treball, es dóna a *transitori de moviment*, ii) quins tipus de transitoris es consideren i iii) quines són les hipòtesis de funcionament que, en general, els poden condicionar. Finalment, es descriu quina és la forma esperable que tindrà la resposta del sistema davant del senyal d'entrada esmentat i quina mètrica es fa servir per mesurar la vibració residual en acabar el transitori.

## 4.1 SISTEMA LINEAL VIBRATORI

Les lleis de moviment que a continuació es presenten i, en general, tot l'estudi fet en aquesta tesi, s'han desenvolupat en base a un sistema vibratori modelitzable com un sistema discret amb comportament lineal en el seu rang de funcionament, i amb paràmetres constants en les equacions de moviment que el descriuen. En aquest apartat es presenta un model genèric de sistema vibratori excitat pel transitori de moviment d'una massa que es trasllada sobre un dels sòlids que componen el sistema. En aquest model els moviments de les masses són de translació, però seria anàloga l'exposició per a un sistema amb moviments de rotació, o combinació d'ambdós.

### 4.1.1 Modelització

La Figura 4.2 representa un exemple genèric, format per un sistema vibratori de 4 graus de llibertat, dels quals n'hi ha 3 de lliures amb comportament vibratori, i un (en la figura correspon al grau de llibertat associat a la massa  $m_4$ ) que es governa per mitjà d'un actuator.

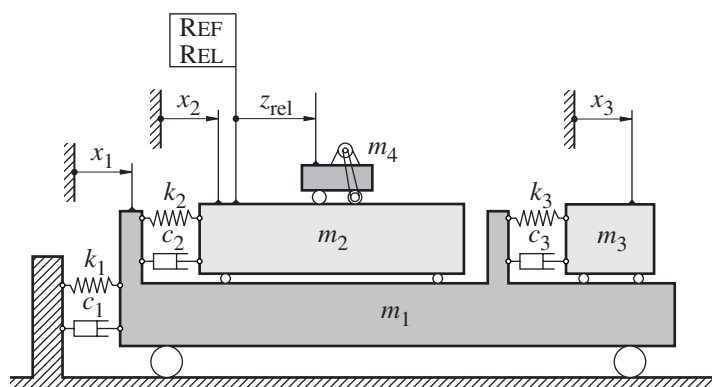


Figura 4.2 Sistema vibratori genèric de comportament lineal

El sistema presentat està format per 4 masses  $m_i$ . El moviment del sistema està representat per les coordenades absolutes  $x_i$ , i per la coordenada relativa  $z_{rel}$ . El comportament no rígid entre els sòlids del sistema es representa per unions amb molles i amortidors caracteritzats per les seves rigideses  $k_i$  i esmorteïments  $c_i$  respectivament. El comportament del sistema és oscil·latori a causa del baix valor que prenen les constants d'esmorteïment  $c_i$ .

Les equacions de moviment que representen el sistema s'expressen, en forma matricial, segons l'expressió (4.1), on  $M$ ,  $C$  i  $K$  són les matrius de masses, esmorteïments i rigideses respectivament,  $q$  és el vector de coordenades corresponents als moviments lliures, i  $f$  correspon al vector d'excitació causada per l'evolució de la coordenada relativa  $z_{rel}$ .

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = f \quad (4.1)$$

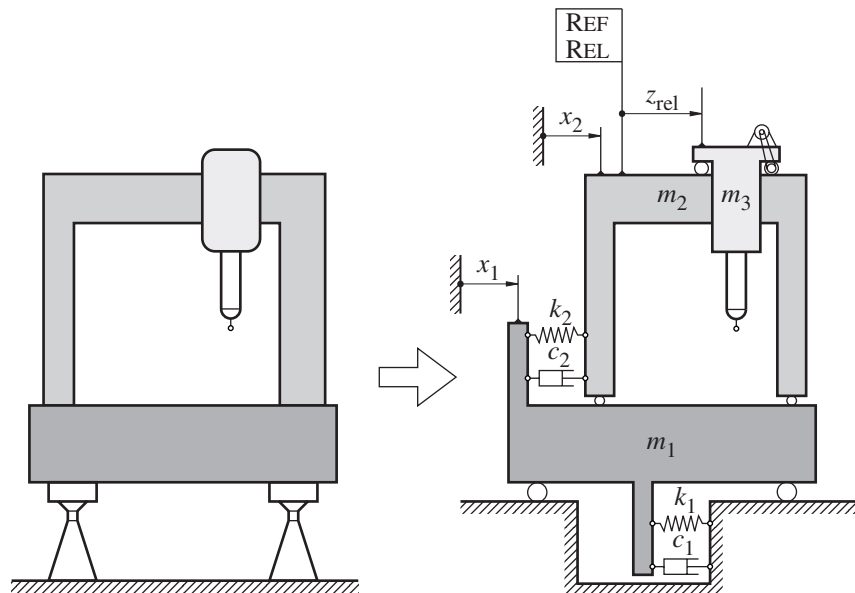
Aplicant la transformada de Fourier al sistema d'equacions (4.1), s'obtenen les respostes freqüencials del sistema, que poden prendre la forma  $H_i(\omega) = X_i(\omega)/Z_{rel}(\omega)$  o altres segons s'utilitzin coordenades o les seves derivades.

Segons les propietats de la transformada de Fourier, cal esmentar que les respostes freqüencials tindran el mateix valor tant si s'expressen com a quocient de posicions, de velocitats o d'acceleracions, tal com mostra l'expressió (4.2).

$$\begin{aligned}
 H_i(\omega) &= \frac{X_i(\omega)}{Z_{rel}(\omega)} = \frac{j\omega X_i(\omega)}{j\omega Z_{rel}(\omega)} = \frac{\dot{X}_i(\omega)}{\dot{Z}_{rel}(\omega)} \\
 H_i(\omega) &= \frac{X_i(\omega)}{Z_{rel}(\omega)} = \frac{-\omega^2 X_i(\omega)}{-\omega^2 Z_{rel}(\omega)} = \frac{\ddot{X}_i(\omega)}{\ddot{Z}_{rel}(\omega)}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

A partir de l'expressió (4.1), es poden conèixer els valors de les freqüències pròpies del sistema. Segons la teoria de la descomposició modal, les vibracions residuals romanents després d'un transitori corresponen a una combinació lineal de la resposta associada al moviment de cada un dels modes propis de vibració que caracteritzen el sistema, si escau, ajustada en fase. Per tant, serà necessària la determinació de les freqüències pròpies com a pas previ a la cancel·lació o reducció d'aquestes vibracions residuals.

#### 4.1.2 Exemple d'aplicació



**Figura 4.3** Model de dos graus de llibertat vibratori d'una màquina de mesura per coordenades

L'aplicació industrial que s'ha pres com a exemple i que s'ha modelitzat ha estat una *màquina de mesura per coordenades*. En aquestes màquines, un dels paràmetres importants per a la seva amortització econòmica és el nombre de mesures per minut que poden arribar a fer. Això fa pensar que moviments ràpids del palpador de mesura, amb acceleracions agressives, incrementaran la seva efectivitat. L'efecte negatiu d'aquest



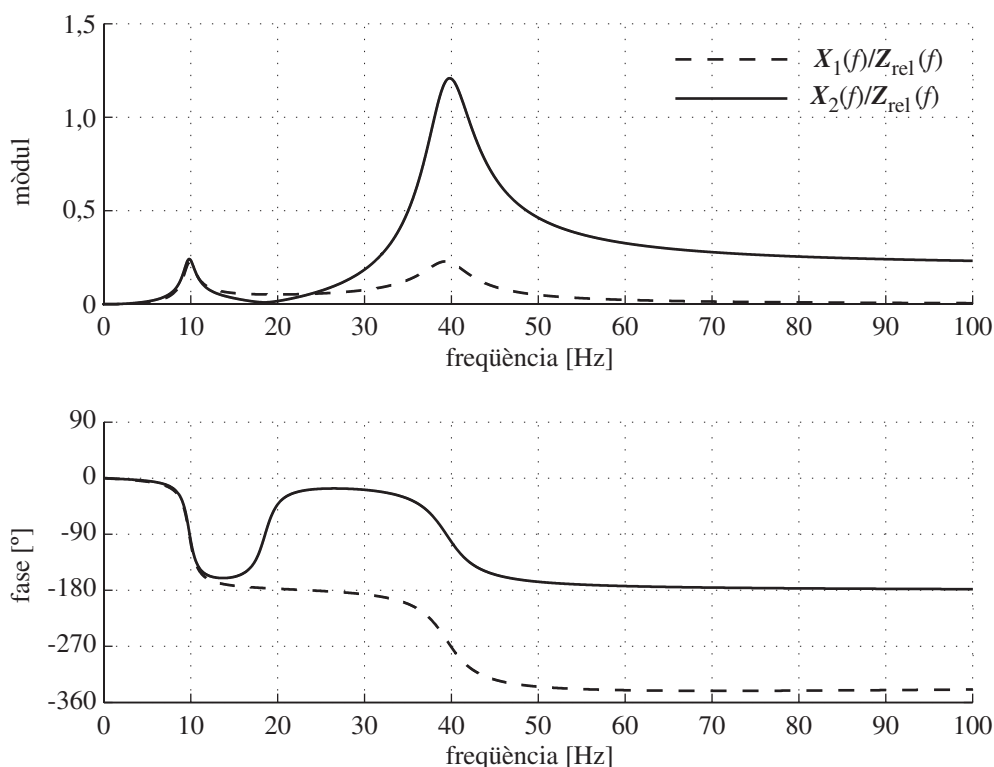
increment d'acceleració pot arribar a ser la generació de vibracions residuals no desitjades que introdueixin errors de mesura o temps d'espera grans, en el moment que el palpador finalitzi el seu moviment de translació.

En el rang de freqüències que poden afectar l'error de mesura esmentat, aquesta màquina es pot modelitzar per mitjà d'un sistema vibratori lineal, tal com mostra la Figura 4.3. Els sòlids considerats com a rígids en les coordenades indicades són el marbre de mesura amb massa  $m_1$ , el pont amb massa  $m_2$ , i el carro-palpador amb massa  $m_3$ . Pel que fa a les rigideses i esmorteïments, es consideren l'enllaç entre el marbre de mesura i el terra, constituït físicament per elastòmers i esquematitzat com a  $k_1$  i  $c_1$ , i l'enllaç entre el pont i el marbre de mesura, constituït físicament per una estructura tubular i esquematitzat com a  $k_2$  i  $c_2$ .

En aquest exemple, les equacions de moviment queden segons l'expressió següent:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_3 \ddot{z}_{rel} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Si s'aplica la transformada de Fourier al sistema d'equacions i es substitueixen les masses –obtingudes de les especificacions d'una màquina– es poden ajustar les rigideses i esmorteïments a fi que les respostes freqüencials obtingudes experimentalment coincideixin amb les respostes freqüencials teòriques  $X_1(f)/Z_{rel}(f)$  i  $X_2(f)/Z_{rel}(f)$  ( $f$  freqüència), mostrades en la Figura 4.4.



**Figura 4.4** Mòdul i fase de les respostes freqüencials  $X_1(f)/Z_{rel}(f)$  i  $X_2(f)/Z_{rel}(f)$

En la figura esmentada es pot observar que les freqüències corresponents als dos modes propis importants caracteritzats estan al voltant de 10 Hz i 40 Hz. Els esmorteïments del sistema fan que el rang freqüencial d'influència de cada mode propi sigui força ample. Això vol dir que si el senyal que arriba al sistema té un contingut freqüencial no negligible a l'entorn de les freqüències pròpies, la resposta del sistema serà prou significativa. Serà, doncs, necessari tenir en compte aquest efecte en l'estudi.

## 4.2 SENYAL D'ENTRADA. ASPECTES FUNCIONALS DE LES LLEIS DE MOVIMENT

La llei de moviment temporal  $z_{\text{rel}}(t)$  de la inèrcia que es desitja governar es considera, en aquest estudi, com el senyal d'entrada  $y(t)$  al sistema vibratori, segons la Figura 4.1. La llei de moviment descriu un *transitori de moviment* quan es produeix una variació finita d'una de les magnituds de moviment d'aquesta inèrcia –acceleració, velocitat o posició– feta en un temps finit, i fora d'aquest interval de temps la magnitud roman constant.

### 4.2.1 Transitoris de moviment. Tipologies i hipòtesis de funcionament

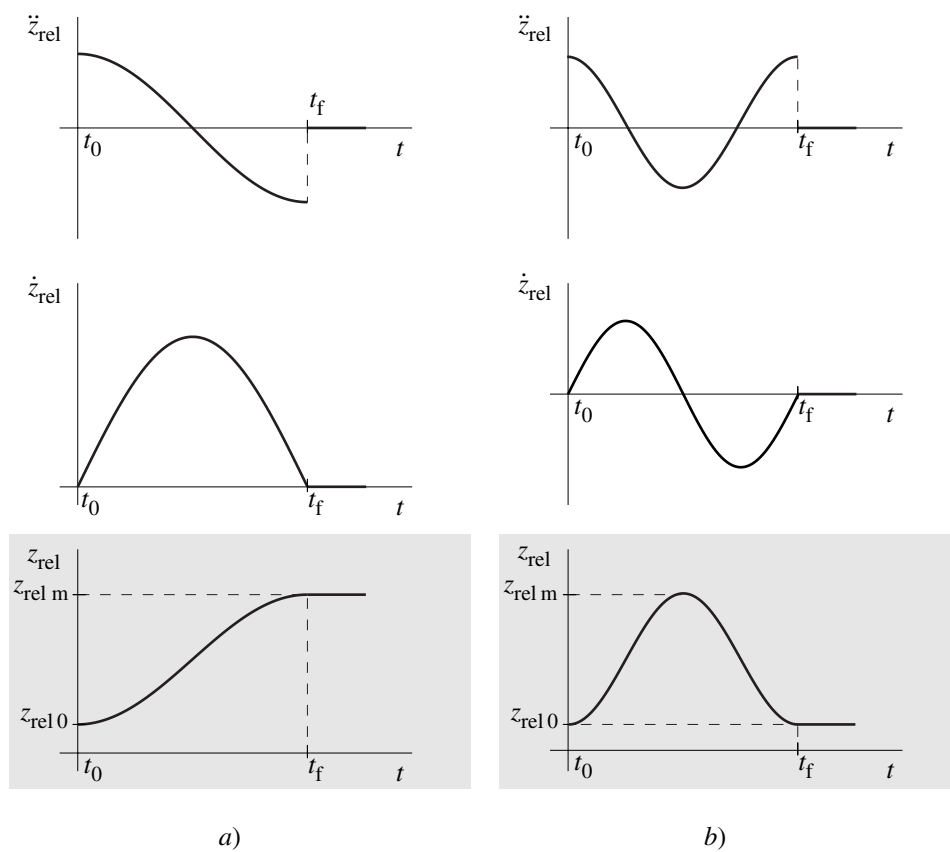
Com s'ha esmentat, en el sistema d'estudi es pot prendre com a variable d'entrada la posició relativa  $z_{\text{rel}}$ , la velocitat relativa  $\dot{z}_{\text{rel}}$ , o l'acceleració relativa  $\ddot{z}_{\text{rel}}$ . Segons la definició donada de transitori de moviment, les derivades d'un senyal transitori són també senyals transitoris. Tot i això, per a la definició de les diferents tipologies de transitoris de moviment es considera la primera magnitud que compleix aquesta definició. En aquest subapartat es descriu quina forma pot tenir un transitori de cada una de les variables d'entrada descrites, i com es poden tractar analíticament.

#### *Transitori de posició relativa*

Es considera un transitori de posició relativa el moviment que comença en  $z_{\text{rel}0}$  i arriba a  $z_{\text{rel}m}$  en un increment de temps  $t_f - t_0$  (moviment punt a punt), o bé que comença en  $z_{\text{rel}0}$  i després d'arribar a  $z_{\text{rel}m}$  torna a la mateixa posició  $z_{\text{rel}0}$  en aquest increment de temps (moviment de vaivé). En la Figura 4.5 es mostren exemples d'aquests moviments.

En general, quan la funció d'una màquina requereix un moviment punt a punt o de vaivé –transitori de posició relativa– les mètriques que determinen si s'assoleix l'objectiu són, d'una banda, la distància relativa recorreguda, i d'altra banda, el temps emprat en recórrer aquesta distància. Durant el transitori, les variables velocitat i acceleració relatives estaran probablement limitades per uns màxims admissibles, que dependran de les capacitats de l'actuador i elements de control associats. En general serà suficient que aquestes variables no superin aquests valors.

Per tant, en aquest cas es pot establir que dues lleis de moviment que defineixen transitoris de posició relativa són funcionalment equivalents si recorren la mateixa distància relativa en el mateix temps.



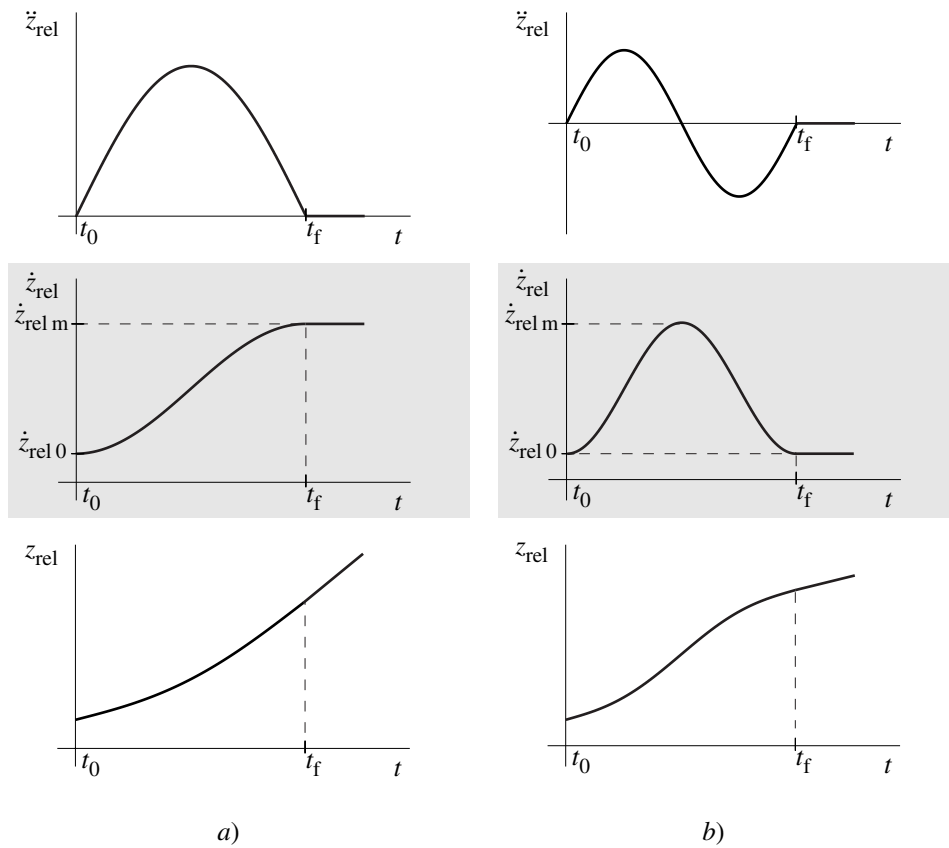
**Figura 4.5** Moviments transitoris de posició relativa: a) punt a punt, b) vaivé

### ***Transitori de velocitat relativa***

Anàlogament, es considera un transitori de velocitat relativa al moviment que, partint d'una velocitat inicial  $\dot{z}_{rel0}$ , passa a tenir una velocitat  $\dot{z}_{relm}$  en un temps  $t_f - t_0$  (moviment d'engegada o aturada), o bé que comença en  $\dot{z}_{rel0}$  i un cop ha arribat a  $\dot{z}_{relm}$ , acaba amb la mateixa velocitat  $\dot{z}_{rel0}$  en el temps indicat. En la Figura 4.6 es mostren exemples d'aquests moviments.

Si ara la funció d'una màquina requereix un moviment de canvi de velocitat relativa, les mètriques que, en general, determinen si s'assoleix l'objectiu són, d'una banda, l'increment de velocitat relativa i el temps emprat durant el transitori, o bé l'increment de velocitat relativa i la distància recorreguda durant el transitori. L'acceleració relativa estarà probablement limitada per un màxim admissible, que dependrà de la capacitat de l'actuador i elements de control associats i serà suficient, en general, comprovar que no superi aquest valor.

En aquest cas existeixen dues opcions per les quals es pot considerar que dues lleis de moviment que defineixen transitoris de velocitat relativa són funcionalment equivalents: a) si produeixen el mateix canvi de velocitat relativa en el mateix temps o b) si produeixen el mateix canvi de velocitat relativa en la mateixa distància relativa.



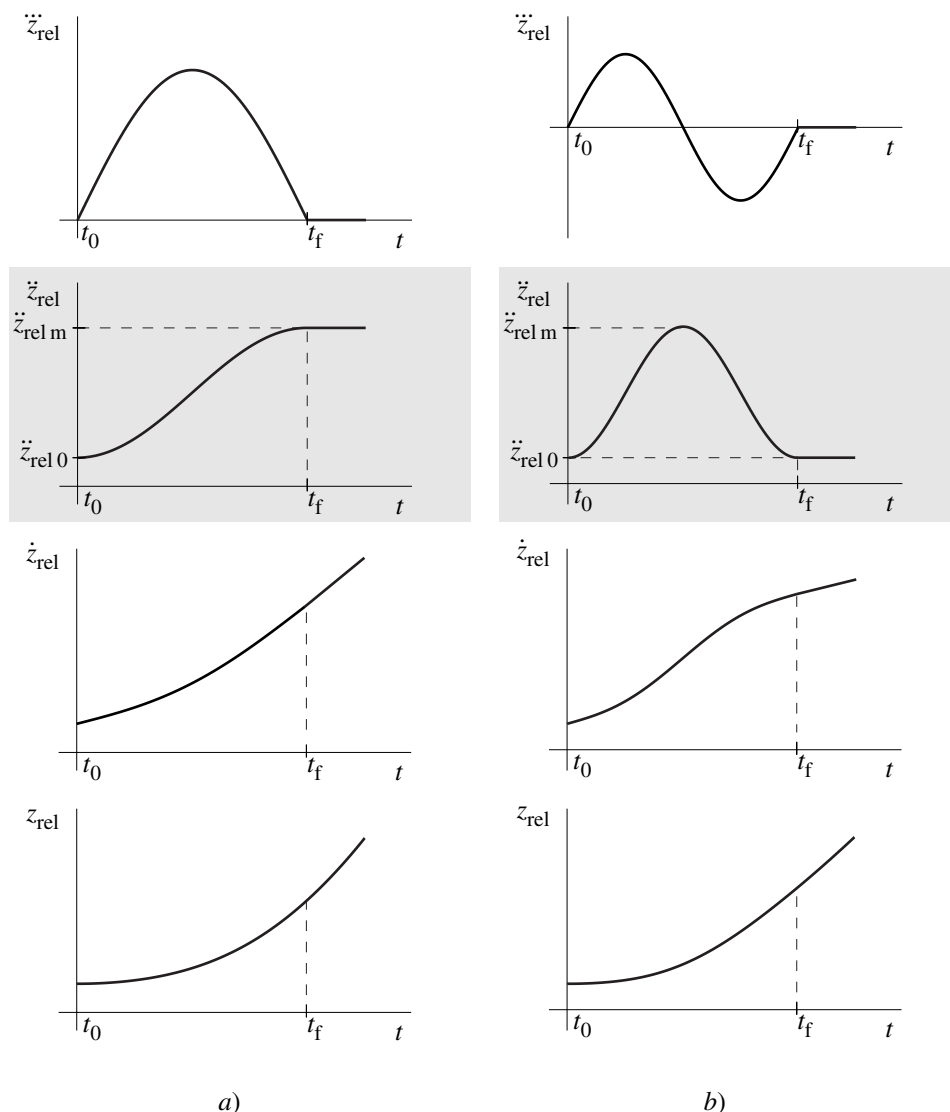
**Figura 4.6** Moviments transitoris amb increment de velocitat relativa: a) no nul, b) nul

**Transitori d'acceleració relativa**

Finalment, es considera un transitori d'acceleració relativa al moviment que, partint d'una acceleració inicial  $\ddot{z}_{rel0}$ , passa a tenir una acceleració  $\ddot{z}_{relm}$  en un temps  $t_f - t_0$ , o bé que comença en  $\ddot{z}_{rel0}$  i un cop ha arribat a  $\ddot{z}_{relm}$ , acaba amb la mateixa acceleració  $\ddot{z}_{rel0}$  en el temps indicat. En la Figura 4.7 es mostren exemples d'aquests moviments.

Si la funció d'una màquina requereix un moviment de canvi d'acceleració relativa, una de les mètriques que determina si s'assoleix l'objectiu és l'increment d'aquesta acceleració. Quant a les altres variables implicades –increments de velocitat, posició o el temps de durada del transitori– i donat que aquest transitoris no són gaire habituals, se suposarà, en general, el temps com l'altra mètrica requerida en el funcionament.

En aquest cas es pot considerar, per exemple, que dues lleis de moviment que defineixen transitoris d'acceleració relativa són equivalents funcionalment si produeixen el mateix canvi d'acceleració relativa en el mateix temps.



**Figura 4.7** Moviments transitoris amb increment d'acceleració relativa: a) no nul, b) nul

### 4.2.2 Senyal representatiu del transitori

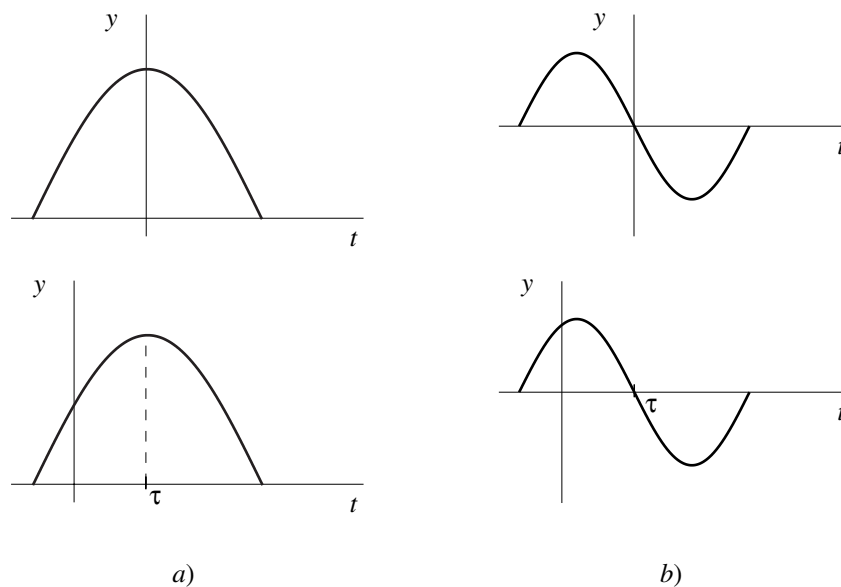
Per tal de poder ser tractat mitjançant les tècniques de Fourier es proposa prendre, si cal, com a senyal representatiu del moviment  $y(t)$ , el que correspon a la derivada temporal del transitori considerat. D'aquesta manera, atenent a les consideracions fetes en el subapartat anterior i segons la classificació feta a l'apartat 3.2,  $y(t)$  té la categoria de senyal *determinista*, ja que es pot descriure mitjançant una funció matemàtica explícita que permet el coneixement de valors futurs i *transitori*, ja que l'energia associada al senyal és finita.

En el cas dels moviments transitoris de posició relativa, la velocitat relativa i les seves derivades són senyals deterministes i transitoris (Figura 4.5). En el cas de moviments transitoris de velocitat relativa, són l'acceleració relativa i les seves derivades les incloses en aquesta categoria de senyals (Figura 4.6). Si es tracta de moviments

transitoris d'acceleració relativa, pertanyen a aquesta categoria la derivada de l'acceleració relativa (sobreacceleració relativa) i les seves derivades (Figura 4.7).

### 4.2.3 Senyals transitoris simètrics. Propietats.

Les lleis de moviment que es poden descriure amb un senyal  $y(t)$  transitori amb simetria parell o imparell al voltant de  $t=0$  o simetria parell o imparell al voltant d'un eix de simetria qualsevol  $t=\tau$  (Figura 4.8) presenten, en general, uns certs avantatges tant en el domini temporal com en el domini freqüencial, respecte altres tipus de lleis de moviment.



**Figura 4.8** Senyals  $y(t)$  amb a) simetria parell al voltant de  $t=0$  i  $t=\tau$  i b) simetria imparell al voltant de  $t=0$  i  $t=\tau$

#### ***Simetria parell***

Siguin dos senyals  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  transitoris, definits entre  $t_0$  i  $t_f$ , que presenten simetria parell al voltant de  $(t_0+t_f)/2$ , i que les seves funcions integrades són

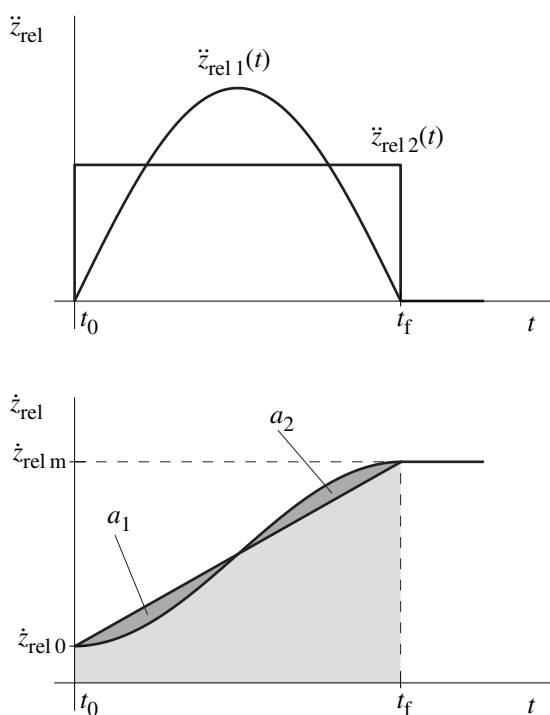
$$\int_{t_0}^t y_1(t) dt = f_1(t) \tag{4.4}$$

$$\int_{t_0}^t y_2(t) dt = f_2(t)$$

Si per a  $t_0$  i  $t_f$  es compleixen les igualtats  $f_1(t_0) = f_2(t_0)$  i  $f_1(t_f) = f_2(t_f)$  (les funcions integrades presenten els mateixos valors a l'inici i al final de l'interval de temps), es pot afirmar, gràcies a la simetria parell, que l'àrea tancada entre les funcions integrades i l'eix d'abscisses és la mateixa en l'interval de temps indicat, és a dir:

$$\int_{t_0}^{t_f} f_1(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} f_2(t) dt \quad (4.5)$$

Agafant com a exemple un transitori de velocitat relativa, es compleix que si dues corbes d'acceleració relativa  $\ddot{z}_{rel}$ , amb simetria parell, provoquen el mateix canvi de velocitat relativa en un temps determinat, la distància relativa recorreguda en aquest temps també serà la mateixa, amb independència de la forma que tinguin aquestes corbes.



**Figura 4.9** Corbes d'acceleració relativa amb simetria parell al voltant de  $(t_0+t_f)/2$  i les seves integrals

Tal com es mostra en la Figura 4.9, i per facilitar l'explicació, es tria per a una de les corbes d'acceleració relativa, un pols rectangular. La propietat de simetria parell fa que les àrees  $a_1$  i  $a_2$  –obtingudes a partir de la diferència de les corbes d'acceleració integrades– siguin iguals i, per tant, l'àrea tancada sota les corbes de velocitat relativa entre  $t_0$  i  $t_f$  –que és la distància relativa recorreguda– és la mateixa.

Analíticament, si  $\ddot{z}_{rel1}(t)$  i  $\ddot{z}_{rel2}(t)$  són dues corbes d'acceleració relativa qualsevol amb simetria parell, les respectives funcions que defineixen la velocitat relativa són:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{rel1}(t) &= \dot{z}_{rel0} + \int_{t_0}^t \ddot{z}_{rel1}(t) dt \\ \dot{z}_{rel2}(t) &= \dot{z}_{rel0} + \int_{t_0}^t \ddot{z}_{rel2}(t) dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

i el que es vol demostrar és que els corresponents desplaçaments relatius recorreguts entre  $t_0$  i  $t_f$  són iguals, és a dir,

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \dot{z}_{rel0} + \int_{t_0}^t \ddot{z}_{rel1}(t) dt \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \dot{z}_{rel0} + \int_{t_0}^t \ddot{z}_{rel2}(t) dt \right] dt \quad (4.7)$$

Reescriuint l'expressió anterior, s'obté:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t (\ddot{z}_{rel1}(t) - \ddot{z}_{rel2}(t)) dt \right] dt = 0 \quad (4.8)$$

Si ara s'introdueix el límit d'integració  $(t_0+t_f)/2$  que correspon al valor de l'abscissa per on passa l'eix de simetria de les corbes, es pot escriure l'expressió (4.8) segons:

$$\int_{t_0}^{(t_0+t_f)/2} \left[ \int_{t_0}^t (\ddot{z}_{rel1}(t) - \ddot{z}_{rel2}(t)) dt \right] dt + \int_{(t_0+t_f)/2}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t (\ddot{z}_{rel1}(t) - \ddot{z}_{rel2}(t)) dt \right] dt = 0 \quad (4.9)$$

La condició de simetria parell respecte a l'abscissa  $(t_0+t_f)/2$  es pot expressar segons:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{rel1}(t) &= \ddot{z}_{rel1}(t_0 + t_f - t) \\ \ddot{z}_{rel2}(t) &= \ddot{z}_{rel2}(t_0 + t_f - t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Introduint aquesta condició en la segona integral de l'expressió (4.9), queda com:

$$\int_{(t_0+t_f)/2}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t (\ddot{z}_{rel1}(t_0 + t_f - t) - \ddot{z}_{rel2}(t_0 + t_f - t)) dt \right] dt \quad (4.11)$$

i fent el canvi de variable  $\tau = t_0 + t_f - t$  es pot reescriure:

$$\begin{aligned} &\int_{(t_0+t_f)/2}^{t_0} \left[ \int_{t_f}^{\tau} (\ddot{z}_{rel1}(\tau) - \ddot{z}_{rel2}(\tau)) d\tau \right] d\tau = \\ &\int_{(t_0+t_f)/2}^{t_0} \left[ \int_{t_f}^{t_0} (\ddot{z}_{rel1}(\tau) - \ddot{z}_{rel2}(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^{\tau} (\ddot{z}_{rel1}(\tau) - \ddot{z}_{rel2}(\tau)) d\tau \right] d\tau = \\ &-\int_{t_0}^{(t_0+t_f)/2} \left[ \int_{t_0}^{\tau} (\ddot{z}_{rel1}(\tau) - \ddot{z}_{rel2}(\tau)) d\tau \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.12)$$

Per tant, es comprova que el resultat de l'expressió (4.9) és nul, ja que equival a la resta de dues integrals d'igual valor.

### ***Doble simetria***

De la mateixa manera, siguin ara dos senyals  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  transitoris, definits entre  $t_0$  i  $t_f$ , que presenten doble simetria –cas particular de simetria imparell– al voltant de  $(t_0+t_f)/2$ . Les seves funcions integrades són:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t y_1(t) dt &= f_1(t) \\ \int_{t_0}^t y_2(t) dt &= f_2(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

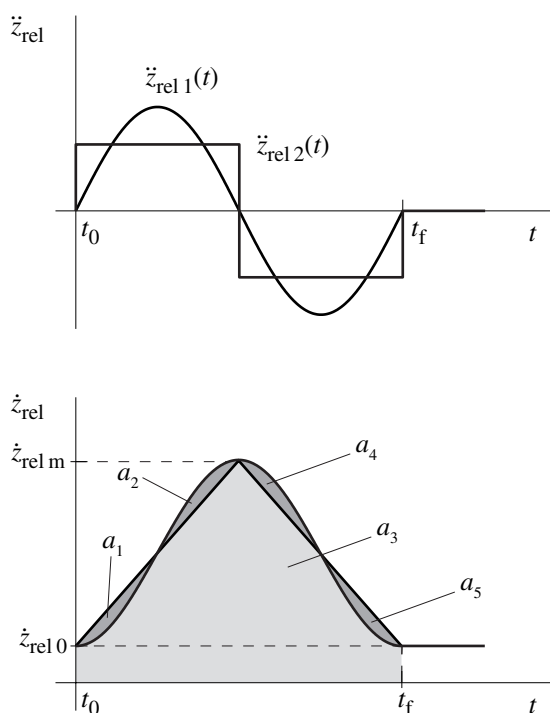


Si per a  $t_0$  i  $(t_0+t_f)/2$  es compleixen les igualtats  $f_1(t_0) = f_2(t_0)$  i  $f_1((t_0+t_f)/2) = f_2((t_0+t_f)/2)$  (les funcions integrades presenten els mateixos valors a l'inici i en el punt mig de l'interval de temps), es pot afirmar, gràcies a la doble simetria, que l'àrea tancada entre les funcions integrades i l'eix d'abscisses és la mateixa en l'interval de temps indicat, és a dir,

$$\int_{t_0}^{t_f} f_1(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} f_2(t) dt \quad (4.14)$$

Agafant com a exemple un transitori de velocitat relativa, si dues corbes d'acceleració relativa  $\ddot{z}_{rel}$ , amb doble simetria, provoquen el mateix canvi de velocitat relativa en la meitat del interval de temps, la distància relativa recorreguda en tot l'interval serà la mateixa, amb independència de la forma que tinguin aquestes corbes.

Tal com mostra la Figura 4.10, es tria una de les corbes d'acceleració relativa formada per dos polsos rectangulars. La propietat de doble simetria fa que les àrees  $a_1, a_2, a_3$  i  $a_4$  siguin iguals. Per tant, l'àrea tancada sota les corbes de velocitat relativa entre  $t_0$  i  $t_f$  –distància relativa recorreguda– és la mateixa.



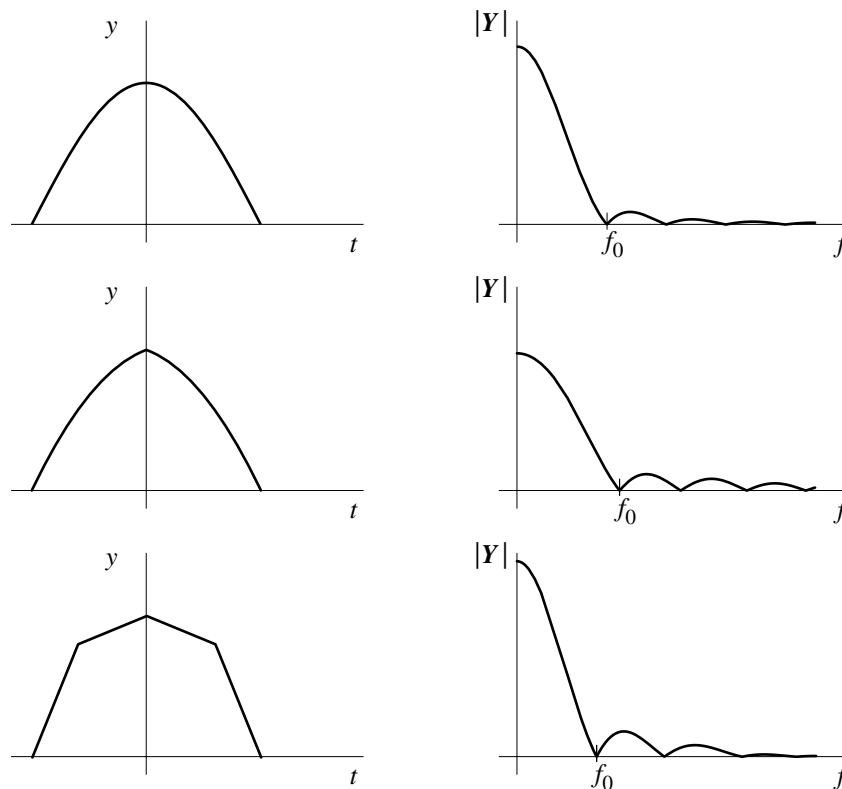
**Figura 4.10** Corbes d'acceleració relativa amb simetria imparell al voltant de  $(t_0+t_f)/2$

Analíticament, es pot fer el mateix raonament que en el cas de simetria parell si es pren la meitat de l'interval de temps, ja que llavors queden dos trams concatenats amb simetria parell.

