Implícits filosòfics del convencionalisme en la geometria espaciotemporal

Treball de recerca presentat per Jaume Romero Ruiz
Director: Dr. Víctor Gómez Pin
Tutor: Dr. Josep Olesti Vila

Màster en Iniciació a la Recerca en Humanitats
Departament de Filosofia
Universitat de Girona
Febrer de 2011

Introducció

El 1998 el professor Gerhard Vollmer, en una conferència a Sant Sebastià amb motiu del III Congrés Internacional d'Ontologia es preguntava "Per què les matemàtiques s'ajusten a la naturalesa?"[1] Aquest és un interrogant que no només preocupa als científics d'aquesta disciplina sinó que estimula tots aquells que es meravellen de la capacitat de comprensió de la realitat que aporta la ciència contemporània. En efecte, les matemàtiques funcionen però no podem dir que s'hagi avançat gaire a l'hora d'explicar per què ho fan.

Tot fent un registre de les diverses propostes que s'han fet per explicar aquesta correspondència entre matemàtiques i món, veiem que, si bé hem pogut excloure'n alguna, queden encara problemes oberts i respostes per donar.

Les diverses propostes que trobem per a explicar aquest fet han de tenir present les teories que més èxit han mostrat en l'aplicació dels conceptes matemàtics i d'entre elles destaca la teoria de la relativitat. Aquesta teoria física ha estat un exemple excel·lent tant a nivell formal com en l'àmbit de la història de la ciència per mostrar com l'ajust entre les disciplines que descriuen la naturalesa i la matemàtica formal pot arribar a donar fruit. Aquest vincle, a més, ha propiciat aportacions en els dos sentits, atès que el supòsit que la natura es pot descriure amb eines matemàtiques ha permès la construcció d'una teoria com la relativista i ha enriquit el debat epistemològic associat i, que per altra banda, l'esmentada teoria ha afegit elements d'anàlisi en el paper de les disciplines matemàtiques implicades, particularment la geometria.

En filosofia, a més, aquest debat ha estat especialment ric. La relativitat ha aportat noves perspectives de caràcter epistemològic i sobre la capacitat de les teories de canviar la nostra perspectiva del món. A més, les implicacions ontològiques han estat considerables, en especial en relació a la naturalesa de l'espai i el temps.

Abans de l'aparició de la teoria relativista, el debat sobre la naturalesa del coneixement geomètric ja plantejava algunes qüestions particularment interessants en la relació entre matemàtiques i naturalesa. L'aparició de nous sistemes axiomàtics per a la geometria i la prova que la seva consistència era de la mateixa solidesa que l'antigament incontestable teoria euclidiana, va portar als matemàtics del segle XIX a demanar-se quina relació tenien aquestes noves visions espacials amb el món real. En aquest context podem trobar una reflexió que més endavant es va mostrar particularment enriquidora.

Es tracta de la idea que tot sistema geomètric consistent podia ser l'expressió de la realitat física si hom estava disposat a fer els ajustos necessaris en les entitats que el representaven. Això ens portava a la conclusió que la tria d'un sistema geomètric era, per tant, fruit de la conveniència. Així doncs, la descripció geomètrica del món es triava

[1] VOLLMER, G. "Why does mathematics fit nature? The problem of application." a GÓMEZ PIN (ed.) (2000) p.251-259

convencionalment i no ens aportava, de fet, cap coneixement sobre la veritable geometria de la naturalesa.

El que aquesta visió, coneguda per convencionalisme, ha aportat al debat filosòfic derivat de la teoria relativista ha estat extens. Nombrosos textos discuteixen fins a quin punt aquesta perspectiva té relació amb l'esperit de la teoria i quina vigència pot tenir encara, malgrat les novetats que s'han produït des de l'aparició d'aquesta tesi. Però a banda de l'aportació que fa la física contemporània al debat convencionalista és possible fer una reflexió en una direcció alternativa. Al cap i a la fi es tracta d'una perspectiva que relaciona la geometria i els fenòmens de manera que, a banda de les conclusions epistemològiques associades, també podem fer inferències de tipus ontològic. Entre d'altres ens podem preguntar si el convencionalisme fa cap mena d'afirmació en relació a l'existència contrastable d'una geometria física (és a dir, una geometria d'objectes reals que correspongui per tant a la descripció dels fenòmens i en conseqüència una afirmació sobre l'estructura i l'existència de determinats objectes físics). Encara més interessants resulten les conclusions que podem extreure en relació a l'estatut ontològic de les entitats matemàtiques. És a dir, si el convencionalisme ens condueix a l'escepticisme respecte la possibilitat de conèixer geomètricament el món real, quin lloc deixa a les entitats geomètriques?

Donat que la geometria és, probablement, la branca de les matemàtiques que sembla més intuïtivament vinculada al món dels fenòmens, les conseqüències en el debat ontològic de les entitats a què es refereix pot tenir un caràcter demarcador en el debat sobre la naturalesa dels conceptes matemàtics generals i per tant, en aquest sentit, l'obtenció de conclusions pot ser especialment útil o si més no, suggestiu. És sabut que existeix una tradició que defensa que «els conceptes geomètrics són producte de la idealització de les experiències físiques de l'espai»[2]. El convencionalisme, possiblement, afegiria que aquesta idealització no pren una forma necessària i que per tant els conceptes es limitarien a una tasca heurística, tot negant la possibilitat d'anar més enllà.

El convencionalisme presenta diferents versions i no s'ha restringit a l'àmbit exclusiu de la geometria. Això ha permès nombroses interpretacions i algunes imputacions excessives a la tesi que es va plantejar inicialment. Cal doncs, una formulació clara de la perspectiva que es fa servir per tal d'aclarir quines possibilitats té i què implica en l'àmbit filosòfic.

És clar que si entenem que es tracta d'un punt de vista "anàrquic" del coneixement o un resultat de tipus sociològic, l'establiment de la geometria per convenció comporta unes conseqüències que van més enllà del que es defensarà aquí.

Podem entendre per convencionalisme, en canvi, la consideració que hi ha determinats elements de les teories que resulten inaccessibles a l'experiència i que, per tant, no podem disposar d'una única descripció del món. El que veurem, doncs, seran les consideracions filosòfiques que deriven d'aquesta posició i les possibles vies de reflexió que apareixen.

[2] MACH (1960) p.94.

Els objectius de la present monografia són, en conseqüència, fonamentalment quatre. En primer lloc establir quina possibilitat té el convencionalisme de ser una alternativa a les concepcions realistes de la geometria relativista. Tal com veurem, si el vigor d'aquesta perspectiva és suficient cal un segon pas: assenyalar les implicacions epistemològiques que en deriven. Per fer-ho haurem de precisar, en tercer lloc, quin tipus de lectura de la hipòtesi inicial hem de fer donat que hi ha un cert marge per a l'ambigüitat i això ha permès diverses propostes. En darrer terme, en cas que hom accepti les restriccions que el convencionalisme imposa al nostre coneixement, hem de veure quines conclusions podem extreure en l'àmbit ontològic i fins a quin punt són significatives per a la discussió sobre la relació entre matemàtica i naturalesa.

Per a complir aquests objectius hom pot defugir la formalització matemàtica tant en l'exposició geomètrica com en la física. La majoria de textos relacionats fan una esplèndida tasca en aquest àmbit i és improbable que el present treball hi pugui afegir alguna cosa de profit. A més, en relació al debat que ens ocupa, el formalisme resulta certament interessant per al rigor de les nostres afirmacions, però sovint representa un obstacle per a la comprensió de les hipòtesis de partida de cadascun dels diversos punts de vista. En general, no té sentit posar en dubte la validesa de les conclusions extretes si acceptem les premisses dels seus ponents, de manera que, probablement, la diversitat de perspectives té l'origen en els pressupòsits inicials o en les restriccions que hom aplica a determinades afirmacions, però no en les inferències matemàtiques que estableix. Aquesta serà, per tant, la nostra tasca principal a l'hora de confrontar perspectives, malgrat que aprofundir en el debat serà complicat. Així doncs, la present monografia haurà de limitar-se a fer un repàs general de les opcions que podem trobar i dels arguments més rellevants que les suporten per tal d'establir, si això és possible, un estat de la qüestió en relació a les implicacions filosòfiques del convencionalisme geomètric espaciotemporal i la seva relació amb la teoria relativista.

I. El camí cap a la geometria no euclidiana

Si volem tenir present quins són els elements que intervenen en la controvèrsia convencionalista podem fer-ho per diferents camins. Podríem, per exemple, fer una exposició dels trets característics de la geometria i la visió que en té el convencionalisme més actual. Podem, per altra banda, fer-ne un repàs històric dels elements significatius en la discussió i tenir en compte els precedents i les raons per les quals van aparèixer. Això és el que farem a continuació.

1. El paper tradicional de la geometria i la recerca de la puresa formal

En primer lloc fora convenient tenir present quins són els elements que van portar al tractament habitual que el pensament occidental li ha donat a la geometria. Ha estat aquest, probablement, el que ha portat a la filosofia a tractar l'estatut ontològic de les entitats geomètriques com a quelcom a considerar. De fet, en l'origen dels sistemes filosòfics tan influents com el platònic trobem, sens dubte, aquest tipus de qüestions.

1.1. Els elements d'Euclides

Sense voler entrar en matisos historiogràfics podem dir que l'origen de la geometria a les grans cultures agrícoles del creixent fèrtil i de la vall del Nil té relació amb la seva aplicació pràctica. Així com l'aritmètica probablement neix de les necessitats provocades per estructures socials més complexes i els seus requeriments econòmics, podem dir que la geometria està lligada a l'explotació agrícola parcel·lada de terra i a la necessitat de conèixer i controlar la subdivisió dels territoris on aquestes civilitzacions altament organitzades s'establien.

Sabem també que l'ús que aquestes civilitzacions van donar a aquestes noves eines matemàtiques va derivar de manera natural a interessos propis del col·lectiu que les emprava, és a dir els sacerdots. Probablement, en el reforç de les seves tasques religioses i en la recerca d'elements de predicció i control devien trobar que la geometria una eina molt útil per a la catalogació del mapa celest, per exemple, o per a l'establiment d'un instrument tan fonamental com el calendari en base a indicadors amb comportament regular com són els cossos celests.

Els grecs no eren aliens a aquest tipus d'usos ni tampoc a les necessitats que les varen provocar però, com ja sabem, la seva nova manera de treballar els portà a fer un pas més en el procés d'abstracció de les entitats geomètriques.

Sabem que fins el període clàssic, matemàtics com els pitagòrics o Eudoxe van anar establint els elements fonamentals del model de treball matemàtic consolidant una de les eines més reeixides d'aquesta disciplina: la demostració.

Amb la contribució dels models lògics desenvolupats al període clàssic i hel·lenístic sabem que ja es donen els fonaments necessaris per a l'aparició, al voltant del

300 aC, del llibre de geometria per excel·lència, els *Elements* del matemàtic alexandrí Euclides.

Aquest llibre certament ha estat una aportació rellevant a la història de la ciència i destaca en el desenvolupament de la matemàtica per diverses raons. En primer lloc per la seva importància com a text. Ha estat un llibre llegit i utilitzat per a aprendre geometria durant molts segles de tal manera que els historiadors solen esmentar que no s'abandona el seu ús com a text educatiu fins el segle XIX.

En segon lloc, per la gran importància que com a model de coneixement deductiu ha tingut. En efecte, si Aristòtil establia a l'*Òrganon* com podíem fonamentar la veracitat de les nostres proposicions a partir de la deducció lògica des d'uns axiomes inicials[3], els *Elements* tenen la virtut de mostrar-ho de manera pràctica. Són l'exemple per excel·lència d'aquest model deductiu tant en la seva "potència" epistemològica com, tal com s'ha vist molt més tard, les seves limitacions.

El model que estableixen els elements ha estat durant molt de temps el suport diguem-ne "heurístic" per a la recerca de la fonamentació del coneixement més enllà de les aportacions empíriques. Al cap i a la fi, no semblava que la geometria, tal com fou fonamentada per Euclides, necessités res del món ni estigués vinculada a la capacitat sensorial dels homes.

L'estructura dels *Elements* és prou coneguda: partint d'un conjunt relativament petit d'afirmacions (5 postulats i 5 nocions comunes o axiomes) l'autor procedeix a extreure'n 13 llibres de proposicions matemàtiques amb l'ajut de la lògica demostrativa. El resultat és impressionant i el rigor amb què l'alexandrí procedeix és notable[4]. Donat el caràcter de la matemàtica grega aquests resultats es refereixen, sobretot, a la geometria sintètica (la que anomenem col·loquialment de "regla i compàs") i, per tant, l'àmbit de les afirmacions inicials també ho serà. En general no abunden les proposicions aritmètiques sinó que només hi ha els elements bàsics per al desenvolupament d'una geometria en dues i tres dimensions.

Així doncs, la certesa de les proposicions que es demostraran en els llibres següents es fonamentarà en l'estatut epistemològic dels enunciats inicials, els postulats i les nocions comunes. Cal esmentar, per altra banda, que els diferents llibres dels *Elements* comencen, al seu torn, amb un conjunt de definicions (al primer, per exemple, en trobem 23) que, si bé no mostren inicialment una rellevància especial des d'un punt de vista ontològic, la prendran més endavant.

El significat de les nocions comunes, que avui podríem considerar axiomes generals d'una "lògica de conjunts", és clar. En tant que eines de demostració han de ser enunciades de bon principi:

1. Coses iguals a una tercera són iguals entre si.
2. Iguals afegits a iguals resulten en coses iguals.
3. Iguals sostrets d'iguals resulten en coses iguals.
4. Figures coincidents són iguals entre si en tot els sentits.
5. El tot és més gran que qualsevol de les seves parts.

---

[3] *Segons Analítics*, I.

[4] Sabem, no obstant, que a la llum de la formalització contemporània en molts casos «la intuïció geomètrica el va trair», tal com diu S. Xambó tot recollint alguns exemples com ara el pressupòsit de l'axioma de continuïtat (Prop. 1) o la congruència de figures a partir de desplaçaments (Prop. 4). XAMBÓ (1983) p.69.

Els postulats, per la seva banda, tenen un significat més específic. Són també afirmacions de caràcter axiomàtic, en principi evidents, amb un significat geomètric:

1. Dos punts determinen una recta
2. Una recta pot ser estesa indefinidament en qualsevol direcció
3. Es pot construir una circumferència centrada en qualsevol punt amb qualsevol radi donat
4. Tots els angles rectes són iguals
5. Si una recta en incidir sobre dues altres rectes ho fa amb els angles interns en el mateix costat sumant un total menor a dos rectes, aleshores les dues rectes esteses indefinidament es trobaran en el costat dels angles esmentats.[5]

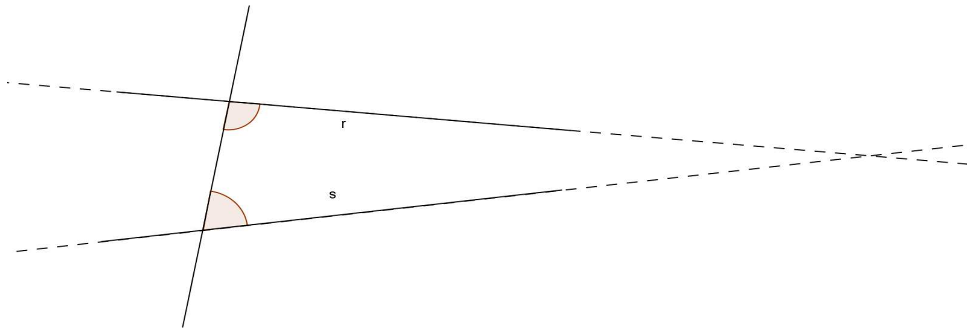

Figura 1. Les rectes *r* i *s* determinen angles que sumen menys de 180º i per tant s'han de tallar a un punt.

Tal com estableix Aristòtil, si el sistema ha de subministrar certesa el punt de partida que constitueix els axiomes ha d'estar fonamentat en l'evidència. En efecte, donat que el valor de veritat de les proposicions depèn del valor dels axiomes cal que aquests siguin certs més enllà de tot dubte. I això al marge del coneixement empíric, sotmès a les limitacions dels sentits.

El sistema d'axiomes que Euclides proposa sembla, certament, complir aquest requeriment. Si ens parem a pensar en la seva certesa, sembla indubtable. Però ja en un primer moment semblava que aquest sistema no acabava de complir amb la seva funció.

Per una banda, aquest conjunt d'axiomes semblava insuficient per a fonamentar el conjunt de coneixements que els grecs tenien en l'època dels *Elements*. Això deixa fora de la justificació deductiva àrees tan importants de la matemàtica a l'antiguitat com algunes de les aportacions d'Eudoxe o les posteriors d'Arquímedes relacionades amb el mètode d' exhaustió. Per aquest tipus de construccions matemàtiques caldria un altre conjunt d'axiomes que, no obstant, no suposaria pas un problema per a la validesa de la matemàtica euclidiana.

Per altra banda els axiomes tenen algunes mancances que resten rigor al text però que resulten fàcilment corregibles. Així per exemple, no es pot deduir el supòsit, que es fa servir sovint al llibre III, que tota recta que passa pel centre d'una circumferència talla

[5] La formulació "clàssica" d'aquest postulat que es coneix amb el nom d'axioma de Playfair, és molt posterior però resulta molt més comprensible: " Donat un punt exterior a una recta només existeix una recta paral·lela (que no talla) a la primera". L'equivalència entre els dos enunciats no és difícil de veure però cal assenyalar que no és l'únic enunciat equivalent que podem trobar.

aquesta per dos punts. Malgrat ser cert no és deduïble i per tant la solució consistiria a ampliar el conjunt de premisses afegint aquest darrer supòsit[6].

Però el problema més greu que planteja el sistema axiomàtic d'Euclides és molt més conegut i ha tingut una història molt més interessant. En efecte, les conseqüències que deriven de la dubtosa certesa del 5è postulat han estat molt més fèrtils per al desenvolupament matemàtic, tal com veurem.

Des de bon principi trobem una certa prevenció per part del matemàtic alexandrí a l'hora de fer servir l'esmentat postulat. És per això que es va endarrerint l'ús demostratiu del postulat fins que no es pot ajornar més, podríem dir que a la proposició I, 27.

És ben conegut que el 5è postulat, combinat amb la definició 23[7] del mateix llibre constitueix el conegut "postulat de les paral·leles" on s'estableix el caràcter "pla" de la geometria dels *Elements*. És també un enunciat essencial en la demostració de proposicions interessants com poden ser:

Proposicions 27 a 29. Dues rectes són paral·leles si i només si existeix una transversal que fa amb elles angles interns alterns iguals.

Proposició 30. La relació de paral·lelisme és transitiva: dues paral·leles a una tercera ho són entre si.

Proposició 31. Construcció d'una recta paral·lela a una donada per un punt donat. (Axioma de Playfair)

Proposició 32. Els angles interns d'un triangle sumen dos rectes (180°).

Proposicions 47 i 48. Teorema de Pitàgores i recíproc .

És possible demostrar que algunes de les proposicions esmentades, com per exemple la 31 o la 32, són mútuament consistents amb el postulat 5è. Així doncs, podríem construir un sistema axiomàtic equivalent substituint l'esmentat axioma per la proposició corresponent de manera que el postulat passaria a ser-ne una proposició.

Malgrat els dubtes, el model axiomàtic dels *Elements* va tenir una importància enorme no només com a patró formal del que seria la recerca matemàtica posterior sinó també com a mostra d'un coneixement cert més enllà del món físic. L'existència d'una teoria purament formal que sense obtenir informació dels fenòmens ens aportava tota mena d'informació rellevant i, sobretot, *veritable* constituïa un punt de partida per multitud de posicions epistemològiques, des del platonisme fins el racionalisme o el idealisme kantià. Per tant era indispensable una "depuració" formal d'aquesta construcció teòrica que constituïa la geometria euclidiana.

1.2. Tot buscant la demostració del 5è postulat

Ni Euclides ni els seus comentadors van dubtar mai de la certesa del postulat de les paral·leles però ben aviat van començar a posar en qüestió el seu caràcter d'axioma de

[6] Podem trobar altres exemples a molts d'estudis històrics sobre la geometria no euclidiana. Serveixi com a petit recull l'article del professor Sebastià Xambó on s'esmenten algunes d'aquestes mancances. XAMBÓ (1983) p.69.

L'axiomatització que portà a terme a les darreries del s.XIX ja es va encarregar de corregir aquestes mancances. Trobem, per exemple, el sistema proposat per David Hilbert l'any 1899 que amb un conjunt més gran d'axiomes estableix una bases rigoroses per a la geometria. HILBERT (1971)

[7] Definició I, 23: *Rectes paral·leles són aquelles que, estant en un mateix pla, per més que se les allargui en ambdós sentits mai es troben.*

manera que només quedava la possibilitat que es pogués demostrar, ja sigui partint dels altres postulats o bé "derivant-lo" de la definició de recta paral·lela.

Les definicions juguen un paper força rellevant en aquesta història de manera que els primers esforços per demostrar el postulat de les paral·leles es feren precisament en base al concepte de recta. Podria ser que fos una conseqüència elemental d'aquest concepte?

Al *Elements* trobem la següent definició de recta només començar:

> **Definició 4**. Una recta és una línia que esdevé igual respecte de tots els seus punts.

Com veiem no resulta gens satisfactòria i resulta poc operativa per a la tasca que es proposaven. No ens ha d'estranyar, donat que es tracta d'un concepte *primitiu*[8] i per tant sense possibilitat de definir-lo apropiadament. Tot i així el primer que es va provar de fer va ser buscar una definició amb un significat més ple que permetés mostrar la certesa del postulat de les paral·leles.

Si fem una repàs de les diferents formulacions que podem trobar veurem que apareixen conceptes que no són pròpiament matemàtics però que posteriorment prendran una rellevància especial[9]. Procle (410-485) en fa un recull[10]:

- Recte és allò que té el seu [punt] mig entre ambdós extrems (Plató).
- Una línia estirada la màxim.
- Una corba tal que no pot haver part en un pla i part per sobre d'ell. (Elements, Proposició XI, I).
- Totes les seves parts encaixen per igual (en tots els sentits).
- Una línia que quan els seus extrems són fixes tota la línia roman fixa.

Més tard podrem trobar d'altres com :

- Totes les seves parts són similars (Galileu).
- Una línia que divideix un pla en dues meitats iguals excepte en la seva posició. (Leibniz)
- Una línia que ocupa una distància igual a la que separa els punts que hi són inclosos. (Legendre)

Resulta especialment interessant la definició donada per Plató perquè és útil malgrat estar fonamentada en aspectes òptics i per tant empírics. Podríem dir que la línia recta, segons Plató, és la que descriu el raig de llum "en el buit". Els esforços per mantenir els fonaments empírics fora de la definició són, probablement, els responsables de la poca claredat de la majoria de les altres definicions.

[8] Per construir una teoria matemàtica cal, de la mateixa manera que fem servir axiomes, establir objectes conceptuals que no tenen més significat que el que la pròpia estructura els proporciona. Només a través de la interpretació que puguem fer en usar aquesta teoria com a *model* d'un determinat conjunt de fenòmens podrien tenir aquests objectes una significació real. Aquests objectes tenen una estreta relació amb el que Reichenbach anomena "definicions coordinatives" que «donen un significat objectiu als mesuraments físics». REICHENBACH (1957) p.37.

[9] Hi ha un estudi d'aquestes definicions fet per Sir Thomas Heath força complet a EUCLIDES (1956) p. 165-169.

[10] EUCLIDES (1952) p.165-169.

La recerca d'una definició que proporcionés una demostració del postulat no es limitava a la recta. També es va provar de reformular el concepte de paral·lela per tal d'obtenir algun de més instrumental. Així, a la definició donada per Euclides podem afegir les de Posidoni (s. I aC) o Procle que fan referència a la distància entre rectes. El primer defineix com a paral·leles dues rectes coplanàries que són *equidistants*. Procle assenyala, però, que ja es coneixen casos de línies *asimptòtiques*, és a dir que no es tallen mai (complint així la definició d'Euclides), però que no mantenen la distància. Per tant optarà per un supòsit menys fort que el de Posidoni i postularà que dues rectes són paral·leles si la distància entre elles és acotada. D'aquí es podrà deduir el postulat d'Euclides com si fos un lema mostrant-nos així que la hipòtesis de la distància acotada és lògicament equivalent al 5è postulat[11].

Podem constatar, ja, dues coses. Primer, que els intents de demostració del postulat a partir d'altres proposicions o hipòtesis mostren que hi ha una consistència mútua entre els conceptes de recta, distància i de paral·lelisme. Aquest fet quedarà ben establert al final del procés històric de desenvolupament de les geometries no euclidianes, tal com veurem. Segon, que si volem sortir d'aquesta definició circular cal que establim algun dels conceptes anteriors com a primitius i que, en tot cas, mirem de fonamentar-los per al seu ús instrumental en àrees externes a la geometria com pot ser el món físic.

La recerca d'una fonamentació formal de la geometria euclidiana fa un tomb important ben entrada l'edat moderna. Les aportacions de John Wallis (1616-1703), Gerolamo Saccheri (1667-1733), i de Johann H. Lambert (1728-1777), entre molts altres, orientaran la fonamentació geomètrica per un nou camí.

Wallis, per exemple, constatarà al seu *De postulatio Quinto*; *et Definizione Quinta, Lib.6 Euclidis; discrepatio geometrica* (1693) que la propietat de semblança entre figures de diferent mida com serien, per exemple, els triangles, només queda garantida en cas que s'accepti el 5è postulat.

Saccheri optarà al seu *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) i abans a *Logica demonstrativa* (1697) per una tècnica força habitual en matemàtiques, la *reducció a l'absurd*. És a dir, partint de la hipòtesi que el 5è postulat és fals provarà d'arribar a alguna proposició contradictòria amb la resta de les 26 proposicions del primer llibre, la demostració de les quals és independent de la condició de paral·lelisme

Al llarg del seu treball podrem constatar altres condicions implícites en el text d'Euclides que també tindran rellevància en la recerca formal. Així, entre d'altres, trobem que als *Elements* s'assumeix que una línia recta és infinita (Llibre I, prop. 16, per exemple) o la hipòtesi de la continuïtat de la recta (tota recta que s'estén de longitud *a* a longitud *b* ha de passar forçosament per qualsevol longitud intermitja). Si bé aquest tipus de pressupòsits semblen del tot naturals i, malgrat no ser explícits, "provats" cal tenir-los presents a l'hora d'entendre per què els models geomètrics posteriors no ens condueixen a la contradicció buscada per Saccheri.

Sigui com sigui la figura fonamental del seu treball, que evoca la proposició 32 sobre la suma interna dels angles d'un triangle, és la del quadrilàter

[11] Per una informació més detallada de tots elements històrics en relació al 5è postulat, tant els mostrats ara com els que veurem a continuació, podem consultar BONOLA (1955) p. 15-44.

isòsceles amb dos angles rectes consecutius (anomenem-los *A* i *B*) i dos costats oposats iguals (*AC* i *BD*). Es pot provar fàcilment que els angles restants (és a dir *D* i *C*) són iguals.

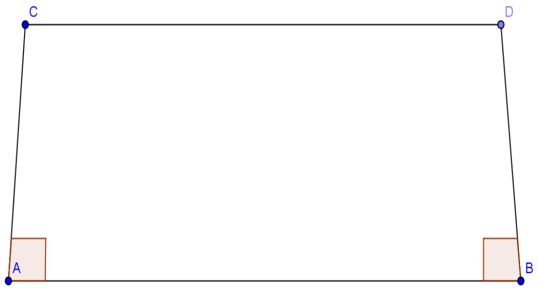

Figura 2. Si els dos angles, *A* i *B*, són rectes i els costats corresponents són iguals aleshores *C* i *D* són angles iguals.

Si acceptem la hipòtesi euclidiana clarament aquests, a més, han de ser angles rectes. Podem, per tant, procedir per reducció a l'absurd i suposar que *C* i *D* són angles aguts o bé obtusos. En tots dos casos estem negant el 5è postulat i per tant hauríem d'arribar a una contradicció.

Saccheri procedeix, a partir d'aquest punt, per camins diferents. La Hipòtesi dels Angles Aguts (HAA) ens conduirà, per exemple, a constatar que no hi ha unicitat de les paral·leles (enteses com a rectes que no es tallen) que passen per un punt exterior. Per altra banda la Hipòtesi dels Angles Obtusos (HAO) ens portarà, aquest cop sembla que si, a una contradicció si acceptem la necessitat que una recta tingui longitud infinita[12].

No resulta excessivament difícil obtenir un equivalent triangular d'aquestes hipòtesis a partir d'algunes de les proposicions associades que trobem als *Elements*. Així, per exemple, tot acceptant la HAA podem obtenir que la suma dels angles interns d'un triangle és menor a dos angles rectes (<180º) i en el cas de la HAO es tractaria d'una suma superior als 180º

1.3. L'aparició de les geometries no euclidianes

De fet, la HAO ja es complia en un model que no es considerava pertinent per a la demostració euclidiana però que ja era desenvolupat a mitjans del segle XVIII: la geometria esfèrica.

En aquest model ja trobem alguns dels resultats que, en l'afany per trobar contradiccions, s'obtenia d'un sistema axiomàtic construït sobre la negació del postulat de les paral·leles. En efecte, a la geometria esfèrica les rectes no són infinites (però si extensibles tant com es vulgui). A més, els angles interns d'un triangle superen els dos rectes i es dóna el fet que no hi ha, per exemple, semblança de triangles a partir dels seus angles. Aquest darrer, la semblança entre triangles, és un resultat que només es pot donar si es compleixen els postulats euclidians. Tal com podem veure a la figura 3 el polígon

[12] És important diferenciar-la de la possibilitat d'extendre una recta tant com es vulgui donat que si les característiques topològiques ho permeten (com és el cas de l'esfera) això no és incompatible.

ABC, delimitat per 'rectes esfèriques' és un triangle. La figura *A'B'C* tot i tenir els mateixos angles no és, en canvi, un triangle, en no estar delimitat per rectes, i per tant no obeeix als criteris de semblança. Inversament, podríem traçar un triangle amb costats proporcionals a l'original i aquest cop no obtindríem els mateixos angles.

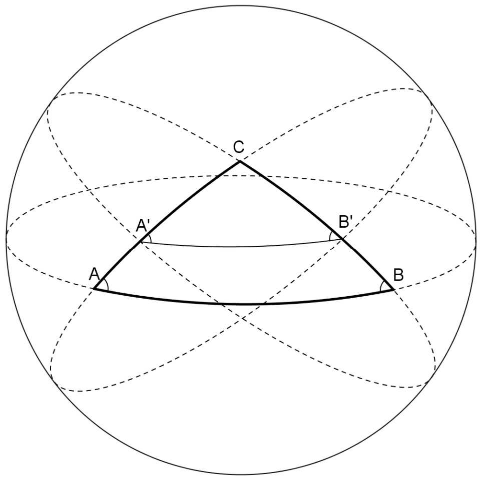

Figura 3. Les rectes (geodèsiques) d'una esfera són les circumferència majors, és a dir el resultat de tallar l'esfera amb un pla que passi pel centre. Així doncs ABC és un triangle però A'B'C no.

L'existència d'un model com aquest hauria d'haver proporcionat als continuadors de Saccheri una prova que la inconsistència buscada era impossible però cal tenir present que la geometria esfèrica semblava més aviat *una altra cosa*. A banda del postulat de les paral·leles, les geodèsiques incomplien una lectura implícita del segon postulat (l'esmentada longitud infinita de les rectes). A més les "rectes esfèriques" tampoc satisfeien una altra condició intuïtiva, la impossibilitat de tancar una àrea només amb dues rectes.

Com podem veure, la introducció de superfícies com a models heurístics també tindrà la seva importància, i és en aquesta línia que podem esmentar la contribució de Lambert a l'estudi crític que fa de l'obra de Saccheri a *Theorie der Parallellinien* (1766). Entre les seves aportacions cal esmentar la idea que el caràcter relatiu de les mesures de longitud només es dóna en la geometria ordinària. Els angles tenen una magnitud absoluta donat que en podem determinar un amb significat no convencional: el gir complet. En canvi les rectes, en principi, només poden tenir un valor determinat a partir d'una mesura patró que té caràcter arbitrari. Podem dir quants metres fa un segment perquè hem establert, de manera convencional, quant val un metre. Però en el cas d'una geometria construïda sobre les hipòtesis alternatives, donat que no és possible construir triangles semblants, tenim que cada angle té associat un, i només un, triangle equilàter, amb la corresponent longitud lateral. És a dir, tant en el cas de la geometria construïda sobre la HAA com la associada a la HAO podem trobar una *mesura privilegiada*. Donat un angle, podem obtenir una distància.

D'aquí també tenim una relació entre angle i àrea determinada, també, pel triangle. I, encara més, una relació entre l'àrea d'un triangle qualsevol i la suma dels seus angles.

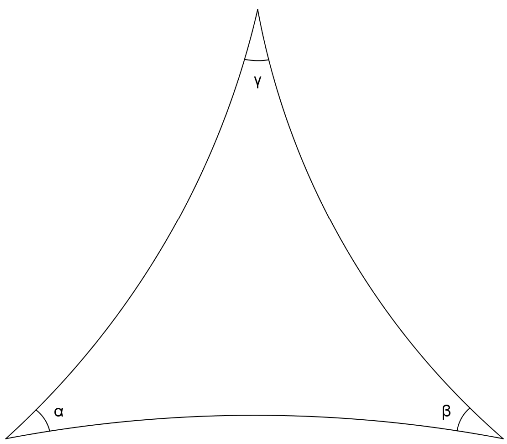

Figura 4. En el cas d'una geometria que complís la HAA tindríem que $A= K(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$. Si aquest triangle es representés sobre una superfície, K seria un valor relacionat amb la "curvatura" de la mateixa. En el cas de la geometria esfèrica, que ens pot servir com a model de la HAO, aquest resultat és encara més fàcil de visualitzar

Podem veure, per tant, que la desitjada incongruència entre proposicions de la geometria no arribava sinó era a través de pressupòsits implícits en el model geomètric. De fet, el pes de la modelització geomètrica resulta palès en fer una revisió històrica de la recerca d'una demostració de la veracitat de la geometria euclidiana. Calia, doncs, que d'alguna manera els matemàtics es poguessin deslligar d'aquests models per tal d'acceptar la possibilitat de les alternatives que ells mateixos havien plantejat. Per fer això, era necessari un nou punt de vista.

La recerca de la demostració del postulat de les paral·leles finalitzarà amb l'obra de dos joves, Nikolai Ivànovitx Lobatxevski (1793-1856) i János Bolyai (1802-1860) que gairebé simultàniament publicaran sengles tractats[13] sobre una geometria que obeïa els postulats de la HAA.

Si bé la motivació inicial dels treballs era similar a la de Saccheri, la recerca d'una contradicció, en desenvolupar la hipòtesi de partida (la de l'angle agut) s'obté un nou tipus de geometria que avui coneixem amb el nom de *geometria hiperbòlica*.

En aquesta geometria una paral·lela ja no és l'única recta que no talla una altra donada tot passant per un punt sinó que només és la recta que constitueix el cas límit entre les rectes que tallen i les que no.

[13] L'obra de Lobatxevski, que fa les seves primeres passes en aquest camp el 1830, la podem trobar compilada al seu *Geometrische Untersuchungen zur Theories der Parallellinien* (1840) que figura traduït a l'anglès com apèndix a BONOLA (1955). Igualment hi figura l'obra de Bolyai, de títol molt més extens, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsatis quadratura circuli geometrica*. Va aparèixer com a apèndix a una obra del pare, Farkas Bolyai, el 1832.

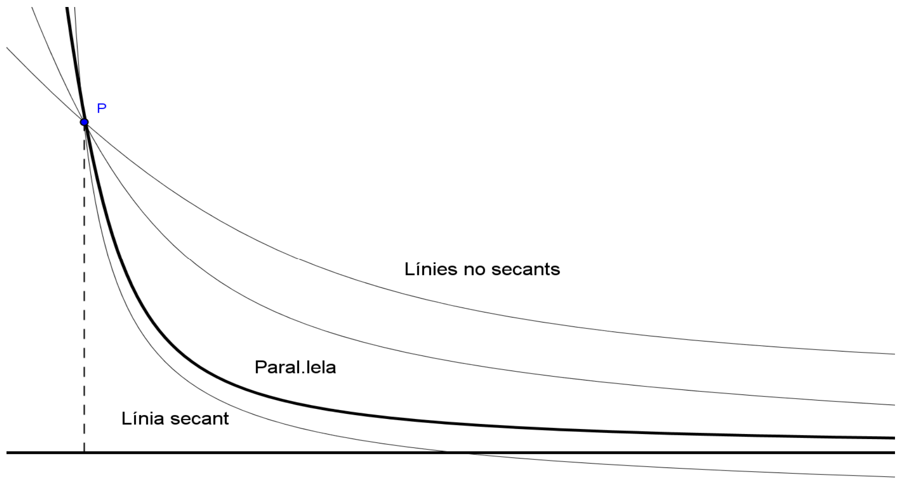

Figura 5. Tal com podem veure, la geometria hiperbòlica considera que hi ha tot un feix de rectes que no tallen la recta inferior tot i passar pel punt P.

Un cop s'ha acceptat aquesta alternativa, doncs, les propietats contràries a la intuïció es multipliquen. Així per exemple, trobem que resultats tan acceptats com el fet que tres punts no alineats determinen una circumferència ja no són certs. Altres proposicions d'aquest estil són:

- Per un punt exterior a una recta hi passen infinites rectes no secants.
- La suma dels angles interiors d'un triangle és menor de 180º. Si l'àrea del triangle s'acosta a 0, la suma dels angles tendeix cap a 180º. Tots els triangles tenen, a més, àrea acotada i si el triangle s'acosta al valor màxim per a l'àrea la suma dels angles interiors s'acosta a 0.
- La raó entre la longitud d'una circumferència i el seu radi és més gran que el valor euclidià (2π).
- No existeixen figures semblants d'àrees diferents (entenent figures semblants com aquelles on els costats mantenen una proporció).
- Les línies rectes són extensibles tan com es vulgui i de longitud infinita.

Tal com podem visualitzar al model esfèric mostrat abans, si desenvolupem una geometria fonamentada en la HAO obtenim, també, resultats que són si més no, igual d'inusuals:

- Per un punt exterior a una recta no hi passa cap recta paral·lela (totes la tallen).
- La suma dels angles interiors d'un triangle és més gran de 180º. Si l'àrea del triangle s'acosta a 0, la suma dels angles tendeix cap a 180º. Tots els triangles tenen, a més, àrea acotada i si el triangle s'acosta al valor màxim per a l'àrea la suma dels angles interiors s'acosta al triple (540º).
- La raó entre la longitud d'una circumferència i el seu radi és més petit que el valor euclidià (2π).
- No existeixen figures semblants d'àrees diferents.
- Les línies rectes són extensibles tant com es vulgui però tenen la mateixa longitud finita.

Les aportacions dels geòmetres esmentats, a més, inclouen una demostració de la solidesa d'aquestes teories. Si més no, una prova de consistència mútua. Lobatxevski, per exemple, ens proporciona un isomorfisme amb la geometria euclidiana de manera que podem dir que la geometria hiperbòlica que ell proposa té *la mateixa consistència que la geometria convencional*.

Per tant, podem donar per desmantellat el programa de Saccheri i considerar provat que és impossible deduir la certesa del postulat de les paral·leles per reducció a l'absurd. Si la buscada contradicció es donés, també es produiria en la teoria euclidiana i per tant tot el sistema geomètric ho patiria.

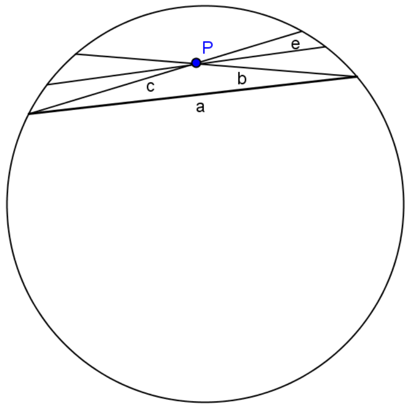

Figura 6. Al model de Lobatxevski (o el de Beltrami-Klein) per al pla hiperbòlic, representat per l'*interior* d'un disc, les rectes són cordes de la circumferència. Tal com podem veure cap de les rectes *c*, *b* i *e* tallen la recta donada *a* tot i passar pel punt *P*. La mesura de distàncies, però, és més complexa, donat que no podem fer com al model esfèric i aprofitar la *immersió* de l'esfera en l'espai per calcular-les.[14] En conseqüència, la perpendicularitat entre rectes també es complica.

La relació que s'estableix entre els axiomes i les conseqüències esmentades no va ser clara fins que el 1899 David Hilbert (1862-1943) va establir el que sembla el conjunt definitiu d'axiomes geomètrics. Malgrat que a les acaballes del s. XIX la geometria ja s'havia transformat a través de la branca analítica, la feina de Hilbert, lligada a l'estudi dels sistemes axiomàtics i la seva fonamentació formal, li va permetre d'oferir una classificació de la geometria que té ambició de ser definitiva[15].

Hilbert divideix els axiomes en cinc grups amb un nombre variable d'axiomes. Vegem-ne una tria:

I. Axiomes d'Incidència (set axiomes)
- Donats dos punts, *A* i *B*, hi ha una, i només una, recta que els conté.

....

II. Axiomes d'Ordre (cinc)
- Si *A*, *B* i *C* són punts alineats i *B* està entre *A* i *C*, aleshores *B* també està entre *C* i *A*.

....

III. Axiomes de Congruència (sis)
- Si *A* i *B* són punts d'una recta, i *A'* és un punt d'una recta qualsevol, *a'*, aleshores donat un costat d'*A'* sobre la recta *a'* hi ha un únic punt, *B'*, tal que el segment *A'B'* és congruent amb el segment *AB*.

....

[14] Per una explicació més detallada però resumida i assequible veure SKLAR (1977) p. 23-25 o HILBERT (1952) p. 243-247.

[15] HILBERT (1971) p. 3-4.

IV. Axioma de Continuïtat

- Sigui A un punt qualsevol sobre una recta determinada per A i un altre punt B. Si triem una successió de punts A_1, A_2,etc. tal que A_1 és entre A i A_2, A_2 entre A_1 i A_3, etc. i els segments $A A_1$, $A_1 A_2$, etc. són congruents aleshores existeix un A_n tal que B està entre A i A_n

V. Axioma de Paral·lelisme

- En un pla, donada una recta només es pot fer passar una, i només una, recta que passi per un punt exterior a la recta donada i no la talli.

Alguns d'aquests axiomes són simples refinaments dels d'Euclides. D'altres, com el de Continuïtat, són afegits per a fer-ne un sistema complet (recordem que no tota la geometria que es coneixia estava axiomatitzada als *Elements*, ni tot el que es feia servir a les demostracions s'havia postulat als axiomes). També cal dir que per Hilbert no calen definicions perquè es tracta de *termes primitius*. Les definicions només serveixen per a que nous termes prenguin sentit a partir dels bàsics de manera que té més aviat un sentit de "contracció" del significat.

En el cas de l'axioma de les paral·leles podem substituir-lo per una de les dues formulacions alternatives (passa més d'una recta, no passa cap recta) i obtindrem respectivament la *geometria hiperbòlica* o l'anomenada *geometria el·líptica* (generalització del model esfèric).

Agrupar els axiomes per blocs també juga un paper rellevant. Si volem construir una geometria amb un conjunt de resultats d'abast més ampli només cal que deixem de banda un grup d'axiomes (no qualsevol, però). Aquest és el cas de la geometria absoluta, que es fonamenta en tots els anteriors excepte el de les paral·leles (ni cap de les seves negacions alternatives). Les proposicions de la geometria absoluta són vàlides per qualsevol geometria que inclogui els seus axiomes i per tant també ho són per l'euclidiana. Malgrat això, la independència dels axiomes no és tan gran com per què, en determinats casos, no es donin comportaments estranys en les proposicions derivades d'algunes tries[16].

1.4. El semiplà de Poincaré

Dels diversos models que podem trobar de geometria hiperbòlica resulta interessant, i útil per a entendre alguns dels elements que veurem a continuació, l'anomenat *semiplà de Poincaré*. Si bé trobem altres models també molt coneguts com el de Lobatxevski (o Beltrami-Klein) o l'anomenat *model de Poincaré* també sobre un disc similar (però amb unes rectes força diferents), tal com ens mostra Hilbert[17], la més coneguda és la següent representació feta sobre un semiplà

Prenem un semiplà, amb les coordenades cartesianes habituals, de manera que l'ordenada només sigui positiva ($y>0$). Donat que l'estem representat en el pla euclidià farem servir els conceptes habituals per a referir-nos a les noves rectes, angles, etc. Així,

[16] SKLAR (1977) p. 27, ens dóna un exemple amb una tria sense l'axioma de continuïtat.
[17] HILBERT (1952) p. 256-259.

una recta serà la semicircumferència centrada sobre l'eix d'abscisses ($y=0$) o bé el cas límit que és una recta perpendicular.

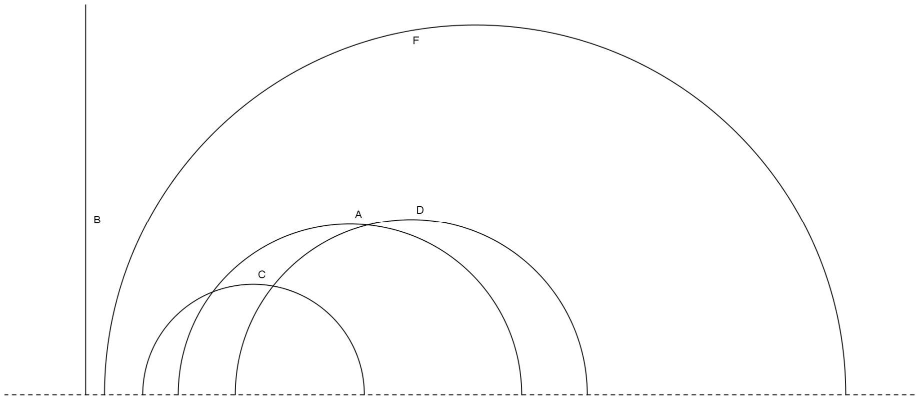

Figura 7. *A, B, C, D* i *F* són rectes hiperbòliques. *A, B,* i *D* es tallen i per tant defineixen un triangle mentre que la resta en són paral·leles.

Els angles que formen les rectes els podem obtenir mesurant els euclidians de les seves tangents. Així no resultaria gaire difícil constatar que el triangle format per les rectes *A*, *C* i *D* de la figura compleixen clarament la proposició corresponent del desenvolupament de la geometria hiperbòlica que afirmava que la suma dels angles interiors és inferior a 180º (a la representació aproximadament 170°). De la mateixa manera podríem comprovar que la resta de proposicions de la geometria no euclidiana s'ajusten al model sense problema. Per exemple, tal com esmentàvem, una geometria hiperbòlica té el que s'anomena una mesura privilegiada. Això és la capacitat de definir una distància més enllà de la convenció. Des de bon principi sabem que els angles tenen aquesta propietat donat que un angle recte té un estatut més absolut que no pas una mesura de distància. Aquest fet, però, en el cas de les geometries hiperbòliques es transmet a les longituds.

Per fer-ho cal veure que donada una recta i un punt exterior existeix una altra recta que passa pel punt que fa de límit entre les que no tallen i les que si ho fan. Aquesta recta (de fet n'hi ha dos) acostuma a ser la que rep el nom de paral·lela, pròpiament, i *depèn de la distància entre el punt i la recta donada*. En concret, l'angle que formen la recta paral·lela i la perpendicular a la donada depèn de la distància del punt a la recta.

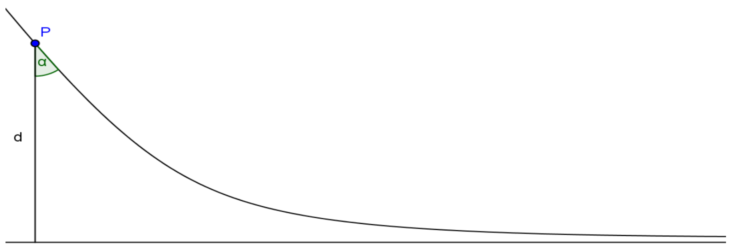

Figura 8. L'angle α està determinat per la distància *d*. Així, si volem que les distàncies participin del caràcter absolut dels angles, només cal que triem la longitud corresponent a un angle decidit prèviament, com podria ser 45°. Aquesta propietat és comú a totes les geometries hiperbòliques.

El model, a més, té associat un mètode de càlcul de distàncies i el corresponent per al càlcul d'angles[18] que, de fet, té un paper essencial en la configuració d'una geometria tal com veurem a continuació.

1.5. L'aportació de la geometria analítica

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), conegut com el *príncep de les matemàtiques*, va fer els seus propis esforços per la demostració del postulat de les paral·leles i, tal com la història assenyala, probablement va arribar a bastir les bases per a les geometries alternatives que coneixem amb el nom de no euclidianes. Malgrat això, va decidir no publicar[19] les seves especulacions sobre paral·leles de manera que la revelació definitiva va quedar en mans de matemàtics més joves. Així doncs, el paper que juga en aquesta història és un altre i té a veure amb la desvinculació de la geometria de les nocions intuïtives que deriven de la seva representació en imatges.

Des dels inicis de l'edat moderna la matemàtica entra en un nou àmbit de treball que li aportarà grans fites. Si bé ja es pot trobar en els tractats medievals àrabs, l'ús de la geometria com eina per a solucionar equacions de tipus algebraic reapareix el s. XVII. Fermat, Descartes, Newton, Leibniz, els Bernoulli i molts més van fer grans aportacions a una nova manera de desenvolupar la disciplina. Així trobem Descartes que a *La Geometria* publicada el 1637 juntament amb el *Discurs del mètode* deixa clar que les equacions es poden interpretar geomètricament donant el pas definitiu per a l'aparició d'una nova disciplina, la geometria analítica[20].

Amb l'aparició de la notació algebraica es simplifiquen algunes coses ja treballades, com la geometria d'Arquímedes, i s'obren noves camins com ara el càlcul o la parametrització de corbes i superfícies. I és en aquesta porta oberta que trobem el darrer element d'aquesta història.

Tal com es va comprovar més tard, Gauss va contribuir de manera important el 1827 amb la seva teoria de superfícies al desenvolupament de les geometries no euclidianes de manera formal. De fet, sense la incorporació de la geometria diferencial que generalitza els resultats obtinguts per a superfícies la geometria no euclidiana difícilment hagués trobat lloc en la representació de l'espai-temps que més tard van poder establir matemàtics i físics.

[18] Malgrat coincidir amb els angles mesurats "euclidianament" una geometria hiperbòlica ha de tenir els seus propis mètodes de mesura sense haver de recórrer a morfismes amb el pla euclidià si volem que sigui una geometria amb desenvolupament propi. Per suposat que el semiplà de Poincaré també el té malgrat que per facilitar la comprensió ens referim a la seva "immersió" al pla euclidià.

[19] En una carta a Bessel, el 27 de gener de 1829, Gauss ens ofereix una explicació al seu silenci: «Mentrestant passarà probablement un temps abans no comenci a preparar les meves molt extenses investigacions sobre això per publicar-les; potser això no passarà mai mentre jo visqui ja que temo el rebombori dels beocis». BONOLA (1955) p. 67.

[20] Per a una compilació de la història de la geometria analítica i els seus precedents podem consultar BOYER (2001) cap. XVII.

La geometria analítica[21] treballa a través d'aplicacions, com més derivables millor, entre un conjunt de tipus euclidià (les tuples de *n* nombres reals, que anomenem R^n) i el conjunt que volem descriure i/o conèixer que normalment rep el nom de *varietat*. Això va permetre a Gauss la introducció d'un nou tipus de coordenades generals (anomenades gaussianes), diguem x_1, x_2, que prendrien el lloc de les coordinades més familiars, les cartesianes.

Per mesurar longituds de corbes, en coordenades cartesianes podem fer servir una eina de geometria diferencial anomenada *diferencial d'arc* que pel cas euclidià té la forma habitual:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Gràcies a aquesta eina podem, per integració, trobar la longitud d'una corba si disposem de la seva expressió parametritzada, per exemple.

Si les coordenades són d'un altre tipus, l'expressió es fa una mica més complicada:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{21}dx_2dx_1 + g_{22}dx_2^2$$

les g_{ik} són, ara, funcions reals sobre les coordenades (per exemple, en coordenades polars $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = r^2$) . Aquests coeficients formen l'anomenada *primera forma fonamental* en el cas que les coordenades facin referència a una superfície i podem arribar a saber moltes de les característiques de la mateixa a partir d'ells.

Per altra banda, l'estudi de Gauss també permet obtenir l'indicador de curvatura de determinades superfícies i provar a partir d'aquest indicador que el comportament sobre aquestes no és euclidià. Així per exemple, una superfície de curvatura positiva, com podria ser una esfera, no tindrà paral·leles i un hiperboloide de revolució, que té curvatura negativa, en tindrà infinites (d'aquí el nom de geometria hiperbòlica).

Cal, però, aclarir què volem dir quan parlem de paral·leles sobre aquestes superfícies. Per fer això veiem que també hi podem tenir coordenades gaussianes i per tant un element d'arc definit per l'expressió anterior de *ds*. Els coeficients g_{ik} formen ara la primera forma fonamental i ens informen de moltes de les característiques de la superfície com ara la curvatura en qüestió o, òbviament, quines de les seves corbes tenen la menor longitud. És possible, a partir de la primera forma, saber quina és la corba més curta que connecta dos punts de la superfície. Aquesta rep el nom de *geodèsica* i es tracta, de fet, de la generalització del concepte de recta a superfícies no planes[22].

Malgrat que l'aparença de les g_{ik} depèn de la nostra elecció de coordenades[23], i per tant pot ser tan estranya com vulguem, si existeixen unes coordenades determinades que fan que $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = 1$ aleshores podem dir que la geometria sobre la superfície

[21] El detalls tècnics del que veurem ara es poden trobar a qualsevol llibre de geometria diferencial de nivell bàsic com, per exemple, CARMO (1990). La major part de monografies sobre espai i temps incorporen resums d'aquesta teoria de superfícies des de la més simple, com a SKLAR (1977), fins a la més elaborada de FRIEDMAN (1991).

[22] Recordem que una de les possibles definicions d'una recta seria la corba més curta que uneix dos punts i, malgrat no és fes servir com a definició, n'era una propietat força coneguda. A la Figura 3 veiem com les geodèsiques de l'esfera són les circumferències màximes i per tant la que traça la trajectòria més curta entre dos punts.

[23] Cal parlar, en aquest sentit, de propietats *extrínseques* que depenen de la nostra tria de coordenades, com ara l'expressió concreta de la primera forma fonamental i de les *intrínseques* que no en depenen i que són pròpies de l'estructura geomètrica de la superfície com ara la curvatura o el paral·lelisme.

és euclidiana. Per altra banda, si veiem que no existeix cap sistema de coordenades que ho permetin llavors ens trobarem davant d'una geometria no euclidiana. És a dir una superfície tindrà geometria euclidiana si podem d'alguna manera fer que l'eina per mesurar la longitud d'una corba sigui $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Per tant, ja amb Gauss es va poder comprovar que la curvatura (que deriva dels possibles valors de g_{ik}) determina fortament el comportament euclidià de la geometria.[24]

Calia, però una generalització d'aquestes idees a estructures de més de dues dimensions i aquest procés es va dur a terme al llarg del segle XIX. El moment crucial va ser la conferència d'habilitació de Bernhard Riemann (1826-1866) a Göttingen el 1854[25] on es defensa que no cal limitar-se a superfícies sinó que podem considerar tota mena d'espais arbitraris, les varietats, amb qualsevol nombre de dimensions. Els punts d'aquestes quedaran determinats per les tuples de nombres reals que s'obtindran en definir un sistema de coordenades. A partir d'aquí podem definir el diferencial d'arc, que en ser de *n* dimensions anomenarem *tensor mètric*[26], de manera arbitrària només tenint en compte determinades condicions, com ara la simetria o que sigui positiva[27], amb l'expressió:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + \ldots + g_{(n-1)n}dx_{n-1}dx_n + g_{nn}dx_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j$$

El tensor mètric permet una notació matricial que fa que sovint es parli de (g_{ij}) com a *matriu de coeficients*.

Riemann mostra que la curvatura de la varietat està associada a aquest tensor i que, per exemple, en el cas de varietats de geometria euclidiana, existeix un sistema de coordenades que té per matriu de coeficients la identitat[28] (obtenim, per tant, una mena de *teorema de Pitàgores* per a *n* dimensions). Inversament, una geometria no euclidiana tindrà un tensor mètric que no es podrà mai escriure de manera diagonal.

Per exemple, el semiplà de Poincaré és una varietat que té per tensor mètric:

$$ds^2 = \frac{1}{x_2^2}dx_1^2 + \frac{1}{x_2^2}dx_2^2$$

És possible demostrar que aquesta expressió no permet cap tipus de coordenades que canviï l'expressió del tensor a $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$ que seria l'indicador que estem davant d'una varietat euclidiana.

[24] De fet, això ja s'havia suposat abans. Lambert, per exemple, va deixar escrita la idea que la geometria hiperbòlica es podria desenvolupar en una superfície de curvatura negativa. Gauss, seguint aquest camí, va ser el que va aclarir els conceptes de curvatura de manera formal i en va mostrar el vincle.

[25] "*Sobre les Hipòtesis subjacents als Fonaments de la Geometria*". SMITH (1959) p. 411-425.

[26] Un tensor és una generalització de magnituds com els nombres, els vectors i les matrius. Es pot entendre, també com un operador.

[27] La condició positiva per al valor del tensor no és imprescindible. En aquest cas ens trobem davant d'una mètrica *semiriemanniana* que té un paper rellevant en relativitat.

[28] Es tracta de la matriu on $g_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$

Així doncs, podem generalitzar tot el que hem vist (superfícies i espais de dimensió qualsevol, geometries euclidianes i no euclidianes) al cas general de les varietats de dimensió *n* que podem estructurar amb tensors mètrics i obtenir, per tant, diferents espais geomètrics. De fet, si una varietat només ve determinada pel conjunt de tuples numèriques que la caracteritza les propietats que té són molt bàsiques (topològiques, de fet) i la mètrica s'ha de determinar amb la incorporació del tensor. Hi ha diversos nivells d'estructuració que, com capes, es van afegint sobre la configuració bàsica de la varietat. El tensor mètric els incorpora tots de manera que un cop introduït tenim definits els conceptes de longitud d'una corba (i per tant la distància entre punts), de línia recta, d'angle i de curvatura de la varietat. Degut al fet que l'estructura té aquests diversos nivells es pot donar que tensors mètrics diferents determinin la mateixa *estructura afí* (determinin el mateix tipus de línia recta) o la mateixa *estructura conforme* (mesurin els angles de la mateixa forma).

Riemann aplica aquesta nova perspectiva a la geometria tot unificant les teories euclidianes i no euclidianes i, de retruc, elimina les encara possibles objeccions a les geometries que complien la HAO, com podria ser l'esfèrica, que passen a dir-se *geometries riemannianes* i a ser-ne un cas particular més d'elecció de mètrica.

Finalment, amb el programa d'Erlangen enunciat per Klein el 1872, es revisa la idea de geometria centrant-la ara en els *grups de transformació*. Aquests grups, els d'automorfismes, tenen diferents característiques que, respectivament, conservaran les característiques de les varietats tal com vèiem abans. Així, el grup dels *moviments rígids*, les *isometries*, conservarà l'estructura mètrica d'una varietat i per tant les distàncies. Un altre grup més extens, el de les *transformacions afins* ho farà amb l'estructura afí i succeirà el mateix amb les *transformacions conformes*. El grup més ampli, el de *transformacions contínues*, serà el que conservarà l'estructura fonamental d'una varietat, és a dir la topològica[29]. Aquestes transformacions es relacionen fortament amb el tipus de sistemes de coordenades que conserven. Per exemple, una transformació isomètrica convertirà un sistema de coordenades cartesià en un altre.

Així doncs, les geometries es poden classificar en funció del conjunt de propietats, els *invariants*, que no canvien quan s'aplica un tipus de transformació (que, a més, té estructura de grup) i serà aquest darrer el que té, diguem-ne, prioritat ontològica.

En conseqüència, algunes de les propietats que vèiem en l'estudi de geometries no euclidianes pertanyen a àmbits diferents. Per exemple, el fet que dues rectes es tallin és clarament una propietat afí i serà regulada per aquest grup de transformacions, en canvi les distàncies, la mesura d'angles i la d'àrees mantindran la invariança només amb el grup de transformacions isomètric. Òbviament, però, un tipus de geometria inclou l'altra, per tant qualsevol condició, més restrictiva, que es compleixi en l'àmbit mètric també es complirà en l'àmbit afí i és per això que les propietats estudiades quan parlàvem dels elements que fan referència a angles i distàncies tenen com a conseqüència, el compliment de propietats afins com ara la incidència de dues rectes.

[29] Això és així donat que les relacions topològiques fan referència només a les propietats de continuïtat i posició relativa i per tant són invariants per transformacions mètriques o afins (és a dir, no tenen en compte si els punts conserven les seves distàncies o no). Són, en definitiva, a la base de la geometria.

D'aquesta manera es pot explicar com, malgrat haver molts tipus de geometries hiperbòliques, per exemple, en funció de la mètrica donada, s'agrupen totes sota aquest nom genèric donat que tenen en comú la condició afí de multiplicitat de rectes no secants, és a dir, la falta d'unicitat de paral·leles.

2. Models matemàtics i geometria física

Tal com va quedar la matemàtica després dels esforços de fonamentació del segle XIX en relació a la geometria i altres disciplines com el càlcul diferencial o l'anàlisi era obvi que una de les tasques més interessants que els matemàtics podrien emprendre en el tombant de segle era la recerca d'una fonamentació matemàtica complerta.

És en aquest període que es proposen les visions més conegudes de la naturalesa de la matemàtica més enllà del platonisme. Així el logicisme es desenvolupa a principis del segle XX de la mà de Frege i Russell, com també el formalisme de Hilbert i, no gaire més tard, trobem les propostes intuïcionistes d'Henri Poincaré (1854-1912) i L. E. J. Brouwer (1881-1966). Tota aquesta recerca alimenta el desenvolupament de la lògica per una banda i de la relació de la matemàtica amb el món real per l'altra. En particular, el punt de vista dels intuïcionistes defensava que, en contra sobretot del formalisme, els axiomes i els elements de la matemàtica no són tan arbitraris com semblava en el sentit que es fonamenta en una mena d'intuïció directa que permet una percepció immediata en especial de l'existència de les entitats de la teoria. Un dels elements crítics més interessants d'aquesta perspectiva és la seva restricció a objectes matemàtics amb condicions que siguin *construïbles* i això ens mena fàcilment a un paper ontològic dels models matemàtics que fonamenten una teoria. És a dir, per a un intuïcionista no és acceptable construccions teòriques que, malgrat tenir unes propietats definides, no tinguin un model significatiu associat.

Aquest darrer aspecte té una forta vinculació amb el camí que havia pres la filosofia per la seva banda. Òbviament, després de la consolidació de la nova perspectiva de la geometria que hem vist abans, algunes de les propostes més reeixides a nivell epistemològic que fonamentaven la certesa de la ciència, com podria ser el pensament kantià, pateixen un problema de base. En certa manera les matemàtiques constitueïn un element fonamental a l'hora de recolzar qualsevol plantejament racionalista però si, tal com es veia amb la geometria, tot el que semblava cert podia ser negat, què quedava?

2.1. Discussió a l'entorn de la geometria física

Fins el moment de l'aparició dels models no euclidians la geometria havia estat concebuda des d'una perspectiva més aviat racionalista. Es tractava d'una ciència de l'espai entès, a més, com una entitat substantiva sobre la que no calia fer cap mena de comprovació empírica. La geometria conservava l'estatut de ciència al marge de l'experiència fonamentant així la convicció que el coneixement era possible més enllà de les aportacions dels sentits. Sobre aquest fet hi havia una clara unanimitat i així era defensat per gent tan poc sospitosa de racionalisme com David Hume.

Però amb l'aparició dels nous models el sistema euclidià va començar a ser vist com a una teoria més, similar a les físiques, que si bé tenia una forta confirmació experimental era només una visió contingent[30].

Resulta irònic, si més no, que aquesta suposada confirmació física fos l'obstacle principal en la conceptualització de les noves propostes geomètriques i, com es pot veure en el cas de Saccheri, Lambert i altres, la causa de l'endarreriment de la seva teorització. En tot cas, al s. XIX havia quedat establert clarament que, si bé podia ser empíricament falsa, la geometria no euclidiana del tipus que sigui no era lògicament absurda.

El procés d'acceptació i d'assimilació d'aquestes noves teories ocupa bona part del que queda de segle començant per una primera fase on, entenent que l'experiència ens havia d'ajudar a establir definitivament que la geometria euclidiana era, si més no, la que corresponia al món físic, pensadors com John Stuart Mill (1806-1873) o Friedrich Ueberweg (1826-1871) s'esforçaven a fonamentar en base a percepcions l'existència del elements constitutius de la geometria com són punts i rectes i fins i tot, com seria el cas de Benno Erdmann (1851-1921) vincular la nova visió geomètrica de Riemann amb la intuïció perceptiva de l'espai.

Aquest tipus de vinculació amb la intuïció va ser, per altra banda, el que va portar els *aprioristes* a veure la nova geometria com un exercici de viabilitat lògica però no com a una teoria físicament fonamentada. De fet, aquesta intuïció geomètrica havia de ser comú a tots els homes. Els aprioristes no estaven sols en la seva defensa de la validesa exclusiva de la geometria euclidiana sinó que van trobar la complicitat d'alguns empiristes, formant el famós *Cor dels Beocis* de Gauss. Cal esmentar la particular visió de Bertrand Russell[31] (1873-1970), que el 1897 mantenia una hipòtesi apriorística en relació a la curvatura de l'espai, que considerava que imposava la condició de simetria, però en canvi deixava a l'experiència la tasca de determinar si el valor d'aquella era nul.

El darrer personatge que hem d'esmentar, però, és el més important per al tema d'aquesta monografia: Poincaré. Conegut per la seva capacitat en els més diversos camps de la matemàtica la seva contribució a la relació entre geometria i món físic és la d'establir una nova via. Entre 1889 i 1912 publica una sèrie d'articles que fonamentaran el que es coneix amb el nom de *convencionalisme*. Segons aquest punt de vista, els principis geomètrics no són ni certs ni falsos perquè són fruit de la simple convenció, atenent a raons de comoditat.

2.2. Poincaré a Ciència i Hipòtesi: la concepció convencionalista

El 1902 Henri Poincaré publica *Ciència i Hipòtesi*, un assaig divulgatiu amb quatre articles. El segon, titulat *L'espai*, consta de tres capítols i va tenir una forta repercussió en l'àmbit de la filosofia i la relació de la matemàtica amb el món físic. Òbviament s'insereix en els interessos del seu moment i és una mostra excel·lent de la direcció que prenien les especulacions científiques els anys que precedien l'aparició de la teoria de la relativitat.

---

[30] Podem trobar tot aquest procés explicat amb detall a TORRETI (1984), cap. 4.

[31] Amb Russell sempre cal aclarir de quin època estem parlant donat la seva tendència a canviar de punt de vista al llarg de la seva vida. L'any 1897, per exemple, ell mateix es confessa fortament influenciat pel pensament kantià. Veure TORRETTI (1984) p.301-320.

A l'article Poincaré es preocupa d'aclarir que no és possible refutar per inconsistent qualsevol tipus de geometria no euclidiana gràcies a les proves de consistència mútua amb la geometria clàssica. A més, tot distingint l'espai imaginat i l'espai percebut contesta la possibilitat, kantiana, que la geometria sigui una condició de percepció del món. Per a ell, l'espai físic es coneix per inferència d'allò que percebem del món (i per tant no hi ha lloc a la intuïció perceptiva directa). És a dir, inferim l'existència del món físic, i també del seu espai i la seva naturalesa a partir de les percepcions que tenim per tal d'explicar l'ordre i la regularitat que hi observem.

El capítol IV (el segon de l'article), *L'espai i la geometria*, finalitza amb un exemple, una mena d'experiment mental, que ha esdevingut una referència obligada.

Imaginem, ens diu, un món on uns éssers viuen dins una esfera. Des d'un punt de vista extern, és possible descriure aquest disc amb les eines que ens dóna la geometria euclidiana. Els éssers que l'habiten, intel·ligents i amb coneixements matemàtics i físics suficients però incapaços d'abastar la nostra perspectiva, volen establir quin tipus d'estructura geomètrica té el seu món de manera que han de procedir per inferència.

Per fer-ho disposen de les eines usuals, és a dir regles (i goniòmetres), que els permetran establir si els seu món obeeix les lleis de la geometria euclidiana o si, pel contrari, no ho fa (i per tant es tractaria d'un cas de geometria hiperbòlica o el·líptica).

Malauradament, els nostres personatges no són conscients d'un estrany fenomen. Els científics de l'esfera no saben, ni tenen manera de fer-ho, que l'esfera té una temperatura variable que descendeix de manera uniforme des del centre fins els límits exteriors, prenent per un punt situat a r del centre el valor $T(R^2-r^2)$, i que aquesta temperatura dilata tots els objectes i instruments de mesura per igual[32]. Així els objectes seran més grans com més a prop del centre ens trobem i s'aniran apropant a 0 en aproximar-nos al límit.

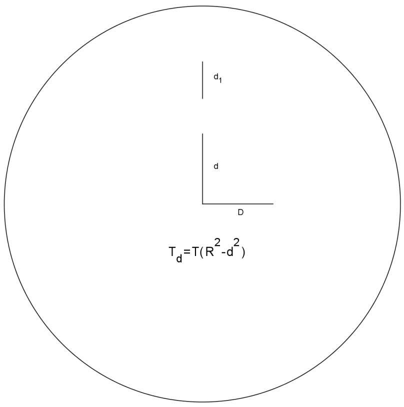

Figura 9. Els regles són més llargs com més a prop del centre de manera que tot es fa "més petit" en acostar-nos a la vora de l'esfera. Els tres segments representats, per exemple, mesuren igual. Donat que a la vora la temperatura és *0* qualsevol objecte per mesurar distàncies, com un regle o els propis habitants, experimenta una contracció fins a tenir longitud nul·la.

[32] Aquest efecte s'ha de donar fins i tot amb la llum donat l'ús que pot tenir per a definir el que seria una línia recta i per tant informar-nos de la deformació que pateixen la resta d'objectes. POINCARÉ (1968) p. 90.

Poincaré, ens diu:

«Si, per nosaltres, la geometria no és més que l'estudi de les lleis que regulen el moviment dels sòlids invariables, per a aquests éssers imaginaris, consistirà en l'estudi de les lleis segons les quals es mouen els sòlids *deformats per les diferències de temperatures* tal com s'ha dit anteriorment.

[...]