**Contingut freqüencial dels senyals simètrics**

És interessant posar de manifest algunes particularitats dels senyals simètrics transitoris, com els mostrats genèricament en les figures d'aquest capítol, pel que fa al seu contingut freqüencial. Al tractar-se d'un senyal d'energia finita en el domini temporal i segons el Teorema de Parseval, l'espectre ha de tendir a zero en augmentar la freqüència, ja que la integral de l'espectre representa també l'energia. D'altra banda, la simetria parell o doble simetria està lligada, en molts casos, al fet que el contingut freqüencial s'anul·li per a una determinada freqüència  $f_0$ . En aquest casos, no cal anar a altes freqüències per tenir baixes excitacions. En la Figura 4.11 es poden veure diversos exemples d'aquesta situació.

En el proper capítol es veurà que és precisament aquesta característica la que es fa servir per no excitar els modes propis del sistema. Si es situen aquests punts apropiadament, s'aconsegueix una disminució de vibracions residuals després del transitori.



**Figura 4.11** Contingut freqüencial d'alguns senyals simètrics

L'expressió (4.15) mostra el càlcul del contingut freqüencial d'un senyal  $y(t)$  per mitjà de la transformada de Fourier.

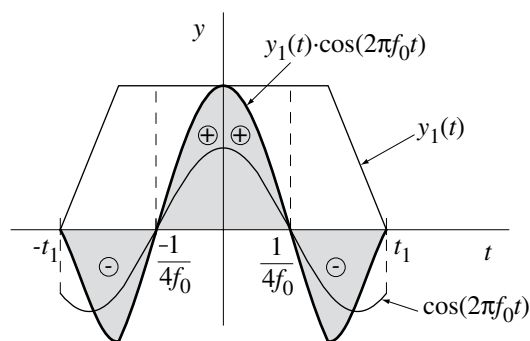
$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \text{TF}[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) (\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)) dt
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Si aquest senyal és simètric parell  $y_1(t)$ , o imparell  $y_2(t)$ , al voltant de  $t=0$ , l'expressió (4.15) es simplifica sensiblement, donant lloc a (4.16) i (4.17) respectivament, ja que la transformada de Fourier dels senyals parells i imparells s'expressa amb funcions real i imaginària respectivament.

$$Y_1(f) = \text{TF}[y_1(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t) \cos(2\pi f t) dt \quad (4.16)$$

$$Y_2(f) = \text{TF}[y_2(t)] = -j \int_{-\infty}^{+\infty} y_2(t) \sin(2\pi f t) dt \quad (4.17)$$

Que el contingut freqüencial d'un senyal simètric sigui nul per a una determinada  $f_0$  vol dir que les expressions (4.16) o (4.17) s'anul·len per a  $f_0$ . Això succeeix pel fet que l'àrea sota la funció resultant del producte de  $y(t)$  per a la funció cosinus o sinus en aquesta  $f_0$ , segons calgui, serà nul·la. En la Figura 4.12 es mostra gràficament aquesta condició per a una funció parell.



**Figura 4.12** Senyal  $y_1(t)$  parell i funció cosinus per a una  $f_0$  que anul·la l'àrea del seu producte

Un senyal simètric al voltant de  $t \neq 0$  es pot tractar de manera anàloga al cas presentat, fent el canvi de variable adequat. Quant al contingut freqüencial, aquest retard temporal només afecta la fase, i resulta en una variació de la fase proporcional a la freqüència.

### **Contingut freqüencial dels senyals no simètrics**

A l'igual que en els senyals simètrics, l'energia associada a un transitori no simètric també és finita en el domini temporal i, segons el Teorema de Parseval, l'espectre ha de tendir a zero en augmentar la freqüència, ja que la integral de l'espectre representa l'energia.

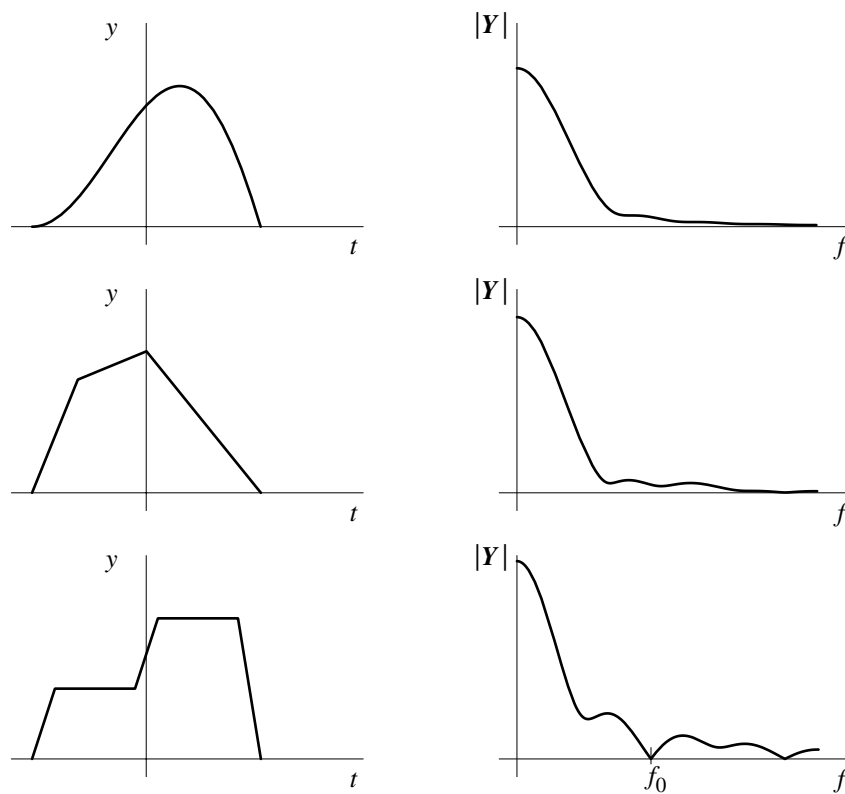
D'altra banda, en un senyal no simètric l'expressió (4.15) no es pot simplificar i, per tant, la condició de contingut freqüencial nul a una determinada  $f_0$  implica que s'han d'anul·lar a la vegada els termes real i imaginari com es veu a (4.18)

$$|Y(f)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) (\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)) dt \right| = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cos(2\pi ft) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \sin(2\pi ft) dt = 0$$
(4.18)

Atès el raonament anterior, és més probable que un senyal que gaudeixi de simetria parell o imparell pugui tenir un valor  $f_0$  on el seu contingut freqüencial s'anul·li, que un senyal no simètric. En la Figura 4.13 es mostren uns exemples de senyals no simètrics, on succeeixen ambdues circumstàncies; en els dos senyals superiors, no existeix cap valor de  $f_0$  que anul·li a la vegada les dues integrals mostrades en (4.18). En el senyal inferior, però, sí que existeix aquest valor de  $f_0$ .

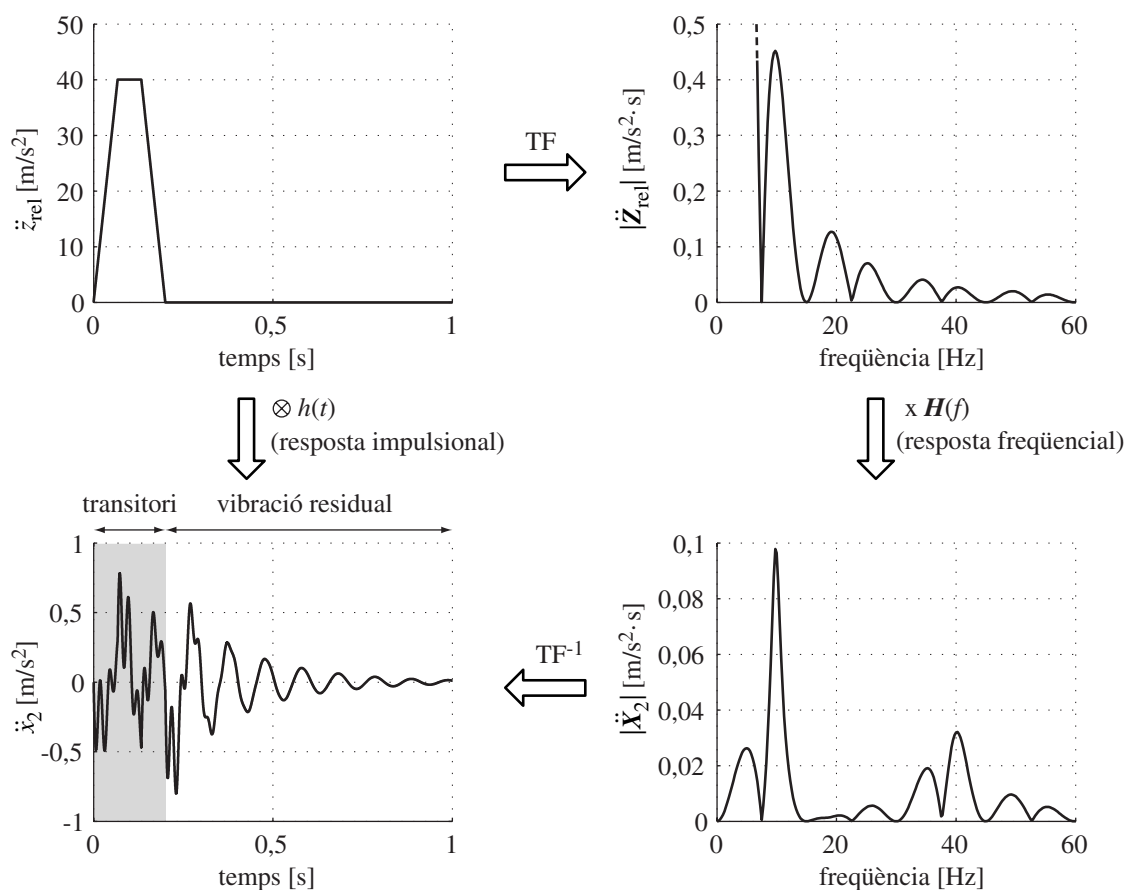


**Figura 4.13** Contingut freqüencial d'alguns senyals no simètrics

### 4.3 RESPOSTA DEL SISTEMA

Per a un sistema de les característiques descrites en l'apartat 4.1 i davant d'un senyal d'entrada  $y(t)$  transitori d'energia finita, el senyal corresponent a la resposta del sistema  $x(t)$  també serà d'energia finita si les magnituds corresponents a l'entrada i a la sortida són les mateixes. Per exemple, si s'analitza un transitori de velocitat, l'entrada i la sortida que corresponen a senyals d'energia finita són les respectives acceleracions i per tant, la resposta freqüencial considerada pot ser  $H(f) = \ddot{X}(f)/\ddot{Y}(f)$ .

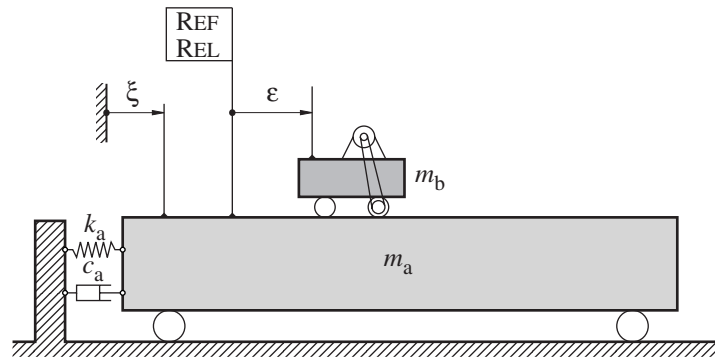
Donat el caràcter vibratori del sistema presentat i ateses les seves respostes freqüencials, els senyals de sortida tindran formes semblants a les mostrades en la Figura 4.14, que corresponen a l'exemple de l'subapartat 4.1.2. S'entén per vibració residual aquella que té lloc un cop ha finalitzat el transitori definit pel senyal d'entrada, tal com mostra aquesta figura.



**Figura 4.14** Possible forma dels senyals de sortida de l'exemple del subapartat 4.1.2

### 4.3.1 Descomposició modal

En base a la teoria de la descomposició modal, la resposta  $x_i(t)$  que té un sistema de  $n$  graus de llibertat vibratori a un senyal d'entrada determinat  $y(t)$ , és equivalent a una suma ponderada i, si escau, ajustada en fase, de respostes  $\zeta_i(t)$  a uns senyals d'entrada  $\varepsilon_i$  que tindrien  $n$  sistemes d'un sol grau de llibertat vibratori. Així, per exemple, la resposta del sistema descrit en l'apartat 4.1 es pot estudiar com la superposició de respostes de sistemes d'un sol grau de llibertat vibratori com el de la Figura 4.15.



**Figura 4.15** Sistema d'un grau de llibertat vibratori

En efecte, les equacions de moviment en forma matricial d'un sistema lineal de  $n$  graus de llibertat vibratori com el descrit prenen la forma de l'expressió (4.19).

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}(y(t)) \quad (4.19)$$

Es defineix la matriu dinàmica segons  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ . Diagonalitzant aquesta matriu, s'obtenen  $n$  valors propis  $\lambda_i$ , a partir dels quals s'obtenen les corresponents freqüències pròpies  $f_i$ , segons (4.20), i els corresponents  $n$  vectors propis  $\mathbf{p}_i$ .

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i} \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.20)$$

Si l'esmoreïment del sistema és negligible, es pot obtenir un sistema d'equacions desacoblat amb unes noves coordenades  $\xi_i$ , anomenades coordenades modals. Primerament, cal fer un canvi de base segons (4.21), on la matriu  $\mathbf{P}$  està formada pels vectors propis  $\mathbf{p}_i$  disposats en columna.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} \quad (4.21)$$

Aplicant aquest canvi de base, el sistema d'equacions (4.19) s'expressa segons (4.22).

$$\mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(y(t)) \quad (4.22)$$

D'altra banda, si  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  són simètriques, es demostra que les matrius  $\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}$  i  $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$  són diagonals. Per tant, multiplicant el sistema (4.22) per la matriu  $\mathbf{P}$  transposada, s'obté un sistema d'equacions desacoblat segons

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(y(t)) \quad (4.23)$$

Quan l'esmoreïment no és negligible, la matriu de canvi de base permet diagonalitzar la matriu  $\mathbf{C}$  si aquesta és una combinació lineal de les matrius  $\mathbf{M}^\alpha$  i  $\mathbf{K}^\beta$  (quan  $\alpha$  i  $\beta$  són la unitat, s'anomena esmoreïment proporcional o de Rayleigh). En general, aquesta condició no es compleix i per tant la descomposició modal s'hauria de analitzar emprant equacions d'estat i modes propis complexos.

En els casos, però, en què els esmorteïments involucrats són petits, s'acostuma a simplificar la matriu d'esmorteïments per poder ser diagonalitzada amb el canvi de base indicat a l'expressió (4.21). Això implica fer nuls els termes de fora de la diagonal de la matriu resultant del producte  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$ . Aquesta aproximació, en els casos esmentats i en general, dona uns resultats força acceptables. S'anomena  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \Big|_s$  a aquest producte simplificat.

Amb l'aproximació descrita, i a partir del sistema d'equacions (4.19), es pot escriure un sistema d'equacions desacoblat que inclou esmorteïment segons (4.24).

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\xi} + \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \Big|_s \dot{\xi} + \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \xi = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(y(t)) \quad (4.24)$$

### 4.3.2 Vibració residual. Caracterització

En un sistema d'un grau de llibertat vibratori com el de la Figura 4.15, prenent com a origen de temps l'instant en què acaba el transitori, la vibració residual correspon al moviment lliure d'un sistema i per tant segueix l'expressió

$$\xi(t) = C e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (4.25)$$

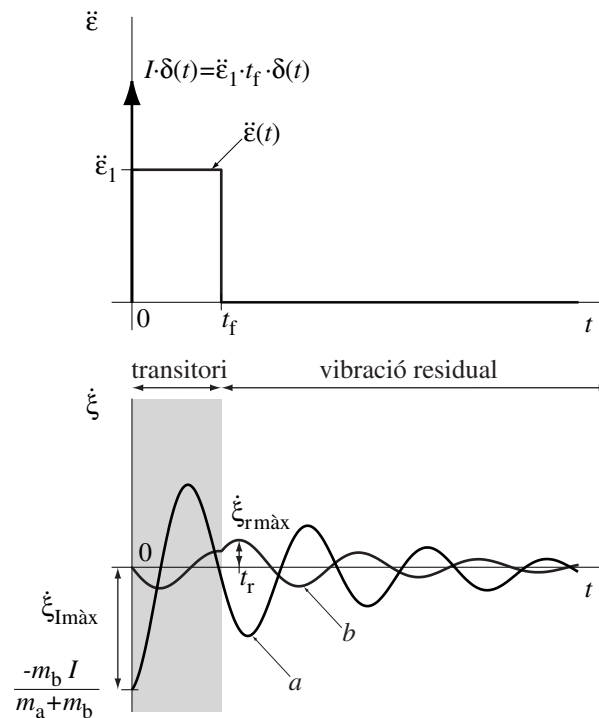
amb  $C$  i  $\varphi$  constants que depenen de les condicions inicials del moviment, i amb

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m_a + m_b}} \\ \zeta &= \frac{c}{2\sqrt{(m_a + m_b)k}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Atenent a la classificació feta en l'apartat 3.2, les vibracions residuals són *lliures*, ja que es deixa oscil·lar el sistema sense aportacions d'energia; *lineals*, ja que el model emprat per caracteritzar el sistema és lineal; *deterministes*, ja que es poden descriure mitjançant una funció matemàtica explícita que permet el coneixement de valors futurs (resposta d'un sistema lineal a una entrada determinista); finalment són *no periòdiques* i *transitòries* ja que l'energia associada al senyal és finita.

#### ***Determinació de la vibració residual***

La determinació de la vibració residual –després del transitori del senyal d'entrada– es fa amb un criteri similar a l'utilitzat per Singer i Seering (1990) i Norton (2002), per a un sistema d'un grau de llibertat vibratori. Tot i que, en l'exemple mostrat, les variables emprades s'han escollit perquè tinguin significat físic, la vibració residual es pot caracteritzar de manera similar, amb independència dels senyals d'entrada i sortida que es facin servir.



**Figura 4.16** Obtenció dels paràmetres que defineixen el % de vibració residual: a) resposta a un impuls de magnitud  $I$  i b) resposta a un pols d'àrea  $I$

Fent referència a un sistema com el de la Figura 4.15, es defineix el percentatge de vibració residual com la relació, en tant per cent, entre l'amplitud de vibració residual màxima  $\xi_{r\text{m\grave{a}x}}$  generada per un senyal d'entrada  $\ddot{\xi}(t)$  i l'amplitud de vibració residual màxima  $\xi_{I\text{m\grave{a}x}}$  generada per un impuls de magnitud  $I$  que compleixi l'expressió (4.27). En la Figura 4.16 s'indiquen gràficament aquestes magnituds.

$$I = \int_{\tau} I \delta(t) dt = \int_0^{t_f} |\ddot{\xi}(t)| dt \quad (4.27)$$

La velocitat màxima  $\dot{\xi}_{I\text{m\grave{a}x}}$  per a un impuls d'acceleració  $\ddot{\xi}(t) = I\delta(t)$  es pot calcular, en aquest cas, aplicant el Teorema de la quantitat de moviment. Concretament, la velocitat màxima correspon a la velocitat inicial  $\dot{\xi}(0)$  que val:

$$\dot{\xi}(0) = -\frac{m_b}{m_a + m_b} \int_{\tau} I \delta(t) dt = -\frac{m_b}{m_a + m_b} I \quad (4.28)$$

on el temps d'integració de l'impuls és  $\tau$  que tendeix a 0.

Tenint en compte (4.28), la resposta del sistema  $\dot{\xi}(t)$  per a l'impuls esmentat, atès que el desplaçament inicial  $\xi(0) = 0$ , s'expressa segons:



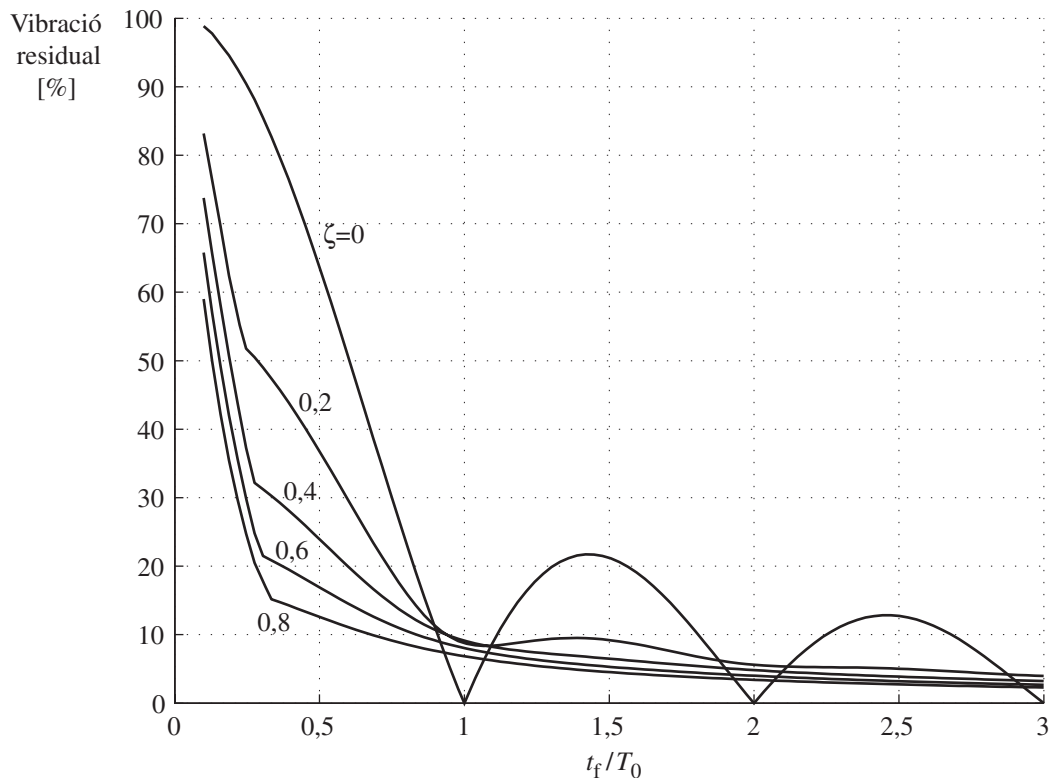
$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= -\frac{m_b}{m_a + m_b} \frac{I}{\cos \psi} e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega_d t + \psi) \\ \psi &= \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

i per tant la resposta impulsional  $h(t)$  pren la forma:

$$h(t) = -\frac{m_b}{m_a + m_b} \frac{1}{\cos \psi} e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega_d t + \psi) \quad (4.30)$$

Per a una entrada qualsevol  $\ddot{\varepsilon}(t)$ , a partir de la resposta impulsional  $h(t)$ , i fent servir la integral de convolució, la resposta del sistema a l' instant  $t$  segueix l'expressió següent:

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{m_b}{m_a + m_b} \frac{1}{\cos \psi} \int_0^t \ddot{\varepsilon}(\tau) e^{-\zeta \omega_0 (t-\tau)} \cos(\omega_d (t-\tau) + \psi) d\tau \quad (4.31)$$



**Figura 4.17** Vibració residual per a un pols de duració  $t_f$  com a senyal d'entrada, per a diferents raons d'esmoreïment

Si es considera  $t_r$  l' instant en el qual l' amplitud de la vibració residual és màxima  $\dot{\xi}_{r \text{ màx}} = \dot{\xi}(t_r)$ , el percentatge de vibració residual s'expressa llavors segons:

$$\% \text{ vibració residual} = 100 \times \frac{\left| \frac{1}{\cos \psi} \int_0^{t_f} \ddot{\varepsilon}(\tau) e^{-\zeta \omega_0 (t_f - \tau)} \cos(\omega_d (t_f - \tau) + \psi) d\tau \right|}{\int_0^{t_f} |\ddot{\varepsilon}(t)| dt} \quad (4.32)$$

Cal observar que el percentatge de vibració residual així definit només depèn de la freqüència natural del sistema  $\omega_0$ , de la raó d'esmoreïment  $\zeta$ , i del senyal d'entrada  $\ddot{\varepsilon}(t)$ .

En la Figura 4.17, a mode d'exemple, es representa el percentatge de vibració residual per a diferents raons d'esmoreïment, emprant com a senyal d'entrada un pols de duració  $t_f$  i essent  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Els punts angulars que s'observen a l'entorn de  $t_f/T_0 = 0,25$ , corresponen a la situació en la qual el màxim de vibració residual deixa de ser en l'instant inicial d'aquesta vibració,  $t_f$ .

En sistemes de diversos graus de llibertat vibratoris, la vibració residual es caracteritza com s'ha explicat, però per a cada un dels modes propis. En el cas que els esmoreïments involucrats permetin simplificar la matriu resultant del producte  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$ , i fer nuls els termes de fora la diagonal, es poden fer servir les coordenades modals definides segons (4.21), ja que continuen essent desacoblades. D'altra banda, l'excitació que s'aplica al sistema vibratori de partida es pot transformar a aquestes coordenades a través de  $\mathbf{P}^T \mathbf{f}(y(t))$ , segons (4.23) i llavors es poden analitzar per separat, segons el procediment descrit, cada un dels sistemes desacoblats d'un grau de llibertat vibratori descrits per cadascuna de les coordenades modals.



## CAPÍTOL 5

# Definició de lleis de moviment

En aquest capítol s'exposa el mètode desenvolupat per definir i sintetitzar lleis de moviment que tenen per finalitat la reducció de vibracions romanents en el sistema vibratori d'estudi, en acabar el transitori de moviment d'excitació –també anomenades vibracions residuals. Aquest estudi es basa, en essència, en la síntesi de senyals que presentin un contingut freqüencial nul en les freqüències que no es desitgen excitar. És necessari, doncs, demostrar en primer lloc que el contingut freqüencial nul d'un senyal d'excitació transitori a una determinada freqüència implica, amb prou validesa, que la vibració residual serà nul·la o prou petita per a determinades condicions d'esmoreïment del sistema. En segon lloc, arran d'aquesta relació, es proposa la definició de lleis de moviment a partir de la convolució temporal de polsos. Finalment, i gràcies al fet que les corbes així definides estan formades per la concatenació de funcions polinòmiques algebraïques, s'estableix un mètode per sintetitzar-les a través de corbes B-spline.

### 5.1 RELACIÓ DE LA VIBRACIÓ RESIDUAL AMB EL CONTINGUT FREQÜENCIAL D'UNA LLEI DE MOVIMENT TRANSITÒRIA

Segons el que s'ha explicat en els apartats 3.2 i 4.3, la resposta d'un sistema a un senyal d'entrada  $y(t)$  es pot caracteritzar, tant en el domini temporal, a partir de la resposta impulsional  $h(t)$  i el propi senyal d'entrada temporal, com en el domini freqüencial, a partir de la transformada de Fourier de l'entrada  $Y(f)$ , i la resposta freqüencial  $H(f)$ , suposada l'existència d'aquestes funcions, segons les expressions següents.

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad (5.1)$$

$$X(f) = H(f) \cdot \text{TF}[y(t)] = H(f) \cdot Y(f) \quad (5.2)$$

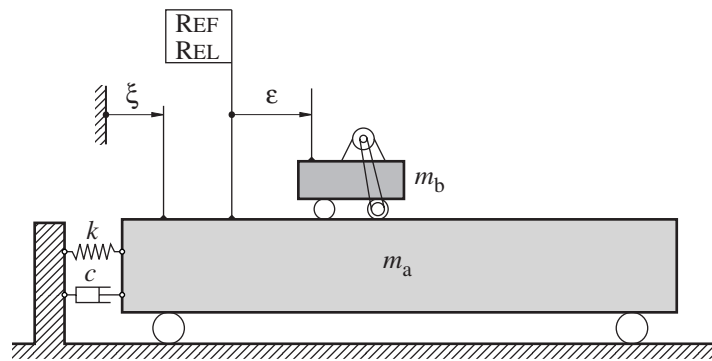


Figura 5.1 Sistema d'un grau de llibertat vibratori

Fent atenció només a (5.2), no es pot avaluar de manera directa quin és el comportament del sistema a partir d'un cert instant de temps. En particular, si el senyal d'entrada és transitori –segons 4.2–, el seu contingut freqüencial s'anul·la per a una freqüència  $f_0$ ,  $|Y(f_0)|=0$ , i es suposa  $|H(f_0)|$  finit, la resposta també tindrà un contingut freqüencial nul a  $f_0$ , ja que  $|X(f_0)|=|H(f_0) \cdot Y(f_0)|$ . Això no vol dir, però, que el contingut freqüencial de la vibració residual a  $f_0$  sigui nul. S'il·lustra aquest efecte en la Figura 5.2, per a un sistema d'un grau de llibertat vibratori com el de la Figura 5.1 (equivalent al de la Figura 4.15). Es fixa en l'exemple una freqüència pròpia del sistema de 1,0 Hz, una raó d'esmoreïment  $\zeta$  de 0,3 i una relació de masses de  $m_b/(m_a+m_b)=0,5$ .

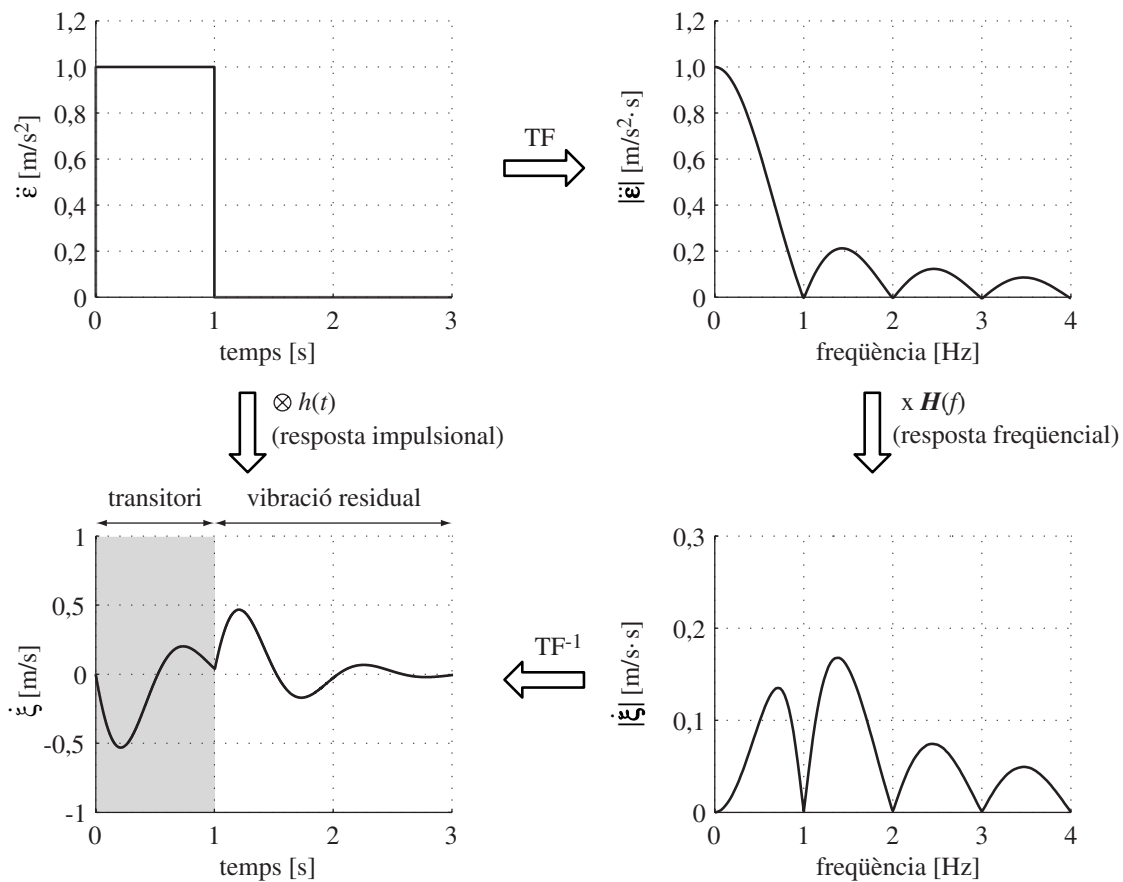


Figura 5.2 Exemple de vibració residual no nul·la per a un senyal d'entrada amb contingut freqüencial nul a la freqüència pròpia del sistema vibratori

El contingut freqüencial de la vibració residual en un sistema d'aquestes característiques està situat al voltant de la freqüència pròpia del sistema i, per tant, sembla adequat triar aquesta com a  $f_0$  –freqüència on es desitja un contingut freqüencial nul. És a dir, per a  $f_0=1,0$  Hz, es desitja que  $|\dot{\xi}(f_0)|=0$ . Es prenen  $\ddot{\varepsilon}(t)$  i  $\dot{\xi}(t)$  com a senyals d'entrada i de sortida respectivament i, tal com mostra la Figura 5.2,  $\ddot{\varepsilon}(t)$  segueix un pols temporal ajustat perquè el seu contingut freqüencial sigui nul per a  $f_0$ . Es comprova en l'exemple que, tot i ser  $|\dot{\xi}(f_0)|=0$ , la vibració residual en acabar el transitori no és nul·la.

### 5.1.1 Sistemes amb esmorteïment nul

Existeix, però, un cas particular on la condició de contingut freqüencial nul d'un senyal d'entrada transitori implica que la resposta residual és nul·la. Aquest cas, formulat analíticament a continuació, es dona quan l'esmorteïment del sistema és zero.

En un sistema genèric d'un grau de llibertat vibratori com el de la Figura 5.1 es pren, per exemple, com a senyal d'entrada  $\ddot{\varepsilon}(t)$ , essent aquest un transitori definit entre  $t_0$  i  $t_f$ . La condició de contingut freqüencial nul d'aquest senyal en  $f_0$  es pot expressar segons:

$$|\dot{\xi}(f_0)| = \left| \int_{t_0}^{t_f} \ddot{\varepsilon}(t) (\cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t)) dt \right| = 0 \quad (5.3)$$

Això implica que la part real i la part imaginària de la integral han de ser zero simultàniament segons:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \ddot{\varepsilon}(t) \cos(2\pi f_0 t) dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_f} \ddot{\varepsilon}(t) \sin(2\pi f_0 t) dt &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

D'altra banda, per comprovar que la vibració residual és nul·la a partir de  $t_f$ , és suficient demostrar que  $\xi(t_f)=0$  i  $\dot{\xi}(t_f)=0$ . S'avalua, doncs, la resposta del sistema  $\xi(t)$  i les seves derivades a través de la resposta impulsional de velocitat del sistema  $h(t)$ , que seguint (4.30) val:

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{m_b}{m_a + m_b} \cos(2\pi f_0 t) \\ f_0 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_a + m_b}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Per tant, la posició del sistema en  $t_f$  és:

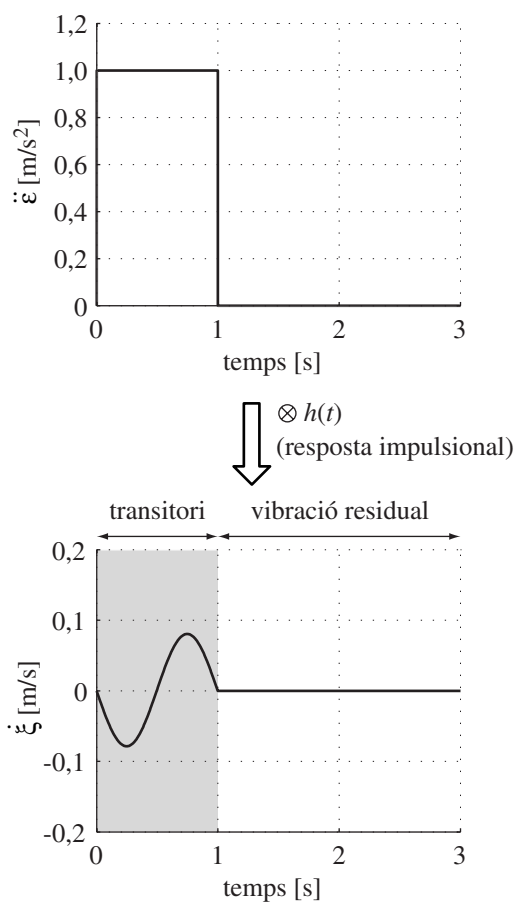
$$\begin{aligned} \xi(t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} -\frac{m_b}{m_a + m_b} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0(t_f - \tau)) \ddot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{m_b}{m_a + m_b} \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t_f) \int_{t_0}^{t_f} \cos(2\pi f_0 \tau) \ddot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \\ &= \frac{m_b}{m_a + m_b} \frac{1}{2\pi f_0} \cos(2\pi f_0 t_f) \int_{t_0}^{t_f} \sin(2\pi f_0 \tau) \ddot{\varepsilon}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.6)$$

El resultat de les dues integrals, segons (5.4), es zero i per tant  $\xi(t_f) = 0$

A l'igual que abans, la velocitat en  $t_f$  es pot expressar segons:

$$\dot{\xi}(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} -\frac{m_b}{m_a + m_b} \cos(2\pi f_0(t_f - \tau)) \ddot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

i, per tant, desenvolupant aquesta expressió de manera anàloga a (5.6) es conclou que  $\dot{\xi}(t_f) = 0$ . En la Figura 5.3 es pot veure la resposta  $\dot{\xi}(t)$  per a l'exemple numèric de la figura anterior. S'observa l'absència de vibració residual.



**Figura 5.3** Exemple de vibració residual nul·la per a un senyal d'entrada amb contingut freqüencial nul a la freqüència pròpia del sistema vibratori (cas  $\zeta=0$ )

Cal notar que si  $|\ddot{\varepsilon}(f_0)|$  no és nul a  $f_0$ , però és prou petit, les integrals (5.4) també seran petites i per tant la vibració residual definida a través de l'estat del sistema en  $t=t_f$  segons (5.6) i (5.7) també serà petita.