Si ells van establir una geometria, aquesta no serà com la nostra, l'estudi dels moviments dels nostres sòlids invariants; serà sobre els canvis de posició que ells hauran notat, que no són altres que els "desplaçaments no euclidians", *serà per tant una geometria no euclidiana*»[33]

Els nostres personatges no tindran més remei que entendre que la geometria que caracteritza el seu món no és euclidiana donat que les seves rectes descriuran el que a nosaltres ens semblen corbes.

No obstant, nosaltres, des de la perspectiva "externa" podríem explicar aquests fenòmens a partir d'una geometria plana (euclidiana) i la intervenció d'un efecte físic sobre els aparells de mesura.

Podem dir que es troben davant d'una mètrica alternativa sobre la que no tenen manera d'establir la seva certesa. Poincaré entén que és a través dels sentits, ja siguin amb l'ajuda d'aparells o no, i del concepte de congruència en l'espai que nosaltres determinem la mètrica d'una varietat *física* (és a dir, del món). Però, tal com ens mostra l'exemple, aquesta informació pot estar sotmesa a efectes universals en les eines de mesura.

Si formulem la hipòtesi que el món es *isòtrop*, és a dir que els objectes no pateixen modificacions en funció del lloc on són, aleshores la possibilitat de determinació del caràcter euclidià de la geometria sí existeix. Però no es pot negar que cal una hipòtesi que no és trivial. A l'època que Poincaré escrivia aquestes paraules el món acadèmic estava ocupat per donar un lloc a determinats resultats i teories que més aviat assenyalaven el contrari. S'especulava, més aviat, amb el fet que els objectes patissin contraccions en determinats estats de moviment i això atemptava clarament contra la hipòtesi d'isotropia. Tal és el cas de les equacions de Lorentz-Fitgerald, que ja es coneixen des de feia algun temps, i dels resultats d'experiments com el de Michelson-Morley que apuntaven en aquesta direcció.

A més, per un matemàtic, aquest tipus d'equivalència teòrica entre models geomètrics evoquen d'alguna manera les proves de consistència mútua que es van desenvolupar al llarg del s. XIX i que el propi Poincaré recorda abans de parlar-nos de la seva esfera[34]. Tot i així no estem parlant del mateix, és clar, per una banda només ens referim a una vinculació lògico-formal entre elements fonamentals de dues teories diferents i per tant d'una reproducció de l'estructura justificativa de les mateixes i per l'altra parlem d'un efecte físic, que suposem real però indetectable.

En tot cas, el que Poincaré ens ve a dir és que l'ús d'una geometria euclidiana o no euclidiana respon a una tria convencional -donat que és possible entendre que totes dues descriuen el món en la mesura que afegim correccions- com ara aquestes forces que

[33] POINCARÉ (1968) p. 89-91.

[34] *Ibid.* Cap. III.

afecten a tot cos material, inclosos els aparells de mesura. I per tant la conclusió és inevitable :

> «Es vol que la experiència jugui un paper indispensable en la gènesi de la geometria; però seria un error concloure que la geometria és una ciència experimental, fins i tot en part.
>
> Si fos experimental, no seria més que una d'aproximativa i provisional. I quina aproximació més grollera!
>
> [...]
>
> L'experiència ens guia en aquesta tria que no ens imposa; ens fa reconèixer no quina geometria és la veritable, sinó quina és la més convenient [*commode*].»[35]

Finalment, la recomanació de Poincaré davant d'aquest fet és que fem servir l'estructura geomètrica més simple, per ell l'euclidiana.

Quines conclusions podem extreure de la proposta de Poincaré?

En primer lloc, una inferència immediata ens porta a afirmar que, si el que ens mostra l'exemple és inevitable, no podem dir que existeix la geometria física pròpiament. Malgrat la geometria sigui útil per a explicar fenòmens, unes millor que d'altres, no podem entendre cap teoria com a certa o falsa en parlar de l'espai-temps.

> «Si la geometria de Lobatxevski és certa, la paral·laxi d'una estrella molt allunyada serà finita; si ho és la de Riemann, serà negativa. Aquests són resultats que semblen accessibles a l'experiència i hom ha esperat que els observacions astronòmiques ens permetin decidir entre les tres geometries.
>
> Però allò que es denomina línia recta en astronomia és simplement la trajectòria del raig de llum. Així doncs, si es descobrís que les paral·laxis fossin negatives, o que són superiors a un cert límit, ens quedarien dues opcions: podem renunciar a la geometria euclidiana o bé modificar les lleis de l'òptica i admetre que la llum no es propaga rigorosament en línia recta.»[36]

Aquest és l'article germinal de la visió epistemològica que coneixem per convencionalisme. Però en què consisteix exactament? Com s'ha entès un cop la teoria de la relativitat ens ha forçat a noves perspectives i ens ha mostrat que, com a mínim, la geometria euclidiana no és la més simple per a descriure el món? Quin tipus de consideracions sobre el món, el coneixement que en puguem obtenir i el paper que les matemàtiques hi juguen ens pot portar a assumir el convencionalisme? Aquest és el tipus de qüestions que mirarem de respondre a continuació.

[35] *Ibid.* p. 93-94
[36] *Ibid.* p. 95-96

II. Espai, temps i la gènesi de la relativitat

El camí envers la teoria relativista està format per petites passes en la revisió de conceptes que es tenien, en principi, per compresos i consolidats. Els textos sobre física actuals tendeixen a destacar aspectes determinats de les teories que han passat a ser obsoletes de manera que propicien la impressió que els nostres antecessors no observaven el que era obvi.

1. Mecànica clàssica

Un dels conceptes més revisats des d'una perspectiva contemporània i que ens permet fer un recorregut històric de la física fins a la teoria relativista és el de sistema de referència.

1.1. Sistemes de referència

Amb la revolució científica a l'edat moderna apareixen conceptes innovadors que donen resposta a les objeccions que plantejaven les noves perspectives. Aquest és el cas del sistema de referència.

No és casual que, paral·lelament a la consolidació de la referència experimental, hi hagi també l'eclosió de la geometria analítica on les coordenades cartesianes juguen un paper fonamental. Tal com ja hem vist, aquest tipus de revisions de la geometria van ser, a la llarga, les que van permetre una perspectiva que en materialitzar-se en camps com la geometria diferencial va donar tan bon resultats al llarg del s.XIX.

És conegut que el model heliocèntric plantejava, com a primera objecció empírica, el fet que suposava el moviment de la terra en l'espai. Aquest moviment comportava fenòmens que la intuïció no podia percebre de manera que Galileu va haver de proposar experiments, sobretot mentals, que permetien copsar per què aquest moviment no era copsat per la nostra experiència.

> «Tanqueu-vos amb un amic a l'estança més gran sota coberta d'un gran vaixell, i poseu-hi mosques, papallones i d'altres animals voladors. Preneu també un gran vas d'aigua amb peixos dins, i pengeu un recipient ple d'aigua que la deixi caure, gota a gota, dins un altre recipient de boca estreta col·locat a sota. Quan la nau estigui quieta, observeu atentament com els animals volen a la mateixa velocitat cap a tots els racons de la cambra, com els peixos neden indistintament en totes direccions, i com les gotes que cauen entren totes dins el recipient que hi ha a sota; si llanceu alguna cosa al vostre amic, no necessitareu més força per llançar-la cap a una banda que cap a una altra, sempre que les distàncies siguin iguals; i si salteu com qui diu amb els peus junts, recorrereu distàncies iguals en totes les direccions.
>
> Un cop hagueu observat atentament totes aquests coses –encara que ningú no dubta que, si la nau està quieta, tot s'esdevindrà d'aquesta manera- feu moure la nau amb la velocitat que vulgueu. Si el moviment és uniforme i no fluctua d'una banda a l'altra, no percebreu cap canvi en els efectes esmentats, ni podreu determinar, a partir d'ells, si la nau està quieta o es mou. Quan salteu, recorrereu la mateixa distància que abans, i encara que la nau es mogui molt de pressa no saltareu una distància més gran

cap a popa que cap a proa, tot i que mentre estàveu en l'aire el terra s'ha desplaçat en sentit contrari al del salt; si llenceu alguna cosa al vostre company, no us caldrà més força si ell està a la part de proa i vós a la de popa, que si esteu situats a l'inrevés; les gotes seguiran caient en el recipient inferior, i cap no caurà cap a popa, encara que la nau recorre molts pams mentre la gota està en l'aire; els peixos no hauran d'esforçar-se més per nedar cap a la part de davant del vas, sinó que nedaran amb la mateixa facilitat cap a l'ham situat a qualsevol lloc del vas; i, finalment les papallones i les mosques continuaran volant indistintament en totes direccions i mai no passarà que s'arrepleguin a la paret de popa, com si estiguessin cansades de seguir el curs de la nau després d'haver-se'n separat i haver-se mantingut a l'aire durant molt de temps. I si es crema encens i es fa una mica de fum, el veureu pujar i forma un petit núvol, movent-se indiferentment cap a totes bandes. La causa d'aquesta correspondència d'efectes és que el moviment de la nau és comú a totes les coses que conté, inclòs l'aire, per això he dit que s'havia d'estar a sota coberta.»[37]

La coneguda experiència del vaixell il·lustra aquest tipus de revisions conceptuals. No percebem el moviment de la terra al voltant del sol pel mateix motiu que no ho fem amb els fenòmens de dins la nau. Neix així l'estudi dels sistemes de referència i de les magnituds respecte un observador. Els sistemes que es mouen a velocitat uniforme els uns dels altres no mostren cap efecte mecànic. Són equivalents. Aquests sistemes es coneixen amb el nom de *sistemes inercials* i tenen un paper important en l'establiment d'un criteri de demarcació entre efectes cinemàtics aparents i reals.

Newton va consolidar la idea de sistema de referència i en va fer una classificació fonamental: per una banda els sistemes que es mouen amb velocitat constant els uns dels altres, els esmentats inercials o *galileans*, i per l'altra, els sistemes que es mouen acceleradament respecte d'un altre. Aquesta acceleració s'ha d'entendre com una variació de la velocitat com a magnitud *vectorial* i, per tant, també es pot tractar d'un canvi de direcció. Així, un observador en moviment que està "frenant" pot ser considerat un sistema no inercial de la mateixa manera que ho pot ser un que estigui en rotació. Aquest tipus de sistemes es defineixen en base a l'acceleració perquè aquesta és observable gràcies a la segona llei de Newton, que estableix una proporció directa entre una acceleració i una força.

$$\vec{F} = k \cdot \vec{a} \tag{1}$$

Així, si un observador experimenta forces d'alguna mena pot saber si està en moviment accelerat o no. Aquest és un efecte dinàmic, del tipus que el text de Galileu descartava, de manera que el que podem dir és que el sistemes galileans no són mútuament distingibles i en canvi els no inercials sí ho són.

Newton necessita, però, que aquesta acceleració tingui una existència *absoluta*. És a dir, donat que l'existència de les forces no hauria de dependre dels observadors tampoc ho hauria de ser l'acceleració. Així doncs, introdueix als *Principia Mathematica* el postulat d'un espai i d'un temps absolut que li permet, en funció d'això, la definició de l'acceleració (donat que és la variació de segon ordre de la posició, és a dir el canvi de *la ubicació en l'espai* en funció del *temps*). Tal com trobem a l'escoli de les definicions:

[37] GALILEU (1994) p.162-163. Aquesta traducció és de X. Roqué a EINSTEIN (1998) p.XIV-XV.

« ...Temps, espai, lloc i moviment són paraules molt conegudes per tothom. Podem observar, com tot, que la plebs només concep aquestes quantitats partint de la relació que guarden amb les coses sensibles. I d'aquí sorgeixen certs prejudicis que per remoure convindria distingir entre l'absolut i el relatiu, la veritat i la aparent, allò matemàtic i allò vulgar.

El temps absolut, veritable i matemàtic, en si i per la seva pròpia naturalesa sense relació a res extern flueix uniformement, i també s'anomena durada. El temps relatiu, aparent i vulgar és una mesura sensible i exterior (precisa o desigual) de la durada a través del moviment, emprada per la plebs en lloc del veritable temps; hora, dia, mes i any són mesures d'aquest tipus.

L'espai absolut, en la seva naturalesa, sense relació a res extern, permanent sempre semblant i immòbil. [...]

El lloc és la part de l'espai que un cos ocupa, sent relatiu o absolut en funció de l'espai. [...]

El moviment absolut és la translació d'un cos des d'un lloc absolut fins a un altre, i el moviment relatiu la translació d'un lloc relatiu a un altre.»[38]

A partir d'aquí no resulta excessivament complicat amb l'ajuda de l'eina matemàtica per excel·lència aportada per Newton, la derivació, definir la resta de lleis mecàniques que desplega als *Principia*.

Obtenim, a més, una noció essencial per al desenvolupament de la dinàmica com és la *massa*. Aquest concepte, que habitualment entenem com una mena de *concentració material* o *quantitat de matèria* és definible, aquí, d'una manera més instrumental com el factor de proporcionalitat d'entre la força i l'acceleració de l'equació (1). És tracta, per tant, d'una mena de *resistència al moviment* que també té altres comportaments dinàmics. En efecte, aquesta massa apareix també en les lleis newtonianes que estableixen com s'atreuen els cossos entre ells i que regulen el moviment dels planetes.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = m \cdot G \frac{M}{d^2} \vec{u} \qquad (2)$$

La primera part de l'expressió és la mateixa que la de l'equació (1) però el que resulta interessant és que el potencial gravitatori que un cos crea depèn també de la seva massa, M a l'equació (2). En principi això no resulta tan sorprenent donat que es tracta d'una magnitud íntimament relacionada amb la interacció gravitatòria i sembla lògic que hi hagi una certa simetria entre la capacitat d'un cos d'atreure els altres cossos i la seva "resistència" a aquesta atracció.

Tornant als sistemes de referència veiem que els inercials, que ens proporcionen els mateixos efectes físics, permeten des del punt de vista matemàtic establir les anomenades transformacions galileanes. Aquestes transformacions bàsicament el que estableixen és la manera com els valors cinemàtics observats des dels dos punts de vista es relacionen i permeten explicar formalment perquè les lleis físiques no es veuen afectades per aquest canvi d'observador.

[38] NEWTON (1987) p.32-33.

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 + v_1 \cdot t\\ \bar{x}_2 &= x_2 + v_2 \cdot t\\ \bar{x}_3 &= x_3 + v_3 \cdot t\end{aligned} \qquad (3)$$

Les posicions observades des d'un sistema $\bar{x}_i$ es relacionen amb les observades des de l'altre sistema inercial per la velocitat, constant per definició, amb la que es mou un sistema respecte l'altre. Aquestes equacions permeten demostrar fàcilment que les acceleracions observades des dels dos punts de vista són iguals[39]. Donat que les acceleracions són les úniques que tenen un significat físic observable queda establert, doncs, l'equivalència de les lleis del moviment per als dos sistemes.

Per tant, tota llei física que s'observa des d'un sistema arbitrari s'ha d'observar igualment des d'un altre sistema que es mogui de manera inercial (sense acceleració) respecte el primer. Aquest és el que s'anomena *Principi de relativitat clàssic* o newtonià.

1.2. Espai i temps absoluts

Leibniz, però, va observar que això planteja algunes qüestions si més no epistemològicament problemàtiques. En postular un espai absolut, on està ubicada la matèria, està clar que els sistema de referència que no es desplaci respecte aquest ha de ser un sistema inercial. Ara bé, tots els sistemes galileans són equivalents i per tant *no hi ha cap mètode que ens permeti conèixer quin d'ells és l'absolut*. Diguem-ho d'una altra manera. No podem saber si un objecte està quiet de manera absoluta o no malgrat que aquest fet és possible. Així doncs, tenim dues magnituds, la posició i la velocitat absoluta (la que tenim respecte l'espai i el temps newtonians) que no són observables en absolut i que no tenen cap traducció als fenòmens físics. Si hem d'aplicar el *Principi d'Economia*, fonamental per a la metafísica leibniziana, ens veiem abocats a prescindir d'aquests conceptes. Per al filòsof alemany la mecànica s'hauria de construir partint d'una definició d'espai accidental a partir de la posició relativa dels objectes materials tal com veurem més endavant, en desenvolupar la implicació ontològica d'aquesta discussió.

Els sistemes de referència no inercials, accelerats respecte el que triem inicialment, mostren, en canvi, efectes mecànics diferents. Això estableix un criteri de distinció entre ells que està fonamentat, tal com hem vist, en l'existència d'un espai i temps definits *a priori* i de manera absoluta.

Quan un sistema gira, o accelera en línia recta, podem observar forces que no es constaten en cas contrari. Això ho observem en multitud de casos com ara quan girem a una velocitat considerable, dins un tren o un cotxe, o experimentem aquests canvis sobtats de velocitat com ara en enlairar-se un avió. Aquests efectes són els que permeten a Newton estar segur de l'existència d'un sistema de referència absolut, que estaria centrat en aquest espai que postula per principi.

---

[39] Per calcular l'acceleració cal trobar la variació de segon ordre de $\bar{x}_i$ en funció del temps. En fer-ho els termes $v_i \cdot t$ s'anul·len i obtenim $\bar{a}_i = a_i$.

Newton, atiat per la controvèrsia amb Leibniz, ho mostra amb l'anomenat *experiment de la galleda*[40] on ens imaginem aquesta mig plena d'aigua i penjant d'una corda. Si fem girar la galleda com si retorcéssim la corda (és a dir, fent-la rotar sense moure-la de lloc) observarem que, si bé al principi l'aigua no descriu cap efecte en passar el temps la superfície es corbarà cap a baix per efecte del que anomenem col·loquialment com a "força centrífuga"[41]. Si procedim a aturar la rotació l'aigua manté la seva superfície corbada. Newton conclou que la força centrífuga no es pot explicar amb els moviments relatius de Leibniz donat que aquests (entre l'aigua i la galleda) es donen tant al principi com al final de procés mentre que la força en qüestió apareix només al final. Si la galleda es mou quan l'aigua està quieta, no es mostra l'efecte. Si la galleda està quieta quan l'aigua es mou, notem la força centrífuga. Així doncs, és un efecte que s'explica pel moviment de l'aigua respecte l'espai, i no respecte altres objectes com proposaria Leibniz.

Així doncs, tenim dos tipus de moviments: uns amb rotació o amb acceleració lineal, absoluts, que tenen significació observable i que són distingibles per a les lleis físiques, i uns altres en repòs absolut o en moviment a velocitat constant que no tenen una contrapartida empírica i que per tant no podem diferenciar dels altres del mateix tipus.

L'experiment de la galleda representava una certa *prova de contrast* a favor de la visió absolutista de Newton i restà incontestat fins que Ernst Mach (1837-1916) no en feu un estudi crític[42].

Deixant de banda els detalls, el que Mach ens ve a dir és que podem entendre el moviment de la galleda *en relació* al conjunt de les entitats materials de l'univers, incloses les "estrelles fixes". Així doncs, no cal suposar en cap cas l'existència d'un espai absolut, que per altra banda defuig tota comprovació experimental. De fet, la idea que alimenta el punt de vista d'un espai previ a la matèria constitueix, més aviat, un experiment mental que no podem garantir que tingui sentit.

Per a Mach aquesta idea d'un univers *conjunt* que podia servir de referència en substitució de l'espai havia de ser més natural després que la teoria electromagnètica afegís a la matèria pròpia de la mecànica el concepte de camp i d'ona. Aquestes noves entitats, emplenen novament l'espai que Newton havia "buidat" per a respondre al problema de la propagació electromagnètica i prenen, per tant, el paper de referent per al moviment absolut. Així doncs, el moviment dels sistemes inercials es pot fer en referència a altres elements amb realitat experimental i per tant el principi de relativitat pot prendre un caire més ontològic que el que tenia en la formulació newtoniana, amb un biaix d'impotència epistemològica.

[40] Aquesta remarca va ser afegida per Newton a la segona edició. Trobem aquest experiment mental a l'escoli principal. NEWTON (1987) p. 37-38.

[41] Aquesta força *imaginària* s'explica, en el sistema clàssic, com l'efecte de la conservació inercial que enuncia la primera llei de Newton. Tal com esmenta al mateix escoli: « Los efectos que distinguen el movimiento absoluta del relativo son las fuerzas de alejamiento del eje del movimiento circular. No existen tales fuerzas en un movimiento circular puramente relativo, pero en un movimiento circular verdadero y absoluto son mayores o menores según la cantidad de movimiento.» NEWTON (1987) p.37.

[42] El 1883 a *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung Historisch-Kritisch Dargestellt*. El fragment en qüestió, "Concepción newtoniana del tiempo, del espacio y del movimiento" és a EINSTEIN ET AL. (1973) p.25-34. Un resum detallat el podem trobar a REICHENBACH (1957) p.213-218

1.3. L'electromagnetisme

L'electrodinàmica de James Clerck Maxwell (1831-1879) va afegir, en constituir una teoria unificada el 1873, nous elements al debat sobre l'existència absoluta de l'espai. El principi de relativitat semblava consolidat per a la mecànica però les ones electromagnètiques, que es propagaven totes en el buit a una velocitat constant i definida *c*, no estaven subjectes a aquests efectes en no ser l'àmbit d'aplicació de les lleis de Newton.

Així doncs, les equacions de Maxwell havien de permetre distingir entre els sistemes equivalents des del punt de vista mecànic establint, per exemple, quin d'ells estava en repòs absolut. Es tractaria d'aquells sistemes on la velocitat de propagació de les ones electromagnètiques (la llum, per exemple) fos efectivament *c*. Qualsevol altre sistema hauria de mostrar efectes òptics lligats a una velocitat lumínica o bé menor, en cas que el sistema el mogués en la mateixa direcció i sentit que l'ona, o bé més gran en cas que ho fes en sentit contrari.

Donat que les ones necessiten un medi de propagació, els científics dels s.XIX van postular que les electromagnètiques ho feien en un de particularment subtil i rígid[43] que anomenaren, per raons històriques, *èter*. Aquest representaria l'equivalent de l'espai absolut newtonià i trobar quin sistema de referència no s'hi desplaçava comportaria trobar també quin era l'estat de repòs absolut.

La història de la ciència assenyala el fracàs de tots els experiments realitzats en aquesta recerca i en destaca sobretot els d'Albert A. Michelson (1852-1931) i Edward W. Morley (1838-1923) a finals del segle per la seva precisió i el paper que va tenir en la discussió posterior. Efectivament el que l'experiència mostrava era que els sistemes inercials mecànicament indistingibles també ho eren des del punt de vista electromagnètic. No disposàvem, per tant, de cap criteri que ens permetés saber què estava en repòs absolut o què no.

Òbviament hi va haver diverses propostes per a explicar el que havia passat. Cal destacar les de Poincaré i sobretot la formulació de Hendrik A. Lorentz (1853-1928). Per aquest, els resultats negatius eren provocats per una contracció a nivell molecular dels instruments de mesura que es feien servir als experiments en moure's el sistema a través de l'èter. Aquesta contracció es podia calcular i de fet també havia estat suggerida per George FitzGerald (1851-1901) de independentment i quasi simultània de manera que passaren a rebre el nom de tots dos.[44]

A banda de l'efecte que va tenir sobre el principi de relativitat les experiències negatives en la recerca del sistema l'èter l'electromagnetisme també hi va aportar un altre

[43] Per una banda aquest medi no oferia resistència al desplaçament de la matèria (d'aquí que es parlés de propagació *en el buit*) i per això es postulava que era subtil. Per altra banda, la velocitat d'una ona depèn de la rigidesa del medi. Donat el valor tan alt de la velocitat *c* havia de ser extremadament rígid.

[44] Ja hem vist al capítol I 2.2 que aquests resultats eren semblants a l'efecte que ens suggeria Poincaré en el seu experiment mental de l'esfera a *Ciència i Hipòtesi*.

fet interessant. Aquest té, sobretot, un interès historiogràfic malgrat que les reconstruccions posterior acostumen a obviar-ne la rellevància.

La teoria electrodinàmica permetia explicar un fenomen que avui coneixem amb el nom de *Llei de Faraday o d'inducció electromagnètica* que constata que un camp magnètic variable produeix una camp elèctric d'una determinada energia, tot generant un corrent en els llocs on es troben parts d'un conductor. Això ho podríem comprovar en moure un imant (el focus de camp magnètic) a través d'un conductor en forma d'espira connectat a un mesurador de corrent, per exemple un galvanòmetre.

Podríem, però, moure l'espira del conductor en comptes de l'imant. Aquest acte tindria el mateix efecte i per tant també es donaria una inducció electromagnètica. El que passa és que ara no podem dir que hi ha una variació del camp magnètic sinó que es dóna un desplaçament de les càrregues del conductor, una força electromotriu que té la mateixa intensitat i evolució temporal que el cas anterior. L'equació de Maxwell explicava aquest fet *de manera diferent* que en el cas del moviment de l'imant. La variació en el primer cas es dóna en el camp magnètic, en el segon en les càrregues presents al conductor. Així doncs, tot i que l'efecte és clarament el mateix l'explicació depèn de què és el que es desplaça. Això, òbviament, no és satisfactori donat que es pot visualitzar fàcilment que la inducció es produeix en *moure's el camp magnètic en relació a les càrregues* independentment de quin dels dos té un moviment "absolut" per la seva banda.

2. La teoria especial de la relativitat

Això és el que pensava Albert Einstein (1879-1955) al respecte. Es tractava, doncs, de fonamentar les lleis de l'electrodinàmica en comportaments relatius. Per a ell, el principi de relativitat era una guia heurística que li va permetre plantejar un nou punt de vista per explicar els fenòmens i fonamentar la cinemàtica.

Ell mateix reconeix, a més, que en aquesta revisió té un deute amb el pensament de Mach i Hume que ha estat documentat extensament en la multitud d'estudis històrics[45] sobre la gènesi de la teoria a banda de la influència d'altres factors[46], més mundans, d'aquest procés.

És ben conegut que la teoria especial de la relativitat neix el 1905 a un article aparegut als *Annalen der Physik,* dels tres que Einstein hi publica[47], titulat *Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment*[48]. Al text hi trobem dues parts diferenciades: una primera on es discuteix amb criteris més aviat d'elegància l'asimetria que suposa la

---

[45] Per exemple a SÁNCHEZ RON (1985).

[46] Les referències historiogràfiques sobre relativitat són incomptables i abunden les que plantegen perspectives innovadores per a la comprensió del pensament d'Einstein. Així, en trobem a la seva feina en l'oficina de patents de Berna o a la del seu pare com a fabricant d'aparells electrònics (*Unipolar induction: A case-study of the interaction between science and technology,* d'Arthur I. Miller o *Hermann Minkowski and Einstein's special theory of relativity* de Lewis Pyenson) o a la contribució de l'adopció del temps universal de Greenwich adoptats pels estats alemanys el 1893 (*The Culture of Time and Space, 1880-1928* de Stephen Kern). Totes aquestes referències es poden trobar a l'estudi introductori de X. Roqué a EINSTEIN (1998) p. XVIII i ss.

[47] *Annalen der Physik und Chemie,* 17, p. 891-921. Els altres dos són al mateix número: «Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de la llum», p. 132-148 i «Sobre el moviment de les partícules en suspensió en líquids en repòs que exigeix la teoria cinetico-molecular de el calor», p. 549-560.

[48] Podem trobar la traducció al català a EINSTEIN (1998)

interacció electrodinàmica que esmentàvem anteriorment i que porta a Einstein a afirmar que:

> «Exemples d'aquesta mena, així com els intents fallits de constatar cap moviment de la Terra respecte del *medi lumínic*, fan conjecturar que cap propietat dels fenòmens no correspon al concepte de repòs absolut, no només a la mecànica sinó també en l'electrodinàmica»[49]

D'aquí procedirà a postular els principis fonamentals de la nova teoria: el principi de relativitat (les lleis que regulen els canvis d'estat dels sistemes físics són independents del fet que referim aquests canvis a l'un o l'altre de dos sistemes de coordenades que es troben en moviment relatiu de translació uniforme) i el principi de constància de la velocitat de la llum (la llum es propaga en l'espai buit amb una velocitat constant independent de l'estat de moviment del cos emissor). Això li permetrà formular una electrodinàmica que prescindeixi del concepte d'èter i que sigui simple i formalment elegant.

En primer lloc emprèn una anàlisi de la noció de simultaneïtat per a fer una revisió dels conceptes cinemàtics relacionats. Aquesta discussió permet Einstein prescindir de l'altre concepte absolut newtonià, el temps. Desenvolupa, per a fer-ho, un mètode per a determinar si dos esdeveniments són simultanis i arriba a mostrar que en cas que ho siguin en un sistema de referència deixen de ser-ho per a un altre sistema que es mou respecte el primer. Aquí ja es poden trobar les primeres conseqüències rellevants des del punt de vista epistemològic i ontològic.

En conseqüència Einstein dedueix que els intervals espacials i temporals depenen de l'estat de moviment de l'observador i que això, que vincula la constància de la llum amb el fet que els sistemes inercials són indistingibles, permet deduir sense problemes com es relacionen les observacions fetes des dels dos punts de vista. Aquest vincle pren la forma de les transformacions de Lorentz-FitzGerald. Per exemple, per a un sistema L que es mou només en la direcció x respecte el sistema L' a velocitat v tenim que :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{amb} \qquad \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4}$$

Aquestes equacions permeten, per exemple, trobar la velocitat a la que es mou un sistema respecte l'altre i estan fortament lligades a la constatació experimental de la constància de la velocitat de la llum (i de les ones electromagnètiques) en el buit. A més, donat l'alt valor de c és comprensible que els efectes d'aquesta teoria no hagin estat observats abans en complir la teoria clàssica les equacions per a valors límit de v relativament baixos.

La segona part de l'article la dedica Einstein a aplicar el principi de relativitat a la resolució de problemes electrodinàmics tal com especificava el títol i a veure quines

[49] EINSTEIN (1998), p. 89.

implicacions comporta a la teoria de l'electró (encara en desenvolupament) tan teòricament com experimentalment.

A partir de la publicació de l'article les seves implicacions apareixen ràpidament. Einstein s'adona d'una conseqüència sorprenent d'aquesta teoria i ho publica, poc després, a la mateixa revista sota el títol *Depèn la inèrcia d'un cos de l'energia que conté?*[50] . A l'article trobem (tot i que no formulada així) la que serà, sens dubte, l'equació física més famosa del segle.

$$E = mc^2 \tag{5}$$

Aquest resultat li permet, a més, entendre de manera unificada els dos principis de conservació desenvolupats independentment, el d'energia i el de massa, cap a finals del segle XIX.

El 1908 Hermann Minkowski presenta una interpretació geomètrica de la teoria que, unificant espai i temps en una varietat quadridimensional, permet enllaçar la relativitat dels conceptes de simultaneïtat, durada i longitud espacial sota un sol concepte de distància espaciotemporal donat, tal com apuntava Riemann. Per a fer-ho hem de treballar amb la idea que podem fer descripcions físiques a través d'enunciats que fan referència a la coincidència d'esdeveniments en l'espai-temps. Un cop es fa aquesta descripció quadridimensional dels fenòmens és possible veure que s'hi pot associar, als postulats de la teoria especial un element d'arc:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 d\tau^2 \tag{6}$$

Les referències inercials són els sistemes cartesians corresponents a aquest element d'arc i les transformacions de Lorentz són les que converteixen les coordenades d'un sistema en un altre del mateix tipus, és a dir, conserven la forma de la mètrica per a l'equació (6). A més, les trajectòries de les partícules lliures són línies rectes, geodèsiques[51] de la mètrica, i per tant les que descriuen la distància mínima entre dos punts de la varietat espai-temps[52].

Podem dir, per tant, que la mètrica de la relativitat especial és *quasieuclidiana*. És a dir, fent un canvi de variable de tipus $ic\tau = t$, per al temps mesurat des de la referència donada, podem escriure la mètrica de la forma euclidiana:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 \tag{7}$$

[50] *Annalen der Physik*, 18 (1905), p.639-641. EINSTEIN (1998) p.119-122.

[51] Al capítol I definíem les geodèsiques com a la generalització del concepte de recta. Vèiem, a més, que era possible obtenir la seva expressió a partir del tensor mètric de Riemann amb tècniques *intrínseques* (és a dir, sense "mirar-se" la varietat "des de fora"). D'aquesta tasca s'encarrega el càlcul tensorial i una tècnica coneguda amb el nom de *derivació covariant*. A CARMO (1990) podem trobar el mètode per al càlcul en superfícies i deversos exemples.

[52] Els punts de la varietat espai-temps, que tenen quatre coordenades, descriuen una ubicació en l'espai i el temps en funció d'un sistema de referència donat. Les geodèsiques, que descriuen el que s'anomena *línies del món* de les partícules, són les rectes d'aquesta varietat que recordem que compleixen la propietat de distància mínima per definició de mètrica. La gran majoria de textos sobre relativitat centren bona part dels seus esforços en la comprensió d'aquests elements mètrics i la seva significació física. Veure, per exemple, GEROCH (1985) o SYNGE (1976).

Més enllà de la necessitat d'ús de les quatre dimensions conjuntament i del corresponent replanteig de les nocions de simultaneïtat, no representa un canvi substancial de paràmetres geomètrics. En certa manera el que representa la relativitat dels conceptes de temps i posició espacial és que no existeix una *estratificació natural* de l'espai-temps en subvarietats de dimensió tres en funció del valor de t. És a dir, parlant de manera col·loquial, no podem parlar d'un *retrat de l'espai en un instant determinat*. Està clar que això si era possible de fer en la física clàssica donat que t tenia una existència prèvia que determinava la resta.

Els anys posteriors a la publicació de l'article de 1905 Einstein emprèn una sèrie d'activitats destinades a consolidar la seva teoria. Mira de perfeccionar la seva forma desenvolupant, per exemple, noves deduccions de les equacions electrodinàmiques o escrivint articles on mostra alguns corol·laris interessants i altres de caire més divulgatiu. Per l'altra es dedica a la recerca en la gran teoria del segle, la mecànica quàntica[53].

D'entre els articles podem destacar el que va escriure el 1907 per a la *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, sota el títol *Sobre el principi de relativitat i les conseqüències que se'n deriven*[54]. A aquest article ja podem trobar una revisió històrica de la gènesi de la teoria tot fent referència als antecedents i, encara més interessant, una secció titulada *Principi de relativitat i gravitació* on podem trobar una sèrie de reflexions que apunten cap el que més endavant es coneixerà com *el principi d'equivalència* i que representa el punt de partida per a una teoria generalitzada de la relativitat.

3. La teoria general de la relativitat

El desenvolupament de la teoria ampliada a sistemes no inercials no va ser tan clar ni breu com el de la teoria especial però està molt més documentat. Existeixen nombrosos estudis al respecte que mostren com Einstein va anar depurant i incorporant els diversos elements que li van permetre establir una teoria del camp gravitatori.

Sabem, per exemple, que va deixar de banda l'estudi de gravitació fins el 1911, centrat en els estudis sobre quàntica, i podem dir que apareixen els primers treballs sintètics a partir de 1915 però el procés de gestació de la teoria es coneix força bé gràcies a l'abundància de cartes i manuscrits d'aquest període[55]. La col·laboració amb Marcel Grossmann (1878-1936) li va permetre conèixer el càlcul tensorial i la geometria reimanniana que el van portar finalment a formular satisfactòriament les equacions de camp de la gravitació.

53 El desenvolupament d'aquesta teoria és l'obra col.lectiva d'alguns dels científics més grans del S.XX. Einstein hi juga un paper rellevant des del 1905. Un dels articles d'aquell any tracta l'efecte fotoelèctric i el seu paper en la naturalesa dual de la llum. SÁNCHEZ RON (1992).

54 A EINSTEIN (1998) podem trobar una traducció parcial, on figuren la introducció i el títol V, *Principi de relativitat i gravitació*

55 EINSTEIN (1998) ofereix una bibliografia exhaustiva.

Un any després prepara un article on clarificava els fonaments de la teoria[56] i en veure la bona acollida el 1917 publica l'article divulgatiu *La teoria de la relativitat especial i general*[57]. A partir d'aquí es succeeixen els textos divulgatius de tota mena, ja sigui versions del propi Einstein com tractats d'altres autors amb aportacions pròpies o il·lustracions més o menys didàctiques.

3.1. El principi d'equivalència i les seves implicacions geomètriques

A partir de l'article de 1917 i del text del 1922 *El significat de la relativitat*[58] podem fer una exposició sintètica de la vinculació de la teoria gravitacional d'Einstein i la visió geomètrica que comporta.

Quan Einstein prova de formular un *principi de relativitat general*, que afirmi que tots els sistemes de referència mostrin descripcions de la natura equivalents (és a dir que tinguis lleis equivalents) troba, òbviament que aquesta equivalència no correspon a les condicions de invariança que mostren els sistemes mútuament inercials. Clarament, com ja hem mostrat abans, un sistema amb moviment accelerat manifesta comportaments mecànics peculiars que el fan diferent d'aquells en repòs o en moviment constant. Això portava a pensar, fins el moment, que hi havia una mena de realitat física absoluta en aquest tipus de moviments tal com havia mostrat Newton amb els seus experiments mentals.

Però Einstein té altres elements que no estaven a l'abast de la mecànica clàssica en la seva formulació inicial. En primer lloc, des de l'aparició dels fenòmens electromagnètics, la física disposa del concepte consolidat de *camp*. Una entitat física real i perceptible que s'inspira en el magnetisme i que s'estén a l'electromagnetisme. Això permet també concebre els conceptes de gravitació d'una manera anàloga. Així doncs, podem dir que un objecte de massa considerable crea al seu voltant un camp, aquest cop *gravitatori*, que actua sobre els cossos que hi entren, com podria ser una pedra. L'efecte d'aquest camp depèn també de la distància que separa l'objecte del seu focus seguint una llei ben coneguda i que s'expressa a través de magnituds que representen la intensitat i la direcció de l'efecte, això és a través d'un *camp vectorial.*

Aquest tipus de representacions del camp neixen, precisament, dels camps electromagnètics però el gravitatori presenta una característica remarcable i que, gràcies a la comparació que podem establir amb els camps anteriors és fa prou evident. Efectivament, un cos que es mogui sota l'efecte del camp gravitatori experimenta una acceleració que *no depèn del material ni de les característiques dinàmiques del cos*. És a dir, cossos de característiques físiques diferents, com la fusta, la pedra o el plom, experimenten els mateixos efectes en un camp gravitatori, *cauen amb la mateixa acceleració*. Aquest fet, que Galileu ja va constatar i que va suposar un canvi de paradigma crucial en l'aparició de la física, és tradueix en la igualtat dels factors de proporcionalitat de la segona llei de Newton (1) i la de la llei que relaciona la força amb que en un camp atreu un objecte i la

[56] *Els fonaments de la teoria general de la relativitat* publicat el 1916 a *Annalen der Physik,* 49, p. 769-822. Es pot trobar a EINSTEIN (1952) p.110-164

[57] La traducció al català la trobem a EINSTEIN (1998)

[58] Es tracta de la transcripció de quatre conferències fetes a Princeton el 1921 i publicades tot seguit sota el títol *The meaning of relativity.* La traducció al castellà data del 1945. EINSTEIN (2005)

intensitat del camp (2). Tal com ja remarcàvem a la secció 1.1. la anomenada *massa inercial* (m_i) i la *massa gravitatòria* (m_g) tenen exactament el mateix valor malgrat ser conceptes diferents. En efecte, donat que l'equació (2) expressa la relació entre força d'atracció gravitatòria $\vec{F}$ i el seu camp $\vec{g}$ la podem escriure com

$$\vec{F} = m_g \vec{g} \qquad (2')$$

i per altra banda l'equació (1) té la forma

$$\vec{F} = m_i \cdot \vec{a} \qquad (1')$$

on $\vec{F}$ pot ser qualsevol força, no només la gravitatòria, de manera que les masses han de ser conceptes diferents[59].

Així doncs, Einstein crida l'atenció sobre aquest fet, la igualtat dels dos tipus de massa tot declarant que

> «La mecànica ha *enregistrat* aquesta important proposició, però no l'ha *interpretada*. Només podem assolir una interpretació satisfactòria reconeixent que *la mateixa qualitat del cos* s'expressa, segons les circumstàncies, com a "inèrcia" o com a "gravetat".»[60]

En veure quin és l'abast d'aquesta igualtat es podrà constatar quina forma prendrà el postulat de relativitat general. Per a formular-lo Einstein ens proposa una experiència mental que passarà ràpidament a l'imaginari col·lectiu dels científics juntament amb els trens de la relativitat especial i el vaixell de Galileu.

La imatge de la caixa enmig de l'espai buit és àmpliament coneguda. Einstein ens situa dins, de manera semblant a la sotacoberta de la nau dels *Dialogo*, on no podem observar l'exterior. No hi ha gravetat i només disposem dels aparells necessaris per a poder mesurar els efectes físics a dins l'habitacle:

> «Suposem que al mig del sostre de la caixa, per la part exterior, s'hagi fixat un ganxo amb una corda, i que un ésser inespecífic comenci a tibar-ne amb una força constant. La caixa i l'observador s'enlairaran conjuntament amb un moviment uniformement accelerat cap "amunt", i amb el temps assoliran una velocitat fantàstica, cas que ho observem tot des d'un altre cos de referència del qual no es tiba amb cap corda.
>
> Ara bé, com jutja l'esdeveniment l'home de la caixa? El terra li transmet per reacció l'acceleració de la caixa, de forma que ha de resistir aquesta pressió amb les cames si no vol acabar a terra. Així, l'home s'està dret a la caixa igual que un altre s'estaria dret a una habitació d'una casa sobre la Terra. Si deixa anar un cos que té a la mà, l'acceleració de la caixa deixarà de transmetre-s'hi i el cos s'apropará al terra amb un moviment relatiu accelerat. L'observador es convencerà, a més, *que l'acceleració del cos cap al terra és sempre la mateixa sigui qui sigui el cos amb el qual faci l'experiment.*»[61]

Així doncs, el que ens mostra Einstein és que l'home de la caixa interpreta el que veiem des de fora com a sistema accelerat com si estigués sotmès a un camp gravitatori.

[59] Aquesta diferència conceptual entre massa inercial i gravitatòria havia de fer-se evident en diversificar les fonts de les forces que actuen sobre un cos amb l'aparició de l'electromagnetisme. En efecte, mentre les lleis es limitaven a la mecànica clàssica no era tan obvi que la força que pot actuar sobre la massa en la segona llei podia tenir altres orígens.

[60] EINSTEIN (1998) p. 36.

[61] *Ibid.* p. 36.

Aquesta és la idea central que regula la generalització del principi de relativitat, el conegut com a *principi d'equivalència*:

> «Deixant de banda de moment la qüestió sobre la "causa" d'aquest camp gravitatori, de la qual ens ocuparem més endavant, no hi ha res que s'oposi al fet que concebem com a real aquest camp gravitatori, és a dir, el sistema *K'* "en repòs" i un camp gravitatori present com a equivalent a la concepció que *K* és l'únic sistema "permès" de coordenades i no hi ha camp gravitatori. A la suposició de la completa equivalència física dels sistemes de coordenades *K* i *K'* l'anomenem "el principi d'equivalència", principi que està íntimament vinculat amb el teorema de la igualtat entre la massa inercial i la gravitatòria i significa una extensió del principi de relativitat a sistemes de coordenades que es troben en moviment recíproc.»[62]

Aquest principi es fonamenta en la impossibilitat de trobar efectes que diferenciïn un cas de l'altre. Un camp gravitatori i un sistema accelerat *tenen els mateixos efectes físics sobre tota mena de fenòmens*.

Òbviament, Einstein ens recorda que aquest tipus d'equivalència *es dóna localment*. És a dir, donat que un camp gravitatori sol ser de tipus "central" i els sistemes accelerats no tenen el mateix tipus de distribució en l'espai cal recordar que el postulat no vol dir que puguem "substituir" qualsevol camp gravitatori per un sistema inercial que "l'anul·li". Tal com puntualitza:

> «Podria pensar-se que, davant el camp gravitatori que sigui, sempre es pot triar un altre cos de referència de manera que, respecte d'ell, no n'existeixi *cap*, de camp gravitatori. Però això no és de cap manera cert de tot camp gravitatori, sinó només d'aquells amb una estructura molt especial. Així és impossible triar un cos de referència respecte del qual el camp gravitatori de la Terra s'anul·li (en tota la seva extensió).»[63]

És a dir, l'equivalència entre gravitació i sistema no inercial *és local*. És per això que en començar es considerava que un principi de relativitat general no podia ser definitiu.

Einstein recorda que la recerca d'aquesta equivalència era motivada per qüestions epistemològiques de fons. Des de la perspectiva clàssica (i la de la relativitat especial) hi havia sistemes de referència que tenien comportaments distingibles dels altres. Aquest *privilegi* havia de tenir alguna causa empíricament contrastable, en aplicació d'una mena de *principi de diferència* de Mill[64]. Ja hem vist que Newton atribuïa aquesta diferència a l'espai absolut, substancial, però en aplicació de la perspectiva que Mach exigia s'havia de buscar alguna causa *real*, és a dir observable. Per a Einstein aquest problema queda resolt en invalidar el privilegi d'un sistemes respecte dels altres.

---

[62] EINSTEIN (2005) p.74

[63] EINSTEIN (1998) p.37-38

[64] « Donat un cas on un fenomen sota investigació succeeix i un altre en que no i totes les circumstàncies són comunes excepte una, que només es produeix en el primer; aleshores l'única circumstància en què difereixen és l'efecte, la causa o part indispensable de la causa del fenomen.» MILL (1981), p. 391.

Un cop hem establert aquesta equivalència podem obtenir propietats del camp gravitatori en un ordre purament teòric. Es pot establir com es pot observar el comportament d'un sistema inercial des d'un que no ho és (òbviament tot això establert des d'un tercer punt de vista) i això ens permet inferir com afecta el camp gravitatori als processos estudiats.

Així per exemple, la trajectòria que des d'un sistema de referència podem constatar que és rectilínia (per exemple, en seguir una velocitat constant com ho fa un feix de llum) presentarà respecte un altre sistema, no inercial respecte el primer, una trajectòria amb acceleració, per exemple descrivint una curvatura. Aquesta acceleració es pot explicar per l'influx sobre el cos en moviment d'un camp gravitatori. És a dir, entre altres resultats podem dir que *els raigs de llum segueixen en general trajectòries curvilínies dins els camps gravitatoris*.

Aquest resultat és contrastable i això permet confirmar la teoria malgrat que pel seu valor extremadament petit necessita d'observacions molt acurades en presència de camps gravitatoris molt intensos[65].

Per altra banda també cal dir que Einstein reconeix que això afecta el postulat de la relativitat especial sobre la constància del valor de *c* que supedita als efectes gravitatoris.

En el desenvolupament de les conseqüències del principi d'equivalència Einstein es mostra interessat per l'efecte del sistemes en rotació sobre regles i rellotges i les conseqüències que té aquest aspecte sobre la geometria que descriu els fenòmens.

En estudiar el comportament de l'espai-temps en sistemes en rotació cal recordar els efectes de la relativitat especial. Així, un observador situat sobre un disc que gira pot, en funció del principi d'equivalència, considerar que la força que l'empeny en direcció radial i cap a fora no és el resultat d'una rotació sinó que és l'efecte d'un camp gravitatori. En experimentar amb regles i rellotges pot, a més, arribar a conclusions sobre el caràcter geomètric del que observa. Per exemple, pot constatar que el temps, els rellotges, marxen a ritmes diferents en funció de la seva ubicació en el disc. Certament la noció de simultaneïtat es veu afectada de manera semblant al cas de la relativitat general.

A més, l'espai, les distàncies, també experimenten efectes peculiars. Així, donat que un regle situat en la direcció de la rotació *s'escurça* respecte un altre en perpendicular, mesures que considerem indicadores de la curvatura de l'espai, com pot ser el valor del quocient entre circumferència i diàmetre, es veuran alterades. És a dir, la geometria que puguem establir *partint de les mesures fetes sobre el sistema* no seguirà les proposicions i teoremes de la geometria euclidiana.

Amb l'ajut de la geometria de superfícies de Gauss i la generalització que Riemann va fer i que hem esmentat al capítol I podem arribar a determinar quina és la mètrica que caracteritza aquesta geometria. Ja hem vist que la de la relativitat especial és de tipus euclidià i és previsible, qualitativament, que la que depèn del principi

[65] Aquest és el tipus de contrast que es va poder fer en el famós eclipsi de sol del 1919 que l'astrònom Arthur Eddington i el seu equip va dur a terme en fotografiar-lo.

d'equivalència no ho sigui. Cal, però, alguna llei que la caracteritzi i això és el que centra el treball de la relativitat general.

Ja hem vist que podem descriure els fenòmens físics fent servir la varietat de quatre dimensions de l'espai-temps. A la teoria especial podíem treballar amb referències que mantenien el seu caràcter euclidià, amb la mètrica de Minkowski, però ara hem de deixar de banda aquesta idea. Per tant només ens queda fer servir referències locals, tal com ens mostra la geometria gaussiana.

> « En general, tota descripció física es redueix a una sèrie d'enunciats, cada un dels quals fa referència a la coincidència espaciotemporal de dos esdeveniments A i B. Cada un d'aquests enunciats s'expressa, en coordenades gaussianes, a través de la coincidència de les quatre coordenades x_1, x_2, x_3, x_4,.De fet, la descripció del continu espaciotemporal mitjançant coordenades gaussianes substitueix completament la descripció mitjançant un cos de referència, sense patir mancances d'aquest darrer mètode, en no estar lligada al caràcter euclidià del continu que s'ha de representar»[66]

Així doncs, podem reformular el principi de relativitat general dient que «tots els sistemes de coordenades gaussians són essencialment equivalents pel que fa a la formulació de les lleis generals de la natura»[67]. És a dir, es tracta de trobar una llei, una equació, que descrigui el comportament de la natura per a qualsevol tipus de sistema de variables gaussianes. Això permet descriure l'espai-temps com una mena de "mol·lusc"[68] que li serveix de metàfora de la curvatura variable de la varietat, tant si es descriu amb espai i temps "formalment" separats com si ho fem quadridimensionalment.

Diem que una transformació entre dues referències és covariant si en observar els fenòmens físics des del primer sistema obtenim resultats que corresponen a d'altres de diferents, però associats, en un altre sistema. Aquestes transformacions constitueixen un grup i per tant és possible fer el procés invers de manera que es dóna una correspondència entre els efectes observats en un sistema de referència i l'altre, però no una identificació. Així, des d'un sistema de referència podem observar un objecte en rotació i des de l'objecte, pel principi d'equivalència, notarem l'efecte d'una acceleració que podem atribuir a un camp gravitatori. Aquests observadors seran els no inercials i la recerca d'Einstein és la d'una llei covariant.

Diferent és el cas de les propietats invariants, que són observables de la mateixa manera des de dues referències que, en aquest cas, han de ser mútuament inercials.

Einstein ha de trobar, doncs, una llei que garanteixi la *covariança* entre els sistemes de referència donat que aquesta és la «equivalència essencial» a la que pot aspirar. Cal aclarir que en relativitat és necessari fer una distinció clara entre els conceptes de covariança i invariança donat que s'apliquen a sistemes de referència diferents i tenen les seves implicacions.

---

[66] EINSTEIN (1998) p. 48
[67] *Ibid.* p.49
[68] *Ibid.* p.50

3.2. Relativitat general i les equacions de camp.

La llei que busca ha de complir algunes condicions, que Einstein especifica:

- Ha de complir el postulat de relativitat general tal com es formula s'ha modificat.
- La matèria-energia contribueix al camp que descriu en funció de la massa inercial present.
- El camp gravitatori i la matèria han de satisfer conjuntament la llei de conservació de l'energia i del moment.

Per al desenvolupament d'expressions físiques que respectin aquestes condicions Einstein va haver de conèixer i dominar l'ús de les eines de càlcul adients i donar així cobertura formal a la descripció de la relativitat general: els tensors.

Aquestes eines, que es desenvolupen sobretot a finals del s.XIX representen una generalització de magnituds matemàtiques com els escalars, els vectors o les matrius. Einstein reconeix la contribució dels treballs de Tullio Levi-Civita(1873-1941) i Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) i sobretot l'ajuda del seu amic Marcel Grossman en els quatre anys que li permeteren assolir una formulació de les equacions de camp pels volts de 1915[69].

El càlcul tensorial és una branca de la geometria diferencial (la generalització del treball de superfícies de Gauss que esmentàvem al capítol I) que treballa amb aplicacions de vectors tangents a la "superfície" (estem parlant de varietats de dimensió superior a 2) i el que s'anomenen i aplicacions d'aquests vectors als nombres reals. La seva manipulació és tècnica i complexa i ha de tenir en compte molts elements donat el seu caràcter general. Això va obligar a Einstein a desenvolupar noves notacions (que buidessin les fórmules per a la seva manipulació) i a buscar tensor de característiques encara no desenvolupades tot adaptant els tensors ja coneguts[70].

Seguint aquesta guia, que li permet treballar en varietats de dimensió superior es pot, finalment, trobar una llei de gravitació general que té, en format tensorial i amb la notació compacta d'Einstein, la següent expressió[71]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik} \qquad (8)$$

L'expressió de l'esquerra depèn del tensor simètric g_{ik} [72] què és el que representa les propietats mètriques de l'espai-temps i el camp gravitatori. Els termes que

---

[69] La documentació sobre la gènesi de la teoria general és colossal. Podem trobar, per exemple, els detalls d'aquests anys a SÁNCHEZ RON (1985) Cap. 9-12. p.127-193.

[70] Tot i la complicació del càlcul tensorial molts dels textos fan un esforç per explicar-los tècnicament. A EINSTEIN (2005) trobem, per exemple, un desenvolupament formal que condueix, de manera elegant, cap a la fórmula final i les seves implicacions.

[71] L'equació que regula la gravitació, coneguda com a *equació de camp*, *equació gravitacional* o *equació d'Einstein* és en realitat una relació entre tensors que es desplega, en 10 equacions en derivades parcials. La notació que es fa servir és habitualment la d'Einstein però podem trobar altres formes de designar-la. Hi ha, per exemple, diferències en la presència de constants en funció del sistema d'unitats que es vulgui triar. Aquí es mostra tal com apareix a l'apèndix II d'EINSTEIN (2005) p. 157.

[72] És per què el tensor és simètric, i per tant $g_{ik} = g_{ki}$, que en comptes de les 16 equacions que correspondrien a les 4 dimensions de la varietat espaciotemporal "només" n'hi ha 10.

l'acompanyen[73] són expressions funcionals d'aquest primer. La part de la dreta és el conegut com a *tensor d'esforç-energia* i es tracta d'una representació de la distribució d'energia que comporta el camp gravitatori. Podríem dir que és la expressió de la distribució de la matèria (en totes les seves manifestacions, per tant també energia). Així doncs, d'una manera simplificada es pot representar l'equació de manera simbòlica (i comprensible) d'aquesta forma:

$$\begin{pmatrix} \text{Curvatura de la} \\ \text{geometria de} \\ \text{l'espai - temps} \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} \text{Densitat de la} \\ \text{matèria en} \\ \text{l'espai - temps} \end{pmatrix}$$

L'equació (8) ja està neta d'algunes de les constants que apareixen a diversos tractats, en funció del rigor matemàtic i de la tria d'unitats físiques, però en la forma simbòlica cal deixar clar que es tracta d'una proporcionalitat de les expressions que representen els tensors. En tot cas, cal dir que el caràcter tensorial de l'equació comporta que el seu desplegament no és lineal i que, en general, la resolució pot ser molt complexa.

3.3. Relativitat i cosmologia

La teoria general va tenir poca anomenada en període d'entreguerres fonamentalment per dos motius. Primer, l'aparició de la teoria quàntica i la física nuclear centrava l'atenció dels científics més brillants, inclòs el mateix Einstein, pel seu caràcter fonamental i pels resultats sorprenents que aportava. Per altra banda, la teoria era formalment complexa i la seva rellevància empírica no era immediata. Malgrat tot Einstein va veure ràpidament algunes implicacions cosmològiques que amb el temps va ser possible contrastar. Aquest tipus de confirmació experimental va ser la que, amb el temps, va popularitzar la teoria i va consolidar-la com a model per a la mecànica celest.

Així per exemple, la teoria general li permet explicar (no només predir sinó aportar una causa) la precessió del periheli de Mercuri en la magnitud observada, a diferència de la teoria clàssica que havia de formular hipòtesis *ad hoc*.[74]

Einstein va mostrar algunes d'aquestes implicacions en diversos articles com ara *Consideracions cosmològiques sobre la teoria de la relativitat*[75] on trobem la primera aplicació de la teoria a l'estructura de l'univers i que es considera l'inici de la cosmologia moderna.

Partint d'una concepció de la inèrcia que prescindeix d'un espai absolut l'article postula un univers estàtic, finit i uniforme materialment. Això aboca Einstein a introduir un terme addicions a les equacions de camp gravitacional per tal de descartar la possibilitat d'un univers en expansió, la coneguda *constant cosmològica*. La història de la

---

[73] Es tracta del *Tensor de Ricci*, R_{ik}, i l'*escalar de Ricci*, R, que depenen també de la mètrica g_{ik} (això fa que els càlculs siguin encara més complicats). A més, Einstein va proposar que, atenent a consideracions de tipus cosmològic potser convenia afegir un altre terme a la part esquerra de la igualtat, l'anomenada constant cosmològica, que deixaria la fórmula així: $R_{ik}-\frac{1}{2}\cdot g_{ik}\cdot R-\Lambda\cdot g_{ik}=T_{ik}$

[74] La precessió del periheli d'un planeta és el canvi d'orientació, en el pla orbital, dels eixos de l'el·lipse que descriu en rotació al voltant del sol. Tots els planetes tenen aquest canvi d'orientació de l'òrbita però es tracta d'una magnitud inapreciable, exceptuant Mercuri. La teoria newtoniana prediu una precessió superior a la comprovada experimentalment. La diferència és petita però apreciable, 43'' d'arc per segle. La teoria general de la relativitat, en canvi, prediu una quantitat que correspon, dins el marge d'error, a la obtinguda experimentalment.

[75] Publicat el 1917 a *Königlich Presußische Akademie der Wissenschaften*, p.142-152. EINSTEIN (1998) p.141-150.

ciència ha mostrat que aquesta solució era massa restrictiva i aviat van aparèixer solucions que descrivien un univers obert i infinit, com ara la de Alexander Friedmann (1888-1925) que obrien la possibilitat a universos dinàmics. Les aportacions empíriques, el 1929, d'Edwin Hubble (1889-1953) en aquesta direcció[76] van fer reconsiderar la possibilitat que l'univers sigui estàtic i així ho va admetre Einstein en reconèixer que probablement la constant cosmològica havia estat l'error més gran de la seva vida. Malgrat això, els cosmòlegs encara no s'han decidit a eliminar el terme corresponent de les equacions de camp.

[76] Hubble va demostrar, a partir del desplaçament de les ones electromagnètiques que ens arribaven de les galàxies que aquestes s'allunyaven les unes de les altres.

III. Es sostenible una postura convencionalista? La discussió epistemològica

Tres anys després de la publicació de *Ciència i Hipòtesi*, de Poincaré, apareix l'article d'Albert Einstein sobre relativitat especial.

En aquest article es plantegen idees que més tard s'han entès com a innovadores però el cert és que per a molts científics del moment, com el mateix Poincaré, els treballs que s'anaven publicant anaven en la mateixa direcció si més no des del punt de vista de confirmació empírica. Això no implica que el punt de vista d'Einstein no fos revolucionari però si vol dir que bona part de la comunitat científica estava més o menys preparada per a rebre aquesta teoria.

En el terreny de la geometria, per exemple, el model espaciotemporal de Minkowski manté el caràcter euclidià i per tant tampoc suposa una revisió de les afirmacions d'uns i altres en relació a la possibilitat física de les geometries no euclidianes. De fet, a partir de l'aparició de la teoria de la relativitat especial la polèmica filosòfica es centrarà en nous àmbits com pot ser la revisió del concepte simultaneïtat i d'altres que, en relació a les qüestions que l'estatut de l'espai-temps suscitava a nivell filosòfic, suposava una forta sacsejada a visions clàssiques com podia ser el substancialisme. Això, com veurem més endavant podia reforçar el punt de vista del convencionalisme, si més no provisionalment.

Poincaré mor el 1912, d'una malaurada operació, i no pot assistir al progressiu lliurament de la "segona part" del programa einsteinià que representa la teoria general de la relativitat. I aquí si que, si més no a alguns aspectes, l'anàlisi convencionalista troba obstacles que ens forcen a una revisió.

El primer que podem dir, per immediat, és que la conclusió amb la que el matemàtic francès finalitza el capítol de la geometria perd, si més no, el seu caràcter inapel·lable. Ja no és obvi que la teoria més convenient, per còmoda, sigui l'euclidiana. Com a mínim en relació als càlculs. Però la qüestió és que això no representa, necessàriament, que les conclusions filosòficament més potents no puguin ser encara vigents. Potser més i tot.

Així doncs, davant de l'aparició de la teoria general de la relativitat ens podem fer algunes preguntes rellevants en relació a la visió convencionalista.

En primer lloc, com s'ha de retocar la proposta de Poincaré davant la confirmació de la teoria general de la relativitat? És necessària una reformulació? En quin sentit?

En segon lloc, malgrat les possibles revisions, hi ha marge per a la defensa del convencionalisme davant les dades que aporta la nova teoria? Podria passar que hi hagués algun tipus de prova que discriminés entre teories geomètriques?

En tercer lloc, afecta aquesta situació a d'altres aspectes ontològics de l'espai-temps més enllà de la constatació de la seva mètrica?

1. El convencionalisme després de la teoria general de la relativitat

Cal assenyalar que, si bé la paràbola de Poincaré feia referència només a la geometria de l'espai i, en canvi, a partir de la teoria especial de la relativitat ja hem de parlar d'espai-temps (i encara més amb la teoria general), les conclusions convencionalistes són aplicables de la mateixa manera a una discussió sobre la naturalesa euclidiana o no d'un món de quatre dimensions. De fet, les pròpies condicions de la teoria general de la relativitat ens remeten als atribolats habitants de l'esfera. Som, igual que ells, incapaços de transcendir empíricament el nostre món tridimensional i només podem esbrinar les seves característiques a través de la inferència sobre les mesures.

El principal argument de Poincaré era que, donat que qualsevol evidència que provingui de l'observació empírica requereix un marc teòric, les conclusions en relació a l'estructura geomètrica del món que formulem són fruit de la convenció. Això és així perquè, els fets s'han d'explicar tot afegint elements teòrics de manera que podem salvar aquells elements que ens convinguin tot postulant canvis correctius per a fer-los correspondre amb les dades.

Així, si volem mantenir una teoria gravitacional que, tot i explicar els mateixos fenòmens que la teoria general de la relativitat, mantingui el caràcter euclidià de la geometria de l'espai-temps, cal que afegim a la nostra teoria alguns elements correctius per a explicar els efectes que Einstein li atribueix a la curvatura espaciotemporal.

Per exemple, la modificació habitual és la de proposar un tipus de *Força Universal*[77] que (a) afectaria a tot tipus de fenomen físic, des de la matèria a les ones electromagnètiques de la mateixa manera i que (b) no coneix cap barrera. Aquesta proposta compleix dues condicions: primer, explica l'equivalència que es dóna entre camp gravitatori i sistema no inercial que es postula al principi d'equivalència (i que hem de considerar com un fenomen a emmarcar teòricament) i, segon, emula amb gran exactitud el tipus de força que es mostra a la paràbola de Poincaré. Òbviament una correcció d'aquest tipus pot complicar de manera horrible els càlculs i fer del tot incomprensible el que succeeix però aquest tipus de valoracions resulta complicat abstreure-les de l'àmbit de la subjectivitat.

Això és així, a més, perquè implícitament la lectura convencionalista entén que els elements bàsics i definitoris de la geometria no són objectes observables sinó que són, de fet, elements teòrics i per tant representen la nostra aportació en la "reconstrucció" dels esdeveniments. Si bé podríem dir que, per exemple, sí que observem de manera directa

[77] REICHENBACH (1957) p. 13.

elements estructurals de l'espai-temps, com la mesura del pas del temps (com una experiència interna) no resulta gens difícil mostrar que de la mateixa manera que l'instrument de mesura de distàncies, el regle o el feix de llum, està subjecte a l'efecte de qualsevol tipus de força postulada de manera universal també ho ha d'estar un altre aparell de mesura, en aquest cas temporal com és el rellotge, fins i tot en el cas imaginat per Einstein que els rellotges siguin lumínics. No hi ha accés directe a l'espai-temps, sinó a través d'aparells que registren fenòmens, que comparen objectes i que poden estar sotmesos a efectes físics.

La pròpia crítica d'Einstein a la física clàssica gira entorn a l'abandó del postulat d'existència de l'espai absolut com entitat pròpia però inobservable. En aquesta revisió la relativitat estableix clarament que no podem parlar, per exemple, d'interval de temps absolut sinó d'interval de temps *mesurat*. Observem el comportament dels raigs de llum, de partícules, de rellotges i de regles, no de l'estructura mateixa de l'espai-temps. I per tant aquesta estructura només és *inferible* a partir del comportament dels objectes materials. És tot el que hi ha, podríem dir. Però això suposa mediatitzar la mesura, i aquest mitjà també està subjecte als efectes físics.

No obstant, no hi ha unanimitat respecte si el que defensa el convencionalisme és l'existència real d'entitats ocultes a l'experiència que la teoria postula com a existents malgrat ser inaccessibles o si, per altra banda, el que fa la teoria és edificar sobre l'experiència una estructura, que no existeix al món físic, que permeti explicar els esdeveniments d'una manera concreta. Donat que aquest tipus d'inferències són clarament de tipus ontològic hi haurem de tornar més endavant.

Tot i així sembla que l'arrel del problema és la incapacitat d'una teoria de definir tots els seus termes a partir de les aportacions de l'experiència. Si una definició és o bé la reducció d'un concepte a altres conceptes o bé la designació directa d'un objecte (el que els neopositivistes anomenen una *definició coordinativa*) ens trobem que, com a condició per al darrer tipus de definicions, cal fer una tria arbitrària.

> «En triar una determinada escala podem fixar un cert nombre arbitrari de graus de calor per un cos donat, però aquesta indicació té un significat objectiu tant bon punt afegim la definició coordinativa de l'escala. Per contra, és la tasca de les definicions coordinatives donar un significat objectiu a les mesures físiques. Mentre no es va enunciar a quins punts del sistema mètric s'assigna una definició arbitrària , totes les mesures eren indeterminades; només descobrint els punts d'arbitrarietat, identificant-los com a tals i classificant-los com a definicions podem obtenir resultats de mesures objectives en física.»[78]

Aquest caràcter arbitrari sembla l'origen de la tesi convencionalista. En el cas de la geometria, per exemple, podem considerar que la distància és un *concepte coordinatiu*. Aquest fet és més clar si observem de quina manera es constituïa una geometria riemanniana, tal com vèiem al capítol I: triant una mètrica. En relativitat, aquesta opció coordinativa és implícita en la designació que constitueix la definició de recta[79].

[78] REICHENBACH (1957) p. 37.

[79] En triar, arbitràriament, la recta com la trajectòria que descriu la llum estem establint, per correspondència, el tipus de mètrica que la varietat tindrà i per tant el caràcter no euclidià de la geometria que descriu.

El que si que estableix la paràbola convencionalista és que les dades no ens ajuden a destriar entre teories. És a dir, les teories estan infradeterminades per la informació empírica. Pierre Duhem defensava que els suposats *experiments crucials* que han de permetre refutar definitivament una teoria entre les opcions en conflicte no existeixen en el sentit que sempre és possible afegir o modificar hipòtesis auxiliars per tal de salvar-la. A aquesta tesi Quine afegeix:

> « Qualsevol enunciat es pot defensar com a veritable si fem ajustos suficientment dràstics a un altre lloc del sistema (de creences)
>
> ...
>
> Recíprocament, pel mateix principi, no hi ha cap afirmació que pugui resistir una revisió. Fins i tot s'ha proposat revisions de la llei lògica del terç exclòs com un mitjà de simplificar la mecànica quàntica, i quina diferència hi ha, en principi, entre aquest canvi i el canvi pel van ser reemplaçats Ptolemeu per Kepler, Newton per Einstein o Aristòtil per Darwin?» [80]

Així doncs la tesi resultant de Duhem-Quine es pot sintetitzar en la següent afirmació: donat que totes les teories científiques són infradeterminades per les evidències empíriques sempre podem trobar una alternativa incompatible amb la teoria donada.

Això és prou conegut entre els historiadors de la ciència[81], que han assenyalat sovint que la idíl·lica idea que hom té de l'activitat científica i la seva relació amb l'experiència no només no es correspon amb la pràctica històrica sinó que tampoc té la suficient fonamentació teòrica per a prescriure-la.

Podem mantenir o "salvar" formulacions teòriques que semblen rebutjades per l'experiència atenent a consideracions que poden resultar alienes a l'interès científic, això és a l'anhel d'intel·ligibilitat, fent les modificacions pertinents en aspectes secundaris de la nostra visió del món. Igualment postulem teories que no tenen el recolzament empíric suficient per raons a priori[82].

La pregunta que ens podem fer, però, és: quin és el cost de la tria per una alternativa a una teoria confirmada per l'experiència? Més encara, quin preu hem de pagar per salvar el que ha estat refutat per les dades empíriques?

1.1. Com seria una alternativa a la visió geomètrica no euclidiana?

Malgrat que aquesta és una tasca de la física i fer-ho, per tant, des de l'especulació filosòfica ens exposa a cometre errors greus en la formulació d'alternatives podria resultar clarificador desenvolupar alguna de les conseqüències, o si més no els implícits teòrics, d'una teoria alternativa construïda sobre una geometria euclidiana. Això ens proporcionaria elements i referents a l'hora d'analitzar amb més profunditat fins a quin

[80] QUINE, (1971) p.43

[81] Kuhn, per exemple, reconeix el seu deute amb Quine a KUHN (1975) p.11

[82] Està documentada la tranquilitat d'Einstein en diverses ocasions on les seves teories no estaven suficientment contrastades per les dades fruit de la seva convicció de la solidesa de les seves teories. Einstein (1998) p. XIV i seg.

punt podem afirmar que dues teories són equivalents en la mesura que expliquen els mateixos fets i què hi ha més enllà de les dades empíriques.

Cal dir que, malgrat la discussió que ens ocupa gira entorn l'àmbit geomètric, una tria determinada d'una geometria comporta, necessàriament, el corresponent aparell teòric de manera que no podem dir que les geometries són intercanviables sense modificar d'alguna manera la teoria que la contextualitza. És a dir, suposar que és possible compensar l'existència d'un espai-temps no euclidià a través d'un tipus de força universal que afecti tot tipus de fenomen comporta una modificació substancial dels elements teòrics i de la relació que estableixen.