### 5.1.2 Sistemes amb esmorteïment no nul

Quan el sistema vibratori presenta un esmorteïment no nul, la condició explicada per al cas d'esmorteïment nul no es certa (s'observa, per exemple, en el cas de la Figura 5.2). En la gran majoria de aplicacions industrials, però, les raons d'esmorteïment que s'observen són properes al valor nul. En peces senceres,  $\zeta$  pren valors al voltant de 0,001; en màquines amb unions rígides,  $\zeta$  està al voltant de 0,01; en peces de plàstic i forjats, s'obtenen valors de  $\zeta$  de 0,1 aproximadament.

A més a més, es veu en l'apartat següent que l'amplitud de la vibració residual és prou petita, per a les lleis de moviment que s'hi proposen, fent servir la condició explicada per al cas d'esmorteïment nul. Per a aquestes lleis, la vibració residual presenta un valor mínim local per a raons d'esmorteïment fins a 0,3 (rang prou ampli com per incloure-hi la gran majoria d'aplicacions).

En conseqüència, la reducció de vibracions residuals proposada en aquest estudi es fa extensiva a la majoria de sistemes vibratoris, amb o sense esmorteïment, i es basa en la síntesi de lleis de moviment, representades per un senyal  $y(t)$ , amb un contingut freqüencial nul a la freqüència pròpia  $f_0$  del sistema vibratori, és a dir,  $|Y(f_0)| = 0$ .

En el cas de sistemes de  $n$  graus de llibertat vibratoris, les lleis de moviment proposades tindran un contingut freqüencial nul a totes les freqüències pròpies  $f_i$  que caracteritzen la resposta del sistema. Per tant, en aquest cas  $|Y(f_i)| = 0$  per  $i=0, \dots, n-1$ .

## 5.2 DEFINICIÓ DE LLEIS DE MOVIMENT PER CONVOLUCIÓ TEMPORAL DE POLSOS

En aquest apartat s'explica, en primer lloc, la utilització de la convolució temporal de polsos per obtenir lleis de moviment amb el contingut freqüencial nul a una determinada freqüència  $f_0$ . Després s'exposa com es pot fer més robust aquest mètode enfront de variació de paràmetres del sistema i es posa de manifest la seva validesa en sistemes d'esmorteïment no nul. També s'explica com s'aplica per reduir les vibracions residuals en sistemes de diversos graus de llibertat vibratoris. Es fa extensiu el mètode per generar altres tipus de lleis de moviment i finalment, s'esmenten les limitacions pròpies del mètode descrit.

### 5.2.1 Mètode genèric

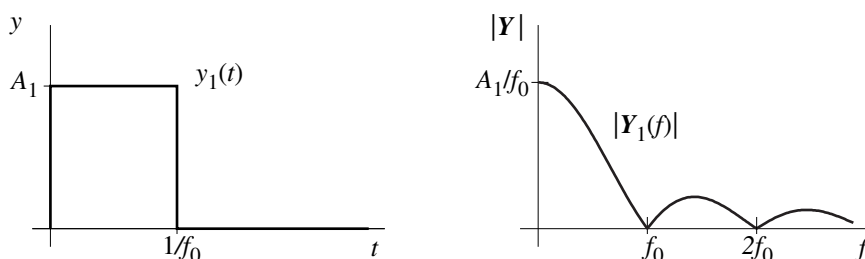
Una de les propietats de la transformada de Fourier indica que la convolució de dos senyals en el domini temporal equival al producte de les seves transformades en el domini freqüencial. Per tant, de manera genèrica, si s'obté un senyal temporal a partir de la convolució de  $m$  senyals temporals arbitraris, n'hi haurà prou que un d'aquests senyals tingui un contingut freqüencial nul a  $f_0$  per assegurar que el senyal resultant també compleix aquesta condició. En el present estudi, aquest mètode genèric s'ha particularitzat escollint el pols temporal com a senyal de partida que compleix  $|Y(f_0)| = 0$ . Per reduir les vibracions residuals que corresponen al mode propi amb



freqüència  $f_0$ , s'obté una primera llei de moviment a partir del senyal que resulta de la convolució temporal de dos polsos adimensionals, ajustats convenientment com s'indica a continuació.

Es defineix un primer pols  $y_1(t)$  amb una duració de  $t_1=1/f_0$  i una amplitud arbitrària  $A_1$ . El contingut freqüencial d'aquest pols és nul a  $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$  ja que ve donat per l'expressió (5.8) el mòdul de la qual es representa en la Figura 5.4.

$$Y_1(f) = A_1 \frac{\sin(\pi f / f_0)}{\pi f} \quad (5.8)$$

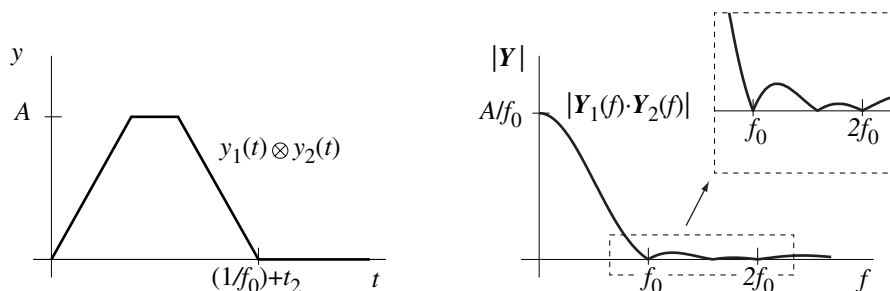


**Figura 5.4** Puls temporal de duració  $1/f_0$  i el seu contingut freqüencial

Amb el pols així definit, mantenint la seva durada, i fent variar la seva amplitud  $A_1$  només es pot assolir un requeriment funcional en la llei de moviment. Per exemple, si en el sistema d'un grau de llibertat vibratori de la Figura 5.1 es pren aquest pols com a llei d'acceleració  $\ddot{x}(t)$  (transitori de velocitat), només es pot fixar un objectiu funcional desitjat, ja sigui de canvi de velocitat o bé distància recorreguda en el transitori.

Per poder fixar dos requeriments funcionals es fa el producte de convolució temporal del primer pols  $y_1(t)$  amb un segon pols  $y_2(t)$  definit amb una duració  $t_2$  i una amplitud determinada que permetin al senyal resultant  $y(t)$  complir aquests requeriments. Aquest senyal  $y(t)$  és un trapezi (o un triangle isòsceles en el cas particular que la durada de  $y_1(t)$  sigui la mateixa que la de  $y_2(t)$ ). El senyal resultant així definit té una durada  $(1/f_0)+t_2$ .

El contingut freqüencial del senyal resultant és el producte dels continguts freqüencials dels dos polsos  $Y_1(f)$  i  $Y_2(f)$  i, per tant, a la freqüència  $f_0$  segueix essent nul, com es mostra a l'exemple de la Figura 5.5.



**Figura 5.5** Trapezi resultant de la convolució de dos polsos amb contingut freqüencial nul a  $f_0$

En el cas de requerir una llei de moviment amb integral temporal nul·la, el senyal  $y(t)$  es pot obtenir amb el producte de convolució temporal d'un primer pols  $y_1(t)$  definit segons el paràgraf anterior, amb un senyal  $y_2(t)$  compost, per exemple, per dos polsos concatenats, amb amplituds positiva i negativa respectivament, com s'indica en la Figura 5.6. En aquest estudi, però, es consideren només les lleis de moviment amb integral temporal no nul·la, ja que el desenvolupament per a les lleis de moviment amb integral temporal nul·la és anàleg.

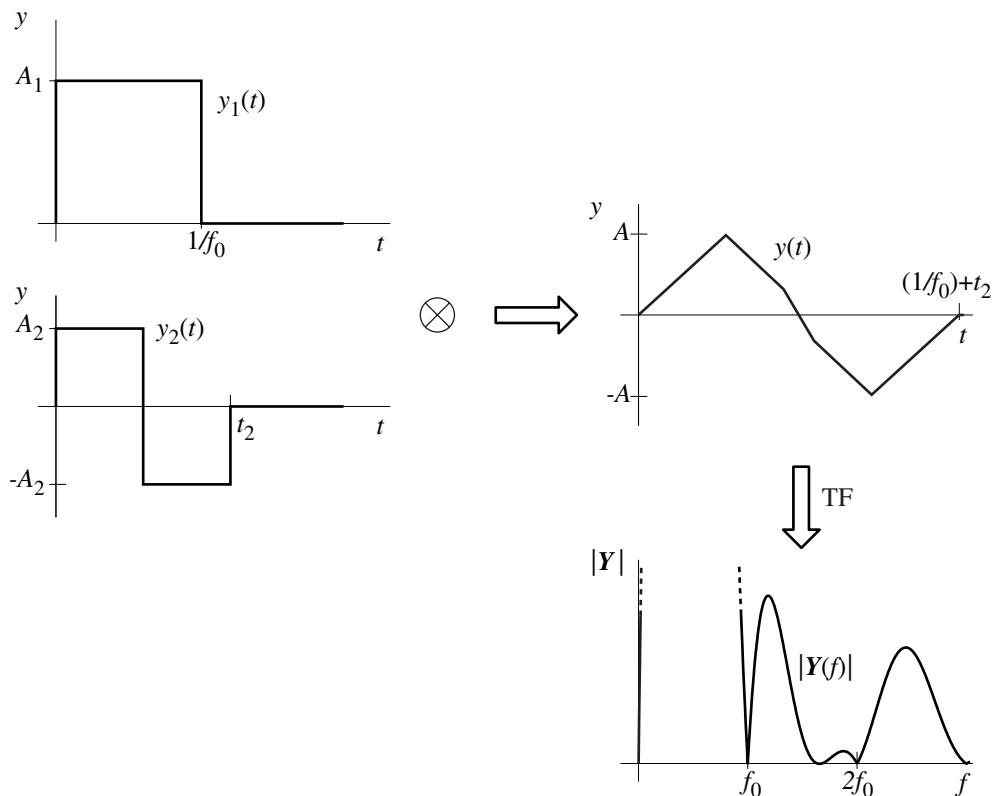


Figura 5.6 Llei de moviment  $y(t)$  amb integral temporal nul·la

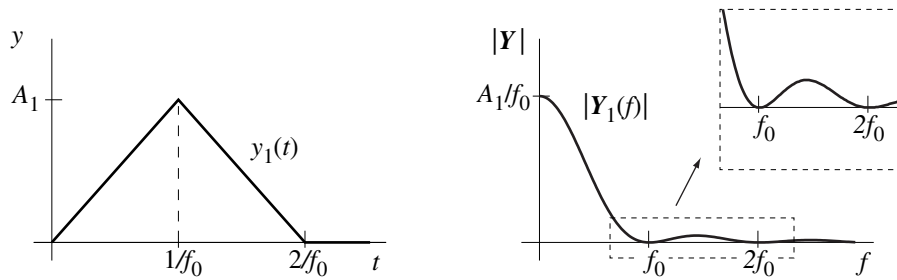
### 5.2.2 Robustesa enfront de la variació de paràmetres del sistema

Es pot observar, en la Figura 5.4, que el contingut freqüencial del senyal d'entrada creix ràpidament al voltant de  $f_0$ . Si es fa servir un únic pols  $y_1(t)$  per situar un valor nul de  $Y(f)$  a  $f_0$ , pot succeir que petites variacions dels paràmetres del sistema facin aparèixer vibracions residuals després del transitori, ja que la freqüència pròpia del sistema es pot haver desplaçat respecte a  $f_0$ .

Tal com s'ha comentat en el punt 5.1.1, si el contingut freqüencial del senyal d'entrada no és nul per a  $f_0$ , però és prou petit, les vibracions residuals també seran petites. Per fer més robusta la seva reducció, es proposa disminuir el contingut freqüencial al voltant de  $f_0$ , amb l'obtenció de  $y_1(t)$  per mitjà del producte de convolució temporal de dos polsos auxiliars. El primer pols, amb una duració  $1/f_0$  i una amplitud arbitrària i el segon pols, amb una duració múltiple del primer ( $n/f_0$  amb  $n=1,2,\dots$ ) i també una amplitud

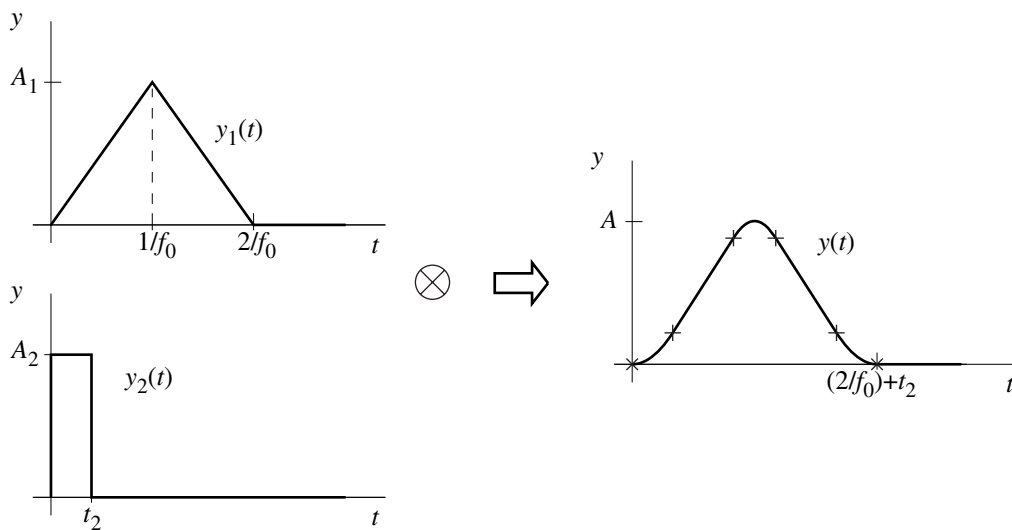
arbitrària. El resultat és un senyal trapezial (triangular per a  $n=1$ ), l'espectre del qual segueix l'expressió (5.9) i ara és tangent a l'eix d'abscisses en els punts  $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$ , i per tant té un contingut freqüencial gairebé nul al voltant d'aquests punts (Figura 5.7). En general, en aquest estudi es pren  $n=1$  per obtenir lleis de moviment de durada mínima.

$$Y_1(f) = A_1 \frac{\sin(\pi f / f_0) \sin(n \pi f / f_0)}{(\pi f)^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

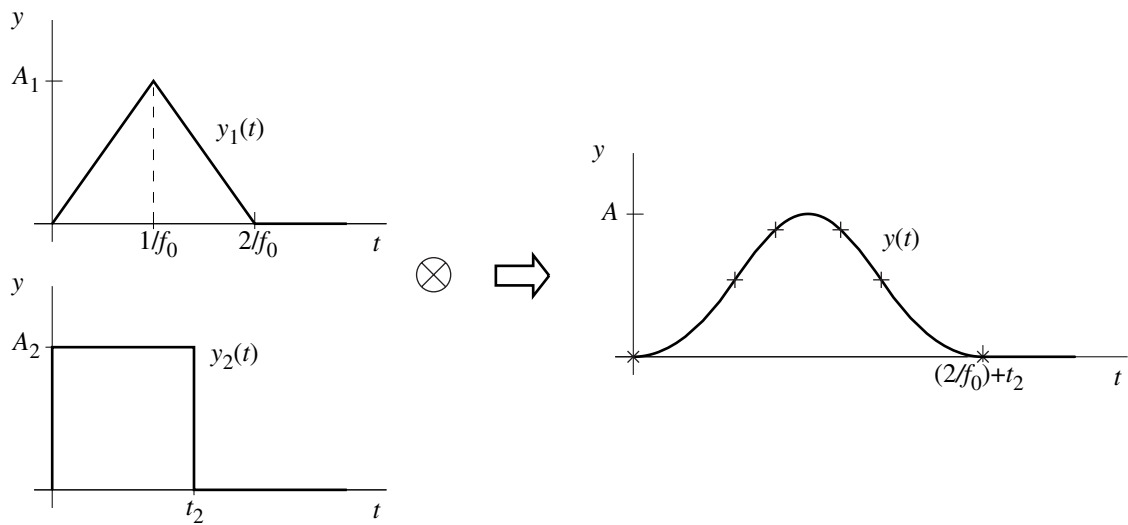


**Figura 5.7** Disminució del contingut freqüencial al voltant de  $f_0$  per mitjà d'un senyal triangular

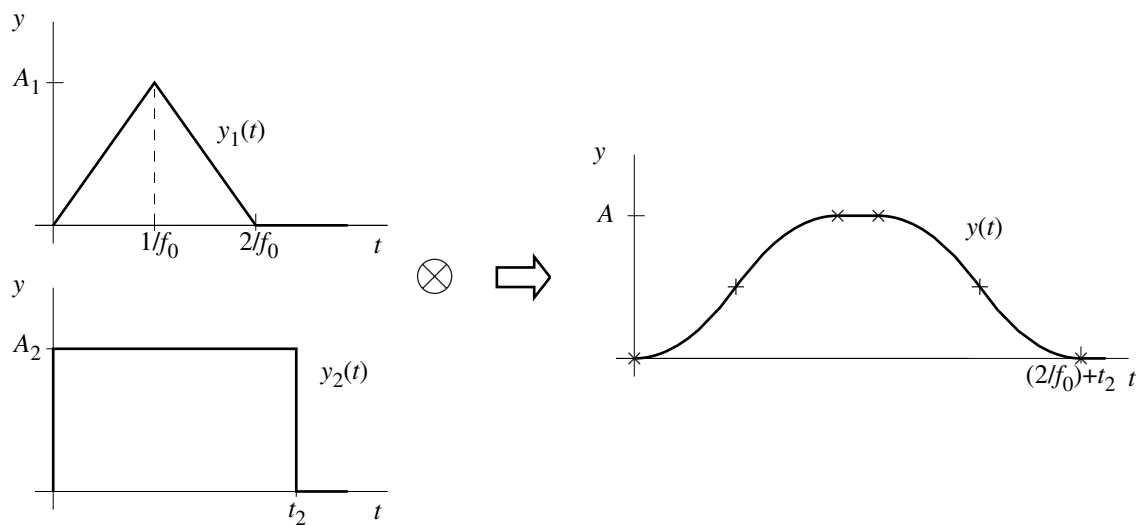
Per poder fixar dos requeriments funcionals a la vegada, a l'igual que en el cas d'un sol pols,  $y(t)$  s'obté fent el producte de convolució temporal del senyal  $y_1(t)$  amb un pols  $y_2(t)$  definit amb una duració i amplitud determinades per complir aquests requeriments. Segons el pols  $y_2(t)$  tingui una duració  $t_2 \leq 1/f_0$ ,  $1/f_0 < t_2 \leq 2/f_0$  o  $t_2 > 2/f_0$ , el senyal resultant  $y(t)$  té la forma mostrada en la Figura 5.8, Figura 5.9 o Figura 5.10 respectivament. El senyal obtingut té una durada  $(2/f_0) + t_2$  i està format per 5 trams polinòmics concatenats, de grau igual o inferior a 2, amb unions  $C^1$  (indicades amb creus sobre la corba). El contingut freqüencial del senyal resultant és el producte dels continguts freqüencials de  $Y_1(f)$  i  $Y_2(f)$  i, per tant, en tots els casos segueix essent nul en  $f_0$ .



**Figura 5.8** Senyal obtingut per convolució d'un senyal triangular i d'un pols de duració  $t_2 \leq 1/f_0$



**Figura 5.9** Senyal obtingut per convolució d'un senyal triangular i d'un pols de duració  $1/f_0 < t_2 \leq 2/f_0$



**Figura 5.10** Senyal obtingut per convolució d'un senyal triangular i d'un pols de duració  $t_2 > 2/f_0$

Cal notar que, a partir d'una duració  $t_2 > 2/f_0$  del pols  $y_2(t)$ , el senyal resultant  $y(t)$  es pot modificar directament sobre el propi senyal temporal sense canviar, pel que fa al seu espectre, les freqüències on el contingut freqüencial és nul ( $f_0, 2f_0, \dots$ ). Aquesta possibilitat es mostra en la Figura 5.11 i permet l'ajust de la llei de moviment per complir els dos requeriments funcionals sense ser necessari generar-la novament amb convolució temporal de polsos.

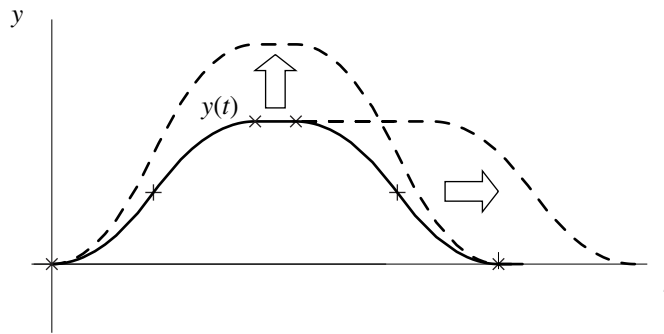


Figura 5.11 Escalat del senyal  $y(t)$  quan  $t_2 > 2/f_0$

**Augment del rang de freqüències en què el contingut freqüencial és proper a zero**

Si es vol major grau de robustesa, es pot generar el senyal  $y_1(t)$  amb més de dos polsos de durada  $1/f_0$  i repetir el procés descrit. D'aquesta manera es disminueix la curvatura en  $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$ , i per tant augmenta el rang de freqüències on el contingut freqüencial és petit. Això té l'inconvenient de requerir lleis de moviment de duració major. Per evitar-ho, es proposa un mètode alternatiu, amb propòsit similar al proposat per Singhose et al (1990), que consisteix en generar el senyal  $y_1(t)$  amb dos polsos de durada  $1/(f_0 + \Delta f)$  i  $1/(f_0 - \Delta f)$  amb  $\Delta f$  petit.

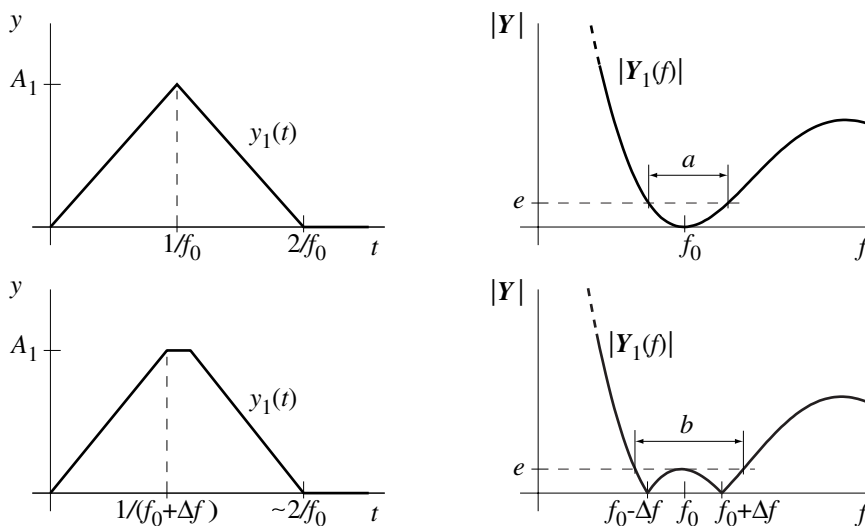


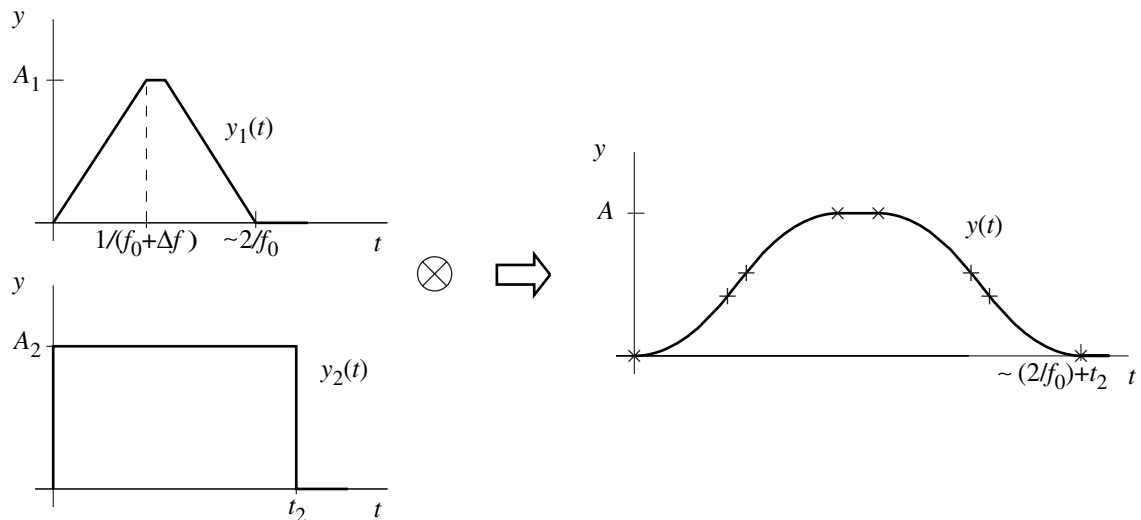
Figura 5.12 Generació del senyal  $y_1(t)$  per convolució de dos polsos que anul·len el contingut freqüencial a  $f_0 \pm \Delta f$

La duració de  $y_1(t)$  en aquest cas és, per a  $\Delta f$  petits

$$\frac{1}{f_0 + \Delta f} + \frac{1}{f_0 - \Delta f} = \frac{2f_0}{f_0^2 - \Delta f^2} \approx \frac{2}{f_0} \tag{5.10}$$

S'observa en la Figura 5.12 que, per a un contingut freqüencial màxim fixat en un valor  $e$ , la banda de freqüències vàlides augmenta de  $a$  a  $b$ .

A l'hora de fixar dos requeriments funcionals a la vegada, a l'igual que en el cas precedent, s'obté  $y(t)$  com el producte de convolució temporal del senyal  $y_1(t)$  amb un pols  $y_2(t)$  definit amb una duració i amplitud determinades per assolir aquests requeriments. Al ser  $y_1(t)$  un trapezi,  $y(t)$  estarà format ara per 6 ó 7 trams polinòmics concatenats –depenent de la durada relativa entre  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$ – amb grau igual o inferior a 2, i amb unions  $C^1$ . En la Figura 5.13 es veu un exemple de la forma que pren aquesta llei de moviment per al cas de  $t_2 > 2/f_0$ , amb les unions entre els diferents trams senyalades amb una creu.



**Figura 5.13** Generació del senyal  $y(t)$  a partir d'un senyal trapezoidal, en el cas  $t_2 > 2/f_0$

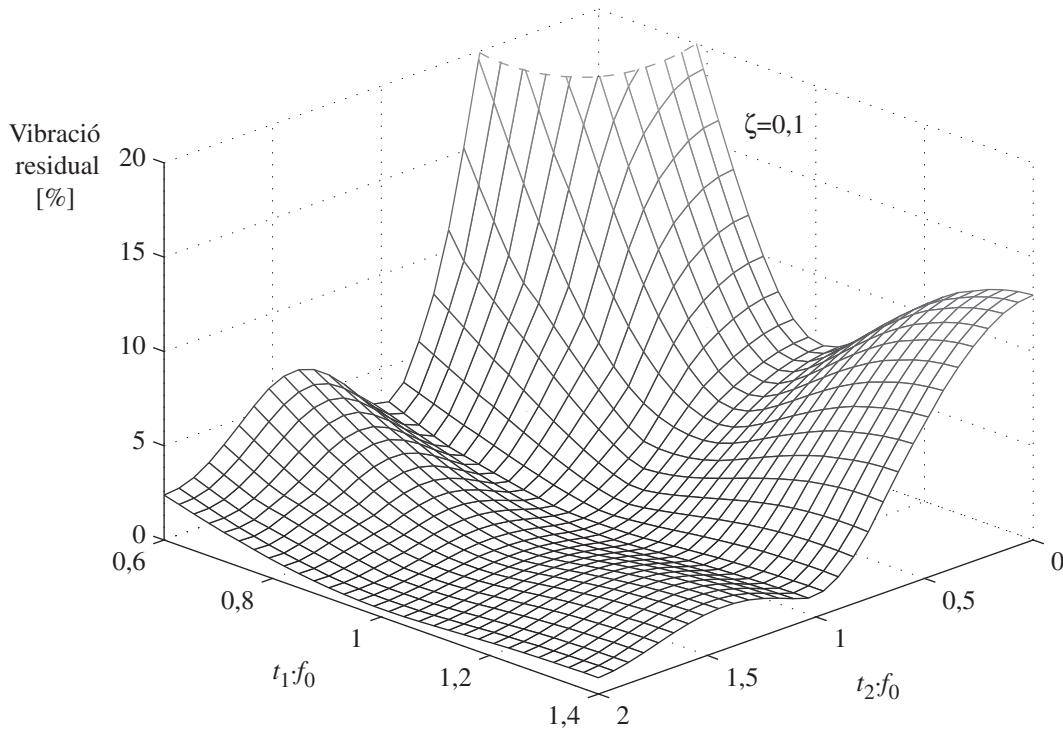
Cal notar també que, a l'igual que en el cas anterior, a partir d'una duració  $t_2 > 2/f_0$  del pols  $y_2(t)$ , el senyal resultant  $y(t)$  es pot modificar directament sobre el propi senyal temporal sense canviar les freqüències de l'espectre on el contingut freqüencial és nul ( $f_0, 2f_0, \dots$ ).

### 5.2.3 Validesa del mètode en sistemes vibratoris amb esmorteïment no nul

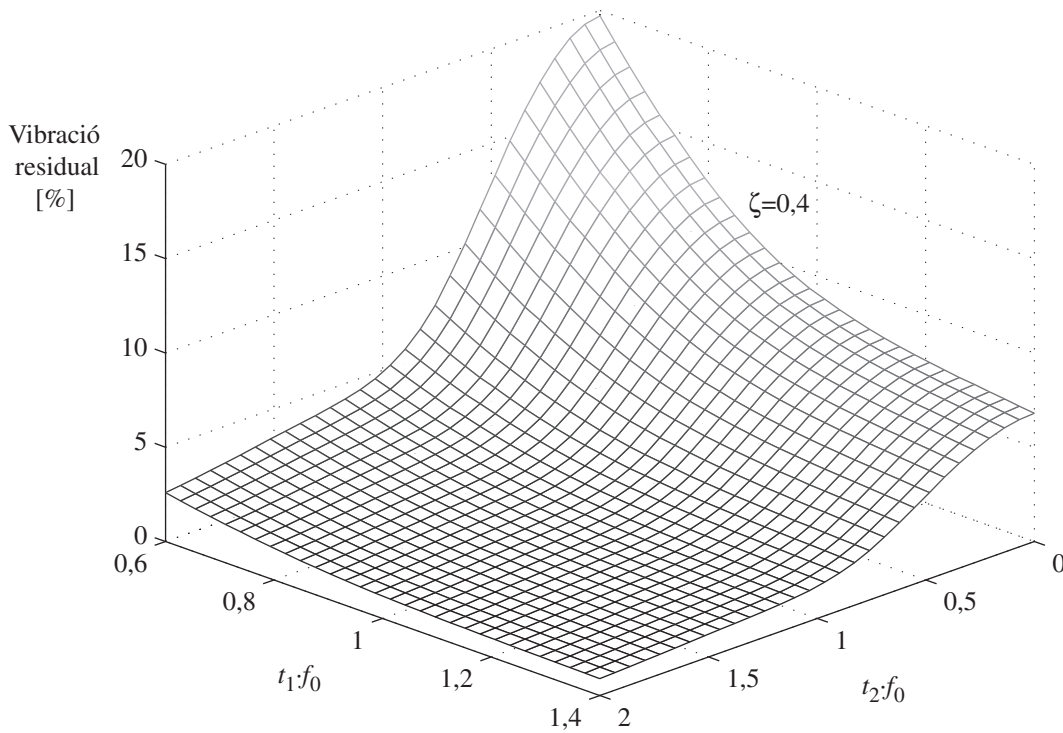
S'ha posat de manifest en l'apartat 5.1 que, per a un sistema vibratori amb esmorteïment nul, no es genera cap vibració residual quan el contingut freqüencial del senyal d'entrada és zero a la freqüència pròpia del sistema. També s'esmenta en aquest apartat que, en el cas de sistemes amb esmorteïment no nul, aquesta relació no és certa. Resulta prou aproximada, però, per a les lleis de moviment proposades i fins a certs valors de raó d'esmorteïment, tal com s'explica a continuació.

Per a un senyal d'entrada  $y(t)$  amb forma trapezoidal com el de la Figura 5.5 ajustat segons el mètode descrit i agafant, per exemple, una raó d'esmorteïment de  $\zeta=0,1$ , s'observa que la superfície que representa el percentatge de vibració residual en funció de la duració dels polsos  $t_1$  i  $t_2$  presenta un mínim local al voltant de  $t_1=1/f_0$ , per a qualsevol  $t_2$  (Figura 5.14). Per a raons d'esmorteïment al voltant de 0,3 el mínim local s'esvaeix, i la superfície representada passa a tenir gairebé el mateix valor per a  $t_1 > 1/f_0$  i  $t_2 > 1/f_0$

(Figura 5.15). Per tant, en el cas d'un senyal d'entrada en forma trapezial, és útil aplicar aquest mètode per a raons d'esmoreïment fins a  $\zeta \approx 0,3$ .

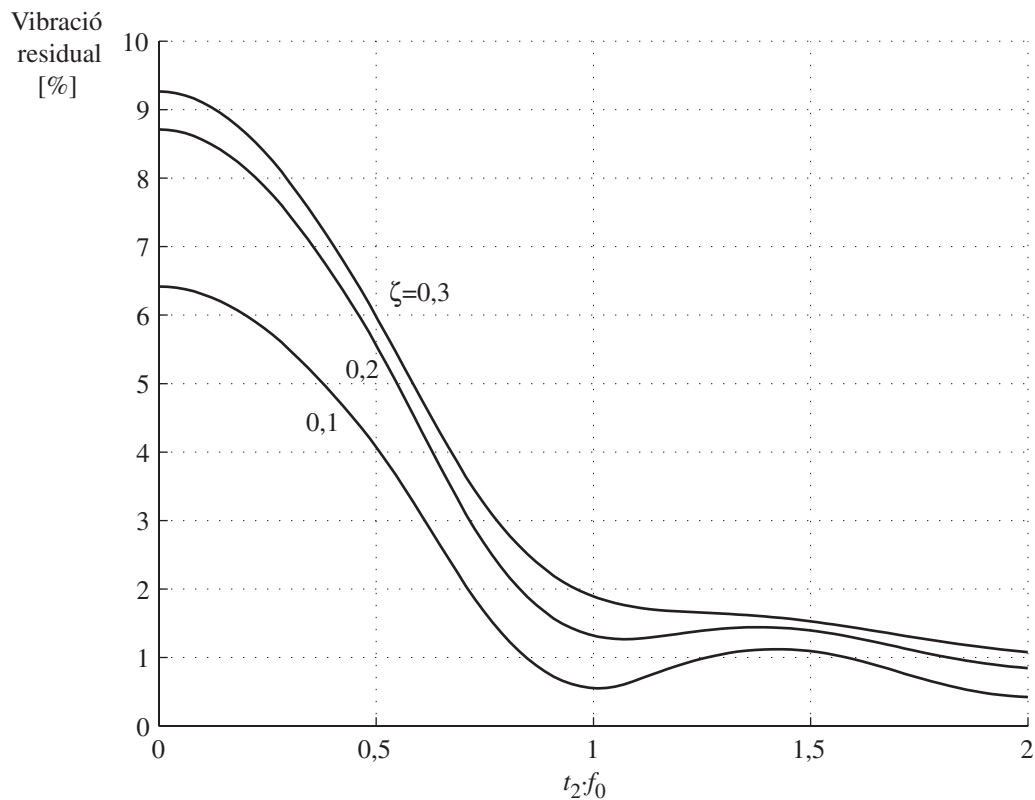


**Figura 5.14** Mínim local del percentatge de vibració residual al voltant de  $t_1=1/f_0$  i per a qualsevol  $t_2$ , per a un senyal d'entrada trapezial en un sistema vibratori amb  $\zeta=0,1$



**Figura 5.15** Absència de mínims locals del percentatge de vibració residual per a un senyal d'entrada trapezial en un sistema vibratori amb  $\zeta=0,4$

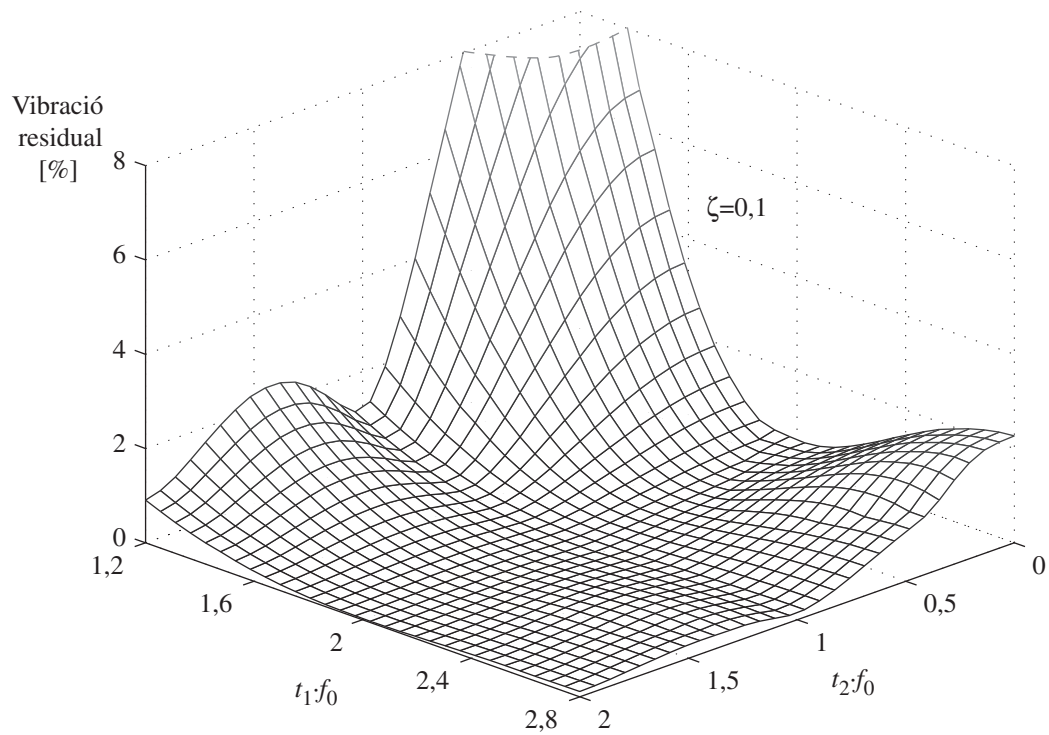
Atenent al que s'ha comentat, es representa en la Figura 5.16 el percentatge de vibració residual per al cas d'un senyal trapezial, en la condició  $t_1=1/f_0$ , per a raons d'esmoreïment fins a 0,3.