En el cas d'una geometria euclidiana caldria, per tant, una ampliació de l'àmbit d'influència del camp gravitatori, per exemple. Aquest tipus de força permetria per començar, postular que, malgrat la geometria que descriu espai i temps és euclidiana, les partícules lliures en un camp gravitatori no descriuen una trajectòria rectilínia en veure's afectades per aquest camp. És a dir, a un "escenari" espaciotemporal "pla" s'hi sobreposa un camp, de tipus gravitatori, però que afecta a tot tipus de fenomen.

Aquesta teoria, en tot cas, postula l'existència d'entitats indetectables en el sentit que, per exemple, les rectes euclidianes no són descrites per cap partícula. De fet, un sistema euclidià compensat amb un conjunt de forces (no cal que sigui una sola) no determina un únic món. Com que no podem saber quines són les rectes euclidianes, perquè es mantenen ocultes per l'efecte d'aquestes forces universals, tampoc sabem quina és la magnitud d'aquesta força. Per tant, podem dir que tenim un conjunt infinit espai-temps euclidians que corresponen al model no euclidià de la relativitat general. Per veure aquesta equivalència només caldria que imaginéssim que l'univers es mou acceleradament i en conjunt en una direcció determinada[83] (com si "caigués"). Aquest efecte seria indetectable malgrat que podria formar part del conjunt de forces universals que modifiquen el comportament de les partícules i ones igual que les altres.

Amb la teoria clàssica es postulava una equivalència del comportament cinemàtic dels objectes per tot sistema de referència inercial malgrat haver-n'hi un de veritable però inaccessible a l'experiència. Amb la teoria especial de la relativitat aquests comportaments passen a ser tots ontològicament equivalents. De la mateixa manera, amb la teoria general de la relativitat passem d'un món on les acceleracions dels sistemes de referència no inercials són equivalents, malgrat que només una és la veritable, a ser-les totes.

Si postulem un món amb una geometria euclidiana aquest tipus d'equivalència epistemològica entre els sistemes de referència es trenca. Tornaria a haver un sol sistema de referència veritable, en el millor dels casos, però no sabríem quin.

[83] L'exemple és de Maxwell i per tant correspondria a un model prerealista, tal com ens descriu SKLAR(1994) p.99.

2. Realisme

La majoria de científics i bona part dels filòsofs de la ciència que treballen sobre la naturalesa de la geometria de l'espai-temps es situen més aviat en la banda del realisme. Però quina és la formulació que en fan? Està clar que no es pot defensar una posició ingènua que es limiti a declarar que allò que diu una teoria és cert perquè és així com ho percebem.

Podem resumir els punts essencials de la tesi realista de la següent manera[84]:

1. Hi ha un món exterior, independentment de les nostres percepcions sensorials.
2. El món conté entitats i processos radicalment diferents d'aquells que es mostren a la percepció.
3. Podem, d'alguna manera, arribar a un cert grau de coneixement d'aquest món exterior encara que mai no arribi a ser absolut.
4. La ciència és la temptativa més legítima per part dels humans d'entendre l'estructura d'aquest món exterior tant en el seu aspecte general com en les seves complexitats i detalls. Això porta els homes a transcendir la seva experiència sensorial i a explicar-la.
5. Els científics fan aquesta tasca desenvolupant teories, que postulen al seu torn *entitats teorètiques*. Fent això, els homes esperen arribar a establir tan fidelment com es pugui la correspondència entre les entitats teorètiques i els objectes del món exterior objectiu.

El primer que cal dir, però, és que aquestes tesis són defensades per un conjunt més ampli de teòrics de la ciència que no els realistes. Tothom que fa filosofia, per exemple, accepta que l'activitat científica s'ajusta a la condició 5, com a mínim *com a intenció*. Ningú considera que la ciència inventa ficcions de manera voluntària i conscient ni que vol explicar el món creant entitats que sap que no tenen la seva contrapartida real. Això no vol dir que aquestes entitats purament conceptuals no tinguin el seu paper en el desenvolupament teòric ni tampoc que aquelles que es postulen com a fonamentades en objectes del món exterior siguin efectivament reals. És aquí on trobem discrepàncies. Així un idealista, per exemple, no negaria que la intenció de la ciència sigui complir els 5 preceptes anteriors. El que posaria en dubte és que s'assoleixin. Però el realisme sí considera que totes 5 condicions es donen ni que sigui de manera aproximada i provisional.

Les concepcions mantingudes pels diferents nivells de pensament entendrien aquestes condicions de manera diferent. Així, el sentit comú acceptaria la condició 1 però no la 2 donat que implicaria que la percepció seria immediata i ens mostraria tot el que hi ha. Però això voldria dir que no es podria explicar, per exemple, com és que hi ha hagut diferents teories científiques en diversos moments històrics.

---

[84] GRAVES (1971), p.7.

La negació de la condició 3 comportaria una concepció propera al pensament kantià donat que el que ens ve a dir és que no podem acceptar que les coses-en-si són inaccessibles i per tant de naturalesa desconeguda.

La condició 4 deixaria fora els escèptics i a tothom que considera que hi ha altres formes de coneixement immediat que ens acosten a la naturalesa de les coses. Podríem excloure, així, la metafísica i la fenomenologia donat que aquí podem considerar només el que serien les ciències "canòniques" com podrien ser la física, la química o la biologia.

La tesi realista es desplega en la condició 5, que sens dubte considerarien com a corol·lari de la 4.

Si bé podem trobar *realistes dogmàtics* que sostinguin totes cinc condicions de manera absoluta no cal entendre que una posició realista no té en compte l'evolució de les ciències. La majoria són conscients que el que s'ha dit seguint teories obsoletes és fins i tot contradictori amb les visions actuals i que per tant això pot tornar a passar. Però, encara que la ciència postuli entitats noves i per tant parli d'algunes que es considerin en un futur inexistents, els realistes entenen que una teoria en certa manera està parlant de coses reals. Si no ho són totes, la teoria haurà de ser millorada, però algunes quedaran com a tals. El fet que no sabem quines i que no puguem dir que ja hem descrit el que hi ha mostra només els nostres problemes epistemològics però no desmereix la concepció ontològica realista. Aquest seria un *realisme hipotètic*.

Tot i així, el fet que les teories han variat històricament i han prescrit l'existència d'entitats que després s'han descartat és un obstacle considerable per a la defensa sincera del realisme. Si fins el s. XVII es defensava l'existència del flogist, o fins el s. XIX el de l'èter (totes dues entitats necessàries a nivell teòric malgrat que, retrospectivament, no en teníem percepció), i si es considerava que la gravetat era una força que actuava instantàniament i a distància, com es pot defensar que el que es considera actualment com a real ho és?

Certament podríem observar que, si més no, el realisme és necessari *com a postulat regulador*. Des del punt de vista heurístic resulta necessària la consideració objectiva de les entitats que tractem en ciència si volem orientar-nos en la recerca. Fins i tot des d'un punt de vista psicològic un científic necessita percebre la seva activitat com alguna cosa més que un joc conceptual.

Però el que un realista defensa és que aquests supòsits no són només una guia per a la pràctica científica sinó que es donen *de facto*. Així, fins que no ens trobem alguna altra que ens provi el contrari, hem d'entendre que el que descriu una teoria és real. De fet, bé podria passar que la nostra teoria, encara que s'hagués de completar, fos la definitiva.

Probablement un realista conscient ho negaria, però sembla obvi que aquesta idea que la ciència ha arribat a donar-nos observacions definitives (no sabem quines, però) és una convicció subjacent. Podem, per exemple, jugar a imaginar que futures teories negaran la teoria de la relativitat (encara que no les proves empíriques que la fonamenten) però probablement el que s'esperi és que només empleni el buits de comprensió que encara trobem en la seva descripció de l'univers. En aquest sentit és interessant l'anàlisi que hom fa de la teoria newtoniana des d'una perspectiva contemporània. Els preceptes de la cinemàtica i la dinàmica clàssica no es consideren falsos. No es veu els *Principia Mathematica* com una obra que ens parla de coses fictícies (però si la *Física* aristotèlica) sinó com una exposició de casos-límit, d'aproximacions imperceptibles a la realitat.

I per què unes teories si i les altres no? Probablement perquè la teoria newtoniana s'ajusta al mètode científic, sigui el que sigui. Això fa que, de manera inconscient, es consideri també una teoria, *no només realista sinó real*. És a dir, per un realista parlem de coses que existeixen, i ho fem sabent que potser són una hipòtesi però convençuts de que no és així.

En relació a l'espai-temps, per exemple, un realista consideraria que allò que descriu la teoria, en el àmbit geomètric també, és real com ho són els pressupòsits que han portat a la conclusió teòrica[85]. Per tant, la mètrica, la curvatura de l'espai-temps i el concepte de recta, no serien només elements descriptius de fenòmens reals sinó que també existirien per si mateixos. No cal que això porti a concloure que l'espai-temps és una substància però, tal com veurem al proper capítol, hi té una vinculació forta.

El convencionalisme, tot i que no suposa necessàriament una negació de l'existència autònoma i real d'aquests conceptes, si comporta la impossibilitat que tenim de conèixer els seus veritables valors i, lligat a això, la derivada existència d'entitats suplementàries com podrien ser les forces universals. Per tant, més que negar qualsevol dels principis assenyalats anteriorment el que afirma és la seva incertesa. Podem postular aquestes condicions per a explicar l'activitat científica però no tenim cap mena de garantia que això s'ajusti a la realitat.

2.1. Pressupòsits ontològics en el realisme

Els realistes, per a negar aquesta possibilitat, es recolzen en dos tipus d'arguments que, de fet, són aspectes de la mateixa consideració: les raons de tipus epistemològic, que afirmen que les teories que es fonamenten en una estructura considerada *la més simple* en algun dels sentits comentats anteriorment, i la seva contrapartida ontològica, que entén que el món obeeix aquesta mena de requeriments i té una estructura concreta que les matemàtiques poden copsar. És a dir, el realisme geomètric treballa amb una visió *pitagòrica* del món, que s'estructura i es pot comprendre a través de la matemàtica. Només així es pot entendre que una teoria no sigui una simplificació de la realitat i alhora una construcció descriptiva fonamentada en conceptes no necessàriament existents.

El cas de l'apel·lació al caràcter simplificador de la geometria no euclidiana en relativitat general mostra l'ús de consideracions del primer tipus en la defensa de la descripció realista del món. Les rectes són objectes perceptibles en la trajectòria d'un feix de llum, per exemple, i per tant són reals i ens permeten percebre la curvatura de l'espai-temps, que té efectes en els aparells de mesura tant de longitud espacial com del temps.

[85] Només així podem explicar punts de vista com el del professor Norton que a diversos artícles, com "Why geometry is not conventional" NORTON (1994) que fonamenta el realisme relativista en la condició de covariança que és, al seu torn, un presupòsit realista.

No cal, diran, parlar de forces universals de les que potser no coneixem ni el seu origen i que per descomptat ens amaguen la seva magnitud.

Aquesta convicció ens evoca la *navalla d'Occam* que ens remet a principis ontològics però només en el cas que defensem la posició realista. En efecte, es pot aplicar un principi d'economia amb pretensions epistemològiques i mantenir aquesta idea fora de la suposició ontològica però només en cas que hom opti per una perspectiva transcendental, idealista o fins i tot escèptica però no si ho fem des del realisme.

Per tant, el que tenim és que el convencionalisme renuncia a fer *tantes* consideracions ontològiques com el realisme[86] i es limita a remarcar-ne alguna limitació. No podem, per exemple, assegurar que determinades entitats que resulten essencials per a la teoria relativista no siguin fictícies donat que podem complementar la teoria amb altres entitats, que poden ser també imaginàries (fins i tot ambdues), que les farien innecessàries.

3. Infradeterminació i equivalència empírica

En principi, tota teoria a discutir ha de ser *compatible* amb les dades empíriques que puguem obtenir. Aquesta és, si més no en el sentit feble que comporta no afirmar que en deriva[87], una característica essencial d'una ciència experimental. I per tant també ho ha de ser per la física i la seva estructura geomètrica.

Tot i així cal saber quina consideració ens mereix el problema de la fiabilitat empírica de les dades. És a dir, prèviament hauríem d'acordar si considerem fiables els procediments observacionals. No només degut a la clàssica afirmació sobre la seva fal·libilitat (o si de cas, en una versió contemporània, l'*aproximació* que comporten les nostres proves empíriques) sinó també per la naturalesa condicionadora de la teoria. La denegació d'aquest postulat previ només ens pot conduir a l'idealisme o al escepticisme, totes dues postures carregades d'ideologia i que, per tant, deixarem de banda.

L'arrel de la tesi convencionalista resideix en el fet, comú a altres àrees de la física, de la *infradeterminació* en la mesura que els fenòmens empírics no són suficients per a assegurar-nos que una teoria, la que vulguem, sigui l'única possible per a explicar-los.

En certa manera, aquesta infradeterminació empírica ja la trobem en el clàssic problema de la inducció parcial. Si bé la totalitat dels casos ens permet formular un enunciat universal està clar que una de parcial ens planteja el problema epistemològic de garantir que els casos no observats no confirmin la proposició formulada.

De la mateixa manera, més enllà de qüestionar altres elements rellevants en la determinació de teories només podem considerar les dades empíriques disponibles fins el moment. No tenim la garantia que no es produeixin observacions futures que siguin

[86] Que no vol dir necessàriament que el convencionalisme no faci presupòsits de cap mena. Si més no, en fa per descartar una concepció idealista quan entén que hi ha un món d'alguna mena que manté alguna de les seves característiques ocultes.

[87] Aquesta seria la tesi del positivisme decimonònic i, més sofisticada, una de les hipòtesis formals del neopositivisme del cercle de Viena.

incompatibles amb una teoria ni tampoc que haguem passat per alt dades ja obtingudes amb les mateixes conseqüències. És a dir, les teories sempre estan subjectes a revisions futures. Aquest tipus d'infradeterminació *feble* és sempre present en l'activitat científica i constitueix un *casus belli* habitual en la filosofia de la ciència on el que passa és que no hem trobat encara l'experiència que ens ajudarà a destriar entre teories però s'accepta la possibilitat que existeixi.

Volem parlar, en canvi, de dues teories que són *empíricament equivalents*. Què vol dir això? Quin és l'abast d'aquesta equivalència?

En una primera aproximació podríem dir que dues teories són equivalents si són acceptables sobre les mateixes evidències empíriques. Però aquesta definició té l'esmentat problema de provisionalitat.

Sovint, però, aquesta experiència resulta fins i tot difícil d'anticipar i per tant no sembla, a primer cop d'ull, que hi hagi cap possibilitat de discriminació. Tal seria el cas, per exemple, que es va donar amb la teoria quàntica en relació a l'alternativa de les variables ocultes. Inicialment semblava que l'experiència que permetria destriar entre teories només era un experiment mental[88], fora de l'abast de l'observable. Però el desenvolupament de les desigualtats de Bell i el posterior contrast dut a terme per Alain Aspect[89] va permetre, finalment, establir quina de les dues teories quedava confirmada per l'experiència (fins on s'havia arribat). Així doncs, només podem dir que les dues teories eren empíricament equivalents de manera provisional.

Hagués estat diferent si no existís la possibilitat d'aquest contrast empíric. En aquest cas, la paradoxa plantejada per un experiment mental pot plantejar problemes epistemològics o fins i tot conflictes ontològics però més aviat respon a requeriments, podríem *a priori*, del que ha de complir una teoria i que l'esmentat experiment ens mostra com a conflictius.

Vist això, sembla que la possibilitat que apareixi una *experiència de contrast* sempre és latent i per tant considerar la infradeterminació definitiva pot semblar precipitat. Això no ha de ser necessàriament així si tenim present que hi ha teories que, tot i ser mútuament *excloents* també són recíprocament consistents. És a dir, hi ha l'opció que contrastar-les sigui formalment impossible.

Si fos el cas, haurem d'acceptar que existeix un altre tipus d'infradeterminació, que ens ocupa, *més fort* que l'anterior. És aquest cas el que postula el convencionalisme, o millor dit el que es troba en l'arrel de l'anàlisi convencionalista: el fet que *fins i tot en el cas que disposéssim de tot el conjunt d'observacions possibles*, hi ha dues (o més) teories que les organitzen i expliquen. Les dades, fins i tot *totes* les dades, són insuficients per a determinar una teoria i per tant per a mostrar-nos com és la realitat. Si no fos així, ens trobaríem davant d'una suspensió temporal del judici. I això forma part de l'activitat científica habitual i ens portaria a plantejar altres qüestions.

---

88 Parlem de la paradoxa d'Einstein, Podolsky i Rosen (EPR) que en forma d'experiment mental ens plantejava possibilitats contradictòries per la intuició. Veure el seu desenvolupament a RAE (1998)

89 ASPECT, Alain. "Des Jumeaux inseparables". GÓMEZ PIN (2000) p. 403 i seg.

Tal com diu Quine a “On the Reasons for Indeterminacy of translation”:

> «el que afirmo de la teoria física és que aquesta està infradeterminada per la totalitat d’aquestes veritats. La teoria pot variar fins i tot si es troben fixades totes les observacions possibles. Les teories físiques poden trobar-se enfrontades unes a les altres i malgrat tot ser compatibles amb la totalitat de les dades possibles, fins i tot en el sentit més ampli. En una paraula, poden ser lògicament incompatibles i empíricament equivalents.»[90]

Tal com vèiem, el fet que dues teories expliquin exactament els mateixos fenòmens ens portaria a parlar d’equivalència entre elles. Aquesta, però, es referiria al seu lligam amb les dades experimentals i no ho seria necessàriament a nivell teòric.

Això suposa, és clar, que hi ha *alguna cosa més que les dades*. És a dir, que existeixen elements teòrics que *ho són de manera pura* i que, per tant no tenen contrapartida empírica. Això potser tenir dues explicacions; o bé són elements que tot i existir escapen a la nostra percepció (directa o indirecta) o bé no tenen una existència més enllà de l’àmbit abstracte de la teoria i per tant són alguna mena de recurs lingüístic sense una existència pròpia.

Les analogies són perilloses però si provem de mantenir aquesta observem que de la mateixa manera que els conceptes idiomàtics es relacionen de manera diferent en funció de la llèngua (fins al punt de ser visualitzables gramaticalment) els conceptes geomètrics lliguen amb la resta d’elements teòrics d’una determinada manera tot mostrant l’estructura de la teoria. I, per tant, l’equivalència empírica derivaria de la incapacitat de les teories per treballar només amb conceptes que provenen de l’experiència.

Sigui com sigui dues teories empíricament equivalents tenen elements teòrics diferents i hem d’admetre que aquests puguin ser fins i tot incompatibles. Tant si això últim es subscriu com si no, la infradeterminació pressuposa una diferenciació, clara o confusa, entre termes teòrics i dades empíriques. Aquesta delimitació, però, pot ser problemàtica i per tant pot afegir confusió a la possible equivalència. De fet, que la teoria és una condició prèvia per a la obtenció de dades i que això fa difícil afirmar que dues teories es recolzen en la mateixa informació experimental és quelcom que ja està acceptat àmpliament en teoria de la ciència. Les discrepàncies sorgeixen en establir l’abast d’aquest condicionament. Per una banda podríem dir que la informació empírica que obtenen dues teories és tan diferent que, de fet, són sistemes incommensurables o, per altra, és possible defensar una “traductibilitat” entre teories que permeti establir si són equivalents d’alguna manera o en algun àmbit.

3.1. El reduccionisme i la determinació de la teoria per les dades experimentals

Hi ha, per altra banda, una opció que permet resoldre el problema de la commensurabilitat entre teories. De fet, és una possibilitat òbvia un cop plantegem la separació entre termes teòrics i experimentals i l’equivalència entre teories a nivell empíric. Es tractaria d’entendre que, donat que els termes teòrics no tindrien la seva

[90] QUINE (1970) p. 179.

contrapartida sensible, hem d'arribar a la conclusió que només té significat allò que aporta l'experiència i, per tant, malgrat que semblen incompatibles, totes les teories que són empíricament equivalents són en realitat la mateixa teoria.

El símil que es fa servir sovint per il·lustrar aquesta idea consisteix a comparar les teories amb els idiomes. Si bé dos idiomes sonen diferent, en tant que es refereixen als mateixos fets venen a dir el mateix. Una frase traduïda a un altre idioma, deixant de banda els matisos lingüístics i les metàfores filològiques, vindria a dir el mateix que la original i per tant, tot i que semblen diferents són en el mateix.

Aquesta visió, coneguda amb el nom de reduccionisme, s'atribueix sovint a Hans Reichenbach que a *La filosofia de l'espai-temps*, exposa a grans trets aquestes idees i les relaciona amb la perspectiva convencionalista.

Aquest tipus de visió que el que ens ve a dir és que hi ha d'haver una certa capacitat de traducció entre termes teòrics ha provat ser força eficient en aplicar-se a diverses formulacions de la mecànica quàntica. Més enllà de possibles objeccions i de matissos a tenir en compte no resulta gaire agosarat veure teories com la de Heisenberg i Schrödinger com a *representacions alternatives* de la mateixa teoria i de la mateixa realitat. Els conceptes d'*estat* i d'*observable* no són accessibles a l'experiència i per tant constitueixen elements propis de la teoria. Una versió considera que un és variable en funció del temps i l'altre fixe i l'altra treballa amb la consideració inversa[91].

Si això és cert, la geometria no euclidiana pròpia de la teoria general de la relativitat i una formulació euclidiana amb l'afegit d'un conjunt de forces universals que modifiquen les trajectòries i comportament de les partícules i ones són en realitat la mateixa cosa. Això és així perquè en recórrer als conceptes teòrics que organitzen les dades empíriques en una i altra teoria ho fem de manera diferent i per tant "simplement" assignem a conceptes teòrics diferents.

Si assumim que les teories empíricament equivalents són en realitat la mateixa podríem considerar que la que té els termes teòrics més directament vinculats a les dades observables és la que garanteix que tenen una existència més *plena*. L'inconvenient que podem trobar en aquesta identificació entre dades experimentals i explicació del món on els elements teòrics només tenen una funció subsidiària és que, de fet, no està clar que puguem definir el vocabulari teorètic a partir, només, de termes observacionals.

A més, si dues teories són en realitat la mateixa per ser empíricament equivalents podríem enunciar una tercera teoria que es reduís a proposicions sobre aquests fenòmens observables que constitueixen la base de la seva identificació. La nova teoria seria, és clar, equivalent. I a més, tindria la virtut d'estalviar-nos conceptes de dubtosa fonamentació. En aquest sentit podríem dir que aquesta darrera teoria, la *reduïda*, es limitaria a fer una classificació "taxonòmica" d'esdeveniments. Tot allò no observable seria en certa manera *irreal* en ser desterrat de la teoria i podríem, arribant a l'extrem, acabar negant tot allò que fugi de l'experiència directa, electrons inclosos per exemple.

[91] Això no vol dir que altres versions de la mecànica quàntica siguin tan fàcils d'establir com a representacions de la mateixa teoria donat que, com deiem, no sempre és trivial destriar conceptes teòrics de dades experimentals. Detalls a SKLAR (1977) p. 144-145

Més greu resulta encara que aquesta posició significa la renúncia a la intel·ligibilitat pròpia de la ciència. No volem *entendre* el món sinó només fer-ne un recompte. Aquest és l'inconvenient habitual de la simple taxonomia i també ho seria d'una teoria que es limités a fer un "recompte de resultats".

Un altre dubte que planteja el reduccionisme és que semblaria que la teoria té sentit només si és entesa de manera completa. Això vol dir que no és possible separar termes teòrics dels observables i no només difícil com semblava a primer cop d'ull. En aquest sentit, per exemple, si comparem la visió no euclidiana de la gravitació amb la euclidiana no ens podem preguntar què ha canviat, quines entitats teòriques, donat que hauríem d'assumir que ho ha fet *tot*. Si bé no cal portar el vincle entre teoria i dades empíriques fins a aquest extrem si que cal recordar que l'experiència està impregnada de teoria i que per tant resulta molt difícil fer-ne una dissecció.

El reduccionisme no es pot considerar una versió de la infradeterminació tot i els lligams. Això és així perquè en acceptar, com ho fa un reduccionista, que l'equivalència empírica el que amaga és la mateixa teoria estem dient que només hi ha una explicació al conjunt de fenòmens i això és precisament com dir que aquests determinen unívocament l'estructura conceptual que els explica. I la infradeterminació, en canvi, pressuposa que les dades, fins i tot totes les dades possibles, no *ens forcen* a acceptar una teoria.

Podríem arribar a preguntar-nos fins i tot si el reduccionisme és convencionalisme, en el fons. Està clar que sí ho és en el sentit que entén les dues teories geomètriques igualment acceptables per descriure el món i per tant veu l'opció per la versió no euclidiana com a resultat d'una decisió fonamentada en raons pragmàtiques. Però és possible fer una lectura convencionalista que entengui les teories com a diferents, i de fet incompatibles més enllà de les dades empíriques, i per tant no hagi de resoldre el problema peremptori de la distinció entre el que és observable del que és teòric.

Per tant cal que ens demanem quin aspecte presenta un convencionalisme que entengui l'equivalència empírica sense reduir les teories a una sola. Aquesta és, probablement, l'opció que subscriuria el mateix Poincaré però fins i tot en el cas que no fos així és certament una opció que presenta avantatges davant la reduccionista.

Abans, però, cal esmentar la possibilitat que les teories no es considerin equivalents malgrat les aparences en virtut d'una consideració errònia de la diferència de tipus entre els entitats teòriques i les dades experimentals.

3.2. Equivalència entre teories incompatibles

Podem admetre que el realisme és un punt de vista construït sobre peticions de principi i que, per tant, pateix d'una manca d'esperit crític del tot insatisfactòria i rebutjar, també, que les teories equivalents són com defensen els reduccionistes, versions de la mateix concepció del món. Cal que resolem, llavors, el problema de l'equivalència entre teories que considerem, però, incompatibles.

El primer que podem dir en aquest sentit és que cal parlar, doncs, de teories empíricament equivalents que presenten alguna mena d'incompatibilitat a nivell teòric. I això ens porta a afirmar que allò que pertany a l'àmbit de lo inobservable ha de ser entès com a *existent d'alguna manera*. Vist així el convencionalisme entendria que, malgrat tenir dues opcions que descriuen móns certament diferents el que succeeix és que *les dades no ens forcen a triar entre elles*.

Per altra banda l'*equivalència sense identitat* que representa el desvincular-nos de la via reduccionista ens força a tractar el tema de la commensurabilitat. És a dir, com definirem, de la manera més formal possible, les teories *només* empíricament equivalents[92]?

Si ens proposem definir-les a partir, només, dels resultats experimentals cal recordar el fet que una teoria sempre permet la formulació d'una alternativa si incorporem les suficients modificacions (tesi de Duhem-Quine) de manera que és possible construir una teoria equivalent *després* de les proves. A més, de la paràbola convencionalista sembla que es desprèn una idea de confrontació de teories que aquesta definició certament no té.

Plantegem, doncs, una nova definició. Afirmem que dues teories seran equivalents si tot allò *empíricament acceptable* per la teoria A ho és també per la teoria B.

Però què vol dir empíricament acceptable? Aquesta qüestió és rellevant fins i tot si no ens trobem amb la dificultat de definir teories equivalents, donat que també és a l'arrel de la confirmació *realista* d'una teoria. A més, fins i tot si donem això per solucionat, no podrem saber en què consisteix la incompatibilitat entre teories malgrat no ser reductibles a les conseqüències observables (descartada ja l'opció reduccionista). Cal, doncs, que els elements teòrics plantegin diferències radicals al marge de les dades empíriques.

Definim: Donada una teoria A acceptable empíricament podem trobar una altra B que considerarem *equivalent* si

a. Totes dues són confirmades *en el mateix grau* per l'evidència disponible.
b. Cap d'elles no és falsada per cap evidència *disponible*.
c. No hi ha cap evidència possible que suporti només una de les dues.
d. Les dues teories impliquen l'existència de dos mons radicalment distints.[93]

Podem dir que aquesta és una versió més acceptable en el sentit que sembla compatible amb la imatge convencionalista. En definir les teories equivalents d'aquesta manera i acceptar, per la tesi de Duhem-Quine, que si tenim una teoria sempre en podem tenir una altra ens veiem abocats a reconèixer que triem una de les teories per motius convencionals o bé atenent a raons *a priori*. En cas que ens decantéssim per la darrera explicació hauríem de reconèixer, però, que tot i així es comparteixen molts punts en comú amb la teoria convencionalista i que allò que la fa diferents ens porta per la via de l'epistemologia kantiana.

[92] La commensurabilitat de teories es tracta amb detall a diversos textos. Valgui com a exemples RAY(1991) p.90-91 o GLYMOUR (1971)

[93] Si volguèssim fer-ne una definició d'equivalència empírica que ens portés a la tesi reduccionista només caldria que eliminèssim la condició *d* i observèssim que «Les dues teories no són genuïnament diferents donat que són reduibles a les mateixes conseqüències observacionals»

Malgrat tot, sempre tindrem un dubte. Podem afirmar que dues teories són equivalents, empíricament, si les dades estan impregnades de teoria? Donat que les dades de l'experiència estan fortament lligades a la teoria no sembla possible "llegir-les" fora d'aquesta. Com podríem, en aquest cas, afirmar que recolzen l'altra?

4. Criteri d'elecció entre teories

Sovint la discussió sobre el convencionalisme s'ha centrat en l'arbitrarietat de la tria, o més ben dit, la fonamentació de l'elecció entre teories. La simple elecció, atenent a confusos criteris de conveniència, resulta del tot insatisfactòria. Sobretot perquè la conveniència no sembla pas que estigui lligada necessàriament ni amb el món exterior ni amb criteris suficientment objectius. Si això és així sempre es pot mirar de subministrar millors criteris per a justificar l'ús d'una teoria en comptes d'una altra. Malgrat que la prova de càrrega no li correspondria als partidaris de la conveniència (al cap i a la fi, hi ha marge a l'arbitrarietat) la versió que volem desenvolupar ha de tenir present aquest fet. A més, hi ha la possibilitat que en la recerca d'un criteri trobem la prova necessària per a decidir sobre el criteri convencional.

4.1. Per què la teoria triada hauria de ser certa?

Sigui quin sigui el criteri per a triar una teoria o una altra la pregunta que segueix present en acceptar la paràbola convencionalista és òbviament per què hauríem de pensar, en tot cas, que el que descriu la teoria és cert.

De fet, la discussió es fonamenta, prèviament, en un empirisme moderat. Això és així en la mesura que no qüestionem més enllà de lo raonable la veracitat de les nostres percepcions. Per exemple, si hem de considerar que la llum descriu una trajectòria diferent en passar a prop del sol o no (sense dir quina és la causa donat que això és el que fa una o altra teoria) i mostrem, per a provar-ho, les dades experimentals obtingudes, per exemple a un eclipsi, cal que aquests resultats no es qüestionin ni es posi en dubte la seva existència. Això ja representa un posicionament tant ontològic com epistemològic. Dit d'altra manera, el convencionalisme no es planteja la possibilitat filosòfica d'un idealisme ni tampoc el de l'escepticisme cognitiu més radical.

Semblaria raonable, però, pensar que l'aspiració d'una teoria científica és la de conèixer fins allà on sigui possible com és el món. És aquesta aspiració d'intel·ligibilitat la que exigeix que una teoria sigui alguna cosa més que la descripció dels esdeveniments. Si no fos així, n'hi hauria prou amb la tesi reduccionista, donat que aquells aspectes teòrics que són incontrastables no ens haurien de preocupar i per tant l'elecció entre teories hauria d'obeir sobretot a criteris pràctics. De fet podríem fer una lectura del convencionalisme en aquest sentit però resultaria massa restrictiva i la seva justificació qüestionable, si més no.

El que podem extreure d'aquesta visió és més aviat un avís, una guia per a no treure conclusions més optimistes del compte. Hi ha coses que podem dir del món a partir de les dades, n'hi ha d'altres que no. La qüestió és si allò que no està confirmat directament per l'experiència i només ho està per la teoria hem de considerar que és veritable. És a dir, tenim la certesa que si la teoria triada diu que la geometria de l'espai-temps és no euclidiana això correspon a alguna cosa externa? Podem dir que l'existència de les entitats geomètriques que la teoria requereix són veritables en el sentit de correspondència?

4.2. Escepticisme

És possible fer una lectura de la hipòtesi convencionalista que ens condueixi a l'escepticisme. Certament hi és quan entenem que la conveniència que ens mou tendeix més aviat a la convenció o a l'arbitrarietat. En aquest cas el que hauríem d'entendre de la impossibilitat de determinar la veritable naturalesa de les entitats geomètriques de l'espai-temps és precissament que aquestes són inaccessibles i que no hi ha cap criteri que ens ajudi a destriar entre les diferents opcions. Qualsevol raó que poguem exposar per a optar per una visió mètrica del món en comptes d'una altra s'hauria de fonamentar en criteris previs que no estiguin relacionats amb les dades de l'experiència. I per tant, que no ens informen de la naturalesa real del món. Si això és així aleshores cal reconèixer que el que diem del món és, en certa manera, una conjectura o, tal com veurem, una expressió *a priori* de la nostra percepció.

Les raons per les quals decidim fer servir una explicació del món i no una altra només seran ontològicament significatives si estan fonamentades en les condicions d'existència de les entitats que fa servir una teoria i no pas en altres consideracions metodològiques o epistemològiques. Però, en certa manera, això ja presuposa una petició de principi, una perspectiva de caire ontològic que fonamenta la nostra percepció del coneixement. Com sempre l'escepticisme, si no és total, resulta difícilment refutable i ens pot portar a un convencionalisme radical on el criteri és la simple predilecció.

Com veurem, l'única sortida que podem trobar a l'escepticisme aplicat a la geometria serà entendre que les entitats que li són pròpies no han de ser, necessàriament, corresponents a objectes reals i que, per tant, el fet que no tinguin contrapartida objectiva no ens aboca necessàriament a la ignorància.

4.3. Criteris formals. Apriorisme

Si renunciem a l'escepticisme i acceptem que davant dues teories equivalents hi ha d'haver algun criteri per a triar el que més s'ajusti a la realitat sense recòrrer a les dades com a element discriminador haurem d'adreçar-nos als criteris formals. Si deixem a banda la idea que els criteris a priori per a classificar les teories en funció de la seva versemblança són diferents per a cada individu, que ens conduiria a un clar subjectivisme, haurem d'establir quins criteris podem considerar objectius[94].

Ara bé, si no podem considerar el lligam de la teoria amb les dades, donat que es tracten d'equivalències empíriques, ens queden només opcions de caràcter estructural. És a dir, què podem trobar en una teoria, estructuralment, que la fa preferible a una altra

[94] El subjectivisme estaria proper a una lectura convencionalista en el sentit que les raons per a triar un criteri per sobre d'un altre serien, també, convencionals.

d'empíricament equivalent? A més, malgrat que hem descartat l'equivalència provisional de les nostres especulacions cal tenir present que això és només una suposició i que no podem deixar de pensar en la possibilitat que els nostres criteris a priori ens forcin a triar una teoria que, com a mínim, ens allunyi de futures dades experimentalment significatives o fins i tot quedi refutada. Pot un criteri a priori conjurar aquesta possibilitat?

Per començar, donat que tota teoria nova està vinculada a d'altres, en la mesura que té un rerafons sobre el que s'ha pogut desenvolupar, podríem atendre a un *criteri de continuïtat* amb les teories precedents. És a dir, en aquest cas hauríem d'escollir aquella que es desvia menys dels elements que considerem significatius de les visions prèviament acceptades (i que han quedat obsoletes per causa de les noves observacions). Així, la teoria newtoniana, que podem considerar el precedent, és incompatible amb la teoria relativista però si volem construir una alternativa preferible podríem optar per mantenir alguns aspectes de la vella teoria que ens semblin més rellevants. A la teoria clàssica empràvem rellotges i regles per a la mesura de les distàncies espacials i temporals. Això segueix sent cert en la teoria relativista però no ho podríem conservar en una teoria alternativa, com la que pressuposa forces que modifiquen els aparells de mesura. Per altra banda, una teoria com la darrera conservaria el caràcter euclidià de l'espai-temps mentre que el relativista no ho fa.

Per tant, si volem ser conservadors respecte antigues teories ens trobem amb un problema. Què és preferible mantenir?

Encara pitjor, si acceptem la teoria relativista podem reconstruir la teoria newtoniana de manera que els elements que no ens resultin significatius no tinguin cap mena de protagonisme. És a dir, si ens mirem de guiar per les teories que ens precedeixen, podem fer-ne una reconstrucció en els termes significatius que ens convinguin. Podríem per exemple, com de fet succeeix en els textos divulgatius de relativitat, fer una exposició de la teoria de Newton a partir d'un espai-temps de curvatura per determinar i després establir que aquesta era nul·la. Vist així, el canvi que exigeix la teoria general de la relativitat és mínim: només hem de modificar el valor de la curvatura.

I si triéssim en funció de criteris de *plausibilitat intrínseca*? És a dir, atenent a la forma interna de la teoria? Això ens portaria a fer-ho en funció de la seva *simplicitat* però aquest terme resulta com a mínim confús, tant com ho és la conveniència. En primer lloc, hem de parlar de simplicitat a l'hora de formular els enunciats que descriuen els fenòmens. Això és el que s'anomena, en paraules del reduccionista Reichenbach[95] simplicitat inductiva. Aquest tipus de diferències en l'obtenció de continguts observacionals difícilment lliga amb la possibilitat d'equivalència empírica. I donat que estem parlant de teories que són equivalents en el sentit fort suposem que aquesta

[95] REICHENBACH (1938) p.374-375.

possibilitat no es donaria. Es tractaria per tant, seguint la terminologia anterior, de *simplicitat descriptiva* en comptes d'inductiva.

Podem dir que la teoria general de la relativitat resulta més simple per l'ús de la geometria no euclidiana? Certament els càlculs i la condició de covariança queden millor expressats en funció d'una mètrica no plana que no pas amb l'ús de forces universals que, en cas que fos possible, ens poden abocar a les mateixes expressions o a d'altres d'ingovernables. Però el que podem simplificar per una banda ho podem complicar per una altra. A més, la simplicitat depèn fortament de la manera que s'expressen les teories a comparar. Qualsevol persona que provi d'entrar en el món de la relativitat general podrà comprovar que no resulta precisament òbvia. La simplicitat amb què es percep una teoria pot dependre d'elements com les característiques estructurals de la teoria o la forma lògica de les seves premisses però també del desenvolupament de les seves eines didàctiques.

Podríem, però, referir-nos a la possibilitat de minimitzar conceptes i postulats en la teoria si volem dir que aquesta és simple. En certa manera, una teoria que fa servir menys elements, que unifica conceptes sota un de sol i, sobretot, que minimitza els elements postulats indetectables ens resultarà més fàcil d'acceptar com a preferible. Així per exemple, la teoria especial de la relativitat elimina la necessitat de suposar l'existència de l'èter i d'una velocitat oculta per a la llum respecte a ell. En canvi, la visió clàssica explica aquesta incapacitat per a detectar-la a través de dos efectes, donat que per una banda entén que la llum té una velocitat diferent segons el sistema de referència i per l'altra els efectes de la contracció de Lorentz-Fitzgerald fan que aquesta velocitat sigui indetectable. Sembla, doncs, que aquesta teoria corregida resulta *innecessàriament complexa* malgrat ser empíricament equivalent a la teoria especial de la relativitat. De fet, el propi Einstein reconeix que la recerca d'una teoria de la relativitat neix d'observar que les equacions electromagnètiques de Maxwell són *massa* complexes en el sentit que un efecte que sembla de totes totes el mateix s'ha d'explicar amb dues equacions diferents[96].

En el cas que ens ocupa, la relativitat general i els seus efectes sobre la geometria de l'espai-temps permeten explicar el comportament de la llum i les partícules sense cap més recurs teòric. Si contraposem la teoria d'un espai-temps pla amb forces universals que desvien aquestes partícules i la llum cal que reconeixem que, donat que el nombre de forces universals que podem aplicar no és concret[97], en realitat estem postulat un nombre infinit de mons equivalents dels quals no en podem destriar un de determinat. Això també sembla d'una complexitat més gran que la de la teoria general de la relativitat.

Així doncs, determinades visions del principi de simplicitat ens acosten al principi d'economia. Minimitzar conceptes, lleis o postulats semblaria una de les tasques de la comprensió científica en el sentit que com més general sigui un principi més a prop sembla que estiguem de la seva explicació. Però, tal com hem vist, a banda de les dificultats per determinar el grau de complexitat d'una teoria aquesta idea enllaça amb criteris ontològics a priori.

[96] Tal com diu en començar l'article de 1905. Veure II, 1.3.
[97] Veure III 1.1.

Les visions anteriors, tot i satisfer criteris convencionalistes, presenten problemes a l'hora de convèncer el científic que la teoria que està treballant és real. Això no és banal donat que en portaria a l'escepticisme o al reduccionisme.

Aquesta dificultat no la té la perspectiva que podem anomenar *"apriorisme"*[98] i que fonamentada en una primera versió en un espècie de racionalisme que considera les veritats matemàtiques com alguna cosa prèvia a l'experiència, posteriorment es concreta en una atribució fonamental a les dades sensorials en dirigir-nos cap a la teoria que hem de creure certa.

Així doncs, el que proposen és l'establiment de criteris per a triar entre dues teories empíricament equivalents en funció de quina és la més *versemblant*.[99] Malgrat que totes les teories empíricament equivalents són possibles, no es considera que ho són en la mateixa probabilitat. Hi ha teories més "possibles" o "convincents" que altres i per tant són les que, en entendre-les com a confirmades per igual per les dades empíriques, triaríem.

En el cas de la geometria de l'espai-temps, però, ens hem de preguntar, quin podria ser l'origen d'aquesta versemblança? Ho és menys una teoria amb un món euclidià i unes forces universals que una que descriu el món amb la sola geometria no euclidiana?

En conclusió, els criteris de versemblança d'una teoria més enllà de les dades empíriques només poden ser de tipus intern. I això porta un altre cop a pensar en simplicitat, amb els inconvenients que ja hem tractat anteriorment, o bé en la *potència explicativa*, és a dir en el seu nivell de generalitat.

El criteri de potència explicativa resulta particularment interessant per diverses raons. Primer perquè atén a un dels pressupòsits de l'activitat científica que no depèn exclusivament de les dades empíriques si considerem aquest concepte en un sentit ampli, com és el de predicció.

En segon lloc, perquè ens porta a un àmbit de l'estudi de les ciències que té en compte els *fets històrics*. Al cap i a la fi, no té sentit considerar que construirem les nostres teories científiques atenent la compatibilitat amb les dades de l'experiència i després negligir-les a la primera oportunitat. La història del desenvolupament científic ens pot mostrar, per exemple, com s'han triat les teories que, provisionalment, s'han considerat equivalents.

La darrera raó que podem donar és que constitueix la viva expressió de l'anhel de comprensió del món. I en aquest sentit, tot i ser una condició a priori de la teoria, ho és sense plantejar els problemes de justificació que hem pogut trobar en altres criteris. És a dir, en la mesura que nous resultats amplien la nostra *base empírica* una teoria amb una àmplia capacitat predictiva constitueix una eina d' intel·ligibilitat millor que no una altra d'equivalent, fins i tot si pot justificar els mateixos resultats que la primera.

---

[98] La nomenclatura la podem trobar a SKLAR (1977) p.80-82,129-133

[99] Sklar ens mostra un exemple al respecte construint el criteri bayesià de tria entre hipòtesis a partir de la probabilitat condicionada. *Ibid.* p.129-130

Per tant, en el cas que entenguem el criteri per a triar teories com un condicionant a priori podem dir que triem les teories més simples per sobre de les més complexes i les d'abast més gran enfront de les més restrictives. Aquests criteris tenen els inconvenients habituals donat que, si no optem per una visió kantiana, la vinculació entre aquests apriorismes i la veritat és si més no dubtosa. A més, es pot donar el cas que aquestes dues condicions a priori estiguin en proporció inversa. És a dir, per satisfer la simplicitat pot ser que haguem d'acceptar una teoria que té menys generalitat que una altra o al revés, les teories amb més potència poden ser més complexes, si més no a nivell manipulatiu, que les simples.

Tot això ens porta a pensar que, en cas de dubte, més que la correspondència amb entitats reals que siguem capaços d'imaginar o de criteris ontològics evocadorament racionalistes pot ser preferible optar per la capacitat explicativa i útil de la teoria.

Vol dir això, que una teoria serà preferible en la mesura que permeti produir nous enunciats contrastables i aplicables?

4.4. Hem d'entendre la convenció com un criteri utilitarista?

Certament, una hipotètica teoria que sigui capaç de proposar en la majoria de casos experiments de tipus mental i parlar-nos de magnituds incontrastables no sembla, a primer cop d'ull, una bona tria. Però, de fet, en la idea d'equivalència empírica subjau el pressupòsit que una teoria es recolza en les dades experimentals si aquestes són deduïbles o explicables, d'alguna manera, a partir dels elements de la teoria. No podem dir que les dades confirmen o suporten un model que simplement no ens informa ni de la seva compatibilitat ni contempla la possibilitat que siguin falsadores.

Així, podem considerar que una teoria és una mena de "màquina" que produeix noves afirmacions contrastables. La potència de la teoria per produir-les serà un clar avantatge respecte d'altres d'equivalents. És a dir, aquella que tingui més capacitat de previsió, de predicció serà més satisfactòria des d'aquest punt de vista.

Aquest és un fet que ja apareix amb la visió neopositivista, que confia més en aquesta capacitat de predicció que no pas en la suposada simplicitat, fins i tot si la darrera es remet a principis tan potents com el d'economia. Reichenbach[100], per exemple, fonamenta aquesta capacitat en les eines clàssiques del cercle de Viena, la inducció i la probabilitat. En conseqüència, pateix els mateixos inconvenients que la visió neopositivista en aquests mateixos aspectes.

Podem considerar la potència heurística com una expressió alternativa de la explicativa tot i que la darrera té més relació amb la capacitat de la teoria de connectar els diversos resultats empírics de manera formalment coherent mentre que la primera sembla més relacionada amb la metodologia i el caràcter combinatori dels seus elements. Malgrat això la capacitat heurística d'una teoria és, freqüentment, una conseqüència de la seva solidesa formal.

[100] REICHENBACH (1938) p. 376.

Arriscant-nos a cometre errors considerables, podem dir que la mecànica quàntica té una gran potència heurística en la mesura que és capaç de predir, plantejar i resoldre problemes del seu àmbit amb rigor i eficiència però, tal com la filosofia constata sovint, no satisfà plenament els anhels d'explicació, de comprensió, del que succeeix més enllà de les dades empíriques.

En el cas de la geometria, en canvi, podem constatar la connexió entre ambdós aspectes. El model geomètric de la relativitat general a través dels seus operadors tensorials proporciona una capacitat heurística considerable a la teoria. Ha permès, i permet, establir l'existència d'efectes i "construccions" amb considerable èxit. Forats negres, curvatura de la llum i alteracions en els rellotges en òrbita han estat predits per la teoria. Això difícilment s'hagués assolit amb la seva equivalència euclidiana. Probablement la introducció de camps vectorials amb efectes sobre els instruments que exigeix una alternativa hagués portat a complicacions considerables a l'hora de fer prediccions i a atzucacs insalvables sinó s'hagués optat per una formulació matemàtica que, en cas que fos possible, acabés sent equivalent a la relativista.

El mateix principi d'equivalència que suposa el punt de partida de la teoria general és un excel·lent exemple de potència heurística. Permet pensar en tots els fenòmens dins un camp gravitatori des d'un nou punt de vista amb la fertilitat que hem pogut constatar.

Però que aquesta capacitat de veure i aportar nous punts de vista a noves situacions condueixi necessàriament a una millor comprensió del món no està provat. Certament podem dir que ho ha permès en relativitat però tenim casos on això no ha estat així.

La relació de l'heurística amb la simplicitat també és íntima però confusa. Certament els mecanismes senzills possibiliten l'activitat de predicció i resolució de noves qüestions però això no ha de ser necessàriament així. Al cap i a la fi cal reconèixer que, a partir d'un cert punt, la recerca heurística entra en el terreny de la subjectivitat i troba sovint la seva màxima expressió en les ments de gent que no sembla que operin atenent a la simplicitat de les seves eines.

4.5. El criteri heurístic

L'absència d'un fonament consolidat de la traducció ontològica dels conceptes d'una teoria sembla que ens deixa, doncs, només el recurs d'entendre-la com el tipus de construcció que ens permet arribar a nous resultats que posteriorment ratificarà l'experiència. Això ens pot conduir, d'alguna manera a les tesis reduccionistes, amb els inconvenients ja esmentats.

Una teoria científica, però, no és només una "màquina" de fer prediccions sinó que, a més, *pretén ser una concepció del món*. La nostra aspiració és que aquesta concepció s'acosti tant com es pugui a la realitat i és en aquest sentit el que ens mou en la discussió que ens ocupa. Aspirem a la comprensió del món més enllà de nosaltres mateixos però l'anàlisi de la ciència no ens ha portat més lluny en aquesta via sinó que ens ha conduït a l'estudi de l'activitat humana en relació al coneixement científic. No podem negligir, per tant, els aspectes relacionats amb el desenvolupament de les teories científiques que podem observar en els casos històrics.

Els estudis que en filosofia de la ciència han incorporat la informació que prové dels casos històrics ens han mostrat, per exemple, que els criteris formals que es fan servir com a demarcació de la disciplina han variat en els casos que han convingut atenent a condicionants menys objectius del que les teories de la ciència propugnaven. És el cas dels criteris heurístics que s'amaguen darrera dels programes d'investigació científica descrits per Kuhn i Lakatos en els seus estudis sobre el desenvolupament de teories físiques.

> «Segons la meva metodologia, els grans èxits científics són programes d'investigació que poden ser avaluats en termes de transformacions progressives i regressives d'un problema; les revolucions científiques consisteixen en que un programa d'investigació reemplaça (supera progressivament) un altre. Aquesta metodologia ofereix una nova reconstrucció racional de la ciència. La millor forma de presentar-la és per la via del contrast amb el falsacionisme i el convencionalisme dels que adopta alguns elements essencials»[101]

Lakatos es refereix a versions convencionalistes com la de Duhem que van més enllà de la geometria i reconeix que poden ser plantejaments útils però que no subscriu plenament. En especial no el convenç la idea de simplicitat. Però tal com hem vist no és el cas del convencionalisme geomètric que estem defensant.

Sigui com sigui, la idea del programa d'investigació constitueix una eina perfecta per a justificar la tria, sobretot de manera històrica, d'una teoria enfront d'una altra en absència dels criteris, formals o empírics, que descarta el convencionalisme.

> «... el programa d'investigació té també una heurística, és a dir, una poderosa maquinària per a la solució de problemes que, amb l'ajuda de tècniques matemàtiques sofisticades, assimila anomalies i fins i tot les converteix en evidència positiva.
>
> [...]
>
> Si tenim dos programes d'investigació rivals i un d'ells progressa, mentre que l'altre degenera, els científics tendeixen a alinear-se amb el programa progressiu. Tal és l'explicació de les revolucions científiques. Però encara que preservar la publicitat del cas sigui una qüestió d'honestedat intel lectual, no és deshonetso aferrar-se a un programa en regressió i intentar convertir-lo en progressiu.»[102]

Així doncs, en la mesura que una teoria heurísticament més fèrtil que una altra ens permet obtenir més dades empíriques, podem veure que és un criteri que ens *acosta a la veritat*. Partint de la consideració de teories equivalents observacionalment, el fet que una ens aporti més contrastos experimentals que l'altra (a això fa referència el terme «progressiu») ja constitueix un criteri de "proximitat" a la realitat més gran i per tant un cert element de jerarquització "objectiva".

En definitiva, el que podem veure en estudiar la possibilitat de mantenir la postura convencionalista respecte a la geometria de l'espai-temps és que els arguments que mantenen els seus detractors es fonamenten en consideracions metodològiques que

---

[101] LAKATOS (1993) p. 145.
[102] *Ibid.* p. 15-16.

remeten a d'altres d'ontològiques o bé ens condueixen a una possible revisió trascendental del coneixement. Hi ha, a més, la possibilitat que el criteri de tria que tant preocupa als crítics amb aquesta perspectiva sigui de tipus heurístic. Si bé no justificaria per què una teoria ens hauria d'acostar més a la veritat que una altra si ens proporcionaria un criteri de tria que escaparia a les objeccions que raons de tipus estructural o metateòric provoquen.

Si això és així i, per tant, no hi ha elements definitius que ens portin a rebutjar els arguments convencionalistes pot ser interessant mostrar, al seu torn, quins implícits o quines conclusions en deriven sobre els conceptes que estableixen les teories i la seva existència objectiva.

IV. Consideracions ontològiques de la geometria espaciotemporal a la llum del convencionalisme

Tal com vam veure al capítol anterior, les perspectives realistes es fonamenten en consideracions inevitablement ontològiques. Això és extensible a la majoria de visions de la ciència si exceptuem aquelles que fonamenten les seva anàlisi epistemològica en un criticisme sever o simplement es veuen abocades a l'escepticisme.

Podríem dir, segons el tipus de lectura que en fem, que el convencionalisme té un punt de partida crític i que per tant no fa, necessàriament, una aposta per cap visió ontològica determinada. No obstant, tant si es pren la via que nega una substancialitat a la mètrica, i per tant a les consideracions geomètriques derivades, com si hom opta per la simple constatació escèptica cal assenyalar que una visió determinada del coneixement té, certament, implicacions ontològiques. Si no com a supòsit inicial, sí com a conseqüència implícita.

1. Les controvèrsies clàssiques al voltant de l'ontologia de l'espai-temps

Per a fer-nos un retrat de situació convindria, per començar, fer un repàs breu a les controvèrsies clàssiques a l'entorn de l'espai-temps i les aportacions de la formulació relativista. Cal assenyalar, prèviament, que una perspectiva sobre les condicions ontològiques de l'espai-temps si bé té repercussió directa sobre les condicions d'existència de la geometria corresponent no vol dir, necessàriament, que faci un pronunciament o que es limiti a considerar l'estatut ontològic de les entitats geomètriques. Com veurem, si bé hi ha una relació, no és necessàriament causal.

1.1. Substancialisme i relacionisme

El primer que hom es pot demanar *ontològicament* respecte a l'espai, el temps o l'espai-temps és, òbviament, *què* és o què són. I això porta a demanar-se de quina manera existeixen.

Aristòtil fou un dels primers a fer una anàlisi més o menys explícita de la condició ontològica de l'espai i el temps. Tot i que ell reconeix que això ja va ser fet per Plató[103] el punt de partida de tota revisió històrica ha de ser, probablement, l'obra de l'estagirita.

El filòsof estableix que espai i temps són, d'alguna manera, *accidents de la substància*. Això, traduït a la controvèrsia que ens ocuparà més endavant vol dir que és la matèria la que té una existència ontològicament prèvia. Sense ella, no hi ha ni espai ni temps, donat que, tal com diu en les seves expressions més conegudes:

> « ... el *lloc* d'una cosa és el límit immòbil d'allò que la conté.»[104]

---

[103] *Física* IV, 218a 30
[104] *Ibid.* IV, 212a 20

De manera que descarta l'existència d'espai buit[105] i, en conseqüència, d'una substancialitat de l'espai. Per altra banda:

> « Perquè el temps és justament això: nombre del moviment segons l'abans i el després. Així doncs el temps no és moviment, sinó en la mesura que el moviment té nombre. La prova d'això és que diferenciem allò més gran d'allò més petit pel nombre, i el moviment més gran del més breu pel temps.»[106]

Així doncs, pel filòsof el temps és quelcom diferent al canvi de la mateixa manera que l'espai ho és de les coses materials. Però ambdós conceptes en depenen. si el lloc és l'espacialitat dels cossos no té existència autònoma. Si el temps és la mesura del canvi, tampoc. Tal com podrem veure aquest tipus d'argumentació prendrà un nou impuls amb la controvèrsia entre Newton i Leibniz i, posteriorment, amb la crítica a la dinàmica newtoniana de Mach.

1.1.1. La controvèrsia clàssica

L'aparició de la nova ciència amb l'edat moderna planteja certament una nova manera de treballar, fonamentada en consideracions experimentals i dirigida més a la capacitat de predicció com a indicador de comprensió del món que no pas a la intel·lecció dels seus elements.

La culminació d'aquest procés es dóna, sens dubte, amb la publicació dels *Principia Mathematica* de Newton on aconsegueix unificar el comportament de la matèria en àmbits que es consideraven diferenciats i sota un conjunt de lleis força reduït. Per a fer-ho, però, necessita postular l'existència autònoma d'espai i de temps, donat que és sobre aquests elements que construeix la seva mesura del moviment. En tot cas, on és més clara la visió que té Newton respecte a l'estatut ontològic d'espai i temps és a la polèmica que el seu amic i deixeble Samuel Clarke va mantenir amb Gottfried Leibniz.

Ja hem vist al capítol II que el que Newton postula és que l'espai és *absolut, independent, infinit* i tridimensional. Entén, per tant, que es tracta d'un contenidor on hi trobem els objectes materials. Per altra banda, el temps és també absolut, independent, infinit i unidimensional, que serveix com a marc per al canvi. Els esdeveniments, els fenòmens, tenen lloc *en l'espai* i *en el temps*. Aquest és, de fet, el sentit del terme absolut. Així, un objecte que canvia de lloc en un interval de temps podem dir que experimenta un *moviment en el sentit absolut*. Ara bé, també vam veure que el sistemes de referència inercials no permeten saber quin és aquest moviment. És a dir, no sabem quin dels objectes que es mouen sense acceleració està, de fet, experimentant un canvi absolut de posició. I per tant, tampoc podem saber quins objectes estan en repòs absolut. Per altra banda, sabem que existeix moviment i repòs absolut gràcies als sistemes no inercials que si ens aporten criteris de diferenciació. Així, un cable que uneixi dos objectes experimentaria una tensió si aquests es troben en moviment rotatori i no notarà cap força si no hi ha cap moviment de gir. Això

[105] *Ibid.* IV 214b 11
[106] *Ibid.* IV 219b 1

seria així, *fins i tot si no hi hagués res més al seu voltant* de manera que aquesta rotació s'hauria de donar *respecte a l'espai absolut*.

Leibniz no podia compatibilitzar aquest punt de vista amb consideracions fonamentals com era el seu *Principi de Raó Suficient*. Si l'espai (i el temps) és quelcom buit i previ a la matèria aleshores Déu podria haver posat el món allà on volgués sense que hi hagués cap diferència. No resulta difícil demostrar, doncs, que no té una raó suficient per a emplaçar la matèria allà on ho ha fet i no a un altre lloc[107].

Clarke, seguint Newton, en parlar de *parts de l'espai* va refinar la seva visió de l'espai substancial en entendre que es tracta d'un substrat de punts o regions que són a la base dels cossos[108]. Això permet dir que, ja no és el mateix (indiscernible) que la matèria estigui en un lloc que en un altre i per tant l'argument metafísic quedaria invalidat.

Malgrat això, la concepció substancial de l'espai porta a parlar d'aquest com a existent, no material i indetectable. Si es donés el cas que els efectes que justifiquen la seva existència es poguessin explicar per altres vies, l'aplicació d'un principi d'economia ens portaria a deixar de banda la possibilitat de l'existència autònoma de l'espai.

Tot això portarà a Leibniz a definir espai i temps seguint, en certa mesura, la idea aristotèlica i per tant entendre tots dos conceptes com el conjunt de relacions possibles entre tots els esdeveniments[109]. D'aquesta manera el que passa en els objectes en moviment no inercial és que experimenten forces perquè l'acceleració es dóna, precisament, en relació a altres objectes materials.

Aquesta definició podia resistir algunes de les rèpliques de Newton. Així un moviment accelerat *lineal* podia ser entès *en relació al motor* del moviment, per exemple, però no explicava com havíem d'entendre el que passava a l'*experiment de la galleda*[110]. No era possible explicar per què l'aigua experimentava forces o acceleracions si la seva posició relativa amb la galleda no canviava. Havien de tenir un origen diferent i aquest, és clar, era el moviment de l'aigua respecte l'espai.

Mach, però, tenia una alternativa: sí que podem entendre el moviment de la galleda *en relació* al conjunt de les entitats materials de l'univers, incloses les "estrelles fixes".

De fet, el punt clau de la rèplica a Newton per part de Mach està en la consideració que fa el primer de la possibilitat d'un sistema en l'espai buit per fonamentar el substancialisme. És a dir, per tal d'explicar per què no podem recórrer a la posició relativa dels objectes per a constatar el tipus de moviment ens impel·leix a imaginar *un espai buit*. A banda del fet que això ja sembla que ens obliga a acceptar allò que volem provar (però que potser es podria defugir amb una tria diferent de termes) el que no podem és afirmar què passaria en un experiment mental d'aquest tipus. Tal com diu Mach:

[107] L'argument és, certament, més minuciós. Per a una exposició més detallada veure RADA (ed.) (1980) o RAY (1991) p.107.

[108] Això, de fet, permet defensar la idea que un espai-temps substancialista tingui, clarament, una mètrica pròpia.

[109] " Sostinc que l'espai és alguna cosa simplement relativa, com ho és el temps; això és, defenso que representa un ordre de coexistències, com el temps ho és de successions. Per espai entenc, en termes de possibilitat, un ordre de coses que existeixen alhora, considerades que existeixen juntes, sense entrar en la manera com existeixen" 3ra carta de Leibniz, 25 de febrer de 1716 a RADA, ed. (1980) p. 68.

[110] Veure capítol II, 1.2.

« Amb prou feines cal assenyalar que en les reflexions que aquí es presenten Newton ha tornat a actuar en contra de la seva voluntat manifesta d'investigar només *fets reals*. Ningú és competent per enunciar coses sobre l'espai absolut i el moviment absolut; són objectes purs del pensament, constructes mentals purs, i no poden ser aportats per l'experiència. Tots els nostres principis de la mecànica són, com hem mostrat detalladament, coneixement experimental sobre les posicions relatives i el moviment dels cossos... Res no està garantit en estendre aquests principis més enllà dels límits de l'experiència. De fet, aquesta extensió no té sentit, donat que ningú posseeix els coneixements necessaris per fer-ne ús.»[111]

Donat que el món físic només es pot fonamentar en l'observació i l'experimentació no podem rastrejar l'origen de les forces d'inèrcia, per exemple, fins a un altra cosa que no siguin els objectes materials. Si de cas, en una escala global el nostre sistema de referència podria ser "l'univers en conjunt" i fonamentar la nostra teoria dinàmica en termes materials i no en una entitat, l'espai absolut, probablement supèrflua.

Així, les forces que un cos accelerat experimenta com podria ser l'aigua de la galleda es poden referir a una certa interacció amb la resta de la matèria de l'univers.

Si bé Mach queda curt en els seus esforços per desenvolupar aquestes idees i descriure com aquest marc cosmològic provoca aquests efectes la crítica que fa dels arguments newtonians va ser suficient no només per a revifar la perspectiva relacionista sinó que inspirà fortament la recerca d'Einstein en la teoria de la relativitat.

1.1.2. L'existència absoluta de l'espai-temps

Amb l'aparició de la teoria relativista semblava que la discussió passava a una nova fase. Les afirmacions del mateix Einstein respecte aquest punt permetien pensar que, efectivament, era possible explicar els fenòmens físics sense recórrer a l'existència absoluta d'espai i temps, ara junts en un sol concepte. En un article del 1918 es refereix al "Principi de Mach" com a una generalització dels requeriments sobre la inèrcia referida a altres cossos de manera que podríem formular aquest principi com el postulat que *l'estructura afí de l'espai-temps és determinada únicament per la distribució de matèria-energia a l'univers*.

I així fou que, en desenvolupar-se la teoria especial s'assegurava, normalment, que s'havia assolit les condicions per a definir un espai-temps relacionista.

Però aquestes afirmacions eren certament massa optimistes. Per a Newton és clar que dos successos estan separats en l'espai i el temps de manera absoluta i definida mentre que la relativitat entén aquestes distàncies en funció del sistema de referència inercial[112] i poden ser diferents si el sistema és un altre. Però malgrat això, la teoria especial postula un espai-temps com a estructura per sobre (o per sota) dels fenòmens del món. A més la mesura de l'interval espaciotemporal és encara un invariant (independent del sistema de referència) i per tant, permet pensar que no és una mesura dels fenòmens sinó que es tracta d'alguna cosa *prèvia*. Encara més, la teoria especial manté la distinció, fonamental per l'argument newtonià, entre sistemes inercials i no inercials donat que és entre els primers, precisament, on queda definit l'àmbit d'aplicació de la teoria. Allà on els efectes de la

[111] MACH (1974) p.280

[112] Podem entendre els sistemes de referència com a expressions tècniques de les relacions constitutives de Leibniz de manera que la necessitat de parlar de la posició espaciotemporal d'un esdeveniment *respecte un sistema de referència* seria l'expressió formal d'aquestes condicions.

relativitat especial són aparents tenim que el moviment és inercial i per tant podem dir que no hi ha acceleració *absoluta* de cap tipus. Acceleració respecte a què? Respecte l'espai-temps, és clar. Un espai-temps que és substància.

Malgrat això l'espai-temps absolut també presenta inconvenients. Per començar segueix sent immune a l'experiència directa de manera que hem d'inferir la seva existència a partir dels efectes que presenten el fenòmens. Els substancialisme necessita postular l'existència de trajectòries geodèsiques, per exemple, per explicar els efectes de l'acceleració d'un objecte a partir de la desviació d'aquests recorreguts. I, a més, el relacionista pot, encara, substituir l'espai-temps absolut per l'univers en conjunt tal com va suggerir Mach. Així, les forces resultants de la inèrcia s'explicarien respecte a la distribució mitja de matèria en l'univers i no respecte a l'entitat inabastable de l'espai-temps substancial. Si aquest fos el cas, una galleda que gira en un univers quiet hauria d'experimentar els mateixos efectes que una galleda immòbil en un univers rotatori. I, de fet, tampoc podríem parlar de manera adient d'un univers en rotació donat que si ho fes com un sol bloc no ho faria respecte a res, en haver descartat l'existència de l'espai-temps absolut.

Cal tenir en compte, doncs, què aporta la relativitat general a aquesta controvèrsia donat que les objeccions de Mach al substancialisme són en alguna mesura, en la gènesi de la teoria relativista. De fet, al primer cop d'ull sembla que hi ha bona sintonia amb el relacionisme pel fet que la relativitat general descriu, precisament, les trajectòries ideals (les geodèsiques) respecte les quals hem de notar les forces inercials com el producte de la distribució de l'esforç-energia que esdevé la transcripció relativista de la distribució de matèria cosmològica.

Malgrat això, la teoria general preveu, entre d'altres coses, la possibilitat d'espais on no hi hagi matèria i tot i així les trajectòries tinguin curvatura (és a dir una mètrica no euclidiana), això vol dir que no podem imaginar un espai-temps buit sense efectes inercials, tal com el relacionisme semblaria exigir. També és possible un món consistent amb les equacions relativistes on tota la matèria estaria en rotació (però no en bloc)[113].

De fet, la discussió entre substancialisme i relacionisme està plena de tota mena de models de les equacions relativistes. Es pot fer servir la teoria general per construir versions on cal un espai-temps independent en certa mesura (no ho pot ser del tot donat que ha de complir les equacions de la teoria), la solució de Schwarzschild (que representa el model d'un espai temps per a un sol cos de gran massa, com ara el sol). També han aparegut models, com les solucions estàndard de Friedmann (amb una distribució de màteria uniforme), que no requereixen el caràcter absolut de la varietat espaciotemporal però aquests no són suficients per a forçar-nos a abandonar la idea substancialista i, a sobre, tenen alguns inconvenients afegits com ara postulats d'infinitud de matèria de l'univers, de clausura de la varietat o la necessitat de camps addicionals[114]. Aquests inconvenients provenen, sobretot, del fet que una distribució de matèria donada no determinen

[113] Kurt Gödel va provar-ho a una conferència a Cambridge (Ma) el 1950 titulada *Universos rotatoris de la teoria general de la relativitat*. GÖDEL (1981) p.387-400.

[114] Per a una explicació concreta d'aquests arguments veure, per exemple, RAY (1991) p.139-142.

unívocament les propietats topològiques de l'espai-temps com pot ser l'existència de límits cosmològics o el seu caràcter obert.

Malgrat que el programa relacionista no hagi pogut proposar un model d'espai-temps satisfactòriament compatible amb la teoria relativista no podem dir que la perspectiva substancialista no tingui inconvenients per la seva banda. Si el problema que presentava la teoria relativista al principi de Mach era que la distribució de matèria i energia no era suficient per a determinar la geometria de manera inequívoca i que, per tant, l'espai-temps havia de ser alguna cosa més que relacions materials els substancialistes han d'afrontar l'anomenat *argument del forat*[115]..

La relativitat és entesa com una teoria determinista. Això vol dir que les equacions ens permeten preveure i revisar esdeveniments amb certesa en la mesura que disposem d'informació suficient per a les equacions[116]. En determinades circumstàncies podríem tenir un "retrat" de la varietat espaciotemporal "en un instant" (amb el benentès que això no és definible de manera simple en relativitat) i obtenir, per tant, el conjunt de fenòmens d'una subvarietat determinada, un *retrat* o *llesca* global. Això ens hauria de permetre construir la història completa de l'espai-temps, és a dir descriure tant el passat com el futur d'aquest retrat, no?

Si prenem una petita regió de l'espai-temps buida de matèria, un *forat*, aleshores tenim que diferents distribucions espaciotemporals en el forat poden ser igualment compatibles amb els fenòmens sempre que ho siguin amb la distribució de matèria fora d'ell. Per tant, diferents estructures espaciotemporals es corresponen a una mateixa distribució de la matèria i això ens privaria de l'ús determinístic de les equacions donat que no sabríem quina de les diferents opcions correspon al nostre retrat. Podríem construir, sobre la informació de partida dos models diferents, per exemple, que s'ajustessin igualment al passat i al present però amb futurs diferents. Això és possible perquè considerem que els punts i l'estructura de l'espai-temps és considerada com alguna cosa existent en si mateixa i no depenent de termes materials. Si això no fos així, aquests mons diferents no ho serien donat que la distribució de matèria-energia és la mateixa i allò que no es pot discernir ha de ser, per a un seguidor de Leibniz, la mateixa cosa.

En definitiva, el relacionisme té l'avantatge que nega l'existència d'entitats que, en cas de no acceptar la possibilitat de conèixer l'estructura de l'espai-temps, ens resulten inabastables. Si no existeixen està clar que no les podem conèixer, si no les podem conèixer no hi ha la necessitat que existeixin. Això explica per què els realistes consideren que el convencionalisme té una forta vinculació amb el relacionisme, si més no en l'àmbit geomètric.

> «Així doncs, el convencionalisme de Grünbaum és en realitat una espècie d'allò que hem anomenat relacionisme ideològic. Sosté que hi ha un conjunt curvilini privilegiat de propietats

[115] Earman fa un estudi detallat de l'argument a EARMAN(1989) p.175-180.

[116] Aquestes condicions no són banals. A la pràctica vol dir que només ho podem fer en condicions de simetria i en espais molt simples.