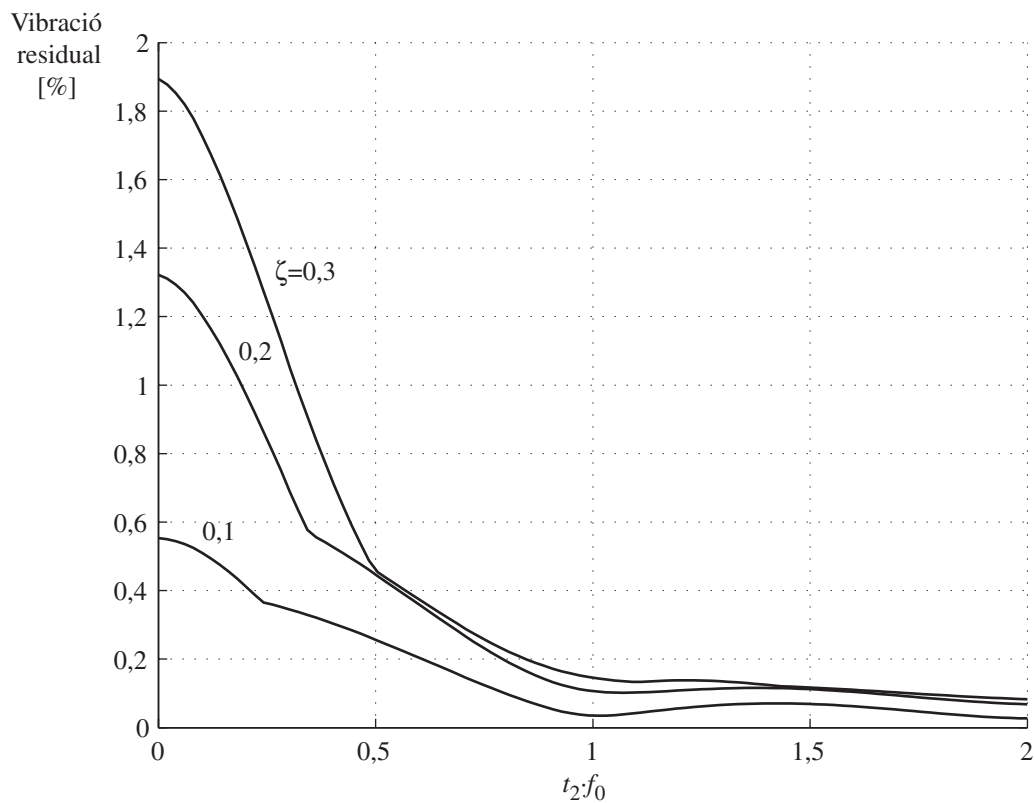
**Figura 5.16** Percentatge de vibració residual en funció de  $t_2$  per a diferents raons d'esmoreïment, per al cas d'un senyal d'entrada trapezial

Per al cas d'un senyal d'entrada  $y(t)$  com el de 5.2.2, on es vol major robustesa en front a variació de paràmetres, (senyals mostrats en la Figura 5.8, Figura 5.9 i Figura 5.10), el mètode també és útil per a sistemes amb esmoreïment no nul, ja que també es presenten mínims al voltant de  $t_1=2/f_0$ , tal com es mostra en la Figura 5.17 ( $\zeta=0,1$ ). La validesa del mètode, en aquest cas, també es pot estendre fins a raons d'esmoreïment  $\zeta \approx 0,3$ . Es representa en la Figura 5.18 el percentatge de vibració residual, per a aquest tipus de senyal, en la condició  $t_1=2/f_0$  i per a raons d'esmoreïment fins a 0,3.





**Figura 5.17** Mínim local del percentatge de vibració residual al voltant de  $t_1=2/f_0$  i per a qualsevol  $t_2$ , per a un senyal d'entrada com el descrit en 5.2.2 en un sistema vibratori amb  $\zeta=0,1$



**Figura 5.18** Percentatge de vibració residual en funció de  $t_2$  per a diferents raons d'esmoreïment, per al cas d'un senyal d'entrada com el descrit en 5.2.2

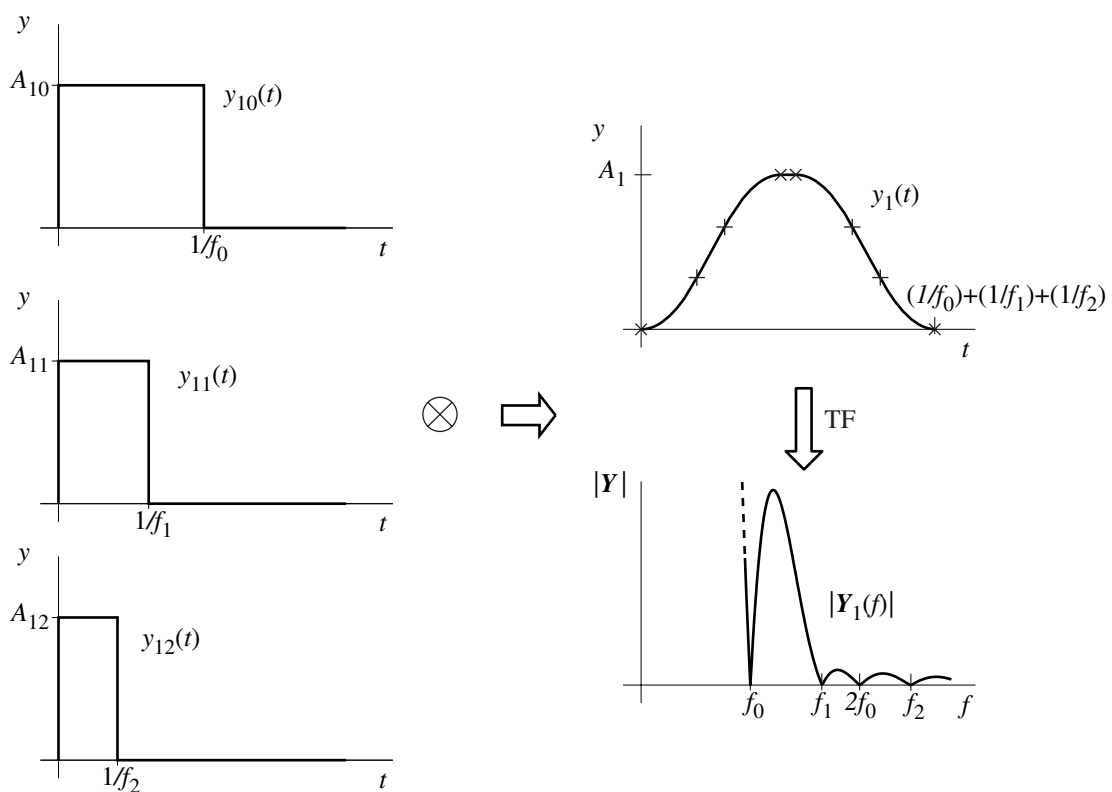
### 5.2.4 Aplicació a sistemes de $n$ graus de llibertat vibratoris

S'ha explicat en l'apartat 4.3 que la resposta  $x_i(t)$  que té un sistema de  $n$  graus de llibertat vibratoris, a un senyal d'entrada determinat  $y(t)$ , en base a la teoria de la descomposició modal, és equivalent a una suma ponderada i, si escau, ajustada en fase, de respostes  $\zeta_i(t)$  que tindrien  $n$  sistemes d'un sol grau de llibertat vibratori. Per tant, una llei de moviment que actua com a senyal d'entrada  $y(t)$  d'un sistema de  $n$  graus de llibertat vibratoris redueix la vibració residual dels  $n$  modes propis simultàniament quan redueix la vibració residual de cada un dels modes propis per separat, és a dir, quan redueix la vibració residual de cada un dels  $n$  sistemes d'un grau de llibertat vibratori equivalents.

#### Reducció de la resposta corresponent als $n$ modes propis

Sigui un sistema vibratori amb  $n$  modes propis amb freqüències  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ . Seguint el mètode descrit per a un sistema d'un grau de llibertat vibratori sense esmorteïment, es proposa generar una llei de moviment en la qual el contingut freqüencial en cada una de les freqüències  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  sigui nul. A tal efecte, es defineix un primer senyal  $y_1(t)$  obtingut per mitjà de la convolució temporal de  $n$  polsos, cada un d'ells amb una durada  $t_{1i}$  expressada segons

$$t_{1i} = \frac{1}{f_i} \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (5.11)$$



**Figura 5.19** Senyal temporal  $y_1(t)$  i el seu espectre freqüencial obtingut amb la convolució temporal de tres polsos

Segons l'expressió (5.8), cada pols té un contingut freqüencial nul a cada una de les  $n$  freqüències pròpies.

En la Figura 5.19, es mostra un exemple d'un espectre freqüencial obtingut amb la convolució temporal de tres polsos, on es veu un contingut nul a  $f_0$ ,  $f_1$  i  $f_2$ . El senyal resultant  $y_1(t)$  d'aquest exemple tindrà una forma similar a la mostrada, i estarà format per 7 trams polinòmics de grau igual o menor a 2 concatenats amb unions  $C^1$ .

De la mateixa manera que en els casos anteriors, per fixar dos requeriments funcionals a la vegada, s'obté  $y(t)$  amb el producte de convolució temporal del senyal  $y_1(t)$  amb un pols  $y_2(t)$  definit amb una duració i amplitud determinades per assolir aquests requeriments. Per tant, si el sistema té  $n$  modes propis,  $y(t)$  s'obté amb la convolució temporal de  $n+1$  polsos. Això implica que el grau dels polinomis concatenats és igual o inferior a  $n$ , que les seves unions són  $C^{n-1}$  i que la durada del senyal  $y(t)$  serà sempre major o igual a  $(1/f_0) + (1/f_1) + \dots + (1/f_{n-1})$ .

Si es vol una reducció més robusta de les vibracions dels diferents modes propis en front de possibles variacions dels paràmetres del sistema, es pot pensar en emprar les tècniques descrites en 5.2.2. D'aquesta manera, per a la reducció de vibracions de  $n$  modes propis,  $y(t)$  s'obté fent la convolució temporal de  $n$  triangles –encarregats de situar els continguts freqüencial nuls a l'espectre– i un pols per ajustar els dos requeriments funcionals. En aquest cas, s'obté un senyal  $y(t)$  format per polinomis concatenats de grau igual o inferior a  $2n$ , amb unions  $C^{2n-1}$ , i amb una durada major o igual a  $(2/f_0) + (2/f_1) + \dots + (2/f_{n-1})$ .

Tot i això, l'aplicació d'aquesta tècnica per donar robustesa no es fa tan necessària quan es volen minimitzar les vibracions residuals de sistemes amb diversos graus de llibertat vibratoris. En general, n'hi ha prou fent servir la convolució de polsos, ja que per a freqüències superiors al primer mode propi  $f_0$ , el contingut freqüencial decreix notablement.

### ***Obtenció de senyals de menor durada a partir del màxim comú denominador de les freqüències***

Les lleis de moviment que es proposen a l'hora de reduir les vibracions residuals d'un sistema vibratori amb diversos modes propis tenen l'inconvenient de tenir una durada considerable. En alguns casos, però, es pot mirar de reduir aquest temps aprofitant el fet que un pols qualsevol definit amb contingut freqüencial nul a  $f_0$ , també té un contingut freqüencial nul a,  $2f_0$ ,  $3f_0$ , ... .

Si es té, per exemple, un sistema amb tres modes propis de freqüències  $f_0$ ,  $f_1$  i  $f_2$ , es tracta de buscar, o d'aproximar-s'hi prou, el màxim comú denominador d'aquestes tres freqüències, o de dues d'elles. Si s'anomena a aquesta freqüència  $f_{mcd}$ , per al cas de trobar un mcd de les tres, es compleix que

$$\begin{aligned} f_0 &\approx a f_{\text{mcd}} \\ f_1 &\approx b f_{\text{mcd}} \\ f_2 &\approx c f_{\text{mcd}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

amb  $a$ ,  $b$  i  $c$  nombres sencers.

Per tant, si es defineix ara un senyal  $y_1(t)$  fent servir  $f_{\text{mcd}}$  com a freqüència a reduir, aquest senyal reduirà a la vegada els múltiples d'aquesta  $f_{\text{mcd}}$  i per tant entre altres,  $f_0$ ,  $f_1$  i  $f_2$ . Perquè aquest mètode tingui utilitat, la durada  $t_1$  del senyal ha de complir

$$t_1 = \frac{1}{f_{\text{mcd}}} < \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (5.13)$$

per tant

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 \quad (5.14)$$

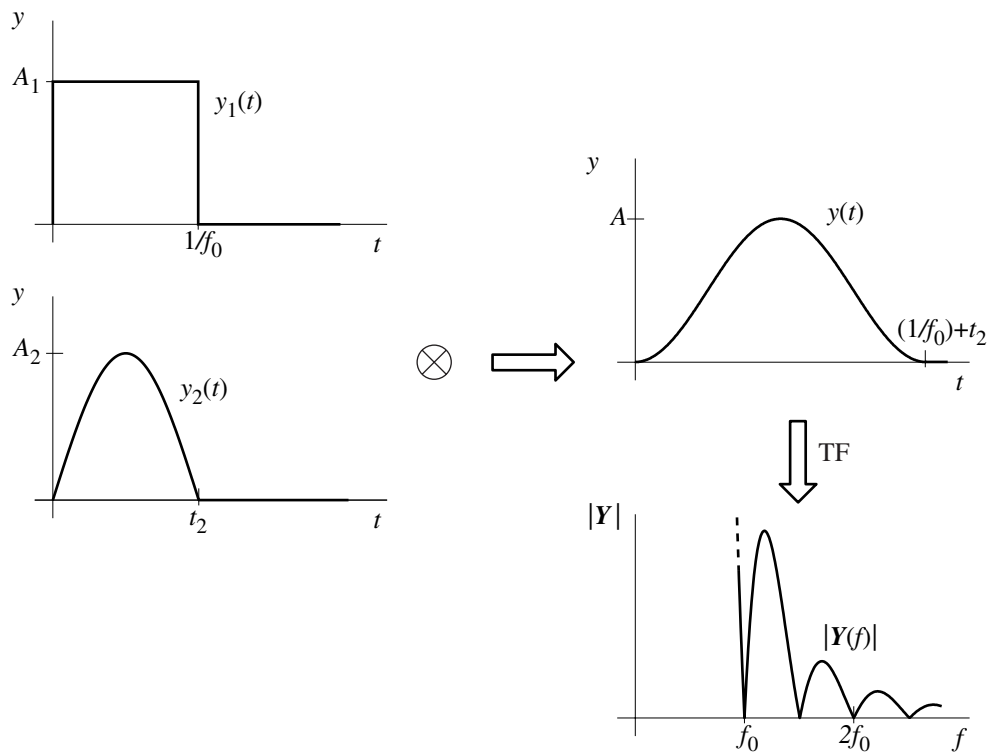
Finalment, el senyal  $y(t)$  s'obté fent la convolució temporal d'aquest senyal  $y_1(t)$  amb un pols  $y_2(t)$  de duració i amplitud fixades per complir els requeriment funcionals.

### 5.2.5 Extensió del mètode per a l'obtenció d'altres lleis de moviment

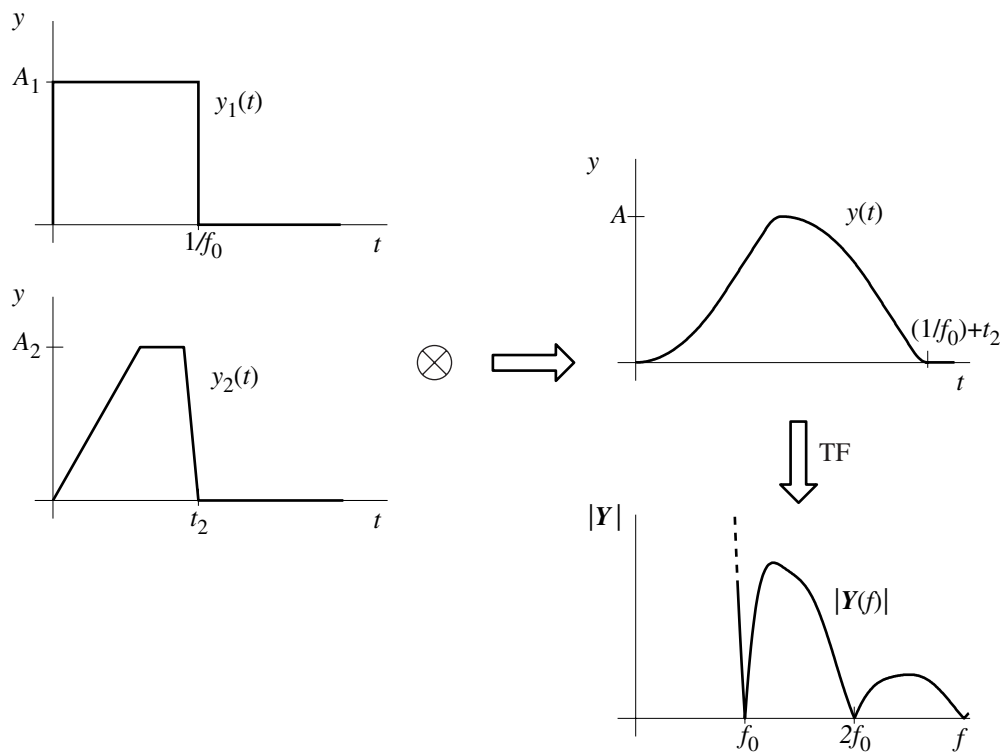
S'ha dit en començar el punt 5.2.1 que si s'obté un senyal a partir de la convolució temporal de  $m$  senyals arbitraris, n'hi ha prou que un d'aquests senyals tingui un contingut freqüencial nul a  $f_0$  per assegurar que el senyal resultant també compleix aquesta condició. Aquesta propietat permet estendre el que s'ha explicat per als polsos temporals, a qualsevol convolució temporal de senyals. Això permet obtenir senyals amb formes molt variades, formades per concatenació de polinomis o d'altres tipus de funcions, amb o sense simetria.

En els exemples de la Figura 5.20 i de la Figura 5.21, es mostren dos tipus de senyals generats per convolució d'un pols, ajustat perquè tingui un contingut freqüencial nul a  $f_0$ , amb els senyals indicats. S'observa que l'espectre del senyal és nul a  $f_0$ .

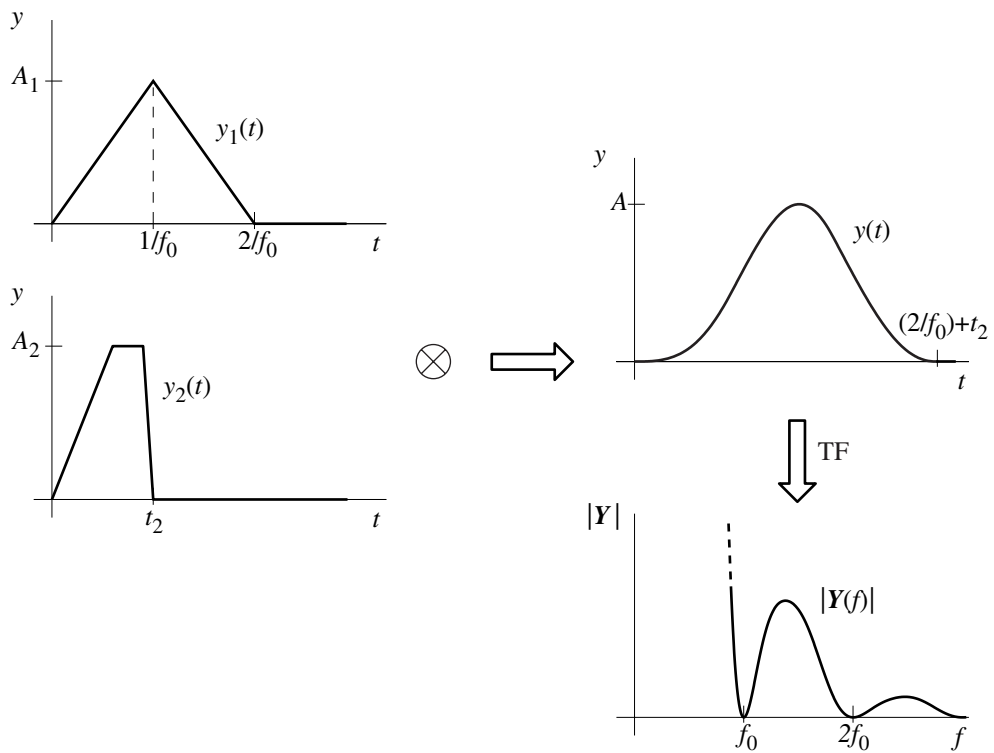
En la Figura 5.22 es fa el mateix que el que s'ha indicat en el paràgraf anterior, però utilitzant ara un senyal triangular definit, segons 5.2.2, per a una reducció robusta de vibracions residuals. S'observa que l'espectre del senyal resultant també és nul a  $f_0$  i que es manté la forma que pren l'espectre al voltant de  $f_0$  amb una curvatura petita (robustesa enfront de variacions de paràmetres del sistema).



**Figura 5.20** Convolució temporal d'un pols amb un semisinus i contingut freqüencial del senyal resultant

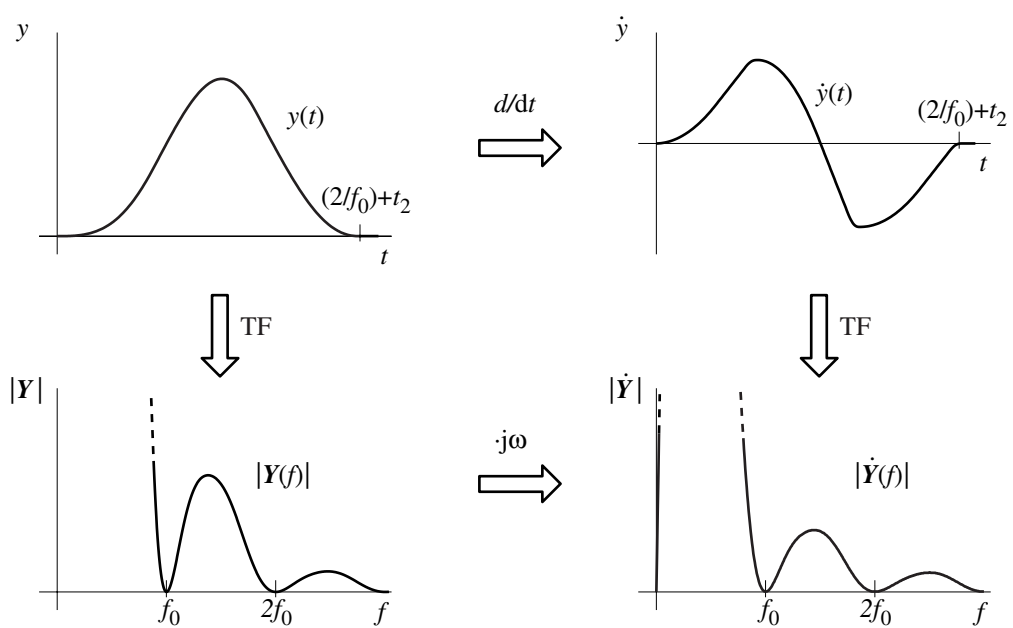


**Figura 5.21** Convolució temporal d'un pols amb un trapezoide i contingut freqüencial del senyal resultant



**Figura 5.22** Convolució temporal del triangle, emprat per a la reducció robusta, amb un trapezoide, i contingut freqüencial del senyal resultant

**Derivació i integració de les lleis de moviment obtingudes**



**Figura 5.23** Contingut freqüencial d'un senyal  $y(t)$  i de la seva derivada  $\dot{y}(t)$

Les lleis de moviment obtingudes segons el mètode descrit compleixen que el contingut freqüencial a una freqüència desitjada  $f_0$  és nul. Cal notar que les derivades i integrals d'aquestes lleis de moviment també compleixen aquesta condició.

Segons les propietats de la transformada de Fourier –apartat 3.2– si es té un senyal expressat en el domini freqüencial  $Y(f)$ , la seva derivada s'expressa segons  $j\omega Y(f)$ , i la seva integral segons  $Y(f)/(j\omega)$  (sempre i quan els senyals derivada i integral compleixin els requisits per poder ser aplicada la transformada de Fourier). Per tant, els senyals resultants de aquestes derivada i integral mantenen el contingut freqüencial nul i el grau de continuïtat de l'espectre a  $f_0$ .

En la Figura 5.23 es mostra aquest efecte prenent el senyal de l'exemple de la Figura 5.22 i la seva derivada, amb els seus respectius continguts freqüencials.

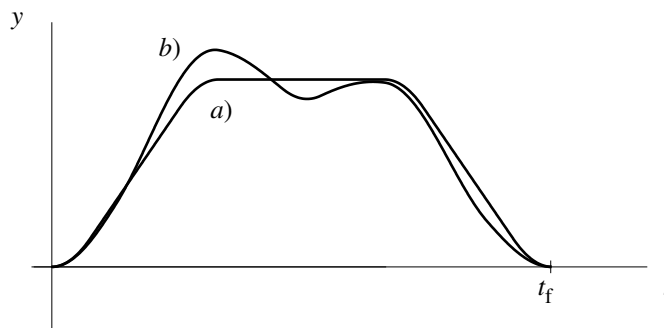
### 5.2.6 Avantatges i limitacions del mètode

#### *Avantatges del mètode*

El mètode explicat, basat en la convolució temporal de polsos, presenta uns certs avantatges que el caracteritzen si es compara amb altres mètodes presentats en el capítol 2.

#### *Monotonia de la llei de moviment*

Els canvis de pendent de determinades lleis de moviment poden provocar, en ocasions, que els actuadors involucrats en el mecanisme tinguin que alternar la seva funció com a motor i com a fre. Això pot provocar resultats negatius respecte a l'eficàcia en la reducció de vibracions residuals, per causa de les no linealitats pròpies dels jocs mecànics o del sistema de control. En base a aquest efecte, es desitjable que les lleis de moviment presentin el menor nombre possible de canvis de signe de les seves derivades, és a dir, una major monotonia.



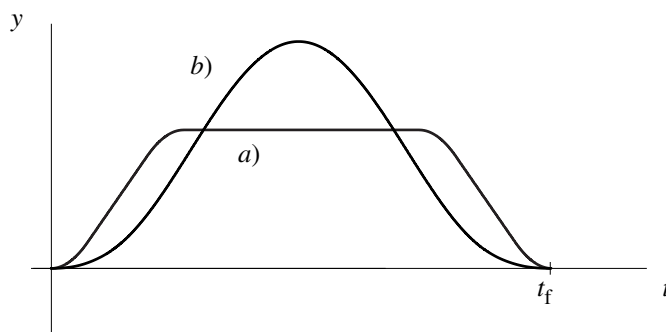
**Figura 5.24** Exemple de major monotonia en un senyal a) generat per convolució temporal de polsos, respecte a b) perfilat d'un senyal versinus per convolució amb un tren d'impulsos

En la definició de senyals de curta durada, les lleis obtingudes amb el nou mètode presenten major monotonia que, per exemple, amb el perfilat per convolució amb un tren d'impulsos. En la Figura 5.24 es mostra aquest efecte en dos senyals que corresponen a: *a)* convolució temporal de polsos, i *b)* perfilat d'un senyal versinus (1-cosinus) per convolució amb un tren d'impulsos. Ambdós senyals són funcionalment equivalents pel que fa a la seva durada, a l'àrea que delimiten amb l'eix d'abscisses, i estan definits per reduir el contingut freqüencial de dos modes propis.

### **Valor màxim de la llei de moviment**

Les lleis de moviment obtingudes per mitjà de la convolució temporal de polsos presenten, a partir d'una certa durada, un valor màxim que es manté constant al llarg d'un determinat temps. Si es compara, per exemple, amb el mètode de perfilat de senyals de comandament per convolució amb un tren d'impulsos, es pot observar, per a nombroses lleis patró, que els valors màxims superen notablement als del mètode proposat en aquest treball. Això pot implicar majors potències requerides als actuadors i a les electròniques de control per assolir aquests valors màxims.

En la Figura 5.25 es mostra aquest efecte per als dos senyals: *a)* convolució temporal de polsos, i *b)* perfilat d'un senyal versinus per convolució amb un tren d'impulsos, de l'exemple anterior. També en aquest cas, ambdós senyals són funcionalment equivalents pel que fa a la seva durada, a l'àrea que delimiten amb l'eix d'abscisses, i estan definits per reduir el contingut freqüencial de dos modes propis.



**Figura 5.25** Exemple de menor valor màxim en un senyal *a)* generat per convolució temporal de polsos, respecte a *b)* perfilat d'un senyal versinus per convolució amb un tren d'impulsos

### **Altres avantatges**

Altres avantatges que presenten les lleis de moviment definides a través del nou mètode són:

- Presenten simetria parell o imparell, la qual cosa facilita el seu càlcul i l'establiment de requeriments funcionals, tal com s'explica en el capítol 4.
- En molts casos, les lleis de moviment són escalables, tant en amplitud com en durada, tot mantenint invariant la propietat de no excitar determinades



frequències –apartat 5.2. Això facilita el càlcul de noves lleis, al no requerir tornar a fer la convolució temporal de polsos.

- Les lleis temporals obtingudes per convolució temporal de polsos estan formades per trams concatenats de polinomis algebraics. Donada la seva natura, són fàcilment implementables a través de corbes de Bézier o B-spline i, per tant, fàcilment implementables a través de càlcul numèric.

### ***Limitacions del mètode***

El mètode explicat té certes limitacions que no el fan útil en el cas de requerir lleis de moviment de molt curta durada o bé amb requeriments funcionals determinats. També poden existir limitacions a l'hora de reduir vibracions corresponents a un sol mode propi, depenent de quin sigui, en sistemes de diversos graus de llibertat vibratoris.

### ***Durada mínima de la llei de moviment***

En sistemes d'un grau de llibertat vibratori, i per al cas de lleis de moviment amb forma trapezial, la durada mínima d'aquesta llei correspon a  $1/f_0$ , essent  $f_0$  la freqüència pròpia del mode del qual es vol reduir la vibració residual. Si es desitja una llei de moviment més robusta en front a variacions de paràmetres del sistema, seguint l'esquema proposat a 5.2.2, la durada mínima és de  $2/f_0$ .

En sistemes de diversos graus de llibertat vibratoris amb freqüències pròpies  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ , on es desitja la reducció de la vibració residual en totes aquestes freqüències, la durada mínima serà la suma de durades de tots els polsos que intervenen en la síntesi de la llei de moviment, és a dir,  $(1/f_0) + (1/f_1) + \dots + (1/f_{n-1})$ . Si en aquest cas es desitja una llei de moviment amb robustesa, com en el paràgraf anterior, la durada mínima és  $(2/f_0) + (2/f_1) + \dots + (2/f_{n-1})$ . És recomanable, sobretot en aquest darrer cas, l'ús del màxim comú denominador de les freqüències a reduir, explicat en 5.2.4, per obtenir lleis de moviment de menor durada.

### ***Limitació en altres requeriments funcionals assolibles***

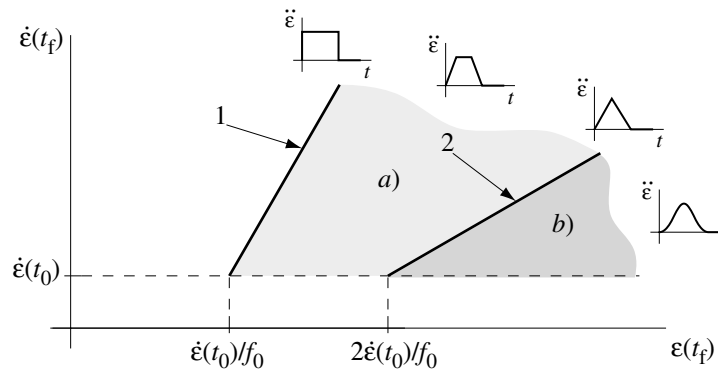
Tot i que la durada de la llei de moviment pot no ser un dels requeriments funcionals que es desitgen complir, el fet que aquesta tingui un límit inferior, fa que els altres requeriments també estiguin acotats a un determinat espai de solucions.

Es pren com a exemple un sistema d'un grau de llibertat vibratori com el de la Figura 5.1 amb una freqüència pròpia  $f_0$ . Si es suposa que la llei de moviment es defineix a través de l'acceleració relativa  $\ddot{\varepsilon}(t)$  i es parteix de la coordenada inicial  $\varepsilon(t_0)=0$ , l'espai de solucions possibles per a la velocitat relativa  $\dot{\varepsilon}(t_f)$  i la distància relativa recorreguda  $\varepsilon(t_f)$  en l'instant  $t_f$  –final del transitori– es mostra en la Figura 5.26. Segons es faci servir una llei de moviment trapezial, o bé una llei de moviment segons 5.2.2., s'obtenen les diferents limitacions: les rectes 1 i 2 (expressions (5.15) i (5.16) respectivament) corresponen a l'espai de solucions velocitat-desplaçament relatiu, segons sigui la llei de moviment un pols o bé un triangle. La zona *a*) i la zona *b*)

corresponen a l'espai de solucions segons aquesta llei sigui un trapezi o bé segueixi l'esquema plantejat a 5.2.2, respectivament.

$$\dot{\varepsilon}(t_f) = 2f_0 \varepsilon(t_f) - \dot{\varepsilon}(t_0) \tag{5.15}$$

$$\dot{\varepsilon}(t_f) = f_0 \varepsilon(t_f) - \dot{\varepsilon}(t_0) \tag{5.16}$$



**Figura 5.26** Espai de solucions possibles a) i b) per a velocitat i desplaçament relatiu, segons la llei de moviment

**Reducció de la vibració residual d'un mode propi en sistemes de diversos graus de llibertat vibratoris**

Es pot donar el cas que, en un sistema amb diversos graus de llibertat vibratoris, es desitgi reduir el contingut freqüencial de la vibració residual corresponent a un dels modes propis, amb freqüència  $f_i$ . Amb aquest mètode existeix la possibilitat de reduir de manera no voluntària altres continguts de modes propis de major freqüència a  $f_i$ . Si s'observa el gràfic de la Figura 5.4, o bé la seva expressió (5.8), es pot veure que els continguts freqüencials del senyal  $y_1(t)$  es fan zero a  $f_0$  i a freqüències múltiples,  $2f_0$ ,  $3f_0$  etcètera. Per tant, si existeixen freqüències pròpies properes o coincidents amb aquests múltiples, es produirà també una reducció de la vibració residual en els seus respectius modes propis. Aquest fet pot limitar la utilitat del mètode plantejat per a la reducció selectiva de vibracions residuals corresponents a un mode propi.

**5.3 SÍNTESI DE LLEIS DE MOVIMENT AMB CORBES B-SPLINE NO PARAMÈTRIQUES**

Tal com s'ha vist en l'apartat 5.2, en un sistema amb  $n$  modes propis de vibració on es desitja reduir les vibracions residuals de tots ells, de manera simple, la llei de moviment proposada s'obté amb la convolució temporal de  $n+1$  polsos. Això implica que aquesta està formada per polinomis concatenats de grau igual o inferior a  $n$  i que les seves unions són  $C^{n-1}$ . Si la reducció es vol fer robusta enfront a possibles variacions de paràmetres del sistema, la llei de moviment s'obté amb la convolució de  $n$  triangles i un pols. Ara, els polinomis concatenats seran de grau igual o inferior a  $2n$  i les seves

unions seran  $C^{2n-1}$ . Resulta interessant, doncs, poder sintetitzar aquestes lleis de moviment per mitjà de l'esquema B-spline no paramètric –apartat 3.1– per les seves avantatges a l'hora d'implementar el mètode en entorns digitals.

S'exposen, en aquest apartat, els esquemes concrets de corbes B-spline a seguir per a la reducció de vibracions residuals en sistemes de un i dos modes propis que, en general, es considera un nombre suficient per a moltes aplicacions. Per a la reducció de la vibració corresponent a un sol mode propi, s'explica la reducció simple i la reducció robusta. Per a sistemes de dos modes propis, en general, n'hi ha prou amb la reducció simple, ja que el contingut freqüencial de la llei de moviment es fa molt petit per a freqüències superiors a la del primer mode propi.

### 5.3.1 Reducció de les vibracions residuals corresponents a un mode propi

Segons l'apartat 3.1, la definició d'una corba B-spline requereix de la determinació del grau màxim  $n$  dels polinomis que constitueixen els diferents trams de la corba, de la definició de les abscisses dels extrems d'aquests trams per mitjà d'un vector o seqüència de nodes  $\mathbf{u}$ , i de les ordenades dels punts de control  $d_i$  del polígon de control associat a la seqüència de nodes. Les abscisses dels punts de control  $\xi_i$  (abscisses de Greville) ja vénen determinades pel vector de nodes  $\mathbf{u}$  i pel grau dels polinomis  $n$ , a través de l'expressió (3.15).

#### *Reducció simple del contingut freqüencial*

Si es té un sistema d'un sol grau de llibertat vibratori, amb freqüència pròpia  $f_0$ , la reducció de vibracions residuals simple proposada correspon a una llei de moviment en forma de trapezi, com el de la Figura 5.5, de 5.2.1. En aquest cas, la corba està formada per 3 polinomis de grau  $n=1$  concatenats, amb unions  $C^0$ . Suposant que el transitori comença a  $t_0=0$ , que dura un temps  $t_f$  i que  $A$  és la seva amplitud màxima, la síntesi d'aquesta corba amb l'esquema B-spline es mostra en la Figura 5.27 i s'expressa com s'indica a continuació.

Per al cas  $1/f_0 < t_f \leq 2/f_0$ , el vector de nodes queda com

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, t_f - \frac{1}{f_0}, \frac{1}{f_0}, t_f \right\} \quad (5.17)$$

i les ordenades del polígon de control, que en aquest cas coincideixen amb la corba, són

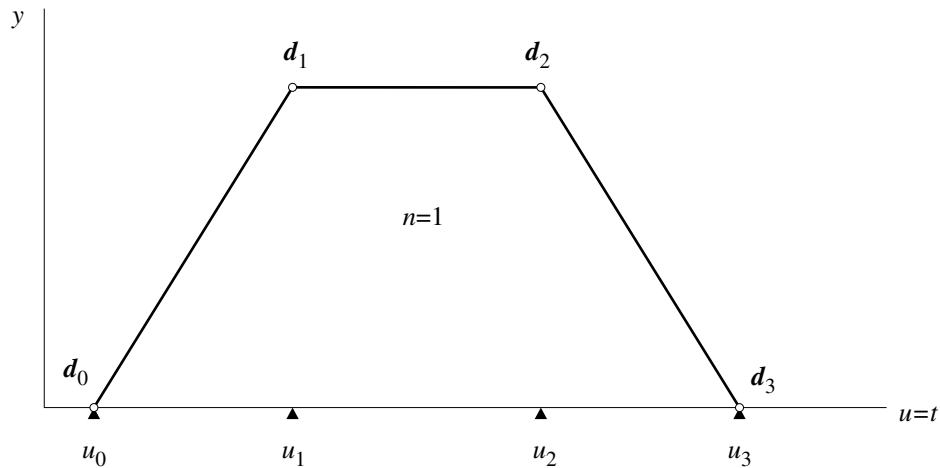
$$\mathbf{d} = \{0, A, A, 0\} \quad (5.18)$$

Per al cas  $t_f > 2/f_0$ , el vector de nodes queda com

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_0}, t_f \right\} \quad (5.19)$$

i les ordenades del polígon de control , que també coincideix amb la corba, són

$$d = \{0, A, A, 0\} \tag{5.20}$$



**Figura 5.27** Esquema B-spline per representar un trapezi

**Reducció robusta del contingut freqüencial**

La reducció de vibracions residuals robusta proposada, per a un sistema d'un grau de llibertat vibratori amb freqüència pròpia  $f_0$ , correspon a una llei de moviment que pot prendre les formes indicades a 5.2.2. En aquest cas, la corba està formada per 5 trams polinòmics concatenats, de grau igual o inferior a 2, amb unions  $C^1$ . Suposant que el transitori comença a  $t_0=0$ , que dura un temps  $t_f$  i que  $A$  és la seva amplitud màxima, la síntesi d'aquesta corba amb l'esquema B-spline, s'expressa com s'indica a continuació.

**Corba 1**

Per al cas  $2/f_0 < t_f \leq 3/f_0$ , mostrat en la Figura 5.28, el vector de nodes queda com

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, t_f - \frac{2}{f_0}, \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_0}, \frac{2}{f_0}, t_f, t_f \right\} \tag{5.21}$$

i les ordenades del polígon de control

$$d = \left\{ 0, 0, \frac{2A}{6 - f_0 t_f}, \frac{4A}{6 - f_0 t_f}, \frac{2A}{6 - f_0 t_f}, 0, 0 \right\} \tag{5.22}$$

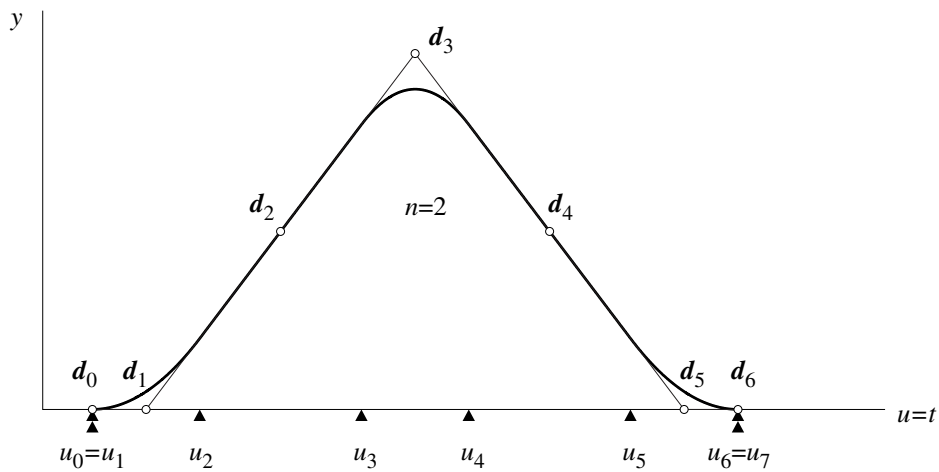


Figura 5.28 Esquema B-spline per a una reducció robusta, per al cas  $2/f_0 < t_f \leq 3/f_0$

**Corba 2**

Per al cas  $3/f_0 < t_f \leq 4/f_0$ , mostrat en la Figura 5.29, el vector de nodes i les ordenades del polígon de control s'expressen segons (5.23) i (5.24) respectivament.

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{2}{f_0}, \frac{2}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_0}, t_f, t_f \right\} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{d} = \left\{ 0, 0, \frac{2A}{6 - f_0 t_f}, \frac{4A}{4 - (f_0 t_f - 4)^2}, \frac{2A}{6 - f_0 t_f}, 0, 0 \right\} \quad (5.24)$$

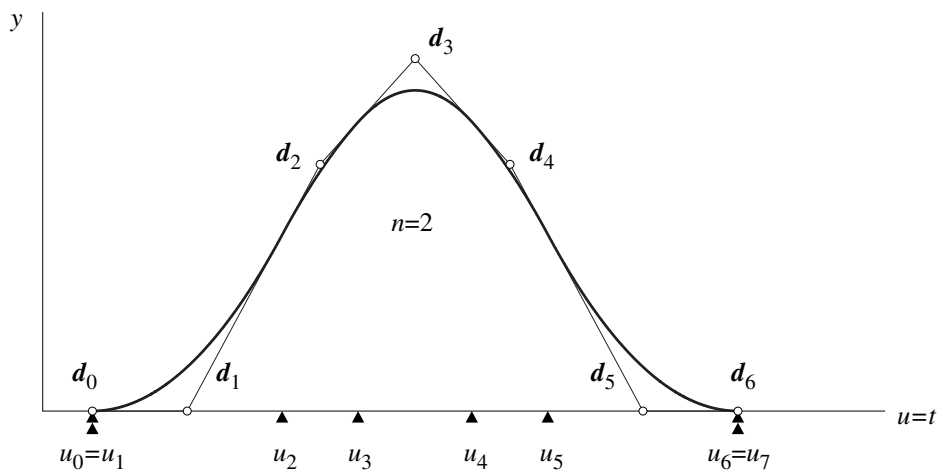


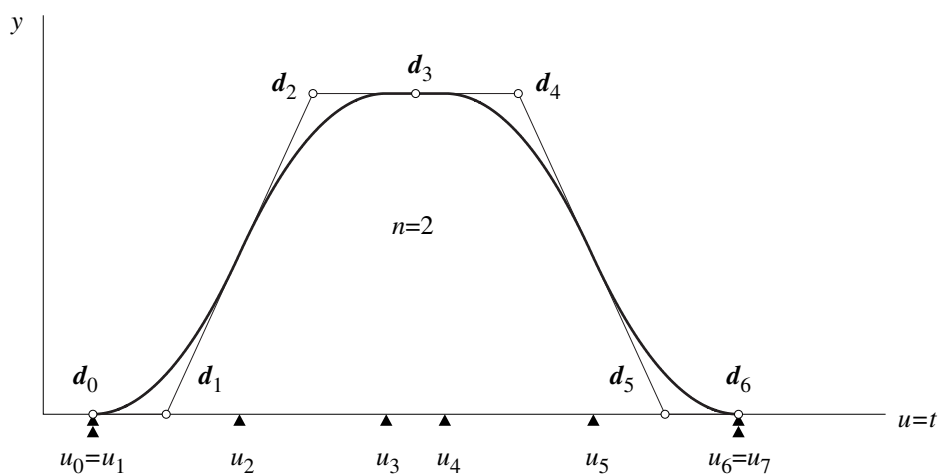
Figura 5.29 Esquema B-spline per a una reducció robusta, per al cas  $3/f_0 < t_f \leq 4/f_0$

**Corba 3**

Finalment, per al cas  $t_f > 4/f_0$ , mostrat en la Figura 5.30, el vector de nodes i les ordenades del polígon de control s'expressen segons (5.25) i (5.26) respectivament.

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{f_0}, \frac{2}{f_0}, t_f - \frac{2}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_0}, t_f, t_f \right\} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{d} = \{0, 0, A, A, A, 0, 0\} \quad (5.26)$$



**Figura 5.30** Esquema B-spline per a una reducció robusta, per al cas  $t_f > 4/f_0$

**5.3.2 Reducció de les vibracions residuals corresponents a dos modes propis**

Per a un sistema vibratori amb dos modes propis de freqüències  $f_0$  i  $f_1$  –amb  $f_0 < f_1$ – la reducció de vibracions residuals proposada correspon a una llei de moviment que pot prendre la forma explicada a 5.2.4. En aquest cas, la corba està formada per 7 trams polinòmics concatenats, de grau igual o inferior a 2, amb unions  $C^1$ . Suposant que el transitori comença a  $t_0=0$ , que dura un temps  $t_f$  i que  $A$  és la seva amplitud màxima, la síntesi d'aquesta corba amb l'esquema B-spline, s'expressa com s'indica tot seguit.

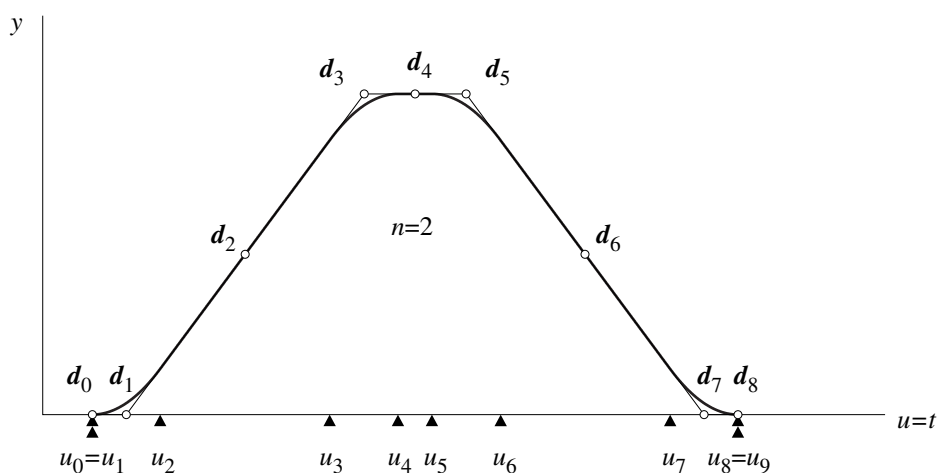
**Corba 1**

Si les freqüències pròpies compleixen  $2f_0 \geq f_1$ , per a una durada  $(1/f_0 + 1/f_1) < t_f \leq 2/f_0$ , la corba pren una forma com la mostrada en la Figura 5.31. El vector de nodes i les ordenades del polígon de control es formulen segons (5.27) i (5.28) respectivament.

Si  $2f_0 < f_1$ , la formulació de la corba és idèntica per a una durada, però, de  $(1/f_0 + 1/f_1) < t_f \leq (1/f_0 + 2/f_1)$ .

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, t_f - \frac{1}{f_0} - \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_0}, \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1}, t_f, t_f \right\} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{d} = \left\{ 0, 0, \frac{A}{2}, A, A, A, \frac{A}{2}, 0, 0 \right\} \quad (5.28)$$



**Figura 5.31** Esquema B-spline per a la reducció de vibracions residuals de dos modes propis, per al cas  $2f_0 \geq f_1$  i una durada  $(1/f_0 + 1/f_1) < t_f \leq 2/f_0$ , o  $(1/f_0 + 1/f_1) < t_f \leq (1/f_0 + 2/f_1)$ , si  $2f_0 < f_1$

### Corba 2

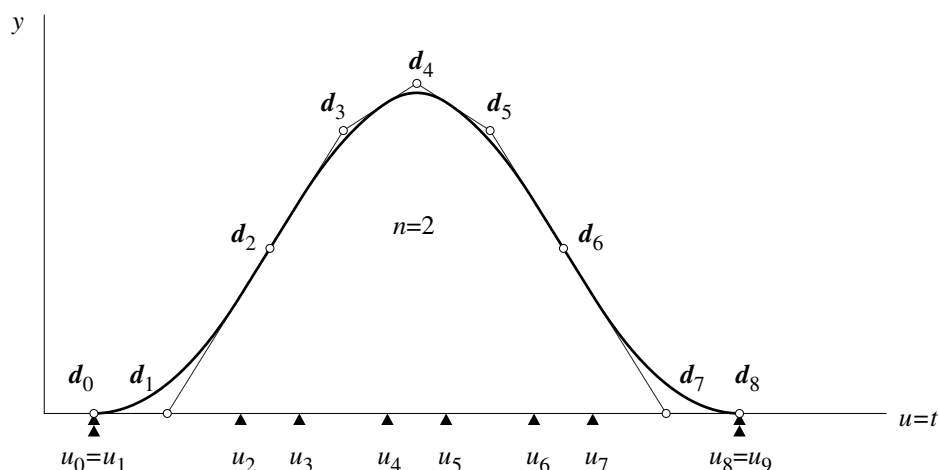
En el cas que  $2f_0 \geq f_1$ , per a  $2/f_0 < t_f \leq (1/f_0 + 2/f_1)$ , la corba pren una forma seguint la Figura 5.32. El vector de nodes i les ordenades del polígon de control segueixen les expressions (5.29) i (5.30) respectivament.

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, t_f - \frac{1}{f_0} - \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1}, t_f, t_f \right\} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{d} = \left\{ 0, 0, A \frac{a_1}{b}, A \frac{a_2}{b}, A \frac{2a_1}{b}, A \frac{a_2}{b}, A \frac{a_1}{b}, 0, 0 \right\} \quad (5.30)$$

amb

$$\begin{aligned} a_1 &= 2f_0^2 + 2f_0f_1 - 2f_0^2f_1t_f \\ a_2 &= 4f_0^2 + 8f_0f_1 + 4f_1^2 - 6f_0^2f_1t_f - 6f_0f_1^2t_f + 2f_0^2f_1^2t_f^2 \\ b &= 4f_1^2 + f_0^2(-2 + f_1t_f)^2 - 4f_0f_1(-1 + f_1t_f) \end{aligned} \quad (5.31)$$



**Figura 5.32** Esquema B-spline per a la reducció de vibracions residuals de dos modes propis, per al cas  $2f_0 \geq f_1$  i una durada  $2/f_0 < t_f \leq (1/f_0 + 2/f_1)$

Si  $2f_0 < f_1$ , i per a  $(1/f_0 + 2/f_1) < t_f \leq 2/f_0$ , la formulació de la corba segueix el vector de nodes (5.32) i el polígon de control (5.33). La corba presenta una forma similar a la mostrada en la Figura 5.31 .

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_0} - \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_0}, \frac{1}{f_0}, \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_1}, t_f, t_f \right\} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{d} = \left\{ 0, 0, \frac{A}{2}, A, A, A, \frac{A}{2}, 0, 0 \right\} \quad (5.33)$$

### Corba 3

En el cas  $2f_0 \geq f_1$ , per a  $(1/f_0 + 2/f_1) < t_f \leq (2/f_0 + 1/f_1)$ , o bé en el cas  $2f_0 < f_1$ , per a  $2/f_0 < t_f \leq (2/f_0 + 1/f_1)$  la corba pren una forma segons la Figura 5.33. El vector de nodes i les ordenades del polígon de control s'expressen segons (5.34) i (5.35) respectivament.

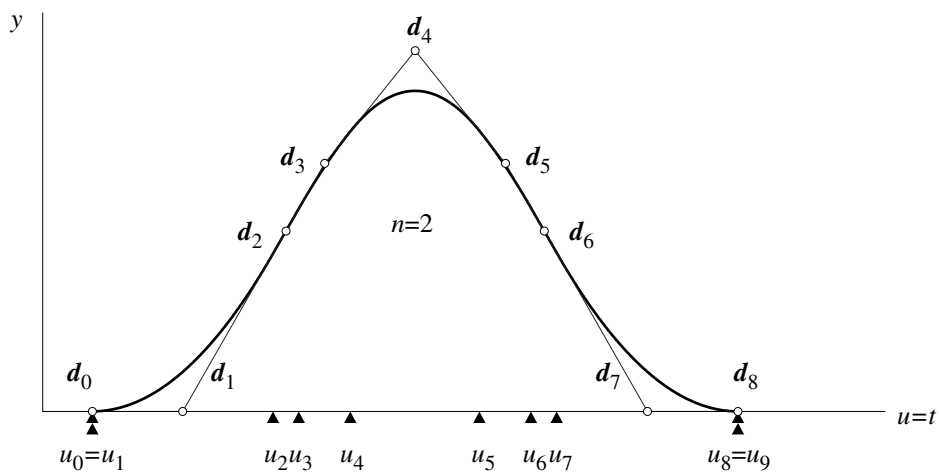
$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_0} - \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_0}, \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_1}, t_f, t_f \right\} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{d} = \left\{ 0, 0, A \frac{a_1}{b}, A \frac{a_3}{b}, A \frac{2a_1}{b}, A \frac{a_3}{b}, A \frac{a_1}{b}, 0, 0 \right\} \quad (5.35)$$

amb  $a_1$  i  $b$  segons (5.31) i amb

$$a_3 = 4f_0^2 - 2f_0^2 f_1 t_f \quad (5.36)$$

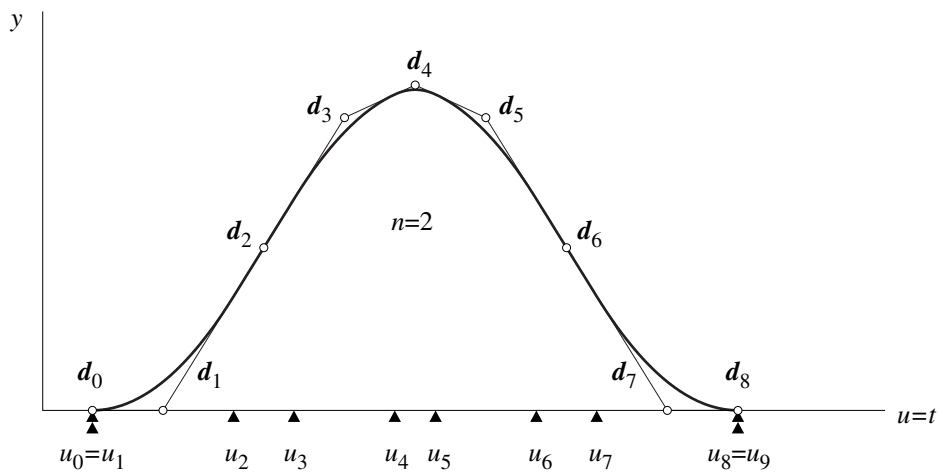




**Figura 5.33** Esquema B-spline per a la reducció de vibracions residuals de dos modes propis, per a una durada  $(1/f_0+2/f_1) < t_f \leq (2/f_0+1/f_1)$  si  $2/f_0 \geq f_1$ , o  $2/f_0 < t_f \leq (2/f_0+1/f_1)$ , si  $2/f_0 < f_1$

**Corba 4**

Per a  $(2/f_0+1/f_1) < t_f \leq (2/f_0+2/f_1)$ , i per a qualsevol relació entre  $f_0$  i  $f_1$ , la corba pren una forma segons la Figura 5.34. El vector de nodes i les ordenades del polígon de control s'expressen segons (5.37) i (5.38) respectivament.



**Figura 5.34** Esquema B-spline per a la reducció de vibracions residuals de dos modes propis, per a una durada  $(2/f_0+1/f_1) < t_f \leq (2/f_0+2/f_1)$

$$u = \left\{ 0, 0, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_0} - \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_1}, t_f, t_f \right\} \quad (5.37)$$

$$d = \left\{ 0, 0, A \frac{a_4}{b}, A \frac{a_3}{b}, A \frac{2a_4}{b}, A \frac{a_3}{b}, A \frac{a_4}{b}, 0, 0 \right\} \quad (5.38)$$

amb  $b$  segons (5.31),  $a_3$  segons (5.36) i amb

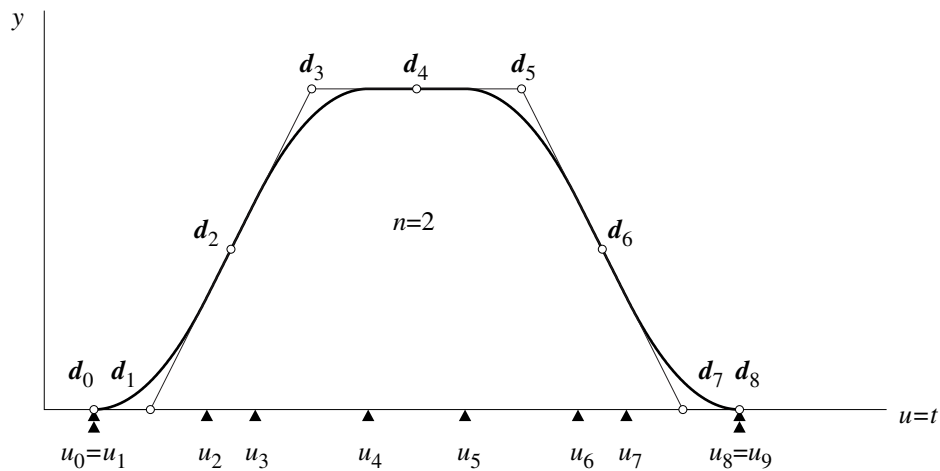
$$a_4 = -2f_0f_1 \quad (5.39)$$

**Corba 5**

Finalment, per a  $t_f > (2/f_0 + 2/f_1)$  i per a qualsevol relació entre  $f_0$  i  $f_1$ , la corba pren una forma com la de la Figura 5.35 . El vector de nodes i les ordenades del polígon de control s'expressen segons (5.40) i (5.41) respectivament.

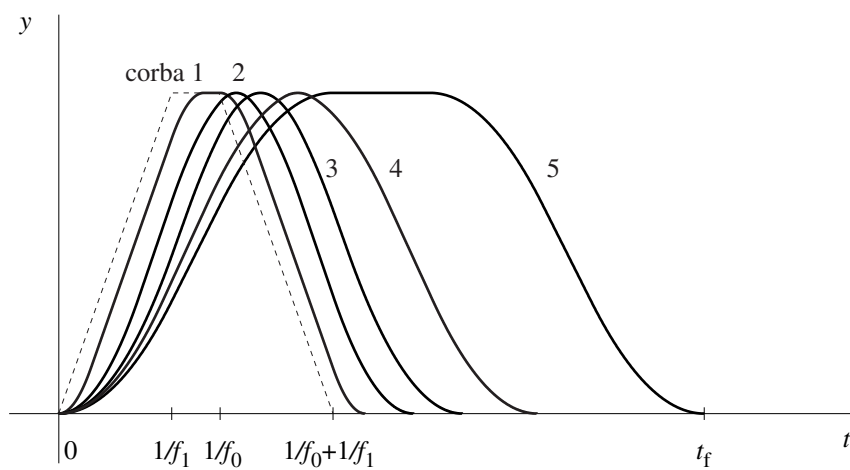
$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_0}, \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_0} - \frac{1}{f_1}, t_f - \frac{1}{f_0}, t_f - \frac{1}{f_1}, t_f, t_f \right\} \quad (5.40)$$

$$d = \left\{ 0, 0, \frac{A}{2}, A, A, A, \frac{A}{2}, 0, 0 \right\} \quad (5.41)$$



**Figura 5.35** Esquema B-spline per a la reducció de vibracions residuals de dos modes propis, per a una durada  $t_f > (2/f_0 + 2/f_1)$

En la Figura 5.36 es veu el pas de les corbes 1 a 5, segons la durada del transitori  $t_f$ , per al cas  $2f_0 \geq f_1$ .

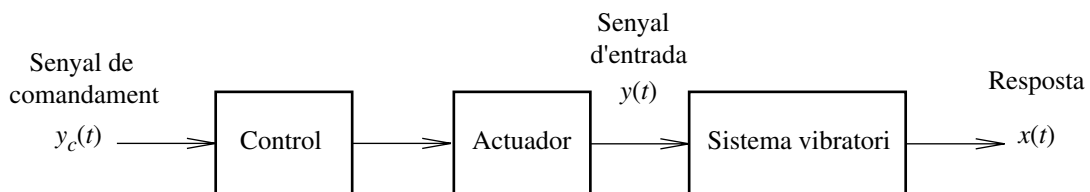


**Figura 5.36** Pas de les corbes 1 a 5 segons la durada del transitori  $t_f$ , per al cas  $2f_0 \geq f_1$

## CAPÍTOL 6

# Valoració de la capacitat dels actuadors per al seguiment de lleis de moviment

En el capítol 4, la caracterització del sistema d'estudi s'ha fet diferenciant els tres elements que el componen: el sistema vibratori, el senyal d'entrada  $y(t)$  i la resposta del sistema  $x(t)$  a aquest senyal, i s'ha considerat que el senyal d'entrada al sistema vibratori és la pròpia llei de moviment proposada. Tot i això, el moviment s'aconsegueix, en molts sistemes, per mitjà d'un actuator i d'un sistema de control realimentat. En conseqüència, el senyal definit per l'usuari no correspon al senyal d'entrada al sistema vibratori, sinó que correspon a un senyal de comandament  $y_c(t)$  per fer moure l'actuator. Aquest senyal de comandament es transformarà, amb més o menys precisió, en la llei de moviment dissenyada. En la Figura 6.1 es mostra, de manera genèrica, el diagrama de blocs corresponent a aquesta situació.



**Figura 6.1** Senyal de comandament i senyal d'entrada en un sistema de control

Tant el control com l'actuator juguen un paper rellevant alhora de seguir amb precisió un senyal de comandament determinat ja que el seu comportament dinàmic el modifica. En general, en el rang de freqüències habitual per als sistemes vibratori mecànics, les característiques del control permeten un bon funcionament, i l'efecte sobre el senyal de comandament es pot arribar a minimitzar fent-ne un bon disseny. En canvi, la

tecnologia actual en la majoria dels actuadors fa que les seves limitacions siguin menys salvables.

En aquest capítol es mostra, de manera simplificada, com fer una primera valoració de la capacitat que tenen alguns actuadors per seguir amb fidelitat un senyal de comandament desitjat pel que fa al seu comportament dinàmic, suposant que tenen una potència adequada per a l'aplicació. Dintre dels diversos actuadors que existeixen, es centra l'explicació en els constituïts per motors elèctrics i, concretament, en els dos tipus més usats en sistemes de control. Aquests, anomenats col·loquialment servomotors, corresponen principalment a motors de corrent continu i a motors de corrent altern trifàsics síncrons, ambdós d'imants permanents.

Cal remarcar, però, que no és l'objectiu d'aquest capítol fer un tractament exhaustiu dels transitoris de moviment en els motors esmentats, sinó donar-ne una primera aproximació, a partir de l'anàlisi de la resposta freqüencial d'un model lineal que els representa. A tal efecte, i per al cas del motor de corrent altern trifàsic síncron, el model equivalent que es fa servir és vàlid per a l'estat estacionari. Per tant, aquest servirà només en el cas que el transitori de moviment sigui prou petit respecte als paràmetres que defineixen el punt de funcionament del motor. Per poder obtenir una resposta freqüencial, caldrà fer la hipòtesi afegida que les oscil·lacions que provoca aquest transitori també són prou petites per permetre linealitzar el model a l'entorn d'aquest punt de funcionament.

## **6.1 SERVOMOTORS**

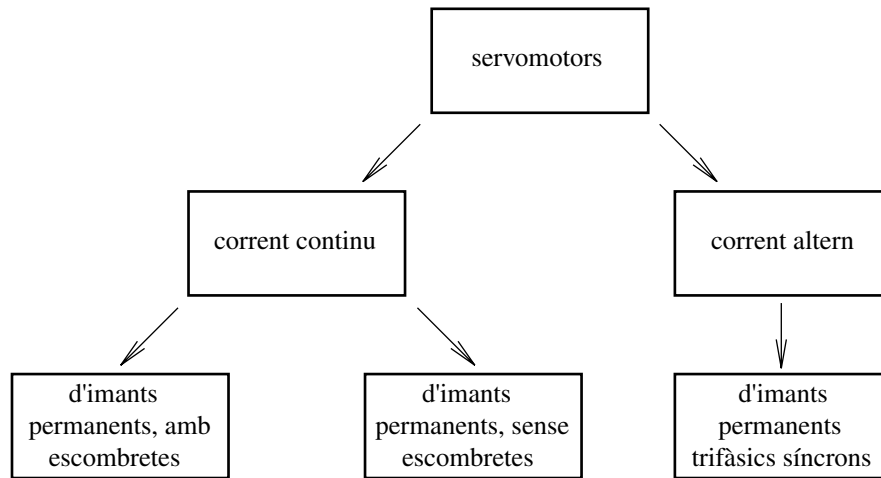
En aquest apartat s'explica què és el que s'entén per servomotor. Per això es segueix a Hurricks (1994) i els textos didàctics de les pàgines web de la companyia *National Instruments* extrets de Kisell (2002).

En algunes ocasions es denomina servomotor a qualsevol motor que estigui inclòs en un sistema de control realimentat. Tot i això, cal remarcar que aquesta definició pot ser més acurada ja que els servomotors presenten algunes subtils diferències respecte als motors convencionals. En general, les més importants són: la possibilitat de treballar en rangs de velocitats amples o a molt baixa velocitat durant llargs períodes de temps sense que es produeixi sobreescalfament, i la possibilitat de treballar a velocitat nul·la i generar suficient parell per mantenir una posició sota una carrega.

Per això, s'han canviat els sistemes de refrigerar tradicionals, com ara ventiladors muntats directament en l'eix del motor, per sistemes independents de refrigeració. Aquests ventiladors s'alimenten amb fonts de tensió independent del motor, i garanteixen una evacuació de calor continuada sigui quina sigui la velocitat de rotació del motor.

Existeixen servomotors de corrent continu i de corrent altern. Tradicionalment, els servomotors eren de corrent continu, ja que l'única manera de controlar corrents significatius i fer la commutació d'aquests a altes freqüències era a través de tiristors (SCR - *silicon controller rectifier*). A mesura que els transistors han estat capaços de controlar corrents elevats, i commutar-los a altes freqüències, ha guanyat importància

l'ús de motors de corrent altern. En la Figura 6.2 es mostra una classificació dels tipus de servomotors més habituals.



**Figura 6.2** Tipus de servomotors més habituals

Constructivament, els motors de corrent continu sense escombretes d'imants permanents i els motors de corrent altern trifàsics síncrons d'imants permanents són molt similars i, fins i tot, existeixen motors que estan preparats per funcionar de les dues maneres. Els imants permanents estan integrats en el rotor, i és l'estator el que conté els bobinats. Muntat en sèrie sobre l'eix del rotor existeixen generalment un o dos sensors que donen informació de la posició relativa entre el rotor i l'estator. Aquests sensors es fan servir per a la commutació del camp quan el motor actua amb corrent continu (encoder, resolver o cèl·lula d'efecte hall) i/o per a la realimentació del sistema de control (encoder o resolver).

Els motors de corrent continu d'imants permanents amb escombretes difereixen dels anteriors. En aquest cas, és l'estator el que conté els imants permanents, i el rotor conté el bobinat. La commutació del camp del rotor es fa per mitjà d'un commutador mecànic de delgues muntat en l'eix del rotor. En aquest cas només serà necessari un sensor per a la realimentació del sistema de control (encoder o resolver).

## 6.2 RESPOSTA FREQUÈNCIAL ANALITZADA

Es proposa avaluar la capacitat que té un sistema de control realimentat per seguir un determinat senyal de comandament per mitjà de la freqüència de tall obtinguda de la resposta freqüencial "senyal d'entrada/senyal de comandament", segons la Figura 6.1. En aquesta figura, es defineix l'actuador com l'element que proporciona l'energia mecànica –normalment un motor elèctric– més la càrrega no vibratòria o inercial, és a dir, la càrrega que es pot considerar unida rígidament al seu eix.

Si es desenvolupa en detall el diagrama de blocs d'un sistema de control com el descrit, es pot comprovar que en la resposta freqüencial esmentada hi intervé també el sistema vibratori. Tot i això, en molts casos, es pot negligir el seu efecte i considerar el control i

l'actuador independents del sistema vibratori. Cal, però, analitzar cada cas particular, ja que no sempre es podrà fer aquesta simplificació. Pel que fa al control, es pot suposar ideal ja que, habitualment, el seu comportament dinàmic és considerablement superior al de l'actuador.

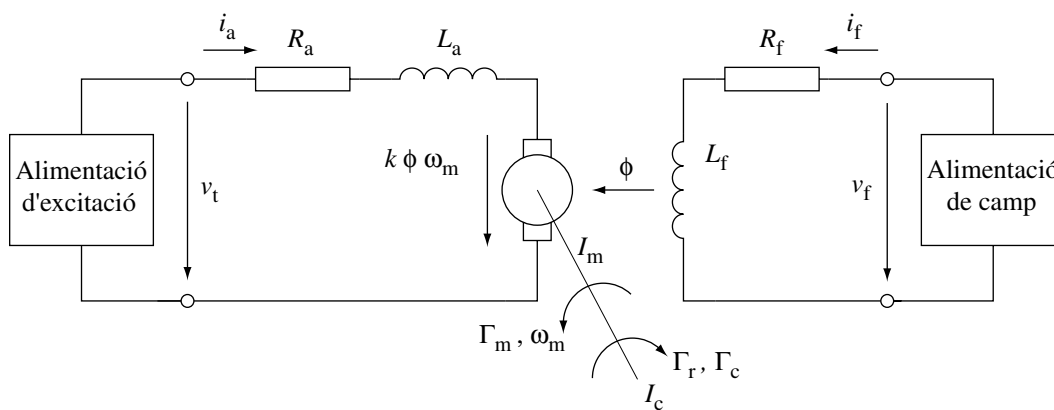
Per tant, en primera aproximació i per als casos que així ho permetin, es valora la capacitat del sistema per mitjà de la freqüència de tall o, si escau, de la resposta en amplitud, obtingudes a partir de la resposta freqüencial de l'actuador.

### 6.2.1 Motors de corrent continu amb imants permanents

En aquest punt s'ha seguit els autors Slemon i Straughen (1980) i Cogdell (2002) els quals presenten un circuit elèctric equivalent del motor de corrent continu vàlid tant en estat estacionari com en règim transitori. A partir de les expressions entre les variables del sistema, s'obté la resposta freqüencial prenent la tensió d'excitació com a variable proporcional al senyal de comandament i, per exemple, la velocitat del rotor com a senyal d'entrada al sistema vibratori.

#### Circuit elèctric equivalent

Per representar el circuit elèctric equivalent d'un motor de corrent continu amb imants permanents es parteix del circuit equivalent d'un motor de corrent continu amb excitació independent, com el mostrat en la Figura 6.3.



**Figura 6.3** Esquema elèctric equivalent d'un motor de corrent continu amb excitació independent

En la figura esmentada,  $v_t$ ,  $i_a$  i  $v_f$ ,  $i_f$  representen la tensió i el corrent dels debanats d'excitació i de camp respectivament.  $R_a$ ,  $L_a$  i  $R_f$ ,  $L_f$ , representen la resistència i la inductància també dels debanats d'excitació i de camp respectivament. El flux magnètic es representa per  $\phi$ , i  $k$  és una constant que depèn de la forma constructiva del motor. El parell motor, el parell de les resistències passives reduït a l'eix del motor, i el parell resistent de la càrrega reduït a l'eix del motor són, respectivament,  $\Gamma_m$ ,  $\Gamma_r$  i  $\Gamma_c$ . El

moment d'inèrcia del motor i el moment d'inèrcia de la càrrega reduït a l'eix del motor són, respectivament,  $I_m$  i  $I_c$ . Finalment  $\omega_m$  representa la velocitat angular del motor.

Suposant una alimentació d'excitació ideal, les equacions que relacionen les variables elèctriques amb el parell motor per al debanat d'excitació s'expressen segons les igualtats (6.1) i (6.2).

$$v_t = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k\phi\omega_m \quad (6.1)$$

$$\Gamma_m = k\phi i_a \quad (6.2)$$

Aplicant el principi de conservació de l'energia a la part mecànica –en versió diferencial– s'obté l'expressió (6.3).

$$\Gamma_m - \Gamma_r - \Gamma_c = (I_m + I_r) \frac{d\omega_m}{dt} \quad (6.3)$$

Per al circuit de camp, suposant també una alimentació ideal, l'expressió (6.4) relaciona les variables elèctriques involucrades.

$$v_f = i_f R_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (6.4)$$

El circuit elèctric equivalent per a un motor amb imants permanents, seguint la Figura 6.3, correspon només al debanat d'excitació i, en aquest cas, només calen les expressions (6.1), (6.2) i (6.3).

### **Resposta del motor controlat per tensió**

A partir de les expressions anteriors s'obté la resposta freqüencial “senyal d'entrada/senyal de comandament”. Tal com s'ha enunciat, es pren la velocitat de rotació del rotor com a senyal d'entrada al sistema vibratori i la tensió d'excitació com a variable proporcional al senyal de comandament i, per tant, la resposta freqüencial desitjada correspon a  $\omega_m(f)/V_t(f)$ .

A tall d'exemple, es pren el motor GR 80x80 de 200 W de potència i alimentació de 24 V, de la casa *Dunkermotoren*, amb les especificacions indicades a (6.5).

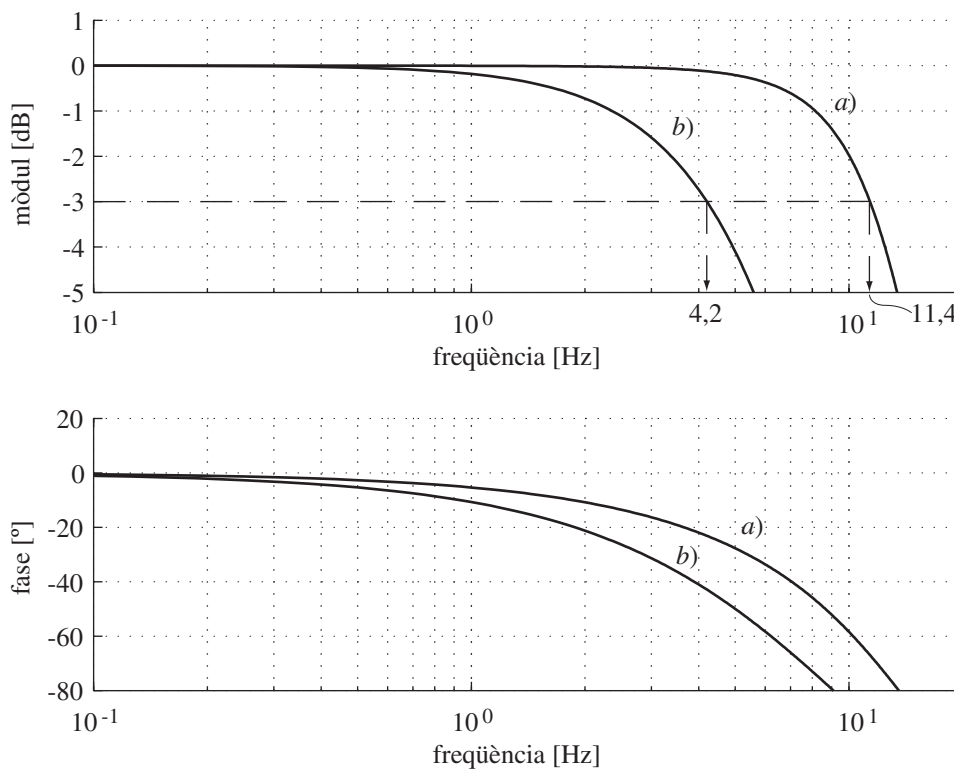
$$\begin{aligned} R_a &= 0,21 \ \Omega; \quad L_a = 1,5 \times 10^{-3} \ \text{H} \\ I_m &= 3200 \times 10^{-7} \ \text{kg} \cdot \text{m}^2; \quad k \cdot \phi = K_v = 67 \times 10^{-3} \ \text{V}/(\text{rad/s}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Si es suposa que l'alimentació d'excitació del motor és ideal i es negligeixen  $\Gamma_r$  i  $\Gamma_c$  (i per tant, segons el cas només es considera la inèrcia de la càrrega), la resposta freqüencial  $\omega_m(f)/V_t(f)$  pren una forma com la de la Figura 6.4, on s'observen dues corbes: *a*) si el motor gira en buit, i *b*) si actua una càrrega afegida de moment d'inèrcia reduït  $I_r = 3200 \times 10^{-7} \ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ . Les freqüències de tall respectives són 11,4 Hz i 4,2 Hz.



Això vol dir que el contingut freqüencial del senyal de comandament en cada cas s'atenuarà notablement per a freqüències superiors a aquestes, cosa que provocarà una certa distorsió en la forma de la llei de moviment.