> i relacions espaciotemporals bàsiques - a grans trets, relacions topològiques i ordinals- i que totes les altres propietats i relacions espaciotemporals "reals" han de ser definides a partir d'aquestes relacions privilegiades, o reductibles a elles.
> ...
> Grünbaum és convencionalista perquè és relacionista. Per Reichenbach, per altra banda, la implicació sembla anar en el sentit contrari: manté una concepció relacionista de l'estructura geomètrica perquè és convencionalista.»[117]

Si més no, els relacionistes sostenen que els conceptes estructurals que no són empíricament detectables, com ara la substancialitat de la mètrica espaciotemporal, són prescindibles i, en conseqüència, és factible la construcció d'una teoria que els defugi. Aquest darrer fet, però, és un dels punts forts de l'opció substancialista en haver estat el relacionisme, fins el moment, incapaç de formular una teoria d'aquest tipus.

> «No crec que cap dels programes relacionistes, ja sigui de tipus reductor o eliminador[118], hagi estat dut a terme satisfactòriament, fins i tot tenint en compte un aparell platònic en tota regla. El problema pel relacionisme és *especialment* greu en el context de les teories que consideren la noció de *camp* seriosament, per exemple la teoria electromagnètica clàssica. Des del punt de vista platònic, un camp és generalment descrit com una assignació d'alguna propietat, nombre, vector o tensor, a cada punt de l'espai-temps; òbviament això suposa que hi ha punts de l'espai-temps, així que un relacionista haurà de, o bé evitar postular camps (un camí que considero difícil d'acceptar en la física moderna), o bé arribar a alguna forma molt diferent de descriure'ls. L'única manera alternativa de descriure els camps que conec és la que faig servir més endavant a la monografia ... sense les propietats, nombres, vectors o tensors, però no sense els punts de l'espai-temps»[119]

1.1.3. Geometrodinàmica

Històricament trobem, a més, una tercera opció que planteja la relació entre mètrica i matèria-energia des d'una perspectiva si més no innovadora. Seguint una idea de W.K. Clifford que el 1870 proposava una teoria ontològicament monística, la *geometrodinàmica* fou desenvolupada per John Wheeler i els seus col·laboradors a mitjans de segle. El 1962 amb el mateix títol que la teoria, *Geometrodinàmica*, escrivia:

> «No hi ha res al món excepte espai buit i corbat. Matèria, càrrega, electromagnetisme i altres camps són només manifestacions d'aquest curvatura de l'espai. *La física és geometria*»[120]

El que proposa, per tant, és un punt de vista certament diferent al del realisme tradicional en la mesura que no considera que espai-temps i matèria siguin coses diferents. En conseqüència, en interrogar-nos sobre quins són els elements reals de la geometria el que postula la geometrodinàmica és que ho són tots i, de fet, els únics.

La geometria és, doncs, l'únic constitutiu ontològic de la realitat i els altres elements que considerem reals, àtoms, ones, etc. només són manifestacions d'aquest

---

[117] FRIEDMAN (1991) p. 364.

[118] Field defineix el primer tipus com aquell que considera els punts de l'espai-temps com construccions de la teoria de conjunts al marge dels objectes físics i el segon tipus el que considera totalment il·legítim fer servir punt espaciotemporals de cap tipus, a EARMAN(1989) p. 154n.

[119] FIELD (1980) p.35 també citat a EARMAN(1989) p. 154.

[120] GRUNBAUM (1973) p. 728.

aspecte. Es tractaria, doncs, de la culminació d'un programa pitagòric amb un abast insospitat.

Aquesta teoria es desenvolupa en la línia dels esforços del darrer Einstein i dels seus col·laboradors d'establir una teoria unificada i només va ser abandonada per Wheeler una dècada més tard en constatar que els avenços en el seu desenvolupament havien estat insuficients[121]. Malgrat tot, encara és possible trobar estudis i propostes en aquesta línia que proven, a més, de renovar les opcions de la visió relacionista[122].

Cal dir que aquest punt de vista també suposa una forma concreta de relació entre les diferents dimensions de l'espai-temps. Si bé la component temporal de la varietat sempre ha tingut un caràcter especial pel seu caràcter orientat, l'anomenada *fletxa del temps*, la teoria geometrodinàmica estableix un altre tipus de lligam entre les dues parts de l'espai-temps. La matèria, en ser manifestació de la curvatura s'entén que ho fa *en el temps*. D'aquí el caràcter *dinàmic* de la teoria.

Sembla, a més, que hi ha una forta connexió entre la geometrodinàmica i la visió relacionista. Wheeler s'hi va convertir, d'altres consideren la teoria com una possibilitat de rehabilitació de la perspectiva anti-substancialista. Però sembla, en principi, que el relacionisme dóna una prioritat ontològica a la matèria que la geometrodinàmica més aviat li nega. Com és possible que trobin punts de connexió ?

En primer lloc cal dir que tots dos punts de vista s'oposen a un substancialisme més o menys tradicional en el sentit que aquest considera que espai-temps i matèria són coses que, malgrat estar relacionades per la teoria relativista, tenen existència autònoma i un estatut ontològic diferenciat.

En el cas relacionista està clar que no era així. La matèria, en el sentit ampli relativista, té una preeminència ontològica de la que espai-temps només n'és una manifestació "accidental". Just el contrari presenta la geometrodinàmica, donat que la preeminència ontològica és la geomètrica. Així doncs comparteixen un monisme ontològic que el substancialisme no té.

Aquest fet ens mostra que, probablement, resulta més difícil conciliar l'existència autònoma d'entitats com l'espai-temps i la matèria que no pas triar o postular quina d'elles, en cas que no puguin ser-ho ambdues, té existència substancial. Un reduccionista diria, de fet, que parlem del mateix.

1.2. L'estructura causal

L'espai-temps pot tenir una estructura geomètrica determinada, ja sigui euclidiana o no, a nivell local o bé pot mostrar un comportament global que esdevingui una prova crucial per a la possibilitat d'una teoria convencional. Així, l'ordenació causal dels esdeveniments té una càrrega empírica prou forta com per a determinar de manera definitiva l'estructura del conjunt. Ens permetria, per una banda, una segmentació "natural" de l'espai-temps en *hiperplans de simultaneïtat* que ens mostraria una estructura geomètrica preferent i, per l'altra, si l'abast és global pot arribar a tenir una repercussió topològica

[121] GRÜNBAUM (1973) p.728-729 constata aquest canvi de parer i assenyala que Wheeler optà, aleshores, per un relacionisme de tipus leibnizià.

[122] CALA (2006) o Barbour i Torretti a EARMAN (1989) p.91-110.

determinant per a una tria geomètrica concreta. Això ens porta a fer un breu repàs del que podem deduir de la possibilitat d'establir una ordenació natural del temps en funció de la successió dels esdeveniments. Això és el que es coneix com a la teoria causal de l'espai-temps[123].

1.2.1 Simultaneïtat

Els elements clàssics de discussió ontològica en relació a l'espai-temps inclouen, per norma, una discussió sobre el concepte de simultaneïtat que, de fet, ha centrat l'interès dels pensadors en aquesta àrea. El nombre d'articles al respecte és considerable i tot i que per regla general es plantegen des d'una perspectiva de la relativitat restringida cal dir que n'és també un aspecte de la teoria general.

Tal com s'ha dit, no entrarem a discutir les possibles derivacions de la discussió en aquests verals però donat que estem fent una breu exposició dels problemes relacionats que es tracten en els textos que podríem anomena *canònics* pot ser interessant fer-ne un cop d'ull ni que sigui en els aspectes relacionats amb la geometria.

El programa relacionista proposava la idea de *connexió causal* com una eina per a definir la simultaneïtat sense recórrer al temps absolut. Aquesta connexió s'ha d'entendre com la concatenació de successos causals que portin d'un a altre esdeveniment. Així, dos esdeveniments es podien definir com a simultanis si no eren causalment connectables mútuament i Leibniz oferia, si més no, una ordenació parcial de l'espai-temps a partir de l'estructura derivada per les relacions causals. Aquesta idea, la d'ordenar els fenòmens en funció de les relacions de causa-efecte, permet afirmar que les relacions espaciotemporals són reals en funció del seu origen causal.

En aparèixer la teoria especial de la relativitat el concepte de simultaneïtat va ser dels primers a ser estudiat donat el paper elemental que podia tenir en la concepció relacionista de l'espai-temps i el paper rellevant que va tenir la possibilitat de definir el conjunt d'esdeveniments simultanis a partir d'efectes mecànics en l'article d'Einstein de 1905. El model geomètric de Minkowski, a més, va permetre aclarir la dependència del conjunt de successos simultanis de la referència triada.

Donat que la relativitat estableix que la velocitat màxima de qualsevol efecte és la de la llum en el buit el que implica és que hi haurà una gran quantitat d'esdeveniments que no podran ser causalment connectables i per tant la definició de simultaneïtat derivada seria impracticable. De fet, a partir de la relativitat especial podríem arribar a la conclusió que els conjunt d'esdeveniments simultanis a un de donat és un simple convenció. S'obre, per tant, la porta al convencionalisme també per al concepte de simultani.

Alfred Robb, però, va provar que era possible, dins la relativitat especial, construir una relació entre esdeveniments a partir de la noció de connectibilitat causal i que és compatible amb la definició de simultaneïtat d'Einstein, a partir de rellotges i senyals de llum. Això sembla que permet la possibilitat de construir nocions de simultaneïtat de manera "absoluta"[124] (i per tant escapolir-nos del convencionalisme corresponent). Però en

[123] Una sinopsi assumible d'aquest tema es pot trobar a Van Fraseen (1985) cap. VI.

[124] És el cas de la teoria proposada per A. Robb (1873-1936) que podem trobar detallada a SKLAR (1985) p.76-147.

aparèixer la teoria general de la relativitat hom observà que l'estructura derivada podria ser incompatible donat que dos espai-temps relativistes podien ser mètricament diferents i tenir la mateixa estructura causal. Això eliminava la possibilitat de fonamentar la curvatura, en tant que relacionada amb la mètrica, a partir de característiques empíricament observables com poden ser les de relació causal.

Novament, si volem determinar el caràcter euclidià de l'espai-temps, hem d'aportar, juntament amb l'estructura causal, alguna caracterització de distància (i temps) a través de regles i rellotges o a partir de les trajectòries descrites per partícules lliures (és a dir, aquelles que es troben únicament sota l'efecte de la gravetat). I aquestes determinacions són les que el convencionalisme analitza i considera que tenen un cert nivell d'arbitrarietat.

1.2.1. Topologia i causalitat

La topologia de l'espai-temps és, com hem vist, una estructura més feble que no pas la mètrica però també ens mostra una accessibilitat empírica més gran. De fet, podríem definir la topologia de la varietat espaciotemporal a partir d'una estructura causal (que podem considerar observable)?

En principi sembla que la resposta serà afirmativa però, això sí, descartant el que hom anomena varietats *causalment patològiques*. Podem imaginar, per exemple, un varietat espaciotempora *tancada en el temps* (tot i que infinita) que faria que les línies de temps de les partícules fossin cicles i que, per tant, partint d'un determinat punt de l'espai-temps es pogués arribar, novament a aquest punt en "donar la volta" a la varietat. Aquest tipus d'estructures espaciotemporal són compatibles amb les equacions de la teoria encara que no es considerin models reals de manera que obren la porta a possibles solucions patològiques que siguin, aquest cop si, més realistes[125].

En tot cas, si postulem un espai-temps que sigui *estàndard* (és a dir no patològic) i ampliem la idea de connexió a la de *trajectòria causal* (és a dir la possibilitat d'un recorregut, per exemple, d'una partícula en l'espai-temps tot connectant dos punts donats) podem arribar a afirmar que dues varietats espaciotemporals que tenen la mateixa estructura causal tenen també la mateixa topologia.

Això ens permet dir que si els esdeveniments a l'espai-temps poden determinar les esmentades trajectòries causals aleshores, amb el supòsit que la topologia sigui estàndard, podem conèixer la seva estructura topològica i per tant podem aspirar a la determinació a partir dels fenòmens. Diríem així, que el convencionalisme no s'aplicaria a les característiques topològiques de l'espai-temps.

Aquesta relació causal que postulem com a real no s'ha d'entendre com l'objecte de crítica de l'empirisme de Hume. No es tracta de la connexió "oculta" dels esdeveniments (que en certa manera és l'objecte de recerca de la ciència o de la metafísica) sinó de la constatació d'una contigüitat en l'espai i el temps independentment del vincle que *pugui existir* entre els esdeveniments connectables. És a dir, es tracta més de *connectibilitat causal*

[125] Algun model il·lustratiu d'aquests comportaments patològics els podem trobar a SKLAR (1994) p.132-133 i RAY (1991) p.79-83.

que no pas de connexió causal *de facto* i aquesta hauria de ser, probablement, l'expressió més ajustada. En paraules de Bas Van Fraasen:

> «Es diu que "connectibilitat causal" és un terme *modal* perquè expressa una possibilitat (de connexió causal). "Connectat causalment" és el corresponent terme no modal. La raó per a fer servir el terme modal és simple: les dificultats, pel que sembla insuperables, d'afrontar el problema satisfactòriament en termes no modals. El punt esencial es redueix a que és purament contingent que hi hagi alguna connexió de senyal o de genidentitat en una part de l'univers.»[126]

Per altra banda tampoc hem de confondre la causalitat amb la idea, també significativa en aquesta discussió, que el temps té una asimetria fonamental producte del concepte d'entropia, l'esmentada fletxa temporal. Aquesta pot tenir també un paper com a determinació alternativa a la relació causal de la topologia espaciotemporal però no podem afirmar que hi estan relacionades.[127]

2. L'estatut ontològic de les entitats geomètriques

Si bé el terreny ontològic de discussió en relació a l'espai-temps ha estat el de la substancialitat, el convencionalisme ens permet plantejar-nos altres qüestions. Ens podem interrogar, per exemple, pel tipus d'existència que comporta acceptar aquesta perspectiva.

Hem tractat anteriorment la visió epistemològica de la relació entre geometria i món físic i el que vindria a expressar és un grau màxim d'escepticisme a l'hora d'afirmar què podem conèixer de la geometria de l'espai-temps i què no. Però ja hem pogut constatar que la tesi convencionalista permet diverses lectures, algunes de les quals transcendeixen l'àmbit cognitiu per arribar a fer afirmacions de tipus ontològic. L'objectiu de la present monografia és establir algunes de les implicacions que l'acceptació de la tesi convencionalista podria comportar. Això, òbviament, ens ha portat a especificar què entenem per convencionalisme.

Per una banda, hem vist que, al marge de les entitats que la teoria postula per al seu funcionament, és possible entendre que dues teories aparentment incompatibles són realment la mateixa donat que tenen les mateixes implicacions empíriques. Aquesta és la versió del reduccionisme.

El caràcter ontològic de les entitats geomètriques, en aquest cas, seria el de conceptes intercanviables. Ja hem fet servit[128] el símil amb l'idioma per mostrar com conceptes com rectes/geodèsiques no euclidianes són expressions equivalents a rectes euclidianes afectades per forces universals en el mateix grau que ho són *recta*, *straight line* o *ligne droite*. Malgrat la diversitat de formes que podem fer servir per a referir-nos a l'estructura de la realitat podem observar que exiteixen alguns elements que són invariants i

[126] VAN FRASEEN (1985) p.195.

[127] La direccionalitat asimètrica del temps és un altre dels tòpics de la filosofia de l'espai-temps que, en tractar-se d'una discussió que no està vinculada excessivament a l'àmbit de la geometria, no tractarem. Es pot trobar a gairebé tots els tractats de filosofia de l'espai-temps, com ara SKLAR (1985), SKLAR (1994), RAY (1991), EARMAN (1989), VAN FRAASEN (1985), REICHENBACH (1957) o GRÜNBAUM (1973).

[128] III.3.1

que poden ser entesos com els elements comuns a les descripcions mètriques triades (és a dir, les propietats que correspondrien a l'estructura absoluta de la geometria). Tot i així, fins i tot aquests elements poden ser entessos com a entitats pròpies d'una *percepció trascendental* de manera que no està garantida la seva existència més enllà de les condicions de la intel·ligibilitat humana.

Resta, doncs, la possibilitat de considerar que el que succeeix és que una teoria no és capaç de determinar de manera definitiva la geometria que correspon a l'espai-temps. Considerant aquesta possibilitat s'obria davant nostre dues opcions més. La primera, que podríem anomenar escèptica, entén que, malgrat considerar que la varietat espaciotemporal té en efecte una estructura geomètrica, aquesta ens seguirà essent desconeguda per les condicions epistemològiques que hem esmentat.

L'altra, que podríem considerar similar a la tesi reduccionista, sosté que l'estructura geomètrica no té correspondència real a l'espai-temps en la mesura que és un constructe mental. Podem considerar una existència real de l'estructura topològica (tal com hem vist la secció anterior) però no la dels elements que determinen la mètrica. Aquesta via permet defugir posicions escèptiques en tant que es manté que podem conèixer allò que existeix, dins uns límits, i sobretot *el que no existeix* establint una tesi ontològicament més forta que entendria que les entitats geomètriques no tenen existència física en la mesura que són elements teòrics purs. Aquesta és, probablement, la lectura que fa Grünbaum del convencionalisme al seu estudi, ja clàssic, *Philosophical Problems of Space and Time*[129].

2.1. El convencionalisme com a negació de la mètrica

El punt de partida per a una visió amb significat ontològic ha de ser, necessàriament, anar més enllà d'un convencionalisme en el significat, tal com trobem amb el reduccionisme. No es tracta, només, d'afirmar que la teoria està infradeterminada i que per tant els conceptes teòrics són objecte d'una tria (d'aquí el conveni) sinó de constatar la inexistència de les magnituds associades en el món físic.

> «En virtut de la inexistència d'una mètrica específica, la igualtat o canvi de la longitud que un cos posseeix en diferents llocs i diferents moments consisteix en la raó (relació) d'aquest cos respecte a la norma convencional de congruència. Que aquesta raó canviï o no és completament independent de tot descobriment humà d'aquest fet
>
> [...]
>
> I així, el caràcter relacional de la longitud emana, en primer lloc, no de la forma en què els humans mesurem la longitud, sinó de la incapacitat del continu de l'espai físic de tenir una mètrica intrínseca, incapacitat que és completament independent de les nostres activitats de mesura
>
> [...]
>
> Donat que, per començar, no existeix una propietat de rigidesa veritable que pugui ser descoberta per cap experiment humà, cap possible experiment podria desvetllar la seva presència. Per tant, la impossibilitat de la verificació de l'autèntica rigidesa per nosaltres els humans és conseqüència de la seva inexistència en l'espai físic i prova de tal no-existència, però no constitutiva d'ella.»[130]

[129] GRÜNBAUM (1973)
[130] *Ibid.* p.42

Com podem veure Grünbaum entén que la mètrica, que només podem conèixer en l'acte de mesurar, depèn de la propietat de congruència dels segments en l'espai. Per tant, no és perceptible, no pas per un problema epistemològic, sinó per un problema de tipus ontològic: l'espai-temps no té mètrica pròpia, intrínseca. Aquest caràcter *mètricament amorf* de la varietat espaciotemporal la considera provada per la tesi convencionalista però no considera que en sigui conseqüència donat que el convencionalisme no pretén ser un postulat ontològic.

Per a provar que l'espai-temps no té mètrica pròpia Grünbaum mostra que és una conseqüència de la continuïtat de l'espai físic. Si aquest espai, o espai-temps, fos discret en comptes de continu podríem establir una mètrica *natural* fonamentada en un recompte dels elements que separen dos fenòmens donats (ja sigui àtoms, paquets o *quanta* espacials). És a dir, considera que la falta de mètrica de l'espai-temps és una conseqüència de les seves característiques topològiques, és una *propietat del continu*.[131] En aquest sentit, dos intervals d'un medi continu només poden ser considerats com a iguals un cop s'ha triat un criteri de longitud que serà, per tant, extern al propi medi com pot ser el criteri de congruència.

> «Només la tria d'una norma particular de congruència, *extrínseca* al propi continu, pot determinar una única classe de congruència, havent *decretat per conveni* la rigidesa o autocongruència d'aquesta norma o patró en el transport [...] l'obtenció de la relació de congruència entre dos segments és subjecta a conveni, estipulació o definició, i no una qüestió fàctica respecte a la qual les dades empíriques poden mostrar que hom s'ha equivocat. I per tant, no pot plantejar-se de cap manera la qüestió d'una geometria empírica o fàcticament determinada fins que no es faci una estipulació física de congruència»[132]

Per tant, tot i que sembla natural suposar que els segments són congruents els uns amb els altres i derivar-ne, en relativitat, de la isotropia de l'espai-temps el seu caràcter no euclidià, el que estableix aquest convencionalisme és que es tracta d'una estipulació epistemològica derivada d'una visió determinada del coneixement. Si el que estableix el convencionalisme és precisament que hem de ser escèptics davant aquests requeriments previs a les teories la garantia que la mètrica sigui precisament aquesta és més aviat escassa. Grünbaum diu encara més, en entendre que no es tracta d'una conclusió errònia perquè l'espai-temps tingui una mètrica diferent sinó perquè el que precisament estableix és que no hi ha mètrica determinada donat el seu caràcter continu.

Al text trobem, a més, una observació particularment interessant en la mesura que mostra que allò que hom estipula per conveni *no és refutable*. Aquest és un fet que sembla que els crítics al convencionalisme tenen poc en compte i que els porta a defensar que la mètrica sí pot ser intrínseca i que es tracta "d'una magnitud primitiva o indefinida"[133].

Per Friedman, per exemple, l'error està precisament en el fet que Grünbaum només entén com a pròpies de l'espai-temps relacions de tipus topològic, incloses les d'ordre, i

---

[131] *Ibid.* p.9-10

[132] *Ibid.* p.11-12

[133] Aquesta afirmació, que trobem a FRIEDMAN (1991) p.364 i que ell atribueix també a altres autors (veure nota), no deixa de ser sorprenent. Una magnitud primitiva s'assembla força al concepte convencional que defensa Grünbaum. El terme *indefinit* encara resulta més xocant donat que una magnitud és precisament allò que es pot mesurar i no sembla massa factible fer-ho sobre elements que no tenen una definició suficient.

que per tant tots aquells conceptes geomètrics que no siguin definibles a partir d'aquests no tenen existència objectiva. Però precisament aquest és el nucli de la tesi convencionalista en el sentit ontològic. Acceptar que l'espai-temps té alguna mena d'estructura "superior" a la simplement topològica o projectiva seria acceptar, ja de sortida, les tesis realistes que entenen que l'estructura mètrica de la relativitat és la pròpia de la varietat espaciotemporal. Res més fàcil per a un crític, pretendre que el seu adversari accepti de sortida la pròpia conclusió.

Òbviament els arguments exposats per Grünbaum per a fonamentar aquesta absència de mètrica i, en conseqüència, el seu caràcter convencional són refutats tot seguit des de la perspectiva relativista adduint raons que figuren en l'arrel epistemològica de la teoria general, com pot ser la condició de covariança. I així, gran part dels defensors de la postura realista envers la geometria de l'espai-temps recorren a aquests arguments[134] metodològics. Això comporta que la pròpia teoria permet *metainterpretacions* diferents que només podem destriar per criteris de comoditat o d'elegància. I el que el convencionalisme suggereix és un conjunt d'objeccions que es poden fer, també, als criteris que fonamenten la teoria de la relativitat, en especial la general i per tant és construïble una teoria empíricament equivalent a la relativitat que no tingui els mateixos supòsits geomètrics respecte l'espai-temps. Aquesta teoria podria ser perfectament que no satisfés els criteris de covariança dels elements geomètrics que sí compleix la teoria relativista, per exemple, però malgrat això ser perfectament compatible amb les dades empíriques.

Quin és, doncs, l'estatut ontològic de les entitats mètriques de l'espai-temps? Depèn aquest de la certesa de la teoria relativista enfront de possibles alternatives empíricament equivalents ? En aquest cas el que succeiria és que conceptes geomètrics com recta, distància, curvatura… tindrien un estatut físic provisional a l'espera d'una hipotètica confirmació definitiva. Confirmació que podria no arribar mai si tenim en compte els arguments exposats al respecte.

Grünbaum planteja, de fet, una altra cosa. Aquesta existència objectiva no cal que es confirmi donat que és falsa. La teoria, la relativitat en aquest cas, les *atribueix* a l'espai-temps en el compliment dels seus preceptes metodològics, epistemològics[135], de simplicitat o covariança.

Cal tenir present que, al marge de les consideracions en la vella polèmica sobre l'estatut ontològic de l'espai-temps ens puguin merèixer, aquesta mena de convencionalisme considera que la varietat espaciotemporal té existència, pròpia o accidental, però que aquesta no comporta les relacions mètriques que la teoria pugui descriure donat que és factible descriure el món sense elles.

Així podem preguntar-nos quin és, en cas que la geometria sigui una tria convencional, l'estatut ontològic de les seves entitats. Ja hem vist que no resultaria massa complicat optar per una posició escèptica i postular que, donat que no tenim garanties

[134] Així trobem NORTON (1994), FRIEDMAN (1991) o EARMAN (1989)

[135] Aquests criteris poden ser considerats ontològics, al seu torn si els entenem com a *requeriments* a priori en la mesura que expressen un cert *pitagorisme,* és a dir, la convicció que el món obeeix aquests requeriments formals *de facto* i per tant són descripcions del món-en-si.

epistemològiques que la nostra construcció geomètrica es correspongui a la real les entitats descrites per una teoria com la relativista són com a mínim sospitoses i potser no designen els objectes corresponents de manera correcta.

2.2. Geometria física

El convencionalisme planteja una ruptura insoluble entre geometria física i matemàtiques. Si el món, si l'espai-temps, té una realitat geomètrica aquesta ens serà oculta necessàriament. Podem suposar que és la que tenim, que és la més raonable o fins i tot probable però no hi ha certesa. Així doncs, no es tracta de decidir quina geometria organitza els fenòmens si no de triar aquella que els descrigui de manera més eficient. El problema passaria, en aquesta cas, a la justificació dels criteris que ens permetin decidir per aquesta eficiència o conveniència i a la seva aplicació. Tal com hem vist al final del capítol III, aquests poden ser de tipus heurístic i per tant només quedarien justificats a posteriori. Sembla que la història està de la nostra banda en aquest aspecte[136].

L'acceptació de la perspectiva de Grünbaum va més enllà. Comporta una resolució del problema decimonònic sobre la veritable geometria del món certament diferent. El que anomenem *geometria física* no té l'abast que pressuposem de partida donat que està faltat de propietats mètriques. Així, el possible caràcter d'una geometria del món estaria restringit a aquelles propietats que, en principi, són comuns a tots els models matemàtics que coneixem. Podríem dir que les característiques geomètriques de l'espai-temps són les de la teoria absoluta o la projectiva, o fins i tot només les pròpies de la topologia. En aquest cas hom es pot demanar perquè l'abast de les entitats matemàtiques és diferent en el cas de les propietats més fonamentals que no pas les que admeten diferents models. Seria fàcil assenyalar que resulta si més no sospitós que aquelles condicions matemàtiques que entenem com a necessàries (és a dir, les comunes a tota geometria, sigui quina sigui la seva manifestació mètrica) siguin les pròpies de la varietat *real* espaciotemporal i, en canvi, aquelles que admeten diferents possibilitats i sobre les que, per tant, s'haurien de manifestar les dades de l'experiència són fruit de la imposició humana sobre la realitat. Una sortida òbvia a aquest fet seria una certa recuperació del caràcter transcendent de la geometria absoluta i, per tant, de l'organització espacial mínima de la realitat. D'aquesta manera tindria caràcter necessari allò que constitueix una a priori de l'experiència de coneixement i allò que permet diverses opcions no en formaria part. Això, però, superaria les ambicions de la present monografia i podria ser l'objectiu d'altres estudis.

Si això és així caldria donar per desmantellada la possibilitat d'una perspectiva ontològica de la geometria diferent de les entitats matemàtiques de tipus més abstracte. En descartar el convencionalisme la possibilitat que les entitats mètriques de les teories físiques tinguin el seu origen en objectes reals, encara que sigui a través d'un procés d'abstracció, només ens queda fonamentar la seva existència en els mateixos fonaments que el d'altres

[136] Els estudis del desenvolupament i adopció de la teoria de les teories científiques han provat, en molts casos, que el criteri d'adopció de teories revolucionàries no tenen a veure excessivament amb el que els punts de vista "ideals" proposen. En el millor dels casos, les raons intrínseques de l'adopció d'aquests nous punts de vista tenen força relació amb la seva component heurística, en el sentit que esmentava Lakatos de possibilitats de noves aportacions a la teoria i de noves fronteres per obrir.

entitats matemàtiques com podrien ser els grups, la probabilitat o els políedres regulars. D'aquesta manera el convencionalisme representa per a la física una determinada aposta epistemològica i per a la matemàtica, en canvi, una d'ontològica.

En aquest cas el paper de la geometria en relació als fenòmens seria explicatiu, estructural, és a dir *un model per a la comprensió predictiva de la realitat* fonamentat en una tria encertada dels elements objectius que corresponen a les components nuclears de la nostra teoria que es concreta en les definicions. Això seria, per exemple, el que fem en atorgar el caràcter de línia recta al comportament d'una ona electromagnètica si el que volem és en descriure'l a una escala que tingui en compte la seva propagació en diferents medis. És clar que en un context diferent, interactuant amb camps magnètics per exemple, aquesta modelització és insuficient.

Cal, però, no confondre el model amb una representació instrumental simple o amb una imatge metafòrica. Si bé podem trobar aquest tipus de conceptes en parlar de models és clar que un model *no és només això,* tampoc en el cas de la geometria. Cal, doncs, una reflexió més acurada si volem aprofundir en la possibilitat que aquest sigui el seu àmbit ontològic.

3. La geometria com a model

Tant si acceptem la possibilitat que les entitats geomètriques no existeixen com si el que mantenim és que aquestes ens són desconegudes és pertinent demanar-nos, què són, aleshores, les rectes i els punts geomètrics que fa servir la teoria relativista en la seva descripció de l'espai-temps? A què fem referència quan parlem, per exemple, de la seva curvatura?

Tal com apuntàvem al títol anterior, l'opció que ens permet una certa expressió instrumental de la matemàtica tal com implica la tesi convencionalista és entendre la geometria aplicada a les teories físiques com un model[137].

3.1. Tipus de models

Podem trobar diferents versions per aquest terme donat que s'ha emprat de manera àmplia i potser ambigua en la reflexió sobre la ciència[138]. Així, una aproximació col·loquial al terme ens porta a concebre'l com un tipus de representació analògica (per exemple una reproducció a escala), un disseny arquetípic o un exemplar *ideal*, d'un determinat objecte. Veiem, ja en primera instància, que aquesta possible representació comporta, malgrat alguns inconvenients, una tria de característiques d'allò que volem *modelitzar* per a representar-ho en el model. Hi ha, per tant, una *interpretació* implícita en la tria de les

[137] L'ús del terme model en aquesta secció s'allunya de l'habitual en l'àmbit de la lògica tot i que manté, com veurem, semblances significatives.

[138] Això ha portat, per exemple, a M. Wartofsky a parlar de *l'embolic dels models* o *confusió model* i identificar tota la diversitat de models, teories i analogies com a espècies de un mateix gènere de representacions. WARTOFSKY (1979) p.1-11.

relacions estructurals que es volen reproduir. Així, en un model *a escala*, el que triem és, entre altres coses, la relació mútua de les dimensions de l'objecte. Tot i així, els models que anomenem *analògics*[139] són més rics que una simple translació de la mida a una altra més manipulable donat l'aspecte estructural que es busca pot ser més abstracte.

El que està clar, però, és que per a garantir que l'estructura és reproduïda de manera operativa cal que hi hagi una correspondència biunívoca (el que en matemàtiques es coneix per *isomorfisme*) entre les relacions que el model reprodueix i les de l'original. Hi ha d'haver, per tant, una *traducció* de la terminologia que sigui aplicable. Si bé és possible parlar d'una relació *icònica* de manera similar al model a escala cal tenir clar que aquest terme pren un sentit més abstracte donat que una estructura no té per què ser visual tal com la idea de icona suggereix.

Per altra banda, la diversitat de mitjans que aquesta estructura pot fer servir per a manifestar-se fa que el model analògic sigui d'una tipologia arriscada en la mesura que elements que no siguin rellevants indueixin a distorsionar les inferències. Diguem, per tant, que un model analògic pot ser una eina heurística en la mesura que permet generar hipòtesis plausibles però no demostracions.

Trobem, per altra banda, referències a un tipus de model que es coneix com a *matemàtic*. En aquest cas el terme fa referència una correspondència entre un sistema d'objectes i un conjunt de sistemes matemàtics. Sovint, en fer-se servir amb laxitud, no es tracta de res més que un substitut de *formulació matemàtica* però podem trobar, en un nivell més rigorós, alguns implícits: la correspondència es considera des de *lo real* sobre el domini abstracte (sovint de les funcions) de les matemàtiques; s'entén el model com alguna cosa *més simple* (i abstracte) que l'original i es dóna sovint fins i tot una versió immaterial del model analògic.

Però, tal com diu Black:

> « Podem dir, si volem, que les matemàtiques pures ens ofereixen la *forma* d'una explicació [...] però cal buscar per una altra banda les explicacions *causals*.»[140]

Si el paper de la goemetria és només aquest està clar que té poca significació física. De manera que ens trobem que aquesta versió del terme tampoc satisfà la condició d'intel·ligibilitat que ens cal.

L'aspiració a la comprensió la compleix el que coneixem com a *models teorètics* o *científic* i que formen un dels elements característics de les ciències naturals. Aquests models es poden veure com a ficcions heurístiques[141], que ens conviden a parlar dels elements que configuraran una teoria d'una manera determinada. És plausible pensar que l'ús de models teorètics consisteix a introduir un nou llenguatge, que pot sorgir fins i tot d'una altra teoria més coneguda però que comporta, en tot cas, una ampliació del domini d'aplicació. En ser

[139] Seguim aquí, la distinció que fa Max Black a BLACK (1966) p. 216-238.
[140] BLACK (1966) p.222.
[141] Òbviament aquestes heurístiques tenen sentit en l'activitat del científic individual però els models teorètics tenen també una dimensió col·lectiva que té un paper en el desenvolupament dels programes de investigació que esmentàvem al capítol anterior.

més familiar, amb aquest tipus de model n'hi ha prou amb una descripició del vincle de manera que no cal construir-lo.

Per contra, el terme model en lògica matemàtica s'entén com una representació concreta d'allò més abstracte (la teoria). En aquest cas es tracta d'alguna cosa que afegeix contingut semàntic a l'estructura teòrica. Així per exemple, diem que la xarxa de metro de Londres o les possibles tries en un concurs són un model de graf, la concurrència de trucades en una centraleta el d'una determinada distribució probabilística o que els nombres reals són un model de cos commutatiu.

I no és estrany que en resolució de problemes o en la recerca de mètodes generals de classificació es trobi que alguna disciplina pràctica n'és un bon model i que simplifica enormement la resolució. Tot això porta a pensar que la relació model-objecte és reversible, també per als de tipus teorètic. Com pot ser?

Això és així perquè la direcció de la correspondència que fonamenta el paper dels models ve determinada per allò que coneixem millor. És a dir, l'estructura que ens sigui més familiar és la que pren el paper modelitzador i ens permet conèixer i progressar en la comprensió d'allò modelitzat. Cal, per tant, que el model permeti una bona *captació intuïtiva* dels seus element significatius. Aquesta familiaritat de vegades ens porta a l'ús d'objectes reals com a models però, tal com hem vist, no és necessari. Per tant, el que li demanem a un model, allò que el fa *prometedor*, és la capacitat de suggerir hipòtesis i especulacions noves i la captació intuïtiva que permeti la comprensió de l'altre sistema.