En general, per a motors de corrent continu amb potències fins a 500 W, les freqüències de tall en buit es troben entre 5 Hz i 15 Hz per a motors amb nucli estàndard, i poden arribar a freqüències de 30 Hz en motors anomenats *coreless* (rotor sense nucli). Per tant, els motors de corrent continu tenen capacitat per seguir senyals de comandament amb continguts freqüencials inferiors a aquestes freqüències, segons les inèrcies involucrades, però mai per sobre d'aquestes.



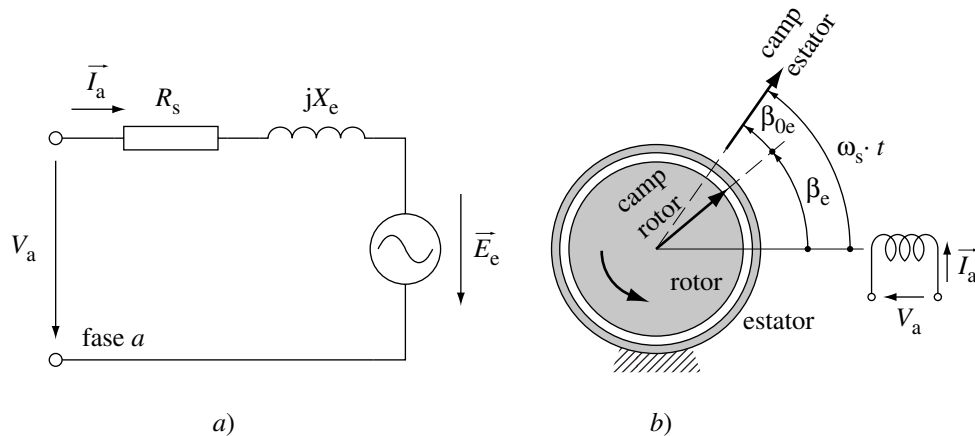
**Figura 6.4** Resposta freqüencial  $\omega_m(f)/V_t(f)$  del motor *Dunkermotoren* GR 80x80 (dB referits a  $1/K_v$ ) per als casos: a) motor girant en buit, i b) motor amb la càrrega especificada

## 6.2.2 Motors de corrent altern, síncrons, amb imants permanents

En aquest subapartat es pren com a punt de partida a Slemon i Straughen (1980). Aquest autors presenten un circuit elèctric equivalent vàlid en estat estacionari, per a un motor de corrent altern trifàsic síncron, d'imants permanents. La utilització d'aquest model, tal com s'ha explicat en la introducció, està condicionada al fet que el transitori de moviment sigui prou petit per no provocar canvis significatius en els paràmetres que descriuen el punt de funcionament del motor. Es representa en el domini freqüencial la resposta dinàmica del motor, prenent com a senyal de comandament la pulsació de la tensió d'alimentació de l'estator  $\omega_s$ , i com a senyal d'entrada al sistema vibratori, la velocitat angular del rotor  $\omega_m$ . A tal efecte, es linealitzen les expressions obtingudes suposant que les oscil·lacions del rotor són prou petites.

### Circuit elèctric equivalent

En la Figura 6.5 es representa, en estat estacionari, el circuit elèctric equivalent d'una fase corresponent al motor descrit quan el rotor és cilíndric. Tot i que els servomotors acostumen a tenir una configuració de rotor de pols sortints, aquest circuit també resulta prou adequat per representar-los. També es representen en aquesta figura els angles involucrats entre camps magnètics quan la màquina actua com a motor.



**Figura 6.5** a) Circuit elèctric equivalent, per fase, d'un motor síncron trifàsic d'imants permanents, vàlid per a l'estat estacionari; b) Angles involucrats entre camps magnètics

En la Figura 6.5 a),  $V_a$  i  $I_a$  corresponen a la tensió i a la corrent d'excitació de la fase  $a$  respectivament (es pren com a referència fasorial i per això es representa com a real),  $R_s$  la resistència del debanat d'excitació,  $X_e$  la reactància equivalent del circuit i  $E_e$  la tensió alterna equivalent induïda per la rotació del camp magnètic del rotor. Pel que fa als parells i inèrcies, s'utilitza la mateixa nomenclatura que en el motor de corrent continu.

En la Figura 6.5 b),  $\beta_e$  és l'angle que forma el camp del rotor amb l'origen d'angles fix a l'estator (definit per la fase  $a$ ),  $\beta_{0e}$  és l'angle que forma el camp del rotor amb el de l'estator –anomenat angle de càrrega– i  $\omega_s$  és la pulsació de la tensió d'alimentació de l'estator. Tots aquestes angles s'expressen en el pla fasorial elèctric. La relació entre la velocitat angular nominal del rotor  $\omega_m$ , constant per estar en règim estacionari, i la pulsació de l'estator s'expressa, en funció del nombre de pols  $p$  del motor, segons

$$\omega_s = \frac{p}{2} \omega_m \quad (6.6)$$

Suposant una alimentació d'excitació ideal, les equacions que relacionen les variables elèctriques en estat estacionari, per a una fase del debanat d'excitació, s'expressen segons (6.7), essent  $K_e$  una constant que depèn de la forma constructiva del motor.

$$\begin{aligned} \vec{V}_a &= (R_s + jX_e) \vec{I}_a + \vec{E}_e \\ \vec{E}_e &= K_e \omega_s \underline{-\beta_{0e}} = K_e \frac{p}{2} \omega_m \underline{-\beta_{0e}} = K_e \frac{p}{2} \omega_m (\cos \beta_{0e} - j \sin \beta_{0e}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

La relació entre les variables elèctriques i mecàniques s'obté, a partir de la potència mecànica  $P_m$  generada pel motor, segons:

$$P_m = 3 \operatorname{Re} \{ \bar{E}_e \cdot \bar{I}_a^* \} = \Gamma_m \omega_m \quad (6.8)$$

Finalment, l'expressió (6.3), igualada a zero per estar treballant en estat estacionari, és la que regeix el comportament mecànic del motor.

Les variables  $\omega_m$ ,  $\bar{I}_a$ ,  $\bar{E}_e$ ,  $\beta_{0e}$ ,  $\Gamma_m$  són, normalment, les incògnites a resoldre del sistema de cinc equacions format per les expressions (6.3), (6.6), (6.7) i (6.8).

### ***Resposta del motor controlat per freqüència. Simplificacions***

A l'igual que en el motor de corrent continu, es tracta en aquest punt d'obtenir una resposta freqüencial del motor trifàsic síncron entre el senyal de comandament que, en aquest cas, correspon a la pulsació de la tensió d'alimentació de l'estator  $\omega_s$  i el senyal d'entrada al sistema vibratori que correspon, per exemple, a la velocitat angular del rotor  $\omega_m$ .

Relacionant les expressions (6.7) i (6.8), i introduint el canvi  $X_e = L_e \omega_s$  ( $L_e$  és la inductància equivalent del circuit) s'obté el parell motor segons (6.9).

$$\Gamma_m = \frac{3K_e p (-K_e p R_s \omega_m + 2R_s V_a \cos \beta_{0e} + 2V_a L_e \omega_s \sin \beta_{0e})}{4(R_s^2 + L_e^2 \omega_s^2)} \quad (6.9)$$

S'observa en l'expressió (6.9) que el parell motor no és lineal amb les variables  $\beta_{0e}$  i  $\omega_s$ . Per poder emprar les eines d'anàlisi en el domini freqüencial, es linealitzava aquesta al voltant d'un punt de funcionament del motor. Per tant, aquesta aproximació només serà vàlida quan les oscil·lacions dels paràmetres esmentats siguin prou petites. A tal efecte, es pren el punt  $(\omega_m, \omega_s, \beta_{0e}) = (2\omega_{s0}/p, \omega_{s0}, 0)$ , essent  $\omega_{s0}$  un valor genèric de  $\omega_s$  al voltant del qual es desitja fer l'anàlisi, i prenent un valor de 0 graus per a l'angle de càrrega, ja que aquest no supera normalment els 5 graus en funcionament continu.

D'altra banda, s'introdueixen les possibles variacions entre el gir del rotor i la pulsació de l'estator a partir dels angles de la Figura 6.5. Les diferents velocitats, per tant, es relacionen segons (6.10).

$$\omega_s = \frac{d\beta_e}{dt} + \frac{d\beta_{0e}}{dt} = \frac{p}{2} \omega_m + \frac{d\beta_{0e}}{dt} \quad (6.10)$$

Finalment, com en el cas del motor de corrent continu, l'expressió (6.3) és la que regeix el comportament mecànic del motor.

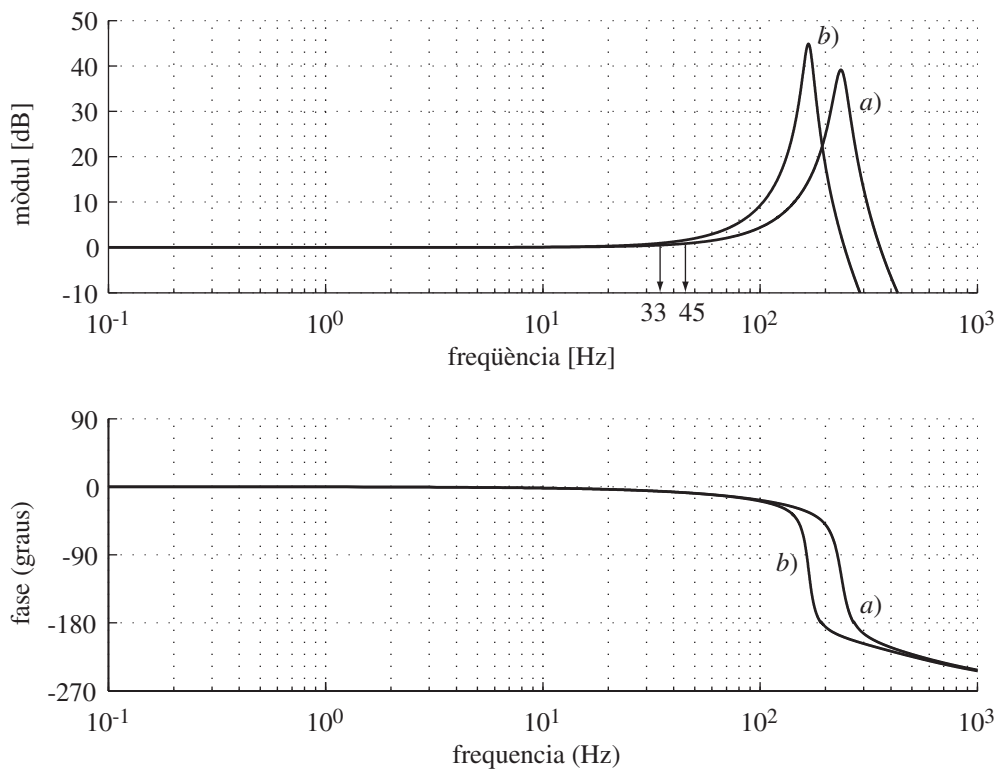
Es pren, per exemple, el motor BLS 40, de la casa *Mavilor*, de 200 W, 8 pols i de 220 V de tensió d'alimentació per fase ( $V_a$ ), amb les especificacions indicades a (6.11).

$$\begin{aligned}
 R_s &= 24,4 \, \Omega; & L_e &= 12,0 \times 10^{-3} \, \text{H} \\
 I_m &= 24,0 \times 10^{-7} \, \text{kg} \cdot \text{m}^2; & K_e &= 24,5 \times 10^{-3} \, \text{V}/(\text{rad/s})
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

Si es negligeixen  $\Gamma_r$  i  $\Gamma_c$  (i per tant, segons el cas, només es considera la inèrcia de la càrrega) i es suposa que l'alimentació d'excitació del motor és ideal, la resposta freqüencial  $\omega_m(f)/\omega_s(f)$  pren una forma com la de la Figura 6.6 per a una velocitat mitjana del rotor de  $5000 \, \text{min}^{-1}$ . Cal notar que, segons sigui la velocitat mitjana considerada, la resposta freqüencial variarà.

En la Figura 6.6 es poden observar dues corbes: *a*) si el motor gira en buit, i *b*) si actua una càrrega afegida de moment d'inèrcia reduït  $I_r = 24,0 \times 10^{-7} \, \text{kgm}^2$ . En aquest cas, enlloc de la freqüència de tall a  $-3 \, \text{dB}$ , és preferible avaluar la planitud de resposta en amplitud abans del pic de ressonància, ja que aquest acostuma a ser important en aquests tipus de motors. La resposta en amplitud  $\pm 10\%$  de la nominal ( $+0,83 \, \text{dB}$ ,  $-0,92 \, \text{dB}$ ) correspon a  $45 \, \text{Hz}$  i  $33 \, \text{Hz}$  i les freqüències de ressonància corresponen a  $235 \, \text{Hz}$  i  $167 \, \text{Hz}$  per a les corbes *a*) i *b*) respectivament.

En general, per a aquest tipus de motors, les respostes en amplitud en buit es troben entre  $15 \, \text{Hz}$  i  $50 \, \text{Hz}$ . Això fa que, pràcticament, el rang de freqüències útil es tripliqui respecte als motors de corrent continu. De la mateixa manera que en els motors de corrent continu, aquests motors tenen, per tant, capacitat per seguir senyals de comandament amb continguts freqüencials inferiors a aquestes freqüències, segons les inèrcies involucrades, però mai per sobre d'aquestes.



**Figura 6.6** Resposta freqüencial  $\omega_m(f)/\omega_s(f)$  del motor *Mavilor* BLS 40 (dB referits a  $2/p$ ) per als casos: *a*) motor girant en buit, i *b*) motor amb la càrrega especificada



## CAPÍTOL 7

# Experimentació

En el capítol 5 s'ha explicat el mètode desenvolupat per definir i sintetitzar lleis de moviment, amb l'objectiu de reduir les vibracions romanents en el sistema vibratori d'estudi, després d'acabar el transitori de moviment d'excitació. Com a complement, i per exemplificar la validesa del mètode, s'exposa en el present capítol el muntatge experimental realitzat i els assajos duts a terme.

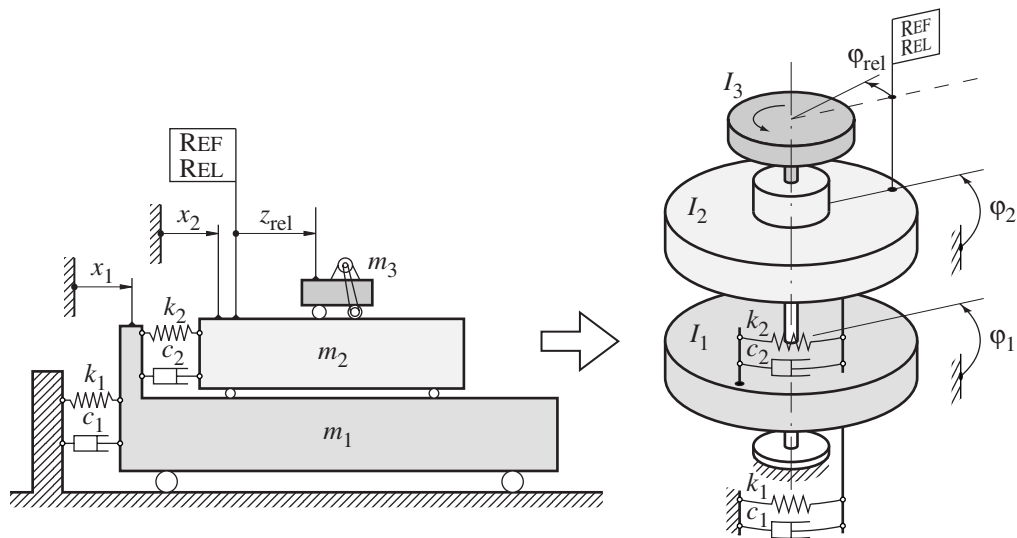
En primer lloc, s'explica en detall el muntatge experimental que s'ha dissenyat i construït. S'inclou una descripció del disseny mecànic i del sistema de control emprat. Després, es descriuen els assajos previs fets amb l'actuador i amb el sistema vibratori. Pel que fa a l'actuador, s'ajusten els paràmetres d'un model analític a partir del qual es determina la seva freqüència de tall. Pel que fa al sistema vibratori, s'ajusta també a un model analític i, per mitjà de l'anàlisi modal, s'obtenen alguns paràmetres necessaris per validar el muntatge –principalment freqüències pròpies i raons d'esmoreïment modals. Finalment, amb aquesta informació es sintetitzen algunes lleis de moviment i es valoren els resultats obtinguts, emprant com a mètrica la vibració residual del sistema vibratori.

### 7.1 DESCRIPCIÓ DEL MUNTATGE EXPERIMENTAL

Per al disseny mecànic del muntatge experimental, originalment s'ha partit d'un model de tres graus de llibertat de translació, dos d'ells vibratoris i l'altre governat. Per tal de no limitar l'espai definit per les lleis de moviment introduïdes, però, s'ha optat finalment per reproduir un model equivalent amb moviments de rotació.

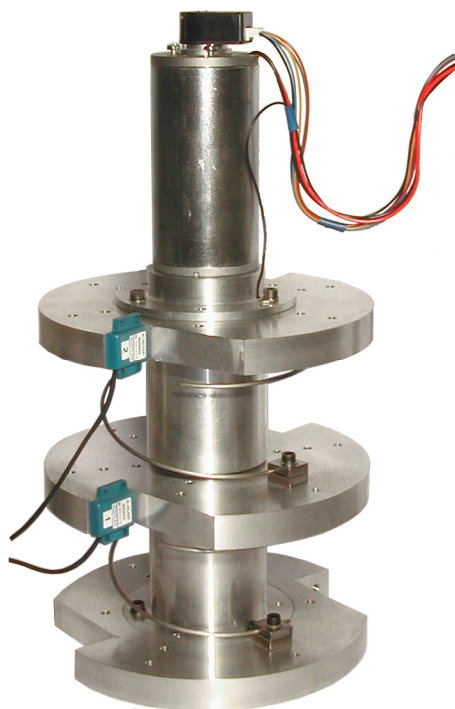
En la Figura 7.1 es mostra l'analogia feta entre el model de translació i el de rotació. Es designen per  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$  els moments axials d'inèrcia corresponents als anomenats rotor 1, rotor 2 i rotor motor, respectivament. Els moviments vibratoris dels rotors lliures estan

causats per la presència de dos conjunts molla-amortidor torsionals. El primer conjunt actua entre el terra i el rotor 1, i està representat per la rigidesa  $k_1$  i la constant d'esmoreïment  $c_1$ . L'altre conjunt actua entre el rotor 1 i el rotor 2, i està representat per la rigidesa  $k_2$  i la constant d'esmoreïment  $c_2$ . Es prenen com a coordenades independents del sistema els angles  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , que corresponen a l'orientació absoluta del rotor 1 i del rotor 2 respectivament, i l'angle  $\varphi_{rel}$ , que correspon a l'orientació relativa entre el rotor motor i el rotor 2.



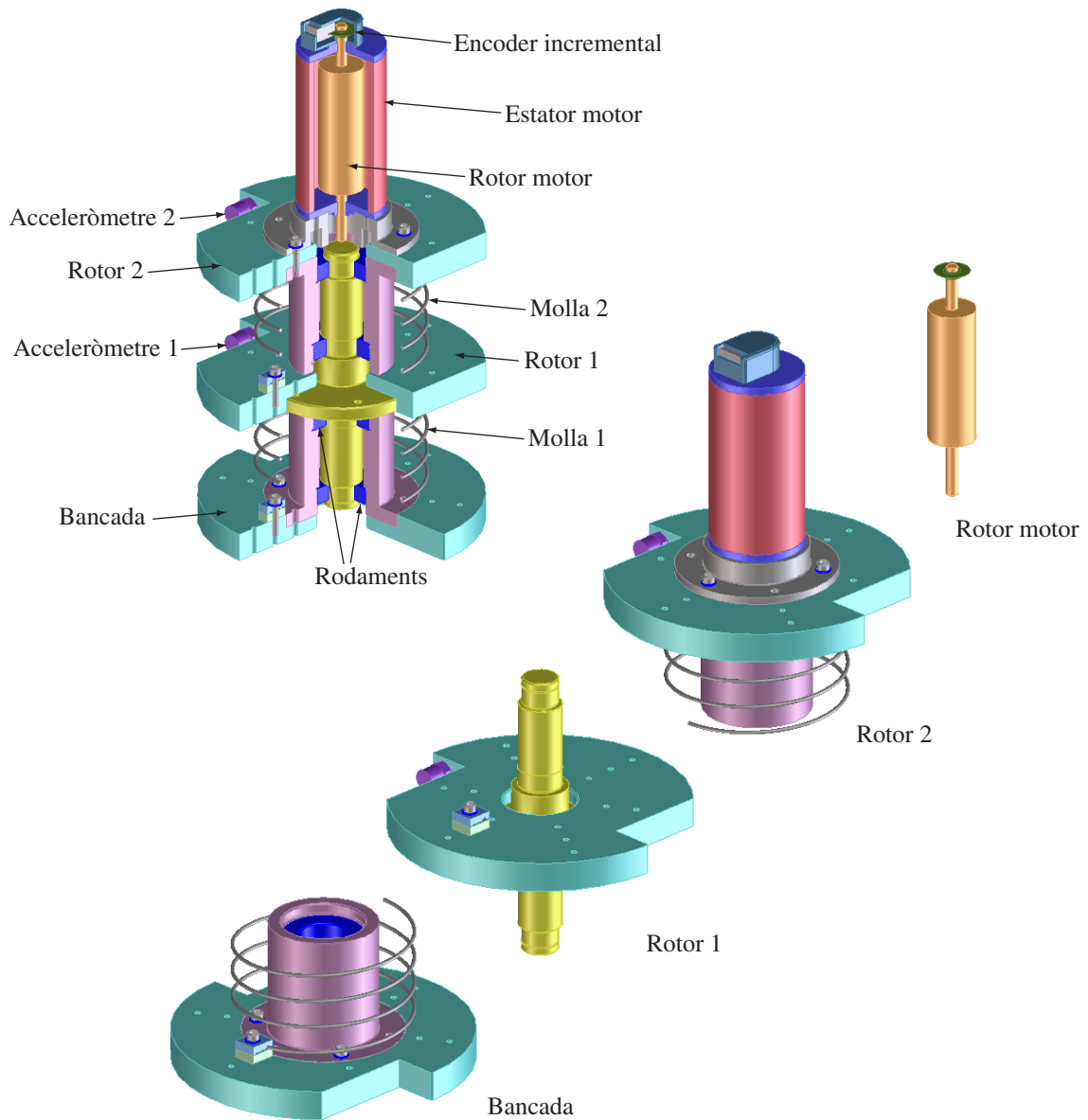
**Figura 7.1** Model de dos graus de llibertat vibratori de translació i el seu equivalent de rotació

### 7.1.1 Conjunt mecànic



**Figura 7.2** Vista frontal del conjunt mecànic

Tal com s'ha dit en el subapartat anterior, el conjunt mecànic del muntatge realitzat –Figura 7.2– presenta moviments de rotació de les seves inèrcies i té tres graus de llibertat, un d'ells governat per mitjà d'un actuador, i els altres dos lliures amb comportament vibratori.



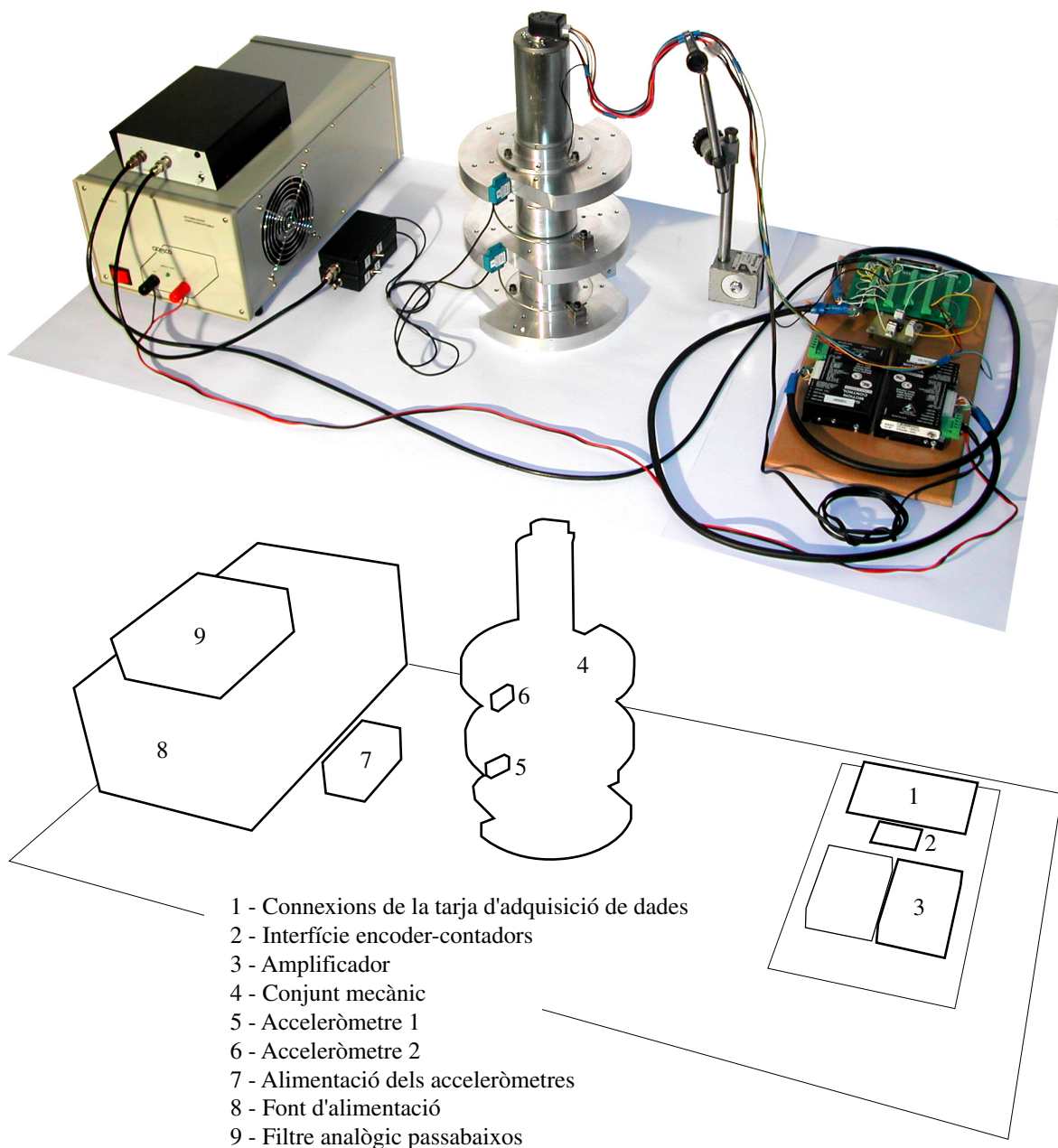
**Figura 7.3** Esquema dels components del conjunt mecànic, seccionats i en explosió

En la Figura 7.3 es pot observar un esquema del conjunt mecànic. Aquest està constituït principalment per una bancada fixa i tres rotors concèntrics. La bancada, el rotor 1 i el rotor 2 han estat construïts en alumini mecanitzat, i el rotor motor el constitueix el propi rotor d'un motor de corrent continu, l'eix del qual no està connectat a cap element. El moviment relatiu  $\varphi_{rel}$  entre el rotor motor i el rotor 2 (o l'estator del motor) es governa per mitjà d'un sistema de control digital estàndard, emprant un encoder incremental per a la mesura de l'angle (realimentació del control). El moviment absolut del rotor 1 i del rotor 2 es mesura a través dels acceleròmetres 1 i 2, respectivament.



En la Figura 7.3 també es mostren els enllaços que permeten els moviments relatius de rotació entre els rotors, materialitzats per mitjà de rodaments rígids de boles. El disseny del conjunt permet, a més a més, variar el nombre d'espises, el diàmetre de fil i el diàmetre d'espira de les molles espirals de torsió –molla 1 i molla 2– cosa que fa possible variar les seves rigideses. D'altra banda, no es preveu esmorteïment addicional entre els rotors i bancada i, per tant, les pròpies resistències passives dels rodaments dissipen l'energia introduïda en el transitori (representades en el model per  $c_1$  i  $c_2$ ).

### 7.1.2 Sistema de control. Captació de dades

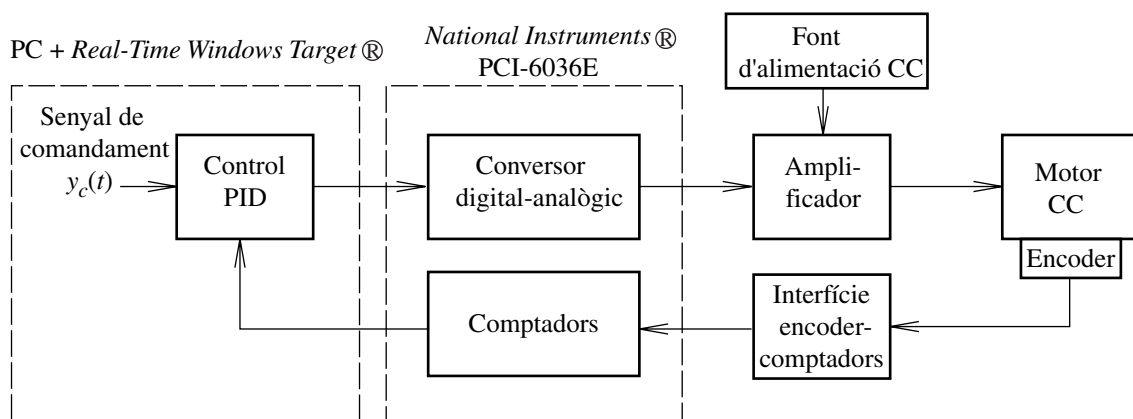


**Figura 7.4** Vista en conjunt del muntatge experimental amb els elements que componen el sistema de control i mesura

El sistema de control és l'element encarregat que l'actuador segueixi amb fidelitat el senyal de comandament introduït per l'usuari que, en aquest cas, correspon a una llei de moviment del rotor del motor. En la Figura 7.4 es pot veure una vista en conjunt del muntatge experimental amb els elements que componen el sistema de control i altres.

En la Figura 7.5, es representen esquemàticament els elements del sistema de control, les característiques dels quals són:

- PC amb sistema operatiu *Windows 2000*® amb *Matlab Simulink*® on, a més a més, s'hi ha incorporat la utilitat *Real-Time Windows Target*®, que permet fer el control a temps real a través de la tarja d'adquisició de dades, ambdós de la companyia *The MathWorks*®.
- Tarja d'adquisició de dades multifunció PCI-6036E de *National Instruments*®, que consta de 16 entrades analògiques senzilles (o 8 diferencials) amb resolució de 16 bits i una freqüència de mostratge de 200 kHz, 2 sortides analògiques de 16 bits de resolució amb una freqüència de mostratge de 10 kHz, 8 entrades/sortides digitals, i 2 comptadors de 24 bits.
- Amplificador MSA-12-80 per a motors de corrent continu amb escombretes, de la casa *Galil*, per a potències fins a 2 kW de pic (pot alimentar voltatges fins a 80V i 12 A en funcionament continu amb pics fins a 25 A), amb modulació de l'ample de pols (*PWM*) a 36 kHz i amb una resposta dinàmica fins a 2,5 kHz.
- Font d'alimentació de corrent continu G4815 de 720 W, de *Grelco*, estabilitzada i curtcircuitable, amb un voltatge de sortida de 48 V i una intensitat nominal de 15 A.
- Encoder digital HEDS 5540, de la casa *Agilent*, amb 500 pulsos per volta, dos senyals en quadratura més una senyal d'índex. La seva resposta dinàmica pot arribar a 100 kHz.
- Interfície encoder-comptadors per al comptatge digital dels passos d'encoder, fet amb un circuit biestable SN74HC74N tipus D, amb una resposta dinàmica de 71 MHz.



**Figura 7.5** Esquema dels elements que componen el sistema de control

Pel que fa a la captació de dades, els moviments absoluts del rotor 1 i del rotor 2 es mesuren a través dels acceleròmetres 1 i 2 respectivament, orientats en la direcció de la

velocitat d'un punt de la perifèria dels rotors (Figura 7.4). En aquest cas es fan servir acceleròmetres capacitius K-Beam 8308A2 de la casa *Kistler*, amb un rang de treball de  $\pm 2g$ , una sensibilitat de 500 mV/g i una resposta dinàmica fins a 30 Hz.

El senyal que prové dels acceleròmetres es llegeix per un dels canals analògics de la tarja d'adquisició de dades, previ filtratge amb un filtre analògic passabaixos de 400 Hz. Aquest filtratge es fa necessari per evitar l'efecte aliasador i per eliminar soroll que, en aquest cas, presenta un nivell important causat per la commutació del rotor de delgues i per la proximitat dels camps magnètics involucrats en el motor elèctric.

## 7.2 MODELITZACIÓ I AJUST DE PARÀMETRES

En aquest apartat s'expliquen els condicionants i passos més rellevants del procés seguit per dissenyar, construir i validar el muntatge experimental. En l'etapa de disseny, s'ha tingut en compte, en primer lloc, quina és la capacitat real de l'actuador emprat en quan a la seva resposta freqüencial –segons l'anàlisi feta en el capítol 6. A partir de valors aproximats de les inèrcies de rotació del rotor 1 i del rotor 2, i mitjançant un model analític del sistema vibratori, s'han dissenyat les molles torsionals corresponents, de manera que les freqüències dels dos modes principals del sistema es trobin suficientment per sota de la freqüència de tall de l'actuador.

Un cop construït el conjunt mecànic, s'han validat les variables fixades en l'etapa de disseny a través de les respostes freqüencials reals d'aquest i l'ajust de paràmetres en el model analític.

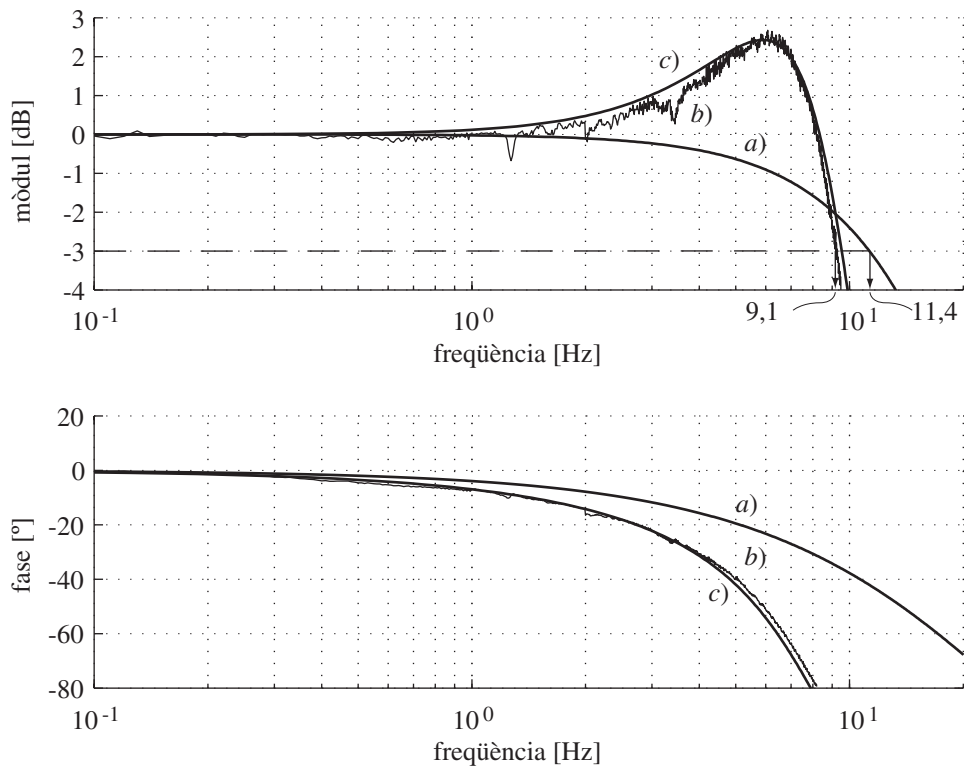
Finalment, en base a la descomposició modal del model analític, s'ha comprovat que cada un dels dos modes propis involucrats té una raó d'esmoreïment modal  $\zeta$  menor a 0,3, condició necessària per poder comprovar la validesa del mètode emprat per generar lleis de moviment, descrit en el capítol 5.

### 7.2.1 Resposta freqüencial del motor

Per a la construcció del muntatge experimental s'ha fet servir un motor de corrent continu GR 63x55 de la casa *Dunkermotoren*, amb imans permanents i escombretes, que té una potència de 95 W i una tensió d'alimentació de 24 V. Les seves especificacions són:

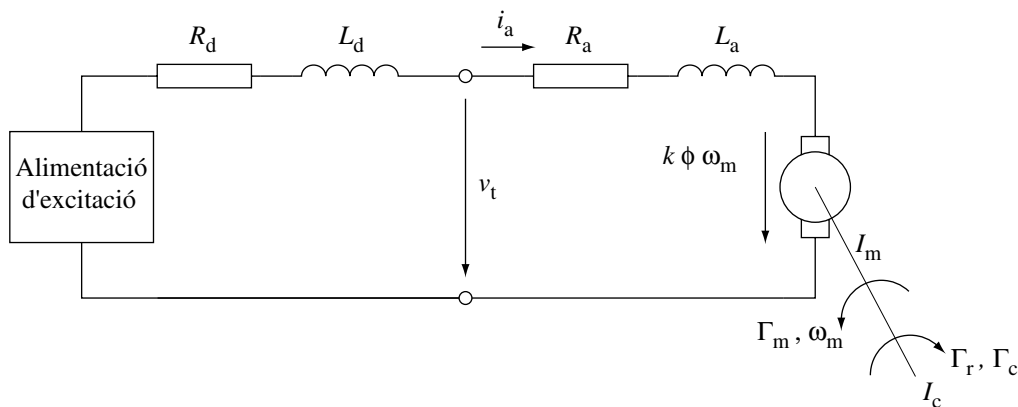
$$\begin{aligned} R_a &= 0,6 \ \Omega; \quad L_a = 1,5 \times 10^{-3} \ \text{H} \\ I_m &= 750 \times 10^{-7} \ \text{kg} \cdot \text{m}^2; \quad k \cdot \phi = K_v = 64 \times 10^{-3} \ \text{V}/(\text{rad}/\text{s}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

La resposta freqüencial  $\omega_m(f)/V_t(f)$  teòrica d'aquest motor es pot observar en la Figura 7.6 a). Aquesta ha estat calculada amb el motor en buit, ja que en el muntatge experimental no té cap mena d'inèrcia afegida al rotor ni cap connexió mecànica d'aquest a altres elements. S'ha suposat, per a aquest càlcul, una font d'alimentació ideal i s'han negligit les resistències passives, segons el procediment indicat a l'apartat 6.2.