Així doncs, podem considerar que un objecte concret és un model de la geometria (una pilota d'una esfera, o un planeta) o també, per altra banda, que la teoria no euclidiana d'una varietat de 4 dimensions és un model del comportament de les partícules lliures en sota un camp gravitatori.

Els models també ens proporcionen un marc de referència terminològica, uns *arquetipus conceptuals*, en paraules de Black[142]que ens permeten, per analogia, emprar un sistema de conceptes quan ens trobem davant d'una àrea de recerca nova o d'una perspectiva original per desenvolupar:

> « Per *arquetipus* em refereixo a un repertori sistemàtic d'idees gràcies al qual un pensador donat escriu, per *extensió analògica*, un cert domini al qual aquestes idees no siguin aplicables de manera immediata i literal.»

És així com podem trobar en treballs teòrics sobre ciències socials l'ús de termes com *camp*, *vector*, *tensió* o *força*[143]. Està clar que mostren la possibilitat de modelització d'un camp, la teoria social, a partir d'un model fonamentat en la dinàmica i la teoria electromagnètica.

No està clar que un model, tot i tenir un paper orientador en la recerca individual pugui assumir funcions d'una teoria ben construïda i lògicament fonamentada. És, si de cas,

---

[142] BLACK (1966) p.236

[143] Black, *ibid.*, esmenta el treball de Kurl Lewin *Fiel Theory in Social Science* per a mostrar l'ús d'aquest arquetipus concret.

una metàfora o, en el millor dels casos, un substitut mental de la teoria que pot evitar complicacions[144]i per tant ens imposa una vigilància constant. Per als crítics, els models poden ser ajudes per a pensadors "febles" o dreceres per a la deducció però no sembla que els pertoqui un paper propi al desenvolupament científic.

Això, però, no es pot defensar si admetem el paper dels mateixos en l'aspecte especulatiu del desenvolupament d'una teoria. La vinculació entre model i objecte, a més, pot donar resultats impredictibles, desvetllar noves vinculacions. Els crítics entenen el model com un precedent, una aproximació de la teoria formal com si fos un artefacte provisional. Aquesta idea menysprea la validesa que li proporciona la isomorfia estructural de manera que, com a mínim, no podem dir que es tracten de metàfores inspiradores. Per a fer servir un model hem vist que cal un domini sobre alguna mena de teoria científica i li cal que tingui una capacitat estructural similar a la de l'objecte modelitzat.

3.2. La geometria com a model teorètic.

Així doncs, els models poden ser entesos com una selecció de determinats objectes reals amb un significat específic en les relacions que mantenen entre ells o bé com una interpretació determinada, semàntica, dels axiomes de la teoria[145]. Aquests tipus d'interpretació del significat d'un model no són, òbviament, excloents però en el nostre cas poden tenir un diferent abast. Així, una interpretació realista de la geometria permetria, encara, parlar de models si els entenem, sobretot, com una selecció restrictiva de la realitat. Està clar, per un realista, que quan parlem de geometria del món estem deixant de banda bona part dels aspectes de la realitat que no hi tenen relació. Però, per a una perspectiva convencionalista el significat de model té implicacions d'un altre tipus.

El model geomètric, tal com hem vist, ha de ser entès com una *interpretació* de la realitat que permet visualitzar les relacions que es puguin donar entre els fenòmens encara que no sigui suficient per a copsar-ne les connexions casuals. En aquest sentit els models representen el reconeixement d'una insuficiència, la incapacitat d'intel·ligibilitat de la realitat, que no és aliena a la pràctica científica des dels seus inicis[146]. Així, tal com vèiem en la possibilitat d'equivalència entre una geometria no euclidiana i una d'euclidiana amb forces universals, no sabem què hi ha darrera de la connexió entre els esdeveniments de, per exemple, al curvatura de les ones electromagnètiques que mostren totes dues teories.

El realisme, és clar, manté que sí és capaç de mostrar perquè es produeixen aquests fets però, tal com hem vist des de la perspectiva convencional es tractaria d'un *apriorisme* epistemològic amb la seva contrapartida ontològica.

---

[144] BRAITHWAITE (1994) p.93-96.

[145] Aquest seria el cas dels models lògics.

[146] Newton reconeixia, en cloure els *Principia* que no podia *simular hipòtesis* quan es tractava d'explicar *per què era possible l'acció a distància*: «Pero hasta el presente no he logrado descubrir la causa de esas propiedades de gravedad a partir de los fenómenos y no finjo hipótesis. Pues todo lo no deducido a partir de los fenómenos ha de llamarse una hipótesis y las hipótesis metafísicas o físicas, ya sean de cualidades ocultas o mecánicas carecen de lugar en la filosofía experimental.» NEWTON(1987) p.621.

En cas que la realitat sigui, per tant, inabastable i la teoria quedi relegada a model dels fenòmens ens veiem abocats a una interpretació *noumènica* de la realitat que la filosofia ha de fer visible.

El paper dels models és entès generalment com una eina d'intel·ligibilitat heurística. Es planteja una *isomorfia estructural* entre dues construccions, ambdues de caràcter "mental"[147], de manera que una d'elles, més familiar o més manipulable, permet comprendre el funcionament de l'altre si més no en els aspectes que la correspondència conserva. Aquesta és un pràctica habitual en matemàtica encara que el terme model sigui només freqüent en l'àmbit més restrictiu de la lògica. En aquests casos els models tenen el paper heurístic de guiar-nos en la descoberta de noves relacions implícites en l'estructura i per tant hom sol plantejar estructures "reals" com a model de construccions teòriques.

Però en el cas de la relativitat el que trobem és que la modelització es dóna *a la inversa*. La geometria no euclidiana esdevindria el model del comportament de determinades entitats físiques i per tant podríem entendre que la teoria matemàtica modelitza la realitat. Es possible que aquest comportament invers estigui en l'origen de la confusió realista, si aquest fos el cas, entre objectes teòrics i reals. Això no vol dir que aquest tipus de vincle entre model matemàtic i realitat sigui un cas excepcional (és, com hem dit, molt habitual en la resolució de problemes) però si que la semblança entre els diferents objectes no acostuma a ser tan gran.

Podem definir la relació entre varietat mètrica (de tipus riemannià) i l'espai-temps tal com ho fa John L. Synge:

> « ... he encunyat el terme *R-món* per referir-me al món *real*, aquest món d'immensa complexitat en què vivim, ens movem i som. Per contrast, tenim diversos *M-mons*, representant la *M* tant la paraula *model* com les *matemàtiques* perquè en la pràctica és impossible descriure un model sense utilitzar algunes matemàtiques.
>
> Suposem que s'usa M_1-món per a designar el model newtonià, i el M_2-món per designar el d'Einstein. Cap aquells és encertat en el sentit que sigui una imatge exacta de l'R-món. Cap M-món pot ser-ho. Però tots dos són bones imatges de certes característiques de l'R-món, mentre que hi ha altres característiques sobre les que cap dels dos pot tractar. Dels dos models, l'M_1-món de Newton és el més versàtil, pot aplicar-se a una gran varietat i problemes de tecnologia, física i astronomia, i amb una gran precisió.
>
> El M_2-món d'Einstein ens condueix a matemàtiques més difícils i per tant és més treballós d'aplicar. Però allà on els dos M-mons s'encavalquen -en aquells problemes que els dos models poden fer prediccions- em sembla que en general s'està d'acord que el M_2-món és millor que el M_1-món. No obstant això, l'elecció és sovint difícil de decidir, perquè, encara que els seus conceptes bàsics són diferents, les seves prediccions concorden tan estretament que és difícil saber quin és el més correcte.»[148]

Podem veure que Synge no entén el món real com a quelcom inabastable de forma complerta sinó que accepta que la modelització comporta una *representació*. En la idea de model que exposa al text hi ha la percepció que aquest és una tria de determinades

[147] En el cas de la modelització dels fenòmens, per tant, cal recordar precisament aquest fet, que els fenòmens són objectes mentals encara que no en siguin productes purs.

[148] SYNGE (1976) p.28-29

característiques del món-en-si. És per això que podem dir que hi ha una relació semblant a la dels models matemàtics donat que la tria representativa de determinats aspectes de la realitat, l'R-món, és també una construcció mental l'estructura del qual el model, al seu torn, mira de representar.

Tot i així tampoc es pot descartar que l'R-món sigui inabastable en conjunt. En certa manera aquesta és una de les possibles lectures del convencionalisme. En postular que tenim dos M-mons equivalents (no els que esmenta el text donat que «*allà on els dos M-mons s'encavalquen ... em sembla que en general s'està d'acord que el M_2-món és millor que el M_1-món»*) empíricament ens mostra la nostra impossibilitat d'arribar a aquells conceptes de l'R-món que hi ha darrera dels fenòmens que modelitzen les nostres teories.

Malgrat això, si en fem la lectura reduccionista, els fenòmens, les dades experimentals, seran explicables per teories empíricament equivalents que faran servir, per mostrar-nos l'estructura de l'R-món, eines diferents i prou. És a dir, el que el reduccionisme predica és que aquelles entitats mútuament incompatibles que apareixen als models poden ser, de fet, purs instruments que ens permetin l'articulació de les característiques que volem representar. En aquest cas podem dir que el paper de les matemàtiques, dels M-mons, és el que predica l'estructuralisme.

Sigui com sigui, si es tracta d'un model per què tendim a considerar que els objectes que fa servir al geometria en descriure la teoria relativista són reals? Es tracta només d'un abús del llenguatge quan el que s'hauria d'afirmar és que rectes i angles no euclidians *corresponen* o *representen* objectes reals? Es tracta només d'un fet tan trivial?

3.3. La síndrome de Pigmalió

L'ús de models teorètics és freqüent en ciència i el trobem documentat a diversos casos. Maxwell, per exemple, exposava en referència al desenvolupament de la teoria electromagnètica que les alternatives no eren suficients:

> «Per tant, el primer procés de l'estudi efectiu de la ciència ha de ser de simplificació i reducció dels resultats de les investigacions prèvies a una forma en que la intel·ligència pugui captar. Els resultats d'aquesta simplificació poden adoptar la forma d'una fórmula purament matemàtica o la d'una hipòtesi física: en el primer cas perdem de vista completament el fenomen a explicar, i, encara que podem seguir les conseqüències d'unes lleis donades no és possible mai arribar a un panorama més ampli de les connexions de l'assumpte; si, per contra, adoptem una hipòtesi física, veiem els fenòmens només mitjançant un medi, i estem exposats a la ceguesa davant dels fets i la pressa en els supòsits que l'explicació parcial tant encoratja. Per tant, hem de descobrir algun mètode d'investigació que permeti a la ment agafar-se en tot moment a una concepció física clara sense comprometre's amb cap teoria fonamentada en la ciència física de la qual es prengui aquesta concepció, de manera que ni es vegi arrossegada lluny de la seva assumpte en persecució de subtileses analítiques ni portada més enllà de la veritat per una hipòtesi favorita.»[149]

De manera que cal una alternativa:

[149] "On Faraday's lines of Force", MAXWELL (1965), vol. I, p. 155-156.

«En referir tot a la idea purament geomètrica del moviment d'un fluid imaginari espero aconseguir generalitat i precisió, i evitar els perills que procedeixen d'una teoria prematura que professi explicar la causa dels fenòmens [...] La substància que aquí tracto [...] no és tan sols un fluid hipotètic que introduís per explicar fenòmens reals: és merament una col·lecció de propietats imaginàries que poden emprar-se per assentar certs teoremes de la matemàtica pura de manera més entenedora per a moltes ments i més aplicable als problemes físics que aquell en què només s'usen símbols algebraics.»[150]

Per tant ens trobem que el model per a Maxwell té la funció de clarificar la concepció física i fer-la *intel·ligible* i *aplicable als problemes* malgrat el seu caràcter imaginari. Aquesta darrera característica sembla que li atorga al model la funció que ja tenia la imatge analògica o bé una certa característica operativa que les expressions formals potser no tinguin.

Destaca, a més, que malgrat que semblava que l'estatut teòric de la geometria era el d'altres entitats matemàtiques com funcions o probabilitats i per tant podríem suposar que correspondria al tipus de model que hem vist abans, podem observar com en realitat es planteja com una cosa diferent. La geometria, podríem dir, exerceix el paper de model teorètic. És a dir, sembla que està d'acord amb el que Synge afirmava en el fragment anterior.

Malgrat tot, la temptació de confondre aquests models com a coses reals és forta i trobem que és fàcil concebre aquests elements com alguna cosa més que «abstraccions matemàtiques»[151] i científics eminents com Lord Kelvin que fan aquest tipus de reflexions:

« Cal no escoltar cap insinuació que hàgim de considerar l'èter lumínífer com una manera ideal d'exposar les coses. Que hi ha una matèria real entre nosaltres i les estrelles més remotes, això és el que crec, i que la llum consisteix en moviments reals de la matèria ... En certs aspectes, coneixem l'èter lumínifer millor que cap altre gènere de matèria: el coneixem per la seva elasticitat, el coneixem pel que fa a la constància de la velocitat de propagació de la llum per a períodes diferents ... L'èter lumínífer ha de ser una substància de la simplicitat més extrema. Podem imaginar com un material la propietat última del qual sigui la de ser incomprensible: tenir una rigidesa definida per les vibracions de temps inferior a un cert límit, i, malgrat tot, posseir el caràcter absolutament dúctil que reconeixem en els cossos semblants a la cera quan la força actua durant un temps suficient.»[152]

Resulta particularment significatiu que el text, on podem veure que el medi a què es referia Maxwell és l'èter, ens mostri com l'*objectivació* del model es fa precisament en una entitat que ha estat descartada per les teories relativistes i les dades experimentals. Es tracta d'una inferència comprensible però, tal com hem vist, equivocada. Synge té una explicació a aquest fenomen, aquest cop amb la teoria encara vigent:

«He presentat els conceptes d'R-món i d'M-món per impedir una bona quantitat de confusió mental. Amb tot, la confusió mental no sempre s'ha de lamentar; per un físic és més estimulant pensar que està atrapant les realitats de l'R-món que condescendir amb

---

[150] MAXWELL (1965) Vol. I, p. 159-160.
[151] Maxwell, per exemple. *Ibid.* Vol. II, p.323.
[152] Sir William Thomson, *Baltimore Lectures.* BLACK (1966) p.223.

> l'exercici intel·lectual de construir un M-món. Per descomptat, quan dóna instruccions per a la construcció de certs aparells, les està donant sobre el comportament de l'R-món. (A l'M-món, els aparells són d'una classe idealitzada molt peculiar.) Llavors, els físics tendeixen molt més a pensar que els seus M-mons són idèntics a l'R-món, i en conjunt això no és del tot dolent. Però sí que és dolent fer-ho inadvertidament. Pot portar a arguments confusos, i és convenient tenir un nom per a aquest tipus de confusió. Li he donat el nom de síndrome de Pigmalió, perquè Pigmalió va esculpir una estàtua d'un realisme tan extraordinari que va començar a viure: l'M-món que es converteix en un R-món en la ment del físic entusiasta.»[153]

L'ús terminològic que propicia el model tal com esmentàvem al títol 3.1 afavoreix aquest tipus de transferència ontològica. Si en una fase primerenca de desenvolupament de la teoria hom es veu abocat a l'ús de conceptes propis del model és natural la identificació que esmenta Synge. Tal com ens diu, cal fer visible aquesta tendència i recordar que, en realitat, es tracta d'una correspondència entre objectes d'àmbits diferents.

[153] SYNGE, *Op. cit.* p.28-29.

V. Conclusions

Hem pogut veure com els conceptes físics associats a l'espai-temps configuren en gran manera la concepció que tenim de la geometria i, per extensió, de les matemàtiques. Però no està clar que la percepció que tenim de les entitats físiques hagi de determinar fins aquest punt el caràcter ontològic dels objectes matemàtics. Aquest tipus d'inferències mostren una perspectiva determinada en relació amb la vinculació de les entitats de la geometria amb el món exterior. D'aquesta manera, en comptes d'il·luminar-nos sobre les raons del nostre èxit en la descripció de món, ens mostren els condicionants i les limitacions del nostre pensament.

Estructuralment, la geometria es fonamenta en una sèrie de definicions que es sostenen mútuament. Hem pogut veure com els conceptes de recta, curvatura i mètrica es defineixen els uns als altres empenyent-nos a triar de manera coordinativa (seguint la denominació de Hans Reichenbach) algun d'ells per a poder definir, a continuació, els altres. Durant el procés de maduració de la teoria que va permetre la depuració dels conceptes i la formulació de les hipòtesis implícites hem pogut aclarir quins aspectes determinen els diferents nivells geomètrics, establint finalment una jerarquia entre els seus aspectes, des del nivell més bàsic i general -el topològic- fins el que requereix més condicions -el mètric. Han calgut vint-i-dos segles per fer-ho.

En aquest desenvolupament també hem guanyat altres eines, com la geometria diferencial i el càlcul tensorial, que han permès el naixement de noves perspectives a l'hora de plantejar-nos la descripció de l'espai. Nous punt de vista que, per exemple, permeten classificar els nivells geomètrics en funció de l'estructura de grups de transformació o la determinació de les propietats d'espais de dimensió superior, sense el recurs a la percepció intuïtiva.

De fet, aquest viatge cap a la formalització ha comportat un abandonament gradual de la intuïció i de la percepció immediata de l'espai. Finalment ens hem vist abocats a plantejar-nos la possibilitat que la geometria no ens parli del món exterior si no és que l'experiència ens garanteixi quin dels diversos models que finalment es van desenvolupar és el que correspon a l'estructura del món dels fenòmens.

Poincaré, però, ens va mostrar que la idea de recórrer a les observacions empíriques podia no ser suficient. No podem conèixer l'estructura geomètrica del món físic perquè les nostres eines de captació de les seves propietats estan subjectes a efectes d'aquest mateix món i perquè les nostres teories per a explicar-lo tenen un alt grau d'immunitat a les dades experimentals, tal com mostra la tesi de Duhem-Quine. Així doncs, podem afirmar, si hi estem d'acord, que continuem ignorants al respecte.

La possibilitat de classificar les geometries a partir dels grups de transformacions va inspirar la idea de fer el mateix amb les lleis de la física. Determinant aquells fenòmens que resisteixen al canvi d'observador podíem trobar un conjunt susceptible de ser el dels efectes físics “reals”. Aquest tipus de classificació ja es feia amb la teoria clàssica de Newton, però no va ser fins que Einstein en va fer una anàlisi més acurada que van aparèixer efectes que havien restat ocults, com el del camp gravitatori sobre la llum.

La distinció entre els sistemes que mantenen determinades magnituds invariants i els que mostren efectes diferents permetia, de bon principi, una classificació entre observadors que la relativitat va distingir en dos àmbits. Per una banda el de les referències inercials, que podem detectar pel caràcter invariant de les seves mesures de distància espaciotemporal, i per l’altra el dels sistemes mútuament accelerats -o no inercials- que conserven de manera covariant determinades lleis com són les descrites per la teoria general.

En aquesta característica hi juga un paper essencial el principi d’equivalència, que constata la possibilitat que allò que un observador entén com a moviment accelerat un altre ho pot considerar subjecte a un camp gravitatori. Les conseqüències d’aquest principi porten a considerar que la geometria que cal emprar és no euclidiana i que cal, per tant, l’ús d’eines que siguin compatibles amb ella.

Més enllà de les condicions formals, podem reconèixer que l’ús d’aquest model geomètric pot ser entès de dues maneres diferents. Per una banda podem afirmar que l’estructura no euclidiana és la imprescindible per a la descripció de les lleis físiques, perquè aquesta és l’estructura espaciotemporal del món. Recuperaríem, així, la possibilitat de vincular geometria amb fenòmens i introduiríem un element de reflexió més sobre la naturalesa de la matemàtica. Hem vist que aquesta perspectiva és defensada atenent a criteris metodològics o formals que amaguen, en realitat, consideracions ontològiques de partida que s’acosten al pitagorisme. És un punt de vista lícit, comprensible i habitual entre els científics, però sembla que peca d’una certa falta d’esperit crític.

Podem, si així ho volem, optar per la idea que la geometria que fa servir la teoria relativista no és l’única possible tot i que sí la més convenient. Podríem reconstruir la teoria afegint les correccions que calgués per fer que la geometria emprada fos euclidiana. Si bé aquest fet podria complicar la seva manipulació i per tant hi renunciem, l’existència d’aquesta possibilitat ens fa dubtar sobre l’estatut ontològic de la geometria relativista.

Tot això ens mostra una propietat incòmoda de les teories científiques: la infradeterminació de les dades. Fins i tot en cas de superar els arguments clàssics sobre la falibilitat de les nostres percepcions i el caràcter contingent de les nostres lleis ens quedaria la tasca de resoldre la possibilitat enutjosa que dues teories clarament diferents tinguin, expliquin i pronostiquin els mateixos resultats empírics. L’obediència a les dades, a les aportacions de l’experiència, és una característica de la ciència; però el que la infradeterminació ens mostra és que no n’hi ha prou. Hi ha d’haver altres consideracions per triar una teoria o una altra.

Tenim la possibilitat de dissoldre aquest inconvenient si considerem aquestes teories només diferents en aparença i afirmem, en canvi, que es tracta de diferents maneres de dir el mateix en la mesura que allò que es pot contrastar -les dades empíriques- ofereix els mateixos resultats. Aquesta és l’opció del reduccionisme però, tal com hem vist, comporta una renúncia a la comprensió, a la intel·ligibilitat del món, que resulta poc convincent.

En cas que el convencionalisme tingui raó i que la tria d'un model geomètric només respongui a criteris de conveniència, les crítiques es centren en la naturalesa d'aquests criteris. Com ho hem de fer per triar? Per què la tria fins ara ha mostrat un èxit considerable? Una visió que ajusti les seves afirmacions a la condició de la geometria pot entendre que quan triem per "conveniència", no vol dir que ho fem per "convenció", abocant-nos al relativisme epistemològic, ni "arbitràriament", duent-nos a l'escepticisme.

Malgrat que les formes més generals de convencionalisme afirmen que el criteri no hi és, el que defensem aquí és que podem entendre que el caràcter mètric de la geometria és inabastable sense deixar-nos en mans del caprici. Es poden establir criteris per a la tria entre teories empíricament equivalents que ofereixin un suport cognitiu més sòlid que l'arbitrarietat més enllà de les dades.

Hem vist, però, que els criteris formals que hom sol trobar tenen alguns inconvenients. L'apel·lació a la simplicitat o a la plausibilitat peca d'ambigüitat o pateix l'inconvenient dels pressupòsits ontològics. Ens resta com a opció el caràcter explicatiu de la teoria en la mesura que sigui capaç de proposar nous resultats i noves experiències. Aquest és el tipus d'elements que destaca la història de la ciència en el desenvolupament de les teories que han tingut èxit en el passat. No podem, per tant, ignorar-los com a criteris.

Si acceptem que el convencionalisme, com a tesi epistemològica, ha resistit les crítiques i que encara conserva la vigència amb què va néixer, podem preguntar-nos quin tipus de consideracions ontològiques porta associades.

En revisar els llocs comuns de les discussions sobre l'existència de l'espai-temps i els seus components trobem que les posicions tradicionals en conflicte no són incompatibles amb el convencionalisme en funció de la lectura que se'n faci. Una perspectiva que es limiti a constatar la impossibilitat d'accedir a l'estructura mètrica de l'espai-temps però que no faci cap tipus d'afirmació sobre la seva existència, no entra en contradicció amb la visió substancialista ni tampoc amb la relacionista, de manera que no podem establir un vincle amb cap tipus de posició preestablerta.

Però, òbviament, sí que ho fa en cas que es proposi una causa per a aquesta ignorància. Si, tal com hem vist, hom afirma que el caràcter mètric de l'espai-temps és inaccessible perquè no existeix, ha de veure com es relaciona amb les altres perspectives.

Altres consideracions ontològiques com el concepte de simultaneïtat o la possibilitat d'establir una estructura causal de l'espai-temps poden tenir alguna vinculació amb el convencionalisme en la mesura que afecten l'estructura topològica de la realitat, que recordem que constitueix el nivell més fonamental d'estructura geomètrica, i sobre la que no es formula cap hipòtesi. Però en cas que, per exemple, l'espai-temps presenti una estructura topològicament patològica (com pot ser la possibilitat d'un tancament en les cadenes de causa-efecte) les conseqüències empíriques escaparien a la capacitat de compensació de les teories i no podríem d'apel·lar a la conveniència per triar-les.

El resultat més significatiu de la consideració d'una geometria convencionalista és el que afecta al caràcter ontològic de les entitats geomètriques. Per una banda, es descarta la possibilitat que parlar d'una geometria física tingui algun contingut més fort que el simple enunciat de la geometria triada.

Descartada la possibilitat d'una revisió del caràcter transcendental de la geometria euclidiana podríem, però, plantejar una versió més bàsica en referir-nos, per exemple, a les afirmacions i l'estructura de la geometria absoluta. Tot i així, altres consideracions teòriques fan de la possibilitat d'una revifalla d'aquesta visió neokantiana poc atractiva, per obsoleta.

Si, tal com hem vist abans, ens disposem a negar l'existència objectiva de la mètrica, ens queda, com a opció natural, el recurs al caràcter de model de la geometria.

En tractar-se d'una estructura conceptual, no es tractaria pas d'un model analògic, que operés en funció de les similituds, però tampoc, és clar, d'un model lògic, que oferís un contingut semàntic a la realitat. Sembla, més aviat, que li correspon el caràcter d'un model teorètic que, en ser més ben conegut que la realitat a modelitzar, ens ofereix un coneixement més profund de l'estructura de l'espai-temps a la qual correspon. Diem doncs que la geometria no euclidiana és un bon model per a la descripció dels esdeveniments de la teoria relativista i en ser-ho ens mostra detalls ocults de la relació dels elements físics que la composen. L'èxit d'aquesta correspondència entre els elements geomètrics i les entitats físiques que descriuen ens ha fascinat tant que ens ha dut a confondre model i realitat i a assegurar, per tant, que els objectes matemàtics que componen la teoria són reals.

El professor Vollmer finalitzava la seva ponència oferint, malgrat el caràcter obert de la seva pregunta, algunes conclusions. Afirmava que les matemàtiques encaixaven amb la natura perquè, entre d'altres afirmacions:

- la matemàtica és una ciència estructural
- la natura és estructurada i comprensible.

El convencionalisme subscriuria sense problemes la primera afirmació, però trobaria molt agosarat afirmar res sobre la natura. Al cap i a la fi, no entra dins les atribucions de la matemàtica fer afirmacions sobre l'existència del món.

Bibliografia i obra citada.

ARISTÒTIL (1998). *Física.* Guillermo R. De Echandía (trad.), Madrid: Gredos.

ARISTÒTIL (1994). *Metafísica.* Tomás Calvo Martínez (trad.), Madrid: Gredos.

ARISTÒTIL (1976). *Obras.* Francisco de P. Samaranch (ed.), Madrid: Aguilar.

BALZER, Wolfgang (1997). *Teorías empíricas: modelos, estructuras y ejemplos.* Agustín González Ruiz (ed.), Madrid: Alianza.

BLACK, Max (1966). *Modelos y metáforas.* Víctor Sánchez de Zavala (trad.), Madrid: Tecnos.

BONOLA, Roberto (1955). *Geometry. A critical and historical study of its development..* H.S. Carslaw (trad.), New York: Dover.

BOYER, Carl B. (2001). *Historia de la matemática.* Mariano Martínez Pérez (ed.), Madrid: Alianza.

BRAITHWAITE, Richard B. (1994). *The scientific explanation.* Bristol: Cambridge University Press.

CALA VITERY, Favio Ernesto (2006). *De la relatividad de la Inercia a la Geometrodinámica Intrínseca: Una interpretacion Relacional del Espacio-Tiempo* [en línia]. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona. Departament de Filosofia. <http://www.tdx.cat/TDX-0223107-153847>.

CARMO, Manfredo P. do (1990). *Geometria diferencial de curvas y superficies.* José Claudio Sabina de Lis (trad.), Madrid: Alianza.

EARMAN, John (1989). *World-Enough and Space-Time.* Cambridge, Ma.: MIT Press.

EARMAN, John; GLYMOUR, Clark; STACHEL, John (eds.) (1977). *Foundations of space-time theories.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

EINSTEIN, Albert (1998). *La teoria de la relativitat i altres textos.* Xavier Roqué (trad.), Barcelona: IEC/Eumo/Pòrtic.

EINSTEIN, Albert (2005). *El significado de la relatividad.* Carlos E. Prélat (trad.), Madrid: Espasa-Calpe.

EINSTEIN, Albert (1918). «Principles of General Relativity». *Annalen Physik Leipzig,* 55, p. 241-245.

EINSTEIN, Albert; LORENTZ, Hendrik et al. (1952). *The Principle of Relativity.* W. Perrett and B.Jeffery (trad.), New York: Dover.

EINSTEIN, Albert; GRÜNBAUM, Adolf et al. (1973). *La teoria de la relatividad.* L. Pearce Williams (ed.), Miguel Paredes Larrucea (trad.), Madrid: Alianza Universidad.

EUCLIDES (1956). *The Thirteen Books the Elements.* Thomas L. Heath (trad.), New York: Dover.

EWALD, William (ed.) (1996). *From Kant to Hilbert : a source book in the foundations of mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

FIELD, Hartry H. (1980). *Science without numbers.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

FRIEDMAN, Michael (1991). *Fundamentos de las teorías del espacio-tiempo.* Luis Bou (trad.), Madrid: Alianza Universidad.

GALILEU GALILEI (1994). *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano.* Antonio Beltrán Marí (ed.), Madrid: Alianza.

GEROCH, Robert (1985). *La relatividad general (de la A a la B).* Nicolás Agrait de la Puente (trad.), Madrid: Alianza.

GLYMOUR, Clark (1980). *Theory and evidence.* Princeton: Princeton University Press.

GLYMOUR, Clark (1971). «Theoretical Realism and Theoretical Equivalence». *Boston Studies in the Philosophy of Science. Biennial Meeting (1970 : Boston)*, 8, p. 275-288.

GÖDEL, Kurt (1981). *Obras completas.* Jesús Mosterín (trad.), Madrid: Alianza.

GÓMEZ PIN, Victor (1999). *La tentación pitagórica. Ambición filosófica y anclaje matemático.* Madrid: Síntesis.

GÓMEZ PIN, Victor (ed.) (2000). *Ontology Studies - Cuadernos de Ontologia. Vol 1.* San Sebastián: III international Ontology Congress.

GRAVES, John C. (1971). *The Conceptual Foundations of General Relativity Theory.* Cambridge, Ma.: MIT Press.

GRÜNBAUM, Adolf (1973). *Philosophical Problems of Space and Time.* Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (ed.), Dordrecht: Reidel Publishing.

HILBERT, David (1971). *Foundations of Geometry.* Leo Unger (trad.), La Salle, Il.: Open Court Publishing.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, Stephan (1952). *Geometry and the Imagination.* P. Nemenyi (trad.), New York: Chelsea Publishing.

HUTTEN, E. H. (1953). «The Rôle of Models i Physics». *The British Journal for the Philosophy of Science*, IV, p. 284-301.

KLINE, Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

KUHN, Thomas S. (1975). *La estructura de las revoluciones científicas.* Agustín Contín (trad.), Madrid: Fondo de Cultura Económica.

LAKATOS, Imre (1993). *La metodología de los programas de investigación científica.* Juan Carlos Zapatero (ed.), Madrid: Alianza Universidad.

LEATHERDALE, W.H. (1974). *The Role of Analogy, Model and Metaphor in Science.* Amsterdam: North-Holland Publishing.

MACH, Ernst (1974). *The Science of Mechanics.* La Salle, Il.: Open Court Publishing.

MACH, Ernst (1960). *Space and Geometry.* La Salle, Il.: Open Court Publishing.

MAXWELL, James Clerk (1965). *The Scientific Papers.* W.D. Niven (ed.), New York: Dover.

MILL, John Stuart (1981). *A System of Logic Ratiocinative and Inductive.* J. M. Robson (ed.), Toronto: University of Toronto Press.

NEWTON, Isaac (1987). *Principios matemáticos de filosofia natural.* Antonio Escohotado (ed.), Madrid: Tecnos.

NORTON, John D. (1994). «Why Geometry is not Conventional». *Semantical Aspects of Spacetime Theories*, , p. 159-67.

POINCARE, Henri (1968). *La science et l'hypothèse.* Paris: Flammarion.

PUTNAM, H. (1967). «Time and Physical Geometry». *The Journal of Philosophy*, 64, p. 240-247.

QUINE, Willard O. (1968). *Palabra y Objeto.* Manuel Sacristán (trad.), Madrid: Labor.

QUINE, W.V. (1970). «On the Reasons for Indeterminacy of Translation». *The Journal of Philosophy*, 67, p. 178-183.

QUINE, Willard O. (1971). *From a logical point of view.* Cambridge, Ma.: Harvard University Press.

QUINE, Willard O. (1986). *La relatividad ontológica y otros ensayos.* Manuel Garrido, Josep Ll. Blasco (trad.), Madrid: Tecnos.

RADA, Eloy (ed.) (1980). *La Polémica Leibniz-Clarke.* Madrid: Taurus.

RAE, Alastair I. M. (1998). *Física cuántica: ¿ilusión o realidad?.* Miguel Ferrero Melgar (ed.), Madrid: Alianza.

RAY, Christofer (1991). *Time, Space and Philosophy.* London: Routledge.

RIETDIJK, C. (1966). «A Rigorous Proof of Determinism form the Special Theory of Relativity». *Philosophy of Science*, 33, p. 341-344.

REICHENBACH, Hans (1938). *Experience and Prediction.* Chicago: University of Chicago Press.

REICHENBACH, Hans (1957). *The Philosophy of Space and Time.* Maria Reichenbach and John Freund (trad.), New York: Dover.

SANCHEZ RON, José Manuel (1985). *El origen y desarrollo de la relatividad.* Madrid: Alianza.

SÁNCHEZ RON, José Manuel (1992). *Espacio-tiempo y átomos: relatividad y mecánica cuántica.* Madrid: Akal.

SHAPIRO, Stewart (1983). «Mathematics and Reality». *Philosophy of Science*, 50, p. 523-548.

SKLAR, Lawrence (1994). *Filosofia de la Física.* Rosa Alvarez Ulloa (trad.), Madrid: Alianza Universidad.

SKLAR, Lawrence (1985). *Philosophy and Spacetime Physic.* Berkeley, LA: Universtiy of California Press.

SKLAR, Lawrence (1977). *Space, time and spacetime.* Berkeley, LA: Universtiy of California Press.

SMITH, David Eugene (1959). *A Source Book in Mathematics.* New York: Dover.

SUPPES, Patrick (ed.) (1973). *Space, Time and Geometry.* Dordrecht: Reidel Publishing.

SYNGE, John L. (1976). *Hablando de la relatividad.* Angel Montesinos (trad.), Pamplona: Eunsa.

TORRETTI, Roberto (1984). *The Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré.* Dordrecht: Reidel Publishing.

VAN FRAASEN, Bas (1985). *An Introduction to the Philosophy of Time and Space.* New York: Columbia University Press.

WARTOFSKY, Marx W. (1979). *Models. Representations and the Scientific Understanding.* Dordrecht: Reidel Publishing.

XAMBÓ I DESCAMPS, Sebastià (1983). «Geometria no euclidiana: d'Euclides a Gauss». *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques*, 14, p. 64-97.