**Figura 7.6** Respostes freqüencials del motor (dB referits a  $1/K_v$ ): a) teòrica amb font d'alimentació ideal, b) mesurada prenent com a referència la tensió ideal de la font, i c) calculada amb els paràmetres  $R_d$  i  $L_d$  ajustats

Per a la mesura de la resposta freqüencial real, es fa servir el muntatge experimental, però amb els rotors 1 i 2 fixats a terra, i es pren com a referència la tensió ideal de la font. S'observa en la Figura 7.6 b) que la resposta freqüencial real mesurada difereix sensiblement de la resposta freqüencial teòrica. Això és degut al fet que ni la font d'alimentació ni l'amplificador són ideals i, per tant, s'ha de tenir en compte la impedància de sortida equivalent corresponent a aquests elements. Aquesta es comptabilitza com una impedància en sèrie ( $R_d$  i  $L_d$ ) amb el circuit equivalent del motor de corrent continu, tal com mostra la Figura 7.7.



**Figura 7.7** Esquema elèctric equivalent d'un motor de corrent continu d'imants permanents, tenint en compte la impedància de sortida de la font més l'amplificador ( $R_d$  i  $L_d$ )

En la figura esmentada,  $v_t$ ,  $i_a$  representen la tensió i el corrent del debanat d'excitació.  $R_a$ ,  $L_a$  representen la resistència i la inductància d'aquest debanat. El flux magnètic es representa per  $\phi$ , i  $k$  és una constant que depèn de la forma constructiva del motor. El parell motor, el parell de les resistències passives reduït a l'eix del motor, i el parell resistent de la càrrega reduït a l'eix del motor són, respectivament,  $\Gamma_m$ ,  $\Gamma_r$  i  $\Gamma_c$ . El moment d'inèrcia del motor i el moment d'inèrcia de la càrrega reduït a l'eix del motor són, respectivament,  $I_m$  i  $I_c$ . Finalment  $\omega_m$  representa la velocitat angular del motor.

A partir de la resposta freqüencial del motor mesurada en el muntatge, i havent ajustat el model equivalent amb una impedància en sèrie corresponent a l'alimentació del motor, s'obté la Figura 7.6 c). Segons això, la impedància de sortida equivalent de la font d'alimentació més l'amplificador té uns valors de resistència de  $R_d=0,44 \Omega$  i d'inductància de  $L_d=17,0 \times 10^{-3} \text{ H}$ .

A la vista de la Figura 7.6, es pot observar que la freqüència de tall real de l'actuador està situada al voltant de 9,1 Hz. Per tant, alhora de dissenyar unes molles per a unes inèrcies de rotació determinades, és necessari tenir en compte que les freqüències pròpies que s'obtinguin siguin, amb prou marge, inferiors a aquesta freqüència de tall. D'aquesta manera es garanteix que l'actuador té la capacitat d'excitar, si escau, els dos modes propis vibratoris del conjunt mecànic.

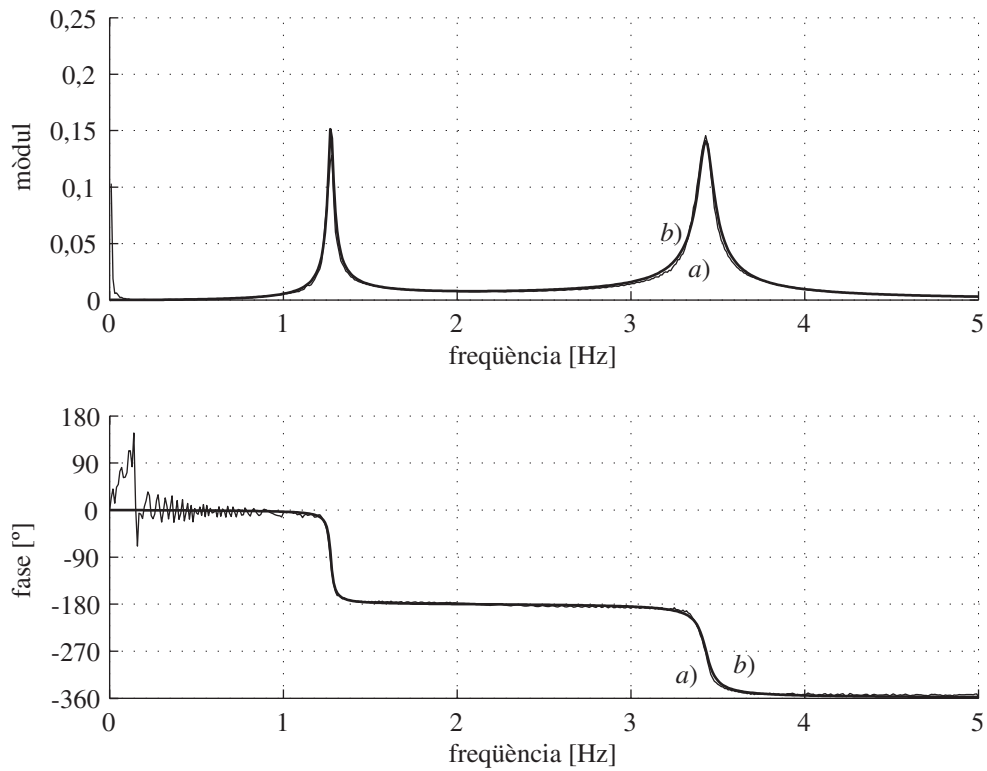
## 7.2.2 Resposta freqüencial del muntatge

El model analític que s'ha fet servir per caracteritzar el sistema vibratori segueix l'esquema plantejat en la Figura 7.1. En aquest model, les equacions de moviment es poden expressar segons (7.2)

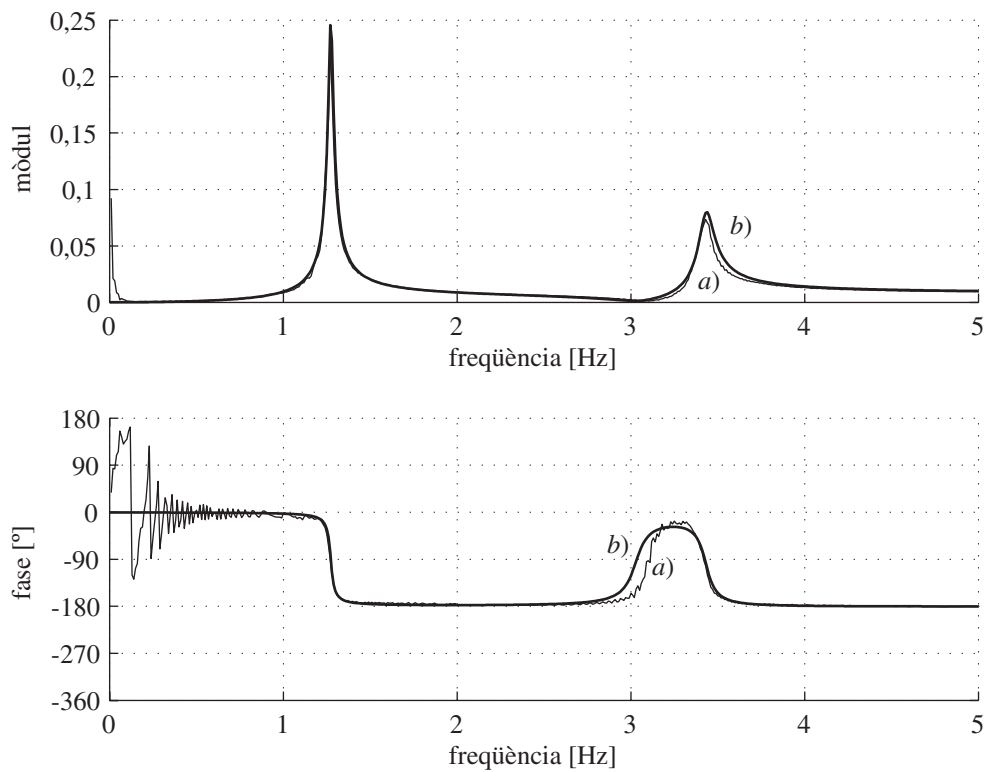
$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 + I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_3 \ddot{\phi}_{\text{rel}} \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

Per tal d'obtenir un valor aproximat de les inèrcies  $I_1$  i  $I_2$  i els esmorteïments reals del muntatge  $c_1$  i  $c_2$ , primerament, i per mitjà del senyals que proporcionen els acceleròmetres, s'obtenen experimentalment les respostes freqüencials  $\dot{\phi}_1(f)/\dot{\phi}_{\text{rel}}(f)$  i  $\dot{\phi}_2(f)/\dot{\phi}_{\text{rel}}(f)$ . A partir del model analític plantejat, s'aplica la transformada de Fourier al sistema d'equacions, tot substituint prèviament les rigideses  $k_1$  i  $k_2$  mesurades en un assaig estàtic sobre el muntatge experimental, i la inèrcia del rotor motor  $I_3$  obtinguda de les seves especificacions. Finalment, s'ajusten les inèrcies  $I_1$  i  $I_2$ , i els esmorteïments  $c_1$  i  $c_2$ , a fi que les respostes freqüencials teòriques s'aproximin a les obtingudes experimentalment.

En la Figura 7.8 i la Figura 7.9 es poden observar les respostes freqüencials analítiques ajustades, sobreposades a les experimentals. Les freqüències corresponents als dos modes propis caracteritzats estan al voltant de 1,2 Hz i 3,4 Hz. Aquestes, segons el que s'ha previst en el subapartat anterior, estan per sota de la freqüència de tall del motor amb prou marge.



**Figura 7.8** Respostes freqüencials  $\dot{\phi}_1(f)/\dot{\phi}_{rel}(f)$  : a) experimental i b) analítica



**Figura 7.9** Respostes freqüencials  $\dot{\phi}_2(f)/\dot{\phi}_{rel}(f)$  : a) experimental i b) analítica

Amb l'ajust fet, els paràmetres que caracteritzen el model analític queden segons:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 870 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; & I_2 &= 950 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 I_3 &= I_m = 750 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 c_1 &= 6,2 \times 10^{-3} \text{ Nm}/(\text{rad}/\text{s}); & c_2 &= 0,1 \times 10^{-3} \text{ Nm}/(\text{rad}/\text{s}) \\
 k_1 &= 1,55 \text{ Nm}/\text{rad}; & k_2 &= 1,6 \text{ Nm}/\text{rad}
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

### 7.2.3 Anàlisi modal. Raons d'esmoreïment

En base a la teoria de la descomposició modal, i a partir del model analític determinat en el subapartat anterior, es comprova ara que les raons d'esmoreïment modals  $\zeta_0$  i  $\zeta_1$  són inferiors a 0,3. Aquesta condició esdevé necessària per poder comprovar la validesa del mètode emprat per generar lleis de moviment, segons el que s'ha explicat en el capítol 5.

Diagonalitzant la matriu dinàmica  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  –expressió (7.2)– s'obtenen els dos valors propis  $\lambda_0$  i  $\lambda_1$ , i les corresponents freqüències pròpies  $f_0$  i  $f_1$ , segons (7.4).

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i} \tag{7.4}$$

Les freqüències pròpies  $f_0$  i  $f_1$  obtingudes són 1,27 Hz i 3,43 Hz respectivament, i els vectors propis, normalitzats amb mòdul, unitari són  $\mathbf{p}_0 = \{0,53 \text{ rad}, 0,85 \text{ rad}\}^T$  i  $\mathbf{p}_1 = \{0,87 \text{ rad}, -0,49 \text{ rad}\}^T$ , respectivament. La matriu  $\mathbf{P}$  té com columnes els vectors propis  $\mathbf{p}_0$  i  $\mathbf{p}_1$ .

Donat que l'acoblament modal per esmoreïment es preveu petit, es simplifica la matriu d'esmoreïments per poder ser diagonalitzada fent servir el canvi de base amb la matriu de vectors propis  $\mathbf{P}$ . Això implica fer nuls els termes de fora de la diagonal de la matriu resultant del producte  $\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$ , descrita en l'apartat 4.3 .

Per al muntatge experimental en qüestió, les matrius del sistema, amb l'aproximació indicada i en coordenades modals, prenen els valors mostrats a (7.5), expressats en unitats del Sistema Internacional.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 933 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 891 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} &\approx \begin{bmatrix} 1,72 \times 10^{-3} & \cancel{2,79 \times 10^{-3}} \\ \cancel{2,79 \times 10^{-3}} & 4,90 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 59,7 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 4,14 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

Finalment, a partir d'aquests valors, es calculen les raons d'esmoreïment modals fent servir la mateixa expressió que per a un sistema d'un grau de llibertat vibratori. Per al primer i segon mode propi del muntatge experimental, s'obtenen uns valors de  $\zeta_0=0,012$  i  $\zeta_1=0,013$  respectivament.

Es conclou, doncs, que el muntatge experimental compleix el requisit enunciat de tenir les seves raons d'esmoreïments modals per sota de 0,3 amb prou marge i, consegüentment, és apte per provar la validesa del desenvolupament teòric fet en aquest treball.

### 7.3 ASSAJOS I RESULTATS

En el muntatge experimental, un cop posat a punt, es realitzen dues sèries d'assajos en els quals es proven diverses lleis de moviment, corresponents totes a moviments punt a punt del rotor del motor (transitoris de posició). Cada una d'aquestes sèries consta de tres tipus de lleis de moviment. Aquestes són equivalents funcionalment en el temps de durada  $t_f$  i l'angle recorregut pel rotor del motor  $\varphi_{rel}(t_f)$ . La mètrica emprada per quantificar els resultats és el percentatge de vibració residual, definit en l'apartat 4.3.

En primer lloc, es prova una llei de moviment suficientment agressiva, que excita amb amplituds importants els dos modes propis del muntatge experimental. En segon lloc, es sintetitza una llei de moviment segons el procediment descrit en 5.3, amb l'objectiu de reduir les vibracions residuals corresponents al segon mode propi de freqüència  $f_1=3,43$  Hz. Finalment, es sintetitza una darrera llei de moviment, segons el mateix procediment, amb l'objectiu de reduir les vibracions corresponents als dos modes propis de freqüència  $f_0=1,27$  Hz i  $f_1=3,43$  Hz.

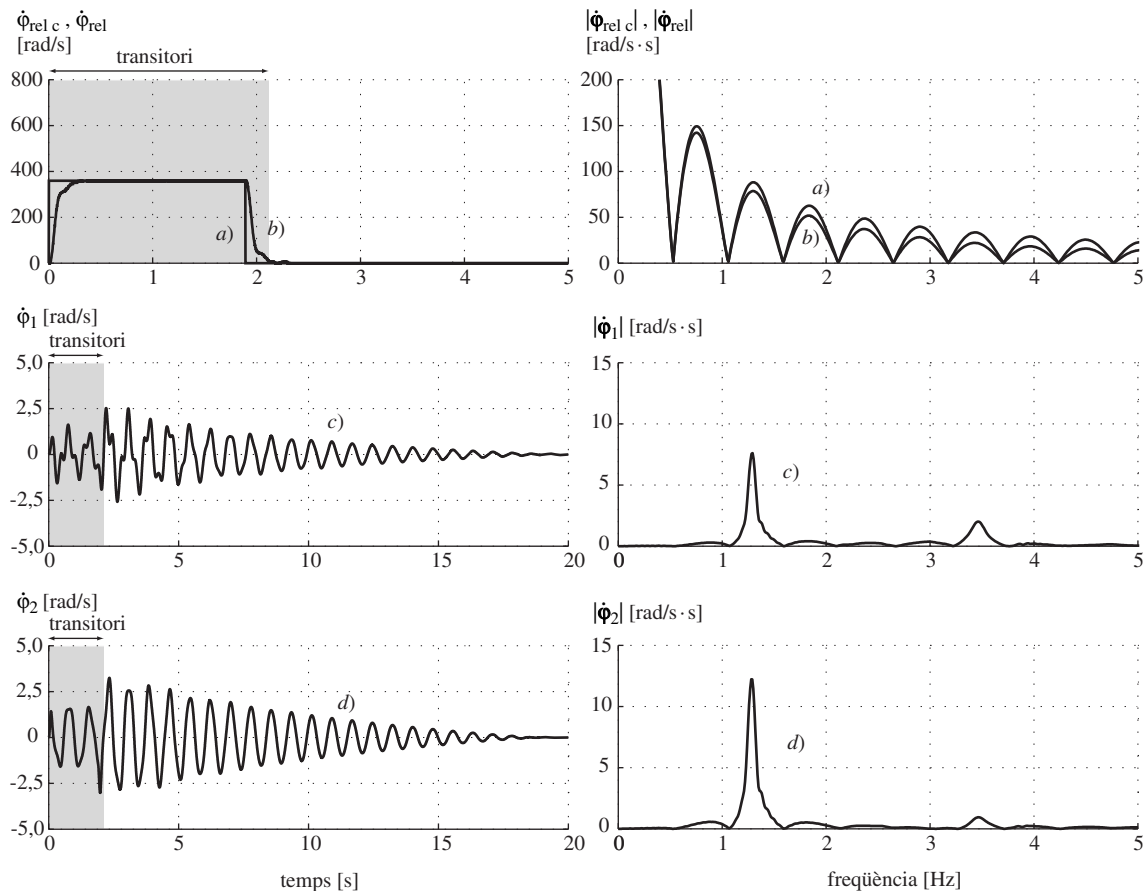
En tots els casos, es descriuen gràficament en el domini temporal i en el domini freqüencial el senyal de comandament  $\dot{\varphi}_{relc}$ , el senyal d'entrada al sistema vibratori  $\dot{\varphi}_{rel}$  i les respostes  $\dot{\varphi}_1$  del rotor 1 i  $\dot{\varphi}_2$  del rotor 2.

#### 7.3.1 Primera sèrie d'assajos

##### *Assaig 1*

Es tria una llei de velocitat del rotor motor segons un pols rectangular, a fi efecte que exciti els dos modes propis amb prou energia. Els requeriments funcionals del moviment corresponen a una durada de  $t_f=1,89$  segons, i un angle relatiu girat pel rotor de  $\varphi_{rel}(t_f) \approx 680$  rad. En la Figura 7.10 es mostra l'evolució temporal i el contingut freqüencial de: *a*) el pols descrit com a senyal de comandament, *b*) el senyal d'entrada real que veu el sistema vibratori, *c*) i *d*) les respostes del sistema en forma de velocitat del rotor 1 i rotor 2, respectivament.





**Figura 7.10** Sèrie 1, assaig 1: senyals temporals amb els seus continguts freqüencials: a) senyal de comandament  $\dot{\phi}_{relc}$  corresponent a un pols, b) senyal d'entrada  $\dot{\phi}_{rel}$ , c) resposta  $\dot{\phi}_1$  i d) resposta  $\dot{\phi}_2$

S'observa, en la Figura 7.10, la distorsió que hi ha entre el senyal de comandament i el d'entrada al sistema vibratori –senyals a) i b) respectivament– introduïda per l'actuador més la font d'alimentació i l'amplificador. També s'observen els continguts freqüencials significatius al voltant de les freqüències corresponents als dos modes propis del sistema –senyals c) i d) del domini freqüencial.

### Vibració residual

La caracterització de la vibració residual, tal com s'ha explicat en l'apartat 4.3, es fa per a cada un dels modes propis involucrats en el sistema. Conseqüentment, per al seu càlcul, s'obtenen les respostes impulsional del sistema en coordenades modals per a un impuls  $\dot{\phi}_{rel}(t) = I\delta(t)$ . Cal observar que, en aquest cas i pel fet de fer servir per a l'entrada i la sortida senyals amb magnitud de velocitat angular, l'impuls definit és, tot i no tenir un significat físic realitzable, un impuls de velocitat angular.

Segons les equacions de moviment en coordenades geomètriques (7.2), el terme independent que correspon a l'entrada del sistema queda descrit segons:

$$\mathbf{f}(\varphi_{\text{rel}}(t)) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_3 \ddot{\varphi}_{\text{rel}} \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

Transformant a coordenades modals  $\xi_i$ , amb la matriu  $\mathbf{P}^T$ , el vector d'excitació (7.6) queda de la forma:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}(\varphi_{\text{rel}}(t)) = \begin{Bmatrix} -0,85 I_3 \ddot{\varphi}_{\text{rel}} \\ 0,49 I_3 \ddot{\varphi}_{\text{rel}} \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

Per tant, si es pren un impuls de velocitat de magnitud  $I$ ,  $\dot{\varphi}_{\text{rel}}(t) = I\delta(t)$ , com a excitació d'entrada, l'excitació modal equivalent, particularitzant amb el valor de la inèrcia del motor  $I_3$ , queda com:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}(\varphi_{\text{rel}}(t)) = \begin{Bmatrix} -63,75 \times 10^{-6} I \dot{\delta}(t) \\ 36,75 \times 10^{-6} I \dot{\delta}(t) \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

En l'apartat 4.3, fent referència a les coordenades especificades en la Figura 4.15, s'explica que la vibració residual que correspon al moviment lliure d'un sistema d'un grau de llibertat vibratori, prenent com a origen de temps l'instant en què acaba el transitori, segueix l'expressió

$$\xi(t) = C e^{-\zeta\omega_d t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (7.9)$$

amb  $C$  i  $\varphi$  constants que depenen de les condicions inicials del moviment. En aquest cas, per a l'entrada descrita i per a cada mode propi, les condicions inicials són:

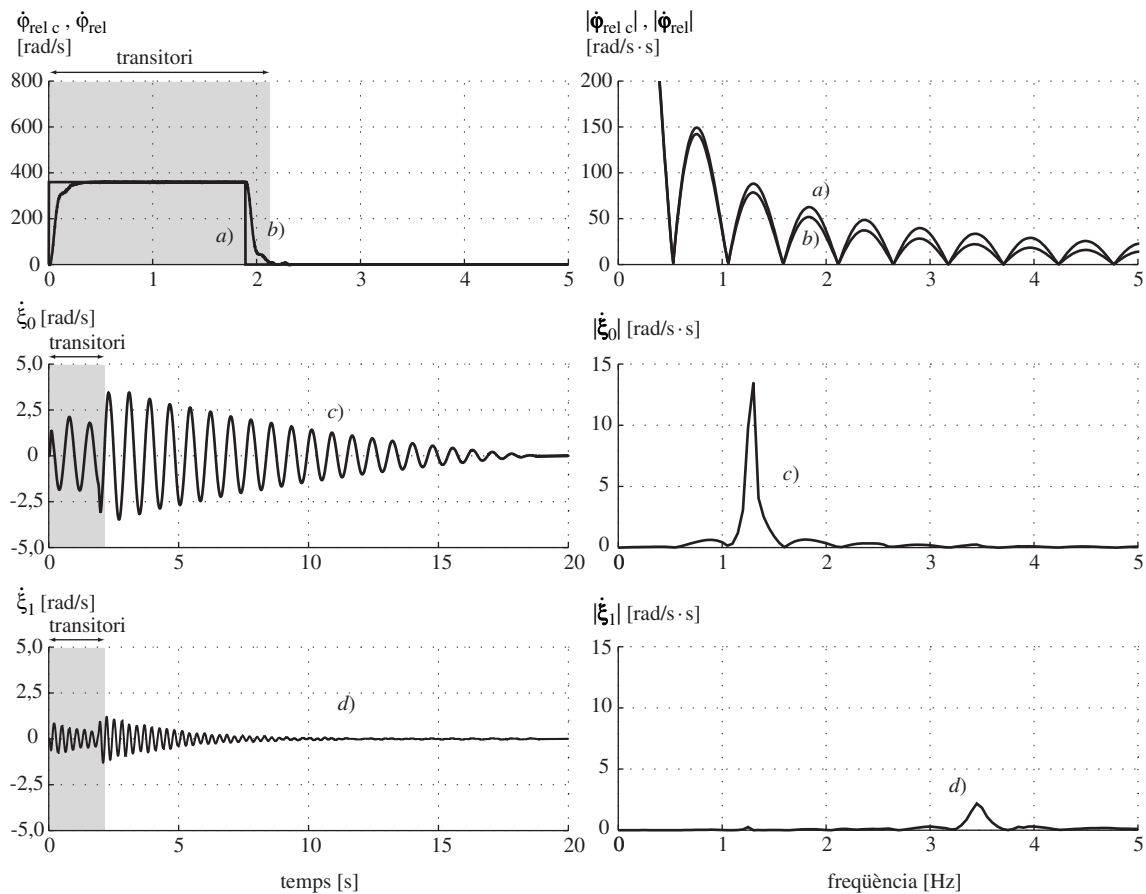
$$\begin{aligned} \xi_0(0) &= -\frac{63,75 \times 10^{-6}}{933 \times 10^{-5}} I; & \dot{\xi}_0(0) &= 0 \\ \xi_1(0) &= \frac{36,75 \times 10^{-6}}{891 \times 10^{-5}} I; & \dot{\xi}_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

on  $\dot{\xi}_i(t)$  són les funcions integrals, respecte al temps, de les funcions  $\xi_i(t)$ .

Substituint els valors numèrics corresponents en l'expressió (7.9), i per a cada mode propi, s'obtenen els màxims dels valors absoluts de les amplituds de vibració. En aquest cas s'avaluen en forma de velocitat i, per a una entrada impuls de magnitud  $I$  al sistema, són  $|\dot{\xi}_{\text{Imax}0}| = 0,054 I$  rad/s i  $|\dot{\xi}_{\text{Imax}1}| = 0,087 I$  rad/s. Per garantir el requeriment funcional  $\varphi_{\text{rel}}(t_f) \approx 680$  rad, cal que la magnitud de l'impuls sigui, conseqüentment,  $I=680$  rad. Amb aquest valor, els màxims dels valors absoluts de les amplituds de vibració queden  $|\dot{\xi}_{\text{Imax}0}| = 36,72$  rad/s i  $|\dot{\xi}_{\text{Imax}1}| = 59,16$  rad/s.

D'altra banda, per calcular el percentatge de vibració residual és necessari saber el valor de la màxima amplitud d'aquesta en coordenades modals. A tal efecte, sobre els resultats del primer assaig (Figura 7.10), s'aplica el canvi de base  $\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\xi}$ . En la Figura 7.11 es poden observar els resultats en coordenades modals, on els valors absoluts de les amplituds màximes de vibració residual són  $|\dot{\xi}_{\text{rmax}0}| = 3,48$  rad/s i

$|\dot{\xi}_{r \max 1}| = 1,29 \text{ rad/s}$ . Per tant, els percentatges de vibració residual són 9,5 % i 2,2 % per al primer i segon mode propi, respectivament.



**Figura 7.11** Sèrie 1, assaig 1 (respostes modals): senyals temporals amb els seus continguts freqüencials: *a*) senyal de comandament  $\dot{\varphi}_{relc}$  (pols), *b*) senyal d'entrada  $\dot{\varphi}_{rel}$ , respostes *c*)  $\dot{\xi}_0$  i *d*)  $\dot{\xi}_1$

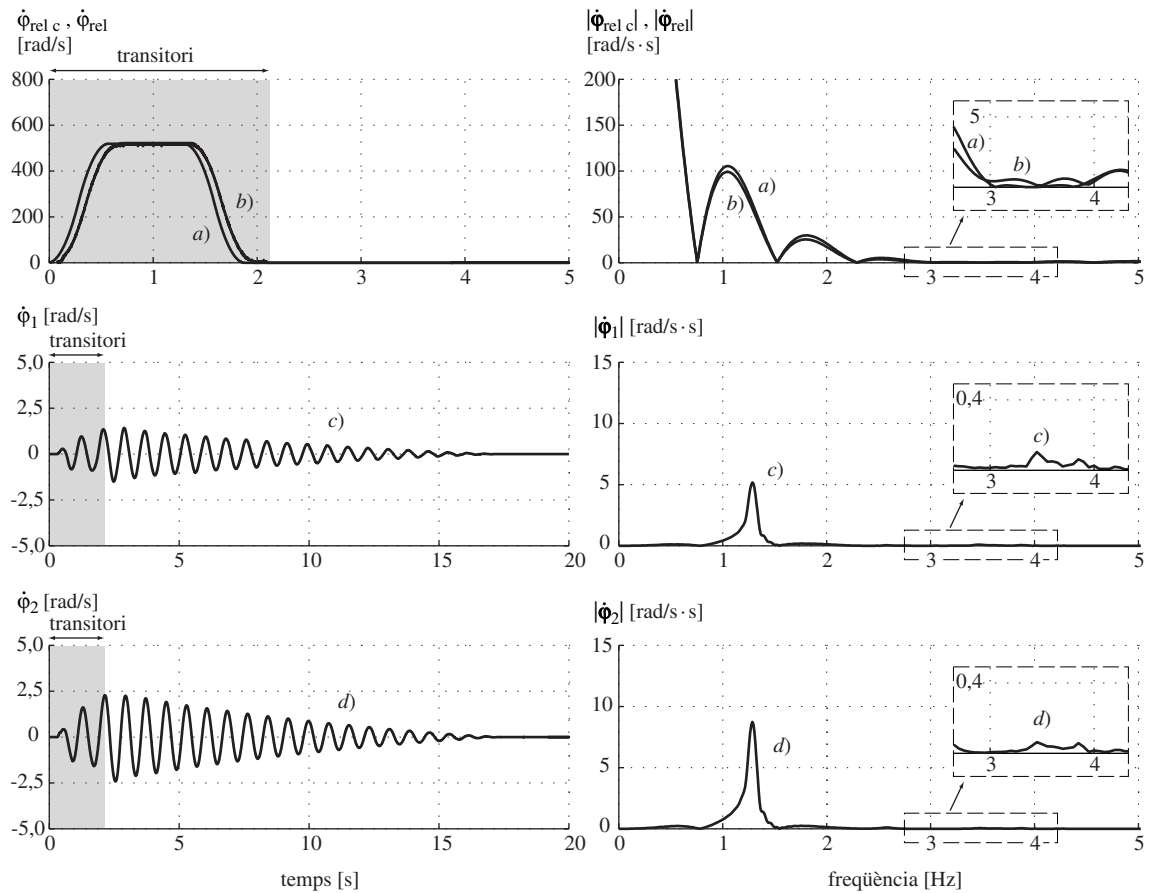
## Assaig 2

En el segon assaig, es desitja reduir les vibracions residuals corresponents al segon mode propi de manera robusta, mantenint els requeriments funcionals corresponents a una durada  $t_f = 1,89$  segons, i un angle relatiu girat pel rotor de  $\varphi_{rel}(t_f) \approx 680$  rad. Per tant, es fa servir la corba B-spline presentada en el subapartat 5.3.1. Donat que, en aquest cas, hi ha un únic mode propi sobre el qual es vol actuar, es substitueix la variable  $f_0$  pel valor 3,43 Hz. Aquest cas correspon a  $t_f > 4/f_0$  i per tant el vector de nodes queda segons:

$$u = \left\{ 0, 0, \frac{1}{3,43}, \frac{2}{3,43}, 1,89 - \frac{2}{3,43}, 1,89 - \frac{1}{3,43}, 1,89, 1,89 \right\} \text{ s} \quad (7.11)$$

S'ajusta la variable  $A$  de les ordenades del polígon de control per tal que a l'àrea de la corba li correspongui el valor de 680 rad. El polígon de control queda definit per les ordenades

$$d = \{0, 0, 520, 520, 520, 0, 0\} \quad \text{rad/s} \quad (7.12)$$



**Figura 7.12** Sèrie 1, assaig 2: senyals temporals amb els seus continguts freqüencials: a) senyal de comandament  $\dot{\varphi}_{rel\ c}$  segons l'assaig 2, b) senyal d'entrada  $\dot{\varphi}_{rel}$ , c) resposta  $\dot{\varphi}_1$  i d) resposta  $\dot{\varphi}_2$

En la Figura 7.12 es mostra l'evolució temporal i el contingut freqüencial del senyal de comandament a) i del senyal d'entrada real b) que veu el sistema vibratori. Entre ambdós, la distorsió ja no és apreciable, però s'observa un cert retard causat pel sistema de control. S'observa que el contingut freqüencial d'ambdós senyals en la zona del segon mode propi és molt petit. Tanmateix es mostren les respostes del sistema  $\dot{\varphi}_1$  i  $\dot{\varphi}_2$ , temporal i freqüencialment (senyals c) i d) respectivament). En elles, es pot observar també que el contingut freqüencial al voltant el segon mode propi és molt petit.

Si s'avalua la vibració residual, com s'ha explicat en el primer assaig, els valors absoluts de les amplituds màximes de vibració residual, en coordenades modals, són  $|\dot{\xi}_{r\max 0}| = 2,84 \text{ rad/s}$  i  $|\dot{\xi}_{r\max 1}| = 0,15 \text{ rad/s}$ . Llavors, les vibracions residuals en percentatge són 7,7 % per al primer mode propi i 0,25 % per al segon.

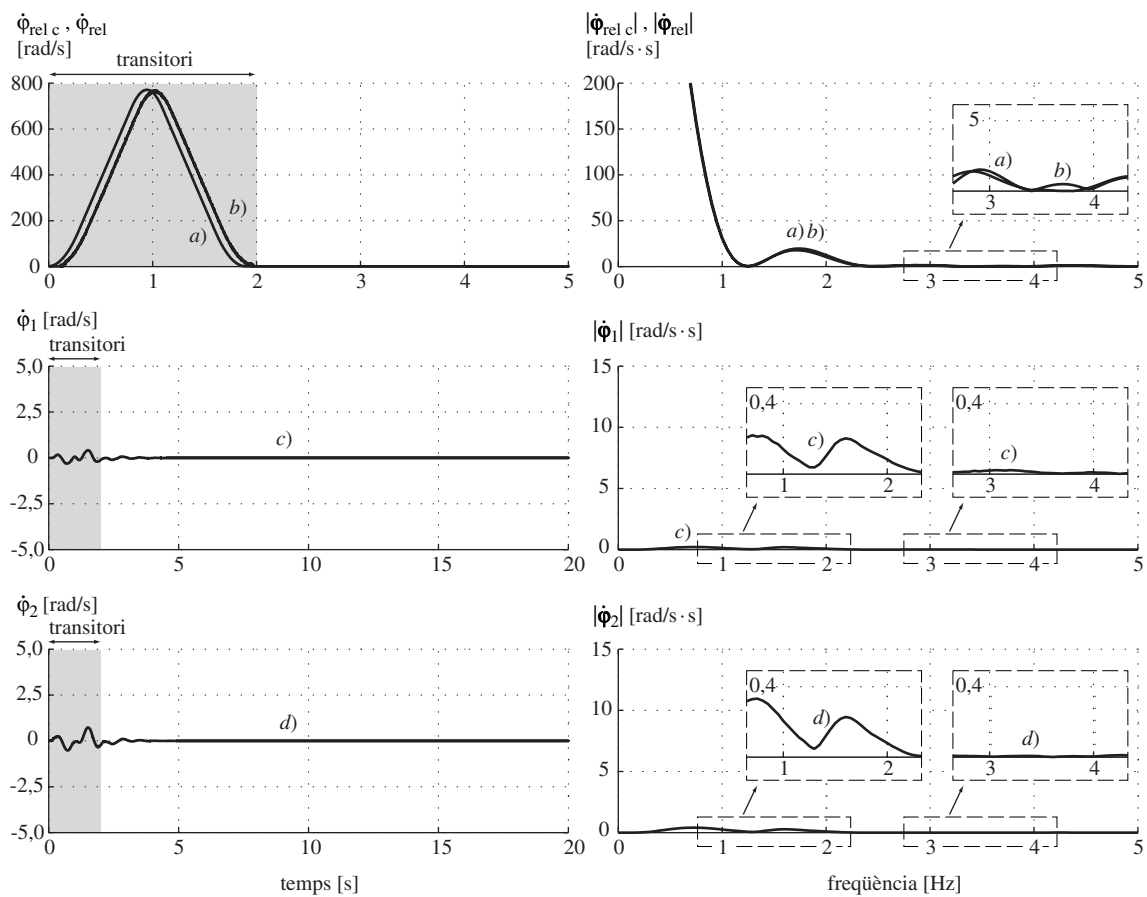
### Assaig 3

En aquest darrer assaig, es desitja reduir les vibracions residuals corresponents als dos modes propis. Per tant, es fa servir la corba B-spline presentada en el subapartat 5.3.2. Aquest cas correspon a  $(2/f_0 + 1/f_1) < t_f \leq (2/f_0 + 2/f_1)$ . Per tant, el vector de nodes queda com:

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{3,43}, \frac{1}{1,27}, 1,89 - \frac{1}{1,27} - \frac{1}{3,43}, \frac{1}{1,27} + \frac{1}{3,43}, 1,89 - \frac{1}{1,27}, 1,89 - \frac{1}{3,43}, 1,89, 1,89 \right\} \text{ s} \quad (7.13)$$

S'ajusta la variable  $A$  de les ordenades del polígon de control per tal que a l'àrea de la corba li correspongui el valor de 680 rad. Aquest, llavors, pren els valors

$$\mathbf{d} = \{0, 0, 420, 697, 840, 697, 420, 0, 0\} \text{ rad/s} \quad (7.14)$$



**Figura 7.13** Sèrie 1 assaig 3: senyals temporals amb els seus continguts freqüencials: a) senyal de comandament  $\dot{\phi}_{rel,c}$  segons l'assaig 3, b) senyal d'entrada  $\dot{\phi}_{rel}$ , c) resposta  $\dot{\phi}_1$  i d) resposta  $\dot{\phi}_2$

En la Figura 7.13 es mostren les evolucions temporals i continguts freqüencials de les mateixes variables que en el cas anterior. S'observa que el contingut freqüencial dels

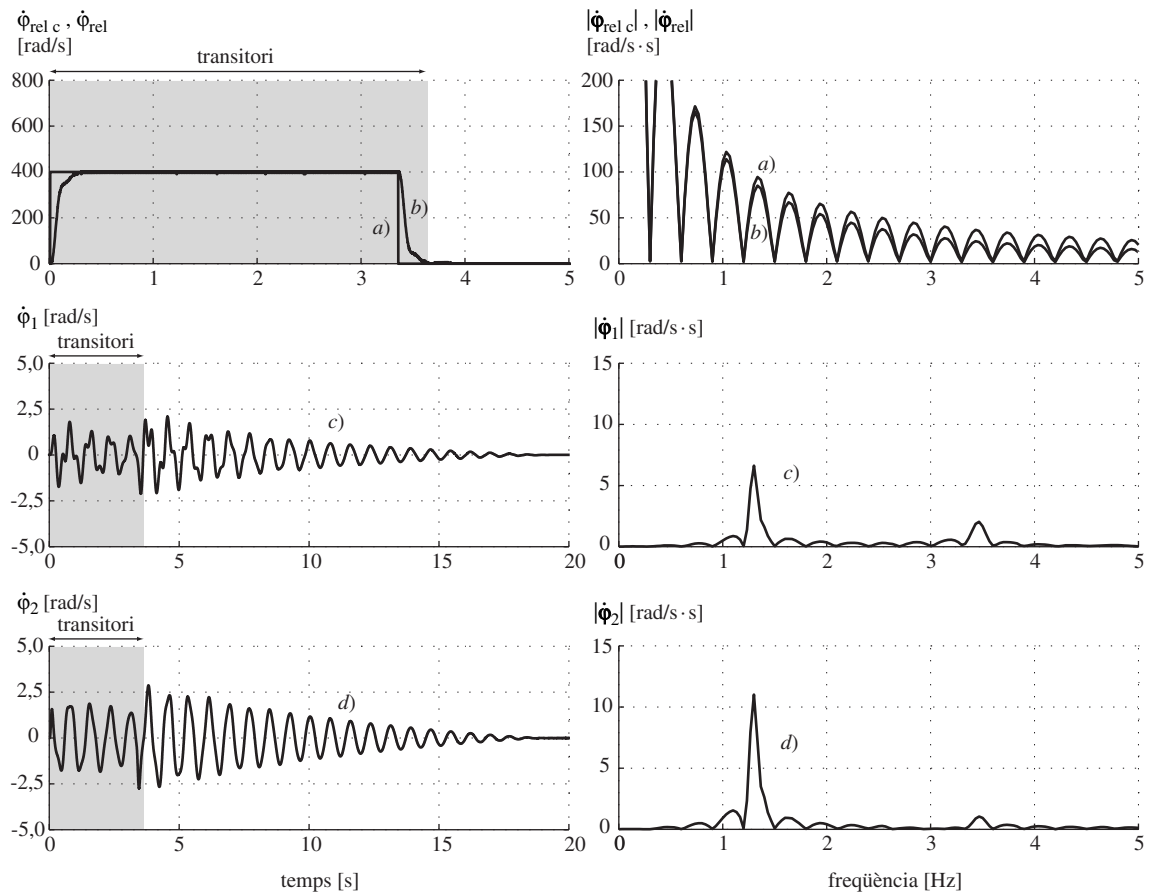
senyals d'entrada i les respostes, en els rangs freqüencials al voltant dels dos modes propis, és molt petit.

En aquest cas, els valors absoluts de les amplituds màximes de vibració residual, en coordenades modals, són  $|\dot{\xi}_{r\max 0}| = 0,25$  rad/s i  $|\dot{\xi}_{r\max 1}| = 0,03$  rad/s. Per tant, les vibracions residuals en percentatge són 0,7 % per al primer mode propi i 0,05 % per al segon.

### 7.3.2 Segona sèrie d'assajos

Es realitza una segona sèrie d'assajos, de les mateixes característiques que l'anterior. Ara, però, es vol que els requeriments funcionals corresponguin a una durada de la llei de moviment de  $t_f = 3,34$  segons, i un angle girat pel rotor de  $\varphi_{rel}(t_f) \approx 1335$  rad. Els mateixos comentaris fets en la sèrie d'assajos anterior, són d'aplicació en aquest exemple.

#### Assaig 1

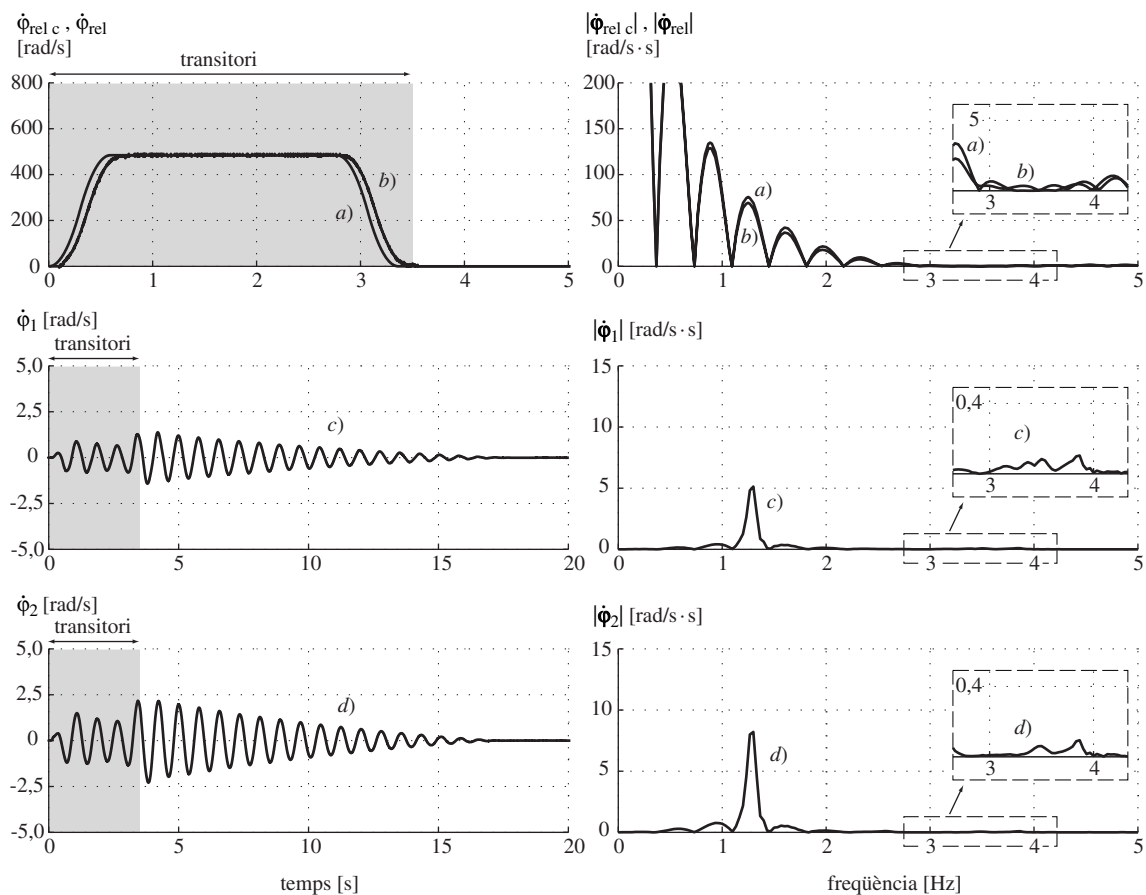


**Figura 7.14** Sèrie 2, assaig 1: senyals temporals amb els seus continguts freqüencials: a) senyal de comandament  $\dot{\varphi}_{rel\ c}$  corresponent a un pols, b) senyal d'entrada  $\dot{\varphi}_{rel}$ , c) resposta  $\dot{\varphi}_1$  i d) resposta  $\dot{\varphi}_2$

En la Figura 7.13 es mostren les evolucions temporals i continguts freqüencials de les mateixes variables enunciades en la sèrie anterior, quan l'entrada correspon a un pols que compleix els requeriments funcionals descrits.

Els valors absoluts de les amplituds màximes de vibració residual, en coordenades modals, són  $|\dot{\xi}_{r\max 0}| = 2,92$  rad/s i  $|\dot{\xi}_{r\max 1}| = 1,17$  rad/s. Per tant, les vibracions residuals en percentatge són 4,0 % per al primer mode propi i 1,0 % per al segon.

### Assaig 2



**Figura 7.15** Sèrie 2, assaig 2: senyals temporals amb els seus continguts freqüencials: a) senyal de comandament  $\dot{\varphi}_{relc}$  segons l'assaig 2, b) senyal d'entrada  $\dot{\varphi}_{rel}$ , c) resposta  $\dot{\varphi}_1$  i d) resposta  $\dot{\varphi}_2$

En el segon assaig, es desitja reduir les vibracions residuals corresponents al segon mode propi, de manera robusta, mantenint els requeriments funcionals corresponents a una durada  $t_f = 3,34$  segons, i un angle relatiu girat pel rotor de  $\varphi_{rel}(t_f) \approx 1335$  rad. Per tant, es fa servir la corba B-spline presentada en el subapartat 5.3.1, per al cas  $t_f > 4/f_0$ . El vector de nodes queda com:

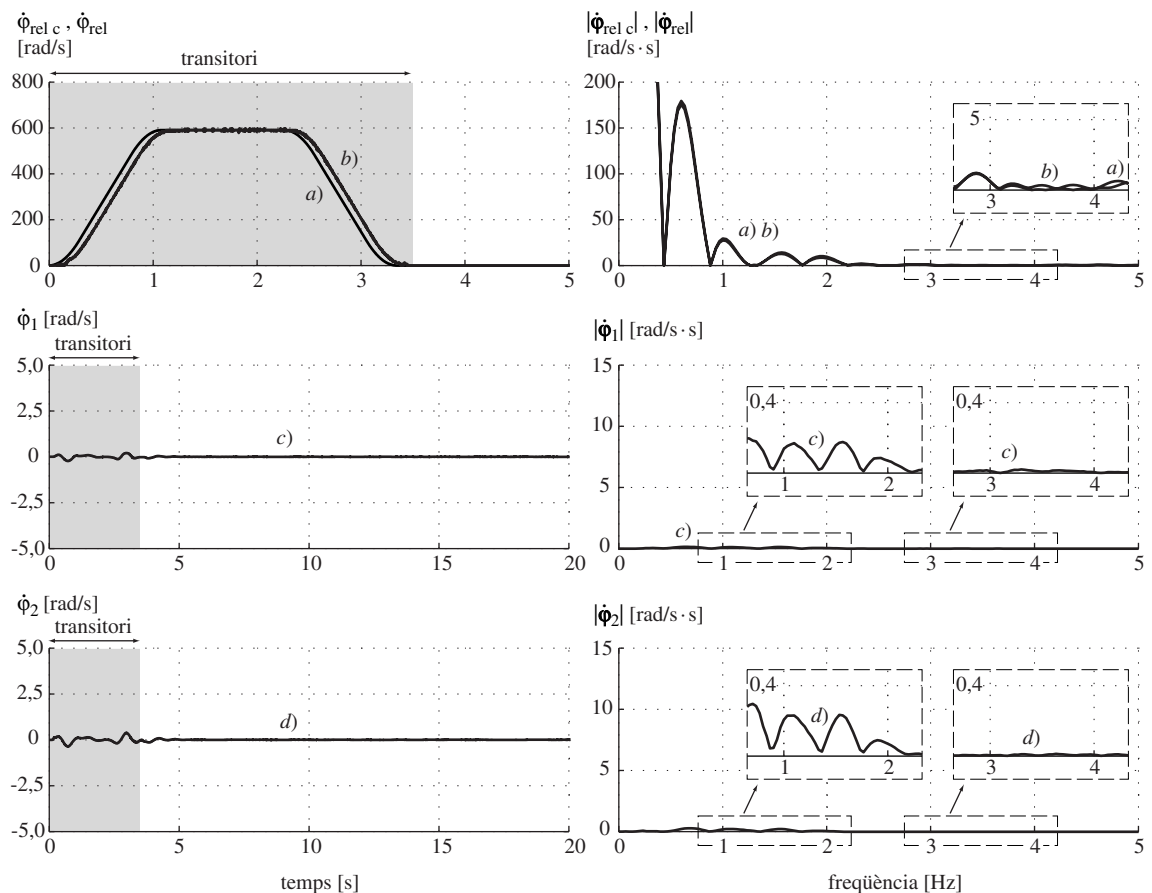
$$\mathbf{u} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{3,43}, \frac{2}{3,43}, 3,34 - \frac{2}{3,43}, 3,34 - \frac{1}{3,43}, 3,34, 3,34 \right\} \text{ s} \quad (7.15)$$

S'ajusta la variable  $A$  de les ordenades del polígon de control per tal que a l'àrea de la corba li correspongui un valor de 1335 rad. Aquest, llavors, pren els valors

$$\mathbf{d} = \{0, 0, 484, 484, 484, 0, 0\} \text{ rad/s} \quad (7.16)$$

En la Figura 7.15 es mostren les evolucions temporals i continguts freqüencials de les variables corresponents. Els valors absoluts de les amplituds màximes de vibració residual, en coordenades modals, són  $|\xi_{r\max 0}| = 2,69 \text{ rad/s}$  i  $|\xi_{r\max 1}| = 0,15 \text{ rad/s}$ . Les vibracions residuals en percentatge són 3,7 % per al primer mode i 0,13 %, per al segon.

**Assaig 3**



**Figura 7.16** Sèrie 2, assaig 3: senyals temporals amb els seus continguts freqüencials: a) senyal de comandament  $\dot{\phi}_{rel\ c}$ , b) senyal d'entrada  $\dot{\phi}_{rel}$ , c) resposta  $\dot{\phi}_1$  i d) resposta  $\dot{\phi}_2$



En aquest darrer assaig, es desitja reduir les vibracions residuals corresponents als dos modes propis. Per tant, es fa servir la corba B-spline presentada en el subapartat 5.3.2. Aquest cas correspon a  $t_f > (2/f_0 + 2/f_1)$ . Per tant, el vector de nodes (en segons) queda com:

$$u = \left\{ 0, 0, \frac{1}{3,43}, \frac{1}{1,27}, \frac{1}{1,27} + \frac{1}{3,43}, 3,34 - \frac{1}{1,27} - \frac{1}{3,43}, 3,34 - \frac{1}{1,27}, 3,34 - \frac{1}{3,43}, 3,34, 3,34 \right\} \quad (7.17)$$

S'ajusta la variable  $A$  de les ordenades del polígon de control per tal que a l'àrea de la corba li correspongui un valor de 1335 rad. Aquest, llavors, pren els valors

$$d = \{0, 0, 295, 590, 590, 295, 0, 0\} \quad \text{rad/s} \quad (7.18)$$

En la Figura 7.16 es mostren les evolucions temporals i continguts freqüencials de les variables corresponents. Els valors absoluts de les amplituds màximes de vibració residual, en coordenades modals són  $|\dot{\xi}_{r\max 0}| = 0,16 \text{ rad/s}$  i  $|\dot{\xi}_{r\max 1}| = 0,03 \text{ rad/s}$ . Per tant, les vibracions residuals en percentatge són 0,2 % per al primer mode i 0,03 % per al segon.

### 7.3.3 Resultats

El resum de resultats de les dues sèries d'assajos es troba en la Taula 7.1. Es pot concloure que els assajos fets mostren de manera significativa la reducció notable de vibracions residuals. En la primera sèrie, la vibració residual corresponent al primer mode propi es redueix de l'ordre de 13 vegades i la corresponent al segon mode propi es redueix 9 vegades en l'assaig de reducció del segon mode, i 44 vegades en l'assaig de reducció dels dos modes. En la segona sèrie, aquests valors són de 20 vegades per al primer mode propi, i 8 i 33 per al segon mode propi, respectivament.

Vibració residual %		Entrada pols	Reducció segon mode	Reducció dos modes
Sèrie 1	Mode 1	9,5	7,7	0,7
	Mode 2	2,2	0,25	0,05
Sèrie 2	Mode 1	4,0	3,7	0,2
	Mode 2	1,0	0,13	0,03

**Taula 7.1** Taula resum de la vibració residual obtinguda en les dues sèries d'assajos

## CAPÍTOL 8

# Conclusions i extensions

En aquest capítol es presenten les conclusions més destacades i les aportacions més rellevants que han originat els estudis realitzats per aconseguir l'objectiu bàsic de la tesi, presentat en el capítol 1, que ha estat la definició d'un mètode per generar o sintetitzar senyals transitoris d'excitació o control de sistemes mecànics amb comportament vibratori, per minimitzar la generació de vibracions residuals.

### 8.1 CONCLUSIONS

Es descriuen en aquest apartat les conclusions més significatives d'aquest treball estructurades segons els objectius proposats en el capítol introductori.

#### *Sistema d'estudi*

La caracterització del sistema d'estudi ha permès establir unes hipòtesis de partida per poder desenvolupar el nou mètode. Aquest sistema s'ha dividit en tres parts que el componen que són: el senyal d'entrada o excitació, el sistema vibratori i el senyal de sortida o resposta.

Respecte al senyal d'entrada s'han definit quines són les tipologies principals en transitoris de moviment, diferenciant entre transitoris de posició, de velocitat i d'acceleració. En totes elles, s'han determinat dos possibles requeriments funcionals que ha de poder complir el mecanisme governat. Per poder aplicar les tècniques d'anàlisi espectral descrites en el capítol 3 i basades en la Transformada de Fourier, s'han determinat, en cada cas, quins serien els senyals més adients per al seu tractament.

També s'han posat de manifest algunes propietats dels senyals transitoris atenent a la seva simetria. S'ha demostrat que dos senyals, amb simetria parell o imparell, que tenen la mateixa durada i el valor de la seva primera integral temporal coincideix, tenen també el mateix valor de la seva segona integral temporal. Això facilita el càlcul a l'hora de fixar diversos requeriments funcionals. Es conclou aquesta anàlisi posant de manifest que els senyals simètrics tenen una major possibilitat que el seu contingut freqüencial s'anul·li en determinades freqüències, cosa que els fa molt aptes per a la utilització en el mètode proposat.

Respecte al sistema vibratori, s'ha pres com a referència un sistema mecànic discret de  $n$  graus de llibertat vibratoris, de comportament lineal i que es pot modelitzar amb equacions de moviment de paràmetres constants, i s'ha fet servir com a senyal d'excitació el que prové del moviment transitori d'una inèrcia sobre el sistema. Tot i això, cal notar que l'àmbit d'aplicació del mètode proposat es pot estendre a sistemes vibratoris o oscil·lators elèctrics, de control o de qualsevol altre tipus, si aquests tenen un comportament lineal en el seu rang d'actuació i les equacions que els descriuen tenen els paràmetres constants.

El senyal de sortida o resposta del sistema, al actuar-hi un senyal d'excitació concret, s'ha valorat per mitjà de la mesura de la màxima amplitud de la vibració residual. En un sistema d'un grau de llibertat vibratori, aquesta amplitud es dona en percentatge respecte a la màxima amplitud de vibració residual que s'observaria si es fes servir un impuls com a senyal d'excitació. La magnitud de l'impuls ha de ser tal que ha de portar a la variable governada al mateix estat final –partint del mateix estat inicial– que el senyal d'excitació a avaluar. Per a sistemes de  $n$  graus de llibertat vibratoris, i en base a la teoria de la descomposició modal, la vibració residual s'ha caracteritzat de la mateixa manera per a cada un dels  $n$  sistemes d'un grau de llibertat vibratori desacoblats corresponents als modes propis.

### ***Mètode proposat***

El desenvolupament del nucli teòric del mètode proposat ha portat, en primer lloc, a establir una relació entre el contingut freqüencial d'un senyal d'excitació i la vibració residual generada en un sistema vibratori. S'ha demostrat que, en sistemes amb esmorteïment nul, no es produeix vibració residual si el contingut freqüencial del senyal d'excitació és nul a la freqüència pròpia del sistema  $f_0$ . Si el contingut freqüencial no és nul a aquesta freqüència, però és prou petit, la vibració residual també és petita. A partir d'aquesta relació, i atenent a les propietats de la Transformada de Fourier, el mètode genèric que s'ha definit consisteix en l'obtenció d'un senyal amb un contingut freqüencial nul a la freqüència  $f_0$  a partir de la convolució temporal de diversos senyals arbitraris on almenys un tingui un contingut freqüencial nul a aquesta freqüència.

Per a sistemes amb esmorteïment no nul, s'ha observat que la condició explicada no és estrictament certa. En la gran majoria d'aplicacions, però, les raons d'esmorteïment prenen valors petits, en general menors a 0,1, i això fa que la validesa del mètode tingui un abast considerable. Addicionalment, per a les lleis de moviment proposades en aquest treball, obtingudes a través de la convolució temporal de polsos, s'ha observat que l'eficàcia del mètode es pot estendre fins a raons d'esmorteïment de 0,3.

S'ha particularitzat el mètode amb la utilització, com a senyal patró, d'un pols temporal. En un sistema amb  $n$  modes propis de vibració, la síntesi de senyals es concreta en la convolució temporal de  $n$  polsos de durada  $1/f_i$ , essent  $f_i$  les corresponents freqüències pròpies del sistema. Per poder complir dos requeriments funcionals, s'ha definit una convolució temporal addicional amb un pols auxiliar. Aquestes condicions s'assoleixen per mitjà de la modificació en amplitud i/o durada del pols auxiliar.

Les possibles variacions dels paràmetres del sistema vibratori es poden traduir en variacions de les respectives freqüències pròpies. Per a aquelles freqüències on es desitja donar major robustesa al mètode, enlloc de fer servir un únic pols per a cada una, s'ha proposat la utilització de la convolució temporal de dos o més polsos repetits o de durada múltiple al primer. Això fa que l'espectre del senyal resultant tingui un major rang amb un contingut freqüencial proper a zero al voltant d'aquestes freqüències i, consegüentment, que el mètode sigui més robust. S'ha proposat una variant d'aquest procediment en què els continguts freqüencial nuls dels dos polsos es situen lleugerament per sobre i per sota de la freqüència desitjada, aconseguint així incrementar aquest rang, sense necessitat d'augmentar la durada de la llei resultant.

Atenent a la descripció genèrica del mètode proposat, s'ha descrit la seva possible extensió a la generació d'altres tipus de senyals a partir de senyals patró diferents al pols temporal. A tal efecte es proposa l'obtenció d'un senyal a partir de la convolució temporal de diversos senyals arbitraris. N'hi ha prou que un d'aquests tingui un contingut freqüencial nul a la freqüència pròpia del sistema per assegurar que el senyal resultant també compleix aquesta condició. Això permet obtenir senyals amb formes molt variades, formades per concatenació de polinomis o d'altres tipus de funcions, amb o sense simetria.

Les lleis temporals obtingudes per convolució temporal de polsos ofereixen els avantatges següents respecte a les generades amb altres mètodes: presenten major monotonia, cosa que evita no linealitats degudes a la regulació de l'alimentació o als jocs mecànics; presenten menor valor de pic, cosa que disminueix les potències requerides dels actuadors i de l'alimentació; són simètriques la qual cosa facilita el seu càlcul i l'establiment de requeriments funcionals; en molts casos, són escalables segons els dos eixos, cosa que facilita la generació de noves lleis sense necessitat de fer l'operació de convolució; són fàcilment implementables a través de corbes de Bézier i B-spline i, per tant, fàcilment implementables a través de càlcul numèric.

S'han descrit, també, les limitacions principals del mètode. En primer lloc, tal com s'ha dit, l'eficàcia del mètode està condicionada al fet que les raons d'esmoreïment siguin properes al valor nul, i s'ha establert un límit màxim de 0,3. També, la durada mínima d'una llei de moviment està acotada a la suma dels inversos de les freqüències pròpies  $f_i$  del sistema vibratori. Aquesta limitació condiciona altres requeriments funcionals, depenent de la llei emprada, com són el recorregut i el canvi de velocitat mínims. Finalment, en sistemes de diversos modes propis de vibració, s'ha observat la limitació de poder reduir selectivament el contingut freqüencial d'un sol mode propi. En general, la reducció de la resposta d'un mode propi també disminueix la resposta dels modes amb freqüències superiors.

La convolució temporal de polsos genera lleis temporals formades per trams concatenats de polinomis algebraics. S'han descrit els mètodes per sintetitzar-les a través de corbes de Bézier, no paramètriques i corbes B-spline, no paramètriques. De l'anàlisi d'aquests dos mètodes es conclou que el més adequat per a l'aplicació és l'esquema B-spline, ja que presenta els següents avantatges comparatius: la continuïtat en la unió entre dos trams consecutius queda automàticament garantida; es poden augmentar el nombre de punts de control de la corba sense augmentar-ne el grau; es té control local sobre la corba, i es poden canviar la posició de les abscisses dels punts de control.

Finalment, s'ha proposat un catàleg de corbes B-spline no paramètriques per a la reducció de vibracions en sistemes d'un i dos graus de llibertat vibratori, ja que es considera aquest un nombre suficient per a moltes aplicacions. Per als sistemes d'un sol mode propi, s'han descrit corbes per a la reducció simple i robusta. Per a sistemes de dos modes propis, s'ha considerat suficient la reducció simple, ja que per a aquests tipus de lleis de moviment el contingut freqüencial es fa molt petit per a freqüències superiors al primer mode. Per definir aquestes corbes s'han pres com a variables, la durada de la llei de moviment  $t_f$ , la freqüència pròpia  $f_0$  o freqüències pròpies  $f_0$  i  $f_1$ , i l'amplitud màxima  $A$ .

### ***Comprovació experimental***

En un pas previ a la comprovació experimental, s'ha descrit el procediment per fer una valoració aproximada de la capacitat que tenen els anomenats servomotors per seguir amb fidelitat un senyal de comandament desitjat pel que fa al seu comportament dinàmic, suposant que la seva potència és l'adequada per a l'aplicació. S'han inclòs, en aquest estudi, els motors més emprats en sistemes de control, que corresponen als motors de corrent continu i als motors de corrent altern trifàsics síncrons, ambdós d'imants permanents. Per valorar el límit superior d'aquesta capacitat, s'han fet servir les respostes freqüencials entre les variables corresponents d'entrada i sortida del motor girant en buit. En general, per a motors amb potències fins a 500 W, es conclou que els motors de corrent continu poden seguir senyals de comandament amb continguts freqüencials com a màxim –motor en buit– fins a 15 Hz per a motors amb nucli estàndard i fins a 30 Hz per a motors sense nucli (*coreless*). Pel que fa als motors de corrent altern, aquest rang pot augmentar fins a valors de 50 Hz.

Com a complement del desenvolupament teòric, s'ha comprovat la validesa del mètode a través d'uns assajos experimentals. A tal efecte s'ha dissenyat i construït un muntatge experimental que consta de tres rotors concèntrics, els moviments angulars dels quals determinen els tres graus de llibertat que té el sistema. Dos dels tres rotors són lliures, amb comportament vibratori gràcies a unes molles que els uneixen entre sí i a la bancada. L'altre rotor està governat per un sistema de control i correspon al rotor d'un motor de corrent continu.

En la posada a punt del muntatge, per mitja del disseny de les molles adequades, s'han fixat les freqüències dels dos modes propis de vibració a uns valors de 1,2 Hz i 3,4 Hz, els quals estan dintre del rang determinat per la capacitat de l'actuador que, en aquest cas, se situa al voltant de 9,1 Hz. S'han ajustat els paràmetres d'un model analític, a

través de les respostes freqüencials mesurades en el muntatge experimental, i s'han determinat les raons d'esmoreïment modals, de valor 0,012 per al primer mode propi i 0,013 per al segon. Es conclou, d'aquesta manera, que el banc experimental es vàlid per a la comprovació del mètode, ja que les raons d'esmoreïment modals involucrades són menors a 0,3.

Finalment, s'han dut a terme dues sèries d'assajos en els quals s'han provat diverses lleis de moviment, corresponents totes a moviments punt a punt del rotor del motor. Cada una d'aquestes sèries consta de l'assaig de tres tipus de lleis, equivalents funcionalment en el temps de durada  $t_f$  i l'angle recorregut pel rotor del motor  $\varphi_{\text{rel}}(t_f)$ . La mètrica que s'ha emprat per quantificar els resultat és el percentatge de vibració residual.

En cada sèrie s'ha provat una primera llei de moviment corresponent a un pols temporal, que excita amb amplituds importants els dos modes propis del muntatge experimental. Després, s'han generat dues lleis de moviment, segons el mètode desenvolupat. S'ha fixat com a objectiu per a la primera, la reducció de vibracions residuals corresponents al segon mode propi, i per a la segona, la reducció de vibracions residuals dels dos modes propis simultàniament. La comprovació experimental conclou amb notable validesa del nou mètode proposat, ja que en l'avaluació de la vibració residual s'han observat reduccions entre 13 i 20 vegades per al primer mode propi i entre 8 i 44 vegades per al segon.

## 8.2 APORTACIONS

Es presenten en aquest apartat les aportacions que es consideren més rellevants del treball desenvolupat.

- Definició de les tipologies principals en transitoris de moviment, amb els seus possibles requeriments funcionals.
- Descripció de la propietat dels senyals simètrics, en base a la qual, els senyals que tenen una mateixa durada i un mateix valor de la seva primera integral temporal també tenen el mateix valor de la segona integral temporal, i la seva utilitat a l'hora de fixar requeriments funcionals
- Descripció de la propietat dels senyals simètrics de tenir, amb major possibilitat, punts de contingut freqüencial nul en el seu espectre, i la seva utilitat en el mètode proposat per a la reducció de vibracions residuals.
- Caracterització de la vibració residual, en base a la descomposició modal, per a sistemes de diversos graus de llibertat vibratoris.
- Demostració de l'absència de vibració residual en sistemes vibratoris sense esmoreïment, quan el contingut freqüencial del senyal d'excitació és nul a les freqüències pròpies del sistema.
- Desenvolupament d'un mètode genèric que, partint de la propietat anterior, permet generar lleis temporals per reduir vibracions residuals per mitjà de la convolució temporal de senyals, vàlid per a sistemes amb diversos graus de llibertat vibratoris.

- Particularització del mètode en la generació de senyals constituïdes per trams concatenats de polinomis algebraics, partint de la convolució temporal de polsos, vàlid per a sistemes amb raons d'escorçament modals fins a 0,3.
- Síntesi de corbes, obtingudes per convolució temporal de polsos, per mitjà de corbes B-spline. Obtenció d'un catàleg vàlid per a la reducció de vibracions residuals en sistemes d'un i dos modes propis de vibració.

### **8.3 EXTENSIONS**

Es proposen en aquest apartat futures extensions i línies d'investigació que deriven de la present tesi.

- Utilització del mètode genèric proposat amb senyals patró trigonomètrics, per a l'obtenció de corbes implementables amb B-splines trigonomètrics.
- Investigació de la reducció de vibracions residuals en senyals de molt curta durada.
- Comparació de l'Espectre de resposta del transitori i la seva vibració residual, per a les lleis de moviment proposades en aquest estudi.
- Quantificació de la robustesa del mètode enfront de canvi de paràmetres del sistema vibratori.
- Quantificació de la robustesa del mètode enfront de no linealitats moderades del sistema vibratori.
- Comparació detallada del mètode proposat amb mètodes desenvolupats per altres autors.

Totes aquestes extensions es poden desenvolupar dintre de línies d'investigació de l'àrea d'Enginyeria Mecànica relacionades amb l'estudi del comportament dinàmic de les màquines.

## CAPÍTOL 9

### Bibliografia

1. Agulló, J., Cardona, S. (1992), *Anàlisi de senyals (I). Dominis d'amplitud i temporal*. Espanya: Edicions UPC.
2. Alberts, T.E., Hastings, G.G., Book, W.J., Dickerson, S.L. (1985), *Experiments in Optimal Control of a Flexible Arm with Passive Damping*. Fifth VPI&SU/AIAA Symposium on Dynamics and Control of Large Structures.
3. Asada, Haruhiko, Ma, Zeng-Dong, i Tokumaru, Hidekatsu, (1987), *Inverse Dynamics of Flexible Robot Arms of Trajectory Control*. Modeling and Control of Robotic Manipulators, ASME 1987 Winter Annual Meeting. Pàgines 329-336
4. Aspinwall, D.M. (1980), *Acceleration Profiles for Minimizing Residual Response*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME. Vol. 102, pàgines 3-6.
5. Bayo, E. (1988), *Computed Torque for the Position Control of Open-Chain Flexible Robots*. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Pàgines 316-321.
6. Baz, A., Inman, K. McCoy, J. (1990), *Active Vibration Control of Flexible Beams Using Shape Memory Actuators*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 140(3), pàgines 437-456.
7. Book, W.J., Cetinkunt, S. (1985), *Near Optimal Control of Flexible Robot Arms on Fixed Paths*. IEEE International Conference on Robotics and Automation.



8. Burdisso, R.A., Suarez, L.E., Fuller, C.R.(1992), *Adaptative Feedforward Control of Structures Subjected to Seismic Excitations*. First US/China/Japan Workshop on Structural Control.
9. Cannon, R.H., Schmitz, E. (1984), *Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One Link Robot*. The International Journal of Robotics Research. Vol. 3.
10. Cardona, S., Clos, D. (2000), *Teoria de Màquines*. Espanya: Edicions UPC.
11. Cardona, S., Jordi, Ll. (2003), *Vibracions Mecàniques: Problemes. Temes Monogràfics*. Espanya: Publicacions d'Abast S.L.L. UPC.
12. Carnicer, J.M., Peña, J.M. (1994), *Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of B-splines*. Computer Aided Geometric Design. (15), pp. 633-654.
13. Chen, C.S., Lee, A.C. (1998), *Design of Acceleration/Deceleration Profiles in Motion Control Based on Digital FIR Filters*. International Journal of Machine Tools and Manufacture, Vol. 38, Issue 7, pàgines 799-825.
14. Chen, F.Y. (1982), *Mechanics and Design of Cam Mechanisms*. Regne Unit: Pergamon Press.
15. Cogdell, J.R. (2002), *Fundamentos de Màquines Elèctriques*. Mèxic: Pearson Educación de México, S.A.
16. Crawley, E.F., de Luis, J. (1986), *Experimental Verification of Distributed Piezoelectric Actuators for use in Precision Space Structures*. Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.
17. Farin, G.E. (1997), *Curves and Surfaces for CAGD*. Estats Units d'Amèrica: Academic Press Inc.
18. Fuller, C.R., Elliott, S.J., Nelson, P.A. (1997), *Active Control of Vibration*. Regne Unit: Academic Press Limited.
19. Hollars, M.G., Cannon, R.H. (1986), *Experiments on the End-Point Control of a Two-Link Robot with Elastic Drives*. AIAA Paper 86-1977.
20. Hurricks, P.L. (1994), *Handbook of Electromechanical Product Design*. Regne Unit: Longman Scientific & Technical.
21. Hyde, J.M., Seering, W.P. (1991), *Using Input Command Pre-Shaping to Suppress Multiple Mode Vibration*. Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Pàgines 2604-2609.

22. Kissell, T.E. (2002), *Industrial Electronics: Applications for Programmable Controllers, Instrumentation and Process Control, and Electrical Machines and Motor Controls*. Estats Units d'Amèrica: Prentice Hall.
23. Kotnik, P.T., Yurkovich, S., Ozguner, U. (1988), *Acceleration Feedback for Control of a Flexible Manipulator Arm*. Journal of Robotic Systems, Vol. 5.
24. Lakshminarayana, K., Kumar, B.N. (1987), *A Note on Dwell-Cam Follower-Motion Synthesis*. Mechanisms and Machine Theory, Vol. 22 (1), pàgines 65-70.
25. MacCarthy, B.L. (1988), *Quintic Splines for Kinematic Design*. Computer Aided Design, Vol. 20 (7), pàgines 406-415.
26. Meckl, P.H., Seering, W.P. (1985) *Minimizing Residual Vibration for Point-to-Point Motion*. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 107, pàgines 378-382.
27. Neamtu, M., Pottmann, H., Schumaker, L.L. (1998), *Designing NURBS Cam Profiles Using Trigonometric Splines*. Journal of Mechanical Design. Vol. 120, pàgines 175-180.
28. Newland, D.E. (1993), *Random Vibration. Spectral and Wavelet Analysis. 3d Edition*. Regne Unit: Longman Scientific & Technical.
29. Norton R.L. (2002), *Cam Design and Manufacturing Handbook*. Estats Units d'Amèrica: Industrial Press, Inc.
30. Norton R.L. (2005), *Diseño de Maquinaria*. Mèxic: Mc Graw-Hill.
31. Oppenheim, A.V. i Schafer, R.W. (1975) *Digital Signal Processing*. Estats Units d'Amèrica: Prentice-Hall, Inc.
32. Parks, T.W., McClellan, J.H. (1972), *Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase*. IEEE Transactions on Circuit Theory.
33. Peláez, G., Peláez, G., Pérez, J.M., Vizán, A., Bautista, E. (2003), *Reducción de la Vibración Utilizando Diagramas en el Plano de Fase para Diseñar Ordenes de Movimiento Filtradas*. VI Congreso Ibero-Americano de Ingeniería Mecánica, Vol. 2, pàgines 1769-1774.
34. Plumb, J.M., Hubbard, J.E., Bailey, T. (1987), *Nonlinear Control of a Distributed System: Simulation and Experimental Results*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control Vol. 109.
35. Proakis, J.G., Manolakis, D.G. (1998), *Tratamiento Digital de Señales*. Regne Unit: Prentice Hall International Ltd.

36. Rao, S.S., (1995), *Mechanical Vibrations, 3d Edition*. Estats Units d'Amèrica: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
37. Ras, E. (1979) *Análisis de Fourier y Cálculo Operacional Aplicados a la Electrotecnia*. Espanya: Marcombo Boixareu Editores.
38. Reyes, G. (2000), *Técnicas de Diseño Geométrico Asistido por Ordenador para Mecanismos Leva-Palpador*. Espanya: Tesis Doctoral UPC.
39. Rothbart, H.A. (1956), *Cams, Design, Dynamics and Accuracy*. Estats Units d'Amèrica: Wiley.
40. Sánchez-Reyes, J., Reyes, G. (1998), *Polinomios Trigonométricos para la Síntesis de Mecanismos Leva-Palpador*. Anales de Ingeniería Mecánica. Any 11, Vol. 1, pàgines 450-455.
41. Sandgren, E., West, R.L. (1989), *Shape Optimization of Cam Profiles Using a B-spline Representation*. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pàgines 195-201.
42. Shigley, J.E., Uicker, J.J. (1988), *Teoria de Máquinas y Mecanismos*. Mèxic: McGraw-Hill.
43. Singer, N.C., Seering, W.P., Pasch, K.A. (1990), *Shaping Command Inputs to Minimize Unwanted Dynamics*. Patent número 4916635, Massachusetts Institute of Technology, Estats Units d'Amèrica .
44. Singer, N.C., Seering, W.P. (1990), *Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME. Vol. 112, pàgines 76-82.
45. Singh, T., Heppler, G.R. (1993), *Shaped Input Control of a System With Multiple Modes*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME. Vol. 115, pàgines 341-347.
46. Singhose, W.E., Seering, W.P., Singer, N.C. (1990), *Shaping Inputs to Reduce Vibration: A Vector Diagram Approach*. Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Pàgines 922-927.
47. Singhose, W.E., Seering, W.P., Singer, N.C. (1994-a), *Residual Vibration Reduction Using Vector Diagrams to Generate Shaped Inputs*. Journal of Mechanical Design. Transactions of the ASME. Vol. 116, pàgines 654-659.
48. Singhose, W.E., Seering, W.P., Singer, N.C. (1994-b), *Design and Implementation of Time-Optimal Negative Input Shapers*. ASME Winter Annual Meeting.

49. Singhose, W.E., Singer, N.C., Seering, W.P. (1995), *Comparison of Command Shaping Methods for Reducing Residual Vibration*. Proceedings of the 1995 European Control Conference. Pàgines 1126-1131.
50. Slemon, G.R., Straughen, A. (1980), *Electric Machines*. Estats Units d'Amèrica: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
51. Srinivasan, L.N., Ge, Q.J. (1998), *Designing Dynamically Compensated and Robust Cam Profiles with Bernstein-Bézier Harmonic Curves*. Journal of Mechanical Design. Transactions of the ASME. Vol. 120, pàgines 40-45.
52. Ting, K.L., Lee, N.L., i Brandman, G.H. (1990), *Bézier Motion Programs in Cam Design*. Proceedings of the 1990 ASME Mechanisms Conference, pàgines 141-148.
53. Tsay, D.M., Huey, C.O. (1988), *Cam Motion Synthesis Using Spline Functions*. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 110, pàgines 161-165.
54. Tsay, D.M., Huey, C.O. (1989), *Spline Functions Applied to the Synthesis and Analysis of Nonrigid Cam-Follower Systems*. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 561-569.
55. Tsay, D.M., Huey, C.O. (1993), *Application of Rational B-splines to the Synthesis of Cam Follower Motion Programs*. Journal of Mechanical Design. Transactions of the ASME, Vol. 115, pàgines 621-626.
56. Tsay, D.M., Lin, B.J. (1996), *Improving the Geometry Design Of Cylindrical Cams Using Nonparametric Rational B-splines*. Computer-Aided Design, Vol. 28 (1), pàgines 5-15.
57. Zdenek, K., Miroslav, V. (1993), *Cam Mechanisms*. Amsterdam: Elsevier Science Ltd.